Конспект Лекций

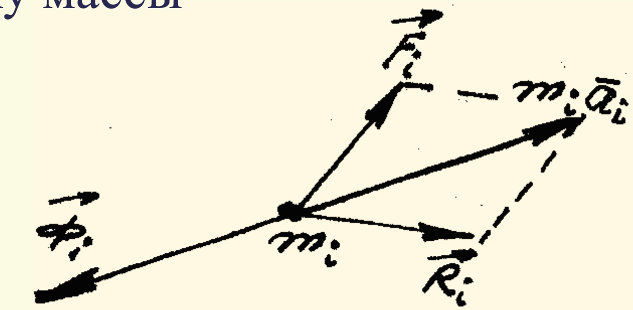
Теоретическая механика

Глава XVIII

Глава XVIII. Принцип Даламбера

§18.1. Принцип Даламбера.

СМТ: ***n*** точек, i – номер точки. Пусть на i-ю точку массы m_i действуют активные силы и силы реакций.



$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, \qquad \textbf{(18.1)}$$

где $\vec{F}_i$ - равнодействующая активных сил, $\vec{R}_i$ - равнодействующая сил реакций.

$$\vec{\varPhi}_i = -m_i\vec{a}_i \text{ - даламберова сила инерции.} \qquad \textbf{(18.2)}$$

Из (18.1): $\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\varPhi}_i = 0$ **(18.3)**

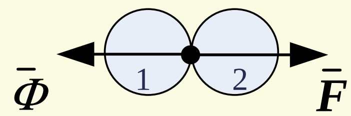
Принцип Даламбера для точки: при движении материальной точки приложенные к ней активная сила и сила реакции связи как бы уравновешиваются условно приложенной к ней силой инерции.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{\varPhi}_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\varPhi}_i = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{F}_n + \vec{R}_n + \vec{\Phi}_n = 0 \end{array}\right\} \textbf{(18.4)}$$

Принцип Даламбера для СМТ: если в любой момент времени к каждой из точек системы приложить активные силы, силы реакций и силу инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно применять все уравнения статики.

§18.2. Метод кинетостатики.

$$m\vec{a} = \vec{F},\ -m\vec{a} = \vec{\Phi}.$$



$$\left.\begin{aligned}
&\vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{\Phi}_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{\Phi}_i = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\vec{F}_n + \vec{R}_n + \Phi_n = 0
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(18.4)}$$

СМТ – в равновесии $\Rightarrow\ \vec{F}^{\text{гл}} = 0,\ \vec{M}_{\text{O}}^{\text{гл}} = 0.$

$$\vec{F}^{\text{гл}} + \vec{R}^{\text{гл}} + \vec{\Phi}^{\text{гл}} = 0, \qquad \textbf{(18.5)}$$

$$\vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{F}) + \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{R}) + \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = 0, \text{ где} \quad \textbf{(18.6)}$$

$$\vec{F}^{\text{гл}} = \sum \vec{F}_i, \quad \vec{R}^{\text{гл}} = \sum \vec{R}_i, \quad \vec{\Phi}^{\text{гл}} = \sum \vec{\Phi}_i, \qquad \textbf{(18.7)}$$

$$\vec{M}_{\text{O}}^{\text{гл}}(\vec{F}) = \sum \vec{M}_{\text{O}}(\vec{F}_i),\ \vec{M}_{\text{O}}^{\text{гл}}(\vec{R}) = \sum \vec{M}_{\text{O}}(\vec{R}_i),\ \vec{M}_{\text{O}}^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{M}_{\text{O}}(\vec{\Phi}_i).\textbf{(18.8)}$$

Метод кинетостатики: В любой момент времени векторная **сумма главных векторов** активных сил, сил реакций и сил инерции, приложенных к СМТ, **равна 0**. **Сумма главных моментов** активных сил, сил реакций и сил инерции, приложенных к СМТ, относительно произвольного центра **равна 0**.

Двум векторным уравнениям (18.5) и (18.6) соответствуют шесть скалярных уравнений в проекциях на оси координат.

§18.3. Приведение сил инерции твердого тела к простейшему виду

$$\vec{\Phi}^{\text{гл}} = \sum \vec{\Phi}_i = -\sum m_i \vec{a}_i .$$

$$\vec{r}_C = \frac{\Sigma m_i \vec{r}_i}{M} \Rightarrow M\,\vec{r}_C = \Sigma m_i \vec{r}_i \quad \left(\frac{d^2}{dt^2}\right): \quad M\,\vec{a}_C = \Sigma m_i \vec{a}_i .$$

$$\boxed{\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -M\,\vec{a}_C .} \qquad \textbf{(18.9)}$$

<u>для ***любого*** тела и вида его движения.</u>

$$\vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{m}_O(\vec{\Phi}_i) = \sum \vec{r}_i \times (-m_i \vec{a}_i) = -\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i . \qquad \textbf{(18.10)}$$

$\vec{M}_O^{\text{гл}}(\vec{\Phi})$ зависит от вида и характера движения тела и от положения моментной точки O.

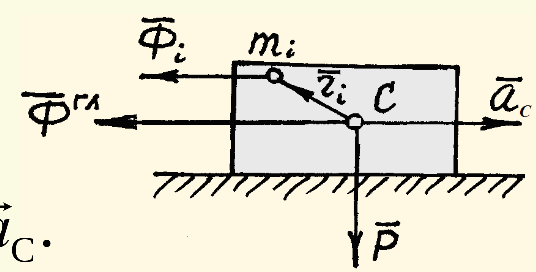
Приведение сил инерции к центру для частных случаев движения ТТ.

В качестве центра приведения выбираем ***центр тяжести C***.

<u>1. Поступательное движение.</u>

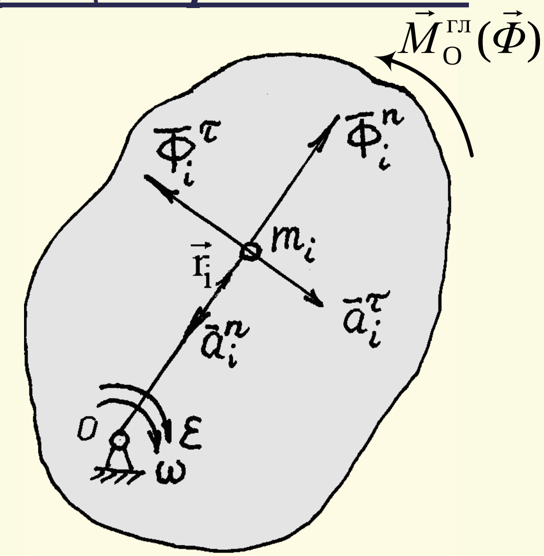
$$\boxed{\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -M\,\vec{a}_C ;} \quad \boxed{\vec{M}_C^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = 0.}$$

$$\vec{M}_C^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i = -\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = -\left(\cancelto{0}{\sum m_i \vec{r}_i}\right) \times \vec{a}_C .$$



§18.3. Приведение сил инерции твердого тела к простейшему виду. Продолжение 1.

2. *Вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр тяжести.*



- Пусть тело массы *M* имеет плоскость симметрии и вращается вокруг неподвижной оси **Oz**, перпендикулярной плоскости симметрии.
- Приведем силы инерции к точке **O**, лежащей в плоскости симметрии тела. Главный вектор сил инерции

$$\vec{\Phi}^{гл} = -M\,\vec{a}_C = -M\,(\vec{a}_C^{\,n} + \vec{a}_C^{\,\tau}) \quad \textbf{(18.11)}$$

Если ось вращения проходит через центр тяжести, то

$$\boxed{\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -M\,\vec{a}_{\text{C}} = 0;} \quad \textbf{(18.12)} \quad \boxed{\vec{M}_{\text{C}}^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = -J_C\vec{\varepsilon}.} \quad \textbf{(18.13)}$$

- Разложим силу инерции каждой точки тела две : нормальную $\vec{\Phi}_i^{n} = -m_i a_i^n$ и тангенциальную $\vec{\Phi}_i^{\tau} = -m_i a_i^{\tau}$. Тогда

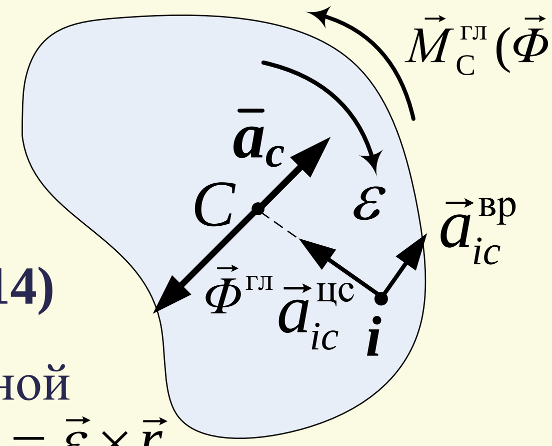
$$\vec{M}_{\text{O}}^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{M}_{\text{O}}(\vec{\Phi}_i) = \sum \cancelto{0}{\vec{M}_{\text{O}}(\vec{\Phi}_i^{n})} + \sum \vec{M}_{\text{O}}(\vec{\Phi}_i^{\tau}) = \sum \vec{r}_i \times \vec{\Phi}_i^{\tau} =$$

$$= -\sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i^{\tau} = -\sum \vec{r}_i \times m_i(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i) = -\left(\sum m_i r_i^2\right) \cdot \vec{\varepsilon} = -J_{\text{O}} \cdot \vec{\varepsilon}.$$

$$\vec{M}_{\text{O}}^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = -J_O\vec{\varepsilon}.$$

- Если ось вращения проходит через центр тяжести **C**, то $\vec{M}_{\text{C}}^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = -J_C\vec{\varepsilon}.$

§18.3. Приведение сил инерции твердого тела к простейшему виду. Продолжение 2.



3. Плоскопараллельное движение тела.

Пусть тело массы *М* имеет плоскость симметрии и движется параллельно ей. Приведем силы инерции к центру тяжести ***С***.

Главный вектор сил инерции $\boxed{\vec{\Phi}^{\text{гл}} = -M\,\vec{a}_C;}$ **(18.14)**

Ищем главный момент сил инерции: Для произвольной точки тела $\vec{a}_i = \vec{a}_C + \vec{a}_{ic}^{ц} + \vec{a}_{ic}^{вр}$, где $\vec{a}_{ic}^{ц} = -\omega^2 \vec{r}_i$, $\vec{a}_{ic}^{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i$.
($\vec{r}_i$ - радиус-вектор, идущий из полюса ***С*** в точку ***i***).

Прикладываем к точке силы инерции противоположно этим ускорениям:

$$\vec{M}_C^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = \sum \vec{r}_i \times m_i(\vec{\Phi}_c + \vec{\Phi}^{ц} + \vec{\Phi}^{вр}) = \sum \vec{r}_i \times m_i(-\vec{a}_C - \omega^2 \vec{r}_i - \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i) =$$

$$= -(\underbrace{\sum m_i \vec{r}_i}_{0}) \times \vec{a}_C - (\sum m_i \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{r}_i}_{0})\,\omega^2 - (\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_i) = -\left(\sum m_i r_i^2\right) \cdot \vec{\varepsilon} = -J_C \cdot \vec{\varepsilon}.$$

Главный момент сил инерции: $\boxed{\vec{M}_C^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = -J_C \vec{\varepsilon}.}$ **(18.15)**

§18.4. Общее уравнение динамики.

Принцип Даламбера позволяет свести решение динамической задачи к решению задачи статики. Задачу статики можно решать, применяя:

1. Уравнения равновесия.

2. Принцип возможных перемещений Лагранжа.

Общее уравнение динамики - это объединение двух принципов: принципа Даламбера и принципа Лагранжа.

Сначала к системе с идеальными стационарными связями прикладывают, кроме заданных сил, силы инерции и получают, согласно принципу Даламбера, уравновешенную систему сил. А затем к этой системе применяют принцип возможных перемещений.

Общее уравнение динамики (ОУД):

Сумма элементарных работ заданных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы с идеальными стационарными связями равна 0:

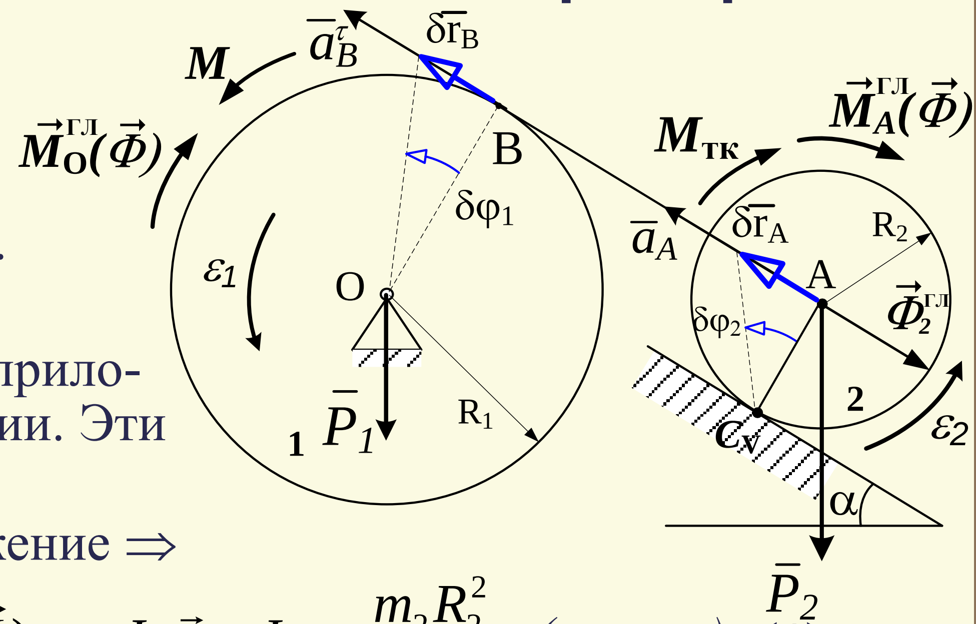
$$\sum \delta A(\vec{F}_i) + \sum \delta A(\vec{\Phi}_i) = 0 \text{ или } \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum \vec{\Phi}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \qquad \textbf{(18.16)}$$

Если связи, наложенные на систему, не являются идеальными, то их реакции считают заданными силами.

ОУД удобно использовать для определения ускорений.

Если система имеет несколько степеней свободы, то для каждого независимого возможного перемещения составляется своё общее уравнение динамики.

§18.4. Общее уравнение динамики. Пример.



Дано: $m_1, m_2, R_1, R_2, f_{тк}, M, \alpha$.

Найти: a_A.

1. Условие, рисунок, активные силы и реакции неидеальных связей.

$$M_{тк} = f_{тк} m_2 g \cos\alpha \,.$$

2. Мысленно остановим систему, приложив к каждой её точке силу инерции. Эти силы приводятся к:

Тело 2: плоскопараллельное движение ⇒

$$\vec{\Phi}_2^{гл} = -m_2\,\vec{a}_A; \;\; \textit{(рисуем)} \;\; \vec{M}_A^{гл}(\vec{\Phi}) = -J_A\vec{\varepsilon}_2, \; J_A = \frac{m_2R_2^2}{2}. \;\; \textit{(рисуем)} \qquad \textbf{(1)}$$

Тело 1: вращательное движение ⇒

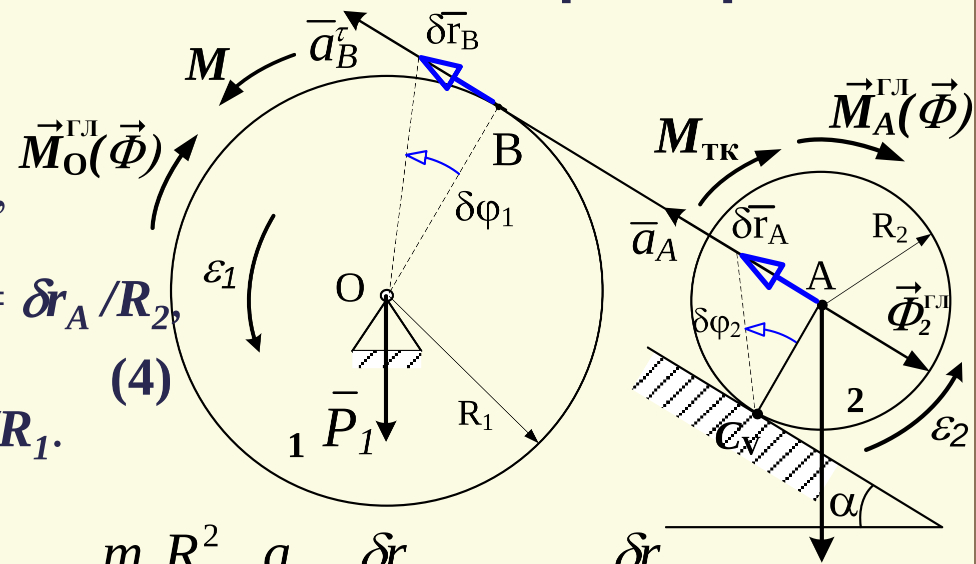
$$\vec{\Phi}_1^{гл} = -M\,\vec{a}_O = 0; \;\; \vec{M}_O^{гл}(\vec{\Phi}) = -J_O\vec{\varepsilon}_1, \; J_O = \frac{m_1R_1^2}{2}. \;\; \textit{(рисуем)} \qquad \textbf{(2)}$$

3. Дадим системе возможное перемещение. При этом точка **A** переместится на $\delta\vec{r}_A$, тело **2** повернётся на угол $\boldsymbol{\delta\varphi_2}$, а тело **1** повернётся на угол $\boldsymbol{\delta\varphi_1}$.

Запишем ОУД: $\sum \delta A(\vec{F}_i) + \sum \delta A(\vec{\Phi}_i) = 0$

$$\vec{P}_2\cdot\delta\vec{r}_A + \vec{\Phi}_2\cdot\delta\vec{r}_A - M_A^{гл}(\vec{\Phi})\cdot\delta\varphi_2 - M_{тк}\cdot\delta\varphi_2 + M\cdot\delta\varphi_1 - M_O^{гл}(\vec{\Phi})\cdot\delta\varphi_1 = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

§18.4. Общее уравнение динамики. Пример.



4. ***Кинематический анализ.***

Выразим через a_A и δr_B кинематические характеристики точек и тел, входящие в ОУД.

$\varepsilon_2 = a_A/AC_V = a_A/R_2$ $\quad \delta\varphi_2 = \delta r_A/AC_V = \delta r_A/R_2,$

$\varepsilon_1 = a_B^\tau/BO = a_A/R_1.$ $\quad \delta\varphi_1 = \delta r_B/BO = \delta r_A/R_1.$ **(4)**

5. Подставим (1), (2) и (4) в (3).

$$m_2 g\,\delta r_A \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + m_2 a_A \delta r_A \cos\pi - \frac{m_2R_2^2}{2}\cdot\frac{a_A}{R_2}\cdot\frac{\delta r_A}{R_2} - M_{тк}\cdot\frac{\delta r_A}{R_2} + \bar{P}_2$$

$$+ M\cdot\frac{\delta r_A}{R_1} - \frac{m_1R_1^2}{2}\cdot\frac{a_A}{R_1}\cdot\frac{\delta r_A}{R_1} = 0.$$

$$\delta r_A\left(\frac{M}{R_1} - m_2 g\sin\alpha - m_2 a_A - \frac{m_2 a_A}{2} - m_2 g\cos\alpha\cdot\frac{f_{тк}}{R_2} - \frac{m_1 a_A}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{M}{R_1} - m_2 g\left(\sin\alpha + \frac{f_{тк}}{R_2}\cos\alpha\right) = \frac{1}{2}a_A(3m_2+m_1) \Rightarrow a_A = \frac{\lambda}{\psi}$$

$$\vec{M}_A^{гл}(\vec{\Phi}) = J_A\varepsilon_2,\quad J_A = \frac{m_2R_2^2}{2} \quad \textbf{(1)} \qquad \vec{M}_O^{гл}(\vec{\Phi}) = J_O\varepsilon_1,\quad J_O = \frac{m_1R_1^2}{2} \quad \textbf{(2)}$$

$$\vec{P}_2\cdot\delta\vec{r}_A + \vec{\Phi}_2\cdot\delta\vec{r}_A - M_A^{гл}(\vec{\Phi})\cdot\delta\varphi_2 - M_{тк}\cdot\delta\varphi_2 + M\cdot\delta\varphi_1 - M_O^{гл}(\vec{\Phi})\cdot\delta\varphi_1 = 0. \quad \textbf{(3)}$$

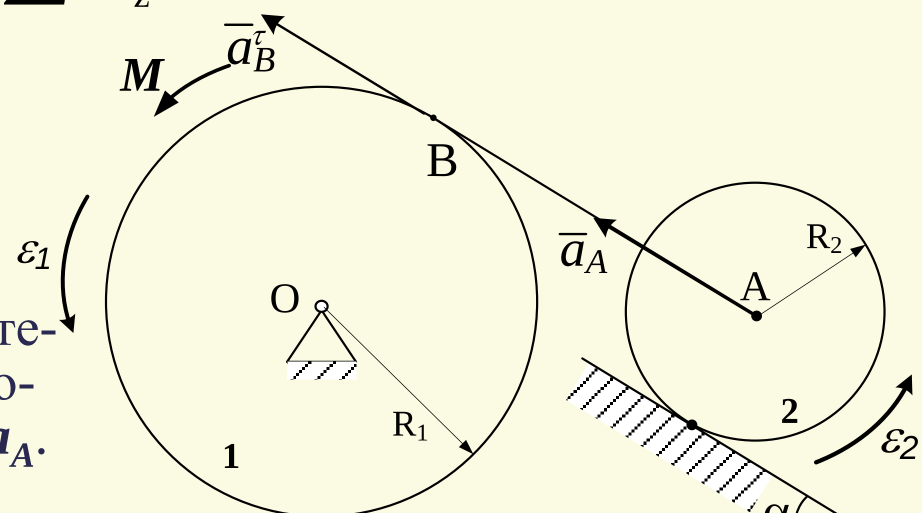
§18.5. Метод кинетостатики. Пример.

Применим метод кинетостатики для определения реакций связей при движении системы тел.

$$\vec{F}^{\text{гл}} + \vec{R}^{\text{гл}} + \vec{\Phi}^{\text{гл}} = 0, \quad \textbf{(18.5)} \qquad \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{F}) + \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{R}) + \vec{M}_0^{\text{гл}}(\vec{\Phi}) = 0. \quad \textbf{(18.6)}$$

На плоскости двум векторным уравнениям (18.5) и (18.6) соответствуют три скалярных уравнения в проекциях на оси координат.

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M_z = 0. \qquad \textbf{(18.17)}$$



Дано: $\boldsymbol{m_1, m_2, R_1, R_2, f_{\text{тк}}, M, \alpha, a_A}$.
Найти: $\boldsymbol{R_O, T, F_{\text{сц}}}$.

1. Выразим кинематические характеристики, входящие в главные векторы и моменты сил инерции через $\boldsymbol{a_A}$.

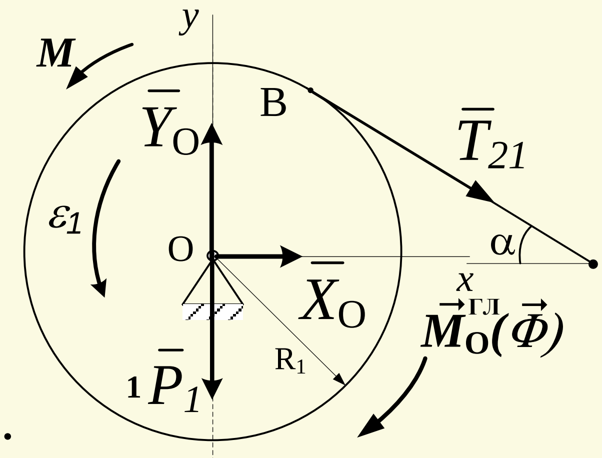
$\boldsymbol{\varepsilon_2 = a_A/AC_V = a_A/R_2}$

$\boldsymbol{\varepsilon_1 = a_B^{\tau}/BO = a_A/R_1}$.

(укажем их на рисунке)

Для решения задачи рассмотрим движение каждого из тел по отдельности.

§18.5. Метод кинетостатики. Пример.



2. Для определения реакции в шарнире О и силы натяжения нити рассмотрим движение тела ***1***. Укажем активные силы и реакции связей.

3. Мысленно остановим тело, приложив к каждой его точке силу инерции. Т.к. движение вращательное, то они приводятся к:

$$\vec{\Phi}_1^{гл} = -M\,\vec{a}_O = 0; \quad \vec{M}_O^{гл}(\vec{\Phi}) = -J_O\vec{\varepsilon}_1,\ J_O = \frac{m_1R_1^2}{2}.$$

4. Укажем систему координат и запишем уравнения кинетостатики (18.7).

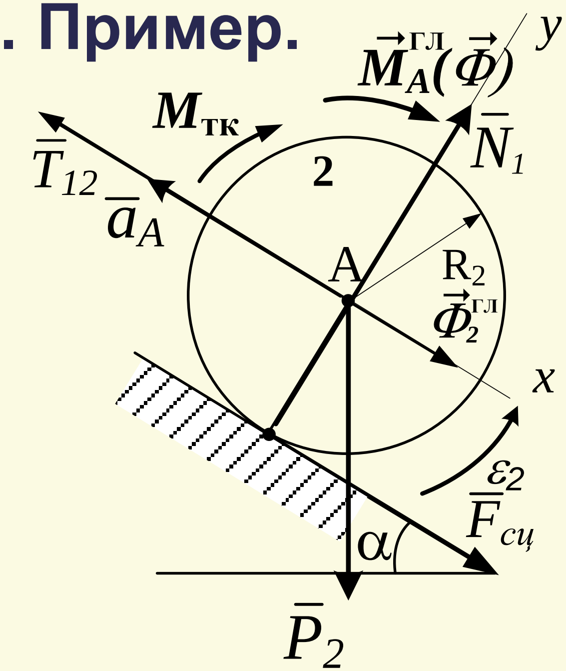
(1) $\sum X = 0: X_O + T_{21}\cos\alpha = 0;$ Из (3): $T_{21} = \dfrac{1}{R_1}(M - \dfrac{m_1R_1^2a_A}{2R_1}) = \dfrac{M}{R_1} - \dfrac{m_1a_A}{2};$

(2) $\sum Y = 0: Y_O - P_1 - T_{21}\sin\alpha = 0;$ Из (1): $X_O = -T_{21}\cos\alpha;$

(3) $\sum M_O = 0: M - M_O^{гл}(\vec{\Phi}) - T_{21}R_1 = 0;$ Из (2): $Y_O = m_1g + T_{21}\sin\alpha;$

$$R_O = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2}.$$

§18.5. Метод кинетостатики. Пример.



2. Для определения $F_{сц}$ рассмотрим движение тела **2**. Укажем активные силы и реакции связей. ($T_{12}=T_{21}$ по 3 аксиоме механики).

3. Мысленно остановим тело, приложив к каждой его точке силу инерции. Т.к. движение вращательное, то они приводятся к:

$$\vec{\Phi}_1^{гл} = -M\,\vec{a}_A;\ \vec{M}_A^{гл}(\vec{\Phi}) = -J_A\vec{\varepsilon}_2,\ J_A = \frac{m_2R_2^2}{2}.$$

4. Укажем систему координат и запишем уравнения кинетостатики (18.7).

$$(4)\quad \sum X = 0: P_2\sin\alpha + F_{сц} - T_{12} + \Phi_2^{гл} = 0;$$

$$(5)\quad \sum Y = 0: N_2 - P_2\cos\alpha = 0;$$

$$(6)\quad \sum M_A = 0: F_{сц}R_2 - M_{тк} - M_A^{гл}(\vec{\Phi}) = 0;$$

Из (4): $F_{сц} = T_{12} - \Phi_2^{гл} - P_2\sin\alpha = T_{12} - m_2(a_A + g\sin\alpha);$ (способ 1)

Из (5): $N_2 = m_2 g\cos\alpha;$

Из (6): $F_{сц} = \dfrac{1}{R_2}\left(M_{тк} + M_A^{гл}(\vec{\Phi})\right) = \dfrac{1}{R_2}\left(m_2 g\cos\alpha\cdot f_{тк} + \dfrac{m_2R_2^2a_A}{2\cdot R_2}\right) =$

$$= \frac{1}{R_2}\left(m_2 g\cos\alpha\cdot f_{тк} + \frac{m_2R_2a_A}{2}\right).$$ (способ 2)