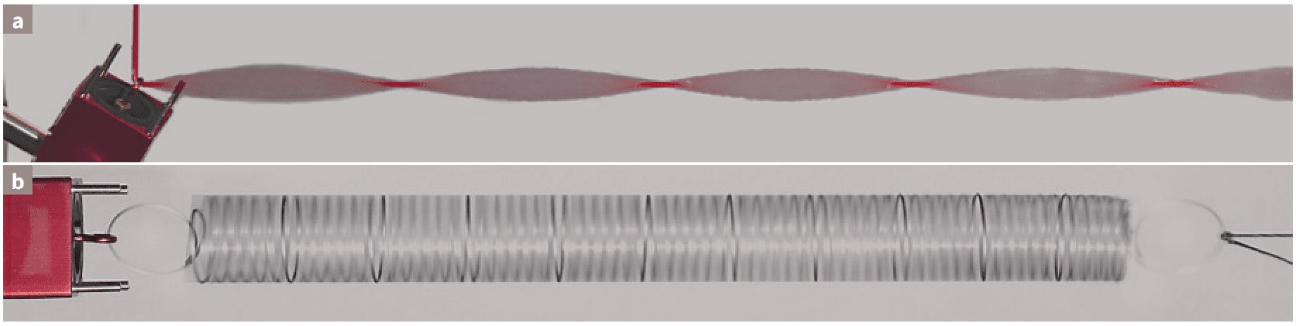
# 5.8 Eigenschwingung und Resonanz



**B1** *Mechanische stehende Wellen a) auf einem Seil und b) in einer Schraubenfeder*

**Wellen in begrenzten Medien –** Ein Erreger prägt einem Wellenträger jede von ihm vorgegebene Frequenz auf. Hat der Wellenträger ein festes Ende, so wird die Welle dort reflektiert. Elongation und Schnelle erfahren dabei einen Phasensprung. So entsteht in der Überlagerung von hin- und zurücklaufender Welle am festen Ende der Knoten einer stehenden Welle. Eine halbe Wellenlänge weiter entsteht der nächste Knoten und so weiter.

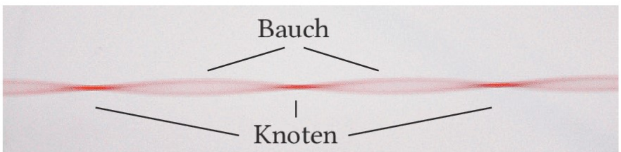
Bei der Anregung mit einer ganz bestimmten Frequenz $f_1$ in Versuch **V1** bildet sich auf dem beidseitig eingespannten Wellenträger eine stehende Welle mit kräftigem Schwingungsbauch aus. Der Abstand zwischen A und B entspricht der halben Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$. Erhöht man jetzt die Frequenz des Erregers ein wenig, so bricht die stehende Welle zusammen. Erst wenn man die Frequenz weiter erhöht, entsteht eine neue stehende Welle. Diese hat jetzt außer bei A und B einen zusätzlichen Knoten in der Mitte. Zwei Hälften der neuen Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ entsprechen nun der Länge des Wellenträgers. Bei weiterer Erhöhung der Frequenz wiederholt sich das Spiel wie in Bild **B2** mit mehr als drei Knoten.

## ! Merksatz

Bei einem Wellenträger der Länge $l$ mit zwei festen Enden treten stehende Wellen – man nennt sie auch **Eigenschwingungen** – nur auf, wenn $l$ ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist:

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

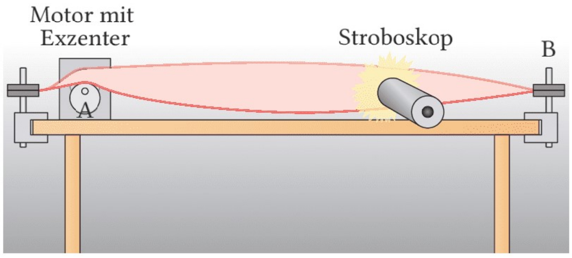
Der Abstand zweier Knoten beträgt immer $\frac{\lambda}{2}$.




**B2** *Zuordnung Knoten und Bäuche einer stehenden Seilwelle*

## V1 Ausbildung von stehenden Wellen

Es wird untersucht, bei welchen Frequenzen sich auf einem Gummiseil der Länge $l$ stehende Wellen ausbreiten.
Der Einsatz eines dynamischen Kraftsensors erlaubt die Bestimmung der Frequenz mittels Oszilloskop. Über den Motorregler wird die Frequenz so variiert, dass sich stehende transversale Wellen mit mindestens zwei Knoten ausbilden.




*Hinweise zum Aufbau:*

- Der Abstand Motor–Klemme B gibt die relevante Seillänge $l$ an.
- Die Zeiteinheit des Stroboskops ist so zu wählen, dass die Frequenz anhand des Schwingungsbildes bestimmt werden kann. Man sieht das Seil immer an derselben Stelle „stehen“.
- Wenn man keinen variablen Motorregler verwendet, dann kann man alternativ mit einem konstant drehenden Motor und einer variablen Seilspannung auf der rechten Seite mit Hilfe eines Kraftmessers arbeiten.

*Messwerte:*

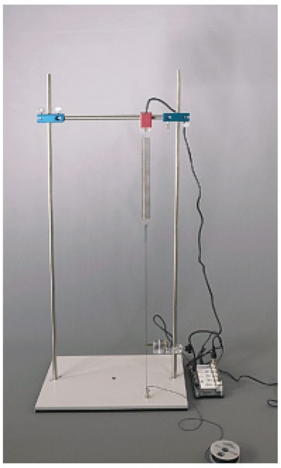
| Anzahl Knoten | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Frequenz $f$ in Hz | 27,0 | 53,2 | 84,7 | 111,1 |

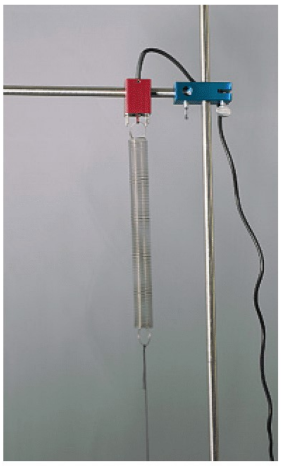
**T1** *Ermittelte Frequenzen bei einer Seillänge von $l$ = 41 cm*

## V2 Ausbreitungsgeschwindigkeit in einer Feder

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$ einer Welle zu ermitteln, müssen Wellenlänge und Frequenz gemessen werden. Stehende Wellen eignen sich wegen der zugänglichen Wellenlänge; dabei wird die Frequenz so variiert, dass die stehende Welle gut erkennbar ist. Ein Messsystem bestimmt die Frequenz der stehenden Welle.

*Erzeugung stehender Wellen:* Für den Basisaufbau werden ein dynamischer Kraftsensor, ein Motor und eine Schraubfeder benötigt. Das untere Ende der Feder wird mit einer Schnur am Magnethaken befestigt.
Über den Motorregler wird die Frequenz so variiert, dass sich stehende longitudinale Wellen auf der Feder der Länge $l = 13$ cm ausbilden. Die Frequenz wird langsam erhöht und die Anzahl der Knoten dokumentiert (Tabelle **T2**).





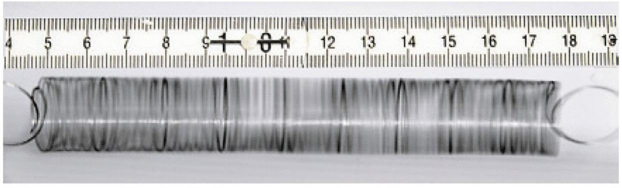
*Hinweise zur Durchführung:*
- Das obere Ende der Feder ist am Kraftsensor fixiert. Es wird davon ausgegangen, dass es sich um ein festes Ende handelt.
- Die Feder wird nur leicht gedehnt, so dass sie zwar gespannt ist, jedoch nicht den Kraftsensor überlastet.

*Messwerte:*

| Anzahl Knoten | 3 | 4 | 5 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequenz $f$ in Hz | 16,5 | 25,6 | 30,0 | 58,2 | 69,4 | 80,0 |

**T2** *Ermittelte Frequenzen bei einer Federlänge $l = 13$ cm*

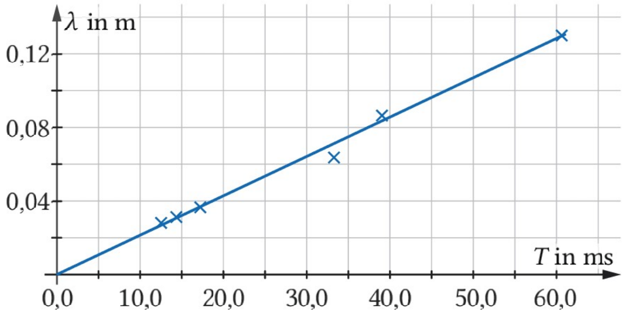
**Ausbreitungsgeschwindigkeit in einer Schraubenfeder –** Die Anzahl der Knoten sowie die halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ können in Versuch **V2** direkt an der Schraubenfeder abgelesen werden.



In den Knoten „steht" die Feder, die Bäuche erscheinen „verwischt". Die Wellenlänge ergibt sich aus dem doppelten Knotenabstand. Aus der Frequenz $f$ wird die Schwingungsdauer $T$ für die Auswertung ermittelt.

| Anzahl Knoten | 3 | 4 | 5 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ in Hz | 16,5 | 25,6 | 30,0 | 58,2 | 69,4 | 80,0 |
| $T$ in s | 60,6 | 39,1 | 33,3 | 17,2 | 14,4 | 12,5 |
| $\lambda$ in m | 0,13 | 0,09 | 0,07 | 0,04 | 0,03 | 0,03 |

Im $\lambda$-$T$-Diagramm zu Versuch **V1** liefert die Steigung der Ausgleichsgeraden die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_{\text{Feder}}$.

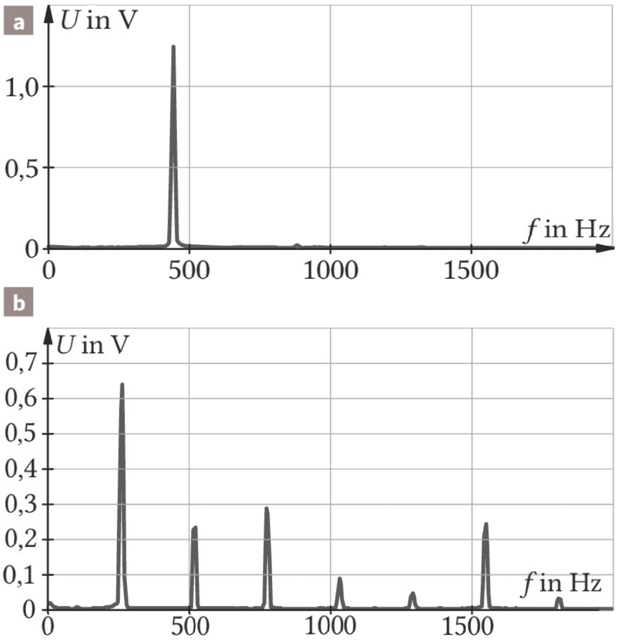



Mit Hilfe des $\lambda$-$T$-Diagramms ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Feder bestimmbar:

$$c_{\text{Feder}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}13\ \text{m}}{60{,}6\ \text{s}} \approx 0{,}00214\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2{,}14\ \frac{\text{mm}}{\text{s.}}.$$

## Lösen Sie selbst

**1** Wenn man einen 1,2 m langen, beidseitig eingespannten Gummischlauch mit $f = 8{,}0$ Hz anregt, bildet sich eine Querwelle mit 2 Bäuchen aus.
a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich eine Querstörung auf diesem Gummischlauch ausbreitet.
b) Berechnen sie die Eigenfrequenz für drei Bäuche.




**B1** *a) Fourieranalyse einer 440 Hz Stimmgabel*
*b) Fourieranalyse eines 259 Hz Monochords*

**Eigenfrequenzen –** Besonders einfach ist die Untersuchung von Eigenschwingungen bei einer Stimmgabel, die nur einen Ton mit 440 Hz erzeugt. Bild **B1** zeigt das Resultat einer Fourieranalyse mit Hilfe der App phyphox. Die Fourieranalyse ist eine schnelle mathematische Analysemethode, mit der man die Frequenzen und Amplituden gleichzeitig ablaufender Schwingungen findet. In Bild **B1a** erkennt man sehr schnell, dass es sich bei der Stimmgabel um eine Welle mit 440 Hz handeln muss, da dort der *Peak*, also die Frequenz mit der größten Auslenkung, liegt.
Spannender wird die Untersuchung an einem Monochord wie in der **Abiturvorbereitung** an einer Saite der Länge $l$. Man nimmt die Schwingung des Monochords als Ton wahr. Neben der Grundfrequenz $f_1 = 259\ \text{Hz} = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{2l}$ (zwei feste Enden) zeigt die Fourieranalyse (Bild **B1b**) aber noch weitere **Eigenfrequenzen**: die 2. Harmonische $f_2 = 2 \cdot f_1 = 518\ \text{Hz}$, die 3. Harmonische $f_3 = 3 \cdot f_1 = 777\ \text{Hz}$ usw.

## Merksatz

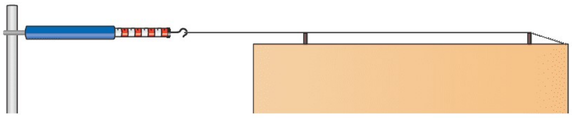
Ein an beiden Enden fest eingespannter eindimensionaler Wellenträger der Länge $l$ kann zu stehenden Wellen mit nur ganz bestimmten Frequenzen angeregt werden, den Eigenfrequenzen. Sie betragen

$$f_n = n \cdot f_1 = n \cdot \frac{c}{\lambda_1} = n \cdot \frac{c}{2l}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

($c$: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle)

## Abiturvorbereitung

In einem Versuch soll der Zusammenhang $F \sim l^2$ nachgewiesen werden. Dazu wird eine Saite der Länge $l$ auf einem beweglichen Steg eingespannt und die Spannkraft $F$ gemessen. Anschließend wird durch Anzupfen die Grundfrequenz 440 Hz erzeugt.



Die Messwerte zum Versuch sind wie folgt:

| $F$ in N | 5,0 | 10,0 | 15,0 | 20,0 | 30,0 | 50,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l$ in m | 0,191 | 0,270 | 0,330 | 0,381 | 0,467 | 0,602 |

a) Zeigen Sie die Proportionalität $F \sim l^2$.
b) Bestimmen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$ und stellen Sie $c$ in Abhängigkeit von $F$ in einem Schaubild dar.

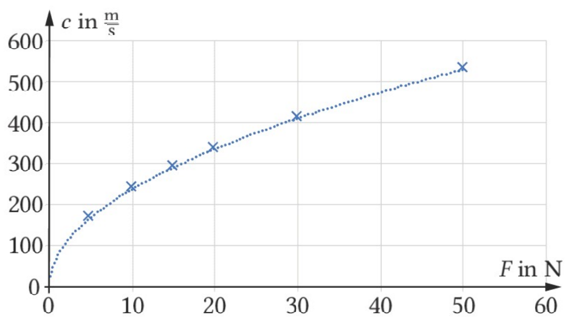
*Lösung*:
a) Für die Werte der Tabelle wird der Quotient $\frac{F}{l^2}$ gebildet. Von Messungenauigkeiten abgesehen ist er konstant, es gilt somit die Aussage.

| $\frac{F}{l^2}$ in $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ | 137,1 | 137,2 | 137,7 | 137,8 | 137,6 | 138,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|

b) Zur Bestimmung der Geschwindigkeit müssen 2 Gleichungen gelöst werden: 1) $c = \lambda \cdot f$; 2) $l = \frac{\lambda}{2}$, da auf einen Wellenträger mit zwei festen Enden in der Grundschwingung eine halbe Wellenlänge zwischen zwei Knoten „passt“. Auflösen der 2. Gleichung nach $\lambda$ und Einsetzen in die 1. Gleichung ergibt $c = 2 \cdot l \cdot f$ und damit die Tabellenzeile:

| $c$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ | 168,1 | 237,6 | 290,4 | 335,3 | 411,0 | 529,8 |
|---|---|---|---|---|---|---|

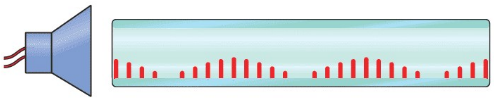
Mit diesen Daten kann das $c$-$F$-Diagramm erstellt werden.



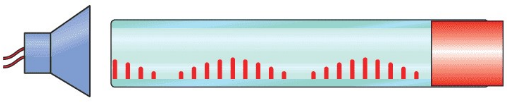
## V1 Kundtsche Röhre

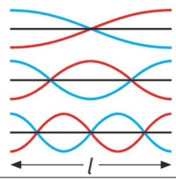
In einer Glasröhre ist etwas Korkmehl gleichmäßig über die ganze Länge verteilt. Vor das eine offene Ende der Glasröhre wird ein Lautsprecher mit angeschlossenem Tongenerator gestellt.

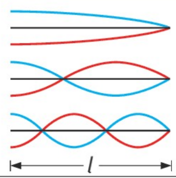
a) Zunächst bleibt das andere Ende offen.



b) Dann wird das andere Ende luftdicht abgeschirmt.



| a Schwingungsform | $f$ | max. Elongationen | $l$ |
|---|---|---|---|
| 1. Harmonische | $1\,\frac{c}{2l}$ |  | $\frac{\lambda}{2}$ |
| 2. Harmonische | $2\,\frac{c}{2l}$ | | $\frac{2\lambda}{2}$ |
| 3. Harmonische | $3\,\frac{c}{2l}$ | | $\frac{3\lambda}{2}$ |

| b Schwingungsform | $f$ | max. Elongationen | $l$ |
|---|---|---|---|
| 1. Harmonische | $1\,\frac{c}{4l}$ |  | $\frac{\lambda}{4}$ |
| 2. Harmonische | $3\,\frac{c}{4l}$ | | $\frac{3\lambda}{4}$ |
| 3. Harmonische | $5\,\frac{c}{4l}$ | | $\frac{5\lambda}{4}$ |

**B2** *Eigenschwingungen a) bei zwei freien Enden , b) bei einem freien und einem festen Ende*

**Begrenzte Luftsäulen zeigen Resonanz.** Im Versuch **V1a** umschließt eine Glasröhre eine an beiden Enden freie Luftsäule. Bei bestimmten an einem Ende erzeugten Tonschwingungen zeigen sich in dieser **kundtschen Röhre** heftige Resonanzerscheinungen. Stehende Wellen mit Bäuchen und Knoten haben sich gebildet. Die Anzahl der Knoten hängt von der Frequenz ab. An den Enden befinden sich aber immer Schnellebäuche. Korkmehl im Rohr wird in den Schnellebäuchen heftig aufgewirbelt. Hier handelt es sich um Längswellen.
Damit Eigenschwingungen entstehen, müssen die Wellen an beiden Enden des Wellenträgers reflektiert werden. Nach jeweils zweifacher Reflexion muss eine Welle wieder gleichphasig mit anderen gleichlaufenden Wellen aufeinandertreffen. Dies gelingt nur bei bestimmten Frequenzen, den Eigenfrequenzen. Anders als bei dem beidseitig fest eingespannten Gummiband können sich die Luftteilchen hier an den Enden frei bewegen. Die Reflexionen erfolgen also ohne Phasensprung (der Schnelle), sodass an beiden Enden Schnellebäuche entstehen (Bild **B2a**).
Es gilt also:

- An beiden freien Enden des Trägers muss sich ein Schnellebauch befinden.
- Die kleinste so erzeugbare Eigenschwingung hat eine Wellenlänge von $2l$.

**Ein festes und ein freies Ende –** In Versuch **V1b** wird das dem Lautsprecher abgewandte Ende der Röhre mit einem Stopfen verschlossen. Das aufgewirbelte Korkpulver zeigt, dass auch in diesem Fall Eigenschwingungen der Luftsäule auftreten. Doch sind die Frequenzen, bei denen sie sich bilden, anders als vorher (Bild **B2b**).

Es gilt:

- Am freien Enden des Trägers muss sich ein Schnellebauch befinden, am feste Ende ein Schnelleknoten.
- Die kleinste so erzeugbare Eigenschwingung hat eine Wellenlänge von $4l$.

## ! Merksatz

Bei einem Wellenträger der Länge $l$ mit zwei unterschiedlichen Enden treten stehende Wellen auf, wenn für $l$ gilt:

$$l = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{4}.$$

Der Abstand zwischen zwei Knoten entspricht einer halben Wellenlänge.

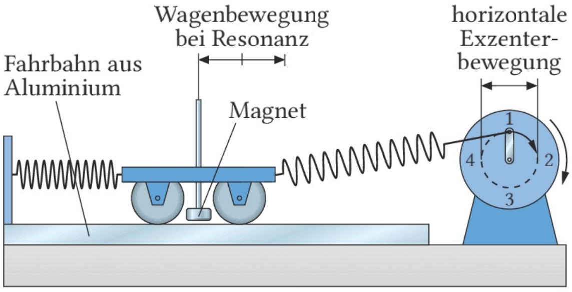
## Lösen Sie selbst

**1** Auf einem Gummiseil der Länge 20 cm entsteht bei einer Anregung mit $f = 20$ Hz eine stehende Welle mit drei Knoten.
a) Fertigen Sie eine Skizze des Aufbaus an, um diese Messdaten zu erhalten, sowie eine Skizze der stehenden Welle.
b) Erläutern Sie das Zustandekommen der stehenden Welle mit Hilfe des Zeigerformalismus. Fertigen Sie dazu unterstützende Skizzen an.
c) Bestimmen Sie Wellenlänge $\lambda$ und Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$ der Welle.

**2** Berechnen Sie für eine 34 cm lange, luftgefüllte Röhre die Frequenzen der 1., 2. und 3. Harmonischen, wenn a) beide Enden offen sind, b) ein Ende geschlossen ist.

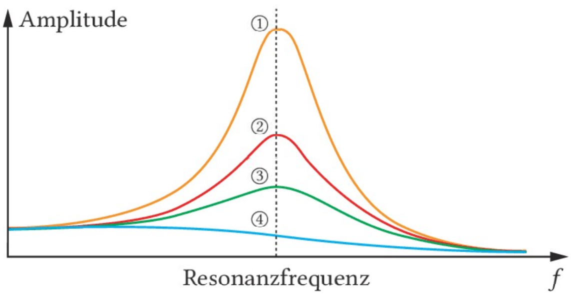
## V1 Dämpfung und ihre Aufhebung

Einem schwingenden Wagen (Bild **B1**) wird durch eine Wirbelstrombremse Energie entzogen. Je näher der Magnet an der Fahrbahn ist, um so größer sind Bremskraft und Dämpfung.




**B1** *Horizontaler Schwinger mit Dämpfung*

Das schwingende System verliert also Energie an seine Umgebung, ohne Energienachschub nimmt die Schwingungsamplitude demnach ab. Eine Schwingung, die so praktisch zum Erliegen kommt, nennt man eine **gedämpfte Schwingung**. Um eine ungedämpfte Schwingung zu erhalten, muss dem System deshalb Energie zugeführt werden. Diese liefert in Bild **B1** ein Motor mit Exzenterantrieb. Er zwingt dem Wagen – nach einer kurzen Einschwingphase – seinen Rhythmus auf.
Dabei beobachtet man, dass die Amplitude des schwingenden Wagens umso größer wird, je besser die Frequenz des Exzenters mit der Frequenz des sich selbst überlassenen Systems – seiner *Eigenfrequenz* – übereinstimmt. Dieser Zustand, in dem der Wagen maximale Amplitude erreicht, heißt **Resonanz**, seine Frequenz die **Resonanzfrequenz**. Trägt man die Schwingungsamplitude in Abhängigkeit von der Frequenz auf, so erhält man eine Resonanzkurve (Bild **B2**).




**B2** *Resonanzkurve bei unterschiedlicher Dämpfung, die von ① nach ③ zunimmt. Bei ④ kommt es schon nicht mehr zur Resonanz.*

**B3** *Die Millennium Bridge in London führt über die Themse.*

**Anregung mit Eigenfrequenz gibt Resonanz –** Nicht nur bei Schwingungen kann es zur Resonanz kommen (Versuch **V1**). Auch ein beidseitig eingespannter Wellenträger bildet eine stehende Welle aus, wenn er mit einer seiner Eigenfrequenzen von außen angeregt wird. Ohne weitere Erregung klingen diese Eigenschwingungen mit der Zeit ab. Bleibt die Erregerschwingung aber bestehen, so wird dem Wellenträger ständig Energie zugeführt. Die Amplitude in den Schwingungsbäuchen wächst immer weiter – sie kann dabei viel größer werden als die Amplitude des Erregers. Es tritt **Resonanz** ein. Dabei kann der Wellenträger schließlich durch eine sogenannte **Resonanzkatastrophe** zerstört werden.

Aus diesem Grund musste die im Jahr 2000 eröffnete Londoner **Millennium Bridge**, eine Fußgängerbrücke über die Themse, bereits drei Tage nach der Eröffnung wieder geschlossen werden: Tausende Besucher versetzten am Eröffnungstag die Brücke in ungewollte Schwingungen. Erst nachdem Flüssigkeitsdämpfer angebracht worden waren, konnte die „Wackelbrücke“ wieder freigegeben werden.

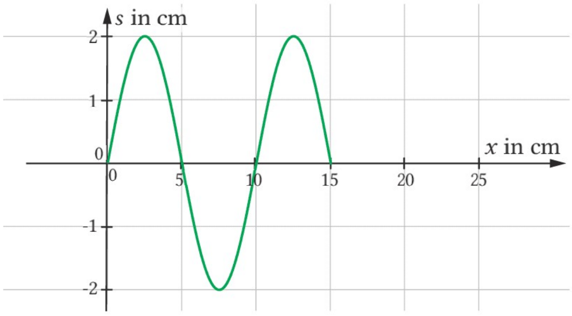
Deshalb wird die Eigenschwingung nur so weit aufgeschaukelt, bis die während einer Periode in den Träger hineingesteckte Energie gerade so groß ist wie die nach außen abgegebene.

## ! Merksatz

Wird ein zu Eigenschwingungen fähiger Wellenträger mit einer seiner Eigenfrequenzen angeregt, so tritt Resonanz ein.

## Lösen Sie selbst

**1** Auf einem linearen Wellenträger breitet sich eine Welle aus. Der Wellenerreger befindet sich am linken Rand ($x = 0$ cm) und beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ s mit der Frequenz 4 Hz harmonisch zu schwingen. Das Diagramm zeigt das Momentanbild des Wellenträgers zum Zeitpunkt $t_1$.




a) Zeichnen Sie das $s$-$t$-Diagramm des Erregers im Zeitintervall $0 \leq t \leq 0{,}5$ s. Bestimmen Sie dazu die Periodendauer der Schwingung.
b) Berechnen Sie, wo sich der Erreger nach 0,125 s befindet. Wann befindet sich der Erreger im oberen Umkehrpunkt?
c) Bestimmen Sie die Wellenlänge der Welle auf dem Wellenträger. Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.
d) Geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt $t_1$ das Momentanbild des Wellenträgers gezeichnet wurde.
e) Zeichnen Sie das Momentanbild des Wellenträgers zum Zeitpunkt $t = 0{,}5625$ s.
f) Zeichnen Sie das Schwingungs-Zeit-Diagramm des Teilchens, das sich am Ort $x = 10$ cm befindet.

**2** Auf einem geradlinigen Träger der Länge 15 cm breitet sich eine Querwelle mit der Geschwindigkeit $4\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ von links nach rechts aus. Das erste Teilchen beginnt zur Zeit $t = 0$ s mit einer harmonischen Schwingung nach unten. Ihre Frequenz beträgt 1,0 Hz, die Amplitude ist 1,5 cm.
a) Zeichnen Sie zwei Momentanbilder der Welle zu den Zeiten $t = 3{,}0$ s bzw. $t = 3{,}25$ s.
b) Das rechte Ende des Trägers ist frei. Zeichnen Sie ein Momentanbild der Welle, die zur Zeit $t = 5{,}0$ s durch die Überlagerung der ursprünglichen und der reflektierten Welle entstanden ist.
c) Nun sei das rechte Ende des Trägers fest. Wie sieht dann die Welle zur Zeit $t = 5{,}0$ s aus?

**3** Auf einem beidseitig fest eingespannten geradlinigen Träger der Länge $l = 1{,}00$ m hat sich eine stehende Welle mit 4 Bäuchen gebildet. Erhöht man die Erregerfrequenz um 15 Hz, so stellt sich ein weiterer Bauch ein. Bestimmen Sie die Frequenzen dieser beiden Eigenschwingungen.

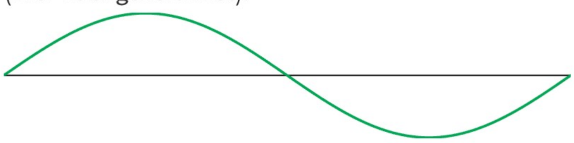
**4** In den 15 cm voneinander entfernten Punkten $E_1$ und $E_2$ einer Wasseroberfläche werden kreisförmige Querwellen der Amplitude 1,5 cm erzeugt; ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit ist $25\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Die Erreger schwingen harmonisch mit $f = 5{,}0$ Hz (Beginn zur Zeit $t = 0$ s nach oben). Zeichnen Sie den eindimensionalen Ausschnitt aus der Welle, die sich zu den Zeiten 0,65 s, 0,70 s, 0,75 s längs $E_1E_2$ gebildet hat.

**5** Ein (Staubsauger-)Rohr filtert aus Umweltgeräuschen bestimmte Töne durch Resonanz heraus. Bei einer Länge von 1,02 m hört man einen Ton, der etwa dem $e^1$ (330 Hz) entspricht. Erklären Sie dies.

**6** a) Ein Standzylinder wird langsam mit Wasser gefüllt. In seiner Nähe wird eine Stimmgabel (440 Hz) angeschlagen. Bei welchen Füllhöhen entsteht Resonanz?
b) Diskutieren Sie: Es ergeben sich andere Resonanzstellen, wenn sich im Zylinder nicht Luft, sondern Kohlenstoffdioxid befindet ($c = 267\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$).

**7** Der Gehörgang des menschlichen Ohres entspricht angenähert einer Röhre von etwa 35 mm Länge. Bestimmen Sie die kleinste Resonanzfrequenz (1. Harmonische) und diskutieren Sie eine mögliche biologische Bedeutung.

**8** Jemand behauptet, er habe eine Momentaufnahme einer stehenden Welle gemacht und legt ein Foto vor (hier nachgezeichnet).



a) Diskutieren Sie den Sachverhalt. Belegen Sie Ihre Behauptung durch entsprechende Zeichnungen. Zeichnen Sie dazu den Zustand der Welle kurz nach dem Zeitpunkt der Aufnahme.
b) Zeichnen Sie für beide Fälle Schnellevektoren zur Welle.