Мобильная робототехника

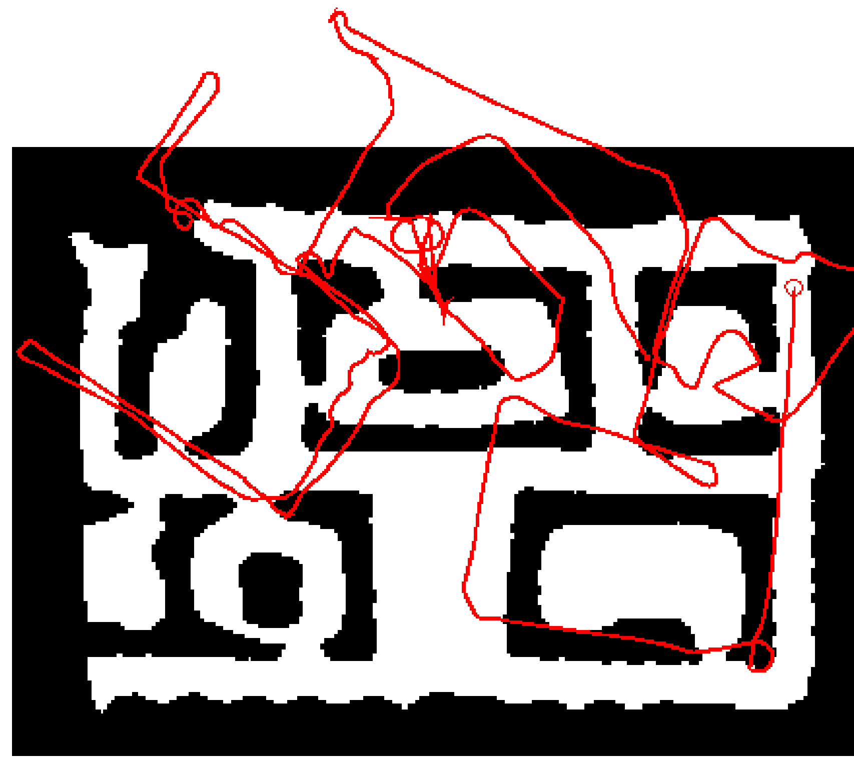
Введение в вероятностные методы
Фильтр Байеса

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА РОБОТОТЕХНИКИ И МЕХАТРОНИКИ

Неопределённость

- Не существует абсолютно точных датчиков
- Не существует абсолютно точных приводов



Рекурсивный фильтр Байеса

$$bel(x_t) = \eta\rho(z_t|x_t)\int\rho(x_t|x_{t-1},u_t)\,bel(x_{t-1})dx_{t-1}$$

Вероятность

P(A) – вероятность того, что событие *A* произошло

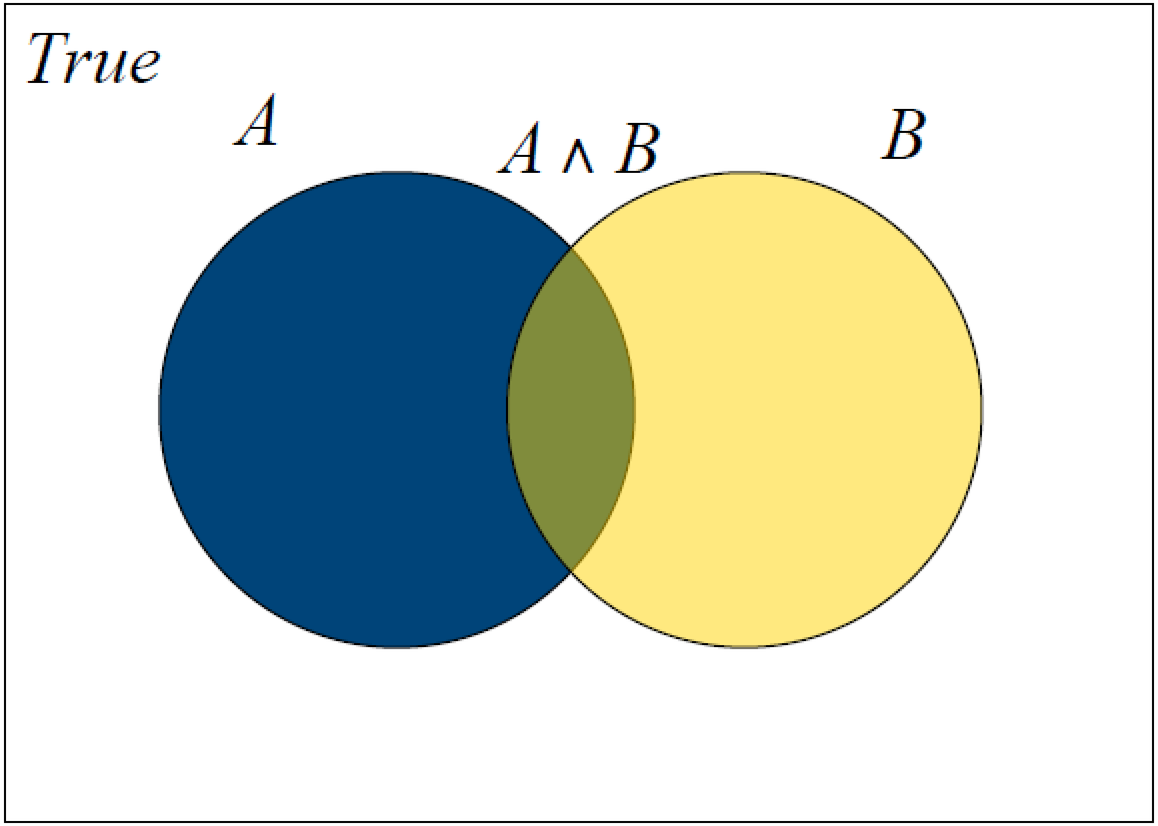
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(True) = 1 \qquad P(False) = 0$$

$$P(A \vee \mathrm{B}) = P(A) + P(\mathrm{B}) - P(A \wedge \mathrm{B})$$

Вероятность

$$P(A \vee \mathrm{B}) = P(A) + P(\mathrm{B}) - P(A \wedge \mathrm{B})$$



Вероятность

$$P(A \vee \neg A) = P(A) + P(\neg A) - P(A \wedge \neg A)$$

$$P(True) = P(A) + P(\neg A) - P(False)$$

$$1 = P(A) + P(\neg A) - 0$$

$$P(\neg A) = 1 - P(A)$$

Дискретные случайные величины

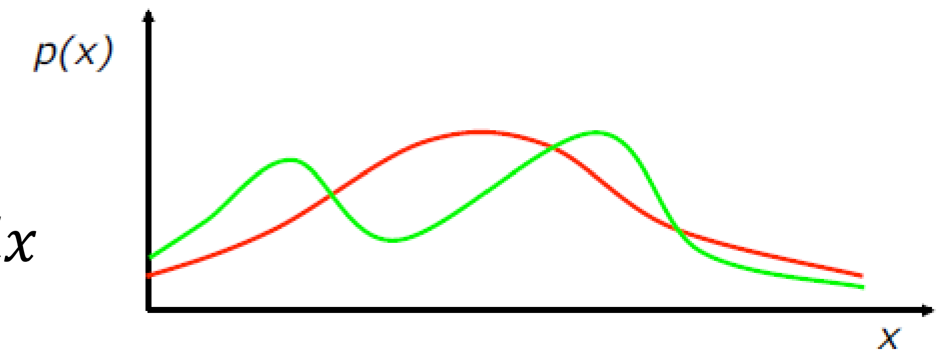
- X – дискретная случайная величина
- X может принимать конечное число значений $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- $P(X = x_i)$ или $P(x_i)$ – вероятность того, что X примет значение x_i

$$\mathrm{P}(\text{ауд.}) = (0.7, 0.2, 0.08, 0.02) \quad \sum_x P(x_i) = 1$$

Непрерывные случайные величины

- X – непрерывная случайная величина
- $p(X = x)$ или $p(x)$ – функция плотности распределения

$$P(x \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx$$



$$\int p(x)\, dx = 1$$

Условная вероятность

$$P(X = x \text{ И } Y = y) = P\,(x, y)$$

Если X и Y независимы

$$P(x, y) = P(x)P(y)$$

Условная вероятность исхода X если известно Y

$$P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$

$$P(x, y) = \mathrm{P(x|y)P(y)}$$

Если X и Y независимы

$$P(x|y) = P(x)$$

Формула полной вероятности

Дискретный случай

Непрерывный случай

$$P(x) = \sum_y P(x, y)$$

$$p(x) = \int p(x, y) dy$$

$$P(x) = \sum_y P(x|y) P(y)$$

$$p(x) = \int p(x|y) p(y)\, dy$$

Формула Байеса

$$P(x,y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)}}$$

Нормализация

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)} = \eta P(y|x)P(x)$$

$$\eta = P(y)^{-1} = \frac{1}{\sum_x P(y|x)P(x)}$$

Алгоритм:

$$\forall x: \ aux_{x|y} = P(y|x)P(x)$$

$$\eta = \frac{1}{\sum_x aux_{x|y}}$$

$$\forall x: \mathrm{P(x|y)} = \eta \ aux_{x|y}$$

Формула Байеса с дополнительным знанием

$$P(x|y,z) = \frac{P(y|x,z)P(x|z)}{P(y|z)}$$

Условие независимости

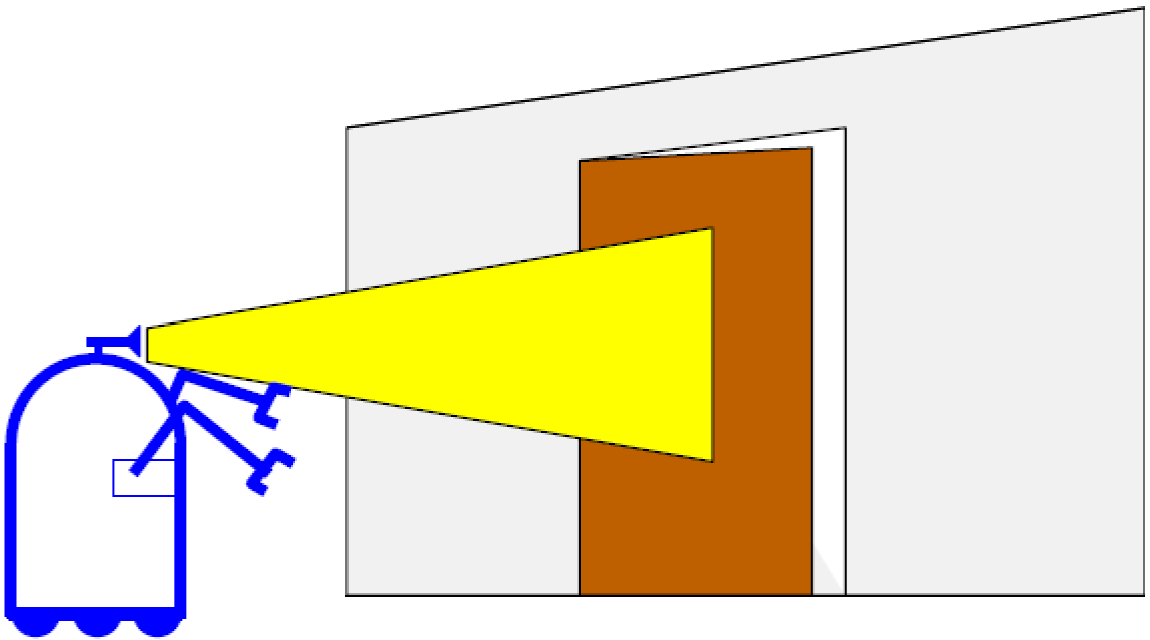
$$P(x,y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

Эквивалентно

$$P(x|z) = P(x|z,y) \quad \text{и} \quad P(y|z) = P(y|z,x)$$

Простой пример оценки состояния

- Робот производит измерение z
- Что значит $P(open|z)$?



Пример

$$P(z|open) = 0.6$$

$$P(z|\neg open) = 0.3$$

$$P(open) = P(\neg open) = 0.5$$

$$P(open \mid z) = \frac{P(z \mid open)P(open)}{P(z \mid open)p(open) + P(z \mid \neg open)p(\neg open)}$$

$$P(open \mid z) = \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.6 \cdot 0.5 + 0.3 \cdot 0.5} = \frac{0.3}{0.3 + 0.15} = 0.67$$

Объединение измерений

- Робот произвел еще одно измерение z_2
- Как использовать новую информацию
- Как оценить $P(open|z_1, z_2, \dots, z_n)$?

Рекурсивная Байесова оценка

$$P(x|z_1,\dots,z_n) = \frac{P(z_n|x,z_1,\dots,z_{n-1})P(x|z_1,\dots,z_{n-1})}{P(z_n|z_1,\dots,z_{n-1})}$$

Свойство Маркова

z_n независимо от $z_1,\dots,z_{n-1}$ если известно x

$$P(x|z_1,\dots,z_n) = \frac{P(z_n|x)P(x|z_1,\dots,z_{n-1})}{P(z_n|z_1,\dots,z_{n-1})} = \eta P(z_n|x)P(x|z_1,\dots,z_{n-1}) =$$

$$= \eta_{1\dots n}\left[\prod_{i=1\dots n} P(z_i|x)\right]P(x)$$

Пример

$$P(z_2|open) = 0.25$$

$$P(z_2|\neg open) = 0.3$$

$$P(open|z_1) = 2/3$$

$$P(open \mid z_2, z_1) = \frac{P(z_2 \mid open)\,P(open \mid z_1)}{P(z_2 \mid open)\,P(open \mid z_1) + P(z_2 \mid \neg open)\,P(\neg open \mid z_1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{15}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Действия

- Обычно среда меняется во времени
  - *вследствие действий робота*
  - *вследствие действий других объектов*
  - *или просто с течением времени*
- Как учесть эти изменения?

Обычные действия

- Робот поворачивает колеса для движения
- Робот использует манипулятор для захвата объекта

- Действия никогда не происходят с абсолютной определенностью
- Противоположно измерениям, действия обычно увеличивают неопределенность

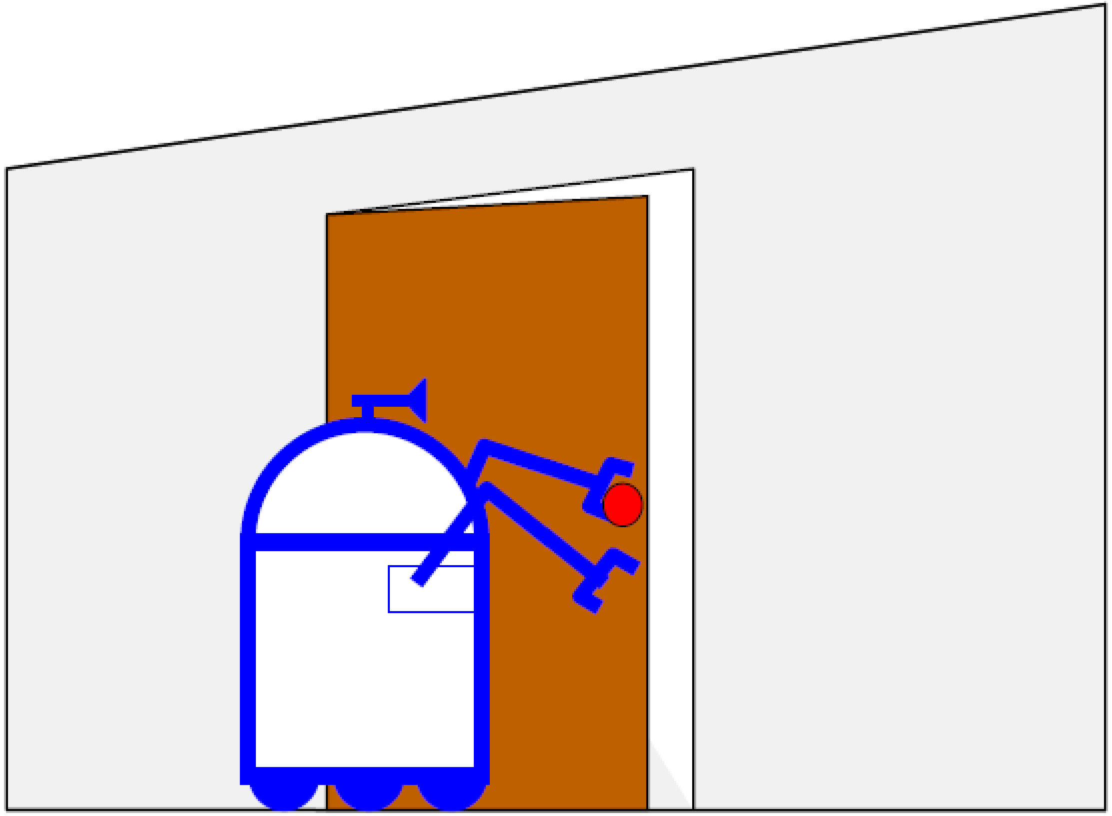
Моделирование действий

- Для учета результата действия u используется условная вероятность
$$P(x|u, x')$$

- Это вероятность того, что действие u изменит состояние с x' на x

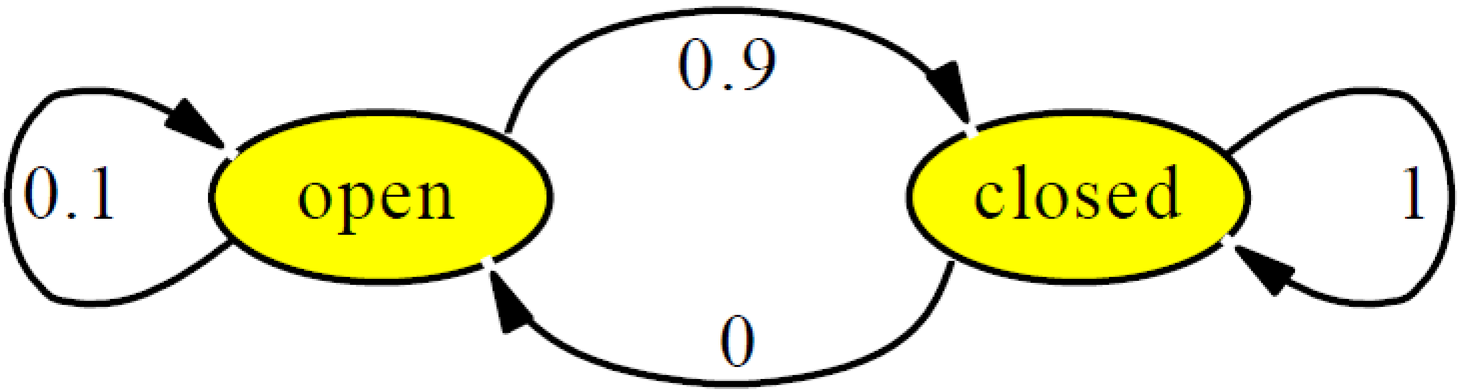
Пример

Закрытие двери



Изменение состояний

$P(x|u, x')$, u - закрыть дверь



Расчет изменения состояния после действия

Непрерывный случай

$$P(x|u) = \int P(x|u, x')P(x')dx'$$

Дискретный случай

$$P(x|u) = \sum P(x|u, x')P(x')$$

Допущение

$$P(x'|u) = P(x')$$

Пример расчёта

$$P(closed|u) = \sum P(closed \mid u, x')P(x')$$

$$= P(closed \mid u, open)P(open) + P(closed \mid u, closed)P(closed)$$

$$= \frac{9}{10} * \frac{5}{8} + \frac{1}{1} * \frac{3}{8} = \frac{15}{16}$$

$$P(open|u) = \sum P(open \mid u, x')P(x')$$

$$= P(open| \, u, open)P(open) + P(open|u, open)P(closed)$$

$$= \frac{1}{10} * \frac{5}{8} + \frac{0}{1} * \frac{3}{8} = \frac{1}{16}$$

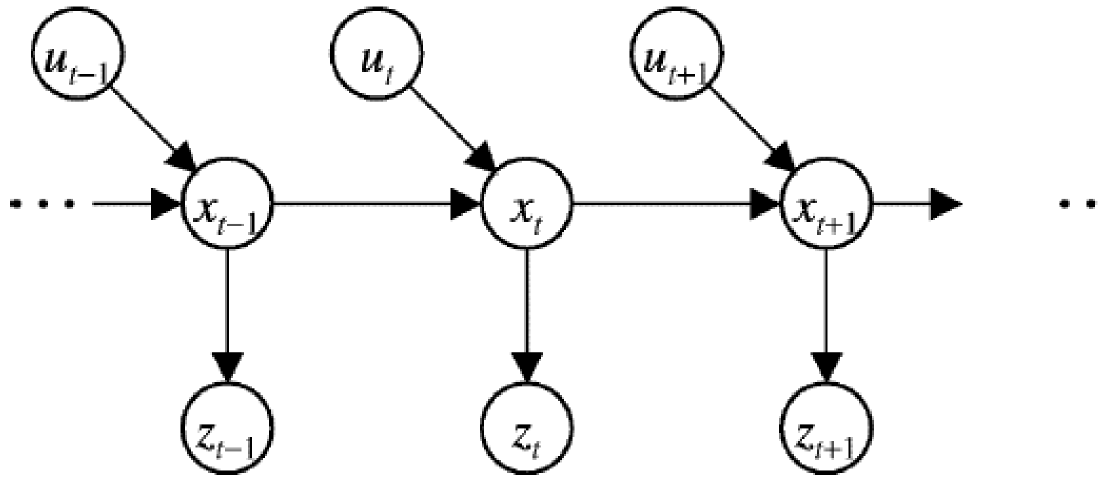
$$= 1 - P(closed \mid u)$$

Фильтр Байеса

- Дано:
  - Массив измерений z и действий u
    $d_t = \{u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t\}$
  - Модель датчика (измерителя) $P(x|z)$
  - Модель движения $\mathrm{P}(x|u, x')$
  - Априорная информация о состоянии $\mathrm{P}(x)$
- Найти:
  - Оценку состояния системы

$$Bel(x_t) = P(x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t)$$

Свойство Маркова



- Допущения:

$$\rho(z_t|x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = \rho(z_t|x_t)$$

$$\rho(x_t|x_{1:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = \rho(x_t|x_{t-1}, u_t)$$

Рекурсивный фильтр Байеса

$$bel(x_t) = \rho(x_t|z_{1:t}, u_{1:t})$$

$$= \eta\rho(z_t|x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t})\ \rho(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

$$= \eta\rho(z_t|x_t)\ \rho(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

$$= \eta\rho(z_t|x_t) \int \rho(x_t|x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t})\ \rho(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1}$$

$$= \eta\rho(z_t|x_t) \int \rho(x_t|x_{t-1}, u_t)\ \rho(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1}$$

$$= \eta\rho(z_t|x_t) \int \rho(x_t|x_{t-1}, u_t)\ \rho(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1}$$

$$= \eta\rho(z_t|x_t) \int \rho(x_t|x_{t-1}, u_t)\ bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Экстраполяция и коррекция

- Фильтр Байеса обычно представляется как процесс, состоящий из двух этапов:
  - Экстраполяция (предсказание):

$$\overline{bel}(x_t) = \int \rho(x_t | x_{t-1}, u_t)\, bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Модель движения

  - Коррекция:

$$bel(x_t) = \eta \rho(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$$

Модель датчика

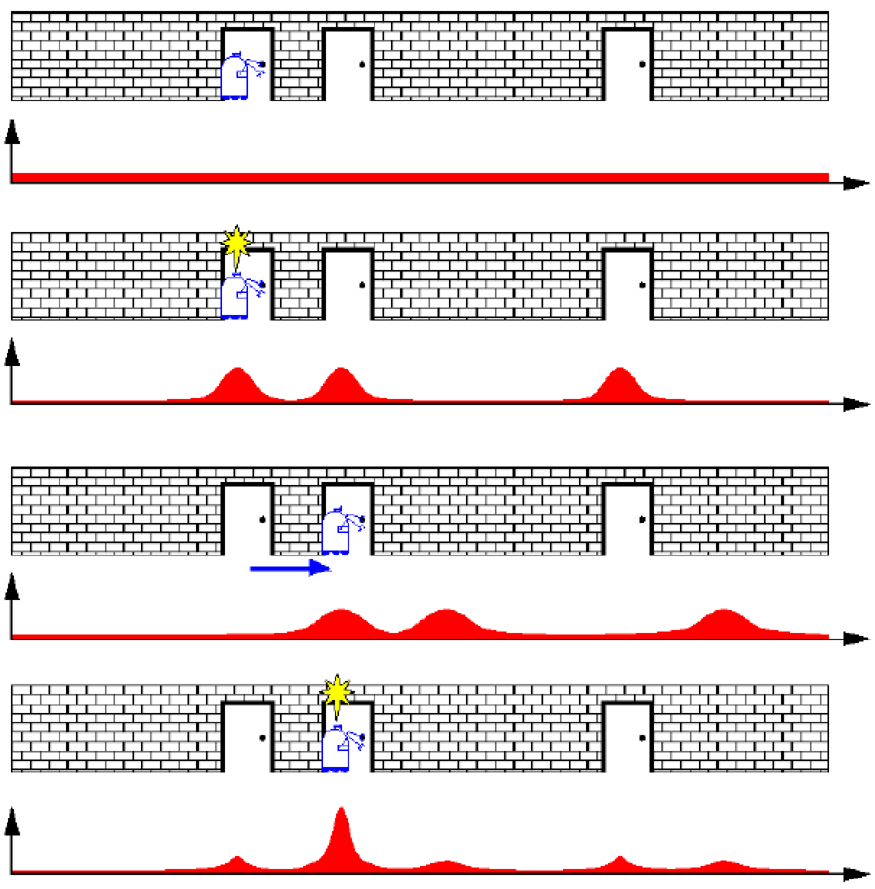
Алгоритм

$$bel(x_t) = \eta \rho(z_t|x_t) \int \rho(x_t|x_{t-1}, u_t)\, bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

1. Алгоритм **Фильтра Байеса** $(Bel(x), d)$:
2. $\eta = 0$
3. если d – измерение z то
4. Для всех x вычисляем
5. $Bel'(x) = P(z|x)Bel(x)$
6. $\eta = \eta + Bel'(x)$
7. Для всех x вычисляем
8. $Bel'(x) = \eta^{-1}Bel'(x)$
9. иначе если d – действие u то
10. Для всех x вычисляем
11. $Bel'(x) = \int P(x|u, x')Bel(x')dx'$
12. возвращаем $Bel'(x)$

Локализация

$$bel(x_t) = \eta \rho(z_t|x_t) \int \rho(x_t|x_{t-1}, u_t)\, bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$



Реализации

- Различные реализации:
  - Линейные и нелинейные модели
  - Распределения Гаусса и др.
  - Параметрические и непараметрические фильтры
- Фильтр Калмана:
  - Распределения Гаусса
  - Линейные или линеаризованные модели
- Фильтр частиц:
  - Не параметрический
  - Любые модели

Резюме

- Формула Байеса дает возможность вычислять вероятности, которые тяжело получить из статистических данных
- Свойства Маркова значительно упрощают оценку состояния системы
- Фильтр Байеса эффективный вероятностный метод для оценки состояния динамических систем

Следующая лекция

- Вероятностные модели движения