Конспект Лекций

Теоретическая механика

Глава XVI

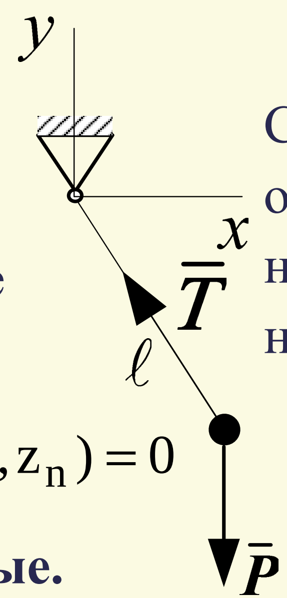
АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Глава XVI. Принцип возможных перемещений

§16.1. Классификация связей

Ньютонова механика.

Связи, наложенные на СМТ – тела, ограничивающие перемещения точек СМТ. Их действие заменяется силами реакций.



Аналитическая механика.

Связи, наложенные на СМТ, описываются уравнениями или неравенствами, которым подчиняются координаты точек СМТ.

$$x^2 + y^2 = \ell^2$$

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \qquad \textbf{(16.1)}$$

$$(x^2 + y^2) - \ell^2 = 0$$

1. Голономные и неголономные.

Связь называется ***геометрической***, если она налагает ограничения только на координаты точек СМТ. В уравнения (или неравенства) этих связей не входят производные от координат (16.1).

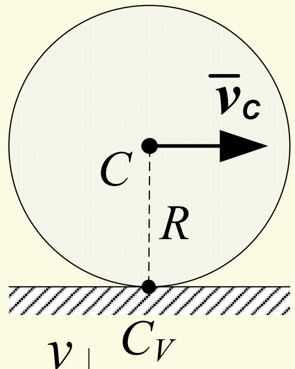
§16.1. Классификация связей. Продолжение 1.

Связь называется ***кинематической***, если она налагает ограничения не только на координаты, но и на скорости точек системы

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0 \qquad \textbf{(16.2)}$$

Голономными являются геометрические и интегрируемые кинематические связи. ***Неголономными*** - неинтегрируемые кинематические связи.

Пример.



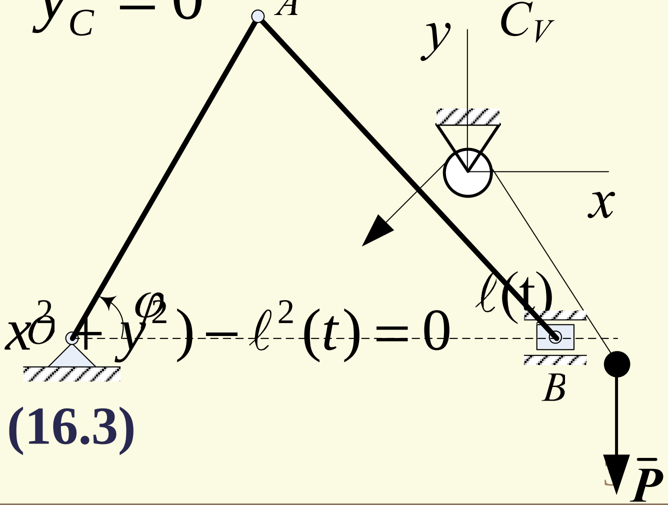
$$y_C = 0, \quad \vec{v}_{C_v} = 0. \qquad \vec{v}_{C_v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{R} = 0$$

$$На\ x: \ v_C - \omega \cdot R = \frac{dx_C}{dt} - \frac{d\varphi}{dt} \cdot R = 0 \quad \Rightarrow x_C - \varphi \cdot R = 0$$

$$y_C = 0$$

2. *Стационарные и нестационарные.*

Связь ***стационарна***, если она не изменяется с течением времени (время ***t*** не входит явно в уравнения связей – (16.1)), иначе связь ***нестационарна*** – (16.3).



$$(x^2 + y^2) - \ell^2(t) = 0$$

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \qquad \textbf{(16.3)}$$

§16.1. Классификация связей. Продолжение 2.

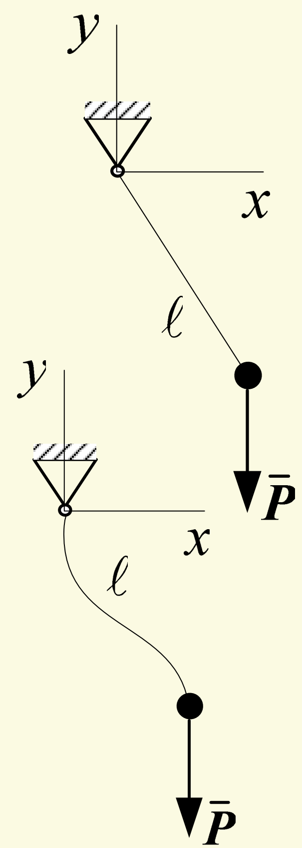
3. ***Удерживающие и неудерживающие (двусторонние).***

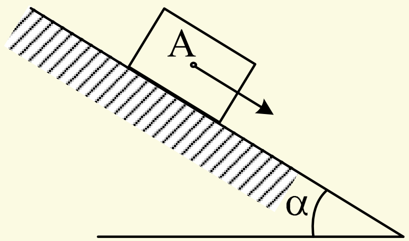
Удерживающие (двусторонние) – связи, которые сохраняют своё действие во всё время движения СМТ. Такие связи задаются равенствами.

$$(x^2 + y^2) - \ell^2 = 0$$

Неудерживающие (односторонние) - связи, которые при движении СМТ могут прекращать и возобновлять своё действие. Такие связи описываются неравенствами.

$$(x^2 + y^2) - \ell^2 <= 0$$





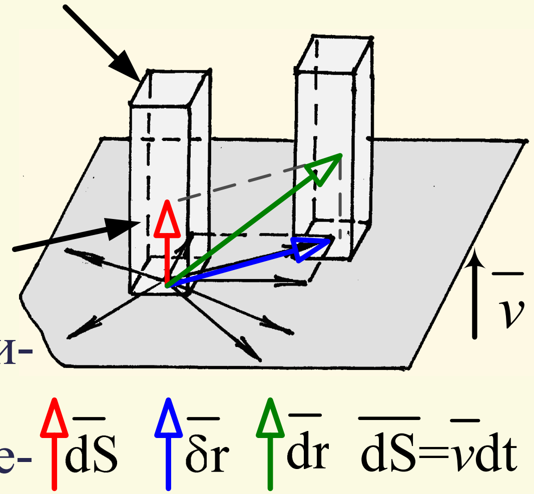
Мы будем рассматривать голономные удерживающие стационарные связи.

§16.2. Возможные перемещения. Идеальные связи.

Рассмотрим бесконечно малые перемещения точек СМТ, не нарушающие связи. Их много.

Среди них есть действительные перемещения, происходящие под действием приложенных сил.

Если связи не стационарны, то действительные перемещения $d\vec{r}$ за время dt можно представить состоящими из двух частей: **1)** из перемещений $\delta\vec{r}$ при фиксированных связях; **2)** из перемещений $d\vec{S}$ из-за изменения самих связей.



$$d\vec{r} = \delta\vec{r} + d\vec{S}$$

Возможное (виртуальное) перемещение:

1. ***мысленное***
2. ***бесконечно малое*** перемещение точек системы,
3. ***допустимое в данный момент времени***
4. наложенными на систему ***связями***

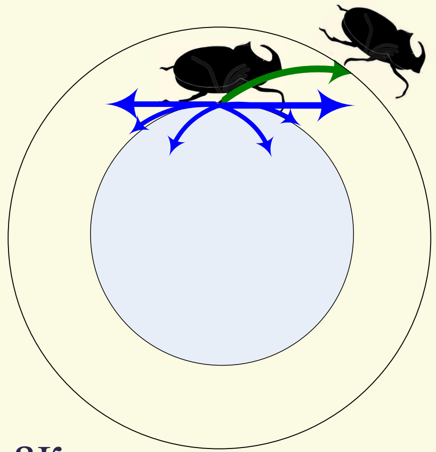
Зависит только от зафиксированных в данный момент связей.

Если связи стационарны, то действительное перемещение $d\vec{r}$ есть одно из возможных $\delta\vec{r}_i$.

Действительное перемещение зависит от:

1. ***сил***;
2. ***времени***;
3. наложенных на систему ***связей***;
4. ***начальных условий*** движения.

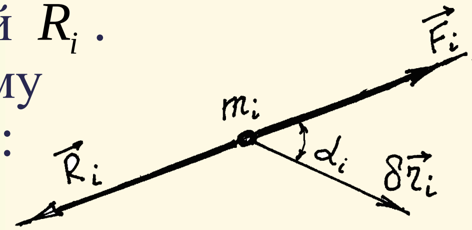
§16.2. Возможные перемещения. Продолжение.



Т.к. возможные перемещения очень малы, то это величины первого порядка малости.

Поэтому криволинейные перемещения заменяют прямолинейными, отложенными по касательным к траекториям точек.

Идеальные связи



На каждую точку СМТ действуют равнодействующая активных сил $\vec{F}_i$ и равнодействующая сил реакций связей $\vec{R}_i$. Дадим системе возможное перемещение и найдём сумму элементарных работ всех действующих на систему сил:

$$\delta A = \sum \delta A_i = \sum (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i$$

Если связи таковы, что $\sum \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0,$ то их называют *идеальными*.**(16.4)**

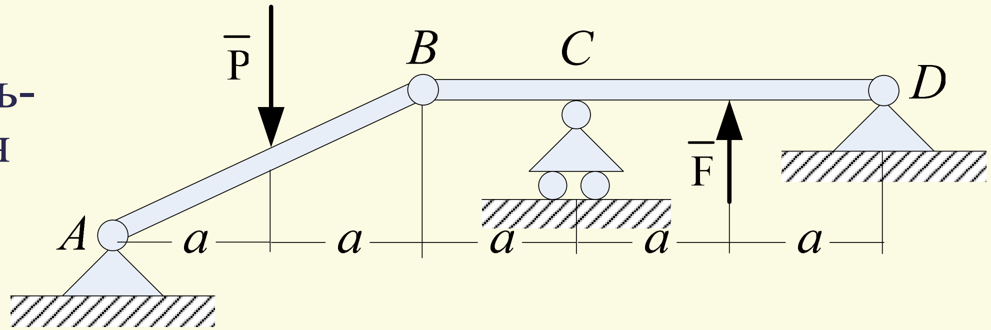
Идеальные связи – такие, сумма элементарных работ реакций которых на любом возможном перемещении точек системы равна нулю.

Примеры: 1) Абсолютно гладкие поверхности. 2) Абсолютно твёрдая шероховатая поверхность при качении по ней без проскальзывания абсолютно твёрдого тела. 3) Идеальные шарниры и подшипники.

§16.3. Принцип возможных перемещений (ПВП).

Геометрическая статика:
Расчленяем систему тел на отдельные тела и записываем уравнения равновесия для каждого из тел.

$$\sum \overline{F}_i^{(e)} = 0, \quad \sum M_O(\overline{F}_i^{(e)}) = 0$$

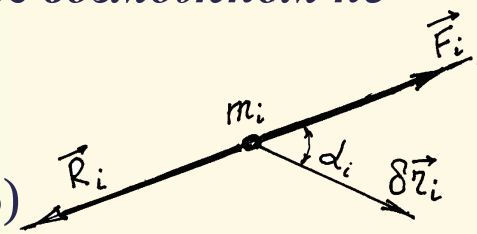


Аналитическая статика - другие условия равновесия, применимые *ко всей системе в целом* и основанные на **ПВП**.

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Для равновесия механической системы ***с идеальными стационарными*** связями ***необходимо и достаточно,*** чтобы ***сумма элементарных работ*** всех активных сил, приложенных с системе, на любом её ***возможном перемещении*** равнялась ***нулю***.

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \quad \textbf{(16.5)}$$



Доказательство: <u>***1. Необходимость:***</u> из равн-я $\Rightarrow$ (16.5)

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \quad (\times\delta\vec{r}_i) \Rightarrow \qquad \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \delta A(\vec{F}_i) + \delta A(\vec{R}_i) = 0$$

$$(\Sigma):\ \Sigma\delta A(\vec{F}_i) + \Sigma\cancel{\delta A(\vec{R}_i)} = 0 \quad \Rightarrow \delta A = \sum \delta A_i = 0. \quad \Rightarrow \textbf{(16.5)}$$

0 – идеальные связи

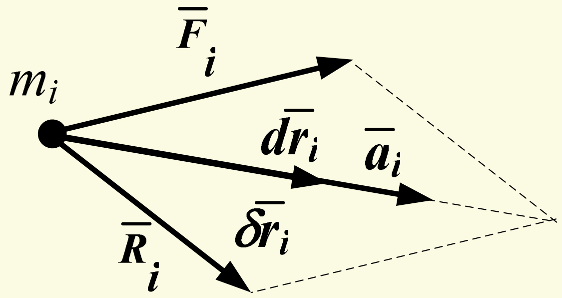
§16.3. Принцип возможных перемещений. Продолжение.

2. *Достаточность*: из (16.5) $\Rightarrow$ равновесие,
(для этого скорости точек должны отсутствовать).

Доказательство от противного.

Пусть $\delta A=0$, но равновесия нет, т.е для некоторых точек $\sum \vec{F}_i + \vec{R}_i \neq 0$ и они имеют ускорение. Покажем, что такого не может быть.

Рассмотрим какую-либо i-ю точку. По 2 аксиоме механики её ускорение $\vec{a}_i \uparrow\uparrow (\vec{F}_i + \vec{R}_i)$.



Т.к. $v_i = 0$, то её действительное перемещение $d\vec{r}_i \uparrow\uparrow \vec{a}_i$. Связи стационарны $\Rightarrow$ действительное перемещение $d\vec{r}_i$ есть одно из возможных $\delta\vec{r}_i$.
Выберем его в качестве $\delta\vec{r}_i$, тогда $\delta\vec{r}_i \uparrow\uparrow (\vec{F}_i + \vec{R}_i)$.

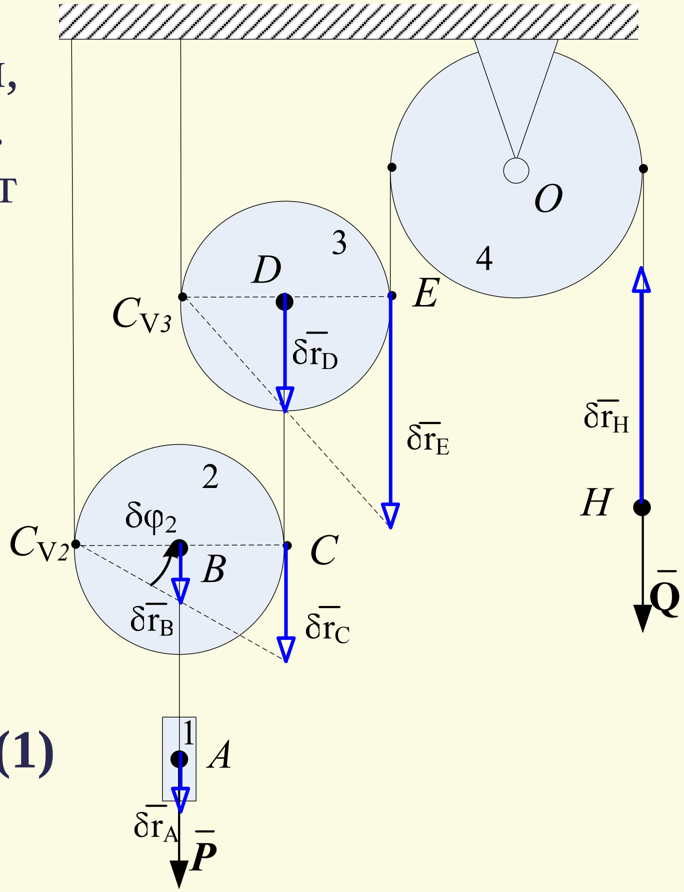
Найдём δA_i: $\delta A_i = \delta A(\vec{F}_i) + \delta A(\vec{R}_i) = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i =$

$$= (\vec{F}_i + \vec{R}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = \left|\vec{F}_i + \vec{R}_i\right| \cdot \delta r_i \cdot \cos 0 > 0.$$

(Σ): $\delta A = \Sigma \delta A_i > 0.$ Получили противоречие!

§16.4. Примеры.

1. ПВП используется для анализа активных сил, действующих на уравновешенную систему тел. Если одна из них неизвестна, то ПВП позволяет её найти. **Дано: P. Найти: Q**.



1. Укажем на рисунке активные силы (**P** и **Q**).

2. Дадим системе возможное перемещение.
Пусть точка ***A*** переместилась на $\delta\vec{r}_A$, тогда точка ***H*** переместится на $\delta\vec{r}_H$. Запишем уравнение (16.5), выражающее ПВП:

$$\delta A = \Sigma \delta A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\delta A = \delta A(\vec{\mathrm{Q}}) + \delta A(\vec{\mathrm{F}}) = \vec{\mathrm{Q}} \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{P} \cdot \delta\vec{r}_H = 0. \quad \mathbf{(1)}$$

3. Кинематический анализ.

Пусть $\delta \boldsymbol{r}_A$ известно. Тогда $\delta \boldsymbol{r}_B = \delta \boldsymbol{r}_A$, $\delta\varphi_2 = \delta \boldsymbol{r}_B / \boldsymbol{R}_2$, $\delta \boldsymbol{r}_C = \delta\varphi_2 \cdot 2\boldsymbol{R}_2 = 2\delta \boldsymbol{r}_A$, аналогично $\delta \boldsymbol{r}_H = \delta \boldsymbol{r}_E = 2\delta \boldsymbol{r}_D = 4\delta \boldsymbol{r}_A$.

4. Подставим это в **(1)**. Имеем: $\delta A = \mathrm{P} \cdot \delta r_A \cos 0 + \mathrm{Q} \cdot \delta r_H \cos \pi =$

$$= \mathrm{P} \cdot \delta r_A - \mathrm{Q} \cdot 4\delta r_A = \delta r_A(\mathrm{P} - 4\mathrm{Q}) = 0.$$

Ответ: Q=P/4.

§16.4. Примеры. Продолжение 1.

2. ПВП используется ***для нахождения реакции*** связи ***в одном из направлений***.

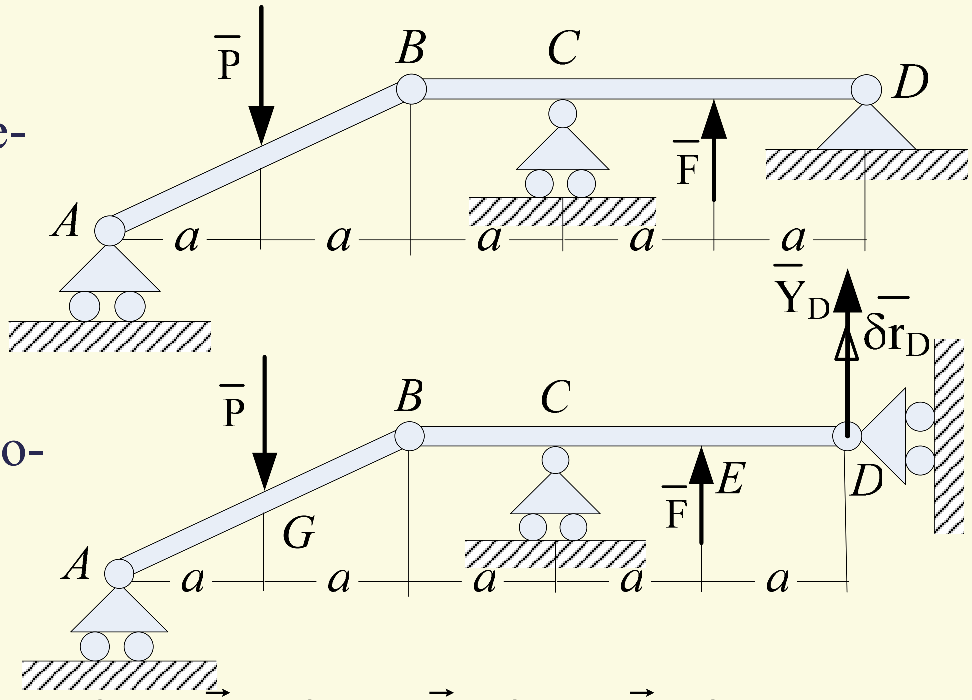
а) Заменяем связь на такую, которая даёт перемещаться точке приложения связи в выбранном направлении (даём системе степень свободы).

б) Прикладываем в этой точке искомую реакцию (считая её активной силой).

в) Даём системе возможное перемещение и с помощью ПВП ищем такое значение искомой реакции, которое уравновешивает активные силы.

Дано: P, F, *a*. Найти: Y_D. Для решения задачи используем ПВП:

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0. \qquad \textbf{(16.5)}$$



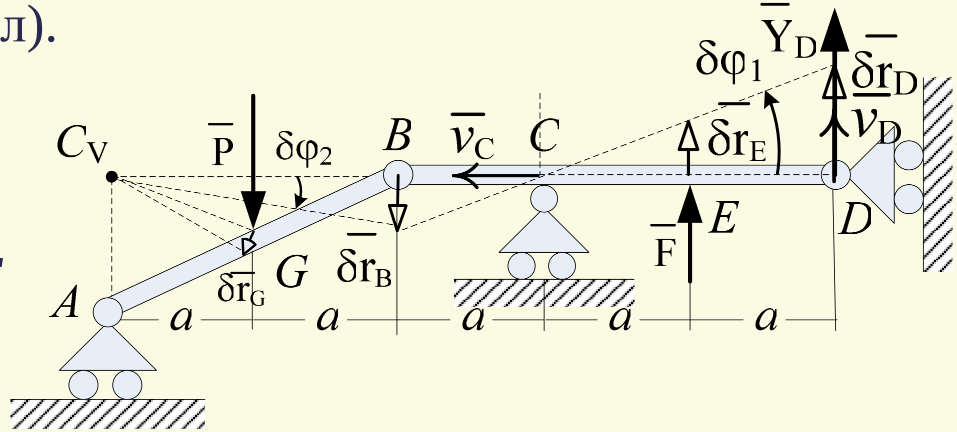
1. Для определения $\mathbf{Y_d}$ заменим неподвижный шарнир в точке ***D*** такой связью, которая даёт перемещаться этой точке в направлении искомой реакции, т.е по оси у.

2. Прикладываем в этой точке искомую реакцию $\mathbf{Y_d}$.и даём точке ***D*** возможное перемещение δr_D в направлении $\mathbf{Y_d}$.

3. Записываем **(16.5)** для этой задачи: $\delta A = \vec{Y}_D \cdot \delta\vec{r}_D + \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_E + \vec{P} \cdot \delta\vec{r}_G = 0.$ **(1)**

§16.4. Примеры. Продолжение 2.

4. Кинематический анализ (выразим все возможные перемещения через δr_D, опираясь на характер движения тел).



<u>**Тело 1**</u> – ППД. Ищем МЦС на пересечении $\perp$ к возможным скоростям т.D и C. Это точка C. Значит тело 1 повернулось вокруг т.C на угол $\delta\varphi_1$. Строим δr_E и δr_B.

<u>**Тело 2**</u> – ППД. Ищем МЦС на пересечении $\perp$ к возможным скоростям т.A и B. Это точка C_V. Значит тело 2 повернулось вокруг т. C_V на угол $\delta\varphi_2$ в сторону δr_B, если смотреть из C_V, а т.G переместилась на δr_G.

<u>Выразим возможные перемещения:</u> Пусть δr_D известно, тогда $\delta\varphi_1 = \delta r_D/DC = \delta r_D/2a$. $\delta r_E = \delta\varphi_1 \cdot EC = \delta r_D/2$. $\delta r_B = \delta\varphi_1 \cdot BC = \delta r_D/2$. $\delta\varphi_2 = \delta r_B/BC_V = \delta r_D/4a$.

5. Подставим δr_i в (**1**). Т.к. угол между направлениями δr_G и силой P искать сложно, то работу этой силы удобно искать как работу её момента относительно неподвижной точки тела 2: $\delta A(\vec{P}) = \delta A(M_{C_V}(\vec{P}))$. Имеем:

$$\delta A = Y_D \cdot \delta r_D \cos 0 + F \cdot \delta r_E \cos 0 + P \cdot a \cdot \delta\varphi_2 = 0 \Rightarrow$$

$$Y_D \cdot \delta r_D + F \cdot \delta r_D / 2 + P \cdot a \cdot \delta r_D / 4a = 0 \Rightarrow \quad \delta r_D (Y_D + F/2 + P/4) = 0 \Rightarrow$$

$$Y_D = -(F/2 + P/4).$$