

Раздел 6. Частотные свойства линейных цепей

План

- 6.1. Основные понятия и соотношения (передаточная функция, амплитудная и фазовая частотные характеристики, логарифмические частотные характеристики).
- 6.2. Определение частотных характеристик RL и RC- цепей первого порядка.
- 6.3. Резонансные явления в электрических цепях. Простейшие резонансные контуры. Условия резонанса. Резонансные характеристики. Добротность контура. Частотные характеристики. Полоса пропускания контура.

6.1. Основные понятия и соотношения

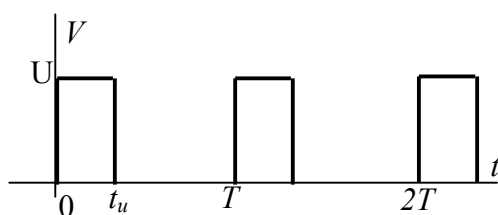
В электрических и электронных устройствах, как правило, действуют сигналы произвольной и довольно сложной формы. Практически невозможно с помощью регулярных методов рассчитать поведение системы при работе с реальными сигналами.

Для линейных устройств в соответствии с принципом наложения можно сложный сигнал представить в виде совокупности более простых, определить реакцию на каждый и затем просуммировать результаты. При проектировании устройства регламентированы виды испытательных сигналов и рассчитаны реакции устройства при их воздействии. В нормативных документах на электротехнические изделия указывают типовые воздействия (синусоидальное, скачкообразное, линейно нарастающее) и базовые параметры реакции (скорость нарастания, установившееся значение, превышение установившегося значения).

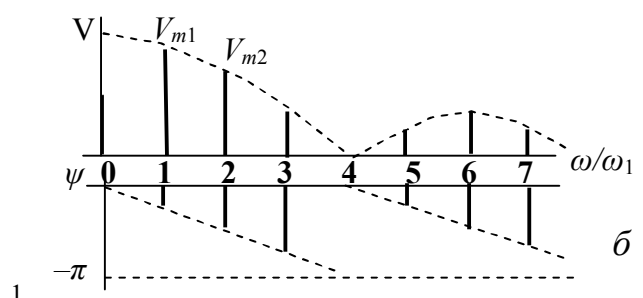
Рассмотрим способы представления электрических сигналов произвольной формы. Применяют два основных вида описания: 1) в форме спектрального состава (в частотной области; 2)) в форме известной функции времени (во временной области).

В частотной области большинство функций, описывающих физические сигналы, можно представить в виде преобразований Фурье. Воздействия (напряжения и токи), представляющие собой сигналы сложной формы делят на аperiodические $V(t)$ (импульсные) и периодические $V_T(t)$.

Периодическую функцию времени $V_T(t) = V(t - nT)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (рис.9.2,а) записывают в форме ряда Фурье: $V_T(t) = V_0 + \sum_{k=1}^{\infty} V_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$, т.е. совокупности постоянной составляющей и гармоник - синусоид с частотами, кратными угловой частоте периодической функции $\omega_1 = 2\pi/T$, амплитудами V_{mk} и начальными фазами ψ_k (рис.9.2,б).



а



б

Рис.2 Периодическая функция (а), ее амплитудный и фазовый спектры (б)

Таким образом, периодическая функция может полностью характеризоваться амплитудами и начальными фазами синусоидальных составляющих, т.е. наборами чисел $V_0, V_{m1}, V_{m2}, \dots, V_{mk}$ и $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k$, графическое представление которых называется *амплитудным* и *фазовым спектрами*, которые являются линейчатыми и представляют собой отрезки прямых, соответствующие в масштабе амплитудам и начальным фазам гармоник.

Апериодическую функцию времени $V(t)$ (рис. 3,а) представляют интегралом Фурье $V(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$.

Импульсную функцию $V(t)$ рассматривают как периодическую $V_T(t)$ с периодом $T \rightarrow \infty$ и сплошной спектр апериодической функции трактуют как совокупность вплотную стоящих гармоник. Амплитудный и фазовый спектры апериодической функции являются непрерывными.

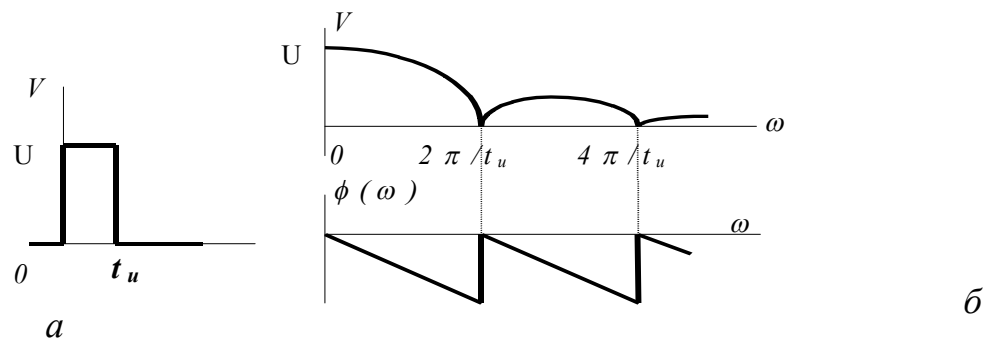


Рис.3 Импульс и его спектр.

Энергия и мощность электрических сигналов (напряжений, токов) может быть определена непосредственно в частотной области с использованием спектральных характеристик.

В устройствах с периодическими токами важную роль играет активная мощность сигнала, которую можно рассчитать в частотной области $P = P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots$ через мощности P_k гармонических составляющих.

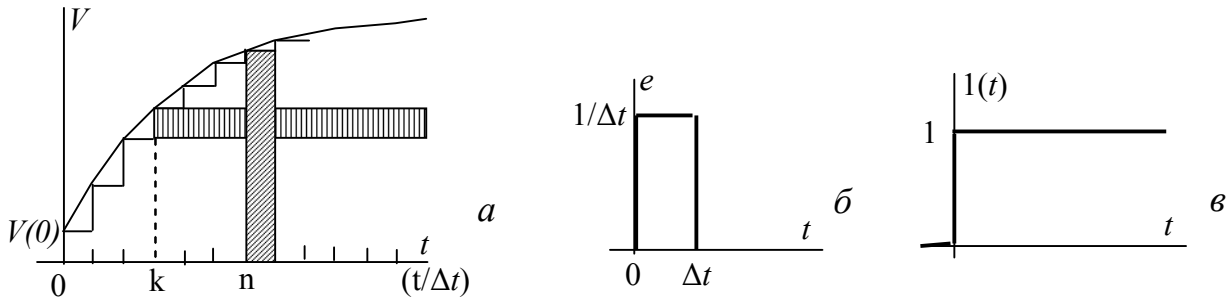
Во временной области непрерывный сигнал $V(t)$ (рис.1,а) аппроксимируют, совокупностью единичных ступенчатых функций $1(t)$ (рис.1,б), действующих через равные интервалы времени Δt (рис. 1а)

$$V(t) \cong V_0 \cdot 1(t) + \sum_k \Delta V_k \cdot 1(t - k\Delta t),$$

где $\Delta V_k = V(k\Delta t) - V[(k-1)\Delta t]$ - приращение функции.

или последовательностью прямоугольных импульсов $e(t)$ единичной площади (рис.1,б)

$$V(t) \cong \sum_n e(t - n\Delta t) \cdot V(n\Delta t) \cdot \Delta t;$$



6.2. Частотные характеристики устройства

При заданном спектре воздействия $V(j\omega)$ для определения спектра реакции (выходного сигнала) $U(j\omega)$ используют комплексную передаточную функцию цепи (устройства).

В цепи выделяют пару входных и пару выходных зажимов (рис.7.5), приводя цепь к пассивному (без внутренних источников) четырехполюснику.

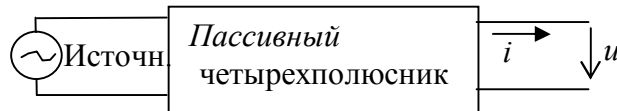


Рис. Схема определения передаточных функций устройства

При наличии индуктивных и емкостных элементов, комплексные сопротивления которых зависят от частоты, параметры четырехполюсника также зависят от частоты сигнала.

Комплексной передаточной функцией называют отношение комплексного выходного напряжения или тока (при заданной нагрузке) к комплексному входному напряжению или току.

$$H(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{V(j\omega)} = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}. \quad (7.9)$$

При изменении частоты на комплексной плоскости получим кривую, которая является годографом, т.е. геометрическим местом точек концов векторов $H(j\omega)$.

В зависимости от вида воздействия и реакции различают комплексные коэффициенты передачи напряжения $K_u(j\omega) = U(j\omega) / V(j\omega)$ и тока $K_I(j\omega) = I(j\omega) / J(j\omega)$; передаточное сопротивление $Z(j\omega) = U(j\omega) / I(j\omega)$ и проводимость $Y(j\omega) = I(j\omega) / V(j\omega)$.

Амплитудной частотной характеристикой четырехполосника (**АЧХ**) называют зависимость от частоты модуля комплексного коэффициента передачи $H(\omega)$, который показывает как изменяются амплитуды (или действующие) значения составляющих спектра сигнала при передаче с входа на выход четырехполосника $H(\omega) = U(\omega)/V(\omega)$.

Фазовой частотной характеристикой четырехполосника (**ФЧХ**) называют зависимость от частоты аргумента комплексной передаточной функции $\theta(\omega)$, который показывает изменение начальные фазы синусоидальных составляющих спектра сигналов $\theta(\omega) = (\phi_2 - \phi_1)$.

АЧХ и ФЧХ, т.е. зависимости $K(\omega)$ и $\theta(\omega)$, являются вещественными функциями частоты и изображаются в виде графиков на плоскости.

Для электрических цепей АЧХ исследуют в широком диапазоне частот и ее график удобно строить в логарифмическом масштабе и называть логарифмическими амплитудными частотными характеристиками (**ЛАЧХ**) $L(\omega) = 20 \lg H(\omega)$.

Величина $L(\omega)$ не имеет размерности, но в силу широкого распространения ей дали наименование БЕЛ, т.е. соотношением: $L_B = \lg(P_2/P_1)$ трактуют как коэффициент передачи мощности цепи в Белах. Очевидно, что значению передачи в 1Б соответствует отношение мощностей $P_2/P_1 = 10$. Если рассматривать отношение напряжений при равенстве $R_{вых} = R_{н}$, то получим $L_B(\omega) = \lg (U_2/U_1)^2 = 2 \lg H(\omega)$. На практике используют более мелкую единицу, равную десятой части Бела $1\text{дБ} = 0.1\text{Б}$, приходят к представленной форме ЛАЧХ в децибелах $L_{\text{дБ}} = 20 \lg H(\omega)$ (табл.7.1).

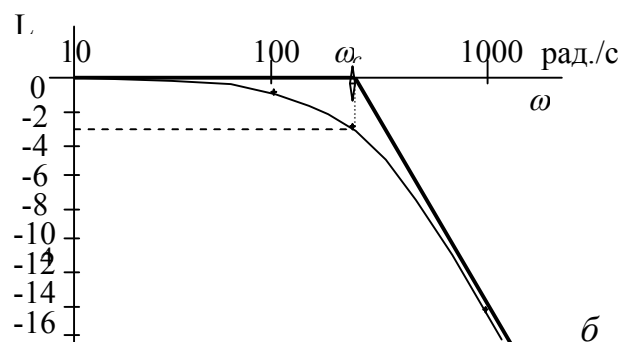
Таблица 7.1

Соотношение значений АЧХ и ЛАЧХ

$H=U_2/U_1$	0.01	0.1	1	1.12	1.41	2	10	100	1000
$L_{\text{дБ}}$	-40	-20	0	1	3	6	20	40	60

При построении графиков по оси абсцисс указывают значения частоты в логарифмическом масштабе. Для этого выбирают некоторое значение начальной частоты исследуемой полосы частот ω_n . Вычисляют текущие значения логарифма относительной частоты $\lg(\omega/\omega_n)$, откладывают эти значения на оси абсцисс и записывают числа, выражающие абсолютные значения частоты ω .

Построим частотные характеристики преобразователя (рис.7.6,а) при номиналах элементов $R_I = 500 \text{ Ом}$,
 $C_I = 10^{-5} \text{ Ф}$.



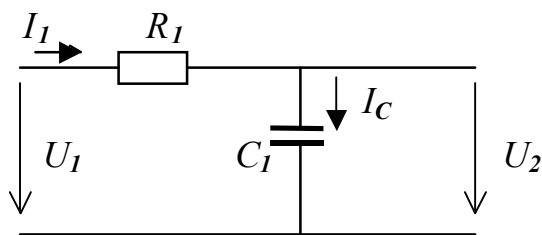


Рис. Преобразователь (а) и его ЛАЧХ (б)

Запишем комплексный коэффициент передачи напряжения в виде $K(j\omega) = 1/(1 + j\omega R_1 C_1)$.

Обозначив $\omega_c = 1/R_1 C_1 = 200$ рад./с, получим формулы модуля $K(\omega) = 1/\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}$ и аргумента $\theta(\omega) = -\arctg(\omega/\omega_c)$. Вычислим ряд их значений для диапазона частот от 0 до $10\omega_c = 2000$ рад./с (табл.7.2)

Таблица 7.2

Значения модуля и аргумента передаточной функции.							
ω , рад/сек	0	$0.2\omega_c$	$0.5\omega_c$	ω_c	$2\omega_c$	$5\omega_c$	$10\omega_c$
K	1.0	0.980	0.890	0.707	0.447	0.196	0.099
θ , град	-5.7	-11.3	-26.6	-45.0	-63.4	-83.3	84.2

С использованием вычисленных значений можно построить частотный годограф на комплексной плоскости, амплитудную и фазовую частотные характеристики.

Построим ЛАЧХ в полосе $\omega_H = 10$ рад./с до $\omega_B = 1000$ рад./с по точкам, отложив по оси абсцисс относительные значения $\lg(\omega/\omega_H) = 0; 1; 2$, и проставив номинальные значения частоты $\omega = 10; 100; 1000$ рад./с (рис.7.6,б).

На практике часто используют кусочно- линейную аппроксимацию ЛАЧХ (замену реальной кривой отрезками прямых линий). Для достаточно простых преобразователей такую аппроксимацию можно выполнить на этапе построения ЛАЧХ.

Для рассматриваемой RC цепи в частотной полосе от 0 до ω_c имеем $(\omega/\omega_c) < 1$ и с небольшой погрешностью можно принять $1 + (\omega/\omega_c)^2 \cong 1$. В указанной полосе частот модуль коэффициента передачи $K(\omega) \cong 1$ и ЛАЧХ представляет собой отрезок прямой $L(\omega) = 0$, совпадающей с осью абсцисс.

В полосе частот $\omega > \omega_c$ выполняется условие $(\omega/\omega_c) > 1$ и можно принять $1 + (\omega/\omega_c)^2 \cong (\omega/\omega_c)^2$. Тогда для модуля коэффициента передачи справедливо соотношение $K(\omega) \cong (\omega_c/\omega)$ и ЛАЧХ, описываемая выражением $L(\omega) = -20 \lg(\omega/\omega_c)$, представляет собой отрезок прямой с постоянным наклоном. Если на прямой выбрать две точки с частотами ω_1 и ω_2 , отличающимися в 10 раз (говорят на декаду), т.е. $(\omega_2/\omega_1) = 10$, то приращение значения ЛАЧХ будет $\Delta L(\omega) = -20 \lg(\omega_2/\omega_1) = -20$ дБ/декаду. Это означает, что при $\omega > \omega_c$ изменения

частоты на декаду приводит к уменьшению значения ЛАЧХ на 20 дБ или снижению модуля коэффициента передачи в 10 раз.

Расчет линейных электрических цепей в частотной области

Расчет линейных электрических цепей в частотной области содержит:

- разложение воздействий на гармонические составляющие;
- расчет цепи для каждой составляющей методом комплексных амплитуд;
- суммирование реакций по принципу наложения.

Расчет цепи выполняется многократно для каждой частотной составляющей. Указанную процедуру можно упростить, если использовать комплексную передаточную функцию.

5.3. Резонансные явления в электрических цепях

Вид частотных характеристик зависит от структуры цепи, типа элементов и значений их параметров. Очевидно, что увеличение числа накопителей энергии (индуктивностей и емкостей) приводит к усложнению выражения АФЧХ. В технике широко используются цепи, частотные характеристики которых имеют резонансные свойства.

Резонансные цепи – это реальные, физически существующие цепи, в которых могут возникать явления резонанса напряжений или токов.

Характерными особенностями режимов резонанса в пассивной цепи, содержащей индуктивности и емкости являются равенства нулю реактивной составляющей $X_{вх}$ входного комплексного сопротивления $Z_{вх}(j\omega) = R_{вх} \pm jX_{вх}$ или реактивной составляющей $b_{вх}$ входной комплексной проводимости $Y_{вх}(j\omega) = g_{вх} \pm jb_{вх}$, а также реактивной мощности Q на выводах цепи.

Частоты, при которых происходит резонанс в цепи, называются резонансными.

Резонансные частоты обозначаются как ω_0 или f_0 .

С практической точки зрения имеет смысл рассматривать только диссипативные цепи, модели которых в обязательном порядке содержат кроме элементов L и C резистивные элементы R (или G).

Простейшими моделями резонансных цепей являются последовательный и параллельный колебательные контуры. Схемы для комплексных амплитуд этих контуров приведены на рис.6.4.

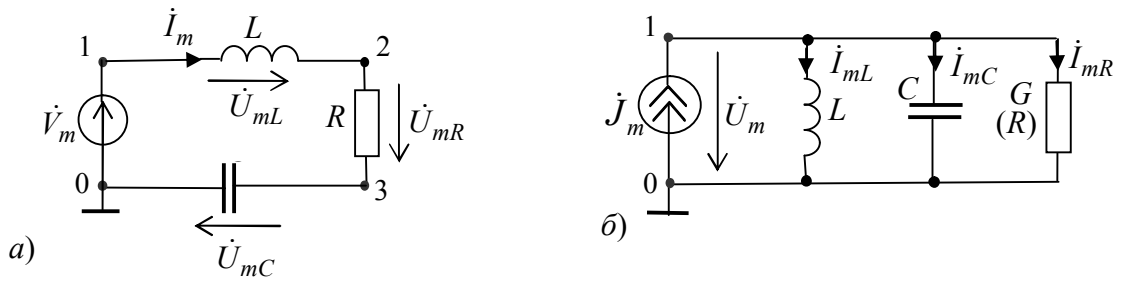


Рис.6.4. Схемы простейших резонансных контуров: *а* – последовательный; *б* – параллельный контур

Целесообразно анализировать резонансные явления при синусоидальных сигналах. В этом случае легко перейти к анализу резонансных явлений в этих же цепях при любом виде сигнала, используя принцип суперпозиции.

В последовательном контуре (рис.6.4,*а*) при определенных условиях наблюдается *резонанс напряжений*. Явление резонанса напряжений состоит в *совпадении начальных фаз синусоидального сигнала $V(t)$ и тока контура $i(t)$* . При этом входное комплексное сопротивление контура имеет резистивный характер $Z_{\text{вх}}(j\omega) = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R$ при частоте $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. При резонансе напряжения выполняются условия $X_{\text{вх}} = \omega L - 1/\omega C = 0$ и $Q = 0$, т.к. $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$, ($X_L = X_C$).

Резонансную частоту ω_0 (или f_0) называют собственной частотой контура, т.к. она определяется значениями реактивных элементов контура L и C .

Очевидно, что обеспечить наступление резонансного режима можно изменением частоты сигнала источника ω до совпадения ее значения с резонансной (собственной) частотой контура ω_0 . Наступления резонанса можно достичь и изменением значений параметров L и C , т.е. "настроить контур" в резонанс с входным сигналом, изменяя его собственную частоту ω_0 .

Уравнение цепи рис. 6.4,*а* для комплексных амплитуд имеет вид:

$$\dot{V}_m = \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mC} = jX_L \dot{I}_m + R \dot{I}_m - jX_C \dot{I}_m. \quad (6.18)$$

При $\omega = \omega_0$: $\dot{U}_{mL} = -\dot{U}_{mC}$, т.е. $|\dot{U}_{mL}| = |\dot{U}_{mC}|$ а фазовый сдвиг между этим комплексными векторами равен π . Напряжения \dot{U}_{mL} и \dot{U}_{mC} компенсируют друг друга, а результирующий комплексный вектор \dot{V}_m совпадает с вектором \dot{U}_{mR} (см. рис.6.5,*а*). При этом модуль входного комплексного сопротивления минимален $|Z_{\text{вх}}(j\omega)| = R$, а модуль тока контура $|\dot{I}_m|$ имеет максимальное значение, которое ограничивается величиной активного сопротивления контура R .

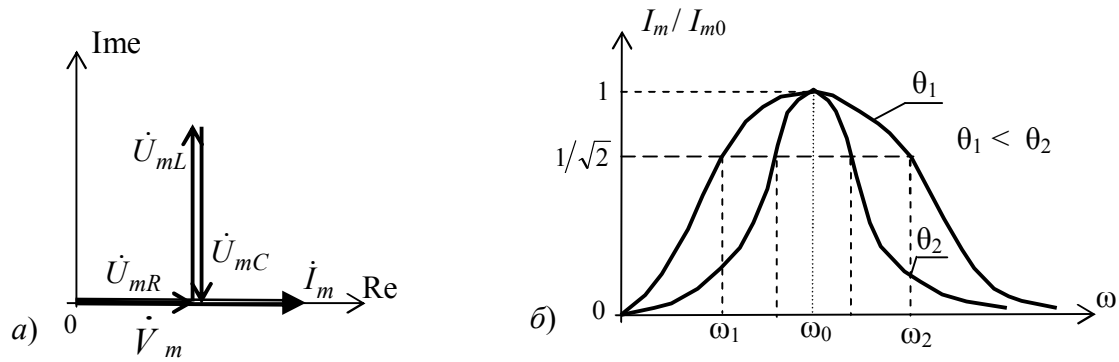


Рис.6.5. Резонансный режим в последовательном контуре: *а* – векторная диаграмма для комплексных амплитуд; *б* – резонансные характеристики

Максимальное (резонансное) значение тока контура определяется как $I_{m0} = V_m / R$, А.

На рис.6.5,б приведены резонансные зависимости модуля тока контура $|i_m(\omega)|$ в относительных единицах (базисным значением является I_{m0}) при одинаковых значениях активного сопротивления R контуров с различными добротностями Θ_1 и Θ_2 .

Добротность Θ резонансного контура определяется отношением значения энергии, запасенной в контуре при резонансе, к потерям за период.

Значение добротности можно определить по резонансной характеристике, например по зависимости $|i_m(\omega)|$. От резонансного значения характеристики берется уровень $I_{m0} / \sqrt{2} \approx 0,707 \cdot I_{m0}$ и определяется полоса частот $\Delta\omega$, соответствующая этому уровню. Величина добротности контура рассчитывается по выражению

$$\Theta = \omega_0 / \Delta\omega. \quad (6.19)$$

Для контура с добротностью Θ_1 (рис.6.5,б) имеем $\Theta_1 = \omega_0 / \Delta\omega_1$, где $\Delta\omega_1 = \omega_2 - \omega_1$.

Из характеристик рис.6.5,б очевидно, что $\Theta_1 < \Theta_2$. Чем выше добротность, тем острее резонансные характеристики.

Величину добротности можно также рассчитать, используя значения параметров контура:

$$\Theta = \omega_0 L / R = (\sqrt{L/C}) / R = \rho / R, \quad (6.20)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ - волновое сопротивление контура.

Замечание. В идеальном резонансном контуре отсутствуют потери энергии, т.е. $R \rightarrow 0$, $P \rightarrow 0$, $\Theta \rightarrow \infty$, колебания в идеальном контуре незатухающие.

Частотная передаточная функция последовательного резонансного контура, относительно $U_{\text{вых}} = U_{mR}$ и $U_{\text{вх}} = V_m$, представляется выражением:

$$W_u(j\omega) = \dot{U}_{mR} / \dot{V}_m = R \dot{I}_m / [j\omega L - j(1/\omega C) + R] \dot{I}_m. \quad (6.21)$$

После ряда преобразований (6.21) выражение АФЧХ имеет вид:

$$W_u(j\omega) = (\omega\omega_0/\Theta)^2 / [(\omega\omega_0/\Theta)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2] + j(\omega\omega_0/\Theta)(\omega_0^2 - \omega^2) / [(\omega\omega_0/\Theta)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2]. \quad (6.22)$$

Из (6.22) получаются зависимости АЧХ и ФЧХ:

$$|W_u(j\omega)| = (\omega\omega_0/\Theta) / \sqrt{(\omega\omega_0/\Theta)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}; \quad (6.23)$$

$$\varphi(\omega) = \pi/2 - \arctg[(\omega\omega_0/\Theta)/(\omega_0^2 - \omega^2)]. \quad (6.24)$$

Общий вид АЧХ последовательного резонансного контура представлен на рис.6.6.

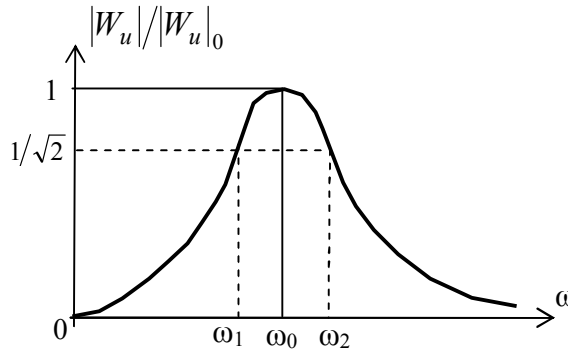


Рис.6.6. Амплитудно-частотная характеристика последовательного резонансного контура

АЧХ контура имеет вид резонансной кривой, характер которой зависит от добротности Θ . Величину добротности можно определить из условия $1/\Theta = (\omega_2 - \omega_1)/\omega_0$, где частоты ω_1 и ω_2 определяются соотношением $|W_u(j\omega)| / |W_u(j\omega_0)| \leq 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ (см.6.19). Диапазон частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, в котором наблюдается ослабление сигнала не более 3 дБ, называют **п о л о с о й п р о п у с к а н и я** контура.

В параллельном контуре (рис.6.4,б) при определенных условиях наблюдается *резонанс токов*. Явление резонанса токов состоит в *совпадении начальных фаз синусоидального сигнала $J(t)$ и напряжения $u(t)$ на входе контура*. При этом входная комплексная проводимость контура имеет резистивный характер $Y_{\text{вх}}(j\omega) = 1/R - j1/\omega L + j\omega C = G - jb_L + jb_C = G = g_{\text{вх}}$ при частоте $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. При резонансе токов выполняются условия $b_{\text{вх}} = -b_L + b_C = 0$ и $Q = 0$, т.к. $1/\omega_0 L = \omega_0 C$ т.е. $b_L = b_C$.

В параллельном контуре, также как и в последовательном, резонанса можно достичь либо изменением частоты сигнала источника ω , либо изменением параметров L и C .

Уравнение цепи рис. 6.4,б для комплексных амплитуд имеет вид:

$$\dot{J}_m = \dot{I}_{mL} + \dot{I}_{mC} + \dot{I}_{mR} = -jb_L \dot{U}_m + jb_C \dot{U}_m + g_{\text{вх}} \dot{U}_m. \quad (6.25)$$

Для значения $\omega = \omega_0$: $\dot{I}_{mL} = -\dot{I}_{mC}$, т.е. $|\dot{I}_{mL}| = |\dot{I}_{mC}|$, а фазовый сдвиг между этими комплексными векторами равен π . Токи \dot{I}_{mL} и \dot{I}_{mC} компенсируют друг друга. Результирующий комплексный вектор \dot{J}_m совпадает с

вектором \dot{I}_{mR} (рис.6.7,а). При этом модуль входной комплексной проводимости минимален $|Y_{BX}(j\omega)| = g_{BX} = G$. Модуль напряжения на входе контура максимален $|\dot{U}_m| = |\dot{J}_m| / |Y_{BX}(j\omega)| = |\dot{J}_m| / G$.

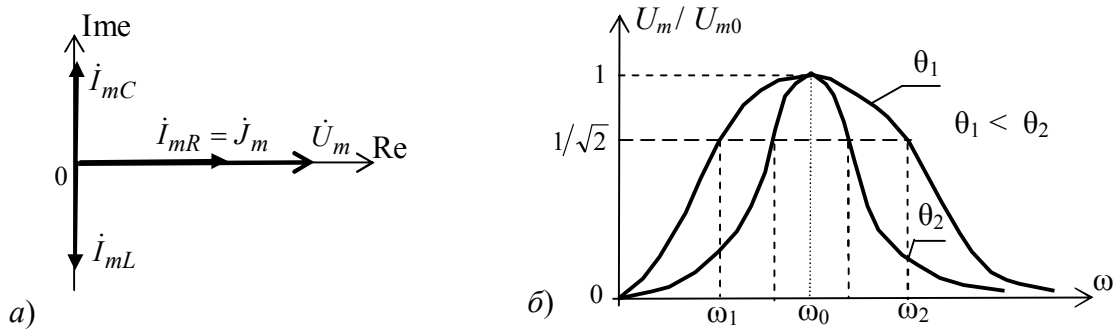


Рис.6.7. Резонансный режим в параллельном контуре: а – векторная диаграмма комплексных амплитуд; б – резонансная характеристика

Характер резонансной характеристики зависит от добротности контура Θ . Чем выше значение Θ , тем острее резонансная характеристика (рис.6.7,б).

Характеристики параллельного контура подобны соответствующим характеристикам последовательного контура при замене тока на напряжение, а сопротивлений – на проводимости, говорят–характеристики дуальны.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. У каких элементов параметры зависят от частоты сигнала?
2. Какие цепи считаются частотно-зависимыми?
3. В чем основной смысл частотного анализа линейных цепей?
4. Что такое передаточная функция и что она определяет?
5. Что такое частотная передаточная функция?
6. Какие формы представления имеет частотная передаточная функция?
7. Что такое амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ)?
8. Что характеризуют АЧХ и ФЧХ?
9. Что такое логарифмические частотные характеристики (ЛАЧХ и ЛФЧХ)?
10. В чем заключается практическое значение частотных характеристик?
11. Какую техническую информацию о свойствах линейной цепи (устройства) можно получить из частотных характеристик?
12. Что такое частота сопряжения?
13. В каких цепях могут возникать явления электромагнитного резонанса?
14. Какие характерные особенности имеют частотные характеристики резонансных цепей (объектов)?
15. Какие характерные особенности присущи резонансным режимам в пассивных цепях?

16. Какие простейшие модели резонансных линейных цепей Вам известны?

17. Каким соотношением связаны резонансная (собственная) частота и параметры в простейших резонансных контурах?

18. Как технически можно обеспечить наступление резонансного режима в линейной резонансной цепи?

19. Что такое резонанс напряжений и резонанс токов и в каких цепях он возможен?

20. Какими особенностями характеризуются режимы резонанса напряжений и резонанса токов?

21. Что такое добротность контура и что она характеризует?

22. Каким образом можно определить величину добротности контура экспериментальным и расчетным путем?

23. Что такое полоса пропускания контура?

24. Какие варианты экспериментального определения частотных характеристик Вам известны?

25. Каким образом можно определить наступление резонансного или близкого к нему режима в последовательном и в параллельном резонансных контурах?

26. Какие технические примеры использования явления резонанса в электромагнитных устройствах Вам известны?