Конспект Лекций

Теоретическая механика

Глава XV. Количество движения, кинетический момент.

§15.1. Количество движения материальной точки и СМТ.

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная

$$\vec{k} = m\vec{v} \quad \textbf{(15.1)}$$

Количеством движения СМТ называется вектор, равный сумме векторов количеств движения всех точек системы:

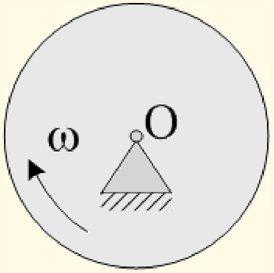
$$\vec{K} = \sum \vec{k}_i = \sum m_i \vec{v}_i \quad \textbf{(15.2)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \text{ от } \vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} : \vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M} \Rightarrow \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_c \qquad \boxed{\vec{K} = M\vec{v}_c} \quad \textbf{(15.3)}$$

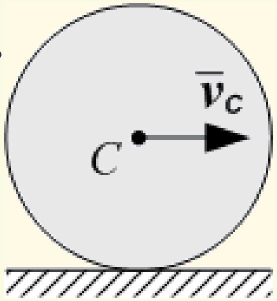
Количество движения системы равно произведению ***массы*** всей системы на ***скорость центра масс***. Это векторная мера движения.

$$1.\ \vec{K} = M\vec{v}_O = 0 \qquad 2.\ \vec{K} = M\vec{v}_c$$

1.



2.



Количество движения не характеризует вращательную часть движения. Оно является ***мерой поступательного движения*** тела.

§15.2. Теорема об изменении количества движения СМТ.

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{\,e} + \vec{F}_i^{\,i} \qquad \textbf{(15.4)} \qquad m_i\vec{a}_i = m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \frac{d\vec{k}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{k}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\,e} + \vec{F}_i^{\,i} \qquad \textbf{(15.5)}$$

Σ (15.5) по всем точкам системы: $\sum\frac{d\vec{k}_i}{dt} = \sum\vec{F}_i^{\,e} + \sum\vec{F}_i^{\,i}$

$\sum\frac{d\vec{k}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum\vec{k}_i = \frac{d\vec{K}}{dt}, \sum\vec{F}_i^{\,i} = 0$ (по следствию из 3 аксиомы механики)

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum\vec{F}_i^{\,e}.} \qquad \textbf{(15.5)}$$

Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: ***производная*** по времени ***от количества движения*** системы равна векторной ***сумме*** всех ***внешних сил***, действующих на систему.

В проекциях на оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = \Sigma F_{ix}^e \qquad \frac{dK_y}{dt} = \Sigma F_{iy}^e \qquad \frac{dK_z}{dt} = \Sigma F_{iz}^e$$

§15.2. Теорема об изменении К. Продолжение.

Разделяем переменные в уравнении (15.5) и интегрируем: $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}_i^e.$

(15.7) $\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum \int_0^t \vec{F}_i^e dt,$ где $\int_0^t \vec{F}_i^e dt$ - импульс i-й внешней силы.

Теорема об изменении количества движения системы в интегральной форме: ***изменение количества движения*** системы ***за*** некоторый ***промежуток времени равно*** векторной ***сумме импульсов*** всех ***внешних сил***, действующих на систему, за тот же промежуток времени.

Внутренние силы не могут изменить количества движения системы.

Закон сохранения количества движения системы.

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}_i^e.$$

Если $\sum \vec{F}_i^e = 0$, то $\vec{\mathrm{K}} = \overrightarrow{\mathrm{const}}.$ **(15.8)**

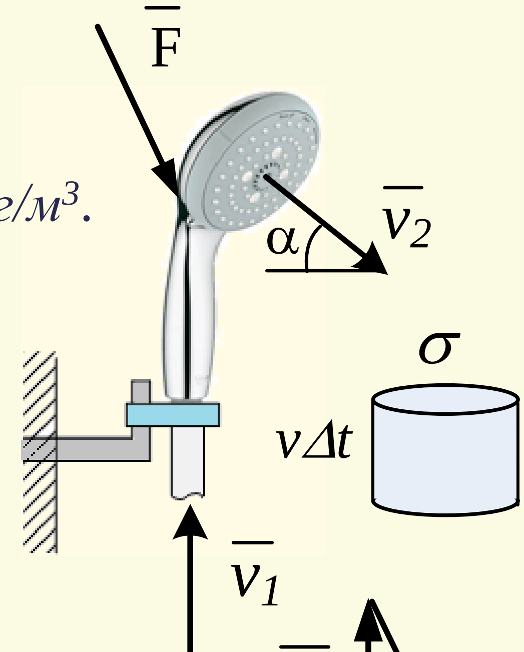
Если $\sum F_{ix}^e = 0$, то $K_x = \mathrm{const}.$

§15.2. Пример.

Дано: $\alpha=\pi/6$, $v_1 = v_2 = 3$ м/с , $\sigma = 1\ см^2 = 10^{-4}\ м^2$, $\rho = 10^3\ кг/м^3$.

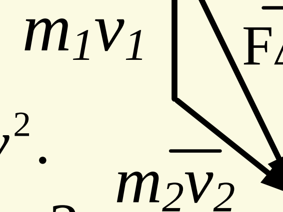
Найти: *Силу* $\boldsymbol{F}$, с которой вода действует на трубку.

Объём воды V, проходящей сквозь шланг за время Δt: $V=\sigma \cdot v\Delta t$, масса $m = \rho \cdot \sigma \cdot v\Delta t$. $\sigma_1 = \sigma_2$, $v_1 = v_2$.



Из **(15.7)** $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{F}\Delta t.$ $\vec{K}_1 = m_1\vec{v}_1,\ \vec{K}_2 = m_2\vec{v}_2.$

$$m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t \Rightarrow m_2\vec{v}_2 = \vec{F}\Delta t + m_1\vec{v}_1. \quad \textbf{(1)}$$



Спроецируем **(1)** на оси:

на *x*: $m_2v_2\cos\alpha = F_x\Delta t + 0 \Rightarrow F_x = \rho\sigma v^2\cos\alpha \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sigma v^2.$

на *y*: $-m_2v_2\sin\alpha = -F_y\Delta t + m_1v_1 \Rightarrow F_y = \rho\sigma v^2(1+\sin\alpha) = \frac{3}{2}\rho\sigma v^2.$

$$\Rightarrow F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = \sqrt{\left(\rho\sigma v^2\right)^2\left(\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right)} = \sqrt{3}\rho\sigma v^2$$

$$= 1{,}7\cdot 10^3\cdot 10^{-4}\cdot 3^2 \approx 1{,}53\ н = 156\ г.$$

§15.3. Теорема о движении центра масс.

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i \qquad \textbf{(15.4)}$$

Σ (15.4) по всем точкам системы: $\sum m_i\vec{a}_i = \sum \vec{F}_i^e + \sum \vec{F}_i^i$

$$\sum m_i\vec{a}_i = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_c) = M\vec{a}_c, \qquad \sum \vec{F}_i^i = 0.$$

$$\boxed{M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i^e} \qquad \textbf{(15.9)}$$

Центр масс системы ***движется*** как материальная ***точка***, ***масса*** которой ***равна массе*** всей ***системы*** и к которой приложены ***все*** внешние ***силы***, ***действующие на систему***.

В проекциях на оси:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = \Sigma F_{ix}^e \qquad M\frac{d^2y_c}{dt^2} = \Sigma F_{iy}^e \qquad M\frac{d^2z_c}{dt^2} = \Sigma F_{iz}^e$$

За счет внутренних сил невозможно изменить движение центра масс системы

§15.3. Теорема о движении центра масс.

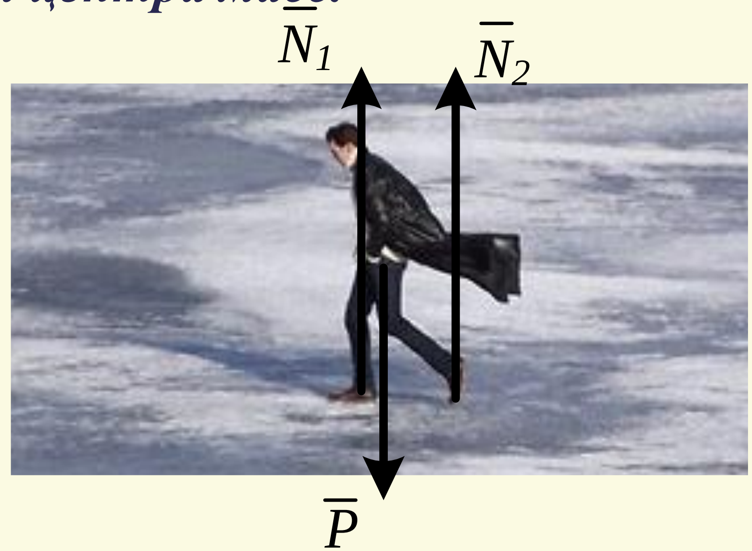
Если $\sum \vec{F}_i^e = 0$, то $\vec{a}_C = 0$. **(15.10)** $M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_i^e$

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс системы движется равномерно и прямолинейно.

Если $\sum \vec{F}_{ix}^e = 0$, то $\vec{a}_{Cx} = 0$. $\Rightarrow v_{Cx} = const.$

Это закон сохранения скорости центра масс.

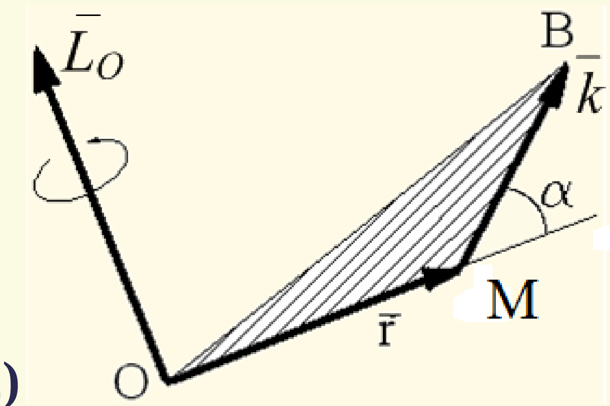
Может ли человек ходить по абсолютно гладкой поверхности?



$\sum \vec{F}_{ix}^e = 0.$ Если $v_{Cx}|_{t=0} = 0$, то и далее $v_{Cx} = 0$.

§15.4. Момент количества движения (кинетический момент).

Кинетическим моментом материальной точки <u>*относительно центра О*</u> называется векторное произведение $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{k} = \vec{r} \times m\vec{v}$. **(15.11)**



Кинетическим моментом СМТ <u>*относительно центра О*</u> называется вектор, равный сумме векторов кинетических моментов всех точек системы: $\vec{L}_O = \sum \vec{L}_{Oi} = \sum \vec{r}_i \times \vec{k}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$. **(15.12)**

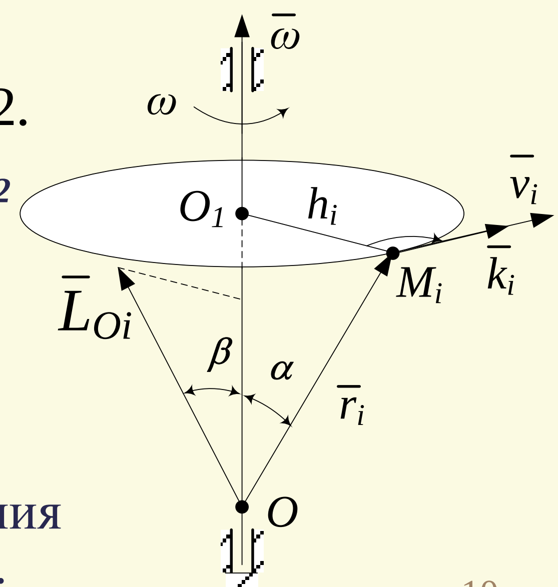
Рассмотрим вращение твёрдого тела вокруг оси Oz. Для ***i***-й точки

$$\boldsymbol{L_{Oi}=r_i k_i}\cdot\sin(\pi/2)=\boldsymbol{r_i m_i v_i = r_i m_i \omega h_i}$$

$$\vec{L}_{O_i} \perp k_i \Rightarrow \vec{L}_{O_i} \in пл.OO_1M_i, \quad \vec{L}_{O_i} \perp \vec{r}_i \Rightarrow \alpha + \beta = \pi/2.$$

$$\boldsymbol{L_{Oiz}=L_{Oi}}\cdot\cos(\beta)==\boldsymbol{L_{Oi}}\cdot\sin(\alpha)=\boldsymbol{r_i}\cdot\sin(\alpha)\boldsymbol{m_i\omega h_i} = \boldsymbol{\omega m_i h_i^2}$$

Для тела $L_{O_z} = \sum L_{O_{zi}} = \sum \omega m_i h_i^2 = \omega \sum m_i h_i^2 = J_z \omega.$



$$\boxed{L_{O_z} = J_z \omega} \qquad \textbf{(15.13)}$$

Кинетический момент относительно оси вращения является ***мерой вращательного движения*** тела.

§15.5. Теорема об изменении кинетического момента.

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^e + \vec{F}_i^i \qquad \textbf{(15.5)} \qquad \vec{r}_i \times (15.5):$$

$$\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^i$$

Преобразуем левую часть:

$$\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i = \vec{r}_i \times m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) =$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) - \cancelto{0}{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i} = \frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt}$$

$$uv' = (uv)' - u'v$$

$$u = \vec{r}_i;\ v = m_i\vec{v}_i.$$

Правая часть: $\vec{r}_i \times \vec{F}_i^e = \vec{M}_{Oi}^e;\ \vec{r}_i \times \vec{F}_i^i = \vec{M}_{Oi}^i, \ \Rightarrow \dfrac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \vec{M}_{Oi}^e + \vec{M}_{Oi}^i.$

(15.14)

Просуммируем обе части (5.14) по всем точкам системы:

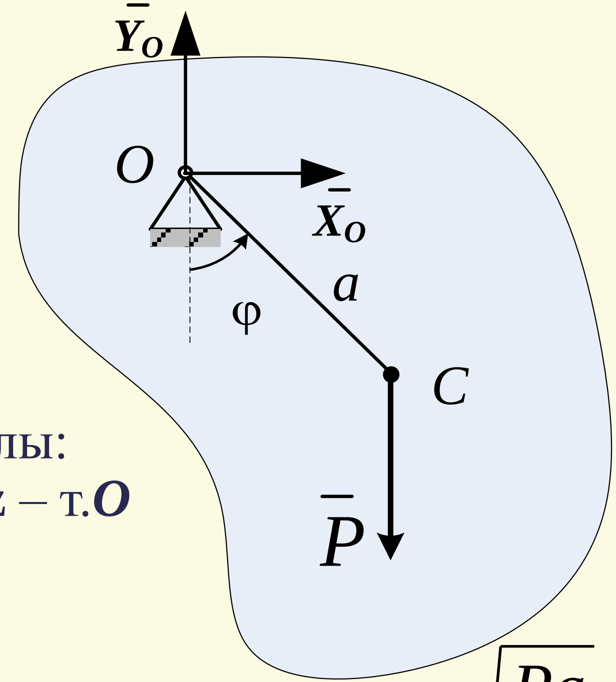
$$\sum\frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \sum\vec{M}_{Oi}^e + \sum\vec{M}_{Oi}^i. \quad \sum\frac{d\vec{L}_{0i}}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma\vec{L}_{0i} = \frac{d\vec{L}_0}{dt}, \quad \sum\vec{M}_{Oi}^i = 0.$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum\vec{M}_{Oi}^e} \quad \textbf{(15.15)}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \Sigma M_{iz}^e \quad \textbf{(15.16)}$$

Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра равна векторной сумме моментов всех внешних сил, приложенных к системе, относительно того же центра.

§15.5. Пример.



Определить радиус инерции ***ρ*** твёрдого тела относительно оси, проходящей через ЦТ, зная период ***T*** его малых качаний при подвесе в точке ***O***, отстоящей от ЦТ на расстояние ***a***.

(15.16) $\dfrac{dL_z}{dt} = \Sigma M_{iz}^e$; Укажем действующие силы: (***P***, ***X_O***, ***Y_O***). Вместо оси **z** – т.***O***

$$\frac{d}{dt}(J_z\omega) = -P\sin\varphi\cdot a \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{Pa}{J_O}\sin\varphi = 0.$$

При малых колебаниях $\sin\varphi \approx \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$, где $k = \sqrt{\dfrac{Pa}{J_O}}.$

$$T = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{k^2} = \frac{4\pi^2 J_O}{Pa} \Rightarrow J_O = \frac{T^2 Pa}{4\pi^2}.$$

По теореме Штейнера $J_O = J_C + a^2\cdot\dfrac{P}{g} \Rightarrow J_C = J_O - a^2\cdot\dfrac{P}{g} =$

$$= \frac{T^2 Pa}{4\pi^2} - a^2\cdot\frac{P}{g} = Pa\left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{a}{g}\right);\quad J_C = \frac{P}{g}\rho^2 \quad\Rightarrow\quad \rho = \sqrt{\frac{J_C g}{P}} =$$

T и ***a*** измеряются экспериментально. $= \sqrt{ag\left(\dfrac{T^2}{4\pi^2} - \dfrac{a}{g}\right)}.$

§15.5. Теорема об изменении L_O. Продолжение.

Закон сохранения кинетического момента системы.

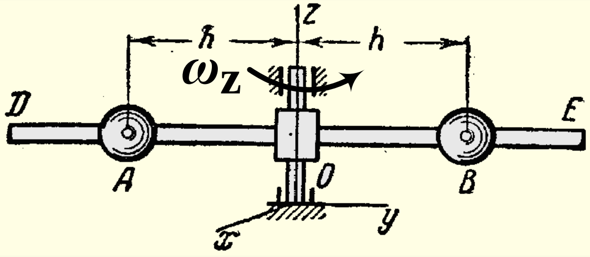
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}^e_{Oi}.\ \text{Пусть}\ \sum \vec{M}^e_{Oi} = 0.\ \text{Тогда}\ \vec{L}_O = \overrightarrow{const}. \qquad \textbf{(15.17)}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M^e_{zi}.\ \text{Пусть}\ \sum M^e_{zi} = 0.\ \text{Тогда}\ L_z = J_z \cdot \omega_z = const. \qquad \textbf{(15.18)}$$

Если *сумма моментов* внешних сил относительно точки или оси *равна нулю*, то *кинетический момент* системы относительно этой точки или оси *постоянен*.

Внутренние силы *не могут изменить* кинетический момент системы.

$J_z = \Sigma m_i h_i^2 = 2mh^2.$ Из (15.18) имеем:

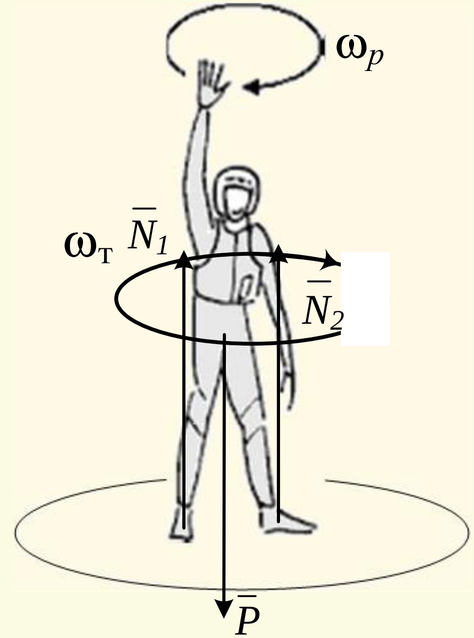


$$L_z = J_z \cdot \omega_z = 2mh^2 \cdot \omega_z = \text{const}.$$

При уменьшении ***h*** ω_z растёт.

§15.5. Закон сохранения L_O. Продолжение.

Может ли человек, стоящий на гладком льду, повернуть себя, вращая руку над головой?



$$\sum M_{zi}^e = M_z(\vec{P}) + M_z(\vec{N}_1) + M_z(\vec{N}_2) = 0.$$

$\Rightarrow$ из (15.18) $L_z = const \quad \Rightarrow L_{2z} = L_{1z}.$

$L_{1z} = 0$, т.к. вначале - покой $\Rightarrow L_{2z} = 0.$

$L_{z_т}$ – кин.момент тела, $L_{z_р}$ – кин.момент руки.

ω_T – угл.скорость тела, ω_P – угл.скорость руки.

$$L_{2z} = L_{Z_T} + L_{Z_P} = J_{Z_T} \cdot \omega_т + J_{Z_P} \cdot (\omega_т + \omega_р) = 0.$$

$L_{Z_T} = J_{Z_T} \cdot \omega_т ; L_{Z_P} = J_{Z_P} \cdot (\omega_т + \omega_р).$ Подставляем в предыдущее:

Получаем: $\omega_т = -\dfrac{J_{Z_P}}{J_{Z_T} + J_{Z_P}} \cdot \omega_р.$

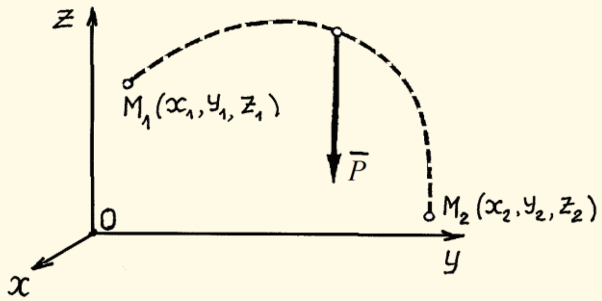
Человек, стоящий на идеально гладкой поверхности, может повернуться вокруг оси, проходящей через его центр тяжести ⊥ этой поверхности.

В ***геометрически изменяемых*** системах за счет <u>*внутренних сил*</u> ***можно*** изменить ***угловую скорость*** вращения.

§15.6. Потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t) \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

Пространство, в котором силы зависят только от координат точек их приложения, называется ***силовым полем***.



Если знаем траекторию точки, то

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &t = t(x) \Rightarrow y = y(x), z = z(x). \\ &dy = f_1(dx), dz = f_2(dx). \end{aligned}$$

Силовое поле называется ***потенциальным***, если ***работа*** его ***сил*** не зависит от траектории движения точек их приложения. Сами силы называются потенциальными или консервативными.

Работа сил тяжести $A(\vec{P}_i) = m_i g(z_{i1} - z_{i2})$,

$$\sum A(\vec{P}_i) = g\sum m_i z_{i1} - \sum m_i z_{i2} = Mgz_{C1} - Mgz_{C2} = -P\Delta z_C.$$

Работа сил упругости $A = \int_x^0 F_x dx = -\int_x^0 cx dx = \frac{1}{2}cx^2$

§15.6. Закон сохранения полной механической энергии

Для точек в потенциальных полях вводится понятие потенциальной энергии («запаса работы»), которым обладает материальная точка в данном пункте потенциального силового поля.

Потенциальная энергия $E_п$ материальной точки определяется ***работой сил поля*** при её перемещении из ***текущего*** положения в ***нулевую точку*** поля.

Еп силы тяжести тела: $E_П = Mgz_C$.

Еп силы упругости: $E_п = \frac{1}{2}c\lambda^2$, где λ - растяжение пружины из ненагруженного состояния.

$$E_П = A_{1-0} = -A_{0-1}.$$

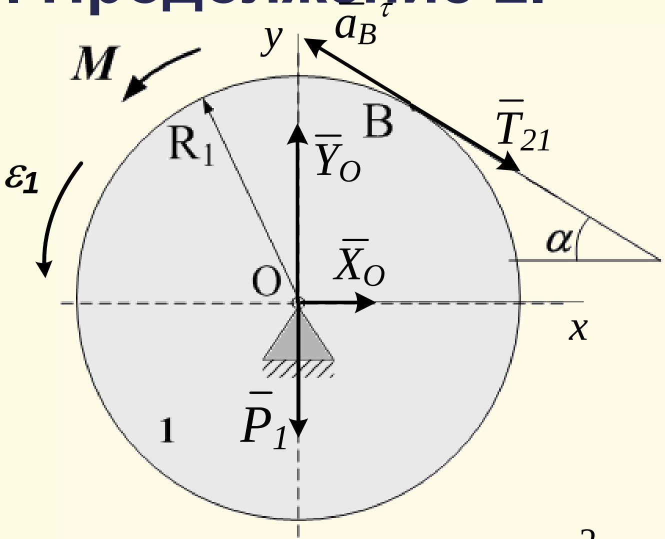
$$E_{К_2} - E_{К_1} = A_{1-2} = A_{1-0} + A_{0-2} = E_{П_1} - E_{П_2}.$$

$$\boxed{E_{К_2} + E_{П_2} = E_{К_1} + E_{П_1}.} \quad \textbf{(15.19)}$$

Закон сохранения полной механической энергии

При движении системы в потенциальном поле сумма кинетической и потенциальной энергий в каждом положении системы есть величина постоянная.

§15.6. Пример решения задачи. Продолжение 2.



Чтобы найти силу $\boldsymbol{R_O}$ реакции в шарнире О и силу $\boldsymbol{T_{21}}$ натяжения нити рассмотрим движение тела 1.

Укажем оси координат и действующие силы ($\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{X_O}$, $\boldsymbol{Y_O}$, $\boldsymbol{T_{21}}$). Момент $\boldsymbol{M}$ уже указан.

Укажем угловое ускорение ε_1 тела 1.

$\boldsymbol{\varepsilon_1 = a_B^{\tau} / OB = a_A / R_1}$ в сторону $\boldsymbol{a_B^{\tau}}$.

Запишем уравнение (15.16) $\dfrac{dL_O}{dt} = \Sigma M_O$, где $L_O = J_O \cdot \omega_1$, $J_O = \dfrac{m_1 R_1^2}{2}$.

$$\frac{m_1 R_1^2}{2} \cdot \varepsilon_1 = -T_{21} \cdot R_1 + M \quad \Rightarrow T_{21} = \frac{1}{R_1}\left(M - \frac{1}{2} m_1 R_1 a_A \right).$$

Запишем уравнение (15.5) $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}_i^e$, где $\vec{K} = m\vec{v}_C$.

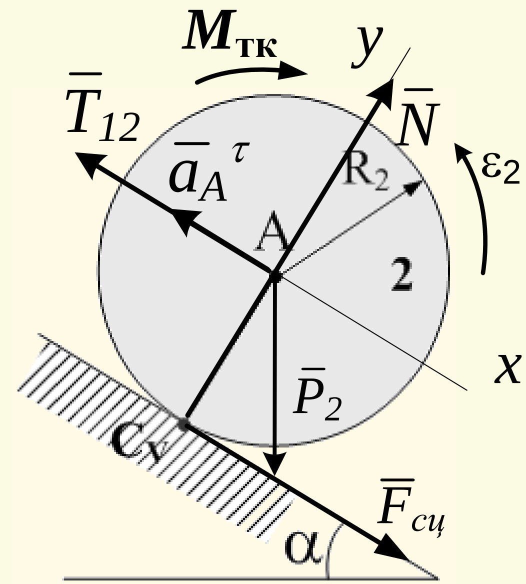
$m_1 \vec{a}_O = \vec{P}_1 + \vec{X}_O + \vec{Y}_O + \vec{T}_{21}$. Спроецируем его на оси x и *y*:

$$0 = X_O + T_{21} \cos\alpha \ \Rightarrow X_O = -T_{21} \cos\alpha;$$

$$0 = -P_1 + Y_O - T_{21} \sin\alpha \ \Rightarrow Y_O = P_1 + T_{12} \sin\alpha.$$

$$R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2}.$$

§15.6. Пример решения задачи. Продолжение 3.



Чтобы найти силу трения $\boldsymbol{F_{сц}}$ рассмотрим движение тела 2.

Укажем оси координат и действующие силы ($\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{F_{сц}}$, $\boldsymbol{T_{12}}$, $\boldsymbol{M_{тк}}$).

Укажем угловое ускорение ε_2 тела 2.

$\boldsymbol{\varepsilon_2 = a_A^{\tau} / AC_V = a_A / R_2}$ в сторону $\boldsymbol{a_A}$.

Способ 1.

Запишем уравнение (15.16) $\dfrac{dL_A}{dt} = \Sigma M_A,$ где $L_A = J_A \cdot \omega_2.$

$$\frac{m_2 R_2^2}{2} \cdot \varepsilon_2 = F_{сц} \cdot R_2 - M_{тк} \Rightarrow F_{сц} = \frac{m_2}{R_2}\left(f_{тк} g \cos\alpha + \frac{1}{2} R_2 a_A \right).$$

Способ 2.

Запишем уравнение (15.5) $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}_i^e$, где $\vec{K} = m\vec{v}_C.$

$m_1 \vec{a}_A = \vec{P}_2 + \vec{F}_{сц} + \vec{N} + \vec{T}_{12}.$ Спроецируем его на ось x:

$$-ma_A = m_2 g \sin\alpha + F_{сц} - T_{12} \Rightarrow F_{сц} = T_{12} - m_2 g \sin\alpha - m_2 a_A.$$

Спасибо за внимание!

Адрес: en.lych@gmail.com