

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технологический университет
«СТАНКИН»

Кафедра теоретической механики

А.Э. Волков, С.А. Еленев

Методические указания
по проведению лабораторных работ
по теоретической механике

Часть 2

Москва 2012

Волков А.Э., Еленев С.А. Методические указания по проведению лабораторных работ по теоретической механике. Часть 2. – М.: ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН», 2012. – 16 с.

Методические указания предназначены для студентов 2^{го} курса, изучающих раздел "Приближенная теория гироскопов" динамики твердого тела. Кратко описана приближенная теория гироскопов и дана методика проведения лабораторных работ по изучению свойств различных гироскопов. Рассмотрены свободный трехстепенной гироскоп, тяжелый гироскоп и двухстепенной гироскоп.

© А.Э. Волков, С.А. Еленев, составление, 2012
© ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН», 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Приближенная теория гироскопов	4
3. Свойства свободного трехстепенного гироскопа	6
Теория	6
Устройство и принцип работы лабораторной установки	7
Порядок выполнения лабораторной работы	8
Контрольные вопросы	8
Порядок оформления отчета	9
4. Свойства тяжелого гироскопа	10
Теория	10
Устройство и принцип работы лабораторной установки	10
Порядок выполнения лабораторной работы	11
Контрольные вопросы	12
Порядок оформления отчета	12
5. Свойства двухстепенного гироскопа	13
Теория	13
Устройство и принцип работы лабораторной установки	15
Порядок выполнения лабораторной работы	15
Контрольные вопросы	16
Порядок оформления отчета	16

Приближенная теория гироскопов

Гироскопом называют симметричное твердое тело, быстро вращающееся вокруг неподвижной точки, лежащей на его оси симметрии. Ось материальной симметрии или ось гироскопа Oz (рис.1) называют осью собственного вращения. Угловую скорость собственного вращения гироскопа обозначим $\bar{\Omega}$.

Допущения приближенной теории гироскопов состоят в следующем:

- 1) угловая скорость ω вращения ротора относительно любой другой оси много меньше угловой скорости собственного вращения, т.е. $\omega \ll \Omega$;
- 2) кинетический момент гироскопа относительно неподвижной точки O принимают равным

$$\bar{L}_O = J_z \bar{\Omega}, \quad (1)$$

где J_z – осевой момент инерции гироскопа относительно оси Oz . Соотношение (1) позволяет жестко связать ось гироскопа с вектором \bar{L}_O . Поэтому появляется возможность следить за движением оси гироскопа по изменению направления вектора \bar{L}_O кинетического момента.

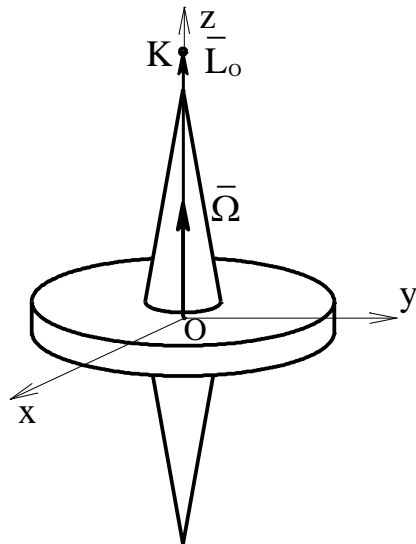


Рис.1

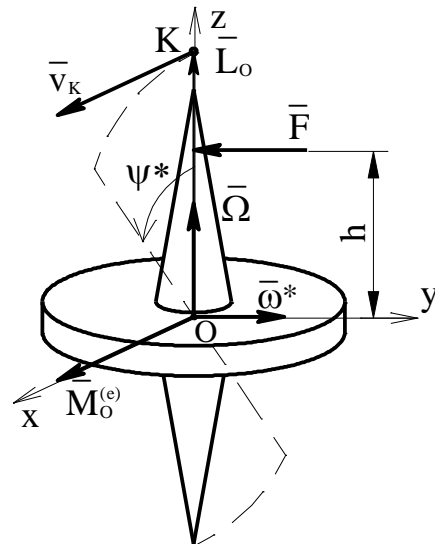


Рис.2

Зависимость вектора \bar{L}_O от внешних сил, действующих на гироскоп, определяется теоремой об изменении кинетического момента или ее следствием – теоремой Резаля:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_O(\bar{F}^e) \quad \text{или} \quad \bar{V}_K = \bar{M}_O^{(e)}. \quad (2)$$

Здесь точка К (рис.2) – это конечная точка вектора \vec{L}_O кинетического момента гироскопа, а \vec{V}_K – это скорость точки К, геометрически равная главному моменту $\vec{M}_O^{(e)}$ всех внешних сил, действующих на ось гироскопа.

Вращение оси гироскопа под действием приложенной к ней силы называется прецессией оси гироскопа. Угловую скорость прецессии обозначим ω^* .

В скалярном виде равенство (2) можно записать так:

$$J_z \Omega \cdot \omega^* \sin \alpha = Fh, \quad (3)$$

где α – это угол между вектором $\vec{\Omega}$ угловой скорости собственного вращения и вектором $\vec{\omega}^*$ угловой скорости прецессии; h – плечо силы F относительно точки О.

Вектор

$$\vec{M}^\Gamma = J_z \vec{\Omega} \times \vec{\omega}^* \quad (4)$$

называют гироскопическим моментом. Поведение гироскопа подчиняется следующему правилу, сформулированному Н.Е. Жуковским: если быстро вращающемуся гироскопу сообщают вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил (с моментом \vec{M}^Γ), стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии так, чтобы направления угловых скоростей собственного вращения гироскопа и прецессии совпали.

С помощью соотношения

$$M^\Gamma = J_z \Omega \omega^* \sin \alpha \quad (5)$$

можно вычислить величину гироскопического момента.

Лабораторная работа 3

СВОЙСТВА СВОБОДНОГО ТРЕХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА

Цель работы – практическое ознакомление со свойствами свободного трехстепенного гироскопа.

Теория. Гироскоп с тремя степенями свободы, у которого центр тяжести совпадает с неподвижной точкой, называют свободным гироскопом.

Отметим следующие свойства свободного трехстепенного гироскопа.

1. Ось свободного трехстепенного гироскопа сохраняет неизменным свое направление в пространстве (относительно инерциальной системы отсчета) при отсутствии внешнего момента.

Действительно, если в равенстве (2) правая часть равна нулю, то вектор \vec{L}_O представляет собой постоянный вектор, а ось гироскопа не будет менять своего положения в пространстве (рис.1).

2. Под действием внешней силы, создающей момент относительно неподвижной точки, ось свободного трехстепенного гироскопа будет поворачиваться не в направлении действия силы, а перпендикулярно силе, в направлении ее момента.

Например (рис.2), при действии на ось гироскопа внешней силы \vec{F} по теореме Резаля ось гироскопа будет поворачиваться вокруг оси y , в направлении скорости \vec{V}_K . Т.к. прецессия оси гироскопа представляет вращательное движение вокруг оси y , то вычислим угловую скорость ω^* прецессионного движения.

Из соотношения (3) можно записать (рис.2)

$$\omega^* \cdot L_O = F \cdot h$$

или, учитывая (1),

$$\omega^* = \frac{F \cdot h}{J_z \Omega}. \quad (6)$$

Обратим внимание, что угловая скорость прецессии прямо пропорциональна приложенной силе и обратно пропорциональна угловой скорости собственного вращения.

3. Прецессионное движение оси свободного трехстепенного гироскопа не обладает свойством инерции. Такое свойство прецессии объясняется следую-

щим. Если сила \bar{F} перестает действовать на ось гироскопа, то мгновенно в соответствии с равенством (6) угловая скорость прецессии станет равна нулю.

4. Быстрое вращение сообщает гироскопу способность противодействовать силам, в том числе ударным, стремящимся изменить направление его оси вращения.

Подставим $\omega^* = d\psi^*/dt$ в левую часть равенства (6). Умножим обе части получившегося равенства на dt и проинтегрируем:

$$\psi^* = \frac{F \cdot h}{J_z \Omega} \tau,$$

где τ – время приложения ударной нагрузки. Таким образом, при кратковременном действии силы и при большом значении угловой скорости Ω собственного вращения ось гироскопа отклоняется от своего первоначального положения на ничтожно малый угол ψ^* , что подтверждает нечувствительность гироскопа к ударным нагрузкам.

Устройство и принцип работы лабораторной установки. Гироскоп с тремя степенями свободы (свободный трехстепенной гироскоп) выполнен в настольном исполнении и состоит из основания, вертикальной стойки, в верхней части которой находится узел подшипников, обеспечивающий вращение гироскопа вокруг вертикальной оси (рис.3).

Гироскоп состоит из ротора, внутреннего кольца и наружного кольца.

Ротор фиксируется во внутреннем кольце при помощи оси и подшипников. Внутреннее кольцо связано с наружным кольцом посредством осей и подшипников. Такая конструкция носит название карданов подвес.

Фиксация наружного кольца гироскопа от поворота вокруг вертикальной оси обеспечивается узлом фиксации в виде втулки и гайки.

На внутреннем кольце при помощи наружных фиксаторов крепится груз, создающий момент внешних сил.

Принцип действия гироскопа основан на использовании гироскопического эффекта быстровращающегося тела.

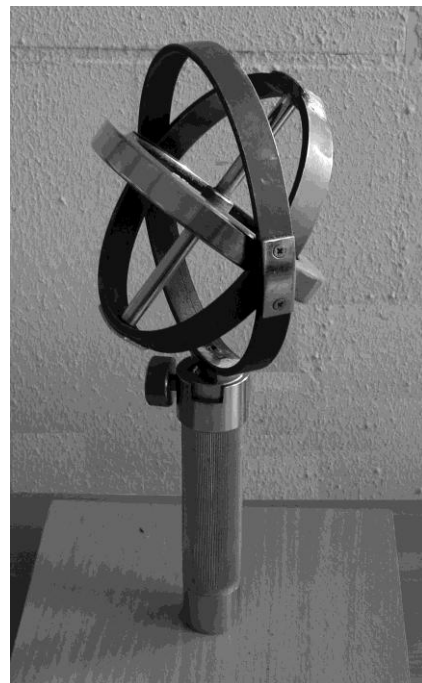


Рис.3

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Устанавливаем гироскоп на ровной горизонтальной поверхности стола, обеспечив его устойчивость.

2. При помощи прибора для запуска гироскопов приводим ротор во вращение с частотой не менее 30 Гц, предварительно зафиксировав наружное кольцо гироскопа от поворота вокруг вертикальной оси.

3. Сохранение неизменным направления оси свободного трехстепенного гироскопа в пространстве. Взяв прибор за основание и поворачивая основание гироскопа в разные стороны, убедиться, что ось гироскопа сохраняет неизменным свое направление в пространстве.

4. Под действием внешней силы ось свободного трехстепенного гироскопа будет поворачиваться в направлении ее момента. Прикладываем к внутреннему кольцу гироскопа силу F . Определяем направление в пространстве вектор-момента приложенной силы относительно неподвижной точки гироскопа. Наблюдаем прецессию оси гироскопа, т.е. поворот оси в направлении момента приложенной силы.

5. Отсутствие инерции оси гироскопа в прецессионном движении. В момент прекращения действия силы F угловая скорость прецессии, в соответствии с (6), становится равной нулю, и прецессия сразу же прекращается. Убеждаемся, что после этого гироскоп будет вращаться только с угловой скоростью Ω вокруг собственной оси, отклоненной от первоначального положения на некоторый угол ψ^* .

Если же сила F изменит свое направление на противоположное, то прецессия мгновенно станет происходить в другую сторону.

6. Устойчивость оси гироскопа к ударным нагрузкам. Прикладываем к внутреннему кольцу гироскопа ударную нагрузку. Убеждаемся, что ось гироскопа при кратковременном действии на нее силы отклоняется от своего первоначального положения на малый угол.

Контрольные вопросы

1. Что называется гироскопом? Что такое свободный трехстепенный гироскоп?

2. Что такое прецессионное движение оси гироскопа? Что может вызвать прецессию оси гироскопа? От чего зависит величина угловой скорости прецессии оси гироскопа?

3. Сформулируйте основные свойства свободного трехстепенного гироскопа.

4. Сформулируйте теорему Резаля. Следствием какой общей теоремы динамики является теорема Резаля?

Порядок оформления отчета

Отчет о проведении лабораторной работы должен содержать следующие пункты:

1. Тема работы.
2. Описание установки.
3. Краткое изложение теорем динамики, применяемых для объяснения результатов работы.
4. Описание свойств свободного трехстепенного гироскопа с объяснением этих свойств.

Лабораторная работа 4

СВОЙСТВА ТЯЖЕЛОГО ГИРОСКОПА

Цель работы – продемонстрировать работу тяжелого трехстепенного гироскопа и объяснить его свойства.

Теория. Тяжелым гироскопом (гироскопом Лагранжа) называется трехстепенной гироскоп, у которого центр тяжести (т. С на рис.4) не совпадает с неподвижной точкой (т. О).

Тяжелый гироскоп обладает следующими свойствами.

1. Действие силы тяжести на тяжелый гироскоп преобразуется в регулярную прецессию, т.е. во вращательное движение собственной оси гироскопа относительно вертикальной оси. В результате ось гироскопа описывает коническую поверхность.

2. Угловая скорость ω^* прецессии не зависит от угла γ наклона собственной оси гироскопа.

3. Угловая скорость ω^* прецессии тем меньше, чем больше скорость Ω собственного вращения.

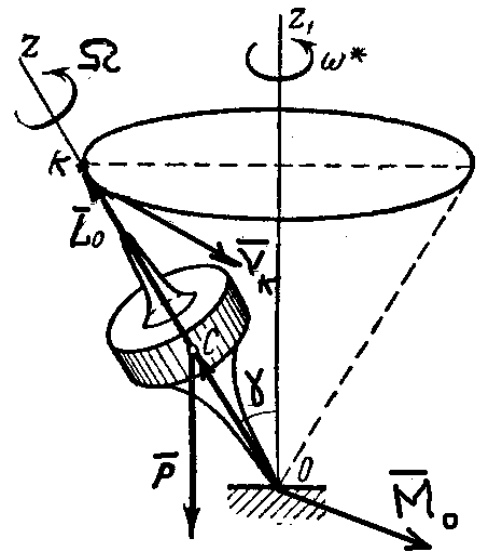


Рис.4

Из соотношения для угловой скорости прецессии тяжелого гироскопа

$$\omega^* = \frac{OC \cdot P}{J_z \Omega}$$

следуют два последних свойства тяжелого гироскопа.

Устройство и принцип работы лабораторной установки. Гироскоп выполнен в настольном исполнении и состоит из основания, вертикальной стойки, закрепленной в основании, собственно гироскопа и втулки с байонетным зажимом.

Гироскоп состоит (рис.5) из массивного диска с впрессованной в него осью, вращающейся в подшипниковых опорах, смонтированных в кольце, и двух сферических наконечников, являющихся двумя опорами гироскопа. Втул-

ка с байонетным зажимом служит для фиксации гироскопа в нерабочем положении, а также во время разгона ротора.



Рис.5

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Устанавливаем гироскоп на ровной горизонтальной поверхности стола, обеспечив его устойчивость.

2. Придерживая невращающийся ротор рукой за верхний наконечник, освобождаем нижний наконечник гироскопа, расфиксировав и опустив втулку в нижнее положение. Убеждаемся в том, что положение равновесия гироскопа не является устойчивым. Снова фиксируем нижний наконечник гироскопа с помощью втулки.

3. При помощи прибора для запуска гироскопов приводим ротор во вращение с частотой не менее 30 Гц. Освобождаем нижний наконечник гироскопа, расфиксировав и опустив втулку в нижнее положение. Убеждаемся в том, что вращающийся гироскоп находится в устойчивом положении.

4. Осторожно взяв рукой за верхний наконечник гироскопа, наклоняем ось гироскопа последовательно на угол 30° , а затем 60° . Наблюдаем прецессию оси гироскопа.

5. Далее снимаем гироскоп с подставки и устанавливаем его на вторую опору. Наблюдаем прецессию в противоположную сторону.

6. Осторожно взяв рукой за верхний наконечник гироскопа, наклонить ось гироскопа последовательно на различные углы. Визуально сравниваем угловую скорость прецессии оси гироскопа при разных углах наклона оси. Убеждаемся, что угловая скорость прецессии не меняется.

7. Осторожно берем гироскоп руками за оба наконечника. Располагая ось гироскопа горизонтально, ставим внешнее кольцо гироскопа на ровную горизонтальную поверхность. Убеждаемся в том, что вращающийся гироскоп находится в устойчивом положении.

8. Возвращаем гироскоп в исходное положение, зафиксировав втулкой.

9. Осторожно берем гироскоп руками за оба наконечника и располагаем ось гироскопа горизонтально. Пытаясь изменить положение оси гироскопа, ощущаем ответное действие гироскопа в виде гироскопической пары сил.

Контрольные вопросы

1. Что называется гироскопом? Что такое тяжелый гироскоп?
2. Что такое прецессионное движение оси гироскопа?
3. Что вызывает регулярную прецессию оси тяжелого гироскопа?
4. От чего зависит величина угловой скорости регулярной прецессии оси тяжелого гироскопа?
5. Сформулируйте основные свойства тяжелого гироскопа.

Порядок оформления отчета

Отчет о проведении лабораторной работы должен содержать следующие пункты:

1. Тема работы.
2. Описание установки.
3. Краткое изложение теорем динамики, применяемых для объяснения результатов работы.
4. Описание свойств тяжелого гироскопа с объяснением этих свойств.

Лабораторная работа № 5

СВОЙСТВА ДВУХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА

Цель работы состоит в практическом освоении свойств двухстепенного гироскопа.

Теория. Гироскоп, собственная ось которого закреплена в подшипниках вращающейся рамы, является двухстепенным гироскопом. Такой гироскоп имеет только две степени свободы (рис.6): он может вращаться вокруг собственной оси z и вместе с рамой - вокруг оси x ; вращению вокруг оси y препятствуют подшипники, в которых рама закреплена.

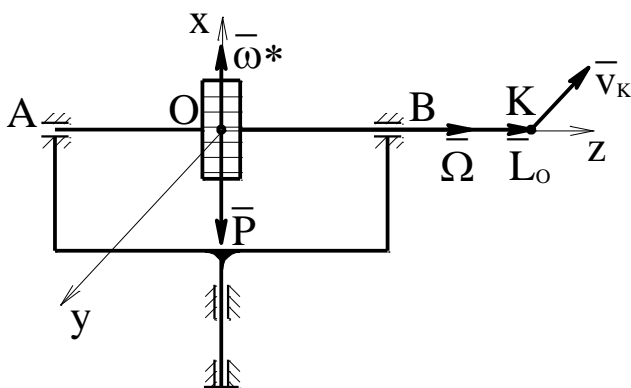


Рис.6

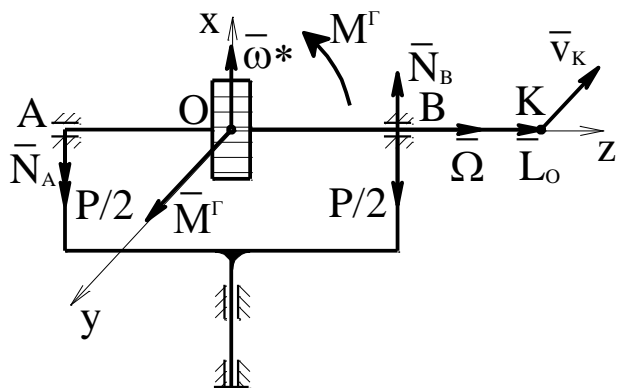


Рис.7

Двухстепенный гироскоп обладает следующими свойствами.

1. Прецессионное движение оси двухстепенного гироскопа обладает свойством инерции.

В отличие от свободного трехстепенного гироскопа, ось свободного двухстепенного гироскопа под действием внешней силы, создающей момент относительно неподвижной точки, будет поворачиваться в направлении действия силы. Если же сила перестанет действовать, то ось гироскопа будет продолжать прецессировать в том же направлении.

2. Вынужденная прецессия оси гироскопа (она характеризуется угловой скоростью ω^* прецессии) приводит к появлению дополнительных (гироскопических) давлений на подшипники.

Это явление называют гироскопическим эффектом. В этом случае (рис.7) со стороны оси гироскопа на подшипники действуют гироскопические давления \bar{N}_A , \bar{N}_B , составляющие гироскопическую пару, момент которой называют

гироскопическим моментом $M^\Gamma = N_A \cdot AB$.

Величину гироскопических давлений вычислим, используя равенство (5):

$$N_A = N_B = \frac{J_z \Omega \cdot \omega^* \sin \alpha}{AB},$$

где α – угол между вектором $\vec{\Omega}$ угловой скорости собственного вращения и вектором $\vec{\omega}^*$ угловой скорости прецессии.

Направление гироскопических давлений удобно определять по правилу Жуковского. В соответствии с этим правилом (см. рис.7) пара (\vec{N}_A, \vec{N}_B) гироскопических давлений направлена так, что она стремится совместить вектор $\vec{\Omega}$ угловой скорости собственного вращения с вектором $\vec{\omega}^*$ угловой скорости прецессии.

Заметим, что при вынужденной прецессии оси гироскопа и возникновении гироскопического момента появляются также дополнительные гироскопические реакции в подшипниках (рис.8). Они составляют пару сил (\vec{R}_A, \vec{R}_B) с моментом, равным по величине и противоположно направленным M^Γ .

Если угловая скорость ω^* прецессии невелика и гироскопическое давление $N_B < P/2$ (рис.7), то рама продолжит прецессионное вращение вокруг оси x .

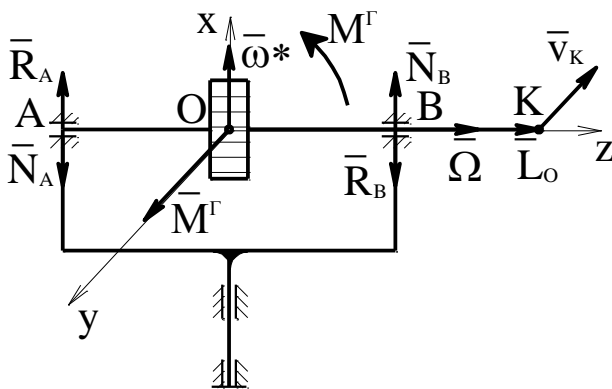


Рис.8

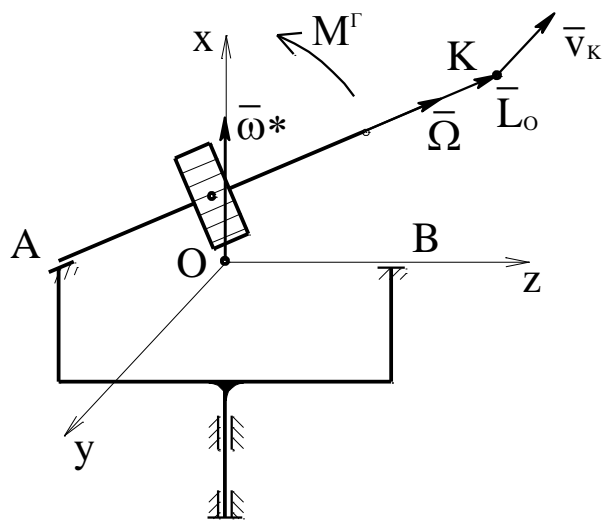


Рис.9

3. Если угловая скорость ω^* прецессии достаточно велика, то гироскопическое давление в подшипнике В может превысить половину веса P гироскопа, т.е. $N_B > P/2$. В этом случае, если подшипники в точках А и В открыты сверху, то ось гироскопа поднимется в точке В, повернувшись относительно точки А

(рис.9). Рама продолжит прецессионное вращение вокруг оси x в наклоненном положении.

Устройство и принцип работы лабораторной установки. Двухстепенной гироскоп предназначен для демонстрации правила Грюэ – Жуковского, т.е. демонстрации направления перемещения оси гироскопа при сообщении ему принудительной прецессии.

Гироскоп выполнен в настольном исполнении и состоит из массивного основания, рамы, имеющей вертикальную ось, вращающуюся в подшипниках, закрепленных в основании (рис.10).



Рис.10

Ротор состоит из металлического диска, вращающегося на подшипниках, смонтированных в жесткой коробчатой обойме, к которой с двух сторон прикреплены полуоси, снабженные по концам открытыми снизу вилками, опирающимися на цилиндрические опоры. Последние расположены внутри открытых коробок, находящихся на концах рамы.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Устанавливаем гироскоп на ровной горизонтальной поверхности стола, обеспечив его устойчивость.

2. При помощи прибора для запуска гироскопов приводим ротор во вращение с частотой не менее 10 Гц.

3. Плавным поворотом ручки приводим раму гироскопа в медленное вращение вокруг вертикальной оси. Наблюдаем прецессию оси гироскопа. Обращаем внимание на то, что прецессия продолжается и без непосредственного воздействия на ручку, т.е. по инерции.

4. Резким поворотом ручки приводим во вращение раму гироскопа. При этом ось гироскопа повернется вокруг одной из опор (А или В) в вертикальной плоскости и продолжит прецессионное вращение вокруг оси x в наклоненном состоянии (рис.9).

5. Изменяем вращение рамы гироскопа на противоположное. Наблюдаем прецессию оси гироскопа в наклоненном положении в противоположном направлении. Причем ось гироскопа окажется повернутой в вертикальной плоскости относительно другой опоры.

Контрольные вопросы

1. Что называется гироскопом? Чем отличается двухстепенный гироскоп от свободного трехстепенного гироскопа и от тяжелого гироскопа?
2. Что такое прецессионное движение оси гироскопа? Каким свойством обладает прецессионное движение оси двухстепенного гироскопа?
3. Сформулируйте основные свойства двухстепенного гироскопа.
4. В чем состоит гироскопический эффект?
5. Что такое гироскопический момент?

Порядок оформления отчета

Отчет о проведении лабораторной работы должен содержать следующие пункты:

1. Тема работы.
2. Описание установки.
3. Краткое изложение теорем динамики, применяемых для объяснения результатов работы.
4. Описание свойств двухстепенного гироскопа с объяснением этих свойств.