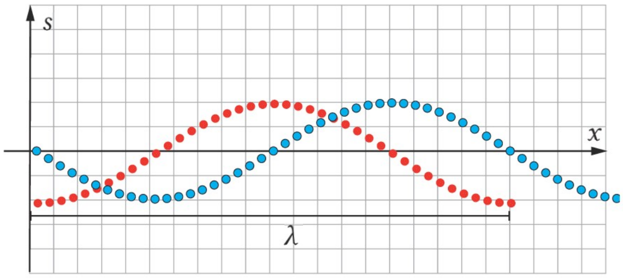
5.3 Beschreibung von Wellen

B1 *Ein Tropen erzeugt Wasserwellen.*



B2 *Zeitlicher Verlauf eines Wellenberges in der Animation. Für rot gilt t = T und für blau t = 1,25 T*

Störungen kann man analytisch beschreiben. Manche Wellen wie z. B. Wellen auf auf einer Wasseroberfläche (Bild **B1**) haben einen regelmäßigen Verlauf, Andere Wellen wie Erdbebenwellen sind sehr unregelmäßig. Die regelmäßigen Wellen lassen sich gut beschreiben, wenn man bestimmte Vereinfachungen festlegt. So setzt man bei **harmonischen Wellen** voraus, dass der Wellenerreger harmonisch schwingt. Die harmonische Schwingung führen dann alle Oszillatoren nacheinander aus. Zur Vereinfachung betrachtet man eine ungedämpfte Welle, bei der Amplitude und Frequenz aller Oszillatoren konstant sind.

! Merksatz

Die harmonische Welle bildet ein Modell zur Beschreibung realer Wellen. Jeder Oszillator vollführt dabei eine harmonische Schwingung. Amplitude und Frequenz der Welle sind konstant.

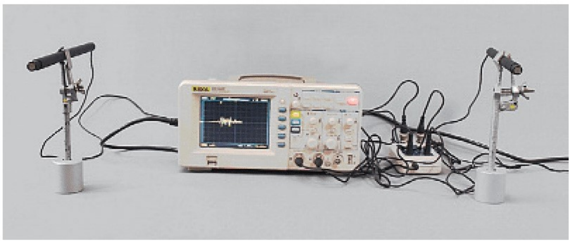
Beobachtungen an Wellen – Wellen kann man auf zweierlei Weise beschreiben.

- *Zu einem bestimmten Zeitpunkt*, z. B. durch ein Foto der Welle in einem ausgedehnten Raumbereich. Diese Perspektive erlaubt Rückschlüsse über den räumlichen Verlauf der Welle und ihre Wellenlänge λ.
- *In einem bestimmten Raumpunkt*, indem man die Schwingung eines *einzelnen Oszillators* verfolgt. Das liefert Informationen zum zeitlichen Verlauf und damit zur Dauer eines vollständigen Durchlaufs der Welle.

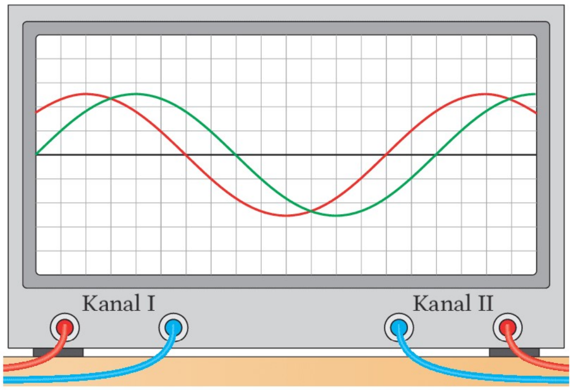
Die Unterscheidung beider Perspektiven ist für die Beschreibung von Wellen von zentraler Bedeutung. Anhand geeigneter s-t- oder s-x-Diagramme können sowohl die Dauer eines vollständigen Durchlaufs als auch die räumliche Ausbreitung untersucht werden. Versuch **V1** zeigt, wie man den zeitlichen Verlauf mit einem **Oszilloskop** erfasst.

V1 Untersuchung des zeitlichen Verlaufs

Der zeitliche Verlauf einer Schallwelle wird von einem Oszilloskop erfasst. Es zeichnet die Schwingung eines einzelnen Oszillators (Mikrofonmembran) auf.



Ein Schallsender erzeugt eine longitudinale Welle. An zwei verschiedenen Stellen werden Mikrofone platziert und ans Oszilloskop angeschlossen, um den zeitlichen Verlauf der Schwingung sichtbar zu machen.



Die Darstellung am Oszilloskop liefert verschiedene Informationen. Beide Oszillatoren benötigen für eine vollständige Schwingung die gleiche Zeit. Die Schwingungen sind jedoch gegeneinander verschoben. Wird der Abstand der Mikrofone verändert, so verändert sich auch die Verschiebung der beiden Schwingungen. Erfolgt eine weitere Verschiebung, so kann erneut Wellenberg auf Wellenberg liegen.

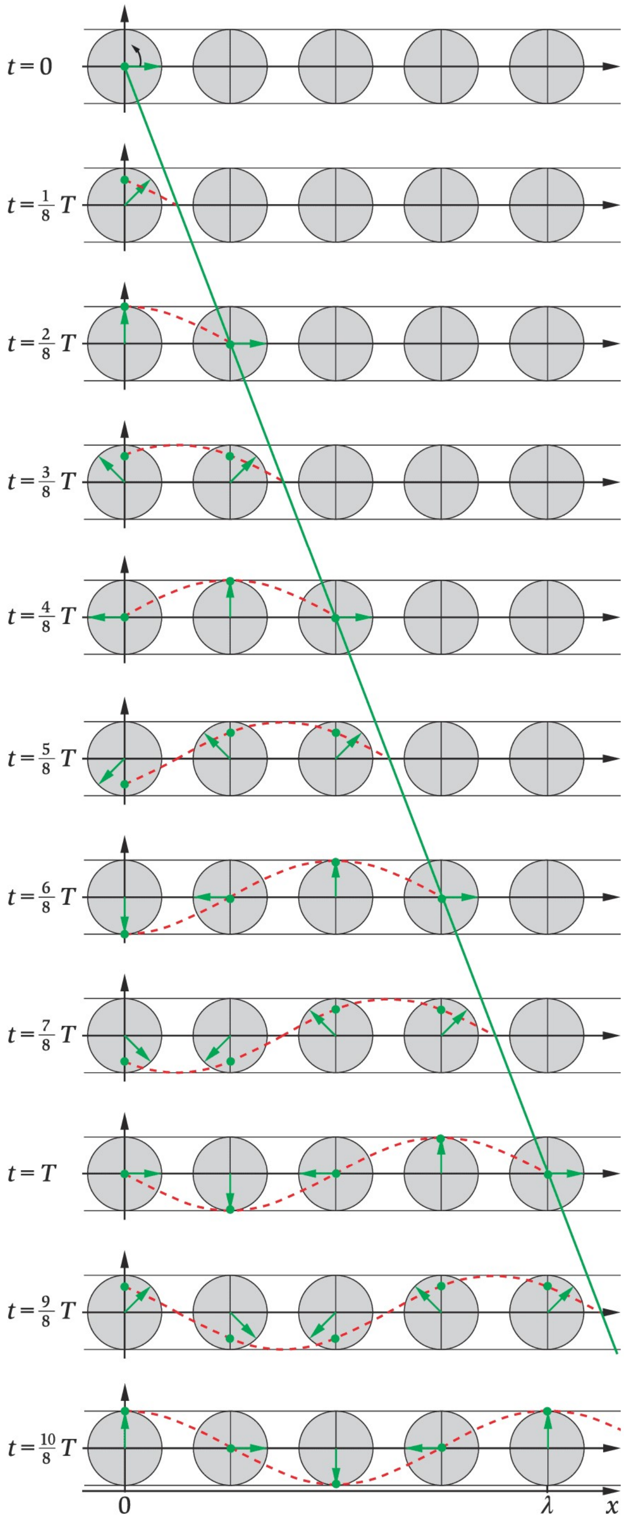
Ausbreitung der harmonischen Welle – Eine Welle mit der **Schwingungsdauer** T breitet sich nach rechts auf einem Medium aus (Bild **B3**). Dabei werden ausgewählte Oszillatoren mit regelmäßigem Abstand betrachtet. Somit kann jeder Oszillator mit Hilfe eines eigenen Zeigers dargestellt werden. Zu Beginn der Messung ($t = 0\ T$) beginnt der erste Oszillator bei $x = 0$ mit der Bewegung. Der Pfeil beschreibt die Lage eines Oszillators. Seine Stellung gibt dessen **Phase** an, seine y-Komponente die Elongation s. Die Ruhelage entspricht dem **Phasenwinkel** $\varphi = 0$. Es wird vereinbart, dass die Drehrichtung gegen den Uhrzeigersinn verläuft. Am Ende einer vollständigen Schwingung, also nach $t = T$, entspricht die Phase wieder der Position zu Beginn.

Räumliche Perpektive zu einem Zeitpunkt: In Bild **B3** breitet sich die Störung mit zunehmender Zeit nach rechts aus. Es entsteht ein Bild der Welle, das die Phasen der verschiedenen Oszillatoren zum gleichen Zeitpunkt zeigt. Dabei ist der Pfeil, der die Phase darstellt, zwischen benachbarten Oszillatoren immer um den gleichen Winkel weitergedreht. Die Phasendifferenz benachbarter Oszillatoren ist also konstant. Zum Zeitpunkt $t = \frac{6}{8}\ T$ hat sich die Störung bereits vier Oszillatoren nach rechts ausgebreitet. Zu $t = T$ erreicht sie den fünften Oszillator. Dieser weist die gleiche Phase wie der erste Oszillator auf. Mit der räumlichen Perspektive lässt sich der Abstand bestimmen, den zwei gleichphasige Oszillatoren aufweisen; er wird als **Wellenlänge** λ bezeichnet.

Zeitliche Perspektive an einem Ort: Die Bewegung bzw. Phase eines einzelnen Oszillators (beispielsweise des zweiten) kann aus der zeitlichen Perspektive beschrieben werden. Es dauert bis $t = \frac{2}{8}\ T$, bis die Welle ihn erreicht. Erst zu diesem Zeitpunkt beginnt seine Bewegung. Seine Anfangsposition erreicht er wieder bei $t = \frac{10}{8}\ T$. Aus der zeitlichen Perspektive kann man die Zeit ermitteln, die *ein* Oszillator für eine vollständige Schwingung benötigt.

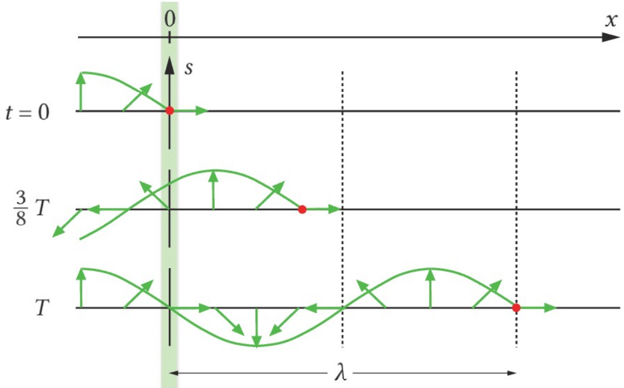
Räumlich-zeitliche Perspektive: Die kombinierte räumlich-zeitliche Perspektive zeigt, wie die Schwingungsphase zeitlich *und* räumlich verläuft (grüne diagonale Linie in Bild **B3**). Die Linie beschreibt die Bewegung der Phase über Ort und Zeit und ermöglicht es, die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu bestimmen, die zur Abgrenzung von anderen möglichen Geschwindigkeiten **Phasengeschwindigkeit** c genannt wird. Der Begriff betont, dass die Welle nicht Materie, sondern lediglich Information (wie die Phase) und Energie transportiert.

Nach Ablauf der Schwingungsdauer T hat sich die Welle so weit auf dem Medium ausgebreitet, dass alle möglichen Phasen von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ nebeneinander liegen. Dieser Abstand entspricht der Wellenlänge λ.



B3 *Zeitlicher und räumlicher Blick auf eine harmonische Welle*

5.4 Wellen in Gleichungen



B1 *Momentaufnahmen einer fortschreitenden Welle zu den Zeiten $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{3}{8}\,T$ und $t_3 = T$*

Die Phase wandert. Eine fortschreitende Welle kann durch Zeiger beschrieben werden. Jeder Zeiger rotiert mit der Frequenz f am Ort des schwingenden Teilchens und gibt dessen Amplitude, Phase und Elongation zu jedem Zeitpunkt wieder.

Bild **B1** zeigt dies in drei Momentaufnahmen. Zwischen der ersten und der dritten Aufnahme haben alle Zeiger eine vollständige Umdrehung ausgeführt. Es ist also eine ganze Periodendauer T vergangen. Während dieser Periodendauer T ist jede Phase der Welle um die Wellenlänge λ weitergewandert, und zwar mit der konstanten Geschwindigkeit c. Für diese Geschwindigkeit gilt

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T}.$$

Wegen $f = \frac{1}{T}$ folgt der für alle Wellen wichtige Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit c, Wellenlänge λ und Frequenz f:

$$c = \lambda \cdot f.$$

Die Frequenz f wird ausschließlich vom Erreger bestimmt; die Geschwindigkeit c hängt dagegen von der Beschaffenheit des Trägers ab, die Wellenlänge λ von beiden.

! Merksatz

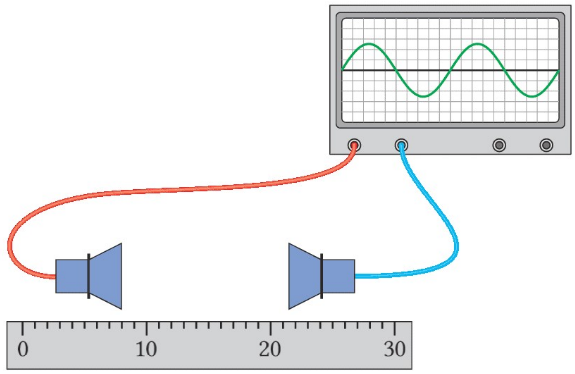
Die starre Form der Welle und damit die Phase schreitet mit der Geschwindigkeit c längs des Trägers fort. Innerhalb einer Periodendauer T legt sie dabei eine Wellenlänge λ zurück.
Für die Geschwindigkeit der Welle gilt:

$$c = \lambda \cdot f.$$

In Versuch **V1** wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Schallwellen gemessen.

V1 Ausbreitungsgeschwindigkeit

Ein Ultraschallsender („Lautsprecher“) und ein Ultraschallempfänger („Mikrofon“) stehen sich gegenüber. Die Anschlüsse des Sendeschallkopfes sind mit dem Triggereingang eines Oszilloskops verbunden. Die Sendeschwingung „ruht“ so, wenn sie im Kanal I gezeigt wird. Der Empfänger ist mit Kanal II des Oszilloskops verbunden. Sein *s*-*t*-Diagramm, also die Schwingung am Ort des Empfängers, sieht man auf dem Bildschirm.



Nun entfernt man den Empfänger langsam vom Sender. Die Schallwelle muss jetzt eine zunehmend größere Strecke bis zum Empfänger zurücklegen. Eine vorher am linken Bildschirmrand beobachtete Phase (z. B. →) erreicht den Ort des Empfängers nun später. Im Kanal II rutscht deshalb der Kurvenzug nach rechts.

Man vergrößert die Entfernung nun so weit, bis die Schwingung am Bildschirm um 20 Periodendauern zurückliegt, was 20 Wellenlängen entspricht. Dazu muss man den Empfänger um $\Delta x = 20\lambda = 17$ cm vom Sender fortziehen. Daraus ergibt sich die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{17\text{ cm}}{20} = 0{,}85\text{ cm} = 8{,}5\text{ mm}.$$

Die Frequenz $f = 40{,}1$ kHz des Senders misst man am Oszilloskop.

Ergebnis:
In dem Versuch ist die Wellenlänge $\lambda = 8{,}5$ mm bei einer Frequenz von $f = 40{,}1$ kHz. Die Schallgeschwindigkeit ist demnach:

$$c = \lambda\, f = 8{,}5 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot 40{,}1 \cdot 10^{3}\text{ Hz} = 341\text{ ms}.$$

Beispielaufgabe

Eine Querwelle schreite mit der Geschwindigkeit $c = 2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ längs der x-Achse fort. Der Erreger am Ort $x = 0$ m schwingt sinusförmig mit der Frequenz $f = 50$ Hz und der Amplitude $s = 2{,}0$ cm und befindet sich zur Zeit $t = 0$ s am Beginn einer neuen Schwingung in der Ruhelage.

a) Zeichnen Sie die Welle zu den Zeiten $t_1 = 0{,}050$ s und $t_2 = 0{,}055$ s.

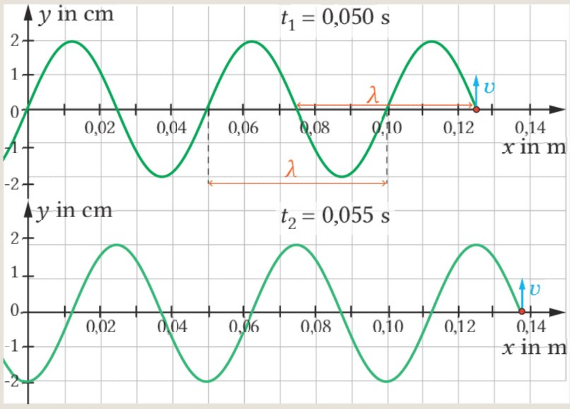
b) Zeichnen Sie das Diagramm der Teilchenschwingung am Ort $x = 3{,}75$ cm.

c) Erläutern Sie, welcher grundlegende Unterschied zwischen den Kurven aus a) und b) besteht.

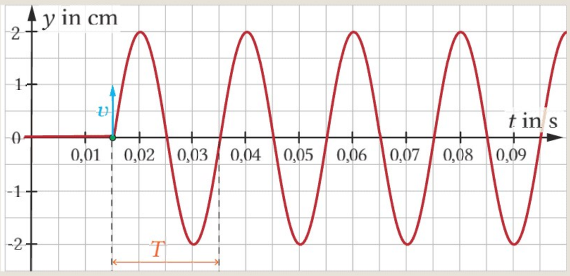
Lösung:

a) Mit $c = 250\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ist die Wellenfront nach $t_1 = 0{,}050$ s bei $s = 250\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 0{,}050\text{ s} = 12{,}5$ cm. Die Wellenlänge bestimmt man zu $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{50\text{ Hz}} = 0{,}05\text{ m} = 5$ cm.

Da die Schwingung sinusförmig beginnt, startet der Erreger eine Schwingung nach oben.



b) Die Welle braucht bis zum Ort $x = 3{,}75$ cm genau $t = \frac{s}{c} = \frac{3{,}75\text{ cm}}{250\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0{,}015$ s. Die Periodendauer ist $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50\text{ Hz}} = 0{,}02$ s.



c) Die Bilder in Teilaufgabe a) stellen Momentaufnahmen der Wellen dar (y-x-System). Das Bild in Teilaufgabe b) stellt den zeitlichen Verlauf der Schwingung eines Oszillators dar (y-t-System).

Exkurs: Wellengleichung

Der Ort, an dem sich ein Oszillator zu einem bestimmten Zeitpunkt t gerade befindet, wird durch die Koordinaten x der Gleichgewichtslage und der Auslenkung s aus dieser Gleichgewichtslage (= Elongation) gekennzeichnet. Der Wellenerreger zwingt dem ersten Oszillator bei $x = 0$ eine harmonische Schwingung auf. In diesem Fall gilt das s-t-Gesetz einer harmonischen Schwingung für den Ort $x = 0$:

$$s_0(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Aufgrund der Kopplung der Körperchen wandert die Störung mit der Geschwindigkeit c entlang der x-Achse. Ein zweiter Körper P wird in der Zeit $\Delta t = \frac{x_P}{c}$ von der Störung erfasst. Der Körper P schwingt also um Δt verspätet:

$$s_P(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot (t - \Delta t)).$$

Ersetzt man Δt durch $\frac{x_P}{c}$, so erhält man für die Auslenkung am Ort P die Gleichung

$$s_P(t) = \hat{s} \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x_P}{c}\right)\right).$$

Wählt man an Stelle vom Ort P einen beliebigen Punkt mit der Entfernung x vom Ursprung, so gilt für die Auslenkung am Ort x zur Zeit t:

$$s(x;t) = \hat{s} \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right)\right).$$

Ersetzt man noch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ durch die Periodendauer und die Ausbreitungsgeschwindigkeit c durch $c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$, so erhält man

$$s(x;t) = \hat{s} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \left(t - x\,\frac{T}{\lambda}\right)\right).$$

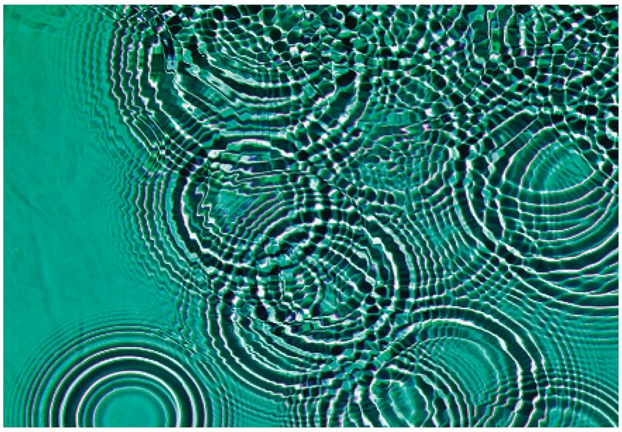
$$= \hat{s} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

Diese Gleichung hängt nur von den Größen Ort x, Zeit t, Periodendauer T und Wellenlänge λ ab und wird die Wellengleichung für fortschreitende Sinuswellen genannt.

Lösen Sie selbst

1 Die Auslenkung einer Welle wird durch den Term $s(x;t) = 0{,}26\text{ m} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{0{,}5\text{ s}} - \frac{x}{0{,}54\text{ m}}\right)\right)$ beschrieben. Berechnen Sie die Auslenkung s für die Zeit $t = 38$ s und den Ort $x = 13$ m. Zeigen Sie, dass $s = -0{,}080$ m ist.

5.5 Überlagerung von Wellen

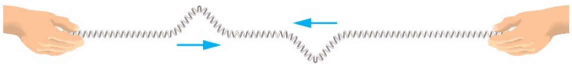


B1 *Wasserwellen durchdringen sich ungestört*

V1 Wellen begegnen sich

Man erzeugt an beiden Enden einer langgestreckten Schraubenfeder (oder eines langen Seils)
a) gleichgerichtete kurze Querstörungen mit derselben Amplitude,

b) entgegengesetzte kurze Querstörungen mit derselben Amplitude.

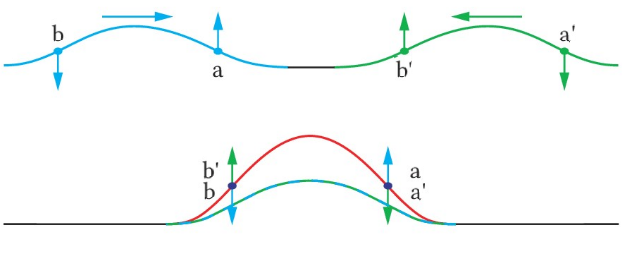


Überlagerung gegenläufiger Wellen – Bei Regen erzeugt jeder Regentropfen auf der Wasseroberfläche eine Kreiswelle. Kommt nun eine andere Welle angerollt, hervorgerufen z. B. von einem Schiff, so lassen sich die Kreiswellen dadurch nicht beirren. Sie reiten auf dem Rücken dieser anderen Welle und breiten sich dabei weiter aus: Die beiden Wellen überlagern sich ungestört. In Bild **B1** sind zwei Kreiswellen zu sehen, die durch Regentropfen oder zwei ins Wasser geworfene Steine entstanden sein können. Obwohl sie sich teilweise gegenseitig durchdrungen haben, blieb ihre Gestalt unversehrt erhalten
Nun ist die Wasseroberfläche ein zweidimensionaler Wellenträger. Was auf einer Linie (etwa der x-Achse in Bild **B1**) passiert, kann man einfacher mit Versuch **V1** herausfinden. An den Enden einer langgestreckten Schraubenfeder erzeugt man einzelne gleichgerichtete (**V1a**) oder entgegengesetzte (**V1b**) Querstörungen und lässt sie aufeinander zulaufen. Das überraschende Ergebnis: In Versuch **V1a** laufen die Wellenberge aufeinander zu (Bild **B2a**), überlagern sich zu einem einzigen Wellenberg mit doppelter Amplitude und laufen anschließend unverändert weiter. In Versuch **V1b** laufen die beiden Störungen als Wellenberg und Wellental aufeinander zu (Bild **B2b**), löschen sich im Augenblick der Begegnung jedoch gegenseitig aus und gehen anschließend unversehrt auseinander. Wellen überlagern sich also, nehmen dabei eine andere Form an und laufen dann unversehrt weiter.
Die Bewegungsenergie in Ausbreitungsrichtung jeder der beiden Wellen bleibt zu jedem Zeitpunkt erhalten. Nach dem Superpositionsprinzip werden auch hier die Elongationen und Schnellevektoren a und a′ addiert. In Versuch **V1a** werden dadurch die Elongationen verdoppelt und und die Bewegungsenergie ist null. Bei **V1b** löschen sich die Elongationen gegenseitig aus, jedoch ist in dem Moment die Bewegungsenergie maximal.

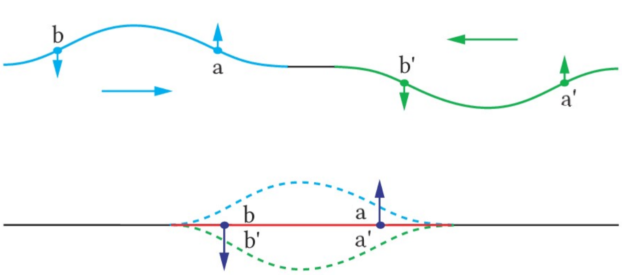
! Merksatz

Treffen Störungen an einer Stelle eines eindimensionalen Trägers zusammen, so addieren sich dort ihre Elongationen und Schnellen. Nach der Durchdringung laufen die Störungen unverändert weiter.

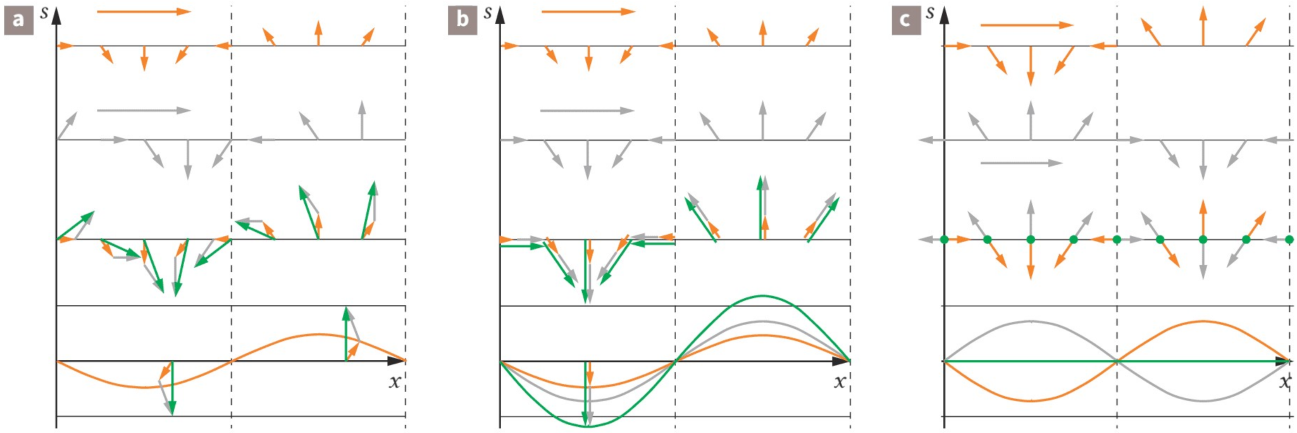
a



b



B2 *a) Zwei Wellenberge laufen aufeinder zu (oben). Begegnen sie sich, überlappen sie sich zu einem einzigen Wellenberg mit doppelter Amplitude (unten). b) Laufen Wellenberg und Wellental aufeinander zu (oben), löschen sich die Elongationen aus, wenn sich die beiden Störungen begegnen.*



B3 *a) Beliebige Interferenz* *b) Konstruktive Interferenz mit $\Delta\varphi = 0$* *c) Destruktive Interferenz mit $\Delta\varphi = \pi$ und $\hat{s}_1 = \hat{s}_2$*

Interferenz gleichlaufender Wellen – Was für einzelne Störungen gilt, lässt sich auch auf ununterbrochen fortlaufende Störungen – also Wellen – übertragen. Die Überlagerung gleichartiger Wellen bezeichnet man als **Interferenz**.
In Bild **B1** liefert die Interferenz ganz unterschiedliche Ergebnisse. Es gibt Bereiche, in denen sich in gleicher Richtung laufende Wellen überlagern, und Bereiche, in denen die Wellen aufeinander zulaufen. Betrachtet werden zunächst nur gleichlaufende Wellen mit gleicher Wellenlänge λ im gleichen Medium, also auch mit gleicher Frequenz f, da $c = \lambda \cdot f$ gilt.
Es ist bereits aus **Kapitel 4.6** bekannt, dass zur Überlagerung zweier gleichfrequenter Schwingungen die Schwingungszeiger addiert werden. Bei der Überlagerung zweier Wellen addiert man jeweils die zwei Schwingungszeiger an jedem Ort (Bild **B3**).
Alle addierten Zeiger sind gleich lang, nur ihre Phase hängt vom Ort ab. Im weiteren Verlauf rotieren Einzelzeiger und resultierende Zeiger gemeinsam an ihrem Platz. Bild **B3** zeigt davon nur eine Momentaufnahme. Das Ergebnis der Addition hängt vom Phasenunterschied φ der Schwingungen ab und somit davon, wie weit die Wellenberge gegeneinander verschoben sind. Diesen im Wellenbild auffälligen Wegunterschied, den sogenannten **Gangunterschied δ**, gibt man häufig in Vielfachen oder Bruchteilen der Wellenlänge λ an. Zwischen Phasendifferenz $\Delta\varphi$ und Gangunterschied δ gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda}.$$

Folgende zwei wichtige Sonderfälle der Interferenz sind zu unterscheiden:

Konstruktive Interferenz: Die beiden Zeiger jeder Welle haben an jeder Stelle die gleiche Richtung, d. h., die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ ist null oder $k \cdot 2\pi$ für $k = 1, 2, \ldots$ Man sagt, die gleichlaufenden Wellen sind **in Phase**. Der Gangunterschied ist null oder $k \cdot \lambda$. Bild **B3b** zeigt eine solche konstruktive Interferenz ($\Delta\varphi = 0$) mit maximaler Amplitude. Wellenberg fällt auf Wellenberg und Wellental auf Wellental. Durch Addition der Elongationen und Schnellen findet man bei der Überlagerung eine Welle mit derselben Wellenlänge λ; die Amplituden addieren sich zur neuen Amplitude. Die resultierende Welle ist mit den beiden ursprünglichen Wellen in Phase und schreitet wie diese mit der gleichen Geschwindigkeit c in derselben Richtung fort.

Destruktive Interferenz: Die Zeiger sind jeweils entgegengesetzt gerichtet, die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ ist also π, 3π, 5π usw. Die beiden gleichlaufenden Wellen sind an jeder Stelle des Trägers **gegenphasig**. Ihr Gangunterschied δ beträgt $\frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \ldots$ oder allgemein $(2k-1) \cdot \frac{\lambda}{2}$. Sind die maximalen Auslenkungen gleich, also $\hat{s}_1 = \hat{s}_2$ (wie in Bild **B3c**), so entsteht eine Auslöschung längs der gesamten Ausbreitungsrichtung.

! Merksatz

Durch Interferenz zweier in gleicher Richtung laufenden Wellen entsteht eine mit gleicher Richtung und Geschwindigkeit fortschreitende Welle derselben Wellenlänge.
Konstruktive Interferenz mit maximaler Amplitude liegt für $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ bzw. $\delta = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ vor.
Destruktive Interferenz mit minimaler Amplitude liegt für $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ bzw. $\delta = \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \ldots$ vor.