A photograph of an industrial robotic arm, painted orange, welding a white car body. The arm is positioned over a conveyor belt. In the background, other similar robotic arms are visible, suggesting a large-scale manufacturing environment. The text is overlaid on a semi-transparent white box.

# Кинематическое моделирование и управление роботизированным манипулятором с использованием дуальных кватернионов с единичным модулем



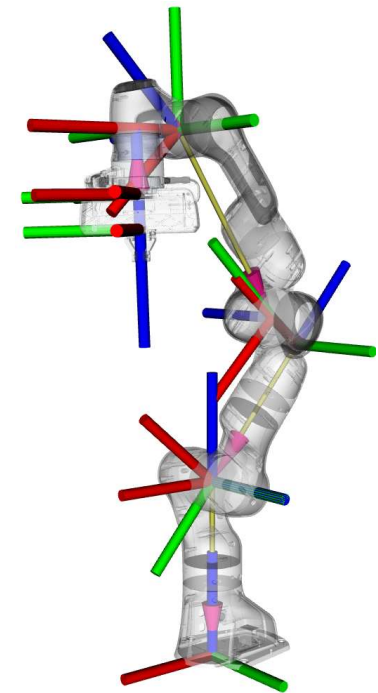
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Абдулгагиров М.М.

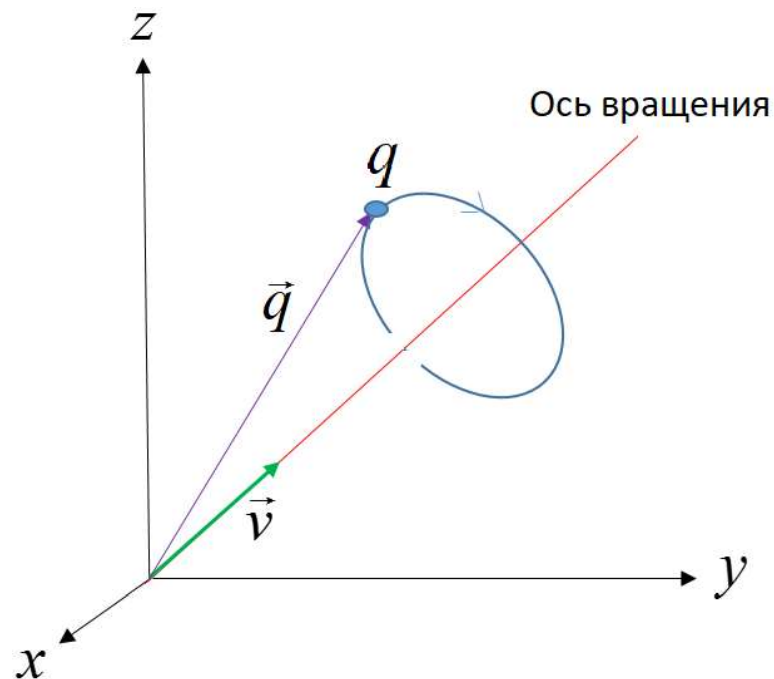
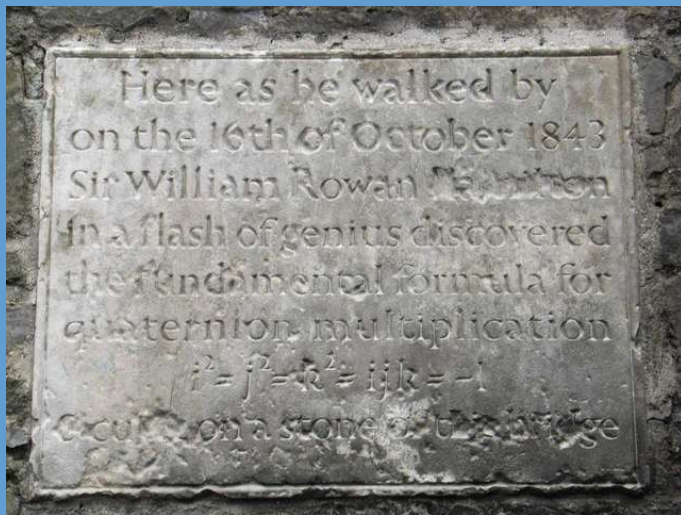
Москва 2019г.

# Введение

Кинематическое моделирование — нахождение кинематических законов движения механизма.



# Что такое Кватернион



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = w + xi + yj + zk. \text{ — кватернион}$$

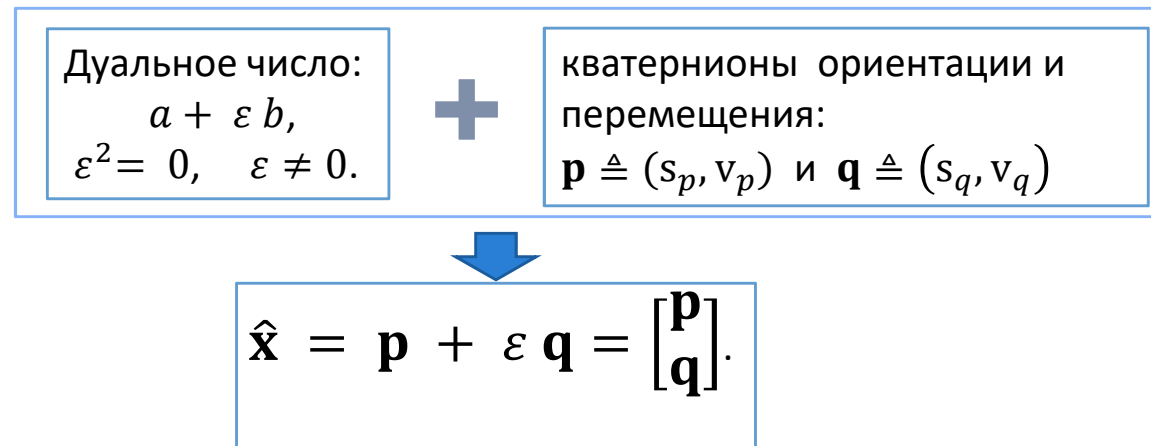
$$\text{Где } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$\mathbf{q} = \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{v} \right] \text{ — форма кватерниона}$$

для поворота точек

# Что такое дуальный кватернион

с единичным модулем

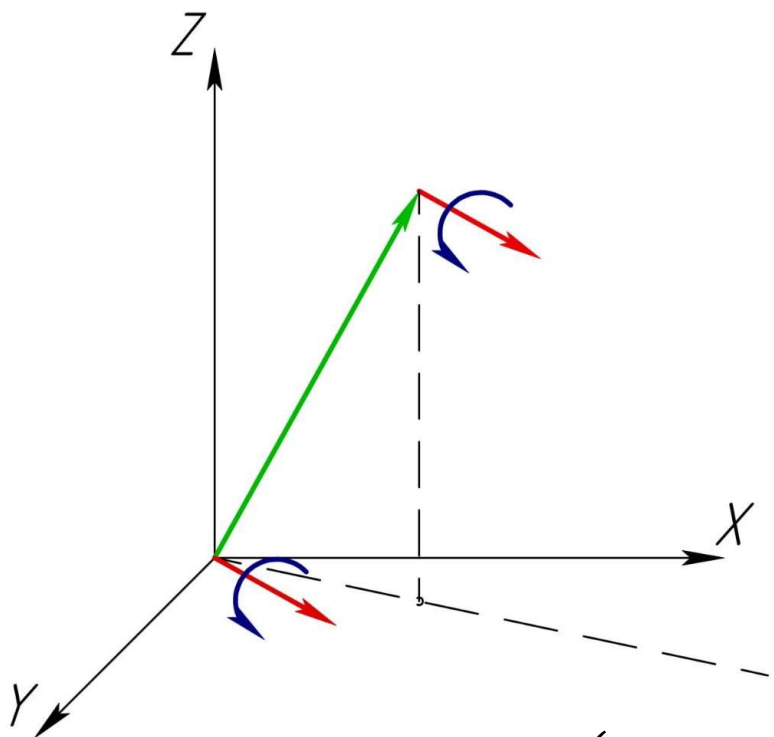


---

$$\|\hat{\mathbf{x}}\| = \sqrt{\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^*} = \sqrt{(s_p^2 + \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p, \mathbf{0}) + \varepsilon 2(s_p s_q + \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q, \mathbf{0})} \text{ — модуль кватерниона}$$

При этом если  $s_p^2 + \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p = 1, \quad 2(s_p s_q + \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_q) = 0,$  то  $\|\hat{\mathbf{x}}\| = 1.$

То есть  $\hat{\mathbf{x}}$  является дуальным кватернионом с единичным модулем



$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{p} = \mathbf{q}_R \left( 1 + \varepsilon \frac{\mathbf{t}_\Lambda}{2} \right).$$

Кватернион  $\mathbf{q}$  задаёт ориентацию.

Кватернион  $\mathbf{p}$  задаёт перемещение.

Дуальный кватернион который только вращается:

$$\hat{\mathbf{x}}_R = \mathbf{q}_R + \varepsilon(0, 0),$$

$$\mathbf{q}_R \triangleq \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{v} \right).$$

Только перемещается:

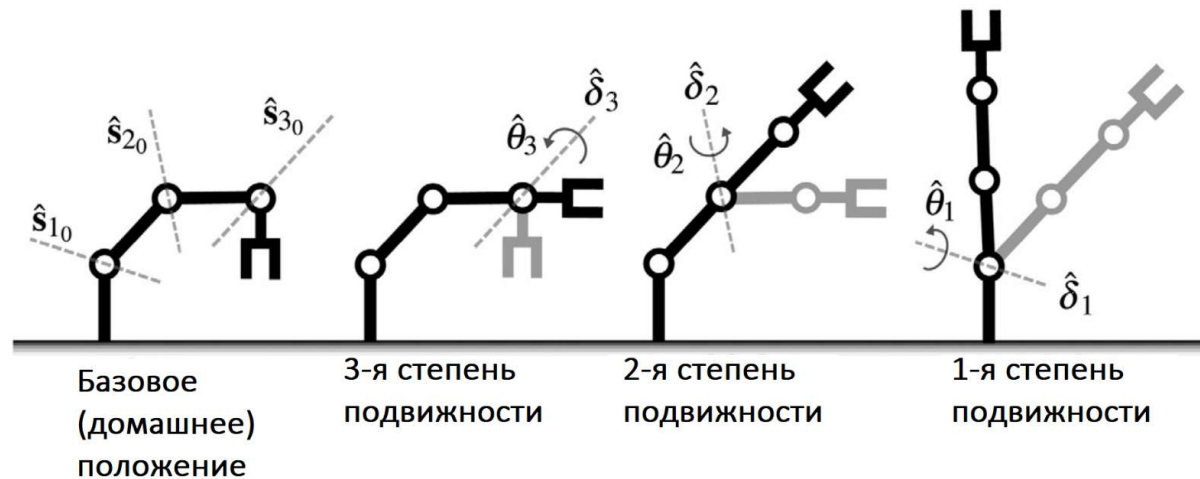
$$\hat{\mathbf{x}}_T = (1, 0) + \varepsilon \frac{\mathbf{t}_\Lambda}{2}$$

$\mathbf{t}_\Lambda = (0, \mathbf{t})$ ,  $\mathbf{t}$  — вектор перемещения

## Решение ПЗК

${}^{a_0}\hat{x}_{a_0 a} = {}^{a_0}\hat{\delta}_1 {}^{a_0}\hat{\delta}_2 {}^{a_0}\hat{\delta}_3 \dots {}^{a_0}\hat{\delta}_n$  — положение рабочего органа манипулятора

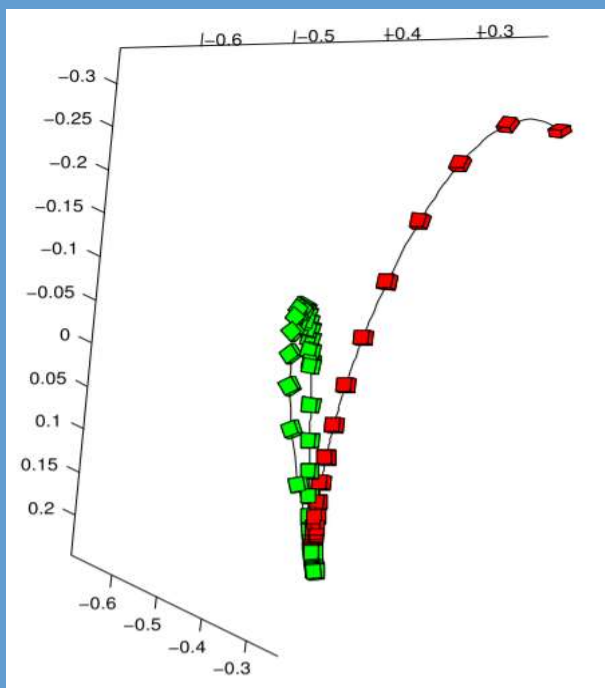
Простая иллюстрация того, как прямая задача кинематики применяется к роботу манипулятору с 3 степенями свободы.



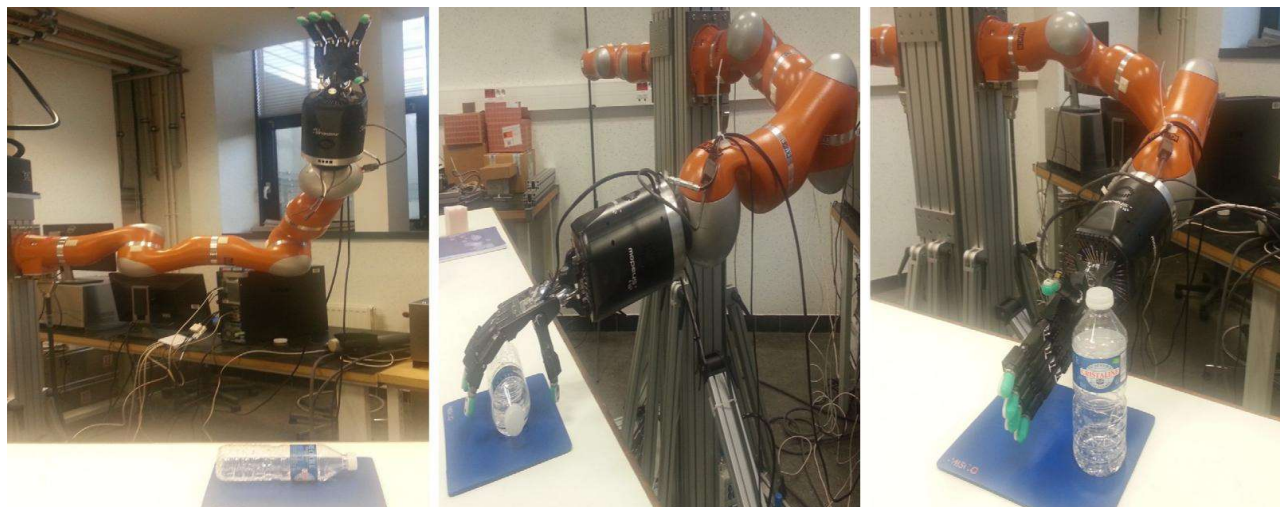
## Решение ОЗК

Решается аналогом метода градиентного спуска для дуальных кватернионов (большое и сложное решение)





Декартова траектория  
положений рабочего органа:  
захват (красный) и изменении  
положения бутылки (зеленый)



Первоначальное положение манипулятора и бутылки (слева). Рука  
достигает бутылку и захватывает её (средний). Изменяем положение  
бутылки с помощью захвата и ставим её на стол (справа).

## Экономическая часть.

Представление	необходимо памяти	Умножения	сложение
матрица однородного преобразования	12	64×	48+
ДКЕМ и с операторами Гамильтона	8	64×	56+
преобразование оси-угла	7	43×	26+
дуальные кватернионы с единичным модулем	8	48×	40+

Расходы для различных представлений преобразования

для вычисления ПЗК требуется:

$$Cost(n) = [(n - 1), (n - 1), n] \begin{bmatrix} 48 \times \\ 40 + \\ 8f \end{bmatrix}$$

Для вычисления Якобиана требуется:

$$Cost(n) = 2(n - 1) \begin{bmatrix} 48 \times \\ 40 + \end{bmatrix}$$

операций умножения  $\times$  и сложения  $+$  и блоков памяти с плавающей точкой  $f$ .  
 $n$  — число степеней подвижности



## Вывод

- Моделирование и управление роботизированным манипулятором с использованием дуальных кватернионов компактно и относительно быстро, поэтому вычисление закона управления происходит быстро
- Это представление обеспечивает преимущества при использовании для моделирования и управления роботизированной системой, которая имеет много степеней свободы
- Данное представление также обеспечивает более быстрое вычисление интерполяция по сравнению некоторыми другими методами (например на основе углов Эйлера)
- Отсутствие сингулярностей Евклидова пространства
- Интуитивно понятное представление. Всё сводится к простым операциям умножения.

## Список литературы

- [Электронный ресурс]. <http://www.euclideanspace.com/maths/algebra/realNormedAlgebra/quaternions/index.htm>
- “Доступно о кватернионах и их преимуществах” [Электронный ресурс]. <https://habr.com/ru/post/426863/>
- “Кватернионы в программировании игр.” [Электронный ресурс]. <http://wat.gamedev.ru/articles/quaternions>
- “Магия тензорной алгебры: Часть 12 — Параметры Родрига-Гамильтона в кинематике твердого тела” [Электронный ресурс]. <https://habr.com/ru/post/263533/>
- Robotics and Autonomous Systems: Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions [15 сентября 2015]
- Нелаева Екатерина И. «Развитие бикватернионной теории кинематического управления и её приложение к решению обратной задачи кинематики», Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук 2016 г