



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»**  
**(ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН»)**

---

**Институт  
автоматизации  
и робототехники**

**Кафедра  
робототехники и мехатроники**

**Методические указания к лабораторной работе №2**  
**«Создание адаптивной системы управления двухзвенным**  
**манипулятором»**  
Дисциплина: **«интеллектуальное и адаптивное управление мехатронными**  
**системами»**

**Р.В. Колесниченко, Ю.В. Илюхин**

Москва 2017 г.

**Цель:** повысить качество переходных процессов системы управления двухзвенным манипулятором при изменяющемся моменте инерции его звеньев в процессе работы.

**Задачи:** преобразовать систему управления двухзвенного манипулятора в адаптивную систему, решающую задачу идентификации изменяющегося момента инерции.

### Описание проблемы.

Изменяющийся момент инерции звеньев робота, приведённый к валу двигателя следящего привода, в различных положениях и конфигурациях может привести к ухудшению качества переходных процессов. Например, при вытягивании манипулятора или при взятии роботом груза момент инерции звеньев увеличивается. При складывании манипулятора и отпуская груза момент инерции уменьшается. В таком случае получить качественные переходные процессы и повысить робастность системы управления возможно при создании адаптивной системы управления. В лабораторной работе предлагается построение адаптивной системы замкнутого типа с сигнальной (пассивной) адаптацией при изменяющемся моменте инерции звеньев двухзвенного робота.

### Описание принципа построения адаптивной системы.

Коэффициент усиления и частота среза разомкнутой подсистемы регулирования скорости приводов робота при неизменных настройках параметров регуляторов изменяются обратно пропорционально моменту инерции звеньев. Это может привести к существенному ухудшению динамических свойств подсистемы регулирования скорости и всего следящего привода. При значительном изменении момента инерции подсистема регулирования скорости и привод могут стать неработоспособными.

Для поддержания стабильного значения частоты среза разомкнутой подсистемы регулирования скорости необходимо ввести адаптивную коррекцию, которая должна изменять коэффициент усиления регулятора скорости пропорционально моменту инерции звеньев. Этого можно добиться добавлением умножителя в прямую цепь подсистемы регулирования скорости, на один из входов которого подаётся вычисленное или измеренное корректирующее воздействие, пропорциональное моменту инерции подвижных частей. На рисунке 1 представлена структурная схема такой адаптивной системы.

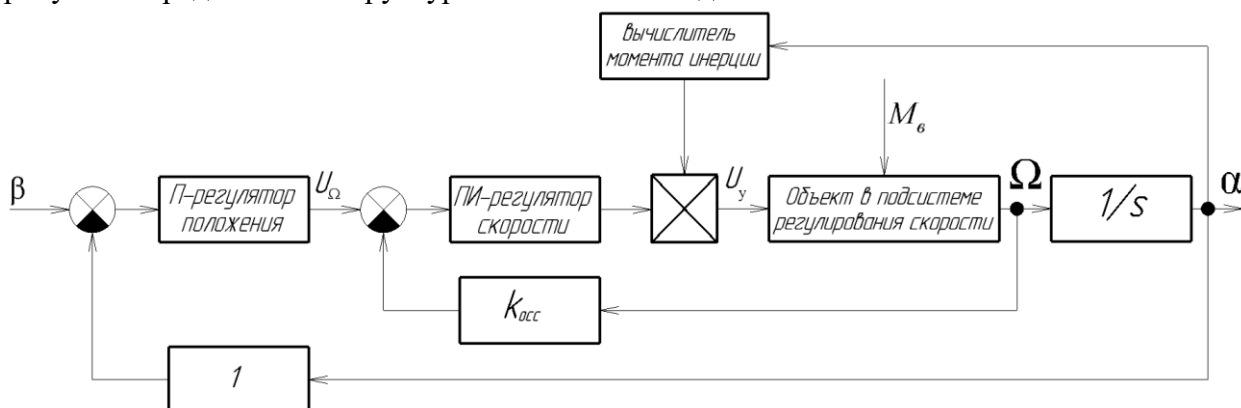


Рисунок 1. Структурная схема подсистемы регулирования скорости с адаптацией к изменению момента инерции подвижных частей.

### Динамическая модель двухзвенного манипулятора.

Двухзвенный манипулятор (рисунок 2), работающий в вертикальной плоскости, снабжён захватным устройством, способным переносить тяжёлые грузы. Предполагается, что манипулятор работает в космическом пространстве, где статические силы тяжести

звеньев и груза робота равны 0, а на приводы действуют только динамические моменты, вызванные инерционностью звеньев и груза. Но для начала рассмотрим полную динамическую модель, с учётом сил тяжести.

В работе принято допущение, что массы звеньев робота сосредоточены на их концах. Также, в рабочем пространстве манипулятора отсутствуют препятствия и на его движения не накладываются никакие ограничения.

Введены следующие переменные и параметры:  $q_1, q_2$  – обобщённые координаты звеньев робота, равные углам положения приводов звеньев робота;  $\tau_1, \tau_2$  – моменты, развиваемые приводами звеньев робота;  $K_1, K_2$  – значения кинетической энергии первого и второго звеньев робота;  $P_1, P_2$  – значения потенциальной энергии первого и второго звеньев робота;  $l_1, l_2$  – длины звеньев робота;  $l_{1цм}, l_{2цм}$  – расстояния до центров масс звеньев робота;  $m_1, m_2$  – массы звеньев робота;  $m_{гп}$  – масса груза, переносимого роботом.

Лагранжиан, представляющий собой разность кинетической и потенциальной энергий двухзвенного манипулятора

$$L = K - P = K_1 + K_2 - P_1 - P_2,$$

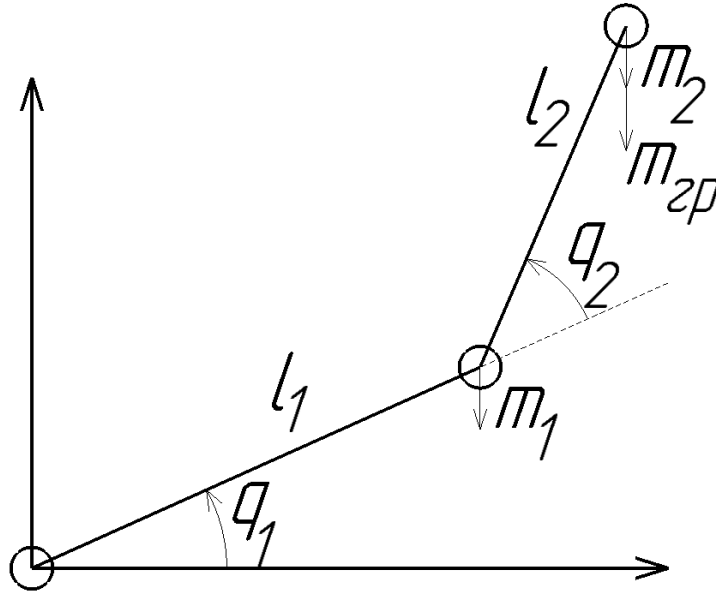


Рисунок 2. Плоский двухзвенный манипулятор.

Для звена 1:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2$$

$$P_1 = m_1 g l_1 \sin q_1$$

Для звена 2:

$$x_2 = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y_2 = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

$$\dot{x}_2 = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2)$$

$$V_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos q_2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos q_2$$

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g l_1 \sin q_1 + m_2 g l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

Уравнение Лагранжа:

$$L = K_1 + K_2 - P_1 - P_2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos q_2 - m_1 g l_1 \sin q_1 - m_2 g l_1 \sin q_1 - m_2 g l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_1 l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 l_1 l_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_1 l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos q_2 - m_2 l_1 l_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -m_1 g l_1 \cos q_1 - m_2 g l_1 \cos q_1 - m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \cos q_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{q}_1 \cos q_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \sin q_2 - m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \tau_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = \tau_2$$

Динамические свойства механической системы описываются уравнениями:

$$m_1 l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 l_1 l_2 (2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \cos q_2 - m_2 l_1 l_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2 + m_1 g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = \tau_1$$

$$m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 l_1 l_2 \ddot{q}_1 \cos q_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 + m_2 l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \sin q_2 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = \tau_2$$

После преобразования имеем:

$$[(m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2] \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = \tau_1$$

$$[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2] \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = \tau_2$$

Можно записать эти уравнения в векторной форме:

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin q_2 \\ m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Мы получили уравнение динамики манипулятора. Коротко его можно записать в следующем виде:

$$M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau,$$

где  $M(q)$  - матрица инерционных характеристик;  $V(q, \dot{q})$  - вектор сил Кориолиса / центробежных сил;  $G(q)$  - вектор гравитации. Элементы, стоящие на главной диагонали матрицы инерционных характеристик, равны моментам инерции звеньев манипулятора.

В данной лабораторной работе  $G(q) = 0$ . Также примем следующие допущения:

$$V(q, \dot{q}) = 0, M(q) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в лабораторной работе уравнение динамики манипулятора следующее:

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos q_2 & 0 \\ 0 & m_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos q_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2l_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

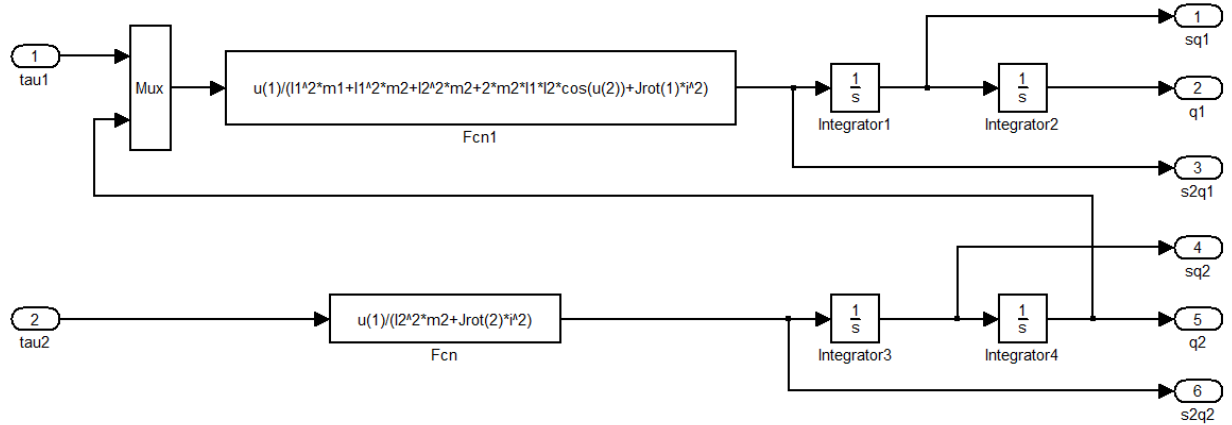


Рисунок 3. Упрощённая динамическая модель двухзвенного манипулятора.

На рисунке 3 представлена упрощённая динамическая модель двухзвенного манипулятора с учётом приведённых моментов инерции роторов двигателей к выходным валам приводов. Приведение осуществляется по следующей формуле, которая выводится через выражение кинетической энергии двигателя:

$$J_{np} = \eta \cdot i^2 \cdot J_{rot}$$

где  $\eta$  - КПД механической передачи приводов (в лабораторной работе = 1),  $i$  - передаточные отношения редукторов,  $J_{rot}$  - момент инерции ротора двигателя,  $J_{np}$  - момент инерции ротора двигателя, приведённый к выходному валу привода.

Таким образом, уравнение динамики манипулятора следующее:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2 \cos q_2 + J_{rot}(1)i^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2l_2^2 + J_{rot}(2)i^2} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{J(1) + J_{rot}(1)i^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J(2) + J_{rot}(2)i^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

### Решение прямой задачи кинематики (ПЗК) двухзвенного робота.

В лабораторной работе пренебрегаем ориентацией схвата. В таком случае координаты положения схвата могут быть выражены через обобщённые координаты звеньев робота по следующим формулам:

$$x_2 = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y_2 = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

### Решение обратной задачи кинематики (ОЗК) двухзвенного робота.

При заданном положении схвата робота обобщённые координаты можно найти по формуле:

$$x_2^2 + y_2^2 = l_1^2 \cos^2 q_1 + l_2^2 \cos^2(q_1 + q_2) + 2l_1 l_2 \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) +$$

$$l_1^2 \sin^2 q_1 + l_2^2 \sin^2(q_1 + q_2) + 2l_1 l_2 \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) =$$

$$= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 [\cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) + \sin(q_1) \sin(q_1 + q_2)] = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(q_2)$$

Поэтому

$$\cos(q_2) = \frac{x_2^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

Функция  $\arccos$  при небольших углах выдаёт неточные значения, поэтому целесообразно свести выражение к функции  $\text{atan2}$ :

$$\sin q_2 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2}$$

$$q_2 = \text{atan2}(\sin q_2, \cos q_2) = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_2}, \cos q_2) =$$

$$= \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - \left(\frac{x_2^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)^2}, \frac{x_2^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2})$$

Для упрощения в данном случае будем рассматривать только конфигурации при

$$q_2 = \text{atan2}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{x_2^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)^2}, \frac{x_2^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right)$$

Функция  $\text{atan2}$  определяется следующим образом:

$$\text{atan2}(a, b) = \begin{cases} \arctg \frac{a}{b}, b > 0, \\ \arctg \frac{a}{b} + \pi, b < 0, a > 0, & -\pi \leq \text{atan2}(a, b) \leq \pi \\ \arctg \frac{a}{b} - \pi, b < 0, a < 0; \end{cases}$$

Для нахождения  $q_1$  осуществим замену переменных (по рисунку 4):

$$k_1 = l_1 + l_2 \cos q_2$$

$$x_2 = k_1 \cos q_1 - k_2 \sin q_1$$

$$k_2 = l_2 \sin q_2$$

$$y_2 = k_1 \sin q_1 + k_2 \cos q_1$$

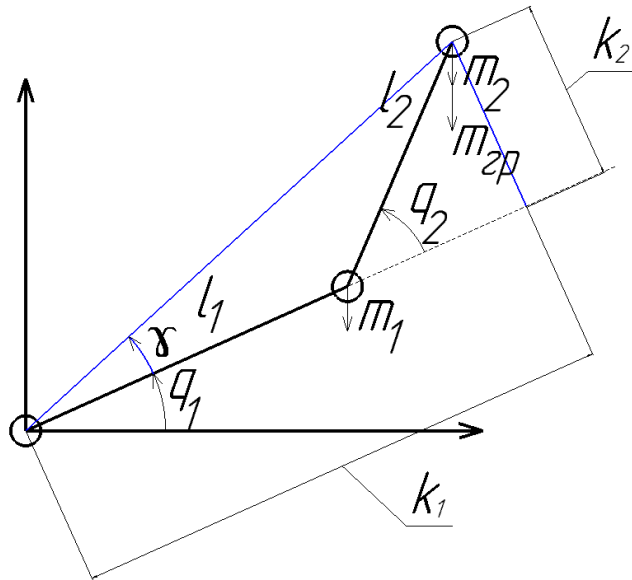


Рисунок 4. Решение ОЗК двухзвенного манипулятора.

Выразим  $k_1$  и  $k_2$  через угол  $\gamma$  :

$$r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

$$\gamma = \text{atan2}(k_2, k_1)$$

$$k_1 = r \cos \gamma$$

$$k_2 = r \sin \gamma$$

$$x_2 = r \cos \gamma \cos q_1 - r \sin \gamma \sin q_1 \quad \frac{x_2}{r} = \cos \gamma \cos q_1 - \sin \gamma \sin q_1 \quad \frac{x_2}{r} = \cos(\gamma + q_1)$$

$$y_2 = r \cos \gamma \sin q_1 + r \sin \gamma \cos q_1 \quad \frac{y_2}{r} = \cos \gamma \sin q_1 + \sin \gamma \cos q_1 \quad \frac{y_2}{r} = \sin(\gamma + q_1)$$

Применяя функцию  $\text{atan2}$ , получим:

$$\gamma + q_1 = \text{atan2}(y_2, x_2)$$

$$q_1 = \text{atan2}(y_2, x_2) - \text{atan2}(k_2, k_1) = \text{atan2}(y_2, x_2) - \text{atan2}(l_2 \sin q_2, l_1 + l_2 \cos q_2)$$

## Ход выполнения работы.

- 1) Запустите *Matlab* и *Simulink*. Запустите модель *Robot 2 links*. Изучите структуру системы управления.
- 2) Запустите файл *Robot 2 links params* в рабочем пространстве *Matlab*. Изучите структуру и команды, приведённые в файле.
- 3) **Подберите регуляторы приводов робота без груза ( $m_{load}=0$ )** так, чтобы выполнялись условия:

- перерегулирование отсутствует;
- колебательность отсутствует;
- длительность переходного процесса минимальна;
- установившаяся ошибка равна 0.

Подберите коэффициенты ПИ-регулятора скорости (коэффициенты  $K_i = [K_i(1) \ K_i(2)]$ ,  $K_p = [K_p(1) \ K_p(2)]$ ) и П-регулятора положения (коэффициент  $K_{pp} = [K_{pp}(1) \ K_{pp}(2)]$ ) при среднем значении момента инерции звена робота (при  $\cos q_2 = 0$ ).

- 4) После настройки регуляторов проведите эксперименты при разных задающих воздействиях робота и заполните таблицу 1. В данном случае момент инерции первого привода  $J_1$  меняется из-за наличия косинуса в матрице инерционных характеристик.

Таблица 1. Отработка приводами робота задающих воздействий без груза и с грузом.

№ при $m_{load}=0$ кг			Привод первого звена			Привод второго звена		
	х, м	у, м	$T_{s, (длит-ть \ ПП), \ c}$	Перерегулирование, м	$\epsilon_{уст, \ M}$	$T_{s, (длит-ть \ ПП), \ c}$	Перерегулирование, м	$\epsilon_{уст, \ M}$
1	0.2	0.3						
2	0	1						
3	0.2	0						
4	-1	0						
5	-0.7069	-0.7069						
$m_{load}=45$ кг								
1								
2								

- 5) **Добавьте груз в схват робота,  $m_{load}=45$  кг.** При тех же значениях коэффициентов усиления регуляторов наблюдайте переходные процессы. Из таблицы 1 выберите 2 набора координат х и у, при которых качество переходных процессов наихудшее, и для них заполните последние 2 строки таблицы 1.
- 6) **Преобразуйте систему управления робота в адаптивную систему, учитывающую изменение момента инерции в зависимости от массы груза и положения звеньев манипулятора.**

Предполагается, что нам заранее известны длины и массы звеньев, примерная масса груза, переносимого роботом, моменты инерции роторов двигателей и передаточные отношения редукторов. На основе этих данных можно решить задачу идентификации момента инерции (см. уравнения 1, 2), изменяющегося в зависимости от массы груза и угла положения звеньев робота.

Структура адаптивной системы управления приведена на рисунке 1. Для её создания выполните следующие действия:

- после регулятора скорости вставьте умножитель, на который подаются идентифицированные (рассчитанные) значения момента инерции.



- подстройте коэффициент усиления пропорциональной составляющей ПИ-регулятора скорости, разделив его на среднее значение момента инерции звена робота (при  $\cos q_2 = 0$ ).

7) После создания структуры адаптивной системы и подстройки регулятора скорости проведите эксперименты при разных задающих воздействиях робота и заполните таблицу 2.

Таблица 2. Отработка приводами робота задающих воздействий при адаптивной системе управления.

№ при $m_{load}=45$ кг			Привод первого звена			Привод второго звена		
	х, м	у, м	$T_{s,}$ (длит-ть ПП), с	Перерегу-лирование, м	$\epsilon_{уст,}$ М	$T_{s,}$ (длит-ть ПП), с	Перерегу-лирование, м	$\epsilon_{уст,}$ М
1	0.2	0.3						
2	0	1						
3	0.2	0						
4	-1	0						
5	-0.7069	-0.7069						

8) Предположим, что при решении задачи идентификации момента инерции ошибка идентификации составляет  $\pm 20\%$ . Это может быть вызвано неточными знаниями длин и массы звеньев, примерной массы груза, переносимого роботом.

Для моделирования такой ситуации умножьте идентифицированный момент инерции на коэффициенты 0.8 и 1.2. Наблюдайте переходные процессы. Из таблицы 2 выберите 2 набора координат х и у, при которых качество переходных процессов наихудшее, и для них заполните последние 2 строки таблицы 3.

Таблица 3. Отработка приводами робота задающих воздействий при адаптивной системе управления.

№ при $m_{load}=45$ кг			Привод первого звена			Привод второго звена		
	х, м	у, м	$T_{s,}$ (длит-ть ПП), с	Перерегу-лирование, м	$\epsilon_{уст,}$ М	$T_{s,}$ (длит-ть ПП), с	Перерегу-лирование, м	$\epsilon_{уст,}$ М
$k = 1.2$								
1								
2								
$k = 0.8$								
1								
2								

9) Сделайте вывод о том, удалось ли повысить качество переходных процессов при изменяющемся моменте инерции звеньев двухзвенного робота с помощью адаптивной системы управления.

10) Сделайте вывод о том, как сильно влияют погрешности определения длин, массы звеньев и груза, переносимого роботом, на качества переходных процессов адаптивной системы.

### Контрольные вопросы.

- 1) Поясните структуру адаптивной системы управления.
- 2) Поясните структуру динамической модели робота.
- 3) Что вызывает изменение момента инерции звеньев робота?
- 4) Объясните, почему для создания адаптивной системы необходимо изменить коэффициент усиления пропорциональной составляющей ПИ-регулятора скорости?