Испитивање ранга матрице у зависности од параметра анализом карактеристичног полинома

Када се матрица посматра као линеарна трансформација вектора, њене две једине способности су пресликавање вектора у простор линеарно независних колона или пресликавање вектора у нулу.
Ова чињеница је неригорозна верзија теореме о рангу и дефекту матрице.

Теорема о рангу и дефекту матрице, исказ:

Нека матрица M_{mxn} представља линеарну трансформацију $f : F^m \rightarrow F^n$ над пољем F.

Где је n димензија векторског простора који је домен те трансормације, осносно векторски простор из којег се вектори пресликавају у кодомен m.

Тада важи: $\boldsymbol{Rank(M) + Nullity(M) = n}$

Након исказа теореме пожељна је детаљнија дискусија о дефекту матрице, односно векторима који се пресликавају у нулу.

$M * v = \ 0 * v = 0$ 1)

На основу тривијалне једначине 1) види се да је нула сопствена вредност, сопствених вектора који се применом матрице пресликавају у нулу.

То говори да је **дефект матрице једнак броју сопствених вредности једнаких нули**.

Са овом информацијом јасно је да се испитивањем карактеристичног полинома матрице може утврдити ранг матрице, под условом да број **нултих сопствених вредности одговара броју линеарно независних сопствених вектора**.

Више линеарно зависних сопствених вектора за исту сопствену вредност не подиже димензију простора дефекта матрице.

Тај услов могу да испуне само симетричне квадратне матрице из тог разлога даље радимо само са њима.

Нека је матрица сада M_{nxn} такође и симетрична, $M = M^T$ и зависи од параметра $M(p)$.

$Rank(M) = n - Nullity(M)$

$Rank(M) = n - \ deg_r(K(\lambda))|_{\lambda=0}$ r је ред корена $\lambda = 0$ карактеристичног полинома

Ред корена се лако испитује применом извода на полином, у овом случају још је лакше пронаћи ред зато што је карактеристични полином простог облика

$\boldsymbol{k(\lambda) = \lambda^n * Q_n(p) + \lambda^{n-1} * Q_{n-1}(p) + \cdots + \lambda * Q_1(p) + Q_0(p)}$

За процес примене извода на овакав полином и евалуирање извода у $\lambda = 0$ у сваком тренутку само један од полинома $Q_k(p)$ преживео.

За $k(\lambda)|_{\lambda=0} = Q_0(p) = 0$ сви остали се множе нулом па их нема.

За $k'(\lambda)|_{\lambda=0} = Q_1(p) = 0$ остали се множе нулом док је $Q_0(p)$ убијен применом извода јер не зависи од λ.

За $k^{(n)}(\lambda)|_{\lambda=0} = Q_n(p) = 0$

На основу овога види се да је довољно груписати степене карактеристичног полинома и у таквој листи испитивати коефицијенте који стоје уз њих

Ако је $Q_0(p) = 0$ ранг матрице је спао на $n - 1$, сваки нови $Q_k(p) = Q_0(p) = 0$ говори да је ранк матрице спао на $n - k \quad k \in \mathbb{Z}$ под условом да је поредак битан.

Да би $Q_k(p) = 0$ неопходно је да сви $Q_{k-1}(p) = Q_{k-2}(p) = \cdots = Q_0(p) = 0$.

Овим се завршава испитивање, добијени параметри су јединствено решење.