

Раздел 7. Переходные процессы в линейных электрических цепях.

План

7.1. Основные понятия и соотношения. Основные упрощающие допущения. Общий порядок анализа переходных процессов. Переменные состояния. Законы коммутации.

7.2. Анализ переходных процессов в электрических цепях первого порядка с источником постоянного напряжения при нулевых и ненулевых начальных условиях (классический и операторный методы анализа). Выбор значения расчетного времени переходного процесса.

7.3. Анализ переходных процессов в электрических цепях второго порядка. Временные характеристики линейных цепей.

7.1. Основы возникновения и описание переходных процессов.

Любая динамическая система обладает свойством инерционности, которое проявляется в запаздывании реакции относительно воздействия. Причиной явления служит перераспределение энергии между элементами системы в течение некоторого времени переходного процесса. Мерой инерционности в механике является масса тела или момент инерции.

Электромагнитное поле обладает энергией сконцентрированной в электрическом поле конденсаторов $W_{\text{э}} = qu/2$ и магнитном поле индуктивных катушек $W_{\text{м}} = i\psi/2$. При изменении режима работы автономной электрической цепи энергия не может измениться скачком (при конечной мощности источников); в результате этого напряжения (заряды) конденсаторов и токи (потокосцепления) индуктивностей изменяются плавно, приводя к переходным режимам (процессам).

Установившиеся (стационарные) режимы являются частным случаем состояния электрической цепи. При работе в устройствах происходят переключения (включение и отключение источников и нагрузок, внезапные аварийные изменения параметров), действуют изменяющиеся во времени воздействия. Для многих устройств управления и контроля переходные процессы являются основным режимом работы.

Под расчетом переходного процесса понимают определение изменения во времени токов и напряжений в электрической цепи при коммутациях (подключение и отключение отдельных ветвей с элементами). Для осуществления коммутации вводят схемный элемент - идеальный ключ (рис.6.1), осуществляющий мгновенное переключение ($\Delta t_{\text{пер}} = 0$) и имеющий нулевое сопротивление ($r_{\text{з}} = 0$) в замкнутом и нулевую проводимость ($G_{\text{р}} = 0$) в разомкнутом состоянии.



Рис.6.1 Идеальный ключ размыкающийся (а) и замыкающийся (б).

Математическая постановка задачи расчета переходного процесса состоит в формировании и решении уравнений, описывающих зависимости от времени токов и напряжений электрической цепи при коммутациях.

Состояние электрической цепи удовлетворяет правилам (законам) Кирхгофа и связи напряжений и токов элементов, удовлетворяющим дифференциальным соотношениям. В результате получим систему дифференциальных уравнений.

Например, уравнения для схемы подключения индуктивной катушки к источнику постоянного напряжения (рис.6.2) для контура запишем $u_r(t) + u_L(t) = V$.

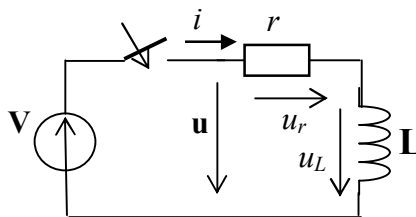


Рис.6.2 Схема индуктивной катушки с источником

Подстановка компонентных соотношений $u_r = ri$ и $u_L = L di/dt$ приводит к дифференциальному уравнению для тока

$$L di/dt + ri = V. \quad (6.1)$$

Решение дифференциального уравнения – это отыскание функции $i(t)$, которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество. В связи с тем, что производная постоянной величины равна нулю, можно найти множество функций, отличающихся на константу, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению.

Единственное решение получим при заданных начальных условиях, т. е. значении тока $i(0)$ в начальный момент времени. Начальные условия (значения токов и напряжений в момент времени непосредственно после коммутации) можно определить с использованием уравнений цепи и энергетических соотношений, из которых следуют законы коммутации. Из выражений энергии следует, что $u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0)$ и $i_L(-0) = i_L(+0) = i_L(0)$, т.е. напряжения конденсаторов и токи индуктивностей изменяются непрерывно. С использованием найденный из предшествующего стационарного режима $u_C(-0)$ и $i_L(-0)$ с помощью уравнений Кирхгофа можно определить начальные значения искомых величин.

В переходном режиме ток $i(t)$ изменяется от начального значения $i(0)$ до стационарного (установившегося) состояния $i_y(t)$, причем $i_y(t)$ также должно удовлетворять дифференциальному уравнению.

Выделим разностную составляющую тока, которая носит название свободной составляющей $i_{св}(t) = i(t) - i_y(t)$, которая характеризуется перераспределением энергии в цепи без источников и удовлетворяет дифференциальному уравнению с нулевой правой частью

$$L \frac{di_{св}}{dt} + Ri_{св} = 0. \quad (6.2)$$

Таким образом, задачу расчета тока $i(t)$ в переходном режиме разделяют на две стадии: расчет свободной $i_{св}(t)$ и установившейся $i_y(t)$ составляющих.

7.2. Анализ переходных процессов во временной области.

Рассмотрим расчет переходных режимов цепей с единственным накопителем энергии (индуктивностью или емкостью). Такой анализ имеет практическое значение, т.к. во многих электрических устройствах преобладает влияние одного из накопителей энергии.

Проанализируем процессы при подключении цепи из резистора и конденсатора к источнику постоянного напряжения (рис.6.3,а), если конденсатор предварительно заряжен до напряжения U_0 .

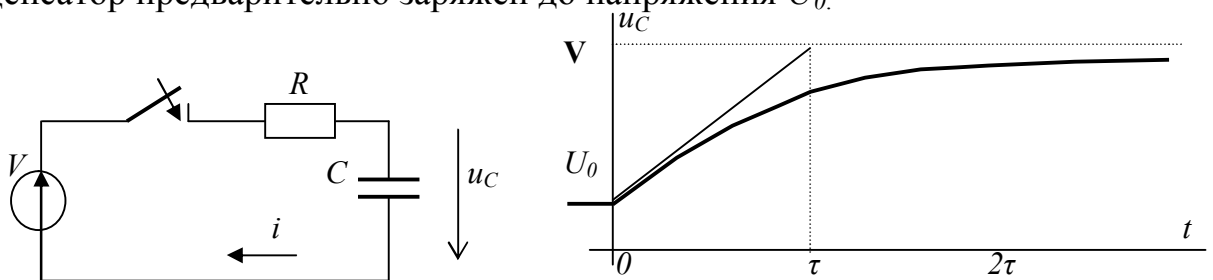


Рис.6.3 Схема заряда конденсатора (а) и зависимость напряжения от времени (б)

Запишем уравнение напряжений в схеме $u_R + u_C = V$ и компонентные соотношения для элементов $u_R = Ri$, $i = C du_C / dt$. Подстановка приводит к дифференциальному уравнению для напряжения на конденсаторе:

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = V, \quad (6.3)$$

где $\tau = RC$ – коэффициент, имеющий размерность времени.

Свободная составляющая напряжения может быть записана в виде экспоненциальной функции времени $u_{св}(t) = Ae^{-t/\tau}$, где A – произвольная постоянная, зависящая от начальных условий, т.е. $A = u_{св}(0)$. В правильности такого представления нетрудно убедиться его подстановкой в дифференциальное уравнение (6.3) при $V = 0$.

Установившийся режим найдем из уравнения (6.3) при условии $du_C / dt = 0$, что дает $u_{св} = V$. Тот же результат можно получить из эквивалентной схемы для установившегося режима, в котором конденсатор заменим разомкнутым участком цепи.

Из закона коммутации следует $u_c(0) = U_0$. Постоянную интегрирования определим из решения $u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + V$ при $t = 0$, т.е. $U_0 = A + V$.

Подстановка приводит к окончательному результату

$$u(t) = (U_0 - V)e^{-t/\tau} + V, \quad (6.4)$$

описывающего процесс заряда конденсатора от начального значения U_0 до V (рис.6.3,б).

Если конденсатор предварительно разряжен $U_0 = 0$, то получим $u_c(t) = V(1 - e^{-t/\tau})$.

Запишем выражение тока в цепи $i = C du_c / dt = I_V e^{-t/\tau}$, где $I_V = V/R$ - максимальное значение тока (рис.6.4).

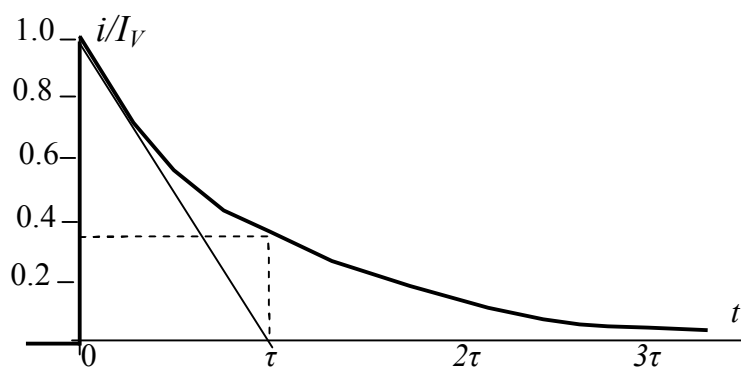


Рис.6.4 Зависимость тока в цепи от времени

Нормированный ток $i(t)/I_V = e^{-t/\tau}$ характеризуется экспоненциальной зависимостью от времени (табл.6.1).

Значения экспоненциальной функции времени.
Таблица 6.1

t	$\tau/2$	τ	2τ	3τ	5τ
$i(t)/I_V$	0.60	0.37	0.13	0.05	0.007

Постоянная времени цепи $\tau = RC$ определяет скорость процесса уменьшения тока и численно равна длине подкасательной в любой точке экспоненциальной функции. Теоретически процесс убывания тока до установившегося (нулевого) значения длится бесконечное время. На начальной стадии переходного процесса скорость убывания значительна (например, по истечении времени $t_I = 3\tau$ с момента коммутации ток составляет всего 5% от начального значения $i(t_I) = 0.05I_V$). С достаточной для практики точностью считают, что переходный процесс заканчивается за интервал времени $t_{II} = (2...3)\tau$. Конкретное значение выбирают в зависимости от требуемой погрешности. В большинстве случаев задают погрешность не выше 10% и принимают $t_{II} = 2.2\tau$.

Схема с одним накопителем энергии может включать достаточно сложную разветвленную резистивную схему. Определим ток $i_R(t)$ в схеме с индуктивностью (рис.6.5,а).

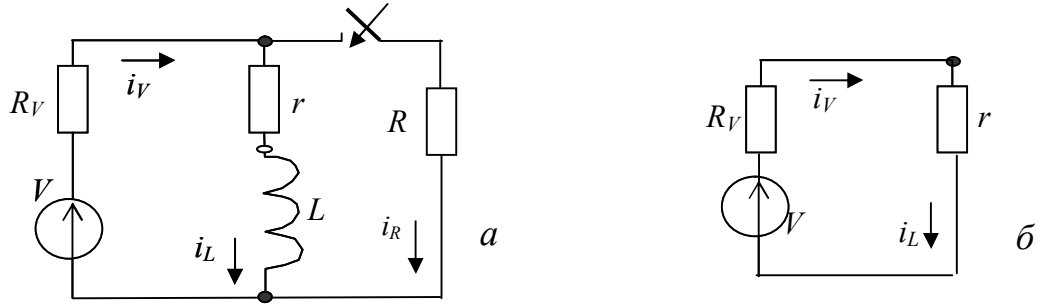


Рис.6.5 Коммутация в схеме с индуктивностью (а) и схема до коммутации (б).

Вначале рассчитаем установившийся режим схемы до коммутации (предшествующий режим) с целью определения независимого начального условия $i_L(0)$. Заменив индуктивность короткозамкнутым участком (для постоянного тока $u_L = 0$), при разомкнутом ключе получим простую схему (рис.6.5,б), из которой определим $i_L(-0) = I_{L0} = V/(R_V + r)$.

Запишем уравнения по правилам Кирхгофа для схемы после коммутации при замкнутом ключе: 1) $i_V = i_L + i_R$; 2) $V = R_V i_V + R i_R$; 3) $V = R_V i_V + r i_L + L di_L/dt$. Преобразуем систему, т.е. из первого и второго выразим i_V и в результате подстановки получим:

$$L di_L/dt + R_{ЭК} i_L = V_p, \quad (6.5)$$

где $V_p = V R/(R + R_V)$ и $R_{ЭК} = r + R_V R/(R_V + R)$ - эквивалентные параметры активного двухполюсника, определенные относительно зажимов индуктивности.

Дифференциальное уравнение (6.5) полностью аналогично уравнению (6.1) для неразветвленной цепи с индуктивностью. Из этого следует вывод, что разветвленную схему можно привести к простой неразветвленной с помощью эквивалентного преобразования резистивной части относительно зажимов накопителя (индуктивности или емкости).

Приведем уравнение (6.5) к стандартной форме $\tau di_L/dt + i_L = I_y$, где $\tau = L/R_{ЭК}$ - постоянная времени цепи, $I_y = V_p/R_{ЭК}$ - установившееся значение тока индуктивности. По аналогии с нахождением решения для уравнения (6.3), имеющего такую же структуру, запишем $i_L(t) = A e^{-t/\tau} + I_y$. С учетом начального условия, следующего из законов коммутации $i_L(-0) = i_L(+0) = I_{L0}$, вычислим постоянную интегрирования $A = I_{L0} - I_y$ и запишем выражение для тока в индуктивности

$$i_L(t) = I_y(1 - e^{-t/\tau}) + I_{L0}, \quad (6.6)$$

которое, как и следовало ожидать, идентично соотношению (6.4).

Искомый ток $i_R(t)$ выразим через $i_L(t)$ с помощью уравнений цепи и получим $i_R = (V - i_L R_V)/(R_V + R)$. Из окончательного выражения, имеющего достаточно громоздкий вид, следует, что скорость протекания переходных процессов зависит от постоянной времени цепи.

7.3. Анализ переходных процессов в электрических цепях второго порядка.

Линейная динамическая цепь второго порядка, схема которой приведена на рис.7.6,а, содержит идеальный источник постоянного напряжения $V(t)$, потребитель, представляющий последовательное соединение элементов R , L и C . Потребитель подключается к источнику сигнала в момент $t=0$ идеальным коммутатором (ключом). Параметры сигнала и элементов потребителя заданы: $V(t) = V = \text{const}$, $V = 100$ В; $R = 100$ Ом; $L = 100$ мГн; $C = 50$ мкФ.

Требуется определить реакции цепи в переходном режиме.

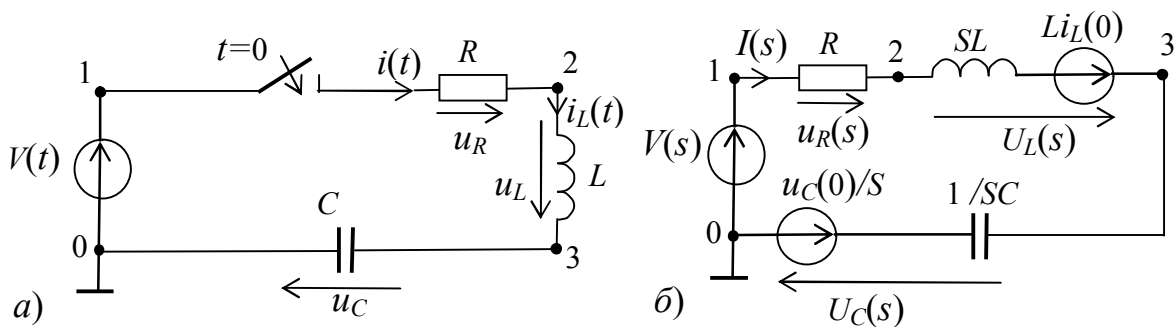


Рис.7.6. Схема RLC - цепи: а – исходная; б – эквивалентная для изображений по Лапласу

Для рассматриваемой цепи переменными состояниями являются ток $i_L(t)$ в индуктивности L (он же входной ток $i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$) и напряжение $u_C(t)$ на емкости C .

Очевидно, что непосредственно перед коммутацией ток в контуре отсутствовал, т.е. $i(-0) = 0$, следовательно, независимое начальное условие для $i_L(t)$:

$$i(-0) = i_L(-0) = i_L(+0) = 0. \quad (7.37)$$

Поскольку в условии задачи не указывается на предварительный заряд емкости, то, исходя из схемы рис.7.6,а, считаем, что напряжение на емкости непосредственно перед коммутацией отсутствует и независимое начальное условие для $u_C(t)$:

$$u_C(-0) = u_C(+0) = 0. \quad (7.38)$$

Определим реакции цепи в переходном режиме операторным методом, суть которого достаточно подробно изложена в курсе высшей математики. Построение эквивалентной схемы для изображений (рис.7.6,б) осуществляется достаточно просто в соответствии с табл.7.2.

Функции - оригиналы сигнала и реакций имеют каждая свое единственное изображение по Лапласу: $V(t) \div V(S)$; $i(t) \div I(S)$; $u_R(t) \div U_R(S)$, $u_L(t) \div U_L(S)$; $u_C(t) \div u_C(S)$.

Уравнение цепи (рис.7.6,б) в операторной форме:

$$(R + SL + 1/SC) \cdot I(S) - V(S) - Li_L(0) + u_C(0)/S = 0. \quad (7.39)$$

С учетом нулевых начальных условий (7.37) и (7.38) уравнение (7.39) имеет вид:

$$(R + SL + 1/SC) \cdot I(S) = V(S), \quad (7.40)$$

где $V(S) = V/S$. Из (7.40) находим функцию-изображение тока $I(S)$:

$$I(S) = V(S)/(R + SL + 1/SC) = (V/L)/(S^2 + (R/L)S + 1/LC). \quad (7.41)$$

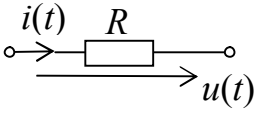
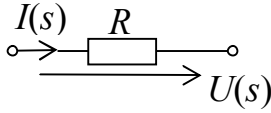
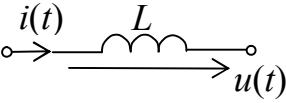
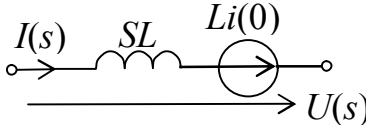
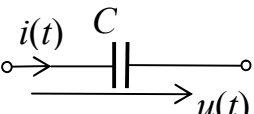
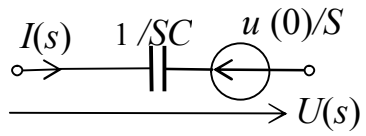
Для дальнейшего определения функции – оригинала $i(t)$ воспользуемся теоремой разложения. Представим функцию – изображение $I(S)$ в форме правильной операторной дроби:

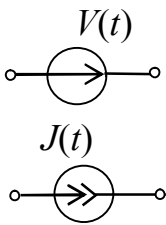
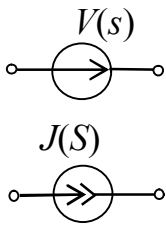
$$I(S) = F_1(S)/F_2(S), \quad (7.42)$$

где $F_1(S) = V/L$, а $F_2(S) = S^2 + (R/L)S + 1/LC$.

Таблица 6.2

Таблица соответствия элементов, уравнений элементов, функций сигналов области "t" их изображениям в области переменной Лапласа "S"

Оригиналы в обл. "t"	Изображения в обл. "S"
 $u(t) = Ri(t)$ $i(t) = Gu(t)$	 $U(S) = RI(S)$ $I(S) = GU(S)$
 $u(t) = Ldi(t)/dt$ $i(t) = i(0) + (1/L) \int_0^t u(t)dt$	 $U(S) = SLI(S) - Li(0)$ $I(S) = U(S)/SL + (1/S) \cdot i(0)$
 $u(t) = u(0) + (1/C) \int_0^t i(t)dt$ $i(t) = Cdu(t)/dt$	 $U(S) = (1/SC) \cdot I(S) + u(0)/S$ $I(S) = SCU(S) - Cu(0)$

	
$V(t) = V = \text{const}$ $V(t) = V_m \sin(\omega t + \psi)$ $V(t) = V_m e^{j(\omega t + \psi)}$	$V(S) = V/S$ $V(S) = V_m [(S) \sin \psi + \omega \cos \psi] / (S^2 + \omega^2)$ $V(S) = V_m e^{j\psi} / (S - j\omega)$

Для нахождения корней характеристического уравнения операторного выражения (7.42) определяем полюсы функции $I(S)$ (нули функции $F_2(S)$). Формально заменяем в выражении $F_2(S)$ комплексную переменную Лапласа S на λ :

$$F_2(\lambda) = \lambda^2 + (R/L)\lambda + 1/LC = 0. \quad (7.43)$$

Корни характеристического уравнения (7.43):

$$\lambda_{1,2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}. \quad (7.44)$$

Обозначим константы: $R/2L = \delta$; $1/LC = \omega_0^2$, где ω_0 - резонансная (собственная) частота контура. Таким образом, корни:

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (7.45)$$

Вид корней зависит от соотношения параметров цепи R , L и C .

Для реальных электрических цепей (электромагнитных устройств) в общем случае возможны два вида корней:

- корни вещественные простые при $\delta > \omega_0$;
- корни комплексные сопряженные при $\delta < \omega_0$.

Для устойчивых систем (цепей) согласно теореме Ляпунова вещественные части корней должны быть отрицательными. В противном случае система неустойчива и не имеет решения (полный интеграл не сходится, т. е. отсутствует установившаяся составляющая). Диссипативные системы (цепи) без обратных связей устойчивы.

В рассматриваемой цепи корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = -276,4$; $\lambda_2 = -723,6$; ($\delta = 500$; $\omega_0 = 447,2$). Корни вещественные, отрицательные, простые, цепь устойчива (переходные процессы устойчивые).

Функция – оригинал $i(t)$ определяется по теореме разложения, имеющей для случая простых корней выражение:

$$I(S) = F_1(S)/F_2(S) \div i(t) = \sum_{k=1}^n (F_1(\lambda_k) e^{\lambda_k t} / F'_2(\lambda_k)), \quad (7.46)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, n$; n – порядок полинома знаменателя $F_2(S)$; $n = 2$;
 $F'_2(\lambda_k) = dF_2(S)/dS$ при $S = \lambda_k$. Таким образом: $F'_2(\lambda_k) = 2\lambda_k + R/L$.

Для $k = 1$: $F'_2(\lambda_1) = 447,2$; $F_1(\lambda_1) = V/L = 1000$.

Для $k = 2$: $F_2'(\lambda_2) = -447,2$; $F_1(\lambda_2) = V/L = 1000$.

$$i(t) = (1000/447,2)e^{-276,4t} + (1000/(-447,2))e^{-723,6t} \cong 2,24(e^{-276,4t} - e^{-723,6t}), \text{ А.} \quad (7.47)$$

Временная зависимость $i(t)$ представляет собой разность двух экспонент, имеющих разную крутизну. Это апериодический немонотонный процесс. В момент коммутации $t = 0$ ток $i(t)$ не меняется скачком.

Проверка на удовлетворение независимым начальным условиям (7.37):

$$i(0) = 2,24(1 - 1) = 0.$$

Реакция $u_R(t)$ в переходном режиме определяется из уравнения элемента R и повторяет форму тока $i(t)$:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) = R \cdot i(t) \cong 224(e^{-276,4t} - e^{-723,6t}), \text{ В.} \quad (7.48)$$

Реакции $u_L(t)$ и $u_C(t)$ также целесообразно определить из соответствующих уравнений элементов L и C :

$$u_L(t) = L di(t)/dt \cong 162e^{-723,6t} - 62e^{-276,4t}, \text{ В.} \quad (7.49)$$

$$u_C(t) = u_C(0) + (1/C) \int_0^t i(\tau) d\tau \cong (62e^{-723,6\tau} - 162e^{-276,4\tau}) \Big|_0^t = 62e^{-723,6t} - 162e^{-276,4t} + 100 \text{ В.} \quad (7.50)$$

Временная зависимость реакции $u_L(t)$ представляет собой сумму двух экспонент с разной крутизной. Причем в момент коммутации $t = 0$ напряжение $u_L(t)$ изменяется скачком от $u_L(-0) = 0$ до $u_L(0) = V = 100 \text{ В}$, а затем плавно и немонотонно стремится в пределе к своему установившемуся значению $u_L(\infty) = 0$.

Временная зависимость реакции $u_C(t)$ является суммой двух экспонент с разной крутизной и постоянной составляющей.

В момент коммутации $t = 0$ напряжение $u_C(t)$ не меняется скачком. Зависимость $u_C(t)$, строго говоря, немонотонная, в пределе стремится к своему установившемуся значению $u_C(\infty) = 100 \text{ В}$ (емкость заряжается до значения напряжения сигнала).

Графическая иллюстрация результатов анализа приведена на рис.7.7.

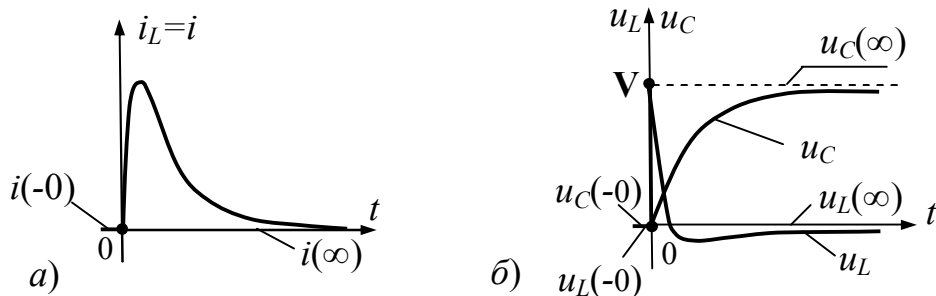


Рис.7.7. Временные зависимости реакции RLC - цепи в переходном режиме $\delta > \omega_0$:

a – ток $i(t)$; b – напряжения $u_C(t)$ на емкости и $u_L(t)$ на индуктивности

Процессы в рассматриваемой цепи при заданных значениях параметров являются апериодическими, немонотонными, устойчивыми (корни характеристического уравнения отрицательные, вещественные, простые).

При иных значениях параметров R , L и C в этой цепи переходные процессы могут иметь принципиально другой вид. Если изменить значения R , L и C таким образом, чтобы выполнялось условие $\delta < \omega_0$, то корни характеристического уравнения цепи будут комплексными сопряженными с отрицательными вещественными частями. Например, при $R=100$ Ом; $L=100$ мГн; $C=5$ мкФ имеем: $\delta = R/2L = 500$; $\omega_0 = \sqrt{1/LC} \cong 1414,2$ рад/с, $\delta < \omega_0$. Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св.}}, \quad (7.51)$$

где $\omega_{\text{св.}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - частота свободных колебаний системы (цепи), $\omega_{\text{св.}} \cong 1323$ рад/с.

$$\lambda_1 = -500 + j1323; \lambda_2 = -500 - j1323. \quad (7.52)$$

Корни λ_1 и λ_2 - комплексные, сопряженные с отрицательными вещественными частями.

Функция-оригинал $i(t)$ определяется по выражению (7.46):

$$i(t) = \sum_{k=1}^2 F_1(\lambda_k) e^{\lambda_k t} / F_2'(\lambda_k), \text{ где } F_2'(\lambda_k) = 2\lambda_k + R/L, F_1(\lambda_k) = V/L;$$

$$F_2'(\lambda_1) = 2j\omega_{\text{св.}}; F_2'(\lambda_2) = -2j\omega_{\text{св.}};$$

$$i(t) = (Ve^{-\delta t} / L\omega_{\text{св.}}) \cdot (-j) \cdot (e^{j\omega_{\text{св.}}t} - e^{-j\omega_{\text{св.}}t}) / 2 = (V/L\omega_{\text{св.}}) e^{-\delta t} \cdot \sin(j\omega_{\text{св.}}t); \quad (7.53)$$

$$i(t) \cong 0,756e^{-500t} \cdot \sin(1323t), \text{ А.} \quad (7.54)$$

Выражение (7.53) представляет собой гармоническую функцию, амплитуда которой $I_m(t) = (V/L\omega_{\text{св.}}) e^{-\delta t}$ изменяется во времени по экспоненциальному закону ($e^{-\delta t}$), а частота $\omega = \omega_{\text{св.}}$.

Остальные реакции цепи $u_R(t)$, $u_L(t)$ и $u_C(t)$ можно получить на основе выражения (7.53) используя соответствующие уравнения элементов R , L и C аналогично (7.48), (7.49) и (7.50).

На рис.7.8 приведена графическая иллюстрация результатов анализа рассматриваемой цепи для случая комплексных сопряженных корней (7.52).

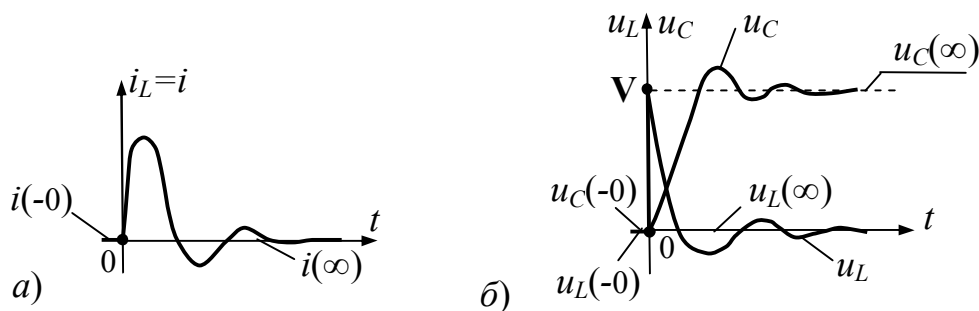


Рис.7.8. Временные зависимости реакций RLC - цепи в переходном режиме при $\delta < \omega_0$: a - ток $i(t)$; b - напряжения $u_L(t)$ и $u_C(t)$

Процессы в рассматриваемой цепи при таких соотношениях параметров являются колебательными затухающими (корни характеристического уравнения комплексные, сопряженные с отрицательными вещественными частями).

Из рассмотренных примеров можно сделать **вывод**: *характер переходных процессов зависит от вида корней характеристического уравнения цепи, т.е. определяется соотношением значений параметров элементов цепи.*

Необходимо заметить, что приведенные выше методы анализа переходных процессов являются аналитическими и эффективны лишь для относительно простых цепей первого и второго порядков.

Для анализа цепей высоких порядков ($n > 2$) следует использовать матричные и численные методы, либо профессиональные пакеты прикладных программ.

Определение расчетного времени переходного процесса.

Расчетное время переходного процесса $t_{\text{рас.}}$ является значением верхнего предела интегрирования при решении системы дифференциальных уравнений цепи (определении полного интеграла).

Момент коммутации t_0 является значением нижнего предела интегрирования.

Если момент t_0 при решении практических задач либо задан, либо условно принимается равным нулю, то задание значения $t_{\text{рас.}}$ представляет определенную проблему.

При экспериментальных исследованиях по показаниям приборов, регистрирующих переходные характеристики, можно судить о степени приближения наблюдаемых переменных к их установившимся значениям и по результатам измерений прекращать или продолжать процесс наблюдения.

При анализе моделей реальных устройств верхний предел интегрирования $t_{\text{рас.}}$ определяется однозначно при заданном значении допустимой погрешности только для монотонных переходных характеристик, т.е. для цепей (системы) первого порядка. Можно использовать следующий порядок определения.

- Определяется значение принужденной составляющей реакции (для установившегося режима) $y_{пр.} = y(\infty)$.

- Определяется базисное значение реакции в переходном режиме. За базисное значение принимается максимальное значение реакции, если установившаяся составляющая равна нулю ($y(\infty) = 0$). Если $y(\infty) \neq 0$, то за базисное значение принимается значение установившейся составляющей $y_{баз.} = y(\infty)$.

- Вычисляется абсолютное значение допустимой погрешности $|\Delta| = |\Delta\%| \cdot y_{баз.} / 100\%$, где $\Delta\%$ - заданная допустимая погрешность.

- Составляется показательное уравнение относительно неизвестной $t_{рас.}$:

$$y(t_{рас.}) = |y(\infty) - \Delta|. \quad (7.55)$$

- Из уравнения (7.55) определяется значение $t_{рас.}$.

В качестве примера определим значение $t_{рас.}$ для реакции $u_C(t)$ из выражения (7.22) при $\Delta\% = 2\%$.

Из (7.22) имеем значение установившейся (принужденной) составляющей $u_C(\infty) = 100$ В. Очевидно, что значение базисной величины выбирается как $u_{баз.} = u_C(\infty) = 100$, В. Абсолютная погрешность $|\Delta| = 2\% \cdot 100 = 2$, В. Показательное уравнение из (7.22):

$$u_C(t_{рас.}) = |u_C(\infty) - \Delta| \text{ или } 100 - 100e^{-1000t_{рас.}} = |100 - 2|.$$

Откуда имеем:

$$e^{-1000t_{рас.}} = 0,02. \quad (7.56)$$

Окончательно $t_{рас.}$ определяем логарифмированием выражения (7.56):

$$t_{рас.} = (\ln 0,02) / (-1000) \cong 0,004 \text{ с} = 4 \text{ мс}.$$

Задание приближенного значения $t_{рас.}$ для цепей первого порядка можно осуществить, используя данные табл. 7.1.

Для цепей порядка $n \geq 2$ следует определять значение $t_{рас.}$ по моменту окончательного входа временной зависимости реакции (временной характеристики) в трубку допустимой погрешности $\pm \Delta\%$ (см. рис. 7.9).

При немонотонных процессах трубка допустимой погрешности откладывается относительно установившегося значения функции реакции $y(\infty)$. Выбор базисной величины $y_{баз.}$ аналогичен выбору в цепях первого порядка.

При использовании современных пакетов прикладных программ для численного анализа переходных процессов задание верхнего предела интегрирования $t_{рас.}$ в общем случае следует проводить в режиме итераций, контролируя результаты анализа. Такой подход является некоторым аналогом эксперимента.

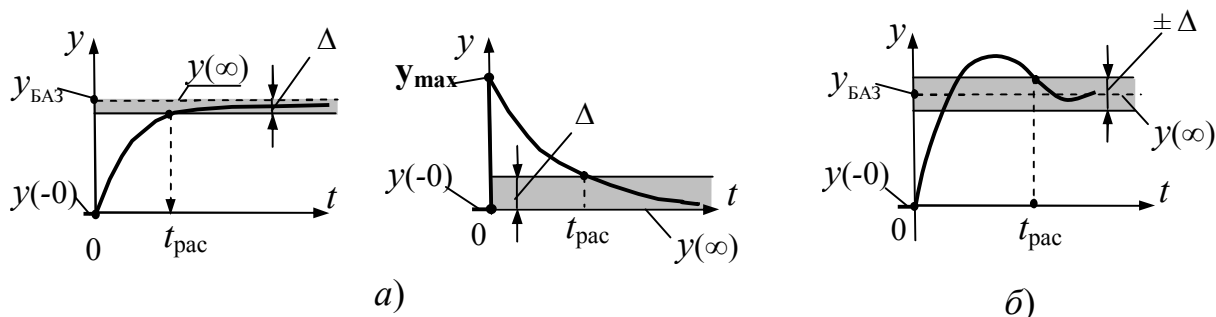


Рис.7.9. Определение реального (расчетного) времени $t_{\text{рас.}}$ переходного процесса:

a – для монотонных процессов; $б$ – для немонотонных

Временные характеристики линейных цепей

Временные характеристики переходная и импульсная отражают динамические свойства линейных цепей (электромагнитных устройств) во временной области " t ". В этом смысле они аналогичны частотным характеристикам: являются реакциями линейной цепи (устройства) на типовые воздействия (напряжение или ток) при нулевых начальных условиях.

В качестве типовых воздействий при исследованиях во временной области принимаются два типа импульсных воздействий: единичная ступенчатая функция $1(t)$ и единичная импульсная функция $\delta(t)$ - функция Дирака. Эти функции представляют идеализацию реальных импульсных сигналов и широко используются как идеализированные математические модели этих сигналов (рис.7.10).

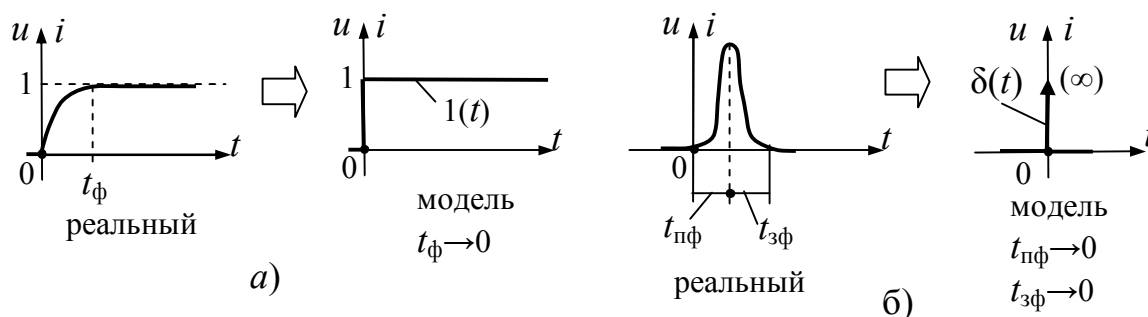


Рис.7.10. Реальные импульсные сигналы и их модели: a - "ступенчатый"; $б$ - "импульсный"

Математические модели типовых сигналов можно представить следующими выражениями:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t \geq 0; \end{cases} \quad (7.57)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0; \\ \infty & \text{при } t = 0; \end{cases} \quad (7.58)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1.$$

Функция Дирака $\delta(t)$ - это особая функция. Обычная (регулярная) функция не может обладать свойствами δ - функции. При анализе цепей и систем δ - функция широко используется. Для ее применения достаточно знания формальных свойств этой функции, например, свойство выборки и свойства производных от δ - функции.

Связь между двумя типовыми воздействиями $l(t)$ и $\delta(t)$ определяется соотношениями:

$$\delta(t) = d l(t) / dt; \quad l(t) = \int \delta(t) dt. \quad (7.59)$$

Переходной характеристикой $h(t)$ называют реакцию линейной цепи (системы) на воздействие единичного ступенчатого сигнала (напряжения или тока) при нулевых начальных условиях.

Импульсной переходной характеристикой $w(t)$ называют реакцию линейной цепи (системы) на воздействие единичной импульсной функции при нулевых начальных условиях.

Характеристику $w(t)$ называют часто весовой функцией системы или весовой характеристикой.

Известно свойство линейных цепей (или систем линейных дифференциальных уравнений): если к цепи с нулевыми начальными условиями вместо исходного воздействия прикладывается его производная или интеграл, то реакция будет равна соответственно производной или интегралу от исходной реакции. Следовательно, связь между переходной и импульсной переходной характеристиками устанавливается на основе (7.59) следующими соотношениями:

$$h(t) = \int w(t) dt; \quad w(t) = dh(t) / dt. \quad (7.60)$$

В теории цепей для анализа переходных процессов при импульсных сигналах широко используется переходная характеристика. Она определяется относительно просто. Фактически ее определение сводится к анализу цепи с нулевыми начальными условиями при подключении к источнику постоянного напряжения или тока. Если известна реакция цепи при включении на постоянное напряжение или ток, то переходную характеристику можно получить делением этой реакции на амплитуду сигнала.

С другой стороны, переходные характеристики позволяют определять при нулевых начальных условиях реакции цепи на постоянные сигналы любой амплитуды.

Другим вариантом аналитического определения переходных характеристик является использование соотношений (7.60) и взаимосвязи между импульсной переходной характеристикой и передаточной функцией, которая устанавливается выражением:

$$w(t) \div W(S). \quad (7.61)$$

Импульсная переходная характеристика $w(t)$ является функцией-оригиналом, у которой изображение по Лапласу есть соответствующая передаточная функция $W(S)$.

В качестве примера рассмотрим определение временных характеристик RC - цепи, схема которой приведена на рис.7.2,а. Значения параметров элементов остаются прежними: $R=10$ Ом; $C=100$ мкФ. Согласно смыслу временных характеристик напряжениями сигнала должны быть $V(t)=1(t)$ или $V(t)=\delta(t)$, а независимые начальные условия - нулевые $u_C(0)=0$.

Определим временные характеристики как реакцию $u_C(t)$ на соответствующие сигналы. Для простоты решения воспользуемся операторным методом.

Изображение реакции при нулевых начальных условиях и при воздействии в виде единичной ступенчатой функции будет определяться по соответствующим уравнениям элементов и соединений в операторной форме.

$$U_C(S) = (1/SC) \cdot I(S) = (1/SC) \cdot V(S)/(R + (1/SC)). \quad (7.62)$$

Для переходной характеристики $h(t)$ используем $V(t)=1(t) \div 1(S)=1/S$. Таким образом $V(S)=1/S$.

Тогда: $U_C(S) = (1/S)/(SRC + 1) = 1/(S^2 RC + S) = 1/(S^2 \tau + S)$, где $\tau = RC$ - постоянная времени цепи.

Оригинал $u_C(t)$ определим по теореме разложения (см.7.46).

$$U_C(S) = F_1(S) / F_2(S) \div u_C(t) = \sum_{k=1}^n F_1(\lambda_k) \lambda_k^t / F_2'(\lambda_k), \text{ где } F_1(\lambda_k) = 1;$$

$$F_2(\lambda) = RC\lambda^2 + \lambda; F_2'(\lambda_k) = 2RC\lambda_k + 1; \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -1/RC = -1/\tau; F_2'(\lambda_1) = 1; F_2'(\lambda_2) = -1; n = 2 \text{ (считать и нулевой корень).}$$

$$h(t) = u_C(t) = 1 \cdot e^{0t} / 1 + 1 \cdot e^{-t/\tau} / (-1) = 1 - e^{-t/\tau}, \text{ В.} \quad (7.63)$$

Импульсную переходную характеристику (весовую функцию) определим, используя соотношения (7.60):

$$w(t) = dh(t)/dt = (1/\tau) \cdot e^{-t/\tau}. \quad (7.64)$$

Окончательно для рассматриваемой цепи временные характеристики:

$$h(t) = 1 - e^{-1000t}, \text{ В; } w(t) = 1000e^{-1000t}, \text{ В/с.}$$

Для определения временных характеристик можно использовать выражение соответствующей передаточной функции и зависимость (7.61). В данном случае $u_{\text{вх}}(t) = V(t)$, $u_{\text{вых}}(t) = u_C(t)$.

Передаточная функция $W(S) = U_C(S)/V(S)$, где $U_C(S) \div u_C(t)$ и $V(S) \div V(t)$; $U_C(S) = (1/SC) \cdot I(S)$; $V(S) = (R + 1/SC) \cdot I(S)$. Таким образом, выражение передаточной функции: $W(S) = 1/(SRC + 1)$. Оригинал этого изображения является импульсная переходная характеристика, которую определяем по теореме разложения:

$$W(S) = F_1(S)/F_2(S) \div w(t) = F_1(\lambda)^{\lambda t} / F_2'(\lambda) = (1/\tau) \cdot e^{-t/\tau},$$

где $\lambda = -1/RC = -1/\tau = -10^3 \text{ с}^{-1}$, $\tau = RC = 10^{-3} \text{ с}$.

Согласно соотношениям (7.60) переходная характеристика

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt = -e^{-t/\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-t/\tau}, \text{ В.}$$

Результаты совпадают с полученными ранее выражениями (7.64) и (7.63).

Графическая иллюстрация временных характеристик представлена на рис.7.11.

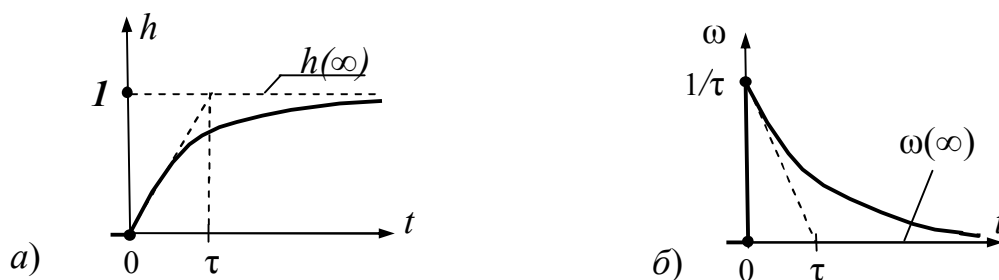


Рис.7.11. Временные характеристики RC - цепи: *а* – переходная; *б* – импульсная переходная (весовая)

По временным характеристикам можно определять динамические показатели цепи (например, $t_{\text{рас.}}$).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие цепи принято относить к линейным динамическим цепям?
2. Какие режимы в цепях называются установившимися?
3. Что такое переходный процесс (режим)?
4. Что является причиной возникновения переходного процесса?
5. В чем заключается понятие коммутаций?
6. В чем отличие реальной коммутации и идеальной?
7. В чем состоит задача анализа переходных процессов в цепи?
8. Какие основные особенности переходных процессов в реальных цепях (устройствах) известны Вам?
9. Какие основные упрощающие допущения принимаются при анализе переходных процессов в линейных цепях?
10. В чем состоит общий порядок анализа переходных процессов?
11. Что представляет в общем случае полная математическая модель цепи для анализа переходных процессов?
12. Какие методы решения уравнений цепи при анализе переходных процессов Вам известны и в чем их основной смысл?
13. Какие переменные являются переменными состояния при анализе переходных процессов в технических устройствах?
14. Какие переменные электрической цепи выбираются в качестве переменных состояния?
15. Что такое независимые начальные условия и на основе чего они

определяются в технических задачах?

16. В чем заключаются законы коммутации и их следствия?

17. Что такое зависимые начальные условия и на основе чего они определяются?

18. Что такое порядок динамической цепи и чем он определяется?

19. Какой характер имеют временные зависимости реакций в переходных режимах в цепях первого и второго порядков?

20. Что такое постоянная времени цепи, от чего она зависит и как влияет на скорость протекания переходного процесса?

21. Как определить значение постоянной времени цепи по временной зависимости реакции?

22. Какие способы построения характеристического уравнения цепи Вам известны?

23. Какова взаимосвязь между видом корней характеристического уравнения цепи и характером переходного процесса?

24. Что такое переходные и импульсные переходные характеристики и в чем их практический смысл?

25. Какие варианты экспериментального определения переходных и импульсных переходных характеристик Вам известны?

26. Какие варианты аналитического определения переходных и импульсных переходных характеристик Вам известны и в чем их основной смысл?

27. Каким образом можно определить приближенное значение верхнего предела интегрирования при аналитическом построении переходных характеристик?

28. Что такое расчетное время переходного процесса и как оно определяется?

29. Какие технические параметры и и каким образом можно получить из переходных и импульсных характеристик?