

Семинар 3. Тема занятия: "Расчёт реакций линейной электрической цепи с источниками синусоидальных сигналов в статическом режиме. Метод комплексных амплитуд."

Целью проведения занятия является освоение методов расчёта устройств, работающих с периодическими сигналами и в частности с гармоническими сигналами; более глубокое осмысление основных элементов цепей - резистивного, индуктивного и ёмкостного как потребителей активной, реактивной положительной и реактивной отрицательной мощности.

Синусоидальный (гармонический) сигнал с методической точки зрения является в теории цепей базовым (или типовым) при анализе процессов в частотной области и при получении необходимых в практике частотных характеристик различных электромагнитных устройств и систем.

Синусоидально изменяющиеся во времени напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и токи $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ (см. рис.1) характеризуются следующими параметрами:

- U_m, I_m - амплитудные (максимальные) значения;
- $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ - частота (угловая), рад/с;
- $f = 1/T$ - частота (циклическая), Гц;
- T - период, с;
- ψ_u, ψ_i - начальные фазы.

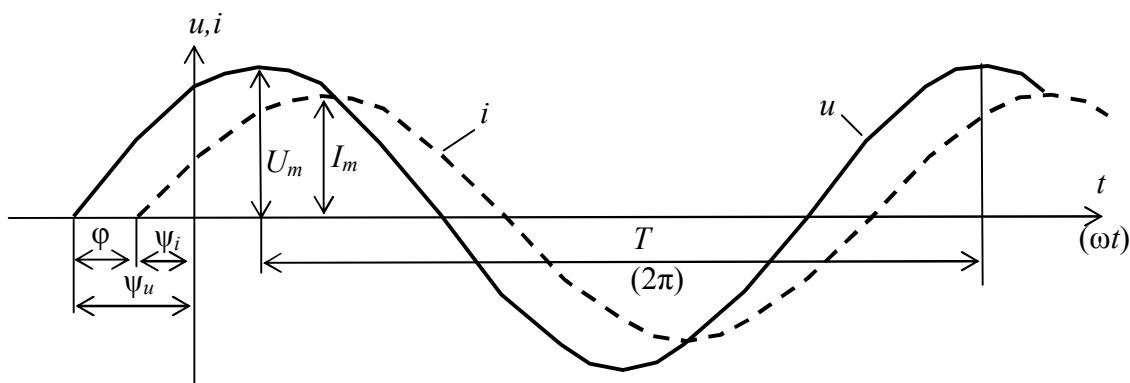


Рис.1. Синусоидальные напряжение и ток

Положительные начальные фазы $\psi_u > 0$ и $\psi_i > 0$ откладываются от начала координат влево, отрицательные – вправо.

По оси ординат откладываются мгновенные значения функций $u(t)$ в вольтах и $i(t)$ в амперах.

По оси абсцисс откладывается или время t в секундах, или пропорциональная ему угловая величина ωt в радианах. Поэтому периодом будет являться или T [с], или 2π [рад].

Разность начальных фаз напряжения и тока $\phi = \psi_u - \psi_i$ называется углом сдвига фазы тока по отношению к напряжению. При $\phi = 0$ ток и напряжение совпадают по фазе (синфазны), при $\phi = \pm\pi$ - противоположны по фазе (в противофазе), при $\phi = \pm\pi/2$ - находятся в квадратуре, если $\phi > 0$ - ток отстает от напряжения, если $\phi < 0$ - ток опережает напряжение.

Комплексная амплитуда \dot{U}_m соответствует положению вектора $\dot{U}_m(t)$ на комплексной плоскости в начальный момент времени $t = 0$ (рис.3.2).

Комплексная амплитуда \dot{U}_m , как всякое комплексное число, может быть представлена в трех формах:

- в показательной

$$\dot{U}_m = |\dot{U}_m| e^{j \arg \{\dot{U}_m\}} = U_m e^{j \psi_u}; \quad (1)$$

- в алгебраической

$$\dot{U}_m = \operatorname{Re}\{\dot{U}_m\} + j \operatorname{Im}\{\dot{U}_m\} = a + jb, \quad (2)$$

где $a = \operatorname{Re}\{\dot{U}_m\}$ – вещественная часть (вещественное число),

$b = \operatorname{Im}\{\dot{U}_m\}$ – вещественный множитель при мнимой единице, jb – мнимая часть числа \dot{U}_m ;

- в тригонометрической

$$\dot{U}_m = U_m \cos \psi_u + j U_m \sin \psi_u. \quad (3)$$

Между тремя формами очевидна следующая связь:

$$\left. \begin{aligned} a = \operatorname{Re}\{\dot{U}_m\} &= U_m \cos \psi_u; \quad b = \operatorname{Im}\{\dot{U}_m\} = U_m \sin \psi_u; \\ \psi_u = \arg\{\dot{U}_m\} &= \operatorname{arctg}(b/a); \quad |\dot{U}_m| = U_m = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В вычислительном процессе наиболее удобными являются показательная и алгебраическая формы. Тригонометрическая форма используется только для взаимного перехода показательной и алгебраической форм.

Расчет цепи с R, L и C элементами целесообразно проводить в следующей последовательности:

- переход от синусоидальных функций источников к их комплексным амплитудам (комплексным действующим значениям);
- вычисление комплексных сопротивлений элементов;
- переход к расчетной схеме для комплексных сопротивлений и комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) токов и напряжений;
- расчет комплексных амплитуд (комплексных действующих значений) искомых токов и напряжений;
- проверка правильности решения по уравнению баланса комплексных мощностей;
- восстановление синусоидальных функций (функций-оригиналов) искомых токов и напряжений по их комплексным амплитудам.

Пример расчета

Линейная электрическая цепь, схема которой приведена на рис.2,а, содержит идеальный источник синусоидального напряжения $V(t) = V_m \sin(\omega t + \psi_V)$ и потребитель, представляющий последовательно-параллельное соединение элементов R , L и C .

Параметры источника и элементов потребителя заданы: $V_m = 10$ В; $\omega = 1000$ рад/с; $L = 0,01$ Гн; $R = 10$ Ом; $C = 10^{-4}$ Ф.

Требуется определить реакции цепи в установившемся режиме, используя метод комплексных амплитуд.

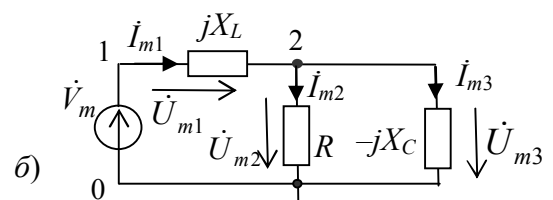
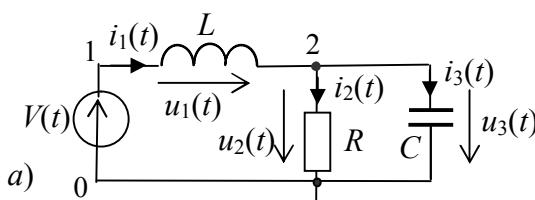


Рис.2. Исходная схема электрической цепи (а), ее расчетная схема (б)

В большинстве подобных задач удобно для установившихся режимов принимать начальную фазу источника $\psi_V = 0$. В этом случае фазовые сдвиги всех реакций можно отсчитывать от условного нуля. С учетом этого допущения комплексная амплитуда

напряжения источника будет определяться: $\dot{V}_m = V_m e^{j0^\circ} = 10e^{j0^\circ}$, В.

Комплексные сопротивления компонентов цепи:

$$jX_L = j\omega L = j10, \text{ Ом}; \quad -jX_C = -j1/\omega C = -j10, \text{ Ом}; \quad R = 10 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление параллельного соединения R, C :

$$Z_2(j\omega) = R(-jX_C)/(R - jX_C) = 5 - j5 = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}, \text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока источника:

$$\dot{I}_{m1} = \dot{V}_m/[jX_L + Z_2(j\omega)] = 10e^{j0^\circ}/[5 + j5] = 10e^{j0^\circ}/5\sqrt{2}e^{j45^\circ} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 1 - j1 \text{ А}.$$

Комплексные амплитуды напряжений:

$$\dot{U}_{m2} = \dot{U}_{m3} = Z_2(j\omega)\dot{I}_{m1} = 5\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \cdot \sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 10e^{-j90^\circ} = -j10, \text{ В}.$$

Комплексные амплитуды токов:

$$\dot{I}_{m2} = \dot{U}_{m2}/R = 1e^{-j90^\circ} = -j1, \text{ А}; \quad \dot{I}_{m3} = \dot{U}_{m3}/(-jX_C) = 1e^{j0^\circ} = 1, \text{ А}.$$

Комплексная амплитуда напряжения \dot{U}_{m1} :

$$\dot{U}_{m1} = jX_L \dot{I}_{m1} = j10(1 - j1) = 10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}, \text{ В}.$$

Комплексная мощность источника:

$$\tilde{S}_{\text{ист.}} = \dot{V} \cdot I_1^* = \dot{V}_m \cdot I_{m1}^*/2 = 10e^{j0^\circ} \cdot \sqrt{2}e^{j45^\circ}/2 = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 5 + j5, \text{ ВА}.$$

Комплексная мощность потребителя (пассивной части цепи):

$$\tilde{S}_{\Pi} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 = j10 + 5 - j5 = 5 + j5 = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ}, \text{ ВА},$$

$$\text{где: } \tilde{S}_1 = \dot{U}_{m1} I_{m1}^*/2 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \cdot \sqrt{2}e^{j45^\circ}/2 = 10e^{j90^\circ} = j10, \text{ ВА};$$

$$\tilde{S}_2 = \dot{U}_{m2} I_{m2}^*/2 = 10e^{-j90^\circ} \cdot 1e^{j90^\circ}/2 = 5, \text{ ВА};$$

$$\tilde{S}_3 = \dot{U}_{m3} I_{m3}^*/2 = 10e^{-j90^\circ} \cdot 1/2 = 5e^{-j90^\circ} = -j5, \text{ ВА};$$

$$P_{\Pi} = 5, \text{ Вт}; \quad jQ_{\Pi} = j5, \text{ ВАР}.$$

$$\text{Вывод: } \tilde{S}_{\text{ист.}} = \tilde{S}_{\Pi}.$$

Окончательно комплексные амплитуды реакций:

$$\dot{I}_{m1} \approx 1,414e^{-j45^\circ}, \text{ А}; \quad \dot{I}_{m2} = 1e^{-j90^\circ}, \text{ А}; \quad \dot{I}_{m3} = 1 \cdot e^{j0^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_{m1} \approx 14,14e^{j45^\circ}, \text{ В}; \quad \dot{U}_{m2} = 10e^{-j90^\circ}, \text{ В}; \quad \dot{U}_{m3} = 10e^{-j90^\circ}, \text{ В}.$$

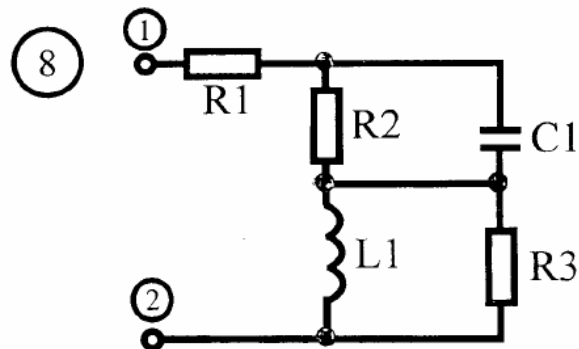
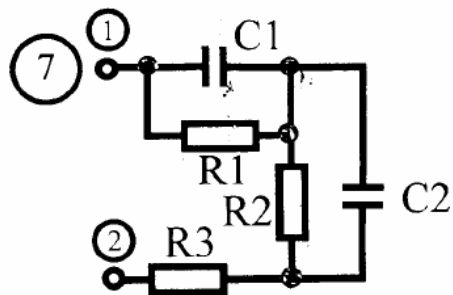
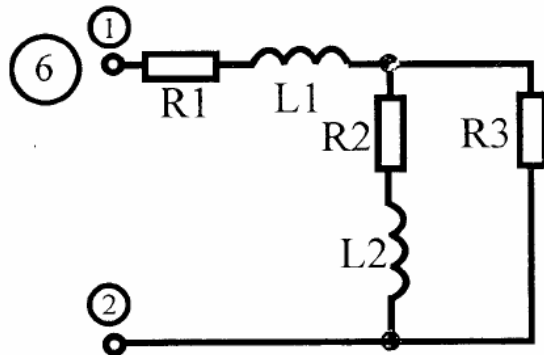
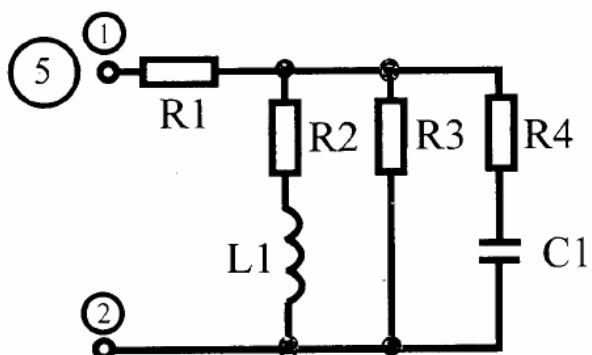
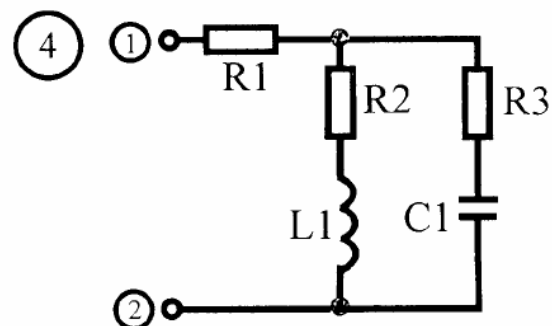
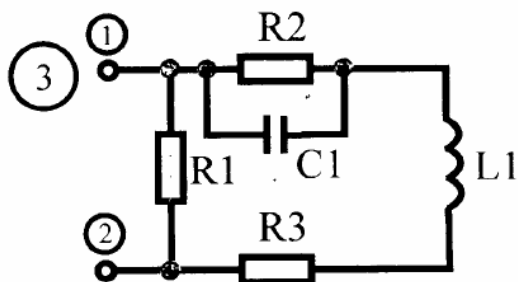
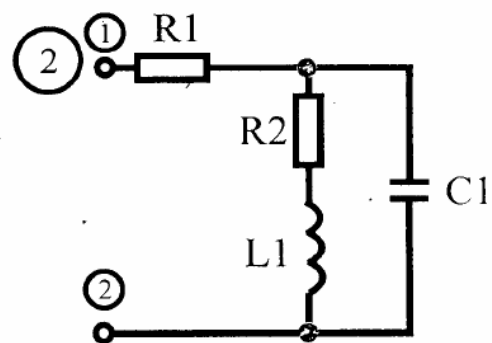
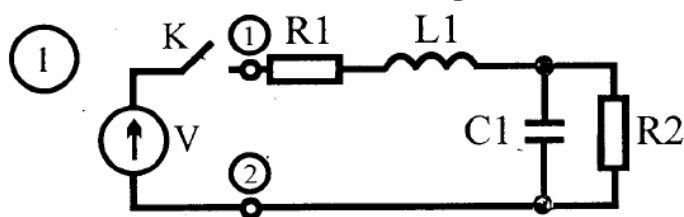
Реакции в области "t":

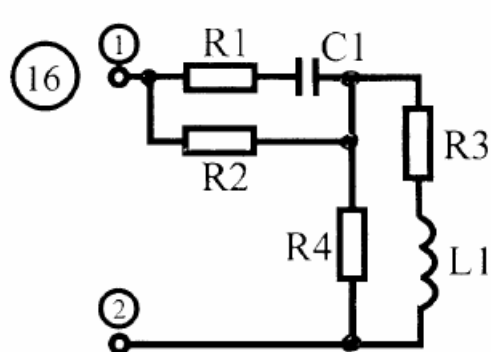
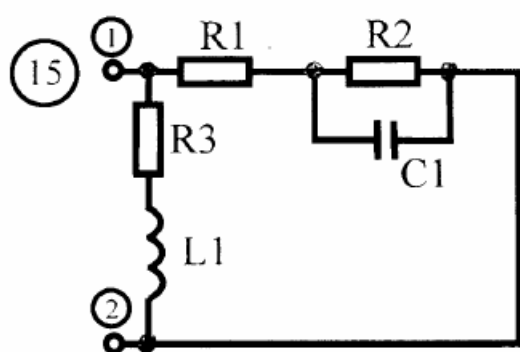
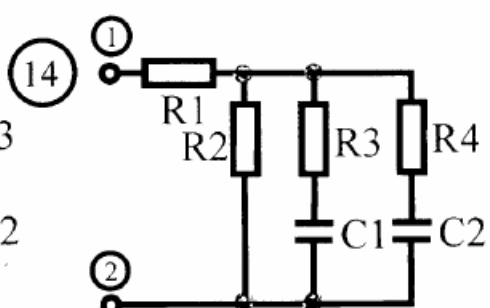
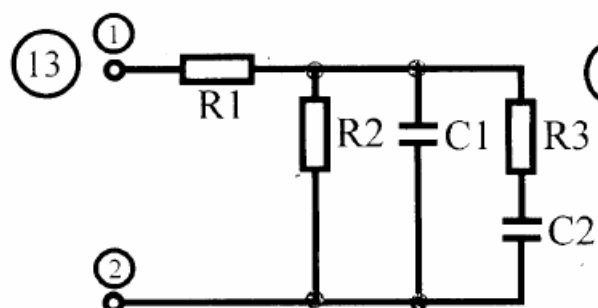
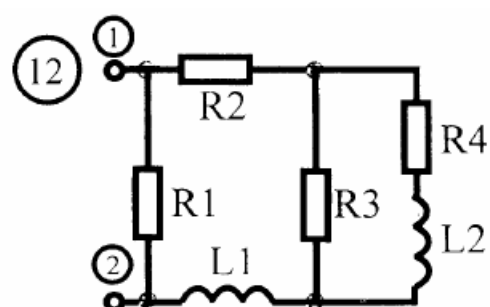
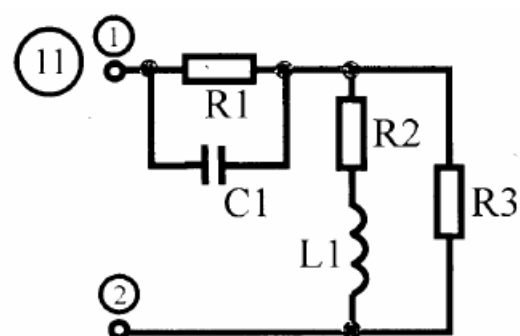
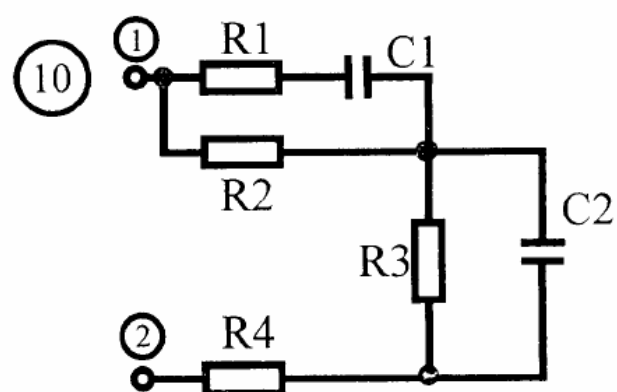
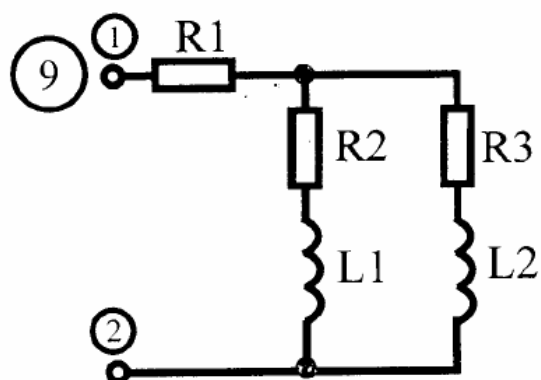
$$i_1(t) = 1,41 \sin(1000t - 45^\circ), \text{ А}; \quad i_2(t) = 1 \sin(1000t - 90^\circ), \text{ А}; \quad i_3(t) = 1 \sin 1000t, \text{ А};$$

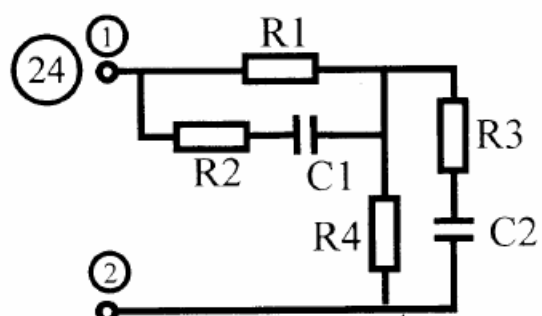
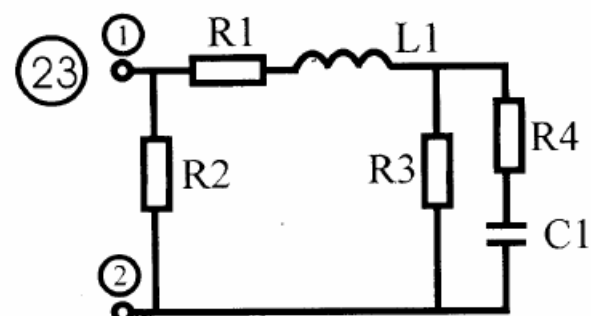
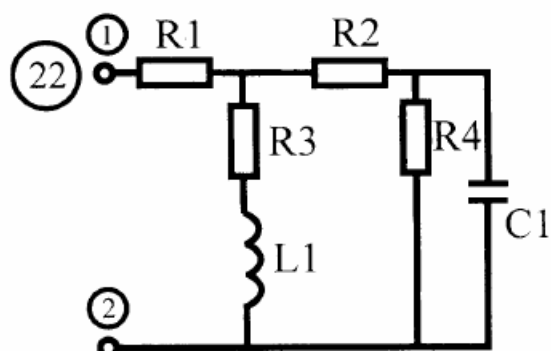
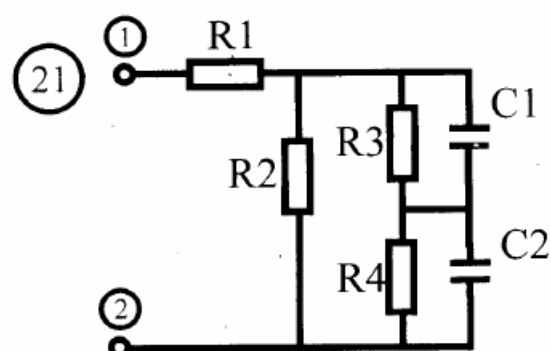
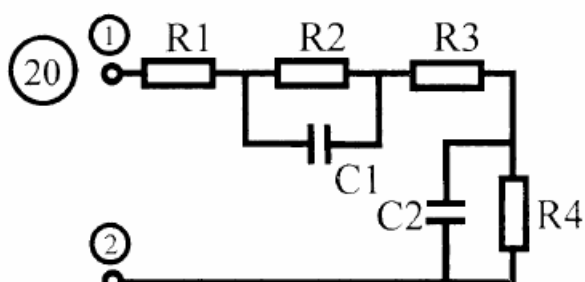
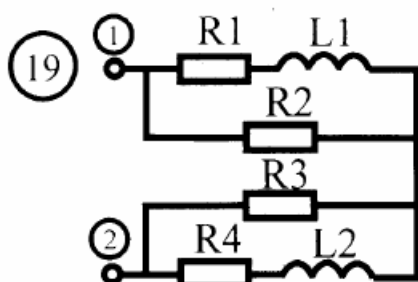
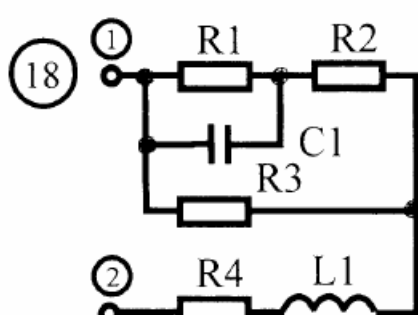
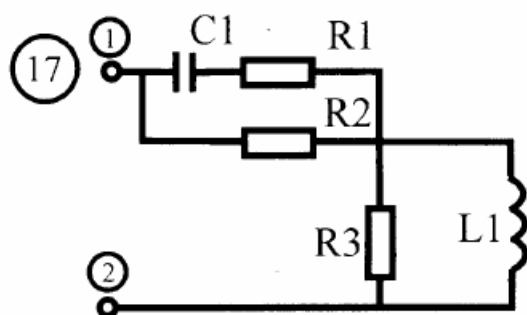
$$u_1(t) = 14,1 \sin(1000t + 45^\circ), \text{ В}; \quad u_2(t) = u_3(t) = 10 \sin(1000t - 90^\circ), \text{ В}.$$

В качестве домашнего задания студенты дома выполняют индивидуальный расчёт типовой цепи из последовательного соединения R, L и C элементов с разными значениями параметров цепи, частоты и амплитуды напряжения источника. Результаты расчёта проверяются при выполнении лабораторной работы по этой теме с использованием программы Multisim.

Варианты схем







Числовые данные даны без привязки к соответствующему номеру схемы. По усмотрению преподавателя могут задаваться одинаковые номера вариантов схем и числовых данных, или один вариант числовых данных на всю группу. Значения уровня напряжения V_0 и частоты f гармонического сигнала задаются преподавателем. Например: $V_0 = 1\text{В} \cdot N_{\text{схемы}}$, $f = 10\text{ Гц} \cdot N_{\text{схемы}}$

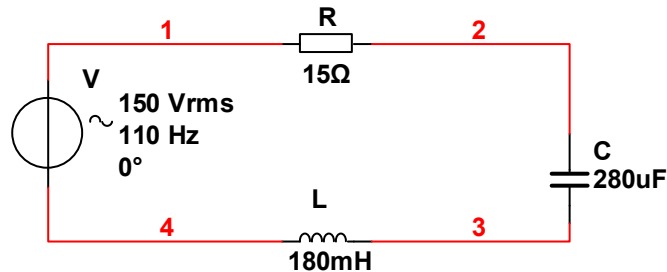
Числовые варианты

№ п/п	R1, Ом	R2, Ом	R3, Ом	R4, Ом	L1, мГн	L2, мГн	C1, мкФ	C2, мкФ
1	100	150	200	500	5	15	1	20
2	10	20	300	400	20	40	100	20
3	1000	500	500	100	10	20	2	10
4	20	40	100	200	20	5	0,5	5
5	20	10	500	200	1	2	0,1	1
6	200	300	400	500	10	30	10	20
7	10	50	100	200	5	5	10	100
8	100	20	40	60	8	18	20	50
9	50	20	30	40	2	10	10	50
10	50	500	60	50	4	8	2	5
11	100	20	100	200	5	20	10	50
12	1000	200	500	20	2	20	2	20
13	200	1000	100	100	2	4	100	20
14	100	200	50	50	1	5	20	50
15	20	100	200	200	20	20	50	500
16	50	200	200	100	1	2	10	10
17	30	40	50	60	15	30	0,4	1
18	50	100	400	20	15	5	2	10
19	20	200	400	10	15	5	10	2
20	100	200	300	400	10	5	4	10
21	300	300	150	150	1	0,5	40	100
22	50	20	50	100	2	4	100	200
23	500	20	400	100	10	5	10	50
24	200	20	400	40	5	1	2	10
25	100	150	200	400	2	8	0,02	4
26	100	200	300	200	2	20	50	50

Пример расчета (вариант 2 самостоятельной работы по теме 3-го семинара)

Может быть использован при наличии у преподавателя нескольких групп. Задаётся один вариант цепи и различные комбинации числовых данных. В результате у каждого студента имеется свой набор исходных данных для расчёта, а преподавателю относительно проще обнаружить ошибки в расчёте.

Дана цепь.



Цепь представляет собой последовательное соединение R , L и C элементов. Параметры цепи могут быть заданы путём расчёта по следующим формулам:

$V=U=60+N_{\text{сп гр}} \cdot 10 = 150\text{В}$ то есть напряжение источника V задаётся равным действующему значению напряжения на участке цепи, которое вычисляется через номер в списке группы $N_{\text{сп гр}}$. Примем в рассматриваемом примере величину номера студента, равной 9.

$$R = 6 + N_{\text{сп гр}} = 6 + 9 = 15[\text{Ом}]$$

$$L = 0.02 \cdot N_{\text{сп гр}} = 0.02 \cdot 9 = 0.18[\text{Гн}]$$

$$C = (20 \cdot N_{\text{сп гр}} + 100) \cdot 10^{-6} [\text{Ф}] = (20 \cdot 9 + 100) \cdot 10^{-6} [\text{Ф}] = 280\text{мкФ}$$

$$f = 20 + 10 \cdot N_{\text{сп гр}} = 20 + 10 \cdot 9 = 110 [\text{Гц}]$$

В разных группах изменяются только константы в приведённых формулах.

Расчёт проводится сначала в действующих значениях, а затем определяются амплитудные величины токов и напряжений.

Модуль реактивного индуктивного сопротивления

$$x_L = 2\pi fL = 2 \cdot 3.14 \cdot 110 \cdot 0.18 = 124.3[\text{Ом}]$$

Модуль реактивного ёмкостного сопротивления

$$x_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 110 \cdot 0.00028} = 5.17[\text{Ом}]$$

Комплексное сопротивление индуктивного элемента цепи: $z_L = jx_L = j124.3[\text{Ом}]$

Комплексное сопротивление ёмкостного элемента цепи: $z_C = -jx_C = -j5.17[\text{Ом}]$

Полное комплексное сопротивление цепи:

$z = R + jx_L - jx_C = 15 + j124.3 - j5.17 = 15 + j119.13[\text{Ом}] = 120.1e^{82.8^\circ} [\text{Ом}]$, где модуль z равен $|z| = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{15^2 + 119.13^2} = 120.1[\text{Ом}]$ и фаза ϕ равна

$$\phi = \arctg \frac{x_L - x_C}{R} = \arctg \frac{119.13}{15} = 82.8^\circ$$

Действующее значение тока в цепи равно: $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{z} = \frac{150 * e^{j0}}{120.1 * e^{j82.8^\circ}} = 1.25 * e^{-j82.8^\circ} [A]$

Напряжение на резистивном элементе $\dot{U}_R = R * \dot{I} = 15 * 1.25 * e^{-j82.8^\circ} = 18.73 * e^{-j82.8^\circ} [B]$

Напряжение на индуктивном элементе

$$\dot{U}_L = z_L * \dot{I} = 124.3 * e^{j90^\circ} * 1.25 * e^{-j82.8^\circ} = 155.28 * e^{j7.2^\circ} [B]$$

Напряжение на ёмкостном элементе

$$\dot{U}_C = z_C * \dot{I} = 5.17 * e^{-j90^\circ} * 1.25 * e^{-j82.8^\circ} = 6.46 * e^{-j172.8^\circ} [B]$$

Амплитудные значения тока, напряжения источника и напряжений на элементах цепи:

$$\dot{I}_m = \dot{I} * \sqrt{2} = 1.25 * e^{-j82.8^\circ} * 1.41 = 1.77 * e^{-j82.8^\circ} [A]$$

$$\dot{U}_m = \dot{U} * \sqrt{2} = 150 * 1.414 = 212 [B]$$

$$\dot{U}_{Rm} = \dot{U}_R * \sqrt{2} = 18.73 * e^{-j82.8^\circ} * 1.414 = 26.49 * e^{-j82.8^\circ} [B]$$

$$\dot{U}_{Lm} = \dot{U}_L * \sqrt{2} = 155.28 * e^{j7.2^\circ} * \sqrt{2} = 219.60 * e^{j7.2^\circ} [B]$$

$$\dot{U}_{Cm} = \dot{U}_C * \sqrt{2} = 6.46 * e^{-j172.8^\circ} * \sqrt{2} = 9.13 * e^{-j172.8^\circ} [B]$$

Расчёт мощностей в цепи переменного тока и баланс мощностей:

Активная мощность цепи $P = R * I^2 = 15 * 1.25^2 = 23.44 [Bm]$

Реактивная индуктивная мощность цепи $Q_L = x_L * I^2 = 124.34 * 1.25^2 = 194.28 [BAp]$

Реактивная ёмкостная мощность цепи $Q_C = x_C * I^2 = 5.17 * 1.25^2 = 8.08 [BAp]$

Полная мощность цепи $\dot{S} = P + jQ_L - jQ_C = 23.44 + j186.2 [BA]$