Семинар 4. Тема семинара: "Построение частотных характеристик RL и RC цепей первого порядка".

Цель семинара: изучить методику получения математических выражений частотных характеристик (АФЧХ, АЧХ, ФЧХ действительной и мнимой частотных характеристик); их взаимосвязь и графическое представление.

Занятие проводится на схемах с самой простой структурой (Г - образных схемах).

Если семинар проводится после прочтения лекции по данной теме, то следует провести опрос и убедиться в понимании формулировок и определения частотных характеристик: для какого аргумента записываются частотные характеристики, практическое использование характеристик, общий вид формул. При опережении семинаром лекции следует провести объяснение в течение 0.5 часа

Передаточная функция является комплекснозначной функцией и определяется отношением изображения по Лапласу выходной переменной к изображению по Лапласу соответствующей входной переменной при нулевых начальных условиях.

$$W_u(S) = U_{\text{вых}}(S) / U_{\text{вх}}(S), \tag{1}$$

где $U_{\text{вых}}(S)$ изображение по Лапласу функции-оригинала $u_{\text{вых}}(t)$ выходной переменной (реакции), а $U_{\text{вх}}(S)$ - изображение функции-оригинала $u_{\text{вх}}(t)$ входной переменной (сигнала).

Для практических расчетов удобно использовать частотную передаточную функцию $W(j\omega)$, которая является частным случаем передаточной функции $W(S)$ при $C_0 = 0$, $S = j\omega$. В этом случае переходят от изображений переменных по Лапласу к изображениям по Фурье:

$$W_u(j\omega) = U_{\text{вых}}(j\omega) / U_{\text{вх}}(j\omega), \tag{2}$$

где $U_{\text{вых}}(j\omega) = U_{m\text{вых}} e^{j(\omega t + \psi_{\text{вых}})} = U_{m\text{вых}} e^{j\psi_{\text{вых}}} \cdot e^{j\omega t}$ - изображение выходной переменной по Фурье, а $U_{\text{вх}}(j\omega) = U_{m\text{вх}} e^{j\psi_{\text{вх}}} \cdot e^{j\omega t}$ - изображение по Фурье входной переменной.

Вполне очевидно, что при использовании частотной передаточной функции достаточно оперировать только с комплексными амплитудами переменных $\dot{U}_{m\text{вых}} = U_{m\text{вых}} e^{j\psi_{\text{вых}}}$ и $\dot{U}_{m\text{вх}} = U_{m\text{вх}} e^{j\psi_{\text{вх}}}$:

$$W_u(j\omega) = \dot{U}_{m\text{вых}} / \dot{U}_{m\text{вх}}. \tag{3}$$

Функция $W(j\omega)$ может быть представлена в трех формах: показательной, алгебраической и тригонометрической.

Показательная форма представления:

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \tag{4}$$

где $|W(j\omega)|$ - модуль, определяемый отношением модулей комплексных амплитуд выходной переменной и входной переменной для каждого значения частоты ω; $\varphi(\omega) = \arg\{W(j\omega)\}$ - аргумент, определяемый разностью начальных фаз выходной переменной и входной переменной для каждого значения частоты ω, т. е. $\varphi(\omega) = \psi_{\text{вых}} - \psi_{\text{вх}}$.

Функцию $W(j\omega)$ можно представить как годограф вектора $W(j\omega)$ на комплексной плоскости при изменении частоты $0 \le \omega \le \infty$. Этот годограф принято называть амплитудно-фазочастотной характеристикой (АФЧХ).

Модуль $|W(j\omega)|$ является функцией частоты ω и называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), которая представлена в декартовых координатах в заданном диапазоне изменения ω (в общем случае $\omega = 0,...,\infty$).

Аргумент $\varphi(\omega)$ также является функцией частоты ω, называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) и строится в декартовых координатах в заданном диапазоне изменения ω.

По существу, АЧХ и ФЧХ являются детализацией характеристики АФЧХ и более удобны в практических расчетах.

Алгебраическая форма представления:

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}\{W(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = U(\omega) + jV(\omega). \qquad (5)$$

В выражении (6.5): $U(\omega) = \mathrm{Re}\{W(j\omega)\}$ - вещественная часть функции $W(j\omega)$, называется вещественной частотной характеристикой (ВЧХ);
$V(\omega) = \mathrm{Im}\{W(j\omega)\}$ - мнимая часть функции $W(j\omega)$, называется мнимой частотной характеристикой (МЧХ).

Затем рассматривается пример вывода частотных характеристик и графического построения.

Пример расчета

В качестве примера рассмотрим простейшую резистивно-емкостную цепь, схема которой приведена на рис.1.

В цепи действует источник синусоидального сигнала $u_{\text{вх}}(t)$.

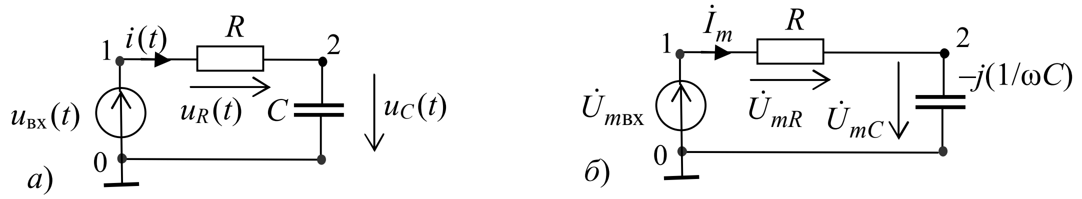

Рис.1. Схемы цепи: *а* – исходная; *б* – расчетная схема для комплексных амплитуд

Входом цепи являются полюсы (узлы) 0 – 1. Пусть в данном случае выходом цепи будут полюсы 2 – 0. Входной переменной (сигналом) будет напряжение источника $u_{\text{вх}}(t)$, а выходной переменной (реакцией) – напряжение на емкости $u_C(t) = u_{\text{вых}}(t)$. Необходимо построить при заданных параметрах *R* и *C* частотные характеристики цепи относительно выбранной выходной и заданной входной переменных.

Для построения характеристик используем расчетную схему для комплексных амплитуд (рис.1,*б*).

- Частотная передаточная функция по напряжению определяется согласно выражению (3):

$$W_u(j\omega) = \dot{U}_{m\text{вых}} / \dot{U}_{m\text{вх}}. \qquad (6)$$

Комплексная амплитуда выходного напряжения:

$$\dot{U}_{m\text{вых}} = \dot{U}_{mc} = (1/j\omega C)\dot{I}_m = -j(1/\omega C)\dot{I}_m. \qquad (7)$$

Комплексная амплитуда входного напряжения определяется из контурного уравнения:

$$\dot{U}_{m\text{вх}} = \dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mC} = R\dot{I}_m - j(1/\omega C)\dot{I}_m = [R - j(1/\omega C)]\dot{I}_m. \qquad (8)$$

Выражение (6.9) с учетом (6.10) и (6.11) имеет вид:

$$W_u(j\omega) = -j(1/\omega C)\dot{I}_m \; / \; [R - j(1/\omega C)]\dot{I}_m = -j(1/\omega C) \; / \; [R - j(1/\omega C)] = \\ = (1 - j\omega RC) \; / \; \left[R^2 + (\omega RC)^2\right]. \qquad (9)$$

Обозначим $\tau = RC$, где τ – постоянная времени цепи в секундах.

Окончательно выражение (9) имеет вид:

$$W_u(j\omega) = \left[1/(1+\omega^2\tau^2)\right] - j\omega\tau/(1+\omega^2\tau^2). \qquad (10)$$

Выражение (10) является алгебраической формой представления функции $W(j\omega)$.

Вещественная и мнимая частотные характеристики из (10):

$$\text{ВЧХ-}\; U(\omega) = 1/(1+\omega^2\tau^2);\; \text{МЧХ-}\; V(\omega) = -\omega\tau/(1+\omega^2\tau^2). \qquad (11)$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$|W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = 1/\sqrt{1+\omega^2\tau^2}. \qquad (12)$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}[V(\omega)/U(\omega)] = \operatorname{arctg}(-\omega\tau). \qquad (13)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ):

$$L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)| = 20\lg(1/\sqrt{1+\omega^2\tau^2}) = -10\lg(1+\omega^2\tau^2). \qquad (14)$$

Графическое построение характеристик проводится на основе выражений (10) … (14).

При известных параметрах R и C вычисляется значение τ и задается последовательный ряд значений частоты $\omega = \omega_{\text{нач.}}, ..., \omega_{\text{кон.}}$ или $f = f_{\text{нач.}}, ..., f_{\text{кон.}}$, где $f = \omega/2\pi$, Гц. Определяются предельные точки характеристик для значений $\omega = 0$ и $\omega = \infty$.

При построении характеристик в общем виде, не используя численных значений R и C, можно оперировать с относительной частотой $\upsilon = \omega/\omega_{\text{сп}}$, где $\omega_{\text{сп}} = 1/\tau$ - частота сопряжения, принимаемая за базисную.

Результаты такого расчета для исследуемой цепи (рис.1) приведены в табл.1.

Таблица 1

Частотные характеристики *RC*- цепи

ω, рад/с	0	$0{,}1/\tau$	$0{,}5/\tau$	$0{,}8/\tau$	$1/\tau$	$10/\tau$	∞
v	0	0,1	0,5	0,8	1	10	∞
$\lvert W(j\omega)\rvert$	1	0,995	0,894	0,781	0,707	0,099	0
$\varphi(\omega)$,град.	0	$-5{,}7^\circ$	$-26{,}6^\circ$	$-38{,}6^\circ$	-45°	$-84{,}3^\circ$	-90°
$L(\omega)$, дБ	-	–0,043	–0,973	–2,147	–3,01	–20,043	-

Характеристики, построенные по данным табл.1, представлены на рис.2.

Асимптотическая ЛАЧХ данной цепи в диапазоне частот $\omega = 0...\omega_{\text{сп.}}$ представляет собой отрезок прямой $L_{\text{ас.}}(\omega) = 0$, совпадающий с осью абсцисс. В этой полосе частот модуль передаточной функции $|W(j\omega)| \cong 1$. В полосе частот $\omega > \omega_{\text{сп.}}$ характеристика $L_{\text{ас.}}(\omega)$ представляет собой отрезок прямой с постоянным наклоном. Если на этом отрезке выбрать две точки с частотами ω_1 и ω_2, отличающимися в 10 раз (говорят на декаду), т.е. $(\omega_2/\omega_1) = 10$, то приращение $\Delta L_{\text{ас.}}(\omega) = -20\lg(\omega_2/\omega_1) = -20$ дБ/декада. Это означает, что при значениях $\omega > \omega_{\text{сп.}}$

изменение частоты на декаду приводит к уменьшению значения ЛАЧХ на 20 дБ или снижению модуля частотной передаточной функции в 10 раз.

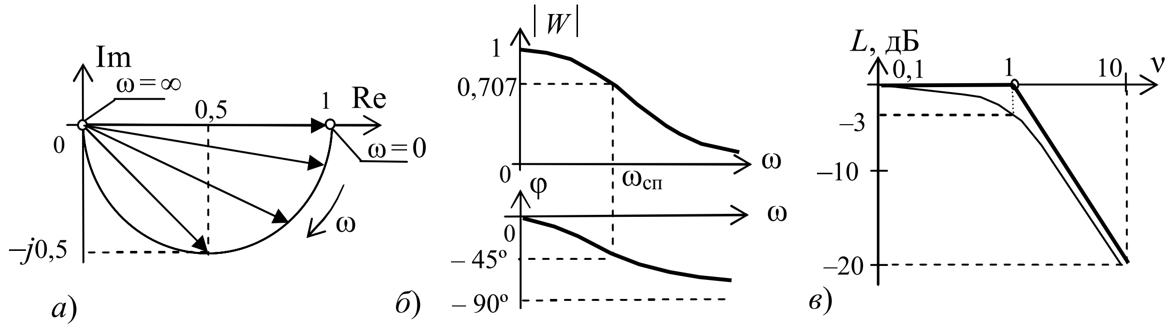

Рис.2. . Частотные характеристики *RC* - цепи: а – АФЧХ; б – АЧХ и ФЧХ; в –ЛАЧХ