Конспект Лекций

Теоретическая механика

Литература

1. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. **Динамика**: Учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ “Станкин”, 2010.
2. Еленев С.А., Новиков В.Г., Шевелева Г.И. **Кинематика**: 2009.
3. Мещерский И.В. **Задачи** по теоретической механике. Учебное пособие для вузов. М.: "Лань", 2006.
4. Яблонский А.А., Никифорова В.М. **Курс** теоретической механики. Учебник для вузов. - М.: "Интеграл-Пресс", 2006.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. А.А.Яблонского. Учебное пособие для технических вузов. М.: "Интеграл-пресс", 2006.
6. Тарг С.М. **Краткий курс** теоретической механики. Учебник для вузов. - М.: "Высшая школа", 2007.
7. Е.Н.Лычкин, Харыбина И.Н. Уравнения Лагранжа II рода: метод. указ. к выполнению самостоятельной работы. М.: Изд-во МГТУ «СТАНКИН», 2014.
8. Е.Н.Лычкин. Гироскопы Фуко I и II рода: метод. указ. к выполнению лаб. работы — М.: Изд-во МГТУ «СТАНКИН», 2013. — 11 с.

VIII. Кинематика твёрдого тела.

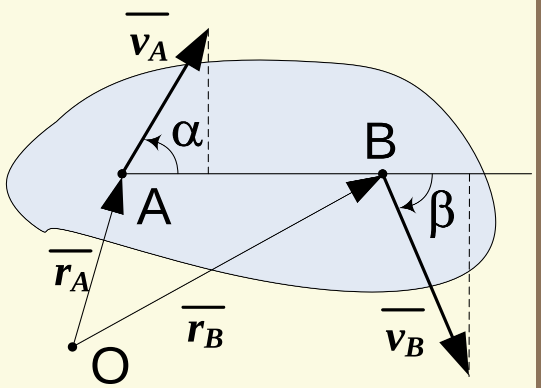
§8.1. Теорема о проекциях скоростей.

Виды движения твёрдого тела.

1. Поступательное.
2. Вращение вокруг неподвижной оси.
3. Плоскопараллельное.
4. Сферическое.
5. Общий случай движения.

Теорема о проекциях скоростей двух точек твёрдого тела.

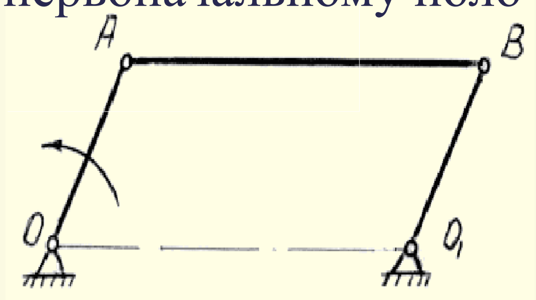
Теорема: проекции скоростей двух точек твёрдого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.



$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta \qquad \textbf{(8.1)}$$

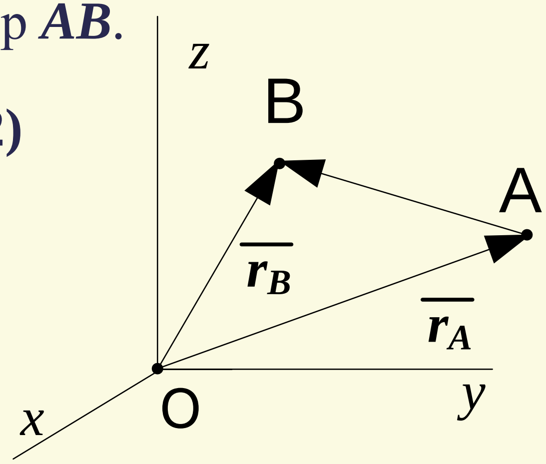
§8.2. Поступательное движение твердого тела.

Твердое тело совершает ***поступательное движение***, если любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению во все время движения.



При поступательном движении твердого тела все его точки имеют одинаковые траектории и векторно-равные в каждый момент времени скорости и ускорения.

$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \Rightarrow$ ***Траектория*** точки ***B*** – из траектории точки ***A*** – сдвигом на вектор ***AB***.



$\bar{r}_A = \bar{r}_A(t)$ Закон (уравнение) поступательного движения ТТ **(8.2)**

$\bar{v}_B = \bar{v}_A.$

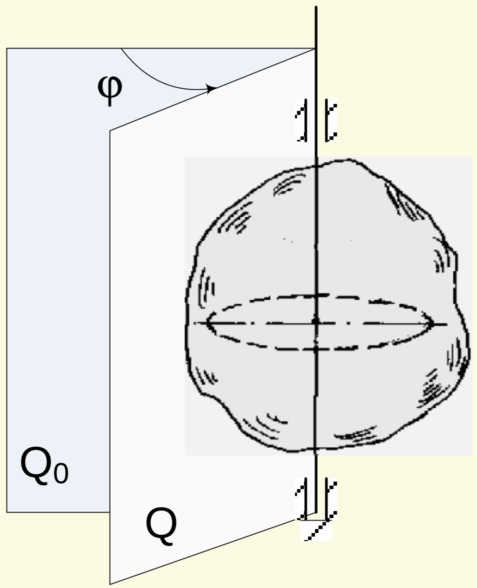
$\bar{a}_B = \bar{a}_A.$

IX. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

§9.1. Уравнения *вращательного движения*.

Вращательным называют такое движение твердого тела, при котором две точки тела остаются неподвижными во все время движения.

Прямую, проходящую через эти точки, называют ***осью вращения***.



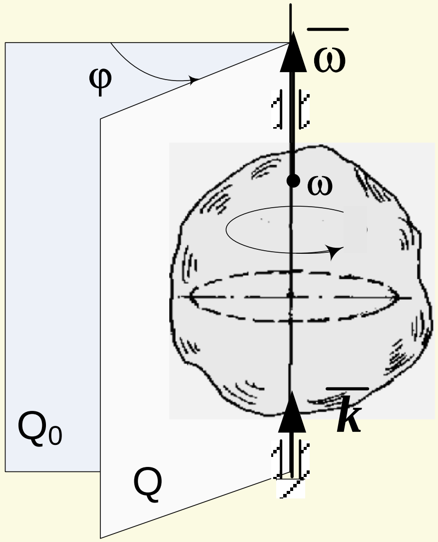
φ=φ(t) - закон (уравнение) вращательного движения ТТ **(9.1)**

φ>0, если при взгляде с конца оси z этот угол отсчитывается от плоскости Q_0 против часовой стрелки. Угол φ измеряют в радианах.

§9.2. Угловая скорость и угловое ускорение тела.

$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ - мгновенная угловая скорость вращения. **(9.2)**

Вектор $\overline{\omega} = \dfrac{d\varphi}{dt}\overline{k}$

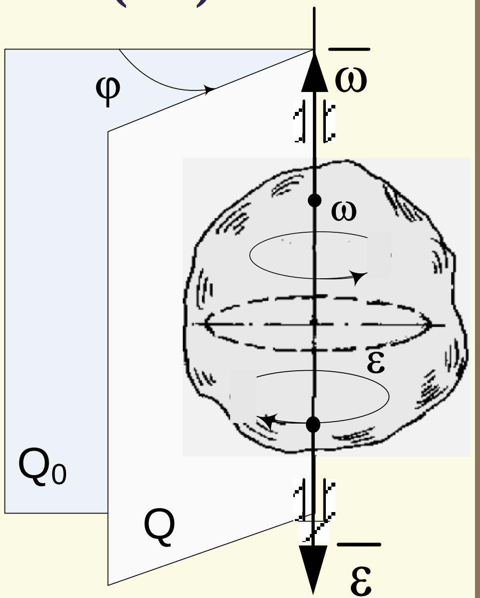


1. Направлен по оси вращения; 2. Модуль вектора = ω; 3. Направлен так, чтобы с его конца видеть вращение против часовой стрелки

$\overline{\omega}$ – скользящий вектор.

§9.2. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Продолжение.

$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}\left[\frac{1}{c^2}\right]$ - мгновенное угловое ускорение вращения. **(9.3)**



Если ε *и* ω одного знака, то вращение ускоренное, ω растёт по модулю, и они направлены в одну сторону, иначе - замедленное.

Если ω = const, то вращение *равномерное,* ε = 0.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}.$$

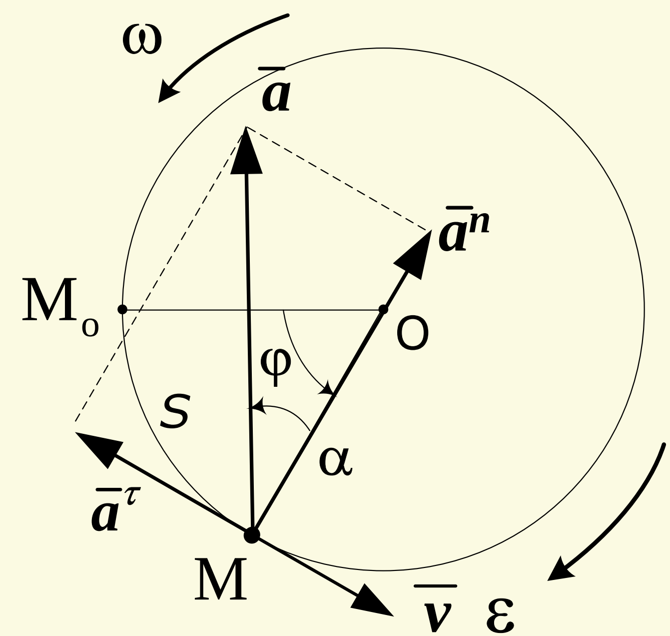
Вектор $\bar{\varepsilon}$ сонаправлен с $\overline{\omega}$, если вращение ускоренное.

§9.3. Скорость и ускорение точек тела.

$v = \omega R$ Вектор $\bar{v}$ направлен $\perp$ радиусу в сторону $\overline{\omega}$, если смотреть из неподвижной точки.

$a^{\tau} = \varepsilon R$ Вектор $\vec{a}^{\tau}$ направлен $\perp$ радиусу в сторону $\vec{\varepsilon}$, если смотреть из неподвижной точки.

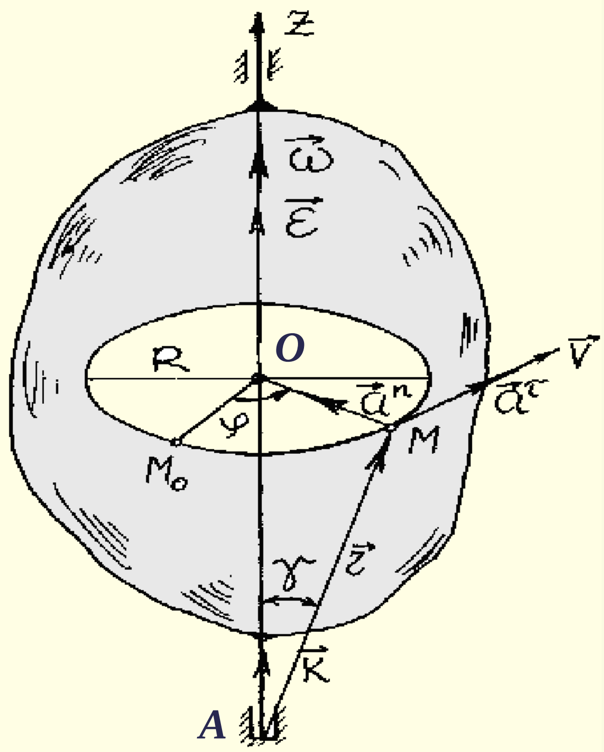
$a^{n} = \omega^{2} R$ Вектор $\bar{a}^{n}$ направлен к неподвижной точке.



§9.4. Скорость и ускорение точек (векторные формулы).

Если $\left|\overrightarrow{AB}\right| = const$, то формула **Эйлера** $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}} \quad \textbf{(9.7)}$$



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \textbf{(9.8)}$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad \textbf{(9.9)}$$

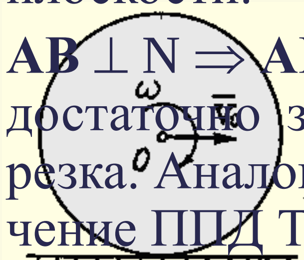
$$\vec{a}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \qquad \textbf{(9.10)} \qquad a^{\tau} = \varepsilon\, r \sin\gamma = \varepsilon R$$

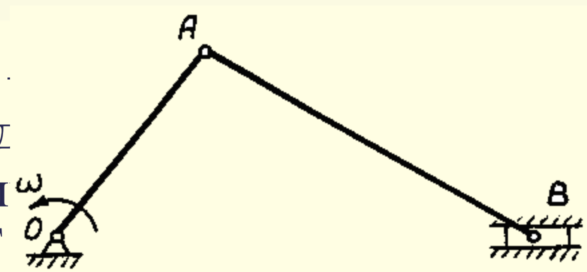
$$\vec{a}^{n} = \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad \textbf{(9.11)} \qquad a^{n} = \omega v \sin 90^{\circ} = \omega^2 R$$

XII. Плоскопараллельное движение твёрдого тела.

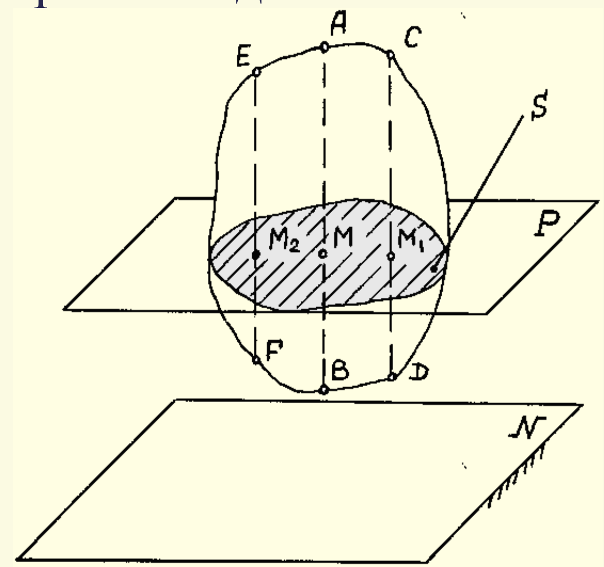
§12.1. Уравнения ППД ТТ.

Плоскопараллельным (*или* ***плоским***) движением твердого тела называют такое движение, при котором все точки тела описывают плоские траектории, лежащие в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.



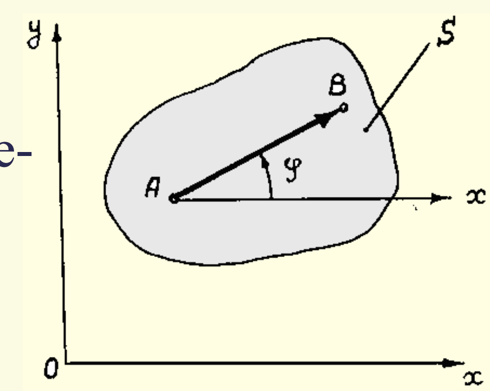


AB ⊥ N ⇒ **AB** … ие ⇒ достаточно зад… ого отрезка. Аналоги… ⇒ изучение ППД ТТ … жения плоской фигуры (сечения S).



$$
\left.
\begin{aligned}
x_A &= x_A(t)\,,\\
y_A &= y_A(t)\,,\\
\varphi &= \varphi(t)
\end{aligned}
\right\}
\qquad \textbf{(12.1)}
$$

Уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела

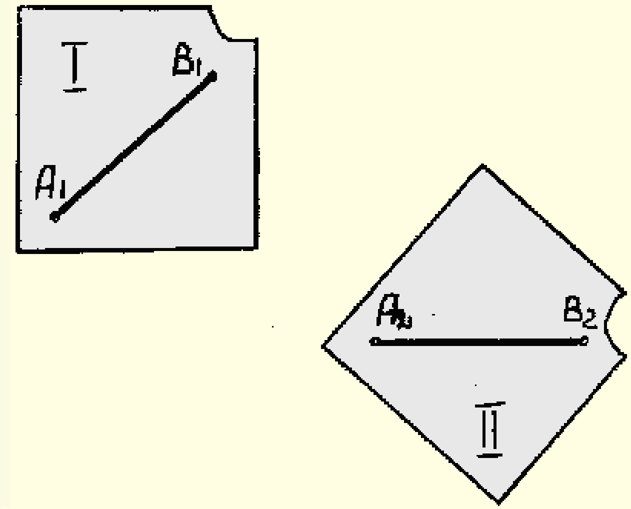


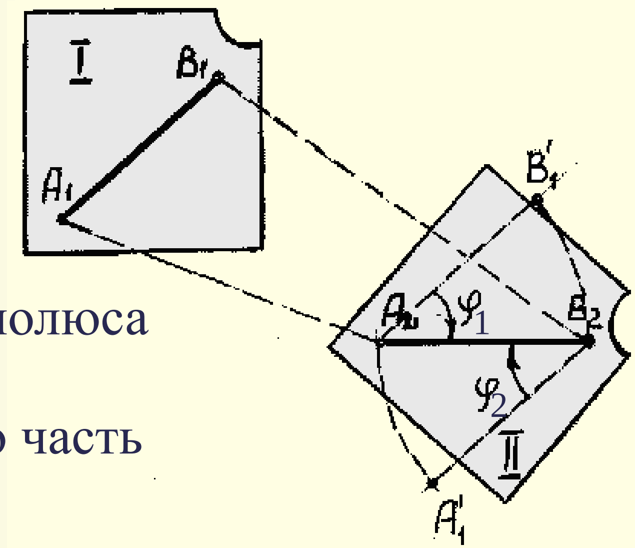
Положение фигуры **S** в плоскости ***xOy*** опред-ся положением отрезка ***AB*** этой фигуры, оно – коорд-ми ***x, y*** точки ***A*** и углом ***φ*** наклона ***AB*** к оси x. Угол φ>0, если поворот оси x до ***AB*** - против часовой стрелки.

§12.2. Разложение ППД на поступательное и вращательное

Плоскопараллельное движение ТТ можно представить как совокупность двух движений: ***поступательного*** с выбранным полюсом и ***вращательного*** вокруг этого полюса.

$I \to II$	Полюс	Поступательное	Вращение вокруг полюса	Угол поворота
1.	A_1	$A_1 \to A_2$, $B_1 \to B_1'$	$A_2 \to A_2$, $B_1' \to B_2$	φ_1
2.	B_1	$A_1 \to A_1'$, $B_1 \to B_2$	$A_1' \to A_2$, $B_2 \to B_2$	φ_2



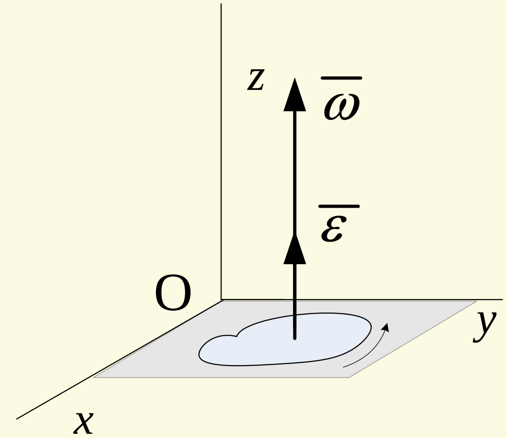


$\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow$ угол поворота не зависит от выбора полюса

$$\left.\begin{aligned} x_A &= x_A(t), \\ y_A &= y_A(t), \end{aligned}\right\}$$ Описывают поступательную часть движения

$$\varphi = \varphi(t)$$ Описывает вращательную часть движения

§12.2. Разложение ППД на поступательное и вращательное



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

$\overline{\omega} \perp$ плоскости фигуры и направлен так, чтобы с его конца видеть её вращение против часовой стрелки.

Т.к. угол поворота не зависит от выбора полюса, то вектор $\overline{\omega}$ м.быть приложен в любой точке фигуры (это свободный вектор).

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \qquad \overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt}$$

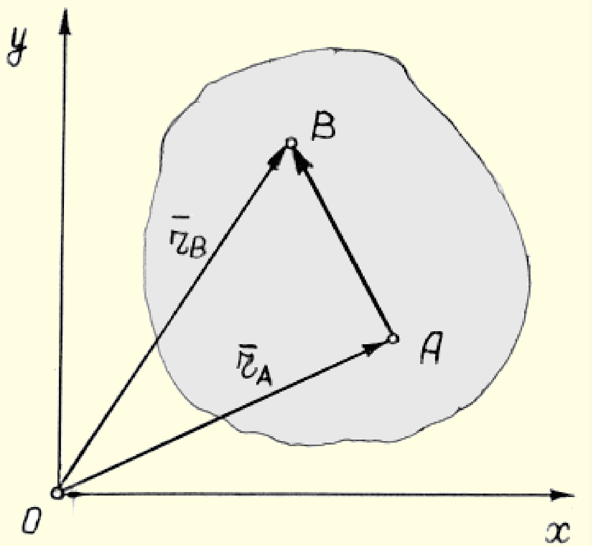
Направлен по $\overline{\omega}$, если $\omega \cdot \varepsilon > 0$.

§12.3. Определение скоростей точек при ППД ТТ.

1. Определение скорости по двучленной векторной формуле.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}$$

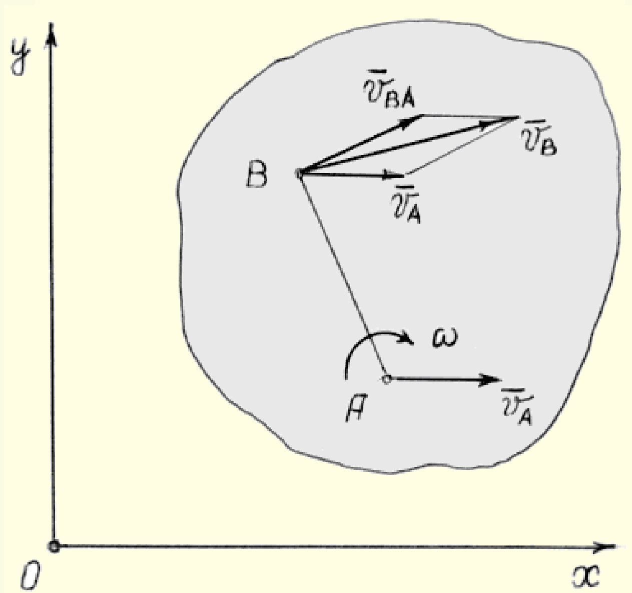
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \text{ где } \vec{v}_{BA} = \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} \qquad \textbf{(12.2)}$$



$\vec{v}_A$ - это та скорость, которую приобретает точка В при поступательном движении фигуры вместе с полюсом А, а $\vec{v}_{BA}$- это скорость, которую получает точка В при вращении фигуры вокруг полюса А

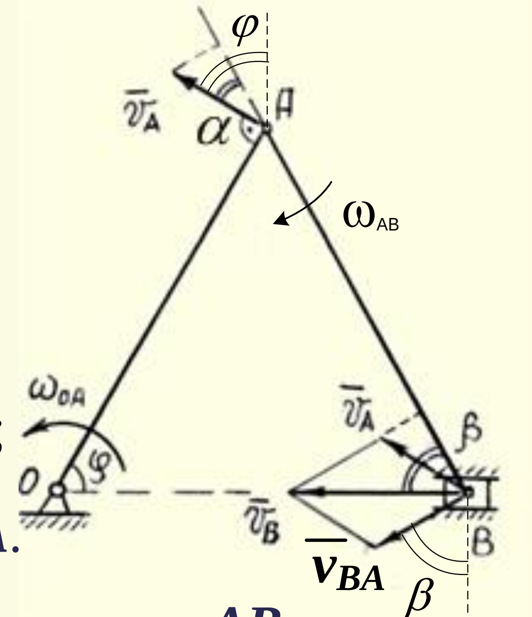
$$\vec{v}_{BA} = \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \qquad \textbf{(12.3)}$$



$v_{BA} = \omega \cdot AB,$ направлен $\perp$ ***AB*** в сторону ω, если смотреть из полюса ***A***.

§12.3. Определение скоростей. Продолжение 1.



Пример.

Дано: OA = AB = 20 см; $\boldsymbol{\omega_{OA}}$ = 5 с$^{-1}$; $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\beta} = \pi/3$.

Найти: $\boldsymbol{v_B}$, $\boldsymbol{\omega_{AB}}$.

1. Тело ***OA*** – вращательное движение $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v_A = \omega \cdot OA}$= =100 см/с, $\perp$ ***OA*** в сторону ω_{OA}, если смотреть из точки ***O***.

2. Тело ***AB*** – ППД $\Rightarrow \underset{+?}{\vec{v}_B} = \underset{++}{\vec{v}_A} + \underset{+?}{\vec{v}_{BA}}$, $v_{BA} = \omega_{AB} \cdot AB$;

$\vec{v}_{BA} \perp$ ***AB*** в сторону $\boldsymbol{\omega_{AB}}$, если смотреть из полюса ***A***.

Чтобы найти $\boldsymbol{v_B}$, спроецируем уравнение на $\perp$ к $\boldsymbol{\vec{v}_{BA}}$ т.е. на ***AB***.

$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha \Rightarrow v_B = v_A\sqrt{3} = 100\sqrt{3}$ см.

Чтобы найти $\boldsymbol{\omega_{AB}}$, найдём $\boldsymbol{v_{BA}}$, для чего спроецируем уравнение на $\perp$ к $\vec{v}_B$, т.е. на вертикальную ось (y).

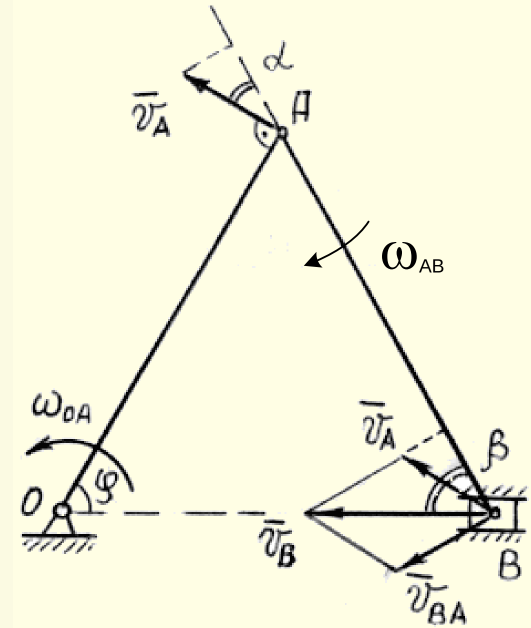
$0 = v_A \cos\varphi - v_{BA} \cos\beta \Rightarrow v_{BA} = v_A$. $\boldsymbol{\omega_{AB}} = \boldsymbol{v_{BA}/AB}$=100/20=5 с$^{-1}$.

Т.к. $\boldsymbol{v_B}$>0 и $\boldsymbol{\omega_{AB}}$ >0, то выбранные направления $\vec{v}_B$ и $\boldsymbol{\omega_{AB}}$ были верными.

§12.3. Определение скоростей. Продолжение 2.

2. Определение скорости по теореме о проекциях скоростей.

Пример.



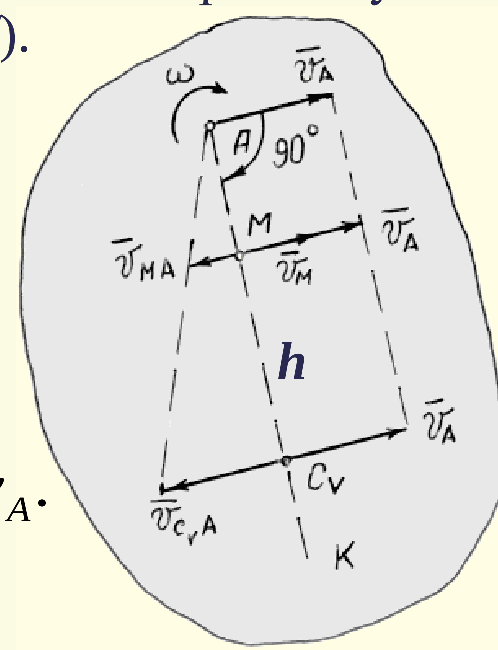
Спроецируем скорости точек A и B на ***AB***:

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha \Rightarrow v_B = v_A\sqrt{3} = 100\sqrt{3} \text{ см.}$$

§12.3. Определение скоростей. Продолжение 3.

2. Определение скорости с помощью мгновенного центра скоростей .

При непоступательном движении плоской фигуры в ее плоскости существует единственная точка, скорость которой в данное мгновение равна нулю. Она называется мгновенным центром скоростей (*МЦС*).



Пусть задана скорость $\vec{v}_A$ некоторой точки А плоской фигуры и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения этой фигуры. Повернем вектор $\vec{v}_A$ вокруг точки А на 90° в направлении $\boldsymbol{\omega}$ и получим луч АК.

Укажем на расстоянии $\boldsymbol{h= v_A/\omega}$ точку $\boldsymbol{C_V}$. Найдём её скорость по двучленной векторной формуле.

$$\vec{v}_{C_V} = \vec{v}_A + \vec{v}_{C_V A},\ \text{где}\ v_{C_V A} = \omega \cdot AC_V = \omega \cdot v_A / \omega = v_A.$$

$$\vec{v}_A \uparrow\downarrow \vec{v}_{C_v A} \Rightarrow \vec{v}_{C_v} = 0.$$

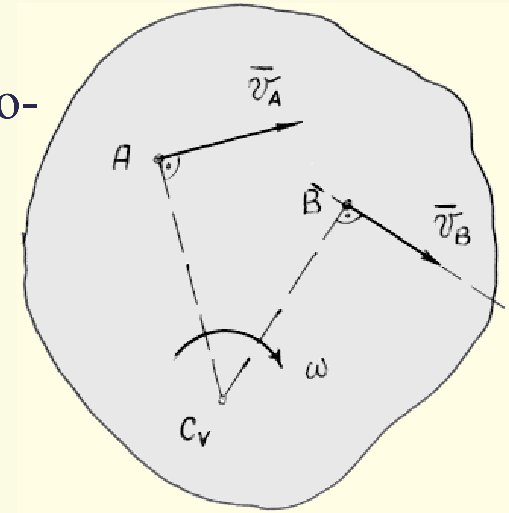
В итоге мы сводим **ППД** плоской фигуры к её **вращательному движению** вокруг МЦС в *данный момент времени*.

$v_{C_v} = 0$, но $a_{C_v} \neq 0$, т.к. v_{C_v} изменяется во времени.

§12.3. Определение скоростей. Продолжение 4.

3. Способы нахождения МЦС.

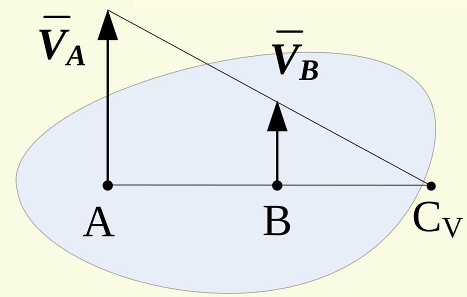
1. Дана скорость точки А и линия действия вектора скорости точки В. МЦС лежит в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ в точках А и В.



$$\omega = \frac{v_A}{AC_V}, \quad v_B = \omega \cdot BC_V$$

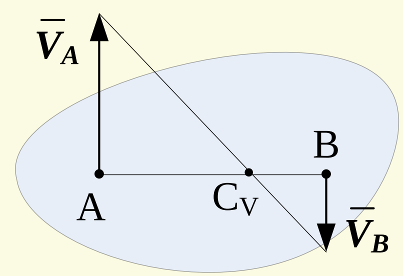
2. Дана скорость $\vec{v}_A$ некоторой точки А и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ вращения плоской фигуры. МЦС лежит на $\perp$ к $\vec{v}_A$ на расстоянии $AC_V = v_A / \omega$.

3. $\vec{v}_A \uparrow\uparrow \vec{v}_B; \vec{v}_A \perp$ AB.



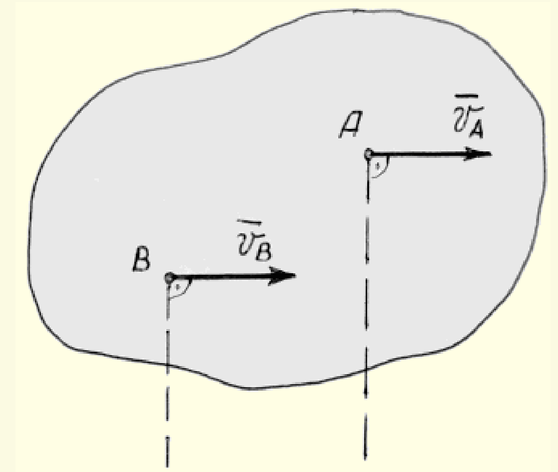
$$\omega = \frac{v_A}{AB + BC_V} = \frac{v_B}{BC_V} = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$

4. $\vec{v}_A \uparrow\downarrow \vec{v}_B$ и $\vec{v}_A \perp$ AB.



$$\omega = \frac{v_A}{AB + BC_V} = \frac{v_B}{BC_V} = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$

§12.3. Определение скоростей. Продолжение 5.



5. $\vec{v}_A \uparrow\uparrow \vec{v}_B$ и $\vec{v}_A$ не $\perp$ AB.

МЦС не существует, и фигура совершает *мгновенно поступательное движение* ($\omega = 0$).

Скорости всех точек одинаковы, а ускорения **не одинаковы** (в отличие от поступательного движения).

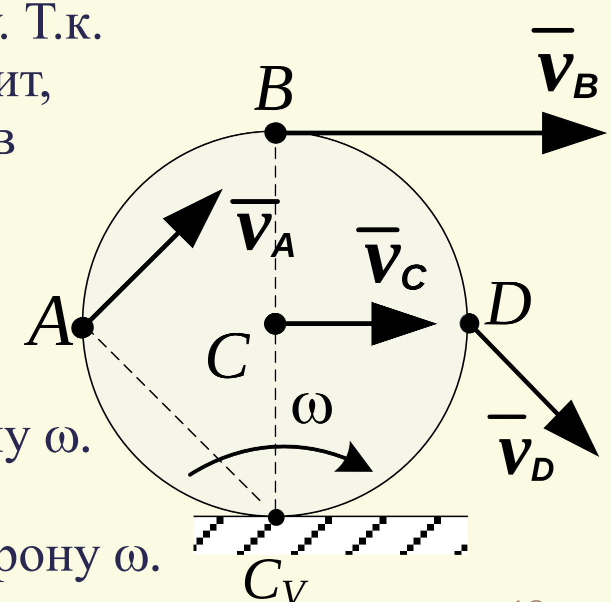
6. Из условия задачи.

При качении колеса по рельсу без проскальзывания скорости точек касания этих тел равны друг другу. Т.к. рельс не двигается, то и нижняя точка колеса сто-ит, т.е. её скорость = 0 $\Rightarrow$ эта точка есть МЦС колеса в данный момент времени. Тогда

$\omega = \dfrac{v_C}{CC_V} = \dfrac{v_C}{R}$, направлена в сторону $\vec{v}_C$, если смотреть из неподвижной точки C_V.

$v_B = \omega \cdot BC_V = \dfrac{v_C}{R} \cdot 2R = 2v_C$, $\vec{v}_B \perp C_V B$ в сторону ω.

$v_A = \omega \cdot AC_V = \dfrac{v_C}{R} \cdot R\sqrt{2} = v_C\sqrt{2}$, $\vec{v}_A \perp C_V A$ в сторону ω.

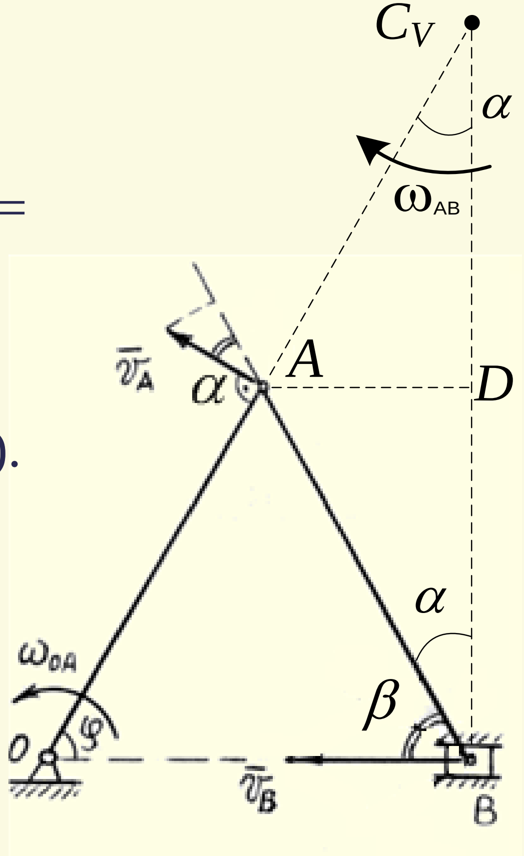


§12.3. Определение скоростей. Продолжение 6.

Пример 1.

Дано: OA = AB = 20 см; ω_{OA} = 5 с$^{-1}$; $\varphi = \beta = \pi/3$.

Найти: v_B, ω_{AB}.



1. Тело ***OA*** – вращательное движение ⇒ $v_A = \omega_{OA} \cdot OA =$ $=100$ см/с, ⊥ ***OA*** в сторону ω_{OA}, если смотреть из точки ***O***.

2. Тело ***AB*** – ППД ⇒ строим МЦС на пересечении перпендикуляров к скоростям точек A и B (точка C_V).

$AC_V = AB = OA$, $BC_V = 2 \cdot BD = 2 \cdot AB \cdot \cos(\alpha) = OA\sqrt{3}$.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_V} = \frac{\omega_{OA} \cdot AO}{AO} = \omega_{OA},$$

ω_{AB} в сторону $\vec{v}_A$, если смотреть из точки C_V.

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BC_V = \omega_{OA} \cdot OA\sqrt{3} = v_A\sqrt{3}.$$

$\vec{v}_B \perp BC_V$ в сторону ω_{AB}, если смотреть из точки C_V.

§12.4. Определение ускорений точек при ППД ТТ.

Трёхленная векторная формула.

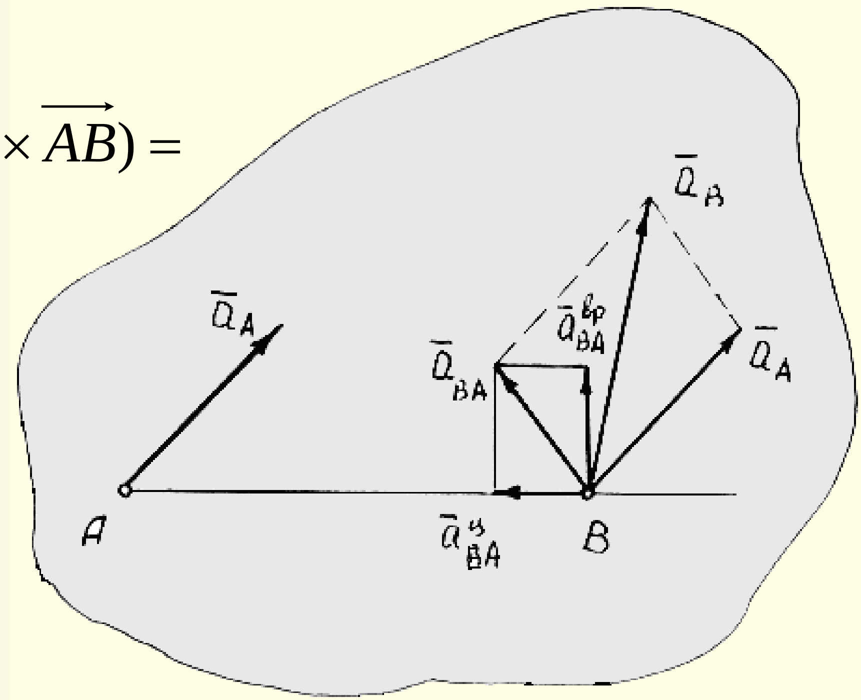
$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{v}_{BA}) = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}) =$$

$$= \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\,\vec{\omega}_{AB}}{dt} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A, \quad \frac{d\,\vec{\omega}_{AB}}{dt} = \vec{\varepsilon}_{AB}, \quad \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{вр} + \vec{a}_{BA}^{ц} \qquad \textbf{(12.3)}$$

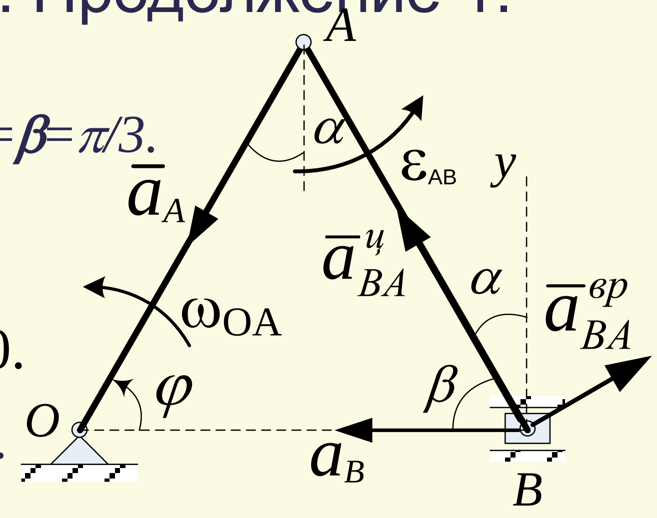


$\vec{a}_A$ - это то ускорение, которое приобретает точка B при поступательном движении фигуры вместе с полюсом A.

$\vec{a}_{BA}^{вр}$- это то тангенциальное ускорение, которое получает точка B при вращении фигуры вокруг полюса A. $a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$

$\vec{a}_{BA}^{ц}$ - это то нормальное ускорение, которое получает точка B при вращении фигуры вокруг полюса A. $a_{BA}^{ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB.$

§12.3. Определение ускорений. Продолжение 1.



Пример 2.

Дано: OA=AB=OB=20 см; $\boldsymbol{\omega_{OA}}$=const=5 с$^{-1}$; $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\beta} = \pi/3$.
Найти: $\boldsymbol{a_B}$, $\boldsymbol{\varepsilon_{AB}}$. (α=β/2=π/6)

1. Тело ***OA*** – вращательное движение ⇒

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^{n};\ a_A^{\tau} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = \frac{d\omega_{OA}}{dt} \cdot OA = 0.$$

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 0{,}2 = 5\ \frac{\text{м}}{c^2},$$ к точке ***O***.

2. Тело ***AB*** – ППД ⇒

$$\vec{a}_B = \underset{+?}{\vec{a}_B^{\tau}} + \cancel{\vec{a}_B^{n}}^{\,0} = \underset{++}{\vec{a}_A} + \underset{+?}{\vec{a}_{BA}^{вр}} + \underset{++}{\vec{a}_{BA}^{ц}};\qquad \textbf{(12.3)}$$

$$a_{BA}^{ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 5^2 \cdot 0{,}2 = 5\ м/c^2,$$ к полюсу ***A***.

$$a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB;\quad \vec{a}_{BA}^{вр} \perp AB$$ в сторону ε_{AB}, если смотреть из полюса ***A***.

Чтобы найти $\boldsymbol{a_B}$, спроецируем уравнение **(12.3)** на ⊥ к $\vec{a}_{BA}^{вр}$, т.е. на ***BA***.

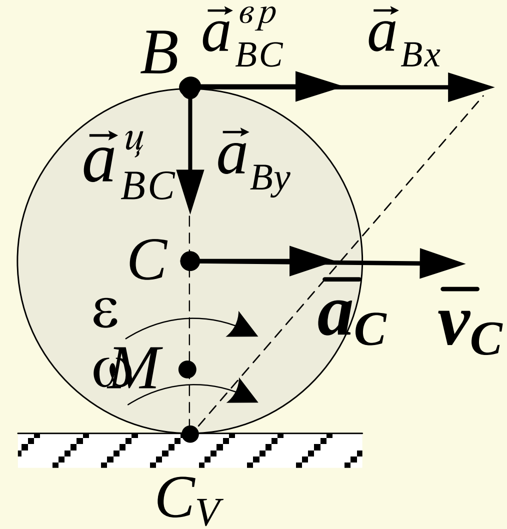
$$a_B \cos\beta = -a_A \cos\beta + a_{BA}^{ц} \Rightarrow\ a_B = \frac{1}{\cos\beta}(a_{BA}^{ц} - a_A\cos\beta) = 2(5 - \frac{5}{2}) = 5\frac{м}{c^2}.$$

Чтобы найти $\vec{a}_{BA}^{вр}$, спроецируем уравнение на ⊥ к $\boldsymbol{a_B}$, т.е. на ось ***y***.

$$0 = -a_A\cos\alpha + a_{BA}^{вр}\cos\beta + a_{BA}^{ц}\cos\alpha \Rightarrow a_{BA}^{вр} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}(a_A - a_{BA}^{ц}) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{AB} = 0.$$

§12.4. Определение ускорений точек при ППД ТТ.

Пример 3.



Дано: $\boldsymbol{v_C}$, $\boldsymbol{a_C}$, R. **Найти:** $\boldsymbol{a_B}$, a_B^τ .

1. $\omega = \dfrac{v_C}{R}$ в сторону $\vec v_C$, $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{dv_C}{dt} \cdot \dfrac{1}{R} = \dfrac{a_C}{R}$

2. $\vec a_B = \vec a_C + \vec a_{BC}^{вр} + \vec a_{BC}^{ц}$, где в сторону $\vec a_C$.

?? **++** **++** **++**

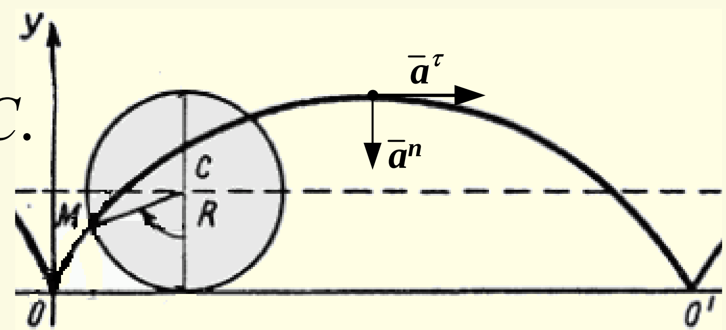
$$a_{BC}^{вр} = \varepsilon \cdot BC = \frac{a_C}{R} \cdot R = a_C, \textit{ в сторону } \varepsilon,$$

$$a_{BC}^{ц} = \omega^2 \cdot BC = \frac{v_C^2}{R^2} \cdot R = \frac{v_C^2}{R}, \textit{ к полюсу } C.$$

$$a_{Bx} = a_C + a_{BC}^{вр} = a_C + a_C = 2a_C.$$

$$a_{By} = 0 + 0 - a_{BC}^{ц} = -\frac{v_C^2}{R}.$$

$\vec a_B^\tau = \vec a_{Bx}$, $\vec a_B^n = \vec a_{By}$ (из рисунка)



Общая формула для точек на диаметре: $a_M^\tau = \varepsilon \cdot MC_V$. **(12.4)**