Дифференциальное исчисление

Понятие производной

ГАПОУ РК Колледж технологии и предпринимательства
Преподаватель математики Палькова М.С,

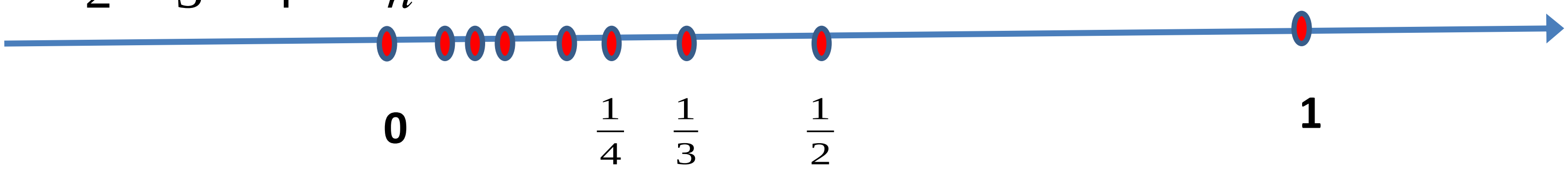
Введение

- Различные задачи естествознания, геометрии, техники приводят к одним и тем же математическим рассуждениям, благодаря которым и возникло понятие производной.
- Строгое математическое определение производной опирается на понятие предела.

Повторение. Понятие предела последовательности.

Рассмотрим последовательность:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{n};\ldots$$



Мы видим, что наши числа неограниченно приближаются к нулю (но никогда его не достигают).

Говорят, что последовательность 1/n стремится к нулю, или сходится к нулю, или что предел этой последовательности равен нулю. Записывают это так:

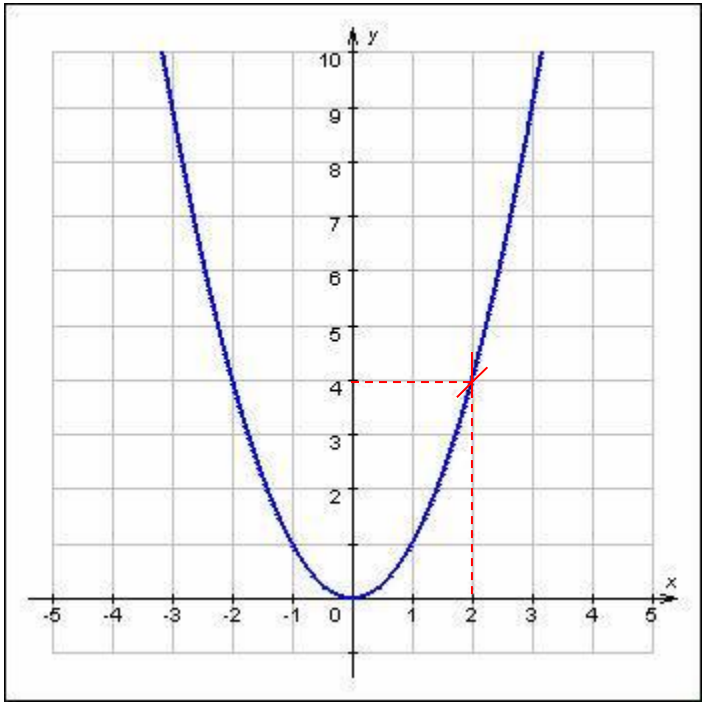
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Образно говоря, наша последовательность «втекает» в точку 0. Понятие предела как раз и отражает факт этого «втекания».

Повторение. Понятие предела функции.

Можно говорить не только о пределе последовательности, но и о пределе функции.

Напомним, что функция y = f(x) — это некоторое правило, которое позволяет для любого допустимого числа x получить единственное соответствующее ему число y. При этом число x называется аргументом функции, а число y — значением функции.



$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Мгновенная скорость

Спидометр автомобиля показывает 60 км/ч. Что это значит? Ответ простой: если автомобиль будет ехать так в течение часа, то он проедет 60 км.

Допустим, однако, что автомобиль вовсе не собирается ехать так целый час. Например, водитель разгоняет автомобиль с места, давит на газ, в какой-то момент бросает взгляд на спидометр и видит стрелку на отметке 60 км/ч. В следующий момент стрелка уползёт ещё выше. Как же понимать, что в данный момент времени скорость равна 60 км/ч?

Мгновенная скорость

Давайте выясним это на примере. Предположим, что путь s, пройденный автомобилем, зависит от времени t следующим образом: $s(t) = t^2$, где путь измеряется в метрах, а время — в секундах. То есть, при $t = 0$ путь равен нулю, к моменту времени $t = 1$ пройденный путь равен $s(1) = 1$, к моменту времени $t = 2$ путь равен $s(2) = 4$, к моменту времени $t = 3$ путь равен $s(3) = 9$, и так далее.

Видно, что идёт разгон — автомобиль набирает скорость с течением времени. Действительно: за первую секунду пройдено расстояние 1; за вторую секунду пройдено расстояние $s(2)-s(1) = 3$; за третью секунду пройдено расстояние $s(3)-s(2) = 5$, и далее по нарастающей.

Мгновенная скорость

А теперь вопрос. Пусть, например, через три секунды после начала движения наш водитель взглянул на спидометр. Что покажет стрелка? Иными словами, какова мгновенная скорость автомобиля в момент времени $t = 3$?

Просто поделить путь на время не получится: привычная формула $v = s/t$ работает только для равномерного движения (то есть когда стрелка спидометра застыла в некотором фиксированном положении). Но именно эта формула лежит в основе способа, позволяющего найти мгновенную скорость.

Идея способа такова. Отсчитаем от нашего момента $t = 3$ небольшой промежуток времени Δt, найдём путь Δs, пройденный автомобилем за этот промежуток, и поделим Δs на Δt. Чем меньше будет Δt, тем точнее мы приблизимся к искомой величине мгновенной скорости.

Мгновенная скорость

Давайте посмотрим, как эта идея реализуется.

$\Delta t = 1$: $\Delta s = s(4) - s(3) = 4^2 - 3^2 = 7$,

$\Delta s/\Delta t = 7/1 = 7$ (скорость, разумеется, измеряется в м/с).

Будем уменьшать промежуток Δt.

$\Delta t = 0{,}1$: $\Delta s = s(3{,}1) - s(3) = 3{,}1^2 - 3^2 = 0{,}61$

$\Delta s/\Delta t = 0{,}61/0{,}1 = 6{,}1$

$\Delta t = 0{,}01$: $\Delta s = s(3{,}01) - s(3) = 3{,}01^2 - 3^2 = 0{,}0601$

$\Delta s/\Delta t = 0{,}0601/0{,}01 = 6{,}01$.

$\Delta t = 0{,}001$: $\Delta s = s(3{,}001) - s(3) = 3{,}001^2 - 3^2 = 0{,}006001$

$\Delta s/\Delta t = 0{,}006001/0{,}001 = 6{,}001$

Глядя на значения, мы понимаем, что величина $\Delta s/\Delta t \to 6$.

Это означает, что мгновенная скорость автомобиля в момент времени $t = 3$ составляет 6 м/с.

Мгновенная скорость

Таким образом, при безграничном уменьшении Δt путь Δs также стремится к нулю, но отношение $\Delta s/\Delta t$ стремится к некоторому пределу v, который и называется мгновенной скоростью в данный момент времени t:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\upsilon(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость

Давайте вернёмся к нашему примеру с $s(t) = t^2$ и проделаем в общем виде те выкладки, которые выше были выполнены с числами.

$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = (t + \Delta t)^2 - t^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2 = \Delta t(2t + \Delta t)$,

и для мгновенной скорости имеем:

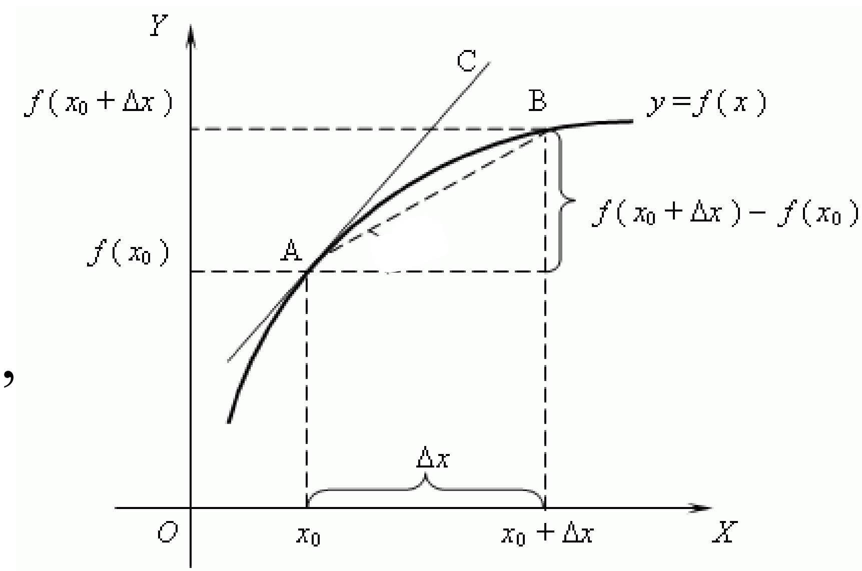
$$\upsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(2t + \Delta t\right) = 2t$$

В частности, при $t = 3$ формула даёт: $v(3) = 2 \cdot 3 = 6$, как и было получено выше.

Определение производной

Дадим аргументу x некоторое приращение, обозначаемое Δx. Попадём в точку x + Δx. Обозначим её на рисунке вместе с соответствующим значением функции f(x + Δx). Величина Δf = f(x + Δx) − f(x) называется приращением функции, которое отвечает данному приращению аргумента Δx. Приращение аргумента Δx есть абстрактный аналог промежутка времени Δt, а соответствующее приращение функции Δf — это аналог пути Δs, пройденного за время Δt.

Скорость бывает не только у автомобиля. Мы можем говорить о скорости изменения чего угодно — например, физической величины или экономического показателя. Производная как раз и служит обобщением понятия мгновенной скорости на случай абстрактных математических функций.



Производная — это в точности аналог мгновенной скорости.

Определение производной

Производная f’ (x) функции f(x) в точке x — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{\vartriangle f}{\vartriangle x} = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{f(x + \vartriangle x) - f(x)}{\vartriangle x}$$

Нахождение производной функции называется дифференцированием.

Табличные производные

f(x)=c $\boxed{c' = 0}$

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{c-c}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} 0 = 0$$

Табличные производные

f(x)=x^n

f(x)=x $\boxed{x'=1}$

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{x+\triangle x-x}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x}{\triangle x}=1$$

f(x)=x² $\boxed{\left(x^2\right)'=2x}$

$$f'(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\left(x+\triangle x\right)^2-x^2}{\triangle x}=$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{x^2+2x\triangle x+\triangle x^2-x^2}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{2x\triangle x+\triangle x^2}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\left(2x+\triangle x\right)=2x$$

Табличные производные

f(x)=xⁿ

f(x)=x³

$$\boxed{\left(x^3\right)' = 3x^2}$$

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\left(x+\triangle x\right)^3 - x^3}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \triangle x + 3x\left(\triangle x\right)^2 + \left(\triangle x\right)^3 - x^3}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x\left(3x^2 + 3x\triangle x + \triangle x^2\right)}{\triangle x} =$$

$$=3x^2$$

f(x)=x⁴

$$\boxed{\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}}$$

f(x)=x⁵

f(x)=x⁶…

Табличные производные

$$\boxed{\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Табличные производные

Тригонометрические функции

f(x)=sinx

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}\cos\frac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Аналогично

f(x)=cosx

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

?

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

?

Первый замечательный предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

Правила дифференцирования

Правила дифференцирования позволяют находить производные функций достаточно сложного вида. Идея состоит в «расщеплении» исходной функции на более простые функции, производные которых известны и играют роль «кирпичиков» при конструировании искомой производной. Зная небольшое число табличных производных и располагая правилами дифференцирования, мы можем вычислять производные огромного количества функций, не прибегая к определению производной и не вычисляя соответствующий предел.

Везде далее u и v — функции, дифференцируемые в данной точке. Мы будем активно пользоваться соотношениями:
$u(\mathrm{x} + \Delta \mathrm{x}) = u(\mathrm{x}) + \Delta u$, $v(\mathrm{x} + \Delta \mathrm{x}) = v(\mathrm{x}) + \Delta v$,
где Δu и Δv — приращения функций u и v в точке x.

0. Константа выносится за знак производной.

Если с — число, то $\boxed{(cu)' = cu'}$.

Например:

$(5x^2)' = 5(x^2)' = 10x$,

$(-3\sin x)' = -3(\sin x)' = -3\cos x$.

1. Дифференцирование суммы

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) + \Delta u + v(x) + \Delta v - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = u'(x) + v'(x)$$

2. Дифференцирование произведения

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

$$f(x) = u(x)\cdot v(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(u(x)+\Delta u\right)\cdot\left(v(x)+\Delta v\right)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x)+v(x)\Delta u+u(x)\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v(x)\cdot\Delta u+u(x)\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v\right) =$$

$$= u'(x)\cdot v(x)+u(x)v'(x)+0$$

?

Дробь $\frac{\Delta u}{\Delta v}$ в пределе даёт число *u'(x)*, а множитель Δv стремится к нулю, поскольку функция *v(x)* дифференцируема в точке *x* и потому непрерывна в этой точке. Так что третье слагаемое стремится к нулю.

3. Дифференцирование частного

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\vartriangle f = \frac{u(x+\vartriangle x)}{v(x+\vartriangle x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)+\vartriangle u}{v(x)+\vartriangle v} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)\vartriangle u - u(x)\vartriangle v}{v(x)\left(v(x)+\vartriangle v\right)}$$

$$\frac{\vartriangle f}{\vartriangle x} = \frac{v(x)\dfrac{\vartriangle u}{\vartriangle x} - u(x)\dfrac{\vartriangle v}{\vartriangle x}}{v(x)\left(v(x)+\vartriangle v\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{\vartriangle x \to 0}\frac{\vartriangle f}{\vartriangle x} = \lim_{\vartriangle x \to 0}\frac{v(x)\dfrac{\vartriangle u}{\vartriangle x} - u(x)\dfrac{\vartriangle v}{\vartriangle x}}{v(x)\left(v(x)+\vartriangle v\right)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Табличные производные

Тригонометрические функции

f(x)*=tg*x

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Аналогично

f(x)*=ctg*x

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Дифференцирование сложной функции

Что такое сложная функция?

Пусть, например, $u(x) = \sin x$ и $v(x) = \sqrt{x}$.

Давайте сначала извлекать корень из x (то есть применять к x функцию v), а потом брать синус полученного числа (то есть действовать на полученное число $v(x)$ функцией u). Тогда возникает функция: $u(v(x)) = \sin(\sqrt{x})$.

Это и есть сложная функция, или композиция функций u и v.

Идея понятна: число x поступает на вход первой функции v, а полученное число $v(x)$ поступает на вход второй функции u.

Можно, наоборот, сделать u первой функцией, а v — второй. Тогда сначала от x будет вычисляться синус, а потом из синуса извлекаться корень. Получится другая сложная функция: $v(u(x)) = \sqrt{\sin x}$.

Дифференцирование сложной функции

Дифференцирование сложной функции — это как снятие листов с кочана капусты. Сначала находим производную второй («внешней») функции и умножаем её на производную первой («внутренней») функции. Применительно к нашим примерам это выглядит так:

$$\left(\sin\sqrt{x}\right)' = \sin'\left(\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\sin' x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

4. Дифференцирование сложной функции

$$\boxed{[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)}$$

$$f(x) = u(v(x))$$

$$\vartriangle f = u(v(x+\vartriangle x)) - u(v(x)) = u(v(x)+\vartriangle v) - u(v(x))$$

$$\frac{\vartriangle f}{\vartriangle x} = \frac{u\big(v(x)+\vartriangle v\big) - u(v(x))}{\vartriangle x} = \frac{u(v(x)+\vartriangle v) - u(v(x))}{\vartriangle v} \cdot \frac{\vartriangle v}{\vartriangle x}$$

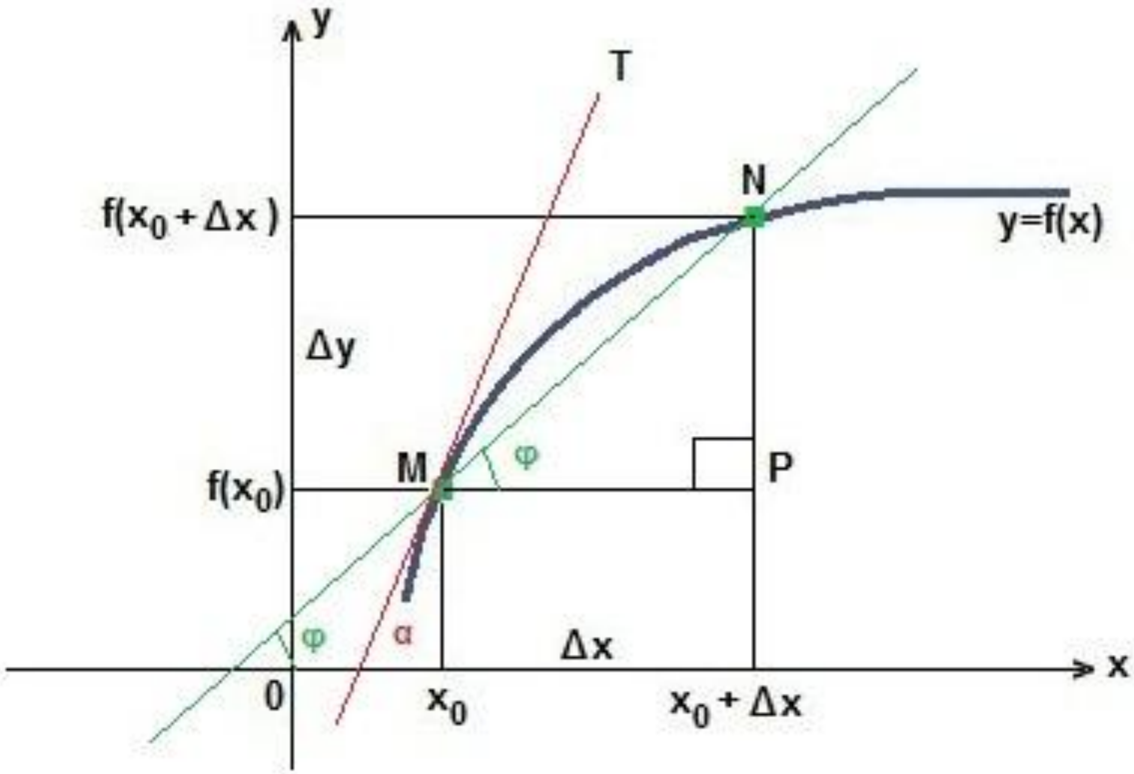
При $\vartriangle x \to 0$ имеем также $\vartriangle v \to 0$, поэтому

$$\frac{u(v(x)+\vartriangle v) - u(v(x))}{\vartriangle v} \to u'(v(x))$$

Следовательно

$$f'(x) = \lim_{\vartriangle x \to 0} \frac{u(v(x)+\vartriangle v) - u(v(x))}{\vartriangle v} \cdot \frac{\vartriangle v}{\vartriangle x} = u'(v(x))v'(x)$$

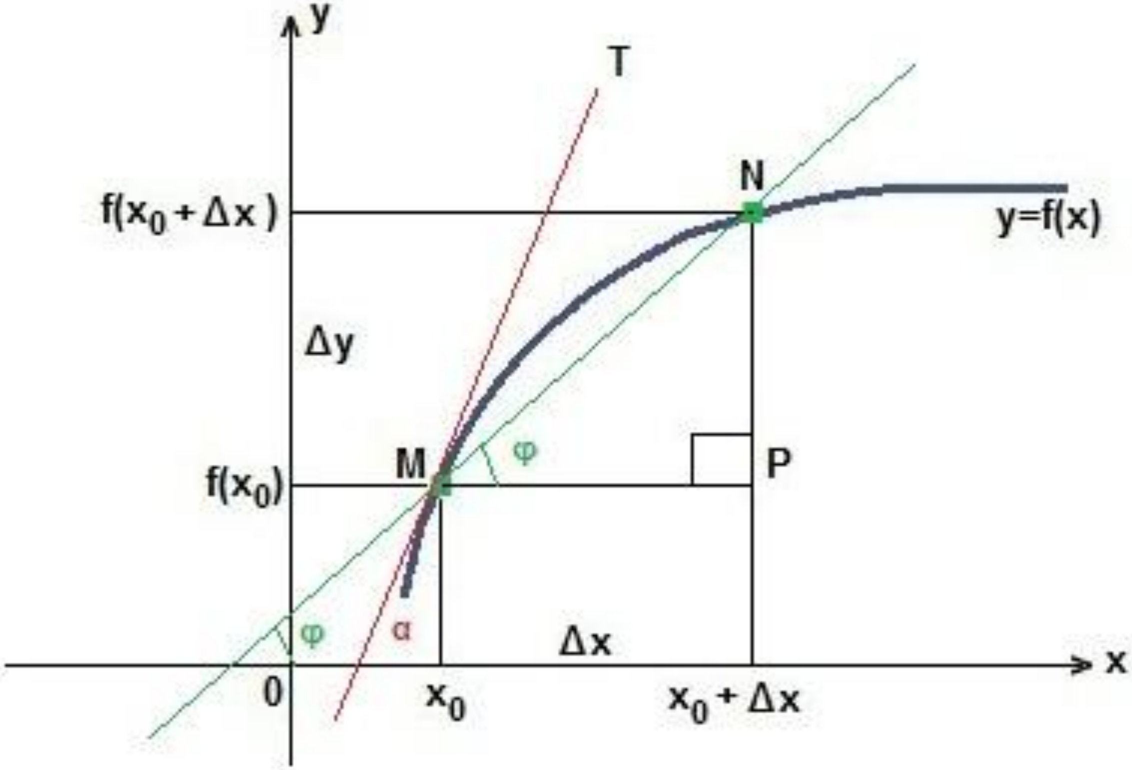
Гео ной



Рассмотрим график возрастающей функции *y=f(x)* и возьмём две близкие точки графика: точку M$(x_0\ ,f(x_0))$ и точку N$(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$.

Полагаем, что функция *f(x)* дифференцируема в точке М.

Прямая MN называется секущей. Угол наклона секущей MN к оси X обозначим φ. Напомним, что угол наклона лежит в промежутке $[0,180^0\ )$; в данном случае *α* является острым углом.

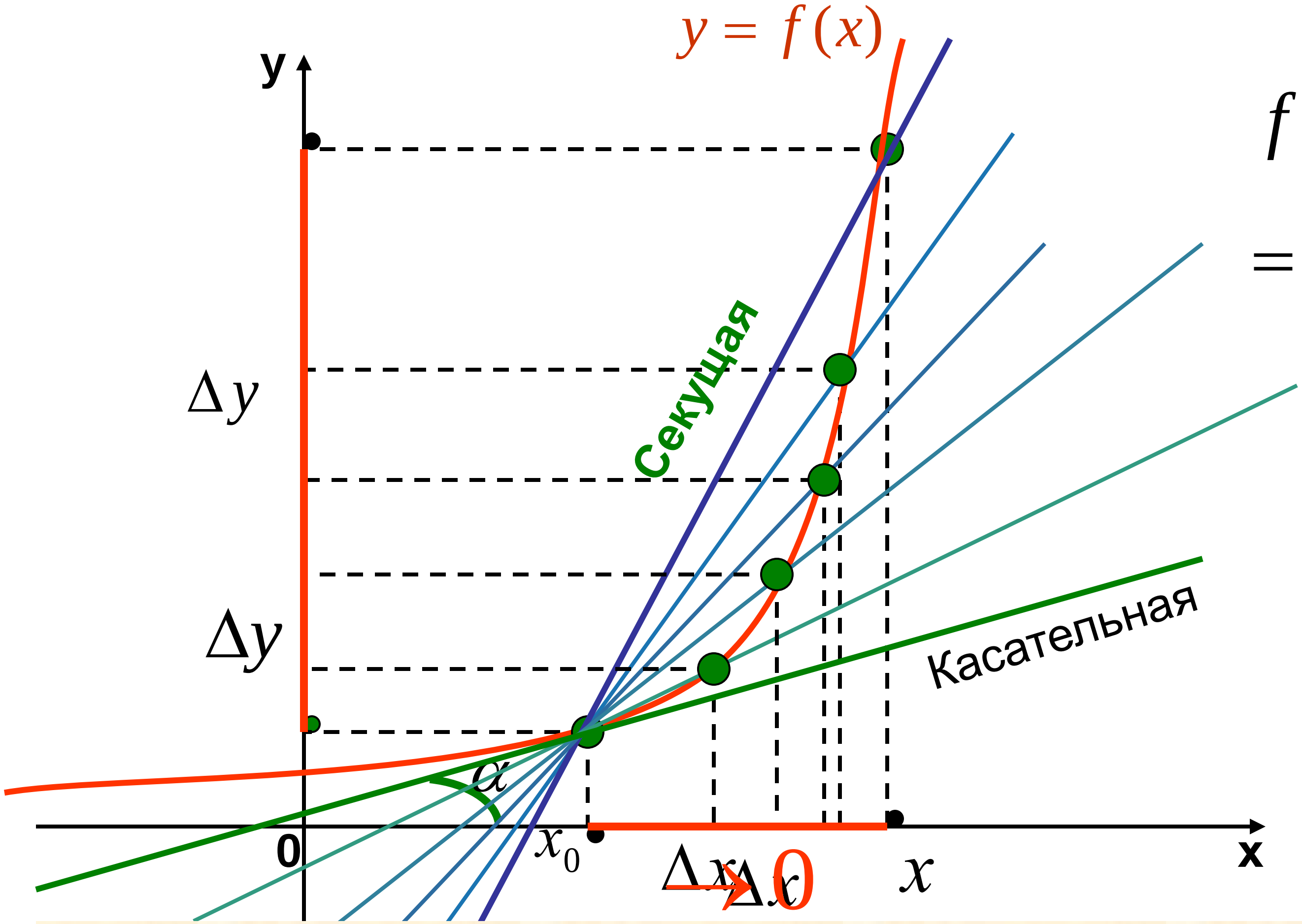


Прямые MP и NP параллельны осям X и Y соответственно. По рисунку легко видеть, что $\angle NMP = \varphi$, $MP = \Delta x$ и $NP = \Delta f$, так что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{NP}{MP} = \operatorname{tg}\varphi$$

Геометрический смысл отношения $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$

Автоматический показ. Щелкните 1 раз.



$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

k – угловой коэффициент прямой(секущей)

$$y = kx + b$$

При $\Delta x \to 0$ угловой коэффициент секущей $\to$ к угловому коэффициенту касательной.

ГАПОУ РК Колледж технологии
и предпринимательства
Преподаватель математики

Геометрический смысл производной

Производная в точке

$x = x_0$ равна

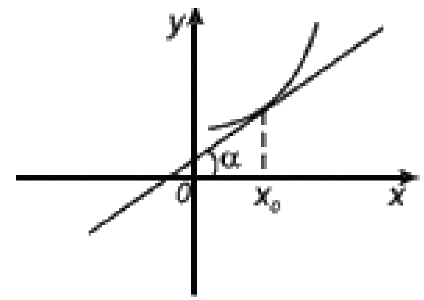
угловому коэффициенту

касательной к

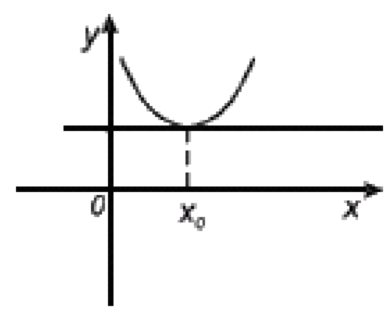
графику функции

$y = f(x)$ в этой точке.

Т.е. $$\boxed{f'(x_0) = tg\,\alpha}$$



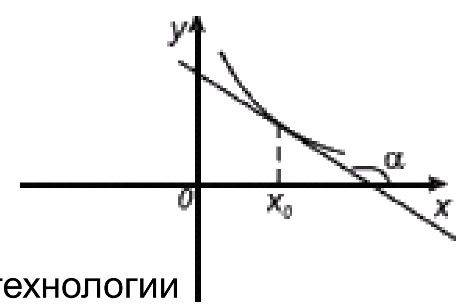
$f'(x_0) = tg\alpha > 0$



$f'(x_0) = tg\alpha = 0$

Причем, если :

1. $f'(x_0) = tg\,\alpha > 0, \text{то } \alpha - \text{острый}$
2. $f'(x_0) = tg\,\alpha = 0, \text{то } \alpha - \text{развернутый}$
3. $f'(x_0) = tg\,\alpha < 0, \text{то } \alpha - \text{тупой}$



$f'(x_0) = tg\alpha < 0$

Вывод уравнения касательной

Пусть прямая задана уравнением: $y = kx + b,\ M\left(x_o; f\left(x_o\right)\right)$

$$k = f'(x_o)$$

$$f\left(x_o\right) = kx_o + b$$

$$b = f\left(x_o\right) - kx_o$$

$$y = kx + \left(f\left(x_o\right) - kx_o\right)$$

$$y = f\left(x_o\right) + f'\left(x_o\right)\left(x - x_o\right)$$

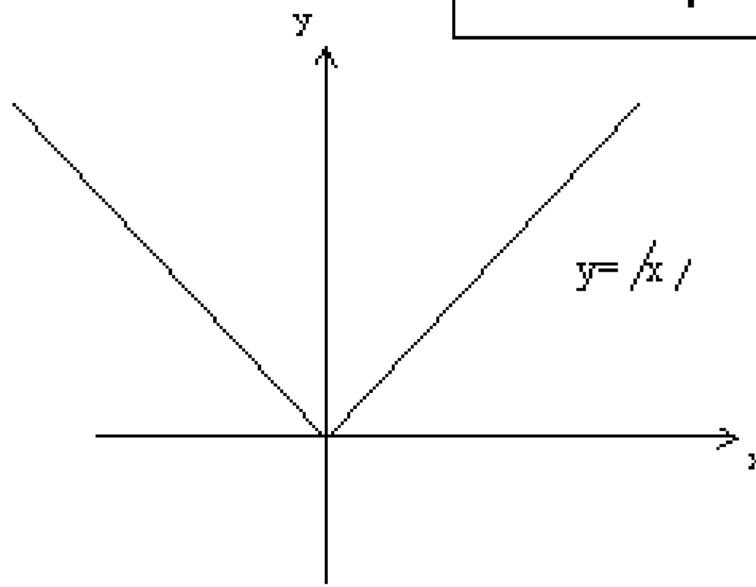
уравнение касательной к графику функции

$$y = f(x)$$

Случаи недифференцируемости

Возможна также ситуация, когда функция непрерывна в точке, но не является дифференцируемой в этой точке. Пример: функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

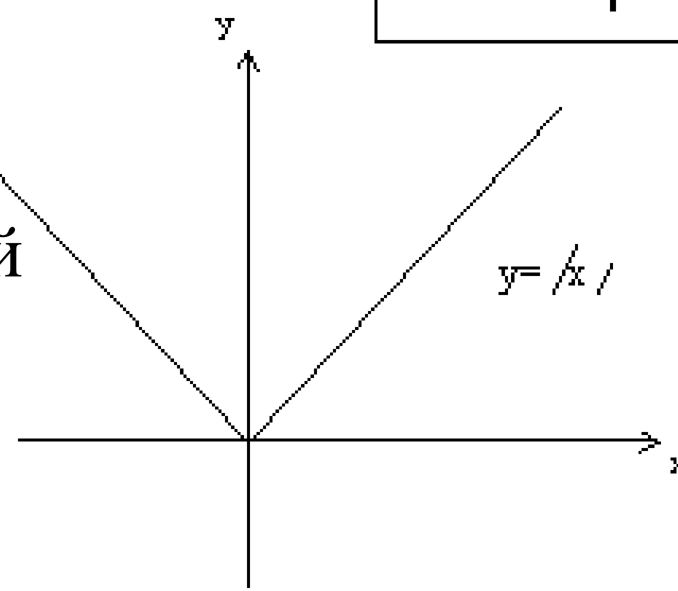
$$y = |x|$$



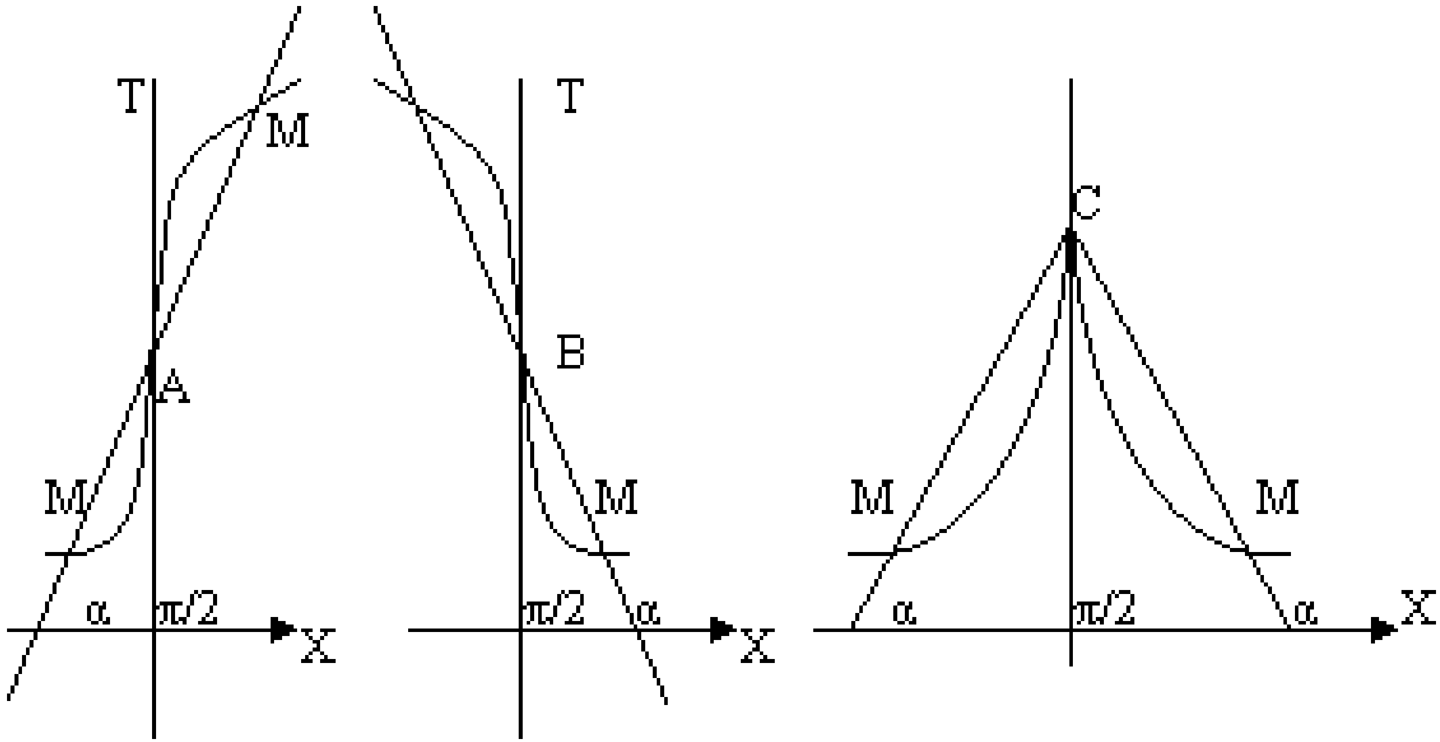
Случаи недифференцируемости

Дело в том, что в точке не существует однозначного положения касательной (как предельного положения секущей). Понятие касательной в точке теряет смысл. Следовательно, мы не можем говорить об угле наклона касательной, о тангенсе этого угла и, соответственно, о производной в точке.

$$y = |x|$$



Случаи недифференцируемости



Может случиться, что касательную к графику функции провести можно, но, тем не менее, производная функции в этой точке не существует.

В точке касательная имеется, но она перпендикулярна оси X. Угол наклона касательной $\alpha = 90^0$, поэтому $\mathrm{tg}\alpha$ не существует. Следовательно, не существует и $f'(x_0)$. Уравнение данной касательной выглядит так: $x = x_0$.

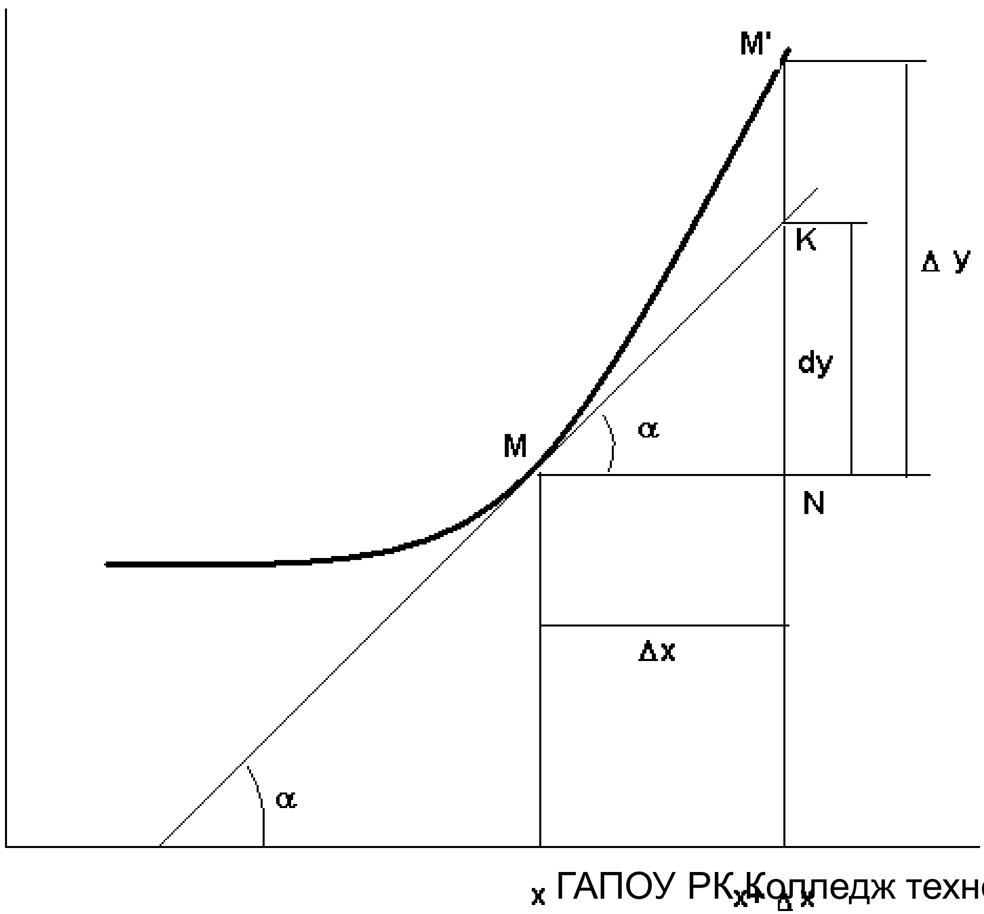
ГАПОУ РК Колледж технологии и предпринимательства
Преподаватель математики Палькова М.С,

Дифференциал функции

ГАПОУ РК Колледж технологии
и предпринимательства
Преподаватель математики

Геометрический смысл дифференциала

$$NK = MN \cdot tg\alpha = y_x' \cdot \Delta x = dy$$



Δy – приращение ординаты кривой;

dy – приращение ординаты касательной;

Дифференциал

Дифференциал ***dy*** - главная часть бесконечно малого приращения функции ***Δy***

Дифференциалом ***dx*** называют приращение **Δx**, то есть ***dx=Δx***

$$dy = y'_x \cdot dx$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx}$$

Вычисление дифференциалов

$$y = x^{\mu};\ y' = \mu \cdot x^{\mu-1};\ dy = \mu \cdot x^{\mu-1} \cdot dx$$

$$y = \sin x;\ y' = \cos x;\ dy = \cos x \cdot dx$$

$$y = \frac{1}{x};\ y' = -\frac{1}{x^2};\ dy = -\frac{1}{x^2} \cdot dx$$

Дифференциалы сложных функций

$$d(cu) = c \cdot du$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$$

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Значение функции в точке Δx, близкой к некоторой точке x_0, можно вычислить, если заменить приращение функции Δy ее дифференциалом dy

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)\Delta x$$

$$\Delta y = \Delta f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) \cong f'(x_o) \cdot \Delta x$$

Пример.
Найти приближенное значение

1) $\sqrt[3]{30}$

$x_o = 27$

$\triangle x = 3$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad f(x_o) = \sqrt[3]{27} = 3$

$$f'(x) = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(27) = \frac{1}{3\cdot 9} = \frac{1}{27} \approx 0,04$$

$\sqrt[3]{30} \approx 3 + 0,04\cdot 3 = 3,12$

2) $\sin 179^o$

$x_o = 180^0 = \pi = 3,14$

$$\triangle x = -1^o = -\frac{1}{180}\pi \approx -0,02$$

$f(x) = \sin x \quad f(x_o) = \sin 180^o = 0$

$f'(x) = \cos x \quad f'(x_o) = -1$

$\sin 179^o \approx 0 + (-1)\cdot(-0,02) = 0,02$

Исследование функций

ГАПОУ РК Колледж технологии
и предпринимательства
Преподаватель математики

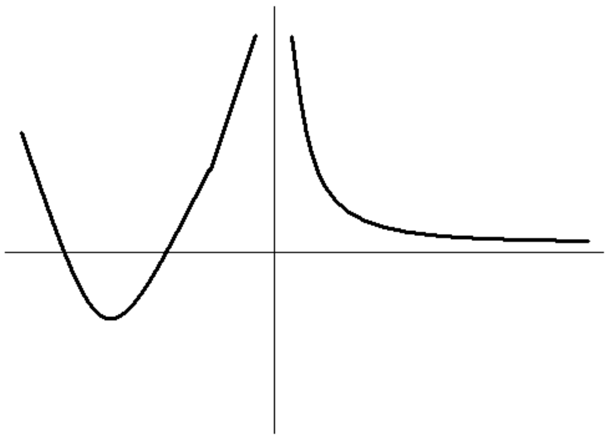
Из различных способов задания функции наибольшей наглядностью обладает графический. Это вспомогательное средство при решении разнообразных задач.

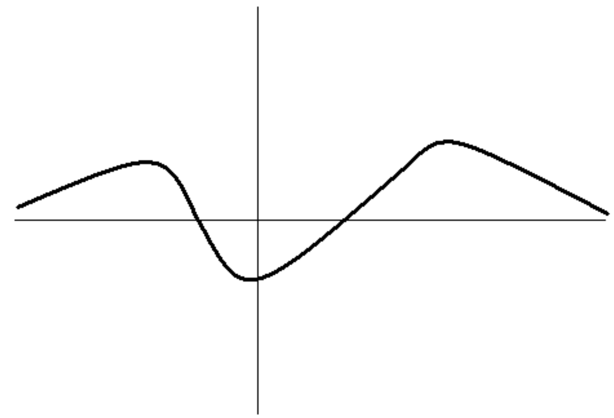
Графики функций строят по точкам. Но случайно выбранные точки (пусть даже густо) не всегда приводят к цели. График функции должен отражать такие важные особенности функции как непрерывность, дифференцируемость, возрастание, убывание, постоянство, поведение на бесконечности и т.д.

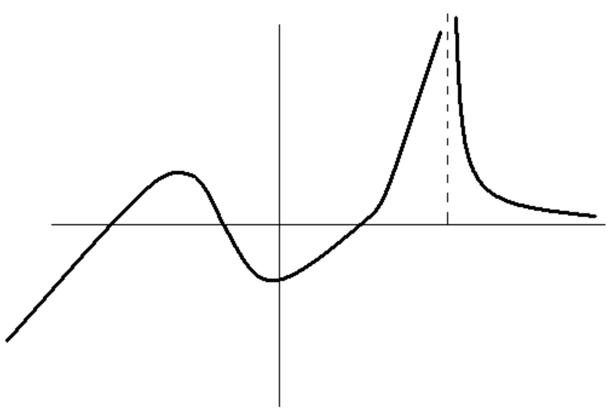
Поэтому построение графика должно вестись не по произвольным точкам, а по характерным, «опорным». К характерным точкам относятся, например, точки разрыва, точки, в которых функция не дифференцируема, «поворотные» точки, где график переходит от возрастания к убыванию.

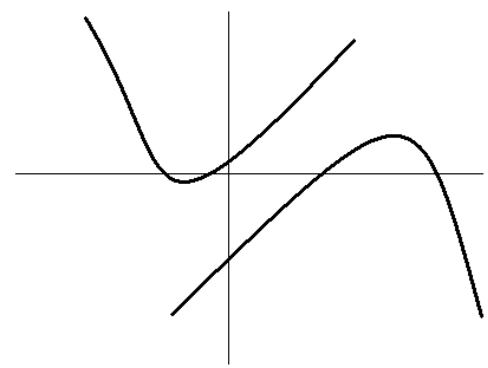
Находить характерные точки функции и строить её график нам помогут методы дифференциального исчисления.

Типичные функции









ГАПОУ РК Колледж технологии
и предпринимательства
Преподаватель математики

Основные характеристики и свойства функции *Y=f(X)*

- Область значений ***у*** и ***х***

-Постоянство или монотонность функции на отрезке
- Нули функций

- Разрывы и полюса функции

- Экстремумы, минимумы и максимумы функции

- Перегибы функции

- Асимптоты функции

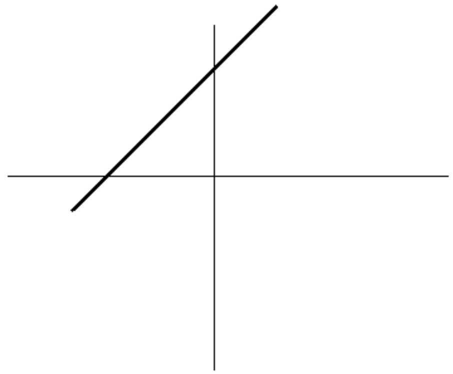
- Вогнутость и выпуклость функции

Постоянство и монотонность функции

Для того чтобы функция ***f(x)*** была постоянной на отрезке ***[a,b],*** нужно, чтобы производная этой функции была равна нулю на этом отрезке.

Для того, чтобы функция ***f(x)*** была монотонной на отрезке ***[a,b],*** нужно чтобы производная не меняла своего знака на этом отрезке и не обращалась тождественно в нуль ни в какой точке или промежутке, составляющем часть отрезка.

Нули функции: решения уравнения ***Y(X) =0***

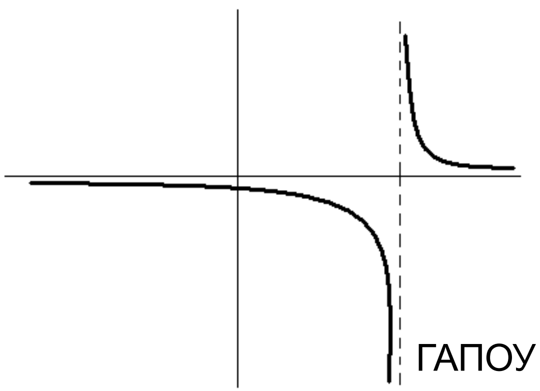


$$Y = aX + b$$

$$aX + b = 0$$

$$X_0 = -\frac{b}{a}$$

Полюса функции: значения X, при котором Y стремится к бесконечности



$$Y = \frac{k}{X - a}$$

$$\textit{\textbf{когда}}\ \ \mathrm{X} \to \mathrm{a},\ \textit{\textbf{и}}\ \mathrm{X} < \mathrm{a},\ \mathrm{Y} \to -\infty;$$

$$\textit{\textbf{когда}}\ \ \mathrm{X} \to \mathrm{a},\ \text{и}\ \mathrm{X} > \mathrm{a},\ \mathrm{Y} \to +\infty$$

Минимумы и максимумы функции

Функция f(x) имеет в точке x_0 минимум (максимум), если в некоторой окрестности этой точки ее значения больше (меньше) значения $f(x_0)$

Экстремум = минимум или максимум

Необходимое, но недостаточное условие существования экстремума: экстремум функции достигается в точках, где значение производной равно нулю.

Контр-пример: $y = x^3;\ y' = 2x^2;\ y'(x=0) = 0$

Достаточное условие:

Если первая производная в точке x_0 равна нулю, а вторая производная - больше нуля, то функция имеет минимум;

Если первая производная в точке x_0 равна нулю, а вторая производная меньше нуля, то функция имеет максимум

Правило нахождения экстремума

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = 0;\ \frac{d^2y(x_0)}{dx^2} > 0 - \textit{в точке } \mathrm{x}_0 \textit{ минимум};$$

$$\frac{\mathrm{dy}(\mathrm{x}_0)}{dx} = 0;\ \frac{d^2y(x_0)}{dx^2} < 0 - \textit{в точке } \mathrm{x}_0 \textit{ максимум}$$

Перегибы, выпуклость и вогнутость функции

Если вторая производная в точке М больше нуля, то кривая в той точке вогнутостью направлена вверх.

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0$$

Если вторая производная в точке М меньше нуля, то кривая в той точке вогнутостью направлена вниз.

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0$$

Если вторая производная в точке М равна нулю, то М – точка перегиба

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0$$

Асимптоты функции

Если расстояние δ от точки кривой до некоторой определенной прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то такая прямая называется асимптотой кривой

$$y = A\mathrm{e}^{-kx} + B$$

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = B$$