

Лабораторная работа №9

Системы случайных величин.

Системы двух независимых случайных величин.

Цель работы: изучение свойств систем независимых случайных величин

1. Общие понятия

Определение 1

Система случайных величин (как и каждая из ее составляющих) есть функция элементарного события $(X, Y, \dots, W) = \varphi(\omega)$. Каждому элементарному событию ω ставится в соответствие несколько действительных чисел: значения, принятые случайными величинами X, Y, \dots, W в результате опыта.

Определение 2

Функцией распределения (или «совместной» функцией распределения) системы двух случайных величин (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X < x; Y < y$:

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y)$$

Событие $\{X < x; Y < y\}$ означает произведение событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$:

$$\{X < x; Y < y\} = \{X < x\} \{Y < y\}$$

Определение 3

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в пределы прямоугольника R со сторонами, параллельными осям координат, ограниченного абсциссами (α, β) и ординатами (γ, δ) определяется согласно выражению

$$P\{(X, Y) \in R\} = F(\beta, \delta) - F(\alpha, \delta) - F(\beta, \gamma) + F(\alpha, \gamma)$$

Для систем двух дискретных случайных величин (X, Y) рассматривают понятия:

- **Совместная вероятность (p_{ij})** — вероятность того, что случайная величина X приняла значение x_i из набора $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, а случайная величина Y приняла значение y_j из набора $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$
- **Матрица распределения** — аналог ряда распределения для дискретной случайной величины, строки которой соответствуют возможным значениям случайной величины X , а столбцы — возможным значениям случайной

величины Y . Элементы матрицы распределения соответствуют совместным вероятностям p_{ij} .

	y_1	y_2	\dots	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2m}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	p_{n1}	p_{n2}	\dots	p_{nm}

Положение 1

Сумма всех вероятностей p_{ij} , стоящих в матрице распределения, равна единице как сумма вероятностей полной группы несовместных событий:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1.$$

Положение 2

Функция распределения системы двух случайных величин находится суммированием элементов матрицы распределения p_{ij} , для которых $x_i < x$, $y_j < y$:

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij}.$$

Положение 3

Зная матрицу распределения системы дискретных случайных величин можно найти ряды распределения дискретных случайных величин, входящих в систему.

Так, для случайной величины X :

$$p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^m p_{ij} \text{ и, аналогично, } p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^n p_{ij}$$

Положение 4

Элементы матрицы распределения $\|p_{ij}\| (i=1,2, \dots, n; j=1,2, \dots, m)$ системы 2-х независимых дискретных случайных величин X и Y выражаются через законы (ряды) распределения отдельных случайных величин X и Y .

$$p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_{x_i} p_{y_j}$$

2. Порядок выполнения работы

- Построить матрицу распределения системы двух независимых дискретных случайных величин по заданным рядам распределения этих величин. Проверить корректность построения.

Пример:

Пусть даны ряды распределения случайных величин X и Y .

$$X:$$

2	5	6	10
0,2	0,1	0,3	0,4

$$Y:$$

0	1	4
0,3	0,3	0,4

Матрица распределения будет иметь вид:

	0	1	4
2	$P(2,0)$	$P(2,1)$	$P(2,4)$
5	$P(5,0)$	$P(5,1)$	$P(5,4)$
6	$P(6,0)$	$P(6,1)$	$P(6,4)$
10	$P(10,0)$	$P(10,1)$	$P(10,4)$

$$P(i,j) = P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2														
3														
4		X:	2	5	6	10			Y:	0	1	4		
5			0,2	0,1	0,3	0,4				0,3	0,3	0,4		
16														
17														
18			0	1	4									
19		2	0,06	0,06	0,08									
20		5	0,03	0,03	0,04									
21		6	0,09	0,09	0,12									
22		10	0,12	0,12	0,16									
23														
24			$\sum P_{ij} =$	1										
25														

- Получить значения совместной функции распределения системы независимых дискретных случайных величин по матрице распределения.

Пример:

Матрица распределения имеет вид

	0	1	4
2	0,06	0,06	0,08
5	0,03	0,03	0,04
6	0,09	0,09	0,12
10	0,12	0,12	0,16

Совместную функцию распределения можно представить в виде квадратной матрицы $(\min(X,Y);\max(X,Y))$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	$F(0,0)$	$F(0,1)$	$F(0,2)$	$F(0,1)$	$F(0,4)$	$F(0,5)$	$F(0,6)$	$F(0,7)$	$F(0,8)$	$F(0,9)$	$F(0,10)$
1	$F(1,0)$	$F(1,1)$	$F(1,2)$	$F(1,1)$	$F(1,4)$	$F(1,5)$	$F(1,6)$	$F(1,7)$	$F(1,8)$	$F(1,9)$	$F(1,10)$
2	$F(2,0)$	$F(2,1)$	$F(2,2)$	$F(2,1)$	$F(2,4)$	$F(2,5)$	$F(2,6)$	$F(2,7)$	$F(2,8)$	$F(2,9)$	$F(2,10)$
3	$F(3,0)$	$F(3,1)$	$F(3,2)$	$F(3,1)$	$F(3,4)$	$F(3,5)$	$F(3,6)$	$F(3,7)$	$F(3,8)$	$F(3,9)$	$F(3,10)$
4	$F(4,0)$	$F(4,1)$	$F(4,2)$	$F(4,1)$	$F(4,4)$	$F(4,5)$	$F(4,6)$	$F(4,7)$	$F(4,8)$	$F(4,9)$	$F(4,10)$
5	$F(5,0)$	$F(5,1)$	$F(5,2)$	$F(5,1)$	$F(5,4)$	$F(5,5)$	$F(5,6)$	$F(5,7)$	$F(5,8)$	$F(5,9)$	$F(5,10)$
6	$F(6,0)$	$F(6,1)$	$F(6,2)$	$F(6,1)$	$F(6,4)$	$F(6,5)$	$F(6,6)$	$F(6,7)$	$F(6,8)$	$F(6,9)$	$F(6,10)$
7	$F(7,0)$	$F(7,1)$	$F(7,2)$	$F(7,1)$	$F(7,4)$	$F(7,5)$	$F(7,6)$	$F(7,7)$	$F(7,8)$	$F(7,9)$	$F(7,10)$
8	$F(8,0)$	$F(8,1)$	$F(8,2)$	$F(8,1)$	$F(8,4)$	$F(8,5)$	$F(8,6)$	$F(8,7)$	$F(8,8)$	$F(8,9)$	$F(8,10)$
9	$F(9,0)$	$F(9,1)$	$F(9,2)$	$F(9,1)$	$F(9,4)$	$F(9,5)$	$F(9,6)$	$F(9,7)$	$F(9,8)$	$F(9,9)$	$F(9,10)$
10	$F(10,0)$	$F(10,1)$	$F(10,2)$	$F(10,1)$	$F(10,4)$	$F(10,5)$	$F(10,6)$	$F(10,7)$	$F(10,8)$	$F(10,9)$	$F(10,10)$

$$F(i, j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} (x_i < x; y_j < y)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,06	0,12	0,12	0,12	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
3	0,06	0,12	0,12	0,12	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
4	0,06	0,12	0,12	0,12	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
5	0,09	0,18	0,18	0,18	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
6	0,18	0,36	0,36	0,36	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
7	0,18	0,36	0,36	0,36	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
8	0,18	0,36	0,36	0,36	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
9	0,18	0,36	0,36	0,36	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
10	0,3	0,6	0,6	0,6	1	1	1	1	1	1	1

- По матрице распределения получить ряды распределения случайных величин, входящих в систему.

Матрица распределения имеет вид

	0	1	4
2	0,06	0,06	0,08
5	0,03	0,03	0,04
6	0,09	0,09	0,12
10	0,12	0,12	0,16

Ряд распределения случайной величины X представляется в виде:

X:	2	5	6	10
	$P(2,0)+P(2,1)+P(2,4)$	$P(5,0)+P(5,1)+P(5,4)$	$P(6,0)+P(6,1)+P(6,4)$	$P(10,0)+P(10,1)+P(10,4)$

Ряд распределения случайной величины Y представляется в виде:

Y:	0	1	4
	$P(2,0)+P(5,0)+P(6,0)+P(10,0)$	$P(2,1)+P(5,1)+P(6,1)+P(10,1)$	$P(2,4)+P(5,4)+P(6,4)+P(10,4)$

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
18			0	1	4									
19		2	0,06	0,06	0,08									
20		5	0,03	0,03	0,04									
21		6	0,09	0,09	0,12									
22		10	0,12	0,12	0,16									
23														
24														
25		X:	2	5	6	10								
26			0,2	0,1	0,3	0,4	1							
27														
28		Y:	0	1	4									
29			0,3	0,3	0,4		1							
30														
31														
32														

Полученные ряды распределения должны совпадать с исходными рядами распределения

3. Индивидуальные задания

1)

X:	3	6	7	9	10	12
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y:	5	6	7	9	11	12	13
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

2)

X:	2	5	6	8	9	12
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y:	4	5	6	8	10	11	12
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

3)

X:	4	7	8	10	11	13
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y:	6	7	8	9	11	13	14
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

4)

X:	5	6	7	11	12	14
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y:	7	8	9	10	12	14	15
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

5)

X:	1	2	4	6	9	11
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y:	4	5	6	7	9	10	11
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

6)

X:	3	6	7	9	10	12
	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1

Y:	5	6	7	9	11	12	13
	0,05	0,05	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

7)

X:	2	5	6	8	9	12
	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2

Y:	4	5	6	8	10	11	12
	0,04	0,3	0,06	0,1	0,1	0,1	0,3

8)

X :	4	7	8	10	11	13
	0,1	0,3	0,1	0,01	0,4	0,09

Y :	6	7	8	9	11	13	14
	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

9)

X :	5	6	7	11	12	14
	0,03	0,1	0,1	0,07	0,2	0,5

Y :	7	8	9	10	12	14	15
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

10)

X :	1	2	4	6	9	11
	0,2	0,3	0,1	0,05	0,3	0,05

Y :	4	5	6	7	9	10	11
	0,1	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1

11)

X :	3	4	6	7	10	12
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y :	5	6	7	8	9	12	13
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

12)

X :	2	4	5	7	9	12
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y :	3	5	6	8	9	11	12
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

13)

X :	4	5	7	11	12	13
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y :	5	6	7	9	10	13	14
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

14)

X :	5	6	7	8	10	14
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y :	7	8	9	11	12	13	15
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

15)

X:	1	2	3	5	9	10
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y:	2	4	5	6	8	10	11
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

16)

X:	3	6	7	9	10	12
	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Y:	5	6	7	9	11	12	13
	0,02	0,08	0,1	0,2	0,1	0,2	0,3

17)

X:	2	5	6	8	9	12
	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,2

Y:	4	5	6	8	10	11	12
	0,01	0,03	0,06	0,1	0,4	0,1	0,3

18)

X:	4	7	8	10	11	13
	0,1	0,1	0,3	0,01	0,4	0,09

Y:	6	7	8	9	11	13	14
	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

19)

X:	5	6	7	11	12	14
	0,03	0,01	0,2	0,06	0,2	0,5

Y:	7	8	9	10	12	14	15
	0,1	0,04	0,1	0,06	0,4	0,1	0,2

20)

X:	1	2	4	6	9	11
	0,1	0,2	0,3	0,05	0,3	0,05

Y:	4	5	6	7	9	10	11
	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1

21)

X:	5	6	7	8	10	14
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y:	7	8	9	11	12	13	15
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

22)

X :	1	2	3	5	9	10
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y :	2	4	5	6	8	10	11
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

23)

X :	3	6	7	9	10	12
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y :	5	6	7	9	11	12	13
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

24)

X :	2	5	6	8	9	12
	0,2	0,1	0,1	0,05	0,5	0,05

Y :	4	5	6	8	10	11	12
	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2

25)

X :	1	2	4	6	9	11
	0,1	0,1	0,3	0,01	0,4	0,09

Y :	4	5	6	7	9	10	11
	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

26)

X :	3	6	7	9	10	12
	0,03	0,01	0,2	0,06	0,2	0,5

Y :	5	6	7	9	11	12	13
	0,1	0,04	0,1	0,06	0,4	0,1	0,2