

**Министерство образования Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный технологический университет
“С Т А Н К И Н”**

**С.А. Еленев, В.Г. Новиков,
А.И. Огурцов, Г.И. Шевелева**

ДИНАМИКА

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств»; «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»; «Автоматизированные технологии производства».

Москва 2010

УДК 531.2.075

Динамика. Учебное пособие. Сост. С.А. Еленев, В.Г. Новиков, А.И. Огурцов, Г.И. Шевелева. – М.: ИЦ ГОУ ВПО МГТУ “СТАНКИН”, 2010. – 257 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов дневного и вечернего отделений технических высших учебных заведений. От известных отличается сжатостью изложения и большим количеством разобранных задач.

В пособии приведены 30 вариантов комплексных индивидуальных заданий по различным разделам динамики.

Рис. 178. Библ. 9 назв.

Составители:

д.т.н., профессор Еленев Сергей Алексеевич,
к.т.н., профессор Новиков Вячеслав Григорьевич,
к.ф.-м.н., доцент Огурцов Алексей Иванович
д.т.н., профессор Шевелева Галина Ивановна

Утверждено кафедрой теоретической механики.
Протокол №3 от 30.03.2010

© МГТУ “Станкин”, 2010

ДИНАМИКА

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных точек и тел с учетом сил, вызывающих это движение. Динамика делится на динамику точки и динамику системы материальных точек. Динамика твердого тела представляет собой частный случай динамики системы материальных точек.

ГЛАВА 1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1.1. Дифференциальные уравнения движения точки в инерциальной системе отсчета

Инерциальные системы отсчета - это такие системы, в которых справедливы законы Ньютона.

Динамика основана на аксиомах теоретической механики, которыми являются три закона Ньютона, принцип независимости действия сил и принцип освобождаемости от связей (более подробно аксиомы изложены в пособии [2]).

Второй закон Ньютона для материальной точки массой m устанавливает зависимость между силой \vec{F} , действующей на точку, и ускорением \vec{a} , получаемым этой точкой:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.1)$$

Так как $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, то уравнение (1.1) является дифференциальным уравнением второго порядка. Оно называется *дифференциальным уравнением движения точки в векторной форме*.

В проекциях на декартовы оси координат уравнению (1.1) соответствуют три дифференциальных уравнения, называемых *дифференциальными уравнениями движения точки в скалярной форме*:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z. \quad (1.2)$$

В проекциях на касательную, нормаль и бинормаль к траектории движения точки векторное уравнение (1.1) дает три скалярных уравнения, называемых *дифференциальными уравнениями движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника*:

$$ma_\tau = F_\tau, \quad ma_n = F_n, \quad ma_b = F_b, \quad (1.3)$$

где a_τ, a_n, a_b - соответственно проекции вектора ускорения на касательную, нормаль и бинормаль.

В кинематике было показано, что

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0.$$

где v - проекция вектора скорости точки на орт $\bar{\tau}$ ($v := v_\tau$)

Подставляя эти выражения в (1.3), получаем дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси естественного трехгранника в таком виде:

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \quad m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \quad F_b = 0. \quad (1.4)$$

Обращаем внимание на тот факт, что дифференциальное уравнение в проекции на бинормаль не содержит производных и совпадает с уравнением статики. Это позволяет в некоторых задачах легко определять силы реакций связей.

1.2. Две задачи динамики точки

Различают две задачи динамики точки: первую (прямую) и вторую (обратную).

Первая или прямая задача: заданы масса точки и кинематические уравнения движения точки. Требуется определить силу, вызывающую заданное движение.

Вторая или обратная задача: дана масса точки и сила, действующая на точку. Требуется определить движение точки.

Решение первой (прямой) задачи. Пусть уравнения движения точки заданы координатным способом:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Дважды дифференцируя эти уравнения по времени t , найдем \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} . Умножив найденные проекции ускорения на массу, получим из (1.2) проекции силы: F_x , F_y , F_z . Величина силы, действующая на точку, равна

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (1.5)$$

а её направление определяется направляющими косинусами:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \quad (1.6)$$

Пример 1.1. Точка M массой m движется согласно уравнениям: $x = 5 \sin \pi t$, $y = 5 \cos \pi t$. Определить силу, вызывающую движение точки.

Решение. Найдем траекторию точки путем исключения параметра t из уравнений движения точки.

С этой целью возведем в квадрат обе части уравнений движения и сложим их. При этом получим: $x^2 + y^2 = 25$. Это уравнение окружности радиуса $r = 5$ с центром в начале координат (рис.1.1).

Определяем скорость и ускорение точки:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5\pi \cos \pi t, & \ddot{x} &= -5\pi^2 \sin \pi t, \\ \dot{y} &= -5\pi \sin \pi t, & \ddot{y} &= -5\pi^2 \cos \pi t, \end{aligned}$$

или

$$\ddot{x} = -\pi^2 x, \quad \ddot{y} = -\pi^2 y.$$

Умножая \ddot{x} и \ddot{y} на массу точки, получим проекции силы, действующей на точку:

$$F_x = -m\pi^2 x, \quad F_y = -m\pi^2 y.$$

Модуль силы равен

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\pi^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Учитывая, что $x^2 + y^2 = r^2$, модуль силы можно записать так:

$$|\vec{F}| = m\pi^2 r.$$

Направляющие косинусы вектора \vec{F} , согласно (1.6), равны:

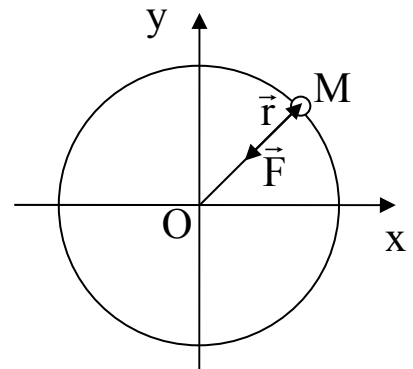


Рис.1.1

$$\cos \alpha = -\frac{m\pi^2 x}{m\pi^2 r} = -\frac{x}{r}, \quad \cos \beta = -\frac{m\pi^2 y}{m\pi^2 r} = -\frac{y}{r},$$

следовательно,

$$\vec{F} = -m\pi^2 \vec{r}.$$

Найденная сила показана на рис.1.1.

Решение второй (обратной) задачи динамики точки в инженерном деле неизмеримо сложнее решения прямой задачи, так как в общем случае требует интегрирования системы трех неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с произвольной правой частью.

Сила \vec{F} , приложенная к материальной точке, есть равнодействующая всех сил, действующих на точку, в том числе и сил реакций связей. Равнодействующая может быть функцией времени, координат точки и её скорости, т.е.

$$\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \quad (1.7)$$

При этом система (1.2) дифференциальных уравнений для определения движения точки имеет вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Решение системы (1.8) в общем виде записывается так:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ - постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям.

Из математики известно, что нет единого алгоритма для решения дифференциальных уравнений даже первого порядка. Решение в виде интегралов можно получить лишь для некоторых конкретных видов уравнений. К ним относятся дифференциальные уравнения с разделяющимися

переменными, однородные и линейные уравнения, уравнения Бернулли и некоторые другие.

Если точка движется в плоскости, то система (1.8) упрощается:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \end{aligned} \quad (1.10)$$

а если по прямой, то от системы (1.8) остается только одно уравнение:

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}). \quad (1.11)$$

Ниже рассмотрены частные случаи движения точки по прямой при действии различных по характеру сил.

1.3. Движение точки при действии постоянной силы

На точку, движущуюся по оси x , действует постоянная сила $F_x = \text{const}$. При $t = 0$ $\dot{x} = v_0$, $x = x_0$. Требуется определить закон движения точки.

Записываем дифференциальное уравнение (1.11): $m\ddot{x} = F_x$ или

$$\ddot{x} = \frac{F_x}{m} = a = \text{const},$$

где a - ускорение точки (так как точка движется по прямой, то нормальная составляющая ускорения отсутствует и, следовательно, a - это касательное и одновременно полное ускорение точки).

Интегрируем полученное уравнение:

$$\dot{x} = \int a dt = at + C_1. \quad (1.12)$$

Так как при $t = 0$ $\dot{x} = v_0$, то подставляя в левую часть выражения (1.12) вместо \dot{x} величину v_0 , а в правую - вместо t нуль, получаем:

$$C_1 = v_0,$$

следовательно,

$$\dot{x} = at + v_0. \quad (1.13)$$

Интегрируем (1.13):

$$x = \int (at + v_0) dt = at^2 / 2 + v_0 t + C_2. \quad (1.14)$$

Подставляя в правую часть (1.14) $t = 0$, а в левую $x = x_0$, получаем $C_2 = x_0$, и уравнение (1.14) принимает вид:

$$x = at^2 / 2 + v_0 t + x_0 . \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) - это уравнение равнопеременного движения точки по прямой.

1.4. Движение точки при действии силы, зависящей от времени

Пусть на материальную точку, движущуюся вдоль оси x , действует сила, зависящая от времени: $F_x = F_x(t)$. Требуется определить кинематическое уравнение движения точки.

Дифференциальное уравнение (1.11) для этого случая выглядит так:

$$m\ddot{x} = F_x(t) . \quad (1.16)$$

Интегрируя уравнение (1.16), получаем скорость точки:

$$\dot{x} = \int \frac{F_x(t)}{m} dt + C_1 , \quad (1.17)$$

а интегрируя (1.17) - перемещение точки:

$$x = \int \left(\int \frac{F_x(t)}{m} dt + C_1 \right) dt + C_2 . \quad (1.18)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются по начальным условиям.

Пример 1.2. Груз весом P начинает двигаться из состояния покоя по прямой на горизонтальной плоскости под действием силы F (рис.1.2), изменяющейся по закону: $F = ct$, где c - заданная константа. Найти закон движения груза.

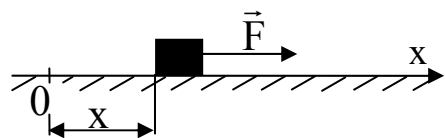


Рис.1.2

Решение. Совместим начало координат (точку O) с начальным положением груза и направим ось x в сторону движения.

Тогда начальные условия будут такими: $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. Составляем уравнение (1.16):

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = ct$$

и интегрируем его:

$$\dot{x} = \int \frac{gct}{P} dt + C_1 = \frac{gc}{2P} t^2 + C_1.$$

Так как при $t = 0$ $\dot{x}_0 = 0$, то $C_1 = 0$ и, следовательно, $\dot{x} = \frac{gc}{2P} t^2$. Интегрируя еще раз, находим

$$x = \frac{gc}{2P} \int t^2 dt + C_2 = \frac{gc}{6P} t^3 + C_2.$$

Постоянная C_2 тоже равна нулю, поскольку при $t = 0$ $x_0 = 0$. С учетом этого закон движения груза таков: $x = gct^3 / (6P)$.

1.5. Движение точки при действии силы, зависящей от положения точки. Гармонические колебания точки

Пусть сила, действующая на материальную точку, зависит от положения точки, т.е. $F_x = F_x(x)$. При этом дифференциальное уравнение (1.11) имеет вид:

$$m\ddot{x} = F_x(x). \quad (1.19)$$

Рассмотрим этот случай на примере свободных колебаний точки без учета сил сопротивления среды.

Гармонические колебания точки. Пусть точка М движется прямолинейно под действием силы F , направленной к неподвижному центру О и пропорциональной расстоянию до этого центра (рис.1.3).

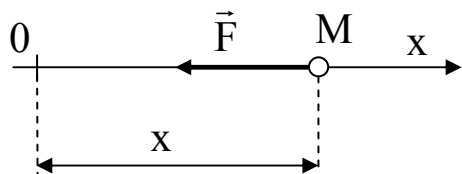


Рис.1.3

При $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 < 0$.

Проекция силы F на ось x , по которой движется точка, изменяется согласно соотношению:

$$F_x = -cx, \quad (1.20)$$

где $c > 0$ - заданный коэффициент пропорциональности. В момент, когда точка М попадает в точку О, значение силы F равно нулю, следовательно, точка О является равновесным положением точки М. После прохождения точкой М через точку О сила F изменяет свое направление и становится снова направленной к точке О. Она стремится вернуть точку М в положение равновесия, поэтому эта сила называется *восстанавливающей*.

Дифференциальное уравнение (1.19) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$m\ddot{x} = -cx. \quad (1.21)$$

Деля на массу и вводя обозначение

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad (1.22)$$

приводим уравнение (1.21) к виду:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (1.23)$$

Полученное уравнение представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение находится с помощью характеристического уравнения. Поскольку корни характеристического уравнения оказываются в данном случае мнимыми, то решение уравнения (1.23) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.24)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Дифференцируя уравнение (1.24), получаем скорость точки:

$$\dot{x} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt. \quad (1.25)$$

Постоянные интегрирования находим по начальным данным. Подставляя $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ в (1.24) и (1.25), получаем $x_0 = C_1$, $\dot{x}_0 = kC_2$, следовательно,

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \dot{x}_0 / k. \quad (1.26)$$

Равенство (1.24) можно привести к виду:

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (1.27)$$

Найдем зависимость a и α от C_1 и C_2 , обеспечивающую возможность такого преобразования. Для этого в (1.28) раскрываем синус суммы двух углов:

$$x = a \sin kt \cos \alpha + a \cos kt \sin \alpha \quad (1.28)$$

и приравниваем друг другу коэффициенты, стоящие при $\cos kt$ и $\sin kt$ в правых частях равенств (1.24) и (1.28):

$$C_1 = a \sin \alpha, \quad C_2 = a \cos \alpha,$$

откуда

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2}$$

или с учетом (1.26)

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{k}{\dot{x}_0} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0}. \quad (1.29)$$

Колебания, совершаемые точкой по закону (1.27), называются *гармоническими*.

Всем величинам, входящим в уравнение (1.27), можно дать наглядную кинематическую интерпретацию. Представим, что стержень OB длиной a вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью, равной k (рис.1.4).

Точка M , являющаяся проекцией точки B на горизонтальный диаметр окружности, описываемой концом B стержня, совершает при этом колебания по диаметру CD . Из рис.1.4 видно, что в произвольный момент времени координата x точки M равна $x = a \sin(kt + \alpha)$, т.е. закон движения точки M по диаметру CD совпадает с уравнением (1.27).

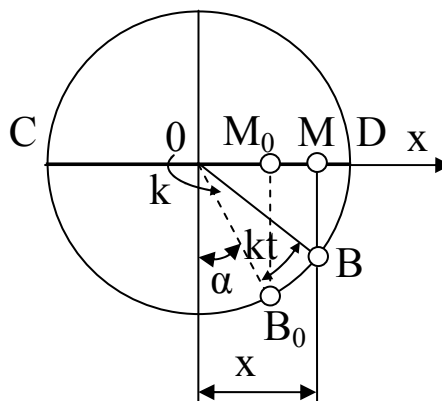


Рис.1.4

Величина a , равная наибольшему отклонению точки M от центра O колебаний, называется *амплитудой* колебаний. Угол $(kt + \alpha)$ называется *фазой* колебаний, а угол α - *началь-*

ной фазой колебаний. Величина k называется *круговой или циклической частотой колебаний*. Промежуток времени T , в течение которого точка M совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний*:

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.30)$$

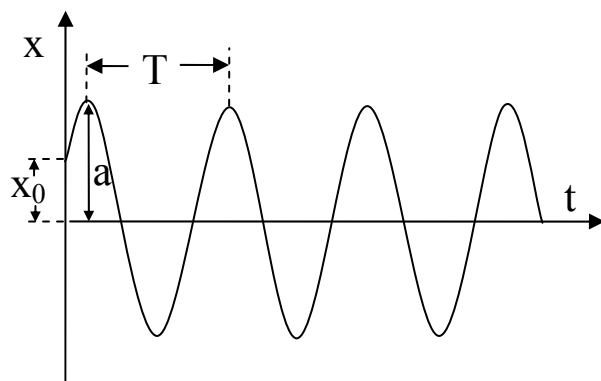


Рис.1.5

Гармонические колебания обладают следующими свойствами: *амплитуда и начальная фаза зависят от начальных условий, а частота и период не зависят от них.*

График гармонических колебаний точки под действием восстанавливающей силы представлен на рис.1.5.

Пример 1.3. Брусок массы m прикреплен к правому концу пружины, жесткость которой равна s (рис.1.6). Левый конец пружины защемлен в стене. В начальный момент пружина находилась в недеформированном состоянии, а бруску была сообщена скорость v_0 , направленная вдоль оси x вправо.

Определить наибольшее смещение бруса из положения равновесия. Силой трения бруса о горизонтальную плоскость и массой пружины пренебречь.

Решение. Поместим начало отсчета в точку O - положение равновесия бруса. Изобразим брусок в промежуточном положении, отстоящим от положения равновесия на величину x (рис.1.6). На брусок действует сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, реакция \vec{N} горизонтальной плоскости и упругая сила \vec{F} пружины, пропорциональная удлинению пружины и направленная всегда к

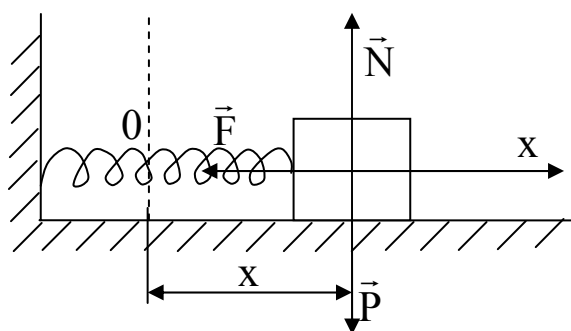


Рис.1.6

точке О равновесия. Проекция силы пружины на ось x равна $F_x = -cx$, где c - заданная жесткость пружины.

Подставляя F_x в (1.19), получаем:

$$m\ddot{x} = -cx,$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (1.31)$$

где

$$k = \sqrt{c/m}.$$

Уравнение (1.31) совпадает с уравнением (1.23), следовательно, брусок совершает гармонические колебания. Решение уравнения (1.31), согласно (1.24), имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (1.32)$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия: $t = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ и формулы (1.26):

$$C_1 = x_0 = 0, \quad C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

С учетом полученных выражений кинематическое уравнение (1.32) гармонического колебательного движения бруска приобретает вид:

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

1.6. Уравнение движения материальной точки при действии силы, зависящей от скорости

На материальную точку действует сила, зависящая только от скорости: $F = F(\dot{x})$. Такие зависимости используют при моделировании сил сопротивления.

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показывают, что при малых скоростях (порядка нескольких сантиметров в секунду) сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости: $F = k_1 \dot{x}$.

В широком диапазоне скоростей (от метра в секунду до скорости звука) сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости: $F = k_2 \dot{x}^2$.

При больших скоростях сила сопротивления пропорциональна \dot{x}^3 , \dot{x}^4 и даже более высокой степени скорости. Этим объясняются трудности, с которыми был сопряжен в авиации переход к сверхзвуковым скоростям. При преодолении звукового барьера летательными аппаратами сила сопротивления возрастала с $k_2 \dot{x}^2$ до $k_3 \dot{x}^3$, что требовало создания новых двигателей, мощность которых должна была быть на порядок выше, чем у предыдущих.

Пример 1.4. Определить уравнение прямолинейного движения материальной точки (рис.1.7), на которую действует сила \vec{F} сопротивления, пропорциональная квадрату скорости; коэффициент пропорциональности равен k_2 . При $t = 0$ скорость точки равна v_0 , начальное смещение (от начала O по оси x) равно x_0 .

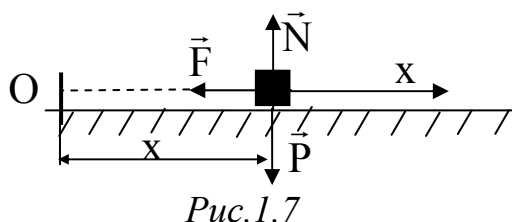


Рис.1.7

Решение. По условию задачи сила сопротивления равна $F = k_2 \dot{x}^2$, а ее проекция на ось x равна $F_x = -k_2 \dot{x}^2$. При этом дифференциальное уравнение (1.11) принимает вид:

$$m\ddot{x} = -k_2 \dot{x}^2 \quad (1.33)$$

(проекции силы тяжести и нормальной реакции на ось x равны нулю).

Преобразуем уравнение (1.33) к виду:

$$\frac{dv}{dt} + \alpha_2 v^2 = 0, \quad (1.34)$$

где $\alpha_2 = k_2/m$.

Разделяем в уравнении (1.34) переменные и интегрируем:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v^2} + \alpha_2 dt &= 0, \\ -1/v + \alpha_2 t &= C_1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

В начальный момент ($t = 0$) скорость точки равна v_0 , поэтому

$$C_1 = -\frac{1}{v_0}.$$

Подставляя это выражение в (1.35), получаем скорость точки в произвольный момент времени:

$$v = \frac{v_0}{1 + \alpha_2 v_0 t}. \quad (1.36)$$

Проверим выражение (1.36) на здравый смысл. При $t \rightarrow \infty$ точка должна остановиться, т.е. при $t \rightarrow \infty$ скорость $v \rightarrow 0$. Это условие выполняется.

Производим в (1.36) замену: $v = dx/dt$ и разделяем переменные:

$$dx = \frac{v_0 dt}{1 + \alpha_2 v_0 t}. \quad (1.37)$$

Проинтегрируем (1.37), учитывая, что при $t = 0$ $x = x_0$:

$$x = \frac{1}{\alpha_2} \ln|1 + \alpha_2 v_0 t| + C_2,$$

$$C_2 = x_0,$$

$$x = x_0 + \frac{1}{\alpha_2} \ln|1 + \alpha_2 v_0 t|. \quad (1.38)$$

Проанализируем полученное уравнение движения точки. Из (1.38) следует, что при $t \rightarrow \infty$ координата x тоже стремится к бесконечности. Этот результат противоречит здравому смыслу. Получается, что при *любой* начальной скорости материальная точка при наличии силы сопротивления переместится на бесконечно большое расстояние. Где же ошибка?

Ошибку следует искать в исходных предпосылках. Ясно, что с течением времени скорость точки уменьшается и сила сопротивления, которая в начале движения (при большой скорости) была пропорциональна квадрату скорости, в конце движения (при малой скорости) становится пропорциональна первой степени скорости. Иными словами, зависимость (1.38) применима только до тех пор, пока скорость (1.36) не уменьшится до значений порядка нескольких сантиметров в секунду.

Из (1.36) можно найти время t_1 , при котором скорость точки уменьшается до указанной величины.

Таким образом, зависимость (1.36) справедлива не на всем отрезке времени, а только на интервале $[0, t_1]$, т.е. до тех пор, пока $t \leq t_1$.

На интервале времени от t_1 до остановки, т.е. при малых скоростях, сила сопротивления пропорциональна скорости в первой степени. При этом движение точки подчиняется такому уравнению:

$$m\ddot{x} = -k_1\dot{x} \quad (1.39)$$

или

$$\ddot{x} + \alpha_1\dot{x} = 0,$$

где $\alpha_1 = k_1/m$. Производим замену: $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = dv/dt$ и переписываем уравнение (1.39) таким образом:

$$\frac{dv}{dt} + \alpha_1 v = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dv}{v} + \alpha_1 dt = 0,$$

$$\ln |v| + \alpha_1 t = C_1,$$

$$C_1 = \ln |v_0|,$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\alpha_1 t,$$

$$v = v_0 e^{-\alpha_1 t}. \quad (1.40)$$

Анализируем полученную зависимость. При $t \rightarrow \infty$ скорость v стремится к нулю, что справедливо.

Найдем закон движения точки. Для этого записываем (1.40) в виде:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\alpha_1 t},$$

разделяем переменные и интегрируем:

$$dx = v_0 e^{-\alpha_1 t} dt,$$

$$x = -\frac{v_0}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + C_2, \quad C_2 = x_0 + \frac{v_0}{\alpha_1}$$

$$x = x_0 + \frac{v_0}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 t}). \quad (1.41)$$

Анализируем полученное уравнение движения точки. При $t \rightarrow \infty$ координата x стремится к величине конечной, равной $x_0 + v_0/\alpha_1$, что закономерно.

1.7. Решение задач

Обратную задачу динамики точки рекомендуем решать в следующей последовательности.

1. Выбрать удобную для решения задачи систему координат, записать начальные условия и изобразить материальную точку в произвольный момент времени.
2. Приложить к материальной точке все силы, действующие на нее.
3. Записать дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на выбранные оси координат.
4. Проинтегрировать дифференциальные уравнения.
5. Найти постоянные интегрирования по начальным условиям.
6. Проанализировать полученные результаты.

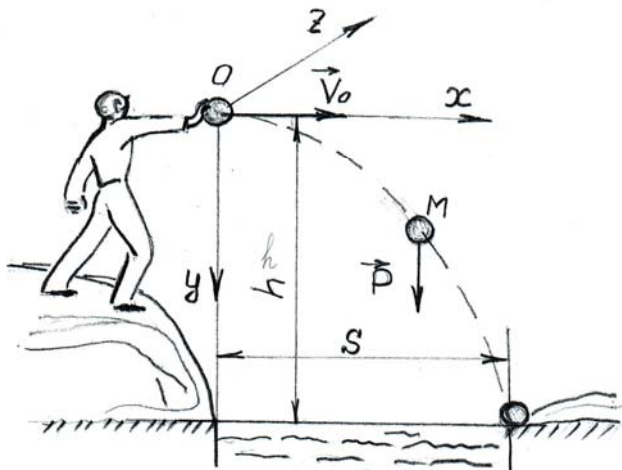


Рис.1.8

Задача 1.1. С какой начальной скоростью v_0 , направленной по горизонтали, нужно бросить предмет M с крутого берега реки, чтобы предмет достиг противоположного берега, если ширина реки равна S , а высота берега - h ? Силой сопротивления движению пренебречь.

Решение. Выбираем сис-

тему координат x, y, z с началом в точке O (рис.1.8). Изобразим точку M в произвольном положении. На точку действует только сила \vec{P} тяжести. Конкретизируем для этого случая дифференциальные уравнения (1.8):

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = P = mg, \quad m\ddot{z} = 0. \quad (1.42)$$

Интегрируем эти уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_1, & x &= C_1 t + C_2, \\ \dot{y} &= gt + C_3, & y &= \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4, \\ \dot{z} &= C_5, & z &= C_5 t + C_6. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Постоянные интегрирования находим по начальным данным: при $t=0$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0, \quad \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0, \quad \text{следовательно,}$$

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0,$$

и уравнения (1.43) принимают вид:

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}, \quad z = 0.$$

Определим время t_1 падения предмета. Так как в момент падения координата y предмета равна h , то

$$h = y_1 = \frac{gt_1^2}{2},$$

отсюда

$$t_1 = \sqrt{2h/g}.$$

За это время предмет преодолет расстояние

$$x_1 = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{2h/g}.$$

Это расстояние должно равняться ширине реки:

$$S = x_1 = v_0 \sqrt{2h/g},$$

следовательно, искомая начальная скорость предмета должна быть равна

$$v_0 = S \sqrt{g/(2h)}.$$

Задача 1.2. Составить дифференциальное уравнение малых колебаний математического маятника массой m и длиной ℓ и определить период этих колебаний.

Решение. Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити, совершающая движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис.1.9).

Материальная точка M движется по дуге окружности радиуса ℓ . Изображаем маятник в произвольном положении, а именно, в отклоненном на угол φ от его равновесного вертикального положения. Выбираем естественные оси координат: касательную τ и нормаль n .

На маятник действует сила тяжести, равная $\vec{P}=m\vec{g}$ и сила \vec{T} натяжения нити. Проектируем эти силы на ось τ и записываем дифференциальное уравнение (1.4) в проекции на касательную τ :

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \varphi,$$

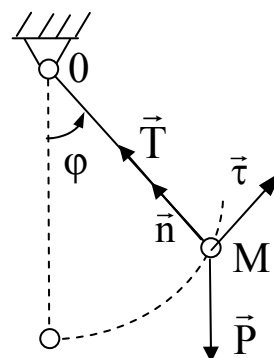


Рис.1.9

или, после сокращения на массу:

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \varphi. \quad (1.44)$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, принимая во внимание, что дуга s , пройденная маятником при повороте на угол φ , равна $\ell\varphi$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d(\ell\varphi)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\ell \frac{d\varphi}{dt} \right) = \ell \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ell \ddot{\varphi}.$$

Переписываем уравнение (1.44) с учетом этого преобразования:

$$\ell \ddot{\varphi} = -g \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \kappa^2 \sin \varphi = 0, \quad (1.45)$$

где $\kappa = \sqrt{g/\ell}$ - круговая или циклическая частота колебаний (число колебаний за время, равное 2π сек).

При малых колебаниях $\sin \varphi \approx \varphi$, и дифференциальное уравнение (1.45) приобретает вид:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0. \quad (1.46)$$

Уравнение (1.46) является дифференциальным уравнением малых колебаний математического маятника.

Нетрудно видеть, что полученное уравнение аналогично дифференциальному уравнению (1.23) гармонических колебаний точки, следовательно, малые колебания математического маятника представляют собой гармонические колебания, т.е. такие, период T которых не зависит от начальных данных и равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (1.47)$$

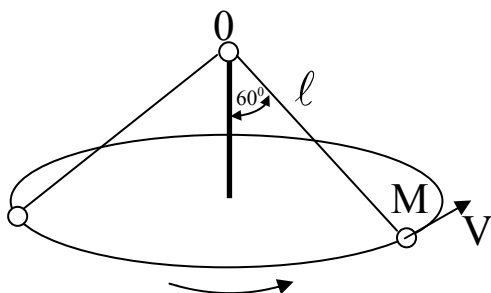


Рис.1.10

Задача 1.3. Груз M весом $P=1$ Н, подвешенный на нити длиной $\ell = 30$ см, прикрепленной в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью

угол $\alpha = 60^\circ$ (рис.1.10). Определить скорость v груза и натяжение T нити.

Решение. Данная задача относится к прямым задачам динамики точки, поскольку движение точки M известно: оно происходит по окружности в горизонтальной плоскости.

Выбираем естественные оси координат: касательную τ , главную нормаль n и бинормаль b . Мысленно разрезаем нить и заменяем ее действие на точку M силой T натяжения нити.

Записываем дифференциальные уравнения (1.3), учитывая действующие на точку M силы P и T (рис.1.11):

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad m \frac{v^2}{\rho} = T \sin \alpha, \quad T \cos \alpha - P = 0,$$

где ρ - радиус окружности, описываемой точкой М, причем $\rho = \ell \sin \alpha$.

Из последнего уравнения находим натяжение нити, а из предпоследнего - скорость точки:

$$T = P / \cos \alpha = 2 \text{ Н},$$

$$v = \sqrt{g \rho \tan \alpha} = 210 \text{ см/с}.$$

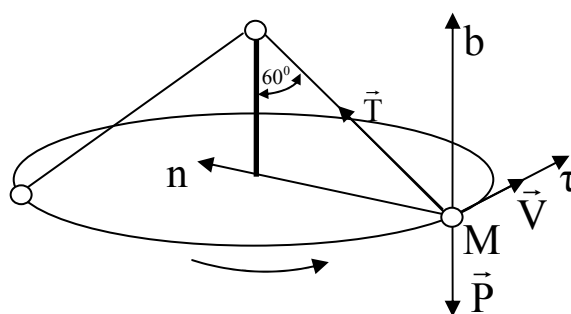


Рис.1.11

Задача 1.4. Тяжелая точка М поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась v_0 .

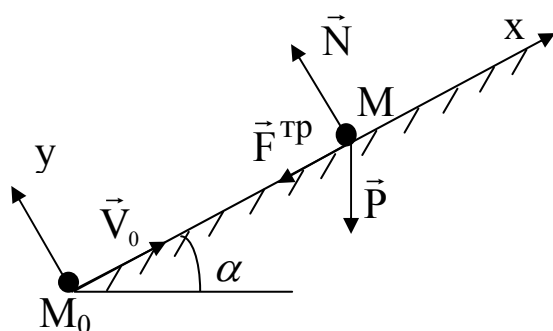


Рис.1.12

Какой путь пройдет точка до остановки и за какое время точка пройдет этот путь, если коэффициент трения скольжения равен f ?

Решение. Выбираем систему координат x, y так, что начало отсчета M_0 совпадает с начальным положением точки М (рис.1.12), а ось x направлена по скорости точки М.

Начальные условия: $t = 0, x_0 = 0, y_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0, \dot{y}_0 = 0$.

В произвольном положении на точку действуют: вес P , сила N нормальной реакции и сила трения $F^{\text{тр}}$ (рис.1.12).

Записываем дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}^{\text{тр}},$$

и в проекциях на выбранные оси координат:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -P \sin \alpha - F^{TP}, \\ m\ddot{y} &= -P \cos \alpha + N. \end{aligned}$$

Учитывая, что $P=mg$, $F^{TP} = f \cdot N$, а $\ddot{y} = 0$, записываем эти уравнения в таком виде:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg \sin \alpha - fN, \\ 0 &= -P \cos \alpha + N. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для N из второго уравнения в первое и сокращая на массу, получаем:

$$\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1.48)$$

Интегрируем уравнение (1.48):

$$\dot{x} = -gt(\sin \alpha + f \cos \alpha) + C_1.$$

Подставляя в это выражение $t = 0$, $\dot{x}_0 = v_0$, получаем:

$$C_1 = v_0,$$

следовательно,

$$\dot{x} = -gt(\sin \alpha + f \cos \alpha) + v_0. \quad (1.49)$$

Из этого уравнения, приравнявая скорость \dot{x} нулю, находим время t_1 до остановки:

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}. \quad (1.50)$$

Чтобы найти путь, пройденный точкой, интегрируем (1.49):

$$x = -g \frac{t^2}{2} (\sin \alpha + f \cos \alpha) + v_0 t + C_2. \quad (1.51)$$

Так как при $t = 0$ $x_0 = 0$, то $C_2 = 0$, и уравнение (1.51) приобретает вид:

$$x = -gt^2 (\sin \alpha + f \cos \alpha) / 2 + v_0 t. \quad (1.52)$$

Подставляя в это уравнение вместо t выражение (1.50), получаем путь, пройденный точкой до остановки:

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}. \quad (1.53)$$

Этот же ответ можно получить, определяя из уравнения (1.48) зависимость v от x . Для этого произведем преобразование его левой части:

$$v \frac{dv}{dx} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha),$$

разделяем переменные:

$$v dv = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) dx$$

и интегрируем:

$$\left. \frac{v^2}{2} \right|_{v_0}^0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) x \Big|_0^{x_1}.$$

После подстановки пределов получаем:

$$\frac{v_0^2}{2} = g(\sin \alpha + f \cos \alpha) x_1,$$

откуда

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

Задача 1.5. Тело весом P движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 10(1 - t)$, направленной по скорости тела (рис.1.13).

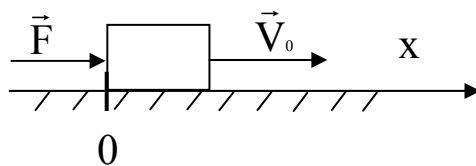


Рис.1.13

Определить закон движения тела, если в начальный момент его скорость равна v_0 .

Решение. Выберем ось x по направлению движения тела, а начало отсчета совместим с начальным положением тела. При этом начальные условия будут такими:

$$t = 0, \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0.$$

Составляем дифференциальное уравнение движения тела:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = 10(1 - t).$$

Интегрируя это уравнение, получаем выражение для скорости тела:

$$\dot{x} = -5 \frac{g}{P} (1 - t)^2 + C_1,$$

а интегрируя полученное выражение для скорости, находим уравнение движения тела:

$$x = \frac{5}{3} \frac{g}{P} (1 - t)^3 + C_1 t + C_2.$$

Подставляя начальные условия в два последних уравнения, находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = v_0 + 5 \frac{g}{P}, \quad C_2 = -\frac{5g}{3P}.$$

С учетом этих выражений закон движения тела имеет вид:

$$x = \frac{5}{3} \frac{g}{P} (1 - t)^3 + (v_0 + 5 \frac{g}{P})t - \frac{5g}{3P}.$$

Задача 1.6. Материальная точка массой m брошена с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 .

Определить зависимость скорости точки от её расстояния до центра Земли, пренебрегая силой сопротивления движению.

Решение. Выберем начало координат в центре Земли (рис.1.14) и изобразим точку в произвольном положении на расстоянии x от начала координат.

На точку действует сила притяжения Земли, равная:

$$F = \frac{\mu m M}{x^2}, \quad (1.54)$$

где μ - универсальная постоянная тяготения, M - масса Земли.

На поверхности Земли, т.е. при $x = R$:

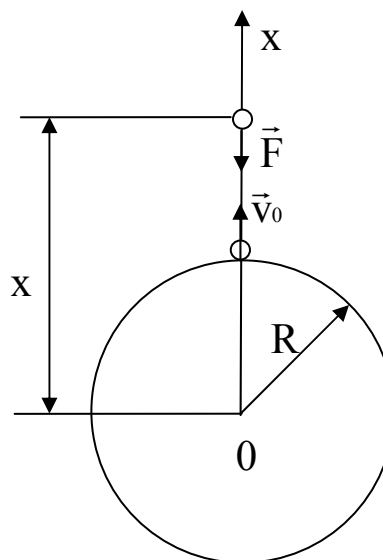


Рис.1.14

$$F = mg. \quad (1.55)$$

Приравнявая (1.54) и (1.55) друг другу, получаем:

$$\mu m M = mgR^2. \quad (1.56)$$

С учетом (1.56) сила притяжения приобретает вид:

$$F = \frac{mgR^2}{x^2}. \quad (1.57)$$

Составляем дифференциальное уравнение (1.19):

$$m\ddot{x} = -\frac{mgR^2}{x^2}. \quad (1.58)$$

Произведем следующее преобразование:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}. \quad (1.59)$$

Подставляя (1.59) в (1.58) и сокращая на массу, получаем:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2}.$$

Разделяем переменные и записываем определенные интегралы:

$$\int_{v_0}^v v dv = -gR^2 \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2}.$$

После интегрирования с учетом, что при $t = 0$ $x_0 = R$, получаем:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right),$$

отсюда

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)}. \quad (1.60)$$

С помощью полученной формулы можно определить наибольшее расстояние (x_{\max}), которое пройдет точка при начальной скорости v_0 . Приравнявая конечную скорость v нулю, из (1.60) находим:

$$x_{\max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}. \quad (1.61)$$

Из (1.61) видно, что при увеличении значения v_0 возрастает и величина x_{\max} . При $v_0 = \sqrt{2gR}$ величина x_{\max} становится бесконечно большой. Следовательно, вылетевшая со скоростью $v_0 = \sqrt{2gR}$ с поверхности Земли материальная точка не возвратится на Землю. Принимая $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, а радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}$, получим значение этой скорости:

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с}. \quad (1.62)$$

Такую скорость называют *второй космической скоростью*. Это наименьшая скорость, которую должен иметь космический корабль для полета к другим планетам Солнечной системы.

Наименьшую начальную скорость, при которой космический корабль становится искусственным спутником Земли и вращается по круговой орбите вокруг Земли, называют *первой космической скоростью*. Она равна $\sqrt{gR} \approx 7,9 \text{ км/с}$.

При $v_0 > 16,7 \text{ км/с}$ космический корабль покидает Солнечную систему.

Задача 1.7. Тело весом P , брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести P и силы сопротивления воздуха R .

Найти уравнения движения точки, считая силу сопротивление возду-

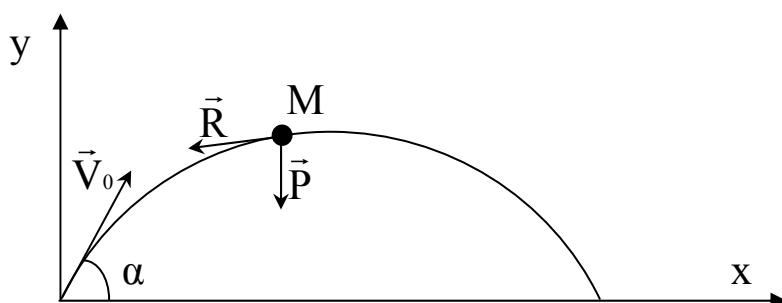


Рис.1.15

ха пропорциональной первой степени скорости: $R = kPv$, где k — заданная константа.

Решение. Выбираем систему отсчета как показано на рис.1.15 и запи-

сываем начальные условия:

$$t = 0, \quad x_0 = y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

Составляем дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}.$$

В проекциях на оси координат, учитывая, что $R_x = -kmg\dot{x}$, $R_y = -kmg\dot{y}$, имеем:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kmg\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= -mg - kmg\dot{y}, \end{aligned}$$

или, после сокращения на массу:

$$\ddot{x} + kg\dot{x} = 0, \quad (1.63)$$

$$\ddot{y} + kg\dot{y} = -g. \quad (1.64)$$

Уравнение (1.63) представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + kg\lambda = 0.$$

Корни этого характеристического уравнения равны

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -kg. \quad (1.65)$$

Так как корни характеристического уравнения - действительные, то решение дифференциального уравнения (1.54) записываем в виде:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

или, с учетом (1.65),

$$x = C_1 + C_2 e^{-kgt}. \quad (1.66)$$

Второе уравнение, а именно уравнение (1.64), является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение равно сумме двух слагаемых:

$$y = y_1 + y_2, \quad (1.67)$$

причем y_1 - это решение однородного уравнения:

$$\ddot{y} + k\dot{y} = 0, \quad (1.68)$$

а y_2 - это частное решение уравнения (1.64).

Решение однородного уравнения (1.68) аналогично (1.66):

$$y_1 = C_3 + C_4 e^{-kgt}. \quad (1.69)$$

Частное решение y_2 найдем в виде:

$$y_2 = At. \quad (1.70)$$

Чтобы найти неопределенный коэффициент A , подставляем решение (1.70), точнее, его производные, в уравнение (1.64) и из полученного тождества находим выражение для неопределенного коэффициента:

$$A = -1/k. \quad (1.71)$$

Таким образом, полное решение дифференциального уравнения (1.64), согласно (1.67), (1.69) и (1.71), имеет вид:

$$y = C_3 + C_4 e^{-kgt} - \frac{t}{k}. \quad (1.72)$$

Осталось найти постоянные интегрирования. С этой целью дифференцируем уравнения (1.66) и (1.72):

$$\dot{x} = -kgC_2 e^{-kgt}, \quad \dot{y} = -kgC_4 e^{-kgt} - \frac{1}{k} \quad (1.73)$$

и подставляем в (1.66), (1.72), (1.73) начальные условия:

$$t = 0, \quad x_0 = y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha.$$

При этом из указанных уравнений получаем:

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg}, \quad C_3 = -C_4 = \frac{v_0 \sin \alpha + 1/k}{kg}. \quad (1.74)$$

С учетом выражений (1.74) кинематические уравнения движения точки, т.е. равенства (1.66) и (1.72), приобретают окончательный вид:

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt}),$$

$$y = \frac{1}{kg} (v_0 \sin \alpha + 1/k) (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}.$$

1.8. Контрольные вопросы

- 1.1. Какие системы отсчета называют инерциальными ?
- 1.2. Какова величина и направление силы, вынуждающей точку массы m двигаться равномерно по окружности радиуса R ?
- 1.3. Какую скорость будет иметь точка весом 3 Н при $t = 4 \text{ с}$, если её движение происходит по прямой под действием силы $F = \cos \pi t$, причем начальная скорость точки равна нулю?
- 1.4. Чему равен период гармонических колебаний математического маятника?
- 1.5. Как изменится период гармонических колебаний точки (при прочих равных условиях), если коэффициент c пропорциональности в выражении восстанавливающей силы увеличить в 2 раза?
- 1.6. При каких начальных данных начальная фаза гармонических колебаний точки равна нулю?
- 1.7. При какой начальной скорости ракета, выпущенная с поверхности Земли, станет искусственным спутником Земли?
- 1.8. Чему равна вторая космическая скорость?
- 1.9. При какой наименьшей начальной скорости ракета покинет Солнечную систему?
- 1.10. Как записывается дифференциальное уравнение гармонических колебаний?

ГЛАВА 2. ДИНАМИКА ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

2.1. Дифференциальные уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета

В главе 1 приведены дифференциальные уравнения движения материальной точки *в инерциальной системе отсчета*, т.е. в такой, в которой справедливы законы Ньютона. В данной главе получим уравнения движения по отношению к системе, движущейся некоторым образом относительно инерциальной системы.

Введем в рассмотрение две системы отсчета: инерциальную (абсолютную, условно неподвижную) и систему, движущуюся относительно инерциальной. *Эту вторую систему будем называть относительной системой отсчета.*

В зависимости от того, по отношению к какой системе отсчета рассматривается движение точки, будем различать *абсолютное* движение точки и *относительное* движение точки.

Уравнение движения точки относительно абсолютной системы отсчета - это 2-ой закон Ньютона. Запишем его в таком виде:

$$m\vec{a}_a = \vec{F}, \quad (2.1)$$

где \vec{a}_a - абсолютное ускорение точки, \vec{F} - равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке.

Согласно теореме Кориолиса

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (2.2)$$

причем \vec{a}_r - ускорение точки относительно подвижной системы отсчета, \vec{a}_e - переносное ускорение точки, \vec{a}_c - кориолисово ускорение.

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем:

$$m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + m\vec{a}_c = \vec{F}$$

или

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c. \quad (2.3)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} -m\vec{a}_e &= \vec{\Phi}_e, \\ -m\vec{a}_c &= \vec{\Phi}_c. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Вектор $\vec{\Phi}_e$ называют *переносной силой инерции*, а вектор $\vec{\Phi}_c$ - *кориолисовой силой инерции*.

Подставляя (2.4) в (2.3), получаем *уравнение относительного движения материальной точки*:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \quad (2.5)$$

Это уравнение отличается от уравнения второго закона Ньютона в форме (2.1) и следовательно, *относительная система отсчета в общем случае не является инерциальной*.

В проекциях на оси x_r, y_r, z_r подвижной системы уравнению (2.5) соответствуют три дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_r &= F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}, \\ m\ddot{y}_r &= F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \\ m\ddot{z}_r &= F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

С помощью этих уравнений решаются задачи динамики точки при её движении относительно *неинерциальной* системы. Методы решения аналогичны изложенным в главе 1 и отличаются лишь тем, что помимо обычных сил к материальной точке прикладываются еще силы инерции.

Отметим качественное различие между равнодействующей \vec{F} , входящей в уравнение (2.5), и силами инерции. Сила \vec{F} - результат действия на материальную точку физических тел, которые можно конкретно указать во всех частных случаях.

Пример 2.1. Точка М массой m падает с высоты h без начальной скорости в аппарате, летящем поступательно по горизонтальной прямой с ускорением \vec{a} . Определить траекторию падения точки в системе $O_r x_r y_r$, жестко связанной с летящим аппаратом (рис.2.1).

Решение. Легко показать, что в *инерциальной* системе отсчета траекторией падения точки без начальной скорости является вертикальная прямая.

Выясним, какова траектория падения точки в *неинерциальной* системе, связанной с летящим аппаратом. Для этого нужно конкретизировать применительно к решаемой задаче дифференциальное уравнение (2.5) и проинтегрировать его. Для этой цели приложим к падающей материальной точке, помимо силы $P=mg$, силы инерции. Переносная сила инерции равна

$$\Phi_e = ma_e,$$

или, поскольку $a_e = a$,

$$\Phi_e = ma.$$

Она направлена в сторону, противоположную ускорению аппарата. Кориолисова сила инерции равна нулю:

$$\Phi_c = ma_c = 2m\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0,$$

так как аппарат находится в поступательном прямолинейном движении и

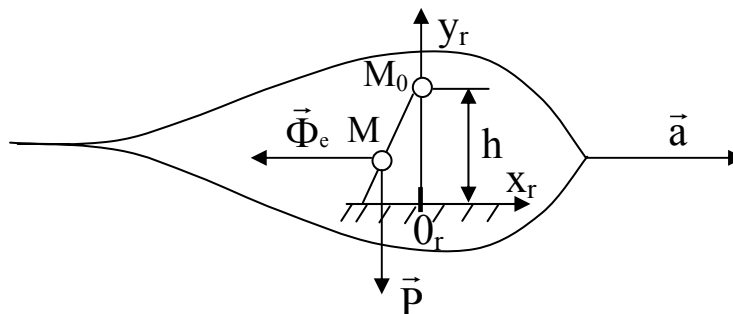


Рис 2.1

его угловая скорость ω_e равна нулю.

Записываем уравнение (2.5) в проекциях на указанные оси координат:

$$m\ddot{x}_r = -ma,$$

$$m\ddot{y}_r = -mg.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= -at + C_1, \\ \dot{y}_r &= -gt + C_2.\end{aligned}$$

Так как при $t = 0$ по условию задачи начальная скорость точки относительно аппарата равна нулю, то $C_1 = C_2 = 0$. Интегрируя еще раз, имеем:

$$\begin{aligned}x_r &= -at^2/2 + C_3, \\ y_r &= -gt^2/2 + C_4.\end{aligned}$$

При $t = 0$ $x_r = 0$, $y_r = h$, следовательно, $C_3 = 0$, а $C_4 = h$, и кинематические уравнения относительного движения точки приобретают вид:

$$\begin{aligned}x_r &= -at^2/2, \\ y_r &= -gt^2/2 + h.\end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений параметр $(t^2/2)$, получаем уравнение траектории движения точки относительно системы отсчета, связанной с аппаратом:

$$y_r = \frac{g}{a} x_r + h.$$

Полученное уравнение - это уравнение прямой (рис.2.1), составляющей с вертикалью угол, тангенс которого равен отношению ускорения свободного падения g к ускорению a аппарата.

Таким образом, траектория падения точки без начальной скорости в подвижной системе отсчета, движущейся с ускорением, отличается от вертикальной прямой. Это позволяет экспериментально установить факт неравномерного движения подвижной системы относительно инерциальной системы отсчета.

2.2. Относительное равновесие материальной точки

Пусть материальная точка находится в равновесии в подвижной (неинерциальной) системе отсчета. Выясним, какому условию должны подчиняться в этом случае силы, действующие на точку.

При равновесии точки в подвижной системе её относительная скорость \vec{v}_r и относительное ускорение \vec{a}_r равны нулю, т.е. $\vec{v}_r = 0$ и $\vec{a}_r = 0$. При этом кориолисова сила инерции

$$\vec{\Phi}_c = -2m\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r \quad (2.7)$$

оказывается равной нулю, и уравнение (2.5) принимает вид:

$$\vec{F} + \vec{\Phi}_e = 0. \quad (2.8)$$

Полученное уравнение представляет собой условие равновесия материальной точки в неинерциальной системе отсчета. Уравнение (2.8) называют *условием относительного равновесия материальной точки*.

Пример 2.2. В вагоне поезда, движущегося с ускорением по прямолинейному пути, висит математический маятник. Маятник находится в равновесии в положении, отклоненном от вертикали на угол α (рис.2.2). Определить ускорение вагона.

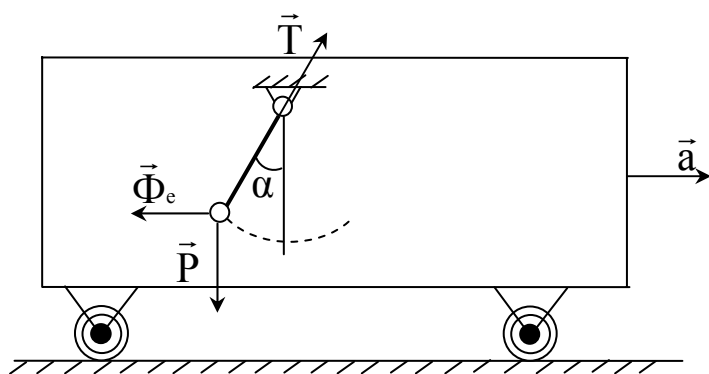


Рис.2.2

Решение. На маятник действует сила тяжести, равная $P = mg$, и сила T натяжения нити, направленная по нити. Так как система отсчета, связанная с вагоном, является неинерциальной системой, то помимо указанных сил

к маятнику следует приложить переносную силу инерции, направленную противоположно переносному ускорению. (Отметим, что кориолисова сила инерции $\Phi_c = 0$, т.к. переносное движение поступательное). Так как переносное ускорение - это ускорение вагона, то $a_e = a$ и переносная сила инерции равна

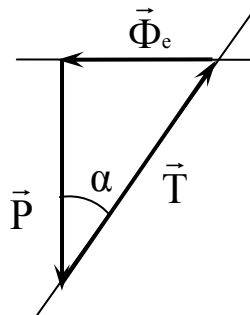


Рис.2.3

$$\Phi_e = \frac{P}{g} a.$$

При этом, согласно (2.8), система трех указанных сил представляет собой равновесную систему. Строим на силе P силовой треугольник (рис.2.3), из которого получаем:

$$\Phi_e = P \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$ma = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

следовательно, ускорение вагона равно

$$a = g \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Заметим, что точно такой же ответ мы получим, если захотим определить ускорение призмы, при котором положенный на нее груз не будет перемещаться при отсутствии трения (рис.2.4).

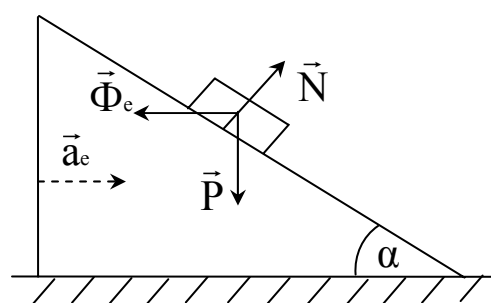


Рис.2.4

2.3. Относительный покой тела на поверхности Земли

Условие относительного покоя тела (материальной точки) M на поверхности Земли выражается равенством:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e = 0, \quad (2.9)$$

где \vec{F} - сила притяжения Земли, направленная к центру Земли (рис.2.5), \vec{N} - нормальная реакция, $\vec{\Phi}_e$ - переносная сила инерции. Вследствие равномерного вращения Земли

$$\Phi_e = m\omega^2 R \cos \varphi, \quad (2.10)$$

где R - радиус Земли, φ - географическая широта места (рис.2.5), ω_e - угловая скорость вращения Земли, равная $2\pi/(24 \cdot 3600) \text{ рад/с}$.

Очевидно, что давление тела на опору выражается силой $\vec{P} = -\vec{N}$, следовательно,

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{\Phi}_e, \quad (2.11)$$

причем сила \vec{P} - *равнодействующая силы притяжения Земли и переносной силы инерции* - представляет собой вес тела в данной точке Земли.

Направление силы \vec{N} определяет направление вертикали в данной точке земной поверхности.

По модулю сила инерции $\vec{\Phi}_e$ мала по сравнению с весом тела в любой точке земной поверхности и вблизи неё.

Отношение модулей этих сил равно

$$\frac{\Phi_e}{P} = \frac{\omega_e^2 R \cos \varphi}{g}. \quad (2.12)$$

Это отношение имеет максимальное значение на экваторе, где $\varphi = 0$, $R = 6370$ км, $g = 9,78$ м/с² :

$$\frac{\Phi_e}{P} = \frac{1}{290} \approx 0,00346.$$

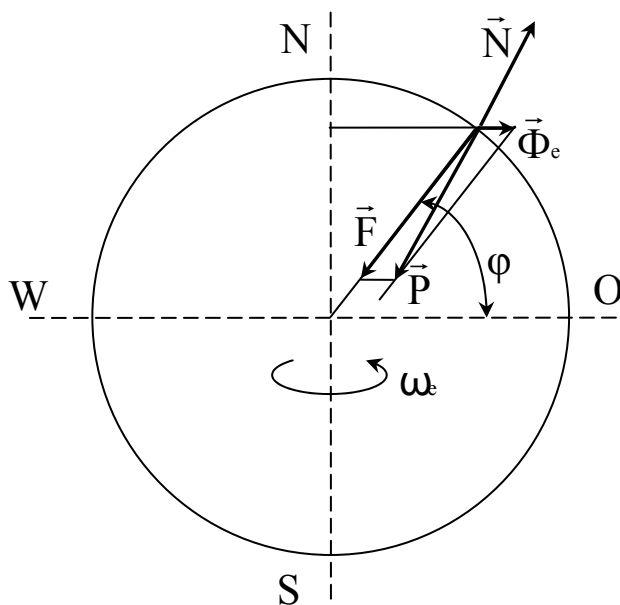


Рис.2.5

Из этого следует, что вес P тела по модулю мало отличается от величины силы F притяжения к Земле, и направление вертикали составляет с направлением силы F очень малый угол (на рис.2.5 этот угол утрирован). Наибольшее значение этого угла (на широте $\varphi = 45^\circ$), не превосходит 6-ти угловых минут.

Наибольший вес тело имеет при $\varphi=90^\circ$, т.е. на полюсе, поскольку переносная сила

инерции там равна нулю. Кроме того, на полюсе ускорение свободного падения имеет наибольшее значение, равное 983 см/с² (на экваторе $g = 978$ см/с²).

2.4. Принцип относительности классической механики

Составим дифференциальное уравнение движения материальной точки по отношению к системе отсчета, которая движется *равномерно прямолинейно поступательно* по отношению к инерциальной системе. В этом случае $\vec{a}_e = 0$ и $\vec{\omega}_e = 0$, и уравнение (2.5) приобретает вид:

$$m\vec{a}_r = \vec{F}. \quad (2.13)$$

Сопоставляя уравнение (2.13) с уравнением (2.1), видим, что в этом случае нет разницы между относительным ускорением \vec{a}_r материальной точки и ее абсолютным ускорением \vec{a}_a , поскольку правые части уравнений (2.13) и (2.1) одинаковы. Иными словами, в рассматриваемом случае относительное движение точки ничем не отличается от ее абсолютного движения.

В рассматриваемой подвижной системе силы инерции оказываются равными нулю и второй закон Ньютона, а значит и закон инерции (первый закон Ньютона) имеют ту форму, которая составляет основу классической механики. Точно также в такой системе выполняется и третий закон Ньютона. Следовательно, *любая система, движущаяся относительно инерциальной равномерно прямолинейно поступательно, тоже является инерциальной системой.*

В природе нет какой-то одной, выделенной инерциальной системы отсчета, все инерциальные системы равноправны. Во всех инерциальных системах механические явления описываются законами классической механики.

Тождественность дифференциальных уравнений относительного и абсолютного движений материальной точки приводит к тому, что *никаким механическим опытом, проводимом в инерциальной системе отсчета, невозможно установить, движется или покоится эта система относительно другой инерциальной системы. В этом заключается принцип относительности классической механики.*

Если в примере 2.1 аппарат летел бы без ускорения, то траекторией движения падающей внутри него без начальной скорости точки оказалась бы *вертикальная* прямая, и люди, находящиеся в этом аппарате и знающие

основные законы теоретической механики, при отсутствии окон не могли бы установить, летит аппарат или находится в покое.

Вот как описал Галилей принцип относительности классической механики. «Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими мелкими летающими насекомыми, пусть будет у вас там также большой сосуд с водой и плавающими в нем маленькими рыбками; подвесьте, далее, наверху ведро, из которого вода будет падать капля за каплей в сосуд с узким горлышком, поставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придется бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте все это, хотя у вас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль стоит неподвижно, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью, и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно. Прыгая, вы переместитесь по полу на такое же расстояние, что и раньше, и не будете делать больших прыжков в сторону кормы, чем в сторону носа, на том основании, что корабль быстро движется, хотя за то время, как вы будете в воздухе, пол под вами будет двигаться в сторону, противоположную прыжку, и, бросая какую-нибудь вещь товарищу, вы не должны будете бросать ее с большей силой, когда он будет находиться на носу, а вы на корме, чем когда ваше взаимное положение будет обратным; капли, как и ранее, будут падать в нижний сосуд, и ни одна из них не упадет ближе к корме, хотя, пока капля находится в воздухе, корабль пройдет много пядей; рыбы в воде не с большим усилием будут плыть к передней, чем к задней части сосуда; настолько же проворно они бросятся к пище, положенной в какой угодно части сосуда; наконец, бабочки и мухи по-

прежнему будут летать во всех направлениях, и никогда не случится того, чтобы они собрались у стенки, обращенной к корме, как если бы устали, следуя за быстрым движением корабля, от которого они были совершенно обособлены, держась долгое время в воздухе; и если от капли эжженного ладана образуется немного дыма, то видно будет, как он восходит вверх и держится наподобие облачка, двигаясь безразлично в одну сторону не более, чем в другую. И причина согласованности всех этих явлений заключается в том, что движение корабля обще всем находящимся на нем предметам, так же как и воздуху; поэтому-то я и сказал, что вы должны находиться под палубой, так как, если бы вы были на ней, т.е. на открытом воздухе, не следующем за бегом корабля, то должны были бы видеть более или менее заметные различия в некоторых из названных явлений».

2.5. Падение точки вблизи поверхности Земли

Рассмотрим движение падающего в северном полушарии без начальной скорости тела по отношению к подвижной системе отсчета, связанной с вращающейся Землей. Сопротивлением воздуха пренебрежем.

Начало O подвижной системы $Oxyz$ (нижний индекс r опускаем) совместим с точкой поверхности Земли, лежащей на нормали к ее поверхности, проведенной из начального положения M_0 падающей точки M (рис.2.6).

Ось z направим через центр Земли в сторону, противоположную направлению силы \vec{F} притяжения Земли, ось x - по касательной к меридиану на юг, ось y - перпендикулярно плоскости меридиана xOz к востоку. Тогда начальные условия будут такими:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = H, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0$$

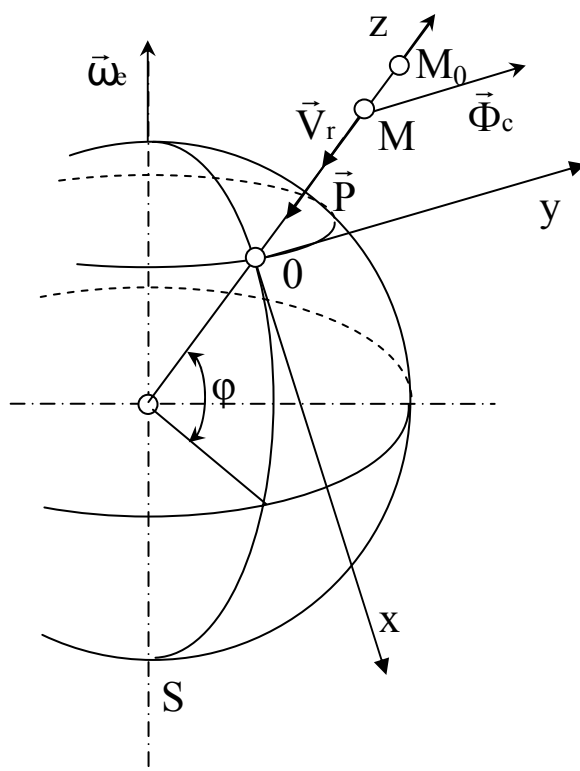


Рис.2.6

где H - высота падения точки.

Записываем дифференциальное уравнение (2.5) относительного движения точки:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c.$$

Это уравнение с учетом того, что равнодействующая силы притяжения к Земле и переносной силы инерции равна $\vec{P} = \vec{F} + \vec{\Phi}_e$, приобретает вид:

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{\Phi}_c. \quad (2.14)$$

Задачу будем решать при следующих допущениях:

- 1) сила \vec{P} направлена к центру Земли по оси z , т.е. отклонение \vec{P} от нормали к поверхности Земли не учитывается; $P=mg$.
- 2) относительная скорость точки направлена вдоль оси z к центру Земли и равна $v_r = |\dot{z}| = gt$.

Кориолисова сила инерции, равная

$$\Phi_c = 2m\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r) = 2m\omega_e gt \cos \varphi \quad (2.15)$$

направлена противоположно кориолисову ускорению \vec{a}_c , т.е. на восток - в сторону положительного направления оси y .

Записываем уравнение (2.14) в проекциях на оси выбранной системы отсчета:

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = \Phi_c, \quad m\ddot{z} = -P,$$

или, с учетом (2.15) и после сокращения на массу точки,

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 2\omega_e gt \cos \varphi, \quad \ddot{z} = -g. \quad (2.16)$$

Интегрируем первое из полученных уравнений:

$$\dot{x} = C_1, \quad x = C_1 t + C_2.$$

По начальным условиям $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Кинематическое уравнение движения точки в проекции на ось x получает вид: $x = 0$,

следовательно, точка движется только в плоскости yOz .

Интегрируем третье уравнение (2.16):

$$\dot{z} = -gt + C_3, \quad z = -\frac{gt^2}{2} + C_3t + C_4.$$

По начальным условиям $t_0 = 0$, $z_0 = H$, $\dot{z}_0 = 0$ находим постоянные интегрирования:

$$C_3 = 0, \quad C_4 = H,$$

следовательно, кинематическое уравнение движения точки в проекции на ось z выглядит так:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + H. \quad (2.17)$$

Интегрируем второе уравнение (2.16):

$$\dot{y} = \omega_e gt^2 \cos \varphi + C_5, \quad y = \frac{1}{3} \omega_e gt^3 \cos \varphi + C_5t + C_6.$$

По начальным условиям $t_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$ находим постоянные интегрирования:

$$C_5 = 0, \quad C_6 = 0.$$

Кинематическое уравнение движения точки вдоль оси y имеет вид:

$$y = \frac{1}{3} \omega_e gt^3 \cos \varphi. \quad (2.18)$$

Определяем из (2.17) при $z = 0$ момент t_1 падения точки на Землю:

$$\frac{gt_1}{2} = H, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставляя полученное значение t_1 в уравнение (2.18), получим координату точки приземления:

$$y_1 = \frac{2}{3} \omega_e \sqrt{\frac{2H^3}{g}} \cos \varphi. \quad (2.19)$$

Так как все величины, входящие в правую часть выражения (2.19), являются положительными, то $y_1 > 0$. Таким образом, падающее на Землю тело

отклоняется к востоку, и, следовательно, траекторией движения точки является не вертикаль M_0O , а некоторая кривая M_0M_1 (рис.2.7).

Зная высоту H и географическую широту φ места падения тела, можно по формуле (2.19) найти величину его отклонения к востоку. Так, на-

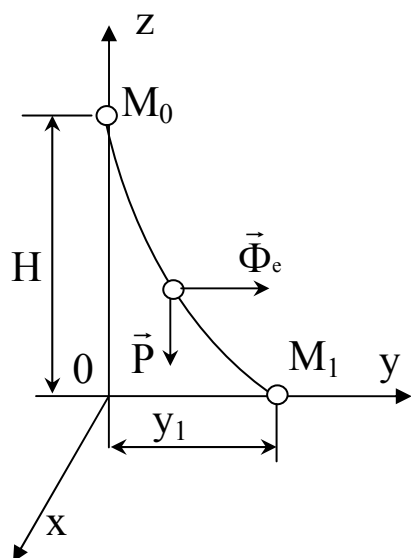


Рис.2.7

пример, на широте Москвы ($\varphi \approx 57^\circ$) тело, падающее с высоты $H = 100$ м, без учета сопротивления воздуха отклоняется к востоку на $y_1 = 1,1$ см.

Заметим, что тело, брошенное вертикально вверх, отклоняется от вертикали не на восток, а на запад, поскольку кориолисова сила инерции в этом случае направлена перпендикулярно плоскости меридиана к западу.

Остановимся на некоторых явлениях связанных с кориолисовой силой инерции.

У рек в северном полушарии правый берег обычно бывает крутым, а левый - пологим. Это происходит вследствие того, что кориолисова сила инерции на вращающейся Земле прижимает воду к правому берегу, и вода подмывает берег. Особенно сильно этот эффект проявляется у рек, текущих в меридиональном направлении. Так, например, правый (по направлению течения реки) берег Волги почти на всем её протяжении возвышенный, а левый - низменный.

У всех двухколейных железных дорог в северном полушарии сильнее изнашивается правый рельс каждой колеи (смотря по движению поезда), так как горизонтальная составляющая кориолисовой силы инерции прижимает колёса поезда к правому рельсу, вызывая тем самым дополнительное давление на правый рельс. На однопутных участках изнашивание правого и левого рельсов одинаковое, поскольку при движении поезда в прямом направлении кориолисова сила инерции давит на правый рельс, а при обратном движении поезда по той же колее - на противоположный рельс.

Ветры постоянного направления (пассаты), дующие в некоторых местах северного полушария, также отклоняются вправо, если смотреть по направлению ветра, что ведет к образованию громадных вихрей (циклонов) над поверхностью Земли.

Морские течения и движение льдов в Северном Ледовитом океане испытывают аналогичное воздействие кориолисовой силы инерции.

2.6. Решение задач

Задача 2.1. Определить период качаний математического маятника длиной ℓ , точка подвеса которого установлена на ползуне, движущемся вертикально вверх с ускорением \vec{a}_e .

Решение. Выбираем подвижную систему xOy , связанную с ползуном, как указано на рис.2.8. К маятнику M приложены: вес $\vec{P} = m\vec{g}$ и реакция \vec{N} нити. Так как система xOy , в которой происходят качания маятника, движется поступательно с ускорением \vec{a}_e , направленным вверх, то к маятнику следует приложить еще и переносную силу инерции, равную $\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e$ и направленную вниз. Так как подвижная система xOy перемещается поступательно, то кориолисова сила инерции равна нулю, и дифференциальное уравнение движения маятника в подвижной системе xOy имеет вид:

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e,$$

или в проекции на касательную к траектории движения точки M :

$$m \frac{dv_r}{dt} = -(P + \Phi_e) \sin \varphi_r = -m(g + a_e) \sin \varphi_r. \quad (2.20)$$

Сокращая на массу и преобразуя левую часть уравнения (2.20) аналогично задачи 1.2, получаем:

$$\ell \ddot{\varphi}_r = -(g + a_e) \sin \varphi_r,$$

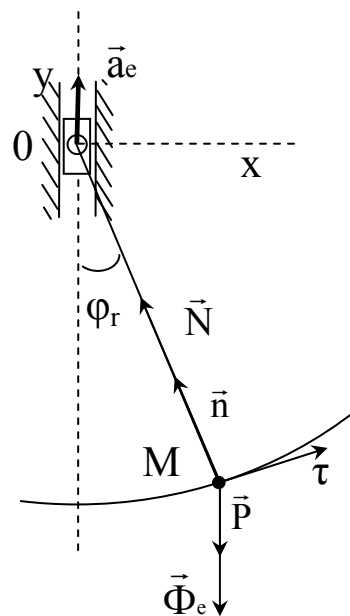


Рис.2.8

или, считая отклонения φ_r малыми ($\sin \varphi_r \approx \varphi_r$),

$$\ddot{\varphi}_r + \frac{g + a_e}{\ell} \varphi_r = 0. \quad (2.21)$$

Полученное дифференциальное уравнение аналогично уравнению (1.46) гармонических колебаний математического маятника, у которого

$$k^2 = (g + a_e) / \ell,$$

следовательно, искомый период колебаний маятника, точка подвеса которого движется вверх, равен

$$T = 2\pi / k = 2\pi \sqrt{\ell / (g + a_e)}. \quad (2.22)$$

Из формулы (2.22) видно, что при увеличении ускорения точки подвеса маятник будет качаться быстрее.

Задача 2.2. Определить период качаний математического маятника длиной ℓ , точка подвеса которого установлена на ползуне, движущемся вертикально вниз с ускорением $a_e < g$.

Решение. Отличие данной задачи от предыдущей заключается лишь в том, что переносная сила инерции направлена не вниз, а вверх. Вследствие этого дифференциальное уравнение (2.21) несколько изменится:

$$\ddot{\varphi}_r + \frac{g - a_e}{\ell} \varphi_r = 0,$$

и период качаний маятника будет равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g - a_e}}.$$

Задача 2.3. Определить период качаний математического маятника длиной ℓ , точка подвеса которого установлена на ползуне, движущемся вертикально вниз с ускорением $\vec{a}_e = \vec{g}$.

Решение. При $a_e = g$ нить не препятствует свободному падению точки М, (реакция нити равна нулю), а потому колебаний маятника не происходит ($T = \infty$).

Задача 2.4. Определить период качаний математического маятника длиной ℓ , точка подвеса которого установлена на ползуне, движущемся вертикально вниз с ускорением $\vec{a}_e > \vec{g}$.

Решение. При $\vec{a}_e > \vec{g}$ маятник будет совершать колебания в верхней

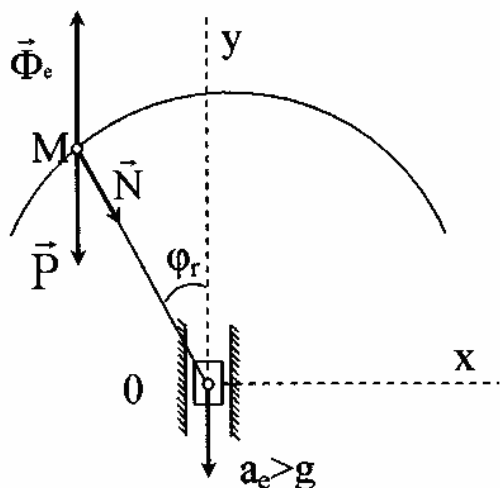


Рис.2.9

полуплоскости, поскольку переносная сила инерции, направленная вверх (рис.2.9), окажется больше веса маятника.

Дифференциальное уравнение относительного движения маятника в этом случае выглядит так:

$$\ddot{\phi}_r + \frac{a_e - g}{\ell} \phi_r = 0,$$

и период качаний маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{a_e - g}}.$$

2.7. Контрольные вопросы

- 2.1. На какой широте вес тела имеет наибольшее значение?
- 2.2. В каком направлении отклоняется от вертикали точка, падающая на Землю без начальной скорости в южном полушарии ?
- 2.3. В каком направлении отклоняется точка, брошенная по вертикали вверх без начальной скорости в северном полушарии ?
- 2.4. Чему равна переносная сила инерции ?
- 2.5. Чему равна кориолисова сила инерции?
- 2.6. Является ли система отсчета, связанная с Землей, инерциальной?

ДИНАМИКА

СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

ГЛАВА 3. ЦЕНТР МАСС. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

3.1. Центр масс механической системы

Механической системой называется совокупность материальных точек (или тел), связанных между собой силами взаимодействия. В механической системе положение или движение одной точки (или тела) зависит от положения и движения остальных точек (или тел) этой системы.

Классическим примером механической системы служит солнечная система, в которой тела связаны силами взаимного притяжения. Другим примером является станок, в котором тела связаны друг с другом посредством различных соединений, передающих усилия. Совокупность тел, между которыми нет сил взаимодействия, механическую систему не образуют. Так, например, группа самолетов, выполняющая фигуру высшего пилотажа, механической системой не является.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Движение системы зависит не только от действующих сил, но и от ее суммарной массы и ее распределения. *Масса M системы равна сумме масс всех точек или тел, образующих систему:*

$$M = \sum m_i.$$

Геометрическая точка C , положение которой относительно начала выбранной системы координат определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (3.1)$$

где \vec{r}_i - радиусы-векторы точек ($i = 1, \dots, n$), образующих систему, называется *центром масс или центром инерции системы.*

Если в качестве системы материальных точек выступает твердое тело, то положение центра масс такой системы совпадает с положением центра тяжести этого тела. Однако, понятия «центр масс» и «центр тяжести»

не являются тождественными. Понятие о центре тяжести как о точке, через которую проходит равнодействующая сил тяжести, имеет смысл только для твердого тела, находящегося в поле сил тяжести. Понятие же о центре масс имеет смысл для любой системы точек или тел независимо от того, находится ли эта система под действием каких-нибудь сил или нет. Если представить себе систему затвердевшей и образующей одно твердое тело, то центр тяжести этого тела совпадает с центром масс системы.

Напомним, что если однородное твердое тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр масс этого тела будет лежать в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

В том случае, когда начало некоторой системы координат $x'y'z'$ совпадает с центром тяжести тела, радиус-вектор центра масс в этой системе равен нулю:

$$\vec{r}'_c = \frac{\sum m_i \vec{r}'_i}{M} = 0. \quad (3.2)$$

3.2. Осевой момент инерции тела

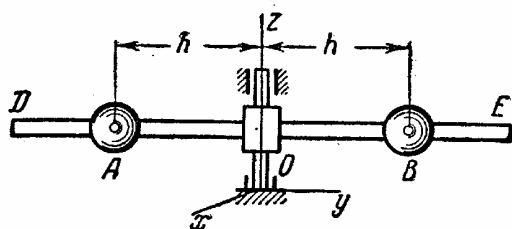


Рис.3.1

Положение центра масс не полностью характеризует распределение масс системы. Например (рис.3.1), если расстояния h от оси Oz каждого из одинаковых шаров A и B увеличить на одну и ту же вели-

чину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это отразится на движении системы (вращение вокруг оси Oz при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

Для характеристики распределения масс системы (тела) относительно некоторой оси z (рис.3.2) служит *осевой момент инерции, равный сумме произведений масс всех точек системы (тела) на квадраты их расстояний h_i до этой оси:*

$$J_z = \sum m_i h_i^2 \quad (3.3)$$

или

$$J_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Из определения следует, что осевой момент инерции относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Если система материальных точек представляет собой однородное твердое тело плотности ρ , то его следует рассматривать как множество частиц с массами $\Delta m_i = \rho \Delta V_i$, где ΔV_i - объем i -ой

частицы (для объемного тела), или $\Delta m_i = \rho \Delta S_i$ (для материальной поверхности), или $\Delta m_i = \rho \Delta \ell_i$ (для материальной кривой). Устремляя затем размеры частиц к нулю, а индекс i - к бесконечности, в пределе соответственно получаем:

$$J_z = \rho \int_{(V)} h^2 dV, \quad J_z = \rho \int_{(S)} h^2 ds, \quad J_z = \rho \int_{(\ell)} h^2 d\ell. \quad (3.4)$$

Покажем на примерах как вычисляются осевые моменты инерции тел.

1. Момент инерции тонкого однородного стержня длиной ℓ и массой M относительно оси, проходящей через его конец, если площадь поперечного сечения стержня равна S .

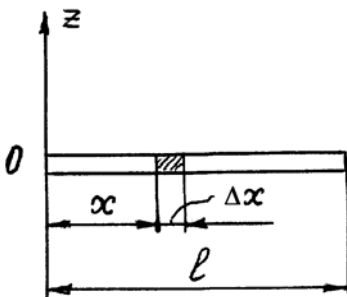


Рис.3.3

Выделим элемент длины Δx массы $\Delta m = \rho S \Delta x$, лежащий на расстоянии x от оси Oz , перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (рис.3.3).

Момент инерции стержня относительно оси Oz согласно формуле (3.4) равен:

$$J_{oz} = \int_0^{\ell} x^2 dm = \int_0^{\ell} x^2 S \rho dx = S \rho \frac{\ell^3}{3},$$

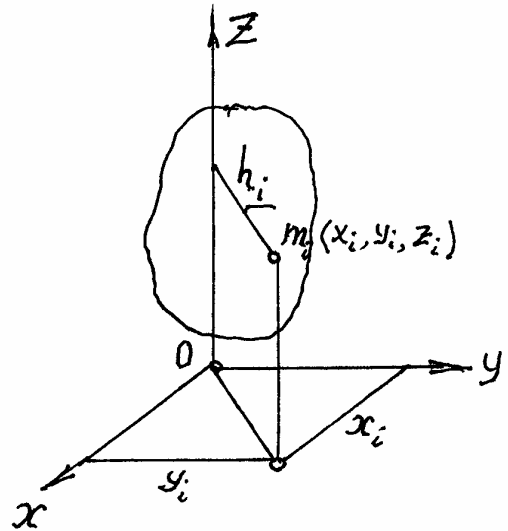


Рис.3.2

или, с учетом того, что плотность стержня равна $\rho = M/S\ell$, получаем

$$J_{oz} = \frac{M\ell^2}{3} \quad (3.5)$$

2. Момент инерции однородного диска радиуса R и массы M относительно оси симметрии (рис.3.4).

Выделим элемент площади $\Delta s = r\Delta\varphi\Delta r h$ (h – толщина диска) на расстоянии r от оси Cz , перпендикулярной диску, относительно которой будем определять осевой момент инерции диска. Масса элемента площади равна $\Delta m = \rho\Delta s h = \rho r\Delta\varphi\Delta r h$. При этом из (3.4) получаем:

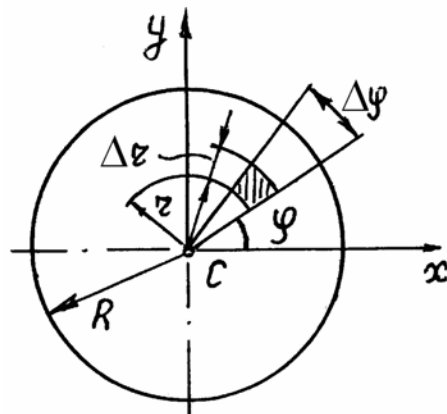


Рис.3.4

$$J_{Cz} = \int_{(S)} r^2 dm = \rho h \int_{(S)} r^2 ds = 4\rho h \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^3 dr d\varphi = \rho \frac{\pi R^4 h}{2}.$$

Учитывая, что плотность диска $\rho = M/(Sh) = M/(\pi R^2 h)$, получаем формулу для вычисления момента инерции диска относительно оси симметрии, перпендикулярной плоскости диска:

$$J_{Cz} = MR^2/2. \quad (3.6)$$

Осевые моменты инерции для некоторых тел приведены в табл.3.1.

3.3. Радиус инерции

При решении задач часто пользуются понятием радиуса инерции. Радиусом инерции тела относительно оси z называется величина $\rho_{\text{и}}$, определяемая равенством:

$$J_z = M\rho_{\text{и}}^2, \quad (3.7)$$

где $\rho_{и}$ - расстояние от оси z до той точки (рис.3.5), в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела. Значение радиуса инерции определяется экспериментальным путем.

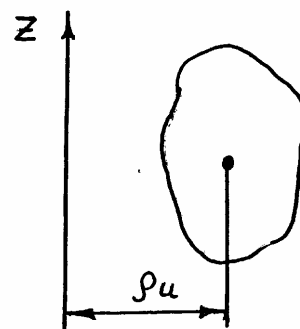


Рис.3.5

3.4. Моменты инерции тела относительно параллельных осей

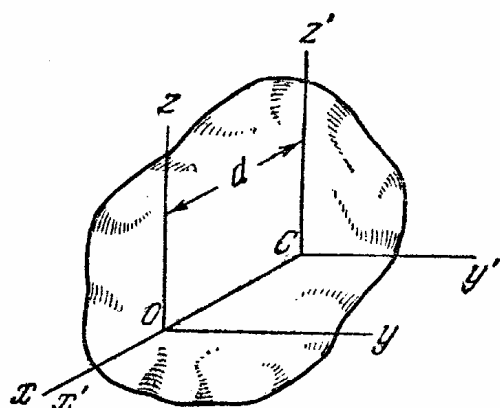


Рис.3.6

Сведения, изложенные ниже, играют важную роль в динамике. Однако выводы приведенных соотношений в данном пособии опущены, поскольку не являются концептуальными. Желающие могут найти их в более обширных курсах теоретической механики.

Между моментами инерции тела относительно двух систем параллельных осей x, y, z и x', y', z' (рис.3.6), одна из которых имеет начало в точке

O , а другая - в центре C тяжести тела, имеется связь, выражающая *теорему Штейнера-Гюйгенса*:

$$J_{oz} = J_{cz'} + M \cdot (OC)^2. \quad (3.8)$$

Здесь M - масса тела; J_{oz} - момент инерции тела относительно оси Oz ; $J_{cz'}$ - момент инерции тела относительно оси Cz' ; $OC = d$ - расстояние между осями Oz и Cz' .

Из формулы (3.8) следует, что осевой момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести, имеет наименьшую величину.

3.5. Центробежные моменты инерции

Осевой момент инерции тоже не характеризует распределение масс системы полностью.

Например, если стержень DE на рис 3.1 повернуть в плоскости Oyz так, чтобы угол между ним и осью Oz не был прямым, а расстояния h шаров A и B от оси Oz сохранить (рис.3.7), то ни положение центра масс, ни момент инерции относительно оси Oz не изменится. Между тем распределение масс станет другим (симметрия относительно оси Oz нарушится) и это проявится в возникновении дополнительных давлений на подшипники в случае вращения системы относительно оси Oz.

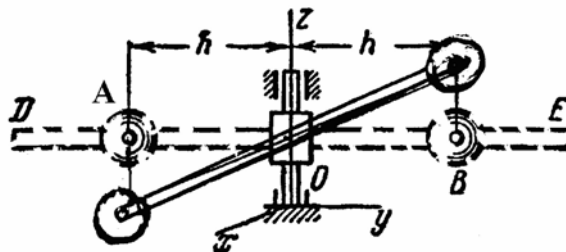


Рис.3.7

В качестве характеристик, учитывающих асимметрию в распределении масс системы, вводят так называемые центробежные моменты инерции. По отношению к координатным осям декартовой системы отсчета *центробежными моментами инерции называются величины J_{xy} , J_{yz} , J_{xz} , равные*

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i, \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i, \quad J_{xz} = \sum m_i x_i z_i, \quad (3.9)$$

где m_i - массы точек, x_i, y_i, z_i - их координаты. Очевидно, что $J_{xy} = J_{yx}$ и т.д.

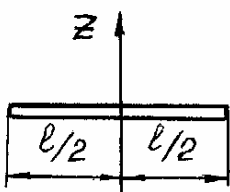
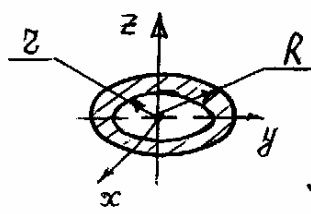
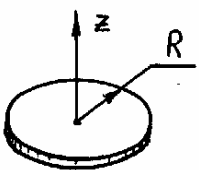
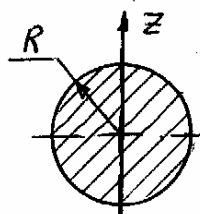
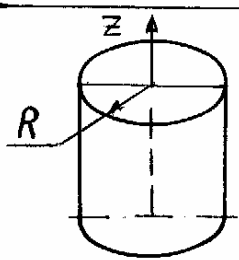
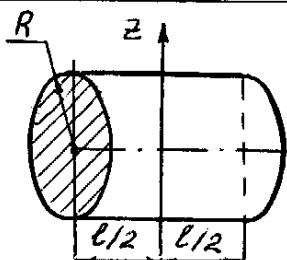
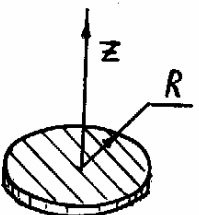
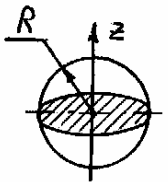
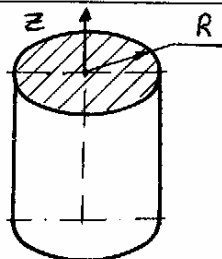
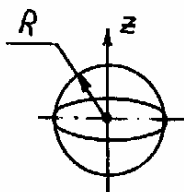
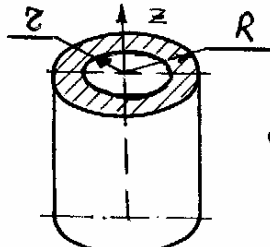
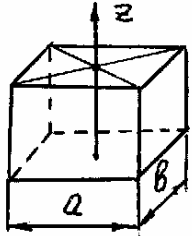
Для сплошных тел формулы (3.9) принимают вид:

$$J_{xy} = \int_{(V)} \rho x y dV \quad \text{и т.д.}, \quad (3.10)$$

где ρ - плотность, V - объем тела.

В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут быть не только положительными, но и отрицательными и равными нулю.

Осевые моменты инерции

 $J_z = \frac{M l^2}{12}$	 $J_z = \frac{M(R^2 + z^2)}{2}$
 $J_z = MR^2$	 $J_z = \frac{MR^2}{4}$
 $J_z = MR^2$	 $J_z = \frac{M(l^2 + 3R^2)}{12}$
 $J_z = \frac{MR^2}{2}$	 $J_z = \frac{2}{5} MR^2$
 $J_z = \frac{MR^2}{2}$	 $J_z = \frac{2MR^2}{3}$
 $J_z = \frac{M(R^2 + z^2)}{2}$	 $J_z = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$

3.6. Главные оси инерции

Если координатная ось Oz является осью материальной симметрии тела, то следующие два центробежных момента обращаются в нуль:

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0. \quad (3.11)$$

Ось Oz , для которой центробежные моменты инерции J_{xz} , J_{yz} , содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела для точки O .

Если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции для любой своей точки.

Если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки O , в которой ось пересекает плоскость симметрии.

Если все центробежные моменты относительно координатных осей равны нулю, т.е.

$$J_{xz} = 0, \quad J_{xy} = 0, \quad J_{yz} = 0, \quad (3.12)$$

то каждая из координатных осей является главной осью инерции тела для точки O (начала координат).

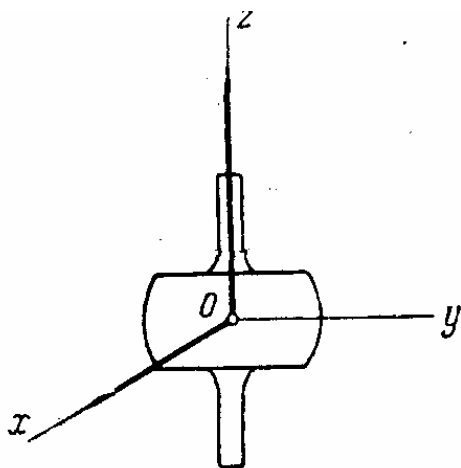


Рис.3.8

Например, на рис.3.8 координатные оси x , y , z являются главными осями инерции тела для точки O , причем ось z - как ось симметрии, а оси x и y - как оси, перпендикулярные плоскостям симметрии тела.

Главные оси инерции, построенные для центра масс, называют *главными центральными осями инерции тела*.

Можно доказать, что в любой точке *какого угодно тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, являющиеся главными осями инерции тела для этой точки*. Определение ориентации этих осей в выбранной системе отсчета представляет собой отдельную задачу, которая в данном пособии не рассматривается.

3.7. Контрольные вопросы

1. Что такое центр масс механической системы?
2. В чем сходство и различие понятий центра масс и центра тяжести физического тела.
3. Как Вы понимаете выражение «однородное материальное тело».
4. Где располагаются центры масс следующих однородных материальных тел: круга, прямоугольника, треугольника?
5. Что такое осевой момент инерции?
6. Что такое центробежные моменты инерции тела?
7. Что такое радиус инерции тела? Как он определяется?
8. Приведите примеры формул для вычисления осевых моментов инерции следующих однородных материальных тел: круга, прямоугольника, сплошного цилиндра, тонкостенного цилиндра, тонкого кольца, тонкого стержня.
9. В каких случаях центробежные моменты инерции тела равны нулю?
10. Что такое главные и главные центральные оси инерции тела?

ГЛАВА 4. МЕРЫ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек

Силы, действующие на точки механической системы, делятся на *внешние и внутренние*. Напомним, что *внешними* считаются силы, с которыми точки или тела, не входящие в рассматриваемую механическую систему, действуют на точки или тела, входящие в нее. Внешние силы будем снабжать верхним индексом "e".

Внутренние силы - это силы, с которыми точки или тела одной и той же механической системы действуют на выделенную точку или тело этой же системы. Внутренние силы будем снабжать верхним индексом "i" (индексы e и i от начальных букв французских слов *exterieur* - внешний и *interieur* - внутренний).

Внешние и внутренние силы могут быть как активными, так и силами реакций.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. На произвольную точку i массой m_i этой системы действует равнодействующая \vec{F}_i^e всех внешних сил и равнодействующая \vec{F}_i^i всех внутренних сил. Дифференциальное уравнение движения точки i имеет вид:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i.$$

Аналогичным образом выглядят дифференциальные уравнения для всех точек этой системы:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ &\dots\dots\dots \\ m_i \vec{a}_i &= \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i, \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Эти уравнения, из которых путем интегрирования можно определить закон движения каждой точки системы, называются *дифференциальными уравнениями движения механической системы*.

Задача об интегрировании дифференциальных уравнений движения даже в случае одной точки вызывает большие трудности (см., например, задачу 1.4), а в случае системы материальных точек аналитического решения вообще может не оказаться. В тех задачах, в которых всё-таки необходимо найти закон движения отдельных точек, обычно прибегают к численному решению задачи. В других задачах оказывается достаточным определить изменение лишь некоторых интегральных параметров движения механической системы, называемых *мерами механического движения*.

Мерами движения механической системы являются количество движения, момент количества движения (кинетический момент) и кинетическая энергия.

Изменение мер механического движения находят в зависимости от *суммарных мер действия сил*, к которым относятся *главный вектор и главный момент приложенных сил и работа сил*.

Взаимосвязь между изменением мер движения и суммарными мерами действия сил может быть получена из так называемых общих теорем динамики.

В данной главе рассматриваются меры движения, а в следующей - общие теоремы динамики.

4.2. Количество движения материальной точки и системы материальных точек

Количеством движения произвольной материальной точки i механической системы называется векторная величина, равная

$$\vec{k}_i = m_i \vec{v}_i. \quad (4.2)$$

Здесь и в дальнейшем i -ая материальная точка системы и масса этой точки обозначаются одним и тем же символом m_i . Вектор \vec{k}_i на-

правлен так же, как и скорость \vec{v}_i точки, т.е. по касательной к траектории (рис.4.1).

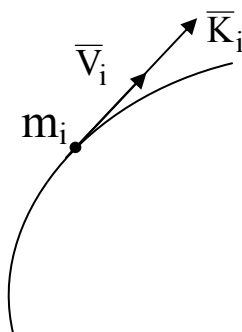


Рис.4.1

Количеством движения механической системы (или главным вектором количеств движения) называется вектор \vec{K} , равный геометрической сумме векторов количеств движения всех материальных точек системы:

$$\vec{K} = \sum \vec{k}_i = \sum m_i \vec{v}_i. \quad (4.3)$$

Для конкретизации правой части записанной формулы воспользуемся выражением радиус-вектора центра масс механической системы:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (4.4)$$

где $M = \sum m_i$ - масса всей системы, и продифференцируем это выражение по времени:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M},$$

или

$$\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_c. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.3), получаем расчетную формулу для количества движения механической системы:

$$\vec{K} = M \vec{v}_c. \quad (4.6)$$

Таким образом, количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость центра масс.

Формула (4.6) справедлива для любого вида механической системы (в том числе и для твердого тела) и при любом характере её движения.

Как видно из (4.6), количество движения - это векторная мера движения.

Пример 4.1. Цилиндр вращается вокруг оси, проходящей через его центр тяжести - точку С (рис.4.2). Определить количество движения цилиндра.

Решение. Так как центр тяжести цилиндра лежит на оси вращения, то скорость точки С равна нулю и, следовательно, согласно (4.6),

$$\vec{K} = 0. \quad (4.7)$$

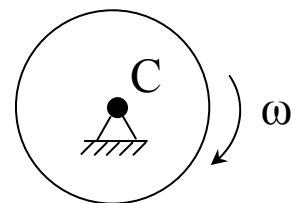


Рис.4.2

Пример 4.2. Колесо весом Р катится по рельсу со скоростью \vec{V}_C (рис.4.3). Определить количество движения колеса.

Решение. Колесо совершает плоскопараллельное движение, т.е. перемещается поступательно с центром С и вращается вокруг центра С с угловой скоростью ω . В соответствии с (4.6) количество движения колеса равно $\vec{K} = P\vec{V}_C/g$.

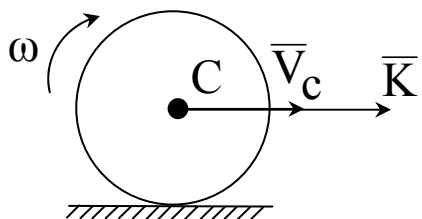


Рис.4.3

Из приведенных примеров видно, что количество движения не характеризует вращательную часть движения вокруг оси, проходящей через центр тяжести тела (вращение с угловой скоростью ω ни в первом, ни во втором примере никак не сказалось на величине количества движения).

Таким образом, количество движения является мерой поступательного движения системы, если она движется как единое целое, т.е. подобно твердому телу.

4.3. Момент количества движения материальной точки и кинетический момент системы материальных точек

Моментом $\vec{\ell}_{0i}$ количества движения материальной точки m_i относительно некоторого центра О называется векторное произведение ра-

диус-вектора \vec{r}_i , направленного из центра O в точку m_i , на вектор \vec{k}_i количества движения материальной точки:

$$\vec{\ell}_{0i} = \vec{r}_i \times \vec{k}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (4.8)$$

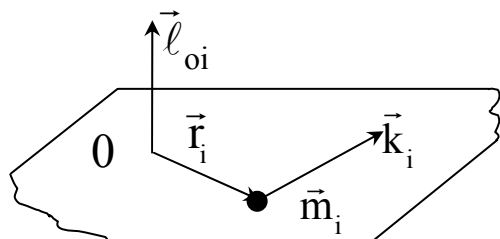


Рис.4.4

Вычисляется момент $\vec{\ell}_{0i}$ так же, как и момент силы, причем вектор \vec{k}_i количества движения считается приложенным к движущейся точке m_i .

Вектор $\vec{\ell}_{0i}$ имеет начало в точке O и направлен перпендикулярно плоскости, содержащей точку O и вектор \vec{k}_i (рис.4.4).

Главным моментом количеств движения (или кинетическим моментом) механической системы относительно данного центра O называется вектор \vec{L}_0 , равный геометрической сумме векторов моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{\ell}_{0i} = \sum \vec{r}_i \times \vec{k}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i. \quad (4.9)$$

4.4. Вычисление кинетического момента твердого тела в различных случаях движения

1. Тело массой M движется п о с т у п а т е л ь н о со скоростью \vec{v}_C (рис.4.5). Вычислим кинетический момент этого тела относительно неподвижной точки O .

Так как при поступательном движении $\vec{v}_i = \vec{v}_C$, то формула (4.9) дает:

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \left(\sum m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v}_C.$$

Выражение, стоящее в скобках, согласно (4.4), равно $M\vec{r}_C$, следовательно,

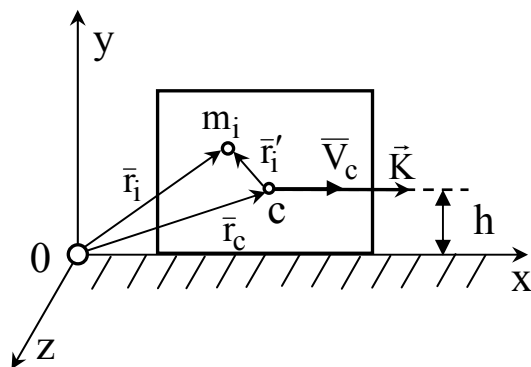


Рис.4.5

$$\vec{L}_0 = M\vec{r}_c \times \vec{v}_c = \vec{r}_c \times M\vec{v}_c$$

или, учитывая, что $M\vec{v}_c = \vec{K}$,

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{K}. \quad (4.10)$$

Полученная формула позволяет представить кинетический момент поступательно движущегося тела относительно неподвижного центра О как момент относительно этого центра

вектора \vec{K} количества движения тела, *приложенного в центре тяжести тела.*

Если нужно вычислить кинетический момент не относительно точки, а относительно некоторой оси, например оси z (рис.4.5), то его можно рассматривать или как проекцию L_z вектора \vec{L}_0 на ось z или как момент вектора \vec{K} относительно этой оси. В том и другом случае получаем:

$$L_z = \pm K \cdot h, \quad (4.11)$$

где h - плечо вектора количества движения, приложенного в центре тяжести тела, относительно оси z. Знак плюс в формуле (4.11) берется в том случае, когда момент вектора \vec{K} относительно оси z направлен против часовой стрелки. В противном случае берется знак минус.

Кинетический момент поступательно движущегося твердого тела относительно центра тяжести равен нулю, т.е. $\vec{L}_c = 0$, что следует из (4.10), поскольку в этом случае $\vec{r}_c = 0$.

2. Тело вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси z. Нужно определить кинетический момент относительно этой оси.

Запишем относительно оси z момент количества движения точки m_i , имеющей скорость $v_i = \omega r_i$ (рис.4.6):

$$\ell_{zi} = r_i \cdot m_i v_i = r_i \cdot m_i \omega r_i = \omega m_i r_i^2, \quad (4.12)$$

где r_i - расстояние от точки m_i до оси вращения.

Чтобы определить кинетический момент тела относительно оси вращения, достаточно просуммировать ℓ_{zi} по всем точкам тела:

$$L_z = \sum \ell_{zi} = \sum \omega m_i r_i^2 = \omega \sum m_i r_i^2 .$$

Сумма, стоящая в правой части полученного выражения, согласно (3.3), является осевым моментом J_z инерции твердого тела, следовательно,

$$L_z = \pm \omega J_z . \quad (4.13)$$

Знак плюс берется в том случае, если с конца оси z вращение тела видится против часовой стрелки.

Вычислим теперь величины L_x и L_y . Кинетический момент тела относительно оси x равен сумме моментов количеств движения всех точек тела относительно этой оси. Для вычисления этого момента разложим вектор количества движения точки m_i на две составляющие $m_i \vec{V}_{ix} \parallel O_x$ и $m_i \vec{V}_{iy} \parallel O_y$. Найдем момент составляющей $m_i \vec{V}_{iy}$ относительно оси x (момент второй составляющей равен нулю). Принимая во внимание, что $V_{iy} = V_i \cdot \cos \alpha_i$, где α_i - угол между \vec{V}_i и положительным направлением оси O_y , имеем

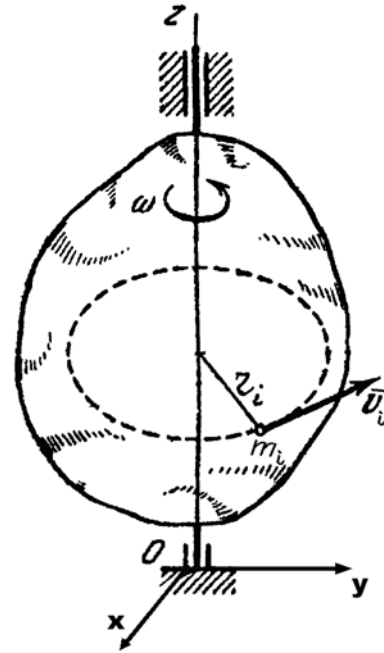


Рис.4.6

$$L_x = \sum \ell_{xi} = -\sum m_i v_i \cos \alpha_i z_i = -\sum m_i \omega r_i \cos \alpha_i z_i = -\omega \sum m_i x_i z_i ,$$

где $\sum m_i x_i z_i$ - центробежный момент инерции J_{xz} .

Аналогичным образом подсчитывается кинетический момент тела относительно оси y . Окончательно получаем:

$$L_x = -\omega J_{xz} , \quad L_y = -\omega J_{yz} ,$$

следовательно,

$$\vec{L}_0 = -\omega (J_{xz} \vec{i} + J_{yz} \vec{j} - J_z \vec{k}) . \quad (4.14)$$

Как видно из (4.14), кинетический момент вращающегося тела не направлен по оси вращения. Но если ось z вращения будет главной осью инерции тела в точке O (в частности, осью симметрии), то $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и кинетический момент тела относительно точки O будет направлен по оси вращения и равен

$$\vec{L}_0 = J_z \vec{\omega} . \quad (4.15)$$

В некоторых задачах требуется подсчитать кинетический момент не относительно оси $O'z$ вращения тела (рис.4.7), а относительно оси Oz , ей параллельной. В этом случае следует вычислить кинетический момент относительно точки O , лежащей в плоскости, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку O' .

Используя формулу (4.9) и учитывая, что $\vec{r}_i = \vec{r}_{0'} + \vec{r}_i'$, получаем:

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_{0'} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i . \quad (4.16)$$

Поскольку вектор $\vec{r}_{0'}$ не зависит от индекса суммирования, а $\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_c$, первое слагаемое правой части (4.16) преобразуется так:

$$\sum \vec{r}_{0'} \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_{0'} \times M \vec{v}_c = \vec{r}_{0'} \times \vec{K} . \quad (4.17)$$

Второе слагаемое правой части выражения (4.16) с учетом, что $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$, приводится к виду:

$$\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i = \sum (m_i \vec{r}_i' \times \vec{\omega} \times \vec{r}_i') = \vec{\omega} \sum m_i (\vec{r}_i' \cdot \vec{r}_i') - \sum m_i \vec{r}_i' (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i') ,$$

Здесь использована известная из математики формула $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

или, поскольку $(\vec{r}_i' \cdot \vec{r}_i') = (r_i')^2$, $(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i') = 0$,

$$\sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i = \vec{\omega} J_{0'z} . \quad (4.18)$$

Подставляя (4.17) и (4.18) в (4.16), получаем

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_{0'} \times \vec{K} + \vec{\omega} J_{0'z} . \quad (4.19)$$

Первое слагаемое в полученной формуле можно интерпретировать как момент относительно точки O вектора количества движения, прило-

женного в точке O' , а второе - как кинетический момент тела относительно точки O' .

Из формулы (4.19) следует, что кинетический момент вращающегося тела относительно оси Oz равен:

$$L_{0z} = \pm K \cdot h \pm \omega \cdot J_{O'z}, \quad (4.20)$$

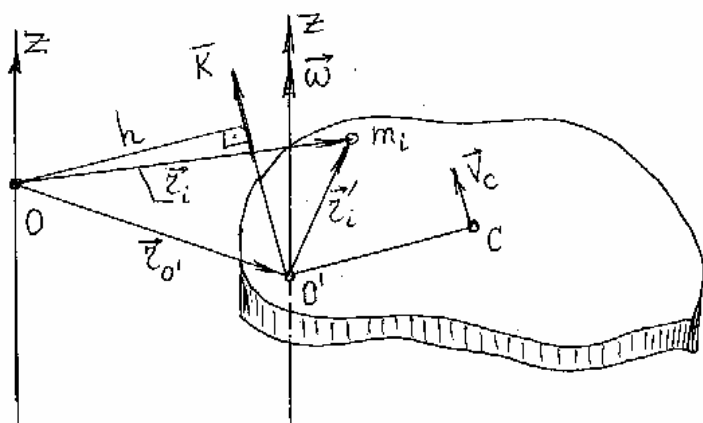


Рис.4.7

где h - плечо вектора \vec{K} количества движения тела, приложенного в точке O' , относительно оси z (рис.4.7). Знак плюс перед первым слагаемым в (4.20) берется в том случае, когда момент вектора \vec{K} относительно точки O совпадает с положительным направлением оси Oz , а перед

вторым - когда вектор $\vec{\omega}$ направлен в ту же сторону, что и ось Oz .

3. Тело совершает плоскопараллельное движение, т.е. движется поступательно вместе с центром тяжести со скоростью v_c и вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр тяжести (рис.4.8).

Требуется вычислить кинетический момент этого тела относительно неподвижного центра O .

Из рис.4.8 видно, что $\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i'$, при этом по формуле (4.9) имеем:

$$\vec{L}_0 = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i, \quad (4.21)$$

где \vec{r}_c - радиус вектор центра тяжести в неподвижной системе отсчета с началом в точке O , \vec{r}_i' - радиус-вектор точки m_i в подвижной системе, связанной с телом, начало которой совпадает с точкой C - центром тяжести тела.

Первое слагаемое правой части (4.21) с учетом (4.5) преобразуется к виду:

$$\sum \vec{r}_c \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_c \times \sum m_i \vec{v}_i = \vec{r}_c \times \vec{K}. \quad (4.22)$$

Второе слагаемое является кинетическим моментом тела относительно точки С, т.е.

$\sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{L}_c$. Подставим в него выражение для скорости точки m_i :

$$\sum \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}'_i \times m_i (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = (\sum m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v}_c + \sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{\omega} \times \vec{r}'_i. \quad (4.23)$$

Выражение, стоящее справа в скобках, равно нулю, поскольку $\sum m_i \vec{r}'_i = M \cdot \vec{r}'_c$, где \vec{r}'_c - радиус-вектор точки С относительно самой себя.

Раскрывая двойное векторное произведение, имеем:

$$\sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{\omega} \times \vec{r}'_i = \vec{\omega} \sum m_i (\vec{r}'_i \cdot \vec{r}'_i) - \sum m_i \vec{r}'_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i). \quad (4.23a)$$

Учитывая, что $\sum m_i (\vec{r}'_i \cdot \vec{r}'_i) = \sum m_i (\vec{r}'_i)^2 = J_{cz}$, а $(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_i) = 0$, так как $\vec{\omega} \perp \vec{r}'_i$, получаем выражение для кинетического момента относительно центра тяжести:

$$\vec{L}_c = \vec{\omega} J_{cz}. \quad (4.24)$$

Учитывая (4.22) – (4.24), получаем выражение для кинетического момента относительно неподвижного центра О:

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{K} + \vec{\omega} J_{cz}. \quad (4.25)$$

Таким образом, при плоскопараллельном движении кинетический момент тела относительно некоторой неподвижной точки О равен геометрической сумме двух слагаемых: момента количества движения \vec{K} , *приложенного в центре тяжести*, относительно точки О и кинетического момента тела в его вращательном движении вокруг центра тяжести.

Если нужно вычислить кинетический момент тела, находящегося в плоскопараллельном движении, относительно оси z, проходящей через точку О (рис.4.8), то можно воспользоваться формулой, следующей из (4.25):

$$L_z = \pm K h \pm \omega J_{cz}, \quad (4.26)$$

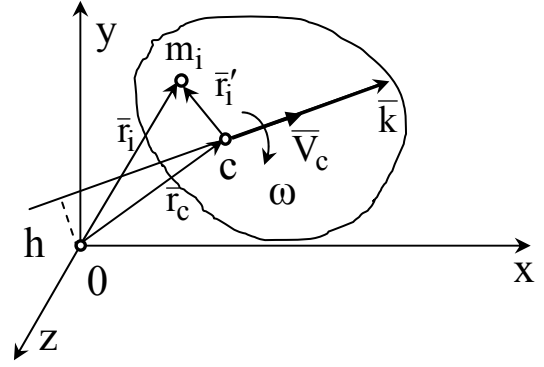


Рис.4.8

где h - плечо вектора количества движения тела относительно оси Oz .
Правило выбора знаков в формуле (4.26) такое же, как и выше.

4. Тело совершает произвольное движение, т. е. движется поступательно со скоростью полюса и вращается вокруг оси, проходящей через полюс. За полюс примем центр тяжести тела и определим кинетический момент тела относительно

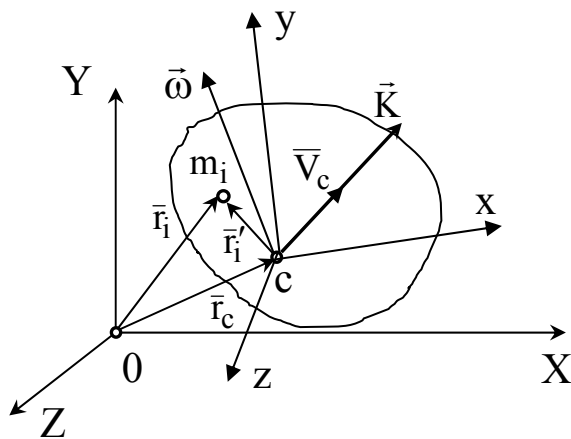


Рис.4.9

неподвижной точки O (рис.4.9).

Вывод выражения для \vec{L}_0 в этом случае вплоть до формулы (4.23а) одинаков с выводом для случая плоскопараллельного движения. Поэтому, не повторяя выкладок, запишем для \vec{L}_0 выражение, полученное в предыдущем пункте и справедливое

для рассматриваемого случая:

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_c \times \vec{K} + \vec{L}_C. \quad (4.27)$$

В общем случае движения тела, в отличие от плоскопараллельного движения, вектор $\vec{\omega}$ угловой скорости не перпендикулярен вектору \vec{r}_i' .

В связи с этим выражение для \vec{L}_C отличается от (4.24):

$$\begin{aligned} \vec{L}_C &= \vec{\omega} \sum m_i (\vec{r}_i' \cdot \vec{r}_i') - \sum m_i \vec{r}_i' (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i') = \\ &= \vec{\omega} \sum m_i ((x_i)^2 + (y_i)^2 + (z_i)^2) - \sum m_i \vec{r}_i' (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где x_i, y_i, z_i - координаты вектора \vec{r}_i' в подвижной системе C_{xyz} , связанной с телом.

Проектируя вектор \vec{L}_C на ось x , имеем:

$$\begin{aligned} L_{Cx} &= \omega_x \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum m_i x_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i) = \\ &= \omega_x \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum m_i x_i y_i - \omega_z \sum m_i x_i z_i \end{aligned}$$

или, используя формулы для моментов инерции,

$$L_{Cx} = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z . \quad (4.29)$$

Аналогично при проектировании на оси y и z получаем

$$L_{Cy} = J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z - J_{yx} \omega_x ,$$

$$L_{Cz} = J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y ,$$

5. В случае вращения твердого тела вокруг неподвижной точки O начало подвижной системы берется в этой точке. Тогда, используя рассуждения подобные пункту 4, можно доказать, что для проекций вектора \vec{L}_0 на эти оси L_{0x}, L_{0y}, L_{0z} имеют место такие же формулы, как 4.29.

В частности, если координатные оси являются главными осями инерции тела в неподвижной точке O , то:

$$\vec{L}_0 = J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k} . \quad (4.30)$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси Oz ($\omega_x = \omega_y = 0$) формулы для L_{0x}, L_{0y}, L_{0z} дают такое выражение для кинетического момента относительно точки O , лежащей на оси вращения:

$$\vec{L}_0 = -J_{xz} \omega_z \vec{i} - J_{yz} \omega_z \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k} . \quad (4.31)$$

Как видно из (4.31), вектор кинетического момента тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, не совпадает по направлению с осью вращения. Совпадение происходит только в том случае, когда ось вращения является главной осью инерции тела в точке O , т.е. при $J_{xz} = J_{yz} = 0$:

$$\vec{L}_0 = J_z \omega_z \vec{k} . \quad (4.32)$$

4.5. Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек

Кинетической энергией точки массы m_i называется скалярная величина, равная

$$E_{ki} = \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \frac{m_i v_i^2}{2} . \quad (4.33)$$

Кинетической энергией системы материальных точек называется скалярная величина E_k , равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$E_k = \sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (4.34)$$

Главное отличие кинетической энергии от двух других мер механического движения (количества движения и кинетического момента) состоит в том, что величина E_k является величиной скалярной и притом существенно положительной.

Если механическая система состоит из нескольких тел, то кинетическая энергия системы равна алгебраической сумме кинетических энергий всех тел.

Получим формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела в различных случаях движения.

1. Тело массой M движется *п о с т у п а т е л ь н о* со скоростью \vec{v} . При этом скорости всех точек одинаковы и равны \vec{v} , следовательно,

$$E_k = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i = \frac{Mv^2}{2}. \quad (4.35)$$

2. Тело *в р а щ а е т с я* вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω . Скорость произвольной точки тела равна $v_i = \omega r_i$, где r_i - расстояние от точки до оси вращения (рис.4.6). Кинетическая энергия тела равна

$$E_k = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{J_{oz} \omega^2}{2}, \quad (4.36)$$

где J_{oz} - осевой момент инерции тела.

Сравнивая правые части выражений (4.35) и (4.36), заключаем, что *осевой момент инерции* во вращательном движении тела играет ту же роль что масса в поступательном, т.е. *является мерой инертности тела во вращательном движении.*

3. Тело совершает плоскопараллельное движение, двигаясь поступательно со скоростью \vec{v}_c вместе с центром тяжести и вращаясь с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, проходящей через центр тяжести, перпендикулярно плоскости движения ($\vec{\omega} \parallel Oz$).

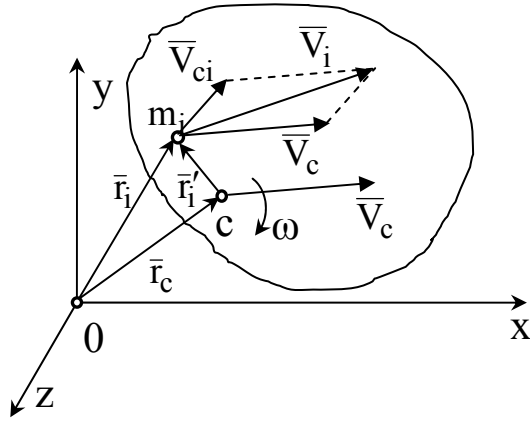


Рис.4.9

Примем за полюс центр тяжести тела - точку C. При этом скорость произвольной точки m_i равна (рис.4.9)

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ci}, \quad (4.37)$$

где

$$\vec{v}_{ci} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i. \quad (4.38)$$

Подставляя (4.34) в формулу (4.31), получаем:

$$E_k = \sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ci})^2}{2} = \sum \frac{m_i \vec{v}_c^2}{2} + \sum m_i (\vec{v}_c \cdot \vec{v}_{ci}) + \sum \frac{m_i \vec{v}_{ci}^2}{2} \quad (4.39)$$

В этом выражении первое слагаемое равно

$$\sum \frac{m_i \vec{v}_c^2}{2} = \frac{\vec{v}_c^2}{2} \sum m_i = \frac{M \vec{v}_c^2}{2} = \frac{M v_c^2}{2}. \quad (4.40)$$

Второе слагаемое с учетом (4.35) равно

$$\sum m_i (\vec{v}_c \cdot \vec{v}_{ci}) = \vec{v}_c \sum m_i \vec{v}_{ci} = \vec{v}_c \cdot (\sum m_i \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \vec{v}_c \cdot (\vec{\omega} \times \sum m_i \vec{r}'_i) = 0. \quad (4.41)$$

$$\text{Здесь } \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0.$$

Третье слагаемое с учетом того, что $\vec{v}_{ci}^2 = v_{ci}^2 = (\omega r'_i)^2$, равно

$$\sum \frac{m_i \vec{v}_{ci}^2}{2} = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i'^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i'^2 = \frac{J_{cz} \omega^2}{2}. \quad (4.42)$$

Подставляя эти выражения в (4.39), получаем формулу для вычисления кинетической энергии тела, совершающего плоскопараллельное движение:

$$E_k = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{J_{cz}\omega^2}{2}. \quad (4.43)$$

Главное отличие кинетической энергии системы от двух ранее введенных мер механического движения (количества движения и кинетического момента) заключается в том, что кинетическая энергия является величиной не векторной, а скалярной и притом существенно положительной. Поэтому она не зависит от направления движения частей системы и не характеризует изменений этих направлений.

4.6. Решение задач

Задача 4.1. Вычислить количество движения, кинетический момент относительно оси Dz , направленной на читателя, и кинетическую энергию системы в момент, когда груз весом P имеет скорость \vec{v} (рис.4.10). Веса сплошных цилиндров равны G , а радиусы - r .

Решение. Количество движения системы складывается из количеств движения всех её тел:

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3,$$

где \vec{K}_1 - количество движения поднимаемого цилиндра 1, \vec{K}_2 - количество движения блока 2, \vec{K}_3 - количество движения груза 3.

Количество движения тела 1 равно (рис.4.10):

$$K_1 = \frac{G}{g} v_c = \frac{G}{g} \cdot \frac{v}{2}.$$

Вектор \vec{K}_1 направлен так же, как и скорость \vec{v}_c , а именно, вертикально вверх

Количество движения тела 2 равно нулю ($\vec{K}_2 = 0$), поскольку это тело вращается вокруг своего центра тяжести - точки O . Количество движения тела 3 равно $K_3 = \frac{P}{g} v$.

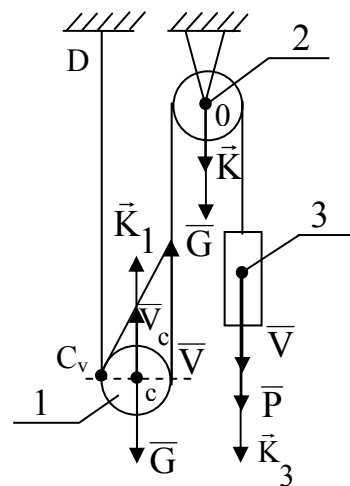


Рис.4.10

Вектор \vec{K}_3 направлен вертикально вниз. Вектор количества движения всей системы в предположении, что $|\vec{K}_3| > |\vec{K}_1|$, направлен вертикально вниз и равен по модулю

$$K = \frac{v}{g} \left(P - \frac{G}{2} \right).$$

Обращаем внимание на тот факт, что *вектор количества движения механической системы, так же, как и главный вектор системы сил, не имеет определенной линии действия* и может быть показан в любой точке системы. На рис.4.10 он показан приложенным к неподвижной точке О.

Вычисляем кинетический момент системы относительно оси Dz:

$$L_{Dz} = L_{Dz}^{(1)} + L_{Dz}^{(2)} + L_{Dz}^{(3)}.$$

Кинетический момент тела 1 определяем по формуле (4.26), тела 2 - по (4.13), тела 3 - по (4.11). При этом получаем:

$$L_{Dz}^{(1)} = K_1 r + J_c^{(1)} \omega_1 = \frac{G r}{2g} v + J_{cz}^{(1)} \frac{v}{2r},$$

$$L_{Dz}^{(2)} = -J_0^{(2)} \omega_2 = -J_{0Z}^{(2)} \frac{v}{r},$$

$$L_{Dz}^{(3)} = -K_3 \cdot 4r = -4 \frac{P r}{g} v.$$

Имея в виду, что $J_{cz}^{(1)} = J_{0Z}^{(2)} = \frac{G r^2}{2g}$, окончательно получаем:

$$L_{Dz} = \frac{r v}{4g} (G - 16P).$$

Кинетическая энергия системы равна

$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)} + E_k^{(3)}.$$

Для подсчета кинетической энергии тела 1 используем формулу (4.43), для тела 2 - формулу (4.39), для тела 3 - формулу (4.38). При этом получаем:

$$E_K^{(1)} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v_c^2}{2} + J_c^{(1)} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{G}{8g} v^2 + J_c^{(1)} \frac{v^2}{8r^2} = \frac{G}{8g} v^2 + \frac{Gv^2}{16g} = \frac{3Gv^2}{16g},$$

$$E_K^{(2)} = J_0^{(2)} \cdot \frac{\omega_2^2}{2} = J_0^{(2)} \cdot \frac{v^2}{2r^2} = \frac{Gv^2}{4g},$$

$$E_K^{(3)} = \frac{Pv^2}{2g}.$$

Складывая эти величины, определяем кинетическую энергию системы:

$$E_K = \frac{v^2}{16g} (7G + 8P).$$

Задача 4.2. Определить количество движения, кинетический момент относительно оси Oz, направленной от читателя, и кинетическую энергию системы, веса тел которой показаны на рис.4.11. Цилиндр 1 и блок 2 - однородные тела радиуса r. Скорость \vec{v} точки C и угол α считать известными. Каток 1 движется без проскальзывания.

Решение.

Количество движения системы равно

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3,$$

причем

$$K_1 = \frac{P_1}{g} v, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = \frac{P_3}{g} v$$

Чтобы определить модуль вектора количества движения, запишем вектор \vec{K} в проекциях на декартовы оси координат, показанные на рис.4.11:

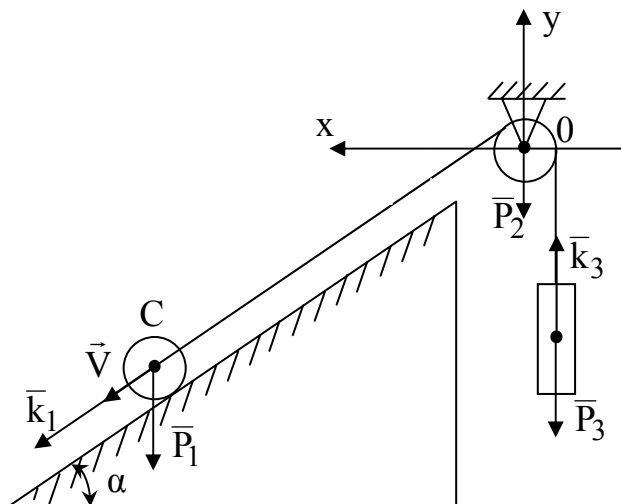


Рис.4.11

$$K_x = K_{1x} + K_{3x} = \frac{P_1}{g} v \cos \alpha,$$

$$K_y = K_{1y} + K_{3y} = -\frac{P_1}{g} v \sin \alpha + \frac{P_3}{g} v.$$

Величина вектора количества движения равна

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \frac{v}{g} \sqrt{P_1^2 - 2P_1P_3 \sin \alpha + P_3^2}.$$

Вектор количества движения системы, как уже говорилось, можно показать в любой точке системы.

Кинетический момент системы относительно оси Oz равен алгебраической сумме кинетических моментов всех трех тел относительно этой оси:

$$L_{0z} = L_{0z}^{(1)} + L_{0z}^{(2)} + L_{0z}^{(3)}.$$

Кинетический момент тела 1 определяем по формуле (4.26), тела 2 - по (4.13), тела 3 - по (4.11). При этом получаем:

$$L_{0z}^{(1)} = -\frac{P_1}{g} vr - \frac{P_1 r^2}{2g} \frac{v}{r} = -\frac{3P_1 r}{2g} v,$$

$$L_{0z}^{(2)} = -J_0^{(2)} \omega_2 = -\frac{P_2 r}{2g} v,$$

$$L_{0z}^{(3)} = -K_3 \cdot r = -\frac{P_3 r}{g} v,$$

следовательно,

$$L_{0z} = -\frac{r v}{2g} (3P_1 + P_2 + 2P_3).$$

Кинетическая энергия системы равна алгебраической сумме кинетических энергий всех трех тел:

$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)} + E_k^{(3)}.$$

Для подсчета кинетической энергии тела 1 используем формулу (4.43), для тела 2 - формулу (4.39), для тела 3 - формулу (4.38). При этом получаем:

$$E_k^{(1)} = \frac{P_1}{g} \cdot \frac{v_c^2}{2} + J_c^{(1)} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{P_1}{2g} v^2 + J_c^{(1)} \frac{v^2}{2r^2} = \frac{3P_1}{4g} v^2,$$

$$E_k^{(2)} = J_0^{(2)} \cdot \frac{\omega_2^2}{2} = J_0^{(2)} \cdot \frac{v^2}{2r^2} = \frac{P_2 v^2}{4g},$$

$$E_k^{(3)} = \frac{P_3 v^2}{2g}.$$

Складывая эти величины, определяем кинетическую энергию системы:

$$E_k = \frac{v^2}{4g} (3P_1 + P_2 + 2P_3).$$

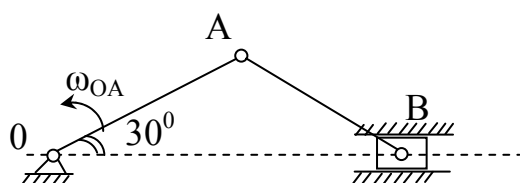


Рис.4.12

Задача 4.3. Определить количе-

ство движения, кинетический момент (относительно оси Oz, направленной на читателя) и кинетическую энергию кривошипно-шатунного механизма в момент, когда кривошип OA составляет с направляющими ползуна B угол 30° и имеет скорость ω_{OA} (рис.4.12). Массы кривошипа OA, шатуна и ползуна - m_1 , m_2 и m_3 соответственно; $OA = AB = \ell$.

имеет скорость ω_{OA} (рис.4.12). Массы кривошипа OA, шатуна и ползуна - m_1 , m_2 и m_3 соответственно; $OA = AB = \ell$.

Решение. Количество движения системы равно

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3,$$

где \vec{K}_1 - количество движения кривошипа OA, \vec{K}_2 - количество движения шатуна AB, \vec{K}_3 - количество движения ползуна B.

С помощью рис.4.13 находим скорости центров тяжести всех

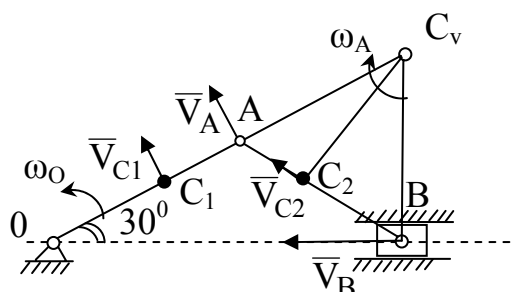


Рис.4.13

тел:

$$v_{c1} = \omega_{OA} OA/2 = \omega_{OA} \ell/2,$$

$$v_{c2} = \omega_{AB} \cdot C_v C_2 = \omega_{OA} \frac{OA}{AC_v} \cdot C_v C_2 = \omega_{OA} \ell \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot C_v B = \omega_{OA} \ell.$$

Используя формулу (4.6), получаем величины векторов количеств движения:

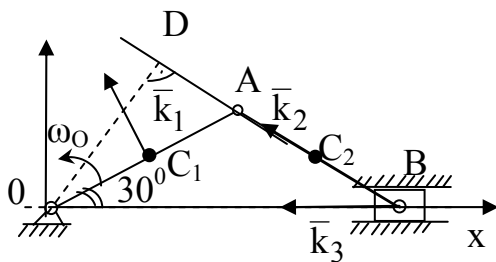


Рис.4.14

$$K_1 = m_1 v_{c1} = m_1 \omega_{OA} \frac{\ell}{2},$$

$$K_2 = m_2 v_{c2} = m_2 \omega_{OA} \ell \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$K_3 = m_3 v_B = m_3 \omega_{OA} \ell.$$

Направления вычисленных векторов показаны на рис.4.14.

Проекции главного вектора \vec{K} на оси выбранной системы координат равны:

$$K_x = K_{1x} + K_{2x} + K_{3x} = -K_1 \cos 60^\circ - K_2 \cos 30^\circ - K_3 = -\frac{\omega_{OA} \ell}{4} (m_1 + 3m_2 + 4m_3),$$

$$K_y = K_{1y} + K_{2y} + K_{3y} = K_1 \cos 30^\circ + K_2 \cos 60^\circ = \frac{\omega_{OA} \ell \sqrt{3}}{4} (m_1 + m_2),$$

следовательно,

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \frac{\omega_1 \ell}{4} \sqrt{(m_1 + 3m_2 + 4m_3)^2 + 3(m_1 + m_2)^2}.$$

Направление вектора \vec{K} показано на рис.4.15.

Вычисляем кинетический момент системы относительно оси Oz, направленной на читателя:

$$L_{Oz} = L_{Oz}^{(1)} + L_{Oz}^{(2)} + L_{Oz}^{(3)}.$$

Кинетический момент тела 1 определя-

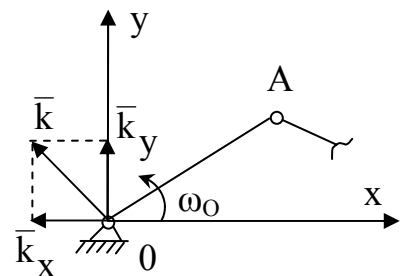


Рис.4.15

ем по формуле (4.13), тела 2 - по (4.26), тела 3 - по (4.11). При этом получаем:

$$L_{0z}^{(1)} = J_0^{(1)} \omega_{OA} = \frac{m_1 \ell^2}{3} \omega_{OA} ,$$

$$L_{0z}^{(2)} = K_2 OD - J_{C_2}^{(2)} \omega_{AB} = m_2 \omega_{OA} \ell \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \ell}{2} - \frac{m_2 \ell^2}{12} \omega_{OA} = \frac{2m_2 \ell^2}{3} \omega_{OA}$$

,

$$L_{0z}^{(3)} = K_3 \cdot 0 = 0 ,$$

следовательно,

$$L_{0z} = L_{0z}^{(1)} + L_{0z}^{(2)} = \frac{m_1 \ell^2 \omega_{OA}}{3} + \frac{2m_2 \ell^2 \omega_{OA}}{3} = \frac{1}{3} (m_1 + 2m_2) \ell^2 \omega_{OA} .$$

Определяем кинетическую энергию системы:

$$E_K = E_K^{(1)} + E_K^{(2)} + E_K^{(3)} .$$

Для подсчета кинетической энергии тела 1 используем формулу (4.36), для тела 2 - формулу (4.43), для тела 3 - формулу (4.35). Обозначая для краткости $\omega_{OA} = \omega_1$, $\omega_{AB} = \omega_2$, получаем:

$$E_K^{(1)} = J_0^{(1)} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{m_1 \ell^2}{3} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{m_1 \ell^2 \omega_1^2}{6} ,$$

$$E_K^{(2)} = \frac{m_2 v_C^2}{2} + J_{C_2}^{(2)} \cdot \frac{\omega_2^2}{2} = \frac{m_2 (\omega_1 \ell \sqrt{3} / 2)^2}{2} + \frac{m_2 \ell^2}{12} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} = \frac{5m_2 \ell^2}{12} \omega_1^2 ,$$

$$E_K^{(3)} = \frac{m_3 v_B^2}{2} = \frac{m_3 (\omega_2 \ell)^2}{2} = \frac{m_3 \ell^2}{2} \omega_1^2 .$$

Складывая эти величины, определяем кинетическую энергию системы:

$$E_K = \frac{\omega_{OA}^2 \ell^2}{12} (2m_1 + 5m_2 + 6m_3) .$$

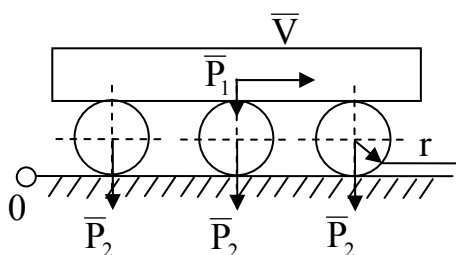


Рис.4.16

ство движения, кинетический момент L_{0z} и кинетическую энергию системы.

Решение. Количество движения системы равно

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + 3\vec{K}_2,$$

причем (рис.4.17 и рис.4.18)

$$K_1 = \frac{P_1}{g} v, \quad K_2 = \frac{P_2}{g} v_c = \frac{P_2}{g} \cdot \frac{v}{2},$$

$$\text{следовательно, } K = \frac{2P_1 + 3P_2}{2g} v.$$

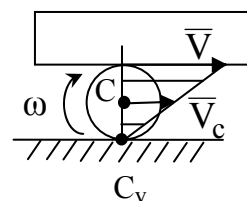


Рис.4.17

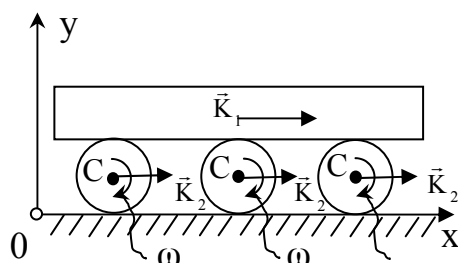


Рис.4.18

тел 2 - по (4.26). При этом, считая $h_1 = 2r$, пренебрегая толщиной доски, получаем:

$$L_{0z}^{(1)} = -K_1 \cdot h_1 = -\frac{2P_1 r}{g} v,$$

Задача 4.4. Доска весом P_1 , свободно лежащая на катках весом P_2 и радиусом r каждый, под действием приложенной к ней силы получила скорость \vec{v} (рис.4.16). Считая, что между катками и доской, а также между катками и землей проскальзывание отсутствует, определить количество

Кинетический момент системы относительно оси Oz , направленной на читателя (рис.4.18), равен

$$L_{0z} = L_{0z}^{(1)} + 3L_{0z}^{(2)}.$$

Кинетический момент тела 1 определяем по формуле (4.11),

$$L_{0z}^{(2)} = -K_2 r - J_C^{(2)} \omega = -\frac{P_2}{g} \cdot \frac{v}{2} r - \frac{P_2 r^2}{2g} \cdot \frac{v}{2r} = -\frac{3P_2 r}{4g} v \quad \text{следовательно}$$

но,

$$L_{0z} = L_{0z}^{(1)} + 3L_{0z}^{(2)} = -\frac{r(8P_1 + 3P_2)}{4g} v.$$

Определяем кинетическую энергию системы:

$$E_k = E_k^{(1)} + 3E_k^{(2)}.$$

Для определения кинетической энергии тела 1 используем формулу (4.35), для тел 2 - формулу (4.43), при этом получаем:

$$E_k = E_k^{(1)} + 3E_k^{(2)} = \frac{P_1 v^2}{2g} + 3 \left(\frac{P_2 v_c^2}{2g} + \frac{J_C^{(2)} \omega^2}{2} \right) = \frac{P_1 v^2}{2g} + 3 \left(\frac{P_2 v^2}{8g} + \frac{P_2 v^2}{16g} \right) = \frac{8P_1 + 9P_2}{16g} v^2$$

4.7. Контрольные вопросы

4.1. Диск радиусом r и массой M , равномерно распределенной по всему сечению, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси Oz , отстоящей от оси симметрии диска на расстоянии $OC = r/2$ (рис.4.19). Чему равно количество движения диска?

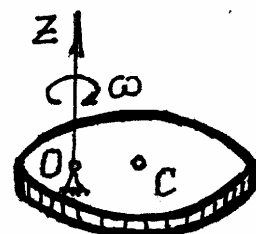


Рис.4.19

4.2. Как вычислить кинетический момент диска относительно оси вращения, проходящей через точку O перпендикулярную плоскости диска (рис.4.19)?

4.3. Чему равна кинетическая энергия диска (рис.4.19)?

4.4. Лента транспортера движется со скоростью v между шкивами B и C (рис.4.20). На ленту положен груз A весом P . Чему равно количество движения системы, если массой ленты можно пренебречь?

4.5. В условии примера 4.4 определить кинетический момент системы относительно оси B , считая, что шкивы B и C имеют одинаковые радиусы r

, а моменты инерции относительно их осей вращения - соответственно J_B и J_C .

4.6. Используя условия примеров 4.4 и 4.5, определить кинетическую энергию системы (рис.4.20).

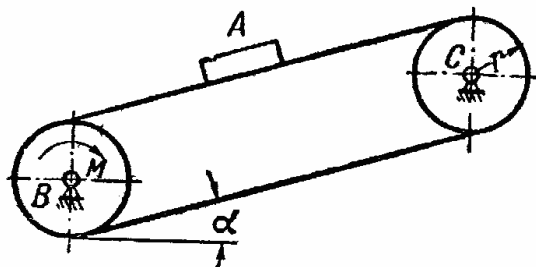


Рис.4.20

4.7. Чему равно количество движения кривошипно-шатунного механизма в положении, показанном на рис.4.21? Кривошип длиной $OA = \ell$ имеет в данный момент угловую скорость ω , массы кривошипа, шатуна и ползуна - соответственно m_1, m_2, m_3 .

4.8. В условии предыдущего примера определить кинетический момент системы (рис.4.21) относительно оси Oz , идущей на читателя.

4.9. Чему равна кинетическая энергия кривошипно-шатунного механизма, показанного на рис.4.21? Данные те же, что и в примере 4.7.

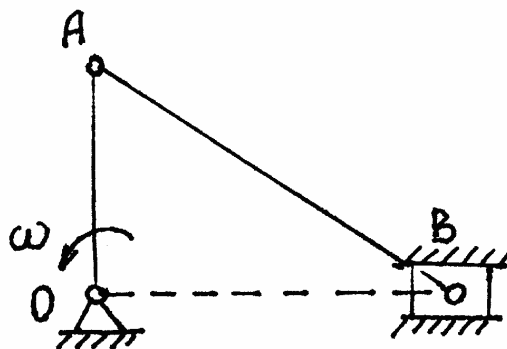


Рис.4.21

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ГЛАВА 5. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ И О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

5.1. Теорема об изменении количества движения

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Движение произвольной точки i массой m_i этой системы подчиняется второму закону Ньютона:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i, \quad (5.1)$$

где \vec{F}_i^e - равнодействующая всех внешних сил, приложенных к точке m_i , а \vec{F}_i^i - равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к той же точке. Преобразуем левую часть уравнения (5.1):

$$m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{k}_i}{dt}. \quad (5.2)$$

С учетом этого преобразования уравнение (5.1) приобретает вид:

$$\frac{d\vec{k}_i}{dt} = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) выражает теорему об изменении количества движения одной материальной точки в дифференциальной форме и является ничем иным как перефразировкой второго закона Ньютона. Чтобы получить теорему об изменении количества движения *всей системы*, просуммируем обе части уравнения (5.3) по всем точкам системы:

$$\sum \frac{d\vec{k}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i^e + \sum \vec{F}_i^i.$$

Так как $\sum \frac{d\vec{k}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{k}_i = \frac{d\vec{K}}{dt}$, а $\sum \vec{F}_i^i = 0$ (по свойству внутренних сил), то

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \Sigma \vec{F}_i^e. \quad (5.4)$$

Равенство (5.4) выражает *теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.*

В проекциях на оси декартовой системы координат теорема (5.4) записывается так:

$$\frac{dK_x}{dt} = \Sigma F_{ix}^e, \quad \frac{dK_y}{dt} = \Sigma F_{iy}^e, \quad \frac{dK_z}{dt} = \Sigma F_{iz}^e. \quad (5.5)$$

Разделяя переменные в уравнении (5.4) и интегрируя, получаем:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \Sigma \int_0^t \vec{F}_i^e dt,$$

или

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \Sigma \vec{S}_i^e, \quad (5.6)$$

где

$$\vec{S}_i^e = \int_0^t \vec{F}_i^e dt \quad (5.7)$$

— импульс внешних сил.

Уравнение (5.6) представляет собой *теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.*

Из теоремы об изменении количества движения следует, что *внутренние силы не могут изменить количества движения системы* (внутренние силы не входят в выражения (5.4) и (5.6)).

5.2. Закон сохранения количества движения

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е. $\Sigma \vec{F}_i^e = 0$, то из (5.4) следует, что

$$\vec{K} = c\text{const} . \quad (5.7)$$

Если же $\Sigma F_{ix}^e = 0$, то

$$K_x = \text{const} . \quad (5.8)$$

Соотношения (5.7) и (5.8) выражают *законы сохранения количества движения системы и проекции количества движения системы*.

Проиллюстрируем действие закона сохранения количества движения на примере движения ракеты.

Р а к т и в н о е д в и ж е н и е. В ракете газообразные продукты горения топлива с большой скоростью выбрасываются из отверстия в хвостовой части ракеты. Действующие при этом силы давления будут силами внутренними и они не могут изменить количества движения системы, состоящей из ракеты и продуктов горения топлива. Но так как отбрасываемые газы имеют известное количество движения, направленное назад, то ракета получает при этом соответствующую скорость вперед.

Теоремой об изменении количества движения обычно пользуются для изучения движения среды (жидкости, газа). Если же механическая система состоит из твердых тел, то вместо теоремы об изменении количества движения обычно используют ее разновидность: теорему о движении центра масс системы.

5.3. Теорема о движении центра масс

В некоторых задачах для определения характера движения системы (особенно твердого тела) достаточно знать закон движения ее центра масс. Для получения этого закона просуммируем левые и правые части уравнений (5.1) по всем точкам системы:

$$\Sigma m_i \vec{a}_i = \Sigma \vec{F}_i^e + \Sigma \vec{F}_i^i . \quad (5.9)$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения:

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} (M\vec{v}_c) = M\vec{a}_c, \quad (5.10)$$

где M - масса всей системы, а \vec{a}_c - ускорение центра масс.

Подставляя (5.10) в (5.9) и учитывая, что $\sum \vec{F}_i^i = 0$, получаем теорему о движении центра масс системы:

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i^e. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) по внешнему виду схоже со вторым законом Ньютона для материальной точки, поэтому теорема о движении центра масс читается так: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

В проекциях на декартовы оси координат теорема (5.11) выглядит так:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{ix}^e, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{iy}^e, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum F_{iz}^e. \quad (5.12)$$

В (5.11) и (5.12) внутренние силы не входят, следовательно, *за счет внутренних сил невозможно изменить движение центра масс системы.*

Если механическая система состоит из одного твердого тела, движущегося поступательно, то его движение определяется какой-нибудь одной его точкой, например, центром тяжести, совпадающим при этом с центром инерции системы. В этом случае уравнения (5.11) и (5.12) могут рассматриваться как *дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела (в векторной и скалярной формах).*

5.4. Закон сохранения движения центра масс

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия.

1. Пусть $\sum \vec{F}_i^e = 0$, тогда из уравнения (5.11) следует, что $\vec{a}_c = 0$ или

$$\vec{v}_c = \text{const} . \quad (5.13)$$

Следовательно, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс системы движется равномерно и прямолинейно*. В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое.

2. Пусть $\Sigma F_{ix}^e = 0$, тогда из (5.12) получаем: $\frac{d^2 x_c}{dt^2} = 0$ или

$$\frac{dx_c}{dt} = v_{cx} = \text{const} . \quad (5.14)$$

Следовательно, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная*.

Эти результаты выражают собой закон сохранения движения центра масс системы. Проиллюстрируем этот закон на примерах.

Д в и ж е н и е ц е н т р а м а с с с о л н е ч н о й с и с т е м ы. Пренебрегая в первом приближении притяжением звезд, можно считать, что на солнечную систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно ее центр масс в мировом пространстве движется равномерно и прямолинейно (в первом приближении).

Д е й с т в и е п а р ы с и л н а т е л о. Если к свободному твердому телу, находящемуся в покое, приложить пару сил, то геометрическая сумма внешних сил будет равна нулю и центр масс останется неподвижным. Следовательно, тело будет вращаться вокруг своего центра тяжести.

Д в и ж е н и е а в т о м а ш и н ы п о г о р и з о н т а л ь н о й п л о с к о с т и. Сила давления газа в двигателе является внутренней силой и не может переместить центр масс автомашины. Движение происходит потому, что двигатель передает ведущим колесам вращающий момент $M_{вр}$. При этом точка В касания ведущего колеса стремится скользить влево (рис.5.1) и на ведущее колесо будет действовать внешняя сила - сила трения, направленная вправо, т.е. в сторону, противоположную возможной скорости точки В. Именно эта внешняя сила и заставляет двигаться автомашину вправо. Однако это происходит только в том случае, если сила

трения, приложенная к ведущим колесам и направленная вправо, больше силы трения, приложенной к ведомым колесам и направленной влево.

Объясним, почему на ведомых колесах сила трения направлена против движения. На ведомое колесо действует не вращающий момент, а сила

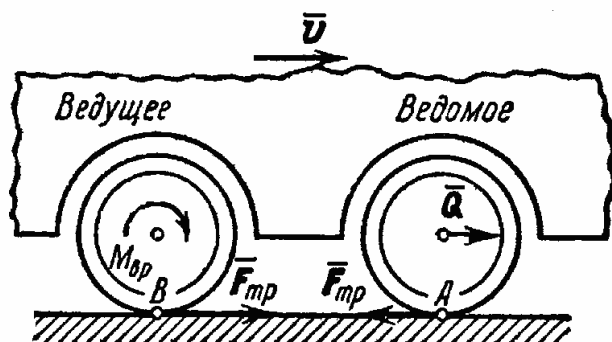


Рис.5.1

Q , приложенная к оси. Под ее действием ведомое колесо, а с ним и точка A , стремятся сдвинуться вправо. При этом сила трения, всегда направленная против скорости той точки, в которой она приложена, окажется направленной влево.

Когда силы трения, направленной вправо нет или когда она недостаточна для преодоления силы трения, направленной влево, движения вправо не будет, ведущие колеса будут при этом вращаться на месте (буксовать).

5.5. Решение задач

Как уже говорилось, теоремой об изменении количества движения обычно пользуются для изучения движения среды (жидкости, газа). Применение этой теоремы позволяет исключить из рассмотрения все внутренние силы. Поэтому рассматриваемую систему нужно выбирать так, чтобы заранее неизвестные силы сделать внутренними.

Закон сохранения количества движения удобно применять в тех случаях, когда по изменению поступательной скорости одной части системы надо определить скорость другой части системы.

Те же указания справедливы и при использовании теоремы о движении центра масс системы, являющейся разновидностью теоремы об изменении количества движения и применяемой к системам, состоящим из твердых тел.

Задача 5.1. Струя воды вытекает из брандспойта со скоростью $u = 10$ м/с и ударяет под прямым углом о твердую стенку (рис.5.2). Диаметр

вытекающей струи $d = 4$ см. Пренебрегая сжатием струи, определить силу давления ее на стенку.

Решение. Чтобы исключить из рассмотрения внутренние силы давления частиц жидкости при ударе их о стенку, используем теорему об изменении количества движения системы.

В качестве системы выберем часть струи, заключенной в объеме, ограниченном сечениями a , b и c (объем abc).

Для этой системы запишем теорему об изменении количества движения за время t_1 относительно оси x :

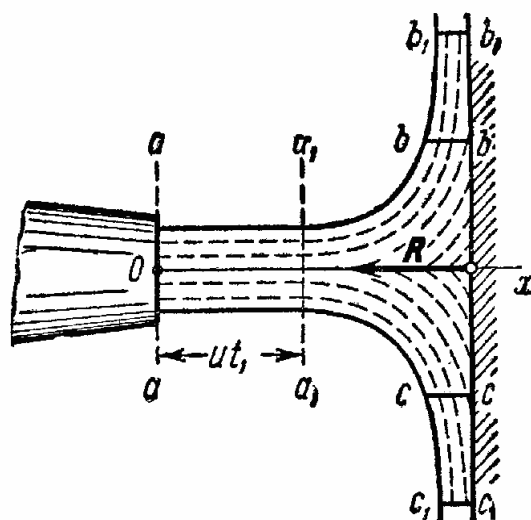


Рис.5.2

$$K_{x1} - K_{x0} = \sum S_{ix}^e. \quad (5.15)$$

Вычислим левую часть этого уравнения, считая, что за время t_1 объем abc перемещается в положение $a_1b_1c_1$. Количество движения в проекции на ось x уменьшится на величину mu (m - масса объема воды aa_1 , переместившегося вдоль оси x за время t_1). Поскольку жидкость, притекающая в объемы bb_1 и cc_1 , движется перпендикулярно оси x и проекция ее количества движения на ось x равна нулю, то

$$K_{x1} - K_{x0} = -mu. \quad (5.16)$$

Внешней силой, действующей на выделенный объем и дающей проекцию на ось x , является только сила R реакции стенки. Считая эту реакцию постоянной, получим:

$$\sum S_{ix}^e = R_x t_1 = -R t_1. \quad (5.17)$$

Подставляя (5.16) и (5.17) в уравнение (5.15), имеем:

$$mu = R t_1. \quad (5.18)$$

Вычислим величину m . Так как перемещение $aa_1 = ut_1$, то

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} u t_1, \quad (5.19)$$

где ρ - плотность жидкости. Подставляя (5.19) в (5.18) и учитывая, что для воды $\rho = 10^4 \text{ Н/м}^3$, находим

$$R = \rho \frac{\pi d^2}{4} u^2 = 125,6 \text{ Н}.$$

Сила давления струи на стенку равна этой же величине.

Задача 5.2. Электромотор весом P установлен без креплений на горизонтальном гладком фундаменте (рис.5.3). На валу мотора под прямым углом закреплен стержень длиной 2ℓ , несущий на другом конце точечный груз весом Q . Угловая скорость вала равна ω .

Пренебрегая весом стержня определить: 1) закон горизонтального движения мотора; 2) угловую скорость ω вала, при которой электромотор будет подпрыгивать над фундаментом; 3) наибольшее горизонтальное усилие R , действующее на болты, если ими будет прикреплен электромотор к фундаменту.

Решение. В качестве механической системы рассмотрим совокупность тел, состоящую из мотора и груза. Внешними силами, действующими на эту систему, являются силы тяжести - P , Q , а также нормальные реакции N_1 и N_2 гладкого фундамента.

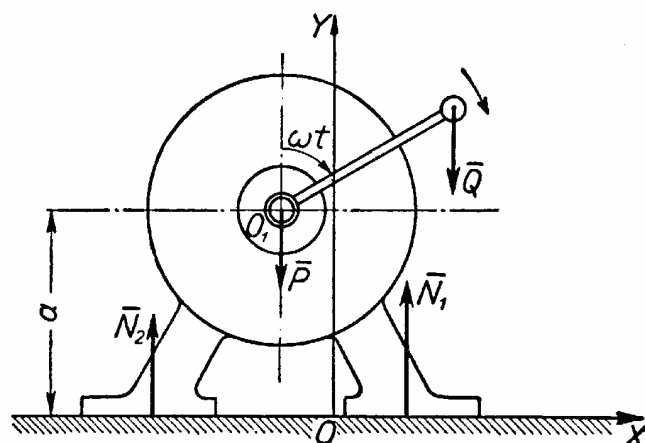


Рис.5.3

Выберем систему координат так, чтобы ось Oy проходила через начальное (вертикальное) положение стержня.

В силу симметрии системы в начальный момент центр масс находится на оси Oy , т.е. $x_C = 0$.

Так как проекции всех внешних сил на ось Ox равны нулю и в начальный момент система была неподвижна, то $x_C = 0$ в каждый момент времени. Следовательно, если груз перемещается вправо, то мотор перемещается влево и на-

оборот, т.е. мотор совершает возвратно-поступательное движение. Поэтому для изучения движения мотора достаточно изучить движение какой-нибудь его точки. В качестве такой точки выберем центр масс мотора - точку O_1 .

Определяем абсциссу центра масс системы:

$$x_c = \frac{Px_1 + Qx_2}{P + Q}, \quad (5.20)$$

где x_1 и x_2 - координаты точек приложения сил P и Q соответственно.

Для положения системы, изображенного на рис. 5.3,

$$x_c = \frac{Px_1 + Q(2\ell \sin \omega t - |x_1|)}{P + Q},$$

где $|x_1| = -x_1$; $x_c = 0$. Отсюда: $x_1 = -\frac{2Q\ell \sin \omega t}{P + Q}$.

Из полученной формулы следует, что мотор совершает гармонические колебания с амплитудой, равной $\frac{2Q\ell}{P + Q}$.

Решим теперь второй вопрос, а именно, определим угловую скорость вала, при которой электромотор будет подпрыгивать над фундаментом. С этой целью запишем теорему о движении центра масс системы относительно оси Oy :

$$M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = -P - Q + N, \quad (5.21)$$

где $M = (P + Q)/g$, $N = N_1 + N_2$.

Определяем y_c :

$$y_c = \frac{Py_1 + Qy_2}{P + Q} = \frac{Pa + Q(a + 2\ell \cos \omega t)}{P + Q}.$$

Дифференцируя это выражение дважды по времени, получаем:

$$\frac{d^2 y_c}{dt^2} = -\frac{2Q\ell \omega^2}{P + Q} \cos \omega t. \quad (5.22)$$

После подстановки (5.22) в (5.21), находим суммарную нормальную реакцию:

$$N = P + Q - \frac{2Q\ell\omega^2}{g} \cos \omega t. \quad (5.23)$$

Таким образом, опорная реакция есть величина переменная, причем наименьшее ее значение определяется по формуле:

$$N_{\min} = P + Q - \frac{2Q\ell}{g} \omega^2. \quad (5.24)$$

С помощью (5.24) определим такую угловую скорость ω_0 , при которой $N_{\min} = 0$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(P + Q)g}{2Q\ell}}. \quad (5.25)$$

При угловой скорости ω , превышающей угловую скорость ω_0 , соответствующую условию $N_{\min} = 0$, мотор будет подпрыгивать.

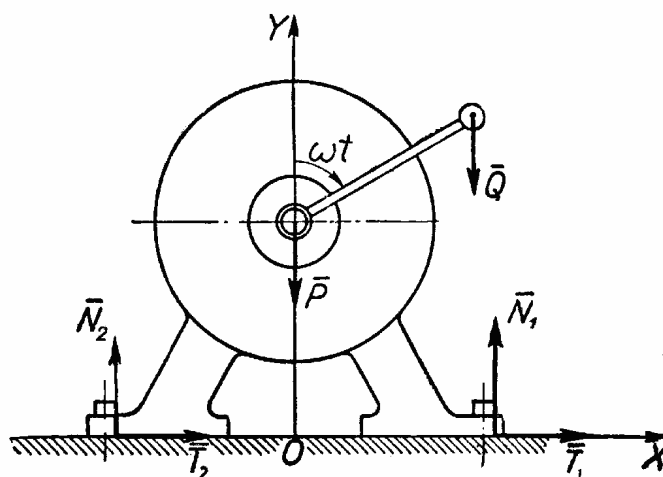


Рис.5.4

Решим теперь третий вопрос. С этой целью закрепим мотор к фундаменту болтами и выберем систему координат, как показано на рис.5.4.

В данном случае на механическую систему кроме сил, указанных выше, еще действует суммарная горизонтальная реакция болтов, равная $\bar{T} = \bar{T}_1 + \bar{T}_2$. Запишем уравнение движения центра масс системы относительно оси Oх:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = T. \quad (5.26)$$

Координату центра масс находим по формуле:

$$x_c = \frac{Px_1 + Qx_2}{P + Q}.$$

Так как корпус мотора закреплен, то $x_1 = 0$; $x_2 = 2\ell \sin \omega t$. Следовательно, $x_c = \frac{2Q\ell \sin \omega t}{P + Q}$.

Дифференцируя это выражение дважды по времени и подставляя результат в (5.26), получим

$$T = -\frac{2Q\ell\omega^2 \sin \omega t}{g},$$
$$T_{\max} = \frac{2Q\ell\omega^2}{g}.$$

5.6. Контрольные вопросы

5.1. При каких условиях центр масс системы не изменяет своего положения во все время ее движения?

5.2. Можно ли за счет внутренних сил изменить положение центра масс системы?

5.3. Как движется свободное твердое тело, к которому приложена пара сил?

5.4. При каких условиях не изменяется количество движения системы?

5.5. Влияют ли внутренние силы на изменение количества движения системы?

5.6. Входят ли силы реакций в теорему об изменении количества движения системы?

ГЛАВА 6. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

6.1. Теорема об изменении кинетического момента системы

В данной главе рассматривается связь между изменением еще одной меры движения, а именно, изменением кинетического момента, и действующими на систему силами. Для установления этой связи снова обратимся ко второму закону Ньютона:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i. \quad (6.1)$$

Умножим обе части этого уравнения слева векторно на \vec{r}_i - радиус-вектор точки m_i :

$$\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^i \quad (6.2)$$

Преобразуем левую часть (6.2):

$$\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{k}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{k}_i) = \frac{d\vec{\ell}_{0i}}{dt}. \quad (6.3)$$

Выражения, стоящие в правой части (6.2), представляют собой моменты сил:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e = \vec{M}_{0i}^e, \quad \vec{r}_i \times \vec{F}_i^i = \vec{M}_{0i}^i. \quad (6.4)$$

Подставляя (6.3) и (6.4) в (6.2), получаем теорему об изменении момента количества движения одной точки:

$$\frac{d\vec{\ell}_{0i}}{dt} = \vec{M}_{0i}^e + \vec{M}_{0i}^i. \quad (6.5)$$

Просуммируем обе части (6.5) по всем точкам системы:

$$\sum \frac{d\vec{\ell}_{0i}}{dt} = \sum \vec{M}_{0i}^e + \sum \vec{M}_{0i}^i, \quad (6.6)$$

или, поскольку $\sum \frac{d\vec{\ell}_{0i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum \vec{\ell}_{0i} = \frac{d\vec{L}_0}{dt}$, а $\sum \vec{M}_{0i}^i = 0$, то

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \Sigma \vec{M}_{0i}^e. \quad (6.7)$$

Полученное уравнение выражает *теорему об изменении кинетического момента системы* (или главного момента количеств движения системы) и читается так: *производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к системе, относительно того же центра.*

В проекциях на декартовы оси координат теорема об изменении кинетического момента системы записывается так:

$$\frac{dL_x}{dt} = \Sigma M_{ix}^e, \quad \frac{dL_y}{dt} = \Sigma M_{iy}^e, \quad \frac{dL_z}{dt} = \Sigma M_{iz}^e. \quad (6.8)$$

Доказанной теоремой широко пользуются при изучении вращательного движения.

6.2. Закон сохранения кинетического момента

Из теоремы об изменении кинетического момента системы можно получить следующие важные следствия.

1. Пусть сумма моментов относительно центра О всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, т.е. $\Sigma \vec{M}_{0i}^e = 0$. Тогда из (6.7) следует, что

$$\vec{L}_0 = \text{const}. \quad (6.9)$$

Таким образом, *если сумма моментов внешних сил относительно некоторого центра равна нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра постоянен как по величине, так и по направлению.*

2. Пусть сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой оси равна нулю, т.е. $\Sigma M_{iz}^e = 0$. Тогда из (6.8) следует, что

$$L_z = \text{const}. \quad (6.10)$$

Таким образом, если сумма моментов внешних сил относительно некоторой оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

Эти результаты выражают собой закон сохранения кинетического момента системы. Из них следует, что внутренние силы не могут изменить кинетический момент системы.

Проиллюстрируем закон сохранения кинетического момента на нескольких примерах.

Пример 6.1. Пусть механическая система вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω , причем сумма моментов всех внешних сил относительно этой оси равна нулю. В этом случае, согласно (6.10),

$$L_z = J_z \omega = \text{const}. \quad (6.11)$$

Если система при этом является геометрически неизменяемой (например, твердое тело), то осевой момент инерции такой системы - величина постоянная, т.е. $J_z = \text{const}$, и система, на основании (6.11), будет

вращаться с постоянной угловой скоростью.

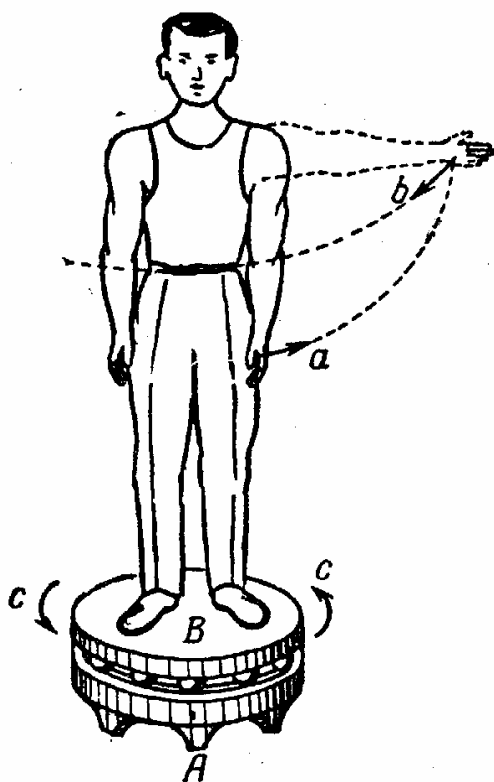


Рис.6.1

Пример 6.2. Рассмотрим теперь геометрически изменяемую систему, состоящую из платформы Жуковского, которая может вращаться вокруг вертикальной оси z с очень малым трением, и стоящего на ней человека (рис.6.1). Внешние силы, действующие на систему (силы тяжести и реакции подшипников), не создают момента относительно оси вращения, следовательно, кинетический момент относительно оси z есть величина постоянная.

Покажем, что за счет внутренних сил человек, стоящий на платформе Жуковского, может изменить свою ориентацию в пространстве. Пусть в начальный момент времени платформа и человек неподвижны, т.е. $L_z = 0$. Затем человек поднимает руку на высоту плеча (из положения a в положение b). При этом скорости всех точек руки лежат примерно в одной плоскости с осью вращения, следовательно, количества движения этих точек не создают момента относительно оси вращения, и платформа с человеком остается неподвижной. Если же теперь человек повернет поднятую руку в горизонтальной плоскости, то количества движения точек его руки создадут кинетический момент $L'_z \neq 0$. Но для всей системы кинетический момент должен остаться равным нулю, поэтому платформа вместе с человеком повернется в сторону, противоположную повороту руки, с такой угловой скоростью, чтобы кинетический момент системы в этом движении компенсировал кинетический момент L'_z . Если затем человек опустит руку (в осевой плоскости) в исходное положение a , то платформа останется неподвижной. Повторяя взмах, поворот и опускание руки несколько раз, человек с платформой могут совершить полный оборот.

Если же платформа с человеком, руки которого опущены, вращается с угловой скоростью $\omega_0 > 0$, а в некоторый момент человек поднимет и разведет руки, то этим он увеличит свой момент инерции относительно оси вращения. Но так как произведение $J_z \omega$, согласно (6.11), должно остаться неизменным, то при этом угловая скорость ω уменьшится по сравнению с ω_0 ; если же он опустит руки, то скорость снова увеличится почти до значения ω_0 .

Таким образом, *в геометрически изменяемых системах за счет внутренних сил можно изменить угловую скорость вращения*. Этим приемом широко пользуются в балете, в фигурном катании, при прыжках в воздухе (сальто) и т.д.

6.3. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела

Если механической системой является твердое тело, вращающееся вокруг оси Oz , то его кинетический момент, согласно (4.15), равен

$$L_{0z} = J_z \omega_z.$$

Подставляя это выражение в (6.8) и производя дифференцирование, получаем:

$$J_z \varepsilon_z = \Sigma M_z^e, \quad (6.12)$$

где ε_z - угловое ускорение тела.

Уравнение (6.12) называют *дифференциальным уравнением вращательного движения твердого тела*.

6.4. Решение задач

Теоремой об изменении кинетического момента целесообразно пользоваться для изучения вращательного движения тел, а также для изучения движения систем, включающих вращающиеся и поступательно движущиеся тела.

Закон сохранения кинетического момента позволяет по величине скорости одной части системы определить изменение угловой скорости другой ее части. При этом за счет правильного выбора механической системы из рассмотрения следует исключить неизвестные внутренние силы.

Задача 6.1. По ободу круглой горизонтальной платформы радиусом R может двигаться вагонетка весом P (рис.6.2). Платформа вместе с вагонеткой вращается вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω_0 . В некоторый момент времени вагонетка начинает двигаться с относительной (по отношению к платформе) скоростью u в сторону вращения платформы. Как изменится при этом угловая скорость платформы? Трением в опорах пренебечь, осевой момент инерции J_z платформы относительно оси вра-

щения считать известным. Вагонетку рассматривать как материальную точку.

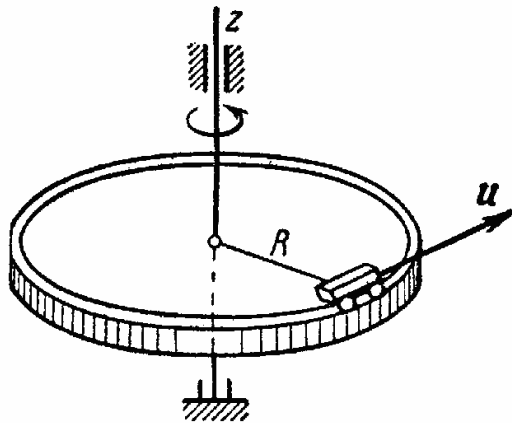


Рис.6.2

Решение. Чтобы исключить неизвестные внутренние силы трения между колесами вагонетки и платформой, в качестве системы будем рассматривать платформу с вагонеткой. Моменты действующих на эту систему внешних сил относительно оси z равны нулю, следовательно, $L_z = \text{const}$.

Кинетический момент системы до того как вагонетка начала двигаться равен

$$L_{z0} = (J_z + \frac{PR^2}{g})\omega_0.$$

После того как вагонетка стала двигаться, ее точки приобретают скорость, равную $u + \omega R$. При этом кинетический момент системы становится равным

$$L_{z1} = J_z\omega + \frac{PR}{g}(u + \omega R).$$

Так как кинетический момент системы во все время движения сохраняется постоянным, т.е. $L_{z1} = L_{z0}$, то приравнявая правые части последних двух выражений друг другу, находим угловую скорость платформы после начала движения вагонетки:

$$\omega = \omega_0 - \frac{PRu}{J_zg + PR^2}.$$

Как видно из полученной формулы, угловая скорость платформы при движении вагонетки уменьшается. Если вагонетка будет двигаться в противоположную сторону, то угловая скорость платформы увеличится.

Обращаем внимание на тот факт, что при вычислении кинетического момента надо брать *абсолютные скорости* всех точек или тел.

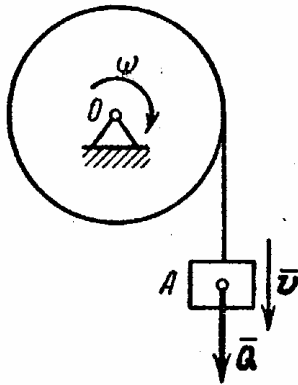


Рис.6.3

Задача 6.2. На барабан весом P и радиусом R намотана нить с грузом A весом Q на конце (рис.6.3). Пренебрегая весом нити и трением в оси, определить угловое ускорение барабана при вертикальном движении груза, если радиус инерции барабана относительно оси вращения равен $\rho_{и}$.

Решение. Используя теорему об изменении кинетического момента системы, состоящей из барабана и груза, относительно оси Oz , направленной

перпендикулярно плоскости чертежа от читателя, находим:

$$\frac{dL_{0z}}{dt} = M_{0z}(Q) = Qr, \quad (6.13)$$

Кинетический момент системы равен сумме кинетического момента $L_{0z}^{\text{бар}}$ барабана и кинетического момента $L_{0z}^{\text{гр}}$ груза, причем

$$L_{0z}^{\text{бар}} = \frac{P}{g} \rho_{и}^2 \omega, \quad L_{0z}^{\text{гр}} = \frac{Q}{g} v r = \frac{Q}{g} \omega r^2,$$

следовательно,

$$L_{0z} = \frac{\omega}{g} (P \rho_{и}^2 + Q r^2).$$

Производная по времени от полученного выражения равна

$$\frac{dL_{0z}}{dt} = \frac{\varepsilon}{g} (P \rho_{и}^2 + Q r^2).$$

После подстановки этого выражения в (6.13) получаем угловое ускорение барабана:

$$\varepsilon = \frac{Q r g}{P \rho_{и}^2 + Q r^2}.$$

6.5. Контрольные вопросы

6.1. При каких условиях кинетический момент системы относительно некоторой точки сохраняется неизменным во все время движения системы?

6.2. При каких условиях кинетический момент системы относительно некоторой оси остается постоянным во все время движения системы?

6.3. Как выглядит дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела?

6.4. Как записывается теорема об изменении кинетического момента системы?

6.5. Входят ли внутренние силы в теорему об изменении кинетического момента системы?

ГЛАВА 7. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

7.1. Работа силы. Мощность

Для характеристики действия силы на материальную точку на некотором пути вводится мера этого действия, называемая *работой силы*.

На элементарном перемещении $d\vec{r}$ материальной точки M , положение которой характеризуется радиусом-вектором \vec{r} (рис.7.1), сила \vec{F} производит *элементарную работу* δA , равную скалярному произведению вектора силы на дифференциал радиуса-вектора точки ее приложения:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7.1)$$

Так как $|d\vec{r}| = ds$, то скалярное произведение (7.1) может быть записано в виде:

$$\delta A = F ds \cos \alpha, \quad (7.2)$$

где α - угол между вектором силы и скоростью точки (направление вектора скорости совпадает с направлением вектора $d\vec{r}$).

Кроме того, скалярное произведение (7.2) может быть представлено в виде суммы произведений одноименных проекций на координатные оси перемножаемых векторов:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (7.3)$$

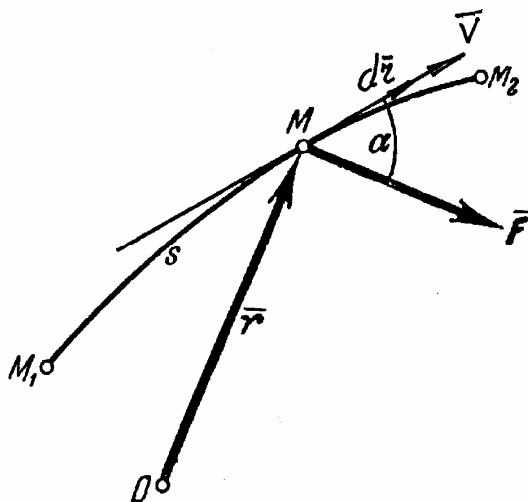


Рис.7.1

Обозначение элементарной работы через δA объясняется тем, что символ dA мог бы привести к неправильному представлению об элементарной работе как о дифференциале некоторой функции A . В некоторых частных случаях $\delta A = dA$, в общем же случае элементарная работа не представляет полного дифференциала

функции A , и обозначение δA следует понимать как обозначение бесконечно малой величины.

Работа силы на конечном пути M_1M_2 (рис.7.1) определяется как сумма элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути, т.е. интегралом:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F \cos \alpha \, ds = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (7.4)$$

Интеграл берется вдоль кривой M_1M_2 . Такой интеграл называется *криволинейным*.

Если подинтегральное выражение не является полным дифференциалом некоторой функции, то интеграл (7.4) вычисляется приближенно одним из численных способов.

Размерность работы - Нм.

Чтобы охарактеризовать работу с точки зрения времени, в течение которого она производится, вводится понятие *мощности* N как отношения элементарной работы к элементарному промежутку времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \quad (7.5)$$

Из полученного выражения видно, что мощность равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости точки ее приложения.

7.2. Вычисление работы в некоторых частных случаях

Работа силы тяжести. Пусть точка M весом G переместилась в пространстве по некоторой траектории L из точки M_1 в точку M_2 (рис.7.2). Предположим, что движение рассматривается по отношению к системе координат, в которой ось z направлена по вертикали вверх. В выбранной системе отсчета проекции силы тяжести на координатные оси равны:

$$G_x = G_y = 0, \quad G_z = -G. \quad (7.6)$$

Подставляя (7.6) в (7.3), вычисляем элементарную работу силы G :

$$\delta A = -G dz. \quad (7.7)$$

В данном случае элементарная работа представляет собой дифференциал функции Gz :

$$\delta A = -G dz = -d(Gz) = dA. \quad (7.8)$$

Работа силы тяжести на конечном участке M_1M_2 равна

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA = - \int_{M_1}^{M_2} G dz = G(z_1 - z_2). \quad (7.9)$$

Таким образом, *работа силы тяжести равна произведению веса на разность высот начального и конечного положения точки*, причем работа положительна, если конечное положение ниже начального, и отрицательна - в противоположном случае.

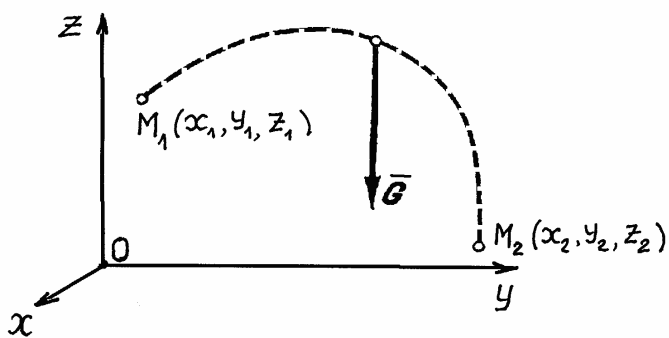


Рис.7.2

Из (7.9) видно, что *работа силы тяжести не зависит от вида траектории точки* (траектория L никак не фигурирует в (7.9)).

Силы, обладающие таким свойством, называются *потенциальными*.

В случае твердого тела работу силы тяжести следует определять так:

$$A = G(z_{c1} - z_{c2}), \quad (7.10)$$

где G - вес всего тела, z_{c1}, z_{c2} - координаты центра тяжести соответственно в начальном и конечном положениях тела.

Работа упругой силы. Груз M , лежащий на горизонтальной плоскости, прикреплен к свободному концу пружины (рис.7.3).

Точка O - положение конца пружины в недеформированном состоянии (ℓ_0 - длина недеформированной пружины). Примем эту точку за начало координат.

Точка О - равновесное положение груза М. Если же оттянуть груз М от равновесного положения О, удлинив пружину до величины ℓ , то на груз будет действовать упругая сила F , направленная к точке О.

По закону Гука величина этой силы пропорциональна удлинению $\Delta\ell$ пружины. Так как в рассматриваемом случае $\Delta\ell = x$, то по модулю упругая сила равна

$$F = c|\Delta\ell| = c|x|. \quad (7.11)$$

Коэффициент c , входящий в это выражение, называется *коэффициентом жесткости пружины*.

Проекция упругой силы на ось x равна

$$F_x = -cx. \quad (7.12)$$

Элементарная работа упругой силы, согласно (7.3), равна

$$\delta A = F_x dx = -cx dx = d\left(-\frac{cx^2}{2}\right) = dA. \quad (7.13)$$

Полную работу, совершаемую упругой силой, при перемещении груза из положения $M_0(x_0)$ в положение $M_1(x_1)$ подсчитываем по формуле (7.4):

$$A = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{x_0}^{x_1} F_x dx = - \int_{x_0}^{x_1} cx dx = -\frac{1}{2}c(x_1^2 - x_0^2). \quad (7.14)$$

В частности, если $x_0 = 0$, а $x_1 = x$, то выражение (7.14) упрощается:

$$A = -\frac{cx^2}{2}. \quad (7.15)$$

Работа упругой силы не зависит от вида траектории, следовательно, упругая сила также является *потенциальной*.

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Элементарная работа силы F , приложенной к вращающемуся телу (рис.7.4), равна

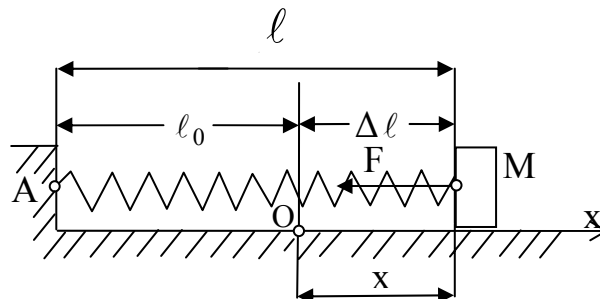


Рис.7.3

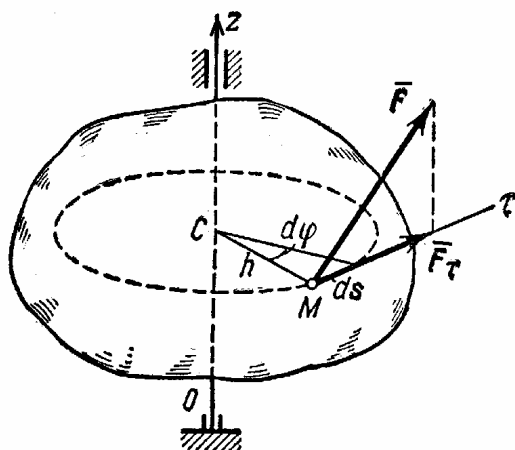


Рис.7.4

$$\delta A = F_t ds$$

или, так как $ds = h d\varphi$,

$$\delta A = F_t h d\varphi, \quad (7.16)$$

где $d\varphi$ - угол поворота тела.

Произведение $F_t h$, содержащееся в (7.16), представляет собой момент силы F относительно оси вращения:

$$M_z = F_t h. \quad (7.17)$$

Подставляя (7.17) в (7.16), получаем

$$\delta A = M_z d\varphi, \quad (7.18)$$

следовательно, элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на элементарный угол поворота тела.

При повороте тела на конечный угол φ работа равна

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \quad (7.19)$$

Если $M_z = \text{const}$, то

$$A = M_z \varphi. \quad (7.20)$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся телу, вычисляется по формуле:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega. \quad (7.21)$$

Работа сил реакций при скольжении тела по шероховатой поверхности. На точку M тела, движущегося по шероховатой поверхности или кривой (рис.7.5), действует сила нормальной реакции N и сила трения, равная

$$F_{\text{тр}} = f N, \quad (7.22)$$

где f - коэффициент трения скольжения.

Сила трения направлена в сторону, противоположную перемещению точки.

Элементарная работа нормальной силы реакции равна

$$\delta A = N ds \cos(\vec{N}, \vec{v}) = N ds \cos 90^\circ = 0. \quad (7.23)$$

Работа силы трения на участке от M_0 до M_1 , согласно (7.4), равна

$$A = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} f N ds.$$

Если величина силы трения постоянна, то

$$A = -F_{\text{тр}} s, \quad (7.24)$$

где s - длина кривой $M_0 M_1$.

Таким образом, работа силы нормальной реакции при скольжении тела равна нулю, а работа силы трения всегда отрицательна.

Величина работы силы трения зависит от длины дуги $M_0 M_1$, следовательно, сила трения является силой *непотенциальной*.

Работа сил трения, действующих на катящееся тело. На колесо радиуса R и веса P , катящееся по плоскости *без скольжения*, действует сила трения, препятствующая скольжению точки B . Сначала рассмотрим случай, когда сопротивлением качению можно пренебречь (рис.7.6 а). В этом случае элементарная работа силы трения равна

$$\delta A = -F_{\text{тр}} ds_B.$$

Но точка B является мгновенным центром скоростей, следовательно, $v_B = 0$ и $ds_B = v_B dt = 0$, поэтому $\delta A = 0$.

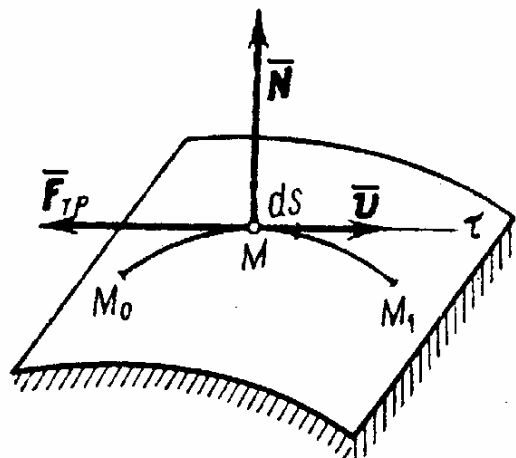


Рис.7.5

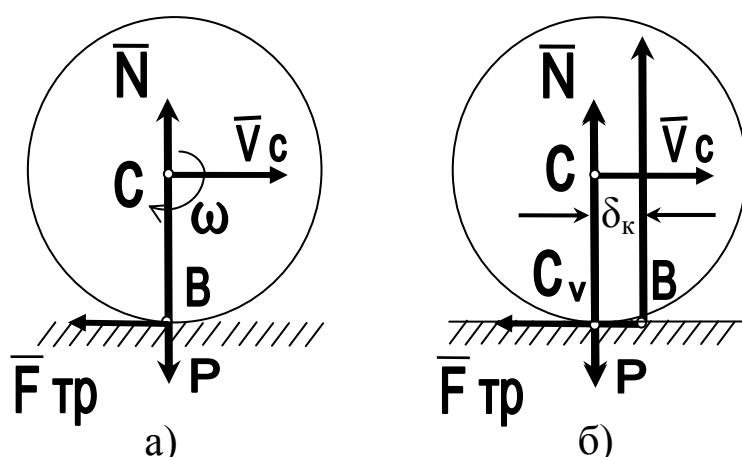


Рис.7.6

вследствие деформаций, касание тел происходит не в точке C_v , а вдоль некоторой площадки BC_v (рис.7.6 б). Из-за этого равнодействующая N нормальных реакций сдвигается на величину δ_k по направлению движения. При этом элементарная работа силы $F_{тр}$, приложенной в точке C_v , по-прежнему будет равна нулю, а работа смещенной нормальной реакции, как силы, приложенной к вращающемуся телу, может быть подсчитана по формуле (7.18):

$$\delta A_K^{тр} = -M_K^{тр} d\varphi, \quad (7.25)$$

где $M_K^{тр}$ - момент трения качения, равный моменту силы N относительно мгновенного центра скоростей:

$$M_K^{тр} = \delta_k N. \quad (7.26)$$

Величина δ_k называется *коэффициентом трения качения*. Знак минус в выражении (7.25) указывает на то, что работа момента трения качения тормозит вращение (момент трения качения направлен в сторону, противоположную угловой скорости колеса).

Так как $d\varphi = \frac{ds_c}{R}$, где ds_c - элементарное перемещение центра C колеса, то подставляя это выражение, а также (7.26) в (7.25), получаем:

$$\delta A_K^{тр} = -\frac{\delta_k}{R} N ds_c. \quad (7.27)$$

Таким образом, при качении *без скольжения и без учета сопротивления качению, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю.*

Теперь рассмотрим случай, когда сопротивление качению необходимо учитывать. Строго говоря,

Если $N = \text{const}$, то полная работа сил сопротивления качению равна

$$A_{\text{к}}^{\text{тр}} = -\frac{\delta_{\text{к}}}{R} N s_{\text{с}}. \quad (7.28)$$

Отношение $\delta_{\text{к}}/R$ мало, что позволяет пренебрегать во многих задачах сопротивлением качению.

7.3. Теорема об изменении кинетической энергии

В основу вывода этой теоремы положим дифференциальное уравнение (7.1) движения материальной точки:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i. \quad (7.29)$$

Умножим скалярно обе части (7.29) на элементарное перемещение i -той точки, т.е. на дифференциал $d\vec{r}_i$ радиуса-вектора этой точки:

$$m_i \vec{a}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i^e d\vec{r}_i + \vec{F}_i^i d\vec{r}_i. \quad (7.30)$$

Преобразуем левую часть (7.30):

$$m_i \vec{a}_i d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} d\vec{v}_i = m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = d\left(m_i \frac{\vec{v}_i^2}{2}\right) = dE_{\text{ки}} \quad (7.31)$$

Произведения, стоящие в правой части выражения (7.30), представляют собой элементарную работу сил. Учитывая сказанное, а также (7.31), запишем (7.30) в таком виде:

$$dE_{\text{ки}} = \delta A_i^e + \delta A_i^i, \quad (7.32)$$

где δA_i^e - элементарная работа равнодействующей всех внешних сил, приложенных к i -той точке, а δA_i^i - элементарная работа равнодействующей всех внутренних сил, приложенных к той же точке.

Уравнение (7.32) выражает теорему об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной форме. Проинтегрировав (7.32), получаем эту же теорему в конечной форме:

$$E_{\text{ки}} - E_{\text{ки}0} = A_i^e + A_i^i. \quad (7.33)$$

Чтобы получить теорему об изменении кинетической энергии системы, просуммируем обе части выражения (7.32) по всем точкам системы:

$$\Sigma dE_{ki} = \Sigma \delta A_i^e + \Sigma \delta A_i^i,$$

но $\Sigma dE_{ki} = d\Sigma E_{ki} = dE_k$, следовательно,

$$dE_k = \Sigma \delta A_i^e + \Sigma \delta A_i^i. \quad (7.34)$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме: *приращение кинетической энергии системы на элементарном участке пути равно алгебраической сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на этом участке пути.*

Проинтегрировав обе части (7.34) в пределах, соответствующих перемещению системы из начального положения, где кинетическая энергия равна E_{k0} , в конечное положение, в котором кинетическая энергия равна E_k , будем иметь

$$E_k - E_{k0} = \Sigma A_i^e + \Sigma A_i^i. \quad (7.35)$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в конечном виде: *изменение кинетической энергии на конечном перемещении равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе на этом перемещении.*

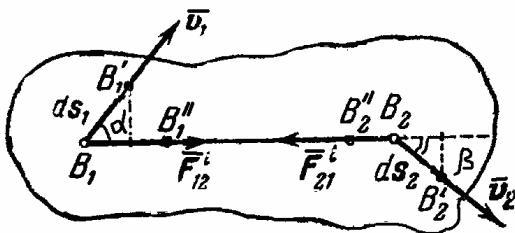


Рис.7.7

В отличие от предыдущих теорем внутренние силы не исключаются. Однако в частном случае, когда система состоит из абсолютно твердых тел с абсолютно недеформируемыми связями, работа внутренних сил равна нулю. Покажем это на примере одного тела. Пусть точки B_1 и B_2 твердого тела (рис.7.7), взаимодействующие между собой силами \vec{F}_{12}^i и \vec{F}_{21}^i ($\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i$), имеют в данный момент скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 . За время dt эти точки переместятся в положение B_1' и B_2' на $ds_1 = v_1 dt$ и $ds_2 = v_2 dt$, на-

правленные по векторам их скоростей. Элементарная работа внутренних сил на этом перемещении равна

$$\Sigma \delta A^i = F_{12}^i ds_1 \cos \alpha + F_{21}^i ds_2 \cos(180^\circ - \beta) = F dt (v_1 \cos \alpha - v_2 \cos \beta), \quad (7.36)$$

где F - модуль внутренних сил.

Выражение, стоящее в скобках в (7.36), на основании теоремы о проекциях скоростей концов отрезка на направление самого отрезка, равно нулю, следовательно, *работа внутренних сил твердого тела на любом перемещении тела равна нулю*:

$$\Sigma \delta A^i = 0. \quad (7.37)$$

Если же тело деформируемое, то точка B_1 перейдет в положение B_1'' , а точка B_2 - в положение B_2'' (рис.7.7), при этом каждая из сил \vec{F}_{12}^i и \vec{F}_{21}^i совершит положительную работу и сумма работ внутренних сил не будет равняться нулю.

Следует иметь в виду, что в выражения $\Sigma \delta A_i^e$ и ΣA_i^e , фигурирующие в (7.34) и (7.35), входит работа не только активных (заданных) сил, но и работа реакций связей.

Существуют такие связи сумма работ реакций которых на элементарном перемещении системы равна нулю. Они называются *идеальными*. К идеальным связям относятся:

- 1) абсолютно гладкая поверхность при скольжении тела (работа нормальной реакции равна нулю);
- 2) шероховатая поверхность при качении тела без скольжения и без учета деформаций (работа нормальной реакции и работа силы трения, как сил, приложенных в мгновенном центре скоростей, равны нулю);

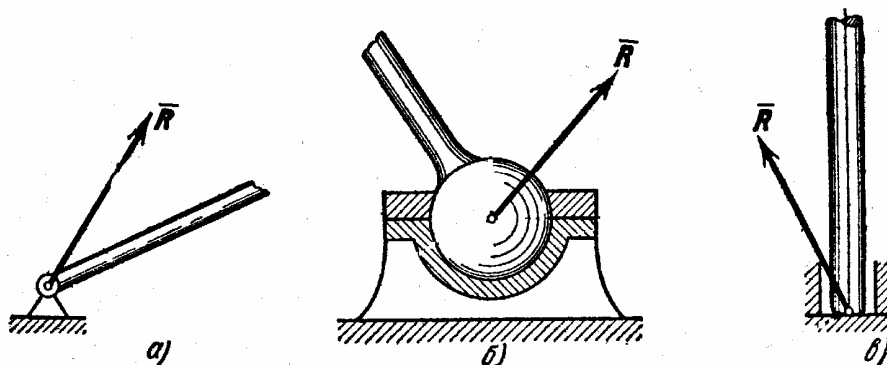


Рис.7.8

- 3) жесткий нерастяжимый стержень, связывающий два тела;
- 4) цилиндрический шарнир (рис.7.8а), шаровой шарнир (рис.7.8б) и подпятник (рис.7.8в) без учета силы трения (точка приложения реакции R остается неподвижной при любом перемещении системы, поэтому работа равна нулю);

Ценность теоремы об изменении кинетической энергии системы заключается в том, что при идеальных связях в нее не входят реакции, в то время как в теоремы об изменении количества движения и кинетического момента реакций входят.

7.4. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии

Пространство, в котором на помещенную в него материальную точку действует сила, величина и направление которой зависят только от координат этой точки, называется *силовым полем*.

Материальную точку, находящуюся под действием силового поля, принято называть для краткости *пробной точкой*.

В теоретической механике особое значение имеют поля, в которых элементарная работа силы, действующей на пробную точку, представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x,y,z)$. Такие поля называются потенциальными.

При этом под x, y, z подразумеваются координаты точки поля, в которой находится пробная точка.

Функция $U(x,y,z)$ является однозначной функцией координат и носит название *силовой функции* поля. Сила, действующая в потенциальном поле, называется *потенциальной*. Ее проекции на оси координат связаны с силовой функцией следующим образом:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (7.38)$$

Так как в этом случае

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU(x,y,z), \quad (7.39)$$

то работа силы поля при перемещении материальной точки из положения M_1 в M_2 равна

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} dU = U_2 - U_1, \quad (7.40)$$

где U_1 и U_2 - соответственно значения силовой функции в точках M_1 и M_2 поля.

Из (7.40) следует, что *работа силы потенциального поля не зависит ни от вида траектории движения точки, ни от закона движения по этой траектории.*

Силы, работа которых зависит от указанных факторов, называются *непотенциальными*. К таким силам относятся, например, силы трения и силы сопротивления среды.

Для пробной точки, движущейся в каком-либо потенциальном поле, вводится понятие *потенциальной энергии*. Она рассматривается как величина, характеризующая «запас работы» силы поля, приложенной в указанной точке.

Для возможности сравнения «запасов работы» выбирается особая точка поля, в которой «запас работы» условно принимается равным нулю. Иначе говоря, это такая точка, в которой назначается ноль отсчета силовой функции U . Эту точку будем называть нулевой точкой поля.

Потенциальной энергией материальной точки i в данном положении M называется скалярная величина $E_{\pi i}$, равная работе силы поля при перемещении материальной точки из положения M в нулевую точку поля:

$$E_{\pi i} = \int_{(M)}^{(0)} dA = U_0 - U,$$

или, поскольку по договоренности $U_0 = 0$,

$$E_{\pi i} = -U. \quad (7.41)$$

Из полученного выражения видно, что *потенциальная энергия в любой точке потенциального поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.*

Пусть все внешние и внутренние силы, действующие на систему, будут *потенциальными* и пусть система переходит из положения 1 в положение 2. Тогда для каждой из точек системы работа приложенных сил равна

$$A_i = U_2 - U_1 = E_{\text{п}i_1} - E_{\text{п}i_2} . \quad (7.42)$$

Работа сил поля для всей системы получается суммированием обеих частей (7.42) по всем точкам системы:

$$\Sigma A_i = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2} , \quad (7.43)$$

где $E_{\text{п}1}$ и $E_{\text{п}2}$ - потенциальная энергия всей системы соответственно в начальном и конечном положениях.

Подставляя (7.43) в (7.35), получим:

$$\Sigma A_i = E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1} = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}$$

или

$$E_{\text{к}1} + E_{\text{п}1} = E_{\text{к}2} + E_{\text{п}2} = \text{const} . \quad (7.44)$$

Следовательно, *при движении системы в потенциальном поле сумма кинетической и потенциальной энергий в каждом положении системы есть величина постоянная*. В этом состоит закон сохранения механической энергии.

Сумма $E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$ называется *полной механической энергией системы*.

Система сил, для которой справедлив закон сохранения механической энергии, называется *консервативной*.

Значение полученного закона выявляется при рассмотрении его в связи с общим законом сохранения энергии. При решении же задач можно во всех случаях пользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

7.5. Решение задач

Теоремой об изменении кинетической энергии удобно пользоваться при решении задач, в которых требуется определить скорость какой либо точки системы как функцию ее перемещения. Обычно в таких задачах в

число данных входят постоянные или зависящие от перемещений силы, а также перемещения и скорости тел в начале и конце перемещений. С помощью этой теоремы можно находить и ускорения тел.

Задача 7.1. Стержень АВ весом P и длиной ℓ подвешен на шарнире А (рис.7.9). Пренебрегая трением в шарнире определить наименьшую угловую скорость ω_0 , которую надо сообщить вертикально висящему стержню, чтобы он достиг горизонтального положения.

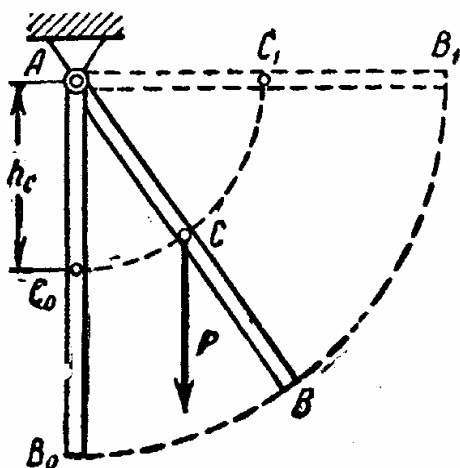


Рис.7.9

Решение. Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$E_k - E_{k0} = \Sigma A^e + \Sigma A^i. \quad (7.45)$$

В качестве системы в данной задаче фигурирует стержень АВ. Работа ΣA^i внутренних сил, как сил взаимодействия в твердом теле, равна нулю. Внешними силами, приложенными к стержню АВ, являются сила тяжести и

реакция шарнира А. Но точка приложения реакции при движении стержня остается неподвижной, следовательно, работа реакции при перемещении стержня равна нулю. Работа силы тяжести, как было показано выше, не зависит от траектории движения и равна (рис.7.9)

$$A = -Ph_c = -P\ell/2.$$

Кинетическая энергия E_k в конечном положении стержня равна нулю, а в начальном - $E_{k0} = J_A \omega_0^2 / 2$. Учитывая все сказанное, записываем уравнение (7.45) в таком виде:

$$-\frac{J_A \omega_0^2}{2} = -P\frac{\ell}{2},$$

отсюда, имея в виду, что $J_A = \frac{P\ell^2}{3g}$, получаем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}.$$

Задача 7.2. Однородный цилиндр весом P и радиусом R падает вниз без начальной скорости, разматывая нить (рис.7.10). Определить скорость и ускорение оси C цилиндра в зависимости от высоты h его опускания.

Решение. По теореме об изменении кинетической энергии для цилиндра, как для твердого тела, имеем:

$$E_k - E_{k0} = \Sigma A_i^e, \quad (7.46)$$

где $E_{k0} = 0$, поскольку в начальный момент цилиндр не имел скорости.

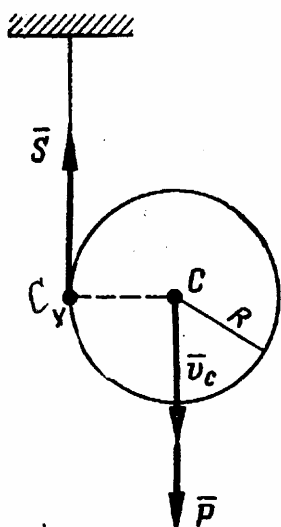


Рис.7.10

Внешними силами являются сила тяжести и реакция нити S . Но сила S приложена в мгновенном центре скоростей, следовательно, ее работа равна нулю. Работа силы тяжести при опускании цилиндра на высоту h равна $A = Ph$.

Кинетическая энергия цилиндра в конечном положении, как тела, совершающего плоскопараллельное движение, равна

$$E_k = \frac{P}{g} \cdot \frac{v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}$$

или, учитывая, что $v_c = \omega R$, $J_c = \frac{PR^2}{2g}$,

$$E_k = \frac{3P}{4g} v_c^2.$$

Уравнение (7.46) после подстановки полученных данных приобретает вид:

$$\frac{3P}{4g} v_c^2 = Ph, \quad (7.47)$$

откуда

$$v_c = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}.$$

Чтобы определить ускорение точки C , продифференцируем обе части выражения (7.47) по времени:

$$\frac{3}{2g} v_c a_c = \frac{dh}{dt},$$

или (так как $dh/dt = v_c$)

$$\frac{3}{2g} v_c a_c = v_c,$$

откуда, сокращая на v_c , получаем $a_c = 2g/3$.

Задача 7.3. Груз M весом Q при помощи нерастяжимой нити, перекинутой через блок A , приводит в движение каток B , катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости (рис.7.11). Блок A и каток B - однородные цилиндры весом P и радиусом R каждый. Коэффициент трения качения катка равен δ_k . Трением в осях катка и блока и массой нити пренебречь. Определить скорость груза M в зависимости от высоты h опускания.

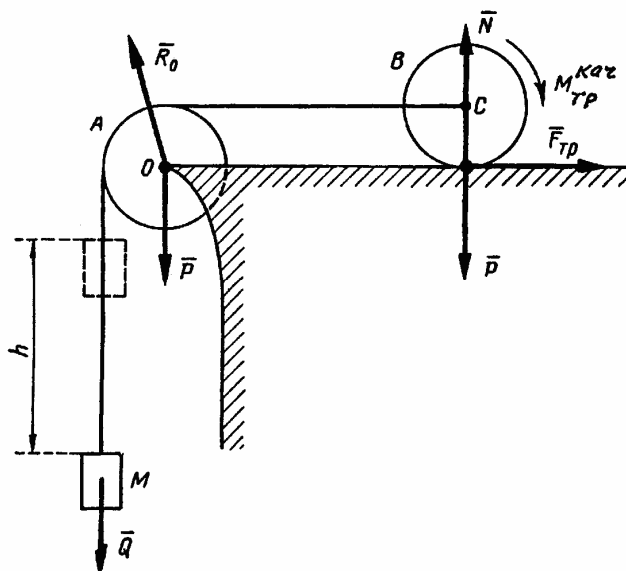


Рис.7.11

Решение. Для решения задачи используем теорему об изменении кинетической энергии ситемы, состоящей из груза, блока и катка:

$$E_k - E_{k0} = \Sigma A_i^e + \Sigma A_i^i.$$

По условию $E_{k0} = 0$, а кинетическая энергия системы в конечном положении равна:

$$E_k = E_1 + E_2 + E_3,$$

причем E_1, E_2, E_3 - кинетические энергии груза M , блока A и катка B соответственно.

Груз M совершает поступательное движение, блок A - вращательное, а каток B - плоскопараллельное, поэтому

$$E_1 = \frac{Qv^2}{2g}, \quad E_2 = \frac{J_0 \omega_A^2}{2}, \quad E_3 = \frac{Pv_c^2}{2g} + \frac{J_c \omega_B^2}{2},$$

где v - скорость груза M в конечном положении. Так как

$$J_0 = J_c = \frac{PR^2}{2g}, \quad \omega_A = \frac{v}{R}, \quad v_c = v, \quad \omega_B = \frac{v_c}{R} = \frac{v}{R},$$

то

$$E_k = \frac{v^2}{2g}(Q + 2P).$$

Поскольку система состоит из твердых тел, соединенных нерастяжимой нитью, работа внутренних сил равна нулю, т.е. $\Sigma A_i^i = 0$.

Работа силы P - силы тяжести блока A и работа реакции R_0 шарнира O равны нулю, так как точки приложения этих сил не смещаются.

Сила веса P катка B не создает работы, поскольку эта сила ортогональна перемещению точки ее приложения.

Силы N и $F_{тр}$ приложены в мгновенном центре скоростей и, следовательно, работы тоже не производят.

Работу производят только сила Q и момент $M_{тр}^{кач}$ трения качения:

$$\Sigma A_i^e = Qh - M_{тр}^{кач} \varphi$$

или с учетом, что $M_{тр}^{кач} = \delta_k N = \delta_k P$, а $\varphi = h/R$,

$$\Sigma A_i^e = Qh - \delta_k Ph / R.$$

Подставляя полученные соотношения в выражение теоремы об изменении кинетической энергии, имеем:

$$\frac{v^2}{2g}(Q + 2P) = Qh - \delta_k Ph / R,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2gh(Q - \delta_k P / R)}{Q + 2P}}.$$

Задача 7.4. Механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение из состояния покоя посредством постоянного вращающего момента M , приложенного к кривошипу OA (рис.7.12).

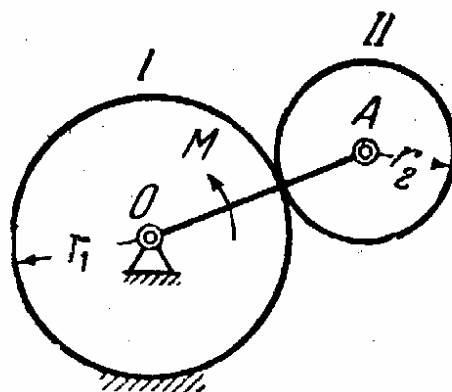


Рис.7.12

Определить угловую скорость кривошипа в зависимости от его угла поворота, если неподвижное колесо I имеет радиус r_1 , подвижное колесо II - радиус r_2 и вес P , а кривошип OA - вес Q . Колесо II считать однородным диском, а кривошип - однородным стержнем.

Решение. Используем теорему об изменении кинетической энергии:

$$E_k - E_{k_0} = \Sigma A_i^e + \Sigma A_i^i.$$

Здесь

$$\Sigma A_i^i = 0, \quad E_{k_0} = 0,$$

$$E_k = E_k^{кр} + E_k^{кол} = J_0^{кр} \cdot \frac{\omega_{кр}^2}{2} + \frac{P}{g} \cdot \frac{v_A^2}{2} + J_A^{кол} \cdot \frac{\omega_{кол}^2}{2},$$

где индекс «кр» относится к кривошипу, а «кол» - к колесу. Определяем величины, входящие в полученное выражение. Моменты инерции кривошипа и колеса соответственно равны

$$J_0^{кр} = \frac{Q}{g} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{3}, \quad J_A^{кол} = \frac{P}{g} \cdot \frac{r_2^2}{2}.$$

Так как

$$v_A = \omega_{кр}(r_1 + r_2), \quad \omega_{кол} = \frac{v_A}{r_2} = \omega_{кр} \frac{(r_1 + r_2)}{r_2},$$

то

$$E_k = E_k^{кр} + E_k^{кол} = \frac{Q}{g} \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{3} \cdot \frac{\omega_{кр}^2}{2} + \frac{P}{g} \cdot \frac{v_A^2}{2} + \frac{P}{g} \cdot \frac{r_2^2}{2} \cdot \frac{\omega_{кол}^2}{2} =$$

$$= \frac{\omega_{\text{кр}}^2 (r_1 + r_2)^2}{12g} (2Q + 9P).$$

Работа внешних сил равна работе приложенного момента (работа сил тяжести равна нулю, поскольку механизм расположен в горизонтальной плоскости):

$$\Sigma A_i^e = M\varphi.$$

Подставляя полученные соотношения в выражение теоремы об изменении кинетической энергии, имеем:

$$\frac{\omega_{\text{кр}}^2 (r_1 + r_2)^2}{12g} (2Q + 9P) = M\varphi,$$

отсюда

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{2}{(r_1 + r_2)} \sqrt{\frac{3Mg}{2Q + 9P}} \varphi.$$

Задача 7.5. В кулачковом механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, эксцентрик *A* приводит в возвратно-поступательное движение ролик *B* со штангой *D* (рис.7.13). Пружина *E*, соединенная со штангой, обеспечивает постоянный контакт ролика с эксцентриком. Вес эксцентрика равен *P*, эксцентриситет *e* равен половине его радиуса; коэффициент упругости пружины равен *c*. При крайнем левом положении штанги пружина не напряжена.

Какую угловую скорость надо сообщить эксцентрику для того, чтобы он переместил штангу *D* из крайнего левого положения (рис.7.14а) в крайнее правое положение (рис.7.14б)? Массой ролика, штанги и пружины пренебречь. Эксцентрик считать однородным круглым диском.

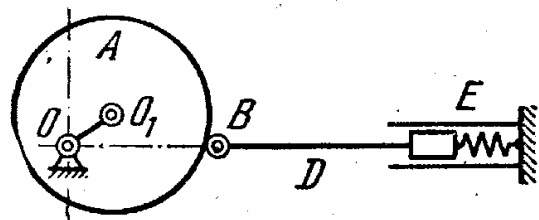


Рис.7.13

Решение. В качестве механической системы выбираем эксцентрик А и используем теорему об изменении кинетической энергии эксцентрика:

$$E_k - E_{k_0} = \Sigma A_i^e + \Sigma A_i^i.$$

Вычисляем кинетическую энергию эксцентрика в начальном положении:

$$E_{k_0} = \frac{J_0 \omega_0^2}{2}.$$

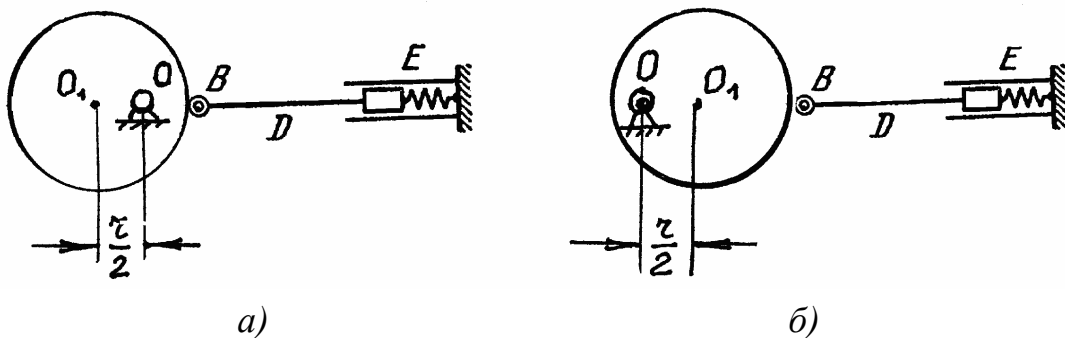


Рис.7.14

Так как осевой момент инерции эксцентрика относительно оси вращения равен, в соответствии с теоремой Штейнера-Гюйгенса,

$$J_0 = J_{O_1} + \frac{P}{g} e^2 = \frac{P r^2}{2g} + \frac{P}{g} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3P r^2}{4g},$$

то

$$E_{k_0} = \frac{3P r^2}{8g} \omega_0^2.$$

Кинетическая энергия эксцентрика в конечном положении (рис.7.14б) равна нулю: $E_k = 0$.

Теперь определяем работу внешних и внутренних сил, приложенных к эксцентрику. Так как эксцентрик - это твердое тело, то $\Sigma A_i^i = 0$. К внешним силам относятся сила P веса эксцентрика и сила пружины, равная $F = -cx$. Сила веса не создает работы, потому что она перпендикулярна перемещению точки ее приложения (механизм расположен в горизонтальной плоскости). Сила пружины при перемещении точки B из крайнего ле-

вого положения в крайнее правое положение, т.е. на расстояние $2e = r$ (рис.7.14), производит работу, равную, согласно (7.15),

$$\Sigma A_i^e = -c \frac{r^2}{2}.$$

Теорема об изменении кинетической энергии с учетом полученных выражений приобретает вид:

$$-\frac{3Pr^2}{8g} \omega_0^2 = -c \frac{r^2}{2},$$

отсюда

$$\omega_0 = 2\sqrt{\frac{cg}{3P}}.$$

7.6. Контрольные вопросы

- 7.1. Каково векторное выражение элементарной работы?
- 7.2. По какой формуле подсчитывается элементарная работа силы, заданной своими проекциями на координатные оси?
- 7.3. Какие силы называются потенциальными?
- 7.4. По какой формуле вычисляется мощность силы?
- 7.5. По какой формуле вычисляется мощность вращающего момента?
- 7.6. Чему равна работа силы тяжести?
- 7.7. Является ли сила упругости пружины потенциальной силой?
- 7.8. Чему равна элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу?
- 7.9. Чему равна работа внутренних сил абсолютно твердого тела на любом его перемещении?
- 7.10. Чему равен момент трения качения?
- 7.11. Какие связи называются идеальными?
- 7.12. Чему равна полная механическая энергия системы?
- 7.13. Как записывается закон сохранения механической энергии?
- 7.14. Для каких систем справедлив закон сохранения механической энергии?

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ГЛАВА 8. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

8.1. Классификация связей

Теоретическая механика, изложенная в предыдущих главах, носит название ньютоновской или геометрической механики. Отличительной чертой этой механики является то, что связи, наложенные на механическую систему, выступают в ней в виде тел, действие которых на механическую систему заменяется силами реакций.

Великий французский механик Лагранж (1736-1813) создал механику, в которой связи описываются уравнениями, которым подчиняются координаты и скорости точек механической системы, и эта механика получила название аналитической механики.

В аналитической механике связи классифицируются по разным признакам. *Связи могут быть голономными и неголономными.* Голономные связи налагают ограничения на координаты точек механической системы, а неголономные - не только на координаты, но и на скорости точек системы, и при этом их уравнения не могут быть проинтегрированы.

Уравнения, описывающие голономные связи, наложенные на систему, состоящую из n материальных точек, имеют вид:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0. \quad (8.1)$$

Примером голономных связей могут служить связи, наложенные на кривошипно-шатунный механизм (рис.8.1).

Если для задания положений механизма пользоваться координатами точек A и B , то уравнения связей в выбранной системе

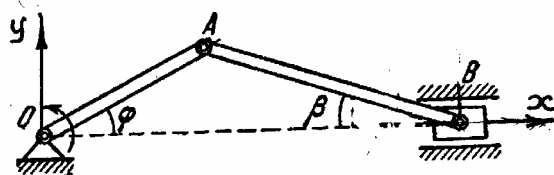


Рис.8.1

отсчета будут такими:

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2, \quad (8.2)$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = \ell^2, \quad (8.3)$$

$$y_B = 0, \quad (8.4)$$

где r - длина кривошипа OA , ℓ - длина шатуна AB .

Уравнения неголономных связей выглядят так:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) = 0. \quad (8.5)$$

В качестве примера системы с неголономными связями рассмотрим бильярдный шар (рис.8.2). Центр C шара во все время движения должен находиться на расстоянии r от стола H (r - радиус шара), а точка M касания шара со столом H является мгновенным центром скоростей, поскольку шар движется по столу без проскальзывания. Следовательно, уравнения связей будут такими:

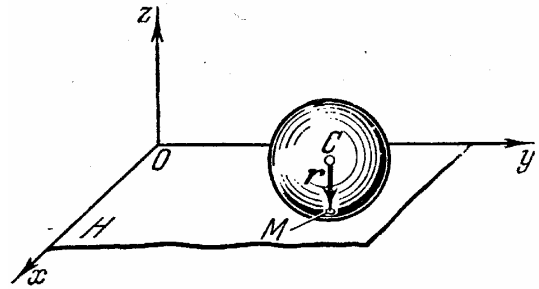


Рис.8.2

$$z_C = r, \quad (8.6)$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0. \quad (8.7)$$

Векторное уравнение (8.7) в проекциях на оси координат дает три скалярных уравнения, два из которых не интегрируемы. Это означает, что если известно начальное и конечное положения шара, то невозможно указать

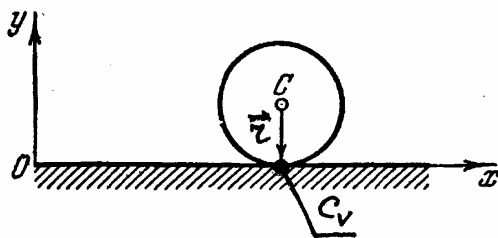


Рис.8.3

траекторию, по которой перемещался центр шара из начального положения в конечное. Именно этим и характеризуются неголономные связи.

Рассмотрим еще один пример. Пусть колесо радиусом r катится без

скольжения по прямолинейному рельсу (рис.8.3). Может показаться, что связи, наложенные на колесо, как и в предыдущем случае, являются неголономными, поскольку точка касания колеса с рельсом представляет собой мгновенный центр скоростей. Однако это не так. Уравнение связи, соответствующее рис.8.3, а именно,

$$\vec{v}_{C_v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$$

может быть записано в проекциях на оси координат:

$$\dot{x}_c - r\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{y}_c = 0$$

и проинтегрировано: $x_c = r\varphi, \quad y_c = r.$

Тем самым определена траектория центра колеса при переходе из одного положения в другое (отрезок прямой, параллельной рельсу). Следовательно, связи, наложенные на колесо, являются голономными.

Связи могут быть стационарными и нестационарными. Если связи не изменяются с течением времени (время t не входит в уравнения связей), то они *стационарны*, в противном случае - *нестационарны*.

Приведенные выше уравнения связей описывают стационарные связи. Примером системы с голономной нестационарной связью может служить сферический маятник (рис.8.4), подвешенный на нити, длина ℓ которой может укорачиваться по заданному закону $\ell(t)$. Уравнение связи, налагающее ограничение на координаты маятника, будет таким:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2(t).$$

Связи могут быть идеальными и неидеальными. О таких связях говорилось в параграфе 7.6. Напомним, что *идеальными связями называют связи,*

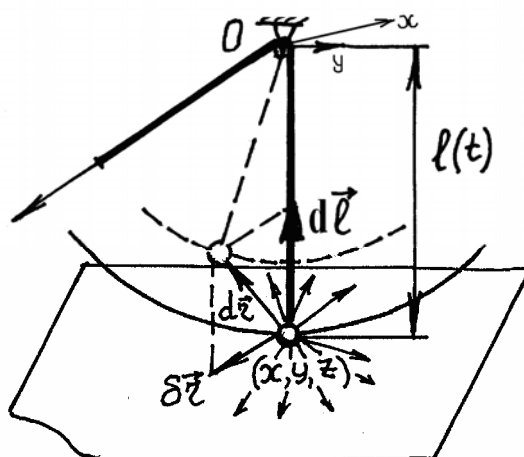


Рис.8.4

сумма работ реакций которых на любом возможном перемещении системы равна нулю.

8.2. Возможные перемещения системы.

Число степеней свободы

Рассмотрим бесконечно малые перемещения точек системы, совместимые со связями, наложенными на систему (совместимость означает ненарушение связей). В число этих перемещений входят *действительные перемещения, происходящие под действием приложенных сил*. Если связи не стационарны, то действительные перемещения можно представить состоящими из двух слагаемых: 1) из тех перемещений, которые имели бы место, если бы связи перестали изменяться (стали бы фиксированными) и 2) из перемещений, обусловленных изменением самих связей. Например, для сферического маятника (рис.8.4) действительное бесконечно малое перемещение описывается вектором

$$d\vec{r} = \delta\vec{r} + d\vec{\ell},$$

где $\delta\vec{r}$ - возможное перемещение (первое слагаемое), а $d\vec{\ell}$ - перемещение, вызванное изменением связи (второе слагаемое).

Для дальнейшего изложения важны лишь первые слагаемые. Они называются *возможными (виртуальными) перемещениями* и определяются как *воображаемые бесконечно малые перемещения, совместимые со связями, зафиксированными в данный момент*.

В случае стационарных связей действительные бесконечно малые перемещения, происходящие под действием приложенных сил, входят в число возможных перемещений.

Следует иметь в виду, что *возможное перемещение системы* - это некоторый *геометрический образ, всецело определяемый наложенными связями и не связанный с истинным движением системы и действующими силами*.

Для одной и той же механической системы может существовать множество различных возможных перемещений. Однако для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких *независимых* между собой перемещений, с помощью которых

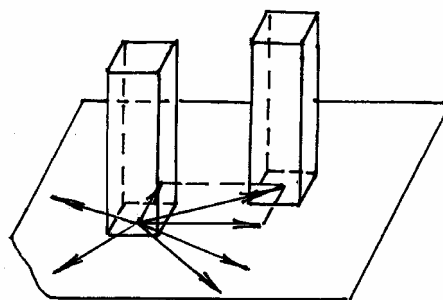


Рис.8.5

можно получить любое другое возможное перемещение. Например, брусок, стоящий на горизонтальной плоскости (рис.8.5), можно переместить без изменения его ориентации по самым разным направлениям по этой плоскости, и все эти бесконечно малые перемещения будут возможными, поскольку связь (плоскость) при этом не нарушится. Однако ясно, что все это множество, показанное стрелками на рис.8.5, можно получить, производя возможные перемещения по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Следовательно, независимых возможных перемещений у бруска, движущегося по плоскости поступательно, всего два.

Чем больше связей наложено на систему, тем меньше независимых возможных перемещений имеет система. Это обстоятельство характеризуется числом степеней свободы системы. *Для систем с голономными стационарными связями число степеней свободы равно числу независимых возможных перемещений системы.*

Свободная материальная точка имеет три степени свободы, поскольку может перемещаться по любому из трех взаимно перпендикулярных направлений, например, вдоль осей x , y , z . Ни одно из указанных перемещений точки не может быть получено путем комбинации перемещений по двум другим направлениям, скажем, перемещение по оси x не может быть получено комбинацией перемещений вдоль осей y и z . Следовательно, каждое из этих перемещений является *независимым*. Ясно, что перемещение точки в произвольном направлении можно получить комбинацией перемещений вдоль трех координатных осей.

Точка, вынужденная двигаться по заданной поверхности, имеет две степени свободы, а точка, движущаяся по пространственной кривой имеет одну степень свободы.

Каждая связь, наложенная на систему, отнимает одну степень свободы. Если система состоит из n материальных точек и на нее наложено k голономных связей, то число степеней свободы системы равно

$$N = 3n - k. \quad (8.8)$$

Рассмотрим, к примеру, систему, состоящую из двух материальных то-

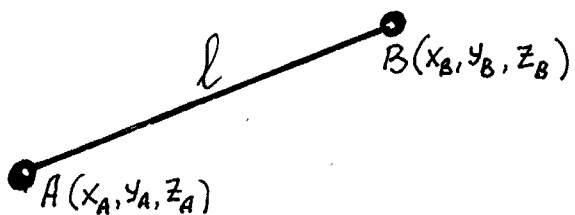


Рис.8.6

чек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, связанных между собой невесомым стержнем длиной ℓ (рис.8.6). На эту систему наложена одна связь (стержень обеспечивает неизменность расстояния

между точками A и B), уравнение которой имеет вид:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = \ell^2.$$

Число степеней свободы такой системы равно $N = 3n - k = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

Свободное твердое тело имеет шесть независимых возможных перемещений: три поступательных перемещения вдоль трех координатных осей и три поворота вокруг этих осей. Следовательно, оно обладает шестью степенями свободы.

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы.

Тело, совершающее плоскопараллельное движение, имеет три степени свободы.

При определении числа степеней свободы механизмов иногда можно пользоваться простым приемом, который продемонстрируем на кривошипно-шатунном механизме (рис.8.1). Поскольку механизм может двигаться, то он имеет по крайней мере одну степень свободы. Закрепим мысленно какое-либо звено, например, кривошип. Если при этом другие звенья механизма могли бы двигаться, то механизм имел бы более одной степени свободы. Но поскольку при неподвижном кривошипе ни шатун, ни ползун

не могут двигаться не разрушив связи, то механизм имеет только одну степень свободы.

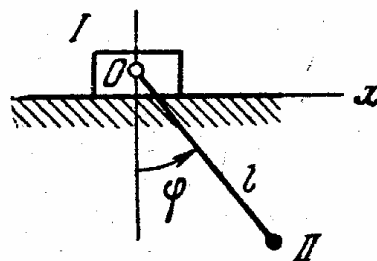


Рис.8.7

Эллиптический маятник (рис.8.7) имеет две степени свободы, поскольку при закреплении ползуна маятник может совершать колебания.

Пример 8.1.

Определить число степеней свободы систем, показанных на рис.8.8 и рис.8.9.

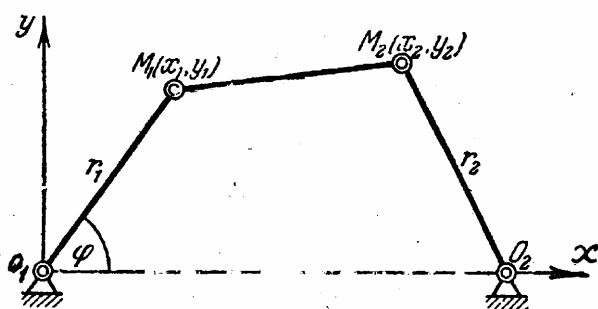


Рис.8.8

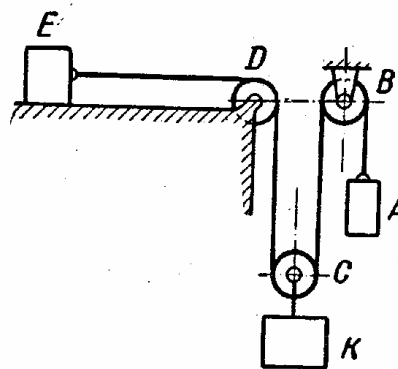


Рис.8.9

Решение. Двухкривошипный механизм (рис.8.8) имеет сколько-то степеней свободы, поскольку может двигаться. Закрепим мысленно кривошип O_1M_1 . При этом другие звенья механизма не смогут перемещаться, не нарушив связей. Следовательно, рассмотренный механизм имеет только одну степень свободы.

Исследуем теперь систему, приведенную на рис.8.9. Будем считать, что грузы А и К могут перемещаться только по вертикали. Так как система может двигаться, то, по крайней мере, одна степень свободы у нее есть. Закрепим мысленно тело Е. При этом груз А может перемещаться как вверх, так и вниз. Следовательно, есть еще одна степень свободы. Если теперь помимо тела Е закрепить и груз А, то тело К не сможет перемещаться по вертикали, не нарушая связи (при перемещении вниз нить порвется, а при перемещении вверх она будет не натянута).

Таким образом, при условии вертикального перемещения тел А и К система, показанная на рис.8.9, имеет две степени свободы. Если же считать, что грузы А и К могут совершать колебания в вертикальной плоскости, то система будет иметь четыре степени свободы.

8.3. Принцип возможных перемещений

В *геометрической* статике был указан способ получения условий равновесия механической системы, состоящей из нескольких сочлененных друг с другом тел. Для составления этих условий механическую систему необходимо было расчленять на отдельные тела и записывать уравнения равновесия для каждого из тел. Такой способ в случае сложных систем, состоящих из многих тел, оказывается мало пригодным из-за своей громоздкости.

Аналитическая статика основана на совершенно иных условиях равновесия, применимых не только к отдельным телам, но и *ко всей системе в целом*. Эти условия вытекают из принципа, использующего возможные перемещения системы. Покажем, как этот принцип – *принцип возможных перемещений Лагранжа* – может быть получен на основе аксиом ньютоновской (геометрической) механики.

Пусть механическая система с идеальными стационарными связями находится в равновесии. На произвольную точку m_i этой системы действует равнодействующая \vec{F}_i активных сил и равнодействующая \vec{R}_i сил реакций

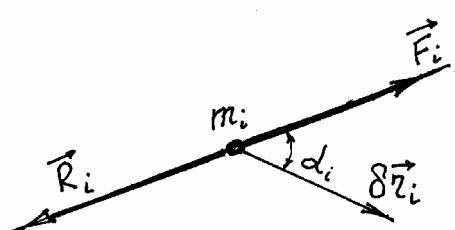


Рис.8.10

(рис.8.10). Так как точка находится в равновесии, то

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0. \quad (8.9)$$

Дадим точке возможное перемещение $\delta \vec{r}_i$ и умножим обе части уравнения (8.9) на $\delta \vec{r}_i$:

$$\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (8.10)$$

Скалярное произведение вектора силы на вектор возможного перемещения точки ее приложения называют *элементарной или возможной (виртуальной) работой* силы и обозначают δA . С учетом этого обозначения выражение (8.10) записывается так:

$$\delta A_i(\vec{F}_i) + \delta A_i(\vec{R}_i) = 0. \quad (8.11)$$

Просуммируем обе части полученного уравнения по всем точкам системы:

$$\sum \delta A_i(\vec{F}_i) + \sum \delta A_i(\vec{R}_i) = 0. \quad (8.12)$$

Так как связи, наложенные на систему, считаются идеальными, то сумма работ сил реакций этих связей на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum \delta A_i(\vec{R}_i) = 0. \quad (8.13)$$

При этом уравнение (8.12) принимает вид:

$$\sum \delta A_i(\vec{F}_i) = 0 \quad (8.14)$$

или

$$\sum F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0, \quad (8.15)$$

где $\delta s_i = |\delta \vec{r}_i|$, α_i - угол между силой и перемещением точки ее приложения.

В аналитической форме условие (8.14) записывается так:

$$\sum (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0. \quad (8.16)$$

Уравнения (8.14)-(8.16) выражают *принцип возможных перемещений Лагранжа* в различных формах записи.

Принцип возможных перемещений, как уже говорилось, весьма эффективен при определении реакций. Однако ни в одну из форм записи этого принципа реакции связей вообще не входят, поскольку связи считаются идеальными. Для возможности применения принципа возможных перемещений к системам с неидеальными связями прибегают к такому приему:

неидеальная связь с трением заменяется идеальной связью (без трения), а сила трения переводится как бы в разряд активных сил.

Этот же прием используют и при определении опорных реакций. При этом механическую систему освобождают от соответствующей опоры, а силу реакции считают как бы активной силой. Если же полная реакция состоит из нескольких составляющих, то характер опоры можно изменить так, чтобы только подлежащая определению реакция перешла в категорию как бы активных сил. Например, для определения вертикальной составляющей реакции шарнирно-неподвижной опоры ее можно заменить шарнирно-подвижной опорой, опорная плоскость катков которой горизонтальна, а вертикальную составляющую силы реакции считать как бы активной силой.

Совокупность активных сил и сил реакций, переведенных в активные силы, называют *задаваемыми* силами. В связи с этим принцип возможных перемещений Лагранжа формулируется следующим образом: *если система со стационарными идеальными связями находится в равновесии, то сумма элементарных работ всех задаваемых сил на любом возможном перемещении системы равна нулю.*

Уравнение (8.14) было получено в предположении, что система находится в равновесии, т. е. (8.14) является необходимым условием равновесия. Покажем, что (8.14) является не только необходимым, но и достаточным условием равновесия системы. Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что в некоторый момент времени равновесие всех или некоторых точек системы нарушается, то есть они получают ускорение. Обозначим количество таких точек через s ($1 \leq s \leq n$) и будем называть их для краткости *неравновесными*. Для этих точек $\vec{F}_k^{(ak)} \neq -\vec{R}_k$ ($1 \leq k \leq s$) и векторы их ускорений \vec{a}_k направлены по диагонали параллелограммов, сторонами которых являются векторы $\vec{F}_k^{(ak)}$ и \vec{R}_k . При этом

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^{(ak)} + \vec{R}_k, \quad (8.17)$$

где m_k - массы точек.

Возникшее движение является действительным и, следовательно, не нарушает связей, наложенных на систему.

В момент нарушения равновесия сообщим системе такое возможное перемещение, при котором векторы возможных перемещений неравновесных точек $\delta \vec{r}_k$ по величине пропорциональны векторам их ускорений и направлены одинаково с ними (рис. 8.11). Иначе говоря, рассмотрим возможное перемещение, при котором:

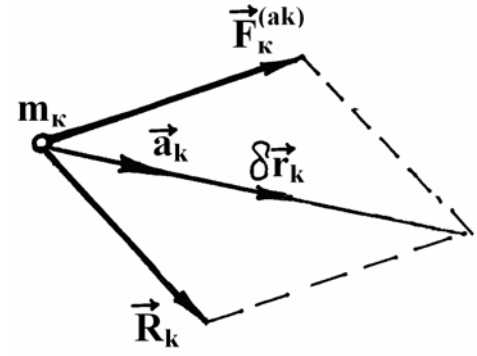


Рис.8.11

$$\delta \vec{r}_k = \lambda_k \cdot \vec{a}_k \quad (8.18)$$

$\lambda_k = \text{const} > 0$; $\delta \vec{r}_j = 0$ при $1 \leq j \leq n - s$.

При этом λ_k имеют соответствующие размерности. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{(ak)} + \vec{R}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= \sum_{k=1}^s (\vec{F}_k^{(ak)} + \vec{R}_k) \cdot \delta \vec{r}_k + \sum_{j=1}^{n-s} (\vec{F}_j^{(ak)} + \vec{R}_j) \cdot \delta \vec{r}_j = \\ &= \sum_{k=1}^s (\vec{F}_k^{(ak)} + \vec{R}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^s (\vec{F}_k^{(ak)} + \vec{R}_k) \cdot \lambda_k \vec{a}_k = \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{\lambda_k}{m_k} (\vec{F}_k^{(ak)} + \vec{R}_k)^2 > 0 \end{aligned} \quad (8.19)$$

Так как связи, наложенные на систему, являются идеальными, то $\sum_{i=1}^n (\vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i) = 0$ на *любом* возможном перемещении. Поэтому из 8.19 следует, что

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{(ak)} \cdot \delta \vec{r}_i) > 0, \quad (8.20)$$

то есть мы получаем противоречие с исходным предположением.

Таким образом, принцип возможных перемещений Лагранжа может быть сформулирован еще так: *необходимым и достаточным условием равновесия механической системы со стационарными идеальными связями является равенство нулю суммы элементарных работ всех задаваемых*

сил, приложенных к системе, на любом возможном перемещении системы из положения равновесия.

Уравнение (8.14) называют *общим уравнением статики*.

8.4. Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Совокупность параметров любой размерности, однозначно определяющих положение механической системы в пространстве, называется *обобщенными координатами* системы. При этом не предпрещается вопрос о том, достаточно или избыточно выбранное число обобщенных координат. Если оно избыточно, то имеются уравнения связей, которым подчиняются обобщенные координаты. Например, положение кривошипно-шатунного механизма, показанного на рис.8.1, можно определить с помощью 4-х обобщенных координат: x_A, y_A, x_B, y_B . Однако эти координаты не независимы, так как они связаны друг с другом тремя уравнениями связей (см. уравнения (8.2)-(8.4)).

Разность между полным числом обобщенных координат и числом уравнений связей, наложенных на них, определяет число *независимых обобщенных координат*. В рассмотренном кривошипно-шатунном механизме число независимых обобщенных координат равно единице. В качестве одной независимой обобщенной координаты можно было выбрать угол φ поворота кривошипа.

Любую из независимых координат можно изменять, сохраняя все остальные координаты неизменными. Ниже будет идти речь только о независимых обобщенных координатах, которые будем обозначать q_1, q_2, \dots и т.д.

Поскольку обобщенные координаты между собой независимы, то и возможные приращения этих координат, т.е. $\delta q_1, \delta q_2, \dots$ и т.д., тоже будут независимыми. При этом каждому приращению обобщенной координаты соответствует независимое (от других) возможное перемещение системы. Следовательно, *число независимых обобщенных координат определяет число степеней свободы системы*.

Радиус-вектор любой точки механической системы можно выразить через независимые обобщенные координаты системы:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (8.21)$$

Например, координаты точек А и В кривошипно-шатунного механизма (рис.8.1) выражаются через независимую обобщенную координату $q = \varphi$ следующим образом:

$$x_A = r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi; \quad x_B = r \cos \varphi + \ell \cos \beta, \quad y_B = 0,$$

$$\text{где } \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{\ell^2}}.$$

Обобщенные координаты являются функциями времени:

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \dots, q_N = q_N(t). \quad (8.22)$$

Производные по времени от обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями и обозначаются $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$, причем $\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$ и т.д. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты: если q - линейная величина, то \dot{q} - линейная скорость, если q - угловая величина, то \dot{q} - угловая скорость.

8.5. Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек и имеющую N степеней свободы. Пусть на систему действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Вычислим сумму элементарных работ всех сил на возможных перемещениях системы:

$$\sum \delta A = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i). \quad (8.23)$$

где $\delta \vec{r}_i$ - полное приращение радиуса-вектора \vec{r}_i на всех возможных перемещениях, получаемое из (8.21):

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \delta q_N. \quad (8.24)$$

Заметим, что индекс i , соответствующий материальным точкам системы, пробегает значения от 1 до n , а индекс j , связанный со степенями свободы системы, - от 1 до N .

Подставляя (8.24) в (8.23), получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma \delta A &= \sum_i (\vec{F}_i \cdot (\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \delta q_N)) = \\ &= \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \right) \delta q_1 + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \right) \delta q_2 + \dots + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \dots + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \right) \delta q_N \end{aligned}$$

или

$$\Sigma \delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_j \delta q_j + \dots + Q_N \delta q_N, \quad (8.25)$$

где

$$Q_1 = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}), \quad Q_2 = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}), \dots, Q_j = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}), \dots, Q_N = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N}) \quad (8.26)$$

По аналогии с выражением $\delta A = F_t ds$ коэффициенты Q_1, Q_2 и т.д., стоящие в (8.25) при приращениях обобщенных координат, называют *обобщенными силами*, причем Q_1 представляет собой обобщенную силу, соответствующую координате q_1 , Q_2 - координате q_2 и т.д.

Если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором только координата q_j получит приращение $\delta q_j \neq 0$, а остальные координаты не изменятся, т.е. $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_N = 0$, то сумма элементарных работ на этом возможном перемещении, согласно (8.25), будет равна

$$\Sigma \delta A_j = Q_j \delta q_j. \quad (8.27)$$

Это соотношение дает более удобную, чем (8.26), формулу для вычисления обобщенной силы:

$$Q_j = \frac{\sum \delta A_j}{\delta q_j}. \quad (8.28)$$

Обобщенная сила, в отличие от просто силы, является не вектором, а скаляром, что видно из (8.25) или (8.28). Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты: если обобщенная координата величина линейная, то обобщенная сила измеряется в Н, а если угловая, то - в Нм.

Пример 8.3. Определить обобщенные силы системы, изображенной на рис.8.12, где груз А весом P_1 перемещается по гладкой наклонной плоскости, а груз В весом P_2 - по шероховатой горизонтальной плоскости, коэффициент трения о которую равен f . Грузы связаны нитью, перекинутой через блок О. Массой блока и нити пренебречь.

Решение. Обобщенных сил столько, сколько степеней свободы имеет система. Поэтому прежде всего нужно определить число степеней свободы системы.

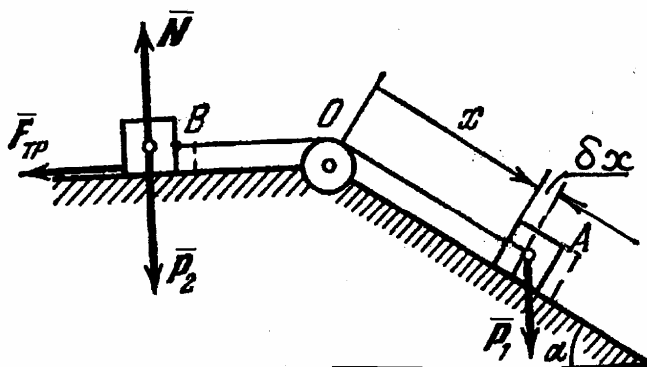


Рис.8.12

Легко видеть, что система имеет одну степень свободы и, следовательно, одну обобщенную силу. Положение системы можно определить с помощью одной обобщенной координаты. В качестве такой координаты примем $q = x$.

Для определения обобщенной силы дадим системе возможное перемещение, при котором координата x получит приращение δx (рис.8.12). Работа на этом перемещении равна

$$\delta A = (P_1 \sin \alpha - F_{\text{тр}}) \delta x = (P_1 \sin \alpha - f P_2) \delta x ,$$

следовательно,

$$Q = \frac{\delta A}{\delta x} = \frac{(P_1 \sin \alpha - F_{\text{тр}}) \delta x}{\delta x} = P_1 \sin \alpha - f P_2 .$$

8.6. Принцип возможных перемещений в обобщенных координатах. Условия равновесия системы в обобщенных силах

Принцип возможных перемещений (8.14) с учетом (8.25) можно записать в обобщенных координатах:

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_j \delta q_j + \dots + Q_N \delta q_N = 0 . \quad (8.29)$$

Так как приращения $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_j, \dots, \delta q_N$ независимы, то равенство (8.29) выполняется только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_j, \dots, \delta q_N$ в отдельности равен нулю, т.е. при следующих условиях:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_N = 0 . \quad (8.30)$$

В самом деле, если допустить, что одна из обобщенных сил, например Q_1 , не равна нулю, то системе можно дать такое возможное перемещение, при котором только координата q_1 получит приращение, а все остальные координаты останутся неизменными, т.е. $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_N = 0$. При таком перемещении, которое правомерно вследствие независимости обобщенных координат друг от друга, равенство (8.29) будет нарушено.

Таким образом, *для равновесия системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы системы были равны нулю.*

Пример 8.4. Определить коэффициент трения в примере 8.3, при котором система (рис.8.12) будет находиться в равновесии.

Решение. Приравниваем полученную в примере 8.3 обобщенную силу нулю:

$$P_1 \sin \alpha - f P_2 = 0 ,$$

отсюда

$$f = P_1 \sin \alpha / P_2 .$$

8.7. Решение задач

Задача 8.1. Составная балка AD, лежащая на трех опорах, состоит из двух балок, соединенных шарниром в точке C. На балку действуют вертикальные силы P_1, P_2, P_3 . Определить реакции опор A, B и D. Размеры указаны на рис.8.13.

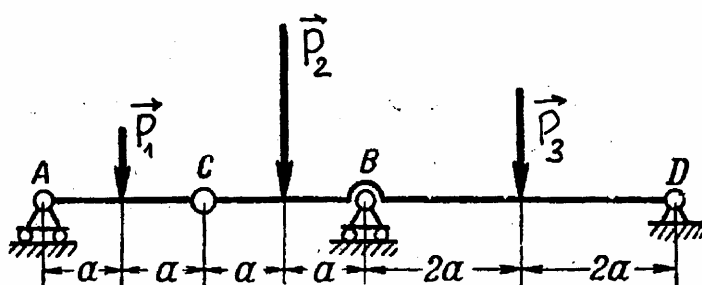


Рис.8.13

Решение. Составной балке AD невозможно дать ни одного перемещения, не нарушив связи (не поломав опоры), следовательно, число степеней свободы этой балки равно нулю. Чтобы

определить реакцию опоры A, нужно освободить балку от этой опоры, заменив ее реакцией \bar{R}_A (рис.8.14). При этом балка получит одну степень свободы: ее составная часть AC сможет поворачиваться вокруг соединительного шарнира C.

Сохраняя опоры В и D на своих местах, дадим системе такое возможное перемещение, при котором положение балки CD останется без изменения, а балка AC, лишенная опоры, повернется вокруг шарнира С (рис.8.14).

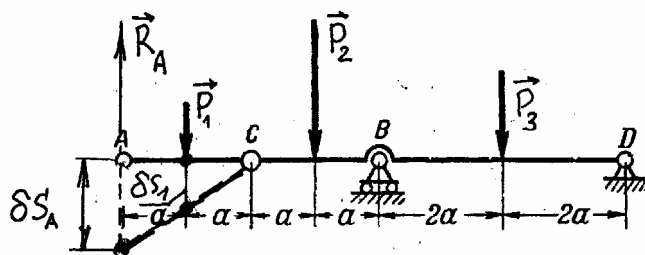


Рис.8.14

Подсчитываем сумму элементарных работ всех сил, приложенных к системе, на этом возможном перемещении и приравниваем ее, в соответствии с принципом возможных перемещений (8.14), нулю:

$$\Sigma \delta A = -R_A \delta s_A + P_1 \delta s_1 = 0, \quad (8.31)$$

где δs_A - перемещение точки приложения силы \vec{R}_A на данном возможном перемещении системы, а δs_1 - перемещение точки приложения силы \vec{P}_1 на том же перемещении.

Так как $\delta s_A = 2 \delta s_1$, то из (8.31) получаем:

$$R_A = P_1 / 2.$$

Заметим, что если бы мы расчленили систему на тела AC и CD и приравняли нулю сумму моментов относительно точки С всех сил, действующих на тело AC, то получили бы уравнение, аналогичное уравнению (8.31). Другими словами, при определении реакции опоры А никакого преимущества принцип возможных перемещений по сравнению с геометрической статикой не дал.

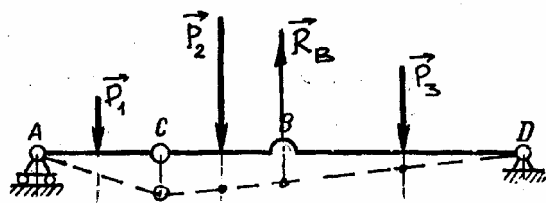


Рис.8.15

Переходим к определению реакции опоры В. Для этой цели восстанавливаем опору А, а опору В заменяем силой \vec{R}_B и даем возможное перемещение, показанное на рис.8.15.

Вычисляем сумму элементарных ра-

бот на этом возможном перемещении и приравниваем ее нулю:

$$P_1 \delta s_1 + P_2 \delta s_2 - R_B \delta s_B + P_3 \delta s_3 = 0, \quad (8.32)$$

где

$$\delta s_1 = \frac{\delta s_C}{2}, \quad \delta s_2 = \frac{5\delta s_C}{6}, \quad \delta s_B = \frac{2\delta s_C}{3}, \quad \delta s_3 = \frac{\delta s_C}{3}, \quad (8.33)$$

причем δs_C - это вертикальное смещение шарнира C.

Подставляя (8.33) в (8.32) и сокращая на δs_C , получаем

$$\frac{1}{2}P_1 + \frac{5}{6}P_2 - \frac{2}{3}R_B + \frac{1}{3}P_3 = 0,$$

отсюда

$$R_B = (3P_1 + 5P_2 + 2P_3)/4.$$

Обращаем внимание на тот факт, что не существует условия равновесия геометрической статики, аналогичного уравнению (8.32), в которое входила бы только реакция R_B и не входила бы еще какая-нибудь реакция.

Теперь определяем реакцию опоры D. Для этой цели восстанавливаем опору B, а опору D заменяем силой \vec{R}_D и даем возможное перемещение, показанное на рис.8.16. Вычисляем сумму элементарных работ на этом возможном перемещении и приравниваем ее нулю:

$$P_1 \delta s_1 + P_2 \delta s_2 - P_3 \delta s_3 + R_D \delta s_D = 0. \quad (8.34)$$

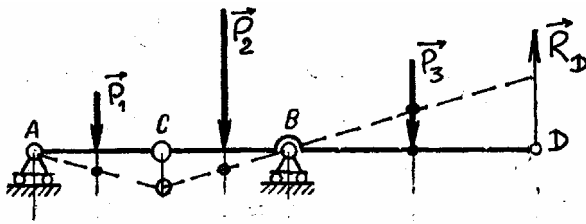


Рис.8.16

Перемещения точек приложения сил опять-таки связываем через перемещение шарнира C:

$$\delta s_1 = \frac{\delta s_C}{2}, \quad \delta s_2 = \frac{\delta s_C}{2},$$

$$\delta s_3 = \delta s_C, \quad \delta s_D = 2\delta s_C$$

После подстановки этих выражений в (8.34) и сокращения на δs_C , получаем:

$$R_D = (2P_3 - P_1 - P_2)/4.$$

Задача 8.2. К ползуну А механизма эллипсографа приложена сила P , направленная вдоль направляющей ползуна (рис.8.17). Какой вращающий момент M надо приложить к кривошипу ОС, чтобы механизм был в равновесии в положении, когда кривошип ОС образует с направляющей ползуна В угол φ ?

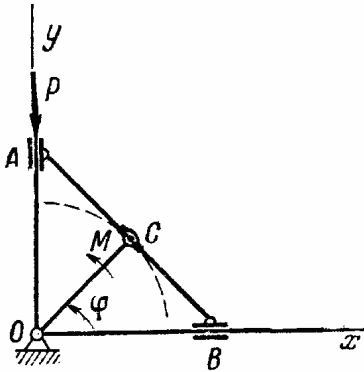


Рис.8.17

Механизм расположен в горизонтальной плоскости, причем $OC=AC=CB=\ell$.

Решение. Механизм имеет одну степень свободы. Даем ему возможное перемещение, показанное на рис.8.18, и приравниваем нулю сумму работ всех заданных сил на этом перемещении:

$$\Sigma \delta A = P \delta s_A - M \delta \varphi = 0. \quad (8.35)$$

Чтобы связать между собой перемещения δs_A и $\delta \varphi$ воспользуемся тем, что возможные перемещения точек одного и того же тела (так же как и скорости) прямо пропорциональны расстояниям до мгновенного центра поворота, который совпадает с мгновенным центром скоростей:

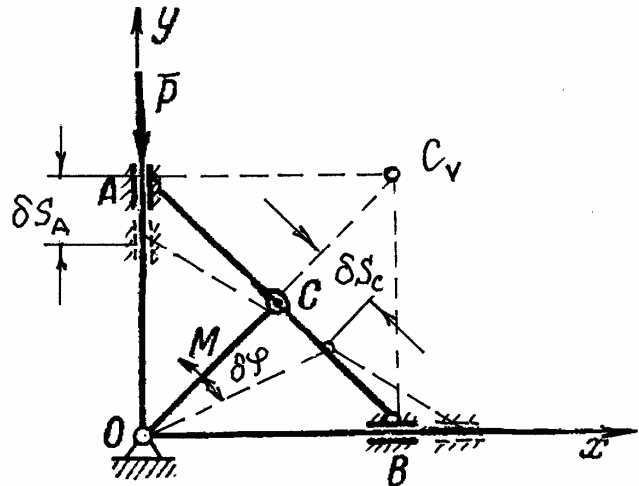


Рис.8.18

$$\frac{\delta s_A}{AC_v} = \frac{\delta s_C}{CC_v}$$

или с учетом того, что $\delta s_C = \ell \delta \varphi$,

$$\delta s_A = \frac{AC_v}{CC_v} \ell \delta \varphi = \frac{2\ell \cos \varphi}{\ell} \ell \delta \varphi = 2\ell \cos \varphi \delta \varphi.$$

Подставляя полученное выражение в (8.35), находим

$$M = 2P\ell \cos \varphi.$$

Задача 8.3. В кулиском механизме при качании рычага ОС вокруг горизонтальной оси О ползун А, перемещающаяся вдоль рычага ОС, приводит в движение стержень АВ, движущийся в вертикальных направляющих К.

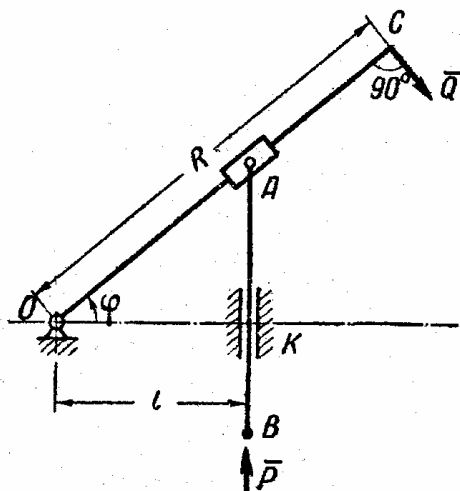


Рис.8.19

Какую силу Q надо приложить к кривошину ОС в точке С для того, чтобы уравновесить силу P, приложенную вдоль стержня АВ вверх? Размеры даны на рис.8.19.

Решение. Система имеет одну степень свободы. Даем возможное перемещение, показанное на рис.8.20, и вычисляем сумму элементарных работ на этом возможном перемещении:

Поскольку стержень АВ перемещается в вертикальных направляющих, то $\delta s_B = \delta s_A$. Перемещение δs_A состоит из двух слагаемых (по аналогии со скоростями): переносного δs_{Ae} и относительного δs_{Ar} , причем

$$\Sigma \delta A = P \delta s_B - Q \delta s_C = 0. \quad (8.36)$$

Поскольку стержень АВ перемещается в вертикальных направляющих, то $\delta s_B = \delta s_A$. Перемещение δs_A состоит из двух слагаемых (по аналогии со скоростями): переносного δs_{Ae} и относительного δs_{Ar} , причем

$\delta s_{Ae} = OA \cdot \delta \varphi = \frac{\ell}{\cos \varphi} \delta \varphi$.

Из прямоугольного треугольника, построенного на перемещениях точки А как на сторонах, находим

$$\delta s_A = \frac{\delta s_{Ae}}{\cos \varphi} = \frac{\ell}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi = \delta s_B. \quad (8.37)$$

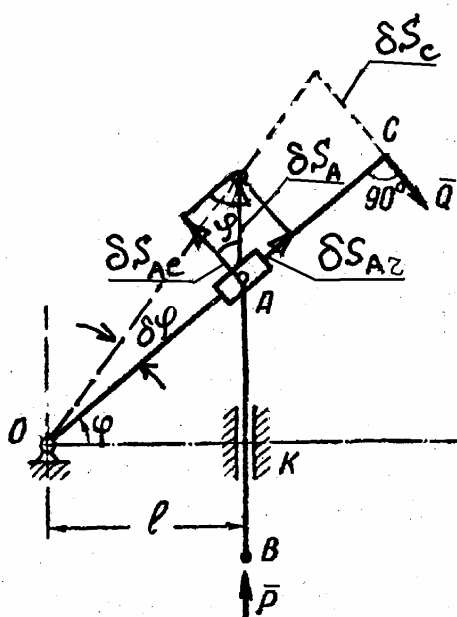


Рис.8.20

Перемещение точки С, входящее в (8.36), равно

$$\delta s_C = R \delta \varphi. \quad (8.38)$$

Подставляя (8.37) и (8.38) в (8.36), получаем:

$$P \frac{\ell}{\cos^2 \varphi} \delta \varphi - Q R \delta \varphi = 0,$$

откуда $Q = P \ell / (R \cos^2 \varphi)$.

Задача 8.4. Каркас платформы состоит из Г-образных рам с промежуточными шарнирами С. Верхние концы рам жестко защемлены в бетонную стену, нижние - опираются на подвижные опоры. Размеры показаны на рис.8.21. Определить вертикальную реакцию защемления при действии сил P_1 и P_2 .

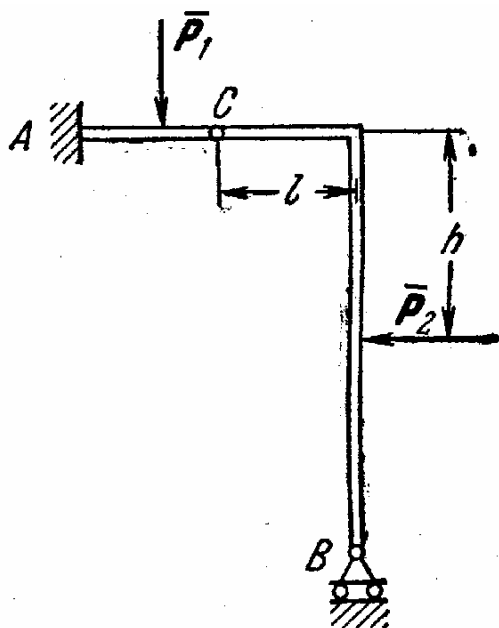


Рис.8.21

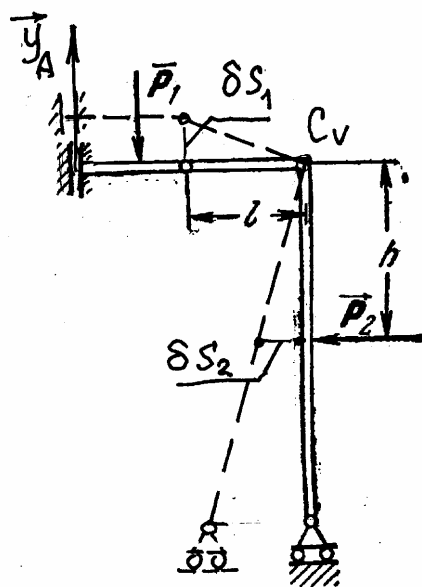


Рис.8.22

Решение. Число степеней свободы системы равно нулю. Заменим заделку А скользящей заделкой, позволяющей вертикальное смещение точки А, компенсировав эту замену силой \vec{Y}_A (рис.8.22). При этом система при-

обретает одну степень свободы. Воспользуемся этим и дадим системе возможное перемещение, показанное на рис.8.22 пунктирными линиями.

Сумма элементарных работ всех заданных сил на этом возможном перемещении равна нулю:

$$\Sigma \delta A = Y_A \delta s_1 - P_1 \delta s_1 + P_2 \delta s_2 = 0. \quad (8.39)$$

С помощью мгновенного центра скоростей, находящегося в точке пересечения перпендикуляров к перемещениям точек В и С, связываем между собой перемещения точек приложения сил P_1 и P_2 (напоминаем, что возможные перемещения точек звена прямо пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей):

$$\frac{\delta s_1}{\ell} = \frac{\delta s_2}{h}$$

или $\delta s_1 = \frac{\ell}{h} \delta s_2$. Подставляя это выражение в (8.39) и сокращая на δs_2 , получаем: $Y_A = P_1 - P_2 h / \ell$.

Отметим, что если бы эта задача решалась методами геометрической статики, то для определения реакции \vec{Y}_A потребовалось бы решать систему уравнений.

8.8. Контрольные вопросы

- 8.1. Что называется возможным перемещением системы?
- 8.2. Зависят ли возможные перемещения от действующих сил?
- 8.3. Чему равно число степеней свободы механической системы?
- 8.4. Обобщенная сила скаляр или вектор?
- 8.5. Чему равно число обобщенных сил механической системы?
- 8.6. Чему равны обобщенные силы при равновесии системы?
- 8.7. Как записывается принцип возможных перемещений?

ГЛАВА 9. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

9.1. Об уравнениях Лагранжа

Уравнения Лагранжа так же, как и уравнения Ньютона, служат для исследования движения механической системы. Число уравнений Ньютона, описывающих движение механической системы, определяется числом материальных точек или тел, входящих в систему. Принципиальное различие в описании движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа состоит в том, что их число равно числу степеней свободы механической системы. Ясно, что число степеней свободы в большинстве случаев существенно меньше числа точек и даже тел, входящих в механическую систему.

Имеются уравнения Лагранжа 1-го рода и уравнения Лагранжа 2-го рода. В уравнения Лагранжа 1-го рода помимо активных сил входят реакции связей, что дает возможность определять с помощью этих уравнений не только движение системы, но и эти реакции. Уравнения Лагранжа 1-го рода используются довольно редко, поэтому в данном пособии не приводятся.

Уравнения Лагранжа 2-го рода в случае механических систем с идеальными связями вообще не содержат реакций.

Для механической системы, состоящей из n материальных точек и имеющей N степеней свободы, система уравнений Лагранжа 2-го рода записывается так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_1} = Q_1, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = Q_j, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_N} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_N} = Q_N. \end{array} \right. \quad (9.1)$$

Здесь E_k - кинетическая энергия системы, $q_1, \dots, q_j, \dots, q_N$ - независимые обобщенные координаты, $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_j, \dots, \dot{q}_N$ - обобщенные скорости, $Q_1, \dots, Q_j, \dots, Q_N$ - обобщенные силы (индекс j – текущий индекс обобщенной координаты, пробегающий значения от 1 до N).

Уравнения (9.1) были опубликованы в «Аналитической механике», в предисловии к которой Лагранж писал: «Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи. Я надеюсь, что способ, каким я постарался этого достичь, не оставит желать чего-либо лучшего».

9.2. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода

Прежде чем выводить уравнения Лагранжа 2-го рода, запишем выражения для частных производных от кинетической энергии по обобщенной координате и обобщенной скорости, входящих в (9.1). С этой целью продифференцируем частным образом выражение

$$E_k = \sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}$$

по координате q_j и по скорости \dot{q}_j :

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_j} = \sum m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (9.3)$$

Докажем две леммы, которые понадобятся при выводе уравнения Лагранжа 2-го рода.

Лемма 1 состоит в утверждении следующего равенства:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d \vec{r}_i}{dt}. \quad (9.4)$$

Докажем справедливость этого равенства. Мы будем при этом предполагать, что все связи, наложенные на систему, являются голономными и стационарными.

Так как, согласно (8.21),

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N),$$

то

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_N)}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_N} \dot{q}_N,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \dot{q}_N \right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_N \partial q_j} \dot{q}_N.$$

Поскольку правые части полученных выражений равны друг другу, то и левые части равны между собой. Тем самым лемма 1 доказана.

Лемма 2 состоит в утверждении следующего равенства:

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (9.5)$$

Для доказательства этой леммы достаточно вычислить правую часть (9.5):

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \dot{q}_N \right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Переходим к выводу уравнения Лагранжа 2-го рода, отнесенного к координате q_j . Запишем второй закон Ньютона для произвольной точки механической системы:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i. \quad (9.6)$$

Индекс i пробегает значения от 1 до n , причем n - число точек механической системы.

Умножим обе части (9.6) на $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$:

$$m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (9.7)$$

и просуммируем обе части полученного выражения по всем точкам системы:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (9.8)$$

Согласно (8.26), правая часть этого уравнения является обобщенной силой Q_j .

Это позволяет переписать (9.8) в таком виде:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j. \quad (9.9)$$

Преобразуем левую часть уравнения (9.9):

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (9.10)$$

Так как на основании леммы 1

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j},$$

то последний член в (9.10) можно записать так: $\sum_i m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$, при этом

выражение (9.10) приобретает вид:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j},$$

или, принимая во внимание (9.2),

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial E_K}{\partial q_j}. \quad (9.11)$$

Преобразуем первое слагаемое правой части полученного выражения, учитывая лемму 2 и выражение (9.3):

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}. \quad (9.12)$$

Подставляя (9.12) в (9.11), получаем:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_K}{\partial q_j}. \quad (9.13)$$

Наконец, подставляя (9.13) в (9.9), получаем уравнение Лагранжа 2-го рода, соответствующее обобщенной координате j :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} = Q_j. \quad (9.14)$$

Аналогичные уравнения получаются и для всех остальных обобщенных координат. Заметим, что в первые слагаемые этих уравнений после дифференцирования по времени t войдут обобщенные ускорения \ddot{q}_j . Следовательно, уравнения Лагранжа 2-го рода представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. С помощью этих уравнений довольно просто определяются ускорения точек механической системы.

Ниже для сокращения записи уравнения Лагранжа 2-го рода часто будут именоваться просто уравнениями Лагранжа.

Пример 9.1. В примере 8.3 определить ускорение груза А (рис.9.1).

Решение. Так как система имеет одну степень свободы, то для исследования ее движения составляем одно уравнение Лагранжа, соответствующее обобщенной координате x :

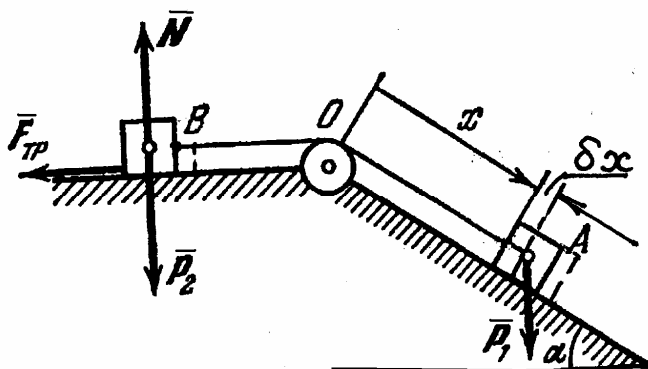


Рис.9.1

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_k}{\partial x} = Q. \quad (9.15)$$

Правая часть этого уравнения была вычислена в примере 8.3. Она равна

$$Q = P_1 \sin \alpha - f P_2. \quad (9.16)$$

Для конкретизации левой части уравнения (9.15) определяем кинетическую энергию системы и выражаем ее через обобщенную скорость, т.е. через \dot{x} :

$$E_k = E_k^{(1)} + E_k^{(2)} = \frac{P_1}{g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{P_2}{g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{\dot{x}^2}{2g} (P_1 + P_2). \quad (9.17)$$

Дифференцируем (9.17) по \dot{x} , затем по времени t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} &= \frac{\dot{x}}{g}(P_1 + P_2), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} &= \frac{\ddot{x}}{g}(P_1 + P_2).\end{aligned}\quad (9.18)$$

Так как в правую часть (9.17) не входит переменная x , то

$$\frac{\partial E_K}{\partial x} = 0. \quad (9.19)$$

Подставляя (9.19) и (9.18) в левую часть уравнения (9.15), а (9.16) - в правую, получаем:

$$\frac{\ddot{x}}{g}(P_1 + P_2) = P_1 \sin \alpha - f P_2,$$

отсюда

$$\ddot{x} = g(P_1 \sin \alpha - f P_2)/(P_1 + P_2).$$

9.3. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела (вывод из уравнений Лагранжа 2-го рода)

При плоскопараллельном движении тело имеет три степени свободы: поворот вокруг оси, проходящей через некоторый полюс, и два поступательных перемещения вместе с полюсом вдоль взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси вращения. В динамике за полюс будем принимать центр C тяжести тела.

Трем степеням свободы соответствуют три обобщенных координаты: x_c, y_c, φ (рис.9.2). Составляем уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial x_c} = Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{y}_c} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial y_c} = Q_2, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial \varphi} = Q_3. \end{cases} \quad (9.20)$$

Кинетическая энергия тела, согласно (4.40), равна

$$E_K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_{cz}\omega^2}{2}, \quad (9.21)$$

где m - масса тела.

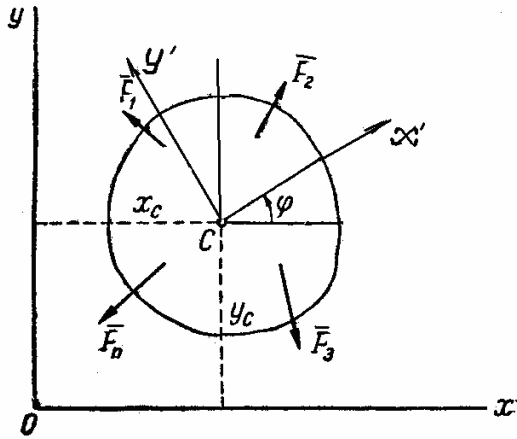


Рис.9.2

При использовании уравнений Лагранжа кинетическую энергию нужно выражать не через линейные и угловые скорости, а через *обобщенные скорости*. Для этой цели запишем скорость центра тяжести в проекциях на оси координат:

$$\vec{v}_c = \dot{x}_c \vec{i} + \dot{y}_c \vec{j}$$

и вычислим квадрат этого вектора, равный квадрату его модуля:

$$\vec{v}_c^2 = v_c^2 = \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2. \quad (9.22)$$

Подставляя (9.22) в (9.21) и учитывая, что $\omega = \dot{\phi}$, получаем:

$$E_K = \frac{m(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2)}{2} + \frac{J_{cz}\dot{\phi}^2}{2}. \quad (9.23)$$

Полученное выражение кинетической энергии используется для всех трех уравнений (9.20).

Выполняем операции, предписанные левой частью первого уравнения Лагранжа, а именно, дифференцируем (9.23) сначала частным образом по обобщенной скорости \dot{X}_c (при этом \dot{y}_c и $\dot{\phi}$ считаются постоянными), а затем по времени t :

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_c} = m\dot{x}_c, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}_c} = m\ddot{x}_c. \quad (9.24)$$

Так как обобщенная координата x_c не входит в (9.23), то

$$\frac{\partial E_K}{\partial x_c} = 0. \quad (9.25)$$

Теперь переходим к вычислению обобщенной силы, соответствующей координате X_c . Для этого даем телу такое перемещение, при котором только координата X_c получит приращение δx_c , а остальные обобщенные координаты останутся без изменения. Ясно, что таким перемещением является сдвиг тела вдоль оси x . Согласно (8.28), обобщенная сила равна

$$Q_1 = \frac{\Sigma \delta A_1}{\delta x_c} = \frac{1}{\delta x_c} \sum_i (F_i \delta x_c \cos \alpha_i) = \frac{1}{\delta x_c} \left(\sum_i F_i \cos \alpha_i \right) \delta x_c = \sum_i F_i \cos \alpha_i = \sum_i X_i, \quad (9.26)$$

где α_i - угол между вектором F_i и осью x , X_i - проекция силы \vec{F}_i на ось x .

С учетом (9.24) - (9.26) первое уравнение Лагранжа приобретает вид:

$$m\ddot{x}_c = \Sigma X_i. \quad (9.27)$$

Второе уравнение Лагранжа, отнесенное к обобщенной координате y_c , выводится аналогично и выглядит так:

$$m\ddot{y}_c = \Sigma Y_i. \quad (9.28)$$

Для конкретизации третьего уравнения Лагранжа сначала проделаем операции, стоящие в левой части этого уравнения:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}} = J_{cz} \dot{\phi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\phi}} = J_{cz} \ddot{\phi}. \quad (9.29)$$

Здесь J_z - момент инерции тела относительно оси C_z , перпендикулярной плоскости (x, y) .

Чтобы определить Q_3 , даем телу такое возможное перемещение, при котором только обобщенная координата ϕ получит приращение, т.е. поворачиваем тело вокруг оси C_z на угол $\delta \phi$, и используем формулу (8.28):

$$Q_3 = \frac{\Sigma \delta A_3}{\delta \phi}.$$

При вычислении числителя воспользуемся тем обстоятельством, что элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна работе

момента этой силы относительно оси вращения. Работа момента равна, согласно (7.18), произведению момента на угол поворота, следовательно,

$$Q_3 = \frac{\sum \delta A_3}{\delta \varphi} = \frac{1}{\delta \varphi} \sum M_{iz} \delta \varphi = \sum M_{iz}, \quad (9.30)$$

где M_{iz} - момент силы \vec{F}_i относительно оси вращения C_z .

Таким образом, дифференциальными уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела являются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_c &= \sum X_i, \\ m \ddot{y}_c &= \sum Y_i, \\ J_{cz} \ddot{\varphi} &= \sum M_{iz}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Пример 9.2. На барабан однородного катка весом P и радиусом R , поставленного на горизонтальный шероховатый пол, намотана нить, к которой в точке A приложена сила T под углом α к горизонту (рис.9.3). Радиус барабана - r , радиус инерции катка - ρ . Определить закон движения оси O катка. В начальный момент каток находился в покое, затем катился без скольжения.

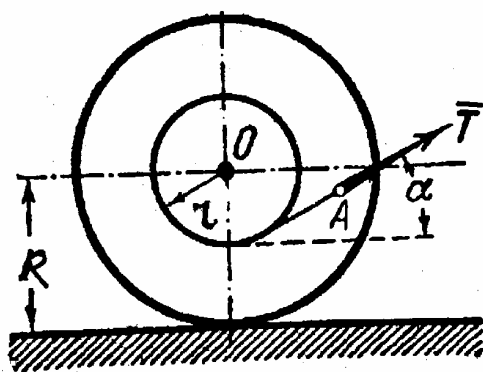


Рис.9.3

Решение. На каток, помимо заданной силы T , действует сила P , нормальная реакция N и сила трения - F^{TP} , приложенная в мгновенном центре скоростей (рис.9.4).

Выбираем систему координат и составляем первое и третье уравнения (9.31):

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_0 = T \cos \alpha - F^{TP}, \quad (9.32)$$

$$J_0 \ddot{\varphi} = F^{TP} R - Tr.$$

Второе уравнение системы (9.31) в данной задаче не используется, поскольку проекция ускорения точки O на ось y равна нулю. Из него мож-

но было бы найти нормальную реакцию N , но она в данной задаче не нужна.

К двум составленным уравнением добавляем еще условие качения катка без скольжения:

$$\ddot{\phi} = \ddot{x}_0 / R. \quad (9.33)$$

Из (9.32) с учетом (9.33) и с использованием выражения $J_0 = P\rho^2 / g$ найдем ускорение центра катка:

$$\ddot{x}_0 = \frac{TRg(R \cos \alpha - r)}{P(R^2 + \rho^2)}.$$

Интегрируя дважды это выражение по времени при нулевых начальных условиях, получаем закон движения центра катка:

$$x_0 = \frac{TRg(R \cos \alpha - r)}{2P(R^2 + \rho^2)} t^2.$$

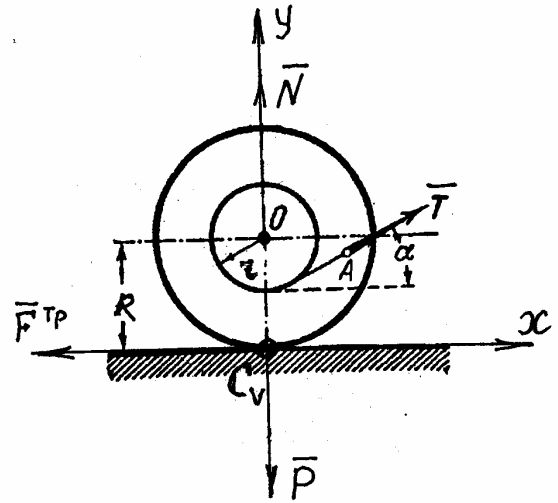


Рис.9.4

9.4. Уравнения Лагранжа 2-го рода для случая потенциальных сил

Запишем выражение для обобщенной силы, отнесенной к произвольной обобщенной координате q_j :

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (9.34)$$

В случае потенциальных сил, как было сказано в параграфе 7.7, проекции силы \vec{F}_i на координатные оси равны

$$F_{ix} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (9.35)$$

Подставляя (9.35) в (9.34), получаем:

$$Q_j = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

или, поскольку $\frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial q_j}$,

$$Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial q_j}. \quad (9.36)$$

Записываем уравнение Лагранжа с учетом полученного выражения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial q_j}. \quad (9.37)$$

Переносим все в одну часть:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (E_{\text{к}} - E_{\text{п}})}{\partial q_j} = 0. \quad (9.38)$$

Так как *потенциальная энергия является функцией только обобщенных координат и не зависит от обобщенных скоростей*, то $\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial \dot{q}_j} = 0$ и выраже-

ние в первой скобке можно представить так:

$$\frac{\partial E_{\text{к}}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (E_{\text{к}} - E_{\text{п}})}{\partial \dot{q}_j}.$$

Это равенство позволяет переписать (9.38) так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (E_{\text{к}} - E_{\text{п}})}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (E_{\text{к}} - E_{\text{п}})}{\partial q_j} = 0,$$

и уравнение Лагранжа для потенциальных сил (для консервативных систем) приобретает изящный вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (9.39)$$

где

$$L = E_{\text{к}} - E_{\text{п}}. \quad (9.40)$$

Функция L , равная разности кинетической и потенциальной энергии системы, носит название лагранжевой функции.

В качестве иллюстрации применения уравнения (9.39) получим с его помощью в следующем параграфе дифференциальное уравнение движения физического маятника.

9.5. Малые колебания физического маятника

Физический маятник - это твердое тело, совершающее вращение или колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести (рис.9.5). Ось O вращения называется осью подвеса физического маятника. Предполагается, что положение центра тяжести маятника (точка C) известна и $OC=S$.

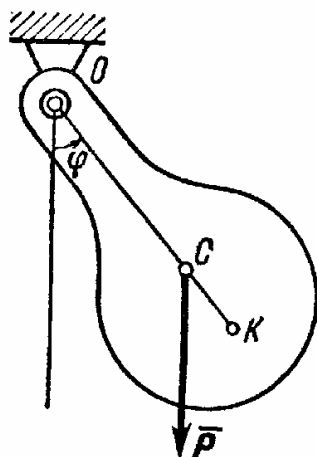


Рис.9.5

Сила P тяжести является потенциальной силой. Физический маятник имеет одну степень свободы. Обобщенная координата - угол φ - отсчитывается от положения равновесия маятника.

Для составления уравнения Лагранжа в форме (9.39) необходимо определить лагранжеву функцию, а для этого нужно вычислить кинетическую и потенциальную энергии маятника.

Вычисляем кинетическую энергию:

$$E_k = \frac{J_0 \dot{\varphi}^2}{2}. \quad (9.41)$$

Потенциальная энергия равна работе силы тяжести при перемещении точки ее приложения из произвольного положения, заданного углом φ , в нижнее положение равновесия, которое принимается за ноль отсчета E_{Π} . Так как работа силы P не зависит от вида траектории точки C , а равна, согласно формуле (7.9), произведению силы P на высоту опускания этой точки, то

$$E_{\Pi} = Ph,$$

где $h = s(1 - \cos\varphi)$.

Обращаем внимание на тот факт, что работа силы тяжести в данном случае положительная, поскольку при переходе маятника из произвольного положения в положение равновесия точка C опускается.

Лагранжева функция равна

$$L = E_k - E_{\pi} = \frac{J_0 \dot{\varphi}^2}{2} - Ps(1 - \cos \varphi). \quad (9.43)$$

Производим операции, предписанные левой частью уравнения (9.39):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_0 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_0 \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -Ps \sin \varphi.$$

Подставляем полученные выражения в (9.39):

$$J_0 \ddot{\varphi} + Ps \sin \varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{Ps}{J_0} \sin \varphi = 0. \quad (9.44)$$

Подставляя в это уравнение вместо $\sin \varphi$ угол φ , получаем *дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника*:

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \quad (9.45)$$

где k - круговая (или циклическая) частота колебаний равна

$$k = \sqrt{\frac{Ps}{J_0}}, \quad (9.46)$$

что следует из (9.44). Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{Ps}}. \quad (9.47)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (9.45), получаем кинематическое уравнение малых колебаний физического маятника:

$$\varphi = a \sin(kt + \alpha), \quad (9.48)$$

где a - амплитуда колебаний, α - начальная фаза колебаний. Эти величины вычисляются по начальным данным. Пусть при $t = 0$ начальный угол отклонения маятника равен φ_0 , а начальная скорость равна $\dot{\varphi}_0$. Подставляя эти данные в выражение (9.48) и его производную:

$$\dot{\varphi} = ak \cos(kt + \alpha), \quad (9.49)$$

получаем

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}_0}{k}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{k\varphi_0}{\dot{\varphi}_0}. \quad (9.50)$$

Полученные соотношения справедливы и для математического маятника, т.е. тела малых размеров, подвешенного на нерастяжимой нити длиной ℓ (см. задачу 1.2). Можно подобрать такую длину ℓ математического маятника, чтобы период его колебаний, равный, согласно (1.47)

$$T_{\text{мат}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

был равен периоду колебаний физического маятника:

$$T_{\text{физ}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{Ps}}.$$

Приравнивая правые части двух последних выражений друг другу, получаем

$$\ell = \frac{J_0 g}{Ps} = \frac{J_0}{Ms}, \quad (9.51)$$

где M - масса физического маятника.

Длину ℓ математического маятника, определяемую формулой (9.51), называют *приведенной длиной физического маятника*. Точка K (рис.9.5), отстоящая от оси подвеса на эту величину, называется *центром качаний* физического маятника. Центр качаний расположен ниже центра тяжести физического маятника. Точки K и O являются взаимными, это означает, что если ось подвеса сделать проходящей через точку K , то центром качаний станет точка O , и период маятника не изменится.

Свойства физического маятника позволяют экспериментально определять моменты инерции тел сложной формы. Для этого, зная вес P тела, подвешивают тело на горизонтальной оси и находят с помощью секундомера период его малых колебаний. Затем, экспериментально (например методом взвешивания) определяют расстояние $OS = s$ и вычисляют по формуле, следующей из (9.47), момент инерции тела:

$$J_0 = \frac{PsT^2}{4\pi^2}. \quad (9.52)$$

9.6. Решение задач

Уравнения Лагранжа 2-го рода обычно используются для составления уравнений движения системы или для нахождения ускорения. При ре-

шении задач прежде всего необходимо установить число степеней свободы механической системы и выбрать обобщенные координаты. После этого следует определить кинетическую энергию системы *в абсолютном движении* системы и выразить ее через обобщенные скорости и обобщенные координаты. Выражение кинетической энергии остается неизменным в решаемой задаче при составлении всех уравнений Лагранжа 2-го рода, число которых совпадает с числом степеней свободы механической системы.

Если механическая система имеет несколько степеней свободы, то для составления уравнения Лагранжа, соответствующего первой обобщенной координате, надо произвести операции с выражением для кинетической энергии, указанные в левой части уравнения Лагранжа. После этого механической системе нужно дать такое возможное перемещение, при котором только первая обобщенная координата получит приращение, подсчитать сумму элементарных работ всех заданных сил на этом перемещении и по формуле (8.28) вычислить обобщенную силу.

Аналогичные операции при решении задачи нужно произвести при составлении остальных уравнений Лагранжа, соответствующих другим обобщенным координатам.

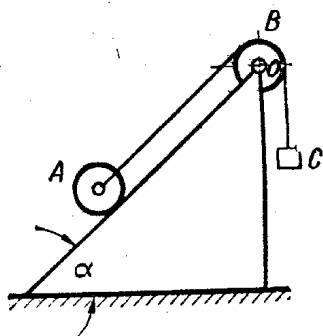


Рис.9.6

Задача 9.1. Каток А весом G , скатываясь без скольжения по наклонной плоскости вниз, поднимает посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок В, груз С весом P (рис.9.6). При этом блок В вращается вокруг неподвижной оси О, перпендикулярной к его плоскости.

Каток А и блок В - однородные круглые диски одинакового веса и радиуса. На-

клонная плоскость образует угол α с горизонтом.

Определить ускорение оси катка А.

Решение. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты можно принять, например, координату центра тяжести груза С или угол поворота блока В, или, наконец, координату центра тяжести катка А. Остановимся на последнем варианте, поскольку ускорение нужно определить именно центра катка А (если в качестве обобщенной ко-

ординаты взять угол поворота блока В, то полученное в результате решения угловое ускорение этого блока придется пересчитывать в ускорение центра катка А, что, конечно, не трудно).

Составляем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial x} = Q, \quad (9.53)$$

где x - координата центра тяжести катка А, отсчитываемая от неподвижной точки В (рис.9.7).

Вычисляем кинетическую энергию системы:

$$E_K = E_K^{(A)} + E_K^{(B)} + E_K^{(C)}, \quad (9.54)$$

где $E_K^{(A)}, E_K^{(B)}, E_K^{(C)}$ - кинетические энергии соответственно катка А, блока В и груза С, равные

$$E_K^{(A)} = \frac{G\dot{x}^2}{2g} + \frac{J_A \omega^2}{2} = \frac{G\dot{x}^2}{2g} + \frac{Gr^2}{2g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{2r^2} = \frac{3G\dot{x}^2}{4g},$$

$$E_K^{(B)} = \frac{J_B \omega_2^2}{2} = \frac{Gr^2}{2g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{2r^2} = \frac{G\dot{x}^2}{4g},$$

$$E_K^{(C)} = \frac{P\dot{x}^2}{2g}.$$

Подставляя эти выражения в (9.54), получаем кинетическую энергию системы:

$$E_K = \frac{\dot{x}^2}{2g} (2G + P).$$

Производим с выражением для E_K операции, предписанные левой частью уравнения (9.53):

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} = (2G + P) \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} \right) = (2G + P) \ddot{x}, \quad \frac{\partial E_K}{\partial x} = 0.$$

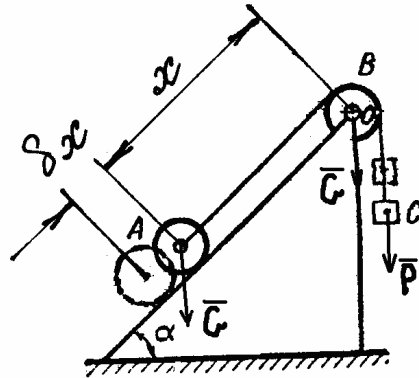


Рис.9.7

$$\Sigma \delta A = G \sin \alpha \delta x - P \delta x \text{ .}$$
$$Q = \frac{\Sigma \delta A}{\delta x} = \frac{G \sin \alpha \delta x - P \delta x}{\delta x} = G \sin \alpha - P$$
$$(2G + P)\ddot{x} = G \sin \alpha - P,$$
$$\ddot{x} = \frac{G \sin \alpha - P}{2G + P}.$$

The diagram shows a pulley labeled D on the left, which is fixed to a wall. A rope passes over the pulley, with one end attached to a rectangular block labeled B hanging vertically. The other end of the rope extends horizontally to the right, passing over a large cylinder labeled A . The cylinder A is resting on a horizontal surface, indicated by a hatched line below it.

Определить ускорение груза В, если каток катится без скольжения, а коэффициент трения качения равен δ . Массой блока D пренебречь.

пень свободы. В качестве обобщенной координаты выбираем координату x центра тяжести груза В, отсчитываемую от произвольного горизонтального уровня (рис.9.9).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial x} = Q \quad (9.55)$$

The diagram shows a mechanical system. On the left, a pulley is mounted on a support. A rope passes over the pulley. One end of the rope is attached to a rectangular block labeled θ . The block is positioned at a height x from a reference point. A downward force P is applied to the block. A small displacement δx is indicated. The other end of the rope is attached to a cylinder labeled A . The cylinder has a radius r and its center is labeled C . The cylinder is in contact with a horizontal surface at point C_v . A vertical force G_v acts downwards from the center C . A horizontal displacement δx is indicated at the top of the cylinder. A moment $M_{\kappa}^{T_0}$ is applied to the cylinder.

$$E_K = E_K^{(A)} + E_K^{(B)},$$

причем

$$E_k^{(A)} = \frac{G}{2g} \dot{x}_c^2 + \frac{J_c \omega^2}{2} = \frac{G}{2g} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{Gr^2}{4g} \cdot \left(\frac{\dot{x}}{2R} \right)^2 = \frac{3G\dot{x}^2}{16g},$$

$$E_k^{(B)} = \frac{P\dot{x}^2}{2g},$$

где $\dot{x}_c = \dot{x}/2$ - скорость центра тяжести катка А.

С учетом полученных выражений кинетическая энергия системы равна

$$E_k = \frac{3G\dot{x}^2}{16g} + \frac{P\dot{x}^2}{2g} = \frac{\dot{x}^2}{16g} (3G + 8P).$$

Производим с полученным выражением действия, указанные в левой части уравнения (9.55):

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{8g} (3G + 8P), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\ddot{x}}{8g} (3G + 8P), \quad \frac{\partial E_k}{\partial x} = 0. \quad (9.56)$$

Далее даем системе такое возможное перемещение, при котором координата x увеличивается на δx (рис.9.9). На этом перемещении работу производят сила P и момент трения качения, равный $M_k^{тр} = \delta N = \delta G$ (сила G работу не производит, поскольку она ортогональна перемещению точки ее приложения):

$$\Sigma \delta A = P\delta x - \delta G \delta \varphi = P\delta x - \delta G \delta x / (2R).$$

Подсчитываем обобщенную силу:

$$Q = \frac{\Sigma \delta A}{\delta x} = \frac{P\delta x - \delta G \delta x / (2R)}{\delta x} = P - \delta G / (2R). \quad (9.57)$$

Используя (9.56) и (9.57), конкретизируем уравнение (9.55):

$$\frac{\ddot{x}}{8g} (3G + 8P) = P - \delta G / (2R),$$

откуда получаем ускорение груза В:

$$\ddot{x} = \frac{8g}{3G + 8P} (P - \delta G / (2R)).$$

Задача 9.3. В зацеплении, показанном на рис.9.10, колесо 1 приво-

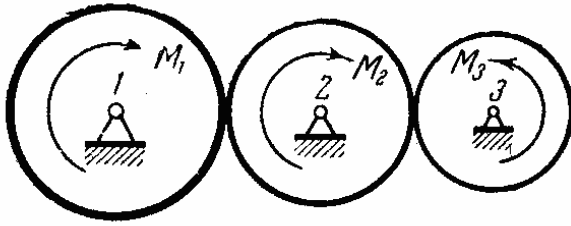


Рис.9.10

дится в движение моментом M_1 , к колесу 2 приложен момент сопротивления M_2 , а к колесу 3 - момент сопротивления M_3 . Найти угловое ускорение первого колеса, считая колеса однородными дис-

ками, массы которых m_1, m_2, m_3 и радиусы которых r_1, r_2, r_3 .

Решение. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты выбираем угол φ_1 поворота колеса 1 вокруг своей оси.

Составляем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = Q. \quad (9.58)$$

Вычисляем кинетическую энергию всей системы:

$$E_k = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2}. \quad (9.59)$$

Чтобы выразить кинетическую энергию через обобщенную скорость, т.е. через $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$, используем очевидные соотношения:

$$\omega_2 r_2 = \omega_1 r_1, \quad \omega_3 r_3 = \omega_2 r_2,$$

откуда

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1 = \frac{r_1}{r_2} \dot{\varphi}_1, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{r_3} \omega_2 = \frac{r_1}{r_3} \dot{\varphi}_1. \quad (9.60)$$

Подставляя (9.60) в (9.59) и учитывая выражения для осевых моментов инерции, получаем

$$E_k = \frac{\dot{\varphi}_1^2 r_1^2}{4} (m_1 + m_2 + m_3). \quad (9.61)$$

Производим с этим выражением действия, указанные в левой части уравнения (9.58):

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{\dot{\varphi}_1 r_1^2}{2} (m_1 + m_2 + m_3), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = \frac{\ddot{\varphi}_1 r_1^2}{2} (m_1 + m_2 + m_3), \quad \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = 0$$

(9.62)

Даем системе такое возможное перемещение, при котором колесо 1 повернется вокруг своей оси на угол $\delta\varphi_1$. При этом колеса 2 и 3 повернутся на углы

$$\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2} \delta\varphi_1, \quad \delta\varphi_3 = \frac{r_1}{r_3} \delta\varphi_1, \quad (9.63)$$

что следует из (9.60).

На указанном перемещении вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{\sum \delta A}{\delta\varphi_1} = \frac{M_1 \delta\varphi_1 - M_2 \delta\varphi_2 - M_3 \delta\varphi_3}{\delta\varphi_1}$$

или с учетом (9.63)

$$Q = M_1 - \frac{r_1}{r_2} M_2 - \frac{r_1}{r_3} M_3. \quad (9.64)$$

Подставляя (9.62) и (9.64) соответственно в левую и правую части уравнения (9.58), имеем:

$$\frac{\ddot{\varphi}_1 r_1^2}{2} (m_1 + m_2 + m_3) = M_1 - \frac{r_1}{r_2} M_2 - \frac{r_1}{r_3} M_3,$$

откуда

$$\ddot{\varphi}_1 = \varepsilon_1 = \frac{2(M_1 - \frac{r_1}{r_2} M_2 - \frac{r_1}{r_3} M_3)}{(m_1 + m_2 + m_3) r_1^2}.$$

Задача 9.4. На гладкой горизонтальной плоскости помещена треугольная призма ABC весом P , которая может скользить без трения по этой плоскости. По грани AB призмы катится без скольжения однородный круглый цилиндр весом G (рис.9.11). Трением качения пренебречь.

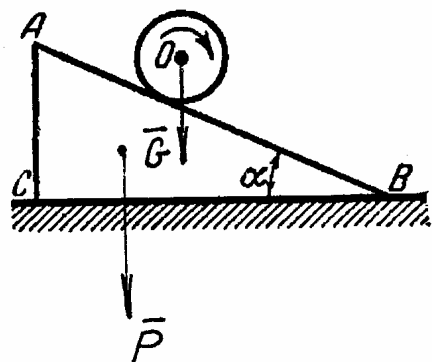


Рис.9.11

Определить ускорение призмы.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенной координаты q_1 выберем координату точки O цилиндра, отсчитываемую от нормали к грани AB в точке A (рис.9.12).

В качестве обобщенной координаты q_2 выберем координату центра тяжести призмы, отсчитываемую от неподвижной вертикальной стенки, поставленной в любом месте на горизонтальной плоскости.

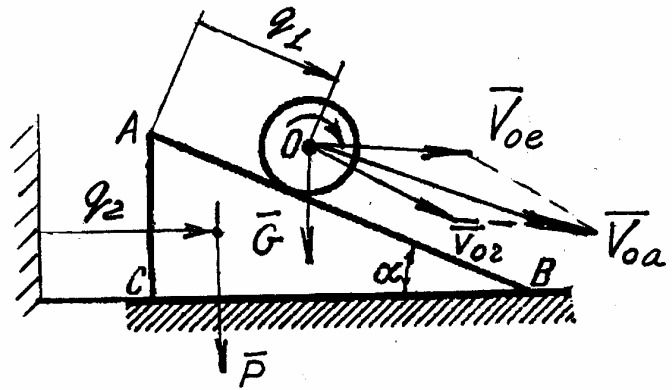


Рис.9.12

Односторонние стрелки, поставленные на рис.9.12 при q_1 и q_2 , показывают выбранные положительные направления, т.е. направления предположительного возрастания координат q_1 и q_2 .

Записываем уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = Q_1, \quad (9.65)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_2} = Q_2. \quad (9.66)$$

Вычисляем кинетическую энергию всей системы:

$$E_k = E_1 + E_2, \quad (9.67)$$

где E_1 - кинетическая энергия цилиндра, E_2 - кинетическая энергия призмы ABC.

Цилиндр совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O , и два поступательных движения вместе с точкой O : одно вдоль AB относительно призмы со скоростью \vec{v}_{0r} , другое - вместе с призмой в горизонтальном направлении со скоростью \vec{v}_{0e} (рис.9.12). Абсолютная скорость точки O равна

$$\vec{v}_{0a} = \vec{v}_{0r} + \vec{v}_{0e}.$$

Вычисляем кинетическую энергию цилиндра:

$$E_1 = \frac{G\bar{v}_{0a}^2}{2g} + \frac{J_0\omega^2}{2}.$$

Учитывая, что

$$J_0 = \frac{Gr^2}{2g}, \quad \omega = \dot{\phi} = \frac{\dot{q}_1}{r}, \quad v_{0r} = \dot{q}_1, \quad v_{0e} = \dot{q}_2,$$

$$\bar{v}_{0a}^2 = (\bar{v}_{0r} + \bar{v}_{0e})^2 = \bar{v}_{0r}^2 + 2\bar{v}_{0r}\bar{v}_{0e} + \bar{v}_{0e}^2 = \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos \alpha + \dot{q}_2^2,$$

получаем

$$E_1 = \frac{G}{2g}(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos \alpha + \dot{q}_2^2) + \frac{G}{4g}\dot{q}_1^2. \quad (9.68)$$

Кинетическая энергия призмы, как поступательно движущегося тела, равна

$$E_2 = \frac{P\bar{v}_{0e}^2}{2g} = \frac{P\dot{q}_2^2}{2g}. \quad (9.69)$$

Подставляя (9.68) и (9.69) в (9.67), получаем кинетическую энергию всей системы:

$$E_k = \frac{G}{2g}(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos \alpha + \dot{q}_2^2) + \frac{G}{4g}\dot{q}_1^2 + \frac{P\dot{q}_2^2}{2g}. \quad (9.70)$$

Конкретизируем уравнение Лагранжа, отнесенное к первой обобщенной координате. Для этого производим с выражением (9.70) операции, предписываемые левой частью уравнения (9.65):

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{G}{2g}(3\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 \cos \alpha), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{G}{2g}(3\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 \cos \alpha), \quad \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0. \quad (9.71)$$

Чтобы определить правую часть уравнения (9.65), даем системе такое возможное перемещение, при котором только координата q_1 получает приращение δq_1 , т.е. катим цилиндр по грани АВ при неподвижной призме (рис.9.13). При этом работу совершает только сила тяжести G цилиндра и, следовательно, обобщенная сила, соответствующая первой обобщенной координате, равна

$$Q_1 = \frac{\Sigma \delta A_1}{\delta q_1} = \frac{G \sin \alpha \cdot \delta q_1}{\delta q_1} = G \sin \alpha. \quad (9.72)$$

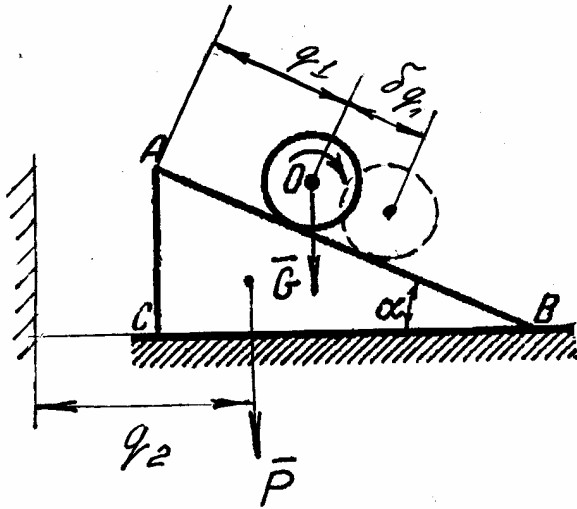


Рис.9.13

Подставляя (9.71) и (9.72) в (9.65) и сокращая на G , получаем окончательный вид уравнения (9.65):

$$3\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2 \cos \alpha = 2g \sin \alpha. \quad (9.73)$$

Теперь конкретизируем уравнение (9.66). Для этого дифференцируем кинетическую энергию по второй обобщенной координате и скорости:

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = \frac{G}{g} (\dot{q}_1 \cos \alpha + \dot{q}_2) + \frac{P}{g} \dot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{G}{g} (\ddot{q}_1 \cos \alpha + \ddot{q}_2) + \frac{P}{g} \ddot{q}_2, \quad \frac{\partial E_k}{\partial q_2} = 0. \quad (9.74)$$

Даем системе такое возможное перемещение, при котором только координата q_2 получает приращение δq_2 (рис.9.14), т.е. сдвигаем призму вместе с цилиндром по горизонтали (цилиндр при этом не движется относительно призмы).

На таком перемещении ни сила P , ни сила G не совершают работы, поскольку они ортогональны перемещениям точек их приложения.

Следовательно, обобщенная сила, соответствующая второй обобщенной координате, равна нулю:

$$Q_2 = \frac{\Sigma \delta A_2}{\delta q_2} = 0. \quad (9.75)$$

Подставляя (9.74) и (9.75) в (9.66), получаем уравнение Лагранжа 2-го рода, отнесенное ко второй обобщенной координате:

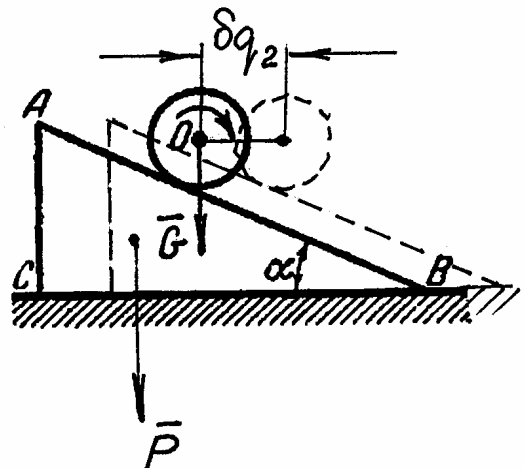


Рис.9.14

$$G(\ddot{q}_1 \cos \alpha + \ddot{q}_2) + P\ddot{q}_2 = 0. \quad (9.76)$$

Решая систему двух линейных уравнений, а именно, уравнений (9.73) и (9.76), определяем ускорение призмы:

$$\ddot{q}_2 = -\frac{G \sin 2\alpha}{3(P + G) - 2G \cos^2 \alpha} g.$$

Знак минус в полученной формуле указывает на то, что ускорение призмы направлено не по выбранному нами положительному направлению (направлению возрастания координаты q_2), а в обратную сторону, т.е. по мере скатывания цилиндра призма сдвигается влево.

Этот факт самоочевиден, однако мы специально им не воспользовались, чтобы показать, что ответ получается правильным при любых предварительных направлениях возрастания обобщенных координат, даже заведомо неверных.

Задача 9.5. Через блоки А и В с неподвижными осями перекинут шнур, поддерживающий подвижный блок С (рис.9.15). Части шнура, не лежащие на блоках, вертикальны. Блок С нагружен гирей весом $P = 4$ Н. К концам шнура прикреплены грузы весом $P_1 = 2$ Н и $P_2 = 3$ Н.

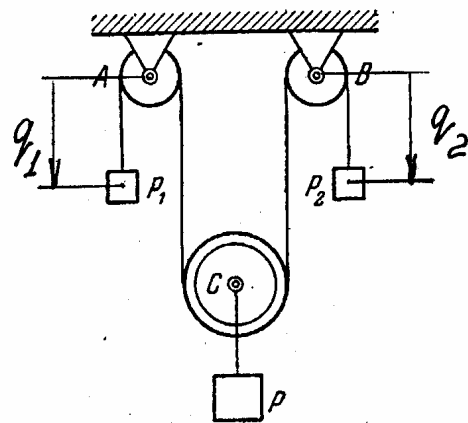


Рис.9.15

Определить ускорения всех трех грузов, пренебрегая массами блоков и шнура, а также трением на осях.

Решение. Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат примем q_1 и q_2 (рис.9.15). Уравнения Лагранжа, описывающие движение системы, имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = Q_1, \quad (9.77)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_2} = Q_2. \quad (9.78)$$

Кинетическая энергия системы равна

$$E_k = E_1 + E_2 + E_3, \quad (9.79)$$

где E_1, E_2, E_3 - кинетические энергии грузов P_1, P_2 и P соответственно.

Так как

$$E_1 = \frac{P_1}{2g} \dot{q}_1^2, \quad E_2 = \frac{P_2}{2g} \dot{q}_2^2, \quad E_3 = \frac{P}{2g} \left(\frac{\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{2} \right)^2,$$

то

$$E_k = \frac{P_1}{2g} \dot{q}_1^2 + \frac{P_2}{2g} \dot{q}_2^2 + \frac{P}{8g} (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2). \quad (9.80)$$

Конкретизируем уравнение Лагранжа, отнесенное к первой обобщенной координате. Для этого производим с выражением (9.80) операции, предписываемые левой частью уравнения (9.77):

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{P_1}{g} \dot{q}_1 + \frac{P}{4g} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{P_1}{g} \ddot{q}_1 + \frac{P}{4g} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2), \quad \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = 0. \quad (9.81)$$

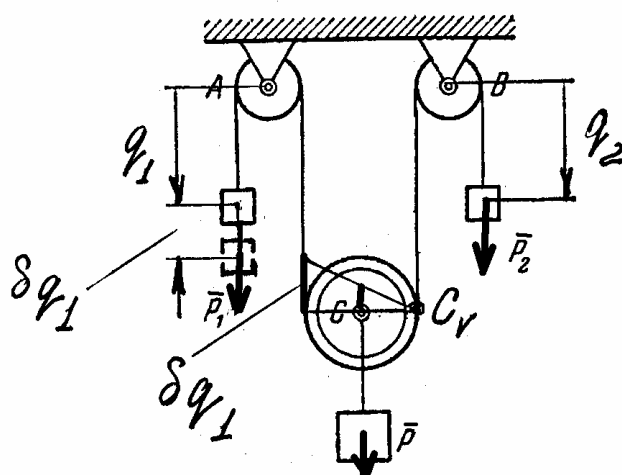


Рис.9.16

Чтобы определить правую часть уравнения (9.77), даем системе такое возможное перемещение, при котором координата q_1 получает приращение δq_1 , а координата q_2 остается неизменной. При этом центральный блок C перекатывается вокруг мгновенного центра скоростей, лежащего в точке касания блока с правой неподвижной частью нити (рис.9.16).

Подсчитываем обобщенную силу на этом перемещении:

$$Q_1 = \frac{\Sigma \delta A_1}{\delta q_1} = \frac{P_1 \delta q_1 - P \delta q_1 / 2}{\delta q_1} = P_1 - \frac{P}{2}. \quad 9.82$$

Переходим к конкретизации уравнения Лагранжа 2-го рода, отнесенного ко второй обобщенной координате. Для этого дифференцируем выражение (9.80) по второй обобщенной скорости и координате:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{P_2}{g} \dot{q}_2 + \frac{P}{4g} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) &= \frac{P_2}{g} \ddot{q}_2 + \frac{P}{4g} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2), \\ \frac{\partial E_k}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad 9.83$$

Чтобы определить правую часть уравнения (9.78), даем системе такое возможное перемещение, при котором координата q_2 получает приращение δq_2 , а координата q_1 остается неизменной. При этом центральный блок перекатывается вокруг мгновенного центра скоростей, лежащего в точке касания блока с левой неподвижной частью нити (рис.9.17).

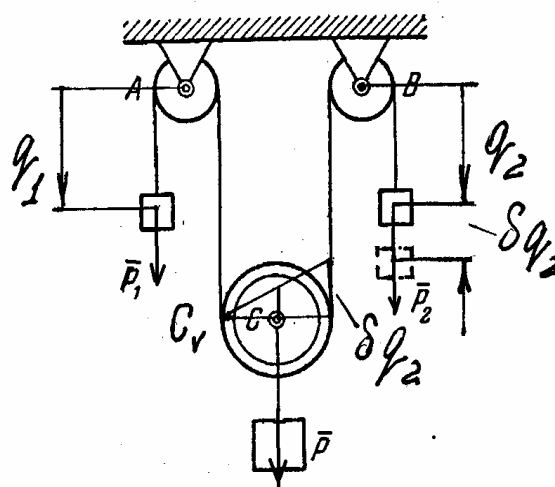


Рис.9.17

Подсчитываем обобщенную силу на этом перемещении:

$$Q_2 = \frac{\Sigma \delta A_2}{\delta q_2} = \frac{P_2 \delta q_2 - P \delta q_2 / 2}{\delta q_2} = P_2 - \frac{P}{2} \quad (9.84)$$

После подстановки (9.81) - (9.84) в (9.77) и (9.78) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{P_1}{g} \ddot{q}_1 + \frac{P}{4g} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = P_1 - \frac{P}{2}, \\ \frac{P_2}{g} \ddot{q}_2 + \frac{P}{4g} (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = P_2 - \frac{P}{2}. \end{cases} \quad (9.85)$$

Из этой системы имеем:

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{11}g, \quad \ddot{q}_2 = \frac{3}{11}g.$$

Полученные знаки говорят о том, что груз 1 поднимается, а груз 2 опускается. Ускорение центрального груза равно

$$a_c = \frac{\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2}{2} = \frac{-1+3}{2 \cdot 11}g = \frac{1}{11}g.$$

Центральный груз поднимается (рис.9.18).

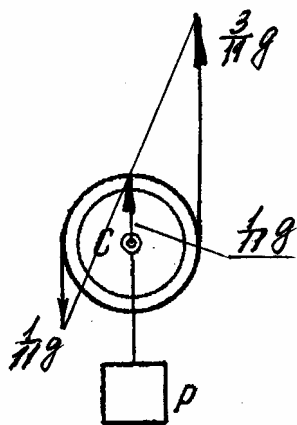


Рис.9.18

9.7. Контрольные вопросы

9.1. Чему равно число уравнений Лагранжа 2-го рода, описывающих движение механической системы с N степенями свободы?

9.2. Сколько степеней свободы имеет твердое тело, совершающее плоскопараллельное движение?

9.3. Как записываются дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела?

9.4. Чему равна лагранжева функция?

9.5. Как записывается уравнение Лагранжа 2-го рода для консервативной системы с одной степенью свободы?

9.6. Сколько степеней свободы имеет физический маятник?

9.7. Как записывается дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника?

9.8. Чему равен период малых колебаний физического маятника?

9.9. Зависят ли период и амплитуда малых колебаний физического маятника от начальных данных?

ГЛАВА 10. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

10.1. Устойчивое и неустойчивое состояния равновесия механической системы

Равновесие механической системы с голономными стационарными связями, находящейся в потенциальном поле, может быть *устойчивым и неустойчивым*.

Равновесие системы считается *устойчивым*, если система, будучи выведена из положения равновесия путем сообщения ее точкам весьма малых начальных отклонений от положения равновесия и весьма малых начальных скоростей, будет оставаться в заранее заданной окрестности состояния равновесия.

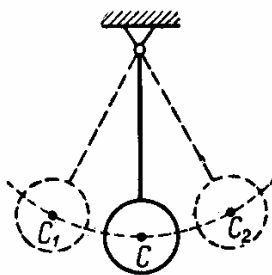


Рис.10.1

Равновесие системы считается *неустойчивым*, если при сколь угодно малом отклонении системы от состояния равновесия она выходит за пределы заранее назначенной окрестности этого состояния.

Термин «состояние системы» означает множество значений обобщенных координат и обобщенных скоростей в произвольный момент времени. Термин «состояние равновесия» означает набор фиксированных значений обобщенных координат и нулевых значений обобщенных скоростей.

Ниже рассматривается равновесие механической системы с одной степенью свободы.

Согласно приведенному определению равновесное положение устойчиво, если при наперед выбранных положительных, достаточно малых ε и ε_1 можно указать такие зависящие от ε и ε_1 положительные числа η и η_1 что при

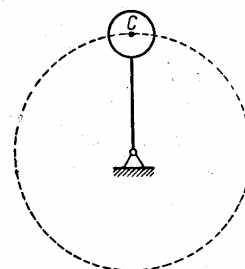


Рис.10.2

$$|q_0| < \eta, \quad |\dot{q}_0| < \eta_1$$

текущая координата q и обобщенная скорость \dot{q} по абсолютному значению останутся при любом t , как бы велико оно ни было, меньшими, чем ε и ε_1 :

$$|q_0| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_0| < \varepsilon_1.$$

Например, низшее вертикальное положение физического маятника (рис.10.1) является устойчивым, а верхнее (рис.10.2) - неустойчивым.

Качественное изучение поведения механической системы с одной степенью свободы облегчается введением в рассмотрение так называемой *фазовой плоскости* (q, \dot{q}), в которой строятся кривые - *фазовые траектории*, выражающие графически зависимость между q и \dot{q} для всего многообразия интегральных кривых. Так, в случае малых колебаний физического маятника вокруг положения устойчивого равновесия (рис.10.1) фазовые траектории можно получить путем исключения времени t из уравнений (9.48) и (9.49), что приведет к семейству кривых:

$$\frac{q^2}{a^2} + \frac{\dot{q}^2}{k^2 a^2} = 1. \quad (10.1)$$

Фазовыми траекториями физического маятника, согласно (10.1), служат подобные между собой эллипсы (рис.10.3), отличающиеся только масштабом, зависящим от начальных условий или, точнее, от полной механической энергии E .

На каждой фазовой траектории $E = \text{const}$.

Покою системы в положении ее устойчивого равновесия соответствует начало 0 координат фазовой плоскости ($q = 0, \dot{q} = 0$). При уменьшении полной энергии, т.е. при уменьшении значений начальных данных, фазовые траектории

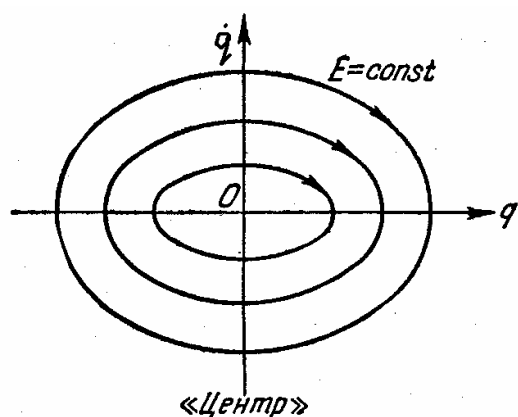


Рис.10.3

стягиваются к началу координат, которое в этом случае называется *центром*.

Каждому движению физического маятника при заданных начальных условиях соответствует движение изображающей точки по фазовой траек-

тории (эллипсу) в указанном на рис.10.3 направлении. В верхней полуплоскости, где $\dot{q} > 0$, координата q возрастает и изображающая точка движется слева направо, в нижней полуплоскости ($\dot{q} < 0$) - справа налево.

Аналогичный фазовый портрет имеет шарик в чаше (рис.10.4). На фазовой плоскости можно выделить прямоугольную область значений начальных данных размером $\eta_1 \times \eta_2$, при которых шарик не покинет чаши.

Семейство фазовых траекторий будет совершенно иным, если равновесие системы неустойчиво, как в случае шарика на куполе (рис.10.5). В этом случае семейство фазовых траекторий - это семейство гипербол с общими асимптотами. Начало 0 координат, соответствующее покою системы в точке неустойчивого равновесия, представляет седлообразную точку (седло).

При неустойчивом равновесии на фазовой плоскости невозможно выделить прямоугольную область начальных данных, при которых шарик не удалится бы от своего положения равновесия. Только при начальных данных, соответствующих изображающей точке, находящейся на асимптоте, направленной к началу координат, шарик теоретически может попасть в верхнее положение неустойчивого равновесия. При всех других начальных данных шарик покинет купол.

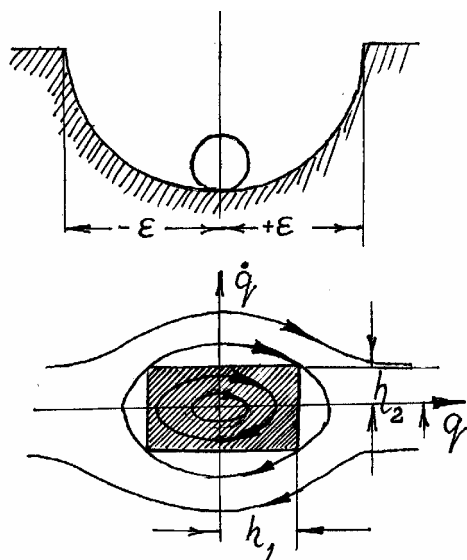


Рис.10.4

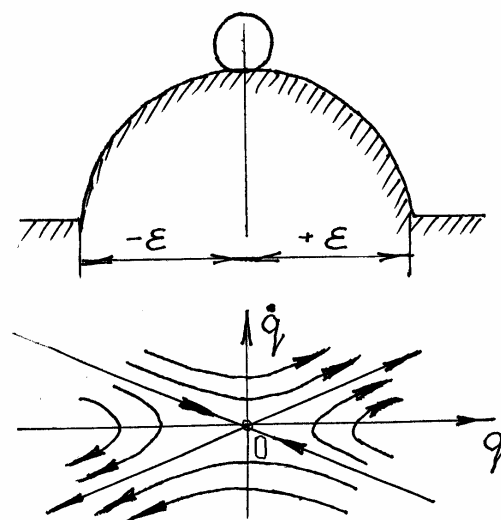


Рис.10.5

10.2. Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия

Критерий устойчивости равновесия консервативной системы с голономными стационарными связями содержится в теореме Лагранжа-Дирихле: *если положение равновесия системы соответствует точке минимума потенциальной энергии, то равновесие устойчиво.*

Докажем теорему Лагранжа-Дирихле для консервативной системы с одной степенью свободы.

В положении равновесия системы, согласно (8.30), обобщенная сила равна нулю:

$$Q = 0 \quad (10.2)$$

или, поскольку система консервативна, т.е. с учетом (9.36),

$$Q = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial q} = 0. \quad (10.3)$$

Из последнего выражения следует, что при равновесии системы потенциальная энергия имеет экстремум. Пусть этот экстремум является *минимумом*. Покажем, что при этом существуют такие начальные условия, при ко-

торых система, будучи выведена из положения равновесия, будет иметь значение обобщенной координаты, меньшее наперед заданного числа.

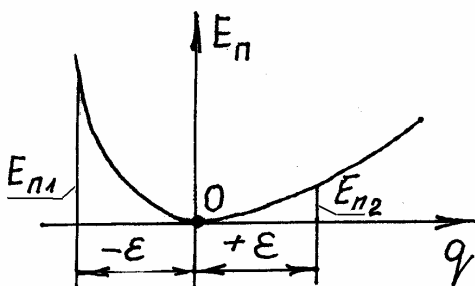


Рис.10.6

Не нарушая общности доказательства теоремы примем, что в положении равновесия обобщенная координата равна нулю, т.е. $q = 0$ (за счет соответствующего выбора системы координат) и потенциальная энергия системы равна нулю, т.е. $E_{\text{п}} = 0$ (за счет соответствующего подбора произвольной постоянной, с точностью до которой определяется потенциальная энергия).

Если в положении системы, определяемом значением $q = 0$, потенциальная энергия принимает минимальное свое значение, равное нулю (рис.10.6), то, по определению минимума, вблизи положения равновесия можно указать такую область значений

$$|q| < \varepsilon,$$

что внутри и на границах этой области значения потенциальной энергии будут положительны (это - так называемая область минимума функции).

Закрепим координату q на границе области минимума, положив

$$q = \pm \varepsilon.$$

Наименьшее значение потенциальной энергии из двух ее граничных значений $E_{\pi 1}$ и $E_{\pi 2}$ обозначим E_{π}^* :

$$E_{\pi}^* = \min(E_{\pi 1}, E_{\pi 2}).$$

Если при таком выборе значения E_{π}^* окажется, что во все время движения системы выполняется условие: $E_{\pi} < E_{\pi}^*$, то это будет означать, что координата q во время движения системы не достигает границ области минимума, т.е. система находится вблизи равновесного положения.

Выведем систему из положения равновесия, придав ей такие начальные данные q_0 и \dot{q}_0 , что

$$E_{\pi 0} < \frac{E_{\pi}^*}{2}, \quad E_{k0} < \frac{E_{\pi}^*}{2}. \quad (10.4)$$

Так как система движется в потенциальном поле, то в любой момент времени имеет место закон сохранения энергии:

$$E_k + E_{\pi} = E_{k0} + E_{\pi 0}. \quad (10.5)$$

Кинетическая энергия при движении системы всегда больше нуля:

$$E_k = \frac{\sum m_i \bar{v}_i^2}{2} > 0. \quad (10.6)$$

Из выражений (10.5) и (10.6) следует, что в любой момент времени соблюдается условие:

$$E_{\pi} < E_{k0} + E_{\pi 0} \quad (10.7)$$

или, с учетом (10.4),

$$E_{\pi} < E_{\pi}^*, \quad (10.8)$$

а это означает, как было сказано выше, что система не выходит за наперед заданные границы и, следовательно, исследуемое положение равновесия является устойчивым.

Теорема Лагранжа-Дирихле содержит утверждение об устойчивости равновесия системы в том ее положении, где потенциальная энергия достигает минимума, но не дает оснований судить о том, будет ли равновесие неустойчиво, если потенциальная энергия имеет в этом положении максимум. Ответ на этот вопрос содержится в теоремах Ляпунова (в данном пособии они не рассматриваются).

Пример 10.1. Указать ненулевые начальные условия, при которых математический маятник длиной ℓ , будет совершать колебания вокруг нижнего положения равновесия, достигая горизонтального положения (рис.10.7).

Решение. В горизонтальном (граничном) положении маятника его полная механическая энергия равна потенциальной энергии E_{Π}^* (кинетическая энергия на границе равна нулю, поскольку скорость маятника в горизонтальном положении равна нулю).

Следовательно, на основании закона сохранения энергии имеем:

$$E_{k0} + E_{\Pi 0} = E_{\Pi}^*, \quad (10.9)$$

где

$$E_{\Pi}^* = mg\ell, \quad E_{k0} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(\ell\dot{\varphi}_0)^2}{2}, \quad (10.10)$$

$$E_{\Pi 0} = mg\ell(1 - \cos\varphi_0). \quad (10.11)$$

Положим

$$E_{k0} = \frac{E_{\Pi}^*}{2}, \quad E_{\Pi 0} = \frac{E_{\Pi}^*}{2}, \quad (10.12)$$

тогда на основании (10.10) и (10.11) имеем

$$\frac{m(\ell\dot{\varphi}_0)^2}{2} = \frac{mg\ell}{2}, \quad mg\ell(1 - \cos\varphi_0) = \frac{mg\ell}{2},$$

откуда

$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{1}{2},$$

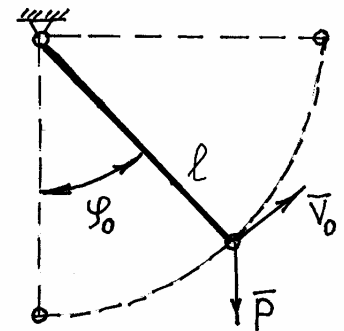


Рис.10.7

следовательно,

$$\varphi_0 = 60^\circ, \quad v_0 = \dot{\varphi}_0 \ell = \sqrt{g\ell}.$$

Полученный набор начальных данных не является единственным. Варьируя соотношения (10.12) при соблюдении условия (10.9), например, полагая $E_{k0} = E_{\pi}^*/3$, $E_{\pi 0} = 2E_{\pi}^*/3$ или $E_{k0} = 3E_{\pi}^*/4$ и $E_{\pi 0} = E_{\pi}^*/4$ и т.д., можно получить в данной задаче бесконечное множество наборов начальных данных.

10.3. Свободные колебания системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, подчиненную стационарным голономным связям и находящуюся под действием потенциальных сил.

Обозначим через q обобщенную координату и предположим, что положение системы, соответствующее $q = 0$, представляет положение устойчивого равновесия системы.

Опишем движение системы относительно положения устойчивого равновесия с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода для потенциальных сил:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (10.13)$$

где

$$L = E_k - E_{\pi}. \quad (10.14)$$

Кинетическая энергия системы равна

$$E_k = \sum \frac{m_i \bar{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i \dot{\bar{r}}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \dot{q} \right)^2 = \frac{\dot{q}^2}{2} \sum m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \right)^2.$$

Обозначим

$$\sum m_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \right)^2 = A(q), \quad (10.15)$$

тогда

$$E_k = \frac{\dot{q}^2}{2} A(q). \quad (10.16)$$

Разложим кинетическую энергию в ряд Тейлора с центром разложения в точке $q = 0$:

$$E_k = \frac{\dot{q}^2}{2} \left(A(0) + \left. \frac{dA}{dq} \right|_{q=0} \cdot q + \left. \frac{d^2 A}{dq^2} \right|_{q=0} \cdot \frac{q^2}{2} + \dots \right). \quad (10.17)$$

Из (10.17) следует, что с точностью до квадратичных членов (включительно) по q и \dot{q} кинетическая энергия системы равна

$$E_k = A(0) \frac{\dot{q}^2}{2}. \quad (10.18)$$

Значение функции $A(q)$ при любом q больше нуля, что следует из (10.15), поэтому для

$$A(0) > 0$$

введем обозначение:

$$A(0) = m > 0.$$

При этом выражение для кинетической энергии системы приобретает вид:

$$E_k = \frac{m\dot{q}^2}{2}. \quad (10.19)$$

Коэффициент m в формуле (10.19) играет ту же роль, что масса точки в аналогичной формуле, т.е. характеризует инерционность системы, поэтому *коэффициент m называется квазиинерционным коэффициентом*.

Переходим к вычислению потенциальной энергии системы. Разложим $E_{\Pi}(q)$ в степенной ряд, приняв за центр разложения положение устойчивого равновесия системы, т.е. $q = 0$:

$$E_{\Pi} = E_{\Pi}(0) + \left. \frac{dE_{\Pi}}{dq} \right|_{q=0} \cdot q + \left. \frac{d^2 E_{\Pi}}{dq^2} \right|_{q=0} \cdot \frac{q^2}{2} + \dots \quad (10.20)$$

В этом выражении

$$E_{\Pi}(0) = 0 \quad (10.21)$$

за счет соответствующего подбора произвольной постоянной, с точностью до которой определяется потенциальная энергия,

$$\left. \frac{dE_{\Pi}}{dq} \right|_{q=0} = 0, \quad (10.22)$$

поскольку при равновесии системы обобщенная сила равна нулю и, следовательно, первая производная от потенциальной энергии по обобщенной координате равна нулю.

$$\left. \frac{d^2 E_{\Pi}}{dq^2} \right|_{q=0} > 0, \quad (10.23)$$

так как в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет минимум.

Подставляя (10.21) - (10.23) в (10.20) и обозначая

$$\left. \frac{d^2 E_{\Pi}}{dq^2} \right|_{q=0} = c, \quad (10.24)$$

получаем выражение потенциальной энергии в квадратичном приближении:

$$E_{\Pi} = \frac{c q^2}{2}, \quad (10.25)$$

где c - *квазиупругий коэффициент*.

Лагранжева функция (10.14) с учетом (10.19) и (10.25) приобретает вид:

$$L = m\dot{q}^2 / 2 - c q^2 / 2. \quad (10.26)$$

Производные от этой функции, входящие в уравнение (10.13), равны

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = m\ddot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -cq. \quad (10.27)$$

Подставляя (10.27) в (10.26), а затем в (10.13), получаем

$$m\ddot{q} + cq = 0$$

или

$$\ddot{q} + k^2 q = 0, \quad (10.28)$$

где

$$k = \sqrt{c/m}. \quad (10.29)$$

Уравнение (10.28) представляет собой *дифференциальное уравнение гармонических колебаний системы*. Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$q = a \sin(kt + \alpha), \quad (10.30)$$

причем амплитуда a и начальная фаза α колебаний определяются по начальным условиям. Пусть при $t = 0$ $q = q_0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, тогда

$$a = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kq_0}{\dot{q}_0}. \quad (10.31)$$

Движение системы представляет собой гармонические колебания частоты k и периода

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (10.32)$$

Это *свободные* или *собственные колебания* системы. Графическое представление уравнения (10.30) аналогично графику гармонических колебаний точки (см. рис.1.5).

Заметим, что из формул (10.29) и (10.30) следует, что частота и период свободных колебаний системы не зависят от начальных данных.

10.4. Затухающие колебания системы при силе сопротивления, пропорциональной первой степени скорости

Разделим все силы, действующие на систему с одной степенью свободы, на потенциальные и непотенциальные. К потенциальным относятся силы тяжести и силы упругости, к непотенциальным - силы сопротивления.

Пусть сила сопротивления, приложенная к i -той точке системы, пропорциональна первой степени скорости точки:

$$\vec{R}_i = -\mu_i \vec{v}_i, \quad (10.33)$$

где μ_i - коэффициент пропорциональности ($\mu_i > 0$).

Обобщенная сила сопротивления, согласно (8.26), равна

$$Q_R = \sum \bar{R}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q}, \quad (10.34)$$

причем суммирование производится по всем точкам системы, к которым приложены силы сопротивления.

Уравнение Лагранжа 2-го рода, описывающее движение системы, в этом случае можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q_R.$$

В левой части этого уравнения учтены потенциальные силы, а в правой - непотенциальные. Левая часть этого уравнения была преобразована в предыдущем параграфе. С учетом этого преобразования уравнение Лагранжа приобретает вид:

$$m\ddot{q} + c\dot{q} = Q_R. \quad (10.35)$$

Обобщенную силу сопротивления (10.34), учитывая (10.33), представим так:

$$Q_R = -\sum \mu_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} = -\sum \mu_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} = -\sum \mu_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \frac{dq}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} = -\sum \mu_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \right)^2 \dot{q}$$

или

$$Q_R = -B(q)\dot{q}, \quad (10.36)$$

где

$$B(q) = \sum \mu_i \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q} \right)^2. \quad (10.37)$$

Разложим функцию $B(q)$ в степенной ряд, приняв за центр разложения $q = 0$:

$$B(q) = B(0) + \left. \frac{dB}{dq} \right|_{q=0} \cdot q + \dots \quad (10.38)$$

Подставляя (10.38) в (10.36) и удерживая лишь линейный член, получаем следующее выражение для обобщенной силы сопротивления:

$$Q_R = -B(0)\dot{q}$$

или

$$Q_R = -b\dot{q}, \quad (10.39)$$

где b – положительный коэффициент, равный $B(0)$ (значение функции $B(q)$ на основании (10.37) при любых q больше нуля).

Подставляя выражение (10.39) в уравнение (10.35), получаем

$$m\ddot{q} + cq = -b\dot{q}$$

или

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0, \quad (10.40)$$

где

$$2n = \frac{b}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}. \quad (10.41)$$

Полученное дифференциальное уравнение (10.40) представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Чтобы получить его интеграл, составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (10.42)$$

При $n \geq k$ (большое сопротивление среды) корни характеристического уравнения являются действительными и интеграл дифференциального уравнения (10.40) имеет вид:

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (10.43)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Экспоненциальный характер уравнения (10.43) указывает на то, что при большом сопротивлении среды движение системы быстро прекращается и никаких колебаний вокруг положения равновесия не происходит.

При $n = k$ имеет место предельный случай апериодического движения. В этом случае корни характеристического уравнения равны

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -n,$$

и интеграл дифференциального уравнения (10.40) имеет вид:

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_2 t} = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (10.44)$$

При $n < k$ корни характеристического уравнения являются комплексными:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm k_1 i, \quad i = \sqrt{-1},$$

где

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (10.45)$$

В этом случае дифференциальное уравнение (10.40) является дифференциальным уравнением

затухающих колебаний системы. Его интеграл представляет собой условно периодическую функцию:

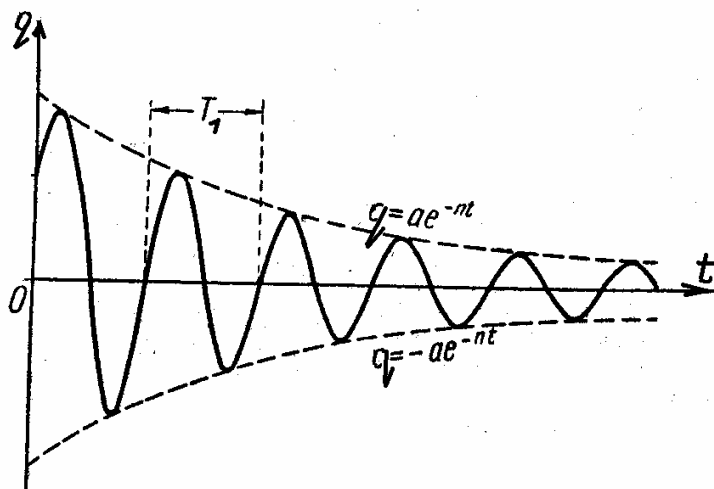


Рис.10.13

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \quad (10.46)$$

график которой показан на рис.10.13.

Уравнение (10.46) описывает *затухающие колебания системы* вокруг положения устойчивого равновесия.

Уравнение (10.46) легко преобразовать к виду:

$$q = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (10.47)$$

причем из сопоставления правых частей (10.46) и (10.47) видно (после раскрытия синуса суммы в (10.47)), что

$$a \cos \alpha = C_2, \quad a \sin \alpha = C_1, \quad (10.48)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 (или a и α) находятся по начальным данным q_0 и \dot{q}_0 с помощью уравнения (10.46) и производной от q по t , равной

$$\frac{dq}{dt} = -n e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + e^{-nt} k_1 (-C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t).$$

Из этого уравнения и уравнения (10.46), записанных при $t = 0$, получаем

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_1}. \quad (10.49)$$

Период T_1 затухающих колебаний несколько больше периода T свободных незатухающих колебаний:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (10.50)$$

Амплитуда a_1 затухающих колебаний изменяется по закону $a_1 = ae^{-nt}$ и за полпериода сокращается в $e^{-nT_1/2}$ раз. Величина $e^{-nT_1/2}$ называется *декрементом затухающих колебаний*.

10.5. Вынужденные колебания системы при действии внешней периодической силы

Вынужденные колебания возникают при действии возмущающих сил на систему, способную совершать малые движения около положения устойчивого равновесия.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, на которую действует периодическая возмущающая сила, изменяющаяся по закону:

$$Q = H \sin pt. \quad (10.51)$$

Опишем движение системы уравнением Лагранжа 2-го рода, пренебрегая сопротивлением среды:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = H \sin pt \quad (10.52)$$

или, с учетом преобразования левой части (см. параграф 10.3),

$$m\ddot{q} + cq = H \sin pt.$$

Деля на инерционный коэффициент m , получаем:

$$\ddot{q} + k^2 q = h \sin pt, \quad (10.53)$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{H}{m}. \quad (10.54)$$

Уравнение (10.53) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, полное решение которого состоит из суммы двух решений:

$$q = q_1 + q_2, \quad (10.55)$$

причем q_1 - это решение однородного уравнения (без правой части), а q_2 - это частное решение, подбираемое по виду правой части. В рассматриваемом случае эти решения выглядят так:

$$q_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (10.56)$$

$$q_2 = A \sin pt, \quad (10.57)$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, а A - неопределенный коэффициент, подлежащий определению.

Подставляя частное решение (10.57) и его вторую производную в дифференциальное уравнение (10.53), получаем тождество:

$$-Ap^2 \sin pt + Ak^2 \sin pt \equiv h \sin pt,$$

из которого определяется коэффициент A :

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}. \quad (10.58)$$

Полное решение дифференциального уравнения (10.53) с учетом приведенных выражений приобретает вид:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt, \quad (10.59)$$

причем C_1 и C_2 определяются по начальным данным.

Силы сопротивления, которые здесь не учитывались, гасят свободные колебания. Поэтому по истечении достаточно большого промежутка времени от начала движения, т.е. при установившемся режиме движения, в уравнении (10.59) сохраняется только последнее слагаемое. Поэтому *уравнением вынужденных колебаний системы обычно считают частное решение:*

$$q_2 = A \sin pt = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (10.60)$$

Амплитуда A вынужденных колебаний не зависит от начальных условий.

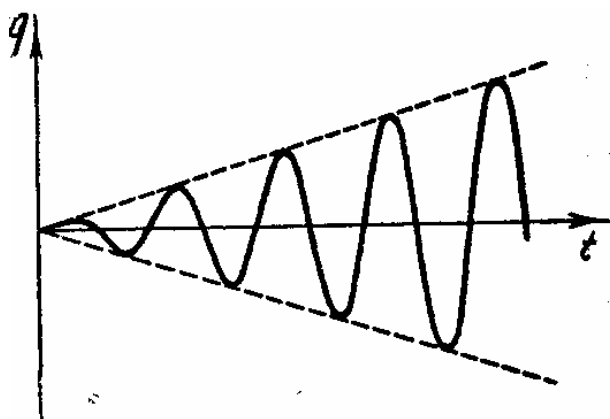


Рис.10.14

Если частота p возмущающей силы совпадает с частотой k собственных колебаний системы, то возникает явление *резонанса*. При резонансе возмущающая сила действует «в такт» с собственными колебаниями системы, что приводит к резкому возрастанию амплитуды вынужденных колебаний (рис.10.14). Бесконечно большое

значение амплитуды, следующее теоретически из формулы (10.58), не достигается из-за наличия сопротивления среды.

Явление резонанса может служить причиной разрушения технических сооружений. Во избежание этого частота собственных колебаний и частоты возмущающей силы по возможности должны разводиться на значительное расстояние одна от другой.

При резонансе, т.е. при $p = k$, уравнение вынужденных колебаний записывается в виде:

$$q_2 = (B_1 \cos pt + B_2 \sin pt) t. \quad (10.61)$$

Для определения коэффициентов B_1 и B_2 подставляем это решение и его вторую производную в дифференциальное уравнение (10.53). При этом получаем тождество, из которого следует, что

$$B_1 = -\frac{h}{2k}, \quad B_2 = 0.$$

С учетом этих выражений уравнение вынужденных колебаний системы при резонансе имеет вид:

$$q_2 = -\frac{h}{2k} t \cos pt. \quad (10.62)$$

10.6. Решение задач

Задача 10.1. По гладкому неподвижному проволочному кольцу радиусом r , расположенному в вертикальной плоскости, может скользить без трения гладкое кольцо В. К кольцу В подвешен груз Е весом Q и привязана нить, перекинутая через ничтожно малый неподвижный блок А, находящийся в высшей точке кольца. К концу этой нити подвешен груз D весом P (рис.10.15).

Определить, при каких значениях центрального угла φ механическая система будет находиться в состоянии покоя и установить, какие из этих состояний покоя устойчивы.

Решение. Примем за обобщенную координату системы угол φ и проведем через центр блока А координатные оси Ax и Ay (рис.10.15).

Потенциальная энергия системы при условии, что ноль ее отсчета находится в точке А, равна

$$E_{\Pi} = E_{\Pi}^{(P)} + E_{\Pi}^{(Q)} = -(Py_P + Qy_Q). \quad (10.63)$$

Обозначив через L длину нити BAD, а через ℓ - расстояние от кольца В до центра тяжести груза Q , получим

$$y_P = L - 2r \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$y_Q = AB \sin \frac{\varphi}{2} + \ell = 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \ell,$$

тогда

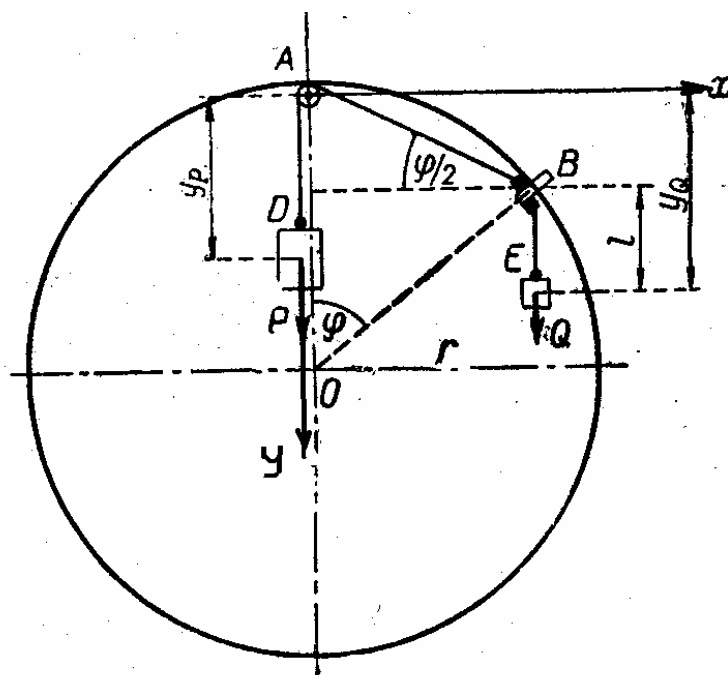


Рис.10.15

$$E_{\Pi} = -P(L - 2r \sin \frac{\varphi}{2}) - Q(2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \ell) = -PL + 2Pr \sin \frac{\varphi}{2} - 2Qr \sin^2 \frac{\varphi}{2} - Q\ell.$$

Вычисляем первую и вторую производные от потенциальной энергии по обобщенной координате:

$$\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial \varphi} = r \cos \frac{\varphi}{2} (P - 2Q \sin \frac{\varphi}{2}), \quad (10.64)$$

$$\frac{\partial^2 E_{\Pi}}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} Pr \sin \frac{\varphi}{2} - Qr \cdot \cos \varphi. \quad (10.65)$$

При равновесии системы

$$\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial \varphi} = 0,$$

следовательно, из (10.64) имеем:

$$r \cos \frac{\varphi}{2} (P - 2Q \sin \frac{\varphi}{2}) = 0.$$

Из этого равенства устанавливаем два условия возможного состояния равновесия системы

$$1) \cos \frac{\varphi_1}{2} = 0, \quad \frac{\varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_1 = \pi,$$

$$2) P - 2Q \sin \frac{\varphi_2}{2} = 0, \quad \sin \frac{\varphi_2}{2} = \frac{P}{2Q}.$$

Второе условие может выполняться и не совпадать с первым только при

$$\frac{P}{2Q} < 1$$

Для того, чтобы равновесие было устойчивым, необходимо, чтобы вторая производная от потенциальной энергии по координате была больше нуля:

$$\frac{\partial^2 E_{\Pi}}{\partial \varphi^2} > 0.$$

$$1) \quad \text{При } \varphi_1 = \pi \quad \left(\frac{\partial^2 E_{\Pi}}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_1} = Qr - \frac{1}{2} Pr, \quad \text{и состояние покоя устойчи-}$$

чиво, если

$$Qr - \frac{1}{2} Pr > 0 \quad \text{или} \quad Q > \frac{P}{2}.$$

$$2) \text{ При } \sin \frac{\varphi_2}{2} = \frac{P}{2Q} \quad \left(\frac{\partial^2 E_{\Pi}}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_2} = r \left(\frac{P^2}{4Q} - Q \right).$$

Так как

$$2Q > P,$$

то

$$\left(\frac{\partial^2 E_{\Pi}}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_2} = r \left(\frac{P^2}{4Q} - Q \right) < 0,$$

т.е. в этом положении потенциальная энергия имеет максимум, следовательно, система находится в неустойчивом равновесии.

Таким образом, при $\varphi_1 = \pi$ система находится в устойчивом равновесии, если $Q > P/2$, а при $\sin \frac{\varphi_2}{2} = \frac{P}{2Q}$ равновесие системы неустойчиво.

Задача 10.2. При горизонтальном положении стержня AD весом G механическая система находится в равновесии (рис.10.16). Конец A стержня удерживается пружиной жесткостью c , к концу D стержня подвешен груз весом P . Размеры указаны на рисунке.

Определить частоту и период малых колебаний системы, пренебрегая силами сопротивления и массой нити. Найти уравнение движения груза P

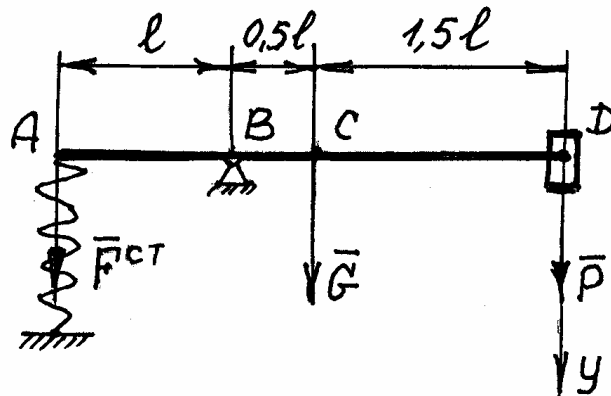


Рис.10.16

$$y = y(t),$$

приняв за начало отсчета положение покоя груза. Считать, что при $t=0$ $y = y_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$.

Решение. Рассмотрим положение равновесия системы (рис.10.16). На систему действуют силы тяжести G и P , а также сила F пружины.

Сила пружины всегда пропорциональна ее удлинению из недеформированного состояния. Статическое удлинение пружины, т.е. удлинение пружины при равновесии, обозначим $\lambda^{ст}$. Тогда сила пружины в равновесном состоянии системы равна

$$F^{ст} = c\lambda^{ст}. \quad (10.66)$$

Величину $\lambda^{ст}$ определяем из условия равновесия системы:

$$\sum M_B = 0, \quad F^{ст}\ell - G \cdot 0,5\ell - P \cdot 2\ell = 0,$$

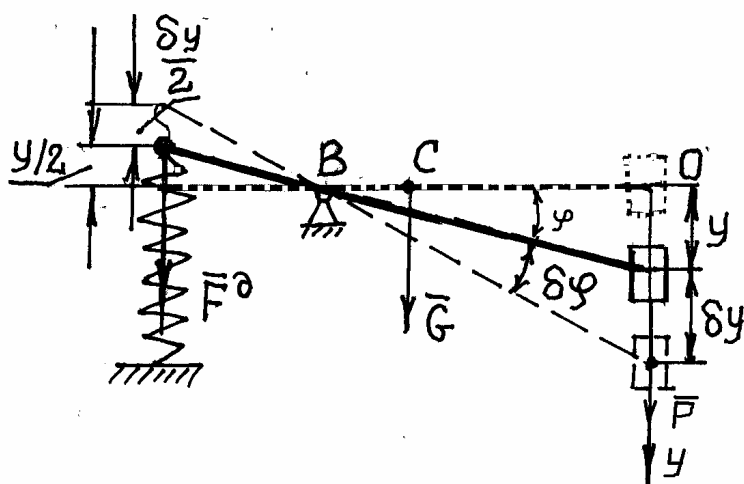


Рис.10.17

отсюда с учетом (10.66)

$$\lambda^{ст} = \frac{G + 4P}{2c}. \quad (10.67)$$

Переходим к динамике. Приняв координату y груза P (рис.10.17) за обобщенную координату системы, записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial y} = Q. \quad (10.68)$$

Вычисляем кинетическую энергию системы:

$$E_k = E_k^{(P)} + E_k^{(G)}, \quad (10.69)$$

где

$$E_k^{(P)} = \frac{P}{g} \cdot \frac{\dot{y}^2}{2}, \quad E_k^{(G)} = \frac{J_B}{2} \cdot \frac{\dot{y}^2}{(2\ell)^2}. \quad (10.70)$$

Подставляя (10.70) в (10.69) и учитывая при этом, что момент инерции стержня AD относительно оси B на основании теоремы Штейнера-Гюйгенса равен

$$J_B = J_C + \frac{G}{g}(BC)^2 = \frac{G}{g} \cdot \frac{(3\ell)^2}{12} + \frac{G}{g}(0,5\ell)^2 = \frac{G}{g}\ell^2, \quad (10.71)$$

получаем выражение для кинетической энергии и ее производных:

$$E_k = \frac{\dot{y}^2}{2g}\left(P + \frac{G}{4}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\ddot{y}}{4g}(4P + G), \quad \frac{\partial E_k}{\partial y} = 0. \quad (10.72)$$

Для конкретизации правой части уравнения (10.68) даем системе такое возможное перемещение, при котором груз P смещается на δy (рис.10.17), и вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{\sum \delta A}{\delta y} = \frac{1}{\delta y}(P\delta y + G\frac{\delta y}{4} - F^\partial \frac{\delta y}{2}), \quad (10.73)$$

где F^∂ - сила пружины в момент, когда груз P имеет координату y. Сила пружины, как уже говорилось, равна произведению жесткости на полное удлинение λ (из недеформированного состояния), следовательно, в указанный момент сила пружины равна (рис.10.17)

$$F^\partial = c\lambda = c(\lambda^{ст} + \frac{y}{2}). \quad (10.74)$$

Подставляя (10.74) в (10.73) и учитывая при этом (10.67), получаем выражение обобщенной силы:

$$Q = -\frac{c}{4}y. \quad (10.75)$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода с учетом (10.72) и (10.75) приобретает вид:

$$\ddot{y} + k^2 y = 0, \quad (10.76)$$

где

$$k^2 = \frac{cg}{4P + G}. \quad (10.77)$$

Период малых колебаний системы равен, согласно (10.32),

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{4P + G}{cg}}.$$

Решение дифференциального уравнения (10.76), т.е. кинематическое уравнение движения груза Р, записываем в виде:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (10.78)$$

Скорость груза Р равна

$$\dot{y} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt). \quad (10.79)$$

С помощью (10.78) и (10.79) определяем постоянные интегрирования, используя начальные данные:

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{\dot{y}_0}{k}. \quad (10.80)$$

Подставляя (10.80) в (10.78), получаем окончательный вид закона движения груза Р:

$$y = y_0 \cos kt + \frac{\dot{y}_0}{k} \sin kt. \quad (10.81)$$

10.7. Контрольные вопросы

10.1. Каким может быть состояние равновесия механической системы?

10.2. В каких координатах строится фазовая траектория?

10.3. Каков критерий устойчивости равновесия механической системы с одной степенью свободы?

10.4. Какой вид имеет дифференциальное уравнение гармонических колебаний системы с одной степенью свободы?

10.5. Какой вид имеет дифференциальное уравнение затухающих колебаний системы с одной степенью свободы при силе сопротивления среды пропорциональной скорости?

10.6. Каков знаменатель геометрической прогрессии, по которой убывает амплитуда затухающих колебаний?

10.7. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы при возмущающей силе, изменяющейся по синусоидальному закону?

ГЛАВА 11. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

11.1 Принцип Даламбера

В динамике механических систем так же как в статике большое значение имеет вопрос об определении реакций связей. Знание этих реакций необходимо для установления запасов прочности связей, действующих на движущиеся системы. В данной главе обсуждаются методы, позволяющие находить как ускорения, так и реакции, зависящие от них.

Напомним предварительно, что в физике для материальных объектов (частиц или тел) различаются масса инертная и масса гравитационная. Первая из них является характеристикой свойства, внутренне присущего всем материальным объектам, а именно свойства сопротивления воздействиям, стремящимся изменить ускорение объекта.

Гравитационная масса является характеристикой взаимодействия материального объекта с мировым гравитационным полем, заполняющим все окружающее пространство.

В результате многочисленных опытов установлено, что названные массы равны.

Из общей теории относительности известно, что гравитационное поле налагает некоторые ограничения на кинематические характеристики движения любой частицы, а следовательно и любого тела.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть на i -тую точку массы m_i действуют активные силы и силы реакций. Под действием этих сил точка получает ускорение, определяемое из второго закона Ньютона:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \quad (11.1)$$

где \vec{F}_i - равнодействующая активных сил, \vec{R}_i - равнодействующая сил реакций.

Перенесем все члены уравнения (11.1) в одну часть:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \vec{a}_i = 0. \quad (11.2)$$

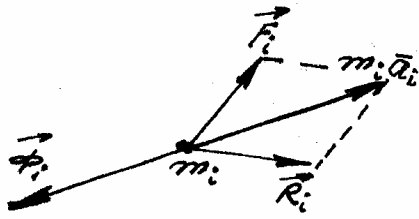


Рис.11.1

Величина $(-m_i \vec{a}_i)$ имеет размерность силы и называется силой инерции. Будем обозначать силу инерции через $\vec{\Phi}_i$:

$$\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i . \quad (11.3)$$

Если движение механической системы рассматривается по отношению к инерциальной системе отсчета, то за этим формальным определением скрываются силы двух видов: силы, которые условно можно называть силами инертности и силы, с которыми гравитационное поле принуждает каждую материальную частицу двигаться в соответствии с законами этого поля.

Силы инертности являются виртуальными силами в том смысле, что они не приложены к объектам, движение которых изучается. В случае непосредственного контакта тела А с телом В, которому А стремится сообщить ускорение, сила инертности тела В приложена к телу А.

Принимая во внимание обобщенное выражение (11.3), силы инертности можно условно называть силами инерции 1-ого вида.

Силы инерции 2-ого вида являются реальными. Они приложены к движущимся телам и являются своеобразными реакциями гравитационного поля, когда неподвижная или подвижная связь принуждает тело нарушать кинематические ограничения, упомянутые выше. Так обстоит дело, например, с автомобилем, движущимся по криволинейному мосту; с телами, находящимися в самолете, выполняющем фигуру «горка»; с коническим маятником и тому подобное.

В дальнейшем, учитывая равенство инертной и гравитационной масс, мы не будем каждый раз делать специальные оговорки о виртуальности или реальности сил инерции. Все, о чем говориться ниже, в равной степени справедливо для обеих видов сил инерции. Разница только в том, что силы инерции 1-ого вида считаются приложенными к точкам системы условно.

С учетом (11.3) уравнение (11.2) приобретает вид:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0 . \quad (11.4)$$

Это уравнение выражает *принцип Даламбера* для одной точки: при движении материальной точки в любой момент времени активная сила \vec{F}_i , реакция связей \vec{R}_i , и сила инерции $\vec{\Phi}_i$ образуют уравновешенную систему сил.

Для системы материальных точек принцип Даламбера записывается в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{\Phi}_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \vec{F}_n + \vec{R}_n + \vec{\Phi}_n = 0 \end{cases} \quad (11.5)$$

и формулируется следующим образом: при движении механической системы в любой момент времени система сил, состоящая из активных сил, реакций связей и сил инерции является уравновешенной, т.е. к ней можно применять все уравнения статики.

11.2. Метод кинетостатики

Как известно из статики, если система сил уравновешена, то ее главный вектор и главный момент равны нулю.

Это позволяет заменить n векторных уравнений (11.5) двумя векторными уравнениями:

$$\vec{F}^{\text{гл}} + \vec{R}^{\text{гл}} + \vec{\Phi}^{\text{гл}} = 0, \quad (11.6)$$

$$\vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{F}) + \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{R}) + \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = 0, \quad (11.7)$$

где

$$\vec{F}^{\text{гл}} = \sum \vec{F}_i, \quad \vec{R}^{\text{гл}} = \sum \vec{R}_i, \quad \vec{\Phi}^{\text{гл}} = \sum \vec{\Phi}_i, \quad (11.8)$$

$$\vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{F}) = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_i), \quad \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{R}) = \sum \vec{m}_0(\vec{R}_i), \quad \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{m}_0(\vec{\Phi}_i). \quad (11.9)$$

Двум векторным уравнениям (11.6) и (11.7) соответствуют шесть скалярных уравнений в проекциях на оси координат.

Уравнения (11.6) и (11.7) составляют основу метода кинетостатики, позволяющего решать задачи динамики с помощью уравнений статики.

11.3. Главный вектор и главный момент сил инерции

Запишем выражение *главного вектора* сил инерции:

$$\vec{\Phi}^{\text{гл}} = \sum \vec{\Phi}_i = -\sum m_i \vec{a}_i. \quad (11.10)$$

Правую часть этого выражения можно преобразовать, используя формулу (3.1) для радиуса-вектора центра инерции системы:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M},$$

где M - масса всей системы. Дифференцируя это выражение дважды по времени, получаем:

$$\vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M},$$

откуда

$$\sum m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_c,$$

следовательно, главный вектор сил инерции равен

$$\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -M \vec{a}_c. \quad (11.11)$$

Полученная формула справедлива для любого вида механической системы и для любого вида ее движения.

Главный момент сил инерции определяется формулой:

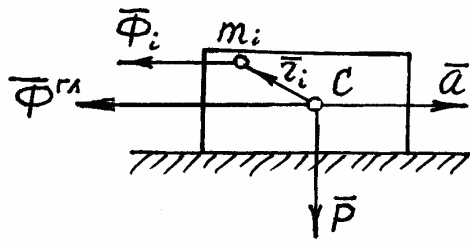
$$\vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{m}_0(\vec{\Phi}_i) = \sum \vec{r}_i \times (-m_i \vec{a}_i) = -\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i. \quad (11.12)$$

Из приведенной формулы следует, что, в отличие от главного вектора, главный момент сил инерции зависит от вида механической системы, от характера ее движения и от положения центра, относительно которого он подсчитывается.

11.4. Приведение сил инерции твердого тела к центру

Произведем операцию приведения системы сил инерции к центру для частных случаев движения твердого тела.

1. П о с т у п а т е л ь н о е д в и ж е н и е. Тело весом $P = Mg$ дви-



жется поступательно с ускорением \vec{a} (рис.11.2). Приведем все силы инерции к центру тяжести тела. Главный вектор сил инерции в соответствии с (11.11) равен

$$\vec{\Phi}^{gl} = -M \vec{a}_c = -\frac{P}{g} \vec{a} \quad (\vec{a}_c = \vec{a})$$

Рис.11.2

Главный момент сил инерции относительно центра тяжести тела равен со-

гласно (11.12)

$$\vec{M}_c^{gl}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = -\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a} = -(\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{a}.$$

Выражение, стоящее в скобках, равно нулю (см. формулу (3.2)), следовательно,

$$\vec{M}_c^{gl}(\vec{\Phi}) = 0. \quad (11.13)$$

Таким образом, при поступательном движении тела силы инерции приводятся к равнодействующей, равной $\vec{\Phi}^{gl}$ и проходящей через центр тяжести тела.

2. В р а щ е н и е в о к р у г н е п о д в и ж н о й о с и. Пусть тело массы M имеет плоскость симметрии и вращается вокруг неподвижной оси Oz , перпендикулярной этой плоскости.

Приведем силы инерции к точке O , лежащей в плоскости симметрии тела. Главный вектор сил инерции равен

$$\vec{\Phi}^{gl} = -M \vec{a}_c = -M (\vec{a}_c^n + \vec{a}_c^\tau).$$

Чтобы найти главный момент, приложим к точке m_i две силы инерции: центробежную $\vec{\Phi}_i^n$ и касательную $\vec{\Phi}_i^\tau$, направленные противоположно составляющим ускорения точки (рис.11.3). Величины этих сил соответственно равны

$$\Phi_i^n = m_i a_i^n = m_i \omega^2 r_i,$$

$$\Phi_i^\tau = m_i a_i^\tau = m_i \varepsilon r_i,$$

где r_i - расстояние от точки m_i до оси вращения.

Главный момент центробежных сил инерции относительно оси Oz равен нулю, поскольку силы $\vec{\Phi}_i^n$ пересекают ось вращения. Следовательно, главный момент создается только касательными силами инерции:

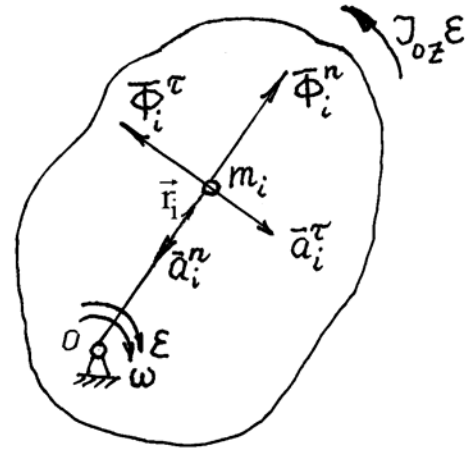


Рис.11.3

$$M_{Oz}^{гл}(\vec{\Phi}) = \sum r_i \Phi_i^\tau = -\sum m_i \varepsilon r_i^2 = -\varepsilon J_{Oz}. \quad (11.16)$$

Знак минус указывает на то, что направление главного момента сил инерции противоположно угловому ускорению тела.

Таким образом, в рассматриваемом случае силы инерции приводятся к одной силе, равной $\vec{\Phi}^{гл}$ и проходящей через точку O , и к одной паре, лежащей в плоскости симметрии и равной εJ_{Oz} .

3. П л о с к о п а р а л л е л ь н о е д в и ж е н и е. Пусть тело массы M имеет плоскость симметрии. Приведем все силы инерции к центру тяжести тела.

Главный вектор сил инерции равен

$$\vec{\Phi}^{гл} = -M \vec{a}_c, \quad (11.17)$$

где \vec{a}_c - ускорение центра тяжести.

Переходим к вычислению главного момента сил инерции. Произвольная точка i тела имеет ускорение, равное геометрической сумме трех ускорений: полюсного \vec{a}_c , центростремительного $\vec{a}^ц$ и вращательного $\vec{a}^{вр}$ (см. пособие «Кинематика»), т.е.

$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{a}^ц + \vec{a}^{вр},$$

причем

$$\vec{a}^ц = -\omega^2 \vec{r}_i, \quad \vec{a}^{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i,$$

где \vec{r} - радиус-вектор, идущий из полюса С в точку i.

Прикладываем к i-ой точке силы инерции $\vec{\Phi}_c, \vec{\Phi}^u, \vec{\Phi}^{bp}$ по направлениям, противоположным составляющим ускорения, и подсчитываем главный момент этих сил относительно центра тяжести тела:

$$\begin{aligned}\vec{M}_c^{gl}(\vec{\Phi}) &= \sum \vec{r}_i \times m_i (\vec{\Phi}_c + \vec{\Phi}^u + \vec{\Phi}^{bp}) = \sum \vec{r}_i \times m_i (-\vec{a}_c + \omega^2 \vec{r}_i - \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i) = \\ &= -(\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{a}_c + (\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{r}_i) \omega^2 - (\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i).\end{aligned}$$

Первое слагаемое в полученном выражении равно нулю, поскольку $\sum m_i \vec{r}_i = 0$ (см. формулу (3.2)). Второе слагаемое равно нулю, так как $\vec{r}_i \times \vec{r}_i = 0$. Преобразуем третье слагаемое:

$$\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i = \vec{\varepsilon} (\sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \sum m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\varepsilon}).$$

В этом выражении первое слагаемое равно

$$\vec{\varepsilon} \sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = \vec{\varepsilon} \sum m_i (\vec{r}_i)^2 = J_{cz} \vec{\varepsilon},$$

а второе слагаемое равно нулю, потому что $\vec{r}_i \perp \vec{\varepsilon}$. Окончательно имеем:

$$\vec{M}_c^{gl}(\vec{\Phi}) = -J_{cz} \vec{\varepsilon}. \quad (11.18)$$

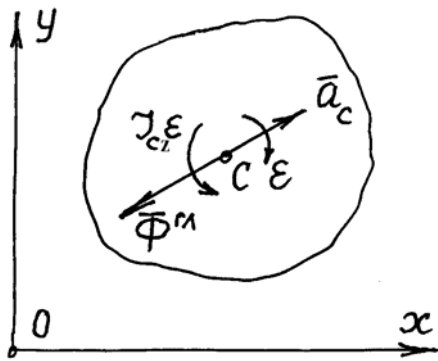


Рис.11.4

Таким образом, в рассматриваемом случае силы инерции приводятся к одной силе, равной $\vec{\Phi}^{gl}$ и проходящей через точку С, и к одной паре, лежащей в плоскости симметрии, с моментом равным εJ_{cz} и направленным в сторону, противоположную угловому ускорению тела (рис.11.4).

Пример 11.1. На барабан веса Р и радиуса r намотана нить с грузом А весом Q (рис.11.5). Пренебрегая массой нити и трением в оси 0 найти угловое ускорение барабана при вертикальном движении груза, а также определить реакцию шарнира 0 и натяжение нити. Радиус инерции барабана относительно его оси равен $\rho_{и}$.

Решение. На систему действуют силы тяжести \vec{P} и \vec{Q} , а также реакции \vec{x}_0 и \vec{y}_0 шарнира 0. Прикладываем ко всем точкам системы, состоящей из барабана и груза А, силы инерции. Груз А движется поступательно и для него, как показано выше, силы инерции приводятся к равнодействующей

$$\Phi = \frac{Q}{g} a = \frac{Q}{g} \varepsilon r,$$

приложенной в центре тяжести груза А. Силы инерции барабана приводятся к паре сил с моментом

$$M_{0z}(\vec{\Phi}) = J_{0z} \varepsilon = \frac{P}{g} \rho_{и}^2 \varepsilon,$$

направленным противоположно угловому ускорению барабана.

Поскольку после приложения сил инерции вся совокупная система сил оказывается уравновешенной, составляем уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно точки 0:

$$\sum M_0 = J_{0z} \varepsilon + \Phi r - Q r = 0$$

или

$$\frac{P}{g} \rho_{и}^2 \varepsilon + \frac{Q}{g} \varepsilon r^2 - Q r = 0.$$

Отсюда находим угловое ускорение барабана:

$$\varepsilon = \frac{Q g r}{P \rho_{и}^2 + Q r^2}.$$

Для нахождения реакций шарнира 0 составляем уравнения равновесия системы сил в проекциях на оси x и y:

$$\sum X = X_0 = 0, \quad \sum Y = Y_0 - P + \Phi - Q = 0.$$

Из этих уравнений при использовании выражений для Φ и ε получаем:

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = \frac{P Q \rho_{и}^2 + P^2 \rho_{и}^2 + Q^2 r^2}{P \rho_{и}^2 + Q r^2}.$$

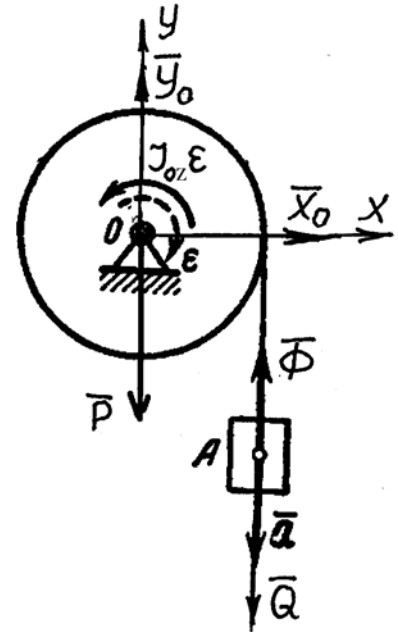


Рис.11.5

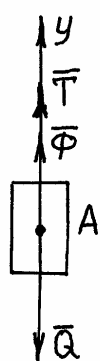


Рис.11.6

Натяжение нити в рассматриваемой механической системе, состоящей из барабана и груза, является силой внутренней. Для ее нахождения нужно отделить какое-то тело из системы, чтобы эта сила по отношению к отделенному телу оказалась внешней. Разрезаем нить и вычленяем груз А.

Прикладываем к грузу А силу тяжести \vec{Q} , силу натяжения \vec{T} и силу инерции $\vec{\Phi}$. Сумма всех этих сил в проекции на вертикальную ось (рис.11.6) равна нулю, следовательно,

$$T = Q - \Phi = Q - \frac{Q}{g} \varepsilon r = \frac{PQ\rho_{и}^2 + Q(Q - P)r^2}{P\rho_{и}^2 + Qr^2}.$$

11.5. Определение опорных реакций при вращении тела вокруг неподвижной оси

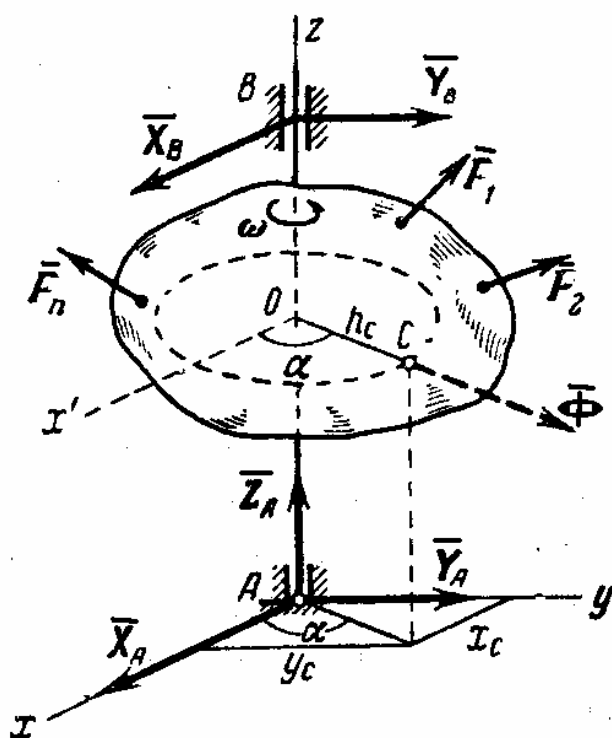


Рис.11.7

Принцип Даламбера и метод кинетостатики эффективно используются при определении опорных реакций. Определим с их помощью опорные реакции, возникающие в подшипнике В и подпятнике А при вращении тела вокруг неподвижной оси z (рис.11.7) с постоянной угловой скоростью.

Статические реакции и. Пусть тело под действием заданной системы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ находится в равновесии. Реакции, которые при этом возникают, называют *статическими*.

Статическим реакциям будем придавать верхний индекс «ст».

Статические реакции определяются из уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & \sum F_x + X_A^{ct} + X_B^{ct} = 0, \\ \sum Y = 0; & \sum F_y + Y_A^{ct} + Y_B^{ct} = 0, \\ \sum Z = 0; & \sum F_z + Z_A^{ct} = 0, \\ \sum M_x = 0; & \sum M_x(F) - Y_B^{ct} h = 0, \\ \sum M_y = 0; & \sum M_y(F) + X_B^{ct} h = 0. \end{cases} \quad (11.19)$$

Шестое уравнение ($\sum M_z = 0$) должно выполняться тождественно поскольку ω_z предполагается постоянной и, следовательно, $\varepsilon_z = 0$. В приведенных уравнениях h - это расстояние АВ.

П о л н ы е р е а к ц и и. Пусть тело под действием той же системы заданных сил вращается с постоянной угловой скоростью ω . Реакции, которые при этом возникают, называют *полными*. Полные реакции являются суммой статических и динамических реакций, причем появление последних обусловлено фактором вращения тела.

Динамическим реакциям будем придавать верхний индекс «д».

Для определения полных реакций приложим ко всем точкам вращающегося тела центробежные силы инерции, лежащие в плоскостях, параллельных координатной плоскости xu , и составим условия равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & \sum F_x + X_A^{ct} + X_A^d + X_B^{ct} + X_B^d + \Phi_x^{gl} &= 0, \\ \sum Y &= 0; & \sum F_y + Y_A^{ct} + Y_A^d + Y_B^{ct} + Y_B^d + \Phi_y^{gl} &= 0, \\ \sum Z &= 0; & \sum F_z + Z_A^{ct} &= 0, \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_x(F) - (Y_B^{ct} + Y_B^d)h + M_x^{gl}(\Phi) &= 0, \\ \sum M_y &= 0; & \sum M_y(F) + (X_B^{ct} + X_B^d)h + M_y^{gl}(\Phi) &= 0. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Из этих уравнений определяются полные реакции.

Д и н а м и ч е с к и е р е а к ц и и. Удалим из левых частей уравнений (11.20) группы членов, соответствующие левым частям уравнений

(11.19), как равные нулю. При этом получим уравнения для определения динамических реакций:

$$\begin{aligned} X_A^d + X_B^d + \Phi_x^{\Gamma\Gamma} &= 0, \\ Y_A^d + Y_B^d + \Phi_y^{\Gamma\Gamma} &= 0, \\ -Y_B^d h + M_x^{\Gamma\Gamma}(\Phi) &= 0, \\ X_B^d h + M_y^{\Gamma\Gamma}(\Phi) &= 0. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Найдем выражения для проекций главного вектора и главного момента сил инерции, входящих в (11.21). Главный вектор сил инерции равен $\vec{\Phi}^{\Gamma\Gamma} = -M \vec{a}_c$. При $\omega = \text{const}$ центр тяжести С имеет только нормальное ускорение $a_c = \omega^2 h_c$, где h_c - расстояние от точки С до оси вращения (рис.11.7). Проекции главного вектора сил инерции на оси координат с учетом, что $h_c \cos \alpha = x_c$, $h_c \sin \alpha = y_c$, равны

$$\Phi_x^{\Gamma\Gamma} = M\omega^2 h_c \cos \alpha = M\omega^2 x_c, \quad \Phi_y^{\Gamma\Gamma} = M\omega^2 h_c \sin \alpha = M\omega^2 y_c, \quad (11.22)$$

причем x_c, y_c - координаты центра тяжести тела.

Чтобы найти главный момент сил инерции, приложим к произвольной точке тела центробежную силу инерции $\Phi_i = m_i \omega^2 h_i$, проекции которой на оси координат, по аналогии с проекциями главного вектора сил инерции, равны

$$\Phi_{ix} = m_i \omega^2 x_i, \quad \Phi_{iy} = m_i \omega^2 y_i,$$

тогда

$$M_x^{\Gamma\Gamma}(\Phi) = -\sum \Phi_{iy} z_i = -\sum m_i \omega^2 y_i z_i = -\omega^2 J_{yz}, \quad (11.23)$$

$$M_y^{\Gamma\Gamma}(\Phi) = \sum \Phi_{ix} z_i = \sum m_i \omega^2 x_i z_i = \omega^2 J_{xz}, \quad (11.24)$$

где J_{yz} и J_{xz} - центробежные моменты инерции вращающегося тела.

Подставляя (11.22) – (11.24) в (11.21), получим

$$X_A^d + X_B^d + M\omega^2 x_c = 0, \quad (11.25)$$

$$Y_A^d + Y_B^d + M\omega^2 y_c = 0, \quad (11.26)$$

$$-Y_B^d h - \omega^2 J_{yz} = 0, \quad (11.27)$$

$$X_B^d h + \omega^2 J_{xz} = 0. \quad (11.28)$$

Из этих уравнений определяются динамические реакции. В отдельных конкретных задачах зачастую пользуются не этими готовыми уравнениями, а непосредственно применяют принцип Даламбера.

Пример 11.2. Стержень АВ длиной 2ℓ , на концах которого находятся грузы равного веса P , вращается равномерно с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Oz , проходящей через середину O стержня. Угол между стержнем АВ и осью Oz сохраняет постоянную величину α . Размеры указаны на рис.11.8.

Пренебрегая весом стержня и размерами грузов, определить проекции давлений на подшипник С и подпятник D в тот момент, когда стержень находится в плоскости Oyz .

Решение. Прикладываем к грузам центробежные силы инерции Φ_A и Φ_B и составляем условия равновесия:

$$\sum X = 0; \quad X_C + X_D = 0$$

$$\sum Y = 0; \quad -\Phi_A + \Phi_B + Y_C + Y_D = 0,$$

$$\sum Z = 0; \quad Z_D - 2P = 0,$$

$$\sum M_x = 0; \quad Y_D b - Y_C a + P\ell \sin \alpha - P\ell \sin \alpha - \Phi_A \ell \cos \alpha - \Phi_B \ell \cos \alpha = 0,$$

$$\sum M_y = 0; \quad -X_D b + X_C a = 0.$$

Из этих уравнений, учитывая, что $\Phi_A = \Phi_B = m\omega^2 \ell \sin \alpha$, получаем:

$$X_C = X_D = 0;$$

$$Y_C = -Y_D = -\frac{P\ell^2 \omega^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)};$$

$$Z_D = 2P.$$

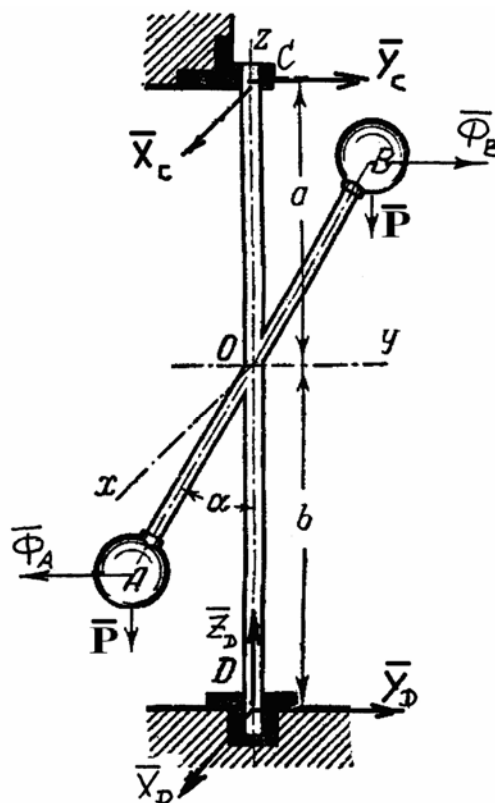


Рис.11.8

Полученные величины - это реакции опор, т.е. те силы, с которыми подшипник и подпятник действуют на вращающееся тело. Давления - это силы, с которыми вращающееся тело действует на подшипник и подпятник. Следовательно, реакции и давления - это действие и противодействие. Модули этих сил одинаковы, а направления - противоположны.

Пример 11.3. К горизонтальному валу АВ, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω , прикреплены два равных, перпендикулярных к нему стержня длиной ℓ , лежащих во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис.11.9). На концах стержней расположены шары D и E массой m каждый.

Определить динамические реакции опор А и В. Шары считать материальными точками. Весами стержней пренебречь.

Решение. Реакции подшипников А и В располагаются в плоскостях, перпендикулярных валу АВ (рис.11.9). Прикладываем к точкам D и E центробежные силы инерции

$$\Phi_D = \Phi_E = m\omega^2 \ell,$$

направленные противоположно нормальным ускорениям этих точек, и составляем условия равновесия, в которых, помимо сил реакций, должны быть только

силы инерции (все прочие силы, например, силы тяжести, даже если бы стержни были весомыми, в уравнения равновесия при определении динамических реакций не входят):

$$\sum M_{x_1} = 0; \quad \Phi_D 2a + Y_B 6a = 0; \quad \Rightarrow \quad Y_B = -\frac{m\omega^2 \ell}{3},$$

$$\sum M_{y_1} = 0; \quad -\Phi_E 4a - X_B 6a = 0; \quad \Rightarrow \quad X_B = -\frac{2m\omega^2 \ell}{3},$$

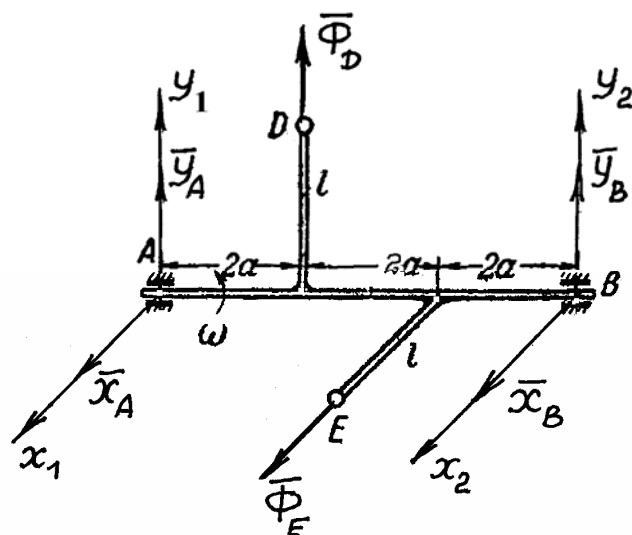


Рис.11.9

$$\sum M_{x_2} = 0; \quad -\Phi_D 4a - Y_A 6a = 0; \quad \Rightarrow \quad Y_A = -\frac{2m\omega^2 \ell}{3},$$

$$\sum M_{y_2} = 0; \quad \Phi_E 2a + X_A 6a = 0; \quad \Rightarrow \quad X_A = -\frac{m\omega^2 \ell}{3}.$$

11.6. Условия отсутствия динамических реакций

Из уравнений (11.25) – (11.28) следует, что если

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad (11.29)$$

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0, \quad (11.30)$$

то динамические реакции равны нулю. Следовательно, условия (11.29) и (11.30) являются условиями отсутствия динамических реакций. Первое из этих условий означает, что центр тяжести вращающегося тела должен лежать на оси вращения. Второе условие показывает, что ось вращения должна быть главной осью инерции тела. Для одновременного выполнения условий (11.29) и (11.30) ось вращения должна быть *главной центральной осью инерции тела*.

Задача динамического уравнивания вращающихся масс является важной инженерной задачей, поскольку динамические реакции при больших угловых скоростях могут во много раз превосходить статические реакции. Покажем, что любую ось, проведенную в теле, можно сделать главной центральной осью инерции путем добавления двух точечных масс.

Пусть к телу, центр C^T тяжести которого имеет координаты x_c^T, y_c^T, z_c^T , прибавлены точечные массы $m_1(x_1, y_1, z_1)$ и $m_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис.11.10) так, что общий центр C масс системы, состоящей из тела и двух точечных масс, оказался на оси вращения. При этом координаты x_c, y_c общего центра масс должны быть равны нулю, что дает два уравнения:

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + M x_c^T &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + M y_c^T &= 0, \end{aligned} \quad (11.31)$$

где M - масса тела.

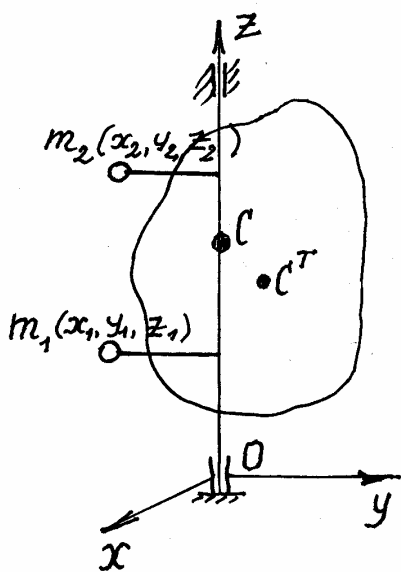


Рис.11.10

Еще два уравнения получим, требуя равенства нулю центробежных моментов инерции всей системы:

$$\begin{aligned} m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + J_{xz}^T &= 0, \\ m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 + J_{yz}^T &= 0, \end{aligned} \quad (11.32)$$

где J_{xz}^T и J_{yz}^T - центробежные моменты инерции тела.

Четыре приведенных уравнения связывают между собой 8 неизвестных величин: $m_1, x_1, y_1, z_1, m_2, x_2, y_2, z_2$.

Четырьмя из этих неизвестных можно задаться произвольно, а другие четыре следует определить из уравнений (11.31) и (11.32). Отметим, что точечные массы можно не только добавлять, но и удалять (высверливать).

11.7. Общее уравнение динамики

Общее уравнение динамики представляет собой объединение двух принципов: принципа Даламбера и принципа возможных перемещений Лагранжа.

Сначала к системе с идеальными стационарными связями прикладывают, помимо заданных сил, силы инерции и получают, согласно принципу Даламбера, уравновешенную систему сил. А затем к механической системе с уравновешенной системой сил применяют принцип возможных перемещений.

Общее уравнение динамики формулируется так: *сумма элементарных работ заданных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы с идеальными стационарными связями из произвольного положения этой системы равна нулю:*

$$\sum \delta A_i(F) + \sum \delta A_i(\Phi) = 0$$

или

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{\Phi}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (11.33)$$

Общее уравнение динамики для системы с одной степенью свободы, так же как и уравнение Лагранжа 2-го рода, описывает движение механической системы и может использоваться для определения ускорений.

Если механическая система имеет несколько степеней свободы, то для нее составляется столько общих уравнений динамики, сколько имеется независимых возможных перемещений. Силы инерции, входящие в эти уравнения, определяются в *абсолютном движении* системы (а не на отдельных возможных перемещениях).

В случае если связи, наложенные на систему, не являются идеальными (связи с трением), то их искусственно превращают в идеальные, переводя силу трения в категорию задаваемых сил. Общее уравнение динамики справедливо как в случае стационарных, так и в случае нестационарных связей.

Пример 11.4. В задаче 9.1 (рис.9.6) определить ускорение центра катка А с помощью общего уравнения динамики.

Решение. Для составления общего уравнения динамики добавим к заданным силам (силам тяжести) силы инерции. К центру D катка А, совер-

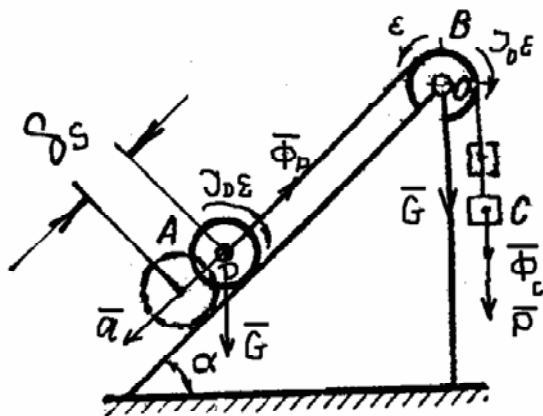


Рис.11.11

шающему плоскопараллельное движение, приложим силу инерции Φ_D , направленную в сторону, противоположную ускорению a центра D катка, и пару с моментом $J_D \epsilon$, направленным противоположно угловому ускорению катка (рис.11.11).

К блоку В, вращающемуся вокруг оси 0, при-

ложим пару с моментом $J_0\varepsilon$. Наконец, к грузу С, движущемуся поступательно вверх с ускорением a , приложим силу Φ_C , направленную противоположно его ускорению a .

Дадим системе возможное перемещение, при котором центр D катка опустится по наклонной плоскости на величину δs , и составим общее уравнение динамики:

$$G \sin \alpha \delta s - \Phi_D \delta s - J_D \varepsilon \delta \varphi - J_0 \varepsilon \delta \varphi - P \delta s - \Phi_C \delta s = 0.$$

Учитывая, что $\delta \varphi = \delta s / r$, и сокращая на δs , получаем:

$$G \sin \alpha - \Phi_D - J_D \varepsilon \cdot \frac{1}{r} - J_0 \varepsilon \cdot \frac{1}{r} - P - \Phi_C = 0. \quad (11.34)$$

В этом уравнении

$$J_D = J_0 = \frac{Gr^2}{2g}, \quad \varepsilon = \frac{a}{r}, \quad \Phi_D = \frac{G}{g} a, \quad \Phi_C = \frac{P}{g} a.$$

Подставляя эти величины в (11.34), получаем ускорение центра D катка:

$$a = \frac{G \sin \alpha - P}{2G + P} g.$$

11.8. Решение задач

Принцип Даламбера используется, как уже говорилось, в основном для определения опорных реакций.

Общее уравнение динамики обычно служит для определения ускорений, т.е. в каком-то смысле является конкурентом уравнениям Лагранжа 2-го рода. Для возможности сопоставления двух разных методов решения задач ниже приводятся несколько задач из главы 9, решенных там с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода, а здесь - с помощью общего уравнения динамики.

Можно дать следующую рекомендацию при выборе метода решения задач: задачи, в которых механическая система имеет одну степень свободы проще решать по общему уравнению динамики, а при нескольких степенях свободы - по уравнениям Лагранжа. Это связано с тем, что для сопоставления уравнений Лагранжа надо предварительно определять скорости (дальнейшие выкладки проводятся формально), а для составления общих

уравнений динамики - ускорения. Ускорения в механических системах с несколькими степенями свободы определять всегда сложнее, чем скорости.

Задача 11.1. Однородный круглый диск радиуса R и веса P вращается

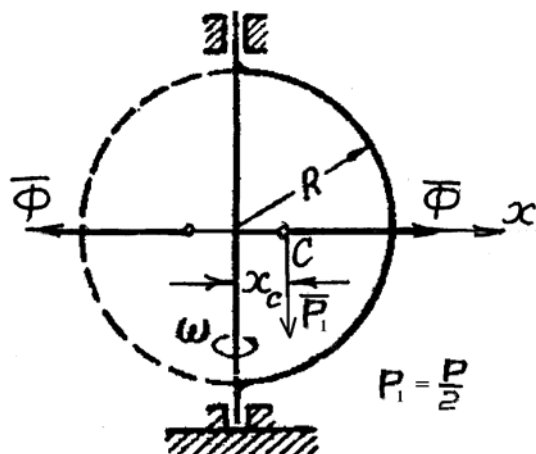


Рис.11.12

с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего вертикального диаметра (рис.11.12). Определить силу, разрывающую диск по диаметру.

Решение. Приложим ко всем точкам правой половины диска центробежные силы инерции. Вследствие симметрии эти силы приводятся к равнодействующей Φ , равной главному вектору. Ее линия действия проходит через центр C тяжести полудиска.

Такая же сила действует и на левую половину диска. Таким образом, сила, разрывающая диск по диаметру, равна

$$\Phi = \frac{P}{2g} a_c,$$

где a_c - ускорение центра тяжести полудиска, равное $a_c = \omega^2 x_c$,

Так как $x_c = \frac{4R}{3\pi}$, то

$$\Phi = \frac{2PR}{3\pi g} \omega^2.$$

Задача 11.2. Тонкий однородный прямолинейный стержень длиной ℓ и весом P вращается с постоянной угловой скоростью ω около неподвижной точки O (шаровой шарнир), описывая коническую поверхность с осью OA с вершиной в точке O (рис.11.13).

Вычислить угол φ отклонения стержня от вертикального положения, а также величину N давления стержня на шарнир O .

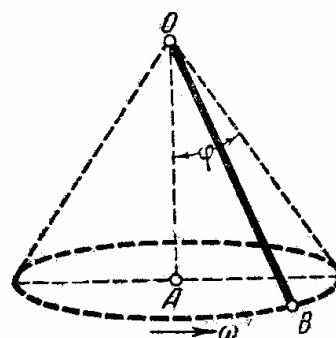


Рис.11.13

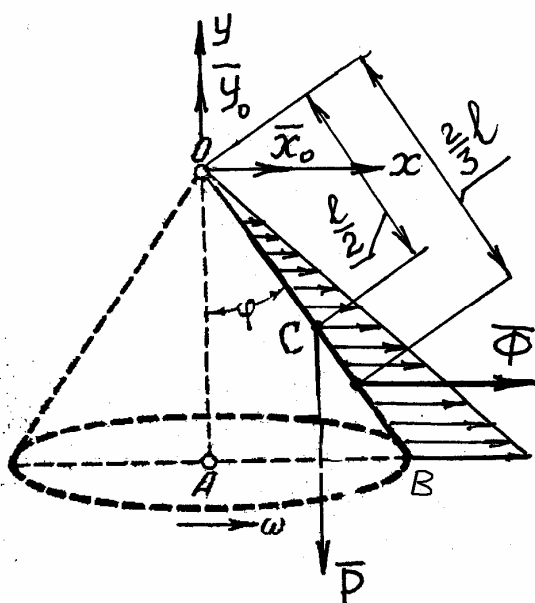


Рис.11.14

Решение. На стержень действуют сила \vec{P} и реакции \vec{X}_0 , \vec{Y}_0 шарового шарнира (рис.11.14). Решаем задачу с помощью принципа Даламбера. Прикладываем ко всем точкам стержня центробежные силы инерции. Они образуют нагрузку, распределенную по линейному закону (рис.11.14). Такая система сил, как известно из статики, приводится к равнодействующей, равной главному вектору:

$$\Phi = \frac{P}{g} a_c = \frac{P\ell}{2g} \omega^2 \sin \varphi. \quad (11.37)$$

Линия действия равнодействующей Φ параллельна линиям действия сил инерции и отстоит от точки O на расстоянии $2\ell/3$ (рис.11.14). Составляем условия равновесия стержня:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad X_0 + \Phi = 0, \\ \sum Y &= 0; \quad Y_0 - P = 0, \\ \sum M_0 &= 0; \quad \Phi \cdot \frac{2}{3} \ell \cos \varphi - P \frac{\ell}{2} \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений с учетом (11.37) получаем реакции шарнира и косинус угла φ :

$$\begin{aligned} X_0 &= -\Phi = -\frac{P\ell}{2g} \omega^2 \sin \varphi, \\ Y_0 &= P, \\ \cos \varphi &= \frac{3g}{2\ell\omega^2}. \end{aligned}$$

Давление на шарнир O по модулю равно суммарной реакции шарнира O :

$$N = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}.$$

Задача 11.3. Груз А весом P_1 , опускается вниз по наклонной грани призмы D весом P , образующей угол α с горизонтом. Он приводит в движение посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок С, груз В весом P_2 (рис.11.15). Определить горизонтальную реакцию выступа Е. Трением пренебречь.

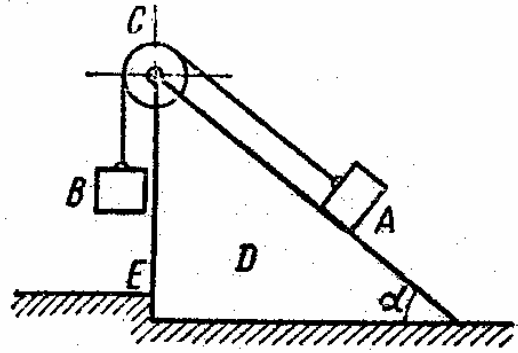


Рис.11.15

Решение. На систему, состоящую из наклонной плоскости D, грузов А и В и неподвижного блока С, действуют силы тяжести P_1, P_2, P , реакция R_E выступа и реакция R пола (рис.11.16). Уравновешиваем эту систему силами инерции, приложенными к грузам А и В:

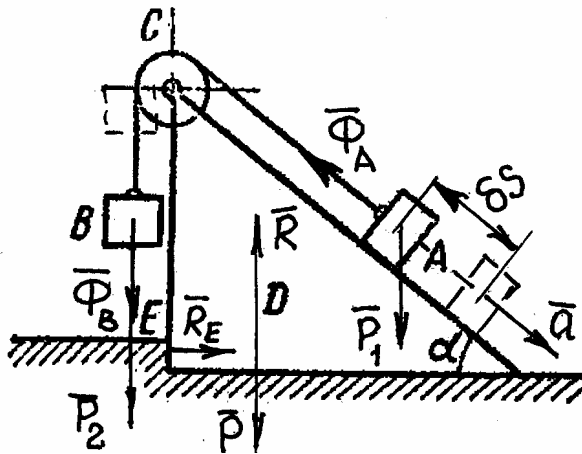


Рис.11.16

$$\Phi_A = \frac{P_1}{g} a, \quad \Phi_B = \frac{P_2}{g} a, \quad (11.38)$$

где a - ускорение грузов. Чтобы найти ускорение грузов, даем системе возможное перемещение, при котором груз А переместится на δs , и составляем общее уравнение динамики:

$$P_1 \sin \alpha \cdot \delta s - \Phi_A \delta s - P_2 \delta s - \Phi_B \delta s = 0$$

Отсюда, после сокращения на δs и использования выражений (11.38) для сил инерции, получаем ускорение грузов:

$$a = \frac{P_1 \sin \alpha - P_2}{P_1 + P_2} g. \quad (11.39)$$

Для определения реакции R_E выступа Е составляем уравнение равновесия системы в проекции на горизонтальную ось:

$$R_E - \Phi_A \cos \alpha = 0.$$

С учетом (11.38) и (11.39) имеем:

$$R_E = \frac{P_1(P_1 \sin \alpha - P_2)}{(P_1 + P_2)} \cdot \cos \alpha.$$

Задача 11.4. Определить ускорение груза В в задаче 9.2 (рис.9.8) с помощью общего уравнения динамики.

Решение. На систему действуют: заданные силы тяжести P и G , а также момент M_K^{TP} трения качения.

Реакции шарнира D и реакции фундамента (после перевода момента трения качения в задаваемые факторы) можно не указывать, поскольку

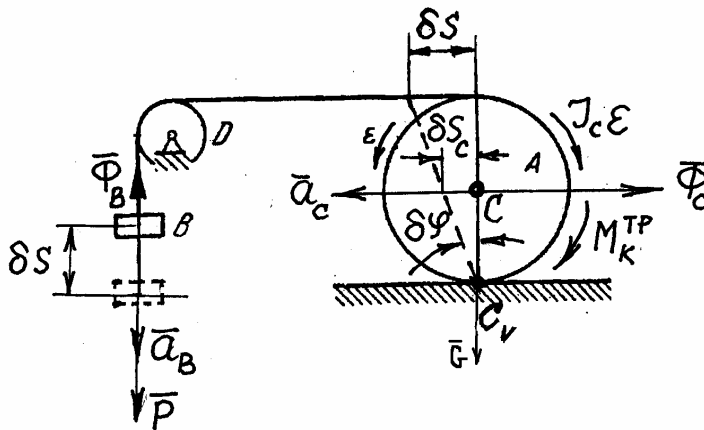


Рис.11.17

их работа на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Применим принцип Даламбера и приложим к грузу В силу инерции Φ_B , а к катку А - силу Φ_c и момент $J_c \epsilon$ (рис.11.17).

Даем системе возможное перемещение, при котором груз В опустится на величину δs . Подсчитываем сумму элементарных работ всех заданных сил и сил инерции на этом перемещении и составляем общее уравнение динамики:

$$P \delta s - \Phi_B \delta s - \Phi_c \delta s_c - J_c \epsilon \delta \varphi - M_K^{TP} \delta \varphi = 0.$$

$$\text{Здесь } \Phi_B = \frac{P}{g} a_B, \quad \Phi_c = \frac{G}{g} a_c = \frac{G}{g} \cdot \frac{a_B}{2}, \quad \delta s_c = \frac{\delta s}{2}, \quad J_c = \frac{GR^2}{2g},$$

$$\epsilon = \frac{a_c}{R} = \frac{a_B}{2R}, \quad \delta \varphi = \frac{\delta s_c}{R} = \frac{\delta s}{2R}, \quad M_K^{TP} = f G.$$

Подставляя эти величины в общее уравнение динамики и сокращая на δs , получаем ускорение груза В:

$$a_B = \frac{8g}{3G + 8P} (P - f G / (2R)).$$

Задача 11.5. Решить задачу 9.4 (рис.9.11) с помощью общего уравнения динамики.

Решение. На рассматриваемую систему с идеальными связями (между призмой и полом трением пренебрегают) действуют заданные силы P и G (рис.11.18).

Система имеет две степени свободы, соответствующие двум независимым возможным перемещениям, одно из которых - сдвиг по горизонтали призмы и цилиндра как единого твердого тела, другое - скатывание цилиндра по наклонной плоскости при неподвижной призме.

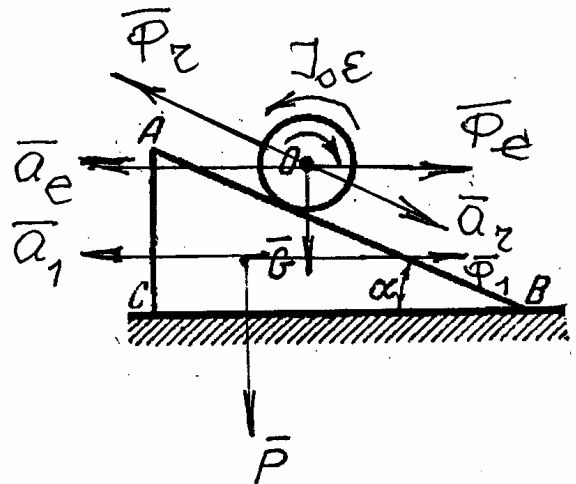


Рис.11.18

Каждому из этих двух перемещений будет соответствовать свое общее уравнение динамики. Однако даламберовы силы инерции, входящие в эти уравнения, нужно определять не на каждом из этих перемещений порознь, а в *абсолютном движении*, т.е. при одновременном движении всех тел системы.

Определим силы инерции призмы. Так как абсолютное движение призмы при скатывании с нее цилиндра представляет собой поступательное движение (влево по горизонтали) с ускорением \bar{a}_1 , то силы инерции, условно приложенные к ее точкам, имеют равнодействующую $\bar{\Phi}_1 = -\frac{P}{g}\bar{a}_1$, проходящую через центр тяжести призмы (рис.11.18).

Теперь определим даламберовы силы инерции цилиндра. Абсолютное движение цилиндра складывается из переносного поступательного движения (вместе с призмой) с ускорением $\bar{a}_e = \bar{a}_1$ и относительного движения (относительно призмы). Равнодействующая сил инерции при переносном поступательном движении цилиндра равна $\bar{\Phi}_e = -\frac{G}{g}\bar{a}_e = -\frac{G}{g}\bar{a}_1$ и проходит через точку O . Относительное движение цилиндра является плоскопараллельным движением и, в свою очередь, состоит из двух дви-

жений: поступательного вместе с точкой O с ускорением \vec{a}_r и вращательного вокруг O с угловым ускорением ε . Силы инерции при поступательном движении цилиндра вместе с точкой O приводятся к равнодействующей $\vec{\Phi}_r = -\frac{G}{g}\vec{a}_r$, проходящей через точку O . Силы инерции при вращении цилиндра вокруг точки O приводятся к паре с моментом $J_0\varepsilon$, направленным противоположно угловому ускорению ε .

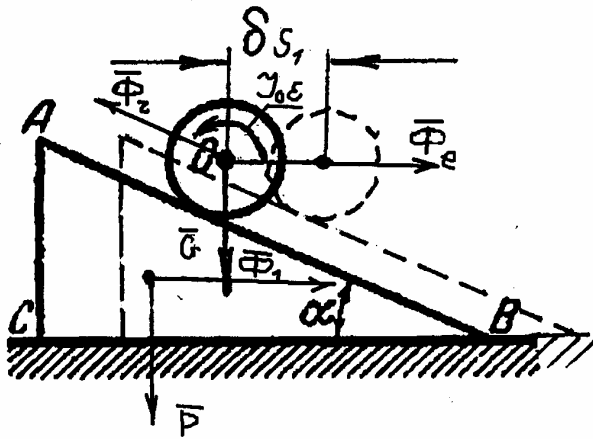


Рис.11.19

После приложения сил $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_e$, $\vec{\Phi}_r$ и пары с моментом $J_0\varepsilon$ система заданных сил и сил инерции оказывается уравновешенной и к ней можно применить принцип возможных перемещений, т.е. составлять общие уравнения динамики.

Для составления первого общего уравнения динамики дадим системе возможное перемещение, при котором призма и цилиндр перемещаются на δs_1 поступательно (направо по горизонтали) как единое твердое тело (рис.11.19). На этом перемещении силы тяжести не производят работы, поскольку они ортогональны перемещению, и момент $J_0\varepsilon$ тоже не производит работы, так как цилиндр не вращается, поэтому общее уравнение динамики имеет вид:

$$\Phi_1 \cdot \delta s_1 + \Phi_e \cdot \delta s_1 - \Phi_r \cos \alpha \cdot \delta s_1 = 0$$

или, после сокращения на δs и использования выражений для сил инерции,

$$\frac{P}{g}a_1 + \frac{G}{g}a_1 - \frac{G}{g}a_r \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$a_r = \frac{P + G}{G \cos \alpha} a_1. \quad (11.40)$$

Для составления второго общего уравнения динамики дадим системе такое возможное перемещение, при котором цилиндр скатывается на величину δs_2 по наклонной плоскости при неподвижной призме (рис.11.20). При этом общее уравнение динамики будет таким:

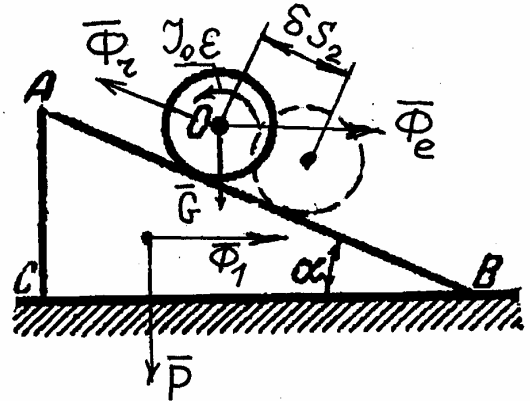


Рис.11.20

$$G \sin \alpha \cdot \delta s_2 + \Phi_e \cos \alpha \cdot \delta s_2 - \Phi_r \cdot \delta s_2 - J_0 \varepsilon \delta \varphi = 0. \quad (11.41)$$

Учитывая, что

$$\delta \varphi = \frac{\delta s_2}{r}, \quad J_0 = \frac{Gr^2}{2g}, \quad \varepsilon = \frac{a_r}{r},$$

и сокращая на δs_2 , приводим уравнение (11.41) к виду:

$$G \sin \alpha + \frac{G}{g} a_1 \cos \alpha - \frac{3}{2} \frac{G}{g} a_r = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение (11.40), получаем ускорение призмы:

$$a_1 = \frac{G \sin 2\alpha}{3(P + G) - 2G \cos^2 \alpha} g.$$

11.9. Контрольные вопросы

11.1. Какие задачи (статики или динамики) решаются с помощью принципа Даламбера?

11.2. На каких принципах построено общее уравнение динамики?

11.3. Чему равен момент сил инерции при вращении тела вокруг неподвижной оси z ?

11.4. При каких условиях динамические реакции при вращении тела равны нулю?

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ДИНАМИКИ

ГЛАВА 12. ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ

12.1. Разновидности гироскопов

Гироскопом называют твердое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, положение которой в пространстве может со временем изменяться. Название «гироскоп» было введено французским механиком Фуко в его докладе Парижской Академии наук в 1852 году о построенном приборе, позволяющем обнаружить факт суточного вращения Земли. В переводе с французского «гиро» - вращение, «скоп» - указатель. В настоящее время термин «гироскоп» применяется в более широком смысле для обозначения всякого прибора, в котором использованы своеобразные свойства быстро вращающегося тела, называемые *гироскопическими свойствами*.

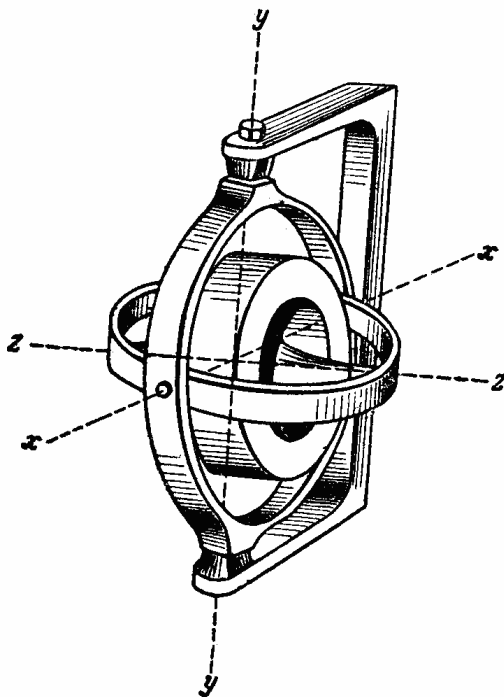


Рис.12.1

Гироскопическими свойствами обладают любые быстро вращающиеся тела, встречающиеся в технике (винты самолетов, вертолетов, судов, колеса поездов, турбины и пр.).

Основным элементом большинства современных гироскопических устройств служит гироскоп в кардановом подвесе (рис.12.1). Ротор (маховик) подвешен в двух кольцах, составляющих карданов подвес. Наружное кольцо подвеса свободно вращается вокруг своего вертикального диаметра (оси y). Вокруг горизонтального диаметра (оси x) наружного кольца вращается внутреннее кольцо, несущее ось вращения ротора, причем ось ротора (ось z) перпендикулярна оси внутреннего кольца.

Таким образом, ротор гироскопа в кардановом подвесе может вращаться вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, следовательно, такой гироскоп имеет *три степени свободы*. Центр тяжести описанного гироскопа совпадает с неподвижной точкой - точкой пересечения трех осей вращения. Гироскоп с тремя степенями свободы, у которого центр тяжести совпадает с неподвижной точкой, называют *свободным гироскопом*.

Вращение ротора вокруг оси z называют собственным вращением гироскопа, а ось z - *осью собственного вращения*. Скорость собственного вращения существенно больше скоростей вращения вокруг двух других осей.

Если центр тяжести гироскопа не совмещен с его неподвижной точкой, как это имеет место, например, у волчка (рис.12.2), то такой гироскоп называют *тяжелым*.

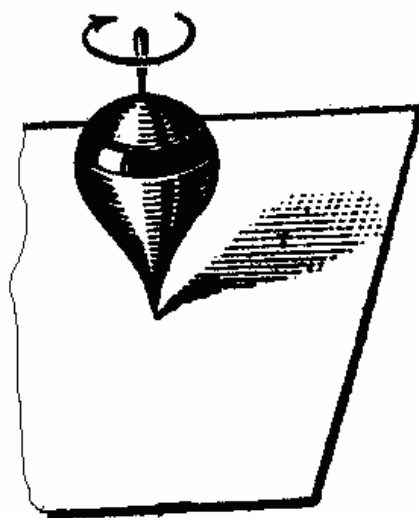


Рис.12.2

Если условия функционирования гироскопа таковы, что вращение вокруг оси x отсутствует, то гироскоп имеет только *две степени свободы*. Свойства гироскопов с двумя и тремя степенями свободы весьма различны, но все они являются следствиями теоремы об изменении кинетического момента системы.

12.2. Основные допущения.

Теорема Резаля

Угловую скорость собственного вращения гироскопа будем обозначать $\vec{\Omega}$, а скорости вокруг двух других осей - $\vec{\omega}_x$ и $\vec{\omega}_y$.

Абсолютная угловая скорость гироскопа равна (рис.12.3)

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\Omega}.$$

Величины угловых скоростей ω_x и ω_y существенно меньше величины Ω , поэтому принято считать, что

$$\vec{\omega}_a \cong \vec{\Omega}. \quad (12.1)$$

В этом состоит первое допущение приближенной теории гироскопов.

Второе допущение связано с кинетическим моментом гироскопа. Все оси вращения гироскопа являются главными осями инерции в неподвижной точке 0, следовательно, согласно (4.27),

$$\vec{L}_0 = J_x \vec{\omega}_x + J_y \vec{\omega}_y + J_z \vec{\Omega}.$$

Из этой формулы видно, что вектор \vec{L}_0 строго говоря не совпадает с осью собственного вращения (рис.12.3). Но из-за малости ω_x и ω_y по сравнению с Ω считается, что кинетический момент гироскопа равен

$$\vec{L}_0 = J_z \vec{\Omega}. \quad (12.2)$$

и направлен по оси собственного вращения гироскопа.

Таким образом, допущения теории состоят в том, что векторы абсо-

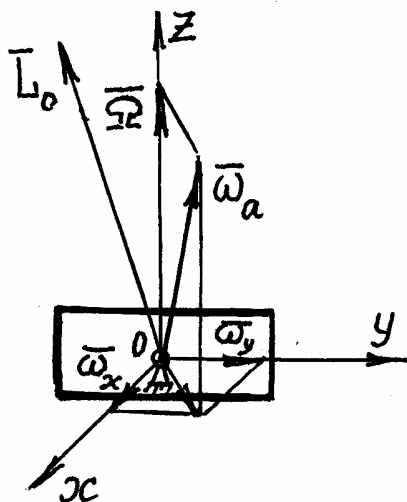


Рис.12.3

лютной угловой скорости и кинетического момента определяются приближенными формулами (12.1) и (12.2), а направление этих векторов считается совпадающим с осью собственного вращения гироскопа.

Как уже говорилось, теория гироскопов основана на теореме об изменении кинетического момента:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}_{0i}. \quad (12.3)$$

Вектор, стоящий в левой части этого выражения, можно интерпретировать как скорость точки К конца вектора \vec{L}_0 (рис.12.4), при этом теорема (12.3) записывается так:

$$\vec{V}_K = \sum \vec{M}_{0i}. \quad (12.4)$$

Эта запись теоремы об изменении кинетического момента носит название *теоремы Резаля* и читается так: *скорость конца вектора кинетического момента относительно неподвижной точки равна геометрической сумме моментов действующих сил относительно этой точки.*

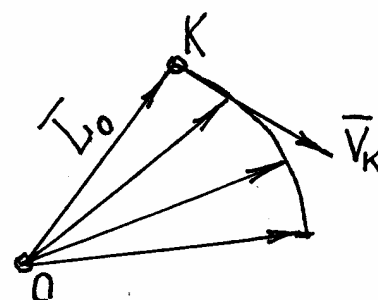


Рис.12.4

Напомним, что законы Ньютона, а следовательно и общие теоремы динамики, полученные из них, справедливы в инерциальной системе отсчета.

12.3. Свойства свободного гироскопа

1. **Неизменность направления оси собственного вращения гироскопа в инерциальной системе отсчета.**

На свободный гироскоп (рис.12.1) действует сила тяжести, приложенная в неподвижной точке 0 гироскопа, и силы реакции подшипников. Сумма моментов всех этих сил относительно неподвижной точки 0 гироскопа равна нулю, поскольку линия действия силы тяжести проходит через точку 0, суммы моментов статических реакций подшипников относительно координатных осей равны нулю, а динамические реакции отсутствуют в силу того, что ось вращения свободного гироскопа является главной осью инерции в любой ее точке. Подставляя $\sum \vec{M}_{0i} = 0$ в (12.3), получаем

$$\vec{L}_0 = \text{const}, \quad (12.5)$$

т.е. модуль и направление кинетического момента гироскопа постоянны. Но так как вектор \vec{L}_0 направлен по оси собственного вращения гироскопа, то отсюда следует, что *ось свободного гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной системе отсчета.*

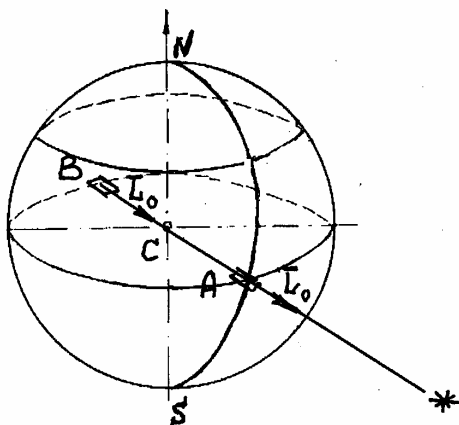


Рис.12.5

Сохраняя неизменное направление по отношению к инерциальной системе отсчета, ось свободного гироскопа по отношению к Земле будет совершать вращение в сторону, противоположную вращению Земли. Так, если в точке А Земли ось гироскопа была нацелена на некоторую звезду и вектор \vec{L}_0 был направлен вертикально вверх, т.е. от центра С Земли (рис.12.5), то в точке В, в которую попадет точка А через 12 часов, вектор \vec{L}_0

будет по-прежнему нацелен на ту же звезду, но по отношению к Земле он будет направлен к центру С Земли, следовательно, ось гироскопа повернется на 180° и окажется направленной вниз.

2. Прецессия оси гироскопа под действием приложенной силы. Рассмотрим действие некоторой силы F , приложенной к оси симметричного тела, шарнирно закрепленного в центре тяжести, в двух ситуациях:

- 1) когда тело находится в покое (рис.12.6);
- 2) когда тело вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью Ω (рис.12.7).

В первой ситуации, а именно, при действии силы F на ось *покоящегося* тела ($\vec{\Omega} = 0$, $\vec{L}_0 = 0$), ось начнет поворачиваться в направлении действия силы, т.е. вокруг оси x (рис.12.6).

Если сила F будет действовать некоторое время t , то под действием постоянного момента $M_0 = Fh$, вектор которого направлен по оси x , тело разгонится до некоторой угловой скорости, равной

$$\omega = \varepsilon t, \quad \text{где} \quad \varepsilon = \frac{M_0}{J_x},$$

и после прекращения действия силы F будет продолжать вращаться по инерции с этой скоростью.

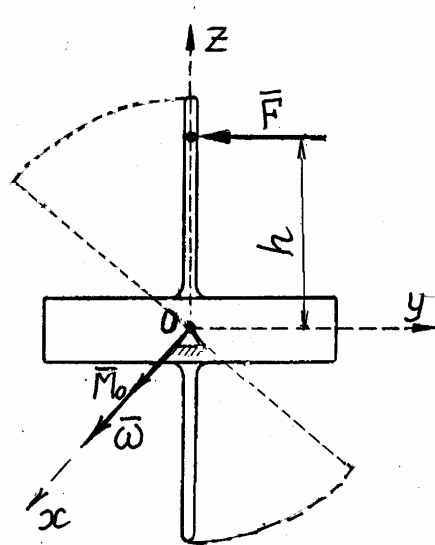


Рис.12.6

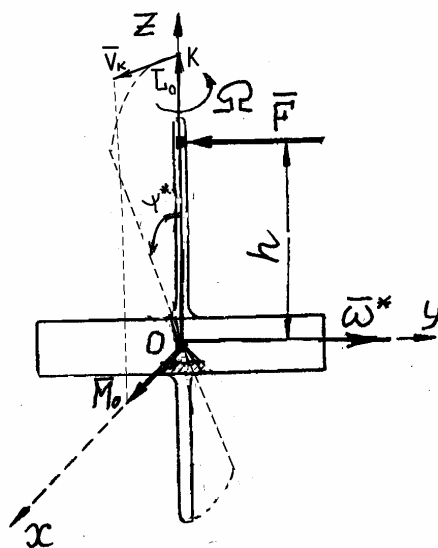


Рис.12.7

Во второй ситуации, а именно, при действии силы F на ось *вращающегося* тела, т.е. гироскопа, сила F создаст тот же момент $M_0 = Fh$, но эффект будет совершенно иным, поскольку кинетический момент \vec{L}_0 вращающегося тела, в отличие от первой ситуации, уже не равен нулю и выражается так: $\vec{L}_0 = J_z \vec{\Omega}$.

На основании теоремы Резаля конец вектора \vec{L}_0 получит скорость, равную

$$\vec{V}_K = \vec{M}_0. \quad (12.6)$$

Следовательно, ось гироскопа начнет поворачиваться не в направлении действия силы F , как в первой ситуации, а в *перпендикулярном к силе направлении*, т.е. вокруг оси y (рис.12.7).

Вращение оси гироскопа под действием приложенной к ней силы называется *прецессией* оси гироскопа. Угловую скорость прецессии будем обозначать ω^* . По формуле, аналогичной формуле Эйлера, для случая вращения тела, имеем:

$$\vec{V}_K = \vec{\omega}^* \times \vec{L}_0 = \vec{\omega}^* \times J_z \vec{\Omega}, \quad (12.7)$$

отсюда

$$V_K = J_z \Omega \omega^* \sin(\Omega, \wedge \omega^*). \quad (12.8)$$

Приравнивая полученную скорость, согласно (12.6), моменту действующей силы, имеем:

$$J_z \Omega \omega^* \sin(\Omega, \wedge \omega^*) = Fh,$$

следовательно, угловая скорость прецессии равна

$$\omega^* = \frac{Fh}{J_z \Omega \sin(\Omega, \wedge \omega^*)}. \quad (12.9)$$

За время t действия силы F ось гироскопа повернется на угол

$$\psi^* = \frac{Fh t}{J_z \Omega \sin(\Omega, \wedge \omega^*)}. \quad (12.10)$$

Из этой формулы следует, что при кратковременном действии силы F ось гироскопа отклоняется от своего первоначального положения на малый угол, притом его величина тем меньше, чем больше скорость Ω собственного вращения гироскопа. На этом основании можно утверждать, что *быстрое вращение сообщает гироскопу способность противодействовать силам, стремящимся изменить направление его оси вращения.*

3. **Отсутствие инерции оси гироскопа в прецессионном движении.** В момент прекращения действия силы F угловая скорость прецессии, в соответствии с (12.9), становится равной нулю, и прецессия сразу же прекращается, после чего гироскоп будет вращаться только с угловой скоростью Ω вокруг собственной оси, отклоненной от первоначального положения на угол ψ^* . Если же сила F поменяет свое направление на противоположное, то прецессия мгновенно станет происходить в другую сторону.

12.4. Тяжелый гироскоп

Рассмотрим гироскоп, центр тяжести которого C не совпадает с неподвижной точкой O . Пусть ось собственного вращения гироскопа составляет с неподвижной осью z_1 угол γ (рис.12.8) На гироскоп действует его вес P , приложенный в центре тяжести, и реакция опоры O . Момент внешних сил относительно точки O создает только сила тяжести:

$$\vec{M}_0 = \vec{OC} \times \vec{P}. \quad (12.11)$$

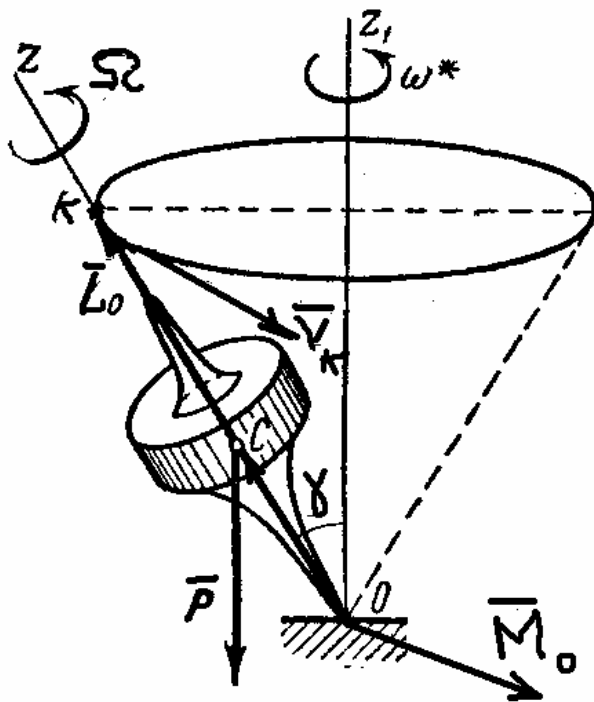


Рис.12.8

Этот момент направлен перпендикулярно к вертикальной плоскости zOz_1 , проходящей через линию действия силы P и точку O . Модуль этого момента равен

$$M_0 = OC \cdot P \sin \gamma. \quad (12.12)$$

По теореме Резаля скорость \vec{V}_K конца вектора \vec{L}_0 геометрически равна вектору \vec{M}_0 , т.е. в любой момент времени перпендикулярна к плоскости zOz_1 . Из этого следует, что собственная ось гироскопа прецессирует вокруг неподвижной оси z_1 , описывая коническую поверхность.

Вычислим угловую скорость прецессии. Используя формулу Эйлера, имеем:

$$\vec{V}_K = \vec{\omega}^* \times \vec{L}_0 = \vec{\omega}^* \times J_z \vec{\Omega}$$

или, по модулю,

$$V_K = J_z \Omega \omega^* \sin \gamma. \quad (12.13)$$

По теореме Резаля

$$V_K = M_0 = OC \cdot P \sin \gamma. \quad (12.14)$$

Приравнявая правые части этих выражений друг другу, получаем угловую скорость прецессии тяжелого гироскопа:

$$\omega^* = \frac{OC \cdot P}{J_z \Omega}. \quad (12.15)$$

Из полученной формулы следует, что, во-первых, скорость прецессии не зависит от угла наклона собственной оси гироскопа и, во-вторых, что скорость прецессии тем меньше, чем больше скорость собственного вращения.

12.5. Гироскопический момент

По теореме Резаля, учитывая (12.6) и (12.7), получим:

$$\overline{M}_0 - \overline{\omega}^* \times J_z \overline{\Omega} = 0 \quad (12.16)$$

или

$$\overline{M}_0 + J_z \overline{\Omega} \times \overline{\omega}^* = 0 \quad (12.17)$$

где \overline{M}_0 - главный момент внешних сил $\overline{M}_0 = \overline{M}_0(\overline{F}^e)$;

$\overline{\omega}^*$ - угловая скорость прецессии,

$\overline{\Omega}$ - угловая скорость собственного вращения.

По принципу Даламбера сумма моментов внешних сил и сил инерции относительно произвольного центра равна нулю. Следовательно, в (12.17) $J_z \overline{\Omega} \times \overline{\omega}^*$ - это главный момент сил инерции частиц ротора гироскопа:

$$\sum \overline{M}_0(\overline{\Phi}_i) = J_z \overline{\Omega} \times \overline{\omega}^*. \quad (12.18)$$

Величину $\overline{M}^G = J_z \overline{\Omega} \times \overline{\omega}^*$ называют гироскопическим моментом. По модулю $M^G = J_z \Omega \omega^* \cdot \sin(\overline{\Omega} \wedge \overline{\omega}^*)$.

Поведение гироскопа подчиняется следующему правилу Жуковского: если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил (с моментом \overline{M}^G), стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии так, чтобы направления угловых скоростей гироскопа и прецессии совпали.

12.6. Гироскоп с двумя степенями свободы

У гироскопа с двумя степенями свободы (рис.12.9) ротор 1 вращается вокруг оси Oz. Эта ось закреплена в подшипниках A и A₁, установленных на раме 2, вращающейся вокруг оси x.

По приближенной теории гироскопов вектор кинетического момента $\overline{L}_0 = J_z \overline{\Omega}$ неизменно связан с осью вращения ротора.

Рассмотрим следующие свойства двухстепенного гироскопа.

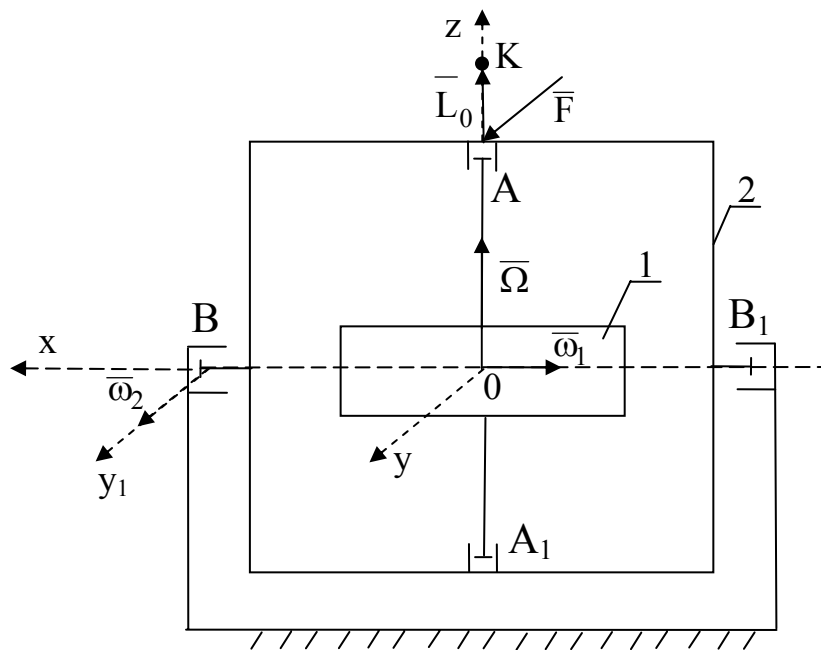


Рис 12.9

1. Если платформу, на которой закреплен корпус гироскопа, поворачивать вокруг оси x , то ось ротора сохраняет неизменным свое направление. Это свойство объясняется тем, что при таком повороте $\sum \bar{M}_0(\bar{F}^e) = 0$ (пренебрегая трением в опорах B и B_1) и по теореме Резаля (12.4) $V_k = 0$, т.е. $\bar{L}_0 = \text{const}$.

2. Если к раме 2 (рис.12.9) перпендикулярно её плоскости приложить силу \bar{F} , то рама и ротор будут вращаться вокруг оси Ox . Это вращение продолжится по инерции и после прекращения действия силы \bar{F} . Для объяснения этого свойства используем понятие гироскопического момента. Под действием силы \bar{F} рама с ротором будет вращаться вокруг оси x с угловой скоростью ω_1 (рис.12.9), т.е. гироскопу сообщено вынужденное прецессионное движение. Следовательно возникает гироскопическая пара сил с моментом \bar{M}^g , стремящаяся совместить $\bar{\Omega}$ с ω_1 , т.е. повернуть гироскоп вокруг оси y . Т.к. такой поворот невозможен (см. рис.12.9), эта пара сил приведет лишь к возникновению дополнительных давлений в опорах B и B_1 .

Таким образом, вынужденная прецессия оси гироскопа приводит к появлению давлений на подшипники. Это явление называют гироскопическим эффектом. Если расстояние между подшипниками B и B_1 равно ℓ , то величины реакций подшипников R_B^g и $R_{B_1}^g$ равны:

$$R_B^r = R_{B_1}^r = \frac{J_z \Omega \omega_1 \cdot \sin(\bar{\Omega} \wedge \bar{\omega}_1)}{\ell}. \quad (12.19)$$

3. Если поворачивать корпус гироскопа вокруг оси y_1 параллельной оси y с угловой скоростью ω_2 , то ротор гироскопа будет прецессировать вокруг оси x до тех пор пока ось z не займет положение параллельное $\bar{\omega}_2$. Действительно, при вынужденной прецессии гироскопа с угловой скоростью ω_2 возникает гироскопическая пара сил, стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии. Когда $\bar{\Omega}$ станет параллельной $\bar{\omega}_2$, \bar{M}^r будет равен нулю и поворот ротора вокруг оси x прекратится.

12.7. Решение задач

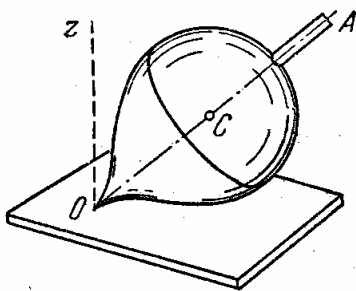


Рис.12.10

Задача 12.1. Волчок вращается по часовой стрелке вокруг своей оси OA с постоянной угловой скоростью $\omega = 600 \text{ с}^{-1}$. Ось OA наклонена к вертикали. Нижний конец оси OA остается неподвижным. Центр тяжести волчка находится на расстоянии $OC = 30 \text{ см}$ от точки O (рис.12.10). Радиус инерции волчка относительно оси OA равен $\rho = 10 \text{ см}$.

Определить движение оси OA волчка, считая, что кинетический момент волчка равен $J\omega$.

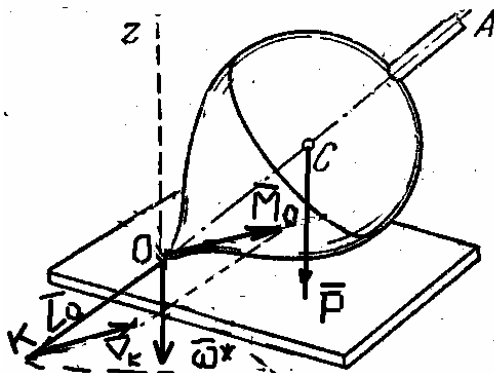


Рис.12.11

Решение. Ось OA волчка (тяжелого гироскопа) под действием силы тяжести P , приложенной в точке C , прецессирует вокруг вертикальной оси z по часовой стрелке (рис.12.11) с угловой скоростью, определяемой формулой (12.15):

$$\omega^* = \frac{OC \cdot P}{J_z \omega} = \frac{OC \cdot mg}{m \rho^2 \omega} = \frac{30 \cdot 10}{10^2 \cdot 600} = 0.49 \text{ с}^{-1}$$

Задача 12.2. Турбина, вал которой параллелен продольной оси судна (рис.12.12), делает 1500

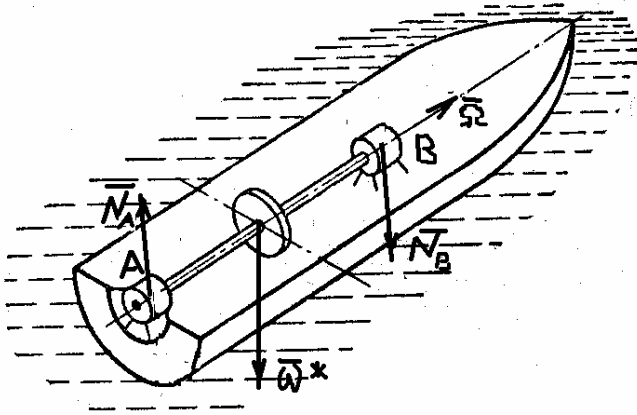


Рис.12.12

об/мин. Вес вращающихся частей 6 т, радиус инерции $\rho = 0,7$ м.

Определить гироскопические давления на подшипники, если судно поворачивается вокруг вертикальной оси, с угловой скоростью 10° в секунду. Расстояние между подшипни-

ками $\ell = 2,7$ м.

Решение. Будем считать, что поворот корпуса происходит в горизонтальной плоскости по часовой стрелке, при этом вектор угловой скорости прецессии направлена по вертикали вниз.

Переводим размерность угловой скорости прецессии из градусов в секунду в радианы в секунду:

$$\omega^* = \frac{10 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{18} \text{ с}^{-1}.$$

По правилу Жуковского гироскопические давления на подшипники образуют пару (\vec{N}_A, \vec{N}_B) , стремящуюся повернуть ось собственного вращения до совмещения с уловой скоростью прецессии (направления векторов $\vec{\Omega}$ и $\vec{\omega}^*$ при этом совмещении должны быть одинаковыми). Из рис.12.12 видно, что такой поворот должен происходить в вертикальной плоскости по часовой стрелке, поэтому силы \vec{N}_A, \vec{N}_B лежат в вертикальной плоскости и направлены так, как показано на рисунке. Величины гироскопических реакций определяем по формуле (12.19):

$$N_A = N_B = \frac{J_z \Omega \omega^*}{\ell}, \quad (12.20)$$

причем $J_z = \frac{P}{g} \rho^2 = \frac{6 \cdot 10^3}{10} \cdot (0,7)^2$, $\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1500}{30} \text{ с}^{-1}$. Подставляя эти величины, а также расстояние между подшипниками и угловую скорость прецессии в (12.20), получаем:

$$N_A = N_B = \frac{6 \cdot 10^3}{10} \cdot (0,7)^2 \cdot \frac{\pi \cdot 1500}{30} \cdot \frac{\pi}{18} \cdot \frac{1}{2,7} = 3090 \text{ кг}.$$

Задача 12.3. Определить максимальные гироскопические давления на подшипники быстроходной турбины, установленной на корабле. Корабль подвержен килевой качке с амплитудой 9° и периодом 15 сек вокруг оси, перпендикулярной к оси ротора. Ротор турбины весом 3500 кг с радиусом инерции 0,6 м делает 3600 об/мин. Расстояние между подшипниками 2 м (рис.12.13).

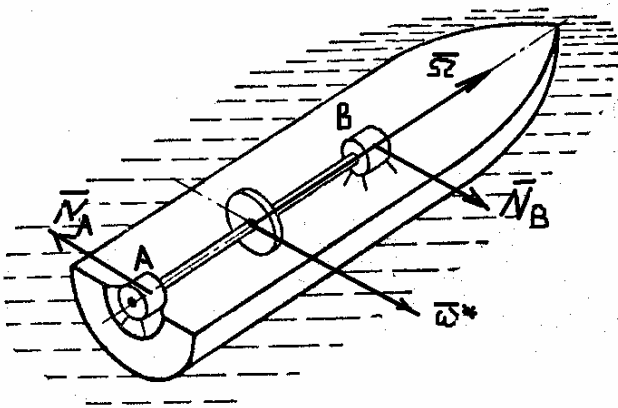


Рис.12.13

Решение. Будем считать, что килевая качка происходит по гармоническому закону:

$$\varphi = a \sin kt, \quad (12.21)$$

причем амплитуда и частота равны соответственно

$$a = \frac{9^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{20},$$

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{15} \text{ рад/с}.$$

Угловая скорость прецессии, вызванная качкой, определяется путем дифференцирования (12.21):

$$\omega^* = \frac{d\varphi}{dt} = ak \cos kt.$$

Максимальное значение этой скорости равно

$$\omega_{\max}^* = ak = \frac{\pi}{20} \cdot \frac{2\pi}{15} = \frac{\pi^2}{150} \text{ с}^{-1}.$$

В предположении, что угловые скорости собственного вращения и прецессии имеют направления, показанные на рис.12.13, находим, что пара

гироскопических давлений (\vec{N}_A, \vec{N}_B), стремящаяся, согласно правилу Жуковского, повернуть ось $\vec{\Omega}$ до совмещения с осью $\vec{\omega}^*$, лежит в горизонтальной плоскости и сообщает вращение по часовой стрелке. Величину максимальных гироскопических давлений подсчитываем по формуле (12.19):

$$N_A = N_B = \frac{J_Z \Omega \omega_{\max}^*}{\ell}, \quad (12.22)$$

где $J_Z = \frac{P}{g} \rho^2 = \frac{3500}{10} \cdot (0,6)^2 = 350 \cdot 0,36$, $\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 3000}{30} = 100\pi \text{ рад/с}$.

Подставляя эти величины, а также ω_{\max}^* и ℓ в (12.22), получаем

$$N_A = N_B = \frac{350 \cdot 0,36 \cdot 100\pi}{2} \cdot \frac{\pi^2}{150} = 1320 \text{ кг}.$$

Задача 12.4. Колесо радиуса a и веса $2P$ вращается вокруг горизонтальной оси AB с постоянной угловой скоростью Ω . Ось AB вращается вокруг вертикальной оси CD , проходящей через центр колеса, с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}^*$. Направления вращений показаны на рис.12.14.

Найти давления на подшипники A и B , если длина $AO = OB = h$; масса колеса равномерно распределена по его ободу.

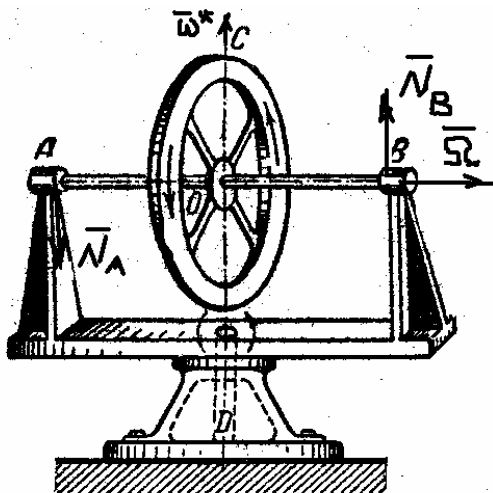


Рис.12.14

Решение. Давление на подшипники складывается из статических и гироскопических давлений. Статические давления равны P и направлены вертикально вниз. Гироскопические давления образуют пару (\vec{N}_A, \vec{N}_B), стремящуюся совместить, согласно правилу Жуковского, ось $\vec{\Omega}$ с осью $\vec{\omega}^*$. Направления гироскопических давлений показаны на рис.12.14. Величина гироскопических давлений определяется по формуле (12.19):

$$N_A = N_B = \frac{J_z \Omega \omega^*}{2h} = \frac{2Pa^2}{g} \cdot \frac{\Omega \omega^*}{2h} = \frac{Pa^2 \Omega \omega^*}{gh}.$$

В точке А статическое и гироскопическое давления направлены в одну сторону, а в точке В - в противоположные стороны. Следовательно, величины полных давлений на подшипники А и В равны

$$N'_A = P + N_A = P \left(1 + \frac{a^2 \Omega \omega^*}{gh} \right), \quad N'_B = P - N_B = P \left(1 - \frac{a^2 \Omega \omega^*}{gh} \right).$$

12.8. Контрольные вопросы

- 12.1. В каком направлении поворачивается ось собственного вращения гироскопа при действии на нее силы?
- 12.2. Чему равна скорость конца вектора кинетического момента?
- 12.3. Какой гироскоп называется свободным?
- 12.4. Какой гироскоп называется тяжелым?
- 12.5. Каковы основные свойства свободного гироскопа?
- 12.6. Что происходит с тяжелым гироскопом вследствие действия силы тяжести?
- 12.7. Что называется гироскопическим эффектом?
- 12.8. Какие силы образуют гироскопический момент?

ГЛАВА 13. ОСНОВЫ ТЕОРИИ УДАРА

13.1. Явление удара

До сих пор рассматривалось движение тел, при котором изменение скоростей точек происходило непрерывно, т.е. каждому бесконечно малому промежутку времени соответствовало бесконечно малое приращение скорости. В данной главе будет рассматриваться явление, при котором скорости точек за ничтожно малый промежуток времени изменяются скачком на конечную величину. Такое явление называется ударом. Примерами такого явления могут служить: удар молотка по гвоздю, удар мяча о стену, удар молота по наковальне и пр.

Мгновенный скачок скорости происходит вследствие того, что при ударе возникают весьма большие по модулю силы, импульсы которых за бесконечно малый промежуток времени являются величинами конечными. Такие силы называют ударными силами.

Бесконечно малый промежуток времени τ , за который происходит удар, называют временем удара.

В теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматриваются не сами ударные силы \vec{F} , а их импульсы:

$$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F} dt = \vec{F}^{cp} \tau. \quad (13.1)$$

Импульсами неударных сил за время удара, как величинами малыми, можно пренебрегать.

Теорема об изменении количества движения точки при ударе имеет вид:

$$m(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{S}, \quad (13.2)$$

где \vec{v} - скорость точки до удара, \vec{u} - скорость точки после удара, \vec{S} - импульс ударной силы.

Перемещение точки за время удара, равное $v^{cp} \tau$, является величиной малой. На этом основании считается, что перемещений соударяющихся тел за время удара не происходит.

13.2. Теорема об изменении количества движения системы при ударе

Теорема об изменении количества движения системы в конечной форме, приведенная в главе 5, сохраняет свой вид и при ударе:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum \vec{S}_i^e, \quad (13.3)$$

где \vec{K} - количество движения системы после удара, \vec{K}_0 - количество движения системы до удара. Теорема читается так: *изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.*

Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю ($\sum \vec{S}_i^e = 0$), то, как следует из (13.3),

$$\vec{K} = \vec{K}_0, \quad (13.4)$$

т.е. количество движения системы за время удара не изменяется.

Внутренние ударные импульсы не входят в уравнение (13.3) и, следовательно, не могут изменить количества движения системы.

Уравнение (13.3) можно записать иначе, выразив количество движения системы через скорость центра масс:

$$M(\vec{u}_c - \vec{v}_c) = \sum \vec{S}_i^e, \quad (13.5)$$

где M - масса системы, \vec{u}_c - скорость центра масс после удара, \vec{v}_c - скорость центра масс до удара. Из (13.5) следует, что внутренние ударные импульсы не могут изменить скорость центра масс.

13.3. Теорема об изменении кинетического момента системы при ударе

Теорема об изменении кинетического момента системы, приведенная в главе 6, записывается так:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e, \quad (13.6)$$

где $\vec{L}_0 = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$. При ударе, вследствие того, что не происходит перемещения тел, эта теорема несколько видоизменяется.

Умножаем обе части уравнения (13.6) на dt :

$$d\vec{L}_0 = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e) dt. \quad (13.7)$$

Интегрируем это выражение по времени удара:

$$\int_0^\tau d\vec{L}_0 = \int_0^\tau \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e) dt. \quad (13.8)$$

Левая часть (13.8) представляет собой изменение кинетического момента за время удара.

$$\int_0^\tau d\vec{L}_0 = \vec{L}_{0II} - \vec{L}_{0I},$$

причем \vec{L}_{0I} - кинетический момент системы относительно центра 0 до удара, \vec{L}_{0II} - то же после удара.

Преобразуем правую часть выражения (13.8), имея в виду, что радиусы-векторы точек за время удара не изменяются, поскольку тела за время удара не перемещаются:

$$\int_0^\tau \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e) dt = \sum \int_0^\tau (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e) dt = \sum \left(\vec{r}_i \times \int_0^\tau \vec{F}_i^e dt \right) = \sum (\vec{r}_i \times \vec{S}_i^e) = \sum \vec{M}_0(\vec{S}_i^e)$$

Тогда:

$$\vec{L}_{0II} - \vec{L}_{0I} = \sum \vec{M}_0(\vec{S}_i^e). \quad (13.9)$$

Теорема читается так: *изменение кинетического момента системы за время удара относительно некоторого центра равно геометрической сумме моментов внешних ударных импульсов, приложенных к системе, относительно того же центра.*

Из уравнения (13.9) следует, что если

$$\sum \vec{M}_0(\vec{S}_i^e) = 0,$$

то

$$\vec{L}_{0II} = \vec{L}_{0I}, \quad (13.10)$$

т.е. кинетический момент за время удара не изменяется.

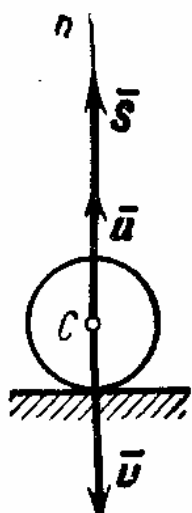
Внутренние ударные импульсы, как не входящие в уравнение (13.9), на кинетический момент не влияют.

13.4. Удар тела о неподвижную преграду. Коэффициент восстановления при ударе

Рассмотрим шар массы m , падающий поступательно по вертикали на неподвижную поверхность (рис.13.1). Прямой удар, который при этом произойдет, имеет две фазы.

На первой фазе скорости точек шара, равные v в момент начала удара, уменьшаются до нуля. Шар при этом деформируется и вся его начальная кинетическая энергия, равная $\frac{mv^2}{2}$, переходит в потенциальную энергию деформированного тела.

На второй фазе удара шар под действием внутренних упругих сил частично восстанавливает свою форму. К концу этой фазы его точки приобретают скорость u и его потенциальная энергия переходит в кинетическую, равную $\frac{mu^2}{2}$.



Часть первоначальной кинетической энергии затрачивается на остаточную деформацию и нагревание шара. Поэтому скорость u после удара меньше скорости v до удара.

Величина k , равная при прямом ударе тела о неподвижную преграду отношению модуля скорости после удара к модулю скорости до удара, называется *коэффициентом восстановления при ударе*:

$$k = \frac{u}{v}. \quad (13.11)$$

Рис.13.1

Значение коэффициента восстановления зависит от

массы и скорости падающего тела и от его упругих свойств. Значение коэффициента восстановления, лежащего в пределах

$$0 \leq k \leq 1,$$

определяют опытным путем.

При $k = 0$ удар называют *абсолютно неупругим*. Он имеет только первую фазу. При $k = 1$ удар называют *абсолютно упругим*. В остальных случаях удар называют *упругим*.

Коэффициенту восстановления можно дать и физическую интерпретацию. Обозначим импульс ударной реакции поверхности на первой фазе удара через S_1 , а на второй фазе - через S_2 и запишем теорему (13.3) об изменении количества движения шара в проекции на нормаль на двух фазах удара, учитывая, что в конце первой фазы и в начале второй скорость шара равна нулю:

$$\begin{aligned} 0 - mv_n &= S_{1n}, \\ mu_n - 0 &= S_{2n}. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Так как (см.рис.13.1) $v_n = -v$, $u_n = u$, $S_{1n} = S_1$, $S_{2n} = S_2$, то система (13.12) приводится к уравнениям:

$$mv = S_1, \quad mu = S_2,$$

из которых получаем:

$$k = \frac{u}{v} = \frac{S_2}{S_1}. \quad (13.13)$$

Таким образом, коэффициент восстановления при прямом ударе равен отношению импульсов ударной реакции за вторую и первую фазы удара.

Теперь рассмотрим косой удар шара о преграду, когда его скорость до удара составляет угол α с нормалью (рис.13.2).

Уравнение (13.3) в проекциях на касательную и нормаль имеет вид:

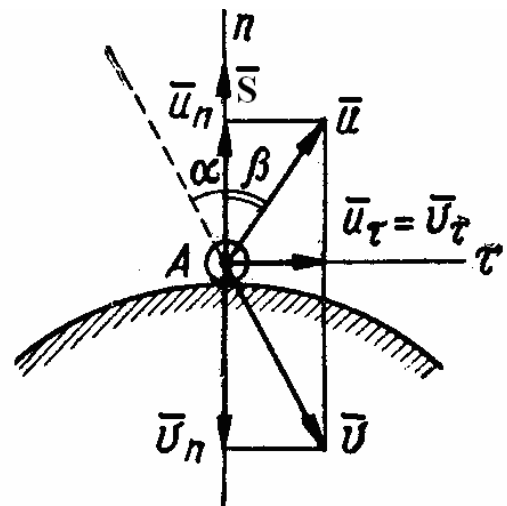


Рис.13.2

$$m(u_\tau - v_\tau) = 0, \quad m(u_n - v_n) = S. \quad (13.14)$$

Коэффициент восстановления в данном случае равен отношению $|u_n|$ к $|v_n|$, так как удар происходит только по нормали к поверхности. Учитывая, что $u_n = -kv_n$ из (13.14), получаем:

$$u_\tau = v_\tau, \quad u_n = -kv_n \quad S = m|v_n|(1+k).$$

Находим величину скорости шара после удара:

$$u = \sqrt{u_\tau^2 + u_n^2} = \sqrt{v_\tau^2 + k^2 v_n^2} = \sqrt{(v \sin \alpha)^2 + (kv \cos \alpha)^2} = v \sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha} \quad (13.15)$$

С помощью рис.13.2 определяем связь между углом α падения и углом β отражения:

$$|u_n| \operatorname{tg} \beta = |v_n| \operatorname{tg} \alpha,$$

отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{u_n}{v_n} \right| \cdot \operatorname{tg} \beta = k \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (13.16)$$

или

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}. \quad (13.17)$$

Так как $k < 1$, то $\alpha < \beta$, т.е. угол падения меньше угла отражения.

13.5. Прямой центральный удар двух тел

При соударении двух поступательно движущихся тел удар называют *прямым центральным*, если общая нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке контакта проходит через их центры тяжести и скорости центров тяжести тел до удара направлены по этой общей нормали.

Рассмотрим прямой центральный удар на примере двух поступательно движущихся шаров массами m_1 и m_2 ,

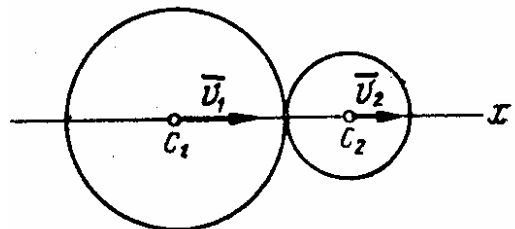


Рис.13.3

центры тяжести которых C_1 и C_2 движутся до удара со скоростями v_1 и v_2 в положительном направлении оси x (рис.13.3). Задача заключается в определении ударного импульса S и скоростей u_1 и u_2 после удара.

Для решения поставленной задачи воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы. В систему включим оба шара. Для такой системы удар шаров будет внутренним, следовательно, $\sum \vec{S}_i^e = 0$ и $\vec{K} = \vec{K}_0$.

При этом уравнение (13.3) в проекции на ось x окажется таким:

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}. \quad (13.18)$$

При соударении двух тел ударный импульс зависит не от абсолютно-го значения скорости каждого из тел, а от того, насколько скорость ударяющего тела превышает скорость ударяемого. Поэтому при ударе двух тел, когда $v_{1x} > v_{2x}$ (иначе первый шар никогда не догонит второй) и $u_{1x} < u_{2x}$ (ударившее тело не может опередить ударяемое) коэффициент восстановления определяется формулой:

$$k = \left| \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \right| = - \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \quad (13.19)$$

или

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x}). \quad (13.20)$$

Система уравнений (13.18) и (13.20) позволяет определить скорости тел после удара.

Ударный импульс найдем, составив уравнение (13.3) в проекции на ось x для какого-нибудь одного из тел, например, для первого:

$$S_{1x} = m_1(u_{1x} - v_{1x}). \quad (13.21)$$

Рассмотрим два предельных случая.

1. А б о л ю т н о н е у п р у г и й у д а р ($k = 0$). Из уравнений (13.18), (13.20) и (13.21) находим:

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad (13.22)$$

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \quad (13.23)$$

2. А б о л ю т н о у п р у г и й у д а р ($k = 1$). Из тех же уравнений получаем:

$$u_{1x} = v_{1x} - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}), \quad (13.24)$$

$$u_{2x} = v_{2x} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}),$$

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}). \quad (13.25)$$

13.6. Удар по вращающемуся телу

Пусть к телу массы m , которое вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω_I , приложен внешний ударный импульс \vec{S} (рис.13.4). Требуется определить угловую скорость ω_{II} тела после удара и ударные импульсы \vec{S}_A и \vec{S}_B сил реакций в опорах А и В.

Для решения поставленной задачи введем координатную систему $Axyz$ (плоскость Ayz проходит через центр C тяжести тела, рис.13.5) и запишем уравнения (13.3) и (13.9), выражающие теоремы об изменении количества движения и кинетического момента при ударе, в проекциях на выбранные оси координат:

- 1) $m(u_c - v_c) = S_x + S_{Ax} + S_{Bx}$,
- 2) $0 = S_y + S_{Ay} + S_{By}$,
- 3) $0 = S_z + S_{Az}$,
- 4) $-J_{xz}(\omega_{II} - \omega_I) = M_x(\vec{S}) - S_{By}b$,
- 5) $-J_{yz}(\omega_{II} - \omega_I) = M_y(\vec{S}) + S_{Bx}b$,
- 6) $J_z(\omega_{II} - \omega_I) = M_z(\vec{S})$.

(13.26)

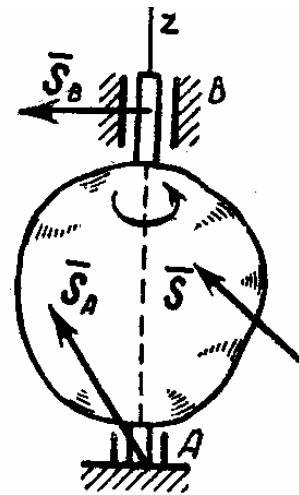


Рис.13.4

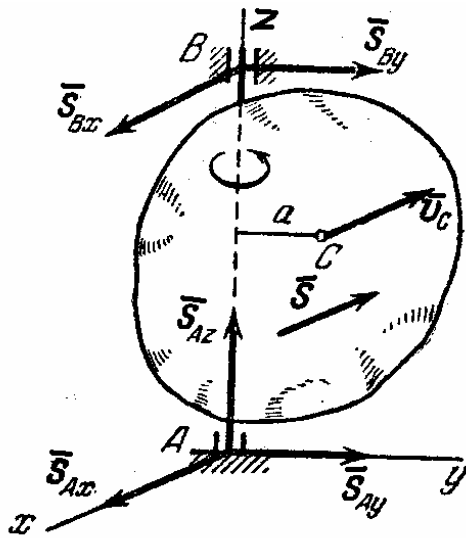


Рис.13.5

Здесь a - расстояние от точки C до оси вращения, b - расстояние между опорами,

$$u_c = \omega_{\Pi} a, \quad v_c = \omega_{\Pi} b. \quad (13.27)$$

Из уравнений (13.26) определяются проекции $S_{Ax}, S_{Ay}, S_{Az}, S_{Bx}, S_{By}$ ударных реактивных импульсов и угловая скорость ω_{Π} тела после удара.

13.7. Центр удара

Выясним, существуют ли условия, при которых удар \vec{S} , приложенный к вращающемуся телу, не вызовет ударных реактивных импульсов в опорах. Для этого найдем, при каких условиях можно удовлетворить уравнениям (13.26), положив в них $\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$.

При $\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$ из второго и третьего уравнений (13.26), получаем

$$S_y = S_z = 0, \quad (13.28)$$

следовательно, ударный импульс \vec{S} должен быть направлен перпендикулярно плоскости Ayz , содержащей ось вращения и центр тяжести тела. Будем считать, что условие (13.28) выполнено.

При $\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$ вид уравнений (13.26) не зависит от положения на оси Az начала координат. С целью упрощения дальнейших исследований используем плоскость Oxy , в которой лежит ударный импульс \vec{S} (рис.13.6). Относительно

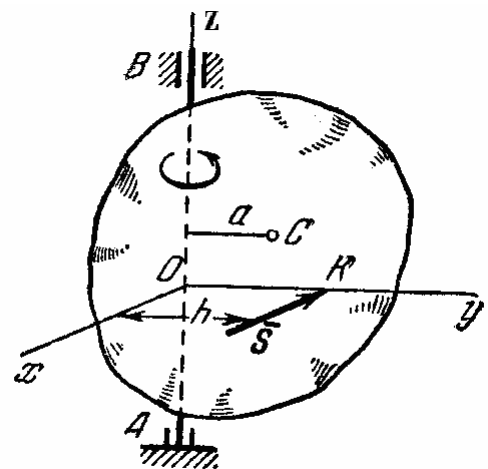


Рис.13.6

новых координатных осей x и y моменты импульса \vec{S} равны нулю. При этом четвертое и пятое уравнения системы (13.26) дают:

$$J_{xz} = J_{yz} = 0. \quad (13.29)$$

Это означает, что ось вращения (ось z) должна быть главной осью инерции тела в точке O .

Обратимся теперь к первому и шестому уравнениям системы (13.26) и запишем их в новой системе (рис.13.6):

$$ma(\omega_{II} - \omega_I) = -S,$$

$$J_z(\omega_{II} - \omega_I) = Sh.$$

Исключая из этих уравнений разность угловых скоростей, получаем расстояние до оси вращения, на котором должен быть приложен ударный импульс:

$$h = \frac{J_z}{ma} = \frac{J_z}{my_c}. \quad (13.30)$$

Таким образом, чтобы при ударе по вращающемуся вокруг оси z телу не возникло ударных реактивных импульсов в опорах необходимо соблюдение следующих условий:

- 1) вектор ударного импульса должен быть перпендикулярен плоскости, проходящей через ось вращения и центр тяжести;
- 2) ударный импульс лежит в плоскости Oxy перпендикулярной оси z вращения; причем для точки O ось z является главной осью инерции тела;
- 3) точка K приложения ударного импульса должна отстоять от оси вращения на расстоянии, определяемом формулой (13.30).

Точка K , к которой приложен внешний ударный импульс, не вызывающий ударных реактивных импульсов в опорах, называется *центром удара*.

Если ось вращения проходит через центр тяжести тела, то $a = 0$ и формула (13.30) дает $h = \infty$. Это означает, что в этом случае центра удара не существует и любой удар по телу будет передаваться на ось вращения.

Заметим, что центр удара, согласно (13.30), совпадает с центром качаний физического маятника (см. параграф 9.5). Следовательно, точка K располагается по отношению к оси вращения дальше, чем центр масс тела.

Пример 13.1. На каком расстоянии от руки должен быть установлен предмет (рис.13.7), чтобы при ударе по нему палкой рука не чувствовала отдачи?

Решение. Считаем палку однородным стержнем длиной ℓ , а ось вращения совпадающей с его концом. Тогда $a = \ell/2$, $J_z = \frac{m\ell^2}{3}$ и формула (13.30) дает:

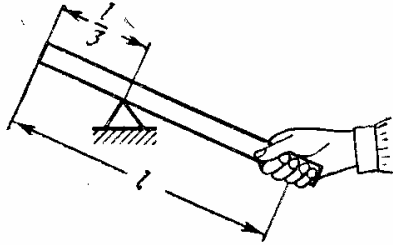


Рис.13.7

$$h = \frac{J_z}{ma} = \frac{2}{3}\ell.$$

Чтобы при ударе палкой рука не чувствовала отдачи, ударяемый предмет должен находиться от руки на найденном расстоянии.

13.8. Потеря кинетической энергии при ударе. Теорема Карно

Общая теорема динамики об изменении кинетической энергии системы в теории удара вообще не может иметь места, поскольку точки за время удара тел не перемещаются, а вместо ударных сил рассматриваются их импульсы. Поэтому непосредственно подсчитать работу ударных сил на нулевых перемещениях точек их приложения невозможно. В связи с этим ниже излагается теорема, дающая возможность подсчитать лишь потерю кинетической энергии при ударе.

Найдем потерю кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе двух поступательно движущихся по оси x тел массы которых m_1 и m_2 . Для системы, состоящей из этих тел, потеря кинетической энергии при ударе равна

$$\Delta E_k = E_{kI} - E_{kII}, \quad (13.31)$$

где

$$E_{kI} = (m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2)/2, \quad E_{kII} = (m_1 + m_2) u_x^2/2. \quad (13.32)$$

Представим выражение (13.31) в виде:

$$\Delta E_k = E_{kI} - E_{kII} = E_{kI} - 2E_{kII} + E_{kII}. \quad (13.33)$$

Так как удар является внутренним, то количество движения системы за время удара не меняется и справедливо соотношение (13.18):

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x.$$

Это соотношение позволяет представить $2E_{kII}$ в виде:

$$2E_{kII} = (m_1 + m_2) u_x^2 = (m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}) u_x. \quad (13.34)$$

Подставляя (13.32) и правую часть (13.34) в (13.33), получаем:

$$\Delta E_k = E_{kI} - E_{kII} = \frac{1}{2} (m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 - 2m_1 v_{1x} u_x - 2m_2 v_{2x} u_x + m_1 u_x^2 + m_2 u_x^2)$$

или

$$\Delta E_k = E_{kI} - E_{kII} = \frac{m_1 (v_{1x} - u_x)^2}{2} + \frac{m_2 (v_{2x} - u_x)^2}{2}. \quad (13.35)$$

Разности скоростей показывают, насколько уменьшились скорости тел за время удара. Эти разности называют *потерянными скоростями*. Выражение (13.35) представляет собой теорему Карно, которая формулируется так: *кинетическая энергия, потерянная при абсолютно неупругом ударе двух поступательно движущихся тел, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы тела двигались с потерянными скоростями*.

При упругом ударе ($k \neq 0$) двух поступательно движущихся тел потеря кинетической энергии определяется аналогичным образом; она равна

$$\Delta E_k = E_{kI} - E_{kII} = \frac{1-k}{1+k} \left(\frac{m_1 (v_{1x} - u_{1x})^2}{2} + \frac{m_2 (v_{2x} - u_{2x})^2}{2} \right). \quad (13.36)$$

13.9. Решение задач

Задача 13.1. Груз А веса P падает без начальной скорости с высоты h на плиту весом G , укрепленную на пружине, которая имеет коэффициент жесткости c (рис.13.8).

Найти величину s сжатия пружины после удара в предположении, что коэффициент восстановления равен нулю.

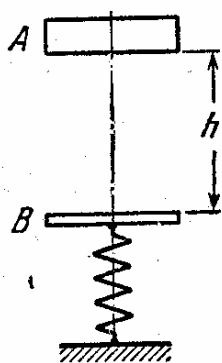


Рис.13.8

Решение. До удара скорость тела В равна нулю, а тела А равна $v_A = \sqrt{2gh}$. Для определения общей скорости u после удара (удар абсолютно неупругий) используем теорему об изменении количества движения системы при ударе. Так как для системы, состоящей из тел А и В, удар является внутренним, то количество движения после удара, согласно (13.18), остается таким же, как до удара, т.е. $K = K_0$.

Так как $K = \frac{P+G}{g}u$, а $K_0 = \frac{P}{g}\sqrt{2gh}$, то

$$\frac{P+G}{g}u = \frac{P}{g}\sqrt{2gh}, \text{ отсюда}$$

$$u = \frac{P\sqrt{2gh}}{P+G}.$$

За время удара никаких перемещений не происходило. После удара тела А и В движутся совместно, сжимая пружину. В начале этого движения пружина была сжата телом В на величину $\lambda^{ст} = G/c$. В конце этого движения пружина будет сжата на $\lambda^{ст} + s$. Для определения величины s используем теорему об изменении кинетической энергии на участке от окончания удара до полной остановки системы:

$$E_k - E_{k0} = \sum A,$$

$$\text{где } E_k = 0, \quad E_{k0} = \frac{P+G}{g} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{P^2 h}{P+G}.$$

Работу на перемещении s совершают силы тяжести и сила упругости пружины:

$$\sum A = (P + G)s - \int_{\lambda^{ct}}^{\lambda^{ct}+s} c x dx = (P + G)s - \frac{c(\lambda^{ct} + s)^2}{2} + \frac{c(\lambda^{ct})^2}{2}$$

или, используя выражение для λ^{ct} ,

$$\sum A = Ps - \frac{cs^2}{2}.$$

С учетом полученных соотношений, теорема об изменении кинетической энергии приводится к уравнению:

$$-\frac{P^2 h}{P + G} = Ps - \frac{cs^2}{2}$$

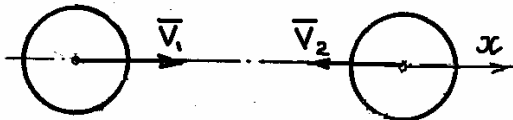
или

$$s^2 - \frac{2Ps}{c} - \frac{2P^2 h}{(P + G)c} = 0,$$

откуда

$$s = \frac{P}{c} + \sqrt{\left(\frac{P}{c}\right)^2 + \frac{2P^2 h}{(P + G)c}}.$$

Задача 13.2. Найти скорости u_1 и u_2



после абсолютно упругого удара двух одинаковых шаров, двигавшихся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2

(рис.13.9).

Рис.13.9

Решение. Применим теорему об изменении количества движения системы, включив в систему оба шара. Для такой системы удар шаров является внутренним. При этом количество движения системы после удара равно количеству движения до удара (см. (13.8)):

$$m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

или, принимая во внимание, что $m_1 = m_2$,

$$u_{1x} + u_{2x} = v_{1x} + v_{2x}. \quad (13.37)$$

Еще одно уравнение можно записать, используя (13.20):

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x})$$

или, учитывая, что $k = 1$,

$$u_{1x} - u_{2x} = -v_{1x} + v_{2x}. \quad (13.38)$$

Из уравнений (13.37) и (13.38) получаем:

$$u_{1x} = v_{2x} = -v_2, \quad u_{2x} = v_{1x} = v_1,$$

следовательно, после удара первый шар (левый на рис.13.9) откатывается влево со скоростью v_2 , а второй - вправо со скоростью v_1 , т.е. шары обмениваются скоростями.

Задача 13.3. Шарик падает наклонно со скоростью v на неподвижную горизонтальную плоскость и отскакивает от плоскости со скоростью $u = v\sqrt{2}/2$ (рис.13.10). Определить угол α падения и угол β отражения, если коэффициент восстановления при ударе равен $k = \sqrt{3}/3$.

Решение. Согласно формуле (13.15), скорость после удара равна

$$u = v\sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha}.$$

Приравнявая это выражение тому значению скорости после удара, которое указано в условии задачи, получаем:

$$v\sqrt{\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha} = v\frac{\sqrt{2}}{2}$$

или, после возведения в квадрат и подстановки значения коэффициента восстановления,

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

Заменяя в этом выражении $\sin^2 \alpha$ на $1 - \cos^2 \alpha$, получаем: $4 \cos^2 \alpha = 3$,

откуда $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Для нахождения угла отражения воспользуемся формулой (13.17):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k} = \frac{3}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1,$$

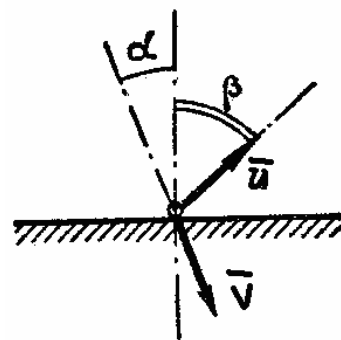


Рис.13.10

следовательно,

$$\beta = \frac{\pi}{4}.$$

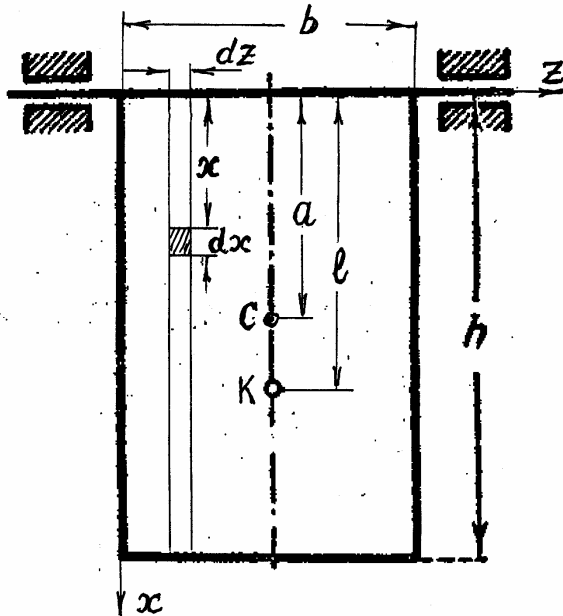


Рис.13.11

Задача 13.4. Определить положение центра К удара прямоугольной мишени для стрельбы. Высота мишени равна h (рис.13.11).

Решение. Положение центра К удара определяется формулой (13.30):

$$\ell = \frac{J_z}{ma}. \quad (13.39)$$

Здесь m - масса мишени, равная $m = \rho b h$, где ρ - плотность, b -

ширина мишени; $a = h/2$ - расстояние от центра С тяжести мишени до оси вращения; J_z - момент инерции мишени относительно оси вращения. Считая, что масса элемента ds площади мишени равна $dm = \rho ds = \rho dx dz$, вычисляем, согласно (3.4), момент инерции мишени:

$$J_z = \int_{(S)} x^2 \rho dx dz = \rho \int_0^b dz \int_0^h x^2 dx = \rho \frac{h^3 b}{3}$$

или, с учетом, что $\rho = m/(bh)$,

$$J_z = \frac{m h^2}{3}.$$

Подставляя выражения для a и J_z в (13.39), получаем расстояние от центра удара до оси вращения мишени:

$$\ell = \frac{2}{3} h.$$

Задача 13.5. Однородный стержень массы m и длины ℓ , прикрепленный своим верхним концом к цилиндрическому шарниру O , падает без начальной скорости из горизонтального положения. В вертикальном положении он ударяет груз массы m_1 , сообщая ему движение по горизонтальной шероховатой плоскости (рис.13.12). Коэффициент трения скольжения равен f .

Определить путь, пройденный грузом, считая удар абсолютно неупругим.

Решение. Будем считать, что система состоит из стержня и груза. Удар стержня по грузу является для такой системы внутренним. Используем теорему об изменении кинетического момента системы относительно

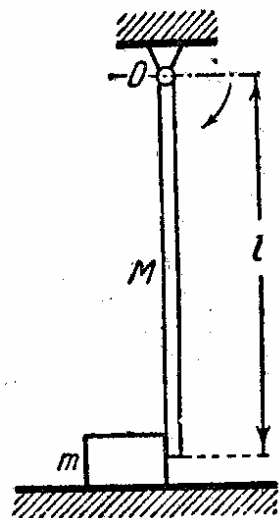


Рис.13.12

оси O . Так как ударный реактивный импульс в опоре O не создает момента относительно оси O , то кинетический момент системы после удара равен кинетическому моменту системы до удара:

$$J_0 \omega_{II} + m_1 u_A \ell = J_0 \omega_I, \quad (13.40)$$

где u_A - скорость груза после удара, ω_I - скорость стержня до удара, ω_{II} - то же после удара, причем

$$\omega_{II} = \frac{u_A}{\ell}. \quad (13.41)$$

Скорость стержня до удара вычислим с помощью теоремы об изменении кинетической энергии стержня при его перемещении из горизонтального положения в вертикальное:

$$\frac{J_0 \omega_I^2}{2} = \frac{P \ell}{2},$$

отсюда, имея в виду, что $P = mg$, $J_0 = m\ell^2/3$, получаем:

$$\omega_I = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}. \quad (13.42)$$

Подставляя выражение для J_0 , а также (13.41) и (13.42) в (13.40), получаем скорость груза после удара:

$$u_A = \frac{m\sqrt{3g\ell}}{m + 3m_1}. \quad (13.43)$$

Чтобы определить путь s , пройденный грузом после удара, запишем теорему об изменении кинетической энергии груза на пути s :

$$E_k - E_{k0} = \sum A, \quad (13.44)$$

где

$E_k = 0$, $E_{k0} = \frac{m_1 u_A^2}{2}$, $\sum A = A(F^{TP}) = -f m_1 g s$. Подставляя эти величины и (13.43) в (13.44), находим путь, пройденный грузом после удара:

$$s = \frac{3m^2 \ell}{2f(m + 2m_1)^2}.$$

13.10. Контрольные вопросы

- 13.1. Чему равны перемещения точек за время удара двух тел?
- 13.2. Сколько фаз имеет абсолютно неупругий удар?
- 13.3. Какой угол больше при косом ударе тела о преграду, угол падения или угол отражения?
- 13.4. Какой удар двух поступательно движущихся тел называется центральным?
- 13.5. Что такое коэффициент восстановления при ударе?
- 13.6. Чему равен коэффициент восстановления при абсолютно неупругом ударе?
- 13.7. Что такое центр удара?

Индивидуальные задания

Индивидуальное задание представляет собой комплект из заданий Д-1, Д-2 и Д-3, выполняемых студентом для одной из 30-ти механических систем, приведенных на нижеследующих рисунках.

З а д а н и е Д-1 состоит в определении *с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы* скорости тела 1 как функции пройденного этим телом пути s и ускорения тела 1.

З а д а н и е Д-2 заключается в нахождении ускорения тела 1 *с помощью уравнения Лагранжа 2-го рода и закона движения* тела 1.

З а д а н и е Д-3 состоит в определении ускорения тела 1 *с помощью общего уравнения динамики* и нахождения натяжений нитей.

При выполнении заданий во всех вариантах считать, что движение системы начинается из состояния покоя под действием силы тяжести тела 1.

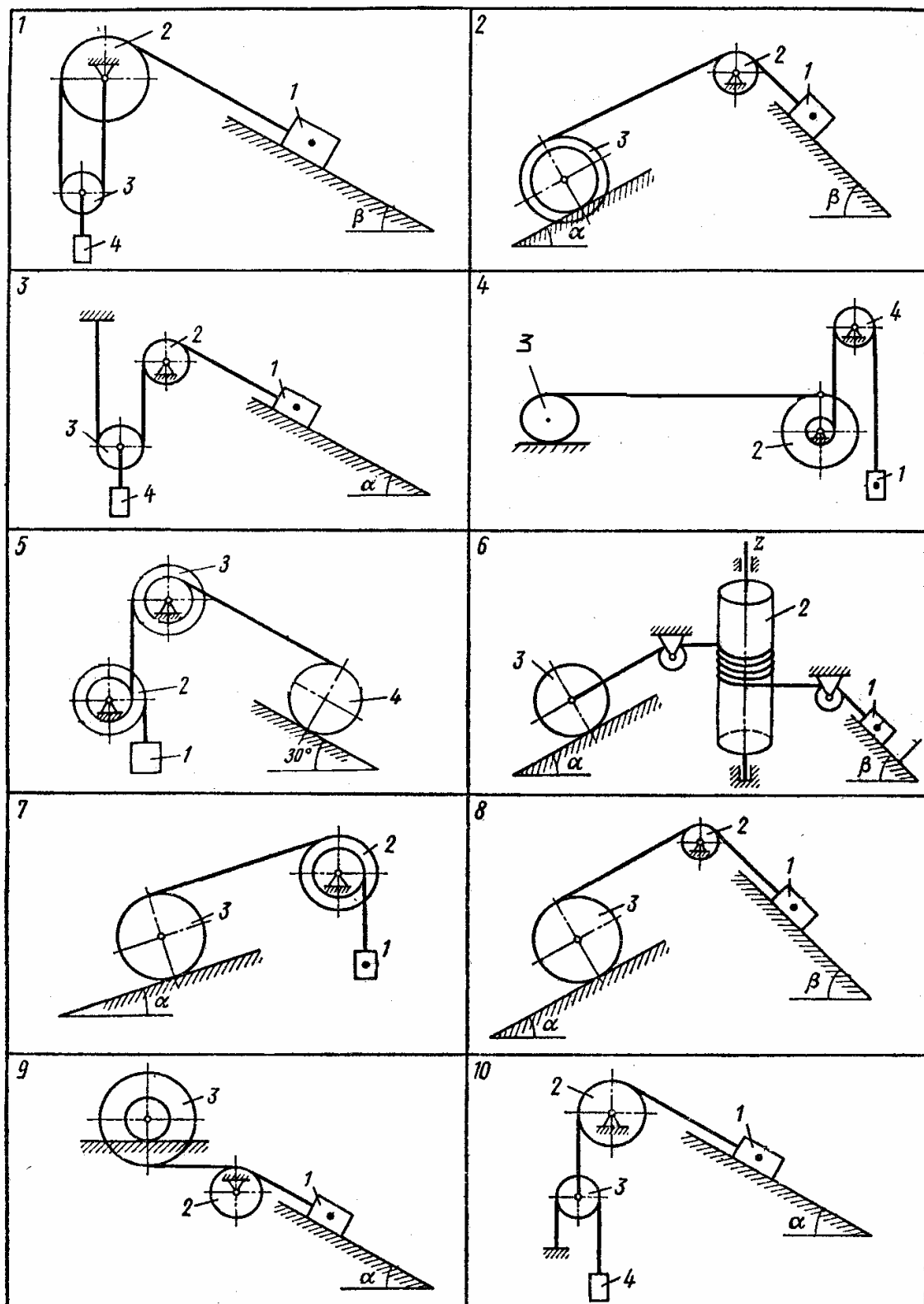
Во всех вариантах, кроме 4, 5, 7, 13-16, 25-27, учесть трение скольжения тела 1 (коэффициент трения скольжения - f), а в вариантах 3, 4, 6-9, 11, 13, 15, 17, 21, 24, 27, 29 - сопротивление качению тела 3 (коэффициент трения качения - δ_k).

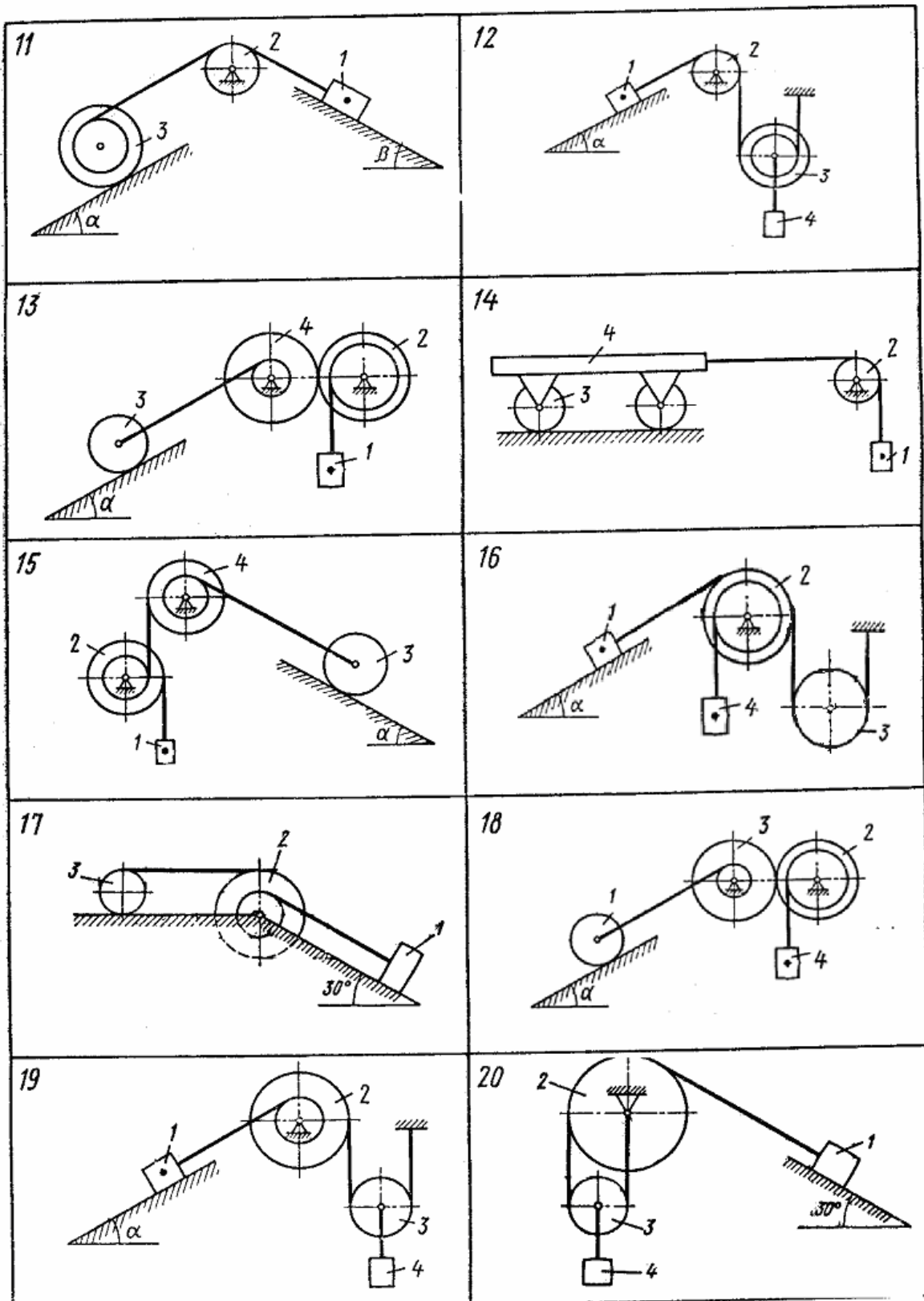
Массы тел 1, 2, 3, 4 равны соответственно m_1, m_2, m_3, m_4 . Если на схеме не указан порядковый номер тела, то массой такого тела следует пренебречь.

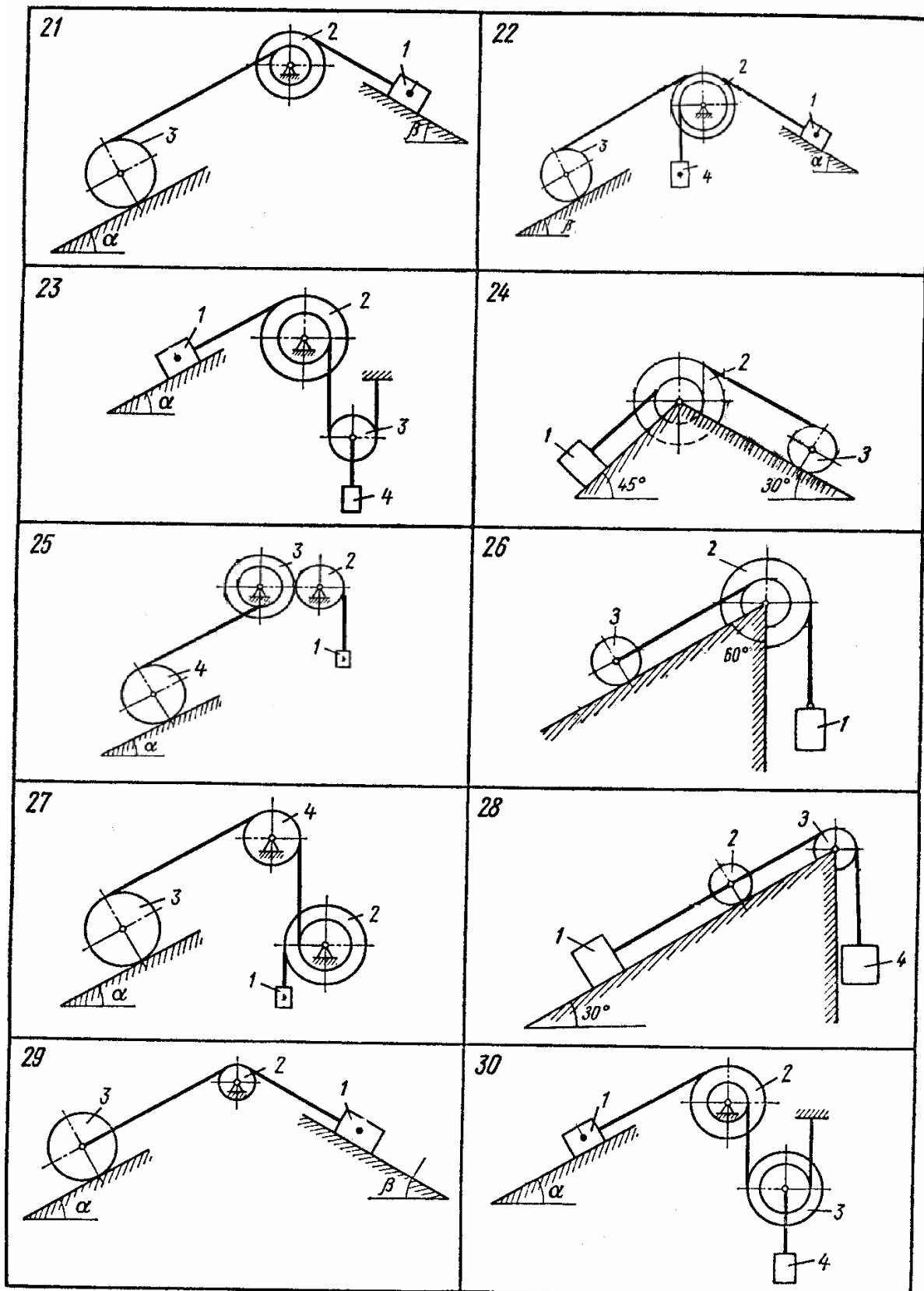
Блоки и катки - сплошные однородные цилиндры радиусов R_2, R_3, R_4 . У ступенчатых блоков и катков считать известными не только радиусы R больших окружностей, но и радиусы r малых окружностей, а также моменты инерции J относительно осей симметрии.

Тела считать абсолютно твердыми, а нити - абсолютно нерастяжимыми и невесомыми.

Определение ускорения одного и того же тела различными способами позволит студентам сопоставить между собой основные методы решения задач динамики и самостоятельно проверять правильность решений.







ЛИТЕРАТУРА

1. Бражниченко Н.А. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие.- М.:Высшая школа, 1986, 325 с.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. - М.:Высшая школа, 1986.- 325 с.
3. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Статика. Учебное пособие. – М.: ИЦ ГОУ ВПО МТГУ «Станкин», 2006. – 124с.
4. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. Кинематика. Учебное пособие. – М.: ИЦ ГОУ ВПО МТГУ «Станкин», 2009. – 128с.
5. Лойцянский Л.Г. и Лурье А.И.. Курс теоретической механики. Т.Т.1,2. - М.:Госиздат технико-теоретической литературы, 1954. - 379 с. и 595 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие.- М.: Наука, 1986.- 480 с.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.:Наука, 1967, 479 с.
8. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие / Под редакцией Колесникова К.С. - М.: Наука, 1983.- 318 с.
9. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Учебное пособие. / Под редакцией Яблонского А.А. - М.: Высшая школа, 1985.- 432 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИНАМИКА

Глава 1. Динамика точки

1.1	Дифференциальные уравнения движения материальной точки в инерциальной системе отсчета	3
1.2	Две задачи динамики точки.....	4
1.3	Движение точки при действии постоянной силы.	7
1.4	Движение точки при действии силы, зависящей от времени.....	8
1.5	Движение точки при действии силы, зависящей от положения точки. Гармонические колебания точки	9
1.6	Уравнение движения материальной точки при действии силы, зависящей от скорости.....	13
1.7	Решение задач.....	17
1.8	Контрольные вопросы	29

Глава 2. Динамика относительного движения точки

2.1	Дифференциальные уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета	30
2.2	Относительное равновесие материальной точки.....	33
2.3	Относительный покой тела на поверхности Земли... ..	35
2.4	Принцип относительности классической механики.....	37
2.5	Падение точки вблизи поверхности Земли.....	39
2.6	Решение задач.....	43
2.7	Контрольные вопросы.....	45

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Глава 3. Центр масс. Моменты инерции

3.1	Центр масс механической системы.....	46
3.2	Осевой момент инерции тела.....	47
3.3	Радиус инерции.....	49
3.4	Моменты инерции тела относительно параллельных осей.....	50
3.5	Центробежные моменты инерции.....	51
3.6	Главные оси инерции.....	53
3.7	Контрольные вопросы.....	54

Глава 4. Меры механического движения

4.1	Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек.....	55
4.2	Количество движения материальной точки и системы материальных точек.....	56
4.3	Момент количества движения материальной точки и кинетический момент системы материальных точек.....	58
4.4	Вычисление кинетического момента твердого тела в различных случаях его движения.....	59
4.5	Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек.....	66
4.6	Решение задач.....	69
4.7	Контрольные вопросы	77

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

Глава 5. Теоремы об изменении количества движения системы и о движении центра масс

5.1	Теорема об изменении количества движения	79
5.2	Закон сохранения количества движения.....	81
5.3	Теорема о движении центра масс системы.....	81
5.4	Закон сохранения движения центра масс	82
5.5	Решение задач.....	84
5.6	Контрольные вопросы.....	89

Глава 6. Теорема об изменении кинетического момента

6.1	Теорема об изменении кинетического момента системы	90
6.2	Закон сохранения кинетического момента.....	91
6.3	Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.....	94
6.4	Решение задач.....	94
6.5	Контрольные вопросы.....	97

Глава 7. Теорема об изменении кинетической энергии

7.1	Работа силы. Мощность.....	98
7.2	Вычисление работы в некоторых частных случаях.....	99
7.3	Теорема об изменении кинетической энергии.....	105
7.4	Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.....	108
7.5	Решение задач.....	110
7.6	Контрольные вопросы.....	118

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Глава 8. Принцип возможных перемещений

8.1	Классификация связей.....	119
8.2	Возможные перемещения системы. Число степеней свободы.....	122
8.3	Принцип возможных перемещений.....	126
8.4	Обобщенные координаты и обобщенные скорости.....	130
8.5	Обобщенные силы.....	131
8.6	Принцип возможных перемещений в обобщенных координатах. Условия равновесия системы в обобщенных силах.....	134
8.7	Решение задач.....	135
8.8	Контрольные вопросы.....	141

Глава 9. Уравнения Лагранжа

9.1	Об уравнениях Лагранжа.....	142
9.2	Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода.....	143
9.3	Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела (вывод из уравнений Лагранжа 2-го рода).....	147
9.4	Уравнения Лагранжа 2-го рода для случая потенциальных сил.....	151
9.5	Малые колебания физического маятника.....	153
9.6	Решение задач.....	155
9.7	Контрольные вопросы.....	168

Глава 10. Устойчивость равновесия. Малые колебания системы

10.1	Устойчивое и неустойчивое состояния равновесия механической системы.....	169
10.2	Теорема Лагранжа-Дирихле об устойчивости равновесия.....	172
10.3	Свободные колебания системы без учета сил сопротивления.....	175
10.4	Затухающие колебания системы при силе сопротивления, пропорциональной первой степени скорости.....	178
10.5	Вынужденные колебания системы при действии внешней периодической силы.....	182
10.6	Решение задач.....	185
10.7	Контрольные вопросы.....	190

Глава 11. Принцип Даламбера. Общее уравнение динамики	
11.1 Принцип Даламбера.....	192
11.2 Метод кинетостатики.....	194
11.3 Главный вектор и главный момент даламберовых сил инерции.....	195
11.4 Приведение сил инерции твердого тела к центру.....	195
11.5 Определение опорных реакций при вращении тела вокруг неподвижной оси.....	200
11.6 Условия отсутствия динамических реакций.....	205
11.7 Общее уравнение динамики.....	206
11.8 Решение задач.....	208
11.9 Контрольные вопросы.....	215

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ДИНАМИКИ

Глава 12. Приближенная теория гироскопов	
12.1 Разновидности гироскопов.....	216
12.2 Основные допущения. Теорема Резаля.....	217
12.3 Свойства свободного гироскопа.....	219
12.4 Тяжелый гироскоп.....	222
12.5 Гироскопический момент.....	224
12.6 Гироскоп с двумя степенями свободы.....	224
12.7 Решение задач.....	226
12.8 Контрольные вопросы.....	230

Глава 13. Основы теории удара	
13.1 Явление удара.....	231
13.2 Теорема об изменении количества движения системы при ударе.....	232
13.3 Теорема об изменении кинетического момента системы при ударе.....	232
13.4 Удар тела о неподвижную преграду. Коэффициент восстановления при ударе.....	234
13.5 Прямой центральный удар двух тел.....	236
13.6 Удар по вращающемуся телу.....	238
13.7 Центр удара.....	239
13.8 Потеря кинетической энергии при ударе. Теорема Карно.....	241
13.9 Решение задач.....	243
13.10 Контрольные вопросы.....	248

Индивидуальные задания	249
Литература	253

