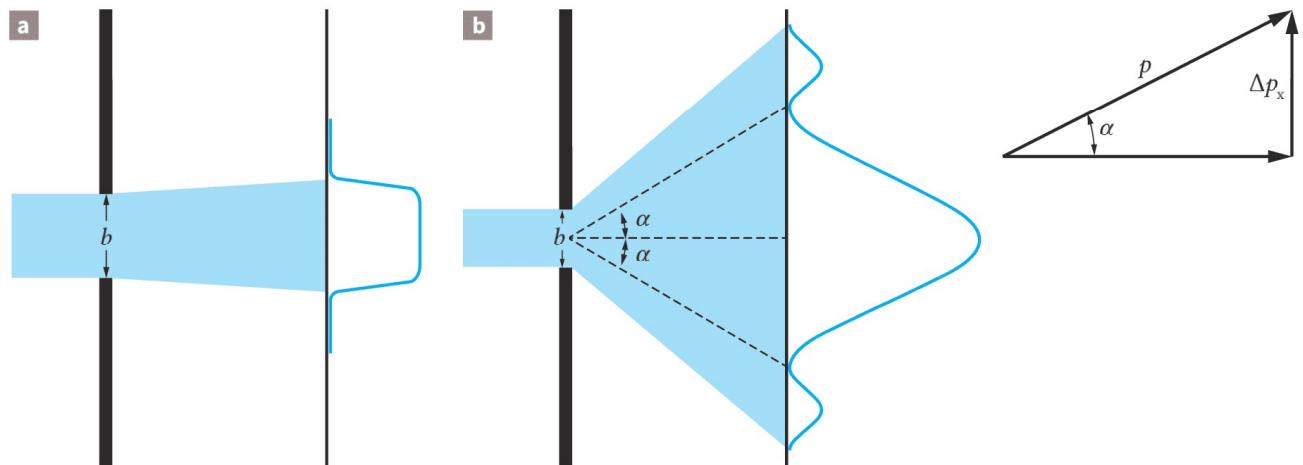


## 8.8 Unbestimmtheitsrelation



**B1** Beugung eines Photonen- oder Elektronenstrahls an einem (a) breiten und (b) schmalen Spalt

### Statistik von Messungen in der Quantenphysik –

Max BORNS Wahrscheinlichkeitsinterpretation (S. 250) zeigt, dass die Quantenmechanik ihrem Wesen nach eine statistische Theorie ist. Das Ergebnis von Messungen an Quantenobjekten, zum Beispiel Ortsmessungen am Schirm im Doppelspaltexperiment, kann mit den Begriffen der mathematischen Statistik beschrieben werden. Hat man etwa die Nachweisorte von vielen Elektronen am Schirm registriert, lassen sich die gefundenen Messergebnisse durch Säulendiagramme darstellen und der Mittelwert sowie die Standardabweichung  $\Delta x$  bestimmen. Genauso kann man die Geschwindigkeit  $v$  bzw. den Impuls  $p = m v$  messen und aus den Messwerten den mittleren Impuls und die Standardabweichung  $\Delta p$  bestimmen.

**Unkenntnis und Unbestimmtheit –** Oft muss man auch in der klassischen Physik auf statistische Aussagen zurückgreifen, etwa wenn Messfehler auftreten oder wenn bei der Beschreibung von Gasen so viele Moleküle beteiligt sind, dass man sie aus praktischen Gründen nicht alle erfassen kann. Es handelt sich dann um Fälle, wo der „wahre Wert“ einer Größe nicht genau bekannt ist.

Das Neuartige an der Quantenphysik ist, dass sich hinter ihren statistischen Gesetzmäßigkeiten keine Unkenntnis über einen „wahren Ort“ und „wahren Impuls“ verbirgt – die Quantenobjekte haben diese Eigenschaften gar nicht, sie sind *unbestimmt*. Insbesondere ist es *prinzipiell* unmöglich, Quantenobjekten gleichzeitig bestimmte Werte von Ort und Impuls zuzuordnen. Dies ist die Aussage der **heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation (UBR)**.

### Unbestimmtheitsrelation am Einzelspalt –

Ein Lichtbündel der Wellenlänge  $\lambda$  lässt sich durch einen engen Spalt nicht beliebig schmal machen. Fällt es auf einen Spalt der Breite  $b$ , dann weitet es sich hinter dem Spalt auf. Gleichermaßen lässt sich für Elektronen beobachten: Ein Elektronenstrahl, der auf einen engen Spalt fällt, wird am Spalt ebenfalls gebeugt. Elektronen mit der Geschwindigkeit  $v$  bzw. dem Impuls  $p$  werden in einen Winkelbereich zwischen  $+ \alpha$  und  $- \alpha$  gestreut. Hinter dem Spalt haben die Elektronen also eine Impulsverteilung in Querrichtung.

Die statistische Verteilung der Querimpulse wird durch die Streuung (Standardabweichung)  $\Delta p_x$  sehr vieler Impulsmesswerte charakterisiert (Bild **B2**).  $\Delta p_x$  lässt sich durch den Winkel  $\alpha$ , d.h. durch die Breite des Hauptmaximums, abschätzen,  $\Delta x$  durch die Spaltbreite  $b$ . Aus Bild **B1b** liest man ab:

$$\sin(\alpha) = \frac{\Delta p_x}{p} \quad (1)$$

Die durch Beugung verursachte Aufweitung ist umso stärker, je enger der Spalt ist, d.h., je kleiner  $\Delta x$  ist (Bild **B1**). Die Breite des Hauptmaximums kann man durch die Lage des ersten Beugungsminimums abschätzen. Mit den bekannten Zusammenhängen gilt hier:

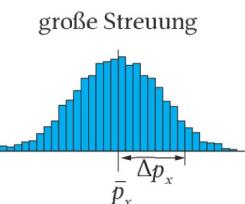
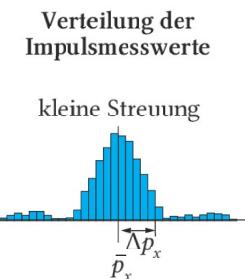
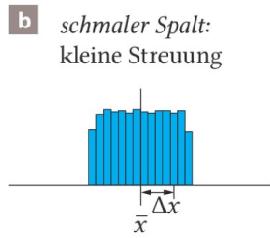
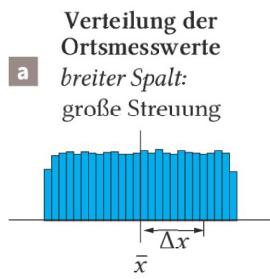
$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{\Delta x}. \quad (2)$$

Setzt man die De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda = \frac{h}{p}$  der Elektronen in (2) ein, ergibt sich::

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{p \cdot \Delta x}. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) zusammen erhält man

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h.$$



**B2** Streuungen am a) breiten Spalt, b) schmalen Spalt

Bild **B2** erläutert diese Aussage: Eine kleine Streuung des Impulses  $\Delta p_x$  lässt sich nur mit einem breiten Spalt (große Ortsstreuung  $\Delta x$ ) erreichen. Umgekehrt führt ein schmaler Spalt (kleine Ortsstreuung  $\Delta x$ ) zwangsläufig zu einer großen Streuung der Querimpulse  $\Delta p_x$  hinter dem Spalt. Dieser Zusammenhang besitzt Gültigkeit für alle Quantenobjekte, formuliert in der allgemeinen Aussage:

### ! Merksatz

#### Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h. \quad (4)$$

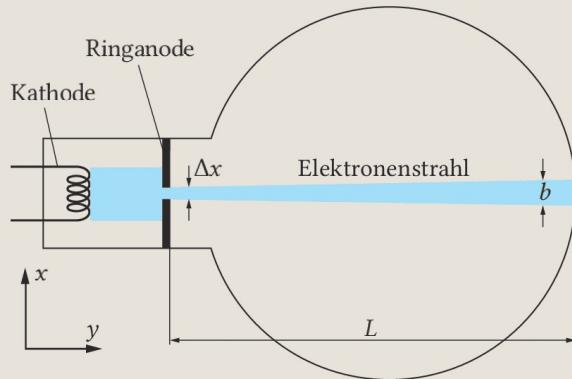
Es ist *prinzipiell* nicht möglich, Quantenobjekte in einen Zustand zu bringen, in dem die Messwerte von Ort und Impuls kleinere Streuungen aufweisen als durch (4) erlaubt ist.

**Bedeutung der Unbestimmtheitsrelation.** Die heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation erfordert den Abschied vom Begriff der Bahn eines Teilchens, wie er in der klassischen Physik verwendet wird. Der Bahnkonzept ist mit der Notwendigkeit verbunden, Ort und Impuls zum gleichen Zeitpunkt exakt anzugeben. In der klassischen Mechanik ist dies im Prinzip immer möglich; man stößt höchstens an praktische Grenzen. Die Unbestimmtheitsrelation (4) zeigt jedoch, dass dies für Quantenobjekte wie Elektronen niemals möglich ist.

Es ist daher auch unerheblich, dass die Unbestimmtheitsrelation in vielen Quellen auch als  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$  oder  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$  angegeben wird.

### \* Beispielaufgabe: Elektronenstrahlröhre

In einer Elektronenstrahlröhre scheinen die Elektronen auf einer gut bestimmbaren Bahn zu laufen. Erläutern Sie, wie das mit der Unbestimmtheitsrelation vereinbar ist.



**Lösung:** An der Anode wird der Elektronenstrahl auf eine Breite  $\Delta x \approx 0,1 \text{ mm}$  abgebündelt (Bild oben). Die Streuung der Impulse in  $x$ -Richtung (also in Querrichtung) ist daher mindestens

$$\Delta p_x = \frac{h}{\Delta x} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-4} \text{ m}} = 6,6 \cdot 10^{-30} \frac{\text{kg m}}{\text{s}}.$$

Die Geschwindigkeitsstreuung in  $x$ -Richtung folgt, indem man  $\Delta p_x$  durch die Elektronenmasse teilt:

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m_e} = 7,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Zum Vergleich berechnen wir die Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung (also in Strahlrichtung) bei einer Beschleunigungsspannung von 1 kV:

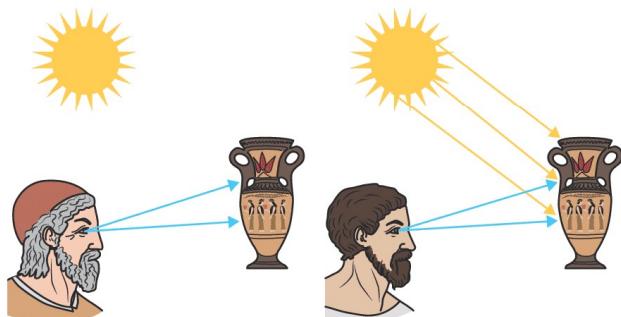
$$v_y = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = 1,9 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Um eine Strecke  $L = 20 \text{ cm}$  zu durchqueren, benötigen die Elektronen die Zeit  $t = \frac{L}{v_y} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ . In dieser Zeit weitet sich der Strahl in Querrichtung um  $b = \Delta v_x \cdot t = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$  auf, was jenseits aller Nachweisbarkeit liegt. Die Erkennbarkeit einer „Bahn“ in der Elektronenstrahlröhre widerspricht der Unbestimmtheitsrelation also nicht.

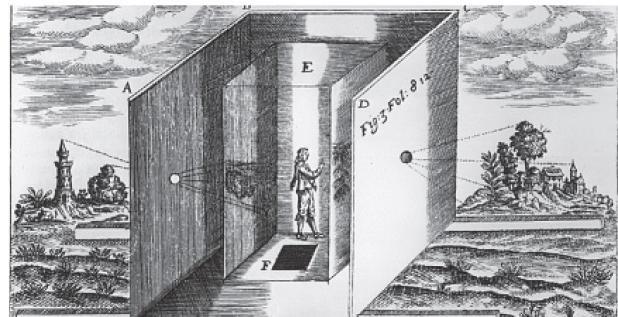
### Lösen Sie selbst

- 1** Berechnen Sie die Impulsunbestimmtheit in Querrichtung für Photonen mit  $\lambda = 600 \text{ nm}$  hinter einem 1 cm breiten Schlüsselloch bzw. einem 0,01 mm dicken Loch (in Prozent des Impulses in Ausbreitungsrichtung).

## 8.9 Modellvorstellungen des Lichts



**B1** Vorstellung des Sehvorgangs mit Sehstrahlen nach  
a) PYTHAGORAS und b) PTOLEMÄUS



**B2** Projektion von Landschaftsbildern in der Camera obscura

**Modellbetrachtungen in der Physik** – In den Wissenschaften ist es üblich, Objekte und Vorgänge, deren Beschaffenheit nicht gänzlich geklärt sind, oder die sich im mikroskopischen Maßstab abspielen, durch Modelle zu veranschaulichen. Häufig werden dazu viele verschiedene Ansätze herangezogen, die durch Experimente überprüft und weiterentwickelt werden müssen, bevor eines dieser Modelle allgemein akzeptiert wird. Dabei kann es oft mehrere Jahrzente dauern, bis man die Grenzen einer solchen Modellvorstellung erkennt und die dann notwendige Weiterentwicklung in der Lage ist umzusetzen. Auch bei der Beschreibung des Lichts hat sich die allgemein anerkannte Modellvorstellung seit der ersten Idee mehrmals verändert.

**Emissionstheorien** – Bereits in der Antike beschäftigten sich die Griechen mit sogenannten Emissionstheorien. Die geradlinige und allseitige Ausbreitung von Licht ließ vermuten, dass sich Objekte auf direkten Bahnen von einer Lichtquelle in das menschliche Auge bewegten. PYTHAGORAS (ca. 570–480 v.Chr.) entwickelte aber zunächst die umgekehrte Variante: Von den Augen gehen sogenannte **Sehstrahlen** aus, die die Wahrnehmung von Objekten ermöglichen, auf die diese fallen (Bild **B1a**). PTOLEMÄUS (ca. 100–160 n.Chr.) kam später zu dem Schluss, dass der Mensch auch im Dunkeln sehen könnte, wenn diese Theorie zuträfe. Auch er blieb aber grundsätzlich bei der Vorstellung der Sehstrahlen. Er erweiterte sie lediglich um Lichtstrahlen, die von Lichtquellen ausgesandt werden und ebenfalls auf die Objekte treffen müssen, um gesehen zu werden (Bild **B1b**).

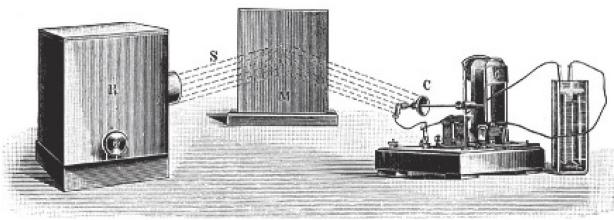
**Korpuskeltheorie** – Erst 1669 entwickelte Isaac NEWTON (1643–1727) eine detailliertere Vorstellung. Er nahm an, dass Licht aus kleinsten Teilchen (Korpuskeln) besteht, die von Lichtquellen mit großer Geschwindigkeit in alle Richtungen geschleudert werden. Seine Idee

gehört deswegen ebenfalls zu den Emissionstheorien, auch wenn er auf die Sehstrahlen verzichtete. Seine Korpuskel können aber mit Lichtstrahlen, die von Lichtquellen ausgesandt werden, beschrieben werden. NEWTON schuf mit seiner Korpuskeltheorie also bereits die bis heute gültige Vorstellung von Lichtsendern und -empfängern.

Auch komplexere Phänomene wie die Lichtbündelung an Sammellinsen und die Bildentstehung in einer Lochkamera (Bild **B2**) können mit dem Strahlenmodell schlüssig erklärt werden. Beugung und Brechung sowie zum Teil auch die Reflexion sind jedoch Phänomene, die dieser Theorie ihre Grenzen aufzeigen. Es gab keine schlüssige Erklärung dafür, warum die Lichtstrahlen beim Übergang in ein anderes Medium ihre Ausbreitungsrichtung änderten. NEWTONS Vorstellung besagte, dass die Korpuskel nahe einer Grenzfläche zu einem optisch dichteren Medium von den darin befindlichen Teilchen stärker angezogen würden und deswegen schlagartig ihre Richtung änderten. Es war ihm jedoch nicht möglich, solche Kräfte nachzuweisen, und so konnte man die Brechung mit Hilfe von Lichtstrahlen zwar beschreiben, jedoch nicht erklären.

Eine Folge dieser Theorie war außerdem, dass sich Licht in optisch dichteren Medien schneller ausbreiten müsste als in optisch dünneren. 1850, fast ein Jahrhundert nach NEWTONS Tod, wurde jedoch das Gegenteil bewiesen und die Korpuskeltheorie schließlich vollständig verabschiedet. Das Lichtstrahlmodell behielt aber für Phänomene wie Schatten und Spiegelbilder seine Gültigkeit und wird dort bis heute angewendet.

**Wellentheorie** – Schon 1677 entwickelte Christian HUYGENS (1629–1695) eine zu NEWTON konkurrierende Theorie, die sich später als wahr herausstellen sollte: Licht ist eine Welle, die sich im Raum ausbreitet.



**B3** Heinrich HERTZ' Experiment, mit dem er erstmals elektromagnetische Wellen nachweisen konnte

Beugung und Interferenz lassen sich mit dem huygenschen Prinzip der Elementarwellen nicht nur beschreiben, sondern auch erklären. Allerdings dauerte es bis ins 19. Jahrhundert, dass sich HUYGENS Idee schließlich durchsetzen konnte. James Clerk MAXWELL (1831–1879) entwickelte sie 1871 weiter und leitete theoretisch her, dass Licht eine elektromagnetische Welle sein muss. Der experimentelle Nachweis (Bild B3) erfolgte dann 1886 durch Heinrich HERTZ (1857–1894).

Wichtige Erkenntnisse lieferten dabei auch der Faraday-Effekt (1845, nach Michael FARADAY) und der Kerr-Effekt (1875, nach John KERR). Mit ihnen wurde gezeigt, dass sich mit Hilfe von magnetischen und elektrischen Feldern die Polarisationsebene eines polarisierten Lichtstrahls beeinflussen lässt. Dies waren direkte Nachweise, dass im Lichtstrahl elektrische und magnetische Felder transportiert werden.

Die Wellentheorie gewann immer mehr an Zuspruch, immer mehr Experimente bestätigten die theoretischen Vorhersagen oder blieben damit in Einklang. Am Ende des 19. Jahrhunderts schien die elektromagnetische Wellennatur des Lichtes absolut gesichert zu sein. Auch bei diesem Modell blieben aber einzelne Fragen ungeklärt: Warum schadet ultraviolettes Licht der menschlichen Haut, während dies bei sichtbarem Licht nicht der Fall ist? Warum senden glühende Gase nur ganz bestimmte charakteristische Lichtfrequenzen (Linienspektren, siehe Kapitel 9) aus? Wie ist der photoelektrische Effekt zu erklären? usw.

**Quantentheorie** – Schon Isaac NEWTON beschrieb das Licht mit Hilfe von kleinsten Partikeln, bevor HUYGENS und MAXWELL zu dem Schluss kamen, dass die Beschreibung durch Wellen mehr offene Fragen beantworten konnte. 1905 stellte Albert EINSTEIN (1879–1955) mit seiner Lichtquantenhypothese wiederum die Beschrei-

bung mit Hilfe von Teilchen in den Raum. Der Photoeffekt ließ für ihn nur den Schluss zu, dass Licht aus kleinsten Energiepaketen, den Photonen, besteht. Die so entstandene Quantentheorie gestaltete sich aber deutlich komplexer und wies einige Unterschiede zu NEWTONS Beschreibung mit Hilfe der Korpuskel auf. Allen voran verhielten sich die neu entdeckten Photonen in manchen Situationen erwartungsgemäß wie Teilchen, während sie in anderen Fällen immer noch Wellenverhalten an den Tag legten (Doppelspalt). Der Welle-Teilchen-Dualismus war geboren und die Physik erhielt eine neue, für sie vollkommen unbekannte Komponente: Wahrscheinlichkeit und Statistik waren plötzlich zentrale Aspekte, die zur Beschreibung notwendig sind.

**Gültigkeitsbereiche** – Obwohl auch diese Theorie sehr lange umstritten war – selbst ihr Mitbegründer EINSTEIN wehrte sich lange gegen die Vorstellung, dass das Verhalten eines Systems, dessen Zustand vollständig bekannt ist, auf Zufall basieren soll („Gott würfelt nicht“) –, wurde sie bis heute von keiner anderen abgelöst. Auch ältere Modellvorstellungen des Lichts sind nicht komplett widerlegt, sondern finden immer noch Anwendung in ihren jeweiligen Gültigkeitsbereichen. Die geradlinige Ausbreitung des Lichts und seine Interferenzfähigkeit können z. B. weiterhin mit dem dafür anschaulichen Lichtstrahl- und Wellenmodell beschrieben werden, denn sie sind in diesen Bereichen im Einklang mit der viel komplexeren Quantentheorie. Deren Entwicklung war nur notwendig, um Phänomene beschreiben zu können, bei denen ihre Vorgänger an ihre Grenzen stoßen.

### ! Merksatz

Lichtstrahlen, Wellen und Lichtquanten sind Modellvorstellungen, die in bestimmten Situationen ihre Anwendung finden und ihre Gültigkeit haben. Bei komplexeren Betrachtungen stoßen manche Theorien an ihre Grenzen und müssen durch Weiterentwicklungen ersetzt werden.

### Lösen Sie selbst

- Stellen Sie in einer Tabelle die Gültigkeitsbereiche und Grenzen von Strahlen-, Wellen- und Quantenmodell anschaulich dar.