Мобильная робототехника

Фильтр Калмана

СТАНКИН
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

РиМ
КАФЕДРА РОБОТОТЕХНИКИ И МЕХАТРОНИКИ

Фильтр Байеса

$$bel(x_t) = \eta\rho(z_t|x_t)\int p(x_t|x_{t-1,}u_t)bel(x_{t-1})dx_{t-1}$$

- Экстраполяция :

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|u_t, x_{t-1})bel(x_{t-1})dx_{t-1}$$

- Коррекция:

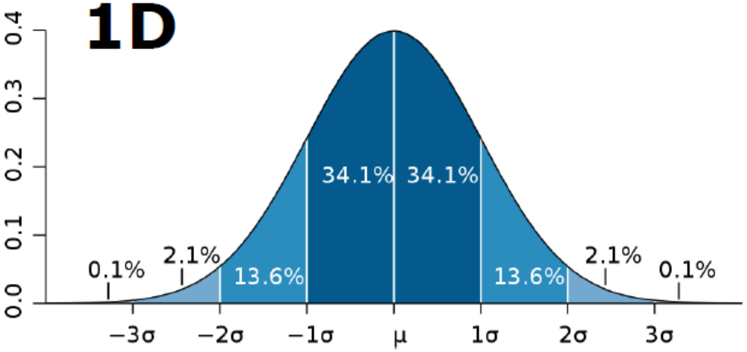
$$bel(x_t) = \eta\rho(z_t|x_t)\overline{bel}(x_t)$$

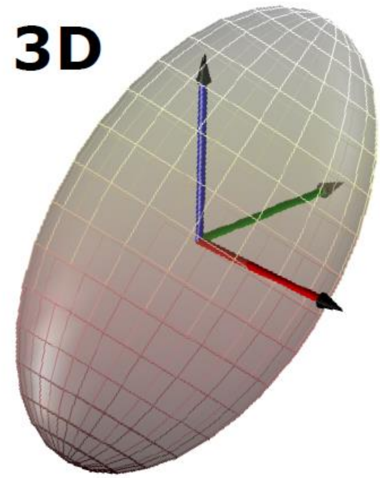
Фильтр Калмана

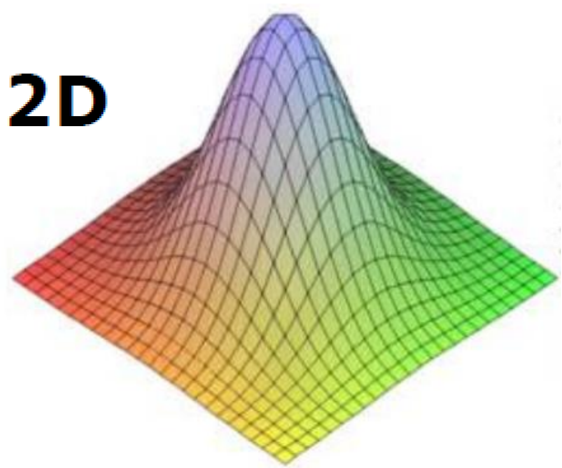
- Это фильтр Байеса с Гауссовым (нормальным) распределением
- Оптимальное решение для линейных систем с нормальными распределениями
- Очень широкое распространение (экономика, социология, робототехника и многое другое)

Нормальное распределение

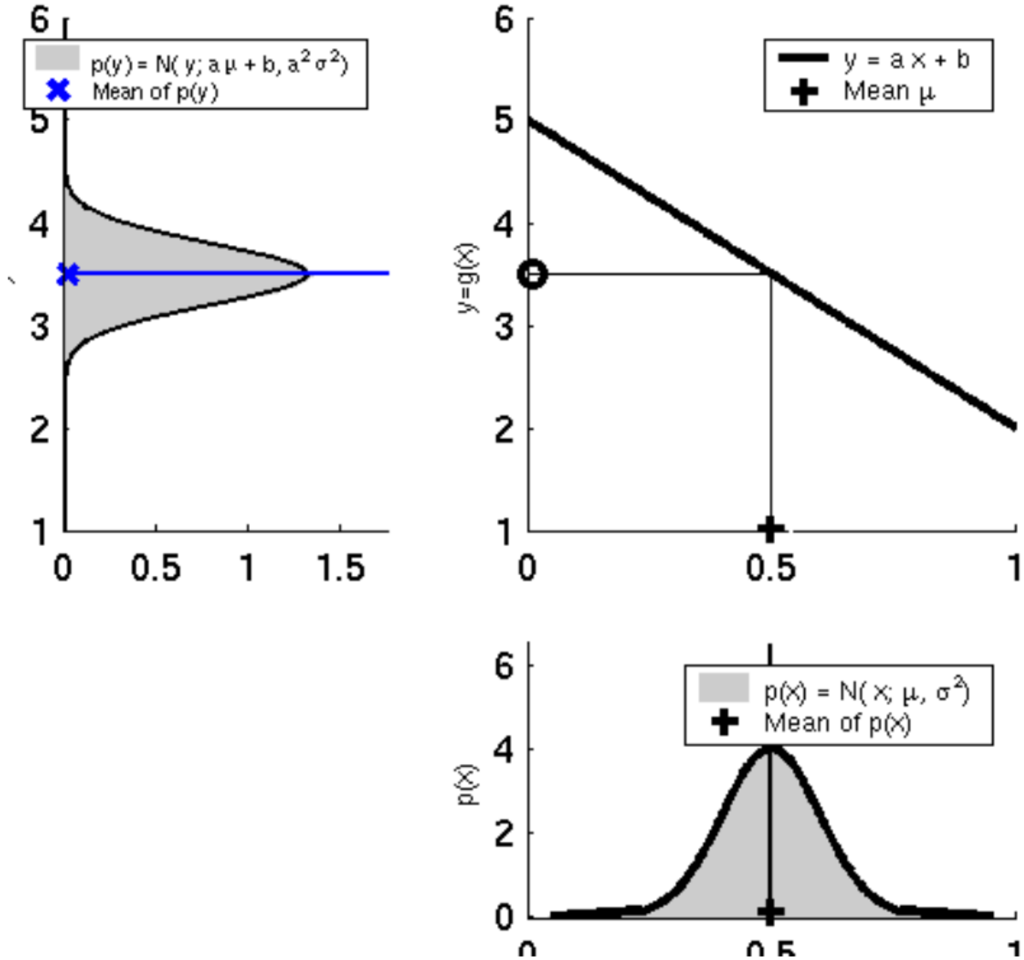
$$p(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(- \frac{1}{2}(x-\mu)^T \ \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$







Линейное преобразование



Важные свойства нормального распределения

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu, \Sigma) \\ X = AX + B \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim N(A\mu + B, A\Sigma A^T)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim N\left(\mu_{1,}\, \Sigma_1\right) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{p}(X_1) \cdot \mathrm{p}(X_2) \sim \mathrm{N}\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_2, \frac{1}{{\Sigma_1}^{-1} + {\Sigma_2}^{-1}}\right)$$

Линейные модели

- Фильтр Калмана подразумевает линейные модели движения и измерения с Гауссовым шумом

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \epsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

Компоненты линейной модель

A_t Матрица *(n x n)*, описывает как состояние системы изменяется из *t-1* в *t*

B_t Матрица *(n x l)*, описывает как управление изменяет состояние системы из *t-1* в *t*

C_t Матрица *(k x n)*, описывает преобразование состояния системы *x* в ожидаемое измерение *z*

ϵ_t δ_t Случайные величины, отражающие неопределенность движения и измерений с матрицами ковариации R_t и Q_t

Фильтр Байеса

- Экстраполяция :

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | u_{t,} x_{t-1,}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Модель движения

- Коррекция:

$$bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$$

Модель измерения

Нормальные распределения линейных моделей

- Движение

$$p(x_t|u_t,x_{t-1}) = \det(2\pi R_t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^T R_t{}^{-1}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)\right)$$

- Измерение

$$p(z_t|x_t) = \det(2\pi Q_t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\exp(-\frac{1}{2}(z_t - C_t x_t)^T Q_t{}^{-1}(z_t - C_t x_t))$$

Фильтр Байеса

- Экстраполяция :

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | u_{t,} x_{t-1,}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

- Коррекция:

Модель движения

$$bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$$

Модель измерения

Фильтр Калмана

1: **Фильтр_Калмана** $(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t\ )$

2: $\bar{\mu}_t = A_t\,\mu_{t-1} + B_t u_t$

3: $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t{}^T + R_t$

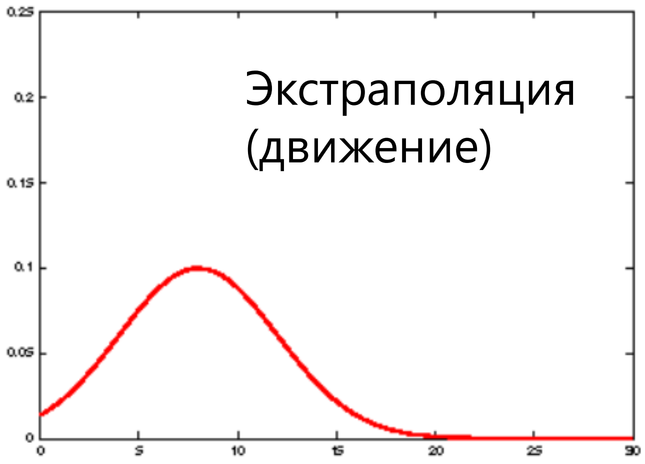
4: $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t{}^T \left(C_t \bar{\Sigma}_t C_t{}^T + Q_t\right)^{-1}$

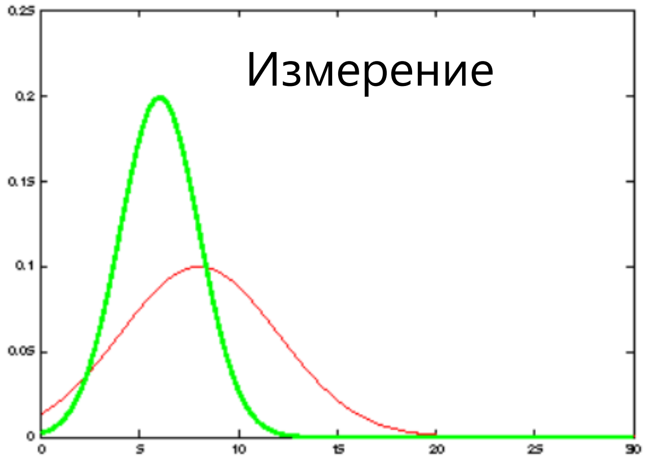
5: $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t \bar{\mu}_t)$

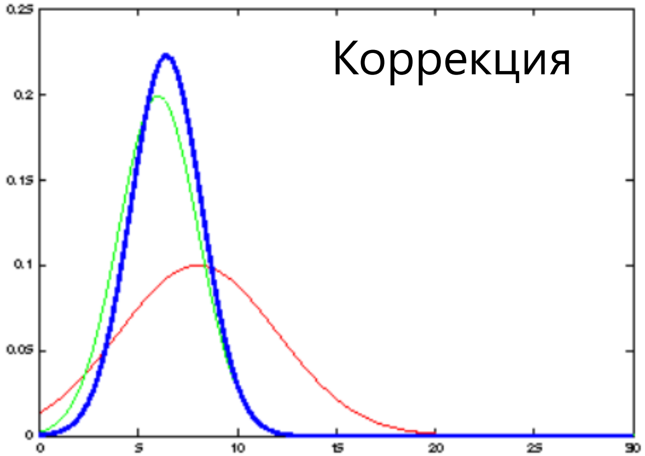
6: $\Sigma_t = (I + K_t C_t)\bar{\Sigma}_t$

7: return μ_t, Σ_t

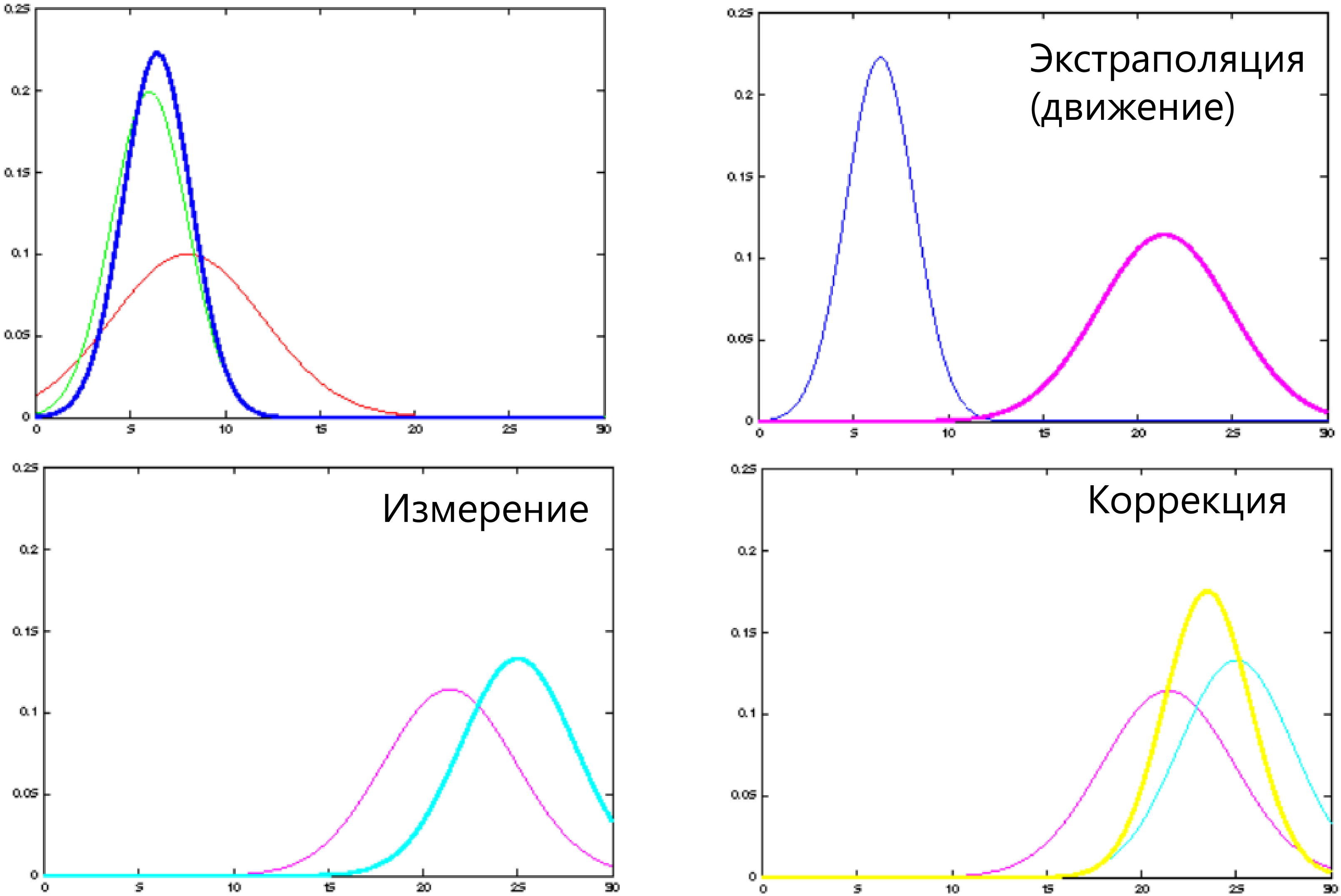
Фильтр Калмана. Пример







Фильтр Калмана. Пример



Фильтр Калмана

- Два параметра описывают состояние системы
- Низкая вычислительная сложность

$$O(k^{2.376} + n^2)$$

- Оптимален для линейных систем с нормальными распределениями

Нелинейные модели

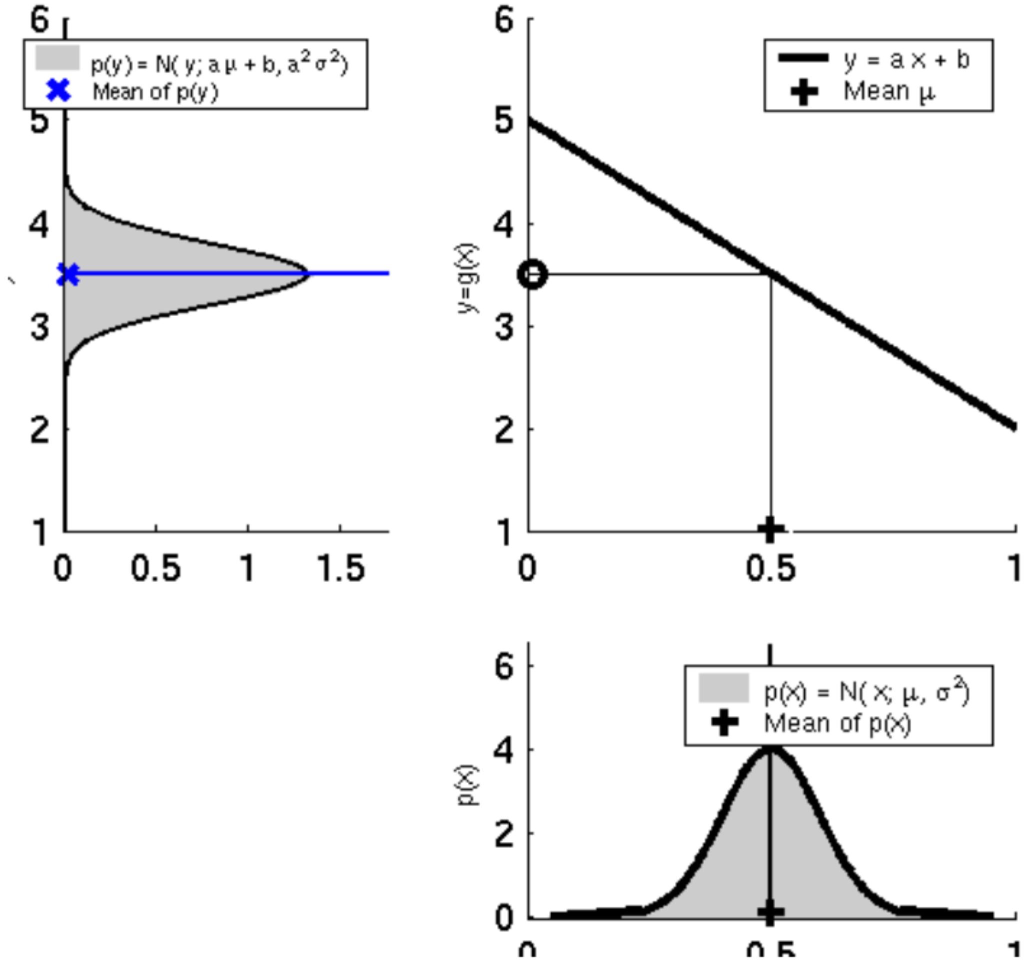
- Решение основных задач в робототехнике связанно с нелинейными моделями

$$\cancel{x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \epsilon_t} \qquad \cancel{z_t = C_t x_t + \delta_t}$$

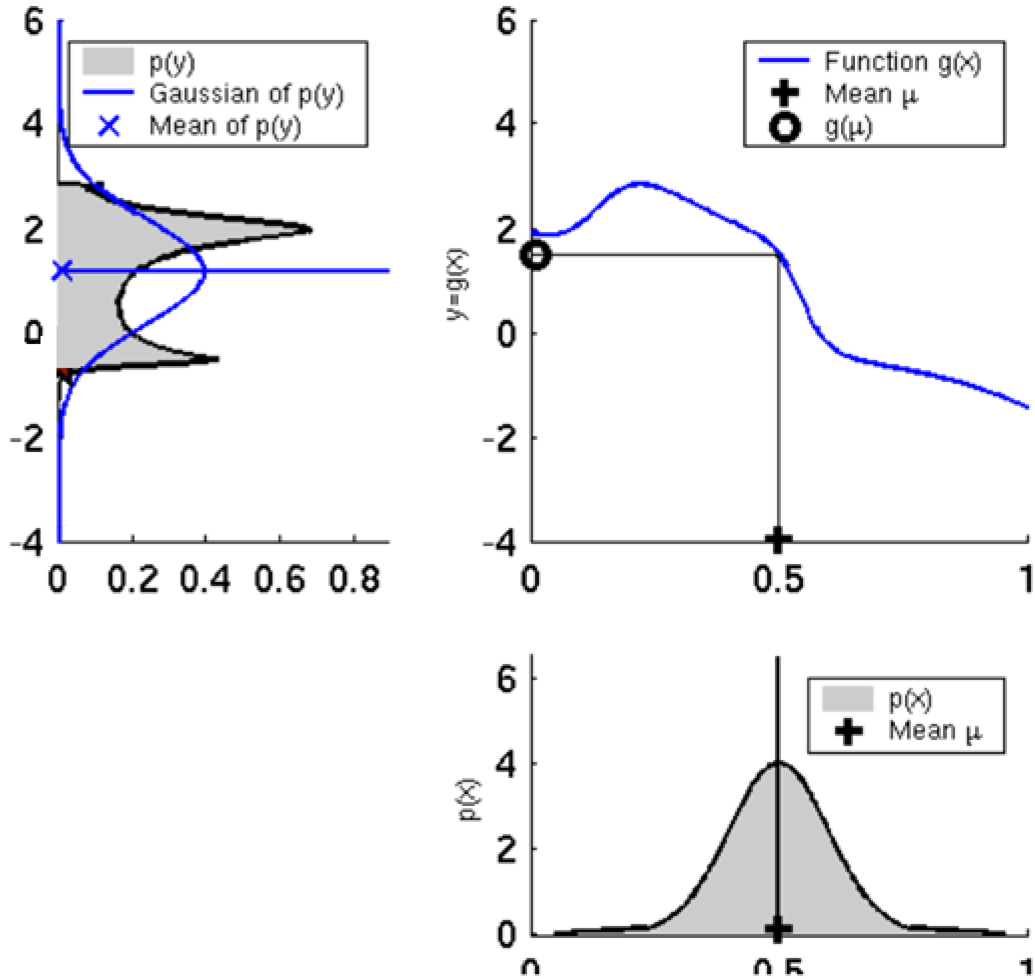
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_t = g(u_t, x_{t-1}) + \epsilon_t \qquad z_t = h(x_t) + \delta_t$$

Линейное преобразование



Нелинейное преобразование



Линеаризация

$$g(u_t, x_{t-1}) \approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \underbrace{\frac{\partial g(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}}_{=:\, G_t}(x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$h(x_t) \approx h(\bar{\mu}_t) + \underbrace{\frac{\partial h(\bar{\mu}_t)}{\partial x_t}}_{=:\, H_t}(x_t - \bar{\mu}_t)$$

Матрица Якоби

- Обычно не квадратная матрица
- Дана функция

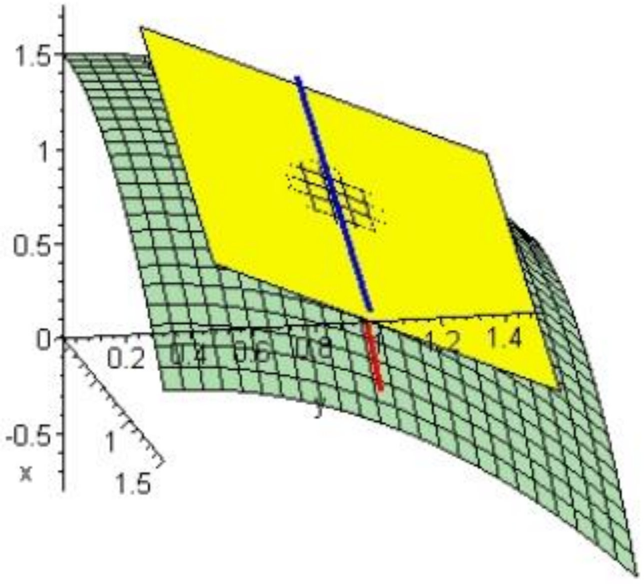
$$g(x) = \begin{pmatrix} g_{1(x)} \\ g_{2(x)} \\ \vdots \\ g_{m(x)} \end{pmatrix}$$

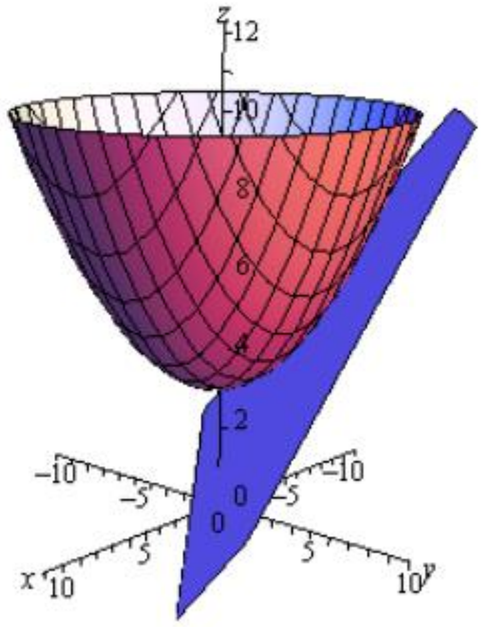
- Тогда матрица Якоби определяется как

$$G_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

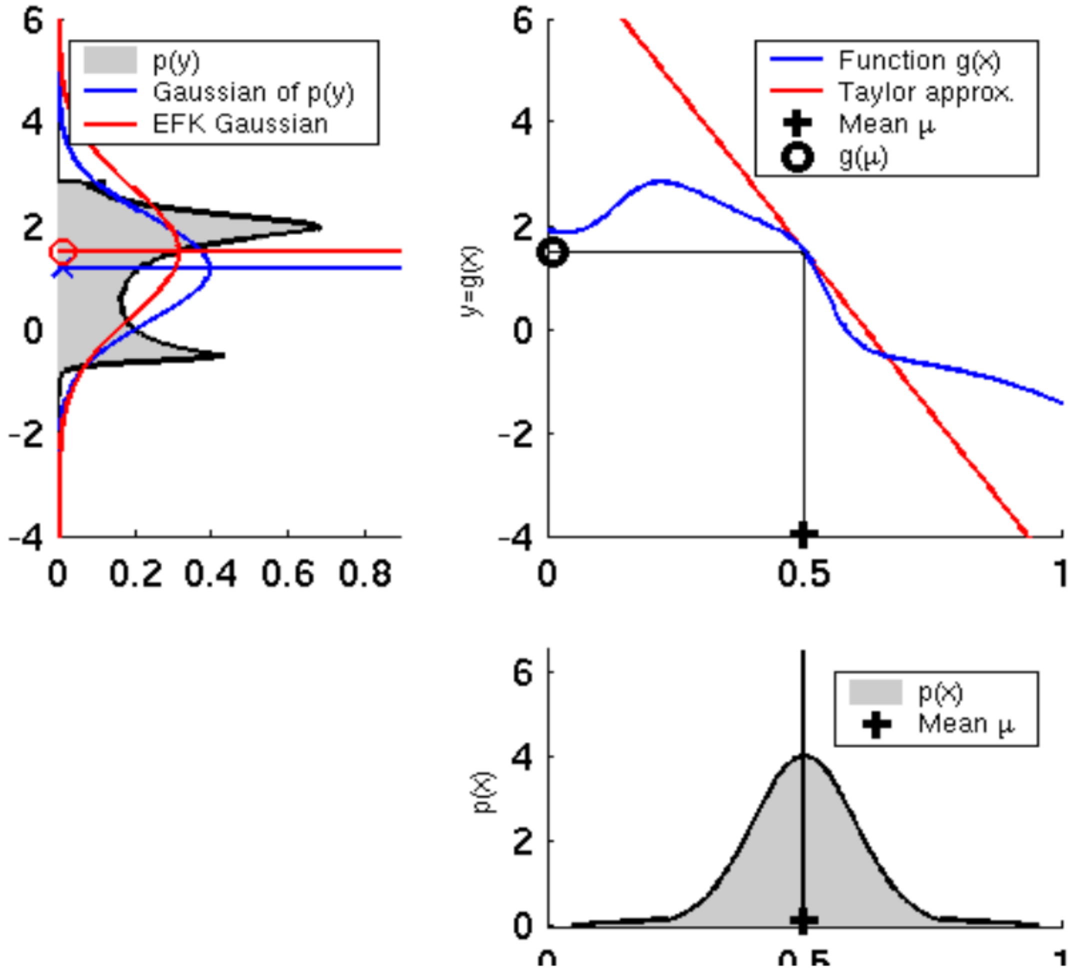
Матрица Якоби

- В геометрическом смысле это плоскость касательная к поверхности заданной *g(x)*

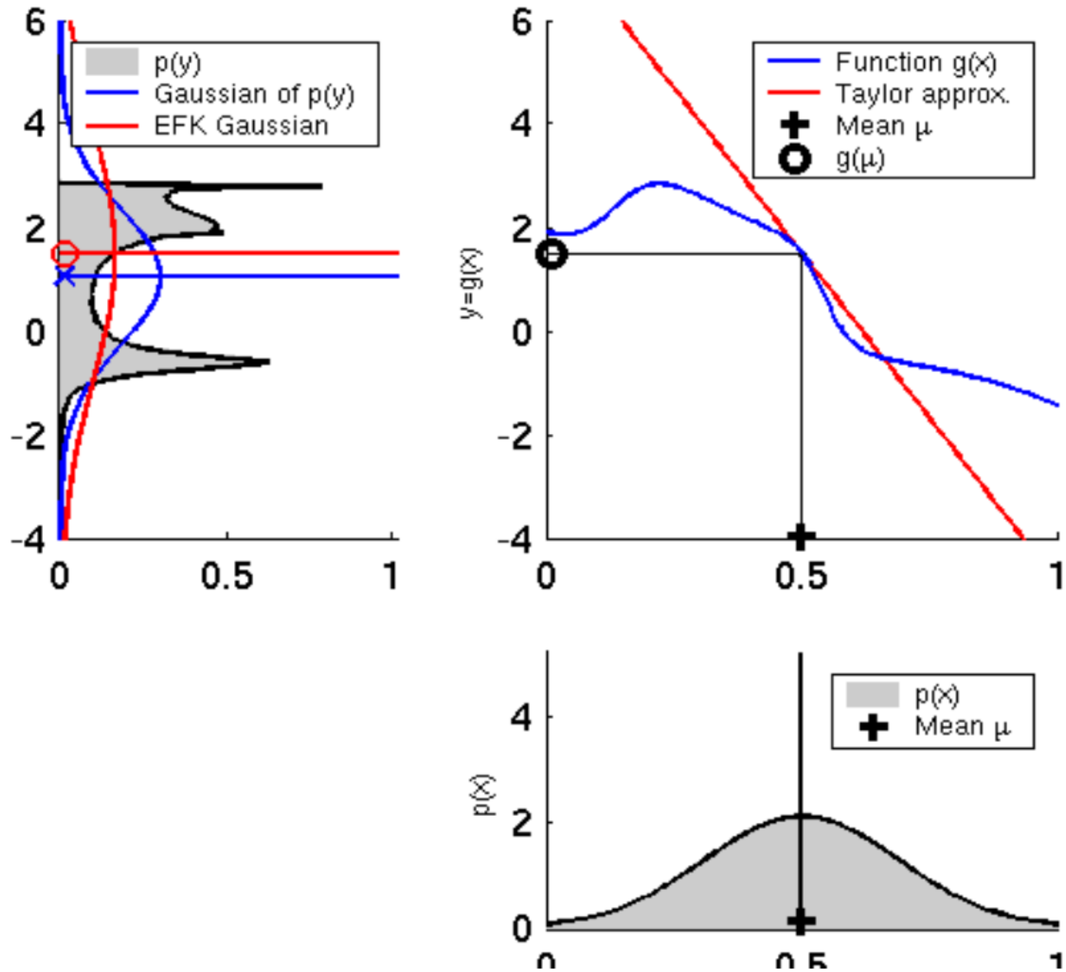




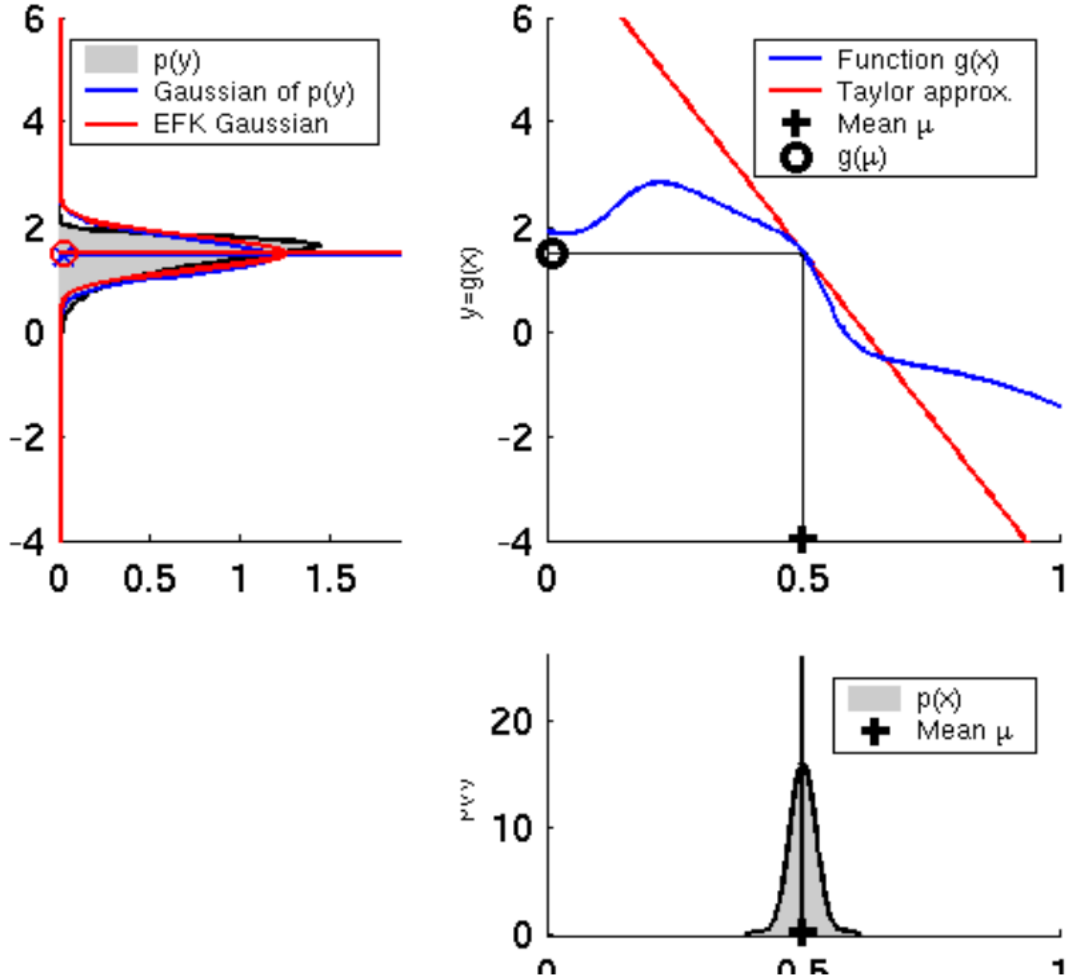
Линеаризованное преобразование



Линеаризованное преобразование



Линеаризованное преобразование



Нормальные распределения линеаризованных моделей

- Движение

$$p(x_t|u_t, x_{t-1}) \approx \det(2\pi R_t)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\exp(-\frac{1}{2}(x_t - g(u_t, \mu_{t-1}) - G_t(x_{t-1} - \mu_{t-1}))^T$$
$$R_t{}^{-1}(x_t - g(u_t, \mu_{t-1}) - G_t(x_{t-1} - \mu_{t-1})))$$

- Измерение

$$p(z_t|x_t) = \det(2\pi Q_t)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2}(z_t - h(\bar{\mu}_t) - H_t(x_t - \bar{\mu}_t)\right)^T$$
$$Q_t{}^{-1}(z_t - h(\bar{\mu}_t) - H_t(x_t - \bar{\mu}_t))$$

Обобщенный фильтр Калмана

1: Обощенный_фильтр_Калмана$(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t)$

2: $\quad \bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$

3: $\quad \bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} {G_t}^T + R_t$

4: $\quad K_t = \bar{\Sigma}_t {H_t}^T \left(H_t \bar{\Sigma}_t {H_t}^T + Q_t\right)^{-1}$

5: $\quad \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - h(\bar{\mu}_t))$

6: $\quad \Sigma_t = (I - K_t H_t)\bar{\Sigma}_t$

7: $\quad$ return μ_t, Σ_t

Обобщенный фильтр Калмана

- Расширение возможностей фильтра Калмана
- Один из способов учета нелинейности
- Использование локальной линеаризации
- На практике хорошо работает для различных нелинейных моделей
- Большая неопределенность моделей ведет к увеличению ошибки аппроксимации

Следующая лекция

- Решение задачи СЛАМ с помощью расширенного фильтра Калмана