

# **ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Конспект лекций

## ВВЕДЕНИЕ

---

Вы узнаете:

- Что такое теория автоматического управления (ТАУ).
- Что является объектом, предметом и целью изучения ТАУ.
- Каков основной метод исследования в ТАУ.
- Каково место ТАУ среди других наук.
- Какова история ТАУ.
- Почему актуально изучение ТАУ.
- Каковы современные тенденции в автоматизации производства.

## Что такое теория автоматического управления?

---

Понятие ТАУ аккумулирует входящие в ее название термины:

- ***теория** – совокупность знаний, позволяющих при определенных условиях получать достоверный результат*
- ***управление** – воздействие, оказываемое на объект, для достижения определенной цели;*
- ***автоматическое управление** – управление без вмешательства человека с помощью технических средств.*

Поэтому

***ТАУ** – совокупность знаний, позволяющих создавать и вводить в действие автоматические системы управления технологическими процессами с заданными характеристиками.*

## Что является объектом, предметом и целью изучения ТАУ?

---

***Объект изучения ТАУ** – система автоматического управления (САУ).*

***Предмет изучения ТАУ** – процессы, протекающие в САУ.*

***Цель изучения ТАУ** – учет приобретенных знаний в практической деятельности при проектировании, производстве, монтаже, наладке и эксплуатации САУ.*

## Основной метод исследования в ТАУ.

---

При изучении процессов управления в ТАУ абстрагируются от физических и конструктивных особенностей САУ и вместо реальных САУ рассматривают их адекватные математические модели. Поэтому ***основным методом исследования в ТАУ*** является *математическое моделирование.*

## **Место ТАУ среди других наук.**

---

ТАУ вместе с теорией функционирования элементов систем управления (датчиков, регуляторов, исполнительных механизмов) образует более широкую отрасль науки – *автоматику*. Автоматика, в свою очередь, является одним из разделов *технической кибернетики*. Техническая кибернетика изучает сложные автоматизированные системы управления технологическими процессами (САУТП) и предприятиями (САУП), построенными с использованием управляющих электронных вычислительных машин.

## **История ТАУ.**

---

Первые теоретические работы в области автоматического управления появились в конце XIX в., когда в промышленности получили широкое распространение регуляторы паровых машин, инженеры-практики стали сталкиваться с трудностями при проектировании и наладке этих регуляторов. Именно в этот период выполнены ряд исследований, в которых впервые паровая машина и ее регулятор были проанализированы математическими методами как единая динамическая система.

Приблизительно до середины 20-го столетия теория регуляторов паровых машин и котлов развивалась как раздел прикладной механики. Параллельно разрабатывались методы анализа и расчета автоматических устройств в электротехнике. Формирование ТАУ в самостоятельную научную и учебную дисциплину произошло в период с 1940 по 1950 годы. В это время были изданы первые монографии и учебники, в которых автоматические устройства различной физической природы рассматривались едиными методами.

В настоящее время ТАУ наряду с новейшими разделами так называемой общей теории управления (исследование операций, системотехника, теория игр, теория массового обслуживания) играет важную роль в совершенствовании и автоматизации управления производством.

## **Почему актуально изучение ТАУ?**

---

Автоматизация является одним из главных направлений научно-технического прогресса и важным средством повышения эффективности производства. Современное промышленное производство характеризуется ростом масштабов и усложнением технологических процессов, увеличением единичной мощности отдельных агрегатов и установок, применением интенсивных, высокоскоростных режимов, близких к критическим, повышением требований к качеству продукции, безопасности персонала, сохранности оборудования и окружающей среды.

Экономичное, надежное и безопасное функционирование сложных технических объектов может быть обеспечено с помощью лишь самых совершенных технических средств, разработка, изготовление, монтаж, наладка и эксплуатация которых немыслимы без знания ТАУ.

## **Современные тенденции в автоматизации производства.**

---

*Современными тенденциями в автоматизации производства являются:*

- *широкое применение ЭВМ для управления;*
- *создание машин и оборудования со встроенными микропроцессорными средствами измерения, контроля и регулирования;*
- *переход на децентрализованные (распределенные) структуры управления с микроЭВМ;*
- *внедрение человеко-машинных систем;*
- *использование высоконадежных технических средств;*
- *автоматизированное проектирование систем управления.*

# 1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ САУ

---

Вы познакомитесь:

- С основными понятиями и определениями.
- Со структурой САУ.
- С классификацией САУ.

## 1.1. Основные понятия и определения

---

**Алгоритм функционирования устройства (системы)** – совокупность предписаний, ведущих к правильному выполнению технического процесса в каком-либо устройстве или в совокупности устройств (системе).

Например, *электрическая система* – совокупность устройств, обеспечивающих единство процессов генерирования, преобразования, передачи, распределения и потребления электрической энергии при обеспечении ряда требований к режимным параметрам (частоте, напряжению, мощности и т.д.). Электрическая система спроектирована таким образом, чтобы при нормальных условиях эксплуатации эти требования выполнялись, то есть *правильно* выполнялся технический процесс. В данном случае *алгоритм функционирования* электрической системы реализован в конструкции входящих в ее состав устройств (генераторов, трансформаторов, линий электропередачи и т.д.) и в определенной схеме их соединения.

Однако надлежащему функционированию устройства (системы) могут мешать внешние обстоятельства (воздействия). Например, для электрической системы такими воздействиями могут быть: изменение нагрузки потребителей электрической энергии, изменение конфигурации электрической сети в результате переключений, короткие замыкания, обрывы проводов и т.д. Поэтому на устройство (систему) приходится оказывать специальные воздействия, направленные на компенсацию нежелательных последствий внешних воздействий и выполнение алгоритма функционирования. В связи с этим вводятся следующие понятия:

**Объект управления (ОУ)** – устройство (система), осуществляющее технический процесс и нуждающееся в специально организованных воздействиях извне для осуществления его алгоритма функционирования.

Объектами управления являются, например, как отдельные устройства электрической системы (турбогенераторы, силовые преобразователи электрической энергии, нагрузки), так и электрическая система в целом.

**Алгоритм управления** – совокупность предписаний, определяющая характер воздействий извне на объект управления, обеспечивающих его алгоритм функционирования.

Примерами алгоритмов управления являются алгоритмы изменения возбуждения синхронного генератора и расхода пара в их турбинах с целью компенсации нежелательного влияния изменения нагрузки потребителей на уровни напряжения в узловых точках электрической системы и частоту этого напряжения.

**Устройство управления (УУ)** – устройство, осуществляющее в соответствии с алгоритмом управления воздействие на объект управления.

Примерами устройств управления являются автоматический регулятор возбуждения (АРВ) и автоматический регулятор частоты вращения (АРЧВ) синхронного генератора.

**Система автоматического управления (САУ)** – совокупность взаимодействующих между собой объекта управления и устройства управления.

Таковой, например, является автоматическая система возбуждения синхронного генератора, содержащая взаимодействующие между собой АРВ и собственно синхронный генератор.

На рис. 1.1. приведена обобщенная структурная схема САУ.

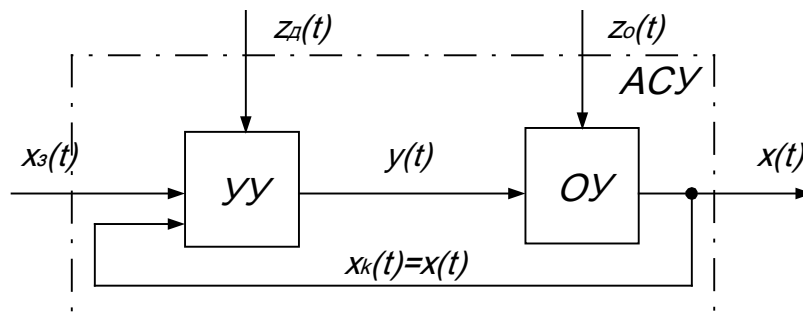


Рис. 1.1. Обобщенная структурная схема САУ

В ней:

$x(t)$  – **управляемая величина** – физическая величина, характеризующая состояние объекта.

Часто объект управления имеет несколько управляемых величин  $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ , тогда говорят об  $n$ -мерном векторе состояния объекта  $x(t)$  с перечисленными выше компонентами. Объект управления в этом случае называют многомерным.

Примерами управляемых величин в электрической системе являются: ток, напряжение, мощность, частота вращения и т.д.

$z_o(t), z_d(t)$  – **соответственно основное** (действующее на объект управления) **и дополнительное** (действующее на устройство управления) **возмущающие воздействия**.

Примерами основного возмущающего воздействия  $z_o(t)$  являются изменение нагрузки синхронного генератора, температуры охлаждающей его среды и т.п., а дополнительного возмущающего воздействия  $z_d(t)$  – изменение условий охлаждения УУ, нестабильность напряжения источников питания УУ и т.п.

$y(t)$  – **управляющее воздействие**.

Управляющее воздействие вырабатывается в управляющем устройстве в соответствии с алгоритмом управления в зависимости от истинного и предписанного значений управляемой величины.

$x_k(t) = x(t)$  – **контрольное воздействие** – информация об истинном значении управляемой величины.

$x_3(t)$  – **задающее воздействие** – предписанное (желаемое) значение управляемой величины.

**Алгоритм управления (алгоритм функционирования управляющего устройства)** – зависимость управляющего воздействия от задающего воздействия, управляемой величины и дополнительного возмущающего воздействия.

Для одномерной САУ алгоритм управления можно записать следующим образом:

$$y(t) = A_y[ x_3(t), x(t), z_o(t)]. \quad (1.1)$$

**Алгоритм функционирования объекта управления** – зависимость управляемой величины от управляющего и основного возмущающего воздействий.

Для одномерной САУ алгоритм функционирования объекта можно записать следующим образом:

$$x(t) = A_o[ y(t), z_o(t)]. \quad (1.2)$$

Алгоритм функционирования объекта и алгоритм управления в совокупности образуют алгоритм функционирования САУ.

Воздействия  $z(t)$  и  $x_3(t)$  являются *внешними* для рассматриваемой системы, а воздействия  $x_k(t)$  и  $y(t)$  – *внутренними*. Передача внешних и внутренних воздействий происходит через элементы САУ, которые в совокупности образуют несколько цепей воздействий. На рис.1.1 можно указать, например, цепи воздействий от величины  $x_3(t)$  к величине  $y(t)$  и далее к  $x(t)$ , от  $z_o(t)$  к  $x(t)$ .

Различают три стороны любого воздействия:

- **энергетическая** – сторона, проявляющаяся в процессах преобразования и передачи энергии;
- **метаболическая** – сторона, проявляющаяся в процессах преобразования формы и состава вещества;
- **информационная** – сторона, связанная с переносом каждым воздействием определенной информации.

Информационная сторона наиболее важна для изучения процессов, происходящих в САУ. Эти процессы заключаются в преобразовании сигналов.

**Сигнал в автоматике** – определенная физическая величина, отображающая в соответствии с принятой условностью информацию, содержащуюся в воздействии.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере конкретной САУ. На рис.1.2 изображена структура автоматической системы управления возбуждением синхронного генератора.

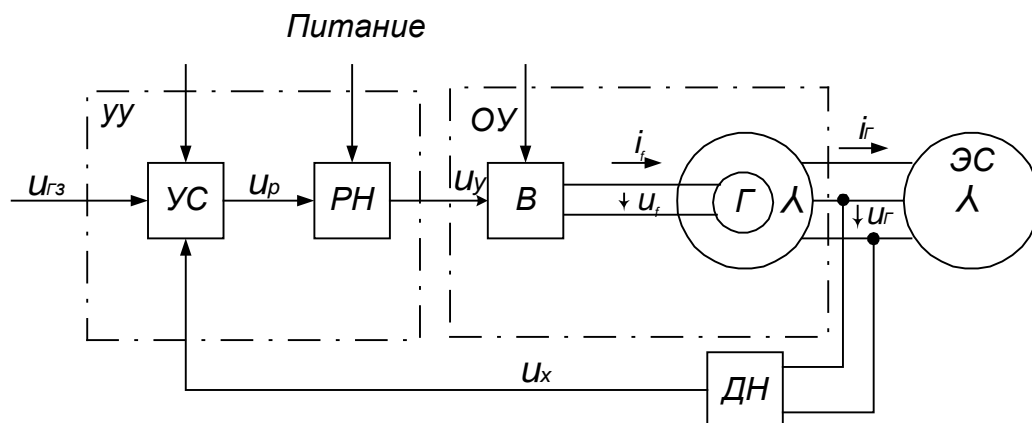


Рис. 1.2. Структура автоматической системы управления  
возбуждением синхронного генератора

Назначение системы – поддержание постоянным напряжения на выводах статорной обмотки генератора путем изменения тока в его обмотке возбуждения. Управляемой величиной  $x(t)$  в системе является напряжение  $u_r$  генератора. Сигнал  $u_x$  (контрольное воздействие  $x_k(t)$ ), пропорциональный напряжению  $u_r$ , вырабатывается датчиком напряжения  $ДН$  и передается в устройство сравнения  $УС$ , где он сравнивается с заданием  $u_{гз}$  (задающим воздействием  $x_z(t)$ ). В зависимости от знака и величины сигнала рассогласования  $u_p$  регулятор напряжения  $РН$  формирует сигнал управления  $u_y$  (управляющее воздействие  $y(t)$ ) на увеличение или уменьшение тока возбуждения  $i_f$  на выходе возбудителя  $В$ . Этот ток возбуждения и определяет напряжение  $u_r$  генератора. Основным возмущающим воздействием  $z_o(t)$  является ток нагрузки  $i_r$  генератора в цепи связи с электрической системой ЭС.

В качестве объекта управления  $ОУ$  в данной системе можно рассматривать синхронный генератор  $СГ$  с возбудителем  $В$ . К управляющему устройству  $УУ$  относятся устройство сравнения  $УС$  и регулятор напряжения  $РН$ .

## 1.2. Структура САУ

---

Изучение и математический анализ САУ существенно облегчаются, если ее предварительно мысленно расчленить на типовые элементы, выявить физические взаимосвязи между ними и отобразить эти взаимосвязи схематично в какой-либо условной форме.

САУ может быть разделена на части по различным признакам: назначению частей, алгоритмам преобразования информации, конструктивной обособленности. Соответственно различают следующие **структуры** и **структурные схемы** САУ:

- функциональную;
- алгоритмическую;
- конструктивную.

При этом будем понимать, что:

**структура** – совокупность связанных между собой частей чего-либо целого;

**структурная схема** – графическое изображение структуры.

В теории автоматического управления чаще всего имеют дело с *функциональной* и *алгоритмической* структурами (схемами). Поэтому рассмотрим их более подробно.

Функциональные и алгоритмические схемы состоят из условных изображений элементов и звеньев (обычно в виде прямоугольников) и различных связей, изображаемых в виде линий со стрелками, показывающих направление передачи воздействий. Каждая линия соответствует обычно одному сигналу или одному воздействию. Около каждой линии указывают физическую величину, характеризующую данное воздействие.

Обычно вначале составляют функциональную схему САУ, а затем – алгоритмическую.



Структурные схемы могут составляться с большей или меньшей степенью детализации. Схемы, на которых показаны лишь главные или укрупненные части САУ, называются *обобщенными* (см. рис.1.1).

**Функциональная структура (схема)** – структура (схема), отражающая функции (целевые назначения) отдельных частей САУ.

Таковыми функциями могут быть:

- получение информации о состоянии объекта управления;
- преобразование сигналов;
- сравнение сигналов и т.п.

В качестве частей функциональной структуры (схемы) САУ рассматриваются функциональные **устройства**. Названия устройств указывают на выполнение определенной функции. Например:

- датчик;
- усилитель;
- блок сравнения;
- управляющий блок;
- исполнительное устройство и т.п.

На рис.1.3 приведен пример функциональной схемы САУ, где изображены следующие функциональные устройства:

**Д** – **датчик** – предназначен для получения сигнала, пропорционального определенному воздействию;

**ЭС** – **элемент сравнения** – служит для получения сигнала, пропорционального отклонению управляемой величины  $x(t)$  от задающего воздействия  $x_z(t)$ ;

**КУ** – **корректирующее устройство** – предназначено для улучшения качества управления;

**УПБ** – **усилительно-преобразующий блок** – служит для усиления сигнала и придания ему определенной формы;

**РО** – **регулирующий орган** – служит для непосредственного воздействия на регулируемую среду (примеры РО: клапан, задвижка, тиристор и т.п.);

**ИУ** – **исполнительное устройство** – предназначено для приведения в действие регулирующего органа (примеры ИУ: электродвигатель, электромагнит и т.п.).

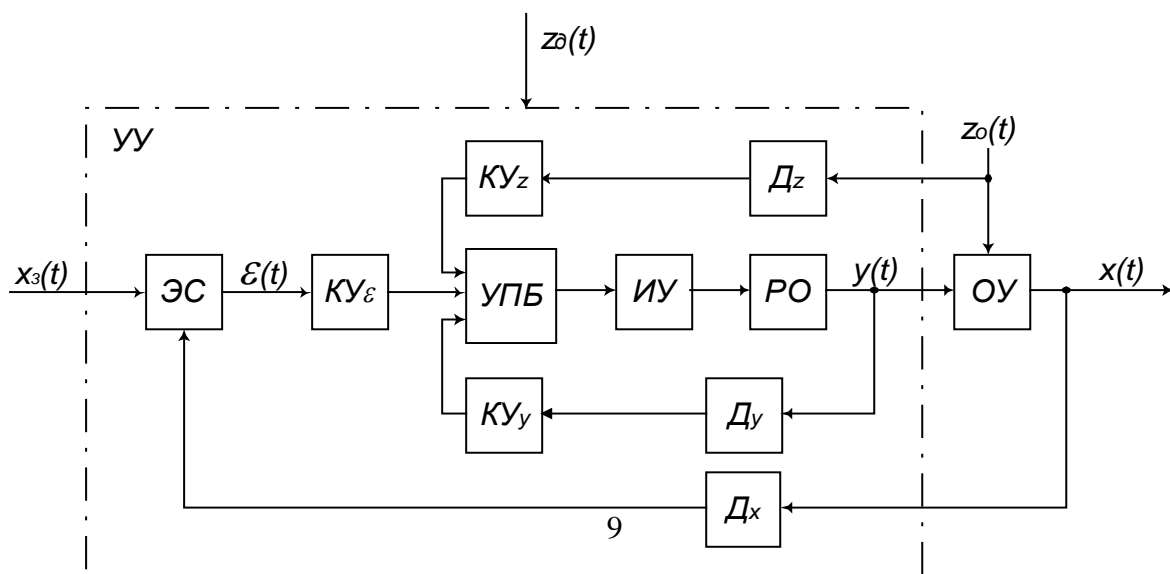


Рис. 1.3. Функциональная схема САУ

**Алгоритмическая структура (схема)** – структура (схема), представляющая собой совокупность взаимосвязанных алгоритмических звеньев и характеризующая алгоритмы преобразования информации в САУ.

При этом,

**алгоритмическое звено** - часть алгоритмической структуры САУ, соответствующая определенному математическому или логическому алгоритму преобразования сигнала.

Если алгоритмическое звено выполняет одну простейшую математическую или логическую операцию, то его называют **элементарным** алгоритмическим звеном. На схемах алгоритмические звенья изображают прямоугольниками, внутри которых записывают соответствующие операторы преобразования сигналов. Иногда вместо операторов в формульном виде приводят графики зависимости выходной величины от входной или графики переходных функций.

Различают следующие виды алгоритмических звеньев:

- статическое;
- динамическое;
- арифметическое;
- логическое.

**Статическое звено** – звено, преобразующее входной сигнал в выходной мгновенно (без инерции).

Связь между входным и выходным сигналами статического звена описывается обычно алгебраической функцией. К статическим звеньям относятся различные безинерционные преобразователи, например, резистивный делитель напряжения. На рис.1.4,а показано условное изображение статического звена на алгоритмической схеме.

**Динамическое звено** – звено, преобразующее входной сигнал в выходной в соответствии с операциями интегрирования и дифференцирования во времени.

Связь между входным и выходным сигналами динамического звена описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

К классу динамических звеньев относятся элементы САУ, обладающие способностью накапливать какой-либо вид энергии или вещества, например, интегратор на основе электрического конденсатора.

**Арифметическое звено** – звено, осуществляющее одну из арифметических операций: суммирование, вычитание, умножение, деление.

Наиболее часто встречающееся в автоматике арифметическое звено – звено, выполняющее алгебраическое суммирование сигналов, называют **сумматором**.

**Логическое звено** – звено, выполняющее какую-либо логическую операцию: логическое умножение («И»), логическое сложение («ИЛИ»), логическое отрицание («НЕ») и т.д.

Входной и выходной сигналы логического звена являются обычно дискретными и рассматриваются как логические переменные.

На рис.1.4 показаны условные изображения элементарных алгоритмических звеньев.

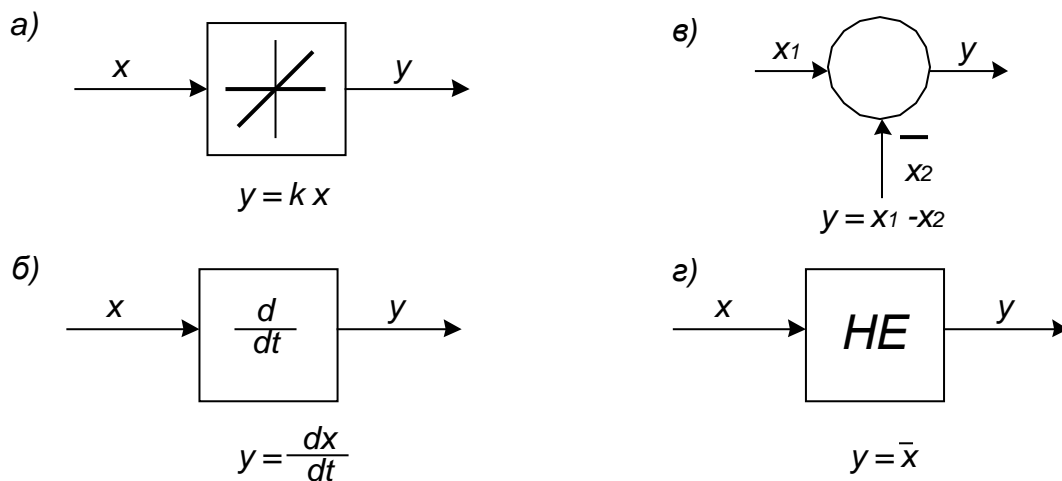


Рис 1.4. Условные изображения элементарных алгоритмических звеньев:

*а* – статическое; *б* – динамическое; *в* – арифметическое; *г* – логическое

**Конструктивная структура (схема)** – структура (схема), отражающая конкретное схемное, конструктивное и прочее исполнение САУ.

К конструктивным схемам относятся: кинематические схемы устройств, принципиальные и монтажные схемы электрические соединений и т. д. Так как ТАУ имеет дело с математическими моделями САУ, то конструктивные схемы интересуют в значительно меньшей степени чем функциональные и алгоритмические.

### 1.3. Классификация САУ

---

Классификация САУ может быть осуществлена по различным принципам и признакам, характеризующим назначение и конструкцию систем, вид применяемой энергии, используемые алгоритмы управления и функционирования и т.д.

Рассмотрим первоначально классификацию САУ по наиболее важным для теории управления признакам, которые характеризуют алгоритм функционирования и алгоритм управления САУ.

**В зависимости от характера изменения задающего воздействия во времени** САУ разделяют на три класса:

- стабилизирующие;
- программные;
- следящие.

**Стабилизирующая САУ** – система, алгоритм функционирования которой содержит предписание поддерживать значение управляемой величины постоянным:

$$x(t) \approx x_3 = const. \quad (1.3)$$

Знак  $\approx$  означает, что управляемая величина поддерживается на заданном уровне с некоторой ошибкой.

Стабилизирующие САУ самые распространенные в промышленной автоматике. Их применяют для стабилизации различных физических величин, характеризующих состояние технологических объектов. Примером стабилизирующей САУ является система регулирования возбуждения синхронного генератора (см. рис. 1.2).

**Программная САУ** – система, алгоритм функционирования которой содержит предписание изменять управляемую величину в соответствии с заранее заданной функцией времени:

$$x(t) \approx x_3(t) = f_n(t). \quad (1.4)$$

Примером программной САУ является система управления активной мощностью нагрузки синхронного генератора на электрической станции в течение суток. Управляемой величиной в системе служит активная мощность нагрузки  $P$  генератора. Закон изменения задания активной мощности  $P_3$  (задающего воздействия) определен как функция времени  $t$  в течение суток (см. рис.1.5).

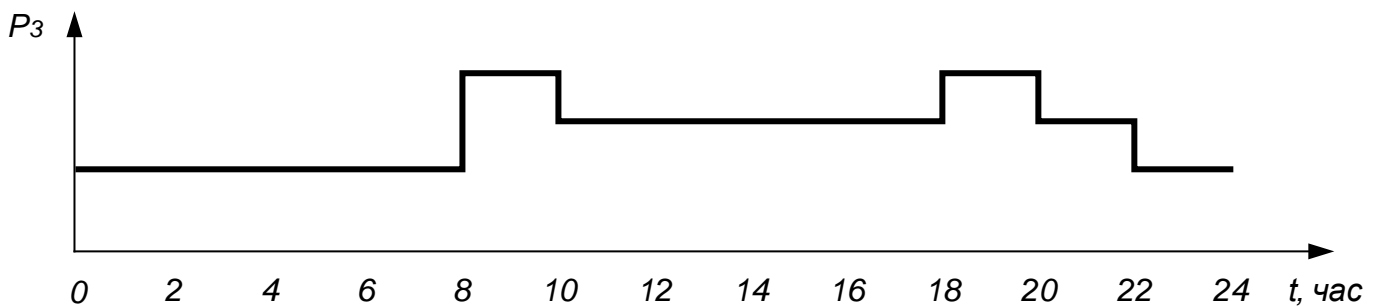


Рис. 1.5. Закон изменения задания активной мощности

**Следящая САУ** – система, алгоритм функционирования которой содержит предписание изменять управляемую величину в соответствии с заранее неизвестной функцией времени:

$$x(t) \approx x_3(t) = f_c(t). \quad (1.5)$$

Примером следящей САУ является система управления активной мощностью нагрузки синхронного генератора на электрической станции в течение суток. Управляемой величиной в системе служит активная мощность нагрузки  $P$  генератора. Закон изменения задания активной мощности  $P_3$  (задающего воздействия) определяется, например, диспетчером энергосистемы и имеет неопределенный характер в течение суток.

В стабилизирующих, программных и следящих САУ цель управления заключается в обеспечении равенства или близости управляемой величины  $x(t)$  к ее заданному значению  $x_3(t)$ . Такое управление, осуществляемое с целью поддержания

$$x(t) \approx x_3(t), \quad (1.6)$$

называется **регулированием**.

Управляющее устройство, осуществляющее регулирование, называется **регулятором**, а сама система – **системой регулирования**.

**В зависимости от конфигурации цепи воздействий** различают три вида САУ:

- с разомкнутой цепью воздействий (разомкнутая система);
- с замкнутой цепью воздействий (замкнутая система);
- с комбинированной цепью воздействий (комбинированная система).

**Разомкнутая САУ** – система, в которой не осуществляется контроль управляемой величины, т.е. входными воздействиями ее управляющего устройства являются только внешние (задающее и возмущающее) воздействия.

Разомкнутые САУ можно разделить в свою очередь на два типа:

- осуществляющие управление в соответствии с изменением только задающего воздействия (рис. 1.6, а);
- осуществляющие управление в соответствии с изменением и задающего и возмущающего воздействий (рис. 1.6, б).

Алгоритм управления разомкнутой системы первого типа имеет вид

$$y(t) = A_y [x_z(t)]. \quad (1.7)$$

Чаще всего оператор  $A_y$  устанавливает пропорциональную связь между задающим воздействием  $x_z(t)$  и управляющим воздействием  $y(t)$ , а сама система в этом случае осуществляет программное управление.

Системы первого типа работают с достаточной эффективностью лишь при условии, если влияние возмущений на управляемую величину невелико и все элементы разомкнутой цепи обладают достаточно стабильными характеристиками.

В системах управления по возмущению (рис. 1.6, б) управляющее воздействие зависит от возмущающего и задающего воздействий:

$$y(t) = A_y [x_z(t), z(t)]. \quad (1.8)$$

В большинстве случаев разомкнутые системы управления по возмущению выполняют функции стабилизации управляемой величины.

Преимущество разомкнутых систем управления по возмущению – их быстроедействие: они компенсируют влияние возмущения еще до того, как оно проявится на выходе объекта. Но применимы эти системы лишь в том случае, если на управляемую величину действуют одно или два возмущения и есть возможность измерения этих возмущений. Например, сравнительно легко можно измерять температуру, расход воды, ток нагрузки генератора. Поэтому если эти величины действуют на объект как возмущения, то обычно стремятся стабилизировать их при помощи дополнительной системы или ввести в основную систему управления данным объектом сигнал, пропорциональный такому воздействию.

**Замкнутая САУ (САУ с обратной связью)** – система, в которой входными воздействиями ее управляющего устройства являются как внешнее (задающее), так и внутреннее (контрольное) воздействия.

Управляющее воздействие в замкнутой системе (рис. 1.6, в) формируется в большинстве случаев в зависимости от величины и знака отклонения истинного значения управляемой величины от ее заданного значения:

$$y(t) = A_y [\varepsilon(t)], \quad (1.9)$$

где  $\varepsilon(t) = x_3(t) - x(t)$  – сигнал ошибки (сигнал рассогласования).

Замкнутую систему называют часто **системой управления по отклонению**.

В замкнутой системе контролируется непосредственно управляемая величина и тем самым при выработке управляющего воздействия учитывается действие всех возмущений, влияющих на управляемую величину. В этом заключается преимущество замкнутых систем. Но из-за наличия замкнутой цепи воздействий в этих системах могут возникать колебания, которые в некоторых случаях делают систему неработоспособной. Кроме того, сам принцип действия замкнутых систем (принцип управления по отклонению) допускает нежелательные изменения управляемой величины: вначале возмущение должно проявиться на выходе, система “почувствует” отклонение и лишь потом выработает управляющее воздействие, направленное на устранение этого отклонения. Такая “медлительность” снижает эффективность управления. Несмотря на наличие определенных недостатков, этот принцип управления широко применяется при создании САУ.

Основное внимание в настоящем пособии будет уделено именно замкнутым системам управления.

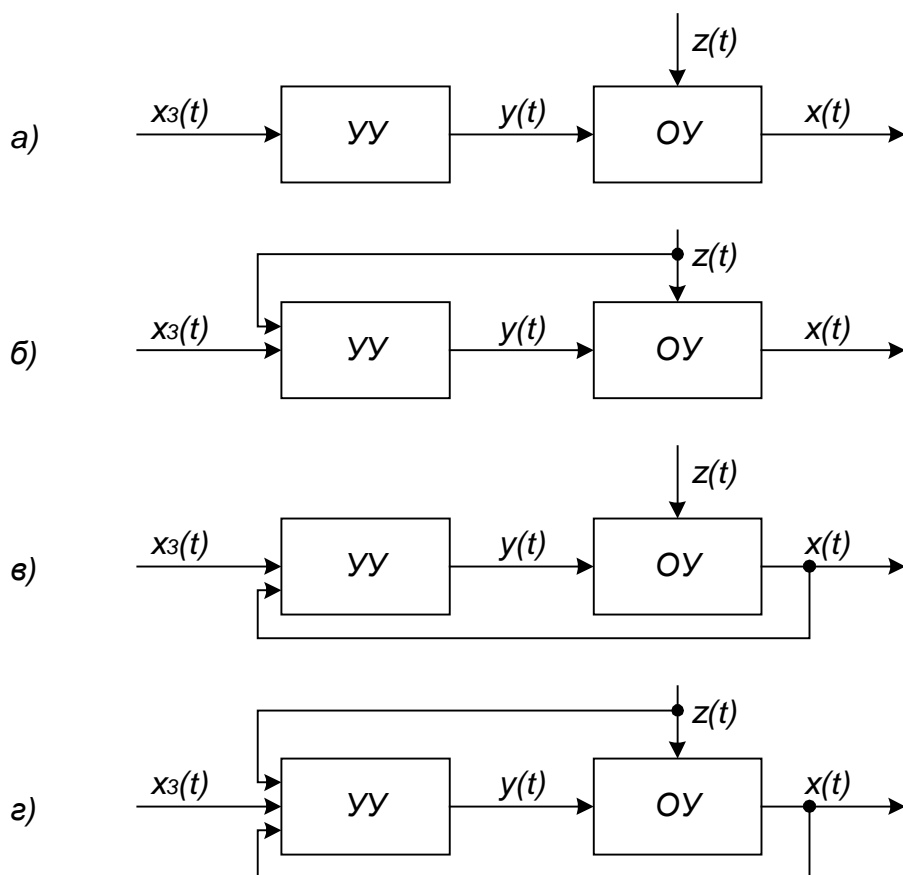


Рис. 1.6. Функциональные схемы САУ с разомкнутой (а, б), замкнутой (в) и с комбинированной (г) цепями воздействий

**Комбинированная САУ** – система, в которой входными воздействиями ее управляющего устройства являются как внешние (задающее и возмущающее), так и внутреннее (контрольное) воздействия.

В комбинированных системах (рис. 1.6, з) имеется две цепи воздействий – по заданию и по возмущению, и управляющее воздействие формируется согласно оператору

$$y(t) = A_3[\varepsilon(t)] + A_6[z(t)]. \quad (1.10)$$

Эффективность работы комбинированной САУ всегда больше, чем у порознь функционирующих замкнутой или разомкнутой систем.

**В зависимости от способа выработки управляющего воздействия** замкнутые САУ разделяют на:

- *беспоисковые;*
- *поисковые.*

**Беспоисковая САУ** – САУ, в которой управляющее воздействие вырабатывается в результате сравнения истинного значения управляемой величины с заданным значением.

Такие системы применяют для управления сравнительно несложными объектами, характеристики которых достаточно хорошо изучены и для которых заранее известно в каком направлении и на сколько нужно изменить управляющее воздействие при определенном отклонении управляемой величины от заданного значения. Таковой, например, является рассмотренная ранее САУ возбуждением синхронного генератора (рис. 1.2).

**Поисковая САУ** – САУ, в которой управляющее воздействие формируется с помощью пробных управляющих воздействий и путем анализа результатов этих пробных воздействий.

Такую процедуру поиска правильного управляющего воздействия приходится применять в тех случаях, когда характеристики объекта управления меняются или известны не полностью; например, известен вид зависимости управляемой величины от управляющего воздействия, но неизвестны числовые значения параметров этой зависимости. Поэтому *поисковые системы* называют еще **системами с неполной информацией**.

Наиболее часто принцип автоматического поиска управляющих воздействий применяют для управления объектами, характеристики которых имеют экстремальный характер. Целью управления является отыскание и поддержание управляющих воздействий, соответствующих экстремальному значению управляемой величины. Такие *поисковые системы* называют **экстремальными (оптимальными) системами**.

По такому принципу можно, например, строить САУ режимом тепловой электрической станции в условиях нестабильности теплотворной способности топлива, температуры охлаждающей воды, режима нагрузки и т.д. с целью обеспечения минимума затрат на производство тепловой и электрической энергии.

Особый класс САУ образуют системы, которые способны автоматически приспосабливаться к изменению внешних условий и свойств объекта управления, обеспечивая при этом необходимое качество управления путем изменения структуры и параметров управляющего устройства. Они называются **адаптивными (самоприспосабливающимися) системами**. В составе адаптивной САУ имеется дополнительное автоматическое устройство, которое меняет алгоритм управления основного управляющего устройства таким образом, чтобы САУ в целом осуществляла заданный алгоритм функционирования. Алгоритм

функционирования адаптивной САУ предписывает обычно максимизацию показателя качества, который характеризует либо свойства процесса управления в САУ в целом (быстродействие, точность и т.д.), либо свойства процессов, протекающих в объекте управления (производительность, достижение наивысшего коэффициента полезного действия, минимизация затрат и т. д.). Поэтому *адаптивные САУ* являются, как правило, еще и *оптимальными*.

По некоторым дополнительным признакам САУ классифицируются следующим образом.

**В зависимости от вида сигналов, действующих в системах**, САУ разделяют на:

- *непрерывные*;
- *дискретные*.

***Непрерывная САУ*** – САУ, в которой действуют непрерывные (аналоговые), определенные в каждый момент времени сигналы.

***Дискретная САУ*** - САУ, в которой действует хотя бы один дискретный, определенный только в некоторые моменты времени сигнал.

К дискретным САУ относятся, например, САУ, имеющие в своем составе цифровые вычислительные устройства: микропроцессоры, контроллеры, электронные вычислительные машины.

**По степени зависимости управляемой величины в установившемся режиме от величины возмущающего воздействия** САУ делят на:

- *статические*;
- *астатические*.

***Статическая САУ*** – САУ, в которой имеется зависимость управляемой величины в установившемся режиме от величины возмущающего воздействия.

***Астатическая САУ*** – САУ, в которой отсутствует зависимость управляемой величины в установившемся режиме от величины возмущающего воздействия.

**По виду дифференциальных уравнений, описывающих элементы САУ** они делятся на:

- *линейные*;
- *нелинейные*.

***Линейные САУ*** – САУ, все элементы которых описываются линейными дифференциальными и/или алгебраическими уравнениями.

***Нелинейные САУ*** – САУ, хотя бы один элемент которой описывается нелинейными дифференциальными и/или алгебраическими уравнениями.

**В зависимости от принадлежности источника энергии, при помощи которого создается управляющее воздействие**, различают САУ:



- *прямого действия;*
- *непрямого действия.*

**САУ прямого действия** – САУ, в которой управляющее воздействие создается при помощи энергии объекта управления.

К ним относятся простейшие системы стабилизации (уровня, расхода, давления и т. п.), в которых воспринимающий элемент через рычажную систему непосредственно действует на исполнительный орган (заслонку, клапан и т. д.).

**САУ непрямого действия** – САУ, в которой управляющее воздействие создается за счет энергии дополнительного источника.

Например, в САУ возбуждением синхронного генератора (рис. 1.2) напряжение управления  $u_y$  (управляющее воздействие) формируется регулятором напряжения  $РН$ , получающим энергию от дополнительного источника питания.

## 2. МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ САУ

---

Вы познакомитесь:

- С особенностями передаточных свойств элементов САУ.
- С характеристиками воздействий и сигналов в САУ.
- Со статическими и динамическими характеристиками элементов САУ.

### 2.1. Особенности передаточных свойств элементов САУ

---

При взаимодействии частей САУ между собой, а также и при процессе функционирования самого объекта управления осуществляется преобразование энергии одного вида в энергию другого вида. Это обусловлено различной физической природой элементов, входящих в состав САУ. Так одна и та же система может включать в себя, например, механические, электрические и гидравлические элементы. Но процессы преобразования и перераспределения энергии в САУ, в отличие от многих других физических систем, **строго ориентированы**, т. е. энергия и воздействия передаются только в определенном направлении.

Направленность передачи воздействий в САУ обеспечивается благодаря наличию у одного или нескольких конструктивных элементов системы так называемого *детектирующего свойства*. Это свойство заключается в том, что рассматриваемый элемент не оказывает обратного действия на предыдущий элемент, а его выходная величина не влияет на свою входную. Например, электрический четырехполюсник обладает *однонаправленностью* передачи воздействий, если он не нагружает предшествующий четырехполюсник, т. е. если выходное сопротивление предшествующего элемента существенно меньше входного сопротивления рассматриваемого четырехполюсника.

Обычно свойством *однонаправленности* обладают те элементы САУ, которые передают информационные воздействия. К таким элементам относятся в первую очередь измерители и преобразователи сигналов. Конструктивные части системы, через которые передаются энергетические воздействия, этим свойством, как правило, не обладают.

Только вследствие наличия элементов *направленного действия* в САУ создается замкнутый контур передачи воздействий, при помощи которого и осуществляется целенаправленный процесс управления. Без таких элементов САУ были бы неработоспособны или малоэффективны.

### 2.2. Характеристики воздействий и сигналов в САУ

---

Большое разнообразие конструкций и условий работы САУ определяет многообразие воздействий и сигналов. Анализ конкретных САУ существенно упрощается, если пользоваться разработанной в ТАУ *типизацией* воздействий и сигналов.

Рассмотрим основные типы сигналов и воздействий.

**В зависимости от характера изменения во времени различают сигналы:**

- *регулярный (детерминированный);*
- *нерегулярный.*

**Регулярный (детерминированный) сигнал** – сигнал, который изменяется по определенному закону и может быть описан конкретной математической функцией времени.

Пример регулярного сигнала приведен на рис. 2.1, а.

**Нерегулярный сигнал** – сигнал, который изменяется во времени случайным образом и не может быть представлен конкретной математической функцией.

Характер изменения случайного сигнала во времени показан на рис.2.1, б.

**В зависимости от определенности во времени различают сигналы:**

- *непрерывный (аналоговый);*
- *дискретный.*

**Непрерывный (аналоговый) сигнал** – сигнал, который определен в любой момент времени.

Примерами такого сигнала являются сигналы, приведенные на рис. 2.1, а,б.

**Дискретный сигнал** – сигнал, который определен лишь в некоторые моменты времени.

Пример дискретного сигнала приведен на рис. 2.1, в.

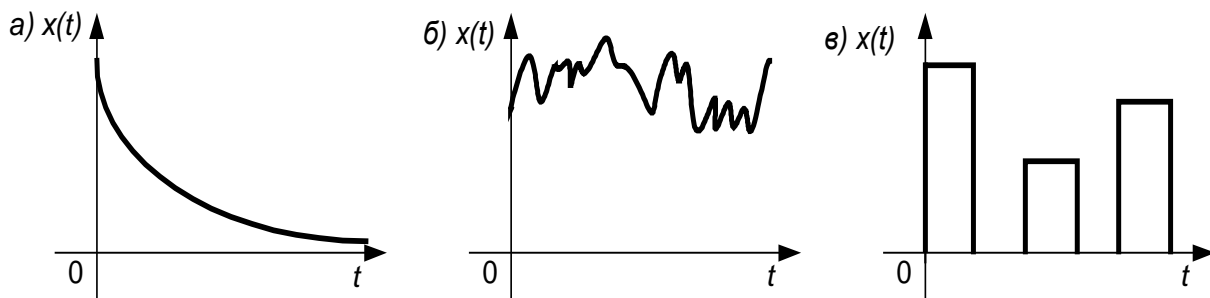


Рис. 2.1. Виды сигналов

При исследовании САУ и их элементов используют ряд *стандартных сигналов*, называемых **типовыми воздействиями**. Эти воздействия описываются простыми математическими функциями и легко воспроизводятся при исследовании САУ. Использование типовых воздействий позволяет унифицировать анализ различных систем и облегчает сравнение их передаточных свойств.

Наибольшее применение в ТАУ находят следующие типовые воздействия:

- *ступенчатое;*
- *импульсное;*
- *гармоническое;*
- *линейное.*

**Ступенчатое воздействие** – воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным (рис. 2.2, а).

Ступенчатому воздействию соответствует функция

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ a_0 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

При анализе и расчете систем удобно использовать ступенчатое воздействие, у которого величина  $a_0 = 1$ . Его называют **единичным ступенчатым воздействием** и обозначают  $\mathbf{1}(t)$ . Математическое выражение, описывающее единичное ступенчатое воздействие, имеет вид

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Любое неединичное ступенчатое воздействие можно обозначить  $a_0 \mathbf{1}(t)$ . Единичное ступенчатое воздействие, возникающее в момент времени  $t - t_1$ , обозначают  $\mathbf{1}(t - t_1)$ .

Ступенчатое воздействие чаще всего используют при исследованиях систем стабилизации параметров, так как эти воздействия наиболее близки к реальным входным (задающим и возмущающим) воздействиям систем стабилизации.

**Импульсное воздействие** – одиночный импульс прямоугольной формы (рис. 2.2, б), имеющий достаточно большую высоту и малую длительность (по сравнению с инерционностью испытываемой системы) с площадью  $a_0$ .

При математическом анализе САУ используют **единичное импульсное воздействие**, описываемое так называемой **дельта-функцией**

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \infty & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.4)$$

Последние два выражения позволяют рассматривать дельта-функцию, как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь. Дельта-функцию можно определить также как производную единичного ступенчатого воздействия:

$$\delta(t) = \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt}. \quad (2.5)$$

Неединичное импульсное ступенчатое воздействие с площадью  $a_0$  обозначается

$$x(t) = a_0 \delta(t). \quad (2.6)$$

**Гармоническое воздействие** – сигнал синусоидальной формы, описываемый функцией (рис. 2.2, в)

$$x(t) = x_m \sin \omega t, \quad (-\infty < t < \infty), \quad (2.7)$$

где  $x_m$  – амплитуда сигнала;  $\omega = 2\pi / T$  – круговая частота;  $T$  – период сигнала.

Гармонический сигнал, начинающий действовать в момент времени  $t = 0$ , описывают при помощи единичной ступенчатой функции:

$$x(t) = \mathbf{1}(t) x_m \sin \omega t, \quad (0 \leq t < \infty). \quad (2.8)$$

**Линейное воздействие** – воздействие, описываемое функцией (рис. 2.2, г)

$$x(t) = \mathbf{1}(t) a_1 t, \quad (0 \leq t < \infty). \quad (2.9)$$

Коэффициент  $a_1$  характеризует скорость нарастания воздействия  $x(t)$ .

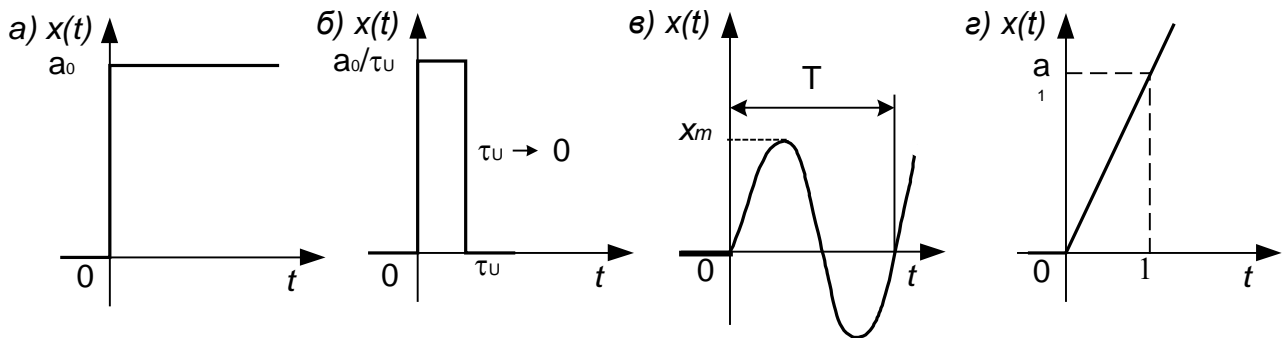


Рис. 2.2. Виды типовых воздействий

**По характеру изменения выходной величины во времени** различают следующие режимы элемента САУ:

- статический;
- динамический.

**Статический режим** – состояние элемента САУ, при котором выходная величина не изменяется во времени, т. е.  $y(t) = \text{const}$ .

Очевидно, что статический режим (или состояние равновесия) может иметь место лишь тогда, когда входные воздействия постоянны во времени. Связь между входными и выходными величинами в статическом режиме описывают алгебраическими уравнениями.

**Динамический режим** – состояние элемента САУ, при котором входная величина непрерывно изменяется во времени, т. е.  $y(t) = \text{var}$ .

Динамический режим имеет место, когда в элементе после приложения входного воздействия происходят процессы установления заданного состояния или заданного изменения выходной величины. Эти процессы описываются в общем случае дифференциальными уравнениями.

Динамические режимы в свою очередь разделяются на:

- неустановившийся (переходный);
- установившийся (квазиустановившийся).

**Неустановившийся (переходный) режим** – режим, существующий от момента начала изменения входного воздействия до момента, когда выходная величина начинает изменяться по закону этого воздействия.

**Установившийся режим** – режим, наступающий после того, когда выходная величина начинает изменяться по такому же закону, что и входное воздействие, т. е. наступающий после окончания переходного процесса.

В установившемся режиме элемент совершает вынужденное движение. Очевидно, что статический режим является частным случаем установившегося (вынужденного) режима при  $x(t) = \text{const}$ .

Понятия «переходный режим» и «установившийся режим» иллюстрируются графиками изменения выходной величины  $y(t)$  при двух типовых входных воздействиях  $x(t)$  (рис. 2.3). Граница между переходным и установившимся режимами показана вертикальной пунктирной линией.

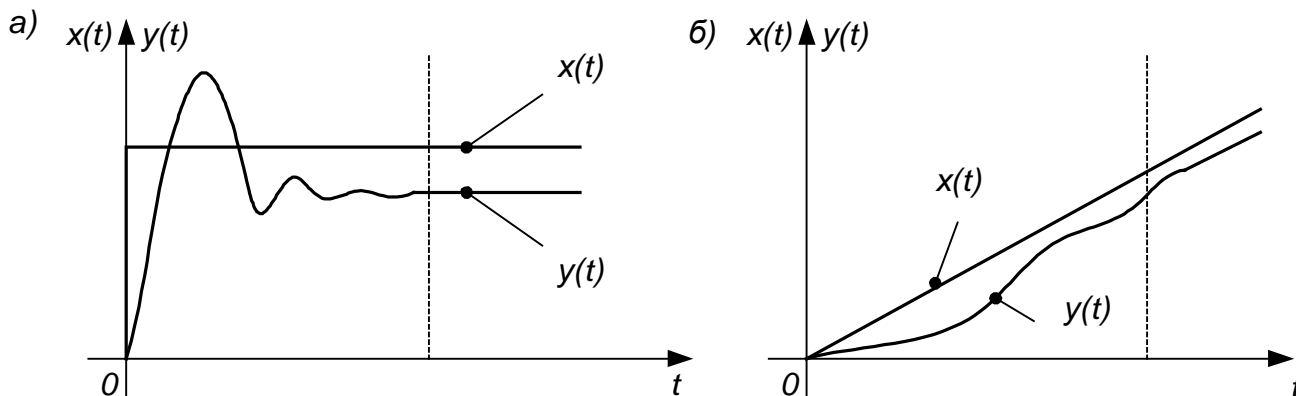


Рис. 2.3. Переходные и установившиеся режимы при типовых воздействиях

## 2.3. Статические характеристики элементов

Передаточные свойства элементов и САУ в статическом режиме описывают с помощью статических характеристик.

**Статическая характеристика элемента** – зависимость выходной величины  $y$  элемента от входной  $x$

$$y = f(x) = y(x) \quad (2.10)$$

в установившемся статическом режиме.

Статическая характеристика конкретного элемента может быть задана в аналитическом виде (например,  $y = kx^2$ ) или в виде графика (рис. 2.4).

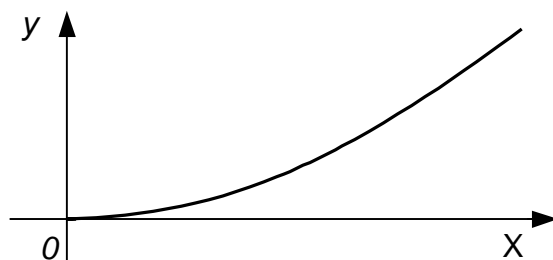


Рис. 2.4. Статическая характеристика элемента

Как правило, связь между входной и выходной величинами – однозначная. Элемент с такой связью называют **статическим (позиционным)** (рис. 2.5, а). Элемент с неоднозначной связью – **астатическим** (рис. 2.5, б).

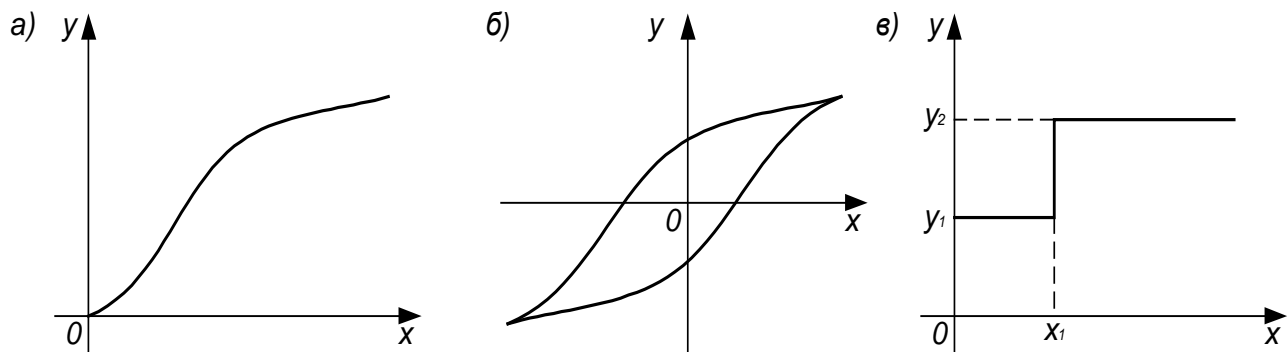


Рис. 2.5. Виды статических характеристик

По виду статических характеристик элементы разделяют на:

- *линейные;*
- *нелинейные.*

**Линейный элемент** – элемент, имеющий статическую характеристику в виде линейной функции (рис. 2.6):

$$y = b + ax. \quad (2.11)$$

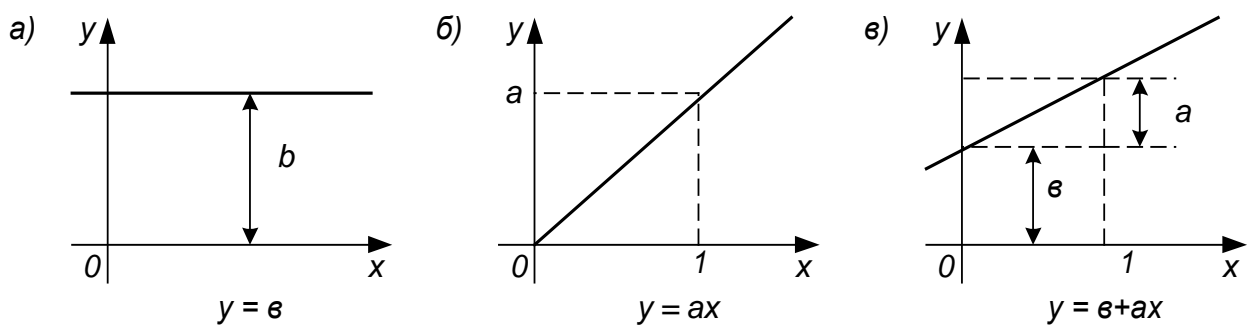


Рис. 2.6. Виды линейной функции

**Нелинейный элемент** – элемент, имеющий нелинейную статическую характеристику.

Нелинейная статическая характеристика аналитически обычно выражается в виде степенных функций, степенных полиномов, дробных рациональных функций и более сложных функций (рис. 2.7).

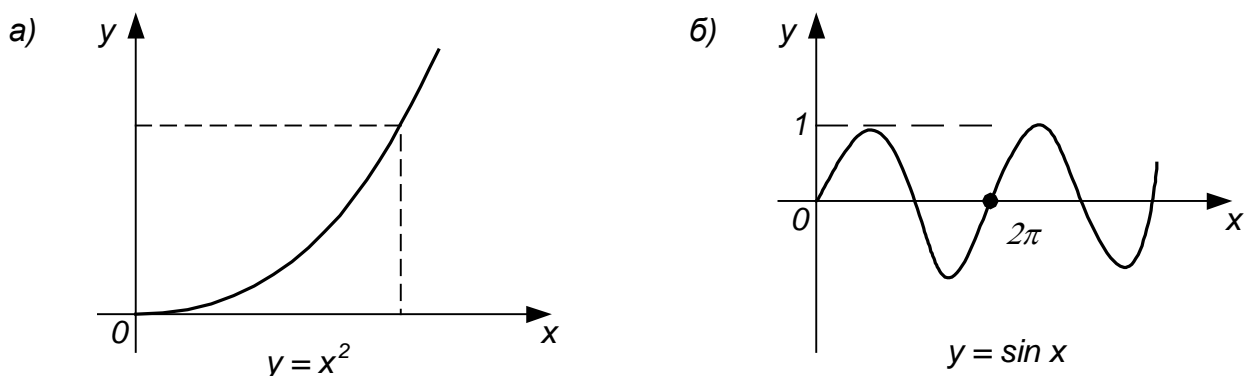


Рис. 2.7. Виды нелинейных функций

Нелинейные элементы в свою очередь подразделяют на:

- элементы с существенно нелинейной статической характеристикой;
- элементы с несущественно нелинейной статической характеристикой;

**Несущественно нелинейная статическая характеристика** – характеристика, описываемая непрерывной дифференцируемой функцией.

Практически это математическое условие означает, что график функции  $y = f(x)$  должен иметь гладкую форму (рис. 2.5, а). В ограниченном диапазоне изменения входной величины  $x$  такая характеристика может быть приближенно заменена (аппроксимирована) линейной функцией. Приближенная замена нелинейной функции линейной называется **линеаризацией**. Линеаризация нелинейной характеристики правомерна, если в процессе работы элемента его входная величина меняется в небольшом диапазоне вокруг некоторого значения  $x = x_0$ .

**Существенно нелинейная статическая характеристика** – характеристика, описываемая функцией, имеющей изломы или разрывы.

Примером существенно нелинейной статической характеристики может служить характеристика реле (рис. 2.5, в), которое при достижении входного сигнала  $x$  (ток в обмотке реле) некоторого значения  $x_1$  изменит выходной сигнал  $y$  (напряжение в коммутируемой цепи) с уровня  $y_1$  до уровня  $y_2$ . Замена такой характеристики прямой линией с постоянным углом наклона привела бы к *существенному* несоответствию между математическим описанием элемента и реальным физическим процессом, протекающим в элементе. Поэтому существенно нелинейная статическая характеристика линеаризации не подлежит.

Линеаризацию гладких (несущественно нелинейных) статических характеристик можно осуществлять либо по **методу касательной**, либо по **методу секущей**.

Так, например, линеаризация по методу касательной заключается в разложении функции  $y(x)$  в интервале вокруг некоторой точки  $x_0$  в ряд Тейлора и в последующем учете первых двух членов этого ряда:

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0), \quad (2.12)$$

где  $y'(x_0)$  – значение производной функции  $y(x)$  в заданной точке  $A$  с координатами  $x_0$  и  $y_0$ .



Геометрический смысл такой линеаризации заключается в замене кривой  $y(x)$  касательной  $BC$ , проведенной к кривой в точке  $A$  (рис. 2.8).

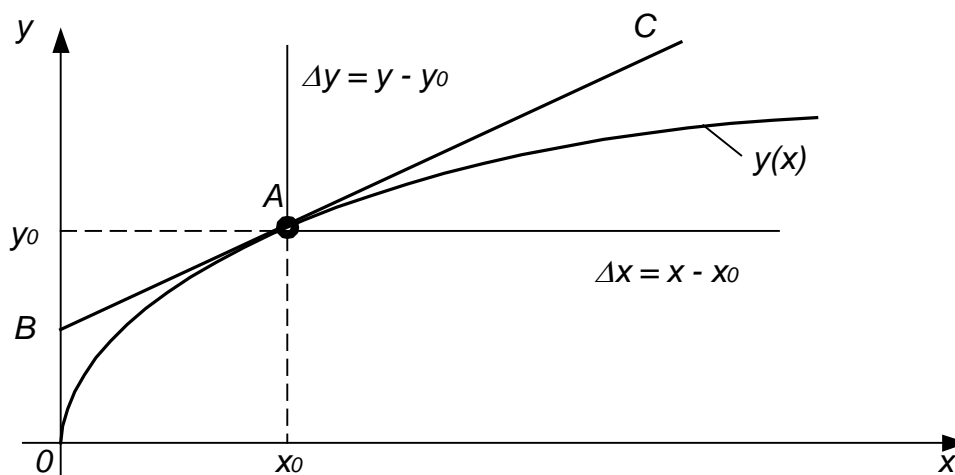


Рис. 2.8. Линеаризация статической характеристики методом касательной

При анализе САУ удобно линейные статические характеристики рассматривать в отклонениях переменных  $x$  и  $y$  от значений  $x_0$  и  $y_0$ :

$$\Delta y = y - y_0; \quad (2.13)$$

$$\Delta x = x - x_0. \quad (2.14)$$

Тогда с учетом обозначений (2.13, 2.14) выражение (2.12) принимает вид

$$\Delta y = k \Delta x, \quad (2.15)$$

где  $k = y'(x_0)$  — **передаточный коэффициент элемента**, характеризующий его передаточные свойства в статическом режиме.

## 2.4. Динамические характеристики элементов САУ

---

Передаточные свойства элементов САУ в динамическом режиме описывают с помощью *динамических характеристик*.

Различают следующие формы динамических характеристик:

- *обыкновенное дифференциальное уравнение;*
- *временные характеристики;*
- *передаточная функция;*
- *частотные характеристики.*

### 2.4.1. Обыкновенное дифференциальное уравнение

**Обыкновенное дифференциальное уравнение** является наиболее общей и полной формой описания передаточных свойств элементов САУ.

Для элемента имеющего один входной сигнал  $x(t)$  и один выходной  $y(t)$  обыкновенное дифференциальное уравнение в общем случае имеет вид

$$\Phi[y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t); x(t), \dots, x^{(m)}(t), t] = 0, \quad (2.16)$$

где  $t$  – независимая переменная (обычно время).

Для реальных систем  $m \leq n$ .

Это уравнение динамики (движения) элемента. Движения в широком смысле слова, когда под движением понимается любое изменение сигналов.

Дифференциальное уравнение (2.16) может быть:

- *линейное;*
- *нелинейное.*

**Линейное дифференциальное уравнение** – уравнение, в котором функция  $\Phi$  линейна по отношению ко всем ее аргументам, т. е. к  $y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t); x(t), \dots, x^{(m)}(t), t$ .

Так, например, передаточные свойства четырехполюсника с линейными элементами (рис. 2.9) описываются *линейным* дифференциальным уравнением вида

$$rc \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) - \mathbf{1}(t) = 0. \quad (2.17)$$

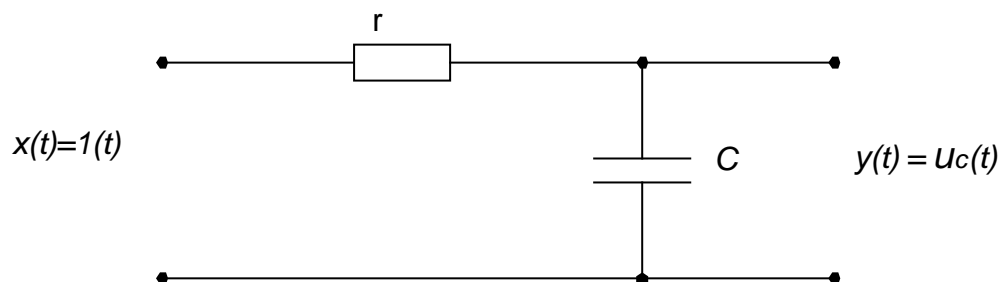


Рис. 2.9. Схема четырехполюсника с линейными элементами

**Нелинейное дифференциальное уравнение** – уравнение, в котором функция  $\Phi$  содержит произведения, частные, степени и т. д. переменных  $y(t), x(t)$  и их производных.

Так, например, передаточные свойства четырехполюсника с нелинейным резистором (рис. 2.10) описываются *нелинейным* дифференциальным уравнением вида

$$r(t)c \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) - \mathbf{1}(t) = 0. \quad (2.18)$$

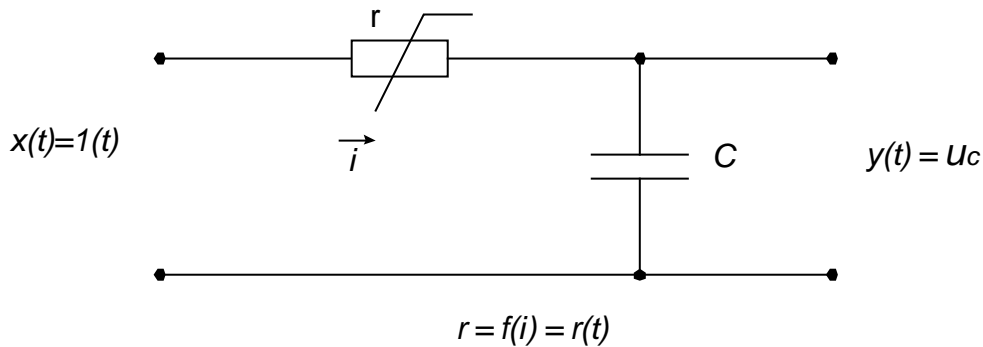


Рис. 2.10. Схема четырехполюсника с нелинейным резистором

В функцию  $\Phi$  (дифференциальное уравнение) входят также величины, называемые **параметрами**. Они связывают между собой аргументы  $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t); x(t), \dots, x^{(m)}(t), t)$  и характеризуют свойства элемента с количественной стороны. Например, *параметрами* являются масса тела, активное сопротивление, индуктивность и емкость проводника и т. д.

Большинство реальных элементов описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, что значительно усложняет последующий анализ САУ. Поэтому стремятся перейти от нелинейных к линейным уравнениям вида

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x(t). \quad (2.19)$$

Для всех реальных элементов выполняется условие  $m \leq n$ .

Коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  и  $b_0, b_1, \dots, b_m$  в уравнении (2.19) называются **параметрами**. Иногда параметры изменяются во времени, тогда элемент называют **нестационарным** или с **переменными параметрами**. Таковым, например, является четырехполюсник, схема которого приведена на рис. 2.10.

Однако в дальнейших рассуждениях будем рассматривать только элементы с *постоянными* параметрами.

Если при составлении линейного дифференциального уравнения осуществлялась линеаризация статической характеристики элемента, то оно справедливо лишь для окрестности точки линеаризации и может записываться в отклонениях переменных (2.13...2.16). Однако, с целью упрощения записи, отклонения переменных в линеаризованном уравнении будем обозначать теми же символами, что и в исходном нелинейном уравнении, но без символа  $\Delta$ .

Важнейшим практическим достоинством *линейного* уравнения (2.19) является возможность применения *принципа наложения*, согласно которому изменение выходной величины  $y(t)$ , возникающее при действии на элемент нескольких входных сигналов  $x_i(t)$ , равно сумме изменений выходных величин  $y_i(t)$ , вызываемых каждым сигналом  $x_i(t)$  в отдельности (рис.2.11).

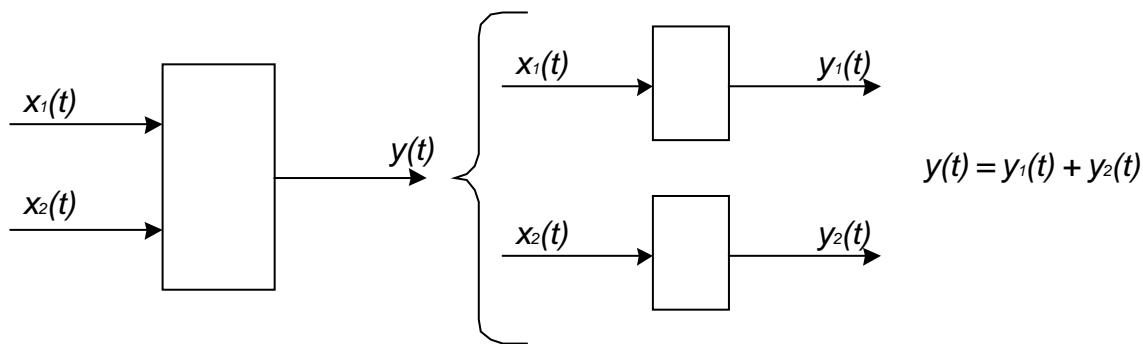


Рис. 2.11. Иллюстрация принципа наложения

## 2.4.2. Временные характеристики

Дифференциальное уравнение не дает наглядного представления о динамических свойствах элемента, но такое представление дает функция  $y(t)$ , т. е. решение этого уравнения.

Однако одно и то же дифференциальное уравнение может иметь множество решений, зависящих от начальных условий и характера входного воздействия  $x(t)$ , что неудобно при сопоставлении динамических свойств различных элементов. Поэтому было решено характеризовать эти свойства элемента только *одним* решением дифференциального уравнения, полученным при *нулевых* начальных условиях и одним из *типовых* воздействий: единичном ступенчатом, дельта-функции, гармоническом, линейном. Наиболее наглядное представление о динамических свойствах элемента дает его *переходная функция*  $h(t)$ .

**Переходная функция  $h(t)$  элемента** – изменение во времени выходной величины  $y(t)$  элемента при единичном ступенчатом воздействии и нулевых начальных условиях.

Переходная функция может быть задана:

- в виде графика;
- в аналитическом виде.

Переходная функция, как и любое решение неоднородного (с правой частью) дифференциального уравнения (2.19), имеет две составляющие:

- вынужденную  $h_g(t)$  (равна установившемуся значению выходной величины);
- свободную  $h_c(t)$  (решение однородного уравнения).

Вынужденную составляющую можно получить решая уравнение (2.19) при *нулевых* производных и  $x(t) = 1$

$$h_g(t) = y(\infty) = \frac{b_m}{a_n}. \quad (2.20)$$

Свободную составляющую получаем решая уравнение (2.19) при *нулевой* правой части

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}, \quad (2.21)$$

где  $p_k$  –  $k$ -й корень характеристического уравнения (в общем случае комплексное число);  $C_k$  –  $k$ -я постоянная интегрирования (зависит от начальных условий).

**Характеристическое уравнение** – алгебраическое уравнение, степень и коэффициенты которого совпадают с порядком и коэффициентами левой части линейного дифференциального уравнения вида (2.19)

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.22)$$

### 2.4.3. Передаточная функция

---

Наиболее распространенным методом описания и анализа САУ является операционный метод (метод операционного исчисления), в основе которого лежит прямое интегральное преобразование Лапласа для непрерывных функций

$$F(p) = Z \{ f(t) \} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (2.23)$$

Это преобразование устанавливает соответствие между функцией действительной переменной  $t$  и функцией комплексной переменной  $p = \alpha + j\beta$ . Функцию  $f(t)$ , входящую в интеграл Лапласа (2.23), называют **оригиналом**, а результат интегрирования – функцию  $F(p)$  – **изображением** функции  $f(t)$  по Лапласу.

Преобразование выполнимо лишь для функций, которые равны нулю при  $t < 0$ . Формально это условие в ТАУ обеспечивается умножением функции  $f(t)$  на единичную ступенчатую функцию  $1(t)$  или выбором начала отсчета времени с момента, до которого  $f(t) = 0$ .

Наиболее важными свойствами преобразования Лапласа при **нулевых** начальных условиях являются:

$$Z \{ f'(t) \} = pF(p); \quad (2.24)$$

$$Z \left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = F(p) / p. \quad (2.25)$$

Операционный метод в ТАУ получил широкое распространение, так как с его помощью определяют так называемую **передаточную функцию**, которая является самой компактной формой описания динамических свойств элементов и систем.

Применяя прямое преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению (2.19) с использованием свойства (2.24) получим алгебраическое уравнение

$$D(p)Y(p) = K(p)X(p), \quad (2.26)$$

где

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n - \text{собственный оператор}; \quad (2.27)$$

$$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m - \text{входной оператор}. \quad (2.28)$$

Введем понятие передаточной функции.

**Передаточная функция** – отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (2.29)$$

Тогда с учетом уравнения (2.26) и обозначений (2.27, 2.28) выражение для передаточной функции принимает вид:

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.30)$$

Значение переменной  $p$ , при которой передаточная функция  $W(p)$  обращается в бесконечность, называется **полюсом передаточной функции**. Очевидно, что полюсами являются корни собственного оператора  $D(p)$ .

Значение переменной  $p$ , при которой передаточная функция  $W(p)$  обращается в нуль, называется **нулем передаточной функции**. Очевидно, что нулями являются корни входного оператора  $K(p)$ .

Если коэффициент  $a_0 \neq 0$ , то передаточная функция не имеет нулевого полюса ( $p = 0$ ), характеризуемый ей элемент называют **астатическим** и передаточная функция этого элемента при  $p = 0$  ( $t = \infty$ ) равна **передаточному коэффициенту**

$$k = W(0) = \frac{b_m}{a_n}. \quad (2.31)$$

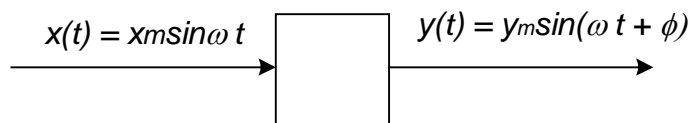
#### 2.4.4. Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и САУ в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Они находят применение в ТАУ, так как реальные возмущения, а следовательно и реакции на них элемента или САУ могут быть представлены как сумма гармонических сигналов.

Рассмотрим *сущность* и *разновидности* частотных характеристик. Пусть на вход линейного элемента (рис. 2.12, а) в момент времени  $t = 0$  подано гармоническое воздействие с частотой  $\omega$

$$x(t) = x_m \sin \omega t. \quad (2.32)$$

а)



б)

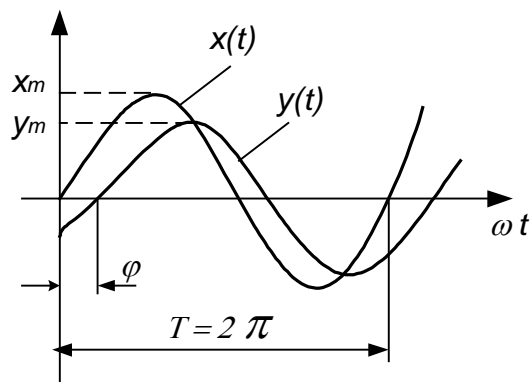


Рис. 2.12. Схема и кривые, поясняющие сущность частотных характеристик

По завершении переходного процесса установится режим вынужденных колебаний и выходная величина  $y(t)$  будет изменяться по тому же закону, что и входная  $x(t)$ , но в общем случае с другой амплитудой  $y_m$  и с фазовым сдвигом  $\varphi$  по оси времени относительно входного сигнала (рис. 2.12, б):

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.33)$$

Проведя аналогичный опыт, но при другой частоте  $\omega$ , можно увидеть, что амплитуда  $y_m$  и фазовый сдвиг  $\varphi$  изменились, т. е. они зависят от частоты. Можно убедиться также, что для другого элемента зависимости параметров  $y_m$  и  $\varphi$  от частоты  $\omega$  иные. Поэтому такие зависимости могут служить характеристиками динамических свойств элементов.

В ТАУ наиболее часто используют следующие частотные характеристики:

- амплитудная частотная характеристика (АЧХ);
- фазовая частотная характеристика (ФЧХ);
- амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ).

**Амплитудная частотная характеристика (АЧХ)** – зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частоты

$$A(\omega) = \frac{y_m}{x_m}. \quad (2.34)$$

АЧХ показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Пример АЧХ приведен на рис. 2.13, а.

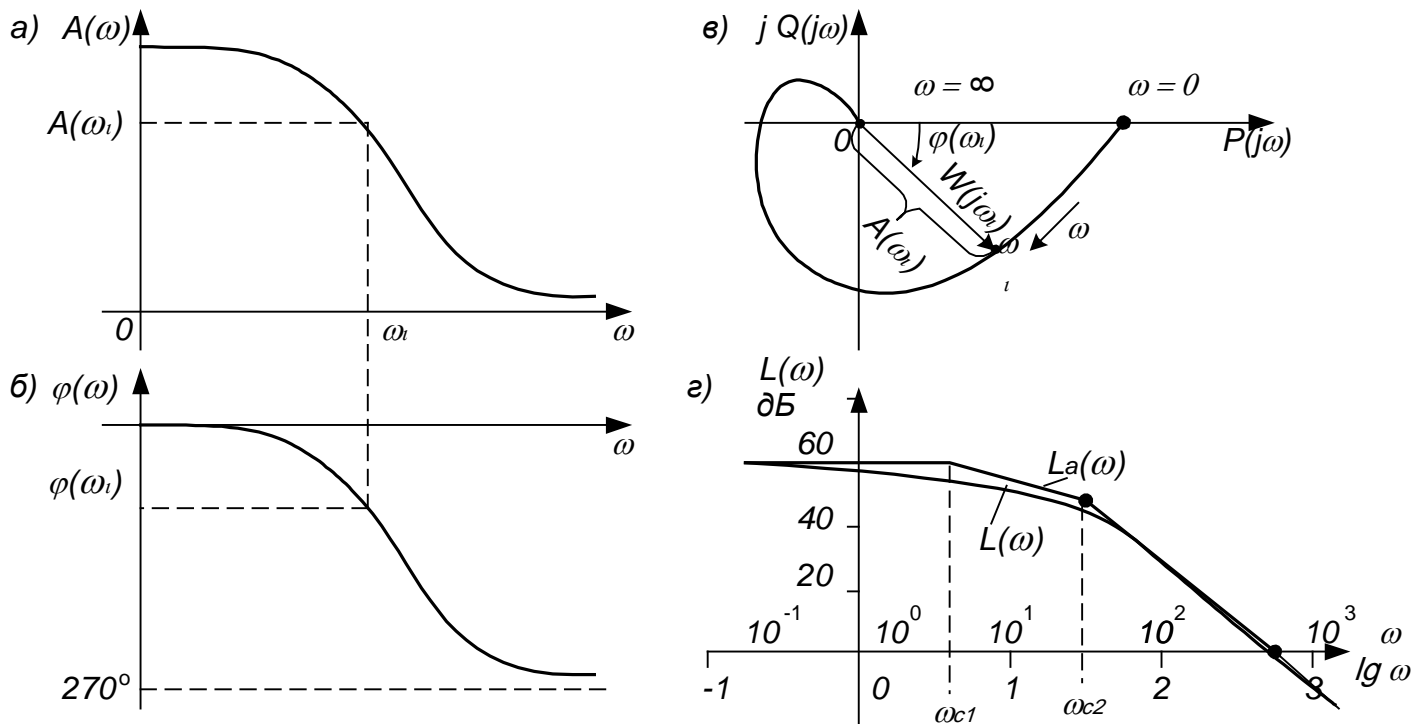


Рис. 2.13. Частотные характеристики:

$a$  – амплитудная;  $b$  – фазовая;  $в$  – амплитудно-фазовая;  $г$  – логарифмическая

**Фазовая частотная характеристика ФЧХ** – зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты.

ФЧХ показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент при различных частотах. Пример ФЧХ приведен на рис. 2.13, б.

Амплитудную и фазовую характеристики можно объединить в одну общую – **амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ)**. АФЧХ представляет собой функцию комплексного переменного  $j\omega$  :

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (\text{показательная форма}), \quad (2.35)$$

где  $A(\omega)$  – модуль функции;  $\varphi(\omega)$  – аргумент функции.

Каждому фиксированному значению частоты  $\omega_i$  соответствует комплексное число  $W(j\omega_i)$ , которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину  $A(\omega_i)$  и угол поворота  $\varphi(\omega_i)$  (рис. 2.13, в). Отрицательные значения  $\varphi(\omega)$ , соответствующие отставанию выходного сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительного направления действительной оси.

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор  $W(j\omega)$  поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно изменяется длина вектора. Кривая, которую при этом опишет конец вектора, и есть АФЧХ. Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

Проекции вектора  $W(j\omega)$  на действительную и мнимую оси называют соответственно **действительной** и **мнимой частотными характеристиками** и обозначают  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$ . Это позволяет записать АФЧХ в алгебраической форме:

$$W(j\omega) = P(\omega) + j Q(\omega) \quad (2.36)$$

АФЧХ, как и любую комплексную величину, можно также представить в тригонометрической форме

$$W(j\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega) + j A(\omega) \sin \varphi(\omega). \quad (2.37)$$

Аналитическое выражение для АФЧХ конкретного элемента можно получить из его передаточной функции путем подстановки  $p = j\omega$  :

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}. \quad (2.38)$$

Связь между различными частотными характеристиками следующая:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (2.39)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (2.40)$$

При практических расчетах САУ (без применения электронных вычислительных машин) удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называют **логарифмическими**. Они имеют меньшую кривизну и поэтому могут быть приближенно заменены ломаными линиями, составленными



из нескольких прямолинейных отрезков. Причем, эти отрезки в большинстве случаев удается построить без громоздких вычислений при помощи некоторых простых правил. Кроме того, в логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений элементов, так как умножению и делению обычных характеристик соответствует сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик.

За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик принимают декаду.

*Декада* – интервал частот, заключенный между произвольным значением частоты  $\omega_i$  и его десятикратным значением  $10\omega_i$ .

Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1.

Обычно в расчетах используют **логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ)**

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad (2.41)$$

ординаты которой измеряют в логарифмических единицах – *беллах* (Б) или *децибеллах* (дБ).

**Белл** – единица измерения мощностей двух сигналов.

Если мощность одного сигнала больше (меньше) мощности другого сигнала в 10 раз, то эти мощности отличаются на 1 Б, ( $\lg 10 = 1$ ). Так как мощность гармонического сигнала пропорциональна квадрату его амплитуды, то при применении этой единицы для измерения отношения амплитуд перед логарифмом появляется множитель 2. Например, если на некоторой частоте  $A(\omega) = 100$ , то это означает, что мощности входного и выходного сигналов отличаются в  $100^2$  раз, т.е. на  $2\lg 100 = 4$  Б или на 40 дБ, соответственно и  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 40$  дБ.

При построении фазовой частотной характеристики логарифмический масштаб применяют только для оси абсцисс (оси частоты).

На рис. 2.13, *з* показаны ЛАЧХ  $L(\omega)$  (толстая линия) и соответствующая ей приближенная (асимптотическая) характеристика  $L_a(\omega)$  в виде прямолинейных отрезков (тонкая линия). Частоты, соответствующие точкам стыковки отрезков, называют **сопрягающими** и обозначают  $\omega_c$ .

По виду частотных характеристик все элементы делятся на две группы:

- *минимально-фазовые*;
- *неминимально-фазовые*.

**Минимально-фазовый элемент** – элемент, у которого все полюсы и нули передаточной функции  $W(p)$  имеют отрицательные действительные части.

Минимально-фазовые элементы дают минимальный фазовый сдвиг  $\varphi(\omega)$  по сравнению с любыми другими элементами, имеющими такую же амплитудную характеристику  $A(\omega)$ , но у которой действительная часть хотя бы одного полюса или нуля положительна.

Минимально-фазовые элементы обладают важным для практических расчетов свойством: их частотная передаточная функция полностью определяется одной из трех составляющих –  $A(\omega)$ ,  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ . Это существенно упрощает задачи анализа и синтеза минимально-фазовых систем.

### 2.4.5. Пример определения статических и динамических характеристик элемента САУ

---

Для элемента САУ (четырёхполюсника), схема и параметры которого приведены на рис. 2.14, найдем следующие статические и динамические характеристики:

- дифференциальное уравнение;
- переходную функцию;
- передаточную функцию;
- передаточный коэффициент;
- частотные (амплитудно-фазовую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную) характеристики

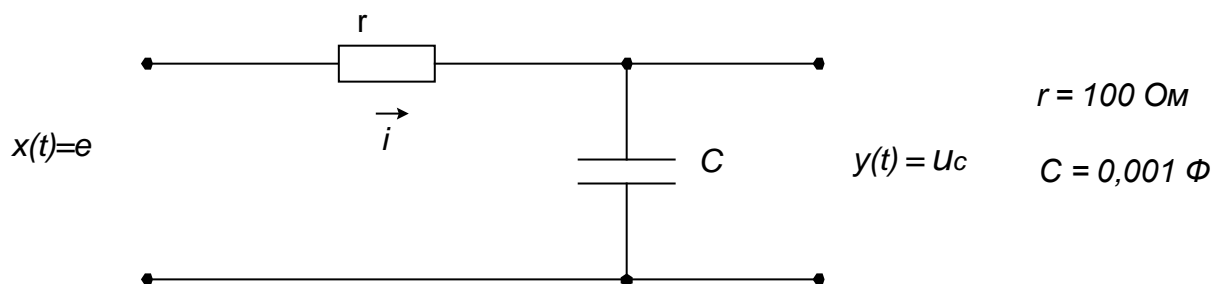


Рис. 2.14. Схема и параметры элемента

#### Составление дифференциального уравнения элемента

---

В соответствии с законами линейных электрических цепей записываем следующие уравнения:

$$r i + u_c = e ; \quad (2.41)$$

$$i = C \frac{du_c}{dt}. \quad (2.42)$$

Подставляя значение тока  $i$  из выражения (2.42) в уравнение (2.41) получаем дифференциальное уравнение

$$rc \frac{du_c}{dt} + u_c = e. \quad (2.43)$$

Подставляя параметры  $r$  и  $c$  четырехполюсника (рис. 2.15) в уравнение (2.43) получаем *искомое дифференциальное уравнение элемента*

$$0,1 \frac{du_c}{dt} + u_c = e. \quad (2.44)$$

### **Нахождение переходной функции элемента**

---

Полагаем входной сигнал четырехполюсника равным единичному ступенчатому воздействию  $e = 1(t)$ . Тогда его выходной сигнал будет равен переходной функции  $u_c = h(t)$ .

Учитывая сказанное в уравнении (2.44), приводим его к виду:

$$0,1 \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = 1(t). \quad (2.45)$$

Вынужденную составляющую переходной функции находим из уравнения (2.45), полагая в нем производную  $dh(t)/dt = 0$ ,

$$h_e(t) = 1. \quad (2.46)$$

Составляем характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (2.45)

$$0,1p + 1 = 0. \quad (2.47)$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -10.$$

Свободную составляющую переходной функции находим по выражению (2.21) при  $n = 1$  и  $p_1 = -10$

$$h_c(t) = C_1 e^{-10t} \quad (2.48)$$

Находим переходную функцию, суммируя ее вынужденную (2.46) и свободную (2.48) составляющие,

$$h(t) = h_e(t) + h_c(t) = 1 + C_1 e^{-10t}. \quad (2.49)$$

Из уравнения (2.49) при нулевых начальных условиях ( $h(0) = 0$ ) определяем коэффициент  $C_1 = -1$ .

Подставляя значение этого коэффициента в выражение (2.49), находим *искомую переходную функцию элемента*

$$h(t) = 1 - e^{-10t}. \quad (2.50)$$

График переходной функции элемента приведен на рис. 2.15.

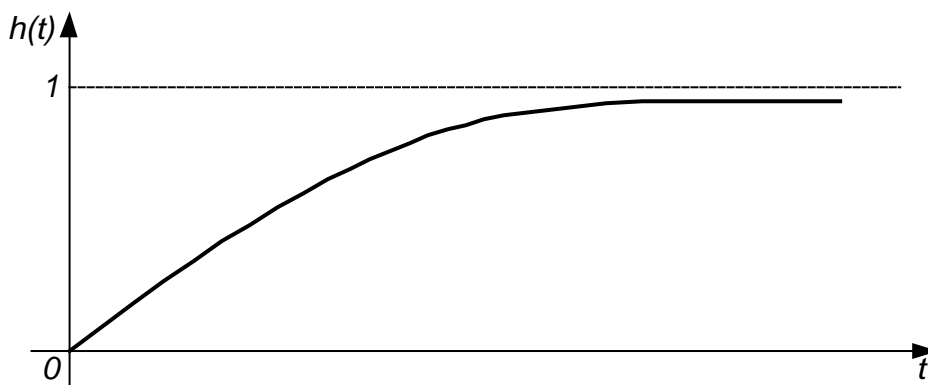


Рис. 2.15. График переходной функции элемента

### Нахождение передаточной функции элемента

---

В дифференциальном уравнении (2.44) степени полиномов правой и левой частей соответственно  $m = 0$  и  $n = 1$ . Тогда коэффициенты этого уравнения  $b_0 = 1$ ;  $a_0 = 0,1$ ;  $a_1 = 1$ .

При этих коэффициентах по выражению (2.30) находим *искомую передаточную функцию элемента*

$$W(p) = \frac{1}{0,1p + 1}. \quad (2.51)$$

### Нахождение передаточного коэффициента элемента

---

Искомый *передаточный коэффициент* элемента находим по выражению (2.31) при  $b_0 = 1$  и  $a_1 = 1$

$$K = \frac{1}{1} = 1. \quad (2.52)$$

или из выражения (2.51) при  $p=0$

$$K = W(0) = \frac{1}{0+1} = 1. \quad (2.53)$$

### Определение частотных характеристик элемента

---

*Амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ)* элемента находим из выражения (2.38) путем подстановки в него передаточной функции (2.51) при  $p = j\omega$ :

$$W(j\varpi) = \frac{1}{0,1j\varpi + 1} = \frac{1 - 0,1j\varpi}{1 + (0,1\varpi)^2} = \frac{1}{1 + 0,01\varpi^2} - j \frac{0,1\varpi}{1 + 0,01\varpi^2}. \quad (2.54)$$

Вид АФЧХ на комплексной плоскости приведен на рис. 2.16, а.

Из выражения (2.54) находим действительную и мнимую частотные характеристики

$$P(\varpi) = \frac{1}{1 + 0,01\varpi^2}; \quad (2.55)$$

$$Q(\varpi) = -\frac{0,1\varpi}{1 + 0,01\varpi^2}. \quad (2.56)$$

Подставляя значения этих характеристик в выражения (2.39) и (2.40), находим искомые выражения соответственно для **амплитудной** и **фазовой частотных характеристик**:

$$A(\varpi) = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,01\varpi^2}}; \quad (2.57)$$

$$\varphi(\varpi) = \arctg(-0,1\varpi). \quad (2.58)$$

Графики амплитудной и фазовой частотных характеристик приведены на рис. 2.16, б, в.

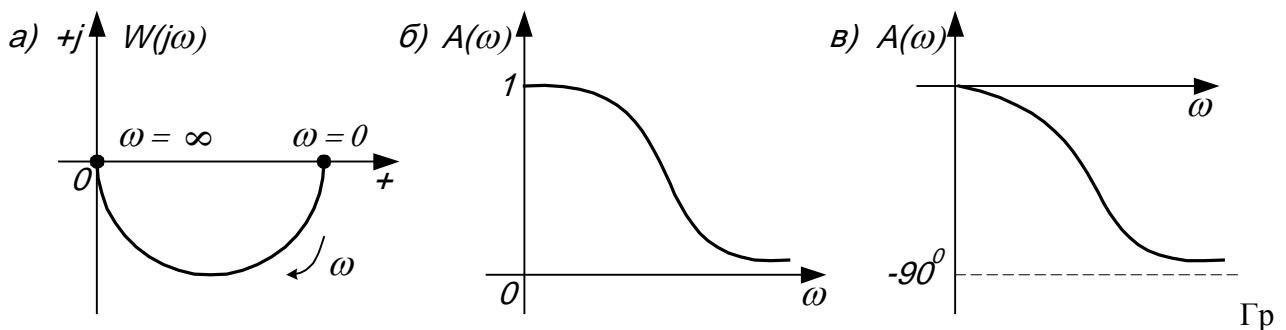


Рис. 2.16. Частотные характеристики элемента  
 а – амплитудно – фазовая, б – амплитудная, в – фазовая.

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ И МОДЕЛИ ТИПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ САУ

---

Вы узнаете:

- Что такое типовые динамические звенья.
- Как классифицируются типовые динамические звенья.
- Какие динамические модели инерционных статических объектов управления применяются в ТАУ.

#### 3.1. Что такое типовые динамические звенья?

---

Функциональные элементы, используемые в САУ, могут иметь самые различные конструктивное выполнение и принципы действия. Однако общность математических выражений, связывающих входные и выходные величины различных функциональных элементов, позволяет выделить ограниченное число так называемых *типовых алгоритмических звеньев*. Каждому типовому алгоритмическому звену соответствует определенное математическое соотношение между входной и выходной величинами. Если это соотношение является *элементарным* (например, дифференцирование, умножение на постоянный коэффициент), то и звено называется *элементарным*.

Алгоритмические звенья, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядка, получили название ***типовых динамических звеньев***.

Типовые динамические звенья являются основными составными частями алгоритмических схем непрерывных САУ, поэтому знание их характеристик существенно облегчает анализ таких систем.

#### 3.2. Классификация типовых динамических звеньев

---

Классификацию типовых динамических звеньев удобно осуществить, рассматривая различные частные формы дифференциального уравнения

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{dx(t)}{dt} + b_1 x(t). \quad (3.1)$$

Значения коэффициентов уравнения (3.1) и названия для наиболее часто применяемых звеньев приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

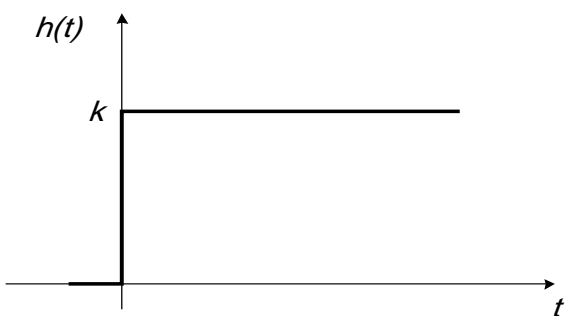
## Значения коэффициентов уравнения (3.1)

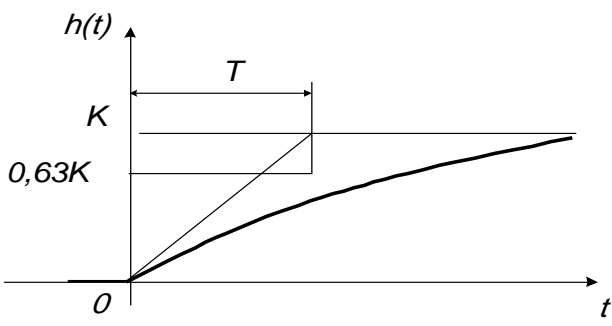
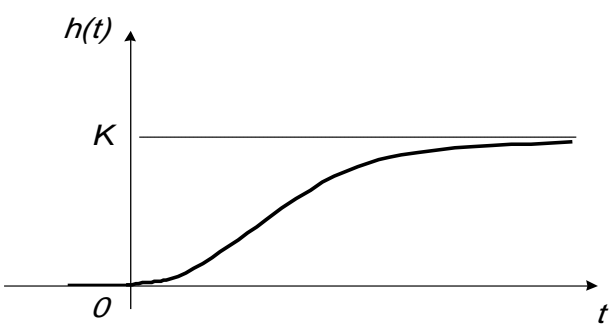
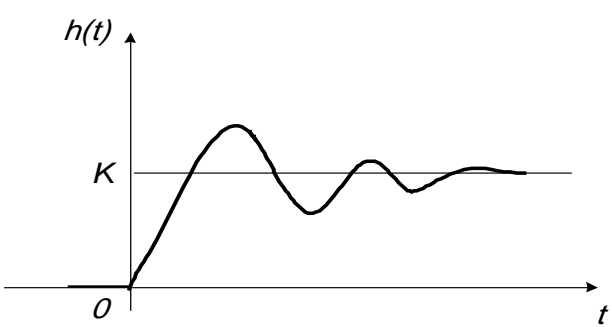
№ п/п	Наименование звена	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	Примечание
1	Безинерционное (пропорциональное)	0	0	1	0	$k$	
2	Инерционное 1-го порядка (апериодическое)	0	$T$	1	0	$k$	
3	Инерционное 2-го порядка (апериодическое)	$T_2^2$	$T_1$	1	0	$k$	$T_1 \geq 2T_2$
4	Инерционное 2-го порядка (колебательное)	$T_2^2$	$T_1$	1	0	$k$	$T_1 < 2T_2$
5	Идеальное интегрирующее	0	1	0	0	$k$	
6	Идеальное дифференцирующее	0	0	1	$k$	0	
7	Реальное дифференцирующее	0	$T$	1	$k$	0	

Передаточные и переходные функции для наиболее часто применяемых звеньев приведены в табл. 3.2.

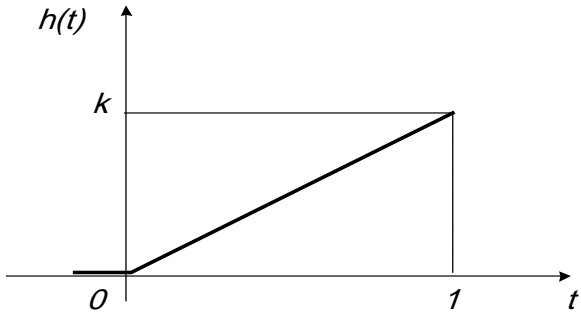

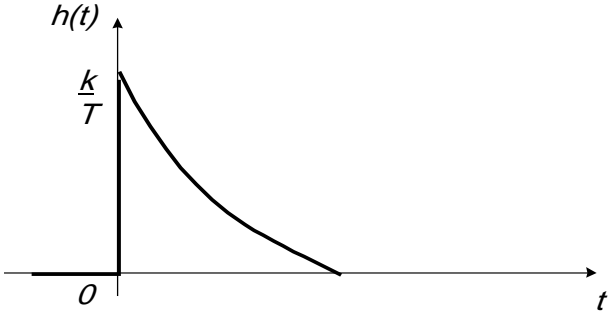
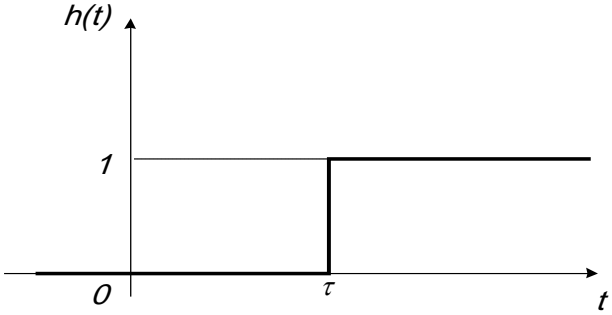
Таблица 3.2

## Передаточные и переходные функции типовых динамических звеньев

№	Наименование звена и описывающее его уравнение	Передаточная функция $W(p)$	Переходная функция $h(t)$
1	Безинерционное (пропорциональное) $y(t) = kx(t)$	$k$	$k1(t)$ 

2	<p>Инерционное 1-го порядка (апериодическое)</p> $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$	$\frac{k}{Tp + 1}$	$k(1 - e^{-t/T})1(t)$ 
3	<p>Инерционное 2-го порядка (апериодическое)</p> $T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$ $T_1 \geq 2T_2$	$\frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$ $T_1 \geq 2T_2$	$k(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4})1(t),$ <p>где <math>T_3 + T_4 = T_1</math>; <math>T_3 T_4 = T_2^2</math>.</p> 
4	<p>Инерционное 2-го порядка (колебательное)</p> $T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$ $T_1 < 2T_2$	$\frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$ $T_1 < 2T_2$	$k \left[ 1 - \frac{1}{\beta T_2} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right] 1(t),$ <p>где <math>\beta = \sqrt{1 - \xi^2} / T_2</math>; <math>\varphi = \arccos \xi</math>;  <math>\xi = T_1 / 2T_2</math>.</p> 



5	Идеальное интегрирующее $\frac{dy(t)}{dt} = kx(t)$	$\frac{k}{p}$	$kt1(t)$ 
6	Идеальное дифференцирующее $y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}$	$kp$	$k\delta(t)$ 
7	Реальное дифференцирующее $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}$	$\frac{kp}{Tp + 1}$	$\frac{k}{T} e^{-t/T}$ 
8	Звено запаздывания $y(t) = x(t - \tau)$	$e^{-p\tau}$	$1(t - \tau)$ 

### 3.3. Приближенные динамические модели инерционных статических объектов управления

При решении задач автоматизации технологических процессов часто приходится иметь дело с инерционными статическими объектами управления (например, с электрическими двигателями), переходные характеристики  $h_o(t)$ , которых имеют специфическую *s-образную* форму (рис. 3.1). Наклон, кривизна характеристики и ее расстояние от оси ординат зависят от динамических свойств конкретного объекта.

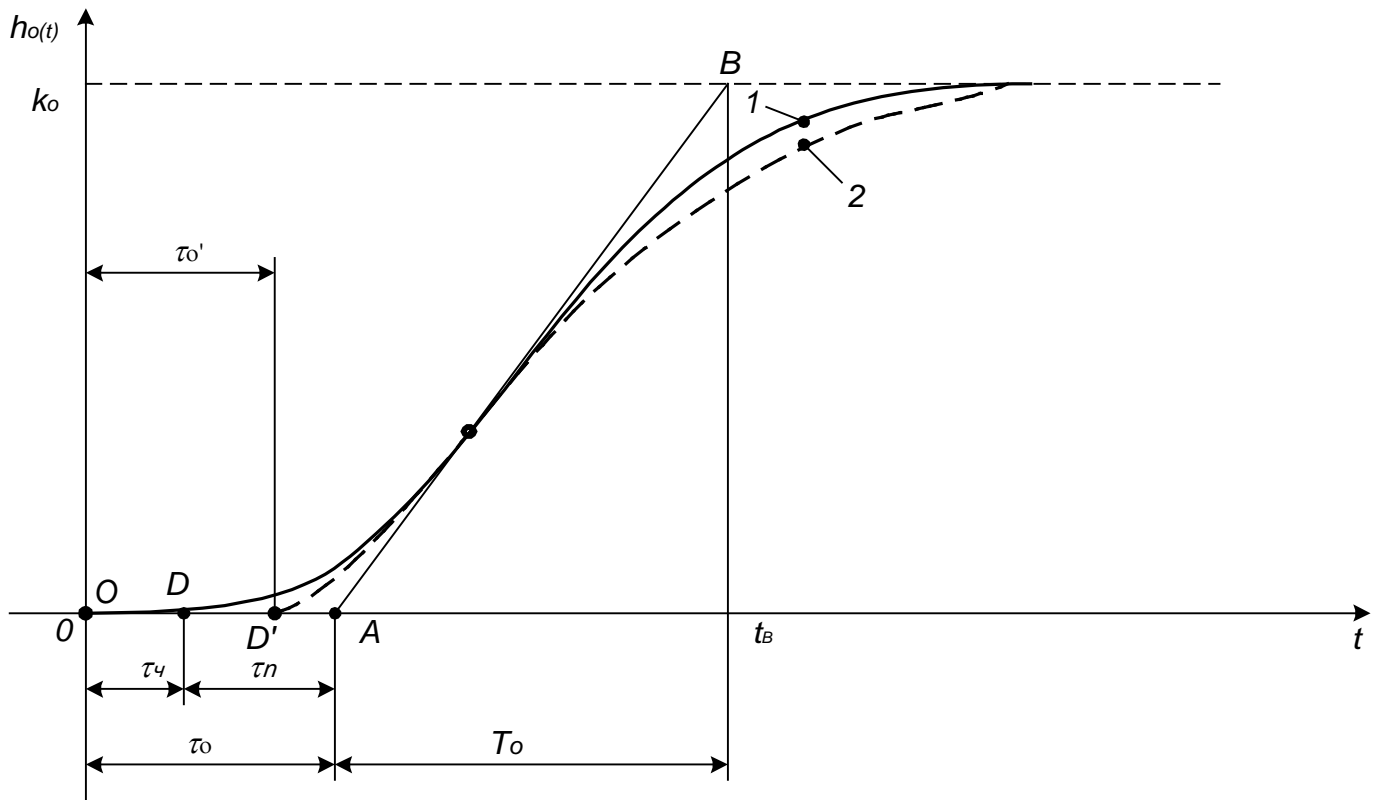


Рис. 3.1. Переходные характеристики реального объекта (1) и его приближенной модели второго порядка (2) с запаздыванием

Для практических расчетов САУ такими объектами каждую *s-образную* кривую, снятую при единичном ступенчатом воздействии, достаточно охарактеризовать следующими параметрами, определяемыми непосредственно по графику:

- передаточным коэффициентом  $k_o$ ;
- постоянной времени  $T_0$ ;
- полным запаздыванием  $\tau_0$ , которое складывается из чистого запаздывания  $\tau_\chi$  и переходного запаздывания  $\tau_n$ , т. е.  $\tau_0 = \tau_\chi + \tau_n$ .

Параметры  $T_0$  и  $\tau_0$  определяют проведением касательной  $AB$  к наиболее крутому участку переходной характеристики  $h_0(t)$ .

При расчете настроечных параметров САУ с объектами, имеющими *s-образные* переходные характеристики, ориентируются либо непосредственно на параметры  $k_0$ ,  $T_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\tau_c$  и  $\tau_n$ , которые обобщенно (**но не полно!**) характеризуют статику и динамику реального объекта, либо используют *упрощенные модели* объекта, коэффициенты которых однозначно выражаются через указанные экспериментальные параметры.

Достаточно хорошее приближение к *s-образным* переходным характеристикам дает **модель второго порядка с запаздыванием и одинаковыми постоянными времени** (рис. 3.1)

$$W_0(p) = k_0 \exp(-p\tau'_0) \frac{1}{(T'_0 p + 1)^2}, \quad (3.2)$$

где  $T'_0 = 0,368T_0$ ;  $\tau'_0 = \tau_0 - 0,107T_0$ .

Наиболее простой, но и менее точной является **модель первого порядка**

$$W_0(p) = k_0 \exp(-p\tau'_0) \frac{1}{(T'_0 p + 1)}, \quad (3.3)$$

где  $T'_0 = 0,64T_0$ ;  $\tau'_0 = \tau_0 - 0,11T_0$ .

Существуют и более сложные модели, например, **модель второго порядка с запаздыванием и разными постоянными времени**

$$W_0(p) = k_0 \exp(-p\tau_c) \frac{1}{(T_{01}p + 1)(T_{02} + 1)}, \quad (3.4)$$

Здесь параметры  $T_{01}$  и  $T_{02}$  определяются не через параметры  $T_0$  и  $\tau_0$ , а по некоторым координатам характерных точек переходной характеристики.

В большинстве случаев модель (3.4) обеспечивает достаточную для практических расчетов точность, если принять  $T_{01} = 0,5T_{02}$ . При этом постоянную времени  $T_{02}$  определяют следующим образом: по ординате  $h(t_2) = 0,63 k_0$  экспериментальной переходной характеристики находят момент времени  $t_2$ , отсчитываемый от точки  $D$ , а затем вычисляют  $T_{02} = 0,64 t_2$ . Такая аппроксимация целесообразна, когда  $h(0,5 t) \geq 0,3 k_0$ .

## 4. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ЗАМКНУТЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ СВОЙСТВ

---

Вы познакомитесь:

- С примером составления алгоритмической схемы САУ.
- С правилами преобразования алгоритмических схем.
- С передаточными функциями типовой одноконтурной САУ.
- С типовыми алгоритмами управления в линейных САУ.
- С методами моделирования САУ на ЦВМ.

### 4.1. Пример составления алгоритмической схемы САУ

---

Рассмотрим простейшую САУ возбуждением синхронного генератора, функциональная схема которой приведена на рис. 1.2. Предположим, что каждый из входящих в функциональную схему блоков имеет свою передаточную функцию. Тогда составление алгоритмической схемы САУ (рис. 4.1) сводится к замене в схеме (рис. 1.2) функциональных блоков на алгоритмические звенья с известными передаточными функциями  $W_i(p)$  и указанию наименований воздействий.

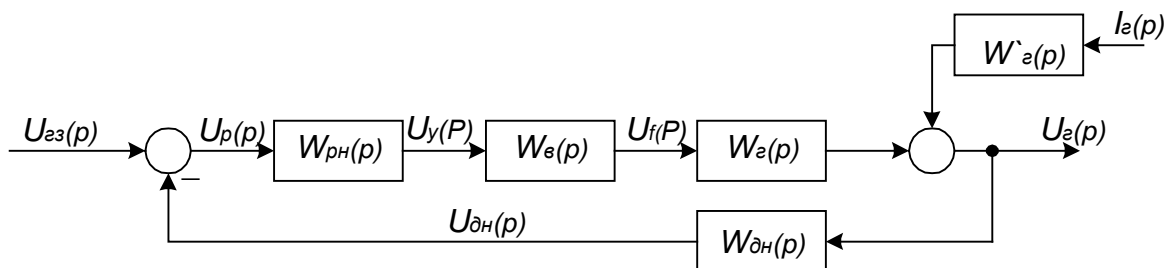


Рис. 4.1. Алгоритмическая схема САУ возбуждением синхронного генератора

### 4.2. Правила преобразования алгоритмических схем

---

Для анализа САУ используются их алгоритмические схемы. Для упрощения (свертывания) сложных алгоритмических схем применяют правила их преобразования.

Три главных правила относятся к трем типовым соединениям элементов:

- *последовательному*;
- *параллельному*;
- *встречно-параллельному (охват обратной связью)*.

Если эти соединения состоят из элементов направленного действия (с детектирующим свойством), то каждое такое соединение может быть заменено одним элементом, статические и динамические характеристики которого эквивалентны свойствам соединения.

Рассмотрим эти типовые соединения звеньев при известности их передаточных функций.

### Последовательное соединение звеньев

Найдем передаточную функцию  $W(p)$  звена (рис.4.2, б), эквивалентного последовательному соединению звеньев (рис.4.2, а).

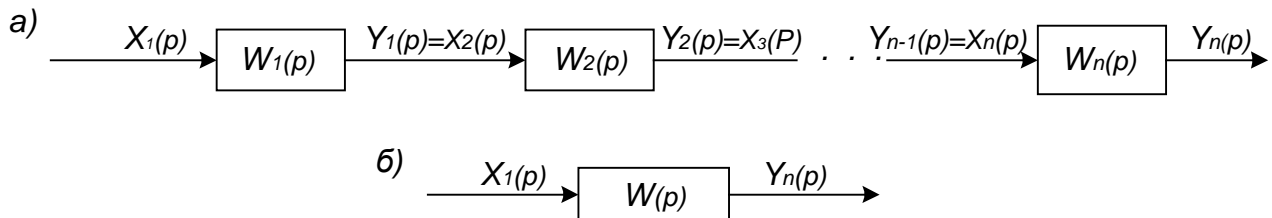


Рис. 4.2. Алгоритмические схемы последовательного соединения звеньев (а)  
и эквивалентного ему звена (б)

Искомая передаточная функция эквивалентного звена

$$W(p) = \frac{Y_n(p)}{X_1(p)} = \frac{Y_n(p)}{X_n(p)} \cdot \frac{X_n(p)}{X_{n-1}(p)} \cdot \dots \cdot \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{Y_n(p)}{X_n(p)} \cdot \frac{Y_{n-1}(p)}{X_{n-1}(p)} \cdot \dots \cdot \frac{Y_1(p)}{X_1(p)} =$$

$$= W_n(p) \cdot W_{n-1}(p) \cdot \dots \cdot W_1(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (4.1)$$

### Параллельное соединение звеньев

Найдем передаточную функцию  $W(p)$  звена (рис.4.3, б), эквивалентного параллельному соединению звеньев (рис.4.3, а).

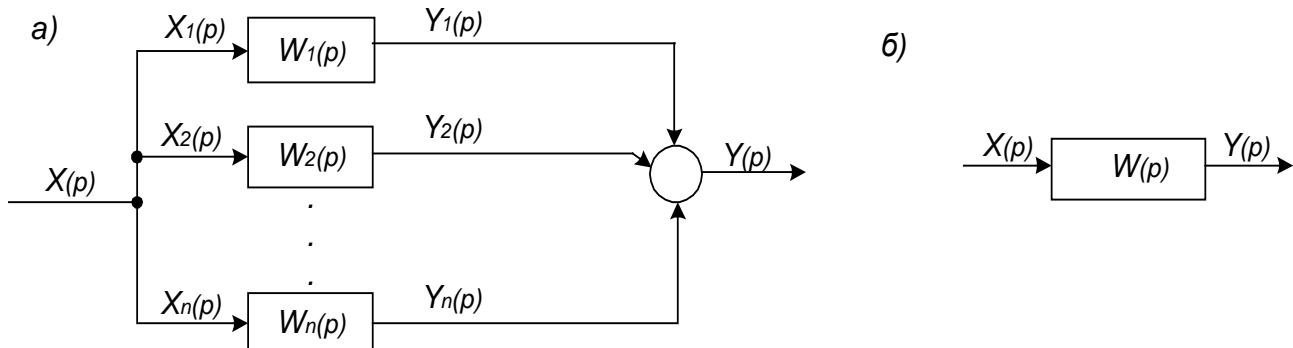


Рис. 4.3. Алгоритмические схемы параллельного соединения звеньев (а)  
и эквивалентного ему звена (б)

Искомая передаточная функция эквивалентного звена

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i(p)}{X(p)} = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i(p)}{X_i(p)} = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (4.2)$$

### Встречно-параллельное соединение звеньев

Найдем передаточную функцию  $W(p)$  звена (рис.4.4, б), эквивалентного встречно-параллельному соединению звеньев (рис.4.4, а).

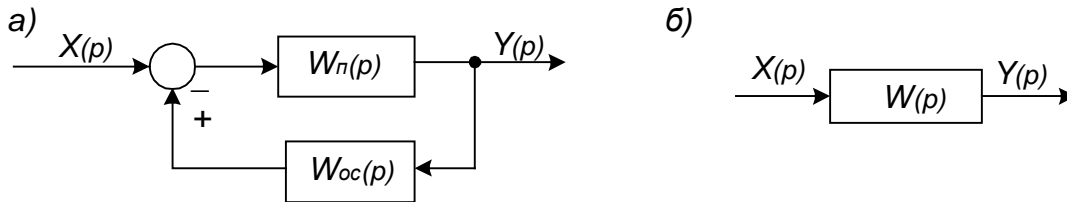


Рис. 4.4. Алгоритмические схемы встречно-параллельного соединения звеньев (а) и эквивалентного ему звена (б)

Передаточная функция соединения

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (4.3)$$

Но при этом

$$Y(p) = W_n(p)[X(p) \mp W_{oc}(p)Y(p)] \quad (4.4)$$

Здесь  $W_n(p)$  и  $W_{oc}(p)$  – передаточные функции соответственно прямой цепи и цепи обратной связи встречно-параллельного соединения звеньев.

После деления обеих частей равенства (4.4) на  $X(p)$  получаем

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = W_n(p) \left[ 1 \mp W_{oc}(p) \frac{Y(p)}{X(p)} \right]. \quad (4.5)$$

Учитывая соотношение (4.3) в равенстве (4.5), последнее приводим к виду

$$W(p) = W_n(p) [1 \mp W_{oc}(p)W(p)] \quad (4.6)$$

Решая уравнение (4.6) находим искомую передаточную функцию эквивалентного звена

$$W(p) = \frac{W_n(p)}{1 \pm W_n(p)W_{oc}(p)}. \quad (4.7)$$

При отрицательной обратной связи передаточная функция эквивалентного звена

$$W(p) = \frac{W_n(p)}{1 + W_n(p)W_{oc}(p)}. \quad (4.8)$$

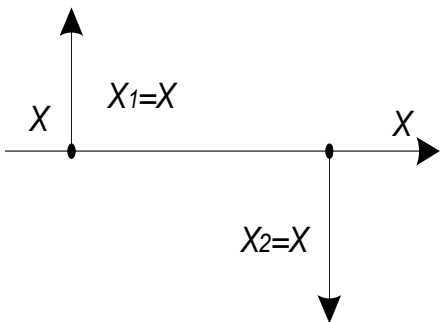
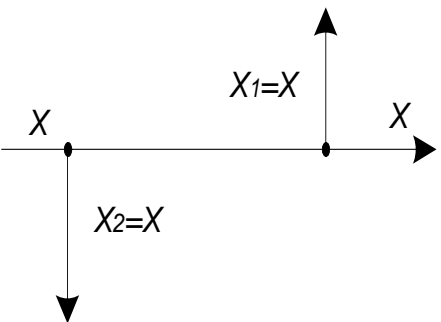
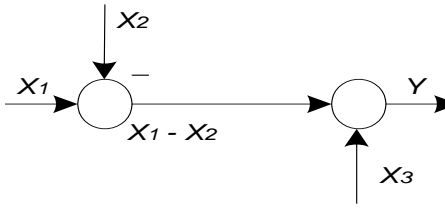
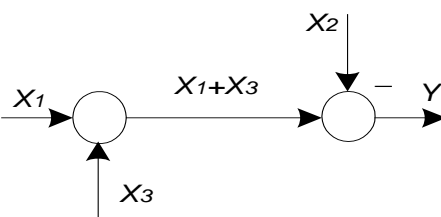
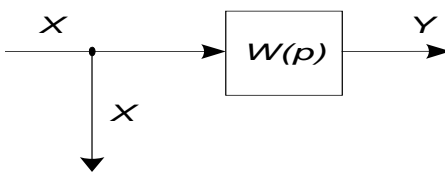
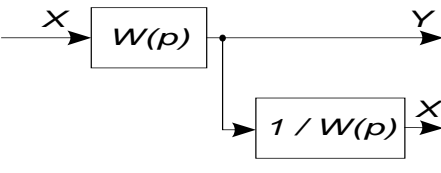
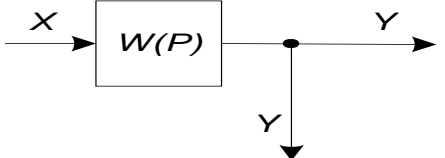
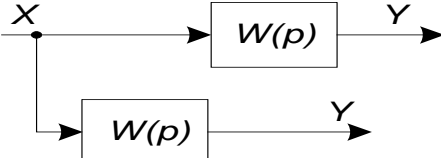
При положительной обратной связи передаточная функция эквивалентного звена

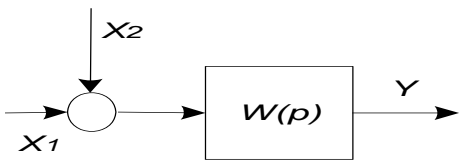
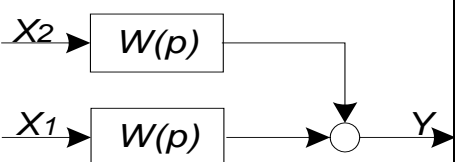
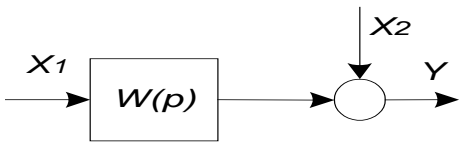
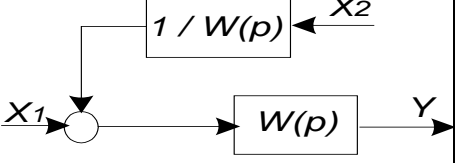
$$W(p) = \frac{W_{\Pi}(p)}{1 - W_{\Pi}(p)W_{OC}(p)}. \quad (4.9)$$

С помощью рассмотренных правил удастся преобразовать (упростить) к простейшему виду (рис.4.4, б) любую алгоритмическую схему, не содержащую *перекрестных связей* между звеньями. Если же схема многоконтурная и содержит перекрестные связи, то эти правила можно применять лишь после устранения этих перекрестных связей. Для устранения перекрестных связей следует использовать ряд вспомогательных правил преобразований алгоритмических схем, которые приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

**Вспомогательные правила преобразования алгоритмических схем**

№	Операция	Исходная схема	Преобразованная схема
1	Перестановка узлов разветвления		
2	Перестановка сумматоров		
3	Перенос узла разветвления через звено вперед		
4	Перенос узла разветвления через звено назад		

5	Перенос сумматора через звено вперед		
6	Перенос сумматора через звено назад		

### Пример применения правил преобразования алгоритмических схем

Преобразовать алгоритмическую схему САУ (рис. 4.5, а), содержащую звенья с известными передаточными функциями, к схеме с одним эквивалентным звеном.

В табл. 4.2 приведена: информация после каждой операции преобразования.

Таблица 4.2

### Операции преобразования

№	Наименование операции преобразования	Передаточная функция эквивалентного звена	№ рисунка с преобразованной алгоритмической схемой
1	Перенос сумматора $B$ через звено 1 назад	$W_7(p) = \frac{1}{W_2(p)}$	4.5, б
2	Перестановка сумматоров $A$ и $B$		4.5, в
3	Замена параллельного соединения звеньев 2 и 4	$W_8(p) = W_2(p) + W_4(p)$	4.6, а
4	Замена последовательного соединения звеньев 1 и 8	$W_9(p) = W_1(p)W_8(p)$	4.6, б
5	Замена последовательного соединения звеньев 6 и 7	$W_{10}(p) = W_6(p)W_7(p)$	4.6, в
6	Замена встречно-параллельного соединения звеньев 5 и 9	$W_{11}(p) = \frac{W_9(p)}{1 + W_9(p)W_5(p)}$	4.6, г
7	Замена последовательного соединения звеньев 3 и 11	$W_{12}(p) = W_3(p)W_{11}(p)$	4.6, д
8	Замена встречно-параллельного соединения звеньев 10 и 12	$W_{13}(p) = \frac{W_{12}(p)}{1 + W_{12}(p)W_{10}(p)}$	4.6, е



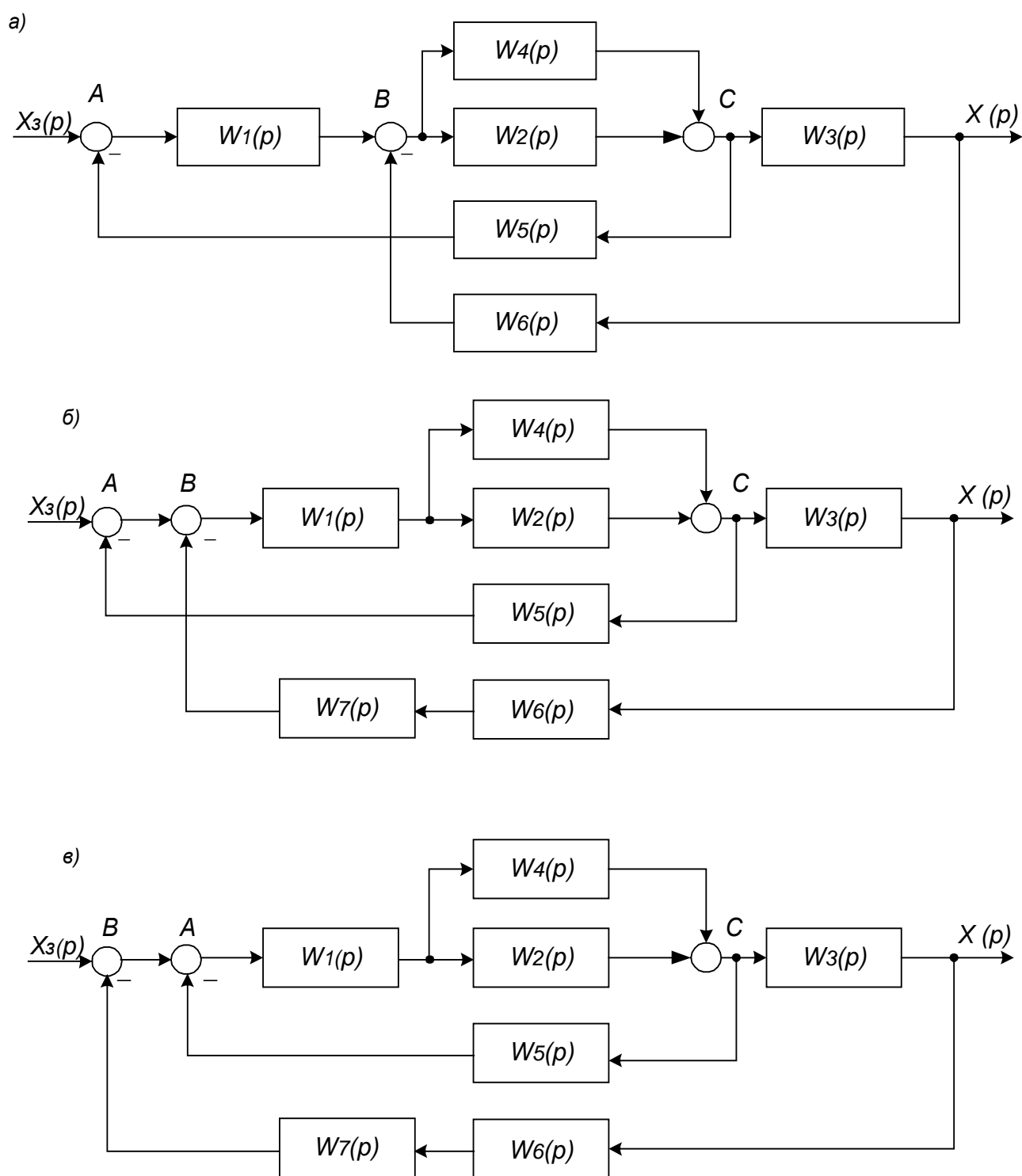


Рис. 4.5. Алгоритмические схемы САУ

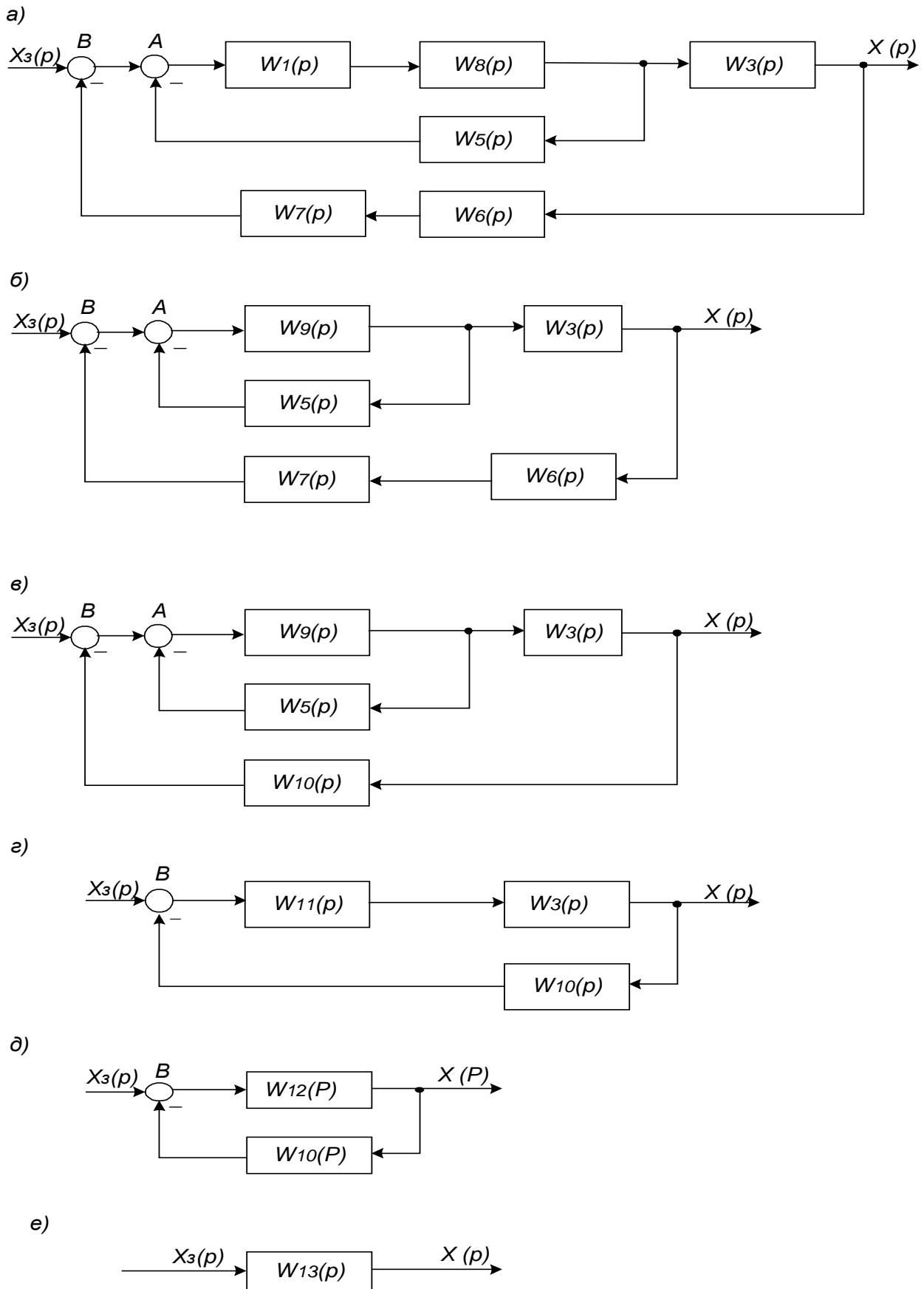


Рис. 4.6. Алгоритмические схемы САУ

### 4.3. Передаточные функции типовой одноконтурной САУ

Под **типовой одноконтурной САУ** будем понимать систему, обобщенная функциональная схема которой приведена на рис. 1.6, в. Ей соответствует обобщенная алгоритмическая схема (рис. 4.7). Объект управления характеризуется одной управляемой переменной  $X(p)$ , которую требуется стабилизировать на заданном уровне  $X_3(p)$ . На стабилизируемую переменную  $X(p)$  влияет возмущение  $X_B(p)$ . Отклонение стабилизируемой переменной  $X(p)$ , вызываемое этим возмущением компенсируется в системе целенаправленными изменениями управляющего воздействия  $Y(p)$ , которое создается регулятором (управляющим устройством). На входе регулятора с передаточной функцией  $W_P(p)$  действует сигнал рассогласования (ошибки)  $\varepsilon(p)$ . Этот сигнал формируется в результате сравнения (алгебраического суммирования) задающего воздействия  $X_3(p)$  и управляемой величины  $X(p)$ ,

Составим передаточные функции и уравнение динамики (движения) типовой одноконтурной САУ, алгоритмическая схема которой приведена на рис. 4.7.

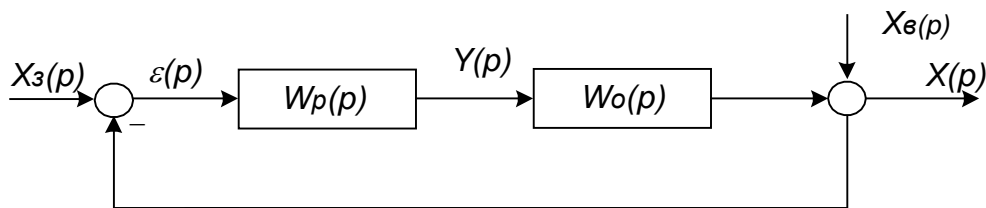


Рис. 4.7. Обобщенная алгоритмическая схема САУ

**Передаточная функция САУ по задающему воздействию** - передаточная функция преобразованной разомкнутой САУ с одним звеном при возмущающем воздействии  $X_B(p) = 0$  (рис. 4.8).

Она имеет вид

$$\Phi_3(p) = \frac{X(p)}{X_3(p)} = \frac{W_P(p)W_O(p)}{1 + W_P(p)W_O(p)}. \quad (4.10)$$

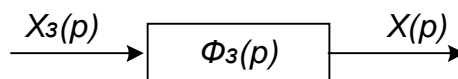


Рис. 4.8. Алгоритмическая схема САУ для определения ее передаточной функции по задающему воздействию

**Передаточная функция САУ по возмущающему воздействию** - передаточная функция преобразованной разомкнутой САУ с одним звеном при задающем воздействии  $X_3(p) = 0$  (рис. 4.9).

Она имеет вид

$$\Phi_B(p) = \frac{X(p)}{X_B(p)} = \frac{1}{1 + W_P(p)W_O(p)}. \quad (4.11)$$

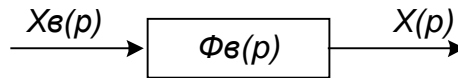


Рис. 4.9. Алгоритмическая схема САУ для определения ее передаточной функции по возмущающему воздействию

Согласно принципу наложения общее изменение выходной величины  $X(p)$ , возникающее при совместном действии входных воздействий  $X_3(p)$  и  $X_B(p)$ , равно сумме изменений, создаваемых каждым воздействием в отдельности. Отсюда **уравнение динамики САУ** в краткой записи

$$X(p) = X_3(p)\Phi_3(p) + X_B(p)\Phi_B(p) \quad (4.12)$$

или в развернутом виде

$$X(p) = X_3(p) \frac{W_P(p)W_O(p)}{1 + W_P(p)W_O(p)} + X_B(p) \frac{1}{1 + W_P(p)W_O(p)}. \quad (4.13)$$

#### 4.4. Типовые алгоритмы управления в линейных САУ

---

**Алгоритм управления (регулирования) в САУ** устанавливает связь ошибки  $\varepsilon(p)$  и управляющего воздействия  $Y(p)$ ,

Эта связь в типовой одноконтурной САУ (рис. 4.7) определяется передаточной функцией регулятора

$$W_P(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)}. \quad (4.14)$$

В линейных САУ применяются следующие *типовые алгоритмы управления (регулирования)*:

- *пропорциональный (П) алгоритм;*
- *интегральный (И) алгоритм;*
- *пропорционально-интегральный (ПИ) алгоритм;*
- *пропорционально-дифференциальный (ПД) алгоритм;*
- *пропорционально-дифференциально-интегральный (ПИД) алгоритм;*

### **Пропорциональный алгоритм регулирования (П-алгоритм).**

Это простейший алгоритм, который реализуется при помощи безинерционного звена с передаточной функцией

$$W_p(p) = k_{\Pi}. \quad (4.15)$$

Так как управляющее воздействие *пропорционально* сигналу ошибки

$$Y(p) = k_{\Pi} \varepsilon(p), \quad (4.16)$$

то и алгоритм получил название *пропорционального*, а регулятор – **П-регулятора**.

Преимущества П-регулятора – *простота и быстроедействие*, недостатки – *ограниченная точность* (особенно при управлении объектами с большой инерционностью и запаздыванием).

### **Интегральный алгоритм регулирования (И-алгоритм).**

Этот алгоритм реализуется при помощи интегрального звена с передаточной функцией

$$W_p(p) = \frac{k_{\Pi}}{p}. \quad (4.17)$$

Так как управляющее воздействие пропорционально *интегралу* сигнала ошибки

$$Y(p) = \frac{k_{\Pi}}{p} \varepsilon(p), \quad (4.18)$$

то и алгоритм получил название *интегрального*, а регулятор **И-регулятора**.

При интегральном алгоритме регулирования управляющее воздействие  $y$  в каждый момент времени пропорционально интегралу от сигнала ошибки  $\varepsilon$ . Поэтому И-регулятор реагирует главным образом на длительные отклонения управляемой величины  $x$  от заданного значения  $x_3$ . Кратковременные отклонения сглаживаются таким регулятором.

Преимущества И-регулятора – *лучшая* (по сравнению с П-регулятором) *точность в установившихся режимах*, недостатки – *худшие свойства в переходных режимах* (меньшее быстроедействие и более высокая колебательность).

### **Пропорционально-интегральный алгоритм регулирования (ПИ-алгоритм).**

Этот алгоритм реализуется при помощи регулятора с передаточной функцией

$$W_p(p) = k_{\Pi} + \frac{k_{\Pi}}{p}. \quad (4.19)$$

Так как управляющее воздействие пропорционально как самому сигналу ошибки, так и его интегралу

$$Y(p) = (k_{\Pi} + \frac{k_{\Pi}}{p}) \varepsilon(p), \quad (4.20)$$

то алгоритм получил название *пропорционально-интегрального*, а регулятор – **ПИ-регулятора**.

Благодаря наличию интегральной составляющей в алгоритме, ПИ-регулятор обеспечивает высокую точность в установившихся режимах, а при определенном соотношении

коэффициентов  $k_P$  и  $k_I$  обеспечивает хорошие показатели и в переходных режимах. Поэтому он получил наибольшее распространение в промышленной автоматике.

### **Пропорционально-дифференциальный алгоритм регулирования (ПД-алгоритм).**

Этот алгоритм реализуется при помощи регулятора с передаточной функцией

$$W_p(p) = k_P + k_D p. \quad (4.21)$$

Так как управляющее воздействие пропорционально как самому сигналу ошибки, так и его производной

$$Y(p) = (k_P + k_D p) \varepsilon(p), \quad (4.22)$$

то алгоритм получил название **пропорционально-дифференциального**, а регулятор – **ПД-регулятора**.

ПД-регулятор реагирует не только на величину сигнала ошибки, но и на скорость его изменения. Благодаря этому при регулировании достигается *эффект упреждения*. Недостатком ПД-регулятора является невозможность обеспечения высокой точности регулирования.

### **Пропорционально-интегрально-дифференциальный алгоритм регулирования (ПИД-алгоритм).**

Этот алгоритм реализуется при помощи регулятора с передаточной функцией

$$W_p(p) = k_P + \frac{k_I}{p} + k_D p. \quad (4.23)$$

Так как управляющее воздействие пропорционально как самому сигналу ошибки, так и его интегралу и производной

$$Y(p) = (k_P + \frac{k_I}{p} + k_D p) \varepsilon(p), \quad (4.24)$$

то алгоритм получил название **пропорционально-интегрально-дифференциального**, а регулятор – **ПИД-регулятора**.

ПИД-алгоритм – наиболее гибкий алгоритм регулирования (в классе линейных алгоритмов). Он сочетает в себе преимущества более простых выше рассмотренных алгоритмов.

Коэффициенты  $k_P$ ,  $k_I$ ,  $k_D$ , входящие в передаточные функции типовых регуляторов, подлежат настройке при наладке САУ и поэтому называются **настройчными параметрами**. Они имеют наименования:  $k_P$ ,  $k_I$ ,  $k_D$  – **коэффициенты пропорциональной, интегральной и дифференциальной частей САУ**.

## 5. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ САУ

---

Вы узнаете:

- Что такое устойчивость САУ.
- Общее математическое условие устойчивости.
- Какие критерии применяют при анализе устойчивости САУ.
- Что такое области устойчивости САУ и как их определяют.
- Как влияют структура и параметры САУ на ее устойчивость.

### 5.1. Что такое устойчивость САУ?

---

Одной из важнейших характеристик САУ является ее устойчивость.

**Устойчивость САУ** – свойство системы возвращаться в состояние равновесия после прекращения изменения воздействия, выведшего систему из этого состояния.

**Неустойчивая САУ** не возвращается в состояние равновесия, а непрерывно удаляется от него

От устойчивости САУ зависит ее работоспособность. Система, не обладающая устойчивостью, вообще не способна выполнять функции управления и имеет нулевую или даже отрицательную эффективность. Неустойчивая система может привести управляемый объект в аварийное состояние. Поэтому проблема устойчивости систем является одной из *центральных* в теории автоматического управления.

Проявлением, по которому можно судить об устойчивости или неустойчивости системы, является характер изменения ее сигналов во времени, например, управляемой величины  $x(t)$ . Если управляемая величина  $x(t)$  после прекращения изменения, например, задающего воздействия  $x_3(t)$  становится с течением времени постоянной (рис.5.1, а), то система ведет себя *устойчиво*. Если же управляемая величина  $x(t)$  – возрастает, то система ведет себя *неустойчиво*.

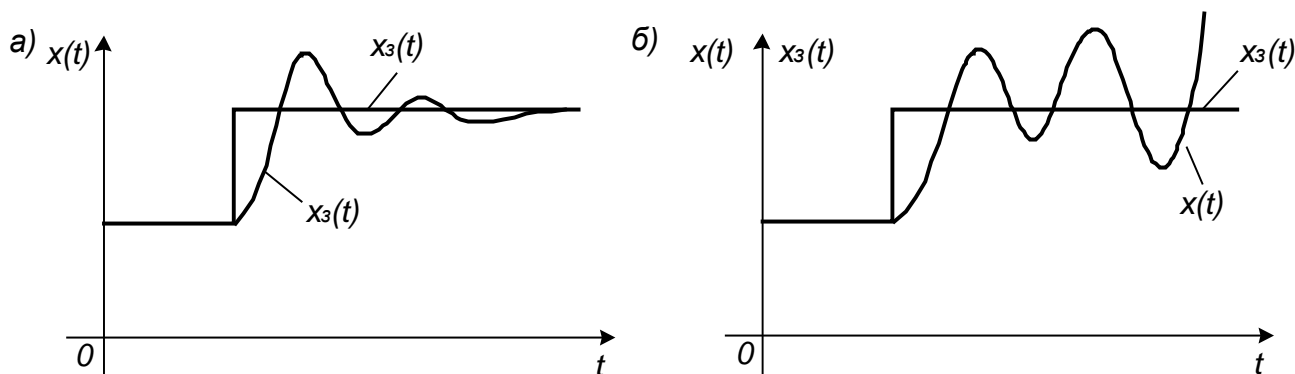


Рис. 5.1. Графики изменения сигналов САУ во времени

а – устойчивая САУ; б – неустойчивая САУ

Вскроем *причины* неустойчивости САУ.

Неустойчивость САУ возникает, как правило, из-за неправильного (*положительного*) или очень *сильного* действия главной обратной связи. В результате чего в систему в режиме гармонических колебаний непрерывно поступает (закачивается) энергия. Энергия системы увеличивается. Увеличиваются и связанные с ней режимные параметры, например, регулируемая величина. Такое явление в технике получило название *резонанса*.

**Причинами неправильного действия главной обратной связи САУ** являются:

- Выполнение главной обратной связи САУ по ошибке *положительной* вместо отрицательной, что практически при любых параметрах делает систему неустойчивой.
- Значительная *инерционность* элементов замкнутого контура САУ (например, объекта управления), из-за которой в режиме колебаний системы сигнал главной обратной связи (например, управляемая величина) значительно отстает от входного сигнала (например, управляющего воздействия) и оказывается с ним в фазе. Это означает, что связь, выполненная конструктивно как отрицательная, в динамическом режиме (режиме гармонических колебаний) начинает на определенной частоте действовать как положительная. Это ведет к раскачиванию системы и нарушению ее устойчивости.

**Задачами анализа устойчивости САУ** обычно являются:

- *определение устойчивости или неустойчивости системы при заданных параметрах;*
- *определение допустимого по условиям устойчивости диапазона изменения некоторых незаданных параметров системы;*
- *выяснение принципиальной возможности устойчивости системы при заданной ее структуре.*

## 5.2. Общее математическое условие устойчивости

---

Согласно данному выше физическому определению устойчивость определяется характером движения системы, когда воздействия, выведшие ее из состояния равновесия, прекратили действовать или изменяться во времени. Такое движение системы называют *свободным*. Оно происходит за счет внутренней энергии самой системы и зависит только от ее свойств (параметров).

Свободное движение линейной или линеаризованной САУ описывается однородным дифференциальным уравнением

$$a_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) = 0, \quad (5.1)$$

где  $x(t)$  – свободная составляющая выходной (управляемой) величины системы.

Вынужденная составляющая выходной величины, зависящая от вида внешнего воздействия и соответственно от правой части уравнения (2.19) на устойчивость системы не влияет.

С математической точки зрения:

- **система устойчива**, если свободная составляющая  $x(t)$  переходного процесса с течением времени стремится к нулю;



- **система неустойчива**, если свободная составляющая  $x(t)$  переходного процесса с течением времени неограниченно возрастает;
- **система находится на границе устойчивости**, если свободная составляющая  $x(t)$  переходного процесса с течением времени не стремится ни к нулю, ни к бесконечности.

Решение уравнения (5.1) равно сумме

$$x(t) = \sum_{k=1}^n C_k \exp(p_k t), \quad (5.2)$$

где  $C_k$  – постоянные, зависящие от начальных условий;  $p_k$  – корни характеристического уравнения

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.3)$$

Корни характеристического уравнения могут быть действительными ( $p_k = \alpha_k$ ), мнимыми ( $p_k = j\beta_k$ ) и комплексными ( $p_k = \alpha_k \pm j\beta_k$ ). При этом комплексные корни всегда сопряжены между собой: если есть корень с положительной мнимой частью, то обязательно существует корень с такой же по модулю, но отрицательной мнимой частью.

Переходная составляющая (5.2) при времени  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю лишь в том случае, если каждое слагаемое вида  $C_k \exp(p_k t) \rightarrow 0$ . Характер этой функции времени зависит от вида корня  $p_k$ . На рис.5.1 изображены возможные случаи расположения корней  $p_k$  на комплексной плоскости и соответствующие им функции  $x_k(t)$ , которые показаны внутри окружностей.

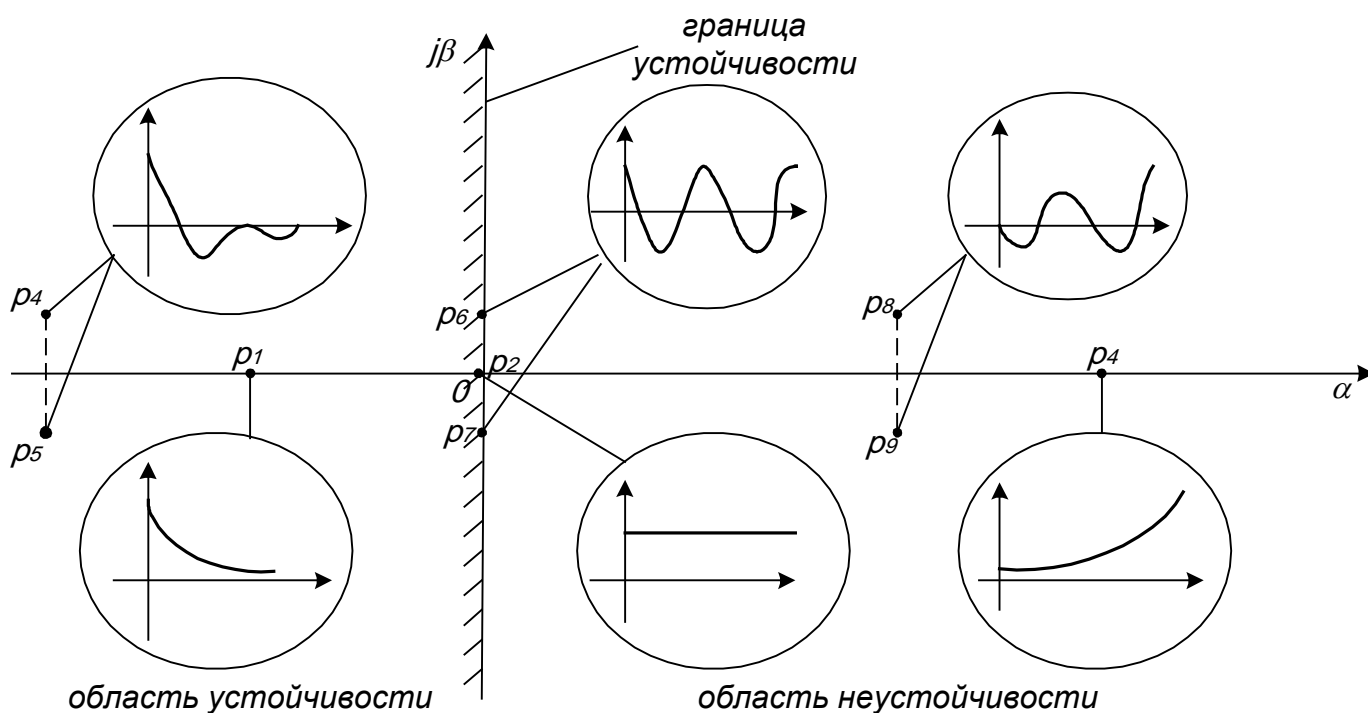


Рис. 5.1. Влияние корней характеристического уравнения САУ на составляющие ее свободного движения

Анализ рис.5.1 позволяет сформулировать **общее математическое условие устойчивости**: для устойчивости линейной САУ необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными (или чтобы все корни характеристического уравнения системы располагались в левой части комплексной плоскости).

Устойчивость системы зависит только от вида корней характеристического уравнения и не зависит от характера внешних воздействий на систему, т. е. устойчивость есть внутреннее свойство системы, присущее ей вне зависимости от внешних условий.

Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть (располагается в правой части комплексной плоскости), то система будет неустойчивой.

Мнимая ось  $j\beta$  является границей устойчивости в плоскости корней. Если характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней ( $p_k = +j\beta_k$ ,  $p_{k+1} = -j\beta_k$ ), а все остальные корни находятся в левой части комплексной плоскости, то в системе устанавливаются незатухающие гармонические колебания с круговой частотой  $\omega = |\beta_k|$ . В этом случае говорят, что система находится на *колебательной границе устойчивости*.

Если характеристическое уравнение имеет нулевой корень ( $\beta = 0$ ), то система находится на *апериодической границе устойчивости*. Если таких корней два, то система неустойчива.

Применяя сформулированное выше условие для оценки устойчивости реальных САУ, не следует забывать, что линейные уравнения вида (5.1), как правило, получаются в результате упрощений и линеаризации исходных нелинейных уравнений. Возникает вопрос: в какой мере оценка устойчивости по линеаризованному уравнению будет справедлива для реальной системы, и не окажут ли существенное влияние на результат анализа отброшенные при линеаризации члены разложения? Ответ на него был дан русским математиком А. М. Ляпуновым в 1892 г. в работе «Общая задача об устойчивости движения». Он сформулировал и доказал следующую теорему: *если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один нулевой корень или одну пару мнимых корней, то судить об устойчивости реальной системы по линеаризованному уравнению нельзя*. Отброшенные при линеаризации малые члены могут сделать систему неустойчивой, и поэтому устойчивость реальной системы необходимо оценивать по исходному нелинейному уравнению.

Характеристическое уравнение САУ можно составлять не только по дифференциальному уравнению (5.1) ее свободного движения, но и по ее алгоритмической схеме с известными передаточными функциями звеньев.

Получим характеристическое уравнение *разомкнутой* САУ, алгоритмическая схема которой приведена на рис.5.2, а.

Ее уравнение движения

$$X(p) = W(p)X_3(p), \quad (5.4)$$

или представляя передаточную функцию системы в виде

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)}, \quad (5.5)$$

где  $K(p)$  и  $D(p)$  – входной и собственный операторы, уравнение движения приводим к виду

$$X(p) = \frac{K(p)}{D(p)} X_3(p). \quad (5.6)$$

Полагая в уравнении (5.6) задающее воздействие  $X_3(p) = 0$  записываем уравнение свободного движения САУ

$$D(p)X(p) = 0. \quad (5.7)$$

Откуда искомое характеристическое уравнение *разомкнутой* САУ

$$D(p) = 0. \quad (5.8)$$

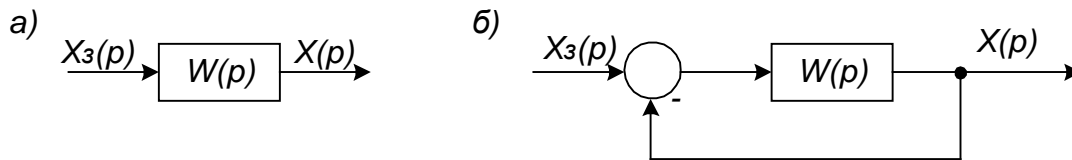


Рис.5.2. Алгоритмические схемы САУ

а – разомкнутой; б – типовой замкнутой

Получим характеристическое уравнение *типовой замкнутой* САУ, алгоритмическая схема которой приведена на рис.5.2, б.

Ее уравнение движения

$$X(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} X_3(p), \quad (5.9)$$

или с учетом обозначения (5.5)

$$X(p) = \frac{K(p)}{D(p) + K(p)} X_3(p). \quad (5.10)$$

Полагая в уравнении (5.10)  $X_3(p) = 0$ , записываем уравнение свободного движения САУ

$$[D(p) + K(p)]X(p) = 0. \quad (5.11)$$

Тогда искомое характеристическое уравнение *типовой замкнутой* САУ

$$D(p) + K(p) = 0. \quad (5.12)$$

### 5.3. Критерии устойчивости САУ

Как было показано выше, для суждения об устойчивости линейной САУ достаточно определить лишь знаки действительных частей корней характеристического уравнения.

В ТАУ разработан ряд правил, с помощью которых можно судить о знаках действительных частей корней, не решая характеристическое уравнение и не находя числовые значения самих корней. Эти правила получили название **критериев устойчивости**.

Различают *алгебраические* и *частотные* критерии устойчивости.

**Алгебраические критерии** устанавливают необходимые и достаточные условия отрицательности вещественных частей корней в форме ограничений, накладываемых на определенные комбинации коэффициентов характеристического уравнения системы.

**Частотные критерии** определяют связь между устойчивостью системы и формой ее частотных характеристик.

Наибольшее распространение в инженерной практике нашли *алгебраические критерии Гурвица и Рауса*.

Рассмотрим один из них - **критерий Гурвица**.

Критерий был сформулирован и доказан в 1895 г. немецким математиком А. Гурвицем, который разработал свой критерий, решая чисто математическую задачу – задачу исследования устойчивости линейного дифференциального уравнения. Гурвиц обратился к этой задаче по просьбе словацкого ученого А. Стодолы, занимавшегося вопросами регулирования турбин.

Применительно к задачам ТАУ критерий Гурвица можно сформулировать так:

*система автоматического управления, описываемая характеристическим уравнением*

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = 0, \quad (5.13)$$

*устойчива, если при  $a_0 > 0$  положительны все определители  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  вида*

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2i-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{i-2} & a_i \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (5.14)$$

Если хотя бы один из определителей (5.14), называемых определителями Гурвица, отрицателен, то система неустойчива.

Определители Гурвица составляют следующим образом: на главной диагонали записывают все коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_i$  ( в порядке возрастания индекса), затем в каждом столбце выше диагональных коэффициентов записывают коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, а ниже – с последовательно убывающими индексами; на место с коэффициентами с индексами большими  $n$  или меньшими нуля проставляют нули. При этом каждый  $i$ -й определитель получается размером  $i \times i$ .

Так как последний столбец определителя  $\Delta_n$  содержит всегда только один элемент  $a_n$  , отличный от нуля, то согласно известному свойству определителей

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (5.15)$$

Рассмотрим, например, применение критерия Гурвица для характеристического уравнения третьего порядка

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \quad (5.16)$$

Условия устойчивости по Гурвицу будут

$$\left. \begin{aligned} a_0 > 0, \\ \Delta_1 = a_1 > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Критерий Гурвица целесообразно применять для анализа устойчивости систем не выше *пятого* порядка. При  $n > 5$  вычисление определителей становится громоздким. Для анализа устойчивости систем выше *четвертого* порядка целесообразно применять *критерий Рауса*.

Из частотных критериев наибольшее распространение нашли *критерии Михайлова и Найквиста*.

## 5.4. Области устойчивости САУ

---

При помощи критериев устойчивости можно установить факт устойчивости или неустойчивости САУ, все параметры которой заданы. Однако часто при проектировании и наладке САУ возникает более общая задача анализа устойчивости – определение допустимых (по условию устойчивости) пределов изменения некоторых *варьируемых параметров* системы. В качестве таких параметров обычно рассматривают коэффициенты и постоянные времени управляющего устройства (регулятора), которые можно *целенаправленно* изменять при настройке системы. Так как эти коэффициенты и постоянные времени однозначно определяют коэффициенты характеристического уравнения системы, то последние так же могут служить варьируемыми параметрами.

Допустимые пределы варьирования параметров системы можно определить путем построения *областей устойчивости*.

**Область устойчивости САУ** – область в пространстве варьируемых параметров САУ, каждой точке которой соответствуют только корни характеристического уравнения с отрицательными действительными частями (располагающиеся в левой части комплексной плоскости).

Область устойчивости выделяет из всех возможных значений варьируемых параметров лишь те значения, при которых система устойчива.

Поверхность, ограничивающая область устойчивости, называется **границей области устойчивости**.

Вид области устойчивости и ее границы определяется числом варьируемых параметров. Так при одном варьируемом параметре  $\alpha$  область устойчивости – *отрезок прямой*, а граница – *точки*  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по концам этого отрезка (рис.5.3, а). При двух варьируемых параметрах  $\alpha$  и  $\beta$  область устойчивости – *часть плоскости*, а граница – например, линия АВ, часть ОА оси параметра  $\alpha$  и положительная ось параметра  $\beta$  (рис. 5.3, б). Граница со стороны области устойчивости штрихуется.

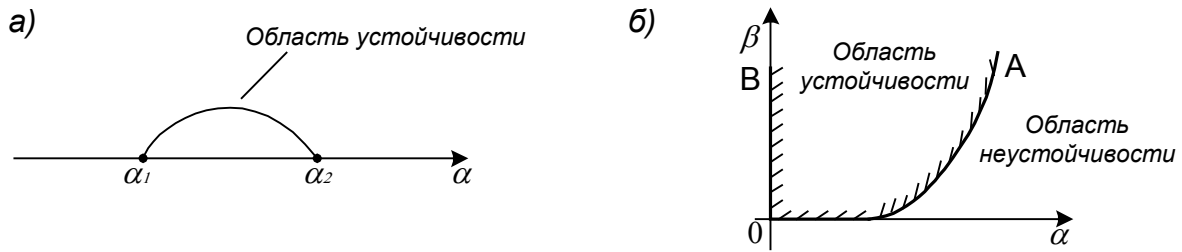


Рис. 5.3. Области устойчивости САУ

а – при одном варьируемом параметре; б – при двух варьируемых параметрах

Для отыскания границы области устойчивости можно воспользоваться одним из критериев устойчивости, например, критерием Гурвица, а можно и другими способами, например, методом *D-разбиения*.

Определим, например, область устойчивости САУ, описываемой характеристическим уравнением третьего порядка с одним варьируемым параметром  $\alpha$ ,

$$p^3 + 3p^2 + 3p + \alpha = 0. \quad (5.18)$$

Воспользуемся критерием Гурвица. Согласно ему должны выполняться условия (5.17)

$$\left. \begin{aligned} a_0 = 1 > 0, \\ \Delta_1 = a_1 = 3 > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3 \cdot 3 - 1 \cdot \alpha > 0, \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 = \alpha \Delta_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Откуда искомая область устойчивости

$$0 < \alpha < 9. \quad (5.19)$$

Определим так же, например, область устойчивости САУ, описываемой характеристическим уравнением третьего порядка с двумя варьируемыми параметрами  $\alpha$  и  $\beta$

$$p^3 + 3p^2 + \beta p + \alpha = 0. \quad (5.20)$$

Воспользуемся критерием Гурвица. Согласно ему должны выполняться условия (5.17)

$$\left. \begin{aligned} a_0 = 1 > 0, \\ \Delta_1 = a_1 = 3 > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3 \cdot \beta - 1 \cdot \alpha > 0, \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 = \alpha \Delta_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Откуда искомая область устойчивости

$$0 < \alpha < 3\beta. \quad (5.22)$$

В графическом виде эта область устойчивости представлена на рис. 5.4.

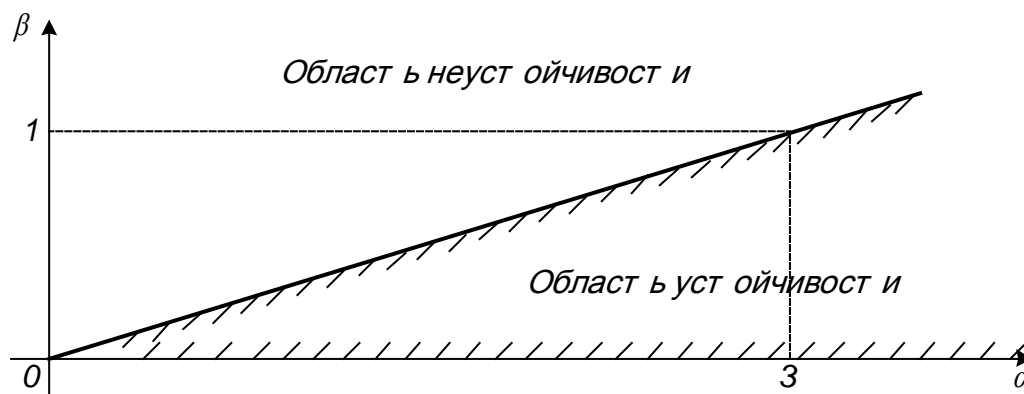


Рис. 5.4. Область устойчивости САУ в пространстве двух параметров

## 5.5. Влияние структуры и параметров САУ на устойчивость

В предыдущих параграфах было показано, что устойчивость САУ зависит как от вида ее характеристического уравнения, так и от конкретных числовых значений коэффициентов уравнения. Существуют системы, которые неустойчивы при любых значениях параметров. Такие системы называют **структурно неустойчивыми**. Структурно неустойчивую систему можно сделать устойчивой, только изменив ее структуру. У структурно неустойчивой системы в пространстве любых ее параметров области устойчивости не существует. Таковой, например, является САУ, алгоритмическая схема которой приведена на рис. 5.5. В ней  $T$  и  $k$  – соответственно постоянная времени и передаточный коэффициент инерционного звена.

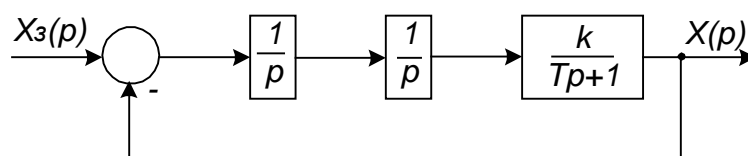


Рис. 5.5. Алгоритмическая схема структурно неустойчивой САУ

Характеристическое уравнение такой системы, имеет вид

$$Tp^3 + p^2 + k = 0. \quad (5.23)$$

По критерию Гурвица должны выполняться условия остойчивости (5.17)

$$\left. \begin{aligned} a_0 = T > 0, \\ \Delta_1 = a_1 = 1 > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 1 \cdot 0 - T \cdot k = -T \cdot k > 0, \\ \Delta_3 = a_3 \Delta_2 = k \Delta_2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Однако ни при каких значениях постоянной времени  $T$  и передаточного коэффициента  $k$  определитель  $\Delta_2$  не может быть положительным. Поэтому рассматриваемая система является структурно неустойчивой.

Существуют **общие рекомендации** по влиянию на структурную устойчивость одноконтурной САУ:

- звенья, уменьшающие инерционность системы, способствуют ее устойчивости (например, форсирующее звено первого порядка);
- звенья, увеличивающие инерционность системы, способствуют ее неустойчивости (например, идеальные интегрирующее и колебательное звенья).

Рассмотрим влияние одного из основных параметров одноконтурной САУ (рис. 4.7) – передаточного коэффициента разомкнутой САУ на ее устойчивость.

Чем этот коэффициент больше, тем более резко изменяются сигналы и воздействия в системе, т. е. ее свободное движение происходит с большей частотой. Следствием этого является большее запаздывание по фазе сигнала обратной связи (управляемой величины) по отношению к сигналу ошибки. И при определенном передаточном коэффициенте обратная связь начинает работать уже как *положительная* и приводит к раскачиванию системы, т. е. к неустойчивости системы.

Таким образом, установлена общая закономерность: чем больше *передаточный коэффициент разомкнутой САУ*, тем ближе замкнутая САУ к границе устойчивости.

Предельное значение передаточного коэффициента разомкнутой САУ зависит от соотношения постоянных времени звеньев, образующих контур системы. Рассмотрим, например, статическую САУ, состоящую из трех инерционных звеньев первого порядка с передаточными коэффициентами  $k_1, k_2, k_3$  и постоянными времени  $T_1, T_2, T_3$ , алгоритмическая схема которой приведена на рис. 5.6.

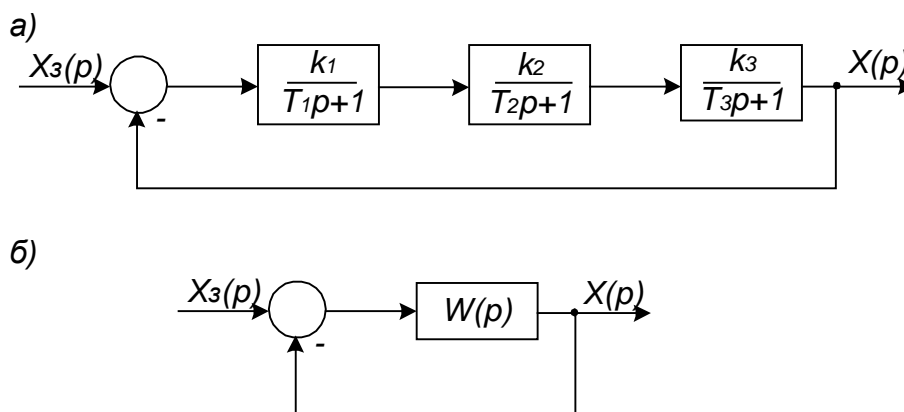


Рис. 5.6. Алгоритмическая схема статической одноконтурной САУ

а – развернутая; б – свернутая

Передаточная функция разомкнутой САУ (обратная связь разомкнута)

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (5.25)$$

где  $k$  – передаточный коэффициент разомкнутой системы.



Согласно (5.5 и 5.12 ) характеристическое уравнение замкнутой системы

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) + k = 0 \quad (5.26)$$

или

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0, \quad (5.27)$$

где

$$a_0 = T_1 T_2 T_3; \quad a_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3; \quad a_2 = T_1 + T_2 + T_3; \quad a_3 = 1 + k. \quad (5.28)$$

Согласно критерию Гурвица система третьего порядка будет находится на границе устойчивости при

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0. \quad (5.29)$$

Подставляя в условие (5.29) значения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, a_3$  из выражений (5.28), получаем

$$(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3 (1 + k_{np}) = 0. \quad (5.30)$$

Решая это уравнение получаем искомое значение предельного коэффициента

$$k_{np} = 2 + \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_3}{T_2}. \quad (5.31)$$

Анализ зависимости (5.31) позволяет говорить, что предельный коэффициент тем больше, чем больше разность между двумя наиболее различающимися постоянными времени (например,  $T_1$  и  $T_2$ ) и чем ближе третья постоянная времени ( $T_3$ ) к среднеарифметическому значению двух первых.

Сказанное выше справедливо для систем любого порядка, и, поэтому, всегда при конструировании САУ стремятся как можно больше «раздвинуть» постоянные времени. Однако изменение постоянных времени с целью увеличения передаточного коэффициента во многих случаях оказывается невозможным или нецелесообразным. И тогда эффективным средством влияния на устойчивость системы является изменение ее структуры путем добавления специальных стабилизирующих и корректирующих устройств.

## 6. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ САУ

---

Вы узнаете:

- Что такое качество управления САУ.
- Какими показателями характеризуется качество управления САУ.

### 6.1. Понятие и показатели качества управления САУ

---

*Качество САУ – совокупность свойств, обеспечивающих эффективное функционирование системы в целом.*

В свою очередь, свойства, из этой совокупности, выраженные в количественной форме, называют **показателями качества САУ**.

Так САУ можно характеризовать такими показателями качества, как вес системы, ее габариты, стоимость, надежность, долговечность и т. п. Эти показатели характеризуют качество САУ в *широком* смысле.

В ТАУ же показатели качества рассматривают, как правило, в более узком смысле: рассматривают только *статические и динамические свойства системы*, характеризующие *точность* поддержания управляемой величины  $x(t)$  на заданном уровне  $x_z(t)$  соответственно в установившихся и переходных режимах, т. е. характеризующие *эффективность процесса управления*. Для такого более узкого понимания качества САУ применяют термин «качество управления САУ». Иными словами:

*Качество управления САУ – совокупность свойств САУ, характеризующих точность поддержания управляемой величины на заданном уровне в установившихся и переходных режимах.*

В свою очередь, свойства, из этой совокупности, выраженные в количественной форме, называют **показателями качества управления САУ**.

Рассмотрим понятие *точности САУ*.

Назначение САУ заключается в поддержании равенства

$$x(t) = x_z(t) \quad (6.1)$$

при любых изменениях задающего и возмущающих воздействий. То есть САУ должна воспроизводить задающее воздействие  $x_z(t)$  и подавлять (компенсировать) действие возмущающих воздействий. Однако из-за инерционности объекта управления и регулятора обе эти функции выполняются САУ с *погрешностью (ошибкой)*

$$\varepsilon(t) = x_z(t) - x(t), \quad (6.2)$$

которая и характеризует **точность САУ**. Чем *меньше* мгновенные значения ошибки  $\varepsilon(t)$ , тем *выше точность САУ*, т. е. ее *качество*.

Для типовой одноконтурной САУ, алгоритмическая схема которой приведена на рис. 4.7, уравнение динамики в операторной форме для сигнала ошибки имеет вид

$$\varepsilon(p) = X_z(p) - X(p). \quad (6.3)$$

Подставляя значение управляемой величины  $X(p)$  из выражения (4.13), в уравнение (6.3), приводим последнее к виду

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)W_o(p)} [X_z(p) - X_b(p)] \quad (6.4)$$

Из полученного выражения следует, что чем больше усилительные свойства регулятора ( $W_p(p)$ ), тем ошибка  $\varepsilon(p)$ , а значит и  $\varepsilon(t)$  будет меньше и в статике и в динамике.

Так как определение (вычисление) мгновенных значений ошибки  $\varepsilon(t)$  при произвольном законе изменения внешних воздействий представляет собой сложную задачу, то точность САУ (показатели качества управления) принято оценивать по ошибкам в *статическом*, *установившемся динамическом* и *переходном* режимах работы САУ.

### **6.1.1. Показатели качества управления САУ в статическом режиме**

---

В статическом режиме работы САУ ошибки возникают только в *статической* системе!

**Статическая САУ** – система, объект управления и регулятор которой являются статическими элементами.

У таких элементов в статическом режиме (т. е. при  $p = 0$ )

$$W_o(0) = k_o; \quad W_p(0) = k_p, \quad (6.5)$$

где  $k_o, k_p$  – передаточные коэффициенты объекта управления и регулятора.

Учитывая значения передаточных функций из выражений (6.5) в уравнении (6.4), получаем в статическом режиме ошибку

$$\varepsilon(0) = \frac{1}{1 + k_p k_o} [X_z(0) - X_b(0)] \quad (6.6)$$

Анализ этого выражения позволяет сделать следующий вывод:

*Точность САУ в статическом режиме тем выше, чем больше передаточный коэффициент ( $k = k_p k_o$ ) разомкнутой САУ.*

Точность статической системы принято оценивать **коэффициентом статизма**

$$s = \frac{\Delta x_{зам}}{\Delta x_{раз}}, \quad (6.7)$$

где

$\Delta x_{раз}$  – установившееся отклонение управляемой величины  $x$ , вызванное изменением, например, задающего воздействия  $x_z$ , в разомкнутой системе (рис. 6.1, а);

$\Delta x_{зам}$  – установившееся отклонение управляемой величины  $x$ , вызванное изменением задающего воздействия  $x_z$ , в замкнутой системе (рис. 6.1, б).

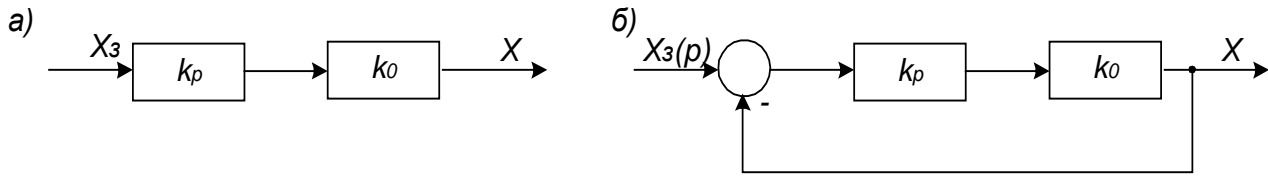


Рис. 6.1. Алгоритмические схемы разомкнутой (а) и замкнутой (б) САУ

Пример определения параметров  $\Delta x_{зам}$  и  $\Delta x_{раз}$  при скачкообразном изменении задающего воздействия  $\Delta x_3$  приведен на рис. 6.2.

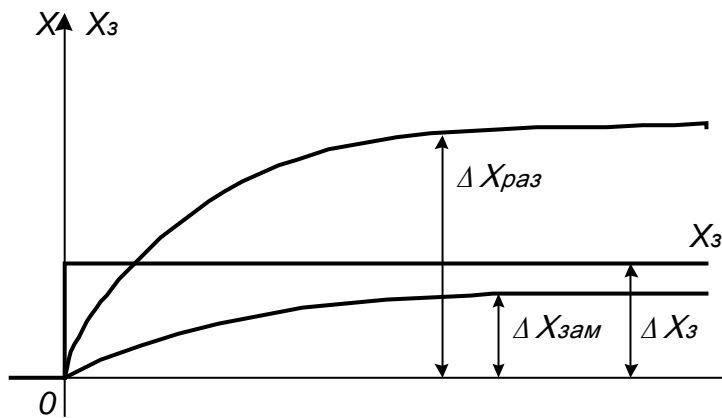


Рис. 6.2. К определению параметров для расчета коэффициента статизма

Из алгоритмических схем (рис.6.1) следует, что

$$\Delta x_{раз} = k_p k_o \Delta x_3, \quad (6.8)$$

$$\Delta x_{зам} = \frac{k_p k_o}{1 + k_p k_o} \Delta x_3. \quad (6.9)$$

Подставляя значения отклонений параметров из выражений (6.8 и 6.9) в выражение (6.7), получаем коэффициент статизма

$$s = \frac{1}{1 + k_p k_o} = \frac{1}{1 + k}. \quad (6.10)$$

Точность системы – удовлетворительная, если коэффициент статизма системы  $s = 0,1 \dots 0,01$ . Следовательно передаточный коэффициент разомкнутой системы  $k$  должен быть  $10 \dots 100$ .

### 6.1.2. Показатели качества управления САУ в установившемся динамическом режиме

---

Установившийся динамический режим наступает после окончания переходного процесса. В этом режиме управляемая величина и сигнал ошибки имеют только вынужденную составляющую, т. е. изменяются только под действием внешних воздействий.

В зависимости от *свойств* САУ, от *точки* приложения и *вида* внешнего воздействия:

- *ошибка равна нулю;*
- *ошибка равна постоянной величине;*
- *ошибка неограниченно возрастает.*

В свою очередь, свойства САУ характеризуются:

- *передаточным коэффициентом  $k$  разомкнутой САУ;*
- *порядком астатизма системы  $\nu$  - числом идеальных интегрирующих звеньев в разомкнутой САУ ( $\nu = 0$  – статическая система;  $\nu \geq 1$  – астатическая система).*

Так как на практике находят применение И, ПИ, ПИД регуляторы, то порядок астатизма  $\nu = 1$ , но может быть и  $\nu = 2$ .

На рис. 6.3 приведены переходные процессы в САУ с различными степенями статизма  $\nu$  при различных законах изменения задающего воздействия (  $\varepsilon_z$  – составляющая ошибки, обусловленная изменением задающего воздействия  $x_z$  ).

В установившемся динамическом режиме, как и в статическом, действует правило: *точность воспроизведения системой управления задающего воздействия и точность подавления ею внешних возмущений тем лучше, чем больше передаточный коэффициент регулятора.*

### 6.1.3. Показатели качества управления САУ в переходном режиме

---

Точность САУ в переходном режиме оценивают при помощи *прямых* и *косвенных* показателей качества.

***Прямые показатели качества*** определяют по *графику переходного процесса, возникающего в системе при ступенчатом внешнем воздействии.*

***Косвенные показатели качества*** определяют по *распределению корней характеристического уравнения или по частотным характеристикам системы.*

В настоящее время разработаны и получили широкое распространение мощные средства компьютерного моделирования САУ, позволяющие точно и быстро вычислять переходный процесс, т. е. оценивать точность системы через *прямые показатели качества*. Поэтому на этих показателях качества и сосредоточим свое внимание.

Различают колебательный (1), аperiodический (2) и монотонный (3) типовые переходные процессы (рис. 6.4).

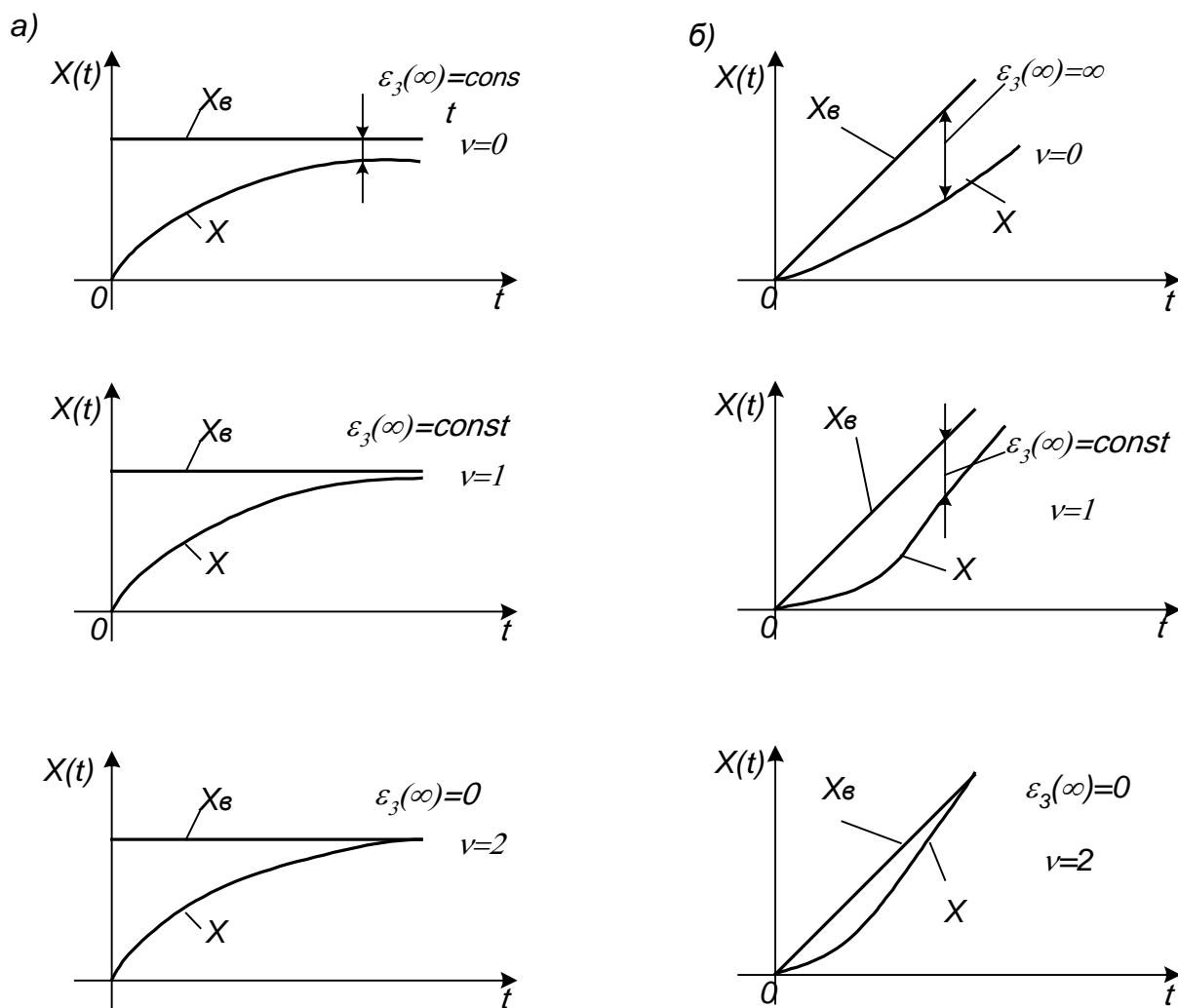


Рис. 6.3. Переходные процессы в статической и астатической САУ при ступенчатом (а) и линейном (б) изменении задающего воздействия

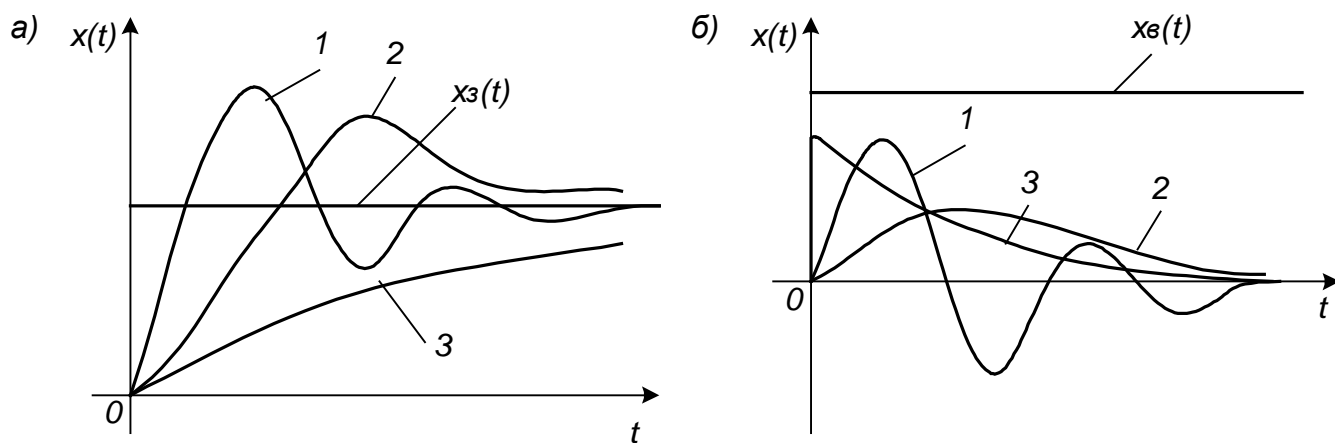


Рис. 6.4. Типовые переходные процессы

а – по заданию; б – по возмущению

Каждый из трех типовых переходных процессов имеет свои преимущества и недостатки, и предпочтение той или иной форме процесса отдают с учетом особенностей объекта управления. Так, например, в электромеханических системах, коими являются электрические системы, нежелательны резкие знакопеременные усилия, и поэтому при выборе настроек САУ такими объектами стремятся к достижению аperiodических и монотонных процессов.

Рассмотрим *основные прямые показатели качества управления САУ* применительно к типовой одноконтурной системе регулирования (см. рис. 4.7).

На графиках переходных процессов, вызванных ступенчатым изменением задающего воздействия  $x_3(t)$  (рис. 6.5) и возмущения  $x_6(t)$ , действующего на выходе объекта, (рис. 6.6), за начало отсчета для управляемой величины  $x(t)$  принято значение  $x(-0)$ , которое было до подачи ступенчатого воздействия.

Прежде всего познакомимся с показателями качества переходного процесса, вызванного ступенчатым изменением задающего воздействия  $x_3(t)$  (рис. 6.5).

**Перерегулирование  $\sigma$**  - величина, равная отношению первого максимального отклонения  $x_m$  управляемой величины  $x(t)$  от ее установившегося значения  $x(\infty)$  к этому установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{x_m - x(\infty)}{x(\infty)} \cdot 100 = \frac{A_1}{x(\infty)} \cdot 100, \% \quad (6.11)$$

Качество управления считается удовлетворительным, если перерегулирование не превышает 30...40%.

**Степень затухания**

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1} \quad (6.12)$$

Интенсивность затухания колебаний в системе считается удовлетворительной, если  $\psi = 0,75...0,95$ .

**Длительность переходного процесса (время регулирования)  $t_n$**  – интервал времени от момента приложения ступенчатого воздействия до момента, после которого отклонения управляемой величины  $x(t)$  от ее нового установившегося значения  $x(\infty)$  становятся меньше некоторого заданного числа  $\delta_n$ , т. е. до момента, после которого выполняется условие  $|x(t) - x(\infty)| \leq \delta_n$ .

В промышленной автоматике величину  $\delta_n$  обычно принимают равной 5% от установившегося значения  $x(\infty)$  [ $\delta_n = 0,05 x(\infty)$ ].

**Колебательность  $N$**  – число переходов управляемой величины  $x(t)$  через ее установившееся значение  $x(\infty)$  за время переходного процесса  $t_n$ .

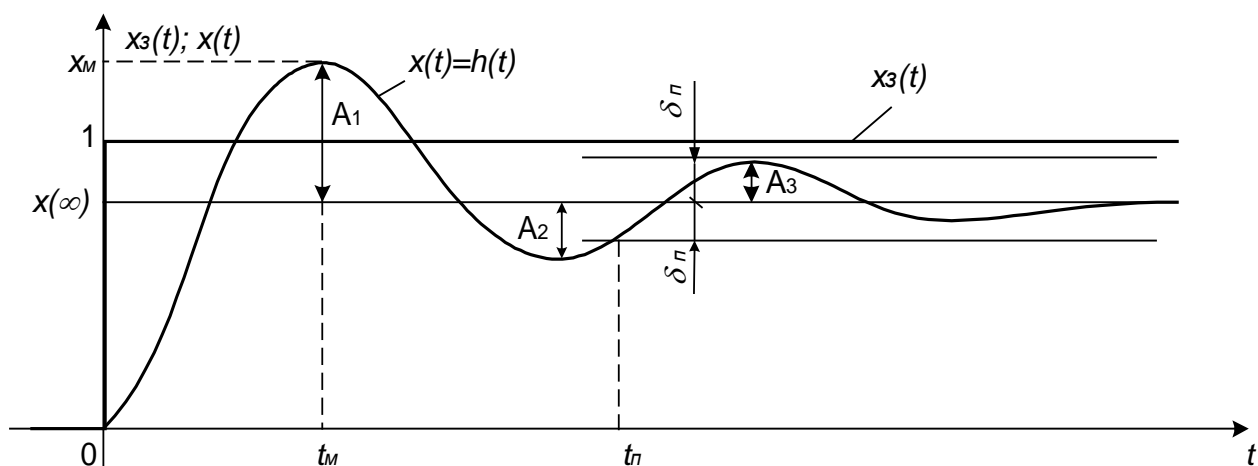


Рис. 6.5. Прямые показатели качества процесса управления (регулирования) по каналу задания

Для переходных процессов, вызванных возмущающим воздействием  $x_e(t)$  на выходе объекта управления (см. рис.6.6) вводятся следующие показатели качества.

**Перерегулирование (колебательность)  $\sigma$**  — величина, равная отношению второго (отрицательного) максимального отклонения  $A_2$  к первому максимальному отклонению  $A_1$ :

$$\sigma = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100 = \frac{A_2}{x_m - x(\infty)} \cdot 100, \% \quad (6.13)$$

**Динамический коэффициент регулирования  $R_D$**  — величина, равная отношению первого максимального отклонения к отклонению управляемой величины объекта управления, вызванному тем же возмущением,

$$R_D = \frac{x_m}{k_o} \cdot 100, \% \quad (6.14)$$

где  $k_o$  — передаточный коэффициент объекта управления.

Коэффициент  $R_D$  показывает, насколько эффективно компенсирующее действие регулятора на объект управления (регулирования).

**Длительность переходного процесса (время регулирования)  $t_n$**  — интервал времени от момента приложения ступенчатого воздействия до момента, после которого отклонения управляемой величины  $x(t)$  от ее нового установившегося значения  $x(\infty)$  становятся меньше некоторого заданного числа  $\delta_n$ , т. е. до момента, после которого выполняется условие  $|x(t) - x(\infty)| \leq \delta_n$ .

В промышленной автоматике величину  $\delta_n$  обычно принимают равной 5% от начального отклонения  $x(+0)$  [ $\delta_n = 0,05 x(+0)$ ].



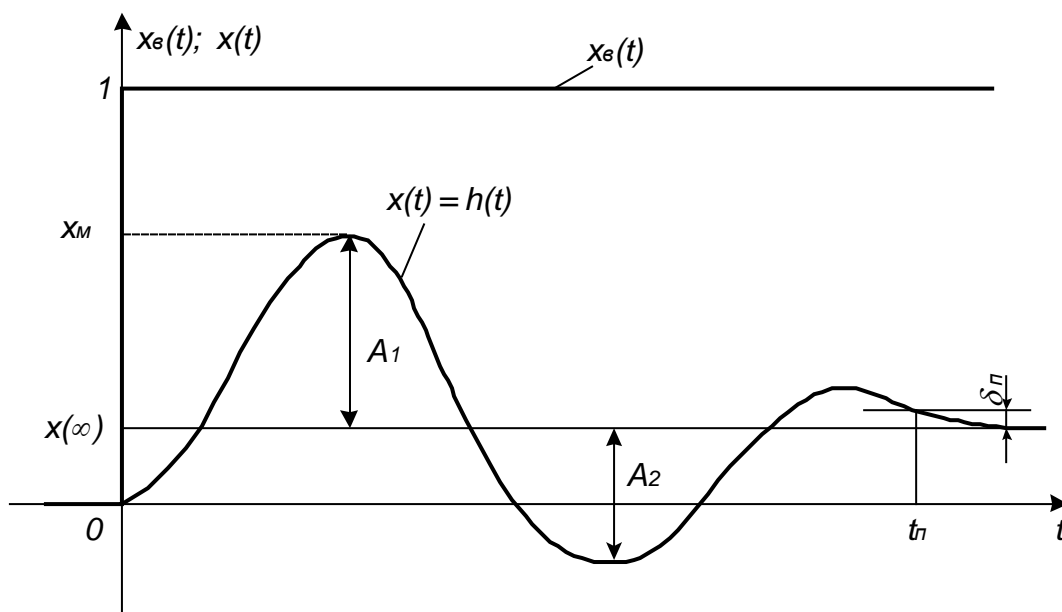


Рис. 6.6. Прямые показатели качества процесса управления (регулирования) по каналу возмущения

Три главных показателя качества – перерегулирование  $\sigma$ , первое максимальное отклонение  $x_M$  и длительность переходного процесса  $t_n$  – тесно связаны между собой. Они зависят от всех параметров системы, но наиболее сильно – от передаточного коэффициента  $k$  разомкнутой системы. Причем, с увеличением этого коэффициента максимальное отклонение по каналу возмущения всегда уменьшается (рис. 6.7, а), максимальное отклонение по каналу задающего воздействия всегда увеличивается (рис. 6.7, б) а перерегулирование и длительность переходного процесса, как правило, увеличиваются (рис. 6.7). Отыскание оптимального компромисса между этими двумя противоречивыми тенденциями является одной из основных задач *синтеза САУ*.

Еще раз отметим, что рассмотренные прямые показатели качества удобно использовать в тех случаях, когда график переходного процесса  $x(t)$  можно получить *экспериментально* в реальной САУ или путем *моделирования* системы на ЭВМ.

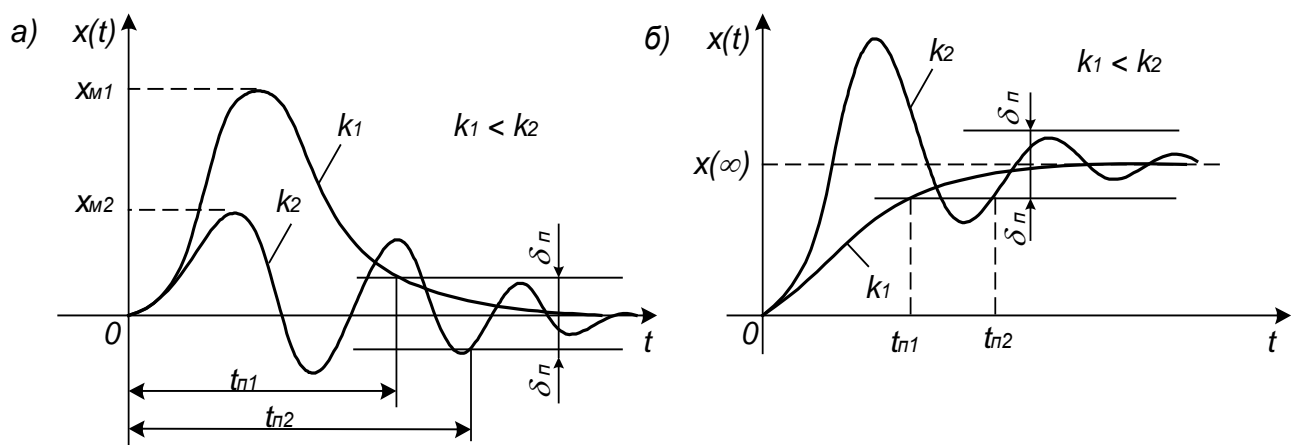


Рис. 6.7. Влияние передаточного коэффициента разомкнутой системы на показатели переходного процесса

а – по возмущающему воздействию; б – по задающему воздействию

## 7. СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ САУ

---

Вы познакомитесь:

- С основными понятиями синтеза САУ.
- С общими принципами синтеза алгоритмической структуры САУ.
- С методами определения алгоритмической структуры и настроечных параметров регуляторов в САУ.
- С принципами синтеза многоконтурной САУ подчиненного регулирования.

### 7.1. Основные понятия синтеза САУ

---

Все математические задачи, решаемые в теории автоматического управления, можно объединить в два больших класса:

- *задачи анализа;*
- *задачи синтеза.*

В *задачах анализа* полностью известна структура системы, заданы все (как правило) параметры системы, и требуется оценить какое-либо ее статическое или динамическое свойство. К задачам анализа относятся определение устойчивости (см. главу 5) и оценка качества управления (см. главу 6) системы.

*Задачи синтеза* можно рассматривать как обратные задачам анализа: в них требуется определить структуру и параметры системы по заданным показателям качества управления. Простейшими задачами синтеза являются, например, задачи определения передаточного коэффициента разомкнутой САУ по заданной ошибке или условию минимума интегральной оценки.

**Синтез САУ** – процедура определения структуры и параметров системы по заданным показателям качества управления.

В общем случае при проектировании системы необходимо определить *алгоритмическую* и *функциональную* структуры системы, т. е. решить задачу полного синтеза.

Определение *алгоритмической* структуры (**теоретический синтез**) производится с помощью математических методов и на основании требований, записанных в четкой математической форме.

Определение *функциональной* структуры (**технический синтез**) заключается в выборе конкретных физических элементов и согласования их между собой по статическим и энергетическим характеристикам. Эта процедура не имеет пока строгой математической основы (т. е. не формализована) и поэтому относится к области инженерного творчества.

С учетом того, что *не любой элемент* алгоритмической структуры может иметь отображение в виде физического блока функциональной структуры, т. е. просто не может быть реализован, задачу синтеза в большинстве случаев невозможно решать определяя сначала алгоритмическую структуру САУ, а затем по ней – функциональную структуру. Поэтому задачу синтеза в большинстве случаев решают следующим образом.

Сначала, исходя из известности объекта управления  $ОУ$ , требований к назначению и условиям работы САУ, по каталогам серийного оборудования выбирают функционально необходимые элементы системы:

- *регулирующий орган РО;*
- *исполнительное устройство ИУ;*
- *датчики Д.*

Эти элементы САУ вместе с объектом управления  $ОУ$  образуют *неизменяемую часть* функциональной структуры системы (рис. 7.1).

Затем, на основании требований к статическим и динамическим свойствам САУ определяют *изменяемую часть* функциональной структуры системы, в которую входят:

- *усилительно-преобразующий блок УПБ;*
- *корректирующие устройства КУ.*

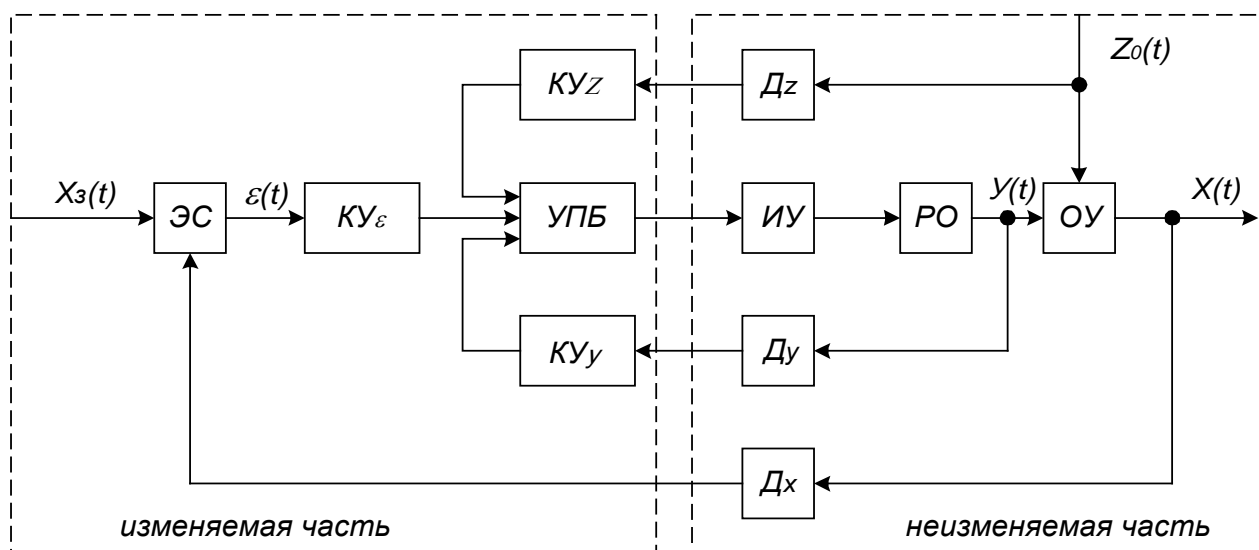


Рис. 7.1. Функциональная структура синтезируемой системы

Таким образом, процедуры определения алгоритмической и функциональной структур тесно переплетаются друг с другом. Окончательное решение о структуре САУ принимается на основе компромисса между качеством управления, с одной стороны, и простотой и надежностью, с другой.

Заключительным этапом проектирования САУ является *параметрическая оптимизация* – определение настроечных параметров выбранного регулятора.

После решения задачи синтеза обычно выполняют анализ синтезированной системы, т. е. методами, изложенными в гл. 5, 6, проверяют, обладает ли система необходимыми показателями устойчивости и качества управления.

Применение на всех этапах синтеза и анализа САУ *цифровых вычислительных машин* позволяет рассмотреть большое количество вариантов структур и параметров и тем самым существенно ускорить решение задачи синтеза.

## 7.2. Общие принципы синтеза алгоритмической структуры САУ

Для решения задачи синтеза, например, алгоритмической структуры типовой одноконтурной САУ (рис. 4.7) должны быть известны:

- передаточная функция объекта управления  $W_o(p)$ ;
- возмущение, действующее на выходе объекта,  $X_B(p)$ .

Результатом решения задачи синтеза алгоритмической структуры должна быть передаточная функция регулятора  $W_p(p)$ .

Решим задачу синтеза алгоритмической структуры для некоторых частных случаев в порядке повышения их сложности.

### Синтез алгоритмической структуры САУ при отсутствии возмущающего воздействия

В простейшем случае, когда возмущающее воздействие на объект отсутствует ( $X(p) = 0$ ), управление можно осуществлять по разомкнутой схеме (рис. 7.2, а) при передаточной функции регулятора

$$W_p(p) = \frac{1}{W_o(p)}, \quad (7.1)$$

так как передаточная функция САУ

$$W(p) = W_p(p)W_o(p) = 1. \quad (7.2)$$

Это означает мгновенное воспроизведение выходной величиной задающего воздействия

$$X(p) = X_z(p). \quad (7.3)$$

Такой переходный процесс называют *идеальным*, а алгоритмическую структуру его обеспечивающую – *идеальной*.

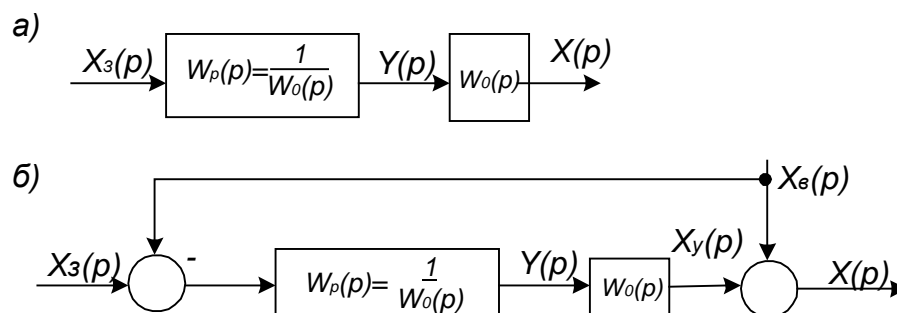


Рис. 7.2. Алгоритмические схемы идеальной САУ

### Синтез алгоритмической структуры САУ при наличии возмущающего воздействия

Если на объект действует возмущение  $X_B(p)$ , которое поддается измерению, то теоретически можно синтезировать идеальную разомкнутую САУ (рис. 7.2, б) с полной компенсацией возмущения, подав его с обратным знаком на вход регулятора с передаточной функцией (7.1). Действительно, в этом случае при  $X_z(p) = 0$  регулируемая величина

$$X(p) = X_B(p) - W_P(p)W_O(p)X_B(p) = X_B(p) - \frac{1}{W_O(p)}W_O(p)X_B(p) = 0. \quad (7.4)$$

Поэтому полезная составляющая  $X_Y(p)$  на выходе объекта будет полностью уравновешивать возмущение  $X_B(p)$ .

Однако возмущение  $X_B(p)$ , как правило, измерить не удастся, и САУ приходится строить по замкнутой схеме (с обратной связью). Для отыскания структуры идеальной замкнутой системы можно использовать идею косвенного измерения возмущения  $X_B(p)$  с помощью модели объекта  $W_{OM}(p)$  (рис. 7.3, а). Очевидно, что при

$$W_{OM}(p) = W_O(p) \quad (7.5)$$

вычисляемый на выходе модели объекта сигнал

$$X_{BM}(p) = X(p) - X_{YM}(p) \quad (7.6)$$

является косвенно измеренным возмущением  $X_B(p)$  и его можно, как и в предыдущей схеме (рис. 7.2, б), ввести в регулятор с передаточной функцией (7.1) и, таким образом, снова получить идеальную разомкнутую структуру (рис. 7.3, а). В ней в соответствии с правилами структурных преобразований сигнал  $W_{YM}(p)$  можно перенести на вход регулятора и приложить к сумматору 2 (рис. 7.3, б). Тогда регулятор с передаточной функцией  $1/W_O(p)$  окажется охваченным внутренней положительной обратной связью, а сигнал после сумматора 1 будет соответствовать сигналу ошибки

$$\varepsilon(p) = X_3(p) - X(p). \quad (7.7)$$

Последнее означает, что САУ стала замкнутой и работает по принципу отрицательной обратной связи с регулятором (см. рис. 7.3, б), имеющим передаточную функцию

$$W_P(p) = \frac{1/W_O(p)}{1 - W_{OM}(p)/W_O(p)}. \quad (7.8)$$

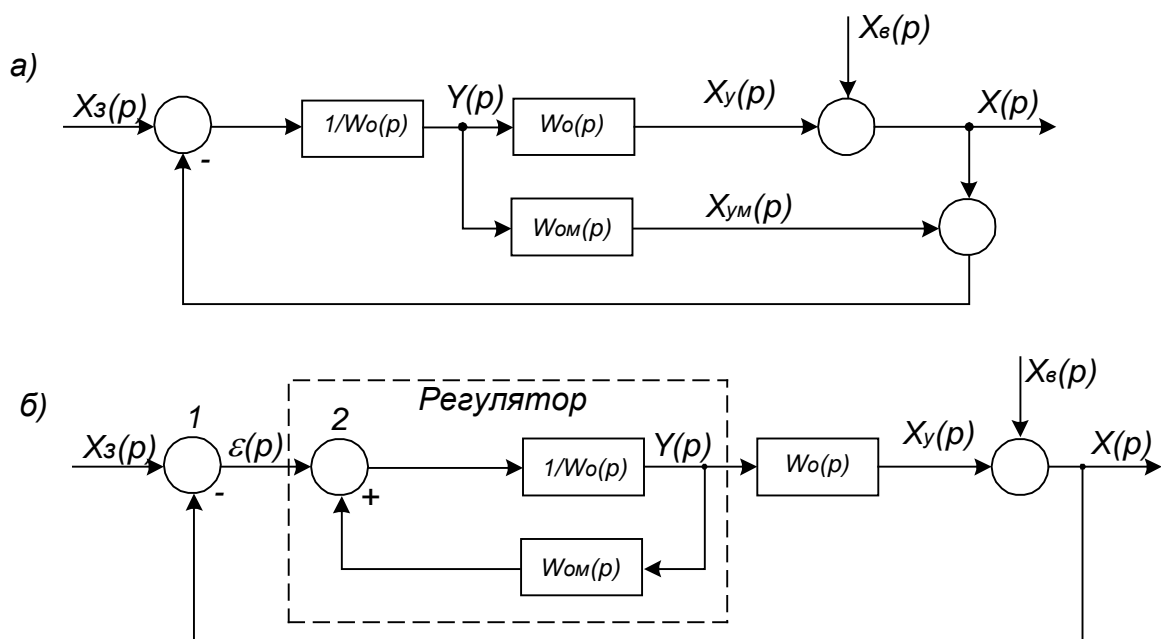


Рис. 7.3. Алгоритмические схемы идеальной замкнутой САУ

При точном совпадении объекта управления и его модели ( $W_O(p) = W_{OM}(p)$ ) регулятор будет работать как пропорциональный с коэффициентом  $k_n = \infty$ , что соответствует нулевым ошибкам по каналам задания и возмущения.

Техническая реализация безинерционного (идеального) регулятора невозможна. Однако такая структура является идеалом, к которому необходимо стремиться при синтезировании высококачественных систем управления. В соответствии с идеальной структурой (рис. 7.3, б) можно сформулировать фундаментальный принцип структурно-параметрической оптимизации САУ с обратной связью: *регулятор должен содержать динамическое звено с передаточной функцией, равной или близкой обратной передаточной функции объекта управления.*

### 7.3. Определение алгоритмической структуры и настроечных параметров регуляторов САУ с инерционными статическими объектами управления

---

На практике наиболее часто приходится решать задачу синтеза САУ с инерционными объектами управления с запаздыванием, которые можно описать следующей обобщенной передаточной функцией

$$W_O(p) = W'_O(p) \exp(-p\tau_o), \quad (7.9)$$

где  $W'_O(p)$  - дробно-рациональная функция, характеризующая инерционную часть объекта управления;  $\tau_o$  - чистое запаздывание объекта управления.

Определим структуру и передаточную функцию *идеального регулятора* для инерционных объектов управления с запаздыванием.

Подставляя значение передаточной функции  $W_O(p)$  из выражения (7.9) в формулу (7.8) получаем передаточную функцию идеального регулятора для инерционных объектов управления с запаздыванием

$$W_P(p) = \exp(p\tau_o) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\exp(p\tau_o)}{W'_O(p)} \cdot W_{OM}(p)} \cdot \frac{1}{W'_O(p)}. \quad (7.10)$$

Здесь присутствует сомножитель  $\exp(p\tau_o)$ , который соответствует *идеальному упредителю* и точная реализация которого технически невозможна. Поэтому с целью упрощения искомой структуры регулятора и облегчения его технической реализации полагают, что для объектов управления с чистым запаздыванием  $\tau_o$ , идеальная САУ воспроизводит задающее воздействие с запаздыванием  $\tau_o$ , т. е.

$$\frac{X(p)}{X_3(p)} = \exp(-p\tau_o). \quad (7.11)$$

С другой стороны, применяя правило (4.8) структурного преобразования к алгоритмической схеме САУ (рис. 4.7), записываем отношение

$$\frac{X(p)}{X_3(p)} = \frac{W_p(p)W_o(p)}{1 + W_p(p)W_o(p)}. \quad (7.12)$$

Приравнявая правые части выражений (7.11) и (7.12) и учитывая в них значение передаточной функции  $W_o(p)$  из выражения (7.9), записываем уравнение

$$\exp(-p\tau_o) = \frac{W_p(p)W_o'(p)\exp(-p\tau_o)}{1 + W_p(p)W_o'(p)\exp(-p\tau_o)}. \quad (7.13)$$

Решая это уравнение, получаем искомую передаточную функцию идеального регулятора (регулятора Ресвика)

$$W_p(p) = \frac{\frac{1}{W_o'(p)}}{1 - \frac{1}{W_o'(p)} \cdot W_o'(p)\exp(-p\tau_o)}. \quad (7.14)$$

Этой передаточной функции соответствует алгоритмическая схема САУ (рис. 7.4), которая уже не содержит упредителя.

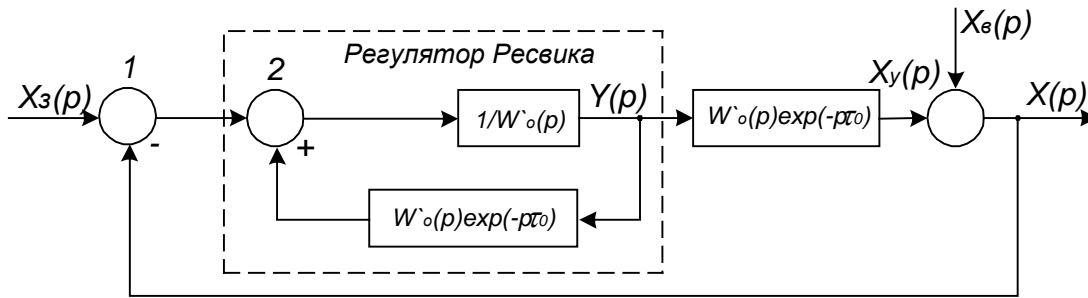


Рис. 7.4. Алгоритмическая схема идеальной САУ с объектом с запаздыванием

Передаточная функция по каналу возмущения в такой САУ согласно (4.11)

$$\frac{X(p)}{X_B(p)} = \frac{1}{1 + W_p(p)W_o'(p)\exp(-p\tau_o)} = \frac{1}{1 + \frac{W_o'(p)\exp(-p\tau_o)}{[1 - \exp(-p\tau_o)]W_o'(p)}} = 1 - \exp(-p\tau_o). \quad (7.15)$$

Это означает, что действие возмущения  $X_B(p)$  мгновенно компенсируется системой через время  $\tau_o$ .

Ранее было показано, что инерционные статические объекты управления с  $s$ -образной переходной характеристикой (см. рис. 3.1) можно представить в виде моделей первого (3.3) или второго (3.2) порядка с запаздыванием.

Представим, первоначально, объект управления моделью первого порядка (3.3). Тогда, полагая запаздывание  $\tau_o'$  модели объекта равным чистому запаздыванию  $\tau_o$  реального объекта и подставляя в выражение (7.14) значение передаточной функции модели (3.3), определяем передаточную функцию регулятора



$$W_p(p) = \frac{T'_o p + 1}{[1 - \exp(-p\tau'_o)]k_o}. \quad (7.16)$$

При относительно медленно изменяющихся воздействиях можно принять

$$\exp(-p\tau'_o) \approx 1 - p\tau'_o. \quad (7.17)$$

Тогда, учитывая это равенство в выражении (7.16) получаем искомую передаточную функцию регулятора

$$W_p(p) = \frac{T'_o p + 1}{p\tau'_o k_o} = \frac{T'_o}{k_o\tau'_o} + \frac{1}{k_o\tau'_o} \cdot \frac{1}{p} = k_{\Pi} + k_{\Pi} \frac{1}{p}, \quad (7.18)$$

где

$$k_{\Pi} = \frac{T'_o}{k_o\tau'_o}, \quad (7.19)$$

$$k_{\Pi} = \frac{1}{k_o\tau'_o}. \quad (7.20)$$

Такую передаточную функцию имеет пропорционально-интегральный (ПИ) регулятор с настроечными параметрами  $k_{\Pi}$  и  $k_{\Pi}$ .

Представив объект управления более точной моделью второго порядка (3.2) и проведя аналогичные рассуждения, получаем искомую передаточную функцию регулятора

$$W_p(p) = \frac{2T'_o}{k_o\tau'_o} + \frac{1}{k_o\tau'_o} \cdot \frac{1}{p} + \frac{(T'_o)^2}{k_o\tau'_o} p = k_{\Pi} + k_{\Pi} \frac{1}{p} + k_{\mathcal{D}} p, \quad (7.21)$$

где

$$k_{\Pi} = \frac{2T'_o}{k_o\tau'_o}, \quad (7.22)$$

$$k_{\Pi} = \frac{1}{k_o\tau'_o}, \quad (7.23)$$

$$k_{\mathcal{D}} = \frac{(T'_o)^2}{k_o\tau'_o}. \quad (7.24)$$

Такую передаточную функцию имеет пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор с настроечными параметрами  $k_{\Pi}$ ,  $k_{\Pi}$ ,  $k_{\mathcal{D}}$ .

На основании полученных общих соотношений между параметрами объекта управления и регулятора можно сформулировать **рекомендации по выбору типа регулятора и его настроечных параметров**:

- Для объектов с запаздыванием, инерционная часть которых **действительно** близка звену первого порядка (а не просто аппроксимирована таким звеном!), целесообразно применять ПИ-регулятор.
- Для объектов с запаздыванием, инерционная часть которых имеет порядок  $n \geq 2$ , наилучшим регулятором является ПИД-регулятор.

Эмпирические формулы в табл. 7.1 обобщают результаты экспериментальных исследований по определению настроечных параметров типовых регуляторов для объектов с запаздыванием

(при  $\tau_o / T_o = 0 \dots 1$ ). Параметры определены путем моделирования систем при ступенчатом изменении задающего  $x_3$  воздействия. Обеспечиваемым показателем качества САУ является перерегулирование  $\sigma$  (0 или 20 %) на выходе объекта регулирования.

Таблица 7.1

### Настроечные параметры типовых регуляторов

Тип регулятора	Настроечные параметры					
	$k_{II}$		$k_{II}$		$k_D$	
	$\sigma = 0$	$\sigma = 20 \%$	$\sigma = 0$	$\sigma = 20 \%$	$\sigma = 0$	$\sigma = 20 \%$
П	$\frac{0,3 T_o}{k_o \tau_o}$	$\frac{0,7 T_o}{k_o \tau_o}$	0	0	0	0
ПИ	$\frac{0,35 T_o}{k_o \tau_o}$	$\frac{0,6 T_o}{k_o \tau_o}$	$\frac{0,29}{k_o \tau_o}$	$\frac{0,6}{k_o \tau_o}$	0	0
ПИД	$\frac{0,6 T_o}{k_o \tau_o}$	$\frac{0,95 T_o}{k_o \tau_o}$	$\frac{0,6}{k_o \tau_o}$	$\frac{0,7}{k_o \tau_o}$	$\frac{0,3 T_o}{k_o}$	$\frac{0,45 T_o}{k_o}$

Если необходимо обеспечить колебательный характер переходного процесса в САУ, при котором амплитуда каждого последующего колебания должна быть в 4 раза меньше амплитуды предыдущего колебания, т. е. *степень затухания*

$$\Psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = \frac{A_1 - A_1 / 4}{A_1} = 0,75, \quad (7.25)$$

что соответствует нижней границе, при которой качество управления еще признается удовлетворительным, то следует воспользоваться рекомендациями по выбору настроечных параметров регуляторов, приведенных в табл. 7.2.

Таблица 7.2

### Настроечные параметры типовых регуляторов

Тип регулятора	Настроечные параметры		
	$k_{II}$	$k_{II}$	$k_D$
П	$\frac{\tau_o + T_o}{k_o \tau_o}$	0	0
ПИ	$\frac{\tau_o + T_o}{1,1 k_o \tau_o}$	$\frac{\tau_o + T_o}{3,66 k_o \tau_o^2}$	0
ПИД	$\frac{\tau_o + T_o}{0,8 k_o \tau_o}$	$\frac{\tau_o + T_o}{1,6 k_o \tau_o^2}$	$\frac{\tau_o + T_o}{1,6 k_o}$

Проведенные исследования позволили также сформулировать следующие **общие выводы о влиянии настроечных параметров на показатели качества регулирования:**

- Увеличение коэффициента  $k_P$  пропорциональной части регулятора приводит к увеличению перерегулирования  $\sigma$ , времени  $t_n$  переходного процесса и уменьшению степени затухания  $\Psi$ .
- Увеличение коэффициента  $k_I$  интегральной части регулятора приводит к уменьшению времени  $t_n$  переходного процесса и увеличению перерегулирования  $\sigma$ .
- Увеличение коэффициента  $k_D$  дифференциальной части регулятора приводит к уменьшению времени  $t_n$  переходного процесса и увеличению перерегулирования  $\sigma$ .