(https://yadi.sk/i/bsk5Eu7im6WoQ)

Лабораторная работа №2

Моделирование динамической системы методом дифференциальных уравнений

1. Распространенным способом математического моделирования сложной системы является автоматический анализ ее уравнений динамики, роль которых зачастую выполняют дифференциальные уравнения. В этих случаях система МАТЛАБ предоставляет превосходные инструментальные средства для такого исследования.
   Вы уже знаете, что одно или несколько дифференциальных уравнений "высокого" порядка сводятся к системе уравнений первого порядка в т.н. нормальной форме Коши. В системе МАТЛАБ существуют несколько "решателей" произвольной системы дифференциальных уравнений в нормальной форме, например, ode23 или ode45. Они различаются по используемому методу интегрирования функций. Однако, способы обращения к тому или иному решателю в системе идентичны.
   Допустим, необходимо решать систему диффуров в нормальной форме
   d/dt (z [i]) = Gi(z[1],z[2],…,z[n], t), i=1,…,n
   на заданном интервале времени [0 T] при указанных начальных условиях z1(0),…,zn(0). Заметим, что время T необходимо также задать численно. (Определим T=20.)
   Прежде всего надо оформить М-функцию (вспомните содержание предыдущей лабораторной работы №1) с определенным именем, например, vdlab , или любым другим, в котором будут оформлены функции правых частей уравнений Gi. Это будет самостоятельный отдельный файл. Далее следует определить вектор-строку z0 = [z1(0) z2(0) … zn(0)] начальных значений переменных. Начальные значения можно определять или численно непосредственно в строке, или, указав на соответствующей позиции буквенное обозначение, которое можно будет определить перед самим решением системы уравнений. (Последнее используется, если начальные значения не будут всегда одними и теми же, т.е. при варьировани их величин в разных реализациях вычислительного эксперимента.)
   Обращением к решателю, например, ode23, тогда будет следующая строка
   [t,Z]=ode23('vdlab',[0 20],z0,options)
   Последний указатель "options" задает режим работы решателя. Например, требуется выводить графики не всех переменных zi , а только некоторых, причем вывод осуществлять не мгновенно, после решения системы, а в процессе решения, т.е. по шагам.
   В этом случае задают:
   options=odeset('OutputFcn", 'odeplot', 'Outputsel',[k1 k2 …])
   Здесь k1, k2,… - номера переменных, графики которых выводятся на экран.
   OutputFcn - опция вывода графиков в процессе решения
   Odeplot - опция, определяющая встроенный графопостроитель
   Outputsel - указатель на вывод избранных переменных

   Ответьте на вопрос: как задается нужная исследователю точность решения? Для этого обратитесь к справочной подсистеме Help, щелкнув "мышью" на знаке "?" в строке указателей опций командного окна экрана. Далее выберите строку Function functions and ODE solvers, дважды щелкнув джойстиком на ее поле. После этого выберите указатель odeset и в выведенном на экран файле-справке информацию RelTol и AbsTol. Вернитесь в исходный справочный файл, используя указатель BACK вверху экрана и в нем выберите строку с указателем ode23, а в соответствующем файле-справке найдите пример по использованию вышеназванных имен. Пример запишите. Вернитесь в командное окно МАТЛАБ и задайте команду type lab2-1.m

2. На рис. изображена двухмассовая система с упругими и диссипативными связями. Массы обозначены m1, m2, жесткости упругих элементов - c1,c2, коэффициенты диссипации - j1,j2. Массы рассматриваются как точечные. Они находятся в узком "коридоре", так что движение имеет строго однокоординатный характер. X1 - координата центра массы m1, X2 - m 2. Система может начинать движение из состояния X2(0)=0.5 , X1(0)=1. Между массами находится упругий упор, координата и жесткость упора равны 0.75 и "c". (Все величины будут задаваться в условных единицах измерения.) Упор имеет двусторонний характер, масса m1 встречает его при движении снизу вверх, а масса m2 - при движении сверху вниз. На массы действуют помимо сил тяжести внешние силы F1, F2. Обозначим:
d/dt(x1)=v1, d/dt(x2)=v2
Fy1, Fy2 - силы, развиваемые упругими элементами с жесткостями c1, c2
Fd1, Fd2 - силы, действующие со стороны диссипативных элементов j1, j2
Направление "вниз" примем за положительное.
Для описания силы упора Fyp введем функцию sgm(x,y):

$$\mathrm{sgm}(x,y)=\begin{cases}1, & \text{если } x > y\\ 0, & \text{если } x <= y\end{cases}$$

Тогда силы упора, действующие на массы m1, m2 - Fyp1, Fyp2 составят соответственно:

Fyp1=c (0.75 - x1) sgm(0.75,x1) , т.к. направление силы вниз
Fyp2= -c (x2 - 0.75) sgm(x2,0.75) , т.к. направление силы вверх

Система дифференциальных уравнений, описывающая такую механическую систему, примет следующий вид (g - ускорение свободного падения):

{ d/dt (x1)=v1
{ d/dt (x2)=v2
{ d/dt (v1)=(F1+m1g -Fy1-Fd1+Fyp1)/m1
{ d/dt (v2)=(F2+m2g+Fy1+Fd1-Fy2-Fd2+Fyp2)/m2
{ d/dt (Fy1)=c1(v1-v2)
{ d/dt (Fy2)=c2 v2
{ Fd1=j1(v1-v2)
{ Fd2=j2 v2
{ Fyp1=c (0.75-x1) sgm(0.75,x1)
{ Fyp2= -c (x2-0.75) sgm(x2,0.75)

Следует заметить, что аналитическое решение такой системы уравнений существенно затруднено ее нелинейным характером. Поэтому на практике движение рассматриваемой механической системы моделируют. Рассмотрите организацию М-функции, в которой описывается система дифференциальных уравнений в нормальной форме, соответствующая приведенным выше уравнениям. Введите команду type vdlab,

```
function zpart=vdlab(t,z)
%Execute right parts
zpart=[(z(7)+9.8*z(13)-z(3)-z(18)*(z(1)-z(2))+z(15)*(0.75-z(6))*sgm(0.75,z(6)))/z(13);
```

```
%proizvodnaja v1
(z(8)+9.8*z(14)+z(3)+z(18)*(z(1)-z(2))-z(4)-z(18)*z(2)-z(15)*(z(5)-
0.75)*sgm(z(5),0.75))/z(14);
%proizvodnaja v2
z(16)*(z(1)-z(2)); z(17)*z(2);
%proizvodnaja Fu1; Fu2
z(2); z(1);
%proizvodnaja x2; x1
z(9)*cos(z(11)*t); z(10)*cos(z(12)*t);
%skorosti izmenenija vneshnix sil F1; F2
0;0;0;0;0;0;0;0;0;0];
%ystanovka konstant
```

а после вывода на экран файла введите команду type lab2-2.m

3. Правые части системы уравнений в нормальной форме организованы в виде функционального вектора с именем zpart. Первой его компонентой (все, что записано, начиная со знака " [" до знака " ; ") есть производная d/dt (v1). На это указывает комментарий, записанный строкой ниже - %proizvodnaja v1. В системе модели принято v1 = z(1). Итак, первой компонентой функционального вектора zpart есть величина d/dt (z(1)) - производная первой функции в системе уравнений модели. (Аналогично, " к "-й компонентой вектора zpart будет производная " к " -й функции системы.)
   Обозначения других переменных в выражении для производной z(1):
   z(7)=F1, z(13)=m1, z(3)=Fy1, z(18)=j1 (в системе модели принято j1=j2), z(2)=v2, z(15)=c, z(6)=x1.
   *Расшифруйте значения оставшихся переменных модели. Запишите в отчет систему уравнений модели в нормальной форме и расшифровку переменных, при этом учтите, что внешние силы, действующие на систему, изменяются по законам: d/dt (F1)=A1 cosw1t, d/dt (F2)=A2 cosw2t.
   Вопрос: какие номера имеют компоненты вектора zpart, равные 0? Ответ запишите.
   *Познакомьтесь с файлом, в котором осуществляется обращение к решателю системы уравнений. Введите команду type oscil и после вывода файла на экран команду type lab2-3.m

```
%Oscillation of two-mass sistem
%Working file
z=[];
z0=[0 0 9.8*m1 9.8*m2 .5 1 f1 f2 a1 a2 w1 w2 m1 m2 cw c1 c2 j];
options=odeset('OutputFcn','odeplot','Outputsel',[5 6])
%options=odeset('Outputsel',[5 6])
[t,Z]=ode23('vdlab',[0 20],z0,options);
pause
clf,close;
```

4. Первая запись: z=[]; означает, что каждая переменная "z" формируется в виде массива чисел. Далее идет строка задания начальных значений каждой переменной, при этом начальные значения переменных z(1), z(2), z(5), z(6) заданы в численном виде, а остальные - в символьном. Конкретные значения символов, как вы уже знаете, могут быть заданы из командной строки системы МАТЛАБ. Чтобы иметь возможность изменять значения некоторых постоянных параметров (коэффициентов) в решаемой системе дифференциальных

уравнений, они также введены в виде переменных модели с формируемыми из командной строки начальными значениями, а в файле vdlab указаны значения их производных, равные 0. Так, на 13-й и 14-й позициях вектора z0 стоят символы масс в системе m1, m2, а на соответствующих позициях вектора zpart в файле vdlab стоят 0, что означает: d/dt (z(13))=0, d/dt (z(14))=0. Поэтому на всем протяжении отдельного процесса моделирования будет m1=z(13)=const, m2=z(14)=const

*Запишите в отчет, какую величину обозначает каждый символ в векторе z0.

*Проведите моделирование движения системы под действием постоянных внешних сил. Для этого задайте следующие параметры системы m1=m2=1, w1==w2=0, a1=a2=0, j=.17, c1=c2=75, cw=300. Учтите, что ввод каждого параметра проводится в отдельной строке, далее ставится знак " ; ". Ввод осуществляется клавишей Enter, например:

\>> m1=1;   <Enter>

\>> и т.д.

После ввода параметров введите команду oscil - это имя нашего файла обращения к решателю ode23.

1. Ответьте на вопрос: влияет ли наличие упора на колебания массы m1 ? Ответ запишите в отчет.
2. Подсчитайте по графику число максимумов функции колебаний m1; ответ запишите. Нажмите любую клавишу и введите команду type lab2-4.m

3. Введите команды:

\>> m1=2;   <Enter>

\>> oscil   <Enter>

Выполните п.2.

Введите команду type lab2-5.m

4. Последовательно повторите п.2 для значений m1=3; 4; 5; 7.

Начиная со значения m1=3, обратите особое внимание на движение массы m2. Ответьте на вопрос: имеет ли место модуляция колебаний массы m2 колебаниями m1 ?

При подготовке отчета постройте зависимость величины периода колебаний массы m1 от ее значения.

Величину периода колебаний вычисляйте по формуле:

T = Время моделирования / Число максимумов функции

Введите команду type lab2-6.m

5. Исследуйте следующую задачу: влияет ли на эффект модуляции жесткость упора cw ? Для этого введите:

\>>m1=5;   <Enter>

\>>cw=50;   <Enter>

\>>oscil   <Enter>

После просмотра графиков сделайте вывод о присутствии или нет эффекта модуляции. Для очистки экрана нажмите любую клавишу и затем введите команду type lab2-7.m

7. Повторите последовательно эксперимент для значений cw=100; 150; 200; 300; 400; 500.

Для этого в командной строке задайте:
>> cw=...; <Enter>
>> oscil <Enter>
после просмотра графиков нажмите любую клавишу и задайте новое значение cw.
В отчет запишите то значение жесткости, с которого, по вашему мнению, начинается модуляция колебаний.
Введите команду type lab2-8.m

8. Исследуйте влияние величины параметра затухания j на движение системы.
Задайте m1=3, j=.2 и проведите моделирование.
Проведите эксперимент при значениях j=.3; .4; .5; .8; 1.
Ответьте на вопрос: влияет ли параметр затухания на период колебаний масс? на амплитуды колебаний? Ответ запишите.
Введите команду type lab2-9.m

9. Моделируйте движение системы под действием только силы F1, изменяющейся по гармоническому закону. Задайте в командной строке:
>> f1=0;
>> f2=0;
>> a1=10;
>> w1=.5;
>> oscil
График движения масс зарисуйте. Нажмите любую клавишу и введите команду type lab2-10.m

10. Увеличьте частоту внешнего воздействия в 10 раз. Для этого задайте:
>> w1=5;
>> oscil
График зарисуйте. В отчет запишите, к какому типу модуляции относится первый и второй случай движения?
Введите команду type lab2-11.m

11. Ответьте на вопрос: изменится ли характер изменения модуляции колебаний, если аналогичную внешнюю силу приложить к массе m2, а внешнюю силу, приложенную к первой массе положить равной 0 ? Задайте:
>> a1=0;
>> a2=10;
>> w2=.5;
>> oscil
Нажмите любую клавишу и затем задайте:
>> w2=5;
>> oscil
Результат сравните с предыдущим случаем.
Введите команду type lab2-12.m

12. Проведите собственный вычислительный эксперимент над данной механической системой. Предварительно поставьте цель эксперимента и задайте необходимые параметры. Рассматриваемыми (исследуемыми) вопросами при моделировании может быть, например, один из следующих:
1) Как влияют жесткости упругих связей масс системы на число их полных колебаний?

2) Будут ли равны периоды колебаний масс, если внешние силы изменяются с разными частотами? с одной частотой?
3) Как изменится движение масс, если j1>>j2 или наоборот?
4) При какой частоте внешние силы наиболее "раскачивают" систему?
5) Как изменится движение нижней массы, если m2~0, а m1~m1+m2 ?
и т.д.
Покажите результаты своего самостоятельного исследования преподавателю
В отчет внесите соответствующие рисунки по этой части ЛР.