Конспект Лекций

Теоретическая механика

Глава XVII

Глава XVII. Уравнения Лагранжа II рода

§17.1. Обобщенные координаты

СМТ: ***n*** точек $\Rightarrow$ ***3n*** координат, ***m*** голономных стационарных удерживающих связей: $f_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) = 0,\ \ i = 1, ..., m$

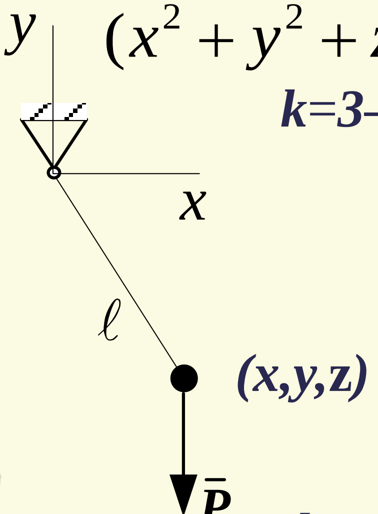
Если ***m=3n*** , то движения нет, т.к. все координаты можно найти из уравнений связей $\Rightarrow$ при движении ***m < 3n***.

Если ***m***>0 , то не все координаты независимы друг от друга, т.к. ***m*** из них можно выразить через остальные из ***m*** уравнений связей. Т.е. положение точек системы можно задать ***k=3n – m*** независимыми координатами.

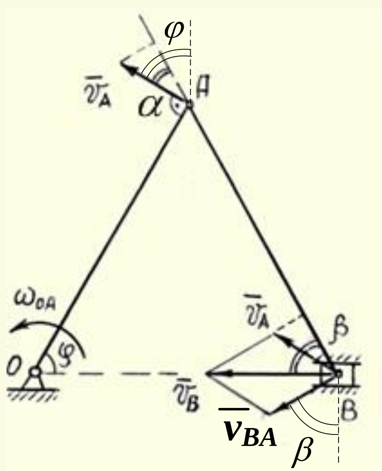
Количество независимых координат определяет ***число степеней свободы*** СМТ.

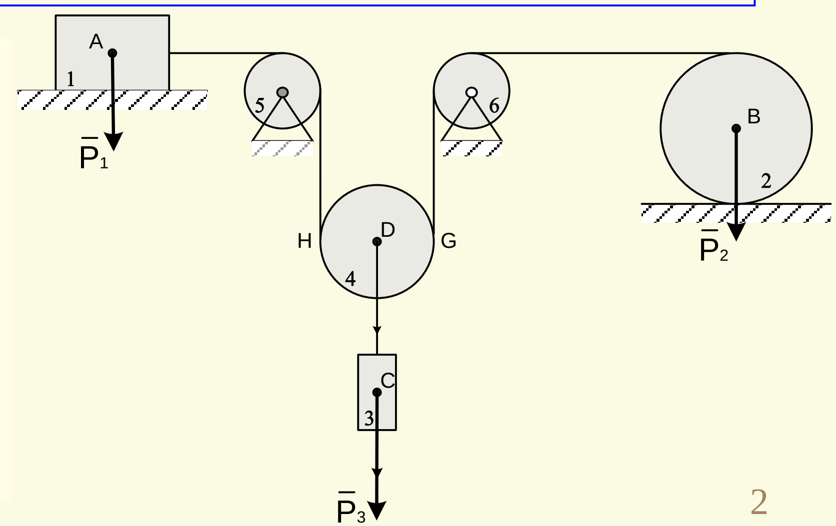
$$(x^2 + y^2 + z^2) - \ell^2 = 0$$

k=3–1=2



k=3–0=3





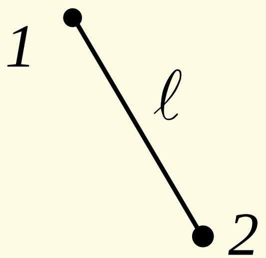
§17.1. Обобщенные координаты. Продолжение 1.

1 • (x_1, y_1)

(x_2, y_2) • *2*

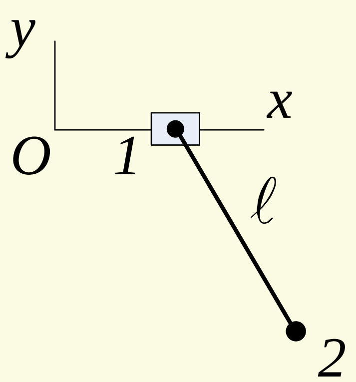
Связей нет

***k*=4–0=4**



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \ell^2$$

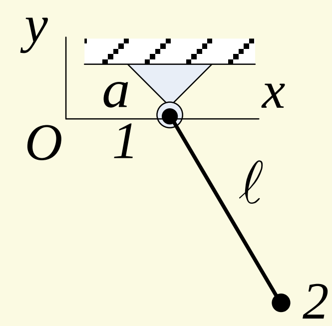
***k*=4–1=3**



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \ell^2$$

$$y_1 = 0$$

***k*=4–2=2**



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \ell^2$$

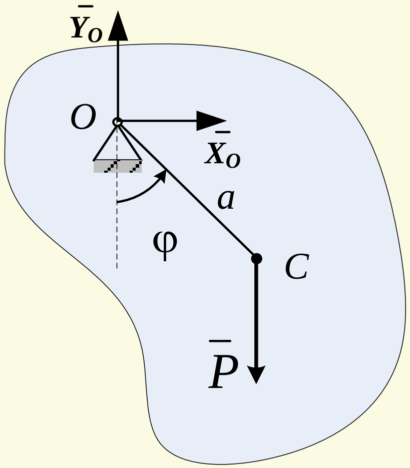
$$x_1 = a$$

$$y_1 = 0$$

***k*=4–3=1**

§17.1. Обобщенные координаты. Продолжение 2.

Часто бывает удобно выразить независимые декартовы координаты через другие геометрические параметры.

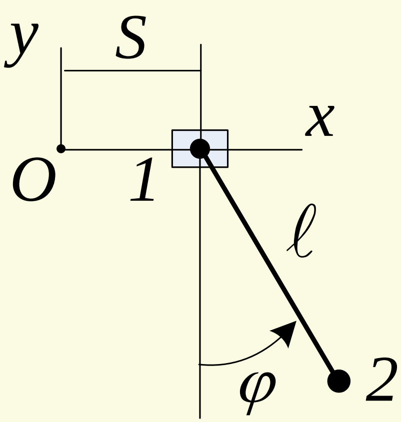


Совокупность ***независимых параметров*** любой размерности, ***однозначно*** определяющих ***положение*** механической системы в пространстве, называется ***обобщенными координатами*** системы. Обозначаются (***$q_1, q_2, \ldots, q_k$***).

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \quad \textbf{(17.1)}$$

где $i = 1, \ldots, n.$

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_k);$$
$$y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_k);$$
$$z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$



$$q_1 = S, q_2 = \varphi.$$

$$x_1 = S;$$
$$y_1 = 0;$$
$$x_2 = S + \ell \sin \varphi;$$
$$y_2 = -\ell \cos \varphi.$$

Т.е. уравнения движения голономной СМТ достаточно представить в виде

$$q_1 = q_1(t), q_2 = q_2(t), \ldots, q_k = q_k(t).$$

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} - \textit{обобщённая скорость},$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q} - \textit{обобщённое ускорение}.$$

Количество обобщённых координат равно числу степеней свободы СМТ.

§17.2. Обобщенные силы.

Дадим системе возможное перемещение δq_j ($j = 1, \dots, k$) по каждой обобщённой координате, при этом каждая ***i***-я точка переместится на $\delta \vec{r}_i$. Из (17.1)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \Rightarrow \quad \delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

$(i = 1, \dots, n - \text{по точкам системы}, \quad j = 1, \dots, k - \text{по обобщённым координатам})$

Пусть на каждую ***i***-ю точку СМТ действует сила $\vec{F}_i$, $i = 1, \dots, n$. Вычислим сумму элементарных работ всех сил на возможном перемещении системы, выразив её через возможные перемещения по обобщённым координатам.

$$\Sigma \delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right) =$$

$$= \delta q_1\left(\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} + \dots + \vec{F}_n \cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_1}\right) + \delta q_2\left(\vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} + \dots + \vec{F}_n \cdot \frac{\partial \vec{r}_n}{\partial q_2}\right) + \dots$$

$$= \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\right)\delta q_1 + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\right)\delta q_2 + \dots + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j + \dots + \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k.$$

$$\Sigma \delta A = \mathrm{Q}_1\,\delta q_1 + \mathrm{Q}_2\,\delta q_2 + \dots + \mathrm{Q}_j\,\delta q_j + \dots + \mathrm{Q}_k\,\delta q_k \qquad \textbf{(17.2)}$$, где

$$\mathrm{Q}_1 = \sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\right), \quad \mathrm{Q}_2 = \sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\right), \dots, \mathrm{Q}_k = \sum_i \left(\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) \quad \textbf{(17.3)}$$

§17.2. Обобщенные силы. Продолжение 1.

$$\Sigma\delta A = \mathrm{Q}_1\,\delta q_1 + \mathrm{Q}_2\,\delta q_2 + \ldots + \mathrm{Q}_j\,\delta q_j + \ldots + \mathrm{Q}_k\,\delta q_k = \sum_{j=1}^{k}\mathrm{Q}_j\delta q_j. \quad \textbf{(17.2)}$$

Коэффициенты $\mathbf{Q_j}$, стоящие в выражении элементарной работы активных сил (17.2) при приращениях обобщённых координат, называют ***обобщёнными силами*** по соответствующей обобщённой координате. Это скаляры!

$$\mathrm{Q}_j = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \quad \textbf{(17.4)}$$

Используются, если СМТ имеет больше одной степени свободы.

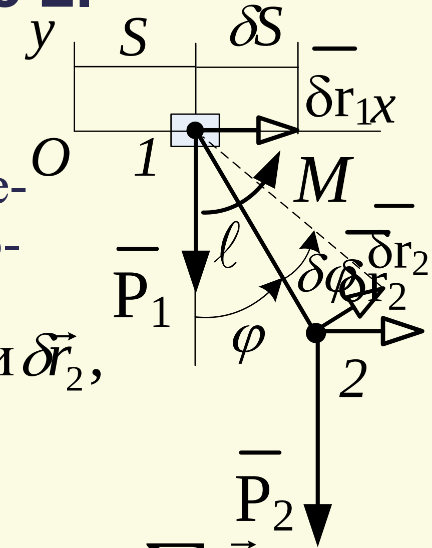
Для нахождения какой-либо $\mathbf{Q}_j$ воспользуемся независимостью обобщённых координат. Дадим системе возможное перемещение только по ***j***-й обобщённой координате: $\delta q_j \neq 0$, $\delta q_i = 0$ при $i \neq j$. Тогда каждая точка СМТ получит своё, соответствующее δq_j, возможное перемещение $\delta\vec{r}_i$.

Из (17.2) имеем: $$\delta A = \sum\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \mathrm{Q}_j\cdot\delta q_j. \quad \textbf{(17.5)}$$

Обобщённая сила – такая вымышленная сила, которая на возможном перемещении по своей обобщённой координате δq производит ту же работу, что и все заданные силы на соответствующих перемещениях $\delta\vec{r}_i$ своих точек приложения.

Из (17.4) имеем: $$\mathrm{Q}_j = \frac{\sum\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i}{\delta q_j}. \quad \textbf{(17.6)}$$

§17.2. Обобщенные силы. Продолжение 2.



Дано: m_1**,** m_2**, M,** ℓ**. Найти:** Q_S**,** Q_φ.

1. Для определения Q_S дадим системе возможное перемещение δS в положительном направлении обобщённой координаты S. При этом угол φ изменять не будем ($\delta\varphi = 0$). Тогда точки 1 и 2 получат возможные перемещения $\delta\vec{r}_1$ и $\delta\vec{r}_2$, $\delta r_1 = \delta r_2 = \delta S$ (т.к. стержень - поступательное движение).

Найдём работу всех сил на этих перемещениях.

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \vec{P}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \vec{P}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 + M \cdot \delta\varphi =$$

$$= P_1 \cdot \delta r_1 \cdot \cos(\pi/2) + P_2 \cdot \delta r_2 \cdot \cos(\pi/2) = 0. \Rightarrow \text{из } (17.6)\ Q_S = \frac{\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i}{\delta q_S} = 0.$$

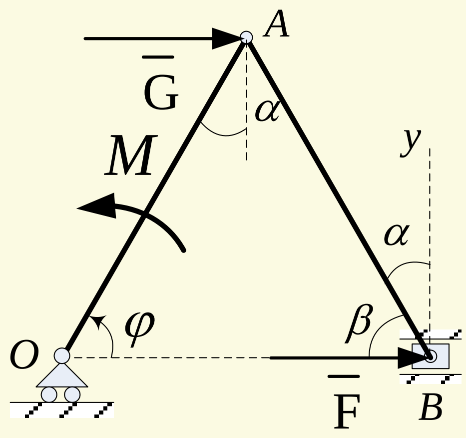
2. Для определения Q_φ дадим системе возможное перемещение $\delta\varphi$ в положительном направлении обобщённой координаты φ. При этом координату S изменять не будем ($\delta S = 0$). Тогда точка 1 неподвижна, стержень повернётся на угол $\delta\varphi$ вокруг точки 1, точка 2 переместится на $\delta\vec{r}_2$.

Найдём работу сил:

$$\delta A = \sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = P_1 \cdot 0_1 - P_2 \cdot \ell \cdot \sin\varphi \cdot \delta\varphi + M \cdot \delta\varphi = (M - P_2 \cdot \ell \cdot \sin\varphi) \cdot \delta\varphi$$

$$Q_\varphi = \frac{\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i}{\delta\varphi} = \frac{(M - P \cdot \ell \cdot \sin\varphi) \cdot \delta\varphi}{\delta\varphi} = M - m_2 g \cdot \ell \cdot \sin\varphi.$$

§17.2. Обобщенные силы. Продолжение 2.



$$q_1 = x_O,$$
$$q_2 = \varphi.$$

Принцип Лагранжа в терминах обобщённых сил

ПВП: в положении равновесия

$$\Sigma\delta A = \Sigma\vec{F}_{\mathrm{i}} \cdot \delta\vec{r}_i = \mathrm{Q}_1\,\delta q_1 + \mathrm{Q}_2\,\delta q_2 + \ldots + \\ + \mathrm{Q}_j\,\delta q_j + \ldots + \mathrm{Q}_k\,\delta q_k = 0. \qquad \textbf{(17.7)}$$

Воспользуемся независимостью обобщённых координат. Дадим системе возможное перемещение только по ***1***-й обобщённой координате: $\boldsymbol{\delta q_1} \neq 0$, $\boldsymbol{\delta q_i} = 0$ при $\boldsymbol{i} \neq 1$. Тогда из (17.7) имеем:

$$\Sigma\delta A = \mathrm{Q}_1\,\delta q_1 = 0. \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Q}_1 = 0.$$

Аналогично по каждой ***j***-й обобщённой координате получаем $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{j}}=0$.

Для равновесия механической системы ***с идеальными стационарными*** связями ***необходимо и достаточно,*** чтобы обобщённые силы по всем обобщённым координатам равнялись ***нулю***.

$$\boxed{\mathrm{Q}_1 = 0, \mathrm{Q}_2 = 0, \ldots, \mathrm{Q}_k = 0.} \qquad \textbf{(17.8)}$$

§17.3. Уравнения Лагранжа II рода.

Уравнения Лагранжа так же, как и уравнения Ньютона (15.5), (15.9), (15.15), служат для исследования движения механической системы.

Количество уравнений зависит от:

Уравнения Ньютона: от количества точек или тел.

Уравнения Лагранжа: от количества степеней свободы.

Пусть СМТ состоит из ***n*** точек и имеет ***k*** степеней свободы. Связи, наложенные на систему, голономные, стационарные и идеальные.

Уравнения Лагранжа II рода имеют вид:

(17.9)
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_к}{\partial \dot{q}_1}\right)-\dfrac{\partial E_к}{\partial q_1}=Q_1\ , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_к}{\partial \dot{q}_2}\right)-\dfrac{\partial E_к}{\partial q_2}=Q_2\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_к}{\partial \dot{q}_k}\right)-\dfrac{\partial E_к}{\partial q_k}=Q_k\ . \end{array}\right\},$$

где $E_К$ - кинетическая энергия системы,

q_j - обобщенные координаты,

$\dot{q}_j$ - обобщенные скорости,

Q_j - обобщенные силы, ***j=1, 2,…, k***.

§17.3. Уравнения Лагранжа II рода. Продолжение 1.

Перед выводом уравнений вспомним, что $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_k)$ (17.1) $\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + ... \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j.$$

Для вывода уравнений Лагранжа докажем 2 леммы.

1. $$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad \textbf{(17.10)} \quad \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + ... \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

2. $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad \textbf{(17.11)}$$

Левая часть: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_N)}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k$$

Правая часть: $$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k.$$

Т.к. правые части полученных выражений равны друг другу, то равны между собой и исходные выражения.

§17.3. Уравнения Лагранжа II рода. Продолжение 2.

Теперь продифференцируем частным образом выражение $E_К = \Sigma \dfrac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2}$:

$$\frac{\partial E_к}{\partial q_j} = \Sigma m_i \vec{v}_i \, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}, \quad \textbf{(17.12)} \qquad \frac{\partial E_К}{\partial \dot{q}_j} = \Sigma m_i \vec{v}_i \, \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad \textbf{(17.13)}$$

Вывод уравнения Лагранжа по ***j***-й обобщённой координате.

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i \;, \; \boldsymbol{i=1, 2, \ldots, n}. \qquad \textbf{(17.14)}$$

умножим (17.14) на $\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ и просуммируем обе части по всем точкам системы:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad \textbf{(17.15)}$$

Правая часть – обобщённая сила $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{j}}$ (17.4).

Левая часть: $$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} =$$

$$u'v = (uv)' - uv'$$

$$u = m_i \vec{v}_i ; v = \frac{d\vec{r}_i}{dq_j}.$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

§17.3. Уравнения Лагранжа II рода. Продолжение 2.

$$\frac{\partial E_к}{\partial q_j} = \Sigma m_i \bar{v}_i \ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \ \textbf{(17.12)}, \quad \frac{\partial E_К}{\partial \dot{q}_j} = \Sigma m_i \vec{v}_i \ \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \textbf{(17.13)}, \quad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \ \textbf{(17.10)}$$

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \ \textbf{(17.11)}$$

(17.10) (17.11)

$$= \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \xrightarrow[(17.13)]{} = \frac{d}{dt} \frac{\partial E_к}{\partial \dot{q}_j}; \quad \sum_i m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \xrightarrow[(17.12)]{} = \frac{\partial E_к}{\partial q_j};$$

Подставляя в (17.15), получаем: $\dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial E_К}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial E_К}{\partial q_j} = Q_j.$

Уравнения Лагранжа 2-го рода (17.7) - обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщённых координат. Проинтегрировав их и получив по начальным условиям константы интегрирования, получают ***k*** уравнений движения СМТ в обобщённых координатах: $\boldsymbol{q_j=q_j(t)}$, $\boldsymbol{j=1, 2,\ldots, k}$. Через них можно выразить зависимости декартовых координат точек СМТ от времени, а также их скорости и ускорения.

§17.3. Уравнения Лагранжа II рода. Продолжение 3.

Основные преимущества уравнений ***Лагранжа*** II рода:

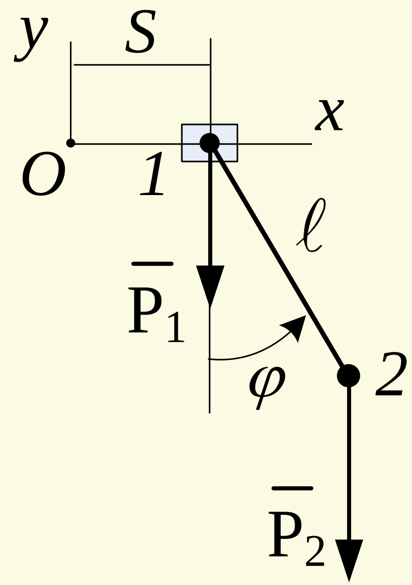
1. Дают единый достаточно простой формальный метод решения задач динамики при любых голономных идеальных стационарных связях.

2. В уравнения не входят реакции связей, следовательно, их не требуется определять.

3. Количество уравнений не зависит от числа входящих в систему точек или тел и равно числу степеней свободы системы.

Если связи не идеальные, то их реакции учитывают как активные силы.

§17.5. Уравнения Лагранжа II рода для консервативных сил



Если силовое поле потенциально, то

$$E_{\Pi} = \sum_i \int_1^0 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\sum_i \int_0^1 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i,$$

$$\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial q_j} = -\sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -Q_j.$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{K}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E_{K}}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial q_j}.} \qquad \textbf{(17.17)}$$

$$E_{\Pi} = -m_2 g h = -m_2 g \ell \cos\varphi.$$

$$Q_S = -\frac{\partial E_{K}}{\delta S} = 0. \qquad \frac{\partial E_{K}}{\delta \varphi} = m_2 g \cdot \ell \cdot \sin\varphi, \quad Q_{\varphi} = -\frac{\partial E_{K}}{\delta \varphi} = -m_2 g \cdot \ell \cdot \sin\varphi.$$