ПЕРЕМЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ И УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

Понятие пространства состояний и переменных состояния

В настоящее описание динамических свойств разнообразных линейных и нелинейных объектов и систем выполняется двумя методами.

Во-первых, применяется метод представления математических моделей линейных объектов и систем в виде передаточных функций или передаточных матриц. В этом случае речь идёт о связях типа «***вход - выход***».

Во-вторых, используется метод представления систем в пространстве состояний. Это позволяет описать систему по типу «***вход – состояние - выход***», используя так называемые «внутренние модели». Такой метод в ряде случаев оказывается более эффективным, особенно при рассмотрении многомерных систем. ***Многомерные системы*** отличаются наличием нескольких выходных переменных и нескольких входных воздействий. Это обусловлено чаще всего наличием многомерного объекта управления, который имеет нескольких точек приложения управляющих и возмущающих воздействий и несколько регулируемых величин.

Метод построения моделей в виде передаточных функций используются достаточно широко, т.к. они оказываются полезными для решения задач анализа и синтеза линейных систем частотными методами. Традиционная процедура получения описания линеаризованной системы состоит в следующем. Прежде всего, определяются входные воздействия и выходная регулируемая переменная. Формируется структурная схема системы и составляются дифференциальные уравнения для отдельных элементов этой системы. Если система является нелинейной, то её исходное описание предварительно подвергается линеаризации. В результате получается система линейных дифференциальных уравнений.

Затем переходят к передаточным функциям отдельных элементов. Далее в соответствии со структурной схемой системы определяются передаточные функции замкнутой системы. Они характеризуют только связь изображения по Лапласу выходной переменной с изображениями по Лапласу входных воздействий.

Метод представления систем в пространстве состояний обладает более широкими возможностями, поскольку даёт возможность отобразить в модели всё многообразие связей, присущих динамической системе.

Метод пространства состояний опирается на используемое в математике и физике понятие ***фазового пространства***. По осям системы координат фазового пространства откладываются ***фазовые переменные*** (***фазовые координаты***), однозначно определяющие состояние системы.

В фазовом пространстве представлено множество всех состояний системы, причём каждому возможному состоянию системы соответствует ***точка фазового пространства*** (***изображающая точка***).

Система может быть сколь угодно сложной, её состояние представляется единственной точкой в фазовом пространстве, а происходящие в системе изменения характеризуются движением этой точки в фазовом пространстве. В этом состоит сущность понятия фазового пространства. След от движения изображающей точки называется ***фазовой траекторией***. Размерность фазового пространства может быть весьма значительной и зависит от сложности системы.

Частным случаем фазового пространства является фазовая плоскость, которая используется для описания процессов в системах, описываемых системой из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Фазовая плоскость представляет собой координатную плоскость.

Рассмотрим пример динамического объекта, совершающего колебательное движение. Он описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$T^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\xi T \frac{d\alpha}{dt} + \alpha = u(t),$$

где α – выходная переменная, характеризующая положение объекта; $u(t)$ – входное воздействие; t – время; T – постоянная времени; ξ – коэффициент относительного демпфирования.

Представим описание объекта в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Omega,$$
$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{T^2}[u(t) - 2\xi T\Omega - \alpha],$$

где Ω – скорость движения объекта.

В качестве фазовых переменных x_1 и x_2 выбираем положение объекта α и скорость его движения Ω соответственно. Тогда математическая модель рассматриваемого объекта приобретает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{T^2}[u(t) - 2\xi T x_2 - x_1].$$

В соответствии с методом пространства состояний в исследуемой системе выявляются переменные состояния, и такая система описывается во временной области системой дифференциальных уравнений, в которые входят эти переменные состояния.

Переменные состояния – это независимые между собой обобщённые координаты, которые могут иметь любую размерность и однозначно определяющие состояние системы.

Выбор переменных состояния динамической системы неоднозначен. Обычно в качестве её переменных состояния используют фазовые переменные, которые присутствуют в её математическом описании. Если описание системы состоит из *n* дифференциальных уравнений первого порядка, то количество переменных состояния будет равно *n*. В качестве переменных состояния могут быть взяты физические переменные системы, например, перемещение, скорость, ток, напряжение.

Например, в качестве переменных состояния коллекторного двигателя постоянного тока (ДПТ) могут рассматриваться угловая скорость $\Omega_Д$ вала двигателя и ток якоря $i_Я$.

Переменные состояния часто представляют в виде ***вектора состояния***. Например, для ДПТ можно говорить о векторе состояния

$$X = (x_1, x_2)^T = (\Omega_Д, i_Я)^T.$$

Знание значений переменных состояния, входных воздействий и уравнений, описывающих динамическую систему, позволяет однозначно определить её состояние в будущем.

Пространство состояний – это конечномерное пространство, которому принадлежит вектор состояния динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями в форме

Коши. Движение системы в пространстве состояний отражает изменение её состояний.

В пространстве состояний создаётся модель динамической системы, включающая набор переменных входа, выхода и состояния, связанных между собой дифференциальными уравнениями первого порядка, которые записываются в матричной форме.

Рассмотрим пример описания коллекторного двигателя постоянного тока в пространстве состояний.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}[k_M i_Я - M_{ВН}],$$
$$\frac{di_Я}{dt} = \frac{1}{L_Я}[u_Я - k_E \Omega - R_Я i_Я],$$

где k_M и k_E – коэффициенты момента и ЭДС двигателя соответственно; J – момент инерции ротора; $R_Я$ и $L_Я$ – активное сопротивление и индуктивность якоря соответственно; $u_Я$ – напряжение якоря; $M_{ВН}$ – момент внешних сил.

Вводя в рассмотрение компоненты вектора состояния

$$X = (x_1, x_2)^T = (\Omega_Д, i_Я)^T,$$

получим

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{J}[k_M x_2 - M_{ВН}],$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L_Я}[u_Я - k_E x_1 - R_Я x_2].$$

Эту систему уравнений можно представить в матричном виде

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU,$$

где A – (2x2) ***матрица состояния системы***, составленная из коэффициентов дифференциальных уравнений, описывающих эту систем;
B – (2x2) ***матрица управления*** (матрица входа);
U – (2x1) вектор входных воздействий (управляющих и возмущающих), который принимается в виде

$$U=(u_1,u_2)^T=(u_Я,M_{BH})^T,$$

причём

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{k_M}{J} \\ -\dfrac{k_E}{L_Я} & -\dfrac{R_Я}{L_Я} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{J} \\ \dfrac{1}{L_Я} & 0 \end{bmatrix}.$$

В общем случае линейная стационарная динамическая система управления задается дифференциальными и алгебраическими уравнениями с постоянными коэффициентами, которые в матричном виде выглядят следующим образом:

$$\frac{dX}{dt}=AX+BU,$$
$$Y=CX+DU,$$

где Y – вектор выходных величин (***вектор наблюдения***); C – матрица выхода (***матрица наблюдения***),
D – матрица обхода системы.

Второе уравнение отражает тот факт, что переменные состояния не всегда могут быть измерены непосредственно. Поэтому выходными величинами, доступными для измерения и организации управления, могут оказаться линейные комбинации переменных состояния с некоторыми весами. Связь между выходными величинами и переменными состояния задаётся системой линейных алгебраических уравнений. Матрица обхода системы D свидетельствует о том, что в некоторых случаях выходные величины могут иметь составляющие, непосредственно зависящие от входных воздействий.

Структурная схема системы, представленной в пространстве состояний, имеет следующий вид (рис. 1):

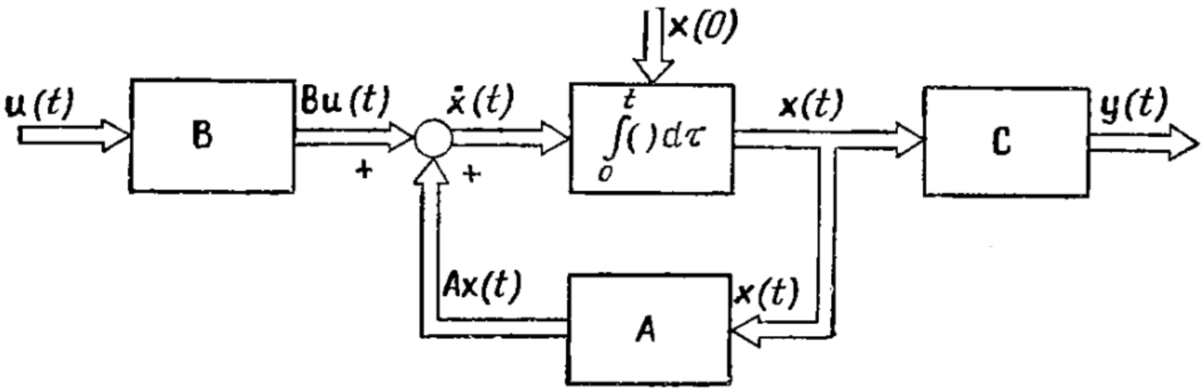

Рис. 1. Структурная схема модели системы, представленной в пространстве состояний

На этой структурной схеме прямые связи, характеризуемые матрицей D, не показаны. $X(0)$ – вектор начальных значений переменных состояния.

Определение передаточной матрицы системы по её описанию в пространстве состояния

При необходимости на основании математической модели системы в матричной форме можно получить все её передаточные функции, связывающие переменные состояния со всеми входными воздействиями. Эти передаточные функции входят в состав матрицы, которая называется ***передаточной матрицей системы***.

Для этого преобразуем по Лапласу все компоненты полученного описания системы. Тогда получим систему алгебраических уравнений в матричной форме

$$sX(s) = AX(s) + BU(s),$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

где $X(s)$ – вектор изображений по Лапласу переменных состояния системы; $Y(s)$ – вектор изображений по Лапласу выходных переменных; $U(s)$ – вектор изображений по Лапласу входных воздействий.

Из этой системы уравнений следует

$$[sI - A]X(s) = BU(s).$$

где I – единичная матрица. Элементы её главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны нулю. Единичная матрица имеет вид

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots\dots\dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Если существует обратная матрица $[sI - A]^{-1}$, можно найти решение в виде

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s).$$

Если матрица A квадратная, то существует обратная матрица $[sI - A]^{-1}$ при условии, что определитель матрицы $[sI - A]$ не равен нулю:

$$\det[sI - A] \neq 0.$$

Вернёмся к рассмотренному выше примеру с ДПТ.
Имеем

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -\dfrac{k_M}{J} \\ \dfrac{k_E}{L_Я} & s + \dfrac{R_Я}{L_Я} \end{bmatrix},$$

причём

$$\det(sI - A) = s(s + \frac{R_Я}{L_Я}) + \frac{k_M k_E}{L_Я J} \neq 0.$$

Определитель матрицы $(sI - A)$ можно переписать в несколько ином виде:

$$\det(sI - A) = \frac{1}{T_M T_Э}(T_M T_Э s^2 + T_M s + 1),$$

где $T_М$ и $T_Э$ – электромеханическая и электромагнитная постоянные времени двигателя соответственно.

Матрицу $(sI-A)^{-1}$ находим в соответствии с известными правилами определения обратных матриц. Сначала строим транспонированную матрицу $(sI-A)^T$:

$$(sI-A)^T=\begin{bmatrix} s & \dfrac{k_E}{L_Я} \\ -\dfrac{k_M}{J} & s+\dfrac{R_Я}{L_Я} \end{bmatrix}.$$

Затем определяем матрицу E алгебраических дополнений к матрице $(sI-A)^T$:

$$E=\begin{bmatrix} s+\dfrac{R_Я}{L_Я} & \dfrac{k_M}{J} \\ -\dfrac{k_E}{L_Я} & s \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица $(sI-A)^{-1}$ вычисляется по формуле

$$(sI-A)^{-1}=[\det(sI-A)]^{-1}E.$$

Учтём, что

$$X(s)=[x_1(s),x_2(s)]^T=[\Omega_Д(s),i_Я(s)]^T,$$

$$U(s)=[u_1(s),u_2(s)]^T=[u_Я(s),M_{ВН}(s)]^T.$$

Связь вектора изображений по Лапласу переменных состояния $X(s)$ с вектором изображений по Лапласу входных воздействий $U(s)$ задаётся ***передаточной матрицей*** (матрицей передаточных функций) $П(s)$, входящей в состав уравнения

$$X(s)=П(s)U(s),$$

причём

$$\varPi(s) = (sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{J} \\ \dfrac{1}{L_Я} & 0 \end{bmatrix}.$$

Как следует из структуры этой передаточной матрицы, она содержит четыре передаточные функции. Передаточная функция $W_{11}(s)$ описывает зависимость угловой скорости вала двигателя от напряжения якоря и имеет вид

$$W_{11}(s) = \frac{k_E^{-1}}{T_M T_Э s^2 + T_M s + 1}.$$

Передаточная функция $W_{12}(s)$ характеризует зависимость угловой скорости вала двигателя от момента внешних сил и имеет вид

$$W_{12}(s) = \frac{-R_Я (T_Э s + 1)(k_M k_E)^{-1}}{T_M T_Э s^2 + T_M s + 1}.$$

Передаточная функция $W_{21}(s)$ определяет связь тока якоря с напряжением якоря:

$$W_{21}(s) = \frac{sJ\,(k_M k_E)^{-1}}{T_M T_Э s^2 + T_M s + 1}.$$

Передаточная функция $W_{22}(s)$ описывает зависимость тока якоря от момент внешних сил и имеет вид

$$W_{22}(s) = \frac{k_M^{-1}}{T_M T_Э s^2 + T_M s + 1}.$$

Таким образом, описание ДПТ в пространстве состояний дало возможность найти все 4 передаточные функции, характеризующие динамические свойства этого двигателя.

Построение модели линейной системы в пространстве состояния по её передаточной функции

Передаточная функция (или матрица) однозначно определяется уравнениями состояния, однако одной и той же передаточной функции могут соответствовать несколько различных уравнений состояния.

Рассмотрим построение уравнений системы в пространстве состояний на основании описания связи одной выходной переменной с одним входным воздействием, заданным передаточной функцией

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n},$$

где $y(s)$ – изображение по Лапласу выходной переменной; $u(s)$ – изображение по Лапласу входной переменной; $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1$ – постоянные коэффициенты.

Этой передаточной функции можно поставить в соответствие алгебраическое уравнение

$$y(s)(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n) = u(s)(b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}s + b_n)$$

Введём в рассмотрение изображение по Лапласу $x(s)$ новой переменной x. Оно равно отношению левой и правой частей этого уравнения к произведению многочленов. Тогда получим

$$x(s) = \frac{y(s)}{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}s + b_n} = \frac{u(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}.$$

В результате получаем два уравнения:

$$u(s) = (s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n)x(s),$$

$$y(s) = (b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \ldots + b_{n-1}s + b_n)x(s).$$

Введём переменные состояния системы

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x\,,\\
&x_2 = \frac{dx_1}{dt}\,,\\
&x_3 = \frac{dx_2}{dt}\,,\\
&\ldots\ldots\\
&x_n = \frac{dx_{n-1}}{dt}\,.
\end{aligned}
$$

В этом случае можно записать следующие уравнения, соответствующие приведённым выше алгебраическим уравнениям,

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2\,,\\
&\frac{dx_2}{dt} = x_3\,,\\
&\ldots\ldots\\
&\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n\,,\\
&\frac{dx_n}{dt} = u - a_n x_1 - a_{n-2} x_2 - \ldots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n\,,\\
&y = b_n x_1 + b_{n-1} x_2 + \ldots + b_2 x_{n-1} + b_1 x_n\,.
\end{aligned}
$$

Матрица системы имеет вид

$$
A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\
-a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots. & -a_1
\end{bmatrix}
$$

Эта матрица называется ***сопровождающей матрицей многочлена*** и обладает тем свойством, что её характеристический многочлен

$$\vartheta(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

совпадает с нормированным многочленом n-го порядка, коэффициенты которого расположены в знаменателе исходной передаточной функции. Значение коэффициента a_0 при старшем члене принимается равным единице. В этом случае

$$\det(sI - A) = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^{n-i} .$$

Сопровождающая матрица многочлена строится следующим образом. Элементами нижней строки матрицы являются коэффициенты характеристического многочлена от a_n до a_1, взятые с противоположным знаком. Элементы, стоящие справа от главной диагонали, равны единице. Остальные элементы матрицы равны нулю.

Матрица - столбец управления имеет размерность (nx1) и вид

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

а матрица - строка наблюдения (1xn) выглядит следующим образом:

$$C = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \ldots & b_2 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Структурная схема n-мерной системы с одним входом и одним выходом, описанной в пространстве состояния на основании её передаточной функции, показана на рис. 2. Эта схема может быть использована, в частности, для моделирования n-мерной системы.

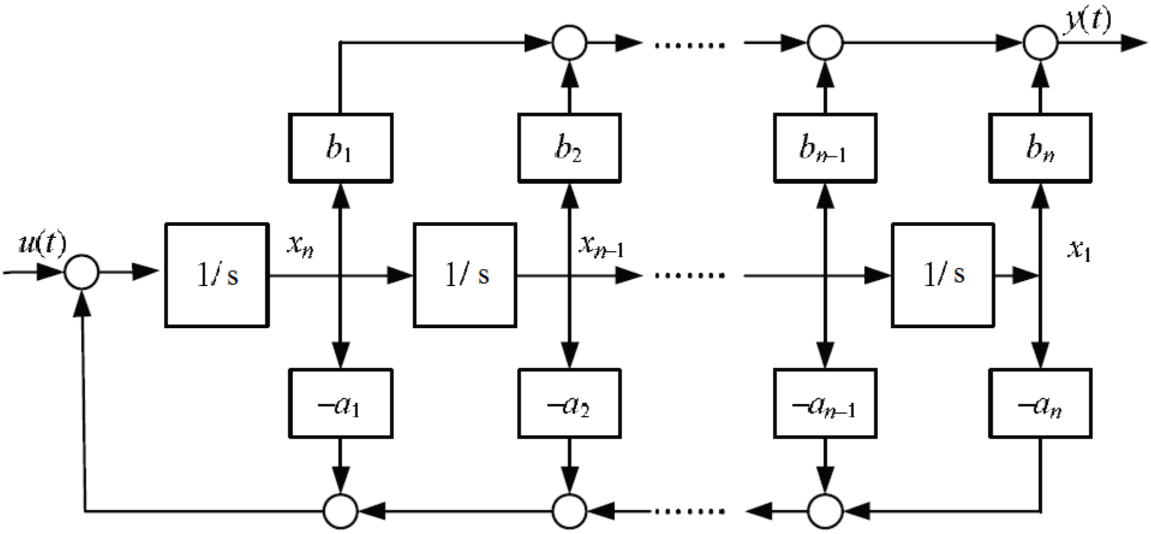

Рис. 2. Структурная схема *n*-мерной системы с одним входом и одним выходом, описанной в пространстве состояния на основании её передаточной функции

Приведённый пример показывает, что структурная схема модели линейной системы в пространстве состояний, сформированная на основании её передаточной функции, может быть построена с использованием *усилительных*, *интегрирующих* и *суммирующих элементов.*