Т. В. Бубнова

Ю. А. Виноградова

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы "Графики"

для студентов 1 курса

Москва

2011 г.

Министерство общего и профессионального образования

Российской Федерации

ГОУ ВПО Московский государственный технологический университет

«СТАНКИН»

Т. В. Бубнова

Ю. А. Виноградова

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы "Графики"

для студентов 1 курса

Москва

2011 г.

УДК 517

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы "Графики" для студентов 1 курса. Бубнова Т. В., Виноградова Ю. А., под редакцией Абрамовой С. Н. – М.: ГОУ ВПО МГТУ «Станкин», 2011. – с. 39.

Содержит теоретический минимум для выполнения расчетно-графической работы "Графики", а так же примеры решения всех типов задач, встречающихся как в самой расчетно-графической работе, так и в ее защите.

Для использования на практических занятиях и самостоятельной работы студентов первого курса факультетов МТО, ИТС, ФЭМ. Утверждено кафедрой прикладной математики ГОУ ВПО МГТУ «Станкин». Протокол № от . .

УДК 517

Оглавление

Теоретический минимум, необходимый для выполнения РГР "Графики"

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *возрастающей (неубывающей) на множестве A*, если из неравенства $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in A$, следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$).

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *убывающей (невозрастающей) на множестве A*, если из неравенства $x_1 < x_2$, где $x_1, x_2 \in A$, следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Определение 3. Все *возрастающие, неубывающие, убывающие, невозрастающие на множестве A* функции называются *монотонными на множестве A*.

Функция называется просто *возрастающей (неубывающей, убывающей, невозрастающей, монотонной)*, если она такова на всей области определения.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале. Если функция $f(x)$ имеет положительную (отрицательную) производную на данном интервале, то она возрастает (убывает) на этом интервале.

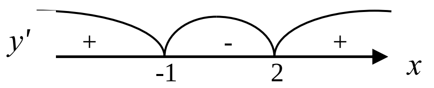
Пример: Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4.$

Решение: Функция определена на *R*. Находим ее производную:

$$y' = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2).$$

$$y' = 0 \text{ когда } x_1 = -1,\ x_2 = 2 .$$

Определим знаки производной в каждом из полученных интервалов[1]:



[1] Как определить интервалы знакопостоянства функции: разложить эту функцию на множители. Найти значения x, при которых множители обращаются в ноль и нанести их на числовую ось. Полученные точки разбивают числовую ось на интервалы. Определить знак функции на крайнем правом интервале.. Проставить знаки в остальных интервалах, учитывая четное или нечетное число раз встречается каждый корень. Если корень выражения имеет четную кратность (например: $(x-5)^2 = 0 \Rightarrow$ x = 5 - корень кратности 2), то в окрестности этого корня функция не меняет знака. Если корень выражения имеет нечетную кратность (например: $(x-5)^3 = 0 \Rightarrow$ x = 5 - корень кратности 3), то, переходя через этот корень, функция меняет знак.

$y'>0$ в интервале $(-\infty;-1)$ и в интервале $(2;+\infty)$, $y'<0$ в интервале $(-1;2)$. Таким образом, исследуемая функция возрастает в промежутках $(-\infty;-1)$ и $(2;+\infty)$, а убывает в промежутке $(-1;2)$.

Определение 4. Точка x_0 называется *точкой минимума (максимума)* непрерывной функции $y=f(x)$, если существует окрестность точки x_0, для каждой точки $x \neq x_0$ которой выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ ($f(x)<f(x_0)$).

Определение 5. Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума*.

Определение 6. Значение функции в точке минимума (максимума) называется *минимумом (максимумом)* этой функции.

Определение 7. Минимумы и максимумы функции называются ее *экстремумами*.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Определение 8. Внутренние точки области определения функции $f(x)$, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть x_0 – критическая точка функции $f(x)$, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 является точкой экстремума. При этом, если при переходе слева направо через точку x_0 знак производной меняется с минуса на плюс, то x_0 является точкой минимума, а если с плюса на минус, то – точкой максимума. Если при указанном переходе знак производной не меняется, то x_0 не является точкой экстремума.

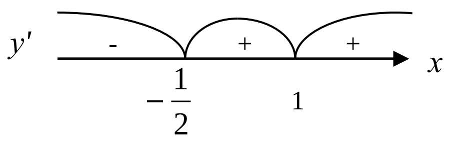
Пример: Найти точки экстремума функции $y=(x-1)^3e^{2x}$.

Решение: Функция определена на *R*. Находим первую производную:

$$y'=3(x-1)^2e^{2x}+2e^{2x}(x-1)^3=e^{2x}(x-1)^2(2x+1).$$

Производная всюду непрерывна. Приравнивая производную к нулю, получаем критические точки функции: $x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}$.

Исследуем знак производной слева и справа от каждой из критических точек:



При переходе (слева направо) через точку $x=-\frac{1}{2}$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, $x=-\frac{1}{2}$ - точка минимума. При переходе через точку $x=1$ производная знак не меняет, значит, точка $x=1$ не является точкой экстремума.

Ответ: $x=-\frac{1}{2}$ - точка минимума.

Пример: Исследовать на экстремум функцию $y=(x+2)\sqrt[3]{x^2}$.

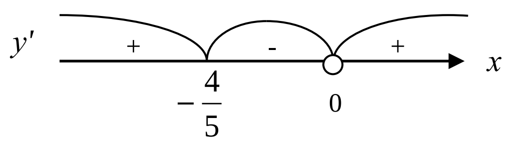
Решение: Функция определена и непрерывна на *R*. Находим первую производную:

$$y'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x+2)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x+4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$y'=0 \text{ когда } x=-\frac{4}{5}.$$

В точке $x=0$ производная не существует, но функция определена в этой точке, значит, критические точки $x_1=0,\ x_2=-\frac{4}{5}$.

Исследуем характер критических точек:



При переходе через точку $x=-\frac{4}{5}$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, $x=-\frac{4}{5}$ - точка максимума, причем, $y_{\max}=y(-\frac{4}{5})=\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$ - максимум функции.

В окрестности точки $x=0$ производная меняет знак с минуса на плюс, значит, $x=0$ - точка минимума, причем, $y_{\min}=y(0)=0$ - минимум функции.

Ответ: $y_{\max}=y(-\frac{4}{5})=\frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$;

$y_{\min}=y(0)=0$.

Второе достаточное условие экстремума. Пусть $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)$ существует. Если $f''(x_0)>0$, то x_0 является точкой минимума функции $f(x)$, а если $f''(x_0)<0$, то x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Замечание. Если $f'(x_0)=f''(x_0)=0$, то второе достаточное условие ответа на вопрос о наличии экстремума не дает.

Пример: Найти точки экстремума функции $y=x^5-5x^4+5x^3+4$.

Решение: Функция определена и непрерывна на R. Воспользуемся вторым достаточным условием экстремума.

$$y'=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3);$$

$$y''=20x^3-60x^2+30x.$$

Точки экстремума ищем среди критических точек. Первая производная всюду непрерывна и обращается в ноль при $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3.$

Исследуем знак второй производной при этих значениях x:

$$f''(3)=90>0;\ f''(1)=-10<0;\ f''(0)=0.$$

Из этого следует, что $x=3$ - точка минимума, $x=1$ - точка максимума.

Выяснить характер критической точки $x=0$ с помощью знака второй производной нельзя. Исследуем характер этой точки первым способом. При переходе через точку $x=0$ (слева направо) первая производная не меняет знак, значит, $x=0$ не является точкой экстремума.

Ответ: $x=3$ - точка минимума, $x=1$ - точка максимума.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке [*a*,*b*]:

1. Найти критические точки функции на интервале (a,b)
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках.
3. Вычислить значения функции на концах отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$.
4. Среди всех вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Замечание. Для отыскания наибольшего или наименьшего значений непрерывной функции на промежутке X полезны следующие два утверждения:

1. Если $f(x)$ имеет в промежутке X только одну точку экстремума $x=c$, причем это точка максимума, то $f(c)$ - наибольшее значение функции на промежутке X.

2. Если $f(x)$ имеет в промежутке X только одну точку экстремума $x=c$, причем это точка минимума, то $f(c)$ - наименьшее значение функции на промежутке X.

Пример: Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^3+3x^2-72x+90$ на отрезке $[-5;5]$

Решение: Функция определена и непрерывна на данном отрезке. Находим первую производную:

$$f'(x)=3x^2+6x-72.$$

Производная существует при всех значениях x.

$$f'(x)=0$$

$$3x^2+6x-72=0;$$

$$x^2+2x-24=0;$$

$$x_1=4; \quad x_2=-6.$$

Отрезку $[-5;5]$ принадлежит только точка $x=4$.

Вычислим значения функции в точках $x=-5$, $x=4$, $x=5$:

$$f(-5)=400; \quad f(4)=-86; \quad f(5)=-70.$$

Следовательно, наибольшее значение функции на этом отрезке равно 400, наименьшее значение равно -86.

Ответ: $y_{наиб.}=400$, $y_{наим.}=-86$.

Определение 9. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на интервале $(a;b)$, если его дуга $y=f(x), x\in(a,b)$, расположена выше (ниже) любой касательной к этой дуге.

Достаточное условие выпуклости вниз (вверх) графика функции. Если $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) на интервале (a,b), то график функции $f(x)$ является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.

Определение 10. Точка графика непрерывной функции, при переходе через которую меняется направление выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Необходимое условие точки перегиба. Если (x_0, y_0) – точка перегиба графика функции $y=f(x)$, то $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточное условие точки перегиба графика непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, имеет в некоторой окрестности этой точки вторую производную, которая сохраняет определенный знак как слева, так и справа от точки x_0. Пусть $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует. Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то $(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика этой функции.

Пример: Найти интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба графика функции $y = -3x^5 + 10x^4 - 10x^3 + 5$.

Решение: Функция определена на *R*. Найдем первую и вторую производные:

$$y' = -15x^4 + 40x^3 - 30x^2;$$

$$y'' = -60x^3 + 120x^2 - 60x.$$

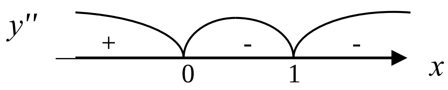
$$y'' = 0;$$

$$-60x(x^2 - 2x + 1) = 0;$$

$$-60x(x-1)^2 = 0;$$

$$x = 0,\ \ x = 1.$$

Эти точки разбивают область определения функции на три интервала. Исследуем знаки второй производной в полученных интервалах:



При $x \in (-\infty;0)$ $y'' > 0$, значит, график функции выпуклый вниз на этом интервале.

$y'' < 0$ при $x \in (0;1)$ и при $x \in (1;+\infty)$, значит, на этих интервалах график функции выпуклый вверх.

При переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет знак, значит, $x = 0$ - абсцисса точки перегиба, $y(0) = 5$. *(0;5)* - точка перегиба.

Ответ: график функции выпуклый вниз при $x \in (-\infty;0)$;

график функции выпуклый вверх на интервалах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$;

(0;5) - точка перегиба.

Пример: Найти точки перегиба графика функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

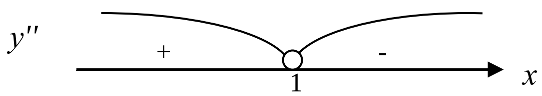
Решение: Функция определена *R*. Найдем первую и вторую производные:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}};$$

$$y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

Вторая производная нигде не обращается в ноль. Эта производная не существует при $x = 1$.

Но y'' меняет знак при переходе через точку $x = 1$:



Значит, $x=1$ - абсцисса точки перегиба. $y(1)=0$, *(1;0)* - точка перегиба.

Ответ: *(1;0)* - точка перегиба.

Определение 11. Прямая ℓ называется *асимптотой* данной кривой, если расстояние от точки M этой кривой до прямой ℓ стремится к нулю при неограниченном удалении точки M по кривой (т.е. при $OM \to \infty$, где O – некоторая фиксированная точка).

Нахождение асимптот графика функции:

График функции $y=f(x)$ может иметь вертикальные ($x=a$) и наклонные ($y=kx+b$), в частности, горизонтальные ($y=b$) асимптоты.

Для существования вертикальной асимптоты $x=a$ ($x=a$ - точка разрыва функции или граница области определения) необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$ был равен ∞.

Для существования наклонной асимптоты $y=kx+b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$.

При этом указанные пределы могут быть различными при $x\to+\infty$ (для правой асимптоты) и при $x\to-\infty$ (для левой асимптоты).

Если $k=0$, то в случае существования предела $b=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} f(x)$ наклонная асимптота превращается в горизонтальную.

Пример: Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Решение: $D(y)$: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\infty;$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\infty;$$

значит, $x=1$ и $x=-1$ - вертикальные асимптоты.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x^2-1)x}=0\ ;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0;$$

Значит, $y=0$ - наклонная асимптота (горизонтальная).

Ответ: $x=1$, $x=-1$, $y=0$.

Пример: Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

Решение: $D(y):\ (-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\infty;$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\infty;$$

значит, $x=1$ и $x=-1$ - вертикальные асимптоты.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=0;$$

значит, $y=x$ - правая наклонная асимптота .

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}})}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=0;$$

значит, $y=-x$ - левая наклонная асимптота .

Ответ: $x=1$, $x=-1$, $y=x$, $y=-x$

Пример: Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^4+x+3}{x^2+1}$.

Решение: Функция определена на R, следовательно, нет вертикальных асимптот. Ищем наклонную асимптоту.

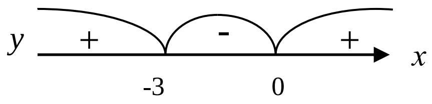
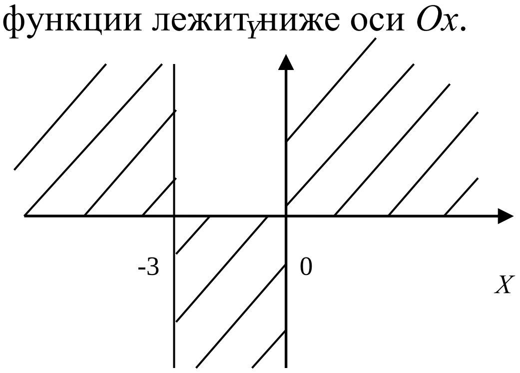
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+3}{(x^2+1)x}=\infty,$$

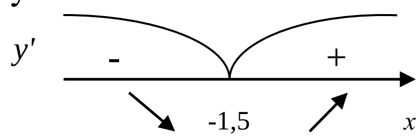
значит, наклонных асимптот нет.

Ответ: кривая $y=\dfrac{x^4+x+3}{x^2+1}$ не имеет асимптот.

План исследования функции с помощью производной и построение графика по данному исследованию

Для построения графика функции используем следующий план исследования. В левом столбце таблицы предложен общий план. В правом столбце таблицы приведен пример исследования конкретной функции $y = x^2 + 3x$.

	$y = f(x)$	$y = x^2 + 3x$
1.	Область определения функции.	$x \in R$.
2.	Свойства функции: четная или нечетная, периодическая.	$f(-x) = (-x)^2 - 3x = x^2 - 3x$ $f(-x) \neq f(x);\ f(-x) \neq -f(x)$ значит, функция общего вида.
3.	Нули функции и интервалы ее знакопостоянства.	Находим нули функции: $x^2 + 3x = 0;$ $x(x+3) = 0;$ $x = 0 \quad x = -3$ Интервалы знакопостоянства:  Следовательно, график функции при $x \in (-\infty;-3);\ x \in (0;+\infty)$ лежит выше оси Ox, а при $x \in (-3;0)$ график функции лежит ниже оси Ox. 
4.	Вертикальные асимптоты.	Точек разрыва нет, поэтому вертикальных асимптот нет
5.	Наклонные асимптоты.	$y = kx + b$ Найдем k: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x}{x} = \infty$, значит, наклонных асимптот нет.

		(Функция является многочленом, следовательно, асимптот нет)
6.	Критические точки, интервалы монотонности, точки экстремума, экстремумы	Вычислим первую производную: $f'(x) = 2x + 3$. Найдем критические точки $2x + 3 = 0.$ $x = -1{,}5.$ Определим интервалы возрастания и убывания:  Значит, $x = -1{,}5$ - точка минимума. $f(-1{,}5) = -2{,}25$ - минимум функции.
7.	Интервалы выпуклости вниз (вверх), точки перегиба	Для нахождения интервалов выпуклости вниз (вверх) исследуем знак второй производной: $f''(x) = 2 > 0$, значит, график функции выпуклый вниз на всей области определения функции, точек перегиба нет.

По результатам исследования построим график функции $y = x^2 + 3x$ (рис. 1).

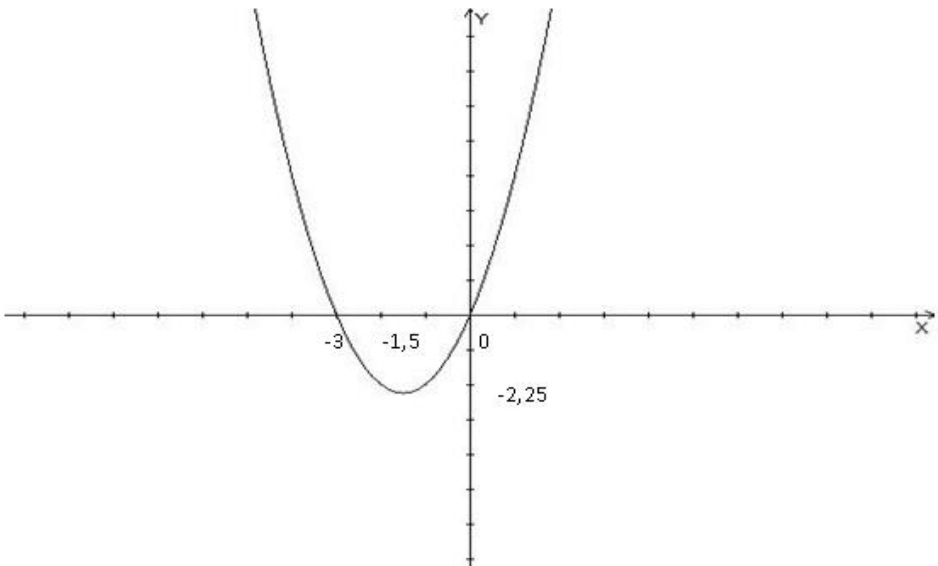


Рис. 1.

Пример решения варианта РГР "Графики"

1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+2$ и построить ее график.

1) Область определения функции: $x\in R$

2) Выясним, является ли функция четной или нечетной:

$$f(-x)=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-\frac{9}{2}x+2.$$

$$f(-x)\neq f(x);\ \ f(-x)\neq -f(x),$$

значит, функция общего вида.

3) Найдем нули функции:

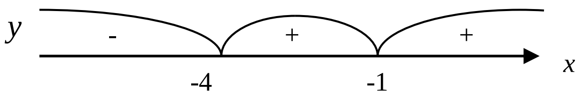
$$\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+2=0$$

Подбором находим корень $x=-1$

Разделим многочлен $\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+2$ на $x+1$, получим многочлен x^2+5x+4, который имеет корни $x=-1,\ x=-4$. Значит,

$$\frac{1}{2}x^3+3x^2+\frac{9}{2}x+2=\frac{1}{2}(x+1)^2(x+4).$$

Найдем интервалы знакопостоянства функции:



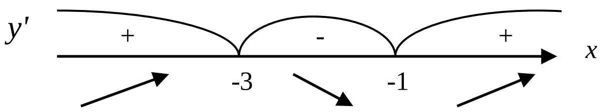
4) Вертикальных асимптот нет.

5) Наклонных асимптот нет.

6) Найдем критические точки:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2+6x+\frac{9}{2}=0.$$

$$x=-1;\ \ x=-3$$



Следовательно, функция возрастает при $x\in(-\infty;-3);\ x\in(-1;+\infty)$ и убывает при $x\in(-3;-1)$.

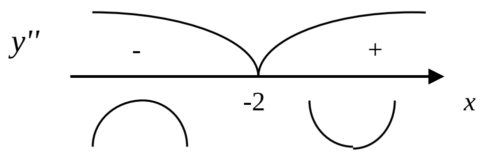
$x=-3$ - точка максимума, $f(-3)=2$ максимум функции.

$x=-1$ - точка минимума, $f(-1)=0$ минимум функции.

7) Найдем интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции:

$$f''(x)=3x+6=0.$$

$$x=-2$$



Значит, график выпуклый вверх при $x \in (-\infty;-2)$ и выпуклый вниз при $x \in (-2;+\infty)$.

Так как при переходе через точку $x = -2$ вторая производная меняет знак и $f(-2) = 1$, то точка с координатами (-2,1) - точка перегиба.

Построим график функции (рис. 2).

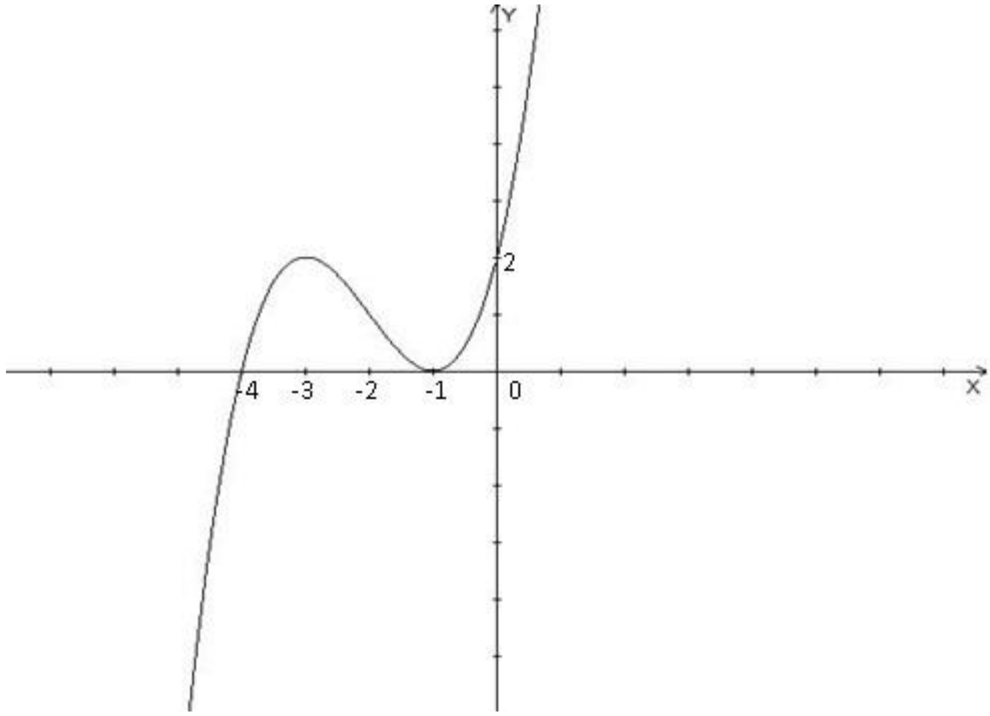


Рис. 2.

2. Исследовать функцию $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-3}$ и построить ее график.

1) Область определения функции: $x \in (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$

2) Выясним, является ли функция четной или нечетной:

$$f(-x) = \frac{(-x-1)^2}{-x-3};$$

$$f(-x) \neq f(x); \;\; f(-x) \neq -f(x),$$

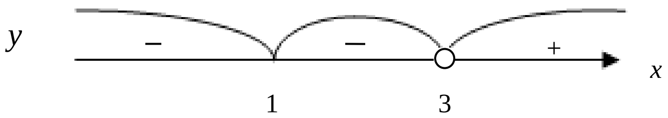
значит, функция общего вида.

3) Найдем нули функции:

$$\frac{(x-1)^2}{x-3}=0\ ;$$

$$x=1$$

Найдем интервалы знакопостоянства функции:



4) Найдем вертикальные асимптоты.

Так как $x=3$ точка разрыва, найдем

$$\lim_{x\to 3\pm 0} f(x)=\lim_{x\to 3\pm 0}\frac{(x-1)^2}{x-3}=\pm\infty\,,$$

значит, $x=3$ - вертикальная асимптота.

5) Найдем наклонные асимптоты:

Общий вид уравнения асимптоты $y=kx+b$

Найдем k:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^2}{(x-3)x}=1\,,$$

найдем b:

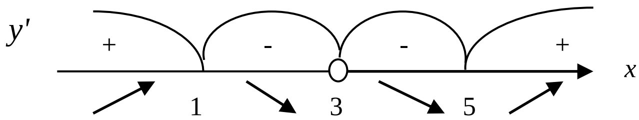
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2+3x}{x-3}=1.$$

значит, $y=x+1$ - наклонная асимптота.

6) Найдем критические точки:

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x-3)-(x-1)^2}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}=0;$$

$x=1$; $x=5$



Следовательно, функция возрастает при $x\in(-\infty;1)$; $x\in(5;+\infty)$ и убывает при $x\in(1;3)$; $x\in(3;5)$.

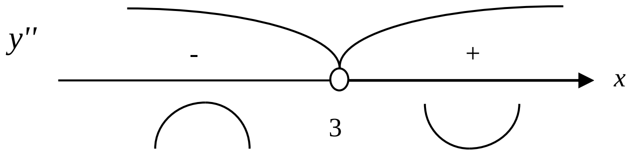
$x=1$ - точка максимума, $f(1)=0$ - максимум функции.

$x=5$ - точка минимума, $f(5)=8$ - минимум функции.

7) Найдем интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции:

$$f''(x)=\frac{(2x-6)(x-3)^2-2(x-3)(x^2-6x+5)}{(x-3)^4}=\frac{8}{(x-3)^3}\neq 0\,,$$

значит, точек перегиба нет.



Из этого следует, что график выпуклый вверх при $x \in (-\infty;3)$ и выпуклый вниз при $x \in (3;+\infty)$.

Построим график функции (рис. 3).

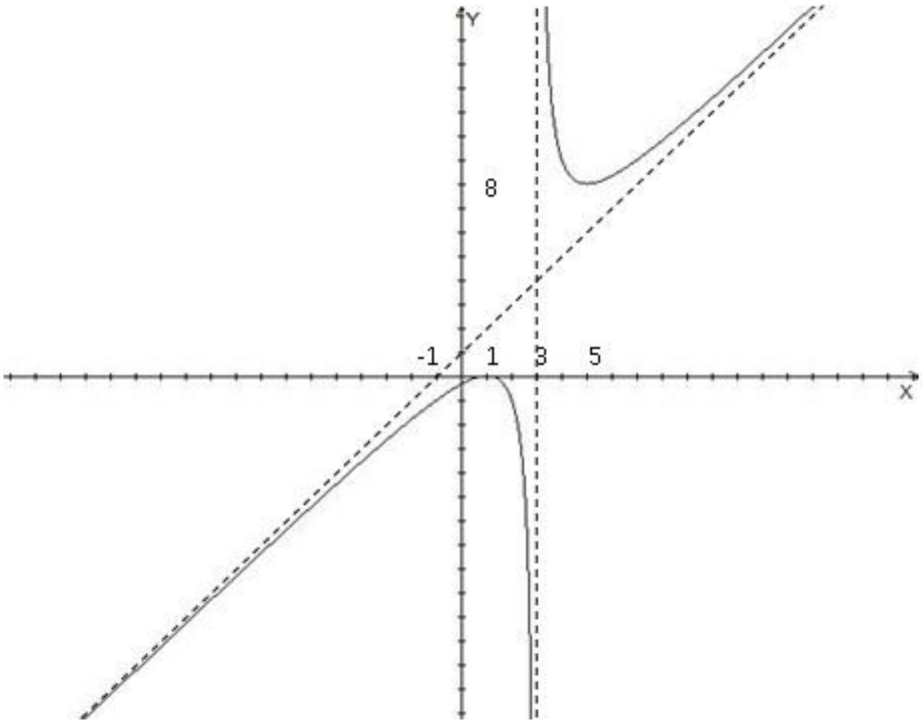


Рис. 3.

3. Исследовать функцию $y = 2(x-3)^2 e^{x-2}$ и построить ее график.

1) Область определения функции: $x \in R$.
2) Установим, является ли функция четной или нечетной:

$$f(-x) = 2(-x-3)^2 e^{-x-2} = 2(x+3)^2 e^{-(x+2)};$$

$$f(-x) \neq f(x); \;\; f(-x) \neq -f(x),$$

значит, функция общего вида.

3) Найдем нули функции:

$$2(x-3)^2 e^{x-2} = 0;$$
$$x = 3$$

Заметим, что данная функция всегда больше либо равна нулю, т. е., график функции лежит в верхней полуплоскости.

4) Вертикальных асимптот нет.

5) Выясним, имеет ли график функции наклонные асимптоты при $x \to +\infty$и при $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x-3)^2 e^{x-2}}{x} = \infty,$$

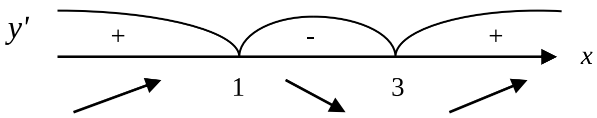
следовательно, при $x \to +\infty$наклонных асимптот нет.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x-3)^2 e^{x-2}}{x} = 0;$$
$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \left(2(x-3)^2 e^{x-2}\right) = 0,$$

значит, при $x \to -\infty$ наклонная асимптота $y = 0$ (горизонтальная).

6) Найдем критические точки:

$$f'(x) = 4(x-3)e^{x-2} + 2(x-3)^2 e^{x-2} = 2(x-3)(x-1)e^{x-2} = 0;$$
$$x = 1;\ x = 3.$$



Отсюда следует, что функция возрастает при $x \in (-\infty;1)$; $x \in (3;+\infty)$ и убывает при $x \in (1;3)$.

$x = 1$ - точка максимума, $f(1) = \frac{8}{e} \approx 3$ - максимум функции

$x = 3$ - точка минимума, $f(3) = 0$ - минимум функции

7) Найдем интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции:

$$f''(x) = \left(2(x^2 - 4x + 3)e^{x-2}\right)' = 2(2x-4)e^{x-2} + 2(x^2 - 4x + 3)e^{x-2} = 4e^{x-2}(x^2 - 3x + 1) = 0;$$

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}6; \quad x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}4$$

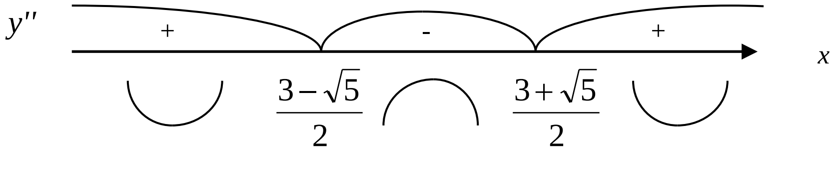


График выпуклый вверх при $x \in (\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ и выпуклый вниз при $x \in (-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2})$; $x \in (\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$.

Значит, точки с координатами $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; f(\frac{3-\sqrt{5}}{2})\right)$ и $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; f(\frac{3+\sqrt{5}}{2})\right)$ являются точками перегиба.

$$f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) \approx 2{,}7;$$
$$f(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) \approx 0{,}6$$

Найдем точку пересечения с осью *Oy*:

$$f(0) = \frac{18}{e^2} \approx 2{,}5$$

Построим график функции (рис. 4).

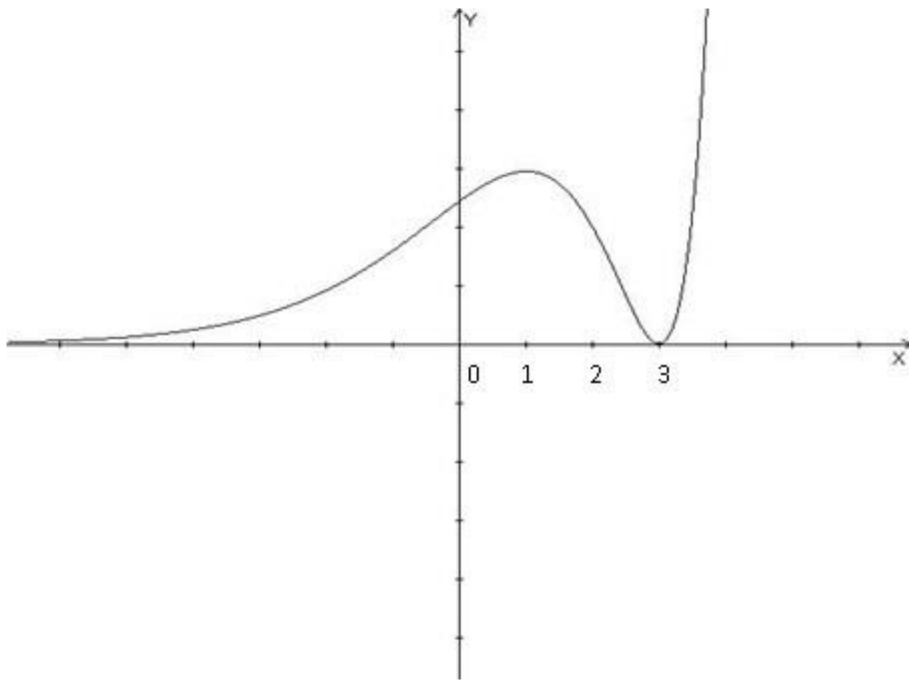


Рис. 4.

4. Груз весом G, лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой $F = \dfrac{\mu G}{\cos\theta + \mu \sin\theta}$, где μ - коэффициент трения. Под каким углом к горизонту θ надлежит приложить эту силу, чтобы ее величина F была наименьшей?

Решение: Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $F(\theta) = \dfrac{\mu G}{\cos\theta + \mu \sin\theta}$ на отрезке $[0;\dfrac{\pi}{2}]$.

$$F\,'(\theta) = -\frac{\mu G(-\sin\theta + \mu\cos\theta)}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2};$$

$$F\,'(\theta) = 0,$$

$$\mu\cos\theta - \sin\theta = 0;$$

$$tg\theta = \mu;$$

$$\theta = arctg\mu.$$

$$F\,''(\theta) = -\mu G \cdot$$

$$\cdot\frac{(-\cos\theta - \mu\sin\theta)(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2 - (-\sin\theta + \mu\cos\theta)\cdot 2(\cos\theta + \mu\sin\theta)(-\sin\theta + \mu\cos\theta)}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^4} =$$

$$= \mu G\frac{(\cos\theta + \mu\sin\theta)(1+\mu^2)}{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^4} > 0;$$

значит, по второму достаточному условию экстремума, $\theta = arctg\mu$ - точка минимума. Значит, приложение силы под углом $\theta = arctg\mu$ наиболее выгодно.

Ответ: $\theta = arctg\mu$.

5. Найти наименьшее значение функции $y = \dfrac{-4x^2 - 6x}{x^2 + 4x + 5}$ на отрезке [-2;1].

Решение: Функция определена и непрерывна на данном отрезке.. Найдем первую производную:

$$y' = \frac{(-8x-6)(x^2+4x+5) - (2x+4)(-4x^2-6x)}{(x^2+4x+5)^2} = -\frac{10x^2+40x+30}{(x^2+4x+5)^2}.$$

Найдем критические точки:

$$y' = 0; \quad -\frac{10x^2+40x+30}{(x^2+4x+5)^2} = 0; \quad 10x^2+40x+30 = 0; \quad x_1 = -3; \quad x_2 = -1.$$

Заданному отрезку принадлежит $x = -1$.

Вычислим значения функции в найденной точке и на концах отрезка:

$$y(-2) = 4; \quad y(-1) = 1; \quad y(1) = -5.$$

Сравнивая полученные значения, видим, что наименьшее значение $y_{наим.} = y(1) = -5$.

Ответ: $y_{наим.} = y(1) = -5$

6[2]. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{27-x^3}$ и построить ее график.

1) Область определения функции: $x \in R$.

2) Выясним, является ли функция четной или нечетной:

$$f(-x)=\sqrt[3]{27+x^3}$$

$$f(-x)\neq f(x);\ \ f(-x)\neq -f(x),$$

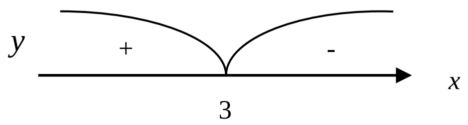
значит, функция общего вида.

3) Найдем нули функции:

$$\sqrt[3]{27-x^3}=0;$$

$$x=3.$$

Найдем интервалы знакопостоянства функции:



4) Вертикальных асимптот нет

5) Найдем наклонные асимптоты:

Общий вид уравнения асимптоты $y=kx+b$

Найдем *k*:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27-x^3}}{x}=-1,$$

найдем *b*:

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{27-x^3}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{27-x^3}+x)(\sqrt[3]{(27-x^3)^2}-x\sqrt[3]{27-x^3}+x^2)}{(\sqrt[3]{(27-x^3)^2}-x\sqrt[3]{27-x^3}+x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{27-x^3+x^3}{(\sqrt[3]{(27-x^3)^2}-x\sqrt[3]{27-x^3}+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{27}{(\sqrt[3]{(27-x^3)^2}-x\sqrt[3]{27-x^3}+x^2)}=0,$$

значит, $y=-x$ - наклонная асимптота.

6) Найдем интервалы возрастания и убывания функции:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(27-x^3)^{-\frac{2}{3}}(-3x^2)=\frac{-x^2}{\sqrt[3]{(27-x^3)^2}}\leq 0,$$

значит, функция убывает на всей области определения. Экстремумов нет.

7) Найдем интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции:

[2] Решение других задач типа 6 и 7 будет представлено в следующем разделе.

$$f''(x) = -2x(27-x^3)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}(27-x^3)^{-\frac{5}{3}}(-3x^2)(-x^2) = -2x(27-x^3)^{-\frac{2}{3}} - 2x^4(27-x^3)^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= -2x(27-x^3)^{-\frac{5}{3}}(27-x^3+x^3) = \frac{-54x}{(27-x^3)^{\frac{5}{3}}} = 0;$$

$x = 0;$

$x = 3$ нанесем на ось, т. к. в ней функция определена.

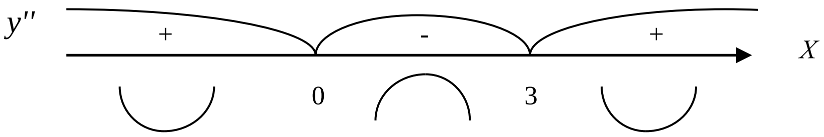


График выпуклый вверх при $x \in (0;3)$ и выпуклый вниз при $x \in (-\infty;0);\ x \in (3;+\infty)$.

$f(0) = 3;\quad f(3) = 0$, значит, точки с координатами (0,3) и (3;0) - точки перегиба.

Построим график функции (рис. 5).

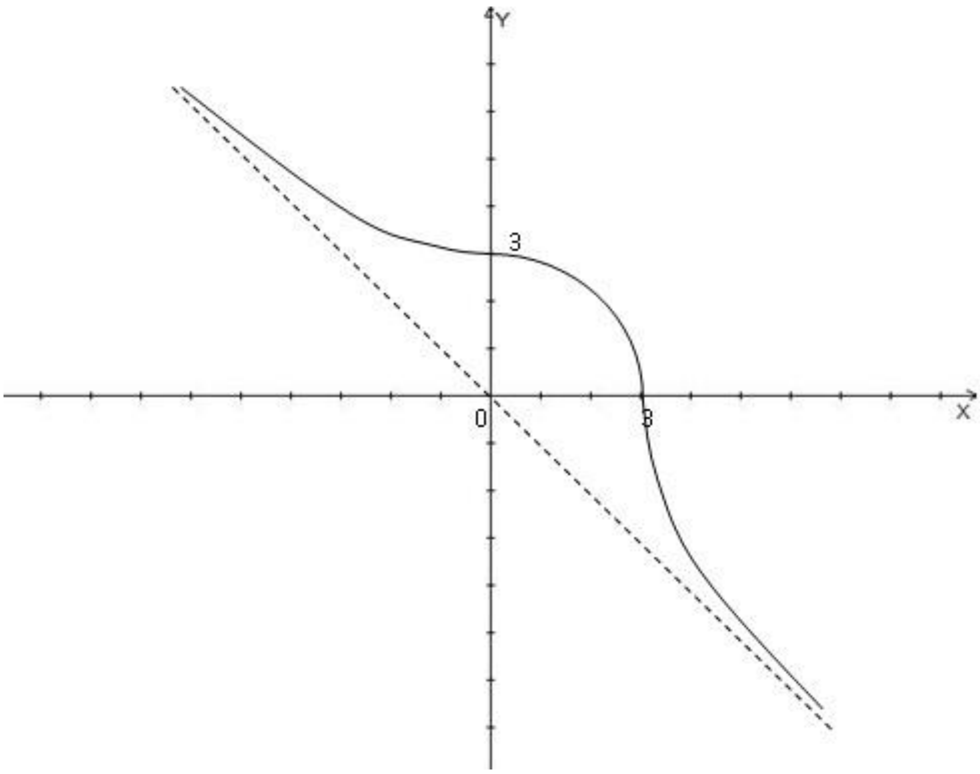


Рис. 5.

7. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции (рис. 6). При каком наклоне φ боков "мокрый периметр" сечения будет наименьшим, если площадь "живого сечения" воды в канале равна *S*, а уровень воды равен *h*?

Решение:

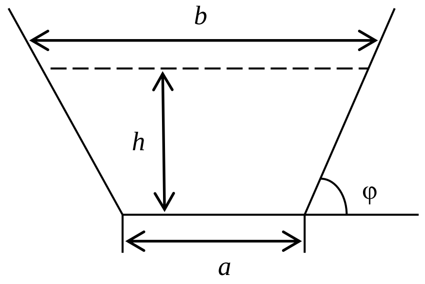


Рис. 6.

"Мокрый периметр" Р определяется по формуле

$$P = a + \frac{2h}{\sin\varphi}.$$

Площадь "живого сечения" воды:

$$S = h(a + h\,ctg\varphi).$$

Выразим из этой формулы *a*:

$$a = \frac{S - h^2 ctg\varphi}{h} = \frac{S}{h} - h\,ctg\varphi.$$

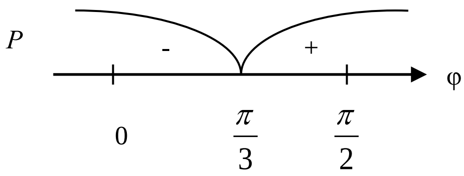
Тогда

$$P(\varphi) = \frac{S}{h} - h\,ctg\varphi + \frac{2h}{\sin\varphi};$$

φ - независимый аргумент; $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2}]$.

$$P'(\varphi) = \frac{h}{\sin^2\varphi} - \frac{2h\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{h}{\sin^2\varphi}(1 - 2\cos\varphi);$$

$$P'(\varphi) = 0; \quad 1 - 2\cos\varphi = 0; \quad \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$



Значит, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ - точка минимума.

Следовательно, при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ "мокрый периметр" будет наименьшим.

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Примеры решения задач повышенной сложности

В данном разделе представлено решение задач типа 6 и 7 из РГР "Графики".

1. Дано бревно с круглым сечением диаметра d (рис. 7). Требуется обтесать его так, чтобы получилась балка с прямоугольным сечением наибольшей прочности.
Решение:

Прочность прямоугольной балки пропорциональна произведению bh^2, где b - основание прямоугольника в сечении балки, а h - его высота.

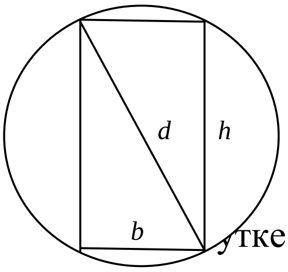


Рис. 7.

$$h^2 = d^2 - b^2.$$

Пусть y - прочность произвольной балки, тогда

$$y = kbh^2 = kb(d^2 - b^2),$$

где k - коэффициент пропорциональности, $k > 0$.
Получили функцию $y = f(b)$, где b - независимая переменная, меняется в промежутке $(0;d)$.

$$y' = k((d^2 - b^2) - 2b^2) = k(d^2 - 3b^2);$$

$$y' = 0;\quad b = \pm\frac{d}{\sqrt{3}};\quad -\frac{d}{\sqrt{3}} \notin (0;d).$$

$$y'' = -6kb;\quad y''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) < 0.$$

Значит, в точке $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ достигается максимум, а с ним и наибольшее значение. При $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, так что $d : h = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$ или $h : b = \sqrt{2} : 1$.
Ответ: $h : b = \sqrt{2} : 1$.

2. Электрическая лампочка передвигается на блоке по вертикальной прямой OB (рис. 8). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости OA ее следует поместить, чтобы в точке A этой плоскости получить наибольшую освещенность?
Решение:
Освещенность J пропорциональна $\sin\varphi$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния r, т. е.

$$J = c\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

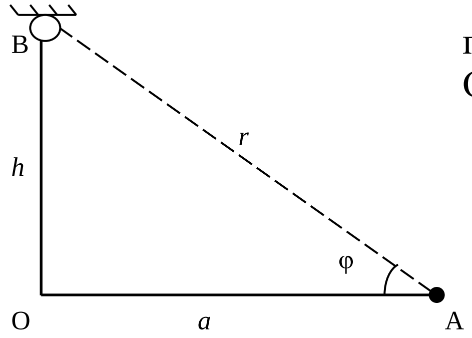


Рис. 8

где c зависит от силы лампочки.
Обозначим $OB=h,\ OA=a$.

$$\sin\varphi = \frac{h}{r};\quad r = \sqrt{h^2+a^2};$$

$$J = c\frac{h/r}{r^2} = c\frac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = J(h),\ \text{где}\ 0<h<\infty.$$

$$J'(h) = c\frac{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}} - h\cdot\frac{3}{2}(h^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2h}{(h^2+a^2)^3} = c\frac{(h^2+a^2)^{\frac{1}{2}}(h^2+a^2-3h^2)}{(h^2+a^2)^3} = c\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$J'=0;\quad h=\pm\frac{a}{\sqrt{2}};\quad -\frac{a}{\sqrt{2}}\notin(0;+\infty).$$

При переходе через точку $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$ - точка максимума функции *J(h)*. Следовательно, $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$ есть наивыгоднейшее расстояние.

Ответ: $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

3. Исследовать функцию $y=\frac{\pi}{6}-arctg\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}$ и построить ее график.

1) Область определения функции: $x\in R$.
2) Выясним, является ли функция четной или нечетной:

$$f(-x)=\frac{\pi}{6}-arctg\frac{(-x+1)^2}{\sqrt{3}}$$

$$f(-x)\neq f(x);\ \ f(-x)\neq -f(x),$$

значит, функция общего вида.
3) Найдем нули функции:

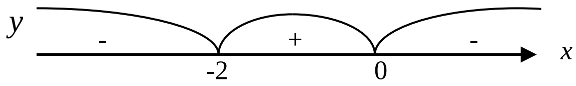
$$\frac{\pi}{6}-arctg\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}=0;$$

$$\frac{\pi}{6}=arctg\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}=tg\,\frac{\pi}{6};\quad \frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$x_1=0;\quad x_2=-2.$$

Найдем интервалы знакопостоянства функции:



4) Вертикальных асимптот нет.

5) Найдем наклонные асимптоты:

Общий вид уравнения асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi/6}{x} - \frac{arctg\,\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}}{x} \right) = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{\pi}{6} - arctg\,\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3};$$

значит, $y = -\frac{\pi}{3}$ - правая наклонная асимптота .

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\pi/6}{x} - \frac{arctg\,\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}}{x} \right) = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}(\frac{\pi}{6} - arctg\,\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3};$$

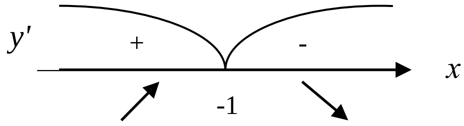
значит, $y = -\frac{\pi}{3}$ - левая наклонная асимптота .

Значит, $y = -\frac{\pi}{3}$ - горизонтальная асимптота.

6) Найдем интервалы возрастания и убывания функции:

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \frac{(x+1)^4}{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}(x+1) = -\frac{6(x+1)}{\sqrt{3}(3 + (x+1)^4)};$$

$$f'(x) = 0; \quad x = -1.$$



Следовательно, функция возрастает при $x \in (-\infty; -1)$ и убывает при $x \in (-1; +\infty)$.

$x = -1$ - точка максимума, $f(-1) = \frac{\pi}{6}$ - максимум функции

7) Найдем интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции:

$$f''(x) = -\frac{6\left(3+(x+1)^4-(x+1)\cdot 4(x+1)^3\right)}{\sqrt{3}(3+(x+1)^4)^2} = \frac{18\left((x+1)^4-1\right)}{\sqrt{3}(3+(x+1)^4)^2} = 0;$$

$$(x+1)^4 - 1 = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -2.$$

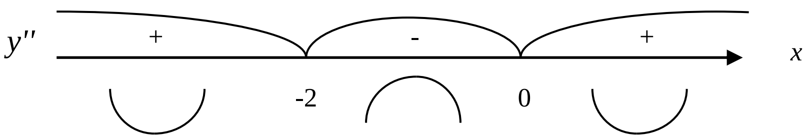


График выпуклый вверх при $x \in (-2;0)$ и выпуклый вниз при $x \in (-\infty;-2); \; x \in (0;+\infty)$.

$f(-2) = 0; \; f(0) = 0$, значит, точки с координатами (0,0) и (-2;0) - точки перегиба.

Построим график функции (рис. 9).

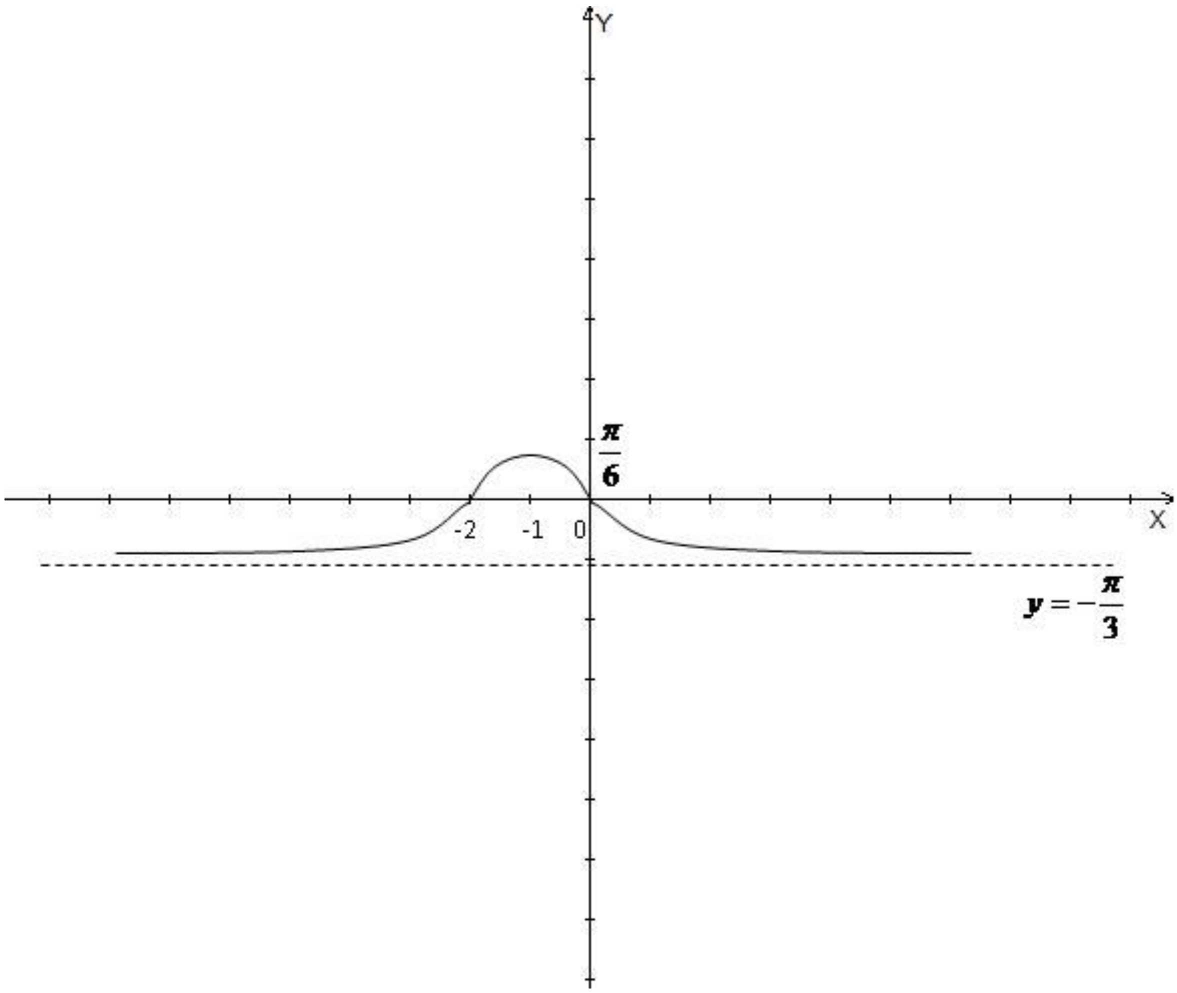


Рис. 9.

4. Исследовать функцию $y=\ln\dfrac{x+1}{x+2}$ и построить ее график.

1) Область определения функции:

$$\frac{x+1}{x+2}>0;\ D(y):\ x\in(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty).$$

2) Функция общего вида.

3) Найдем нули функции:

$$\ln\frac{x+1}{x+2}=0;\ \frac{x+1}{x+2}=1;\ \frac{-1}{x+2}=0$$

нет решений, значит, нулей функции нет.

С учетом области допустимых значений видим, что при $x\in(-\infty;-2)$ график лежит выше оси Ох и при $x\in(-1;+\infty)$ график лежит ниже оси Ох.

4) Найдем вертикальные асимптоты, для этого вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to-2-0}\ln\frac{x+1}{x+2}=\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\ln\frac{x+1}{x+2}=-\infty.$$

Значит, $x=-1$ и $x=-2$ - вертикальные асимптоты.

5) Найдем наклонные асимптоты (при вычислении k воспользуемся правилом Лопиталя):

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln((x+1)/(x+2))}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}=0;$$

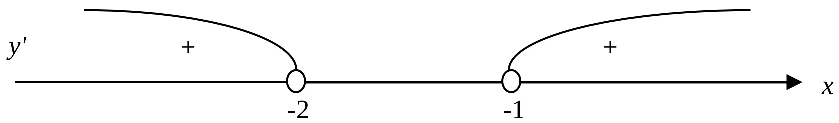
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\ln\frac{x+1}{x+2})=\lim_{x\to\infty}(\ln\frac{1+1/x}{1+2/x})=0.$$

Следовательно, $y=0$ - наклонная асимптота.

6) Найдем интервалы возрастания и убывания функции:

$$f'(x)=\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)};$$

$$f'(x)\neq0;$$



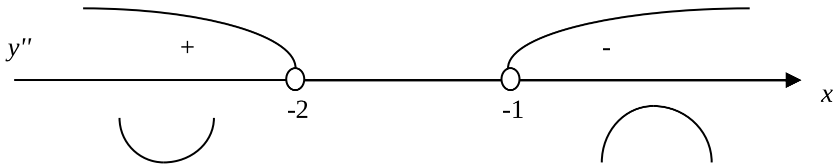
Таким образом, функция возрастает на всей области определения.

7) Найдем интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции:

$$f''(x)=-\frac{x+1+x+2}{(x+1)^2(x+2)^2}=-\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}=0;$$

$$x=-\frac{3}{2};$$

$x = -\frac{3}{2}$ не входит в область допустимых значений.



Значит, график функции выпуклый вниз при $x \in (-\infty; -2)$, и выпуклый вверх при $x \in (-1; +\infty)$.

Построим график функции (рис. 10).

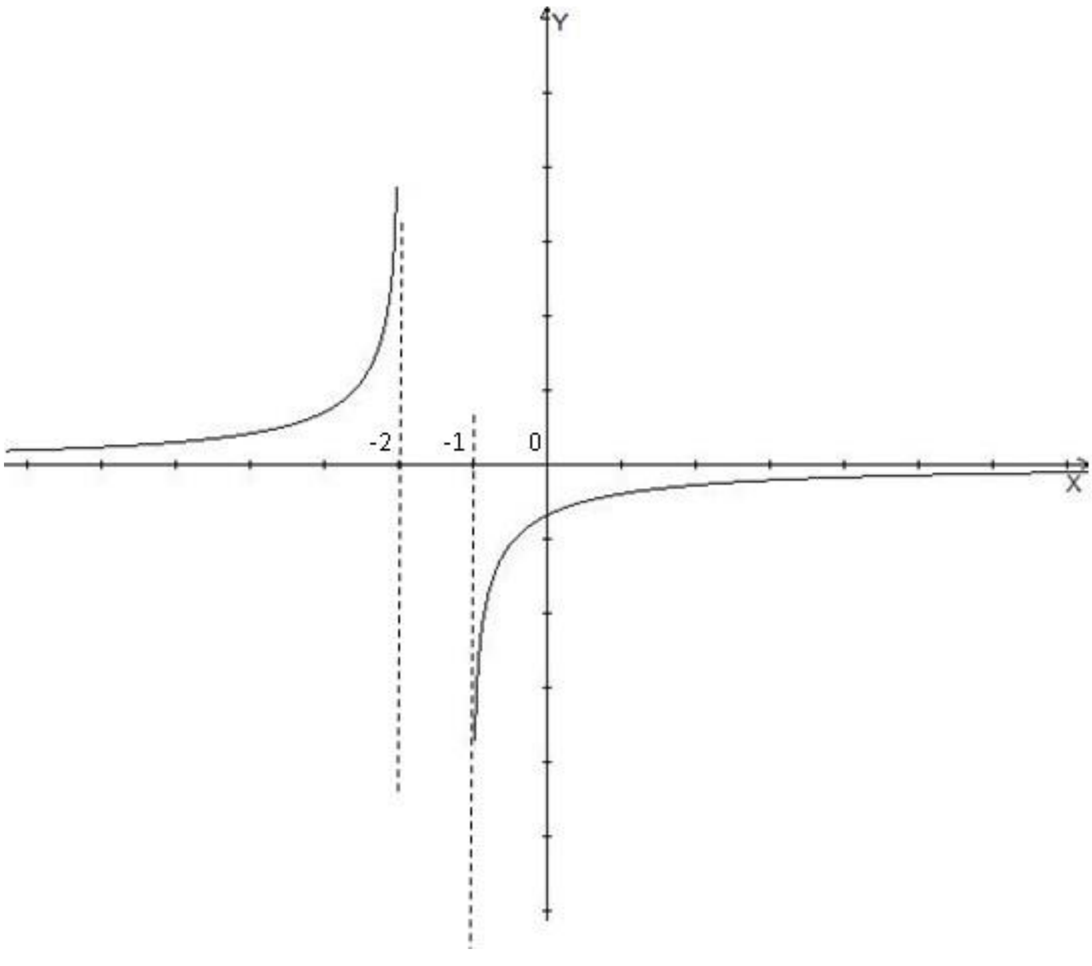


Рис. 10.

Приложение. Варианты РГР "Графики"

<table>
<tr>
<td>

Вариант 1

1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{4}(x-3)(x^2+3x+6)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{(2x+1)(x-1)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\ln(x^2+1)$ и построить её график.
4. Расход электропроводника на километр $W=Ar+\frac{B}{r}$, где r – сопротивление в омах, A и B – постоянные. При каком сопротивлении проводник будет наиболее экономным?
5. Найти наибольшее значение функции $y=(x-3)\sqrt{x^2-2}$ на отрезке $[\sqrt{2},4]$.
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{1+x^3}$ и построить её график.
7. Расстояние между городами *A* и *B* равно 160 км. Из них одновременно выезжают два автобуса с одинаковой скоростью 80 км/ч. Первый идет из *A* в *B*, а второй – по направлению, составляющему с направлением движения первого угол 60°. Через какое время расстояние между автобусами будет наименьшим?

</td>
<td>

Вариант 2

1. Исследовать функцию $y=(2-x)(x^2-x-2)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{(x-3)^2}{x-2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\sqrt{x}(\ln x-2)$ и построить её график.
4. При подъеме тяжести x человеком на максимально возможную для него высоту мускулы совершают работу $A=bx(1-\frac{x}{a})$, где a и b – положительные постоянные. При какой тяжести x работа будет наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y=x^3+3x^2-9x+2$ на отрезке [–4, 2].
6. Исследовать функцию $y=\frac{2x^3+2x^2-3x-1}{2-4x^2}$ и построить её график.
7. Из трех одинаковых досок изготавливается желоб с равнонаклоненными (под углом α) к плоскости дна боками. При каком значении α его объем будет наибольшим?

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Вариант 3

1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{8}x^2(x+6)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=(x-1)\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=(x+1)\mathrm{e}^{1-x}$ и построить её график.
4. Газовая смесь состоит из окиси азота и кислорода. Найти концентрацию кислорода, при которой окись азота, содержащаяся в смеси, окисляется с максимальной скоростью. Скорость реакции выражается формулой $V=k(100x^2-x^3)$, где x – концентрация окиси азота (в объемных процентах).
5. Найти наибольшее значение функции $y=\frac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$ на отрезке [–5, 1].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}$ и построить её график.
7. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью в 294 м^2 и разделить затем этот участок забором на две равные прямоугольные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

</td>
<td>

Вариант 4

1. Исследовать функцию $y=9x-6x^2+x^3$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\ln^2 x$ и построить её график.
4. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости V км/ч на булыжной мостовой выражается формулой $f=29-\frac{2}{3}V+\frac{1}{15}V^2$. Определить скорость V, при которой сопротивление будет наименьшим.
5. Найти наименьшее значение функции $y=\mathrm{e}^{2x}(4x^2-12x+9)$ на отрезке [1, 2].
6. Исследовать функцию $y=\frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$ и построить её график.
7. Угол наклона φ наклонной плоскости может меняться от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Найти наименьшую силу, которая удержит груз на этой плоскости при любом φ. Коэффициент трения груза о плоскость равен μ. Масса груза равна m.

</td>
</tr>
</table>

Вариант 5

1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{8}(x-8)(x-2)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{1+x^2-2x^3}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$ и построить её график.
4. В коническом сосуде, заполненном водой, напряжение p, стремящееся разорвать его по образующей, выражается формулой $p=ay(h-y)$, где h – высота сосуда, y – расстояние до уровня жидкости, a – постоянная. На какой глубине y это напряжение будет наибольшим?
5. Найти наименьшее значение функции $y=(x-6)\sqrt{2x^2-16}$ на отрезке [3, 6].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{2x^3-3x^2}$ и построить её график.
7. Каким должно быть сопротивление r электронагревательного прибора, включенного в цепь тока сопротивлением R, чтобы в нем выделилось максимальное количество тепла?

Вариант 6

1. Исследовать функцию $y=(x+1)(x^2+5x+4)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\ln(x+1)+x$ и построить её график.
4. Объем газов, удаляемых из топки котла в дымовую трубу благодаря тяге, может быть выражен формулой $V=a\sqrt{\frac{T_0}{T}-\frac{T_0^2}{T^2}}$, где T – средняя температура газов в трубе, T_0 – (абсолютная) температура воздуха вне трубы, a – постоянная. При каком значении T тяга будет наиболее выгодной?
5. Найти наименьшее значение функции $y=-2x^3-9x^2+24x+12$ на отрезке[0, 2].
6. Исследовать функцию $y=\frac{4x^3-3x}{4x^2-1}$ и построить её график.
7. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R, вырезать такой сектор, из которого получается коническая воронка наибольшего объема.

Вариант 7

1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{8}(x-4)(x^2-2x-8)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\frac{1}{1+e^x}$ и построить её график.
4. В коническом сосуде, заполненном водой, напряжение q, стремящееся разорвать его по кругу, параллельному основанию, выражается формулой $q=b(h-y)(h+2y)$, где h – высота сосуда, y – расстояние до уровня жидкости, b – постоянная. На какой глубине y это напряжение будет наибольшим?
5. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{3}{2x+3}-\frac{3}{2x-1}+1$ на отрезке [–1, 0].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$ и построить её график.
7. В точках A и B находятся источники света, один из которых в 8 раз сильнее другого. Найти отношение, в котором отрезок AB делится наименее освещенной его точкой.

Вариант 8

1. Исследовать функцию $y=(x-1)(x+2)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{2x^2+4x+4}{x+1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\ln(x-1)+\ln(x+1)$ и построить её график.
4. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости V км/ч на плохом шоссе выражается формулой $f=28-0,25V+0,02V^2$. Определить скорость V, при которой сопротивление будет наименьшим.
5. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$ на отрезке [–2, 5].
6. Исследовать функцию $y=\frac{8+4x-x^2}{x^2-4x+16}$ и построить её график.
7. С высоты H над уровнем пола маленький металлический шарик скатывается по гладкому криволинейному желобу. На высоте h желоб обрывается и шарик в дальнейшем совершает свободное падение. В момент отрыва скорость шарика горизонтальна. При каком значении h дальность полета шарика будет наибольшей? Найти её.

Вариант 9

1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{8}(x+2)(8x-x^2-16)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{x^3+x^2+4}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\frac{\mathrm{e}^{x-1}}{x}$ и построить её график.
4. Токопроводящий кабель состоит из медного провода с изоляцией. Если через x обозначить отношение радиуса медного провода к толщине изоляции, то скорость телеграфирования $V=Ax\ln\frac{1}{x}$. При каком значении x скорость будет наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y=-x^3+3x^2+9x+2$ на отрезке [0, 4].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$ и построить её график.
7. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Периметр окна равен p. Какой должна быть ширина окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

Вариант 10

1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{4}(x-6)(x^2-3x+6)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{(x-2)^2}{x-1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=x(\ln x-1)$ и построить её график.
4. КПД электродвигателя вычисляется по формуле $\eta=\frac{UI-I^2R-a}{UI}$, где R (Ом) – внутреннее сопротивление, U (В) – напряжение и a (Вт) – потери холостого хода (при напряжении U). При какой величине тока I КПД будет наибольшим?
5. Найти наибольшее значение функции $y=\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x+5}$ на отрезке [–4, –2].
6. Исследовать функцию $y=\frac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$ и построить её график.
7. Бревно длиной в 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна соосную с ним балку с квадратным поперечным сечением, объем которой был бы наибольшим. Какие размеры будет иметь такая балка?

Вариант 11

1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{8}(x^3-12x^2+36x)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{2x^3+x^2+1}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=(1-x)\mathrm{e}^x$ и построить её график.
4. Измерения, произведенные в различных местах реки, покрытой льдом, показали, что скорость воды для разной глубины x реки изменяется по закону $V=bM\ln x+a+kM\ln(t-x)$. На какой глубине скорость течения наибольшая?
5. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{2(x^2-5x+1)}{x^2+1}$ на отрезке [0, 3].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{(x^2+4x)^2}$ и построить её график.
7. Прямоугольное кирпичное помещение должно иметь полезную площадь 80 м^2, толщину одной из стен 60 см, а остальных трех стен – по 40 см. Каковы должны быть наружные размеры этого помещения, чтобы общая занимаемая им площадь была наименьшей?

Вариант 12

1. Исследовать функцию $y=(x+2)(x-1)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\frac{x^2+x+1}{x+1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=x-\ln(x+1)$ и построить её график.
4. Если из круглого бревна диаметром d вырезать балку с прямоугольным сечением, основание которого равно x, опереть её на концах и равномерно нагрузить, то её стрела прогиба будет равна $f=\frac{k}{x\left(d^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Найти значение x, при котором балка обладает наибольшей жесткостью (стрела прогиба f наименьшая).
5. Найти наибольшее значение функции $y=\mathrm{e}^{-x}(x^2+6x+9)$ на отрезке [–2, 0].
6. Исследовать функцию $y=\frac{x^2+2x-35}{x^2+2x+13}$ и построить её график.
7. Каково соотношение между высотой и диаметром основания цилиндрической консервной банки заданного объема V, на изготовление которой затрачено наименьшее количество жести?

Вариант 13

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x+2)^2(x+8)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = (x-2)\left(\frac{x+4}{x}\right)^2$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^x}{1-e^x}$ и построить её график.
4. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости V км/ч на хорошем шоссе выражается формулой $f = 24 - \frac{2}{3}V + \frac{1}{30}V^2$. Определить скорость V, при которой сопротивление будет наименьшим.
5. Найти наибольшее значение функции $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 12$ на отрезке [–2, 5].
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x(x+1)^2}$ и построить её график.
7. Требуется вырезать из круглого бревна диаметром d балку прямоугольного сечения наибольшей прочности. Предполагается, что балка будет оперта на концах и равномерно нагружена, а тогда предельная нагрузка, которую она выдерживает, пропорциональна ah^2 (a – основание, h – высота балки)

Вариант 14

1. Исследовать функцию $y = x^3 + 3x^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{1}{(x-1)e^x}$ и построить её график.
4. Сила натяжения каната, удерживающего груз на наклонной плоскости, равна $F = mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$, где α – угол наклона плоскости, m – масса груза, μ – коэффициент трения. При каком значении α $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ сила натяжения будет наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-3} + 2$ на отрезке [0, 2].
6. Исследовать функцию $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2}$ и построить её график.
7. Торшер стоит в углу комнаты размерами 4×3 (метров). Какой высоты должен быть торшер, чтобы освещенность центра пола комнаты была наибольшей?

Вариант 15

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x^3 + 6x^2) - 4$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(1-x)(x+2)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = x + \ln x - 1$ и построить её график.
4. Зависимость управленческих расходов R на предприятии от продукции P выражается формулой $R = aP + \frac{b}{c+P} + d$, где a, b, c, d – положительные постоянные. При каком значении P расходы R достигают минимума?
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ на отрезке [–2, 1].
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ и построить её график.
7. Сумма высоты и длины окружности основания цилиндрической почтовой посылки не должна превышать 150 см. Найти размеры наибольшей по объему цилиндрической посылки, которую можно послать почтой.

Вариант 16

1. Исследовать функцию $y = (x-4)(x-1)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2x^2 - 4x + 4}{x-1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(x+1) - \ln(2x)$ и построить её график.
4. Сопротивление f дороги движению автомобиля при скорости V км/ч на мягкой грунтовой дороге выражается формулой $f = 36{,}5 - \frac{3}{4}V + \frac{1}{30}V^2$. Определить скорость V, при которой сопротивление будет наименьшим.
5. Найти наибольшее значение функции $y = (9-x)\sqrt{2x^2 - 36}$ на отрезке $[3\sqrt{2}, 8]$.
6. Исследовать функцию $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ и построить её график.
7. Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии 1 мили. Корабль A идет на юг, делая 6 миль в час, и в настоящее время находится в 5 милях к западу от корабля B, который идет на запад со скоростью 8 миль в час. Будут ли корабли на расстоянии, достаточном для приема сигнала?

Вариант 17 1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{8}(6x-x^2)(x-6)$ и построить её график. 2. Исследовать функцию $y=\frac{4+x^2-x^3}{x^2}$ и построить её график. 3. Исследовать функцию $y=x\ln x$ и построить её график. 4. Мощность P, отдаваемая электрическим элементом, определяется формулой $P=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$, где E – постоянная электродвижущая сила элемента, r – постоянное внутреннее сопротивление, R – внешнее сопротивление. Каким должно быть внешнее сопротивление R чтобы мощность P была наибольшей? 5. Найти наименьшее значение функции $y=\mathrm{e}^x(x^2-6x+9)$ на отрезке [0, 2]. 6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ и построить её график. 7. Картина повешена на стене. Нижний её конец на b см, а верхний – на a см выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?	*Вариант 18* 1. Исследовать функцию $y=(x-2)(x^2-x-2)$ и построить её график. 2. Исследовать функцию $y=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$ и построить её график. 3. Исследовать функцию $y=(x-1)\,\mathrm{e}^{x+1}$ и построить её график. 4. Сила, которую нужно приложить к лежащему на горизонтальной плоскости грузу, чтобы сдвинуть его с места, вычисляется по формуле $F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$, где α – угол, под которым приложена сила, m – масса груза, μ – коэффициент трения. Под каким углом следует приложить силу, чтобы её величина была наименьшей? 5. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{3}{2x-1}-\frac{3}{2x-5}$ на отрезке [1, 2]. 6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ и построить её график. 7. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A; в точке B ($\vert AB\vert=a$) подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен k $(P>\frac{ak}{2})$. При какой длине рычага груз P будет уравновешиваться наименьшей силой?
Вариант 19 1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{4}x(x^2+9x+24)$ и построить её график. 2. Исследовать функцию $y=(2x-1)\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$ и построить её график. 3. Исследовать функцию $y=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}x^2}$ и построить её график. 4. Освещенность границы круглой площадки радиуса R помещенным на высоте h над ее центром источником света равна $E=\frac{kh}{(h^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$, где k – постоянная. Найти значение h, при котором освещенность границы будет наибольшей. 5. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{2(x^2-7x+7)}{x^2-2x+2}$ на отрезке [1, 4]. 6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{3x^2-2x^3}$ и построить её график. 7. Миноносец стоит на якоре в 9 км от берега. С миноносца посылают гонца в лагерь, расположенный на берегу в 15 км от ближайшей к миноносцу точки берега. Скорость гонца на веслах – 4 км/ч, а на берегу – 5 км/ч. В какой точке берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь как можно быстрее?	*Вариант 20* 1. Исследовать функцию $y=\frac{1}{8}(x^3-12x-16)$ и построить её график. 2. Исследовать функцию $y=\frac{2(x^2-4x+5)}{x-2}$ и построить её график. 3. Исследовать функцию $y=\ln(x^2-2x+2)$ и построить её график. 4. Объем цилиндрической балки длины l, вырезанной из бревна (имеющего форму усеченного конуса) и соосной с ним, равен $V=al(l-b)^2$, где a и b – положительные постоянные, зависящие от размеров бревна (длина бревна меньше, чем b, но больше, чем $\frac{b}{3}$). При каком значении l объем такой балки будет наибольшим? 5. Найти наименьшее значение функции $y=x^3-6x^2-15x+10$ на отрезке [–2, 6]. 6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ и построить её график. 7. Нужно огородить плитами цветник, прилегающий к стене. Имеется 400 плит длиной 0,5 м. Ограда делается в форме прямоугольника. Какими должны быть размеры цветника, чтобы его площадь была наибольшей?

Вариант 21

1. Исследовать функцию $y=(x-3)(3x-x^2)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{(2-x)(x+4)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=x-x\ln x$ и построить её график.
4. Полезная мощность электродвигателя вычисляется по формуле $P=UI-I^2R-a$, где R (Ом) - внутреннее сопротивление, U (В) - напряжение и a (Вт) - потери холостого хода (при напряжении U). При какой величине тока I полезная мощность будет наибольшей?
5. Найти наибольшее значение функции $y=e^x(x^2-x-1)$ на отрезке [–3, 0].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{3x-x^3}$ и построить её график.
7. На странице книги печатный текст должен занимать S см². Поля вверху и внизу должны быть по a см, а справа и слева по b см. Найти наиболее экономные размеры бумаги.

Вариант 22

1. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{8}x^3-\dfrac{3}{4}x^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{(x+2)^2}{x+1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ и построить её график.
4. Если из круглой пластинки жести радиуса R вырезать сектор с углом α и свернуть из него коническую воронку, то её объем будет равен $V=\dfrac{R^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$. При каком значении α объем будет наибольшим?
5. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt[3]{2x(x+3)^2}$ на отрезке [–4, 3].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt{8x^2-x^4}$ и построить её график.
7. Если балка прямоугольного сечения с основанием a и высотой h оперта на концах и равномерно нагружена, то её стрела прогиба обратно пропорциональна ah^3. Вырезать (т.е. найти a и h) балку из круглого бревна диаметром d наибольшей жесткости (с наименьшей стрелой прогиба).

Вариант 23

1. Исследовать функцию $y=(x-2)(x+1)^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3-x^2-4}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{e^x-1}$ и построить её график.
4. Площадь застекленной части окна, имеющего форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом, равна $S=\dfrac{1}{2}a\left(p-\dfrac{\pi+4}{4}a\right)$, где a – ширина окна, p – его периметр. Меняя a (и сохраняя p постоянным) можно добиться того, что окно будет пропускать наибольшее количество света. Найти соответствующее значение a.
5. Найти наибольшее значение функции $y=\dfrac{6}{x-5}-\dfrac{6}{x+3}+6$ на отрезке [–1, 3].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{x^3-1}$ и построить её график.
7. К бруску, лежащему на горизонтальной плоскости, приложена под углом α сила, обеспечивающая равномерное его движение. При каком значении α величина такой силы будет наименьшей? Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ.

Вариант 24

1. Исследовать функцию $y=\dfrac{1}{8}(12-x^2)x-2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ и построить её график.
4. Если в цепь тока сопротивлением R включен электронагревательный прибор сопротивлением r, то количество выделенного в нем тепла находится по формуле $Q=\dfrac{E^2r}{(R+r)^2}$ (E - постоянная ЭДС). При каком значении r Q будет наибольшим?
5. Найти наибольшее значение функции $y=-x^3-6x^2-9x+6$ на отрезке [–5, 2].
6. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{(x^2-4x)^2}$ и построить её график.
7. Автомобиль выезжает из A в B со скоростью 50 км/ч. В тот же момент из B в перпендикулярном направлении выезжает другой автомобиль с той же скоростью. Найти наименьшее расстояние между автомобилями, если AB = 100 км.

Вариант 25

1. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x+2)(x-4)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = x - 1 - \ln x$ и построить её график.
4. Если из квадратного листа жести со стороной *a* вырезать по углам равные квадраты со стороной *x* и, сгибая края, сделать прямоугольную открытую коробку, то её объем равен $V = x(a-2x)^2$. Найти значение *x*, при котором объем коробки будет наибольшим.
5. Найти наименьшее значение функции $y = e^{2x}(4x^2 - 2x - 1)$ на отрезке $[-\frac{3}{2}, 1]$.
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x(x-2)^2}$ и построить её график.
7. Транспортное средство поднимает груз вверх по наклонной плоскости с постоянной скоростью. Коэффициент трения груза о плоскость равен μ. При каком угле α наклона плоскости к горизонту необходимая сила тяги будет наибольшей?

Вариант 26

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x^3 + 12x^2 + 36x)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(x+1)^2}{x+2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^x}{x+1}$ и построить её график.
4. Затраты на 1 км рейса морского транспорта выражаются формулой $G = \frac{1}{1{,}85}(\frac{a}{V} + bV^2)$, где V – скорость транспорта (в узлах), *a* и *b* – положительные постоянные (они зависят от вида транспорта и стоимости топлива). Найти значение *V*, при котором затраты на рейс будут наименьшими.
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{2(2x^2 - x - 1)}{x^2 + 2x + 2}$ на отрезке [–1, 2].
6. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x}(x-4)$ и построить её график.
7. В полусферу радиуса *a* опущен стержень длины $3a$. Найти угол наклона стержня в его положении равновесия (середина стержня занимает самое низкое положение).

Вариант 27

1. Исследовать функцию $y = 3x - x^3 - 2$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(x^2 + 4x + 5)$ и построить её график.
4. Полная поверхность цилиндрической консервной банки заданного объема *V* равна $S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$, где *r* – радиус банки. Найти значение *r*, при котором на изготовление банки пойдет наименьшее количество материала.
5. Найти наибольшее значение функции $y = e^{-x}(x^2 + x - 1)$ на отрезке [0, 1].
6. Исследовать функцию $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$ и построить её график.
7. Тело массой m_0 = 3000 кг падает с высоты *H* = 500 м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности *k* = 100кг/с. Считая, что начальная скорость V_0 = 0, ускорение *g* = 10 м/с^2, и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти наибольшую кинетическую энергию тела.

Вариант 28

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{8}(x-2)(x^2 + 2x - 8)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{2(x^2 + 4x + 5)}{x+2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = xe^{2-x}$ и построить её график.
4. Дальность полета *x* шарика, скатившегося по кривому жёлобу с высоты *H* до высоты *h*, вычисляется по формуле $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. При каком *h* дальность *x* будет наибольшей?
5. Найти наибольшее значение функции $y = \sqrt[3]{2x^2(3-x)}$ на отрезке [–1, 6].
6. Исследовать функцию $y = (x-1)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$ и построить её график.
7. Цистерна заданного объема *V* имеет форму (вертикального) цилиндра, завершенного сверху полушаром того же радиуса. При каком радиусе на ее изготовление пойдет наименьшее количество материала?

Вариант 29

1. Исследовать функцию $y = \frac{1}{4}(x+2)(x^2-5x+10)$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{(1-2x)(x+1)^2}{x^2}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \ln(2x) - \ln(x+2)$ и построить её график.
4. Площадь поперечного сечения специального трубопровода выражается формулой $S = a\sin\alpha(1+\cos\alpha)$, где *a* – постоянная, а α – параметр, принимающий значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$. При каком значении α пропускная способность трубопровода будет наибольшей?
5. Найти наименьшее значение функции $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ на отрезке [–3, 3].
6. Исследовать функцию $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ и построить её график.
7. Какую длину имеет цилиндрическая балка наибольшего объема, которую можно вырезать из бревна (выдержав соосность), имеющего форму усеченного конуса длины 15 м и радиусами оснований 80 см и 30 см?

Вариант 30

1. Исследовать функцию $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ и построить её график.
2. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x+1}$ и построить её график.
3. Исследовать функцию $y = \frac{e^{-(x+1)}}{x}$ и построить её график.
4. Если из круглого бревна диаметром *d* вырезать балку с прямоугольным сечением, основание которого равно *b*, то предельная нагрузка, которую сможет выдержать эта балка (будучи опертой на концах и равномерно нагруженной), равна $P = kb(d^2 - b^2)$, где *k* – постоянная. Найти значение *b*, при котором балка обладает наибольшей прочностью (предельная нагрузка *P* максимальна).
5. Найти наибольшее значение функции $y = \frac{3}{2x+1} - \frac{3}{2x-3} - 2$ на отрезке [0, 1].
6. Исследовать функцию $y = x\sqrt[3]{x-4}$ и построить её график.
7. На какой высоте нужно пробить отверстие в бочке, наполненной водой, чтобы бьющая из него струя имела наибольшую дальность?

Литература

1. Задачи и контрольные вопросы по математике для студентов 1 семестра. Боголюбов А. В., Елисеева Ю. В., Елькин А. Г., Яновская Е. А. под ред. Боголюбова А. В., Елькина А. Г., Холщевниковой Н. Н. - М.: МГТУ "Станкин", 2003.

2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г.. Краткий курс математического анализа для втузов. - М.: Наука, 1969.

3. Фихтенгольц Г. И.. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. - М.: Физматлит, 2006.

4. Гусак А. А.. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Справочное пособие к решению задач. - Минск.: Тетросистема, 2006.

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы "Графики" для студентов 1 курса

Татьяна Владимировна Бубнова

Юлия Александровна Виноградова

Редактор Абрамова С. Н.

Техн. редактор