Оглавление

метода

Схема Бернулли:

Пусть проведено n независимых испытаний, каждое из которых заканчивается либо «успехом» с вероятностью *p*, либо «неудачей» с вероятностью *q=1-p*. Тогда вероятность появления *m* «успехов» вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Вероятность появления $m_1 \le m \le m_2$ «успехов» считается по формуле Бернулли для отрезка

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Зависимость вероятности $P_n(m)$ от числа «успехов» m; n=10.

§12. Предельная теорема Пуассона

Теорема. Пусть число испытаний достаточно велико ($n\to\infty$), а вероятность появления интересующего нас события в каждом испытании достаточно мала ($p\to 0$), тогда вероятность

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np \in (0; \infty), \ m=0,1,2\ldots n$$

Замечание 1: на практике формулу Пуассона используют обычно когда $n>100$, а $npq\le 9$.

Замечание 2: поскольку $p\to 0$, то теорему называют законом редких явлений.

Доказательство

§13. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Пусть число испытаний достаточно велико ($n \to \infty$), а вероятность появления интересующего нас события в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, тогда

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

Замечание: на практике формула Муавра-Лапласа когда $npq > 9$

§14. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Теорема. Пусть число испытаний достаточно велико ($n \to \infty$), а вероятность появления, интересующего нас события, в каждом отдельном испытании постоянна и отлична от 0 и 1, тогда

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ - функция Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ - нормированная функция Лапласа

$$P(m_1 \le m \le m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

§16. Дискретные случайные величины (ДСВ)

Определение. Случайная величина X называется *дискретной случайной величиной*, если все её значения можно пронумеровать, т.е. $X = \{x_i\}$, $(i=1, 2, 3\ldots)$

Определение. Законом распределения дискретной случайной величины (распределением) называется соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями, то есть совокупность $\{x_i, p_i\}$, $(i=1, 2, 3\ldots)$

- Биномиальное распределение.

ДСВ X называется распределенной по биномиальному закону B (n, p) (имеет биномиальное распределение с параметрами n, p), если ее возможные значения X=0, 1, 2… n,

а вероятности вычисляются по формуле:

$$P(X=m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

- Распределение Пуассона (закон редких явлений).

ДСВ X называется распределенной по закону Пуассона (имеет распределение Пуассона) с параметром $\lambda > 0$, если ее возможные значения X=0,1,2…, а вероятности вычисляются по формуле:

$$P(X=m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

- Геометрическое распределение.

ДСВ X называется распределенной по геометрическому закону (имеет геометрическое распределение) с параметром p, если она принимает значения X=1,2,3…, а вероятности вычисляются по формуле:

$$P(X=m) = (1-p)^{m-1} p$$

- Гипергеометрическое распределение.

ДСВ X называется распределенной по гипергеометрическому закону (имеет гипергеометрическое распределение) с параметрами n_1, n_2, n, если она принимает значения X= $m_1, m_1+1, ... m_2$, а вероятности вычисляются по формуле:

$$P(X=m) = \frac{C_{n_1}^m C_{n_2}^{n-m}}{C_{n_1+n_2}^n}$$

$$m = m_1, m_1+1 ... m_2, \qquad m_1 = \max(0; n-n_2), \qquad m_2 = \min(n_1; n)$$

§17. Непрерывные случайные величины (НСВ)

Определение. Непрерывной случайной величиной X называется такая случайная величина, которая может принимать любые числовые значения в заданном интервале и для которой существует предел:

$\rho_X(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x \le X < x + \Delta x)}{\Delta x}$, называемый плотностью распределения вероятностей

Свойства плотности распределения вероятностей.

a) $\rho_X(x) \ge 0$

b) $\rho_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$, $F_X(x) = P(X < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho_X(t)dt$

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_X(x)dx = 1$ - условие нормировки

d) $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho_X(x)dx$

- Случайная величина X называется равномерно распределенной на отрезке $[a;\ b]$ (имеющей равномерное распределение с параметрами a,b), если её плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$\rho_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & при\, x \in [a;b] \\ 0, & при\, x \notin [a;b] \end{cases}$$

$F_X(x)$-?

а) $x \le a$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = 0$$

б) $a < x \le b$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} \rho(t)dt + \int\limits_{a}^{x} \rho(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

в) $x > b$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{b} \rho(t)dt + \int\limits_{b}^{x} \rho(t)dt = F(b) + \int\limits_{b}^{x} 0dt = F(b) = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

- Случайная величина X называется распределенной по показательному (экспоненциальному) закону с параметром $\lambda > 0$ (имеющей показательное распределение с параметром $\lambda > 0$), если её плотность распределения вероятности имеет вид:

$$\rho_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$F_X(x)$ -?

а) $x \leq 0$

$F(x) = 0$

б) $x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = -\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{\lambda}\Bigg|_0^x = -e^{-\lambda t}\Bigg|_0^x = -e^{-\lambda x} - (-e^{-\lambda 0}) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Определение. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности, т.е.

$$m_x = M[X] = MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Вероятностный смысл математического ожидания: оно дает представление о среднем значении случайной величины.

§21. *Математическое ожидание непрерывной случайной величины*

Определение. *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины* X, возможные значения которой принадлежит отрезку $[a,b]$, называется определенный интеграл вида

$$MX = \int_a^b x\rho(x)dx$$

(если $a \to \infty$ *и* $b \to \infty$, то интеграл считается абсолютно сходящимся).

- Случайная величина X называется распределенной по нормальному закону с параметрами a,σ (имеющей нормальное распределение с параметрами a,σ), если её плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$\rho_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad X \to N(a;\sigma)$$

Если $a = 0, \sigma = 1$, т.е. $X \to N(0;1)$, то говорят, что НСВ X имеет стандартное нормальное распределение.

Математическое ожидание (м. о.) или *среднее значение* $\mathbf{M}\xi$ случайной величины ξ вычисляется по формулам

$$\mathbf{M}\xi = \sum_i x_i p_i \quad \text{(для дискретной случайной величины) и}$$

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \quad \text{(для непрерывной случайной величины),}$$

причем $\mathbf{M}\xi$ существует, если ряд в первом случае (если сумма бесконечна) или интеграл во втором случае сходятся абсолютно. В этих формулах x_i — значения случайной величины, p_i — их вероятности, $p(x)$ — плотность вероятности.

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$\mathbf{D}\xi=\mathbf{M}(\xi-\mathbf{M}\xi)^2.$$

На практике в качестве меры разброса значений случайной величины используют число $\sigma\xi=\sqrt{\mathbf{D}\xi}$, называемое *средним квадратичным отклонением* или *стандартом*. Для вычислений часто удобна формула $\mathbf{D}\xi=\mathbf{M}(\xi^2)-(\mathbf{M}\xi)^2$.

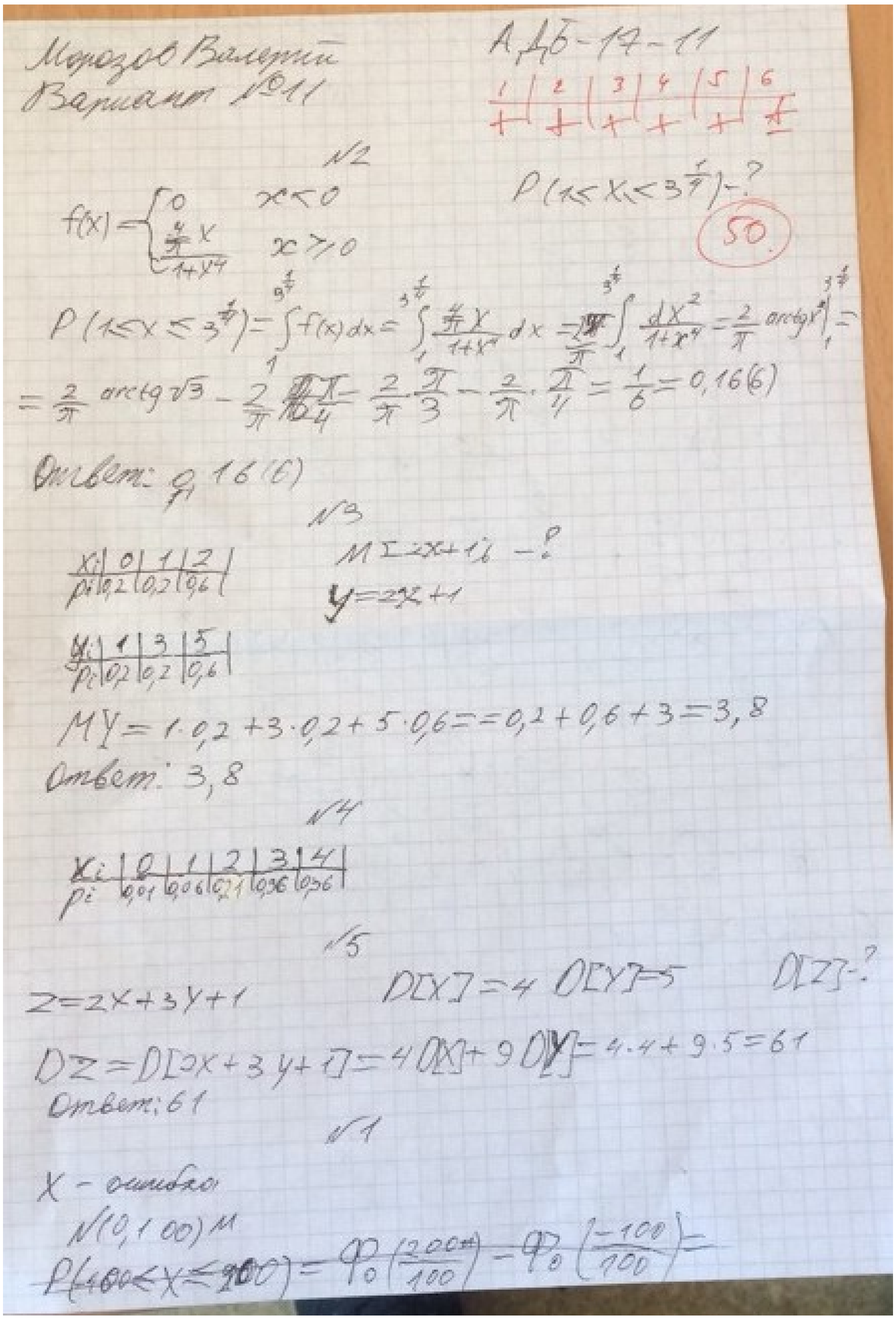
Дисперсия вычисляется по формулам

$\mathbf{D}\xi=\sum_i (x_i-\mathbf{M}\xi)^2 p_i = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbf{M}\xi)^2$ (для дискретной случайной величины) и

$\mathbf{D}\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathbf{M}\xi)^2 p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - (\mathbf{M}\xi)^2$ (для непрерывной случайной величины).

Варики

B11



Морозов Валерий
Вариант №11

АДб-17-11

1	2	3	4	5	6
+	+	+	+	+	±

50

№2

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{\frac{4}{\pi}x}{1+x^4} & x\geq 0\end{cases}$$

$P(1\leq X\leq 3^{\frac{1}{4}})$ – ?

$$P(1\leq x\leq 3^{\frac14})=\int_1^{3^{\frac14}} f(x)\,dx=\int_1^{3^{\frac14}}\frac{\frac{4}{\pi}x}{1+x^4}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_1^{3^{\frac14}}\frac{dx^2}{1+x^4}=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x^2\Big|_1^{3^{\frac14}}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt3-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac16=0{,}16(6)$$

Ответ: 0,16(6)

№3

x_i	0	1	2
p_i	0,2	0,2	0,6

$M[2X+1]$ – ?

$Y=2X+1$

y_i	1	3	5
p_i	0,2	0,2	0,6

$MY=1\cdot0{,}2+3\cdot0{,}2+5\cdot0{,}6==0{,}2+0{,}6+3=3{,}8$

Ответ: 3,8

№4

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,01	0,06	0,21	0,36	0,36

№5

$Z=2X+3Y+1$ $\quad D[X]=4\quad D[Y]=5\quad D[Z]$ – ?

$DZ=D[2X+3Y+1]=4D[X]+9D[Y]=4\cdot4+9\cdot5=61$

Ответ: 61

№1

X – ошибка

N(0,100) м

$~~P(100\leq X\leq 200)~~=\Phi_0\left(\frac{200}{100}\right)-\Phi_0\left(\frac{-100}{100}\right)=$

$$P(-100 \le X \le 200) = \Phi_0\left(\frac{200}{100}\right) - \Phi_0\left(\frac{-100}{100}\right) = \Phi_0(2) + \Phi_0(1) =$$

$$= 0,4772 + 0,3413 = 0,8185$$

Ответ: 0,8185

№6

$$f(x) \begin{cases} 0 & x < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\cos x}{2} & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad D[X]$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - (MX)^2$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx\right) =$$

$$= \frac{x\sin x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + -\frac{\cos x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$DX = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{\cos x}{2}\,dx - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{x^2\sin x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\,dx}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2\sin x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{x\cos x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} + -\frac{\sin x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2} - 1$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{2} - 1$

B12

Капицин Ю.С

АДБ 17-11

Вариант 12

① $N(0;\sigma)$

$P(|x|\le 20)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{20}{\sigma}\right)\right)=\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0.8$

$\frac{20}{\sigma}=1.90$ – из таблицы

$\rightarrow \sigma=\frac{20}{1.90}=10.5$

1	2	3	4	5	6
−	+	+			

③ $p=0.01$

ξ им. биномин. распределен.

для него $M\xi=np$

$\sigma=\sqrt{D\xi}=\sqrt{np(1-p)}$

$n:\quad np=\sqrt{np(1-p)}$

$n^2p^2=np\cdot(1-p)$

$np=1-p$

$n=\frac{1-p}{p}=\frac{1-0.01}{0.01}=99$

при $n=99\rightarrow M[\xi]=\sigma$

② $p(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sin^2 x; & x\in[0;\pi]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$

Найти $P\left(\frac{\pi}{4}\le\xi\le\frac{3\pi}{4}\right)$

$(x\le 0;\ x>\pi)$

Функция распределен.

$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x \sin^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^x(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^x=$

$=\frac{1}{\pi}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

B18

Паламиев Владимир АДБ-17-11.

В-18.

1	2	3	4	5	6
±	+	+	+		+

45

№1.

X- случайная ошибка измерения дальн

$$f(x)=\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-50)^2}{20000}}$$

$$\frac{0-50}{100}$$

$$P(-\infty<x<0)=\frac{1}{2}(\Phi(0,5)+\Phi(\infty))=\frac{1}{2}\cdot(0,3829+1)=0,6914$$

Ответ: 0,6914.

№4.

Всего билетов - 10.
Выигрышных билетов - 5
Купили билетов - 3
Проигрышных билетов: 10-5=5

Вероятность того, что среди 3 выбранных билетов нет выигрышных.

$$P(0)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=0,0833.$$

1) Вероятность того, что среди 3 купленных билетов 1 выигрышный:

$$C_{10}^3=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10!}{3!\,7!}=120.$$

$$C_5^1=\frac{5!}{1!(5-1)!}=\frac{5!}{1!\,4!}=5$$

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5!}{2!\,3!}=10.$$

$$P(1)=\frac{C_5^1C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{5\cdot10}{120}=0,417.$$

2) Вероятность того, что среди 3 купленных би

$C \cdot \frac{1}{2} = 1$

$C = 2$

№3

$M[\xi] = 1 = np$

$D[\xi] = 0{,}99 = npq$

$q = 0{,}99$

$p + q = 1$

$p = 1 - q = 0{,}01$

$np = 1$

$\cancel{n}\; n = 100$

№6

$p(x) = \begin{cases} xe^{-x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}; \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx \Rightarrow$

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} xe^{-x}dx = \int_{0}^{x} te^{-t}dt = \left[\begin{matrix} \text{по частям:} \\ u = t;\ du = dt \\ dv = e^{-t}dt,\ v = e^{-t} \end{matrix}\right]$

$= -e^{-t} \cdot t + \int_{0}^{x} e^{-t}dt = (-e^{-t} \cdot t - e^{-t})\Big|_{0}^{x} =$

$= (-e^{-x}x - e^{-x}) - (-e^{0} \cdot 0 - e^{0}) = -e^{-x} \cdot x - e^{-x} + 1 =$

$= 1 - e^{-x}(x+1)$

$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ 1 - e^{-x}(x+1), \text{ если } x > 0 \end{cases}$

лишь 2 вопроса:

$P(2) = \frac{C_5^2 C_5^1}{C_{10}^3}$

$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$

$C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1!\,4!} = 5$

$P(2) = \frac{10 \cdot 5}{120} = 0,417$

3) Найдём вероятно, что все нужные знает вопросы.

$P(3) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 0,0833.$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,083	0,417	0,417	0,083

Мат. ожидание:

$M(x) = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0,0833 + 1 \cdot 0,417 + 2 \cdot 0,417 + 3 \cdot 0,0827 =$
$= 1,499.$

Дисперсия:

$D(x) = \sum x_i^2 p_i - M(x)^2 = 0^2 \cdot 0,0833 + 1^2 \cdot 0,417 + 2^2 \cdot 0,417 +$
$+ 3^2 \cdot 0,0827 - 1,499^2 = 0,582$

Среднее квадрат. отклонение $\sigma(x)$:

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{0,582} = 0,763$

№2.

$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} Cx\cos x^2\,dx = 1.$

т.к. C - постоянная

$C\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cos x^2\,dx = 1.$

B16

Абдулзагиров Мурад АДБ-17-11.

Вариант 16.

1	2	3	4	5	6
+	−	+			−

① $\sigma = 30$ $a = 540$

укладывается 88% коробок (0,88)

$$P(|X-a|<x) = 2\cdot\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

$P(A) = 0{,}88$ − где A − масса попала в интервал

$$P(A) = 2\Phi\left(\frac{x}{30}\right) = 0{,}88 \quad \Big| :2$$

$$\Phi\left(\frac{x}{30}\right) = 0{,}44$$

$$\frac{x}{30} = 1{,}56$$

$x = 46{,}8$ $(a-x;\ a+x) = (540-46{,}8;\ 540+46{,}8)$

Ответ: в интервале $(493{,}2;\ 586{,}8)$

③. $$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0{,}7, & -1 < x \le 2 \\ 0{,}9, & 2 < x \le 2{,}5 \\ 1, & x > 2{,}5 \end{cases}$$

x_i	−1	2	2,5
p_i	0,7	0,2	0,1

Хз

2) $M(6)=1$

$D(6)=0,99$

$M(6)=$ ~~...~~ $np=1$

$D(6)=nqp=0,99$

$1q=0,99$

$q=0,99$

$p=1-q$

$p=0,01$

$n=100$