Теория вероятностей и математическая статистика

Краткие тезисы лекций

Приложение к мультимедийному курсу лекций по дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

I. Теория вероятностей

Раздел I.1 Случайные события

1. Опыт со случайными исходами («случайный опыт»). Элементарные события (элементарные исходы случайного опыта) Пространство элементарных событий. Случайное событие. Поле событий случайного опыта. Достоверное, невозможное, противоположное событие. Совместные и несовместные случайные события.
2. Теоретико-множественное описание событий, алгебраические операции над событиями:
   – объединение (сумма) событий;
   – разность двух событий;
   – пересечение (произведение) событий;
   – одно событие влечёт другое.
   – полная группа событий (ПГС);
   – сигма- алгебра событий;
   – достоверное, невозможное, противоположное событие, совместные и несовместные события в терминологии теории множеств.
3. Аксиомы теории вероятности:
   – поле событий сигма- алгебра событий;
   – поле событий включает достоверное событие (пространство элементарных событий);
   – аксиома существования вероятности каждого случайного события;
   – аксиома нормировки;
   – аксиома сложения (несовместных событий);
   – аксиома непрерывности *
   Поле вероятностей и вероятностное пространство случайного опыта.
4. Отношение представлений теории вероятности к данным опыта. Статистическое определение вероятности. Эмпирическое (опытное) обоснование аксиом.
5. Некоторые теоремы:

– вероятность противоположного события;

– вероятность невозможного события;

– область значений вероятности;

– монотонность вероятности;

– сложение конечного числа несовместных событий;

– вероятность события как сумма вероятностей благоприятствующих элементарных исходов;

– сумма вероятностей всех элементарных событий;

– сумма вероятностей всех событий, образующих ПГС;

– сложение двух произвольных событий;

6. Классическая модель (схема) вероятности (при конечном числе равновозможных элементарных исходов опыта). Формула для вероятности случайного события в классической модели. Её обобщение на бесконечное множество элементарных исходов: геометрическая модель вероятности. Применение комбинаторики к вычислению вероятностей в классической модели.

7. Условная вероятность (определение). Справедливость аксиом и теорем теории вероятностей для условных вероятностей при одинаковом условии. Общая формула умножения для вероятности одновременной реализации двух событий. Условная вероятность в классической модели.

8. Формула полной вероятности и формула Байеса.

9. Независимые события. Определение независимости двух событий. Необходимые и достаточные условия независимости событий и формула умножения **п.7** для независимых событий. События, независимые в совокупности, определение. Следствия из независимости некоторой совокупности событий. Вероятность появления хотя бы одного из нескольких независимых в совокупности событий.

10. Схема (модель) Бернулли. Испытания и формула Бернулли для вероятности ровно m успехов в n испытаниях. Зависимость этой вероятности от m , наиболее вероятное число успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Полная группа событий в испытаниях Бернулли. Формула Бернулли и бином Ньютона. Вероятность $l < m < r$ успехов в серии из n испытаний Бернулли. Вероятность хотя бы одного успеха и вероятность хотя бы одной неудачи в серии из n испытаний Бернулли. Предельная формула Пуассона и предельные формулы Муавра-Лапласа для серии из большого числа n испытаний Бернулли.

Раздел I.2 Случайные величины

11. Определение случайной величины (одномерной) как числовой функции, заданной на пространстве элементарных исходов и осуществляющей отображение поля событий некоторого опыта на действительную ось. Закон распределения случайной величины.

12. Функция распределения случайной величины – определение. Свойства функции распределения случайной величины их связь с аксиомами и теоремами теории вероятностей раздела I.1. Вычисление с помощью функции распределения вероятности попадания значения случайной величины $\boldsymbol{X}$ при проведении случайного опыта в некоторый числовой промежуток и в отдельную точку.

13. Дискретные случайные величины, определение дискретной случайной величины. Полная группа событий, соответствующая дискретной случайной величине. Ряд распределения дискретной случайной величины, его свойства. Вычисление с помощью ряда распределения вероятности попадания значения дискретной случайной величины при проведении случайного опыта в некоторую числовую область.

14. Функция распределения дискретной случайной величины и её особенности. Вычисление функции распределения дискретной случайной величины с помощью её ряда распределения. Графическое представление функции распределения дискретной случайной величины.

15. Непрерывные случайные величины, определение непрерывной случайной величины. Плотность распределения непрерывной случайной величины, её свойства, их связь с аксиомами и теоремами теории вероятностей раздела **I.1**. Связь между функцией распределения и плотностью распределения непрерывной случайной величины: формула для вычисления функции распределения в каждой точке по известной плотности распределения и формула для вычисления плотности распределения в каждой точке по известной функции распределения. Графическое представление плотности распределения и функции распределения непрерывной случайной величины, их связь. Вероятность попадания значения случайной величины непрерывного типа в бесконечно малый числовой промежуток. Вычисление с помощью плотности распределения вероятности попадания значения случайной величины ***X*** при проведении случайного опыта в некоторый конечный числовой промежуток и в некоторую числовую область. Вероятность точечного значения случайной величины непрерывного типа.

16. Функция от случайной величины. Функция от случайной величины дискретного типа, построение её ряда распределения по ряду распределения случайной величины – аргумента функции. Примеры. Функция от случайной величины непрерывного типа, построение её функции распределения по плотности распределения случайной величины – аргумента функции.

17. Случайные векторы – упорядоченная совокупность двух и более случайных величин. Функция распределения случайного вектора – совместного распределения двух и более случайных величин. Дискретный случайный вектор и соответствующие ему полные группы событий.

18. Двумерные случайные векторы. Функция распределения двумерного случайного вектора, её свойства. Двумерный дискретный случайный вектор и соответствующие ему две полные группы событий. Матрица распределения дискретного двумерного случайного вектора, её свойства, связь с рядами распределений компонент случайного вектора. Формула для расчёта по матрице распределения вероятности попадания значений дискретного двумерного случайного вектора в некоторую область на координатной плоскости. Вычисление функции распределения двумерного случайного вектора с помощью его матрицы распределения.

19. Двумерный непрерывный случайный вектор. Функция распределения и плотность распределения двумерного непрерывного случайного вектора, их связь и свойства. Вероятность попадания значений компонент непрерывного случайного вектора непрерывного типа в бесконечно малый прямоугольник на координатной плоскости. Формула для вероятности попадания значений компонент непрерывного двумерного случайного вектора в некоторую область на координатной плоскости по его плотности распределения.

20. Условные двумерные распределения. Условные распределения дискретной случайной величины, связь их с матрицей распределения случайного вектора и рядами распределения его компонент. Условные плотности распределения непрерывного двумерного вектора, их связь с плотностью распределения двумерного непрерывного случайный вектора и плотностями распределения его компонент.

21. Независимые (две) случайные величины. Соответствие с независимыми событиями соответствующего вероятностного пространства.

22. Двумерный случайный вектор с независимыми компонентами. Выражение функции распределения случайного вектора с независимыми компонентами через функции распределения его компонент. Выражение элементов матрицы распределения дискретного случайного вектора с независимыми компонентами через элементы рядов распределения его компонент. Выражение плотности распределения непрерывного случайного вектора с независимыми компонентами через плотности распределения его компонент.

23. Вектор размерности больше 2 с независимыми в совокупности компонентами.

24. Числовые характеристики случайных величин.

23.1 Математическое ожидание дискретной случайной величины (формула), в том числе, дискретной случайной величины с бесконечным счётным числом возможных значений. Эмпирический (статистический) смысл математического ожидания: связь между математическим ожиданием и средним значением случайной величины по наблюдаемым в большом числе опытов (на примере дискретной случайной величины с конечным числом возможных значений). Математическое ожидание непрерывной случайной величины (формула). Центрированная случайная величина. Математическое ожидание функции случайной величины: формулы для дискретных случайных величин и для непрерывных случайных величин. Математическое ожидание функции нескольких случайных величин: формулы для дискретных случайных величин и для непрерывных случайных величин. Свойства математического ожидания. Математическое ожидание суммы двух и более случайных величин. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин. Ковариация двух случайных величин, математическое ожидание произведения двух произвольных случайных величин и их ковариация – связь между ними. Ковариация двух случайных величин как математическое ожидание произведения соответствующих центрированных случайных величин. Коэффициент корреляции двух случайных величин, его свойства. Корреляция двух случайных величин. Ковариация и коэффициент корреляции как мера статистической зависимости (корреляции) случайных величин. Слабая, сильная и полная корреляция. Зависимость и коррелированность случайных величин.

23.2 Дисперсия случайной величины – определение. Формулы, для дисперсии дискретной случайной величины и для дисперсии непрерывной случайной величины. Эмпирический (статистический) смысл дисперсии случайной величины. Свойства дисперсии. Дисперсия суммы двух и более независимых случайных величин. Дисперсия суммы двух произвольных случайных величин и их ковариация. Среднеквадратичное отклонение случайной величины.

23.3 Моменты случайной величины, начальные и центральные моменты. Математическое ожидание и дисперсия как моменты случайной величины.

23.4 Другие числовые характеристики распределения случайной величины: медиана и мода распределения случайной величины.

23.5 Квантиль распределения непрерывной случайной величины, порядок квантили; условия на функцию распределения, позволяющие однозначно определить квантиль распределения, уравнение для определения квантили.

25. Условные математические ожидания для двумерного случайного вектора; формулы для условного математические ожидания двумерного случайного вектора с дискретными и непрерывными компонентами. Регрессия одной компоненты случайного двумерного вектора на другую, функция регрессии, кривая регрессии; статистический смысл функции регрессии.

26. Распределения случайных величин.

26.1 Дискретные распределения.

Распределение 0÷1 («*индикатор успеха*»): возможные значения случайной величины с **0÷1** распределением, её ряд распределения, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение; ***p***- параметр распределения и числовые характеристики распределения.

Биномиальное распределение (***распределение Бернулли***): возможные значения случайной величины с биномиальным распределением, её ряд распределения и его связь с биномом Ньютона, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение, мода; (***p,n***) – параметры распределения и числовые характеристики распределения; связь со схемой Бернулли; вычисление математического ожидания непосредственно по ряду распределения. Случайная величина с биномиальным (***p,n***) распределением как сумма ***n*** независимых случайных величин с **0÷1** распределением, вычисление дисперсии случайной величины с биномиальным распределением с помощью такого представления.

Распределение Пуассона: возможные значения случайной величины с распределением Пуассона, её ряд распределения, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение, мода; вычисление математического ожидания непосредственно по ряду распределения; $\boldsymbol{\lambda}$**-** параметр распределения и числовые характеристики распределения; случайная величина с распределением Пуассона как предел последовательности случайных величин с распределением Бернулли – теорема Пуассона.

26.2 Непрерывные распределения.

Равномерное распределение, область возможных значений случайной величины с равномерным распределением, плотность распределения её вероятностей, вычисление нормировочного множителя; функция распределения, вычисление её по известной плотности распределения; графические представления плотности распределения и функции распределения и их интерпретация; математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение; параметры распределения и числовые характеристики распределения; равномерное распределение как модель ошибок округления.

Показательное (*экспоненциальное*) распределение, область возможных значений случайной величины с показательным распределением, плотность распределения её вероятностей, вычисление нормировочного множителя; функция распределения, вычисление её по известной плотности распределения; графические представления плотности распределения и функции распределения и их интерпретация; математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение; параметр распределения и числовые характеристики распределения; примеры использования экспоненциального распределения в приложениях.

Нормальное распределение, область возможных значений случайной величины с нормальным распределением, плотность распределения её вероятностей, вычисление нормировочного множителя; параметры распределения; стандартное нормальное распределение, значения его параметров, плотность вероятностей стандартного нормального распределения; функция распределения случайной величины распределённой по стандартному нормальному закону, её интегральное представление по известной плотности распределения – интеграл вероятностей; графические представления плотности и функции стандартного нормального распределения и их интерпретация; функция нормального распределения с произвольными параметрами, её интегральное представление по известной плотности распределения и сведение к интегралу вероятностей;

графические представления плотности и функции произвольного нормального распределения и их интерпретация; математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратичное отклонение случайной величины с нормальным распределением, связь их с параметрами распределения; вычисление математического ожидания; основные свойства интеграла вероятностей, таблицы его значений; функция Лапласа, её связь с интегралом вероятностей, основные свойства, таблицы значений; формулы для вычисления вероятности попадания случайной величины с нормальным распределением по результатам опыта в конечный числовой интервал с использованием интеграла вероятностей и функции Лапласа и их табличных значений; формулы для вычисления вероятности попадания случайной величины с нормальным распределением по результатам опыта в полубесконечный числовой интервал с использованием интеграла вероятностей и его табличных значений; формулы для вычисления вероятности попадания случайной величины с нормальным распределением по результатам опыта в числовой интервал, симметричный относительно математического ожидания с использованием интеграла вероятностей и функции Лапласа и их табличных значений, правило «3х сигма» и его смысл, вероятность «3х сигма».

27. Предельные теоремы теории вероятностей.

27.1 Неравенства Чебышёва: первое неравенство Чебышёва и второе неравенство Чебышёва.

27.2 Сходимость последовательности случайных величин по вероятности к некоторому числу, статистический смысл, сравнение со сходимостью числовой последовательности.

27.3 Предельная теорема Бернулли: сходимость последовательности случайных величин с биномиальным (p,n) распределением, отнесённых к n, по вероятности к числу p с возрастанием n; предельная теорема Бернулли в схеме испытаний Бернулли; статистический смысл теоремы.

27.4 Закон больших чисел (в формулировке Чебышёва); следствия из него; предельная теорема Бернулли как частный случай закона больших чисел.

27.5 Центральная предельная теорема (в формулировке Ляпунова); теорема Муавра-Лапласа как частный случай центральной предельной теоремы, предельные формулы Муавра-Лапласа для серии из большого числа n испытаний Бернулли как следствие теоремы Муавра-Лапласа.

II. Математическая статистика

28. Предмет математической статистики; выборочный метод в статистике: понятие статистического ансамбля и генеральной совокупности; выборка из генеральной совокупности как случайный вектор с независимыми компонентами, представляющими исследуемую случайную величину в идентичных испытаниях на статистическом ансамбле; реализация случайной выборки в однократном опыте по наблюдению (измерению) случайной выборки (случайного вектора) – числовой вектор соответствующей размерности; объём и размах выборки.

29. Первичная обработка выборки: вариационный ряд, статистический ряд, группированный статистический ряд; относительные и накопленные частоты; эмпирическая функция распределения, её построение по реализации случайной выборки, графическое представление эмпирической функции распределения, её свойства и сравнение их со свойствами функции распределения случайной величины в теории вероятностей; эмпирическая функция распределения и истинная функция распределения исследуемой случайной величины, сходимость по вероятности эмпирической функции распределения к истинной функции распределения исследуемой случайной величины; гистограмма частот (относительных или накопленных) как графическое представление группированного статистического ряда для исследуемой случайной величины непрерывного типа, её свойства и интерпретация в терминах теории вероятностей; полигон частот: для исследуемой случайной величины дискретного типа и для исследуемой случайной величины непрерывного типа; статистика – случайная величина, являющаяся функцией случайной выборки, выборочное значение статистики – численное значение соответствующей функции на реализации случайной выборки по результатам опыта.

30. Точечные числовые оценки параметров распределения генеральной совокупности, определение точечной оценки как статистики, выборочное значение которой может приниматься в качестве приближённого значения оцениваемого параметра; критерии выбора статистики для точечной оценки:

- состоятельная оценка, её статистический смысл
- несмещённая оценка, асимптотически несмещённая оценка
- достаточные условия состоятельности оценки по неравенству Чебышёва
- эффективность оценки, асимптотическая эффективность

29.1 Оценка математического ожидания генеральной совокупности; выборочное среднее как статистика, предоставляющая несмещённую состоятельную оценку математического ожидания генеральной совокупности, доказательство её состоятельности по достаточным условиям.

29.2 Оценка дисперсии генеральной совокупности; выборочная дисперсия как статистика, предоставляющая несмещённую состоятельную оценку дисперсии генеральной совокупности при известном точном значении её математического ожидания, доказательство состоятельности по достаточным условиям; исправленная выборочная дисперсия как статистика, предоставляющая несмещённую состоятельную оценку дисперсии генеральной совокупности при неизвестном значении её математического ожидания, заменяемого точечной оценкой, доказательство состоятельности по достаточным условиям, сравнение с выборочной дисперсия и объяснение отличия;

29.3 метод максимального правдоподобия для получения несмещённых состоятельных оценок параметров распределения; функция правдоподобия для случайной величины дискретного типа и случайной величины непрерывного типа, их смысл; определение выборочных оценок параметров из условий максимума функция правдоподобия.

31. Интервальные оценки параметров распределения генеральной совокупности; постановка задачи интервальной оценки параметра распределения, доверительный интервал, доверительная вероятность и уровень значимости в интервальной оценке, их связь с понятиями точности и надёжности оценки, соотношение между точностью и надёжностью, возможность их улучшения путём увеличения объёма выборки; случайный характер границ доверительного интервала и его ширины; вероятностный характер интервальной оценки, вероятность того, что истинное значение оцениваемого параметра окажется внутри найденного по некоторой выборке доверительного интервала (будет «накрыто» интервалом) и вероятность того, что истинное значение оцениваемого параметра окажется вне этого доверительного интервала.

Методика построения интервальной оценки параметра ГС:

- выбирается уровень значимости $\boldsymbol{\alpha}$ (доверительная вероятность $\boldsymbol{p}$)

- определяется статистика $\mathbf{\Theta}(\mathbf{X}^{(n)})$, для точечной оценки неизвестного параметра $\boldsymbol{\theta}$

- строится функция от $\mathbf{\Theta}(\mathbf{X}^{(n)})$ – статистика $\boldsymbol{Z}(\mathbf{\Theta};\boldsymbol{\theta})$, зависящая и от неизвестного параметра $\boldsymbol{\theta}$, которая удовлетворяет условиям:

а) для любого допустимого $\mathbf{x}^{(\boldsymbol{n})}=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ статистика $\boldsymbol{Z}$ – непрерывная и строго монотонная функция аргумента функция $\boldsymbol{\theta}$;

б) закон распределения случайной величины $\boldsymbol{Z}$ известен;

в) закон распределения случайной величины $\boldsymbol{Z}$ не зависит от параметра $\boldsymbol{\theta}$;

г) функция распределения случайной величины $\boldsymbol{Z}$ непрерывна и строго возрастет

- по заданной доверительной вероятности составляется уравнение интервала значений выбранной статистики, накладывается дополнительное условие, и с их учётом решением уравнения определяются границы этого интервала (обычно с использованием таблицы квантилей стандартных распределений)
- решаются неравенства (относительно $\boldsymbol{\theta}$) для определения случайных границ доверительного интервала
- по выборке $\mathbf{x}^{(\boldsymbol{n})}=(x_1, x_2,\ldots, x_n,)$ вычисляется выборочное числовое значение статистики $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X}^{(n)})= \boldsymbol{\theta}^{(n)}$ (точечная оценка параметра $\boldsymbol{\theta}$) и подставляется в предыдущие неравенства – таким образом находится требуемый числовой доверительной интервал $(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$ по уровню значимости $\boldsymbol{\alpha}$ (на имеющейся выборке);
- записывается результат интервальной оценки с учётом её вероятностного характера.

30.1 Интервальная оценка для математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной дисперсии; схема построения доверительного интервала по выборке:

- задание уровня значимости (доверительной вероятности);
- выбор статистики для построения интервальной статистики – центрированного выборочного среднего, нормированного на его среднеквадратичное отклонение; нормальное распределение выборочного среднего и, как следствие, стандартное нормальное распределение выбранной статистики;
- уравнение и дополнительное условие для интервала значений выбранной статистики по заданной доверительной вероятности;
- решение уравнения при дополнительном условии с использованием таблицы квантилей стандартного нормального распределения, определение интервала значений выбранной статистики с заданной доверительной вероятностью;
- определение границ доверительного интервала для математического ожидания путём решения соответствующих неравенств с учётом связи между выборочным средним и выбранной статистикой, и подстановки числовой реализации выборочного среднего на полученной выборке;
- запись результата с учётом вероятностного характера интервальной оценки.

30.2 Интервальная оценка для дисперсии (и среднеквадратичного отклонения) нормально распределённой генеральной совокупности при известном математическом ожидании; схема построения доверительного интервала по выборке объёма ***n***:

- задание уровня значимости (доверительной вероятности);

- выбор статистики для построения интервальной статистики – выборочной дисперсии, нормированной на среднеквадратичное отклонение рассматриваемой генеральной совокупности – статистики «хи-квадрат» с ***n*** степенями свободы;

- уравнение и дополнительное условие для интервала значений выбранной статистики по заданной доверительной вероятности;

- решение уравнения при дополнительном условии с использованием таблицы квантилей «хи-квадрат» с ***n*** степенями свободы, определение интервала значений выбранной статистики с заданной доверительной вероятностью;

- определение границ доверительного интервала для математического ожидания путём решения соответствующих неравенств с учётом связи между выборочной дисперсией и выбранной статистикой «хи-квадрат», и подстановки числовой реализации выборочной дисперсии на полученной выборке;

- запись результата с учётом вероятностного характера интервальной оценки;

- построение на основе полученного результата доверительного интервала для среднеквадратичного отклонения.

30.3 Интервальная оценка для дисперсии (и среднеквадратичного отклонения) нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестном математическом ожидании – построение доверительного интервала по выборке объёма ***n*** выполняется по схеме **30.2** с заменой выборочной дисперсии на исправленную выборочную дисперсию и, соответственно, с использованием статистики «хи-квадрат» с **(*n*-1)** степенями свободы и таблицы её квантилей.

30.4 Интервальная оценка для математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при неизвестной дисперсии; схема построения доверительного интервала по выборке:

- задание уровня значимости (доверительной вероятности);

- выбор статистики для построения интервальной статистики – центрированного выборочного среднего, нормированного на оценку его среднеквадратичного отклонение по исправленной выборочной дисперсии – статистика ***T*** - Стьюдента;

- уравнение и дополнительное условие для интервала значений выбранной статистики по заданной доверительной вероятности;

- решение уравнения при дополнительном условии с использованием таблицы квантилей распределения ***T*** - Стьюдента, определение интервала значений выбранной статистики с заданной доверительной вероятностию;

- определение границ доверительного интервала для математического ожидания путём решения соответствующих неравенств с учётом связи между выборочным средним и выбранной статистикой, и подстановки числовой реализации выборочного среднего и исправленной выборочной дисперсии на полученной выборке;

- запись результата с учётом вероятностного характера интервальной оценки.

30.5 Интервальная оценка разности математических ожиданий двух нормально распределённых генеральных совокупностей с известными дисперсиями – построение доверительного интервала по схеме, аналогичной **30.1** с использованием статистики, равной центрированной разности выборочных средних исследуемых генеральных совокупностей, нормированной на её среднеквадратичное отклонение и имеющей стандартное нормальное распределение;

30.6 Интервальная оценка отношения дисперсий двух нормально распределённых генеральных совокупностей с известными математическими ожиданиями – построение доверительного интервала по общей схеме с использованием выборочных дисперсий исследуемых генеральных совокупностей и соответствующего распределения Фишера;

30.7 Интервальная оценка отношения дисперсий двух нормально распределённых генеральных совокупностей с неизвестными математическими ожиданиями – построение доверительного интервала по общей схеме с использованием исправленных выборочных дисперсий исследуемых генеральных совокупностей и соответствующего распределения Фишера;

30.8 Распределение «хи-квадрат» с ***k*** степенями свободы, его связь с нормальным распределением, плотность распределения и основные особенности;

распределение Стьюдента, его связь с нормальным распределением и «хи-квадрат» распределением, плотность распределения и основные особенности;

распределение Фишера его связь с «хи-квадрат» распределениями, плотность распределения и основные особенности.

32. Проверка статистических гипотез. Понятие статистической гипотезы.

31.1 Параметрические гипотезы, простая и сложная гипотеза, типичная задача проверки параметрической гипотезы на основании выборки из генеральной совокупности, основная и альтернативная гипотезы; критерий проверки параметрической гипотезы – критерий значимости: критическая область критерия как редкое событий в опыте по получению выборки из рассматриваемой генеральной совокупности, уровень значимости, доверительная область критерия значимости; ошибки критерия: *ошибка первого рода* - «отвергнуть правильную гипотезу» (основную), вероятность ошибки первого рода; *ошибка второго рода* – «принять ложную гипотезу» (основную), вероятность ошибки второго рода; мощность критерия проверки гипотезы;

схема проверки параметрической гипотезы по критерию значимости:

- сформулировать основную и альтернативную гипотезы
- выбрать уровень значимости
- выбрать статиситку критерия (обычно по таким же признакам, что и для интервальной оценки параметра гипотезы)
- определить на числовой оси критическую область выбранной статистики критерия по выбранному уровню значимости и соответствующую доверительную область
- по полученной в результате опыта выборке вычислить выборочное значение статистики критерия
- по найденному выборочному значению статистики критерия принять решение: отвергнуть проверяемую (основную) гипотезу, если это значение попадает в критическую область статистики критерия («значимое» выборочное значение статистики) – как не согласующуюся с результатами опыта по выбранному уровню значимости; принять проверяемую (основную) гипотезу, если это значение попадает в доверительную область статистики критерия («незначимое» выборочное значение статистики) – как не противоречащую результатам опыта по выбранному уровню значимости.

Выбор уровня значимости и соответствующей критической (и доверительной) области критерия значимости, необходимость поиска компромисса между вероятностями ошибок первого и второго рода; левосторонний, правосторонний и двухсторонний критерии и их критические (и доверительные) области с использованием квантилей распределения статистики критерия; уменьшение вероятности ошибки второго рода (увеличение мощности критерия) при заданном уровне значимости с увеличением объёма выборки.

Проверка параметрической гипотезы и интервальная оценка проверяемого параметра: основная гипотеза принимается, если доверительный интервал накрывает проверяемое (основное) значение параметра и отвергается в противном случае; построение критических (и доверительных) областей критерия проверки гипотез о параметрах нормально распределённой генеральной совокупности с использованием соответствующих интервальных оценок.

31.2 Проверка гипотез о законе распределения; задача – проверить некоторое предположение (гипотезу) о законе распределения исследуемой генеральной совокупности, то есть по полученной выборке сделать заключение, согласуются ли результаты наблюдений с предположением; постановка задачи.

Проверка гипотезы о законе распределения по критерию «хи-квадрат» (χ^2) Пирсона:

- формулируется основная гипотеза, выбирается уровень значимости α
- производится группировка выборки – строится группированный статистический ряд
- по выборке вычисляются точечные оценки неизвестных параметров распределения (если имеются) - по предполагаемой функции распределения (гипотезе) вычисляются гипотетические вероятности попадания значений исследуемой случайной величины в интервалы группировки (с использованием вычисленных оценок параметров распределения) и затем гипотетические значения частот выборки используемого объёма в интервалах группировки
- вычисляется выборочное значение $\chi^2_{\text{в}}$ статистики критерия «хи-квадрат», определяется число степеней свободы её распределения (распределение «хи-квадрат»)
- определяется критическая (и доверительная) область значений статистики критерия с использованием таблицы квантилей распределения χ^2 с соответствующим числом степеней свободы
- принимается решение по результатам проверки: если значение $\chi^2_{\text{в}}$ попадает в доверительную область – гипотеза принимается, если выборочное значение $\chi^2_{\text{в}}$ попадает в критическую область – гипотеза отвергается.

33. Двумерная выборка, элементы корреляционного анализа; диаграмма рассеивания (корреляционное поле) – графическое представление реализации двумерной выборки; основные параметры распределения случайного вектора и их оценки; точечные оценки ковариации и коэффициента корреляции компонент двумерного случайного вектора по двумерной выборке: выборочная ковариация и выборочный коэффициент корреляции, их свойства и соответствие с истинными значениями; регрессионный анализ, модель регрессии, линейная модель, полиномиальная модель; метод наименьших квадратов оценки параметров модели регрессии, свойства оценок коэффициентов линейной модели при нормальном некоррелированном распределении ошибок наблюдения: совпадение с оценками по методу максимального правдоподобия, несмещённость, состоятельность, эффективность.

31.2 Линейная регрессия, анализ линейной регрессии методом наименьших квадратов, нахождение эмпирических коэффициентов линейной регрессии методом наименьших квадратов, формулы для эмпирических коэффициентов линейной регрессии по элементам двумерной выборки, их связь с выборочным коэффициентом корреляции; эмпирическая прямая регрессии, её характерная точка, её свойство по отношению к любой другой прямой на диаграмме рассеивания; соотношение с истинной прямой регрессии (если она имеет место); расширение использования линейной регрессии на более широкий класс функций регрессии путём элементарных математических преобразований; примеры возможного использования анализа линейной регрессии.

Рекомендуемая литература.

а) ***основная литература***:

1. С.Г. Кальней, В.В. Лесин, А.А. Прокофьев. Математика. Учебное пособие, Том 2 (разделы V, VI). Изд. «Курс», Москва, 2016.
2. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1987.
3. В Е. Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1977.
4. Вуколов Э. А. и др. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы. Под ред. А. В. Ефимова.”Наука”, М., 1984.
5. А. В. Боголюбов. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. МГТУ “Станкин”, М. 1997; МГТУ “Станкин”, М. 2007.
6. В Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1979.
7. Применение комбинаторики к вычислению вероятностей (методические указания к практическим занятиям). Сост. А. Л. Владимиров. МГТУ “Станкин”, М. 2000.
8. 8. Математическая статистика (методические указания к выполнению РГР). Сост. А. Л. Владимиров. МГТУ “Станкин”, М. 1998, МГТУ “Станкин”, М. 2001.

***б) дополнительная литература*:**

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., «Наука», 1962.
2. Смирнов Н. В., Дудин-Барковский. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1969.
3. Гнеденко В.В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1971.
4. Коваленко И.Н., Филиппова А. А. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Высшая школа», 1982.
5. Захаров В.Н. Севастьянов В.А., Чистяков В. П. Теория вероятностей. М., «Наука», 1985.
6. Пытьев Ю. П., Шишмаров И. А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. М., МГУ, 1983.
7. Агапов В. И. Задачник по теории вероятностей. М., «Высшая школа», 1986.
8. Курс лекций по теории вероятностей. Сост. М. В. Якобовский, Е. Ю. Кулькова. МГТУ “Станкин”, М. 2004.