

## 7.3 Interferenz am Gitter

**Nicht heller, aber schärfer** – Mit einer größeren Anzahl an Spalten erwartet man im Doppelspaltenexperiment auch ein helleres Interferenzbild – die Wellenlänge des Lichts sollte damit besser zu bestimmen sein. Versuch V1 zeigt jedoch das Gegenteil: Das Interferenzbild wird kaum heller. Es wird aber schärfer, Minima und Maxima sind besser voneinander abzugrenzen.

Bei einer großen Zahl von Spalten mit konstantem Abstand  $g$  spricht man von einem **optischen Gitter**. Die Größe  $g$  wird **Gitterkonstante** genannt.

## **! Merksatz**

Ein optisches Gitter besteht aus vielen Spalten, deren Mitten den Abstand  $g$  aufweisen. Dieser Abstand wird Gitterkonstante genannt.

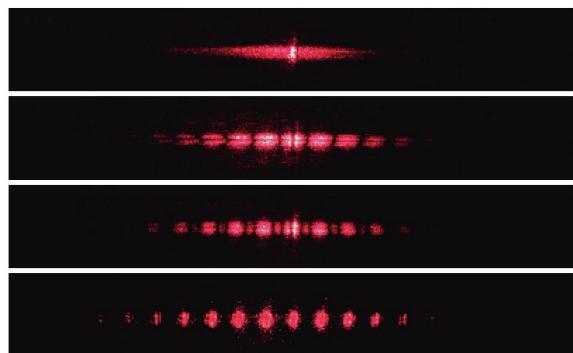
**Vergleich von Doppelspalt und Gitter** – Zur Erklärung des Ergebnisses von Versuch **V1** hilft wieder der Zeigerformalismus. Als Beispiel wird ein Gitter mit 16 einzelnen Spalten betrachtet. Jeder dieser 16 Spalte wirkt als Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Für jeden Ort auf dem Beobachtungsschirm sind demnach 16 Zeiger unter Berücksichtigung der Phasenlage zu addieren. Analog zum Doppelspalt wird angenommen, dass benachbarte Lichtwege zu einem Maximum einen Wegunterschied von einem Vielfachen der Wellenlänge aufweisen. Alle Zeiger sind in Phase und addieren sich zu maximaler Länge. Die markante Helligkeit im Maximum ist also mit Hilfe des Zeigermodells erklärbar (Bild **B2a**).

In Bild **B2b** sind ebenfalls die 16 Zeiger addiert. Der resultierende Pfeil hat hier aber die Länge null. Es liegt also ein Minimum vor. Der Ort überrascht jedoch: Er liegt nicht in der Mitte zwischen zwei Maxima.

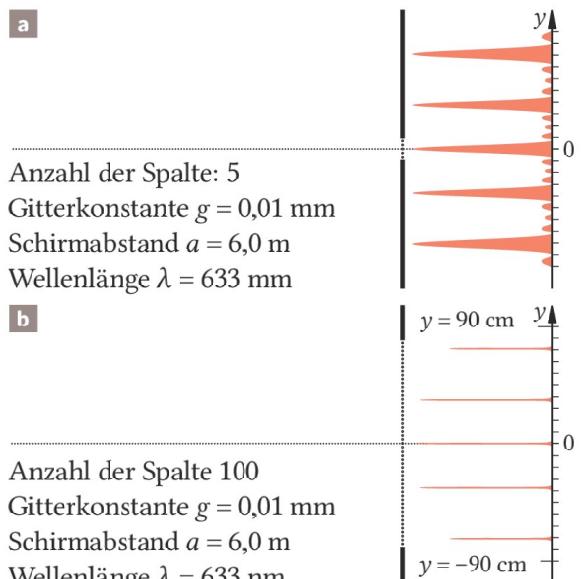
Damit der Vollkreis (Winkel  $2\pi$ ) entsteht, müssen diese 16 Zeiger jeweils einen Phasenunterschied von  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{16}$  aufweisen. Der zugehörige Gangunterschied beträgt somit  $\frac{\lambda}{16}$ , der Ort minimaler Intensität liegt also nahe beim Maximum. Bei 1000 Spalten würde ein Gangunterschied von  $\frac{\lambda}{1000}$  genügen. Das Minimum rückt also mit wachsender Spaltanzahl näher an das Maximum, welches dadurch immer schlanker und schärfer abgegrenzt wird.

## V1 Vom Doppelspalt zum Gitter.

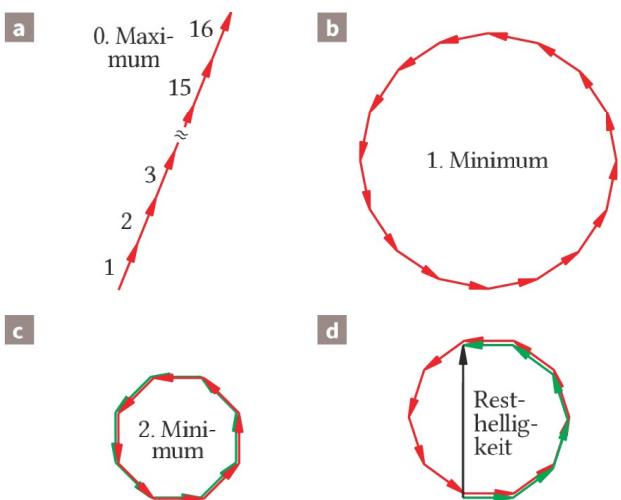
Unterschiedliche Mehrfachspalte werden senkrecht mit der gleichen Lichtquelle beleuchtet und die Interferenzmuster gegenübergestellt. Im Bild steigt die Spaltanzahl von oben nach unten.



Beim Doppelspalt können die Maxima nicht eindeutig abgelesen werden, da sich die Lichtintensität nur allmählich verändert. Mit zunehmender Anzahl an Spalten steigt aber die Schärfe der Maxima, sie werden zu den Seiten hin klarer abgegrenzt (Bild B1). Trotz einem Vielfachen an Spaltöffnungen sind die Minima außerdem deutlicher ausgeprägt, die Bereiche zwischen den Maxima werden mit steigender Spaltanzahl dunkler. Die Lage der Maxima ist eindeutiger ablesbar und die Bestimmung der Wellenlänge somit weniger fehlerbehaftet.



**B1** Intensitätsverteilung bei einem Gitter mit a) 5 Spalten,  
b) 100 Spalten



**B2** Zeigermodell für a) das Hauptmaximum, b) das 1. Minimum, c) das 2. Minimum, d) eine Stelle zwischen beiden Minima

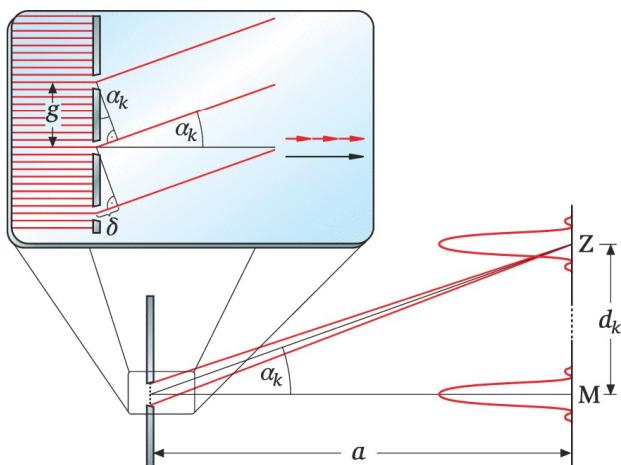
Beim doppelten Gangunterschied von  $\frac{2\lambda}{16}$  bilden bereits 8 Zeiger einen kleineren Kreis, weitere 8 Zeiger bilden den zweiten geschlossenen Kreis. Die Summe aller Zeiger ist erneut null (Bild **B2c**). Zwischen diesen Minima bleibt immer eine Resthelligkeit (Bild **B2d**).

Bei einem Gangunterschied von  $\frac{3\lambda}{16}$  bilden sich 3 Kreise mit der Zeigersumme null. Erst bei  $\Delta\varphi = \frac{16\lambda}{16} = \lambda$  (entspricht  $2\pi$ ) ergibt sich das nächste Maximum, in dem alle Zeiger gleichgerichtet sind. Zwischen diesen zwei Hauptmaxima gibt es also  $16 - 1 = 15$  Minima, dazwischen  $16 - 2 = 14$  niedere Nebenmaxima. Nach dem 1. Hauptmaximum wiederholt sich dies und damit die Folge von 14 niederen Nebenmaxima.

Verallgemeinert man diese Betrachtungen auf  $n$  Spalte, hat man zwischen zwei Hauptmaxima  $n - 2$  Nebenmaxima und  $n - 1$  Minima. Das erste Minimum, welches das Maximum  $k$ -ter Ordnung eingrenzt, hat den Gangunterschied  $\Delta\varphi = k\lambda + \frac{\lambda}{n}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Das 1. Minimum rückt also umso näher an das Maximum, je größer die Zahl  $n$  der Gitterspalte ist. Daher wird das Maximum mit zunehmender Zahl an Spalten immer schärfer. Das Gitter ist zur Wellenlängenbestimmung demnach besser geeignet als ein Doppelspalt.

### ! Merksatz

Mit wachsender Spaltanzahl eines optischen Gitters werden die Maxima heller und schärfer. Die Resthelligkeit in den Zwischenräumen nimmt dabei immer mehr ab.



**B3** Beim Gangunterschied  $\delta = k\lambda$  kommen alle Wellen in  $M$  bzw.  $Z$  gleichphasig an, die Amplituden der Wellen addieren sich. In den anderen Richtungen erhält man nur geringe Intensitäten.

**Mathematische Betrachtung des Gitters –** Die Einzelpalte des Gitters werden als Ausgangspunkte von Elementarwellen mit parallel verlaufenden Lichtwegen angenommen. Ist der Abstand Gitter  $\leftrightarrow$  Schirm deutlich größer als der Abstand der Gitterspalte, so ist diese Näherung akzeptabel.

Die Strahlen zum Schnittpunkt  $M$  der optischen Achse mit dem Schirm (Bild **B3**) haben den Gangunterschied  $\delta \approx 0$ . Also entsteht in  $M$  ein sehr scharfer heller Fleck. Seitlich davon gibt es weitere Lichtflecke z. B. in  $Z$ . Hier treffen sich Wellenstrahlen, die bezüglich ihrer nächsten Nachbarn den Gangunterschied  $\delta_k = k \cdot \lambda$  mit  $k = 1, 2, 3, \dots$  haben. Analog zum Doppelspalt gilt für den Gangunterschied  $\delta_k$  zweier benachbarter Wellenstrahlen  $\delta_k = g \cdot \sin \alpha_k$ , wobei für die Winkel  $\alpha_k$  zum  $k$ -ten Helligkeitsmaximum auch hier  $g \cdot \sin \alpha_k = k \cdot \lambda$  und  $a \cdot \tan \alpha_k = d_k$  gilt.

Für Doppelspalt und Gitter berechnet man die Lage der Maxima also nach denselben Formeln. Die Ordnungszahl  $k$  der Maxima wird daher auch beim Gitter durch Spaltabstand  $g$  und Wellenlänge  $\lambda$  beschränkt:  $k \leq \frac{g}{\lambda}$ .

### ! Merksatz

Gelangt paralleles Licht mit der Wellenlänge  $\lambda$  auf ein Gitter mit Gitterkonstante  $g$ , so sind scharfe Maxima unter den Winkeln  $\alpha_k$  zu beobachten. Für das  $k$ -te Maximum gilt

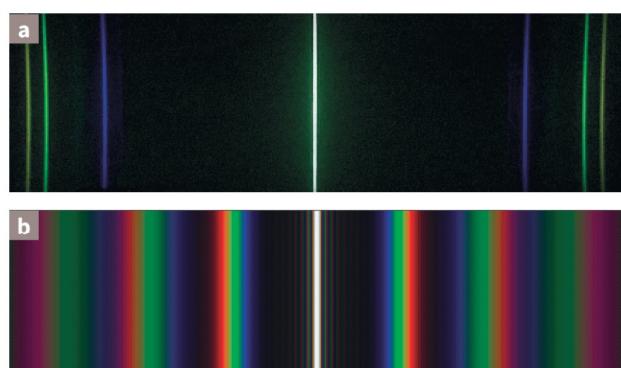
$$\sin(\alpha_k) = k \cdot \frac{\lambda}{g}, \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$\frac{k \cdot \lambda}{g} \leq 1, \text{ also } k \leq \frac{g}{\lambda}.$$

**Messung und Berechnung von Wellenlängen** – Mit einem optischen Gitter kann nicht nur die Wellenlänge eines Lasers, sondern auch des Lichts beliebiger Quellen noch genauer bestimmt werden (Versuch **V1**). Hierzu konzentriert man das Licht auf einen schmalen Beleuchtungsspalt und bildet diesen mit einer Sammellinse auf einen weit entfernten Schirm ab. Auf dem Schirm entsteht ein scharfes Bild des Spalts, das sich beim Einbringen eines Gitters in verschiedene Spaltbilder vervielfacht. Aus der Lage ihrer Intensitätsmaxima kann die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes bestimmt werden.

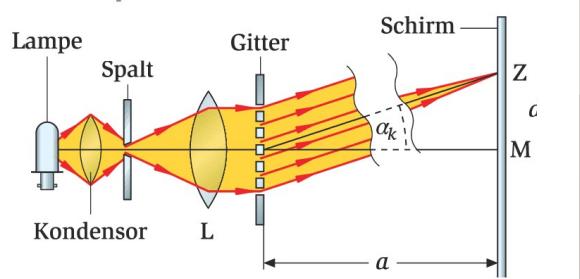
Verwendet man als Quelle eine Natriumdampflampe, misst man  $\lambda = 589 \text{ nm}$  (Versuch **V1**). Ersetzt man die Natriumdampflampe durch eine Quecksilberdampflampe, so erscheint auf dem Schirm eine Folge verschiedenfarbiger Linien, also verschiedenfarbiger Spaltbilder (Bild **B1a**). Für alle Farben lassen sich die jeweiligen Wellenlängen bestimmen (Tabelle **T1**), zusammen bilden sie das Linienspektrum von Quecksilber. Ein solches Spektrum ist charakteristisch für den Stoff, der das Licht aussendet. So sind die Werte in Tabelle **T1** zum Beispiel kennzeichnend für Quecksilberatome. Mit dieser Methode entwickelten R. W. BUNSEN und G. R. KIRCHHOFF die **Spektralanalyse**.

Wird die Spektralanalyse in Versuch **V1** mit weißem Glühlicht durchgeführt, so entsteht in 1., 2., 3., ... Ordnung je ein kontinuierliches Farbspektrum (Bild **B1b**). Doch nur das Spektrum 1. Ordnung ist rein, die anderen überlagern sich (Bild **B2b**). So wird Rot wegen seiner größeren Wellenlänge am stärksten abgelenkt, Violett am schwächsten (Bild **B2a**). In der dritten Ordnung wird Violett sogar weniger abgelenkt als Rot in der zweiten Ordnung, was zur Überlappung der Spektren führt (Bild **B2b**).



**B1** Gitterspektrum einer a) Quecksilberdampflampe, b) Glühbirne

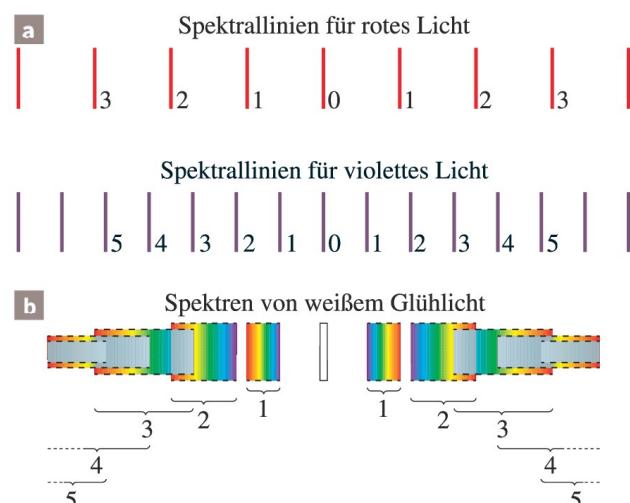
## V1 Gitterspektren



Ein schmaler Beleuchtungsspalt wird von einer Natriumdampflampe gleichmäßig beleuchtet. Der Spalt liegt nahe der Brennebene der Sammellinse L. Auf einem  $a = 2,00 \text{ m}$  entfernten Schirm entsteht so ein scharfes Bild des Spalts. Bringt man nun dicht hinter L ein Gitter, entsteht auf dem Schirm ein Muster von hellen Intensitätsmaxima in Entfernung  $d_k$  von der Mitte M. Die Gitterkonstante ist  $g = \frac{1}{1000} \text{ cm}$ . Die Entfernung der beiden Spektrallinien 3. Ordnung beträgt  $2d_3 = 71,8 \text{ cm}$ . Für den Winkel  $\alpha_3$  zum Maximum 3. Ordnung ( $k = 3$ ) erhält man  $\tan \alpha_3 = \frac{d_3}{a} = \frac{35,9 \text{ cm}}{200 \text{ cm}} = 0,1795 \Rightarrow \alpha_3 = 10,2^\circ$ . Aus  $\lambda = \frac{g}{k} \cdot \sin \alpha_k$  folgt mit  $k = 3$ :  $\lambda = 589 \text{ nm}$ .

Farbe der Spektrallinie	Wellenlänge $\lambda$ in Luft
violett	405 nm
blau	436 nm
grün	546 nm
gelb (Doppellinie)	577 nm und 579 nm

## T1 Linienspektrum von Quecksilber



**B2** Das Gitterspektrum für a) rotes, violettes und b) weißes Licht. Die Spektren des sichtbaren Lichts überlappen sich ab der 2. Ordnung.

## \* Beispielaufgabe

Das parallele Licht einer nicht monochromatischen Lichtquelle enthält die Farbanteile blau und grün ( $\lambda = 430\text{--}570\text{ nm}$ ) und wird an einem Gitter (Gitterkonstante  $g = 50\text{ }\mu\text{m}$ ) gebeugt. Ermitteln Sie, ab welcher Ordnung sich die Spektren überlappen.

*Lösung:* Nach  $\sin(\alpha_k) = \frac{k \cdot \lambda}{g}$  wird Licht stärker gebeugt, je größer seine Wellenlänge ist. Zur Überlappung von Spektren kommt es also, wenn das  $k$ -te Maximum des grünen Lichts ( $\lambda = 570\text{ nm}$ ) stärker gebeugt wird als das  $(k+1)$ -te Maximum des blauen Lichts ( $\lambda = 430\text{ nm}$ ). Es gilt also:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_{\text{grün},k}) &> \sin(\alpha_{\text{blau},k+1}) \Leftrightarrow \\ \frac{k \cdot \lambda_{\text{grün}}}{g} &> \frac{(k+1) \cdot \lambda_{\text{blau}}}{g} \Leftrightarrow k \cdot \lambda_{\text{grün}} > k \cdot \lambda_{\text{blau}} + \lambda_{\text{blau}} \\ \Leftrightarrow k(\lambda_{\text{grün}} - \lambda_{\text{blau}}) &> \lambda_{\text{blau}} \Leftrightarrow k > \frac{\lambda_{\text{blau}}}{\lambda_{\text{grün}} - \lambda_{\text{blau}}} = 3,07\end{aligned}$$

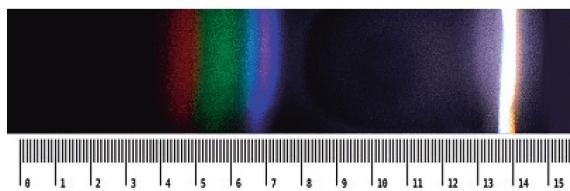
Für eine Überlappung muss die Ordnungszahl größer als 3,07, also mindestens 4 sein.

## Lösen Sie selbst

- 1 Ein Gitter hat 500 Linien/mm und 1,50 m Schirmabstand. Berechnen Sie für  $\lambda = 780\text{ nm}$  den Abstand der Spektrallinie 1. Ordnung von der Spektrallinie 2. Ordnung.
- 2 Die beiden Spektrallinien 1. Ordnung von Na-Licht ( $\lambda = 590\text{ nm}$ ) haben auf dem Schirm (Entfernung 1,00 m) den Abstand 11,8 cm. Berechnen Sie die Gitterkonstante  $g$ .
- 3 Ein Gitter mit 5000 Strichen pro cm wird mit parallelem weißem Glühlicht beleuchtet. Der Schirm hat die Form eines Halbzylinders, in dessen Mittelachse das Gitter steht.
  - a) Bis zu welcher Ordnung kann das sichtbare Spektrum vollständig beobachtet werden?
  - b) Bestimmen Sie die Wellenlänge  $\lambda$ , die sich aus  $\sin \alpha_k = 1 = \frac{k \lambda}{g}$  in der höchsten Ordnung ergibt.
- 4 Wir beobachten auf einem Schirm ( $a = 2,50\text{ m}$ ) das Linienspektrum von Hg-Dampf. In der ersten Ordnung beträgt der Abstand der linken violetten Linie ( $\lambda_1 = 405\text{ nm}$ ) von der rechten Linie 40,6 cm.
  - a) Berechnen Sie die Gitterkonstante  $g$ .
  - b) Bestimmen Sie den Abstand der violetten Linie von der grünen Linie ( $\lambda_2 = 546\text{ nm}$ ).

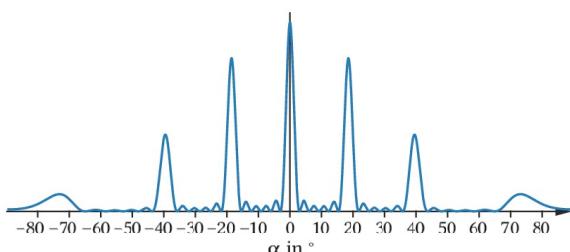
- c) In welcher Ordnung kommt es zum ersten Mal vor, dass die grüne Linie in das Spektrum der nächsten Ordnung fällt?

- 5 Das Spektrum einer weißen LED ist auf einem Schirm dargestellt. Der Abstand zum Gitter beträgt 29,0 cm



- a) Berechnen Sie anhand der Abbildung den Wellenlängenbereich des Lichts der weißen LED.
- b) Ermitteln Sie begründet eine Messunsicherheit des Wellenlängenbereichs.
- c) Die Gitterkonstante  $g$  wird halbiert. Formulieren Sie eine begründete Hypothese bezüglich der zu beobachtenden Veränderungen am Interferenzbild.
- d) Nehmen Sie Stellung, ob jede beliebige Gitterkonstante für das Experiment geeignet ist.

- 6 Ein Mehrfachspalt wird mit dem monochromatischen Licht eines Lasers beleuchtet. Die Abbildung zeigt die Intensitätsverteilung auf einem Schirm dahinter.

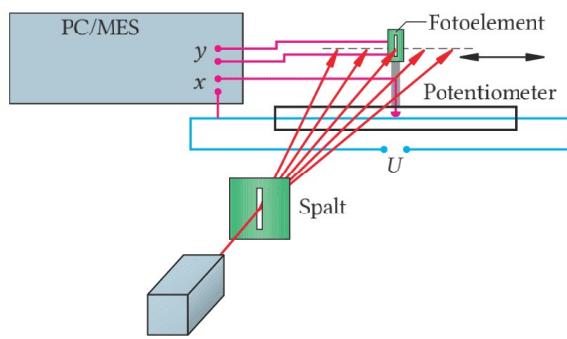


- a) Geben Sie drei Möglichkeiten für die Beschriftung der  $y$ -Achse an.
- b) Geben Sie die Anzahl der verwendeten Spalte an und begründen Sie Ihre Entscheidung.
- c) Bestimmen Sie die Wellenlänge und Farbe des verwendeten Lichts, wenn der Spaltabstand im Mehrfachspalt  $g = 2000\text{ nm}$  beträgt.
- d) Bestimmen Sie rechnerisch die maximal mögliche Anzahl der auftretenden Lichtpunkte.
- e) Berechnen Sie den Abstand der Maxima 1. Ordnung voneinander, wenn der Schirm in 1m Entfernung vom Spalt aufgestellt wurde.
- f) Erklären Sie, wie sich die Intensitätsverteilung verändert, wenn (1) der Spaltabstand  $g$  verkleinert, (2) eine kleinere Wellenlänge verwendet, (3) ein Mehrfachspalt mit mehr Spalten verwendet wird.

## 7.4 Interferenz am Einzelspalt

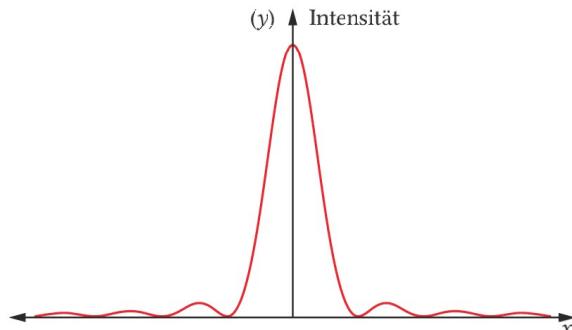
**Viele Elementarwellen in einem Spalt** – Ein Laser erzeugt auf einem etwa 3 m entfernten Schirm einen scharfen Lichtfleck. In Versuch **V1** wird in das Laserlichtbündel ein **Einzelspalt** mit verstellbarer Breite eingebracht. Je enger der Spalt gemacht wird, desto stärker fließt der Lichtfleck auseinander. Das Licht wird in den Schattenraum links und rechts des Spalts hineingebeugt. Allerdings wird der Lichtfleck von vielen dunklen Stellen unterbrochen. Obwohl also nur ein einzelner Spalt verwendet wird, entsteht auf dem Schirm überraschenderweise ein Interferenzmuster, ähnlich dem eines Doppelspalts. Seine Intensität nimmt nach außen hin jedoch schnell ab (Bild **B1**).

### V1 Intensitätsverlauf beim Einzelspalt



Eine Photodiode liefert eine Spannung  $U_y$ , die proportional zur Helligkeit ist. Sie wird mit Hilfe einer Messschraube zusammen mit einem Potentiometer durch das Beugungsbild eines Spalts bewegt. Am Potentiometer wird eine Spannung  $U_x$  abgenommen, die proportional zum zurückgelegten Weg  $x$  ist.  $U_x$  und  $U_y$  werden von einem PC oder Messwerterfassungssystem (MES) aufgezeichnet.

Bild **B1** zeigt das aufgenommene Intensitätsdiagramm.

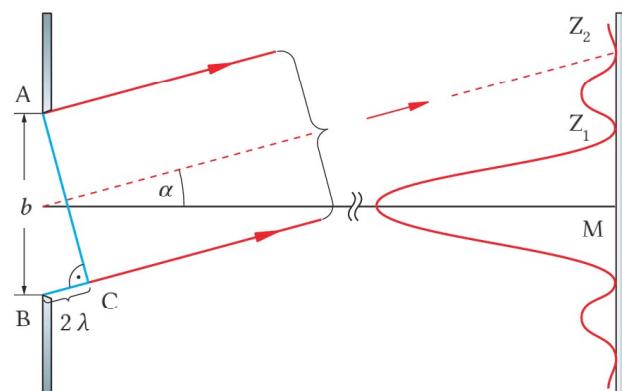


**B1** Intensitätsdiagramm des Interferenzmusters eines Einzelspalts

Auch wenn der Spalt schmal gemacht wird (z.B. 0,1 mm), ist er gegen die Lichtwellenlänge (z.B. 600 nm) breit. Deshalb muss man sich zwischen den Kanten des Spalts eine breite Wellenfront vorstellen. Diese wird in viele Zentren aufgelöst, von denen nach Huygens viele dicht liegende Elementarwellen ausgehen. Genau wie beim Gitter werden dann alle Wellenstrahlen betrachtet, die zu einem Punkt  $Z$  des weit entfernten Schirms hinführen. Da die Spaltbreite ein Bruchteil von Millimetern, der Schirmabstand jedoch mehrere Meter beträgt, kann man diese Wellenstrahlen in guter Näherung als parallel ansehen (Bild **B2**).

Bei den Strahlen, die praktisch parallel zur Mittelachse verlaufen (Beobachtungswinkel  $\alpha = 0^\circ$ ), haben die Lichtwellen den gegenseitigen Gangunterschied null. Die Zeiger, die zu den (nahezu) parallelen Wegen gehören, sind also immer in Phase (Bild **B3a**). Auf dem Schirm erzeugt die Überlagerung im Punkt  $M$  eine besonders helle Stelle. Unmittelbar rechts und links davon ergeben sich geringe Gangunterschiede, da die Strahlen, aufgrund der kleinen Breite des Spaltes, dort schon eine kleine Wegdifferenz aufweisen. Die Zeiger, die zu den etwas verschiedenen Wegen gehören, sind gegeneinander leicht gedreht; die Zeigerkette bildet einen Bogen (Bild **B3b**). Die resultierende Intensität wird also mit steigendem Winkel  $\alpha$  stetig kleiner.

In Bild **B3c** ist  $\alpha$  so groß, dass die Randstrahlen den Gangunterschied  $\lambda$  haben. Dann hat der mittlere Strahl gegenüber dem ersten einen Gangunterschied von  $\frac{\lambda}{2}$ . Nun findet jeder Strahl im Teilbündel I einen Partner im Teilbündel II, dessen Zeiger genau umgekehrt gerichtet ist. Also löschen sich alle Wellenstrahlen vollständig aus, die Zeiger haben sich zu einem Kreis geschlossen (Bild **B3c**). Es entsteht das 1. Minimum (Punkt  $Z_1$  in Bild **B2**), seine Intensität ist null.



**B2** Strahlen zur zweiten Dunkelstelle  $Z_2$  (Intensität nicht maßstabsgetreu gezeichnet)

Ist der Gangunterschied der Randstrahlen auf  $\delta = 2\lambda$  gewachsen, teilt man das Lichtbündel in zwei Hälften auf. Deren Randstrahlen haben jeweils den Gangunterschied  $\lambda$ . Überträgt man nun das Vorgehen vom ersten Minimum auf diesen Fall, dann erhält man insgesamt vier Teilbündel (Bild B3e) und findet zu jedem Zeiger in I (bzw. III) einen Zeiger in II (bzw. IV), der genau entgegengesetzt gerichtet ist. Auch hier ergibt sich also ein Minimum. Solche restlosen Auslöschen kommen immer wieder vor: Bei  $\delta = k\lambda$  finden sich  $k$  Teilbündel, deren Randstrahlen den Gangunterschied  $\lambda$  haben und die sich damit insgesamt aufheben.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC in Bild B2 ergibt sich eine Beziehung für den Winkel  $\alpha_k$  zur  $k$ -ten Dunkelstelle:

$$\sin \alpha_k = \frac{k \cdot \lambda}{b} \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots \text{ (Minimum } k\text{-ter Ordnung)}$$

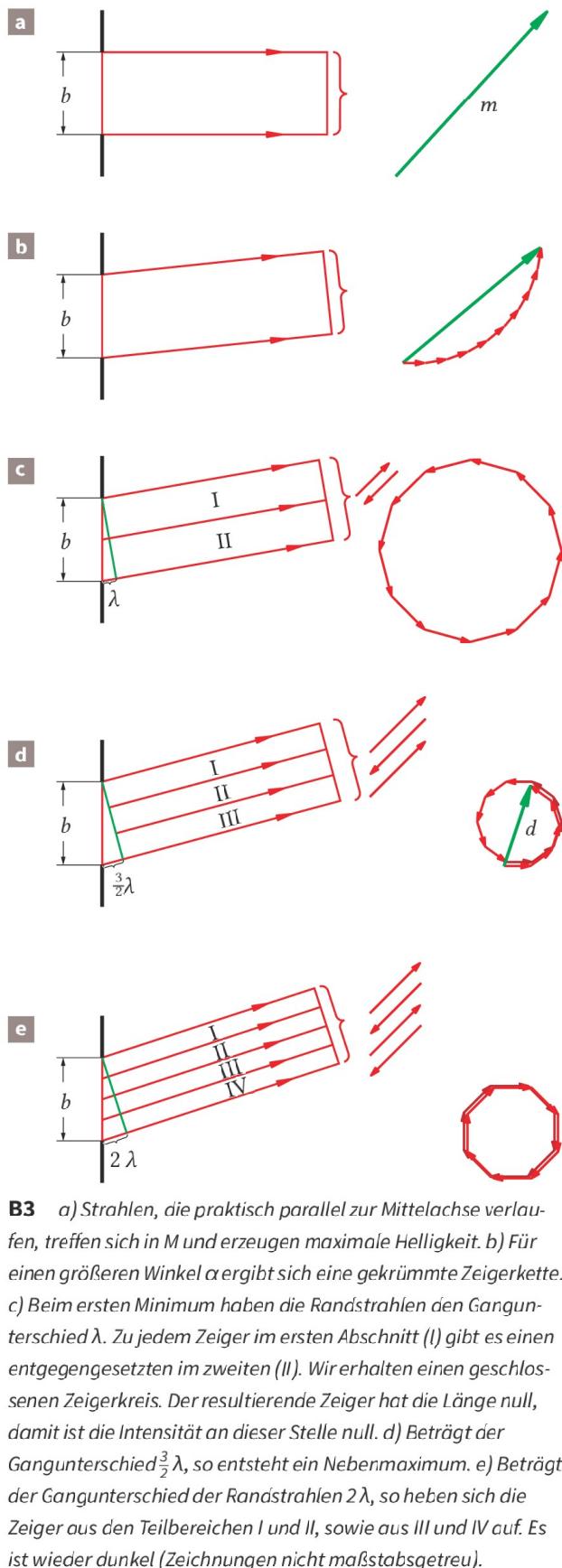
Da der Gangunterschied  $\delta = k\lambda$  nicht größer als die Spaltbreite  $b$  sein kann, ist die Zahl der Minima durch  $k < \frac{b}{\lambda}$  begrenzt.

### ! Merksatz

Bei der Beugung von Licht der Wellenlänge  $\lambda$  an einem Einzelspalt der Breite  $b$  gilt für die Winkel  $\alpha_k$  zu den Minima

$$\sin \alpha_k = \frac{k \cdot \lambda}{b} \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots \text{ und } k < \frac{b}{\lambda}.$$

**Resthelligkeiten** – Mit Hilfe der Zeiger lässt sich das in Versuch V1 aufgenommene Intensitätsdiagramm erklären. Beim Hauptmaximum sind alle Zeiger, die sich bei  $\alpha = 0^\circ$  auf dem Schirm addieren, parallel. Dieser Fall kann bei keinem anderen Bündel mehr eintreten. Wächst  $\alpha$  von null aus an, nehmen die Gangunterschiede zu. Die Zeigeraddition ergibt eine gekrümmte Linie (Bild B3b). Also wird die Resultierende von  $\alpha = 0^\circ$  aus immer kürzer, bis die erste Dunkelstelle erreicht ist. Vergrößert man  $\alpha$  über das erste Minimum hinaus, wird der Gangunterschied der Randstrahlen  $\delta > \lambda$ . Man kann, wie zuvor, die zwei Teilbündel I und II abspalten, deren Randstrahlen den Gangunterschied  $\delta = \lambda$  besitzen. Dort gibt es wieder zu jedem Wellenstrahl in Lichtbündel I einen Wellenstrahl in Lichtbündel II, dessen Zeiger genau entgegengesetzt gerichtet sind, was zur Auslöschung führt. Es bleibt ein Teilbündel III übrig, das für eine kleine Resthelligkeit sorgt. Beim Gangunterschied  $\delta = \frac{3}{2}\lambda$  ist der resultierende Zeiger dieses Teilbündels maximal lang (Bild B3d). Hier entsteht das 1. Nebenmaximum.



- B3** a) Strahlen, die praktisch parallel zur Mittellachse verlaufen, treffen sich in M und erzeugen maximale Helligkeit. b) Für einen größeren Winkel  $\alpha$  ergibt sich eine gekrümmte Zeigerkette. c) Beim ersten Minimum haben die Randstrahlen den Gangunterschied  $\lambda$ . Zu jedem Zeiger im ersten Abschnitt (I) gibt es einen entgegengesetzten im zweiten (II). Wir erhalten einen geschlossenen Zeigerkreis. Der resultierende Zeiger hat die Länge null, damit ist die Intensität an dieser Stelle null. d) Beträgt der Gangunterschied  $\frac{3}{2}\lambda$ , so entsteht ein Nebenmaximum. e) Beträgt der Gangunterschied der Randstrahlen  $2\lambda$ , so heben sich die Zeiger aus den Teilbereichen I und II, sowie aus III und IV auf. Es ist wieder dunkel (Zeichnungen nicht maßstabsgetreu).

**Die Helligkeit der Nebenmaxima –** Im Intensitätsdiagramm von Versuch **V1** auf Seite 202 sind die Nebenmaxima zwar erkennbar aufgezeichnet, allerdings fällt auf, dass ihre Intensität mit steigender Ordnung sehr schnell abnimmt und schon beim ersten Nebenmaximum deutlich viel kleiner ist als die des Hauptmaximums.

Um die Intensität zu berechnen, betrachtet man den Kreis in Bild **B3d** auf Seite 203. Dieser wird von nur zwei der drei Teillichtbündel gebildet, also genügen für dessen Umfang  $U$  zwei Drittel aller Elementarwellen. Alle Elementarwellen führen bei gleicher Richtung zur Amplitude  $m$ , so wie es beim Hauptmaximum der Fall ist (Bild **B3a**, Seite 203). Für das Nebenmaximum setzt man also  $U = \frac{2}{3} \cdot m$ . Da das verbleibende dritte Teilbündel einen weiteren Halbkreis mit dem gleichen Radius bildet, ist der Kreisdurchmesser  $d$  dann die gesuchte Amplitude des 1. Nebenmaximums. Im Kreis gilt  $U = \frac{2}{3} \cdot m = \pi \cdot d$  oder  $d = \frac{2m}{3\pi}$ .

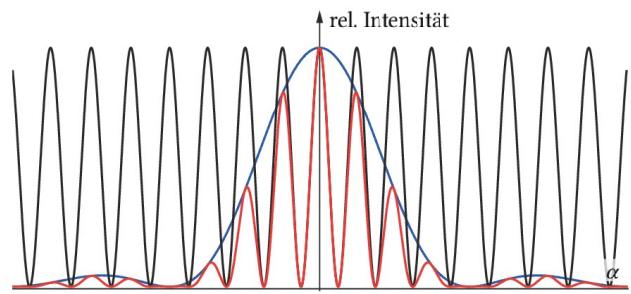
Die Intensität  $I_0$  des Hauptmaximums ist proportional zu  $m^2$ , dann ist die des 1. Nebenmaximums  $I$  proportional zu  $d^2$ . Für deren Quotient findet man demnach

$$\frac{I}{I_0} = \frac{d^2}{m^2} = \frac{4}{9\pi^2} = 0,045.$$

Also besitzt das 1. Nebenmaximum weniger als 5% der Helligkeit des Hauptmaximums.

Die Nebenmaxima findet man etwa bei den Gangunterschieden  $\delta \approx \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \frac{7}{2}\lambda, \dots, \frac{2k+1}{2}\lambda$ , mit  $k = 1, 2, \dots$ . Verengt man den Spalt noch mehr, so wird der helle Bereich um das Hauptmaximum breiter. Die Helligkeit nimmt dabei rasch ab, da der Spalt schmäler und das Lichtband immer breiter wird. Wenn die Spaltbreite  $b$  schließlich nur noch eine Wellenlänge (oder weniger) beträgt, kommen die ersten Dunkelstellen links und rechts nicht mehr zustande.  $\delta \approx \frac{3}{2}\lambda$  ist dann nicht mehr möglich, weil  $\delta < \lambda$  gilt. Wegen  $\frac{b}{\lambda} \leq 1$  ist dies auch rechnerisch nicht mehr möglich.

**Realer Doppelspalt –** Beim Einzelpunkt nimmt die Intensität und damit auch die Helligkeit nach außen hin extrem schnell ab. Beim Doppelspalt und beim Gitter beobachten wir ebenfalls eine Abnahme der Helligkeit, können sie jedoch anhand der Theorie nicht erklären. Der Grund dafür ist, dass bisher davon ausgegangen wurde, dass jede Spaltöffnung – ob bei Doppelspalt oder Gitter – so schmal ist, dass dort nur eine Elementarwelle entsteht. Man spricht in einem solchen Fall von einem **idealen Doppelspalt**. Die Intensität ist dann für jedes



**B1** Intensitätsdiagramm (abhängig vom Beugungswinkel  $\alpha$ ) für einen idealen Doppelspalt (schwarz), Einzelpunkt (blau) und einen realen Doppelspalt, bei dem die Breite der Spalte berücksichtigt wird (rot).

Maximum gleich (Bild **B1**, schwarz). Natürlich entspricht dies nicht der Realität, denn ein **realer Doppelspalt** besteht aus zwei, ein Gitter aus vielen Einzelpalten, die nicht unendlich schmal sein können, sondern eine messbare Breite besitzen.

Welchen Einfluss hat die Spaltbreite auf das Interferenzmuster beim Doppelspalt? Dazu wird ein Doppelspalt mit dem aufgeweiteten Lichtbündel eines Lasers beleuchtet. Zunächst wird jeweils einer der beiden Spalte  $S_1$  und  $S_2$  abgedeckt. Auf dem Schirm entsteht dann das Interferenzmuster eines Einzelpalts (Bild **B1**, blau). Für die Minima gilt  $\sin\alpha_k = \frac{k\lambda}{l}$ . Da  $S_1$  und  $S_2$  einen nur sehr geringen Abstand  $g$  haben, sind ihre einzelnen Beugungsbilder kaum merklich gegeneinander verschoben. Öffnet man beide Spalte, gibt es zusätzliche Interferenz der Lichtbündel beider Spalte, die in dem Beugungsbild der Einzelpalte für zusätzliche Dunkelstellen sorgt (Bild **B1**, rot). Um dies zu verstehen, bildet man im Zielpunkt  $Z$  für  $S_1$  und  $S_2$  jeweils einen Summenzeiger und addiert dann beide. Durch die leichte Verschiebung der beiden Muster gegeneinander sind die Zeiger der beiden Spalte an jeder Position nicht identisch. Sind sie sogar entgegengesetzt gerichtet, ergibt sich eine zusätzliche Dunkelstelle, die ohne den jeweils anderen nicht vorliegen würde. Bei den verbleibenden Maxima sind sie gleichgerichtet. Dort gilt  $\sin\alpha_k = \frac{k\lambda}{g}$ .

In Bild **B1** fällt auf, dass die Position der Maxima im Vergleich zum idealen Doppelspalt unverändert bleibt. Lediglich die Intensität ist nicht mehr für jedes Maximum gleich, sondern nimmt nach außen hin stark ab. Wie stark, darüber entscheidet die Spaltbreite  $b$ , denn die Einhüllende entspricht genau dem Intensitätsverlauf des Einzelpalts mit derselben Breite. Für den Intensitätsverlauf eines realen Gitters gilt Entsprechendes.

**Nicht alle Maxima sind sichtbar.** In Bild B1 wurde ein Doppelspalt verwendet, bei dem für Spaltabstand  $g$  und Spaltbreite  $b$  gilt:  $g = 3b$ . Betrachtet man das Interferenzmuster dieses Doppelspalts im Experiment genauer, so fällt auf, dass nicht an allen mathematisch vorhergesagten Positionen Maxima auftreten. Während die meisten Maxima wie erwartet durch helle Flecken zu erkennen sind, bleiben die Orte der Maxima dritter Ordnung dunkel. Auch in Bild B1 sieht man, dass diese Maxima dritter Ordnung unterdrückt werden, da an genau diesen Stellen die Minima des Einzelpalts liegen, der über die Intensität der Maxima entscheidet.

Ein Maximum des Doppelspalts (DS) mit Spaltabstand  $g$  trifft hier also auf die gleiche Stelle wie das Minimum des Einzelpalts (ES) derselben Spaltbreite  $b$ . Es gilt:

$$\alpha_{\max, \text{DS}} = \alpha_{\min, \text{ES}}$$

$$\sin(\alpha_{\max, \text{DS}}) = \sin(\alpha_{\min, \text{ES}})$$

$$k_{\text{DS}} \frac{\lambda}{g} = k_{\text{ES}} \frac{\lambda}{b}$$

$$k_{\text{DS}} = k_{\text{ES}} \frac{g}{b}$$

Die Ordnungszahl  $k_{\text{DS}}$  eines ausfallenden Doppelspalt-Maximums ist also ein Vielfaches der Ordnungszahl eines Einzelpalt-Minimums. Da die Ordnungszahlen immer ganzzahlig sind, muss der Faktor  $\frac{g}{b}$  ebenfalls ganzzahlig sein. Das gilt sogar für alle Maxima mit Ordnungszahlen, die Vielfache von  $\frac{g}{b}$  sind, in Bild B1 also die Maxima 3., 6., 9., ... Ordnung.

### Merksatz

Bei einem Doppelspalt oder Gitter, bei dem der Spaltabstand  $g$  ein ganzzahliges Vielfaches der Spaltbreite  $b$  ist, werden einzelne Maxima unterdrückt und sind deswegen nicht sichtbar.

### Beispielaufgabe

Ein Laser erzeugt mit Hilfe eines Doppelspalts mit dem Spaltabstand  $g = 1 \text{ mm}$  und der Spaltbreite  $0,2 \text{ mm}$  ein Interferenzmuster auf einem dahinter liegenden Schirm. Untersuchen Sie ob die Maxima aller Ordnungen beobachtet werden können.

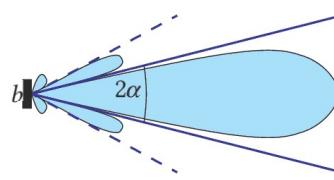
**Lösung:** Der Spaltabstand ist  $g$  ist genau fünfmal so groß wie die Spaltbreite  $b$ :  $\frac{g}{b} = \frac{1 \text{ mm}}{0,2 \text{ mm}} = 5$ . Das bedeutet, dass die Maxima 5., 10., 15., ... Ordnung unterdrückt werden.

### Lösen Sie selbst

**1** Berechnen Sie den Abstand der ersten dunklen Streifen links und rechts der hellen Mitte bei einem Spalt von  $0,50 \text{ mm}$  Breite für rotes ( $\lambda = 760 \text{ nm}$ ) und blaues ( $\lambda = 400 \text{ nm}$ ) Licht. Der Schirmabstand beträgt  $1,50 \text{ m}$ .

**2** Einfarbiges Licht fällt auf einen Spalt der Breite  $0,30 \text{ mm}$ . Auf einem  $3,00 \text{ m}$  entfernten Schirm haben die beiden Interferenzstreifen 1. Ordnung den Abstand  $10,0 \text{ mm}$ . Bestimmen Sie die Wellenlänge des Lichts!

**3** Ein ebener Quarz eines Ultraschall-Schallkopfs hat die Breite  $b = 1,5 \text{ mm}$  und schwingt mit  $5 \text{ MHz}$ , seine Oberfläche schwingt in Phase. In Körpergewebe breitet sich Schall mit  $c = 1540 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  aus. Man kann die Minima der Intensität wie beim Einzelpalt bestimmen.  
 a) Berechnen Sie den Winkelbereich  $2\alpha$ , in dem das zentrale Maximum liegt (Bild).  
 b) Vergrößert sich der Winkelbereich, wenn man die Breite  $b$  des Quarzes vergrößert?  
 c) Bestimmen Sie den Winkelbereich, wenn man 5 solcher Quarze nebeneinanderlegt.



**4** Paralleles Licht einer Natrium-Lampe der Wellenlänge  $\lambda = 589 \text{ nm}$  fällt senkrecht auf einen Doppelspalt. Der Abstand der Spaltmitten beträgt  $0,3 \text{ mm}$ . Das entstehende Interferenzbild wird auf einem dazu parallelen Schirm im Abstand  $a = 255 \text{ cm}$  aufgefangen.

a) Bestimmen Sie die Lage der Maxima bis zur 7. Ordnung auf dem Schirm.

b) Berechnen Sie auf Millimeter genau die Lage der Minima bis zur 2. Ordnung, wenn entweder nur der erste oder der zweite Spalt geöffnet ist (Spaltbreite je  $0,050 \text{ mm}$ ).

c) Können alle in a) berechneten Maxima tatsächlich beobachtet werden? Skizzieren Sie den Intensitätsverlauf auf dem Schirm.

**5** Bei einem optischen Gitter sind die Spaltbreiten halb so groß wie die Gitterkonstante.

a) Zeigen Sie, dass im Interferenzmuster die Maxima mit geraden Ordnungszahlen nicht zu beobachten sind.

b) Untersuchen Sie, ob bei einem Gitter, dessen Spaltbreiten jeweils  $\frac{1}{3}$  der Gitterkonstanten betragen, ebenfalls Maxima gewisser Ordnungen ausfallen.

### \* Beispielaufgabe

Paralleles Licht der Wellenlänge  $\lambda = 630 \text{ nm}$  fällt senkrecht auf einen Doppelspalt (Spaltbreite jeweils  $b = 0,10 \text{ mm}$ , Abstand der Spaltmitten  $g = 0,45 \text{ mm}$ ), hinter dem ein  $a = 10 \text{ m}$  entfernter Schirm steht.

- Ein Spalt wird verdeckt. Berechnen Sie die Lage der Minima 1. und 2. Ordnung.
- Öffnet man beide Spalte, so ist der Bereich zwischen den Minima 1. Ordnung aus a) von einem neuen Streifensystem durchzogen. Erklären Sie. Berechnen Sie den Abstand zweier Minima dieses neuen Systems.
- Ermitteln Sie die Zahl der Maxima des Doppelspalts, die zwischen den beiden Minima 1. Ordnung des Einzelpalts liegen.

*Lösung:* a) Beim Einzelpalt gilt für die Lage der ersten beiden Dunkelstellen  $\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{b}$ ,  $k = 1, 2$ . Wegen der großen Entfernung des Schirms und damit kleinen Winkeln  $\alpha_k$  gilt für die Entfernung  $d_k$  der Dunkelstellen auf dem Schirm von der optischen Achse  $\sin \alpha_k \approx \tan \alpha_k = \frac{d_k}{a}$ , also

$$d_k = a k \frac{\lambda}{b} \Rightarrow d_1 = 6,3 \text{ cm}, d_2 = 12,6 \text{ cm}.$$

b) Die Interferenzbilder beider Einzelpalte fallen praktisch zusammen. Sie sind von den Interferenzstreifen der Doppelspaltinterferenz durchzogen. Da  $g = 4,5 \cdot b$ , ist dieses Streifensystem wesentlich enger. Dunkelstellen treten bei der Doppelspaltinterferenz auf, wenn der Gangunterschied zwischen den Strahlen, die von den Spalten ausgehen, ein ungeradzahliges Vielfaches von  $\frac{\lambda}{2}$  ist. Für die Winkel  $\alpha_n$  der Dunkelstellen gilt daher  $g \sin \alpha_n = (2n - 1) \frac{\lambda}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Die Entfernung der  $n$ -ten und  $(n+1)$ -ten Dunkelstelle von der Symmetriechse sind dann mit  $\tan \alpha_n = \frac{d_n}{a}$  und  $\tan \alpha_{n+1} \approx \sin \alpha_{n+1}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{d_n}{a} &= \frac{2n - 1}{2} \frac{\lambda}{g} \quad \text{und} \quad \frac{d_{n+1}}{a} = \frac{2n + 1}{2} \frac{\lambda}{g} \\ \Rightarrow d_{n+1} - d_n &= \frac{\lambda}{g} a = 1,4 \text{ cm}. \end{aligned}$$

c) Für den Bereich zwischen den beiden Minima 1. Ordnung gilt beim Einzelpalt  $\sin \alpha_1 \leq \frac{\lambda}{b}$ . Für das  $k$ -te Maximum beim Doppelspalt gilt  $\sin \alpha_2 \leq k \frac{\lambda}{g}$ . Die Forderung  $\alpha_2 < \alpha_1$  ist erfüllt, wenn gilt:

$$k \frac{\lambda}{g} \leq \frac{\lambda}{b} \quad \text{bzw. } k \leq \frac{g}{b}, \text{ also } k \leq 4,5.$$

Das Ergebnis  $k = 4$  ist unabhängig von  $\lambda$ . Zwischen den beiden Maxima 1. Ordnung liegen zusammen mit dem Hauptmaximum  $2 \cdot 4 + 1 = 9$  helle Streifen.

### Lösen Sie selbst

#### Vermischte Aufgaben

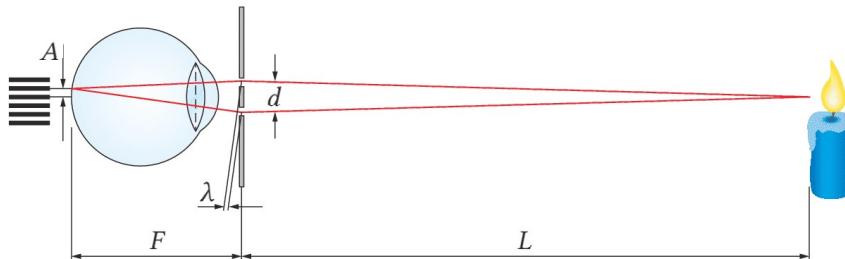
- Zwei Punktsender erzeugen phasengleiche Wellen, die sich zu einem Interferenzfeld mit Knotenlinien überlagern. Beschreiben und begründen Sie die Veränderungen im Feld, wenn
  - die Sender kohärent mit der festen Phasendifferenz  $\frac{\pi}{2}$  schwingen;
  - der Abstand der Sender verringert wird. Wann kann man im Gebiet der Überlagerung nicht mehr erkennen, dass es sich um zwei Sender handelt?
- In einem Versuch mit Ultraschall ( $\lambda = 3,2 \text{ cm}$ ) ist der Spaltabstand eines Doppelspalts  $g = 4 \text{ cm}$ . Der Empfänger ist weit entfernt.
  - Berechnen Sie die Winkel, unter denen das 1. und 2. Maximum zu beobachten sind.
  - Erläutern und begründen Sie für dieses Experiment die Bedeutung der angegebenen Nebenbedingung  $k \cdot \frac{\lambda}{g} \leq 1$ .
- Licht eines grünen Laserpointers ( $\lambda = 570 \text{ nm}$ ) trifft auf einen Doppelspalt mit einem Spaltabstand von  $150 \mu\text{m}$ . Auf einem Schirm in  $15 \text{ cm}$  Entfernung zum Doppelspalt wird das Interferenzmuster beobachtet.
  - Erläutern Sie anhand einer geeigneten Skizze das Zustandekommen des Interferenzmusters.
  - Weisen Sie nach, dass für die Lage der Maxima beim Doppelspalt gilt:
$$k \cdot \frac{\lambda}{g} = \sin \left[ \arctan \left( \frac{d_k}{a} \right) \right]$$
  - Berechnen Sie den zu erwartenden Abstand der beiden 2. Maxima auf dem Schirm.
  - Beschreiben Sie die zu erwartenden Veränderungen im Interferenzbild, wenn
    - der Laser gegen eine LED ( $550 \text{ nm} \leq \lambda \leq 580 \text{ nm}$ ) getauscht wird,
    - der Spaltabstand halbiert wird.
- Ein Dreifachspalt habe die Gitterkonstante  $g = 2 \text{ mm}$ , ein Schirm habe von der Gittermitte den Abstand  $a = 2 \text{ m}$ . Bestimmen Sie Wellenlängen des sichtbaren Lichts, die auf der optischen Achse a) maximale, b) minimale Intensität liefern.
- Benennen und begründen Sie die Änderungen im Intensitätsmuster für Doppelspalt und Gitter, wenn man die zugehörigen Versuche unter Wasser durchführt.

- 11** Eine Quecksilberdampflampe sendet im sichtbaren Bereich Licht der Wellenlängen  $\lambda_{\text{violett}} = 405 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{\text{blau}} = 436 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{\text{grün}} = 546 \text{ nm}$  und  $\lambda_{\text{gelb}} = 578 \text{ nm}$  aus. Zur Untersuchung des Spektrums lässt man Licht der Lampe senkrecht auf ein Gitter mit 500 Strichen pro mm fallen. Im Abstand  $a = 27,5 \text{ cm}$  vom Gitter befindet sich ein Schirm parallel zur Gitterebene.
- Berechnen Sie die Mindestbreite  $b$  des Schirms, um dort die beiden Spektren 3. Ordnung noch vollständig zu beobachten.
  - Zeigen Sie, dass sich die Spektren 3. und 4. Ordnung überlappen und dass dies unabhängig von der Gitterkonstanten gilt.
  - Geben Sie eine physikalisch andere Möglichkeit an, Spektren zu erzeugen. Beschreiben Sie die Unterschiede zum Gitterspektrum.
- 12** Lässt man paralleles weißes Licht auf einen Spalt fallen, entsteht ein Interferenzmuster, dessen weißer Bereich in der Mitte von Farbsäumen umgeben ist.
- 13** a) Vergleichen Sie die Interferenzbilder hinter einem Doppel- und Vierfachspalt, wenn Breite und Abstand der Einzelpalte gleich ist. Skizzieren Sie die Intensitätsverläufe.  
b) Beschreiben Sie, wie sich der Intensitätsverlauf ändert, wenn beim Vierfachspalt die Breite der Einzelpalte verändert wird.
- 14** a) Ist zur  $\lambda$ -Messung ein Gitter einem Doppelspalt vorzuziehen? Begründen Sie.  
b) Untersuchen Sie, ob für solche Messungen an der Schirmentfernung Fehler von einigen cm zulässig sind, wo doch  $\lambda$  selbst im Bereich von 600 nm liegt.
- 15** Berechnen Sie die Wellenlänge des Kerzenlichts in Versuch **V1**, wenn der Spaltabstand 0,3 mm beträgt, die Kerze aus 3 m Entfernung beobachtet wird und die Streifen einen scheinbaren Abstand von 5 mm haben.

## V1 Wellenlängenmessung zu Hause

Mit Hilfe einer Nadel oder eines spitzen Messers werden zwei kleine Löcher mit möglichst kleinem Abstand  $d$  in ein Stück Alufolie gestochen. Aus der Entfernung  $L$  (ca. 3–4 m) blickt man durch diesen Doppelspalt direkt ins Auge auf eine brennende Kerze (Bild **B1**). Man erkennt die Flamme unscharf verbreitert und von regelmäßigen dunklen Strichen durchzogen – ein klares Anzeichen für Interferenz!

Der Wellenlängenunterschied zwischen zwei Interferenzstreifen muss gerade eine Wellenlänge  $\lambda$  sein. Mit der Annahme, dass auch hier nur kleine Beugungswinkel auftreten, gilt:  $\frac{\lambda}{d} = \frac{A}{F}$ .



**B1** Interferenz an einer Kerzenflamme: Das am Doppelspalt gebogene Licht der Kerze erzeugt auf der Netzhaut ein Streifenmuster mit dem Abstand  $A$ .

Da das Interferenzmuster auf der Netzhaut entsteht, können die Abstände  $A$  der Maxima nicht gemessen werden. Allerdings kann der wahrgenommene Abstand  $a$  der virtuellen Streifenbilder in der Entfernung bei der Kerze abgeschätzt werden. Mit dem Strahlensatz erhält man aus dem virtuellen Abstand  $a$  den realen Abstand  $A$ :  $\frac{A}{F} = \frac{a}{L}$ . Die Wellenlänge ergibt sich dann zu  $\lambda = \frac{a}{L} \cdot d$ . Da das Licht der Kerze aus einem Teilbereich des sichtbaren Spektrums besteht, erhält man so zwar nur eine mittlere Wellenlänge. Die Größenordnung kann mit diesem einfachen Aufbau aber abgeschätzt werden.