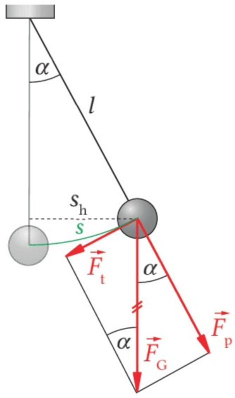
4.4 Fadenpendel, U-Rohr, Federschwinger

B1 *Foucaultsches Pendel im Panthéon Paris mit einer Pendellänge von 67 m und einem 28 kg schweren Pendelkörper*



B2 *Kräftezerlegung am Fadenpendel mit der Rückstellkraft $\vec{F}_p$ als Komponente der Gewichtskraft $\vec{F}_G$*

„Da endlich sah ich das Pendel. Die Kugel frei schwebend am Ende eines langen metallischen Fadens, der hoch in der Wölbung des Chores befestigt war, beschrieb ihre weiten konstanten Schwingungen mit majestätischer Isochronie. Ich wusste – doch jeder hätte es spüren müssen im Zauber dieses ruhigen Atems –, dass die Periode geregelt wurde durch das Verhältnis der Quadratwurzel aus der Länge des Fadens zu jener Zahl π, die, irrational für die irdischen Geister, in göttlicher Ratio unweigerlich den Umfang mit dem Durchmesser eines jeden möglichen Kreises verbindet […].“
Zitat aus: „Das Foucaultsche Pendel“ von Umberto Eco
(Wortklärungen: *iso* (griech.) – gleich; *chronos* (griech.) – die Zeit; *ratio* (lat.) – Vernunft)

Das Fadenpendel – Mit obigen Worten beschreibt Umberto Eco in seinem Roman *Das Foucault'sche Pendel* die erste Begegnung des Protagonisten mit dem riesigen Fadenpendel im Pariser Panthéon. In seinem Text liefert der Autor zudem eine physikalische Beschreibung des Schwingungsvorgangs am **Fadenpendel**. Eine solche Betrachtung kann wie beim Feder-Masse-Pendel experimentell oder theoretisch erfolgen. Der experimentelle Ansatz ist Gegenstand von **Aufgabe 1** auf Seite 127. Im Folgenden wird der theoretische Ansatz über eine Betrachtung der wirkenden Kräfte verfolgt.

Wird das Fadenpendel aus der Ruhelage ausgelenkt, bewegt sich der Pendelkörper längs eines Kreisbogens s mit dem Radius l (Bild **B2**). Ursache der Pendelbewegung ist die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$. Allerdings trägt nur ein Teil der Gewichtskraft zur Schwingungsbewegung bei. Sie kann in zwei Komponenten zerlegt werden. Die Komponente $\vec{F}_p$ der Gewichtskraft wirkt parallel zum Faden des Pendels und sorgt dafür, dass dieser gespannt wird. Der Faden hat keinen Einfluss auf die eigentliche Bewegung des Pendels. Der Anteil $\vec{F}_t$, der tangential zum Kreisbogen wirkt, ist der maßgebliche Anteil für die Bewegung des Pendels. $\vec{F}_t$ wirkt als Rückstellkraft des Schwingungssystems immer zur Ruhelage hin und zeigt demnach in oder entgegen der Bewegungsrichtung des Pendelkörpers. Da $\vec{F}_t$ während der Pendelbewegung die Richtung ändert, wird im Folgenden nur ihr Betrag betrachtet.

Aus Bild **B2** lässt sich der Zusammenhang

$$F_t = F_G \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \frac{s_h}{l}$$

ablesen. Für kleine Auslenkungen (also kleine Winkel α) des Pendels nähert sich s_h immer mehr s an, sodass $s_h \approx s$ angenommen werden kann. Somit gilt mit Richtungsangabe:

$$F_R = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot s = -D^* \cdot s \quad \text{mit} \quad D^* = \frac{m \cdot g}{l}.$$

Analog zum Feder-Masse-Pendel ist die Rückstellkraft F_R proportional zur Auslenkung s. D^* ist die **Richtgröße** des Systems (siehe Seite 121). Für kleine Auslenkungen zeigt das Fadenpendel also eine harmonische Schwingung. Für die Periodendauer des Fadenpendels ergibt sich:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot l}{m \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

! Merksatz

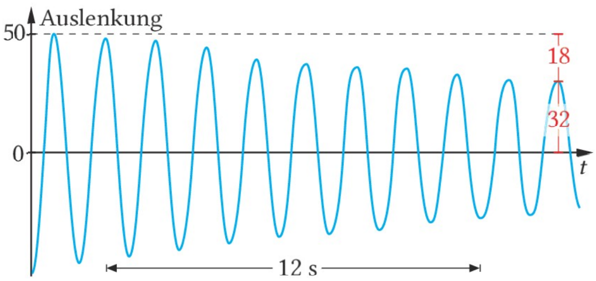
Für kleine Auslenkung schwingt das Fadenpendel nahezu harmonisch mit der Periodendauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Exkurs: Brückenschwingungen

Norderelbebrücke

Dicke Stahlseile einer Hängebrücke dehnen sich elastisch – ähnlich wie eine Feder mit Massekörper. Die *Norderelbbrücke* (Bild) wurde deshalb nach ihrer Fertigstellung mit Hilfe eines Schiffes und eines Seiles in Schwingung versetzt – man wollte die Berechnungen der neuartigen Brückenkonstruktion in einem Experiment überprüfen. Dazu wurde bei Flut ein Lastschiff von unten an der Brücke befestigt. Dieses belastete bei sinkendem Wasserspiegel mit einem ständig zunehmenden Teil seiner Masse (100 t) die Brückenmitte, bis bei einer Kraft von ca. 1 MN ein Bolzen (wie geplant) brach und die Verbindung zur Brücke löste. Als die Verbindung zum angehängten Schiff riss, betrug die Elongation der Brückenmitte 5 cm.



Die Grafik zeigt einen Ausschnitt der gemessenen Schwingung. Die Periodendauer beträgt $\frac{12\ \text{s}}{7{,}5} = 1{,}6$ s. Daraus ergibt sich die Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}625\ \text{Hz},$$

mit der ein Beobachter auf der Brücke die Schwingung erlebt.
Außerdem kann man der Grafik auch die Dämpfung entnehmen. So beträgt die Amplitude nach zehn Perioden noch $\frac{18}{32} \approx 64\,\%$.

Franjo-Tudjman-Brücke

Schrägseilbrücken wie die Franjo-Tudjman-Brücke bei Dubrovnik in Kroatien sind elegant, haben aber den Nachteil, dass die Seile durch starken Wind leicht ins Schwingen geraten können. Das war zum Beispiel in den Jahren 2005 und 2006 der Fall: Heftige Stürme mit Windgeschwindigkeiten von 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hatten die insgesamt 38 Seile der Brücke – die längsten davon sind 222 m lang – in der Seilmitte um bis zu zwei Meter auf und ab schwingen lassen. Auf den Seilen hatte sich Nassschnee abgelagert und die Brücke dadurch noch windanfälliger gemacht. Fußgänger und Autofahrer trauten sich nicht mehr, die Brücke zu betreten. Zudem war zu befürchten, dass die Seile und ihre Verankerungen Schaden nehmen könnten. Kurz: die Tragsicherheit der Brücke war bedroht.

Deshalb wurden an allen Schrägseilen nachträglich Schwingungsdämpfer eingebaut, und zwar *Feedback-geregelte magnetorheologische Fluiddämpfer*. Dabei verändert ein Regelalgorithmus die Dämpfungskraft abhängig von den momentanen Seilschwingungen: Je heftiger die Seile auf und ab schwingen, desto größer ist die Dämpferkraft.

In diesen neuartigen Dämpfern wird eine Flüssigkeit verwendet, deren Schwerkraft sich unter dem Einfluss eines Magnetfeldes verändern kann. Im Dämpfer sind dazu Spulen angeordnet, die elektronisch geregelt ein Magnetfeld erzeugen. Je größer die Stromstärke ist, desto stärker ist das Magnetfeld und damit die Dämpfungskraft. Die Stromstärke und damit auch die Dämpfungskraft werden über eine spezielle Software gesteuert. Durch seine Grundreibung dämpft der Dämpfer auch bei Stromausfall, wenn auch mit geringerem Wirkungsgrad. Er ist somit ausfallsicher.

Lösen Sie selbst

1 Bauen Sie selbst ein Fadenpendel mit einem möglichst langen Faden und Massestücken (z. B. Schraubenmuttern) auf. Bestätigen Sie experimentell, dass für die Periodendauer T und die Länge des Fadens l gilt: $T \sim \sqrt{l}$.
Gehen Sie dabei analog zur Untersuchung des Feder-Masse-Pendels vor, indem Sie mit Hilfe des Taschenrechners einen funktionalen Zusammenhang für die aufgenommenen Messwerte ermitteln.
Zeigen Sie experimentell, dass die angehängte Masse keinen Einfluss auf die Periodendauer des Fadenpendels hat.

2 Berechnen Sie die Periodendauer und die Frequenz des Pendels im Pariser Panthéon.

3 Berechnen Sie, welche Fadenlänge ein „Sekundenpendel" hat, bei dem die Bewegung von der Ruhelage zur maximalen Auslenkung und wieder zurück 1 s dauert (also $T = 2$ s).

4 Eine Riesenschaukel auf dem Jahrmarkt hat eine Länge von 5 m. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sie den tiefsten Punkt durchlaufen muss, damit sie gerade einen Überschlag schafft.

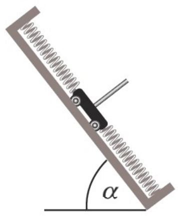
5 Ein mit Schrotkugeln beschwertes Reagenzglas der Masse m = 15 g schwimmt auf Wasser; seine Querschnittsfläche beträgt $A = 2{,}0\ \text{cm}^2$.
Drückt man dieses Reagenzglas tief ein, so verdrängt es mehr Wasser und erfährt dadurch eine größere Auftriebskraft (sie ist nach Archimedes gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit).
a) Bestimmen Sie die Auftriebskraft F_a nach Archimedes.
b) Zeigen Sie, dass das Reagenzglas nach dem Loslassen harmonisch schwingt, indem Sie die Differenzialgleichung herleiten:

$$m \cdot \ddot{s}(t) = \rho \cdot A \cdot g \cdot s(t).$$

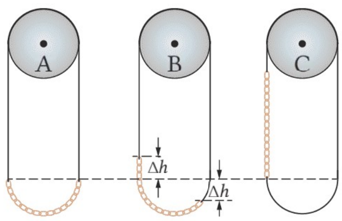
c) Berechnen Sie die Periodendauer der Schwingung.
d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich das Reagenzglas durch die Gleichgewichtslage bewegt, wenn es zu Beginn 3 cm tiefer ins Wasser gedrückt wurde.
(Dichte von Wasser: $\rho = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, Ortsfaktor $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

6 An einer Schraubenfeder hängt ein Körper der Masse m = 200 g. Sie ist dadurch um 40 cm gedehnt. Aus dieser Gleichgewichtslage wird der Körper nun um 10 cm angehoben und losgelassen. Die darauf folgende Schwingung sei harmonisch.
a) Berechnen Sie Periodendauer, Frequenz und Winkelgeschwindigkeit.
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit durch die Gleichgewichtslage. Geben Sie für die Phase $\varphi = \pi$ ($\varphi = 0$) jeweils die Richtung des Geschwindigkeitsvektors an.
c) Die Zeitmessung wird im Moment der Phase $\varphi = 0$ gestartet. Bestimmen Sie Phase, Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers zur Zeit t = 0,5 s. Zeichnen Sie ein Zeigerbild für diesen Moment.

7 Ein Wagen der Masse m = 0,6 kg ist zunächst horizontal zwischen zwei Federn gespannt. Die Richtgröße der einen Feder ist $D_1 = 9{,}50\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Der Wagen soll mit der Periodendauer T = 1,00 s schwingen.
a) Berechnen Sie D_2 der anderen Feder.
b) Bestimmen Sie T, wenn m verdoppelt wird.
c) Die Anordnung wird schräg gestellt (siehe Grafik). Erläutern Sie, mit welcher Periodendauer der Wagen jetzt schwingt.

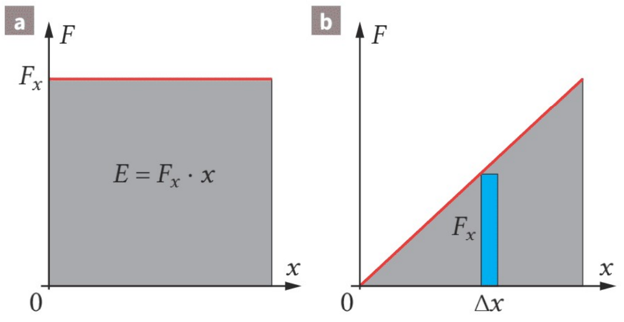


8 Ein Kettenstück der Länge l = 60 cm und der Masse m = 600 g ist mit einem dünnen Faden über eine reibungsfreie Rolle mit beiden Enden aufgehängt (siehe Zeichnung A). Nun wird ein Kettenende um Δh = 10 cm an einer Seite hochgehoben (B) und anschließend losgelassen.

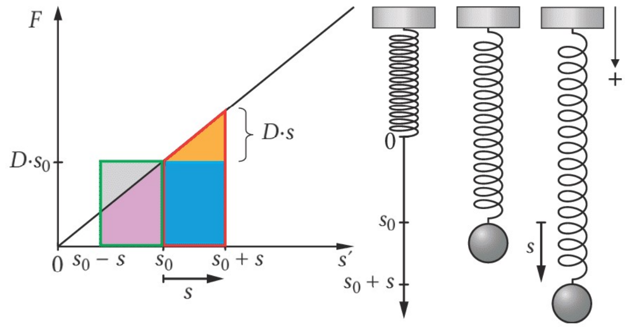


a) Zeigen Sie, dass das lineare Kraftgesetz gilt,
$F_r = 2\frac{m}{l} \cdot g \cdot \Delta h$, und somit das Kettenstück eine harmonische Schwingung durchführt.
b) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T sowie die maximale Geschwindigkeit v_{max} der Kettenschwingung.
c) Erläutern Sie, ob das Kettenstück auch noch eine harmonische Schwingung durchführt, wenn man es wie in C um fast 60cm hochhebt und loslässt.

4.5 Energie einer Schwingung



B1 *Spannenergie im F-x-Diagramm*



B2 *Elongationsenergie als Differenz von Höhen- und Spannenergie im F-s-Diagramm*

Energie aus einer Fläche berechnen – Wie sich eine Kraft F_x bei einer Verschiebung x ändert, beschreibt das F-x-Diagramm in Bild **B1**. Ist $F = F_x$ konstant, ergibt sich eine Parallele zur x-Achse (Bild **B1a**). Die graue Fläche des Rechtecks darunter mit dem Inhalt $F_x \cdot x$ stellt die von der konstanten Kraft F_x benötigte Energie dar, was man auch anhand der Einheit 1 N · 1 m = 1 J erkennt. Das Spannen von Federn oder Gummibändern geht am Anfang leicht, wird aber bald mühsam. Die Feder gehorcht dem hookeschen Gesetz $F_x = D \cdot x$ (Seite 117). Im Energie-Diagramm **B1b** ergibt diese lineare Funktion eine Ursprungsgerade. Der Einfachheit halber wird das Vorzeichen ignoriert, da es nur die Richtung der Kraft angibt und keinen Einfluss auf den Betrag der Größe hat. Wird die Feder um die sehr kleine Strecke Δx verlängert, kann man F_x als hinreichend konstant ansehen (schmales Rechteck in Bild **B1b**). Das Flächenelement $F_x \cdot \Delta x$ gibt den Energiebetrag beim Spannen der Feder um die Strecke Δx an. Alle Flächenelemente zusammen, also die Dreiecksfläche mit der Grundseite x und der Höhe $F_x = D \cdot x$, liefern die Gesamtenergie zum Spannen:

$$E_{\text{spann}} = \frac{1}{2}\, x \cdot F_x = \frac{1}{2}\, x \cdot D \cdot x = \frac{1}{2}\, D \cdot x^2 \,.$$

Diese **Spannenergie** wird beim Entspannen wieder frei. Diese Überlegung kann man nun auf eine harmonische Schwingung übertragen.

Energieerhaltung bei harmonischen Schwingungen – Der Pendelkörper eines Federpendels hängt zunächst in der Gleichgewichtslage. Aus dieser hebt oder senkt man den Körper. Dabei spürt man nur die Rückstellkraft $F_R = -D \cdot s$, der man in entgegengesetzte Richtung mit der Kraft $F = D \cdot s$ das Gleichgewicht hält. Weitere Kräfte wie die Federkraft oder die Gewichtskraft des Körpers benötigt man nicht. Beim Heben oder Senken um s aus der Gleichgewichtslage verrichtet man folglich am System nur die Energie $E = \frac{1}{2}\, F \cdot s$.

Die Gerade in Bild **B2** zeigt die Kraft auf die Feder in Abhängigkeit von ihrer Verlängerung. In der Gleichgewichtslage s_0 ist diese Kraft gleich der Gewichtskraft des Körpers: $D \cdot s_0 = F_G$. Beim Auslenken um $s > 0$ nimmt die Spannenergie um die rot umrandete Fläche zu, die Höhenenergie jedoch um die blau schraffierte Fläche ab. Die Zunahme ist größer als die Abnahme, die Differenz ist die orange Dreiecksfläche unter der Geraden. Umgekehrt nimmt beim Anheben um $s < 0$ die Spannenergie ab (violett), und zwar weniger als die Höhenenergie (grün umrandet) zunimmt. Das graue Dreieck über der Geraden gibt die dem System zusätzlich zugeführte Elongationsenergie an:

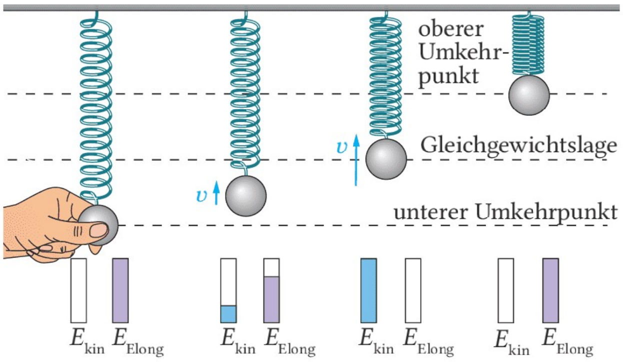
$$E_{\text{Elong}} = \frac{1}{2} \cdot (D \cdot s) \cdot s = \frac{1}{2}\, D \cdot s^2 .$$

Man nennt diese so zugeführte Energie auch **Elongationsenergie** $E_{\text{Elong}} = \frac{1}{2} D \cdot s^2$. Sie ist nicht gleich der gesamten Spannenergie der Feder. Man braucht aber weder diese noch die Höhenenergie.

E_{Elong} steckt von nun an im schwingenden System. Bei fehlender Reibung hätte man den Idealfall einer freien harmonischen Schwingung, die unendlich lange andauert, da keine Energie mehr entweicht.

Folgende Phasen der Schwingung lassen sich unterscheiden (Bild **B3**):

- Im oberen und unteren Umkehrpunkt besitzt der Körper jeweils die Geschwindigkeit null. Seine Bewegungsenergie ist also null, während die Elongationsenergie im selben Augenblick ihr Maximum erreicht.
- Aus der momentanen Ruhe heraus wird der Körper nun beschleunigt, gewinnt also kinetische Energie auf Kosten der Elongationsenergie.
- Die Elongationsenergie nimmt nun auf Kosten der kinetischen Energie wieder zu, bis sie im Umkehrpunkt abermals ein Maximum erreicht hat usw.



B3 *Energieumwandlungen beim Federpendel*

Die beiden Energieformen wandeln sich also periodisch ineinander um. Dabei bleibt nach dem Energiesatz die Summe aus Elongations- und Bewegungsenergie – also die Gesamtenergie der Schwingung – erhalten. Sie ist gleich der maximalen Elongationsenergie $\frac{1}{2}D \cdot \hat{s}^2$, die bei der ersten Auslenkung dem System hinzugefügt wurde.

! Merksatz

Bei einer ungedämpften harmonischen Schwingung ist die Summe aus Elongationsenergie E_{Elong} und Bewegungsenergie E_{kin} konstant. Sie ist gleich der Gesamtenergie E_{ges} der Schwingung:

$$E_{ges} = E_{Elong} + E_{kin} = \frac{1}{2}D \cdot s^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \text{konstant.}$$

Zur Berechnung der Gesamtenergie eignen sich besonders gut die Ruhelage und die Umkehrpunkte.

Lösen Sie selbst

1 Vergleichen Sie Spann- und Elongationsenergie für $s = s_0$. Skizzieren Sie und erläutern Sie dazu das Diagramm **B2**.

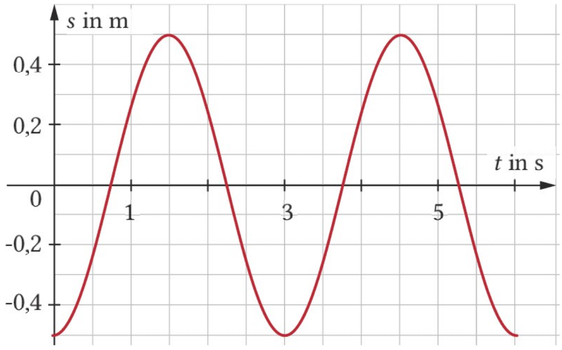
2 Was ändert sich in Bild **B2**, wenn man die Masse verdoppelt und wieder um $s > 0$ nach unten auslenkt?

3 Softair-Waffen sind in Deutschland bis 7,5 Joule „erlaubnisfreie Waffen". Welche Federkonstante D hat eine solche Waffe, wenn sie eine Munitionskugel der Masse $m = 0{,}2$ g im Lauf um die Strecke $s = 5$ cm zusammendrückt? Wie schnell fliegt diese Kugel?

4 Zeigen Sie, dass eine Verdopplung der maximalen Auslenkung eine Steigerung der maximalen Geschwindigkeit um den Faktor $\sqrt{2}$ als Resultat hat.

Abiturvorbereitung

Eine vertikale Schwingung wurde gefilmt und mit Hilfe eines Videoanalyseprogramms ausgewertet. Das Auslenkungs-Zeit-Diagramm zeigt eine näherungsweise harmonische Schwingung:



a) Geben Sie die Periodendauer der Schwingung an.
b) Bestimmen Sie den Betrag der maximalen Geschwindigkeit.
c) Der Umkehrpunkt wurde um +50 % aus der Ruhelage durch eine äußere Einwirkung angehoben. Berechnen Sie die dadurch sich neu ergebende maximale Geschwindigkeit.

Lösung:
a) Aus dem Diagramm kann man die Periodendauer ablesen. Ausgehend vom Tiefpunkt bei 0 s dauert es exakt 3 s, bis die Periode vollendet ist. Daher ist $T = 3$ s.
b) Für die maximale Geschwindigkeit bei Schwingungen gilt nach **Kapitel 4.3** die Beziehung $v_{max} = s_{max} \cdot \omega = s_{max} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{T}$. Durch Einsetzen der Werte aus dem Diagramm erhält man für die maximale Geschwindigkeit $v_{max} = 0{,}5\ \text{m} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3\,\text{s}} \approx 1{,}05\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
c) Wenn der Umkehrpunkt um 50 % nach oben aus der Ruhelage angehoben wurde, dann wurde dem System Energie hinzugefügt. Daher berechnet man die neue maximale Lageenergie im neuen Umkehrpunkt, da dort die Bewegungsenergie null ist: $\hat{E}_{pot,neu} = \hat{E}_{pot,alt} \cdot 1{,}5$. Diese setzt man gleich der Bewegungsenergie in der Ruhelage, da dort die Lageenergie null ist. Mit Hilfe der alten Bewegungsenergie erhält man:
$\hat{E}_{pot,neu} = \hat{E}_{kin,neu} = \frac{1}{2}m \cdot v^2_{max,neu} = 1{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2_{max}$.
Durch das Kürzen konstanter Größen erhält man für die neue maximale Geschwindigkeit:
$v_{max,neu} = \sqrt{1{,}5} \cdot v_{max}$.