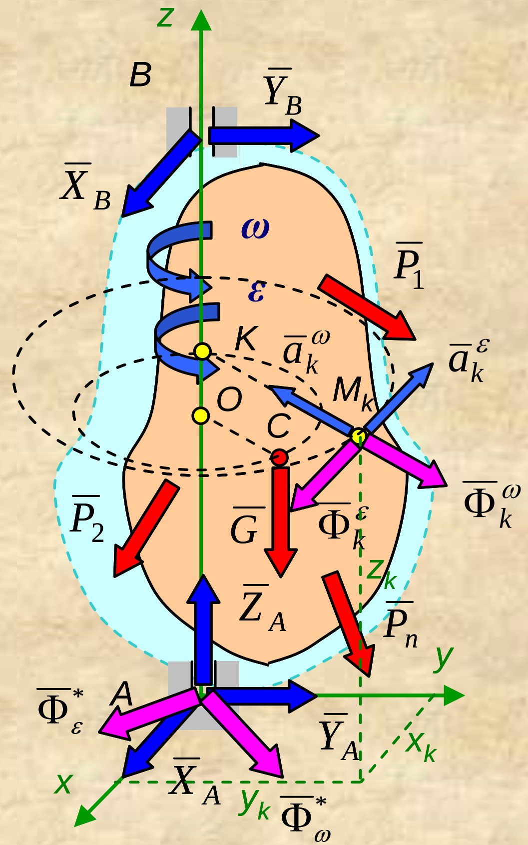
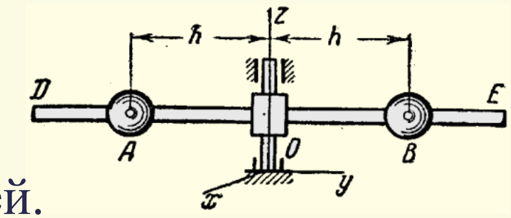
Определение опорных реакций при вращении тела вокруг неподвижной оси



Москва, 2016 год

19.1. Центробежные моменты инерции



Дано: $m_A = m_B = m$, α, $AB = 2\ell$, a, b, $\omega = const$.

Найти: R_C, R_D.

1. Укажем активные силы (***P***) и силы реакций связей.

$$J_z = \Sigma m_i h_i^2$$

2. Мысленно остановим тело, приложив к точкам ***A*** и ***B*** силы инерции. $\vec{\Phi}_A = -\vec{\Phi}_B = -m\vec{a}_A^{\,n}$,

$$a_A = \omega^2 R = \omega^2 \ell \sin\alpha \Rightarrow \Phi_A = \Phi_B = m\omega^2 \ell \sin\alpha.$$

3. Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad X_C + X_D = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad -\Phi_A + \Phi_B + Y_C + Y_D = 0$$

$$\boxed{Y_C = -\frac{m\ell^2\omega^2 \sin 2\alpha}{(a+b)}.}$$

$$\sum Z = 0; \quad Z_D - 2P = 0 \quad \Rightarrow Z_D = 2P$$

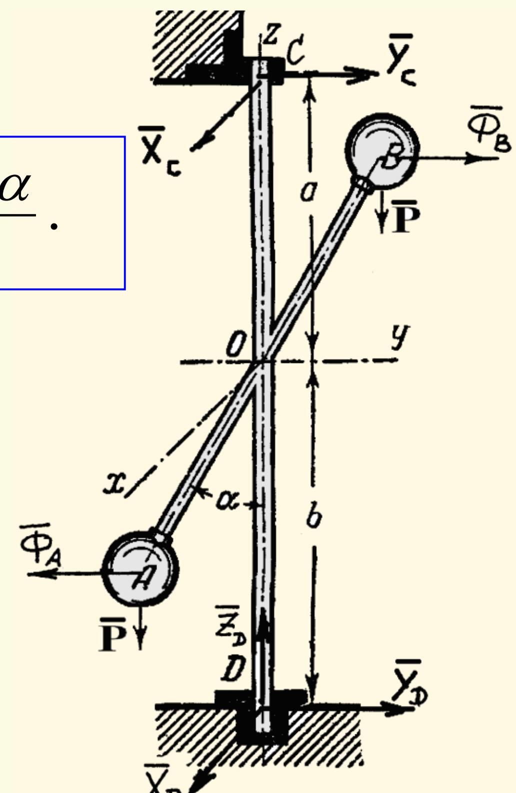
$$\sum M_x = 0; \quad Y_D b - Y_C a + P\ell\sin\alpha - P\ell\sin\alpha -$$

$$-\Phi_A \ell\cos\alpha - \Phi_B \ell\cos\alpha = 0$$

$$\sum M_y = 0; \quad -X_D b + X_C a = 0.$$

из (1) и (5) $X_C = X_D = 0$; из (2) $Y_C = -Y_D$;

из (4): $-Y_C(a+b) - m\ell^2\omega^2 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$;



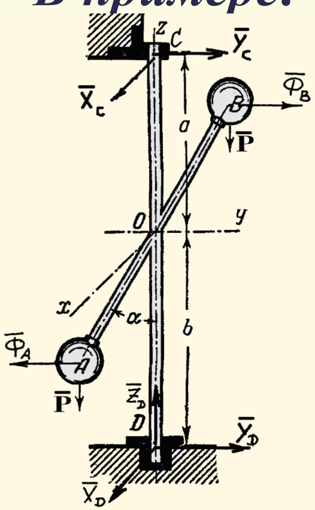
19.1. Центробежные моменты инерции

При нарушении симметрии расположения точек тела относительно оси вращения возникают дополнительные давления на подшипники со стороны вала. В качестве характеристик, учитывающих асимметрию в распределении масс системы, вводят центробежные моменты инерции. По отношению к координатным осям декартовой системы координат ***центробежными моментами инерции*** *называются величины*

$$J_{xy} = \Sigma m_i x_i y_i \,, \qquad J_{yz} = \Sigma m_i y_i z_i \,, \qquad J_{xz} = \Sigma m_i x_i z_i \,,$$

где m_i, x_i, y_i, z_i - массы точек и их координаты. Очевидно, что $J_{xy} = J_{yx}$ и т.д. В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут быть не только положительными, но и отрицательными и равными нулю.

В примере:



$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i = 0;$$

$$J_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0\,;$$

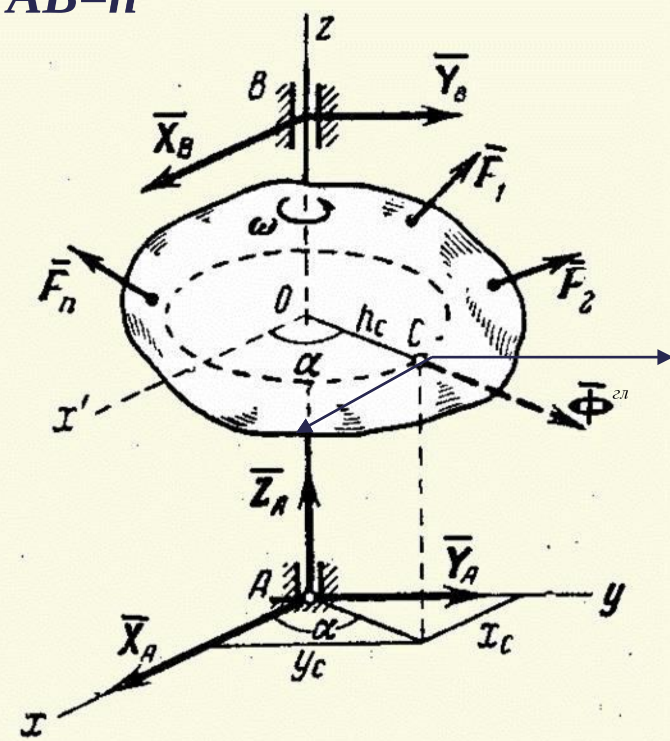
$$J_{yz} = \sum m_i y_i z_i = m_A(-\ell \sin\alpha)(-\ell\cos\alpha) +$$

$$+ m_B(\ell\sin\alpha)(\ell\cos\alpha) = m\ell^2 \sin 2\alpha.$$

$$Y_C = -Y_D = -\frac{m\ell^2\omega^2 \sin 2\alpha}{(a+b)} = -\frac{\omega^2 J_{yz}}{(a+b)}\,.$$

ω=const.
AB=h

19.2. Уравнения кинетостатики



$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^{ст} + \vec{R}_A^{д}, \quad \vec{R}_B = \vec{R}_B^{ст} + \vec{R}_B^{д}$$

Статическими называют части полных реакций, которые статически уравновешивают приложенные внешние силы. *Динамическими* называют части полных реакций, которые уравновешивают силы инерции точек тела.

$$\vec{\Phi}^{гл} = -M\vec{a}_c \;\Rightarrow \Phi^{гл} = M\omega^2 h_c$$

При *ω=const* $a_c = a_c^n = \omega^2 h_c$

$$h_c \cos\alpha = x_c\,, \quad h_c \sin\alpha = y_c$$

$$\begin{aligned}
&\sum X = 0;\ \sum F_x + X_A^{ст} + X_B^{ст} + X_A^{д} + X_B^{д} + \Phi_x^{гл} = 0\\
&\sum Y = 0;\ \sum F_y + Y_A^{ст} + Y_B^{ст} + Y_A^{д} + Y_B^{д} + \Phi_y^{гл} = 0\\
&\sum Z = 0;\ \sum F_z + Z_A^{ст} = 0\\
&\sum M_x = 0;\sum M_x(F) - Y_B^{ст}\cdot h - Y_B^{д}\cdot h + M_x^{гл}(\Phi) = 0\\
&\sum M_y = 0;\sum M_y(F) + X_B^{ст}\cdot h + X_B^{д}\cdot h + M_y^{гл}(\Phi) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\Phi_i = m_i\omega^2 h_i,\ \Phi_{ix} = m_i\omega^2 x_i,\ \Phi_{iy} = m_i\omega^2 y_i$$

$$\Phi_x^{гл} = M\omega^2 h_c \cos\alpha = M\omega^2 x_c \qquad M_x^{гл}(\Phi) = -\sum \Phi_{iy} z_i = -\sum m_i\omega^2 y_i z_i = -\omega^2 J_{yz}$$

$$\Phi_y^{гл} = M\omega^2 h_c \sin\alpha = M\omega^2 y_c \qquad M_y^{гл}(\Phi) = \sum \Phi_{ix} z_i = \sum m_i\omega^2 x_i z_i = \omega^2 J_{xz}$$

19.3. Условия динамической уравновешенности

Уравнения для расчёта динамических реакций

$$\sum X = 0; \quad X_A^{\partial} + X_B^{\partial} + M\omega^2 x_c = 0$$

$$\sum У = 0; \quad Y_A^{\partial} + Y_B^{\partial} + M\omega^2 y_c = 0$$

$$\sum M_x = 0; -Y_B^{\partial} \cdot h - \omega^2 J_{yz} = 0$$

$$\sum M_y = 0; X_B^{\partial} \cdot h + \omega^2 J_{xz} = 0$$

Условия отсутствия динамических реакций

$$x_c = y_c = 0; \; J_{xz} = J_{yz} = 0$$

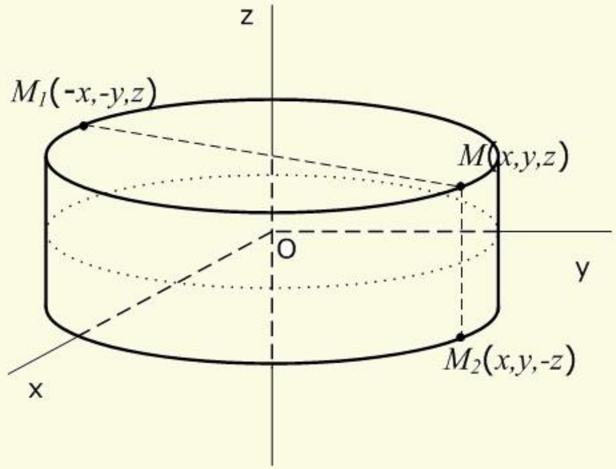
Определения

Ось Oz, для которой центробежные моменты инерции, содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется *главной осью инерции тела* для точки О. Главные оси инерции, построенные для центра масс, называют *главными центральными осями инерции тела*.

Вывод:

Тело свободно от динамических реакций, если ось вращения является *главной центральной осью инерции тела*.

19.3. Условия динамической уравновешенности (2)



1. Если в теле есть ось симметрии, то для каждой точки M(x,y,z) найдётся точка M_1 с координатами (-x,-y,z). Поэтому

$$J_{yz} = \Sigma\left[m_i y_i z_i + m_i(-y_i)z_i\right] = 0, \text{ аналогично } J_{xz} = 0$$

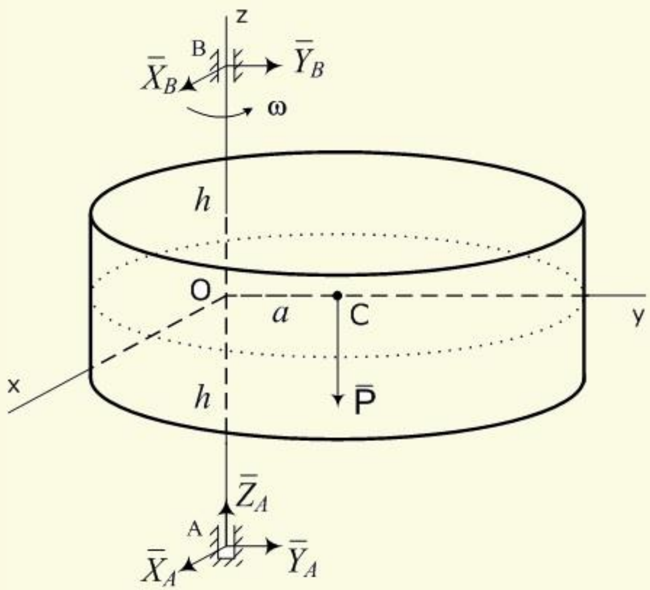
Вывод: *Если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции для любой своей точки.*

2. Если в теле есть плоскость симметрии, то для каждой точки M(x,y,z) найдётся точка M_2 с координатами (x,y,-z). Поэтому

$$J_{yz} = \Sigma m_i y_i z_i + m_i y_i(-z_i) = 0, \quad \text{аналогично } J_{xz} = 0$$

Вывод: *Если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O, в которой ось пересекает плоскость симметрии.*

19.3. Пример решения задачи



Дано: *a, h, m, ω=const.*

Найти: R_A, R_B.

Имеем: $x_C=0$, $y_C=a$. Плоскость **xOy** – плоскость симметрии, поэтому $J_{yz}=J_{xz}=0$

$$\sum X=0;\ X_A+X_B+m\cancelto{0}{x_c}\omega^2=0 \qquad (1)$$

$$\sum Y=0;\ Y_A+Y_B+my_c\omega^2=0 \qquad (2)$$

$$\sum Z=0;\ -mg+Z_A=0 \qquad (3)$$

$$\sum M_x=0;\ -mg\cdot a+Y_A\cdot h-Y_B\cdot h-\omega^2\cancelto{0}{J_{yz}}=0 \qquad (4)$$

$$\sum M_y=0;\ -X_A\cdot h+X_B\cdot h+\omega^2\cancelto{0}{J_{xz}}=0 \qquad (5)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sum X=0;\ \sum F_x+X_A^{ст}+X_A^{д}+X_B^{ст}+X_B^{д}+mx_c\omega^2=0\\
&\sum Y=0;\ \sum F_y+Y_A^{ст}+Y_A^{д}+Y_B^{ст}+Y_B^{д}+my_c\omega^2=0\\
&\sum Z=0;\ \sum F_z+Z_A^{ст}=0\\
&\sum M_x=0;\ \sum M_x(F)-Y_B^{ст}\cdot h-Y_B^{д}\cdot h-\omega^2 J_{yz}=0\\
&\sum M_y=0;\ \sum M_y(F)+X_B^{ст}\cdot h+X_B^{д}\cdot h+\omega^2 J_{xz}=0
\end{aligned}}$$

Из (1) и (5): ***$-X_A\cdot h+(-X_A)\cdot h=0$***

$$\boxed{X_A=X_B=0;}$$

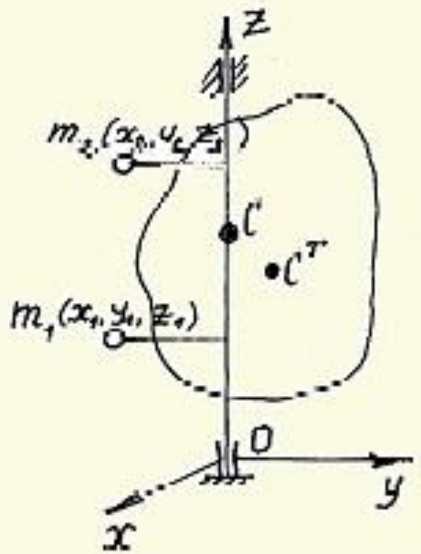
Из (2) и (4): ***$-Y_B=Y_A+my_C\cdot\omega^2$;***

$-mga+Y_Ah+Y_Ah+my_C\,\omega^2h=0$;

$$\boxed{\begin{aligned}
&Y_A=\frac{mg}{2h}a-\frac{1}{2}ma\omega^2;\\
&Y_B=-\frac{mg}{2h}a-\frac{1}{2}ma\omega^2;
\end{aligned}}$$

$Y_A=\dfrac{ma}{2}(\dfrac{g}{h}-\omega^2)$; *h=10 см, ω=10 рад/с*

14.9. Динамическое уравновешивание масс



Любую ось, проведенную в теле, можно сделать главной центральной осью инерции путем добавления двух точечных масс.

Пусть $C^T(x_c^T, y_c^T, z_c^T)$ и M^T- центр тяжести и масса тела, а $m_1(x_1, y_1, z_1)$ и $m_2(x_2, y_2, z_2)$ - массы и координаты добавленных точек.

С – общий центр масс, $M^{общ}$ – масса всей системы.

Условия уравновешивания $x_c = y_c = 0;\ J_{xz} = J_{yz} = 0.$

$$M^{общ} x_c^{общ} = m_1 x_1 + m_2 x_2 + M^{\text{Т}} x_{\text{с}}^{\text{т}} = 0$$

$$M^{общ} y_c^{общ} = m_1 y_1 + m_2 y_2 + M^{\text{Т}} y_{\text{с}}^{\text{т}} = 0$$

$$J_{xz}^{общ} = m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + J_{xz}^T = 0$$

$$J_{yz}^{общ} = m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 + J_{yz}^T = 0$$

Имеем 4 уравнения и 8 неизвестных: $m_1, x_1, y_1, z_1, m_2, x_2, y_2, z_2$.

4 из них задаём, остальные получаем из уравнений. Для уравновешивания можно и высверливать отверстия в теле.

Спасибо за внимание!