МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «СТАНКИН»

В.А. Кадымов, О.К. Иванова, Е.А. Яновская

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Учебное пособие

Под редакцией Уваровой Л.А.

Москва
Янус-К
2016

УДК 517.2
ББК 21.1
К 13

Рецензент: доцент кафедры Высшей математики – 2 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет информационных технологий, радиотехники и электроники» к.ф.-м.н. Татаринцев А.В.

Кадымов В.А., Иванова О.К., Яновская Е.А. **Обыкновенные дифференциальные уравнения. Методы решения.** Учебное пособие. / Под редакцией Уваровой Л.А. М.: Янус-К, 2016, 92 с.

ISBN 978-5-8037-0702-8

Учебное пособие по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений в небольшом объеме содержит обширный материал. Элементы теории сопровождаются примерами с подробными решениями. Представлено решение типового варианта контрольной работы. Приводятся варианты упражнений для самостоятельных занятий.

Учебное пособие для студентов второго курса всех специальностей. Учебное пособие направлено на более тщательное изучение дифференциальных уравнений, поэтому содержит дополнительный материал. Это пособие направлено в помощь студентам для более глубокого понимания и усвоения материала, а так же для успешной сдачи экзаменов.

Учебное пособие соответствует утвержденной программе курса высшей математики в технологическом университете и рекомендовано кафедрой «Прикладная математика» в качестве дополнительной литературы для изучения материала студентами первого курса.

ISBN 978-5-8037-0702-8

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия. Задача Коши

Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

где $y = y(x)$ – искомая функция от одной независимой переменной, называется обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка. Здесь n – порядок наивысшей производной, входящей в дифференциальное уравнение. Отметим, что если искомая функция зависит от нескольких независимых переменных, так что уравнение содержит частные производные по нескольким переменным, то дифференциальное уравнение называют уравнением в частных производных. Любая функция $y = y_0(x)$, обращающая (1.1) в тождество, называется решением этого уравнения, а график этой функции – ***интегральной кривой***. Если же решение задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то его называют ***интегралом.*** Решение уравнения (1.1) в общем случае зависит от n независимых произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, и общий интеграл уравнения (1.1) имеет вид

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0. \tag{1.2}$$

Задача построения частного решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0), \tag{1.3}$$

называется ***задачей Коши***.

В частности, общее решение дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{1.4}$$

Всякое решение $\Phi(x, y, C_0) = 0$, получающееся из общего решения (1.4) при конкретном значении постоянной C, называется ***частным решением*** (или ***частным интегралом***).

Имеет место

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши). Если в ОДУ первого порядка, разрешенном относительно производной

$$y' = f(x, y),$$

функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\partial f/\partial y$ непрерывны в некоторой области D на плоскости oxy, содержащей некоторую точку (x_0,y_0), то существует единственное решение этого уравнения $y=\varphi(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$.

Особым решением ОДУ называют решение, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной. Особое решение изображается линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой. Иначе говоря, в каждой точке особого решения нарушается единственность решения ОДУ. Особое решение находят из системы уравнений:

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ \partial F(x,y,y')/\partial y'=0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Отметим, что существует другой способ нахождения особого решения из системы уравнений (подробнее особые решения будут рассмотрены в п.1.6):

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0 \\ \partial \Phi(x,y,C)/\partial C=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Проверьте, что функция $y=-\dfrac{1}{x}+e^x$ является решением уравнения

$$x^3(y''-y)=x^2-2.$$

2. Найдите кривую семейства $y=c_1\sqrt{x}+c_2\cos x$, для которой

$$y(0)=1;\, y'(0)=3.$$

3. Составьте дифференциальное уравнение всех прямых на плоскости oxy.

4. Составьте дифференциальное уравнение всех парабол с вертикальной осью симметрии на плоскости oxy.

Примеры решения задач

Пример 1. Постройте общее решение ОДУ

$$y'=2x^3-6\sin 3x,$$

а также частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Интегрируя ОДУ с использованием свойств интеграла, а также метода подстановки, получаем общее решение:

$$y(x)=\int\left(2x^3-6\sin 3x\right)dx=\frac{1}{2}x^4+2\cos 3x+c.$$

Подберем постоянную c так, чтобы выполнялось начальное условие:

$$1 = y(0) = 2 + c \Rightarrow c = -1.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2\cos 3x - 1.$$

Пример 2. Подтвердите, что $y = \sqrt[3]{\cos 3x}$ является решением ОДУ $y' ctg 3x + y = 0$.

Решение. Находим производную:

$$y' = -\sin 3x \Big/ \sqrt[3]{\cos^2 3x}.$$

Подставим выражения для производной и функции в уравнение. В результате получаем тождество, которое служит ответом на поставленный вопрос.

Пример 3. Найдите общее решение уравнения $(y')^2 - 4y = 0$. Постройте особое решение.

Решение. Дифференциальное уравнение без труда интегрируется, общее решение имеет вид $y(x) = (x + c)^2$ и оно представляет семейство парабол с вершиной в точке $M_0(-c; 0)$ оси абсцисс. С другой стороны, из системы (1.5) получаем особое решение $y(x) = 0$, которое не содержится в общем решении и в точках этой линии нарушается единственность решения.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Получите общее решение ОДУ $y'' = \sin 2x$. Выпишите частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

(*Ответ:* $y(x) = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2$ – общее решение; $y(x) = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + 1$ – частное решение задачи Коши).

2. Составьте дифференциальные уравнения следующих семейств линий:

а) $y = 2e^{cx}$; б) $(y + c)^2 = \sin x$.

(*Ответ:* а) $y' = \frac{y}{x}\ln(y/2)$; б) $4y'^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$).

1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называют уравнения, приводящиеся к виду

$$A_1(x)B_1(y)dx + A_2(x)B_2(y)dy = 0, \tag{1.7}$$

Разделим обе части уравнения на $A_2(x)B_1(y) \neq 0$, получаем уравнение

$$\frac{A_1(x)}{A_2(x)}dx + \frac{B_2(y)}{B_1(y)}dy = 0,$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\int \frac{A_1(x)}{A_2(x)}dx + \int \frac{B_2(y)}{B_1(y)}dy = 0. \tag{1.8}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какие из перечисленных уравнений являются ОДУ с разделяющимися переменными:

а) $\left(x^2 - 1\right)y' = 3y\sin x + xy$;

б) $(x - \cos 2x)y' = x^2 y + y^2 sinx$;

в) $y' = 2e^{x+3y} + e^{x-y}$.

2. Найдите общее решение простейшего дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$ydx - xdy = 0.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Решите уравнение

$$yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$$

Решение. Разделим левую и правую части равенства на $\sqrt{1-x^2} \neq 0$, в результате приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(1-y^2\right)^{-1/2} d\left(1-y^2\right) = -\arcsin x,$$

$$-\left(1-y^2\right)^{1/2} + c_1 = -\arcsin x,$$

$$\sqrt{1-y^2} = c_1 + \arcsin x \geq 0,$$

$1-y^2=\left(c_1+\arcsin x\right)^2$ – общий интеграл уравнения.

Пример 2. Решите уравнение

$$xyy'+2=y^2.$$

Решение. Прежде, чем разделить обе части уравнения на $x\left(y^2-2\right)$, заметим, что $y=\pm\sqrt{2}$ являются частными решениями. Если поделить обе части уравнения

$$xyy'=y^2-2 \text{ на } x\left(y^2-2\right)\neq 0,$$

то получим ОДУ с разделенными переменными:

$$\frac{ydy}{y^2-2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{ydy}{y^2-2}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{1}{2}\ln\left|y^2-2\right|=$$

$$=\ln x+c_1\Rightarrow\frac{y^2-2}{x^2}=c\Rightarrow y^2=cx^2+2$$

– общее решение, где обозначено $c\equiv\exp\left(2c_1\right)$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

3. Решите уравнение с разделяющимися переменными

$$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0.$$

(*Ответ:* $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=c$).

4. Решите ОДУ с разделяющимися переменными

$$y'=2^{3x-y}.$$

(*Ответ:* $3\cdot 2^y-2^{3x}=c$).

5. Решите ОДУ с разделяющимися переменными

$$\left(x^2y'+2-y\right)y=1.$$

(*Ответ:* $\ln\left|y-1\right|-\frac{1}{y-1}+\frac{1}{x}=c$).

6. Проинтегрируйте ОДУ с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{1+y^2}.$$

(*Ответ:* $x=\frac{y+c}{1-cy}$).

1.3. Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным

Дифференциальное уравнение (1.1) называют ***однородным относительно двух переменных***, если его вид не меняется при одновременной замене (линейном растяжении с общим коэффициентом) обеих переменных: $x \to kx;\quad y \to ky$. Такие уравнения представимы в виде

$$F\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0, \tag{1.9}$$

и они решаются с помощью преобразования $t(x) = y/x \Rightarrow y = xt(x)$, которое приводит его к ОДУ с разделяющимися переменными.

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \tag{1.10}$$

в котором $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (т.е. коэффициенты c_1 и c_2 одновременно не обращаются в нуль), принято называть ***приводящимся к однородному***.

Здесь возможны 2 случая:

1. Если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то уравнение (1.10) приводится к однородному с помощь замены переменных

$$x = \tilde{x} + \alpha, \quad y = \tilde{y} + \beta, \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\right), \tag{1.11}$$

где постоянные α и β определяются из решения системы уравнений

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

2. Если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то уравнение (1.10) сразу приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой

$$z(x) = a_1 x + b_1 y(x), \quad \left(\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx}\right).$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какое ОДУ первого порядка называют однородным (относительно двух переменных)? Укажите подстановку, с помощью которой решается такое дифференциальное уравнение?
2. Какие из перечисленных ниже являются однородными ОДУ, либо приводящимися к однородным:

а) $y' = \ln\cos\dfrac{y}{3x}$;

б) $xy' = \dfrac{y^2 - 5xy}{x + y}$;

в) $\left(2x - \sqrt{xy}\right)dy - \left(x^2 - 4y^2\right)dx = 0$;

г) $y' + 2ctg\dfrac{y}{x} = 3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$.

Примеры решения задач

Пример 1. Решите однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

Решение. Сделаем замену $y = xt(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = t + x\dfrac{dt}{dx}$ и подставим в исходное уравнение:

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{t}{1-t^2} \Rightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{t^3}{1-t^3}.$$

Разделяем переменные и проводим интегрирование:

$$\frac{\left(1-t^3\right)dt}{t^3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right)dt = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2t^2} - \ln|t| =$$
$$= \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow -\frac{1}{2t^2} = \ln|txc|.$$

Возвращаемся к исходным переменным, в результате получим общий интеграл уравнения:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|cy|.$$

Пример 2. Решите дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 2}{2x - 2}.$$

Решение. Сделаем замену (1.11) и подставим в наше уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{(\tilde{x}+\alpha) + (\tilde{y}+\beta) - 2}{2(\tilde{x}+\alpha) - 2} = \frac{\tilde{x} + \tilde{y} + (\alpha+\beta-2)}{2\tilde{x} + (2\alpha - 2)}, \qquad (1.12)$$

Выберем α, β так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases}\alpha+\beta-2=0\\ 2\alpha-2=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=1;\beta=1\Rightarrow\begin{cases}x=\tilde{x}+1\\ y=\tilde{y}+1\end{cases}.$$

В результате (1.12) принимает вид:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}\equiv\tilde{y}'=\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2\tilde{x}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}},$$

т.е. получили однородное уравнение, которое мы умеем решать:

$$\tilde{y}=\tilde{x}u(\tilde{x})\Rightarrow\tilde{y}'=\tilde{x}u'+u\Rightarrow\tilde{x}u'+u=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u\Rightarrow\frac{2du}{1-u}=\frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}}\Rightarrow-2\ln(u-1)=\ln\tilde{x}+c,$$

$\Rightarrow -2\ln\left(\dfrac{y_1}{x_1}-1\right)=\ln x_1+c\Rightarrow-2\ln\left(\dfrac{y-x}{x-1}\right)=\ln(x-1)+c$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-1}{2x+4y+3}.$$

Решение. Имеем дифференциальное уравнение, приводящееся к однородному, причем

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0.$$

Сделаем замену

$$z=x+2y\Rightarrow\frac{dz}{dx}=1+2\frac{dy}{dx},$$

и подставим в исходное уравнение:

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{2}=\frac{z-1}{2z+3}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{4z+1}{2z+3},$$

т.е. получили уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем:

$$\int\frac{2z+3}{4z+1}dz=x+c\Rightarrow\int\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\frac{1}{4z+1}\right)dz=x+c\Rightarrow\frac{1}{2}z+\frac{5}{8}\ln(4z+1)=x+c,$$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2}(x+2y)+\dfrac{5}{8}\ln(4x+8y+1)=x+c$ – общее решение дифференциального уравнения.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Решите однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным:

7. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$

(Ответ: $y^2 = cx^3(cx-2)$*).*

8. $(3y-7x+7)dx-(3x-7y-3)dy=0$

(Ответ: $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=c$*).*

9. $(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy=0$

(Ответ: $\ln(4x+8y+5)+8y-4x=c$*).*

10. $(x+2y+1)dx-(2x-3)dy=0$

(Ответ: $\ln(2x-3)-\dfrac{4y+5}{2x-3}=c$*).*

1.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейным ОДУ первого порядка называется уравнение вида

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{1.13}$$

При этом, если $Q(x)\equiv 0$, то уравнение

$$y'+P(x)y=0 \tag{1.14}$$

называют ***однородным***, а в случае $Q(x)\neq 0$ – ***неоднородным.*** Отметим, что линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка является уравнением с разделяющимися переменными.

Имеет место

Теорема. Если известно частное решение $y_*(x)$ уравнения (1.13), то его общее решение имеет вид

$$y(x)=y_*(x)+y_0(x),$$

где $y_0(x)$ – общее решение однородного уравнения (1.14).

Для решения линейного неоднородного ОДУ (1.13) используются такие методы, как ***метод вариации произвольной постоянной***, либо ***метод, основанный на подстановке Бернулли*** (позже эти методы мы продемонстрируем на конкретных примерах).

На практике часто встречается дифференциальное ***уравнение Бернулли***

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}, \quad (\alpha\neq 0,1). \tag{1.15}$$

При $\alpha>0$ уравнение (1.15) имеет тривиальное решение $y(x)\equiv 0$. Если предположить, что $y(x)\neq 0$, то уравнение Бернулли (1.15) приводится к линейному неоднородному ОДУ с помощью замены

$$z(x)=y^{-\alpha+1}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=(-\alpha+1)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}.$$

Отметим, что уравнение Бернулли можно решать, не осуществляя перехода к линейному уравнению путем подстановки $z(x)=y^{-\alpha+1}$, а применяя метод Бернулли.

Контрольные вопросы и задания

1. Представьте общий вид линейного ОДУ первого порядка.
2. Как связаны между собой общие решения линейного неоднородного ОДУ и соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения?

Примеры решения задач

Пример 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение

$$3xy' = 6y - x. \tag{1.16}$$

Решение

А) ***Метод вариации произвольной постоянной***. Находим общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения:

$$3xy' = 6y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow y = cx^2. \tag{1.17}$$

Далее ищется решение исходного неоднородного уравнения в виде (1.17), в которой произвольная постоянная заменяется неизвестной функцией $c = c(x)$. В результате имеем:

$$y = c(x)x^2 \Rightarrow y' = c'x^2 + 2xc,$$

и после их подстановки в (3.16) приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными относительно $c(x)$:

$$3x^3c' = -x \Rightarrow dc = -\frac{dx}{3x^2} \Rightarrow c(x) = \frac{1}{3x} + c_0.$$

Таким образом, получили общее решение уравнения (1.16):

$$y = c(x)x^2 = \left(\frac{1}{3x} + c_0\right)x^2 = \frac{x}{3} + c_0x^2.$$

Б) ***Метод Бернулли***

Ищем решение уравнения (1.16) в виде

$$y(x) = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + uv'.$$

и подставим их, в результате имеем:

$$3x(u'v + uv') = 6(uv) - x \Rightarrow u(3xv' - 6v) + 3xu'v = -x. \tag{1.18}$$

Приравнивая к нулю выражение в скобках в уравнении (1.18), найдем какое-либо частное решение $v(x) \neq 0$:

$$3xv' - 6v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln v = \ln\left|cx^2\right| \Rightarrow v = cx^2.$$

Положим для определенности $c = 1 \Rightarrow v = x^2$.

Подставим полученное частное решение в уравнение (1.18):

$$3xu'x^2 = -x \Rightarrow du = -\frac{dx}{3x^2} \Rightarrow u = \frac{1}{3x} + c_0.$$

Итак, с помощью метода Бернулли получили общее решение уравнения (1.16):

$$y(x) = uv = x^2\left(\frac{1}{3x} + c_0\right) = c_0x^2 + \frac{1}{3}x.$$

Убеждаемся, что данное решение совпадает с полученным ранее на основе метода вариации произвольной постоянной.

Пример 2. Решите уравнение Бернулли

$$y' + 2y = y^2e^x. \tag{1.19}$$

В начале отметим наличие для данного уравнения тривиального решения $y(x) \equiv 0$. Разделим обе части на $y^2(x) \neq 0$, в результате получаем:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x, \ \alpha = 2.$$

Применяем подстановку $z(x) = y^{-1} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$, которая приводит исходное дифференциальное уравнение к линейному неоднородному уравнению относительно $z(x)$:

$$z' - 2z = -e^x. \tag{1.20}$$

Используем подстановку Бернулли:

$$z = uv \Rightarrow z' = u'v + uv'.$$

Подставим в уравнение (1.20):

$$u'v + uv' - 2(uv) = -e^x \Rightarrow u'v + u(v' - 2v) = -e^x.$$

Полагая выражение в скобках равным нулю, находим какое-либо частное решение $v(x)$:

$$v' - 2v = 0 \Rightarrow v = e^{2x}.$$

Подставим его в последнее дифференциальное уравнение относительно $u(x)$:

$$u'e^{2x} = -e^x \Rightarrow u' = -e^{-x} \Rightarrow u = e^{-x} + c_0.$$

Выписываем общее решение уравнения (1.19):

$$z = uv \Rightarrow e^{2x}\left(e^{-x} + c_0\right) = e^x + c_0e^{2x} \Rightarrow y = \frac{1}{z} = \left(e^x + c_0e^{2x}\right)^{-1}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите общие решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

11. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

(Ответ: $2y = (x+1)^4 + c(x+1)^2$*).*

12. $y' + y = e^{-x}$

(Ответ: $e^x y = x + c$*).*

Проинтегрируйте следующие уравнения Бернулли:

13. $y' + xy = x^3 y^3$

(Ответ: $y^2\left(x^2 + 1 + ce^{x^2}\right) = 1$*).*

14. $(y \ln x - 2) y dx = x dy$

(Ответ: $y\left(cx^2 + \ln x^2 + 1\right) = 4$*).*

1.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Пусть дано ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \qquad (1.21)$$

Если левая часть уравнения (1.21) есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, то (1.21) называют ***уравнением в полных дифференциалах***. Уравнение (1.21) в этом случае можно переписать так:

$$dU(x,y) = 0 \Rightarrow U(x,y) = c \text{ – общий интеграл.}$$

Имеет место

Теорема. Пусть функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют непрерывные частные производные по x и y соответственно. Для того, чтобы (1.21) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (1.22)$$

Пусть уравнение (1.21) не является уравнением в полных дифференциалах. Если при этом существует непрерывно-дифференцируемая функция

$\mu=\mu(x,y)$, что после умножения уравнения (1.21) на $\mu(x,y)$ получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\mu(Mdx+Ndy)=(\mu M)\,dx+(\mu N)\,dy=0\,,$$

то есть

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\Rightarrow N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right), \qquad (1.23)$$

то функцию $\mu=\mu(x,y)$ называют ***интегрирующим множителем*** уравнения (1.21).

Если из каких-либо соображений известно, что $\mu=\mu(\theta)$, где $\theta=\theta(x,y)$ – заданная функция, то уравнение (1.23) сводится к линейному ОДУ относительно неизвестной функции $\mu(\theta)$:

$$\frac{d\mu}{d\theta}=\Phi(\theta)\,\mu\,, \qquad (1.24)$$

где предполагается, что

$$\Phi(\theta)\equiv\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Bigg/\left(N\frac{\partial\theta}{\partial x}-M\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)$$

– есть функция только от θ.

Решая уравнение (1.24), находим интегрирующий множитель $\mu=\exp\left(\int\Phi(\theta)\,d\theta\right)$, в которой постоянная интегрирования $c=1$.

В частности, уравнение (1.21) имеет интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$ (то есть $\theta\equiv x$), если

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Bigg/N\equiv\Phi(x),\quad \mu=\exp\left(\int\Phi(x)\,dx\right),$$

и, соответственно, уравнение (1.21) имеет интегрирующий множитель $\mu=\mu(y)$(то есть $\theta\equiv y$), если

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Bigg/(-M)\equiv\Phi(y),\quad \mu=\exp\left(\int\Phi(y)\,dy\right).$$

Контрольные вопросы и задания

1. Установите тип каждого из нижеприведенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (ОДУ с разделяющимися переменными; однородное ОДУ; линейное ОДУ; уравнение Бернулли; уравнение в полных дифференциалах):

А) $y' - \frac{1}{2x} y = \frac{\sin 2x}{x}$;

Б) $x^3 y' = y\left(x + y^2\right)$;

В) $\left(x^2 - 2xy\right)dx - \left(y^2 + \frac{7y^3}{x}\right)dy = 0$;

Г) $\left(3x^2 y + \cos x\right)dx - \left(\sin 2y - x^3\right)dy = 0$;

Д) $\left(x^2 y + y\right)y' = \sqrt{5 - y^2}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Решите дифференциальное уравнение

$$(8x + y)dx + \left(3e^{-y} + x\right)dy = 0.$$

Решение

$$M(x,y) \equiv 8x + y; N(x,y) \equiv 3e^{-y} + x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

то есть имеем уравнение в полных дифференциалах.

Выпишем систему уравнений для определения $U(x,y)$:

$$\begin{cases} \partial U/\partial x = 8x + y \\ \partial U/\partial y = 3e^{-y} + x \end{cases} \qquad (1.25)$$

Из первого уравнения получаем

$$U(x,y) = 4x^2 + xy + c(y),$$

где $c(y)$ – произвольная функция интегрирования. Подставив во второе уравнение системы (1.25), получим уравнение для определения $c(y)$:

$$c' = 3e^{-y} \Rightarrow c(y) = -3e^{-y} + c_0.$$

Следовательно, функция $U(x,y)$ имеет вид

$$U(x,y) = 4x^2 + xy - 3e^{-y} + c_0,$$

И общий интеграл принимает вид

$$4x^2 + xy - 3e^{-y} = c_1.$$

Пример 2. Решите дифференциальное уравнение

$$\left(y + xy^2\right)dx - xdy = 0.$$

Решение

Нетрудно убедиться, что уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий от y:

$$M = y + xy^2; N = -x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy; \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2\left(1 + xy\right).$$

Следовательно, уравнение допускает интегрирующий множитель $\mu = \mu\left(y\right)$:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Big/ \left(-M\right) = -2 \Big/ y \equiv \Phi\left(y\right) \Rightarrow \mu\left(y\right) = \exp\left(\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy\right) = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}.$$

Итак, имеем систему для определения $U\left(x, y\right)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \mu M = -\dfrac{1 + xy}{y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \mu N = -\dfrac{x}{y^2} \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$$U\left(x, y\right) = -\frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} + c\left(y\right),$$

и подставляем во второе уравнение:

$$c'\left(y\right) = 0 \Rightarrow c\left(y\right) = c_0.$$

Следовательно,

$$U\left(x, y\right) = -\frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} + c_0,$$

и общий интеграл принимает вид:

$$-\frac{x}{y} - \frac{x^2}{2} = c_1 \Rightarrow y = -\frac{2x}{x^2 + 2c_1}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Решите следующие уравнения в полных дифференциалах:

15. $\left(y^3 - x\right)y' = y$

(Ответ: $y^4 = 4xy + c$*).*

16. $2\left(3xy^2 + 2x^3\right)dx + 3\left(2x^2 y + y^2\right)dy = 0$

(Ответ: $x^4 + 3x^2 y^2 + y^3 = c$*).*

17. $\dfrac{x^2 dy - y^2 dx}{\left(x - y\right)^2} = 0$

(Ответ: $\dfrac{xy}{x-y}=c$*).*

1.6. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка. Уравнения Клеро и Лагранжа

Пусть дифференциальное уравнение первого порядка

$$F\left(x,y,y'\right)=0 \tag{1.26}$$

имеет общий интеграл в виде однопараметрического семейства кривых на плоскости

$$\Phi\left(x,y,\tilde{N}\right)=0\,. \tag{1.27}$$

Некоторую линию L назовем ***огибающей однопараметрического семейства*** кривых (1.27), если она в каждой своей точке касается какой-либо линии семейства, причем в различных точках линии L ее касаются различные линии данного семейства.

Предположим, что семейство интегральных кривых (1.27) имеет огибающую. Очевидно, что огибающая также является интегральной кривой дифференциального уравнения (1.26).

Так как огибающая не является, вообще говоря, кривой семейства интегральных кривых, то ее уравнение не может быть получено из общего интеграла (1.27) ни при каком конкретном значении параметра $\tilde{N}$. Решение дифференциального уравнения, не получающееся из общего интеграла ни при каком значении $\tilde{N}$ и имеющее своим графиком огибающую семейства интегральных кривых, входящих в общее решение, называется ***особым решением*** дифференциального уравнения.

Для нахождения особого решения необходимо продифференцировать (1.27) по параметру $\tilde{N}$ (см. п.1.1):

$$\Phi'_c\left(x,y,\tilde{N}\right)=0\,, \tag{1.28}$$

и исключить C из системы (1.27), (1.28). В результате приходим к уравнению

$$\Psi_1\left(x,y\right)=0\,. \tag{1.29}$$

Если функция (1.29) удовлетворяет дифференциальному уравнению и не принадлежит семейству (1.27), то это и есть особый интеграл.

Заметим, что в каждой точке особого решения нарушается единственность решения исходного дифференциального уравнения.

Рассмотрим ***уравнение Клеро*:**

$$y=x\frac{dy}{dx}+\Psi\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{1.30}$$

Положим $\frac{dy}{dx} = p$, тогда уравнение (1.29) примет вид:

$$y = xp + \Psi(p). \qquad (1.30)'$$

Продифференцируем последнее уравнение по x и, учитывая, что $p \equiv p(x) = \frac{dy}{dx}$, получаем:

$$\left[x + \Psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\frac{dp}{dx} = 0 \\ 2) x + \Psi'(p) = 0 \end{array}\right. . \qquad (1.31)$$

1) В этом случае получаем, что $p = C$. Подставляя в (1.30)', находим его общий интеграл:

$$y = xC + \Psi(C), \qquad (1.32)$$

представляющий собой семейство прямых.

2) Из второго уравнения (1.31) найдем p как функцию от x и подставим в (1.30), в результате получаем решение уравнения Клеро:

$$y = xp(x) + \Psi(p(x)). \qquad (1.30)''$$

Решение (1.30)'' не получается из общего интеграла (1.32) ни при каком значении C. Это есть особое решение – оно получается в результате исключения параметра p из системы

$$\begin{cases} y = xp + \Psi(p) \\ x + \Psi'(p) = 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим далее ***уравнение Лагранжа***:

$$y = x\varphi(y') + \Psi(y'), \qquad (1.33)$$

где $\varphi(y')$ и $\Psi(y')$ – известные функции.

Это уравнение линейно относительно y и x. Заметим, что уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа при $\varphi(y') \equiv y'$. Для интегрирования (1.33) вводим вспомогательный параметр $y' = p$, которое приводит исходное уравнение к виду

$$y = x\varphi(p) + \Psi(p). \qquad (1.33)'$$

Дифференцируя по x, получим:

$$p - \varphi(p) = \left[x + \varphi'(p) + \Psi'(p)\right]\frac{dp}{dx}. \qquad (1.33)''$$

Из последнего уравнения сразу можно найти некоторые решения:

Оно выполняется тождественно, если положить $p = p_0 = const$, так что p_0 удовлетворяет условию $p - \varphi(p) = 0$. Решение, соответствующее каждому значению $p = p_0$, находится из (1.33)’:

$$y = x\varphi(p_0) + \Psi(p_0).$$

Если окажется, что это решение не получается из общего ни при каком значении произвольной постоянной, то оно, как отметили ранее, будет особым решением.

Найдем теперь общее решение, для чего перепишем уравнение (1.33)’’ в другом виде

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\Psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Полученное уравнение будет линейным дифференциальным уравнением относительно функции $x = x(p)$.

Решая его, находим:

$$x = \tilde{x}(p, C). \tag{1.34}$$

Исключая параметр p из (1.33)’ и (1.34), получим общий интеграл уравнения Лагранжа:

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите общий вид дифференциальных уравнений Клеро и Лагранжа. Как связаны между собой эти уравнения?
2. Какое решение дифференциального уравнения первого порядка называется особым?

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите особое решение уравнения

$$y^2\left(1 + y'^2\right) = R^2.$$

Решение. Найдем сперва общий интеграл:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Последовательно разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\pm\frac{ydy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = dx,$$

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Следовательно, семейство интегральных линий представляет собой семейство окружностей радиуса R с центрами на оси абсцисс. Огибающей этого семейства кривых, как нетрудно убедиться, будет пара прямых $y = \pm R$, являющихся особым интегралом.

Пример 2. Решите уравнение Клеро

$$y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}\ .$$

Решение. Заменяя y' на C, получаем общее решение:

$$y = xC + \sqrt{1 - C^2}\ .$$

Дифференцируем последнее уравнение по C, в результате имеем:

$$x - \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = 0, \text{ или } C = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Подставляем последнее соотношение в общий интеграл, в результате получаем особое решение:

$$y^2 - x^2 = 1.$$

Пример 3. Решите уравнение Лагранжа

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Решение. Положим $y' = p \Rightarrow y = xp^2 + p^2$. Далее дифференцируем по x:

$$p = p^2 + 2p\left(x + 1\right)\frac{dp}{dx}. \tag{1.35}$$

Находим сперва особые решения:

$$p = p^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_0^{(1)} = 0 \\ p_0^{(2)} = 1 \end{array}\right..$$

Им соответствуют решения вида $y = 0$ и $y = x + 1$. Будут ли эти функции частными или особыми решениями – в этом мы убедимся после того, как найдем общий интеграл. Перепишем уравнение (1.35) в другом виде:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{2}{1 - p} = \frac{2}{1 - p},$$

т.е. получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно $x = x\left(p\right)$. Его решение имеет вид:

$$x = -1 + \frac{C^2}{\left(p - 1\right)^2}. \tag{1.36}$$

Исключая p из (1.33)’, (1.36), получим общий интеграл:

$$y=\left(C+\sqrt{x+1}\right)^2.$$

Теперь можем убедиться, что $y=0$ будет особым решением исходного дифференциального уравнения, а $y=x+1$ – его частное решение.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Проинтегрируйте следующие уравнения Клеро:

18. $y=xy'+y'$.

(Ответ: Общее решение: $y=cx+c$*).*

19. $y=xy'+\dfrac{1}{y'}$.

(Ответ: Общее решение: $y=cx+\dfrac{1}{c}$*. Особое решение:* $y^2=4x$*).*

20. $y=xy'-\dfrac{1}{y'^2}$.

(Ответ: Общее решение: $y=cx-\dfrac{1}{c^2}$*. Особое решение:* $y^3=-\dfrac{27}{4}x^2$*).*

Найдите общие интегралы уравнений Лагранжа:

21. $y=2xy'+y'^2$.

(Ответ: Общее решение : $x=\dfrac{c}{3p^2}-\dfrac{2}{3}p;\quad y=\dfrac{2c-p^3}{3p}$*).*

22. $y=x\left(1+y'\right)+y'^2$.

(Ответ: Общее решение: $x=ce^{-p}-2p+2;\quad y=c\left(p+1\right)e^{-p}-p^2+2$*).*

23. $y=yy'^2+2xy'$.

(Ответ: Общее решение: $4cx=4c^2-y^2$*).*

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. *Случай непосредственного интегрирования*. Если ОДУ имеет вид

$$y^{(n)} = f(x), \quad (n \ge 1) \tag{2.1}$$

то его решение находят непосредственным n-кратным интегрированием.

2. Если ОДУ не содержит искомой функции и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно, то есть

$$y^{(n)} = f\left(x, y^{(k)}, ..., y^{(n-1)}\right), \quad (1 \le k \le n-1) \tag{2.2}$$

То его порядок может быть понижен сразу на k единиц с помощью подстановки $y^{(k)} = z(x)$.

3. Если исходное ОДУ не содержит явно независимой переменной x, то порядок этого уравнения можем понизить на единицу, сделав замену $y' = z(y)$.

4. Пусть ОДУ однородно относительно независимой переменной (т.е. вид дифференциального уравнения не меняется при преобразовании растяжения–сжатия по независимой переменной: $\tilde{x} = \lambda x, \quad (\lambda \ne 0)$). Тогда порядок уравнения с помощью замены $y' = z(y)/x$ понижается на единицу.

5. Если ОДУ однородно относительно зависимой переменной (т.е. вид дифференциального уравнения не меняется при преобразовании растяжения–сжатия по зависимой переменной: $\tilde{y} = \lambda y, \quad (\lambda \ne 0)$), то порядок уравнения понижается на единицу с помощью замены $z(x) = y'/y$.

6. Если ОДУ однородно одновременно относительно двух переменных (т.е. не меняется при одновременном преобразовании $\tilde{x} = \lambda x, \quad \tilde{y} = \lambda y$), то применяется подстановка $w(x) = y/x$, упрощающая алгоритм построения искомого решения.

7. Рассмотрим обобщенно-однородное ОДУ (т.е. вид дифференциального уравнения не меняется при одновременном преобразовании по обеим переменным, но с разными коэффициентами растяжения: $\tilde{x} = \lambda x, \quad \tilde{y} = \lambda^k y, \quad (k \ne 1)$), то замена $x = e^t, \quad y = u(t)e^{kt}$ приводит исходное дифференциальное уравнение к уравнению, не содержащему независимой переменной t, и следовательно, допускает понижение порядка на единицу.

Чуть подробнее на перечисленных методах решения ОДУ-применительно к нелинейным уравнениям – остановимся в п.5.

Контрольные вопросы и задания

1. Подтвердите, что ОДУ одновременно может быть однородным как относительно одной из переменных, так и относительно двух переменных? Приведите пример.
2. Исследуйте ОДУ

$$y''y + y'^2 = 0.$$

Укажите подстановку, с помощью которой возможно провести интегрирование уравнения.

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите общее решение уравнения

$$xy'' - y' = 0.$$

Решение. Интегрируя уравнение непосредственно два раза, получаем общее решение:

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y' = c_1 x \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 x dx \Rightarrow y = \frac{c_1 x^2}{2} + c_2.$$

Пример 2. Найдите общее решение уравнения

$$y''y + y'^2 = 0.$$

Решение. Имеем автономное дифференциальное уравнение, потому можем использовать подстановку

$$y' = z(y) \Rightarrow y'' = z'z,$$

В результате получаем:

$$yzz' + z^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} z = 0 \Rightarrow y_1 = c_1 \\ yz' + z = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{dy}{y} \Rightarrow z = -\dfrac{c_2}{y} \Rightarrow yy' = \\ = -c_2 \Rightarrow y^2 = -2c_2 x + c_3 \end{array}\right.$$

Общее решение имеет вид

$$y^2 = c_{20} x + c_3,$$

где c_{20}, c_3 – произвольные постоянные.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Решите дифференциальное уравнение второго порядка методом понижения их порядка

$$y''y + y'^2 = 1.$$

(*Ответ:* $x = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 + c_1} + c_2$).

2. Постройте общее решение для простейших дифференциальных уравнений:

а) $y'' = \dfrac{8}{y^2}$; б) $y''' = 2^{2x}$.

(*Ответ:* а) $\left(c_1 x + c_2\right)^2 = c_1 y^2 - 8$; б) $y = \dfrac{1}{8}e^{2x} + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$).

2.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Фундаментальная система решений. Метод вариации произвольной постоянной

Система функций $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), ..., y_n = \varphi_n(x)$ называется ***линейно зависимой*** на (a,b), если существуют постоянные $c_1, c_2, ..., c_n$, не все равные нулю$\left(c_1^2 + c_2^2 + ... + c_n^2 \neq 0\right)$, такие что $c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n = 0$ при всех $x \in (a,b)$. В противном случае система функций называется ***линейно независимой***.

Если определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

для системы функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ не равен нулю хотя бы в одной точке $x \in (a,b)$, то эта система функций линейно независима.

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + ... + P_n(x) y = 0 \tag{2.3}$$

с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ имеет вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n,$$

где $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – система линейно независимых решений уравнения (2.3) (или другими словами, ***фундаментальная система решений***).

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + ... + P_n(x) y = f(x) \tag{2.4}$$

с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ и правой частью $f(x)$ имеет вид

$$y = y_0 + y_*,$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения (2.3), а y_* – частное решение неоднородного уравнения (2.4).

Если известна фундаментальная система решений однородного уравнения (2.3), то общее решение соответствующего неоднородного уравнения (2.4) может быть найдено ***методом вариации произвольной постоянной*** в следующем виде

$$y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n,$$

где функции $c_i(x), (i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \qquad (2.5)$$

Контрольные вопросы и задания

1. Исследуйте на линейную зависимость следующие системы функций:

а) $x, x+1$; б) $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$.

2. Найдите определитель Вронского для системы функций $y_1(x) = x, y_2(x) = x^2$ и убедитесь, что система функций линейно независима.

Примеры решения задач

Пример 1. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение линейного неоднородного уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Нетрудно убедиться, что $y_1 = cosx, y_2 = \sin x$ – фундаментальная система решений однородного уравнения $y'' + y = 0$. Следовательно,

$$y_0(x) = c_1 cosx + c_2 \sin x.$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y(x) = c_1(x) cosx + c_2(x)\sin x.$$

Выпишем систему (2.5) для определения $c_1(x)$, $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x)(\cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sin x$, а второе – на $\cos x$ и сложим, в результате получаем:

$$\begin{cases} c_2'(x)=1 \\ c_1'(x)\cos x=-\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2(x)=x+c_4 \\ c_1(x)=\ln\left|\cos x\right|+c_3 \end{cases}$$

Ответ:

$$y(x)=c_1(x)cosx+c_2(x)\sin x=\left(\ln\left|\cos x\right|+c_3\right)\cos x+\left(x+c_4\right)\sin x=$$
$$=y_o(x)+y_*(x),$$

где $y_0(x)=c_3cosx+c_4\sin x$ – общее решение однородного уравнения, а $y_*=x\sin x+\cos x\cdot\ln\left|\cos x\right|$ – частное решение неоднородного уравнения.

Пример 2. Найдите общее решение уравнения

$$y''-\frac{y'}{x}=x.$$

Решение

Найдем сперва общее решение однородного уравнения:

$$\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}\Rightarrow\ln y=\ln x+\ln c\Rightarrow y'=cx\Rightarrow y=c_1x^2+c_2.$$

Ищем общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y=c_1(x)x^2+c_2(x).$$

Выпишем систему уравнений (2.5) для определения $c_1(x)$, $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'x^2+c_2'\cdot 1=0 \\ 2c_1'\cdot x+c_2'\cdot 0=x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c_1'=1/2 \\ c_2'=(-1/2)x^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} c_1=\dfrac{x}{2}+c_3 \\ c_2=-\dfrac{x^3}{6}+c_4 \end{cases}.$$

Ответ: $y(x)=y_o(x)+y_*(x)$, где

$$y_o(x)=c_3x^3+c_4,\ y_*(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{3}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

3. Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, если его фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1=\sin x, y_2=\cos x.$$

(*Ответ*: $y''+y=0$).

4. Методом вариации произвольных постоянных решите линейное неоднородное уравнение:

$$x^2 y'' - xy' = 3x^3.$$

(*Ответ:* $y = A + Bx^2 + x^3$).

2.3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение однородного уравнения. Метод подбора частного решения неоднородного уравнения

Пусть в уравнении (2.3) коэффициенты P_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – постоянные числа $(P_i(x) \equiv a_i = const)$. В этом случае упрощается процедура построения общего решения **линейного однородного** дифференциального уравнения:

1. Составляем характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} ... + a_n = 0, \tag{2.6}$$

2. Находим корни характеристического уравнения

$$k_1, k_2, ..., k_n,$$

3. По характеру корней выписываем частные линейно независимые решения, пользуясь следующим правилом.

3а) Каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx};

3б) Каждой паре комплексно сопряженных однократных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ соответствуют два частных решений $e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $e^{\alpha x} \sin \beta x$;

3в) Каждому действительному корню k кратности r соответствует r линейно-независимых частных решений

$$e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{r-1} e^{kx};$$

3г) каждой паре комплексно сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ кратности μ соответствует 2μ частных решений

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, ..., \\ &x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}.$$

Указанных частных решений будет ровно столько, какова степень характеристического уравнения, что в свою очередь совпадает с порядком линейного дифференциального уравнения. Можно показать, что эти решения линейно независимы.

4. Определив n линейно-независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, строим далее общее решение линейного дифференциального решения

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x),$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные.

В случае **линейного неоднородного** уравнения с постоянными коэффициентами **частные решения** в некоторых случаях находятся проще, а именно:

1. Пусть в правой части уравнения (2.4) стоит функция $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, где $P(x)$ – многочлен, зависящий от переменной x; тогда возможен один из двух случаев:

1а) если число α не является корнем характеристического уравнения, тогда частное решение следует искать в виде

$$y_* = Q(x)e^{\alpha x},$$

где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами;

1б) если число α корень кратности μ характеристического уравнения, тогда частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y_* = x^{\mu} Q(x)e^{\alpha x},$$

где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$.

2. Пусть правая часть уравнения (2.4) имеет вид

$$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x,$$

где M и N – постоянные числа; тогда частное решение следует искать в виде:

2а) если комплексное число βi не является корнем характеристического уравнения, то частное решение имеет вид

$$y_* = A \cos \beta x + B \sin \beta x,$$

где A и B – постоянные неопределенные коэффициенты;

2б) если число βi есть корень характеристического уравнения кратности μ, то

$$y_* = x^{\mu} \left(A \cos \beta x + B \sin \beta x \right).$$

3. Пусть

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q(x)e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены от x; тогда возможны два случая:

3а) если число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (2.4) ищем в виде

$$y_* = U(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + V(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \tag{2.7}$$

где $U(x)$ и $V(x)$ – многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$;

3б) если число $\alpha+\beta i$ есть корень характеристического уравнения кратности μ, то частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_* = x^{\mu}\left[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right], \qquad (2.8)$$

где $U(x)$ и $V(x)$ имеют тот же смысл, что и в случае 3а).

Следует отметить, что даже в том случае, когда в правой части стоит выражение, содержащее только $\cos\beta x$ или только $\sin\beta x$, мы должны искать в том же виде, как было отмечено ранее формулами (2.7) и (2.8).

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

если соответствующее характеристическое уравнение имеет вещественные и различные корни $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$.

2. Запишите общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

если соответствующее характеристическое уравнение имеет корень λ кратности $m = 2$.

3. Напишите общий вид частного решения (с неопределенными коэффициентами) для дифференциального уравнения

$$y'' - y' = x^2.$$

4. Напишите общий вид частного решения (с неопределенными коэффициентами) для дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 8y = 5xe^{4x}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Решение

Находим корни характеристического уравнения

$$k^2 + 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ -1 \end{array}\right.$$

Следовательно, $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{-3x}$ образуют фундаментальную систему решений, и общее решение имеет вид

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}.$$

Пример 2. Запишите в общем виде с неопределенными коэффициентами частное решение, а также общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{2x} \tag{2.9}$$

Решение

Общее решение, как известно, представимо в виде

$$y = y_0 + y_*,$$

где $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$, и так как $\alpha = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение с неопределенными коэффициентами будет иметь вид

$$y_* = \left(Ax + B\right)e^{2x} \tag{2.10}$$

При этом неопределенные коэффициенты A, B находятся путем непосредственной подстановки решения (2.10) в уравнение (2.9).

Пример 3. Запишите в общем виде с неопределенными коэффициентами частное решение, а также общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'' + 4y' + 3y = \left(2x - 5\right)e^{-x} \tag{2.11}$$

Решение

Общее решение имеет вид

$$y = y_0 + y_*,$$

где $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$ (см. пример 1), и так как $\alpha = -1$ является корнем характеристического уравнения кратности $\mu = 1$, то частное решение с неопределенными коэффициентами будет иметь вид

$$y_* = x\left(Ax + B\right)e^{-x} \tag{2.12}$$

Неопределенные коэффициенты A, B, входящие в (2.12), находятся путем непосредственной подстановки решения (2.12) в уравнение (2.11).

Пример 4. Для линейного дифференциального уравнения 3-го порядка

$$y''' - 11y'' + 36y' - 36y = 0 \tag{2.13}$$

найдите фундаментальную систему решений и постройте его общее решение.

Решение. Запишем характеристическое уравнение для (2.13)

$$k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0 \tag{2.14}$$

и найдем его корни. Так как $k = 2$ есть корень уравнения (2.14), то многочлен в левой части этого уравнения нацело делится на $k - 2$ (т.е. можно разложить на множители)

$$(k-2)\left(k^2 - 9k + 18\right) = 0 \Rightarrow (k-2)(k-3)(k-6) = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 6.$$

Следовательно, $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$, $y_3 = e^{6x}$ образуют фундаментальную систему.

Общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 e^{6x}.$$

Пример 5. Решите линейное неоднородное дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$y^{(IV)} - y = 5\cos x \tag{2.15}$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения

$$k^4 - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i,$$

И запишем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \tag{2.16}$$

Правая часть уравнения (2.15) имеет вид

$$f(x) = M\cos x + N\sin x, \quad (M = 5, N = 0),$$

причем i является простым корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение ищем в виде

$$y_* = x(A\cos x + B\sin x).$$

Подставляя последнее в (2.15), получаем:

$$4A\sin x - 4B\cos x = 5\cos x \Rightarrow A = 0, B = -5/4 \Rightarrow y_* = -\frac{5}{4}x\sin x. \tag{2.17}$$

Общее решение уравнения (2.15), согласно (2.16), (2.17)имеет вид

$$y(x) = y_0 + y_* = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - \frac{5}{4}x\sin x.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

5. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

(*Ответ:* $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$).

6. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

(*Ответ:* $y(x) = e^{2x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)$).

7. Решите линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' - y = 5x + 2.$$

(*Ответ:* $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - 5x - 2$).

8. Решите линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + 9y = 6e^{3x}.$$

(*Ответ:* $y(x) = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x}$).

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Метод исключения неизвестных

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \end{cases}, \tag{3.1}$$

называется нормальной системой. В частности, нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами записывается в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + f_1\left(x\right) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + f_2\left(x\right) \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + f_n\left(x\right) \end{cases}, \tag{3.2}$$

Если $f_i\left(x\right) \equiv 0$ при всех $i = 1, 2, ..., n$, то система (3.2) называется однородной, в противном случае, система (3.2) называется неоднородной.

Общим решением системы (3.1) на интервале $\left(a, b\right)$ изменения аргумента x называется всякая совокупность функций $y_i\left(x, c_1, c_2, ..., c_n\right), \left(i = 1, 2, ..., n\right)$, дифференцируемых на $\left(a, b\right)$ и обращающих каждое из уравнений системы (3.2) в тождество. При этом число произвольных постоянных, входящих в общее решение системы, совпадает с числом неизвестных функций.

Интегрирование системы (3.1) проводят следующим образом.

Дифференцируем первое уравнение системы и заменяем в нем производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, ..., \dfrac{dy_n}{dx}$ их выражениями из уравнений (3.1), в результате получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \tag{3.3}$$

Дифференцируя (3.3) и поступая аналогично предыдущему, находим

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \tag{3.4}$$

Продолжая далее таким же образом, получим уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \tag{3.5}$$

Затем из первых $(n-1)$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

определяем $y_2, y_3, ..., y_n$, выразив их через x, y_1 и производные

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, ..., \frac{d^{(n-1)} y_1}{dx^{(n-1)}}$$

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right) \\ y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right) \end{cases} \tag{3.7}$$

и подставив их в последнее уравнение системы (3.6), получим дифференциальное уравнение n-го порядка для определения $y_1(x)$:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right) \tag{3.8}$$

Решая (3.8), находим $y_1 = y_1\left(x, c_1, ..., c_n\right)$. Подставив последнее в (3.7), определяем все решение $y_i = y_i\left(x, c_1, ..., c_n\right), \left(i = 2, 3, ..., n\right)$ исходной системы (3.1).

Контрольные вопросы и задания

1. Сведите линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка
$$y''+2y'-3y=\cos x$$
к системе линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, введя другие переменные.

2. Используя метод исключения неизвестных, решите простейшую систему линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:
$$y_1'=-2y_2,\quad y_2'=y_2-y_1\,.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Дана линейная система уравнений 1-го порядка
$$y_1'=-2y_2,\quad y_2'=y_2-y_1\,.$$

Методом исключения переменных получите дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно y_1 и выпишите его решение. Представьте общее решение исходной системы.

Решение. Дифференцируем первое уравнение и исключим из нее
$$y_2(x):\; y_1''=-2y_2'\Rightarrow y_1''=-2(y_2-y_1)\Rightarrow y_1''=-2\left[-\frac{1}{2}y_1'-y_1\right]=y_1'+2y_1.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка
$$y_1''-y_1'-2y_1=0\,.$$

Решаем характеристическое уравнение:
$$k^2-k-2=0\Rightarrow k_{1,2}=\left[\begin{array}{l}2\\-1\end{array}\right.\,.$$

Следовательно, $y_1(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$.

Из первого уравнения системы получаем:
$$y_2=-\frac{1}{2}y_1'=-\frac{1}{2}\left(2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}\right)=-c_1e^{2x}+\frac{1}{2}c_2e^{-x}\,.$$

Пример 2. Решите неоднородную систему уравнений
$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+2y+4z=1+4x\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}+y-z=\dfrac{3}{2}x^2\end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по x:
$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4\frac{dz}{dx}=4 \qquad (3.9)$$

Из первого уравнения находим

$$z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right),$$

далее из второго получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4}\frac{dy}{dx}.$$

Подставим последнее в (3.9), приходим к уравнению 2-го порядка относительно y:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 6y = -6x^2 - 4x + 3.$$

Нетрудно выписать решение последнего уравнения:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} + x^2 + x,$$

и, соответственно,

$$z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right) = -c_1e^{2x} + \frac{c_2}{4}e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2.$$

Пример 3. Решите однородную систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$$

Решение. Дифференцируя первое уравнение по t, находим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x + y + z \tag{3.10}$$

Из первого уравнения исходной системы и из (3.10) исключаем y, z, в результате получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0,$$

решение которого без труда выписывается:

$$x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \tag{3.11}$$

Дифференцируя (3.11) и подставляя в первое уравнение системы, получаем

$$y = \frac{dx}{dt} - z = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t} - z \tag{3.12}$$

Подставим (3.11) и (3.12) в третье уравнение исходной системы, в результате получаем уравнение для определения z:

$$\frac{dz}{dt} + z = 3c_2e^{2t},$$

решение которого имеет вид

$$z = c_3 e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$

И, наконец, из (3.12) имеем:

$$y = -(c_1 + c_3)e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$

Пример 4. Решите однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 - y_2 \end{cases} \tag{3.13}$$

Решение. Дифференцируя первое уравнение по x, находим:

$$y_1'' = -4y_1' + y_2' = -4y_1' - 2y_1 - y_2,$$

с учетом второго уравнения исходной системы получаем:

$$y_1'' + 5y_1' + 6y_1 = 0.$$

Решаем линейное однородное дифференциальное уравнение относительно $y_1(x)$:

$$k^2 + 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ -3 \end{array}\right.$$.

Следовательно,

$$y_1(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \tag{3.14}$$

Дифференцируем (3.14)

$$y_1' = -2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{-3x},$$

И подставим в первое уравнение системы:

$$y_2(x) = y_1' + 4y_1 = \left(-2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{-3x}\right) + 4\left(c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}\right),$$

$$y_2(x) = 2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \tag{3.15}$$

Пример 5. Решите неоднородную систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2 + x \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + 3x \end{cases} \tag{3.16}$$

Решение. Дифференцируя первое уравнение по x, находим:

$$y_1'' = -4y_1' + y_2' + 1 \tag{3.17}$$

Подставляем y_2' из второго уравнения системы (3.16) в (3.17):

$$y_1'' = -4y_1' - 2y_1 - y_2 + 3x + 1 \tag{3.18}$$

Из первого уравнения системы (3.16) находим

$$y_2 = y_1' + 4y_1 - x, \tag{3.19}$$

и подставим в (3.18):

$$y_1'' = -5y_1' - 6y_1 + 4x + 1 \Rightarrow y_1'' + 5y_1' + 6y_1 = 4x + 1.$$

Решение последнего уравнения имеет вид:

$$y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{7}{18} \tag{3.20}$$

Далее, из (3.19) с учетом (3.20) находим y_2:

$$y_2 = -2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{2}{3} + 4\left(c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{7}{18}\right) - x,$$

или

$$y_2 = 2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{5x}{3} - \frac{8}{9}.$$

Ответ: $y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{7}{18}$, $\quad y_2 = 2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{5x}{3} - \frac{8}{9}$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Решите однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, используя метод исключения неизвестных

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y.$$

(*Ответ:* $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad x(t) = (c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\sin t$).

2. Решите неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$$

(*Ответ:* $y(x) = (c_1 - c_2 - c_1 x)e^{-2x}, \quad z(x) = (c_1 x + c_2)e^{-2x}$).

3. Решите неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x \end{cases}$$

(*Ответ:* $y(x) = c_1 + c_2 x + 2\sin x, \quad z(x) = -2c_1 - c_2(2x+1) - 3\sin x - 2\cos x$).

4. Решите однородную систему трех линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = x + z, \quad \frac{dz}{dt} = x + y$$

(*Ответ:* $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ y(t) = c_3 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ z(t) = -(c_1 + c_3) e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$).

3.2. Метод Эйлера

Пусть дана нормальная система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}, \qquad (3.21)$$

Будем искать частное решение однородной системы в виде

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{kx}, \quad \ldots, \quad y_n = \alpha_n e^{kx}, \quad (3.22)$$

где α_1, α_2, ..., α_n, k – неизвестные постоянные. Подставляя (3.22) в (3.21), сокращая на e^{kx}, после элементарных преобразований получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - k)\alpha_n = 0 \end{cases}, \qquad (3.23)$$

Для того, чтобы система (3.23) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы обращался в нуль:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.24)$$

Раскрывая последний определитель, получим алгебраическое уравнение n-ой степени относительно неизвестной k. Уравнение (3.24) называется характеристическим уравнением для системы (3.21), а его корни – собственными значениями.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Корни характеристического уравнения действительные и различные. Для каждого корня $k_i, (i = 1, 2, ..., n)$ напишем систему (3.23) и определим коэффициенты $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, ..., \alpha_{ni}$. Один из указанных коэффициентов в этом случае выбирается произвольно, и его можно принять равным единице (см. ниже пример). Таким образом, получаем n частных решений системы дифференциальных уравнений (3.21) в виде:

$$y_{1i} = \alpha_{1i} e^{k_i x}, \quad y_{2i} = \alpha_{2i} e^{k_i x}, \quad ..., \quad y_{ni} = \alpha_{ni} e^{k_i x} \tag{3.25}$$

В соотношениях (3.25) первый индекс указывает на номер неизвестной функции, а второй – номер корня. Полученные n частных решений системы (3.23) образуют фундаментальную систему решений:

$$Y_1(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \dots\dots \\ y_{n1}(x) \end{bmatrix}, \quad Y_2(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ y_{22}(x) \\ \dots\dots \\ y_{n2}(x) \end{bmatrix}, \quad ..., \quad Y_n(x) = \begin{bmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \dots\dots \\ y_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

А, следовательно, общее решение однородной системы дифференциальных уравнений в векторном виде записывается в виде

$$Y(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x) + ... + c_n Y_n(x),$$

или

$$\begin{cases} y_1(x) = c_1 y_{11}(x) + c_2 y_{12}(x) + ... + c_n y_{1n}(x) \\ y_2(x) = c_1 y_{21}(x) + c_2 y_{22}(x) + ... + c_n y_{2n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1(x) = c_1 y_{n1}(x) + c_2 y_{n2}(x) + ... + c_n y_{nn}(x) \end{cases},$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные.

Пример 1. Решите методом Эйлера однородную систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 - y_2 \end{cases} \tag{3.26}$$

и убедитесь, что решение совпадает с полученным ранее на основе метода исключения неизвестных.

Решение. Будем искать решение в виде

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{kx}.$$

Подставим их в систему (3.26), в результате получаем алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} (-4-k)\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + (-1-k)\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

Выпишем характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} -4-k & 1 \\ -2 & -1-k \end{vmatrix} = 0,$$

и найдем его решение

$$(-4-k)(-1-k)+2=0 \Rightarrow k^2+5k+6=0 \Rightarrow k_{1,2}=\left[\begin{array}{l} -2 \\ -3 \end{array}\right.,$$

т.е. корни действительны и различны. Подставляя $k_1=-2$ в (3.27), получим совместную, но неопределенную систему

$$\begin{cases} -2\alpha_1+\alpha_2=0 \\ -2\alpha_1+\alpha_2=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_{11}=1, \alpha_2 \equiv \alpha_{21}=2.$$

Следовательно, соответствующее $k_1=-2$ частное решение системы имеет вид

$$y_{11}=e^{-2x}, \quad y_{21}=2e^{-2x}.$$

Подставляя теперь в систему (3.27) $k_2=-3$, получим

$$\begin{cases} -\alpha_1+\alpha_2=0 \\ -2\alpha_1+2\alpha_2=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_{12}=1, \alpha_2 \equiv \alpha_{22}=1.$$

Выпишем соответствующее частное решение системы (3.27)

$$y_{12}=e^{-3x}, \quad y_{22}=e^{-3x}.$$

Теперь можем представить общее решение системы (3.26)

$$\begin{aligned} y_1(x)&=c_1y_{11}(x)+c_2y_{12}(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x} \\ y_2(x)&=c_1y_{21}(x)+c_2y_{22}(x)=2c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Нетрудно убедиться, что решение (3.28) совпадает с полученным с помощью метода исключения неизвестных решением (3.14), (3.15).

2. Пусть среди корней характеристического уравнения имеется два комплексно-сопряженных корня $k_{1,2}=\alpha \pm \beta i$. Этим корням соответствуют решения

$$y_{1j}=\alpha_{1j}e^{(\alpha+i\beta)x}, y_{2j}=\alpha_{2j}e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad (j=1,2,\dots,n), \tag{3.29}$$

в которых коэффициенты α_{1j}, α_{2j} определяются из системы (3.23).

Выпишем два частных решения, соответствующие паре комплексно-сопряженных корней $k_{1,2}=\alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения

$$\begin{aligned} y_{1j}&=e^{\alpha x}\left(\lambda_{1j}\cos\beta x+\lambda_{2j}\sin\beta x\right) \\ y_{2j}&=e^{\alpha x}\left(\mu_{1j}\cos\beta x+\mu_{2j}\sin\beta x\right) \end{aligned},$$

где $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \mu_{1j}, \mu_{2j}$ – действительные числа, определяемые α_{1j} и α_{2j}.

Пример 2. Пользуясь методом Эйлера, найдите общее решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2 \end{cases} \tag{3.30}$$

Решение. Выпишем характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 12k + 37 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -6 \pm i.$$

Подставляя $k_1 = -6 + i$ в систему (3.27), находим:

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{21} = 1 + i.$$

Выпишем первое из решений (3.29):

$$y_{11} = e^{(-6+i)x} = e^{-6x}\left(\cos x + i\sin x\right) = e^{-6x}\cos x + ie^{-6x}\sin x,$$

$$y_{21} = (1+i)e^{(-6+i)x} = (1+i)e^{-6x}\left(\cos x + i\sin x\right) =$$

$$= e^{-6x}\left(\cos x - \sin x\right) + ie^{-6x}\left(\cos x + \sin x\right).$$

Подставляем теперь $k_2 = -6 - i$ в систему (3.27), в результате получим: $\alpha_{12} = 1, \quad \alpha_{22} = 1 - i$.

Выписываем второе из решений (3.29):

$$y_{12} = e^{(-6-i)x} = e^{-6x}\cos x - ie^{-6x}\sin x,$$

$$y_{22} = (1-i)e^{(-6-i)x} = e^{-6x}\left(\cos x - \sin x\right) - ie^{-6x}\left(\cos x + \sin x\right).$$

За системы частных решений можно взять отдельно действительные части и отдельно мнимые части

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{-6x}\cos x, y_{21} = e^{-6x}\left(\cos x - \sin x\right) \\ y_{12} &= e^{-6x}\sin x, y_{22} = e^{-6x}\left(\cos x + \sin x\right) \end{aligned},$$

и тогда общее решение системы будет

$$y_1 = c_1e^{-6x}\cos x + c_2e^{-6x}\sin x,$$

$$y_2 = c_1e^{-6x}\left(\cos x - \sin x\right) + c_2e^{-6x}\left(\cos x + \sin x\right).$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

5. Найдите решение системы линейных однородных уравнений, используя метод Эйлера

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = -4y_1 + y_2 \end{cases}.$$

(*Ответ*: $y_1 = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}, \quad y_2 = -2c_1e^{3x} + 2c_2e^{-x}$).

6. С помощью метода Эйлера решите системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 8y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$$

(*Ответ*: $y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$, $y_2 = \frac{1}{2} c_1 e^{3x} - \frac{1}{4} c_2 e^{-3x}$).

3.3. Метод вариации произвольных постоянных

Этот метод применим к решению систем линейных неоднородных уравнений n-го порядка. Для простоты рассуждений ограничимся рассмотрением нормальной системы двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + f_1(x) \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + f_2(x) \end{cases} \qquad (3.31)$$

Пусть общее решение однородной системы известно и оно имеет вид

$$Y_0(x) = c_1 Y_1(x) + c_2 Y_2(x),$$

или

$$\begin{bmatrix} y_{10}(x) \\ y_{20}(x) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, а y_{11}, y_{21} и y_{12}, y_{22} – частные решения однородной системы, соответствующие различным корням характеристического уравнения.

Частное решение неоднородной системы (3.28) отыскивается в форме, аналогичной по виду общему решению однородной системы, однако произвольные постоянные заменяются неизвестными функциями:

$$\begin{aligned} y_{1*} &= c_1(x) y_{11} + c_2(x) y_{12}, \\ y_{2*} &= c_1(x) y_{21} + c_2(x) y_{22} \end{aligned} \qquad (3.32)$$

Подставляя последние соотношения в (3.31), в результате приходим к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно $c_1'(x), c_2'(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_{11} + c_2'(x) y_{12} = f_1(x) \\ c_1'(x) y_{21} + c_2'(x) y_{22} = f_2(x) \end{cases}$$

Разрешая последнюю систему по формулам Крамера, получим два дифференциальных уравнения первого порядка относительно $c_1'(x), c_2'(x)$:

$$c_1'(x)=\frac{f_1(x)y_{22}-f_2(x)y_{12}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}},\quad c_2'(x)=\frac{f_2(x)y_{11}-f_1(x)y_{21}}{y_{11}y_{22}-y_{12}y_{21}}. \tag{3.33}$$

Интегрируя (3.33), находим неизвестные функции $c_1(x), c_2(x)$ и подставляем в (3.32). Общее решение системы (3.32)запишется в виде

$$\begin{gathered} y_1 = y_{10} + y_{1*}, \\ y_2 = y_{20} + y_{2*} \end{gathered}.$$

Пример 1. Решите методом вариации постоянных неоднородную систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2 + x \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + 3x \end{cases} \tag{3.34}$$

Решение. Этот пример был рассмотрен выше с применением метода исключения неизвестных. Выпишем полученное ранее на основе метода Эйлера общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{gathered} y_{10}(x)=c_1y_{11}(x)+c_2y_{12}(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}, \\ y_{20}(x)=c_1y_{21}(x)+c_2y_{22}(x)=2c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}. \end{gathered}$$

Ищем частное решение системы (3.34) в виде

$$\begin{gathered} y_{1*}=c_1(x)e^{-2x}+c_2(x)e^{-3x}, \\ y_{2*}=2c_1(x)e^{-2x}+c_2(x)e^{-3x}. \end{gathered}$$

Подставляем последние соотношения в (3.34), в результате получаем:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-2x}+c_2'(x)e^{-3x}=x \\ 2c_1'(x)e^{-2x}+c_2'(x)e^{-3x}=3x \end{cases}.$$

Разрешая систему относительно $c_1'(x), c_2'(x)$, получаем дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} x & e^{-3x} \\ 3x & e^{-3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ 2e^{-2x} & e^{-3x} \end{vmatrix}}=2xe^{2x},\quad c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & x \\ 2e^{-2x} & 3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ 2e^{-2x} & e^{-3x} \end{vmatrix}}.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\begin{gathered} c_1(x)=2\int xe^{2x}dx=e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right), \\ c_2(x)=-\int xe^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\left(\frac{1}{3}-x\right). \end{gathered}$$

Частное решение принимает вид

$$y_{1*} = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-3x} = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - x\right) = \frac{2x}{3} - \frac{7}{18},$$

$$y_{2*} = 2c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-3x} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - x\right) = \frac{5x}{3} - \frac{8}{9}.$$

Общее решение системы запишется так:

$$y_1 = y_{10} + y_{1*} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{2x}{3} - \frac{7}{18},$$

$$y_{2*} = y_{20} + y_{2*} = 2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} + \frac{5x}{3} - \frac{8}{9}.$$

Отметим, что полученное решение совпадает с представленным ранее решением системы (3.34), выведенным на основе метода исключения неизвестных.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

7. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 + 1 \end{cases}.$$

Постройте решение следующей задачи Коши:

$$x(0) = -2, \quad y(0) = 0.$$

(*Ответ*: общее решение $y_1 = c_1 e^{x} - c_2 e^{-x} - 1, \quad y_2 = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - 1$; частное решение $y_{1*} = -e^{-x} - 1, \quad y_{2*} = e^{-x} - 1$).

8. Решите методом вариации постоянных систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + \cos x \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 + 4\cos x - \sin x \end{cases}$$

(*Ответ*: $y_1 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}, \quad y_2 = c_1 e^{3x} + 3c_2 e^{-2x} + \cos x$).

4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотренные выше точные методы интегрирования дифференциальных уравнений, к сожалению, применимы для решения ограниченного класса задач. Поэтому в инженерной практике широко используются приближенные методы, причем как приближенные аналитические, так и численные методы. Ниже мы ограничимся рассмотрением наиболее распространенных приближенных аналитических методов решения краевых задач, таких как метод степенных рядов, Бубнова, наименьших квадратов, коллокаций.

4.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Этот метод позволяет получить приближенное решение с любой степенью точности.

Пусть требуется найти решение задачи Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{4.1}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{4.2}$$

Будем искать решение в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4.3}$$

Алгоритм определения неизвестных коэффициентов $a_n \equiv \dfrac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$ ряда (4.3) формально сводится к следующему: ряд подставляется в уравнение (4.1). В получающемся таким путем тождественном соотношении коэффициенты при различных степенях x приравниваются нулю, что приводит к системе уравнений для определения коэффициентов a_n. Полученное решение исследуют на сходимость и на возможность почленного дифференцирования. В результате определяем область сходимости (малую окрестность точки $x = x_0$), в которой ряд (4.3) совпадает с искомым решением.

Пример 1. Решить задачу Коши:

$$y'' - 2xy' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{4.4}$$

Решение. Ищем решение в виде степенного ряда

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \left(a_n \equiv \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} \right). \tag{4.5}$$

Тогда из начальных условий находим, что $a_0 = 0,\ a_1 = 1$. Дифференцируем (4.5):

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$
$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$
$$y''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots$$

Подставляя последние соотношения в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$
$$3 \cdot 2a_3 = 2 + 4 \Rightarrow a_3 = 1$$
$$4 \cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2 \Rightarrow a_4 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n(n-1)a_n = (n-2)2a_{n-2} + 4a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

т.е. коэффициенты при четных степенях x обращаются в нуль.

Подставляя найденные коэффициенты в (4.5), получаем искомое решение:

$$y(x) = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \ldots$$

Полученный ряд, как нетрудно убедиться, сходится при всех значениях x. С учетом разложения функции e^{x^2} в ряд Маклорена полученное решение можно переписать в виде

$$y(x) = xe^{x^2}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите решение задачи Коши в виде степенного ряда, ограничившись при этом первыми 4-мя членами разложения:

$$y'' = xyy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

(*Ответ:* $y(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!}$).

2. Постройте с помощью степенного ряда решение задачи Коши:

$$y'' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(*Ответ:* $y(x)=1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot 4}{6!}x^6-\frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9+\ldots$ Ряд сходится на всей числовой оси).

Ниже кратко перечислим распространенные на практике приближенные аналитические методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений.

4.2. Метод Бубнова

Поясним суть нижеприводимых приближенных аналитических методов на примере решения краевой задачи для уравнения второго порядка

$$y''=f(x,y,y'),x\in[a,b],\quad y(a)=y_a,\quad y(b)=y_b \tag{4.6}$$

Будем искать решение задачи (4.6) в виде

$$y(x)=U_0(x)+\sum_{i=1}^{n}C_iU_i(x) \tag{4.7}$$

C_i – постоянные, подлежащие определению; $U_0(x),U_1(x),\ldots,U_n(x)$ – подбираемые функции, которые должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Координатные (аппроксимирующие) функции $U_i(x),(i=1,2,\ldots,n)$ – линейно независимы на (a,b).
2. Функции $U_i(x),(i=1,2,\ldots,n)$ – непрерывно дифференцируемы на (a,b) до требуемого порядка.
3. Функция $y(x)$,задаваемая формулой (4.7), удовлетворяет краевым условиям (2.6). Они окажутся выполненными, если потребовать

$$U_0(a)=y_a,U_0(b)=y_b,U_i(a)=U_i(b)=0,(i=1,2,\ldots,n) \tag{4.8}$$

Предположим, что функции $U_i(x),(i=1,2,\ldots,n)$ подобраны. Требуется подобрать константы C_i так, чтобы искомая функция $y(x)$ была близка на$[a,b]$к точному решению краевой задачи. Для этого перепишем уравнение (4.6) в виде

$$y''-f(x,y,y')=0 \tag{4.9}$$

Если в левую часть уравнения (4.9) вместо $y(x)$ подставить его точное решение, то оно тождественно выполнится. Но если вместо точного решения подставить приближенное решение (4.7), то в левой части уравнения (4.9) получим некоторую функцию $r(x,C_i)\neq 0$ на $(a,b),i=1,2,\ldots,n$, представляющую некоторую меру ошибки и называемую невязкой.

Различные приближенные методы отличаются тем, что в каждом из них устанавливается свой критерий малости невязки. Общим для рассматриваемых методов является то, что их применение приводит к системе алгебраических уравнений относительно C_i:

$$\varphi_k\left(C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0, \left(k = 1, ..., n\right). \tag{4.10}$$

Далее, решая систему (4.10), находят неизвестные константы $C_1, C_2, ..., C_n$, подставляют их в (4.7) и определяют приближенное решение $y(x)$ исходной краевой задачи (4.6). Отметим, что чем больше число координатных функций в решении (4.7), тем точнее может быть приближенное решение задачи. Однако с ростом n возрастает трудоемкость вычислений.
Суть метода Бубнова состоит в том, что за условие минимума невязки $r\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$ принимается ортогональность невязки к уже выбранным координатным функциям $U_i\left(x\right), \left(i = 1, 2, ..., n\right)$ на $\left[a, b\right]$.

Две функции $\varphi_1\left(x\right), \varphi_2\left(x\right)$ называются ортогональными на $\left[a, b\right]$, если

$$\int_a^b \varphi_1\left(x\right) \cdot \varphi_2\left(x\right) dx = 0.$$

Составляя условие ортогональности для невязки, получим следующую систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_1, C_2, ..., C_n$ искомого решения (4.7):

$$\int_a^b r\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) U_i\left(x\right) dx = 0, \left(i = 1, ..., n\right). \tag{4.11}$$

4.3. Метод наименьших квадратов

При решении краевой задачи (4.6) методом наименьших квадратов искомая функция $y(x)$ отыскивается в том же виде (4.7), однако с тем отличием, что для определения неизвестных коэффициентов $C_i, \left(i = 1, 2, ..., n\right)$ составляется функция $S\left(C_1, C_2, ..., C_n\right)$, называемая интегральной ошибкой аппроксимации решения

$$S\left(C_1, C_2, ..., C_n\right) = \int_a^b r^2\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) dx, \tag{4.12}$$

После чего выписываются условия минимума функции $S\left(C_1, C_2, ..., C_n\right)$

$$\frac{\partial S}{\partial C_i} = 0, \left(i = 1, 2, ..., n\right), \tag{4.13}$$

из которой и определяются постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$.

4.4. Метод коллокаций

В методе коллокаций, в отличие от предыдущих приближенных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений, условия для определения неизвестных коэффициентов $C_1, C_2, ..., C_n$ подбираются из того условия, что невязка $r\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right)$ обращалась в нуль в n внутренних точках $a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b$ рассматриваемого отрезка $\left[a, b\right]$. Эти точки $x_1, x_2, ..., x_n$, в которых дифференциальное уравнение задачи точно удовлетворяется, называются точками коллокации. В итоге приходим к системе n алгебраических уравнений

$$r\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

для определения неизвестных коэффициентов $C_i, \left(i = 1, 2, ..., n\right)$. Отметим, что выбор точек коллокации существенно влияет на точность решения задачи.

5. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе рассматриваются методы решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющие понижать их порядок и упрощающие, в конечном счете, процедуру построения решения исходного дифференциального уравнения. Отметим, что многие задачи математической физики, описываемые нелинейными уравнениями в частных производных, с помощью распространенных на практике методов (таких, как метод разделения переменных, метод введения автомодельной переменной) проводятся к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение n-ого порядка

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{5.1}$$

где функция $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$ определена и непрерывна в некоторой области $G(x)$, и зависит от $y^{(n)}, (n \geq 1)$. Ниже перечислим некоторые типы уравнений, допускающих понижение порядка.

5.1. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно искомую функцию

Сюда относятся уравнения, не содержащие явно $y, y', y'', ..., y^{(k-1)}$, т.е.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, (1 \leq k \leq n) \tag{5.2}$$

Замена $y^{(k)} = u(x)$ приводит к уравнению $(n-k)$-ого порядка относительно $u(x)$:

$$F(x, u, u', ..., u^{(n-k)}) = 0.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите общий вид решения дифференциального уравнения 3-го порядка?

2. Применяя методы интегрирования, решите простейшее дифференциальное уравнение

$$y'' = x \sin(x-5).$$

Примеры решения задач

Пример 1. Требуется решить уравнение:

$$xy'' + 2y'^2 = y'.$$

Применение подстановки $y' = u(x)$ приводит к дифференциальному уравнению Бернулли $xu' + 2u^2 = u$ относительно новой функции $u = u(x)$. И при последующей замене $u = \frac{1}{z}$ получаем линейное неоднородное уравнение:

$$xz' + z = 2.$$

Решение последнего уравнения может быть получено с помощью метода вариации произвольной постоянной, либо подстановкой Бернулли. В результате имеем:

$$z = \frac{2x + c_1}{x} \Rightarrow u = \frac{1}{z} = \frac{x}{2x + c_1} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{c_1}{4}\ln(2x + c_1) + c_2.$$

Пример 2. Решите уравнение:

$$x^2 y'' = y'^2$$

Решение. Имеем дифференциальное уравнение, не содержащее y, потому сделаем замену

$$y' = u(x) \Rightarrow x^2 u' = u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow u(x) = \frac{x}{1 + c_1 x},$$

или, возвращаясь к исходным переменным, получаем:

$$y' = \frac{x}{1 + c_1 x}.$$

Выпишем возможные случаи интегрирования:

A) $c_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c_2$;

B) $c_1 = \infty \Rightarrow y = c_3$;

C) $c_1 \neq 0$ – конечное число

$$\Rightarrow y(x) = \int \frac{x}{1 + c_1 x} dx = \frac{1}{c_1} \int \left(1 - \frac{1}{1 + c_1 x}\right) dx = \frac{x}{c_1} - \frac{1}{c_1^2} \ln|1 + c_1 x| + c_2.$$

Пример 3. Решите уравнение:

$$y'^2 y''' + 2y'y''^2 = 8x. \qquad (5.3)$$

Подстановка $y' = p(x)$ понижает порядок уравнения (3):

$$\left(p^2 p'\right)' = 8x,$$

И далее проводя последовательно интегрирование, получаем:

$$p^2 p' = 4x^2 + \tilde{c}_1,$$

$$p^2 dp = \left(4x^2 + \tilde{c}_1\right) dx,$$

$$\frac{p^3}{3} = \frac{4x^3}{3} + \tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2,$$

$$p^3 = 4x^3 + c_1 x + c_2, \quad (c_1 \equiv 3\tilde{c}_1, c_2 \equiv 3\tilde{c}_2)$$

$$p \equiv y' = \sqrt[3]{4x^3 + c_1 x + c_2} \Rightarrow y(x) = \int \sqrt[3]{4x^3 + c_1 x + c_2}\, dx.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите решения следующих дифференциальных уравнений:

1. $x^2 y'' + xy' = 1$

(*Ответ:* $y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + c_1 \ln|x| + c_2$).

2. $y'''^2 + y''^2 = 1$

(*Ответ:* $y = \sin(c_1 + x) + c_2 x + c_3$).

3. $y'' = -\frac{x}{y'}$

(*Ответ:* $y = \pm\frac{1}{2}\left[x\sqrt{c_1^2 - x^2} + c_1^2 \arcsin\frac{x}{c_1}\right] + c_2$).

5.2. Автономное дифференциальное уравнение (не содержащее явно независимой переменной):

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{5.4}$$

Применяем подстановку

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p \Rightarrow$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \left(p''p + p'^2\right)p \Rightarrow ...$$

В результате приходим к дифференциальному уравнению $(n-1)$-ого порядка относительно $p(y)$.

Пример 1. Решите уравнение: $y'^2 + 2yy'' = 0$.

Решение. Используем указанную подстановку, в результате получаем два решения:

$$y' = p(y) \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \Rightarrow y = c \\ p + 2yp' = 0 \Rightarrow p = \frac{c_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow y^3 = c_2(x + c_3)^2 \end{cases}$$

Пример 2. Решите уравнение: $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

Решение. Имеем дифференциальное уравнение, не содержащее переменной x. Следовательно, применяем подстановку

$$y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'p,$$

и подставим в исходное уравнение, в результате приходим к уравнению Бернулли

$$pp' + p^2 = 2e^{-y} \Rightarrow p' + p = \frac{2}{p}e^{-y}. \tag{5.5}$$

Используем еще одну замену, которая приводит (5.5) к линейному неоднородному уравнению:

$$z(y) = p^2 \Rightarrow z' = 2pp' \Rightarrow \frac{1}{2}z' + z = 2e^{-y} \Rightarrow z' + 2z = 4e^{-y}. \tag{5.6}$$

Решаем (5.6) с помощью подстановки Бернулли

$$z(y) = u(y)v(y) \Rightarrow z' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + u(v' + 2v) = ue^{-y}. \tag{5.7}$$

Находим частное решение $v(y)$:

$$v' + 2v = 0 \Rightarrow v = c_1 e^{-2y} \Rightarrow v_* = e^{-2y}, (c_1 = 1).$$

Подставим последнее в (5.7):

$$u'e^{-2y} = 4e^{-y} \Rightarrow u = 4e^y + c_2 \Rightarrow z = uv = e^{-2y}\left(4e^y + c_2\right) = 4e^{-y} + c_2 e^{-2y}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$y'^2 = p^2 = z = 4e^{-y} + c_2 e^{-2y} \Rightarrow y' =$$
$$= \pm\frac{\sqrt{4e^y + c_2}}{e^y} \Rightarrow \pm\frac{e^y dy}{2\sqrt{e^y + c_3}} = dx, (c_3 \equiv c_2/4).$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем общее решение исходного уравнения:

$$e^y + c_3 = (x + c_4)^2.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите решения следующих дифференциальных уравнений, не содержащих независимую переменную:

4. $yy' = \sqrt{y^2 + y'^2}\, y'' - y'y''$

(*Ответ:* $y_1 = c_1\dfrac{1 + c_2 e^x}{1 - c_2 e^x}, \quad y_2 = c$).

5. $y'^2 + yy'' = y^2 y'$

(*Ответ:* $x = c_1 - \frac{1}{c_2}\ln\left|\frac{y}{y+c_2}\right|$).

5.3. Уравнения, однородные относительно $y, y', y'', ..., y^{(n)}$

Пусть

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'',...,\lambda y^{(n)}) = \lambda^m F(x,y,y',y'',...,y^{(n)}) \tag{5.8}$$

т.е. имеем однородную функцию с показателем m относительно $y, y', y'', ..., y^{(n)}$.

Используем замену

$$y' = yu(x) \Rightarrow y'' = y\left(u^2 + u'\right),...$$

В результате приходим к дифференциальному уравнению $(n-1)$-ого порядка относительно $u(x)$.

Пример 1. Решите уравнение:

$$x^2 yy'' - 2x^2 y'^2 + xyy' + y^2 = 0\,.$$

Имеем дифференциальное уравнение 2-го порядка, однородное относительно y, y', y'', причем $m = 2$. Применяем замену

$$y' = yu(x) \Rightarrow y'' = y\left(u^2 + u'\right),$$

В результате которой понижается порядок дифференциального уравнения, и она приводит к уравнению Риккати

$$u' = -\frac{1}{x}u + u^2 - \frac{1}{x^2}\,. \tag{5.9}$$

Нетрудно убедиться, что $u_1 = \frac{c_1}{x}, (c_1 = \pm 1)$ – частные решения уравнения Риккати (5.9). Следующая подстановка $u(x) = u_1(x) + v(x) = \frac{1}{x} + v(x)$, в которой частное решение выбрано в виде $u_1(x) = \frac{1}{x}$, приводит к дифференциальному уравнению Бернулли:

$$v' = \frac{1}{x}v + v^2\,.$$

Применяя замену $v(x) = \frac{1}{z(x)}$, получаем линейное неоднородное уравнение относительно $z(x)$:

$$z' + \frac{1}{x} z = -1,$$

которое без особого труда решается известным методом вариации произвольной постоянной (либо с помощью подстановки Бернулли). Выпишем это решение:

$$z = \frac{c_1 - x^2}{2x}.$$

Итак,

$$v(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{2x}{c_1 - x^2} \Rightarrow u = v + \frac{1}{x} = \frac{c_1 + x^2}{x\left(c_1 - x^2\right)}.$$

И, наконец, интегрируем дифференциальное уравнение

$$y' = yu(x) = y\frac{c_1 + x^2}{x\left(c_1 - x^2\right)},$$

В результате получаем искомое решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{c_2 x}{c_1 - x^2}.$$

Ниже мы рассмотрим еще один класс обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых возможно предложить специальную замену, приводящую к понижению порядка дифференциального уравнения.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''y + y'^2 = 0. \tag{5.10}$$

Решение этого уравнения, представляющего собой автономное дифференциальное уравнение, выписано в п.2.1. Здесь мы укажем другой способ его решения. (5.10) – это однородное уравнение относительно y, следовательно, можем применить подстановку

$$y' = yz(x) \Rightarrow y'' = z'y + zy' = y\left(z' + z^2\right).$$

Подставим последнее соотношение в (5.10):

$$y^2\left(z' + z^2\right) + z^2 y^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} y^2 = 0 \Rightarrow y_1 \equiv 0 \\ z' + 2z^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z^2} = -2xdx \Rightarrow \dfrac{1}{z} = 2x + c_2 \end{array}\right..$$

Решаем последнее уравнение:

$$\frac{y'}{y} \equiv z = \frac{1}{2x + c_2} \Rightarrow y^2 = c_3\left(2x + c_2\right),$$

т.е. получили решение дифференциального уравнения (5.10), которое совпадает с представленным ранее в п.2.1 решением.

Пример 3. Обратимся теперь к примеру 3, рассмотренному в предыдущем разделе:

$$y'^2 + 2yy'' = 0. \tag{5.11}$$

Представим ниже другой способ интегрирования этого уравнения.

Уравнение (5.11) – однородное относительно y, y', y''. Следовательно, можем применить подстановку

$$y' = yu(x) \Rightarrow y'' = y\left(u^2 + u'\right). \tag{5.12}$$

в результате получаем:

$$y^2\left(3u^2 + 2u'\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} y_1 \equiv 0 \\ 2du = -3u^2 dx \end{array}\right.$$

Интегрируем последнее уравнение относительно неизвестной функции $u(x)$:

$$\left[\begin{array}{c} u \equiv 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y_2 = c_2 \\ u = \dfrac{2}{3x + c_1} \end{array}\right. .$$

Подставим последнее в (5.12) и проинтегрируем:

$$y' = yu(x) = \frac{2y}{3x + c_1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{3x + c_1} \Rightarrow \ln y = \frac{2}{3}\ln(3x + c_1) + \tilde{c}_2$$

или

$$y = \tilde{\tilde{c}}_2 (3x + c_1)^{2/3} \Rightarrow y^3 = c_2 (3x + c_1)^2,$$

и полученное общее решение совпадает с представленным решением в предыдущем разделе. Отметим, что этот способ оказался более громоздким.

Пример 4. Требуется решить дифференциальное уравнение

$$x^2 yy'' = (y - xy')^2 \tag{5.13}$$

Решение. Заметим, что $y \equiv 0$ – решение уравнения (5.13). С другой стороны, уравнение (5.10) – однородное относительно переменных y, y', y'', следовательно, применяем подстановку

$$y' = yz(x) \Rightarrow y'' = y\left(z' + z^2\right),$$

и подставим в уравнение (5.13), в результате получим линейное неоднородное уравнение первого порядка относительно $z(x)$:

$$x^2 y \cdot y\left(z' + z^2\right) = \left(y - x \cdot zy\right)^2 \Rightarrow x^2\left(z' + z^2\right) = \left(1 - xz\right)^2 \Rightarrow z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2}.$$

Решаем последнее уравнение методом вариации произвольной постоянной. Находим решение однородного уравнения:

$$z' + \frac{2}{x}z = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{c_1}{x^2}.$$

Ищем решение неоднородного уравнения в виде:

$$z = \frac{c_1(x)}{x^2} \Rightarrow z' = \frac{c_1' x^2 - c_1 2x}{x^4}.$$

После подстановки в неоднородное уравнение получаем:

$$c_1(x) = x + c_2 \Rightarrow z(x) = \frac{x + c_2}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{c_2}{x^2}.$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$\frac{y'}{y} = z = \frac{1}{x} + \frac{c_2}{x^2} \Rightarrow \ln y = \int\left(\frac{1}{x} + \frac{c_2}{x^2}\right)dx = \ln x - \frac{c_2}{x} + c_3.$$

Общее решение принимает вид

$$y = xc_4 e^{-c_2/x}.$$

Пример 5. Решите уравнение

$$xyy'' = -y'\left(y + y'x\right). \qquad (5.14)$$

Отметим, что уравнение (5.14) имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. Найдем нетривиальное решение. Нетрудно убедиться в том, что (5.14) – однородное дифференциальное уравнение относительно зависимой переменной. Иначе говоря, вид уравнения не меняется при преобразовании $\left(\bar{x} \equiv x, \bar{y} = \lambda y\right)$. Применяем подстановку:

$$y' = u(x)y \Rightarrow y'' = u'y + uy' = y\left(u' + u^2\right). \qquad (5.15)$$

Подставим последнее соотношение в (5.14):

$$y^2 x\left(u' + u^2\right) = -y^2 u\left(1 + ux\right) \Rightarrow xu' + u = -2xu^2 \Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = -2u^2, \qquad (5.16)$$

Т.е. получили уравнение Бернулли, которое решаем с помощью замены

$$z = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{z(x)}, u' = -\frac{z'}{z^2}.$$

Подставим в (5.16), в результате приходим к линейному неоднородному уравнению относительно $z(x)$:

$$-z' + \frac{1}{x}z = -2.$$

Решение последнего уравнения легко получается с помощью метода вариации произвольной постоянной:

$$z(x) = c(x)x = (c_1 + 2\ln x)x.$$

Возвращаясь к исходным переменным, с учетом (5.15) запишем:

$$u = \frac{1}{z} = \frac{1}{(c_1 + 2\ln x)x} = \frac{y'}{y} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{(c_1 + 2\ln x)x}.$$

Интегрируя полученное уравнение с разделяющимися переменными, получаем общее решение исходного уравнения (5.14):

$$\ln y = \ln\left(c_2\sqrt{c_1 + 2\ln x}\right) \Rightarrow y = c_2\sqrt{c_1 + 2\ln x}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

6. Подтвердите, что дифференциальное уравнение

$$y'^2 + 2yy'' = 0$$

однородно относительно зависимой переменной, и найдите его общее решение.

(*Ответ:* $y = c_2(x - c_1)^2$).

Найдите решения следующих задач Коши для дифференциальных уравнений, однородных относительно функции и ее производных:

7. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

(*Ответ:* $y = e^x$).

8. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

(*Ответ:* $y = \sin x + 1$).

5.4. Дифференциальные уравнения, однородные относительно независимой переменной

К таковым относятся уравнения, которые не меняются при растяжении-сжатии одной независимой переменной$(\overline{x} = \lambda x; \overline{y} \equiv y, \lambda \neq 0)$. В общем случае они приводятся к виду

$$F(y, xy', x^2y'', ..., x^n y^{(n)}) = 0.$$

Для их решения применяется замена $z(y) = xy'$, понижающая порядок дифференциального уравнения на единицу.

Пример 1. Требуется решить дифференциальное уравнение

$$2y' - 3xy'' = 0 \tag{5.17}$$

Решение. Имеем уравнение, однородное относительно независимой переменной $(\bar{x} = \lambda x, \bar{y} \equiv y)$:

$$F(\bar{x}, y, \frac{dy}{d\bar{x}}, \frac{d^2y}{d\bar{x}^2}) \equiv 2\left(\frac{1}{\lambda}y'\right) - 3(\lambda x)\left(\frac{1}{\lambda^2}y''\right) = \frac{1}{\lambda}(2y' - 3xy'') = \frac{1}{\lambda}F(x, y, y', y'').$$

Используем замену

$$z(y) = xy' \Rightarrow y' = \frac{z(y)}{x}, y'' = \frac{(z'y')x - z}{x^2},$$

И подставим в уравнение (5.17):

$$2\left(\frac{z}{x}\right) - 3x\left(\frac{z'y'x - z}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow 2z - 3(z'y'x - z) = 0 \Rightarrow 5z - 3zz' = 0.$$

В результате получаем два решения:

A) $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y_1 = c$;

B) $5 - 3z' = 0 \Rightarrow 3z = 5y + c_1 \Rightarrow \dfrac{3dy}{5y + c_1} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \dfrac{3}{5}\ln(5y + c_1) = \ln x + \bar{c}_2$.

$$5y + c_1 = c_2 x^{5/3} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{5}\left(c_2 x^{5/3} - c_1\right).$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

9. Решите дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' + xy' = 1.$$

Подтвердите, что оно однородно относительно независимой переменной, и найдите его общее решение.

(*Ответ:* $y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + c_1 \ln|x| + c_2$).

10. Убедитесь, что уравнение

$$xyy'' = -y'(y + y'x)$$

Является однородным относительно независимой переменной и решите его с помощью соответствующей замены. Полученный результат сравните с решением, представленным в примере 5 предыдущего раздела.

5.5. Дифференциальные уравнения, однородные относительно двух переменных

Это такие дифференциальные уравнения, которые не меняются при одновременном растяжении-сжатии $(x \to \alpha x; y \to \alpha y)$. В общем случае они приводятся к виду

$$F(\frac{y}{x}, y', xy'', x^2 y''', ..., x^{n-1} y^{(n)}) = 0.$$

Такие уравнения решаются с помощью преобразования

$$w(x) = y/x \Rightarrow y = xw(x),$$

при котором порядок дифференциального уравнения не уменьшается. Однако возможно уменьшить его порядок, перейдя с помощью замены

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln|x|$$

к дифференциальному уравнению относительно $w(x(t)) = w(t)$.

Пример 1. Требуется решить дифференциальное уравнение

$$y + 2x^2 y'' = 0 \tag{5.18}$$

Решение. Нетрудно убедиться, что данное уравнение однородно относительно пары переменных, следовательно, применяем замену

$$x = e^t, y = e^t w(t) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(e^t w(t)\right) = w + \dot{w};$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(w + \dot{w})}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}(\dot{w} + \ddot{w}).$$

Подставляя их в уравнение (5.18), после сокращения на e^t получим линейное автономное дифференциальное уравнение относительно $w(t)$:

$$w + 2(\dot{w} + \ddot{w}) = 0. \tag{5.19}$$

Далее, без особого труда находим корни характеристического уравнения $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$, определяем фундаментальную систему решений $w_1(t) = e^{-t/2}\cos\frac{t}{2}, w_2(t) = e^{-t/2}\sin\frac{t}{2}$, и получаем общее решение уравнения (5.19):

$$w(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\frac{t}{2} + c_2 e^{-t/2}\sin\frac{t}{2}.$$

В результате, имеем общее решение исходного дифференциального уравнения в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^t w(t) = c_1 e^{t/2}\cos\frac{t}{2} + c_2 e^{t/2}\sin\frac{t}{2} \end{cases}.$$

Пример 2. Продемонстрируем другой способ решения дифференциального уравнения (5.17):

$$2y' - 3xy'' = 0.$$

Воспользуемся теперь тем, что (5.17) – однородное дифференциальное уравнение относительно двух переменных, то есть вид уравнения не меняется при преобразовании $(\overline{x} = \lambda x, \overline{y} = \lambda y)$. Применяем подстановку:

$$x = e^t, y = e^t w(t) \Rightarrow y' = \dot{w} + w, y'' = e^{-t}\left(\ddot{w} + \dot{w}\right).$$

И после их подстановки в исходное дифференциальное уравнение приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$3\ddot{w} + \dot{w} - 2w = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения и, соответственно, получаем его общее решение в параметрическом виде

$$k_{1,2} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ 2/3 \end{array}\right. \Rightarrow w(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x(t) = e^t \\ y(t) = xw = e^t\left(c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t/3}\right) = c_1 + c_2 e^{5t/3} \end{array}\right.,$$

или в явном виде

$$y(x) = xw = c_1 + c_2 e^{5\ln x/3} = c_1 + c_2 x^{5/3}.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите решения следующих задач Коши для дифференциальных уравнений, однородных относительно двух переменных:

11. $xy'' = y', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(*Ответ:* $y = cx^2, c \in R$).

12. $yy'' + y'^2 = y'^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

(*Ответ:* $y = x + 1$).

13. Найдите общее решение дифференциального уравнения, однородного относительно двух переменных:

$$x^2 y'' = 2y.$$

(*Ответ:* $y = c_1 x^2 + \dfrac{c_2}{x}$).

5.6. Обобщенно-однородные дифференциальные уравнения. Некоторые приложения

Дифференциальное уравнение (5.1) называется обобщенно-однородным, если найдутся такие числа k и m, что

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y', \lambda^{k-2} y'', \ldots, \lambda^{k-n} y^{(n)}) = \lambda^m F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}).$$

Замена

$$x = e^t, \quad y = u(t) e^{kt} \tag{5.20}$$

приводит исходное дифференциальное уравнение к уравнению, не содержащему новой независимой переменной t и, следовательно, допускающему понижение порядка на единицу. При этом

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}\left(ue^{kt}\right) = e^{-t}\left(\dot{u}e^{kt} + uke^{kt}\right) = \left(\dot{u} + ku\right)e^{(k-1)t},$$

и т.д.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\frac{2}{x^2} - y^2 + y' = 0.$$

$$F(x, y, y') = \frac{2}{x^2} - y^2 + y'.$$

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y') = \frac{2}{\lambda^2 x^2} - \lambda^{2k} y^2 + \lambda^{k-1} y' = \lambda^{-2}\left(\frac{2}{x^2} - \lambda^{2k+2} y^2 + \lambda^{k+1} y'\right) \Rightarrow$$

$$2k + 2 = k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1,$$

т.е. имеем обобщенно-однородное дифференциальное уравнение с показателями $m = -2, \quad k = -1$.

Замена

$$x = e^t, \quad y = u(t)e^{-t} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = e^{-2t}\left(\dot{u} - u\right) \Rightarrow e^{-2t}\left(2 - u^2 + \dot{u} - u\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u^2 + u - 2} = dt \Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+2}\right)du = dt \Rightarrow \frac{u-1}{u+2} = c_2 e^{3t} \Rightarrow$$

$$u = \frac{1 + 2c_2 e^{3t}}{1 - c_2 e^{3t}} = \frac{c_3 + 2e^{3t}}{c_3 - e^{3t}}$$

Решение в параметрическом виде:

$$x = e^t, \quad y = e^{-t}\left(\frac{c_3 + 2e^{3t}}{c_3 - e^{3t}}\right),$$

или в явном виде:

$$y(x) = \frac{c_3 + 2x^3}{\left(c_3 - x^3\right)x}.$$

Пример 2. Решите уравнение:

$$x^2 y'' = 2y.$$

$$F(\lambda x, \lambda^m y, \lambda^{m-1} y', \lambda^{m-2} y'') = \left(\lambda^2 \lambda^{m-2}\right)xy'' - \left(\lambda^m\right)2y =$$

$$= \lambda^m\left(xy'' - 2y\right) = \lambda^m F\left(x, y, y', y''\right),$$

Т.е. имеем обобщенно-однородное уравнение (m – любое число). Выберем $m = 2$, сделаем замену

$$x = e^t, \quad y = u(t)e^{mt} = ue^t \Rightarrow y' = \dot{u} + u, \quad y'' = (\ddot{u} + \dot{u})e^{-t}$$

И подставим в исходное уравнение, в результате приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{u} + \dot{u} - 2u = 0.$$

Находим корни соответствующего характеристического уравнения:

$$k^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ 1 \end{array}\right..$$

Выпишем общее решение последнего дифференциального уравнения

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t},$$

и, возвращаясь к исходным переменным, получаем искомое решение:

$$y = ue^{-t} = e^t\left(c_1 e^t + c_2 e^{-2t}\right) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}.$$

Пример 3. Решите уравнение:

$$x^2 y'' = 2y + 3x^2.$$

Убедимся сперва, что уравнение обобщенно-однородное:

$$F(\lambda x, \lambda^m y, \lambda^{m-1} y', \lambda^{m-2} y'') = \left(\lambda^2 \lambda^{m-2}\right) xy'' - \left(\lambda^m\right) 2y - \left(\lambda^2\right) 3x^2 =$$

$$= \lambda^m \left(xy'' - 2y - \lambda^{2-m} 3x^2\right),$$

Откуда видно, что нужно положить $m = 2$:

$$x = e^t, \quad y = z(t)e^{mt} = ze^{2t} \Rightarrow y' = e^t\left(\dot{z} + 2z\right), \quad y'' = \ddot{z} + 3\dot{z} + 2z.$$

Подставим в исходное уравнение, в результате подучаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами относительно $z(t)$:

$$\ddot{z} + 3\dot{z} = 3. \tag{5.21}$$

Решение последнего уравнения будем искать в виде

$$z(t) = z_0(t) + z_*(t). \tag{5.22}$$

Находим сперва общее решение однородного уравнения:

$$k^2 + 3k = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -3 \end{array}\right. \Rightarrow z_0(t) = c_1 + c_2 e^{-3t}.$$

Правая часть (5.21) имеет вид $f(t) = 3 = 3e^{0t}$, и $\alpha = 0$ есть корень характеристического уравнения кратности 1, следовательно, ищем частное решение в виде:

$$z_*(t) = at, a = ? \Rightarrow \dot{z}_* = a, \ddot{z}_* = 0,$$

И подставив их в уравнение (5.21), убеждаемся, что $a = 1$. Следовательно, общее решение уравнения (5.21), согласно (5.22), принимает вид

$$z(t) = c_1 + c_2 e^{-3t} + t,$$

В результате получаем общее решение исходного уравнения в параметрическом виде:

$$y(t) = z(t)e^{2t} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} + te^{2t}, x(t) = e^t,$$

или можем записать искомое решение в явном виде

$$t = \ln x \Rightarrow y(x) = c_1 e^{2\ln x} + c_2 e^{-\ln x} + \ln x e^{2\ln x} = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x} + x^2 \ln x.$$

Пример 4. Решите уравнение:

$$x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0. \tag{5.23}$$

Решение. Уравнение (5.23) является обобщенно-однородным:

$$F(\lambda x, \lambda^k y, \lambda^{k-1} y', \lambda^{k-2} y'') = (\lambda x)^4 \left(\lambda^{k-2} y''\right) + \left((\lambda x)\left(\lambda^{k-1} y'\right) - \left(\lambda^k y\right)\right)^3 =$$

$$= \lambda^{k+2} x^4 y'' + \lambda^{3k} (xy' - y)^3.$$

Выбираем параметр k таким образом, чтобы выполнялось условие обобщенной однородности уравнения (5.23):

$$k + 2 = 3k \Rightarrow k = 1.$$

Применяем подстановку

$$x = e^t, \quad y = z(t)e^{kt} = ze^t \Rightarrow y' = \dot{z} + z, \quad y'' = (\ddot{z} + \dot{z})e^{-t}. \tag{5.24}$$

В результате приходим к автономному дифференциальному уравнению относительно $z(t)$:

$$\ddot{z} + \dot{z} + \dot{z}^3 = 0.$$

Следующая замена:

$$\dot{z} = p(z) \Rightarrow \ddot{z} = pp', \tag{5.25}$$

приводит к дифференциальному уравнению 1-го порядка, которое без особого труда интегрируется:

$$pp' + p + p^3 = 0 \Rightarrow p = tg(c_1 - z).$$

Возвращаясь к подстановке (5.25), получаем:

$$\ln\left|\sin(c_1 - z)\right| = -t + \ln|c_2|.$$

И, наконец, с помощью подстановки (5.24) восстанавливается решение исходного уравнения (5.23):

$$\ln\left|\sin\left(c_1 - y/x\right)\right| = -\ln x + \ln\left|c_2\right| \Rightarrow x\sin\left(y/x - c_1\right) = \\ = c_2 \Rightarrow y = x\left(c_1 + \arcsin\left(c_2/x\right)\right).$$

Пример 5. Решите уравнение:

$$4x^2y^3y'' = x^2 - y^4.$$

Решение. Покажем, что оно является обобщенно-однородным уравнением:

$$F(x,y,y',y'') = 4x^2y^3y'' - x^2 + y^4;$$

$$F(\lambda x,\lambda^k y,\lambda^{k-1}y',\lambda^{k-2}y'') = 4\left(\lambda x\right)^2\left(\lambda^k y\right)^3\left(\lambda^{k-2}y''\right) - \left(\lambda x\right)^2 + \left(\lambda^k y\right)^4 =$$

$$\lambda^2\left(4x^2y^3y''\lambda^{4k-2} - x^2 + y^4\lambda^{4k-2}\right) \Rightarrow k = 1/2, m = 2$$

Применяем подстановку

$$x = e^t, \quad y = u\left(t\right)e^{t/2} \Rightarrow 4u^3u'' = 1,$$

т.е. получили дифференциальное уравнение, не содержащее переменную t. С помощью замены $u' = p\left(u\right)$ понижаем порядок на единицу:

$$4pu^3p' = 1 \Rightarrow p = \pm\sqrt{c_1 - \frac{1}{4u^2}} \Rightarrow u' = \pm\sqrt{c_1 - \frac{1}{4u^2}} \Rightarrow$$

$$x = e^t, \quad y^2 = e^t\left[c_1\left(t + c_2\right)^2 + \frac{1}{4c_1}\right]$$

получили решение в параметрическом виде.

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$x^2yy'' = \left(y - xy'\right)^2, \tag{5.26}$$

решение которого представлено в разделе 5.3, где было учтено, что уравнение (5.26) – однородное относительно переменных y, y', y''. Укажем сейчас другой метод его решения. Это уравнение – обобщенно-однородное, так как условие

$$F(\lambda x,\lambda^k y,\lambda^{k-1}y',\lambda^{k-2}y'') = \lambda^m F(x,y,y',y'')$$

выполняется при всех значениях k. Выберем для удобства $k = 1$ и сделаем замену

$$x = e^t, y = u\left(t\right)e^{kt} = u\left(t\right)e^t \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{u} + u;$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\left(\ddot{u} + \dot{u}\right).$$

Подставим последние соотношения в уравнение (5.26):

$$u\left(\ddot{u} + \dot{u}\right) = \left(u - \dot{u} - u\right)^2 \Rightarrow u\ddot{u} + u\dot{u} = \dot{u}^2, \tag{5.27}$$

в результате получили автономное уравнение относительно $u(t)$. Используем замену $\dot{u}(t) = p(u) \Rightarrow \ddot{u} = \dot{p}\dot{u} = p\dot{p}$, и подставим в (5.27):

$$u(p\dot{p}) + u \cdot p = p^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p = 0, \dot{u} = 0, u(t) = c_1 \\ u\dot{p} + u = p, \dot{p} - \dfrac{1}{u} p = -1 \end{array} \right. .$$

В первом случае получаем решение

$$x = e^t, y = c_1 e^t \Rightarrow y = c_1 x .$$

Во втором случае пришли к линейному неоднородному уравнению 1-го порядка, решение которого без труда выводится методом вариации произвольной постоянной

$$p(u) = -u \ln u + c_0 u .$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$\dot{u}(t) \equiv p(u) = -u \ln u + c_0 u \Rightarrow \frac{du}{u(\ln u - c_0)} = -dt \Rightarrow u = c_3 e^{c_2/x}, \left(c_3 \equiv e^{c_0}\right).$$

Общее решение уравнения (5.26) принимает вид:

$$y = ue^t = x\left(c_3 e^{c_2/x}\right),$$

и оно совпадает с полученным ранее решением в разделе 5.3.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

14. Подтвердите, что дифференциальное уравнение

$$\frac{2}{x^2} - y^2 + y' = 0$$

является обобщенно-однородным и найдите его решение.

(*Ответ:* $y = \dfrac{c + 2x^3}{\left(c - x^3\right)x}$).

15. Найдите решение обобщенно-однородного дифференциального уравнения

$$x^2 y'' + xy' = 1 .$$

(*Ответ:* $y = \dfrac{1}{2}\left(\ln|x|\right)^2 + c_1 \ln|x| + c_2$).

16. Найдите общее решение уравнения

$$xyy'' = -y'\left(y + y'x\right),$$

приняв его обобщенно-однородным и используя соответствующую замену. Полученный результат сравните с решением, представленным в примере 5 раздела 5.3.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Ниже рассмотрим приложения методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений к задачам математической физики.

Выпишем нелинейное уравнение в частных производных относительно $w = w(x,t)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^m \frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{5.28}$$

где a, m – постоянные числа. Уравнение (5.28) часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса, теории горения и фильтрации. Известен класс точных частных решений [3] при $m = 1; -1; -2; -4/3; -2/3$. В работе [4] показана математическая аналогия задачи определения контура свободно растекающегося пластического слоя на плоскости с задачей нелинейной теплопроводности, описываемой уравнением (5.28):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(w^2 \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \left(a = 1/2, m = 2\right). \tag{5.29}$$

Пример 9. Поиск частного решения уравнения (5.29) методом разделения переменных

$$w(x,t) = f(t)g(x)$$

приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно $f(t)$ и $g(x)$:

$$f/f' = c_0, \quad \left(g^2 g'\right)' \Big/ (2g) = c_0.$$

В общем случае решение первого уравнения выписывается:

$$2f^2\left(\alpha_1 + c_0\tau\right) = -1,$$

а второе уравнение – обобщенно-однородное ($k = m = 1$):

$$g\left(2g'^2 + gg'' - 2c_0\right) = 0,$$

которое с помощью замены $g' = p(g)$ приводится к уравнению Абеля 2-го рода

$$gpp' + 2p^2 - 2c_0 = 0. \tag{5.30}$$

Решение последнего уравнения выписывается в квадратурах с помощью эллиптических интегралов:

$$\frac{pdp}{c_0 - p^2} = \frac{2dg}{g} \Rightarrow \int \frac{g^2 dg}{\sqrt{c_0 g^4 + \alpha_2}} = \pm x + \alpha_3. \tag{5.31}$$

Пример 10. Поиск автомодельного решения уравнения (5.31) в виде бегущей волны

$$w(x,t)=\frac{1}{\gamma}g(\xi),\quad \xi=t-\gamma x. \tag{5.32}$$

Приводит к обобщенно-однородному уравнению ($k=1/2$):

$$\left(g^2g'\right)'-2g'=0,$$

или

$$g^2g''+2gg'^2-2g'=0. \tag{5.33}$$

Используя замену $g'=p(g)$, понижаем порядок уравнения, в результате имеем:

$$g^2p'+2gp-2=0,$$

т.е. получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение, решение которого найдем с помощью подстановки Бернулли $p(g)=uv$:

$$p(g)=\frac{2g+c_1}{g^2}.$$

Следовательно,

$$g'=p=\frac{2g+c_1}{g^2}\Rightarrow\frac{g^2dg}{2g+c_1}=d\xi\Rightarrow\frac{1}{4}\left(2g-c_1+\frac{c_1^2}{2g+c_1}\right)=d\xi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^2-2\tilde{c}_1g+\tilde{c}_1^2\ln\left(g+\tilde{c}_1\right)^2=4\left(t-\gamma x\right)-c_2,$$

где обозначено $\tilde{c}_1=2c_1$.

Таким образом, представленные в работе методы поиска решений нелинейных уравнений математической физики (такие как метод разделения переменных, метод введения автомодельных переменных) позволяют свести нелинейные уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (однородные, обобщенно-однородные, автономные уравнения), которые в свою очередь с помощью специальных подстановок преобразуются к дифференциальным уравнениям низкого порядка. А, следовательно, проще интегрируются и соответственно дают точные решения исходного обыкновенного дифференциального уравнения.

6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

6.1. Понятие об устойчивости решения системы дифференциальных уравнений

При использовании созданной для каждого конкретного случая математической модели всегда возникает вопрос о корректности применения математических результатов о поведении модели к реальной действительности. В самом деле, предположим, что результат сильно чувствителен к малейшему изменению модели. В таком случае сколь угодно малое изменение модели приводит к модели с совершенно другими свойствами. Такие результаты нельзя распространять на рассматриваемый реальный процесс, так как при построении модели всегда проводится некоторая идеализация, параметры в этом случае определяются лишь приближенно. Таким образом, возникает вопрос об отборе тех свойств модели процесса, которые малочувствительны к небольшому изменению модели и. следовательно, могут восприниматься как свойства реального процесса.

Рассмотрим вопрос о зависимости решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений с начальными данными от изменения начальных условий. То есть рассмотрим зависимость решения задачи Коши от начальных данных.

Пусть дана задача Коши:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \tag{6.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{6.2}$$

Если функция $f(x,t)$ непрерывна по совокупности аргументов и имеет ограниченную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ в некоторой области Ω изменения t, x содержащий точку (t_0, x_0), то решение задачи Коши $(1;2)$ существует и единственно, если изменять x_0, t_0, то будет меняться и решение. Как?

Если сколько угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменять решение, то математическая модель окажется малопригодной для описания реального процесса.

Теорема 1 (о непрерывной зависимости решений от начальных условий). *Если правая часть* $f(t,x)$ *уравнения* (1) *непрерывна по совокупности пере-*

менных и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$ *в некоторой области* G *изменения* t, x, *то решение*

$$x(t) = x(t, t_0, x_0),$$

удовлетворяет начальному условию (2), *где* $(t_0, x_0) \in G$ *непрерывно зависит от начальных данных.*

Теорема. *Пусть через точку* (t_0, x_0) *проходит решение* $x(t)$ *уравнения* (1), *определенное на отрезке* $\alpha \le t \le \beta$, $t_0 \in (\alpha;\beta)$. *Тогда,* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|\tilde{t}_0 - t_0| < \delta$, $|\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon$.

Решение $\tilde{x}(t)$ *уравнения* (1), *проходящее через точку* $(t_0; x_0)$, *существует на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и отличается там от* $x(t)$ *меньше чем на* ε

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall \quad t \in [\alpha;\beta]$$

Аналогичная теорема справедлива и для системы дифференциальных уравнений.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n),\ i = 1, 2, ..., n.$$

Замечание. Существенно, что отрезок $[\alpha;\beta]$ изменения t конечен. Во многих случаях интересна зависимость решения от начальных данных на бесконечном промежутке $t_0 \le t \le +\infty$.

Определение. Решение дифференциального уравнения называется *неограниченно продолжаемым* (вправо или влево), если его можно продолжить на всю ось $-\infty \le t < +\infty$ (или $-\infty \le t < +\infty$; $-\infty \le t < t_0$).

6.2. Устойчивость по Ляпунову. Основные понятия и определения

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ (1), где функция $f(t,x)$ определена и непрерывна для $t \in (a;+\infty)$, и x из некоторой области D, и имеет ограниченную, частную производную $\frac{\partial f}{\partial x}$. Пусть функция $x = \varphi(t)$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x\big|_{t=t_0} = \phi(t_0),\ t_0 > a.$$

Пусть далее, функция $x = x(t)$ есть решение того же уравнения, удовлетворяющее другому начальному условию $x\big|_{t=t_0} = x(t_0)$.

Предполагается, что решение $\varphi(t)$ и $x(t)$ определены для всех $t \ge t_0$ то есть неограниченно продолжаемы вправо.

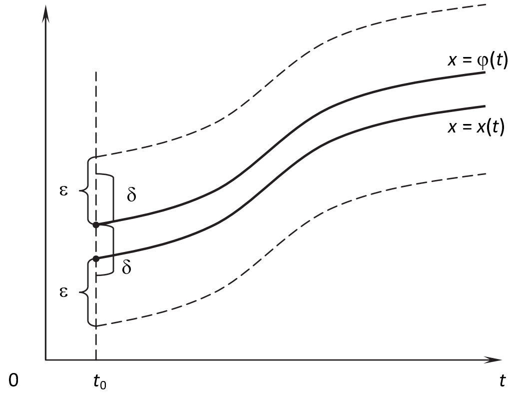

Рис. 1

Определение 1. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, при $t \to +\infty$, если для $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: для всякого решения $x = x(t)$ этого уравнения из неравенства.

$$\left|x(t_0) - \varphi(t_0)\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|x(t) - \varphi(t)\right| < \varepsilon \tag{6.3}$$

для всех $t \ge t_0$ (всегда можно считать, что $\delta \le \varepsilon$).

Это означает, что решения, близкие по начальным значениям к решению $x = \varphi(t)$, остаются близкими и при всех $t \ge t_0$.

Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) устойчиво, если, какой бы узкой ни была ε-полоска, содержащая кривую $x = \varphi(t)$, все достаточно близкие к ней в начальный момент $t = t_0$ интегральные кривые $x = x(t)$ уравнения целиком содержатся в указанной ε -полосе при $t \ge t_0$ (рис.1)

Если при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ хотя бы для одного решения $x = x(t)$ уравнения (1) неравенство (3) не выполняется, то решение $x = \varphi(t)$

этого уравнения называется неустойчивым. Неустойчивым следует считать и решение, не продолжаемое вправо при $t \to \infty$.

Определение 2. Решение $x = \varphi(t)$ уравнение (1) называется *асимптотически устойчивым*, если:

1) Решение $x = \varphi(t)$ устойчиво;

2) $\exists \delta_1 > 0 : \forall$ решения $x = x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $\left| x(t_0) - \varphi(t_0) \right| < \delta_1$, имеем, $\lim\limits_{t \to +\infty} \left| x(t) - \varphi(t) \right| = 0$.

Это означает что все решения $x = x(t)$, близкие по начальным условиям к асимптотически устойчивому решению $x = \varphi(t)$, не только остаются близкими к нему при $t \ge t_0$, но и неограниченно сближаются с ним при $t \to +\infty$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$i = 1, 2, ..., n, \tag{6.4}$$

где функции f_i определены для $a < t < +\infty$ и $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторой области D изменения $x_1, ..., x_n$ и удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Предположим, что все решения системы (4) неограниченно продолжаемы вправо при $t \ge t_0 > a$.

Определение 3. Решение $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, .., n$ системы (4) называется *устойчивым по Ляпунову* при $t \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$ той же системы, начальные значения которого удовлетворяет условию

$$\left| x_i(t_0) - \varphi_i(t) \right| < \delta,\ i = 1, 2, .., n,$$

выполняются неравенства

$$\left| x_i(t) - \varphi_i(t) \right| < \varepsilon,\ i = 1, 2, .., n, \tag{6.5}$$

для всех $t \ge t_0$, то есть близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \ge t_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, .., n$, не все неравенства (5) выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ называется неустойчивым.

Определение 4. Решение $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, .., n$, системы (4) называется *асимптотически устойчивым*, если:

1) Решение это устойчиво;

2) Существует $\delta_i > 0$ такое, что для любого решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, .., n$, системы, для которого $|x_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta_i$, $i = 1, 2, .., n$,

удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to +\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \ i = 1, 2, .., n.$$

6.3. Устойчивость автономных систем

Определение. Нормальная система дифференциальных уравнений называется *автономной*, если её правые части f_i не зависят явно от t, то есть если она имеет вид

$$\tilde{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_n), \ i = 1, 2, ..., n. \tag{6.5}$$

Это означает. что закон изменения неизвестных функций, описываемый автономной системой, не меняется со временем, как это бывает (например) с физическими законами.

Определение. Рассмотрим автономную систему (1). Пусть $(a_1, a_2, ..., a_n)$ такая совокупность чисел, что $f_i(a_1, a_2, .., a_n) .= 0 \ \forall i = 1, .., n$, тогда система функций $x_i(t) \equiv a_i$, $i = 1, 2, .., n$, будет решением системы (1).

Точку $(a_1, a_2, ..., a_n)$ фазового пространства $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют *точкой покоя* (положением равновесия) данной системы.

Рассмотрим автономную систему (1), для которой $f_i(0, 0, ...0) = 0$, $i = 1, .., n$, так что точка $x_i = 0$, $i = 1, ..., n$ есть точка покоя этой системы. Обозначим $S(R)$ шар

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2$$

и будем считать, что для рассматриваемой системы в шаре $S(R)$ выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Определение. Точка покоя $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, ..., n$, системы (1) *устойчива*, если $\forall \varepsilon > 0 (0 < \varepsilon < R)$

$\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: любая траектория системы, начинающаяся в начальный момент $t = t_0$ в точке $M_0 \in S(0)$ все время остаются в шаре $S(\varepsilon)$.

Точка покоя, асимптотически устойчива, если:

1) Она устойчива

2) $\exists\delta_1 > 0$: каждая траектория системы, начинающаяся в точке M_0 области $S(\delta_1)$ стремится к началу координат когда время *t* неограниченно растет (рис.2).

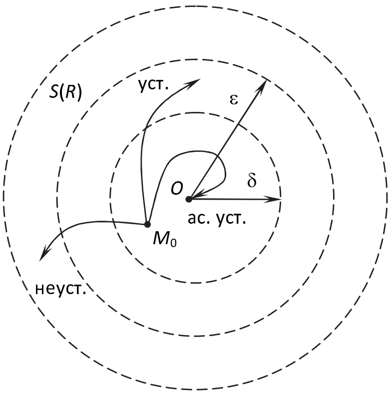

Рис. 2

6.4. Простейшие типы точек покоя

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $x = 0$, $y = 0$ системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}, \tag{6.6}$$

где $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то есть уравнения линейно независимы.

Определение. Пусть $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}$ произвольное решение системы (2). Кривую, заданную параметрический этими уравнениями, называют *фазовой траекторией*.

Решение системы (2) будем искать в виде $x = \alpha e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$.

Для определения λ получим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0; \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6.7}$$

Величины α, β с точностью до последнего множителя определяются из системы

$$(a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0,\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta = 0.$$

Замечание. Через любую точку плоскости Oxy (фазовой плоскости) проходит единственная фазовая траектория системы (2). Фазовые траектории системы (2) в окрестности точки покоя $(0;0)$ и направление движения по ним при $t \to +\infty$ определяющие устойчивость и неустойчивость системы зависят от собственных значений характеристического уравнения λ_1 и λ_2.

Возможны следующие случаи:

I. Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения (3) действительны и различны. Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \tag{6.8}$$

1. Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

Точка покоя $(0;0)$ в этом случае асимптотически устойчива так как из-за наличия множителей $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ все точки каждой траектории, находившиеся в начальный момент $t = t_0$ в произвольной δ-окрестности начала координат при достаточно большом t переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой ε-окрестности начала координат, а при $t \to +\infty$ стремятся к началу координат.

Такая фазовая траектория называется устойчивый узел.

При $C_2 = 0$ из (4) получаем

$$\begin{aligned} x &= C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ y &= C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} \end{aligned}, \text{ откуда } y = \frac{\beta_1}{\alpha_1}x$$

и траекториями являются два луча, входящие в начало координат с угловым коэффициентом $k_1 = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$.(рис.3.)

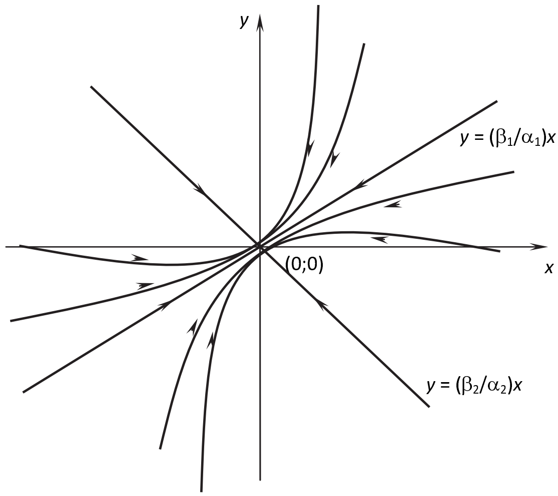

Рис. 3

Аналогично при $C_1 = 0$ получим еще два луча, входящие в начало координат с угловым коэффициентом $k_2 = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$.

Пусть теперь $C_1 \neq 0$; $C_2 \neq 0$ и для определенности $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, тогда в силу (4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{C_1\beta_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\beta_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1\alpha_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\alpha_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}} \to \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$ при $t \to +\infty$, т.е. все траектории (исключая лучи $y = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}x$) в окрестности точки $O(0;0)$ имеют направление луча $y = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}x$.

2. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Расположение траекторий такое же, как и в предыдущем случае, но точки движутся по траекториям в противоположном направлении.

Точка покоя рассматриваемого типа называется неустойчивым узлом.

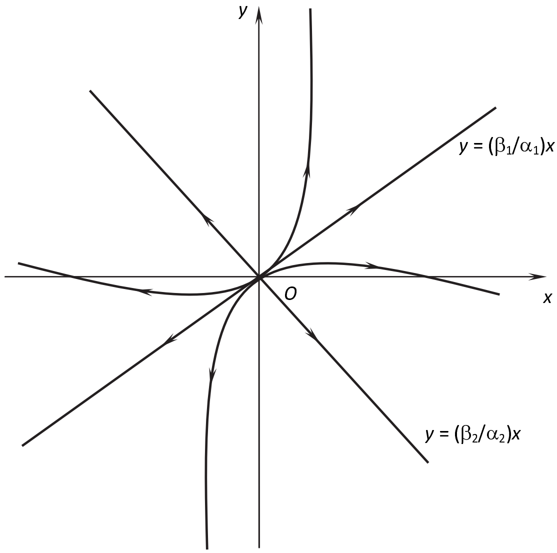

Рис. 4

Изображение такой фазовой траектории на рис.4.

Пример 1.

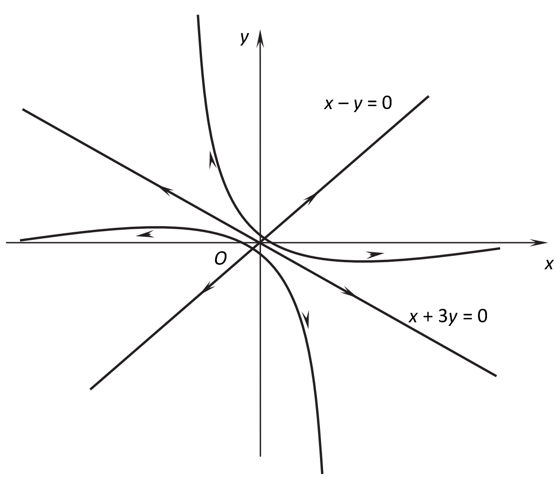

Рис. 5

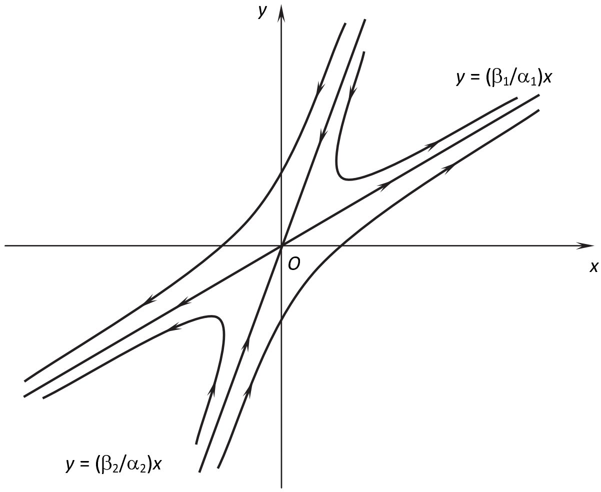

Рис. 6

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-4) - 3 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 5$$

1) Пусть $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$x + 3y = 0$$

$$\alpha_1 = -3$$

$$\beta_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$x - y = 0$$

$$\alpha_2 = 1;\ \beta_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Изображение фазовой траектории на рис.5.

3. Пусть $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$.

При $C_2 = 0$, получаем решение $\begin{matrix} x = C_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = C_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} \end{matrix}$ с возрастанием t точка этой траектории движется по лучу $y = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}x$ в направлении от начала $(\lambda_1 > 0)$, неограниченно удалялась от него. При $\tilde{N}_1 = 0$ имеем

$$x = C_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y = C_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}$$

Отсюда видно, что при возрастании t точка движется по лучу $y = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2}x$ в направлении к началу координат $(\lambda_2 < 0)$.

Если $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, то как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$ траектория покидает окрестность точки покоя. Точка покоя неустойчива. Точка покоя называется седлом. Решениями являются множество гипербол (рис.6.).

Пример 2.

$$\dot{x} = 3x - 4y$$

$$\dot{y} = x - 2y$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -1$$

1) Пусть $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$x - 4y = 0$$

$$y = \frac{1}{4}x$$

$$\beta_1 = 1$$

$$\alpha_1 = 4$$

$$C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

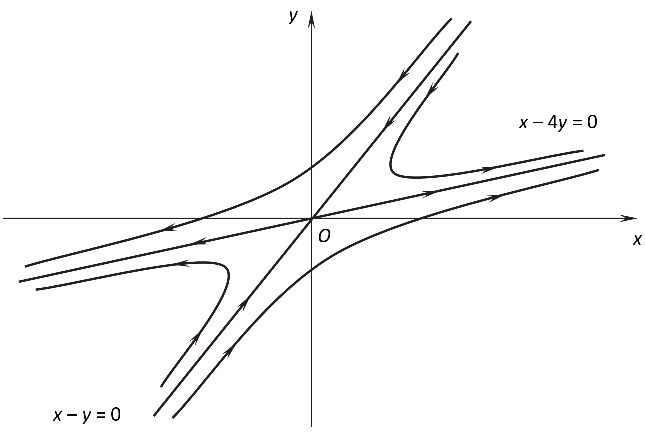

Рис. 7

2) Пусть $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$x - y = 0,$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$\beta_1 = 1$$

$$C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем вектор скорости в точке $(0;0)$

$$\begin{cases} \dot{x} = -4 \\ \dot{y} = -2 \end{cases}, \text{ (рис.7.)}$$

II. Корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения – комплексные.

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \beta \neq 0$$

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right)$$

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1^* \cos \beta t + C_2^* \sin \beta t),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, C_1^*, C_2^* линейные комбинации C_1 и C_2.

1. Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$, $\beta \neq 0$.

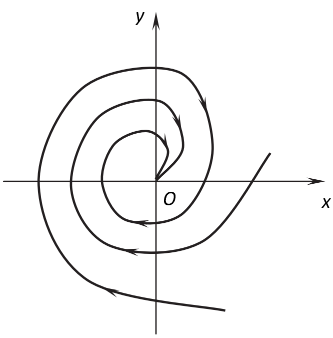

Рис. 8

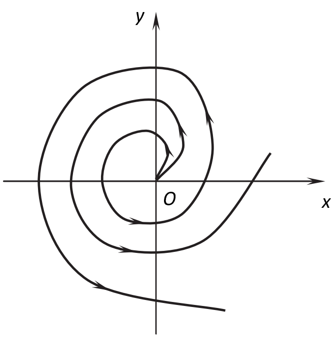

Рис. 9

Точка покоя устойчива.

$e^{\alpha t} \to 0$ при $t \to +\infty$, вторые множители – ограниченные функции.

Траектории – это спирали, которые асимптотически приближаются к началу координат (рис.8).

Точка $O(0;0)$ – асимптотически устойчива.

Точка покоя называется устойчивым фокусом.

2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$,

$$e^{\alpha t} \to \infty \text{ при } t \to \infty$$

Неустойчивый фокус (рис.9).

Пример 3.

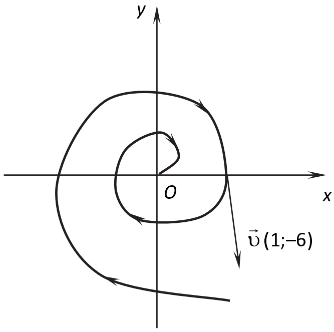

Рис.10

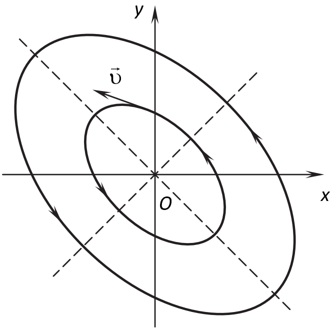

Рис.11

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$$

Найдем вектор скорости в точке (1, 0).

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = -6 \end{cases},$$

Фазовая траектории изображена на рис.10.

3. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha = 0, \quad \beta \neq 0.$

Траекториями являются замкнутые кривые, содержащие внутри себя точку покоя, центр. Центр является устойчивой точкой покоя, однако асимптотической устойчивости нет, так как решение

$$x(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t,$$

$$y(t) = C_1^* \cos \beta t + C_2^* \sin \beta t$$

не стремится к нулю при $t \to +\infty$. Для определения направления, в котором происходит движение по фазовым траекториям, надо построить в какой-нибудь точке (x, y), отличной от начала координат, вектор фазовой скорости $v(x, y) = (\dot{x}, \dot{y})$.(рис.11.)

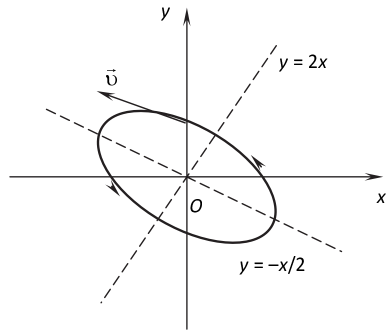

Рис.12

Пример 4.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ y = 2x + 2y. \end{cases}$$

$\lambda = \pm\sqrt{6}i$, – точка покоя неустойчива, центр (рис.12.).

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \; x = x(t), \;\; y = y(t).$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial x^2}{\partial t} + \frac{\partial y^2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2x \cdot \dot{x} + 2y \cdot \dot{y} = 2x(-2x - 5y) + 2y(2x + 2y) = 0,$$

$$-4x^2 - 10xy + 4xy + 4y^2 = 0,$$

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0.$$

Обозначим $\dfrac{x}{y} = k$. $2k^2 + 3k - 2 = 0$,

$$k = -2, \; k = \frac{1}{2}.$$

1) Пусть $k = -2$, $\dfrac{x}{y} = -2, \;\; y = -\dfrac{x}{2}.$

2) Пусть $k = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$, $y = 2x.$

В точке (0, 1) $\vec{v} = (-5, 2).$

III. $\lambda_1 = \lambda_2$.

Общее решение системы уравнений в этом случае имеет вид:

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{\lambda_1 t}$$

$$y(t) = \left(C_1^* + C_2^* t\right) e^{\lambda_1 t}$$

1. Если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, то $e^{\lambda_1 t}$, $\lambda_1 < 0$, решения $x(t)$, $y(t)$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

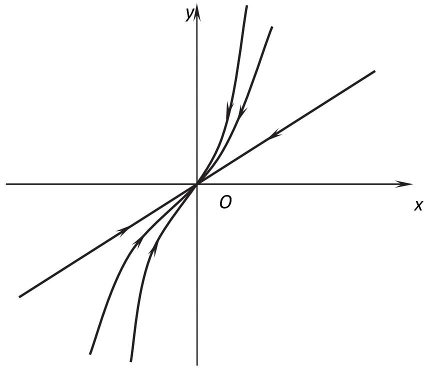

Рис. 13

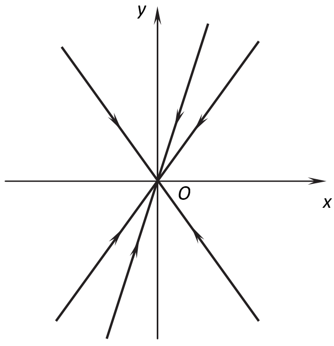

Рис. 14

Точка покоя $(0;0)$ асимптотически устойчива. Её называют устойчивым вырожденным узлом (рис.13.)

Возможет так же случай дикритического узла (рис.14.).

Пример 5

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

(дикритический узел)

Асимптотическая устойчивость.

$$\frac{y}{x} = k .$$

$\begin{cases} x = Ae^{-t} \\ y = Be^{-t} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{B}{A} = const \Rightarrow$ траекториями являются лучи, входящие в начало координат. Можно выбрать $\delta = \varepsilon$. Любая точка траектории, находящиеся в начальный момент внутри $S(\delta)$ остается все время в круге $S(\varepsilon)$ и, кроме того, неограниченно приближается к началу координат при $t \to +\infty$.

2. При $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ движение по траекториям происходит в противоположном направлении. Точка покоя называется неустойчивый вырожденный узел.

Теорема

1) *Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть, то все решения системы* (2) *асимптотически устойчивы.*

2) *Если хотя бы один корень* λ_k *характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то все решения системы неустойчивы.*

3) *Если характеристическое уравнение имеет простые корни с нулевой действительной частью, то есть чисто мнимые или равные нулю корни, а остальные корни, если они есть, имеют отрицательную действительную часть, то все решения устойчивы, а асимптотической устойчивости нет.*

Замечание. Для линейной системы все решения либо устойчивы, либо неустойчивы одновременно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МЦНМО. 2012. – 380 с.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 4-ое изд. 1971. – 576 с.
3. *Мухарлямов Р.К., Панкратьева Т.Н.* Однородные дифференциальные уравнения высших порядков. – Казань. 2007. – 51 с.
4. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по уравнениям математической физики: точные решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002. – 432 с.
5. *Боярчук А.К., Головач Г.П.* Справочное пособие по высшей математике 5. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах. – М.: Изд-во «Книжный дом «ЛИБЕРКОМ». 2013. – 254 с.
6. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Операционное исчисление, теория устойчивости. – М.: Изд-во Едиториал УРСС. 2001. – 176 с.
7. *Белов Н.А., Кадымов В.А.* О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами. – Изв. РАН. МТТ. 2011. №1. – С.46–58.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кадымов Вагид Ахмедович – выпускник МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математического факультета. Окончил кафедру теории упругости. Доктор физ.-мат. наук, профессор факультета прикладной математики и информатики МГГЭУ. Автор 140 научных работ, значительного числа научно-технических отчетов, 3 монографий, 2 авторских свидетельств. Участник многих российских и международных научных конференций. Член международных научных обществ (GAMM, EUROMECH). Область научных интересов: нелинейные задачи математической физики, разработка математических методов исследования и решения контактных задач пластических течений.

Иванова Оксана Константиновна – выпускница Московского Педагогического Университета, физико-математический факультет. Окончила кафедру математического анализа, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», автор более 40 научно-методических работ и учебных пособий для студентов и школьников. Участник российских и международных научных конференций. Член международной общественной организации «Женщины в науке и образовании». Область научных интересов: теория кратных тригонометрических рядов и интегралов Фурье.

Яновская Елена Александровна – выпускница МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математического факультета. Окончила кафедру теории упругости. Кандидат технических наук. Доцент по специальности математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», автор 90 научно-методических работ и учебных пособий для студентов и школьников. Участник российских и международных научных конференций. Член международной общественной организации «Женщины в науке и образовании». Область научных интересов: Механика деформируемого твердого тела, теория пластичности и вязкопластических течений.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
Методы решения

Учебное пособие

Кадымов Вагид Ахмедович
Иванова Оксана Константиновна
Яновская Елена Александровна

Подписано в печать 20.12.2016. Формат 60х90 1/16.
Усл.-печ. л.5,75 п.л. Уч.-изд.5,75 п.л. Бумага офсетная №1
Тираж 500 экз. Заказ № 17843

Издательство «Янус-К»
127411, Москва, Учинская ул., д. 1

Отпечатано в ООО «ИНФОРМ-СОФТ»
119034, Москва, Еропкинский пер., д. 16

ISBN 5-8037-0702-3
9785803707028