Раздел 3. Установившиеся режимы в линейных цепях с источниками периодических напряжений и токов

План

3.1. Основные понятия и соотношения. Величины, характеризующие синусоидальные источники.

3.2. Метод комплексных амплитуд для расчета цепей с синусоидальными сигналами.

3.3. Энергия и мощность в цепях при синусоидальных сигналах. Коэффициент мощности устройства. Частотные характеристики элементов. Активное, реактивное и полное сопротивление участка цепи.

3.1. Промышленные системы электроснабжения используют изменяющийся во времени (переменный) ток. Форма тока мало изменяется в течение длительного времени, что дает возможность рассматривать установившиеся процессы, которые описываются синусоидальной функцией

$$i(t) = I_m \sin\left(2\pi f\, t + \psi\right). \qquad (6.17)$$

Обычно цепями синусоидального тока называют электрические цепи с источниками напряжения и тока, изменяющимися по синусоидальному закону с одной и той же частотой.

Возникает множество практических задач расчета электрических цепей с синусоидальными источниками для анализа распределения энергии в системе, эффективности ее передачи и других параметров.

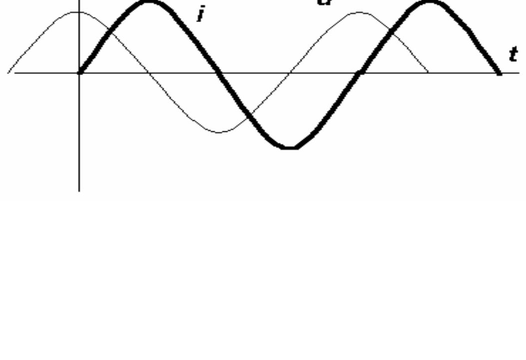
Проанализируем преобразование синусоидального тока элементами электрической схемы.

Для резистора $U_R(t) = R\, i(t) = RI_m \sin(\omega\, t + \psi\ ) = U_m \sin(\omega\, t + \psi)$, где U_m=RI_m - амплитуда напряжения.

Очевидно, что фазовые углы $\psi(t)$ тока и напряжения резистора одинаковые и поэтому говорят, что напряжение и ток совпадают по фазе.

Для индуктивности $U_L = L\, di/dt = \omega\, LI_m \sin(\omega\, t + + \pi/2) = U_m \sin(\omega\, t + \psi + \pi/2)$,

причем U_m=ωLI_m и напряжение имеет фазовый сдвиг относительно тока на $\pi/2$, т.е. опережает ток на угол $\pi/2$.



Для емкостного элемента $u_C(t) = U_m \sin(\omega\ t + \psi - \pi/2)$, причем $U_m = I_m/(\omega\ C)$ и напряжение отстает от тока на угол $\pi/2$, т.е. фазовый сдвиг составляет ($-\pi/2$).

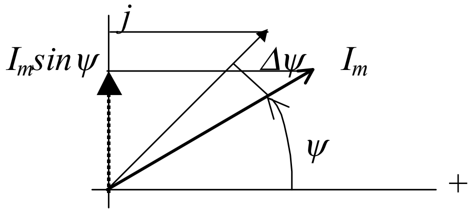
Очевидно, что интегрирование, дифференцирование и суммирование синусоидальных величин результатом имеет синусоидальную величину той же частоты. Если принять во внимание, что в соответствии с уравнениями соединений и уравнениями элементов расчет токов цепи заключается в выполнении указанных операций, то ясно, что *суть расчета состоит в определении амплитуды и начальной фазы искомой величины* (тока или напряжения).

3.2. Способ тригонометрических преобразований весьма громоздкий и нерациональный. Поэтому, как указывалось, при расчете устройств с синусоидальными величинами используется их представление с помощью комплексных экспонент.

$$i\ (t) = I_m \sin(\omega\ t + \psi) = \mathrm{Im}\{I_m e^{j(\omega\ t + \psi)}\} = \mathrm{Im}\{\dot{I}_m\ e^{j\omega\ t}\}, \qquad (6.18)$$

где $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}$ - комплексная амплитуда тока.

Для наглядности изменение амплитуды и фазы синусоидального сигнала принято отображать амплитуду и начальную фазу на комплексной плоскости. Тогда значения синусоидальной функции времени могут быть получены как проекции на мнимую ось вектора комплексной амплитуды, .вращающегося со скоростью ω *(за время Δt фазовый угол получит приращение $\Delta\phi = \omega\ \Delta t$ и вектор комплексной амплитуды на комплексной плоскости будет под углом $\varphi(t) = (\phi + \omega\ \Delta\ t)$ к действительной оси.*



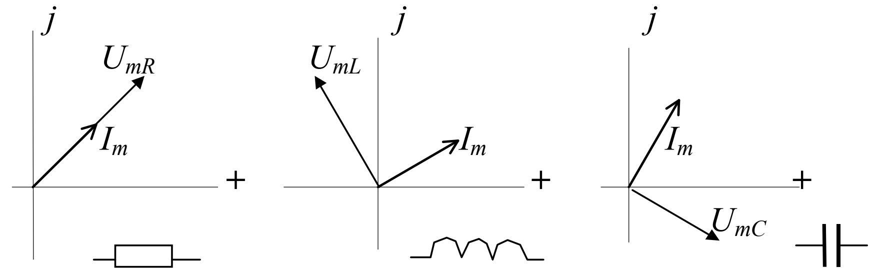
Уравнения элементов схемы можно записать с использованием комплексных амплитуд.

Для резистора из соотношения $u_R = Ri$ получим $\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_{mR}$ *(на комплексной плоскости векторы совпадают по направлению).*

Для индуктивного элемента можно записать

$u_L = L\dfrac{d}{dt} Im\left\{\dot{I}_m\ e^{j\omega\ t}\right\} = Im\left\{j\omega\ L\dot{I}_m\ e^{j\omega\ t}\right\}$, откуда следует, что $\dot{U}_{mL} = j\omega\ L\dot{I}_{mL}$, т.е. вектор напряжения $\dot{U}_{mL}$ опережает вектор тока $\dot{I}_{mL}$ на угол $\pi/2$.

Для емкостного элемента получим соотношение $\dot{I}_{mC} = j\omega\, C\dot{U}_{mC}$ или $\dot{U}_{mC} = \dot{I}_{mC} \big/ (j\omega\ C)$.



Комплексным сопротивлением (проводимостью) участка цепи называют коэффициент пропорциональности между комплексными амплитудами напряжения и тока элемента:

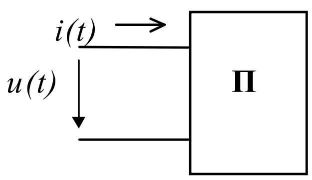
$$Z = \dot{U}_m \big/ \dot{I}_m\ ,\quad Y = \dot{I}_m \big/ \dot{U}_m\ , \tag{6.19}$$

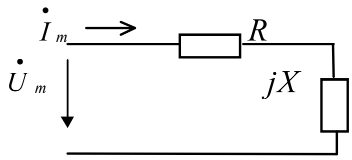
Очевидно, что для индуктивного элемента $Z_L = j\omega L = jX_L$, где $\boldsymbol{X_L}$ [Ом] –модуль индуктивного сопротивления, $Y_L = -j/(\omega\ L) = -jb_L$, где b_L [См] - модуль индуктивной проводимости.

Для емкостного элемента соответственно $Z_C = -j/(\omega\ C) = -jX_C$ и $Y_C = j\omega\ C = jb_C$.

В качестве примера вычислим комплексное сопротивление индуктивной катушки с L= 0,318 Гн и $\boldsymbol{r_L}$ *= 12 0м на промышленной частоте (f = 50Гц): для индуктивности получим* $Z_L = j\omega\ L = j \cdot 314 \cdot 0{,}318 = 100$ Ом, *и полное комплексное сопротивление катушки* $Z = r_L + Z_L = (12 + \mathrm{j}\ 100)$ Ом.

При наличии в ветви нескольких компонентов удобно объединить их и рассматривать комплексное сопротивление пассивного двухполюсника. Практическая задача состоит в построении эквивалентной схемы пассивного двухполюсника при измеренных на его зажимах напряжении $u(t) = U_m sin(\omega t + \psi)$ и токе $i(t) = I_m sin\omega t + \psi$.





Переход к комплексным амплитудам $\dot{I}_m = I_m e$, $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi}$ и использование понятия комплексного сопротивления дает $Z = \dot{U}_m \big/ \dot{I}_m = (U_m / I_m) e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi} = r + jX$. Следовательно, пассивный двухполюсник в цепи синусоидального тока может быть представлен последовательной схемой из резистора и индуктивности (при $\varphi > 0$) или емкости (при $\varphi < 0$).

Аналогично можно рассмотреть понятие комплексной проводимости пассивного двухполюсника $Y = \dot{I}_m / \dot{U}_m = (I_m / U_m) e^{-j\varphi} = ye^{-j\varphi} = g - jb$.
В этом случае двухполюсник заменяется параллельной эквивалентной схемой с активной g и реактивной b проводимостями.

Очевидно, что для одного двухполюсника параметры эквивалентных схем взаимосвязаны:

$$Y = 1/Z = \frac{1}{R + jX} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} - \frac{jX}{\sqrt{R^2 + X^2}}. \qquad (6.20)$$

<u>*Уравнения Кирхгофа*</u> можно также записать с комплексными амплитудами:
для узлов схемы

$$\sum_k \dot{I}_{mk} = 0 \qquad (6.21)$$

и для замкнутых независимых контуров

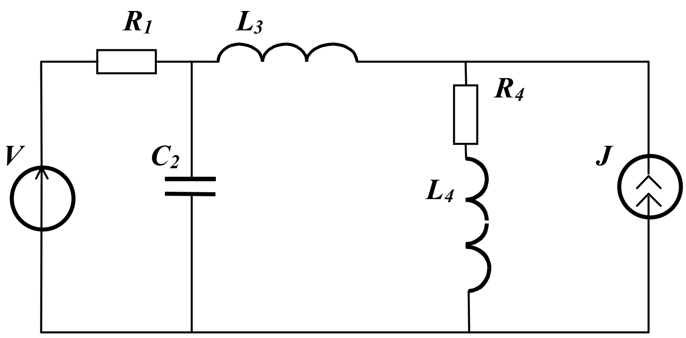
$$\sum_l \dot{U}_{ml} = 0 \qquad (6.22)$$

Такая запись совместно с уравнениями элементов в виде $\dot{U}_M = Z\dot{I}_m$ позволяет применять все методы расчета, рассмотренные для схем с постоянными источниками.

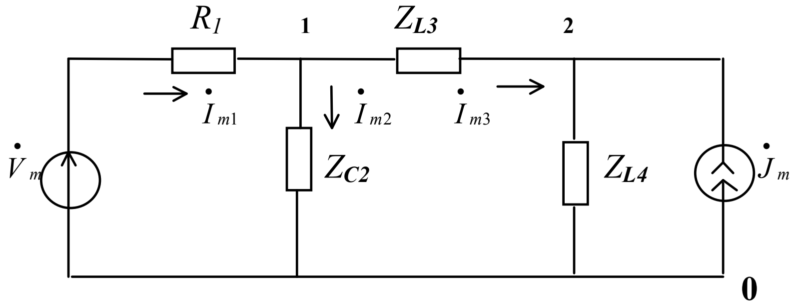
При заданной схеме, параметрах источников и номиналах элементов расчет содержит следующие операции:

- переход от синусоидальных функций источников к их комплексным изображениям;
- формирование уравнений схемы с использованием комплексных амплитуд;
- решение полученной системы уравнений и определение комплексных изображений искомых токов;
- переход от комплексных амплитуд к временным функциям искомых токов.

В качестве примера определим распределение токов в схеме с номиналами элементов $R_1 = 5$ Ом; $C_2 = 10^{-4}$ Ф; $L_3 = 6$ мГн; $R_4 = 4$ Ом; $L_4 = 4$ мГн, при $V(t) = 50 \sin 1000t$, В; $J(t) = 1 \sin(1000t - \pi/2)$, А.
Перейдем от временных функций к комплексным амплитудам $\dot{V}_m = 50B$, $\dot{I}_m = 1e^{-j\pi/2} = -j$ *и рассчитаем комплексные сопротивления:* $Z_{c2} = -j/(\omega C_2) = -j10$ *Ом;* $Z_{L3} = j\omega L_3 = j\,6$ *Ом;* $Z_4 = R_4 + j\omega L_4 = (4 + j4)$ *Ом.*



Изобразим схему для комплексных амплитуд и выберем положительные направления токов. Рассмотрим решение с применением контурных уравнений для контуров a и b:



Запишем узловые уравнения для потенциалов φ_{m1} *и* φ_{m2}: $(Y_1 + Y_2 + Y_3)$
$\varphi_{m1} - Y_3\varphi_{m2} = Y_1V_m$,
$- Y_3\, \varphi_1 + (Y_3 + Y_4)\varphi_{m2} = J_m$,
причем $Y_1 = 1/R_1 = 0{,}2$ *См*; $Y_2 = 1/Z_{c2} = j\,0{,}1$ *См*; $Y_3 = 1/Z_{L3} = -j\,0{,}17$ *См*; $Y_4 = 1/Z_4 = (0{,}125 - j\,0{,}125)$ *См.*
Подстановка значений и решение дает

$$\dot{\varphi}_{m1} = (41{,}25 - j2{,}75)B\ ,\ \dot{\varphi}_{m2} = (22 - j11)B.$$

Токи ветвей найдем из соотношений

$$\dot{I}_{m1} = Y_1(\dot{V}_m - \dot{\varphi}_{m1}) = (1{,}7 + j\,0{,}9) = 1{,}92e^{j60^\circ}A;$$

$$\dot{I}_{m2} = Y_2\,\dot{\varphi}_{m1} = (0{,}45 + j\,4{,}15) = 4{,}17e^{j84^\circ}A;$$

$$\dot{I}_{m3} = Y_3(\dot{\varphi}_{m1} - \dot{\varphi}_{m2}) = (1{,}25 - j\,3{,}25) = 3{,}48e^{j\,69^\circ}A;$$

$$\dot{I}_{m4} = Y_4\,\dot{\varphi}_{m2} = (1{,}25 - j\,4{,}25) = 4{,}43e^{-j\,74^\circ}A..$$

Окончательный ответ следует записать в виде:
$i_1(t) = 1{,}92\sin(1000t + 60^\circ), A$;
$i_2(t) = 4{,}17\sin(1000t + 84^\circ), A$;
$i_3(t) = 3{,}48\sin(1000t - 69^\circ), A$;
$i_4(t) = 4{,}43\sin(1000t - 74^\circ), A$.

3.3. Для пассивного двухполюсника можно вычислить зависимость от времени потребляемой мощности: $p(t) = u(t)i(t) = 0{,}5U_m\, I_m \cos\varphi - 0{,}5U_m\, I_m$

cos(2ωt + φ). Первое слагаемое представляет собой активную мощность, среднее за период (постоянное) значение мощности. Второе слагаемое в формуле (6.16) представляет изменяющуюся во времени (пульсирующую мощность), которая в течение части периода идет в нагрузку, а в остальную часть периода возвращается в источник. Например, в индуктивных и емкостных элементах ($\varphi_L = \pi/2;\ \varphi_c = -\pi/2$) активная мощность не потребляется $P_L = 0$ и $P_c = 0$, но существует пульсирующая мощность.

Активная мощность, потребляемая двухполюсным элементом, существенно зависит от характера его комплексного сопротивления, т.е. $\varphi = arctg(X/R)$. Максимальная активная мощность выделяется в резисторе R $P = R\ (\frac{1}{T}\int i^2(t)dt) = RI^2$, причем значение переменного тока $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int i^2(t)dt}$ носит название <u>среднеквадратичного</u> или <u>действующего</u>. Очевидно, что действующее это такое значение периодического тока, которое выделяет на резисторе мощность как и равное ему значение постоянного тока.

Для синусоидального тока и напряжения действующие значения связаны с амплитудой соотношениями: $I = I_m/\sqrt{2}$, $U = U_m/\sqrt{2}$. С использованием действующих значений тока и напряжения активную мощность запишем в виде $P = U\,I\,cos\varphi$.

При расчете электрических цепей с использованием комплексных амплитуд удобно мощность (активную) вычислять в комплексной области. С этой целью вводят понятие комплексной мощности $\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$.

Модуль комплексной мощности ***S = U I*** называют полной мощностью и используют для характеристики максимального напряжения и тока электрических аппаратов.

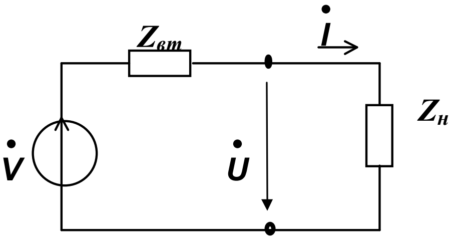
Мнимую часть комплексной мощности называют реактивной мощностью $Q = U\,I\,sin\varphi$.

Активная, реактивная и комплексная мощности связаны с параметрами двухполюсного элемента

$$\tilde{S} = ZI^2 = RI^2 + jXI^2 = P + jQ \tag{6.23}$$

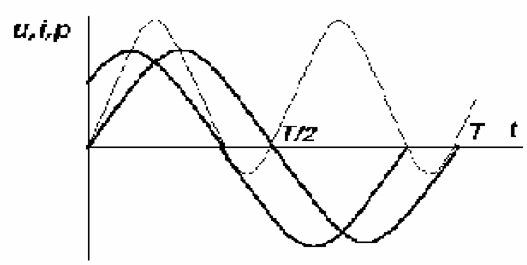
т.е. активная мощность $P = R\,I^2$ выделяется в резисторах.

В качестве примера определим полное сопротивление нагрузки $Z_н$, при котором выделяется максимальная активная мощность источника синусоидального напряжения V=10sin(314t),В с внутренним сопротивлением $r_{вт}$ = 100 Ом и индуктивностью $L_{вт}$ = 0,16 Гн.



Представим эквивалентную схему передачи энергии в виде активного и пассивного двухполюсников.

Если комплексное сопротивление нагрузки представить в виде $Z_н$ = R + j X, то ток $\dot{I} = \dot{V} / (Z_{BT} + Z_H) = \dot{V} / [(r_{BT} + R) + j(X_{BT} + X)]$.



А*ктивную мощность можно записать*

$$P = RI^2 = R \frac{V^2}{(r_{BT} + R)^2 + (X_{BT} + X)^2}.$$

Для нахождения максимального значения следует вычислить dP/dR = 0 и dP/dX = 0.

Решение указанных уравнений с учетом физической реализуемости R>0 дает условия передачи максимальной мощности $r_{вт} = R$ *и* $X_{вт} = -X$ *, которые можно объединить в одно* $Z_{BT} = Z_H*$. *Максимальная мощность в нагрузке* $\boldsymbol{P}_{max} = V^2 / 4\, r_{Bm}$.

Можно показать, что для автономной (изолированной) схемы должен выполняться баланс комплексных мощностей

$$\sum_{k=1}^{N} \widetilde{S}_k = 0, \qquad (6.24)$$

т.е. сумма комплексных мощностей всех ветвей схемы должна быть нулевой. Для схемы с источниками напряжения и тока условие (8) можно переписать в развернутой форме:

$$\sum_{k=1}^{N} Z_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{N} \dot{V}_k \overset{*}{I}_k + \sum_{k=1}^{N} \dot{U}_l \overset{*}{J}_l. \qquad (6.25)$$

Уравнения и расчет линейных цепей с индуктивными связями обладает некоторыми особенностями.