

4.2 Feder-Masse-Pendel induktiv

Untersuchungen am Feder-Masse-Pendel – In diesem Abschnitt werden die Gesetzmäßigkeiten einer Schwingung genauer untersucht. Als eine charakteristische Größe einer Schwingung wurde im vorigen Abschnitt die Periodendauer T bereits thematisiert. Sie beschreibt, welche Zeit ein schwingungsfähiges System

für eine vollständige Schwingung benötigt. Von welchen Faktoren die Schwingungsdauer abhängt, wurde allerdings noch nicht betrachtet. Als erstes Schwingungssystem wird in Versuch **V1** ein Feder-Masse-Pendel verwendet. Es wird **induktiv** untersucht, welche Größen eine Auswirkung auf die Periodendauer des Pendels haben.

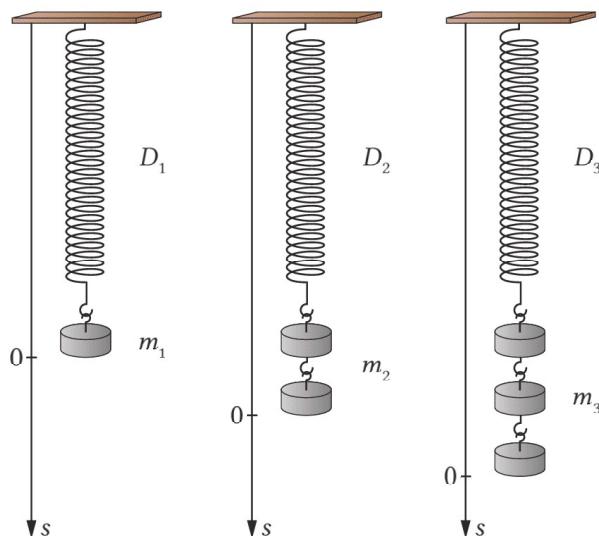
V1 Abhängigkeiten der Schwingungsdauer

In diesem Experiment wird die Abhängigkeit der Periodendauer T eines Feder-Masse-Pendels von verschiedenen physikalischen Größen untersucht. Das Feder-Masse-Pendel wird so am Stativmaterial befestigt, dass es frei im Raum schwingen kann. Mit diesem Versuchaufbau kann gezielt die Abhängigkeit der Periodendauer von *einem* Versuchsparameter, der variiert wird, untersucht werden; die anderen Parameter bleiben jeweils konstant. In drei Teilversuchen wird jeweils der Einfluss

- a) der Amplitude,
- b) der angehängten Masse und
- c) der Federkonstanten der verwendeten Feder

auf die Periodendauer untersucht.

Für die Durchführung der Teilversuche werden daher verschiedene Federn mit unterschiedlicher Federkonstante und Massestücke benötigt, mit denen die Gesamtmasse des Pendels verändert werden kann.



B1 Feder-Masse-Pendel mit drei unterschiedlichen Massen und drei unterschiedlichen Federkonstanten

a) Im ersten Versuch wird die Auswirkung der Ausgangsauslenkung s auf die Periodendauer eines Feder-Masse-Pendels gemessen. Dazu wird eine Feder (Federkonstante $D = 9 \frac{N}{m}$) verwendet. Die Masse ($0,15 \text{ kg}$) wird konstant gehalten, die Amplitude A wird variiert. Messergebnisse:

$A \text{ in m}$	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
$T \text{ in s}$	0,75	0,73	0,77	0,73	0,76

T1 Variation der Auslenkung

b) An eine Feder mit fester Federkonstante ($D = 9 \frac{N}{m}$) werden unterschiedliche Massen angehängt und die Periodendauer wird jeweils bei annähernd gleicher Auslenkung gemessen.

Messergebnisse:

$m \text{ in kg}$	0,050	0,10	0,15	0,20	0,25
$T \text{ in s}$	0,52	0,72	0,88	1,00	1,12
$\frac{T}{\sqrt{m}}$	2,31	2,29	2,27	2,23	2,23

T2 Variation der Masse

c) Im dritten Versuch werden verschiedene Federn mit unterschiedlicher Federkonstante verwendet. Die Masse ($0,15 \text{ kg}$) und die Auslenkung werden konstant gehalten.

Messergebnisse:

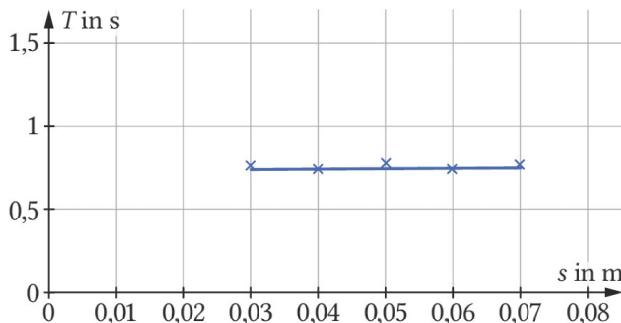
$D \text{ in } \frac{N}{m}$	5	9	16	25
$T \text{ in s}$	1,22	0,88	0,63	0,57
$T \cdot \sqrt{D}$	2,7	2,6	2,5	2,9

T3 Variation der Federkonstanten

Hinweis: Die jeweils 3. Zeile in Versuch b) und c) wird im Zuge der weiteren Auswertung benötigt und ist aus den gemessenen Größen errechnet.

Auswertung von Versuch V1 – Die Messwerte von Versuch V1 werden grafisch dargestellt und anschließend mit Hilfe von **Regressionsanalysen** (WTR) ausgewertet, um einen mathematischen Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen zu erhalten.

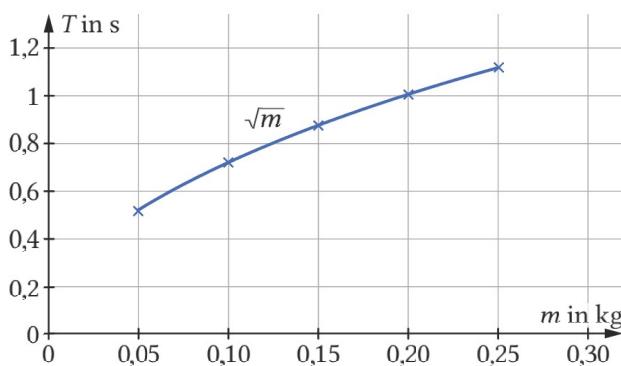
a) Die Messwerte in Tabelle T1 ergeben folgende grafische Darstellung:



B1 Periodendauer T in Abhängigkeit von der Amplitude A

Die Messwerte zeigen, dass eine größere Amplitude nicht zu einer Veränderung der Periodendauer führt. Das bedeutet, dass sich die Periodendauer des Feder-Masse-Pendels nicht verändert, egal wie stark das Pendel ausgelenkt wird. Die Periodendauer ist demnach unabhängig von der Amplitude des Pendels.

b) Die Messwerte in Tabelle T2 ergeben folgende grafische Darstellung:



B2 Periodendauer T in Abhängigkeit von der Masse m

Anhand des abgebildeten Graphen auf einen mathematischen Zusammenhang zu schließen, ist in diesem Beispiel nicht ganz so einfach, wie es vielleicht bei anderen im Unterricht behandelten physikalischen Zusammenhängen der Fall gewesen ist. In dem hier vorliegenden Fall lassen sich die Daten gut mit einer Wurzelfunktion beschreiben.

Als Regressionsmodell (WTR) ist dafür eine Potenzfunktion zu wählen, da $x^{0,5} = \sqrt{x}$ gilt.
Eine entsprechende Regression ergibt:

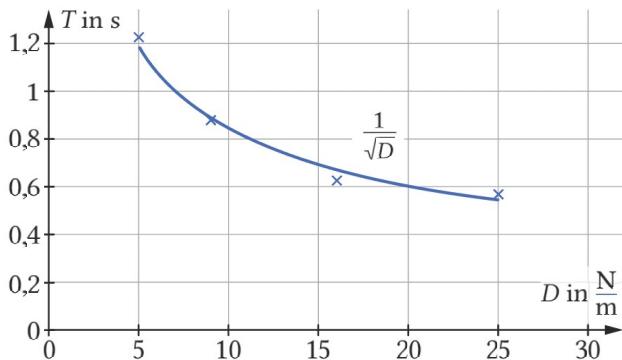
$$y \approx 2,16 \cdot x^{0,48}.$$

Der Exponent legt einen proportionalen Zusammenhang zur Quadratwurzel der Masse m nahe, auch wenn eine gewisse Abweichung vorliegt (siehe **Exkurs** Seite 121). Alternativ kann auch der Quotient $\frac{T}{\sqrt{m}}$ gebildet und die Quotientengleichheit geprüft werden (siehe Tabelle T2, dritte Zeile). Die Quotienten streuen nur leicht, weisen also auf die Proportionalität $T \sim \sqrt{m}$ hin.

Beim Übertragen auf den physikalischen Zusammenhang muss die Einheit des Proportionalitätsfaktors in der Gleichung ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, dass auch die Einheit der Masse unter der Quadratwurzel steht:

$$T(m) \approx 2,16 \frac{s}{\sqrt{kg}} \cdot m^{0,48} \approx k_1 \cdot \sqrt{m}.$$

c) Die Messwerte in Tabelle T3 ergeben die folgende grafische Darstellung:



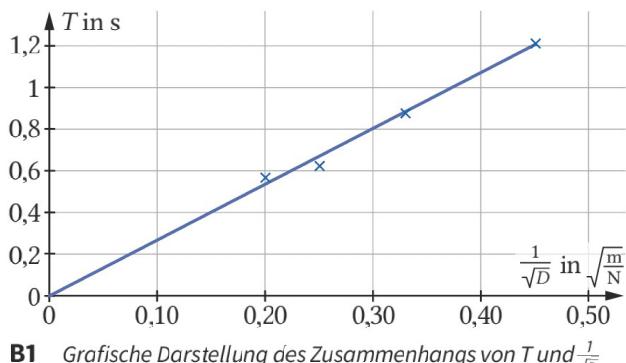
B3 Periodendauer T in Abhängigkeit von der Federkonstanten D

Ähnlich zum vorherigen Graphen ist auch hier der mathematische Zusammenhang zwischen T und D nicht unmittelbar erkennbar. Wählt man auch hier eine Potenzfunktion als Regressionsmodell (WTR), ergibt sich folgender funktionaler Zusammenhang:

$$y \approx 2,6 \cdot x^{-0,49}.$$

Das Ergebnis der Regression legt den Zusammenhang $y \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ nahe. Im Falle einer solchen umgekehrten Proportionalität von T zu $\frac{1}{\sqrt{D}}$ sollte zwischen T und \sqrt{D} Produktgleichheit vorliegen. Sie wird in Tabelle T3, Zeile 3, überprüft.

Aufgrund der größeren Streuung der Messwerte empfiehlt es sich, eine Linearisierung durchzuführen und zu überprüfen, ob eine Ursprungsgleichung vorliegt. Diagramm **B1** zeigt die linearisierten Werte von T und D . Es ist eine Ursprungsgleichung mit geringer Abweichung einzelner Messwerte erkennbar, die den vermuteten Zusammenhang zwischen T und D stützt.



B1 Grafische Darstellung des Zusammenhangs von T und $\frac{1}{\sqrt{D}}$

Überträgt man den funktionalen Zusammenhang der Regressionsanalyse auf den physikalischen Sachverhalt, gilt es, wie im vorherigen Beispiel, die Einheiten der Konstanten zu beachten. Es ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$T(D) \approx 2,6 \cdot \sqrt{\frac{s^2 \cdot m}{N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D}}$$

Anhand der bisherigen Untersuchung am Feder-Masse-Pendel lassen sich folgende Zusammenhänge ermitteln:

$$T \sim \sqrt{m} \quad \text{und} \quad T \sim \frac{1}{\sqrt{D}},$$

woraus folgt:

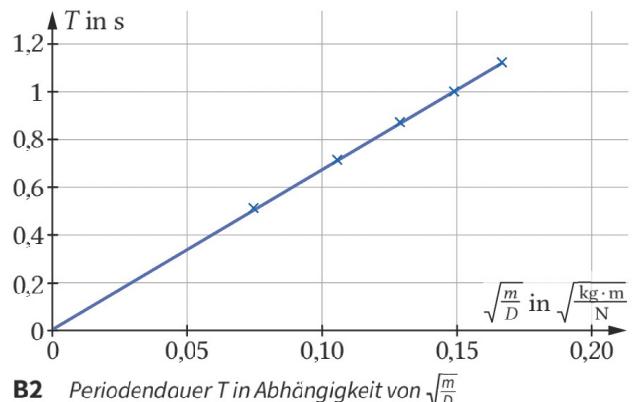
$$T \sim \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Um aus der Proportionalität eine Gleichung mit Proportionalitätsfaktor zu erhalten, führen wir ein letztes Mal eine Regressionsanalyse (WTR) durch, in der wir den linearen Zusammenhang von T zu $\sqrt{\frac{m}{D}}$ untersuchen. Dazu errechnen wir in Tabelle **T1** mit Hilfe von Tabelle **T2** auf Seite 118 die Werte für $\sqrt{\frac{m}{D}}$ und verwenden die in Versuch **V1b** gemessenen Werte für T .

m in kg	0,050	0,10	0,15	0,20	0,25
T in s	0,52	0,72	0,88	1,00	1,12
$\sqrt{\frac{m}{D}}$	0,075	0,11	0,13	0,15	0,17

T1 Werte zum Zusammenhang zwischen T und $\sqrt{\frac{m}{D}}$

Mit Hilfe von Tabelle **T1** erhalten wir Bild **B2**.



B2 Periodendauer T in Abhängigkeit von $\sqrt{\frac{m}{D}}$

Die Regressionsrechnung ergibt unter Verwendung des linearen Modells folgendes Ergebnis:

$$y \approx 6,4x - 0,033.$$

Übertragen wir dieses Ergebnis auf den physikalischen Zusammenhang, erhalten wird abschließend:

$$T(m, D) \approx 6,4 \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

Die Proportionalitätskonstante ist dimensionslos, da sich nach Umformung von $\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}$ die Einheit Sekunde ergibt.

Eine theoretische Herleitung der Gleichung auf Seite 123 zeigt, dass die experimentell bestimmte Proportionalitätskonstante dem Faktor 2π entspricht.

Zusammenfassend ergibt sich die folgende Gleichung für den Zusammenhang zwischen der Periodendauer T , der Masse m und der Federkonstanten D :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

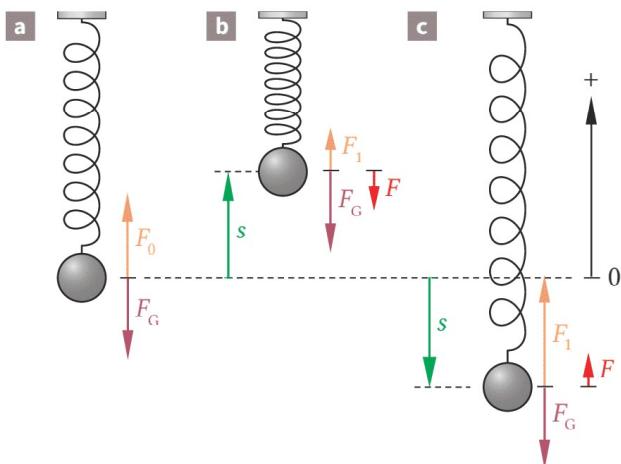
! Merksatz

Die Periodendauer eines Feder-Masse-Pendels ist proportional zur Quadratwurzel der Masse m des Pendels und umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Federkonstanten D .

Eine Veränderung der Amplitude der Federschwingung hat dagegen keinen Einfluss auf die Periodendauer.

Es lässt sich folgender funktionaler Zusammenhang herstellen:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}.$$



B3 Betrachtung verschiedener Auslenkungen und der wirkenden Kräfte an einem Feder-Masse-Pendel a) in der Ruhelage; b) die Gewichtskraft überwiegt; c) die Spannkraft überwiegt

Kräftebetrachtung – Bild B3 zeigt Momentaufnahmen der Schwingung eines Feder-Masse-Pendels :
a) Beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage hebt die nach oben gerichtete (positive) Zugkraft F_0 der Feder die nach unten gerichtete (negative) Gewichtskraft F_G gerade auf: $F_G = -F_0$ (Bild B3a). Also ist die Rückstellkraft

$$F_R = F_G + F_0 = 0.$$

b) Bei einer Auslenkung des Körpers um $s > 0$ nach oben verringert sich die Zugkraft der Feder auf $F_1 = F_0 - D \cdot s$, also um den Anteil, um den die Feder nun weniger gedehnt ist. Jetzt überwiegt die Gewichtskraft; d.h. die Rückstellkraft ist nach unten gerichtet (Bild B3b):

$$F_R = F_G + F_1 = F_G + F_0 - D \cdot s = 0 - D \cdot s = -D \cdot s < 0.$$

c) Bei einer Auslenkung des Körpers um $s < 0$ nach unten vergrößert sich die Zugkraft der Feder auf $F_1 = F_0 - D \cdot s$ ($-D \cdot s > 0$ wegen $s < 0$). Es überwiegt jetzt die Federkraft und die Rückstellkraft nach oben ist (Bild B3c):

$$F_R = F_G + F_1 = F_G + F_0 - D \cdot s = 0 - D \cdot s = -D \cdot s > 0.$$

Die Rückstellkraft F_R ist also proportional zur Auslenkung s . Es gilt das **Auslenkungs-Kraft-Gesetz** $F_R = -D \cdot s$ mit der Federkonstanten D . Das Minuszeichen zeigt dabei an, dass die Rückstellkraft F_R immer entgegen gesetzt zur momentanen Auslenkung s (also immer zur Ruhelage hin) zeigt.

Eine Rückstellkraft F_R , die proportional zur Auslenkung s ist, gibt es auch bei anderen schwingenden Systemen, z.B. dem Fadenpendel (bei kleinen Amplituden). Deshalb nennt man den Proportionalitätsfaktor D allgemein **Richtgröße des Systems**.

Exkurs: Korrektur der Masse

Die Experimente mit dem Feder-Masse-Pendel im vorigen Teil des Kapitels wurden mit relativ hoher angehängter Masse m (im Vergleich zur Masse der Feder m_F selbst) durchgeführt. Die Masse der Feder blieb dabei unberücksichtigt.

Bei einer Versuchsdurchführung mit weniger angehängten Massestücken lässt sich erkennen, dass die Abweichung der Messergebnisse zu dem beschriebenen funktionalen Zusammenhang größer wird. Mit Hilfe eines Korrekturterms kann der Masse der Feder Rechnung getragen werden. Dazu wird die Gesamtmasse des Feder-Masse-Pendels ersetzt durch:

$$m_{\text{gesamt}} = m + \frac{m_F}{3}.$$

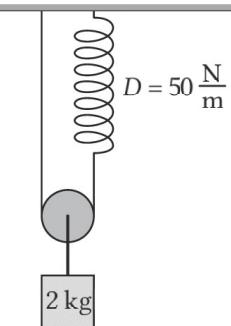
Die abgeänderten Gleichungen lauten dann:

$$T \sim \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad T \sim \sqrt{m + \frac{m_F}{3}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_F}{3}}{D}}.$$

Lösen Sie selbst

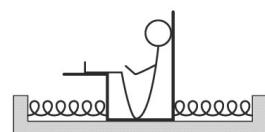
- 1** Berechnen Sie die Frequenz der Schwingung. Reibung sowie Massen von Feder und Rolle können vernachlässigt werden.

Begründen Sie, dass der 2-kg-Körper in der Grafik nach einer vertikalen Auslenkung harmonisch schwingt.

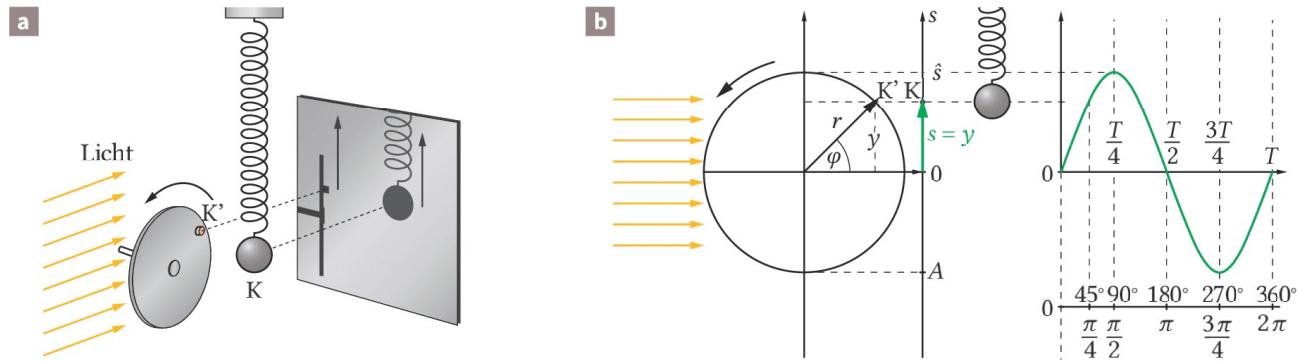


- 2** Ein Astronaut möchte seine Masse bestimmen. Dazu setzt er sich auf einen Stuhl (siehe unten) der Masse $m = 10 \text{ kg}$, der zwischen 2 Federn horizontal eingespannt ist. Diese Anordnung schwingt harmonisch mit einer Richtgröße $D = 840 \text{ Nm}^{-1}$. Wir vernachlässigen der Einfachheit halber die Reibung und die Federmassen. Beim „Wiegen“ misst der Astronaut für 5 Schwingungsdurchläufe eine Zeit von $10,0 \text{ s}$ bei einer Amplitude von $\hat{s} = 50 \text{ cm}$.

- a) Berechnen Sie die Masse des Astronauten.
b) Zeichnen Sie ein $s-t$ -Diagramm für die ersten 4 s der Messung.



4.3 Feder-Masse-Pendel deduktiv



- B1** a) Der Schatten des auf einem Kreis umlaufenden Körpers K' hat die gleiche Höhe wie der des Körpers K des Federpendels.
b) Die Projektion der Kreisbewegung und der Schwingung des Pendels lassen sich als Sinuskurve darstellen.

Schwingung und Kreisbewegung – Bild B1a zeigt einen Korken K' an einem rotierenden Plattenteller. Die Rotation wird dabei so eingestellt, dass die Umlaufdauer des Korkens genau der Periodendauer des Pendels entspricht. Betrachtet man die Projektion des Korkens in seitlich einfallendem Licht, erkennt man einen vertikalen Schatten, der sich bei der Rotation der Scheibe auf und ab bewegt.

Die Kugel K des Federpendels befindet sich in ihrer Ruhelage in Höhe der Drehachse. Sie wird nach unten um die Strecke ausgelenkt, die dem Radius des Kreises entspricht, der vom Korken durchlaufen wird. Wird die Kugel K in dem Moment freigegeben, in dem der Korken den tiefsten Punkt erreicht, so stimmen die Schattenbewegungen der Körper K' und K eine Zeit lang überein, sie befinden sich stets auf gleicher Höhe.

Aus der Projektion der Kreisbewegung lässt sich eine Sinuskurve gewinnen. Dies kann man an den Schattenbewegungen erkennen (Bild B1b). Während sich der Korken K' auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt, pendelt die Kugel K auf der s -Achse um ihre Gleichgewichtslage ($s = 0$). Die y -Koordinate von K' stimmt dabei in jedem Moment mit der Auslenkung s von K überein. Also ist

$$s = y = r \cdot \sin(\varphi) \text{ mit der Amplitude } \hat{s} = r.$$

Hierbei ist $s = s(t)$ die Auslenkung zum Zeitpunkt t . $\varphi = \varphi(t)$ gibt den Winkel φ zu diesem Zeitpunkt an. Man nennt $\varphi(t)$ den **Phasenwinkel** oder (kurz) die **Phase** der Schwingung zur Zeit t (φ wird üblicherweise im Bogenmaß angegeben). Diese Größen werden durch die Stellung des **Zeigers** in Bild B1b erfasst.

Startet man eine Uhr in dem Augenblick, in dem sich die Kugel und der Korken in Phase durch die Ruhelage nach oben bewegen, also zum Zeitpunkt $t = 0$, dann ist die Phase $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(t) \sim t$. In gleichen Zeitintervallen nimmt also auch der Phasenwinkel φ immer um den gleichen Betrag zu.

Die Zunahme des Winkels mit der Zeit ist durch die **Winkelgeschwindigkeit** $\omega = \frac{\varphi}{t}$ gekennzeichnet, mit der der Zeiger rotiert. Für den Phasenwinkel gilt also $\varphi = \omega \cdot t$. Setzt man dies in die vorherige Gleichung ein, erhält man für die Federschwingung den Zusammenhang:

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\varphi) = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Zur Messung von ω nutzt man die Periodendauer T , welche die Zeittafel einer vollständigen Schwingungsperiode, also einer ganzen Zeigerumdrehung, angibt. In dieser Zeit T überstreicht der Zeiger den Winkel $\varphi = 2\pi$ (Bogenmaß). Der Zeiger hat sich somit einmal gedreht. Daraus erhält man die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\varphi}{T} = \frac{2\pi}{T}$. Mit der Frequenz $f = \frac{1}{T}$ folgt:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

! Merksatz

Beim Feder-Masse-Pendel kann die Schwingung

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

des Pendelkörpers durch einen rotierenden Zeiger beschrieben werden (Zeigerdarstellung).

Die Winkelgeschwindigkeit des Zeigers ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, seine Länge ist \hat{s} und sein Phasenwinkel zum Zeitpunkt t ist $\varphi(t) = \omega \cdot t$.