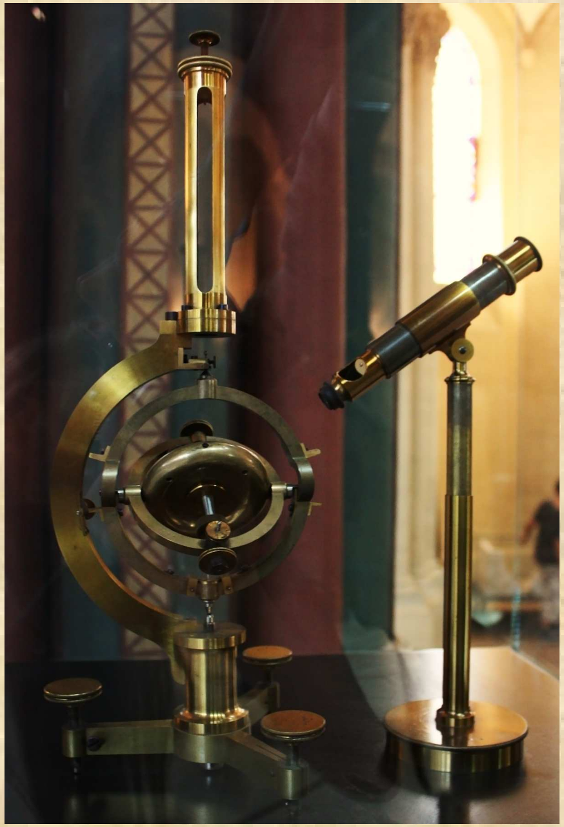
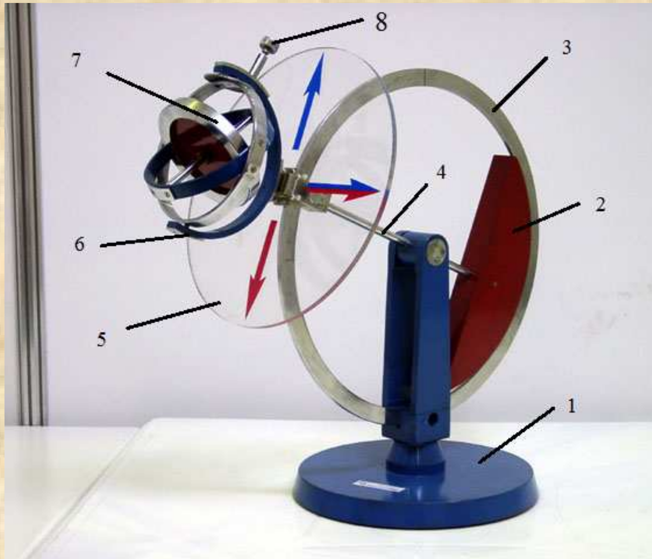
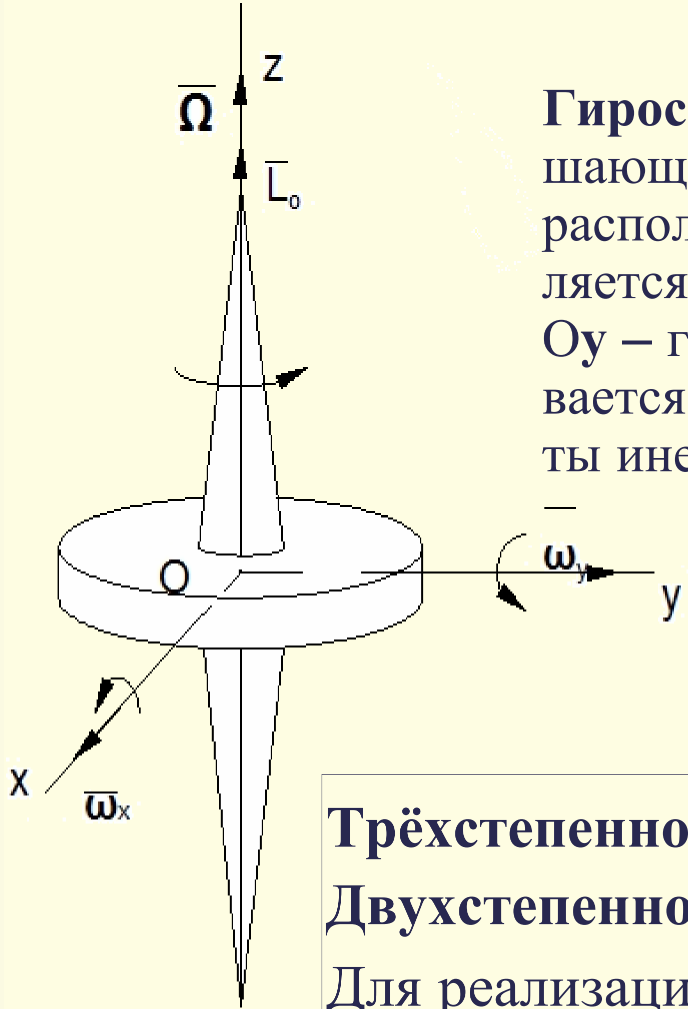
Приближённая теория гироскопов

Глава XX





20.1. Основные определения



Гироскоп - тяжёлое осесимметричное тело, совершающее движение вокруг неподвижной точки О, расположенной на оси симметрии О**z**. Эта ось является главной центральной осью инерции, О**x** и О**y** – главные оси инерции. Плоскость **x**О**y** называется экваториальной пло-костью, осевые моменты инерции J_x и J_y равны.

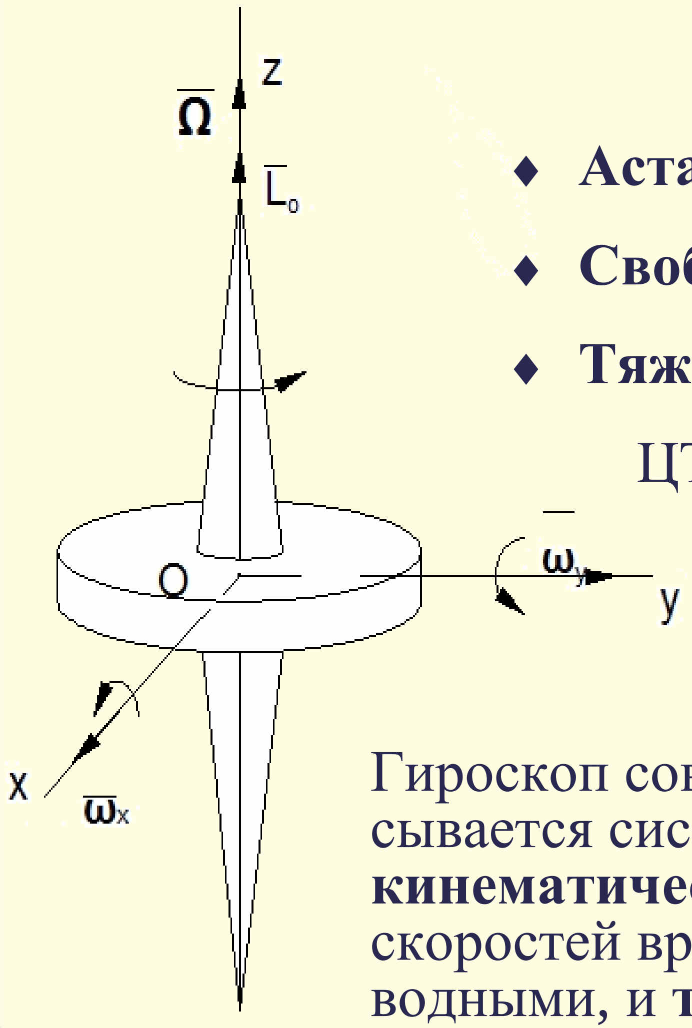
Трёхстепенной–независимые вращения вокруг 3 осей;

Двухстепенной–независимые вращения вокруг 2 осей

Для реализации трёхстепенного – «Карданов подвес».

Джероламо Кардано (1501 - 1576), Уйларс де Гонкур XIII в.

20.1. Основные определения. Продолжение.



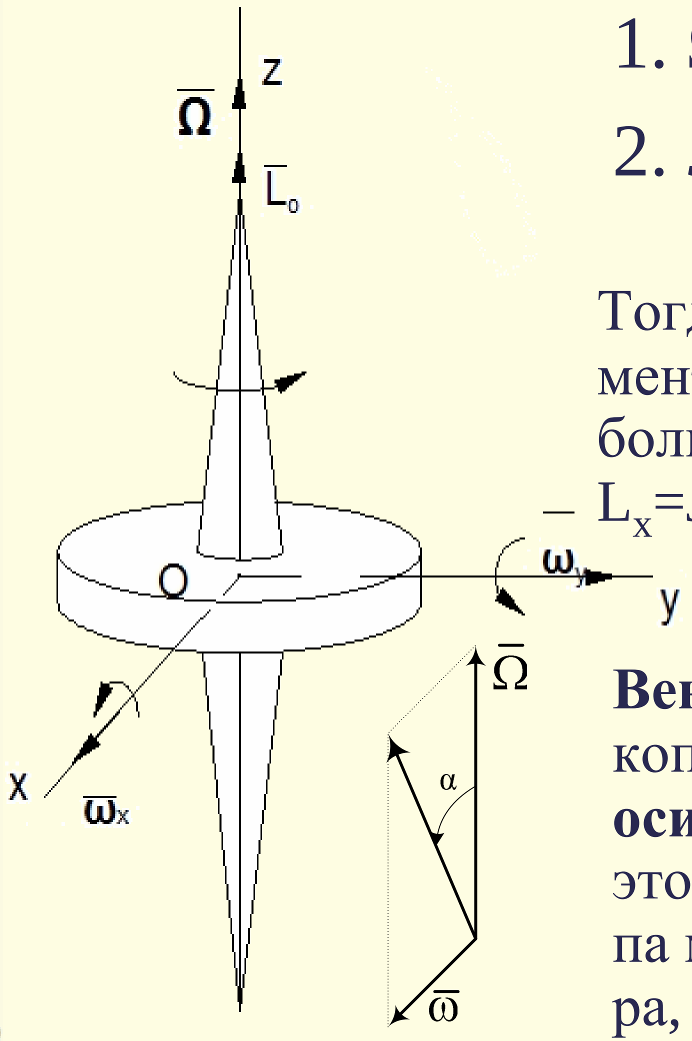
Трёхстепенной

- **Астатический:** ЦТ – в неподвижной точке;
- **Свободый:** $\mathbf{M_o^{гл(e)}} = 0$;
- **Тяжёлый:**

ЦТ – не совпадает с неподвижной точкой;

Гироскоп совершает <u>сферическое движение</u>. Оно описывается системой **шести** уравнений Эйлера: **трёх кинематических**, связывающих проекции угловых скоростей вращения тела с углами Эйлера и их производными, и **трёх динамических**, связывающих моменты внешних сил с проекциями угловой скорости и углового ускорения на подвижные оси.

20.2. Предположения приближённой теории



$tg(\alpha) < 10^{-4}$

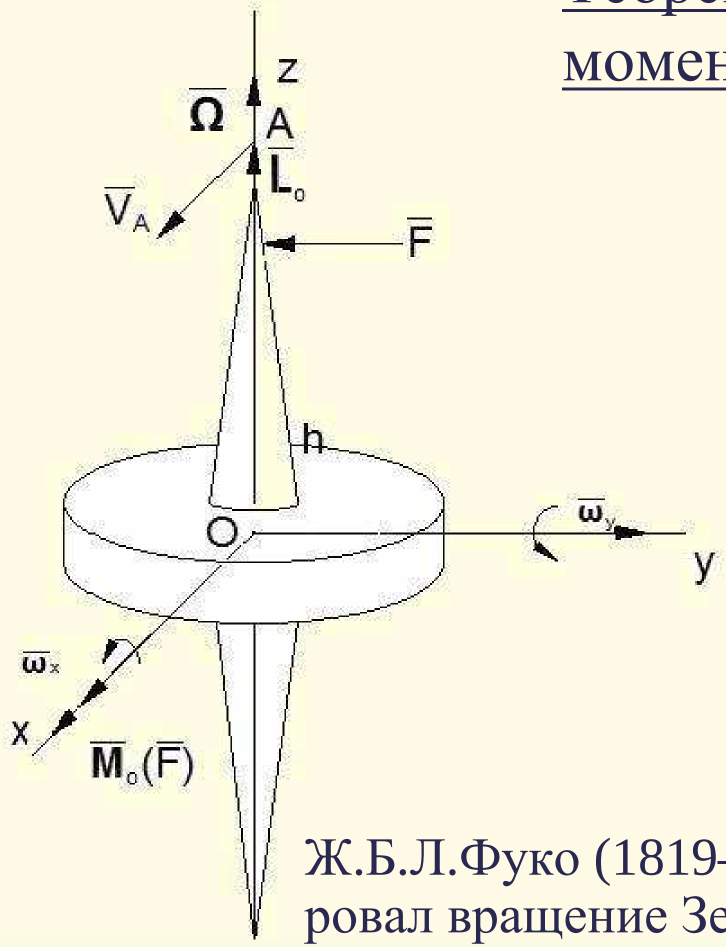
1. $\Omega \gg \omega_x$ и ω_y ; $(\Omega / \omega_x > 10^4)$.

2. $J_z \approx J_x \approx J_y$ одного порядка.

Тогда проекция вектора кинетического момента гироскопа **Lo** на ось **z** $L_z = J_z \cdot \mathbf{\Omega}$ много больше, чем его проекции на оси **x** и **y:** – $L_x = J_x \cdot \omega_x$ и $L_y = J_y \cdot \omega_y$.

Вектор кинетического момента **Lo** гироскопа с большой точностью **направлен по оси собственного вращения$_z$** и $L_o \approx J_z \cdot \mathbf{\Omega}$. А это означает, что о поведении оси гироскопа можно судить по поведению этого вектора, которое описывается законами механики. Т.к. | **Lo** |>>1, считаем <u>| **Lo** |=const</u>.

20.3. Астатический свободный гироскоп.



Теорема об изменении кинетического момента системы материальных точек

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{гл(e)} \qquad (1)$$

Т.к. $\mathbf{M_o^{гл(e)}}$ =0, то $\mathbf{L_o}$ = **const**.

т.е. ось свободного астатического гироскопа сохраняет своё направление в пространстве относительно инерциальной системы отсчёта.

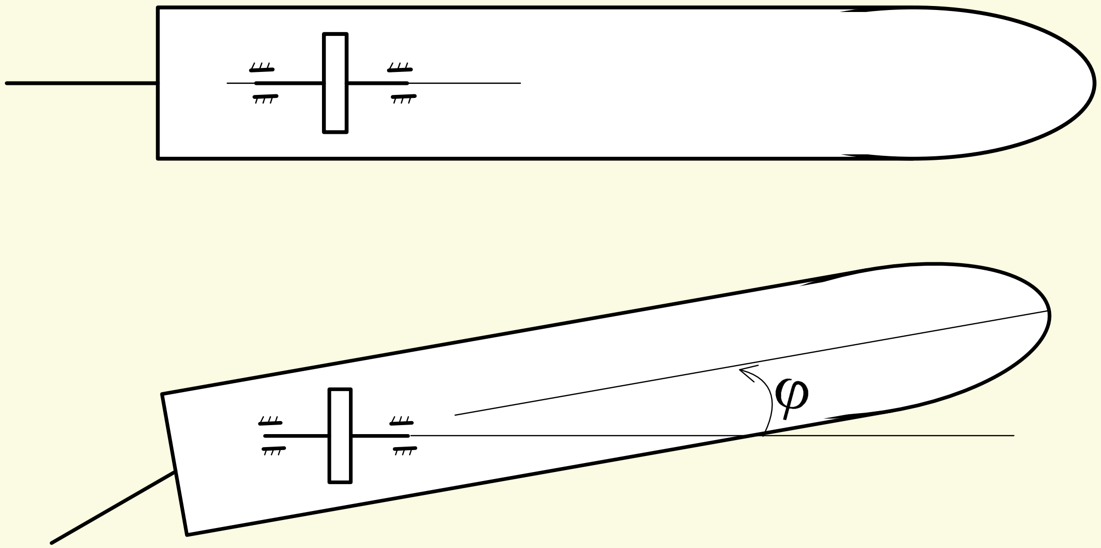
Ж.Б.Л.Фуко (1819–1868) впервые наглядно продемонстрировал вращение Земли. Слово "гироскоп", придуманное Л. Фуко, состоит из двух греческих слов: "гирос" - вращение и "скопео" – наблюдать (1852).

20.3. Астатический свободный гироскоп.

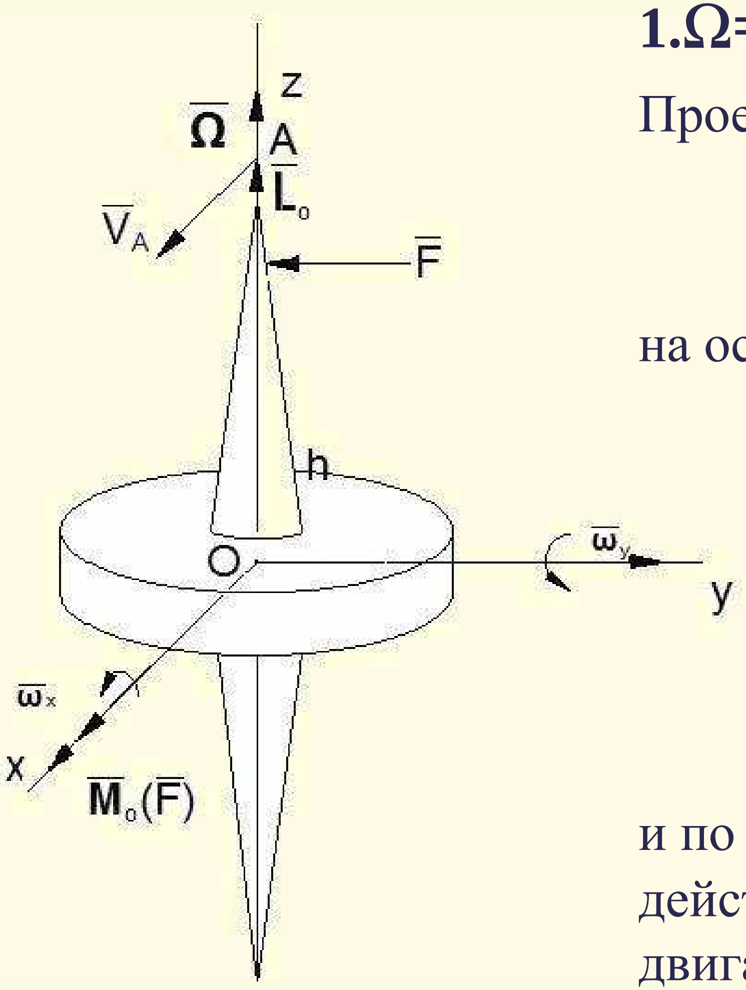
Применение

1.Ориентация в пространстве.

2.Автоматическое управление движением (стабилизаторы непрямого действия).



20.4. Воздействие силы на ось трёхстепенного гироскопа.



1.Ω=0.

Проецируя уравнение

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{\text{гл}(e)}$$

на ось **x**, получаем:

$$J_x \cdot \varepsilon_x = M_x = F \cdot h \;\Rightarrow\; \varepsilon_x = F \cdot h / J_x \;.$$

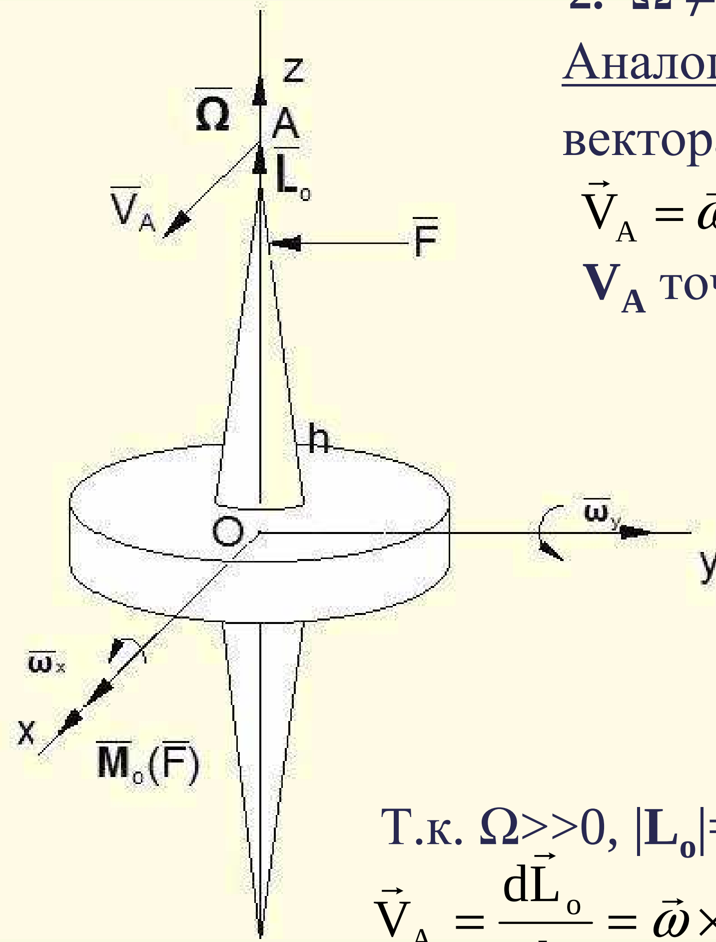
Интегрируем:

$$\omega_x = (F \times h / J_x) \cdot t + \omega_0,$$

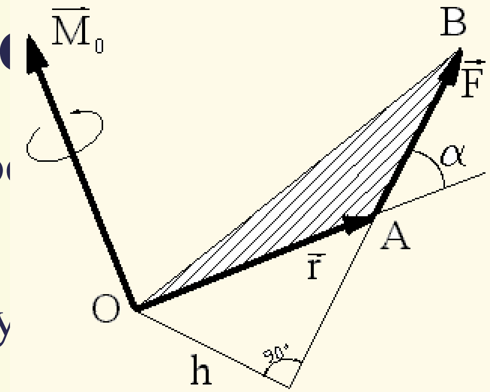
$$\varphi_x = (F \times h / J_x) \cdot t^2/2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

При F=0 – движение по инерции с $\omega_x = \omega_0$ и по закону $\varphi_x = \omega_0 \cdot t + \varphi_0$ **.** При кратком воздействии силы (удар) ось гироскопа будет двигаться по инерции.

20.4. Воздействие силы на ось трёхстепенного гироскопа. Прод



2. $\Omega \neq 0$.



<u>Аналогия:</u> $V_A = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt}$ есть скоро

вектора **r** движущейся точки.

$\vec{V}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_A$ и $\vec{V}_A \perp \vec{r}_A$. Поэтому

$\mathbf{V_A}$ точки А конца вектора $\mathbf{L_o}$.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{V}_A = \vec{M}_o^{гл(e)}$$

видно, что направление этого вектора совпадает с направлением главного момента $\mathbf{M_o}^{\mathbf{гл(e)}}$ внешних сил, действующих на ось гироскопа. У нас это $\mathbf{M_o(F)}$ - по оси **x**. $\mathbf{V_A}$ направлен тоже по оси **x** $\Rightarrow$ вращение оси гироскопа происходит вокруг оси **y**, а не **x.**

Т.к. $\Omega >> 0$, $|\mathbf{L_o}| = J_z \cdot \boldsymbol{\Omega} \approx const$. Тогда по формуле Эйлера

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}_o, \quad |\mathbf{V_A}| = \omega \cdot L_o \cdot \sin\alpha, \ (\omega = \omega_y,\ \alpha = \pi/2),$$

поэтому $V_A = \omega_y \cdot J_z \cdot \Omega$. $\Rightarrow$ $\omega_y \cdot J_z \cdot \Omega = F \cdot h$; $\omega_y = (F \cdot h)/(J_z \cdot \Omega)$.

Интегрируя, имеем $\varphi_y = [(F \cdot h)/(J_z \cdot \Omega)] \cdot t + \varphi_0$.

20.4. Воздействие силы на ось трёхстепенного гироскопа. Продолжение 2.

Итоги

1.Теорема **Резаля**: Скорость конца вектора кинетического момента гироскопа относительно его неподвижной точки совпадает по величине и направлению с главным моментом внешних сил, приложенных к оси гироскопа, относительно того же центра;

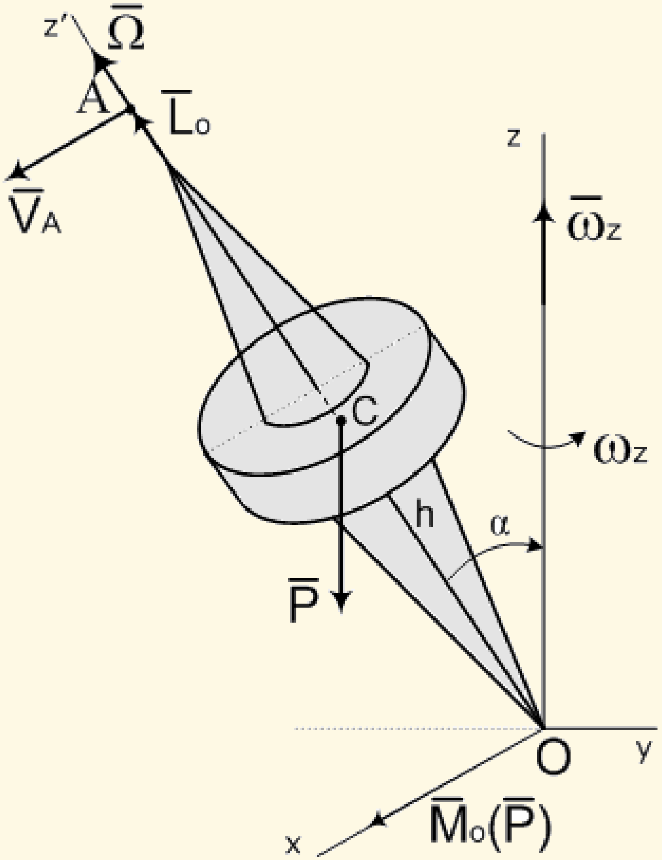
2.Если на ось свободного гироскопа действует сила, то ось отклоняется не в сторону действия силы, а по направлению момента этой силы, т.е. перпендикулярно силе (прецессия);

3.Гироскоп не сохраняет движения, сообщённого ему силой (нет движения по инерции, т.к. при F=0 ω_y=0);

4.От удара ось гироскопа не сдвигается (при ударе время воздействия очень мало и ось практически не успевает отклониться, а движения по инерции нет).

20.4. Тяжёлый гироскоп. Продолжение 3.

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{V}_A = \vec{M}_o^{\text{гл(e)}}$$

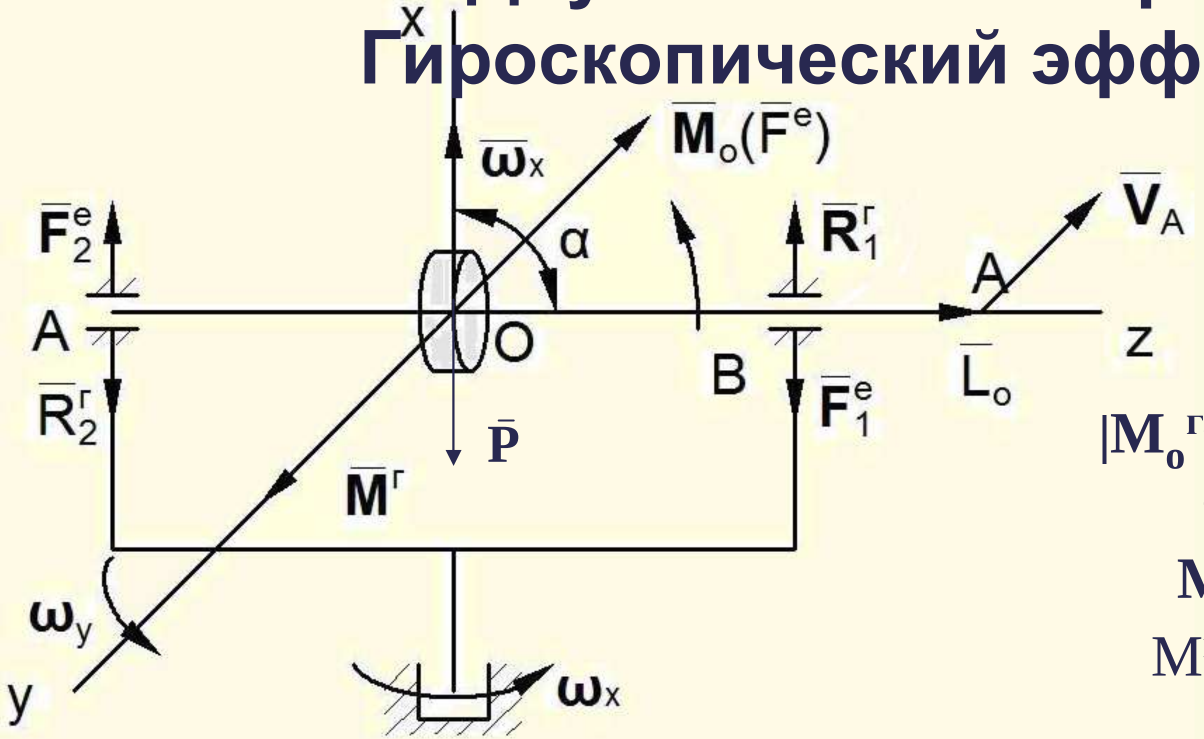


Т.к. $\mathbf{L_o}$, а с ним и ось гироскопа, отклоняется не в сторону **P** (т.е. вниз), а в сторону $\mathbf{V_A}$, а $\mathbf{V_A}$ всегда ⊥ плоскости (zOz′), то эта ось вращается вокруг оси **Oz**, описывая коническую поверхность. Найдём ω_z .

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}_o$$

По формуле Эйлера $|\mathbf{V_A}| = \omega_z \cdot L_o \cdot \sin\alpha$,
$M_o(\mathbf{P}) = F \cdot h \cdot \sin\alpha \Rightarrow \omega_z \cdot J_z \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \sin\alpha = F \cdot h \cdot \sin\alpha$;
$\omega_z = F \cdot h/(J_z \cdot \mathbf{\Omega})$. Видно, что ω_z не зависит от угла наклона оси гироскопа.
Такое движение гироскопа называется *регулярной прецессией*.

20.5. Двухстепенной гироскоп. Гироскопический эффект.



$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{V}_A = \vec{M}_o^{гл(e)}$$

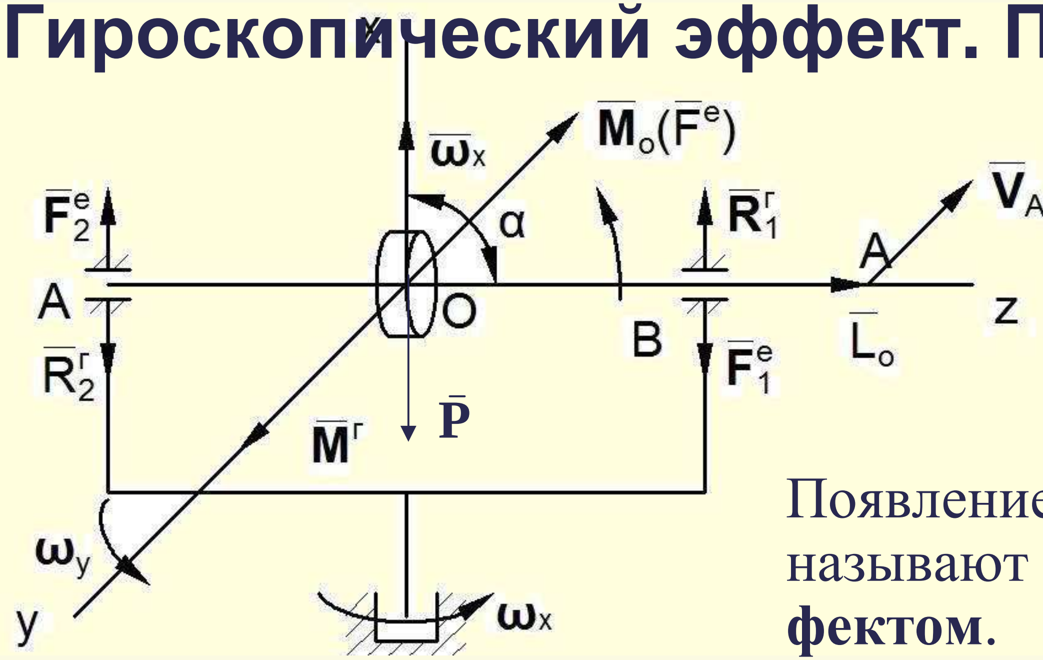
$|\mathbf{M_o}^{\mathbf{гл(e)}}| = |\mathbf{V_A}| = |\omega_\mathbf{x} \times \mathbf{L_o}| = \omega_x \cdot J_z \cdot \Omega \cdot \sin\alpha$

$\mathbf{M^г = -\ \omega_x \times L_o;}$

$M^г = \omega_x \cdot J_z \cdot \Omega \cdot \sin\alpha$

Пусть под действием внешних сил, приложенных к раме, гироскоп вращается вокруг оси О**x** с угловой скоростью ω_x (**вынужденная прецессия**). Конец (т.**A**) вектора **Lo** двигается при этом в отрицательном направлении оси **y** со скоростью $\mathbf{V_A}$. Из теоремы Резаля $\mathbf{M_o}^{\mathbf{гл(e)}} \uparrow\uparrow \mathbf{V_A}$. Внешние силы: (**P**, $\mathbf{F}_1^e$, $\mathbf{F}_2^e$). Пара ($\mathbf{F}_1^e$, $\mathbf{F}_2^e$) вращает гироскоп, $\mathbf{M_o}^{\mathbf{гл(e)}} = \mathbf{M_o(F^e)}$. По 3-й аксиоме гироскоп действует на п/ш парой сил ($\mathbf{R_1}^г$,$\mathbf{R_2}^г$), создающих **гироскопический момент $\mathbf{M}^г$**.

20.5. Двухстепенной гироскоп. Гироскопический эффект. Продолжение 1.



Вал гироскопа будет прижиматься кверху в правом подшипнике и оказывать давление на нижнюю часть левого подшипника.

Появление гироскопических сил называют **гироскопическим эффектом**.

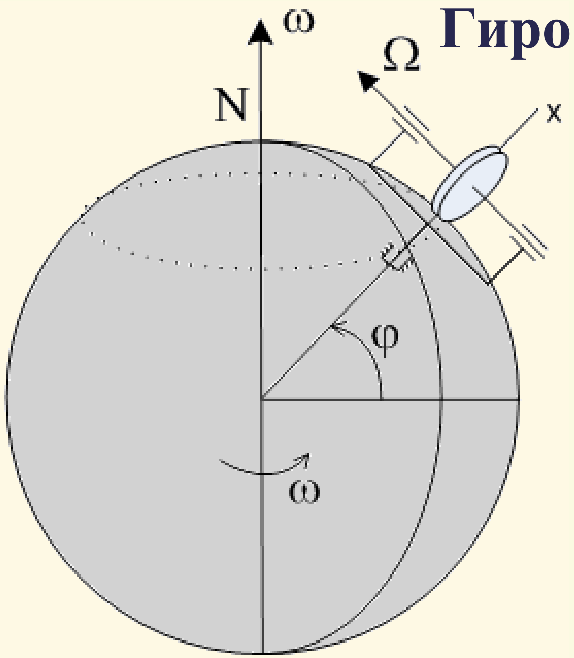
Правило Жуковского: гироскопические силы стремятся совместить ось собственного вращения гироскопа с направлением угловой скорости вынужденного поворота кратчайшим путём.

Если у двухстепенного гироскопа появится третья степень свободы (например, разрушится правый подшипник), то под действием гироскопического момента его ось начнёт перемещаться вокруг оси **y** в вертикальной плоскости против часовой стрелки до совмещения с осью **x**.

20.5. Двухстепенной гироскоп. Гироскопический эффект. Применение.

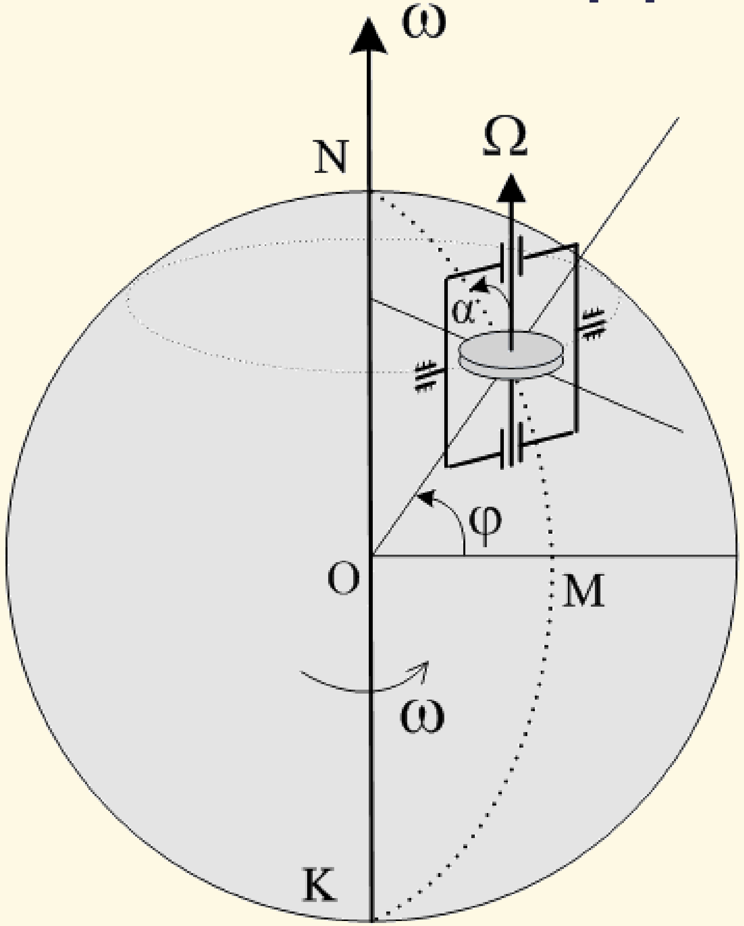
Гироскопический эффект при вращении Земли.

Гироскоп Фуко I рода (гирокомпас).



Ось внутренней рамы карданова подвеса (аналог оси **x**) вертикальна, т.е. направлена точно в зенит. Поэтому ось собственного вращения гироскопа может перемещаться в плоскости горизонта, перпендикулярной оси **x**. При вращении Земли ось собственного вращения гироскопа начнёт вынужденную прецессию вокруг направления **ω**. Поэтому появится гироскопический момент, стремящийся совместить направление собственного вращения **Ω** гироскопа с направлением **ω**. Т.к. подшипники внутренней рамы карданова подвеса этому препятствуют , то ось собственного вращения займёт наиболее близкое к вектору **ω** положение, при этом вектор **Ω** будет направлен точно на север (N).

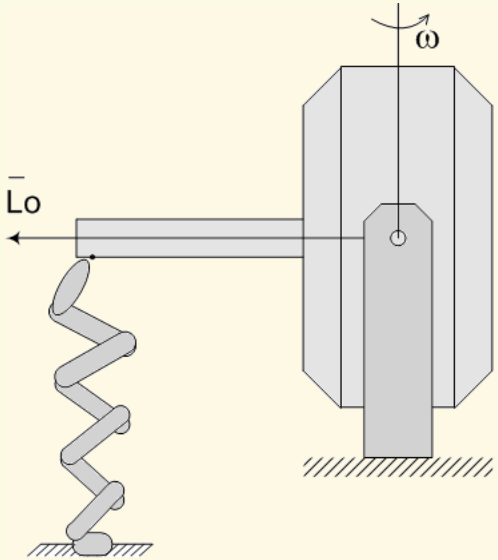
20.5. Двухстепенной гироскоп. Гироскопический эффект. Применение.

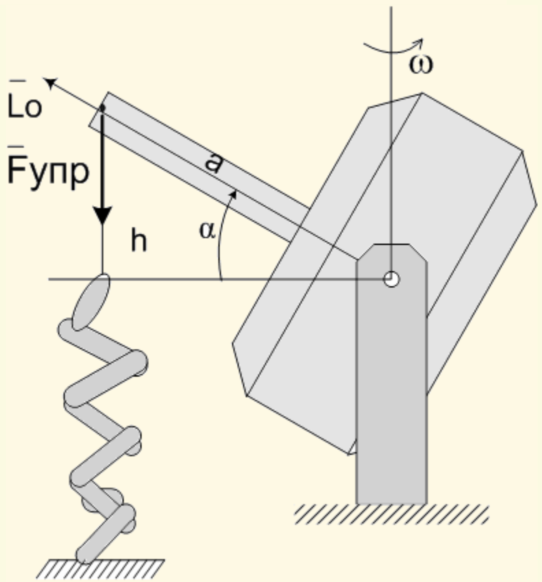


Гироскоп Фуко II рода (гирощирот).

Ось внутренней рамы карданова подвеса горизонтальна и ⊥ меридиональной плоскости KMN, а ось ротора расположена в плоскости меридиана. В этом случае при вращении Земли тоже возникает гироскопический момент, который пытается совместить вектор **Ω** с вектором **ω**. В соответствии с правилом Жуковского она совместит своё направление с направлением **ω**. При этом угол α между осью вращения ротора и плоскостью горизонта оказывается равным широте φ того места, где производится эксперимент.

20.5. Двухстепенной гироскоп. Гироскопический эффект. Применение.





Гиротахометр.

$$\mathbf{M_o^{гл(e)} = -M^{г}}$$

$$|\mathbf{M_o^{гл(e)}}| = F_{упр} \cdot a \cdot \cos(\alpha) = c \cdot h \cdot a \cdot \cos(\alpha)$$

$$\mathbf{M^{г} = -\ \omega \times L_o;}$$

$$M^{г} = \omega \cdot J_z \cdot \Omega \cdot \sin(\pi/2 - \alpha) = \omega \cdot J_z \cdot \Omega \cdot \cos(\alpha)$$

$$c \cdot h \cdot a \cdot \cos(\alpha) = \omega \cdot J_z \cdot \Omega \cdot \cos(\alpha)$$

$$\omega = c \cdot h \cdot a / (J_z \cdot \Omega)$$

Спасибо за внимание!

Адрес: en.lych@gmail.com