

## Раздел 5. Индуктивно связанные цепи

- 5.1. Основные понятия и соотношения. Полярность и напряжения индуктивно связанных катушек. Анализ установившихся режимов в линейных индуктивно связанных цепях с синусоидальными сигналами. Практическое определение полярности и взаимной индуктивности индуктивно связанных катушек.
- 5.2. Коэффициент индуктивной связи.

### 5.1. Основные понятия и соотношения

Известно, что при изменении магнитного потока  $\Phi(t)$ , сцепленного с каким-либо витком (контуром), в этом витке по закону электромагнитной индукции (Фарадея) наводится электродвижущая сила (ЭДС)  $e(t)$ . Причем, наведенная магнитным потоком ЭДС определяется скоростью изменения потока, независимо от того, чем вызвано изменение. Для одного витка имеем соотношение  $e_{\text{вит.}}(t) = -d\Phi(t)/dt$ .

Если рассматривать некоторую катушку, состоящую из  $N$  витков, то в ней наводится ЭДС, пропорциональная скорости изменения суммы магнитных потоков, сцепленных с отдельными витками катушки, т. е. скорости изменения потока сцепления  $\psi(t)$  и будет определяться соотношением

$$e(t) = -d\psi(t)/dt,$$

где  $e(t)$  – ЭДС самоиндукции,  $\psi(t)$  – потокосцепление самоиндукции.

В инженерной практике обычно принимается допущение о том, что все  $N$  витков катушки пронизываются одним и тем же потоком  $\Phi(t)$ , т. е. сцеплены с ним. В этом идеализированном варианте потокосцепление  $\psi(t)$  соответствует выражению:

$$\psi(t) = N\Phi(t), \quad (5.1)$$

где  $[\psi] = \text{Вб}$  (вебер),  $[\Phi] = \text{Вб}$ ,  $[t] = \text{с}$ .

В линейных средах, для которых можно считать магнитную проницаемость  $\mu = \text{const}$ , справедливо соотношение

$$\psi(t) = Li(t), \quad (5.2)$$

где  $i(t)$  – ток, протекающий по витку (контур, катушке) и создающий потокосцепление (поток)  $\psi(t)$ ,  $L$  – индуктивность витка (контура, катушки). В линейных средах  $L = \text{const}$ ,  $[L] = [\psi]/[i] = \text{Вб/А} = \text{Гн}$  (генри).

Для одного витка индуктивность определяется соотношением

$$L_{\text{вит}} = \mu S_{\text{вит}}/l_{\text{ср}},$$

где  $\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость среды, измеряемая в Гн/м,  $S_{\text{вит}}$  – площадь витка в м<sup>2</sup>,  $l_{\text{ср}}$  – длина средней силовой линии магнитной индукции в м.

Для многовитковой катушки (контура) с  $N$  витками:

$$L = \mu S_{\text{экв}} / l_{\text{ср}}, \quad (5.3)$$

где для катушки с плотным расположением витков  $S_{\text{экв}} = S_{\text{вит}} N^2$  – эквивалентная площадь катушки с  $N$  витками в м<sup>2</sup>.

Если часть потокосцепления (потока) катушки окажется сцепленной не только с витками  $N_1$  своей катушки, но и с витками  $N_2$  другой катушки, то изменение этой части потокосцепления (потока) наведет в витках  $N_2$  другой катушки ЭДС. В этом случае между этими катушками существует магнитная связь. Наведенная в катушке  $N_2$  ЭДС называется ЭДС взаимной индукции, а потокосцепление – потокосцеплением взаимной индукции.

На рис.5.1,а представлены две взаимосвязанные в магнитном отношении катушки (два контура). Катушки имеют в общем случае различные числа витков  $N_1$  и  $N_2$  и ориентированы определенным образом друг относительно друга в пространстве. На внешних выводах (полюсах) каждой катушки свои напряжения  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ . По виткам катушек протекают соответственно токи  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ .

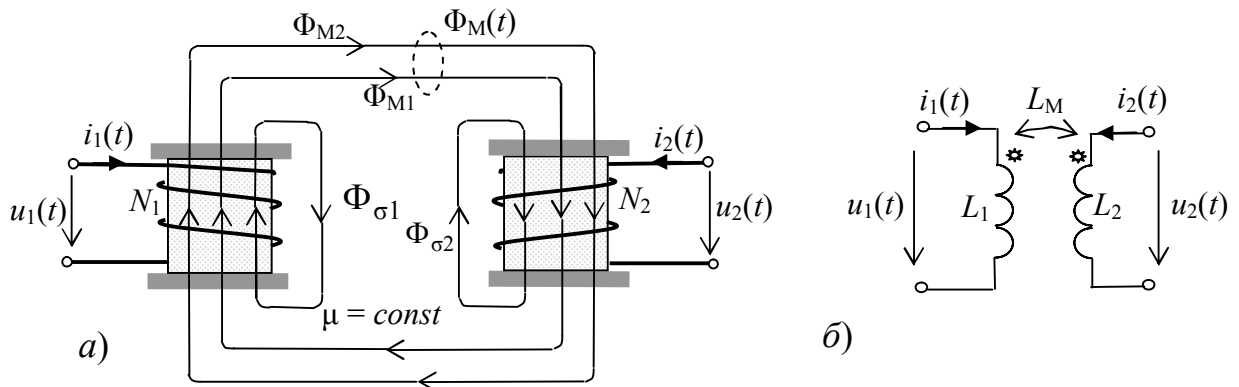


Рис.8.1. Индуктивно связанные катушки (а) и их эквивалентная схема (б)

Каждый ток создает свой магнитный поток, часть которого сцеплена с витками только своей катушки. Такие потоки ( $\Phi_{\sigma 1}(t)$  и  $\Phi_{\sigma 2}(t)$ ) будем называть потоками рассеяния. Другая часть каждого потока сцеплена одновременно с витками обеих катушек ( $\Phi_{M1}(t)$  и  $\Phi_{M2}(t)$ ).

Ток  $i_1(t)$  создает магнитный поток  $\Phi_1(t) = \Phi_{\sigma 1}(t) + \Phi_{M1}(t)$ , ток  $i_2(t)$  создает поток  $\Phi_2(t) = \Phi_{\sigma 2}(t) + \Phi_{M2}(t)$ . Поток  $\Phi_{M1}(t)$  является для катушки  $N_2$  потоком взаимной индукции от тока  $i_1(t)$ . Поток  $\Phi_{M2}(t)$  для катушки  $N_1$  – поток взаимной индукции от тока  $i_2(t)$ . Общий для обеих катушек поток – поток взаимной индукции  $\Phi_M(t) = \Phi_{M1}(t) + \Phi_{M2}(t)$ .

Потокосцепления катушки  $N_1$  и катушки  $N_2$ , в соответствии с принятыми потоками (рис.5.1), будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= N_1\Phi_1(t) = N_1\Phi_{\sigma 1}(t) + N_1\Phi_{M1}(t) = L_1 i_1(t); \\ \psi_2(t) &= N_2\Phi_2(t) = N_2\Phi_{\sigma 2}(t) + N_2\Phi_{M2}(t) = L_2 i_2(t);\end{aligned}\tag{5.4}$$

где  $L_1 = \psi_1(t)/i_1(t)$  и  $L_2 = \psi_2(t)/i_2(t)$  - индуктивности катушек  $N_1$  и  $N_2$ .

В соответствии с выражениями (5.4) индуктивности катушек представим следующим образом:

$$\begin{aligned}L_1 &= N_1\Phi_{M1}(t)/i_1(t) + N_1\Phi_{\sigma 1}(t)/i_1(t); \\ L_2 &= N_2\Phi_{M2}(t)/i_2(t) + N_2\Phi_{\sigma 2}(t)/i_2(t).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Обозначим слагаемые:  $N_1\Phi_{\sigma 1}(t)/i_1(t) = L_{\sigma 1}$ ,  $N_2\Phi_{\sigma 2}(t)/i_2(t) = L_{\sigma 2}$  - индуктивности рассеяния катушек  $N_1$  и  $N_2$ . Анализируя выражения (5.5) введем для первых слагаемых коэффициенты:

$$L_{M21} = N_2\Phi_{M1}(t)/i_1(t) \text{ и } L_{M12} = N_1\Phi_{M2}(t)/i_2(t).$$

Очевидно, что размерность этих коэффициентов  $[L_M] = \text{Гн}$ .

Коэффициент  $L_M$ , называемый взаимной индуктивностью, является скалярной величиной. В линейных средах (цепях)  $L_M = \text{const}$ .

Выражения (5.5) можно представить в виде:

$$L_1 = L_{\sigma 1} + (N_1/N_2)L_M; \quad L_2 = L_{\sigma 2} + (N_2/N_1)L_M,\tag{5.6}$$

где  $L_M = L_{M12} = L_{M21}$  - свойство взаимности из теории электромагнитного поля.

Коэффициент  $L_M$  фиксирует магнитную взаимосвязь только между двумя катушками (конттурами), т. е. попарную взаимосвязь.

Для любой пары индуктивно связанных катушек (контуров):

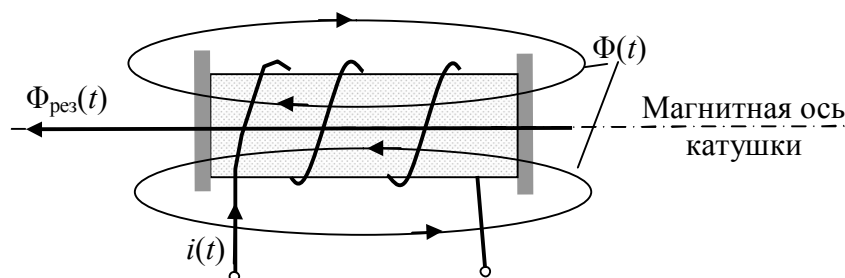
$$L_{Mnk} = L_{Mkn}.\tag{5.7}$$

Полярность индуктивно связанных катушек

Катушка с током является источником магнитной энергии, поскольку ток, протекающий по виткам, создает магнитное поле вокруг катушки. Распределение магнитного поля в пространстве в инженерной практике характеризуют скалярной величиной  $\Phi(t)$  - магнитным потоком (потоком вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ ).

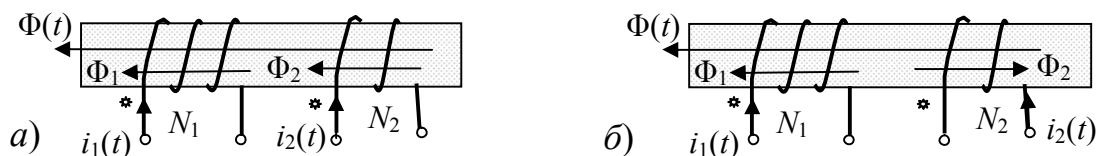
Направление потока  $\Phi(t)$  связано с направлением тока  $i(t)$  в витках и направлением намотки витков.

Условно положительные направления тока  $i(t)$  и создаваемого им магнитного потока  $\Phi(t)$  согласуются между собой по правилу правоходового винта (см. рис.5.2).



**Рис.5.2.** Согласование направлений тока и магнитного потока

Для двух индуктивно связанных катушек  $N_1$  и  $N_2$  с токами  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  условно принимают положительные направления токов с о г л а с н ы м и , если положительные направления создаваемых ими магнитных потоков самоиндукции и взаимоиндукции совпадают и – в с т р е ч н ы м и , если не совпадают. На рис.5.3 приведены варианты согласного и встречного направлений токов.



**Рис.5.3.** Полярности индуктивно связанных катушек: *a* – согласное направление токов; *б* – встречное направление токов

Выводы (полюсы) катушек, относительно которых токи  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  направлены одинаково при согласном включении, называются о д н о п о л я р н ы м и (одноименными). Эти выводы маркируются на реальных катушках, а на схемах вводится аналогичная маркировка однополярных выводов одинаковыми символами.

Маркировка однополярных выводов на схемах позволяет не указывать направления намотки витков катушек (контуров). Таким образом, катушка с током является в электромагнитном отношении п о л я р н ы м устройством.

Очевидно, что если токи  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  в двух индуктивно связанных катушках направлены относительно однополярных выводов одинаково (согласное включение), то магнитные потоки (потокосцепления) самоиндукции и взаимоиндукции в каждой катушке складываются, а если неодинаково (встречное включение) – то вычитаются (см. рис.5.3).

На рис. 5.3 поток  $\Phi_1(t)$  для катушки  $N_1$  является потоком самоиндукции, а для  $N_2$  - потоком взаимоиндукции, если допустить, что он сцеплен витками  $N_1$  и  $N_2$ . Аналогично и для потока  $\Phi_2(t)$ .

Эквивалентные схемы, соответствующие вариантам рис.5.3 приведены на рис.5.4.



**Рис.5.4.** Эквивалентные схемы индуктивно связанных катушек: *а* – согласное включение; *б* – встречное включение

Наличие индуктивной (магнитной) связи между катушками показывают двухсторонней стрелкой с буквой  $L_M$ , а одноименные полюсы (выводы) отмечают одинаковыми символами, например,  $\blacktriangle$ .

Напряжения индуктивно связанных катушек

Напряжения на внешних выводах катушек пропорциональны скорости изменения потокосцепления катушки.

Полные потокосцепления для катушек (рис.5.1) с учетом (5.4):

$$\psi_{N1}(t) = \psi_1(t) + \psi_{M1}(t); \quad \psi_{N2}(t) = \psi_2(t) + \psi_{M2}(t), \quad (5.8)$$

$$\text{где } \psi_{M1}(t) = N_1 \Phi_{M2}(t) = L_{M12} i_2(t); \quad \psi_{M2}(t) = N_2 \Phi_{M1}(t) = L_{M21} i_1(t), \quad (5.9)$$

причем  $\psi_{M1}(t)$  – потокосцепление взаимной индукции для катушки  $N_1$ , обусловленное потоком  $\Phi_{M2}(t)$  (током  $i_2(t)$ );  $\psi_{M2}(t)$  – потокосцепление взаимной индукции для катушки  $N_2$ , обусловленное потоком  $\Phi_{M1}(t)$  (током  $i_1(t)$ ).

Учитывая (5.4) и (5.9) выражения (5.8) можно представить в виде:

$$\psi_{N1}(t) = L_1 i_1(t) \pm L_{M12} i_2(t); \quad \psi_{N2}(t) = L_2 i_2(t) \pm L_{M21} i_1(t), \quad (5.10)$$

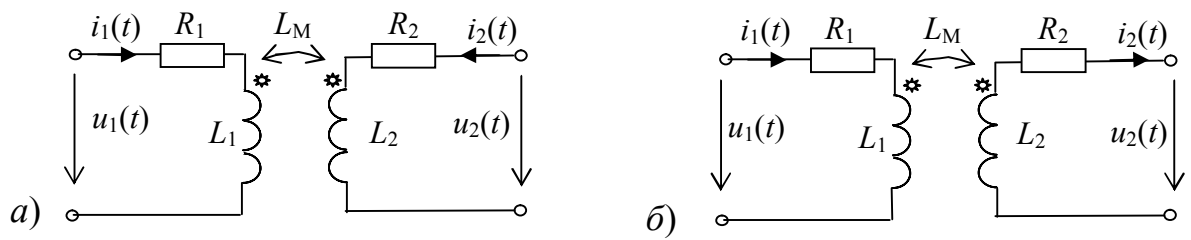
где знак плюс соответствует согласному включению, а минус – встречному.

Напряжения на внешних выводах катушек определяются выражениями:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= d\psi_{N1}(t)/dt = L_1 di_1(t)/dt \pm L_{M12} di_2(t)/dt; \\ u_2(t) &= d\psi_{N2}(t)/dt = L_2 di_2(t)/dt \pm L_{M21} di_1(t)/dt, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $\pm L_{M12} di_2(t)/dt = \pm u_{12}(t)$ ;  $\pm L_{M21} di_1(t)/dt = \pm u_{21}(t)$  – напряжения взаимоиндукции.

Выражения (5.11) соответствуют идеальным моделям индуктивно связанных катушек (рис.5.4). В этих моделях принято допущение бесконечной малости активных сопротивлений проводников обмоток:  $R_1 = 0$  и  $R_2 = 0$ . Это допущение вполне корректно, если  $R_1 \ll \omega L_1$  и  $R_2 \ll \omega L_2$ . Если активные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  обмоток  $N_1$  и  $N_2$  соизмеримы с индуктивными сопротивлениями, то следует использовать эквивалентные схемы замещения, представленные на рис.5.5.



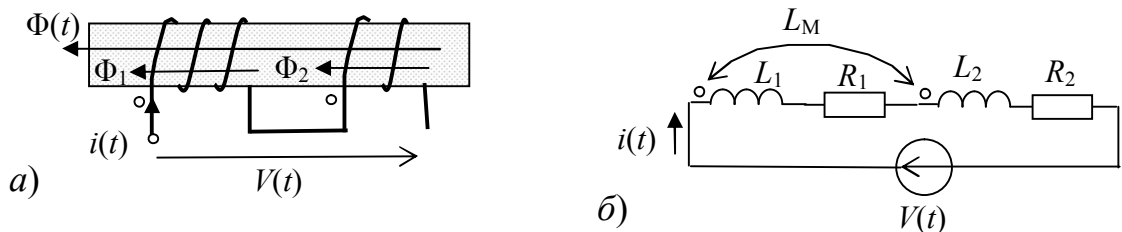
**Рис.5.5.** Эквивалентные схемы индуктивно связанных катушек с учетом активных сопротивлений обмоток: *а* – согласное включение; *б* – встречное включение

Для эквивалентных схем рис.5.5, учитывая свойство взаимности, имеем:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= R_1 i_1(t) + L_1 di_1(t)/dt \pm L_M di_2(t)/dt; \\ u_2(t) &= R_2 i_2(t) + L_2 di_2(t)/dt \pm L_M di_1(t)/dt. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Выше рассматривались варианты индуктивно связанных катушек (контуров), не соединенных между собой проводниками (гальванически развязанных). Во многих электромагнитных устройствах индуктивно связанные контуры имеют кроме магнитной связи еще и гальваническую (простейшим примером является автотрансформатор).

Рассмотрим самое простое соединение двух индуктивно связанных катушек – последовательную цепь с источником напряжения  $V(t)$  рис.5.6.



**Рис.5.6.** Последовательно соединенные катушки индуктивности на магнитопроводе при согласном включении (*а*) и их эквивалентная схема (*б*)

Уравнение цепи для схемы рис.5.6,б с учетом (5.12) имеет вид:

$$V(t)_{\text{сог.}} = u_1(t)_{\text{сог.}} + u_2(t)_{\text{сог.}} = (R_1 + R_2)i(t) + (L_1 + L_2 + 2L_M)di(t)/dt. \quad (5.13)$$

Очевидно, что для встречного включения катушек:

$$V(t)_{\text{вст.}} = u_1(t)_{\text{вст.}} + u_2(t)_{\text{вст.}} = (R_1 + R_2)i(t) + (L_1 + L_2 - 2L_M)di(t)/dt. \quad (5.14)$$

## 5.2. Коэффициент индуктивной связи

Степень (интенсивность) индуктивной связи двух катушек принято характеризовать коэффициентом индуктивной связи  $k_M$ .

Коэффициент связи  $k_M$  определяется как среднее геометрическое отношений потоков взаимной индукции к собственным полным потокам катушек. Для  $N_1$ :  $\Phi_{M1}/\Phi_1$  или  $\psi_{M2}/\psi_1$  и для  $N_2$ :  $\Phi_{M2}/\Phi_2$  или  $\psi_{M1}/\psi_2$ .

Среднее геометрическое соответствующих отношений будет определяться выражением:

$$k_M = \sqrt{(\Phi_{M1}/\Phi_1)(\Phi_{M2}/\Phi_2)} = \sqrt{(\psi_{M2}/\psi_1)(\psi_{M1}/\psi_2)}. \quad (5.15)$$

С учетом (5.4) и (5.9) выражение (5.15) имеет вид:

$$k_M = L_M / \sqrt{L_1 L_2} .$$

(5.16)

Следует отметить, что для реальных катушек (контуров) имеет место неравенство  $0 < k_M < 1$ , т. к. всегда существуют потоки рассеяния  $\Phi_\sigma \neq 0$ , приводящие к выполнению соотношения  $\Phi_M < \Phi$ . Значение коэффициента связи  $k_M$  зависит от взаимной ориентации в пространстве магнитных осей катушек. Предельные соотношения: в случае идеального совпадения магнитных осей катушек  $\Phi_\sigma \rightarrow 0$ , а коэффициент связи  $k_M \rightarrow 1$ ; при перпендикулярности магнитных осей и плоскостей витков катушек  $\Phi_M \rightarrow 0$ , коэффициент  $k_M \rightarrow 0$ . От значения коэффициента индуктивной связи зависит степень преобразования или уровень передачи (трансформации) электромагнитной энергии в электротехнических устройствах, принцип действия которых основан на использовании явления взаимной индукции (трансформаторы, индуктивные датчики, электрические машины). В простых конструкциях катушек увеличение  $k_M$  достигается применением бифилярной намотки катушек, при которой намотка производится вдвоенным проводом на общий сердечник. В этом случае  $\Phi_{\sigma 1} \cong \Phi_{\sigma 2} \approx 0$  и  $k_M \cong 1$ .

Применение ферромагнитных сердечников с высокими значениями магнитной проницаемости  $\mu$  позволяет существенно увеличить магнитную проводимость для потоков взаимной индукции  $\Phi_M$ , замыкающихся по сердечнику и уменьшить относительную долю потоков  $\Phi_\sigma$  в общем потоке каждой катушки, что в соответствии с выражениями (5.4) и (5.15) приводит к увеличению значения  $k_M$ .