В.А.Кадымов
О.К.Иванова
Е.А.Яновская

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ функций одной и нескольких независимых переменных

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «СТАНКИН»

В.А.Кадымов, О.К.Иванова, Е.А.Яновская
(Под редакцией Уваровой Л.А.)

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Учебное пособие для студентов.

Москва 2015

Учебное пособие разработано в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами ВПО для всех специальностей и направлений подготовки специалистов, бакалавров и магистров на основе рабочих программ по дисциплине «Математика».

Р е ц е н з е н т ы:

Работа подготовлена на кафедре «Прикладная математика» ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН».

Составители: Кадымов В.А. ФГБОУ ВПО Московский государственный гуманитарно-экономический университет (МГГЭУ)

107150 Москва, ул. Лосиноостровская, 49.

Иванова О.К., Яновская Е.А. кафедра прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН».

Москва, Вадковский переулок, 1.

Интегральное исчисление функции одной и нескольких независимых переменных: неопределенный и определенный интегралы. Учебное пособие для студентов первого курса всех специальностей. Интегральное исчисление функций нескольких независимых переменных: двойные, тройные интегралы. Так же рассмотрены криволинейные интегралы первого и второго рода. В учебном пособии содержатся основные понятия и теоретические положения интегрального исчисления функции одной и нескольких переменных, представлены общие методы интегрирования, их механические и геометрические приложения. Элементы теории приведены с примерами, подробными разборами этих примеров и вариантами контрольных и самостоятельных работ для подготовки к экзамену. Это поможет студентам лучше усвоить материал и успешно сдать экзамены.

Учебное пособие направлено на более тщательное изучение интегрального исчисления, поэтому содержит дополнительный материал.

Учебное пособие соответствует утвержденной программе курса высшей математики в технологическом университете и рекомендовано кафедрой «Прикладная математика» в качестве дополнительной литературы для изучения материала студентами первого курса. М.: 2015г.- 87с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов. Таблица неопределенных интегралов.

В курсе дифференциального исчисления ставилась следующая основная задача: найти для известной функции $y = F(x)$ её производную $f(x) = F'(x)$. Теперь же рассмотрим обратную задачу: для известной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, чтобы её производная $F'(x)$ была равна $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если во всех точках этого отрезка имеет место равенство

$$F'(x) = f(x)\ , \text{ или } \ dF(x) = f(x)dx \qquad (1.1)$$

Например, функция $F(x) = x^2$ является первообразной от функции $f(x) = 2x$ на всей числовой оси, поскольку $F'(x) = (x^2)' = 2x$, а для функции $f(x) = 1/x$ первообразной на полуоси $(0;\infty)$ будет функция $F(x) = \ln x$, так как при $0 < x < \infty$, $(\ln x)' = 1/x$.

Для решения вопроса о существовании первообразных сформулируем достаточное условие их существования.

Теорема 1. Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную.

Заметим, что задача отыскания производной $f(x) = F'(x)$ для заданной функции $F(x)$ решается однозначно, в то время как обратная задача – отыскание первообразной для заданной функции $f(x)$ решается неоднозначно.

Пример 1. Для функции $f(x) = 2x$ первообразной будет не только $F(x) = x^2$, но и $x^2 + 5$, и вообще $x^2 + C$, где C – произвольная постоянная.

Теорема 2. Если $F(x)$ и $F_1(x)$ – две различные первообразные от функции $f(x)$ на $\left[a,b\right]$, то они отличаются между собой на постоянное число:

$$F_1(x) = F(x) + C,\quad x \in \left[a,b\right] \qquad (1.2)$$

Определение 2. Множество всех первообразных $F(x)+C$ от функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от данной функции и обозначается так:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad , \tag{1.3}$$

При этом $f(x)$ *называется подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением,* x – *переменной интегрирования*. Операция отыскания первообразной для функции $f(x)$ называется *интегрированием.* Можно заметить, что она является обратной к операции дифференцирования, причем можно записать:

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x)+C$$

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx = dF \tag{1.4}$$

Формулы (1.4) следуют из (1.1) и (1.3)

Свойства неопределенного интеграла.

1°.Интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \tag{1.5}$$

2°.Постоянный множитель k можно вынести за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \tag{1.6}$$

Приведем **таблицу интегралов** от простейших функций (здесь a, α – некоторые числа)

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \left(\alpha \neq -1\right)$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; в частности $\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$, $(a \neq 0)$

9. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$, $(a \neq 0)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $(|x| < |a| < 0)$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Основные методы интегрирования: метод разложения; замена переменной; интегрирование по частям.

Метод разложения.

Идея метода разложений заключается в разложении подынтегральной функции на сумму функций, каждую из которых можно проинтегрировать при помощи какого-либо другого метода, в том числе при помощи непосредственного использования таблицы интегралов.

Пример 2.

$$\int 2^x (3^x - 7 \cdot 2^{2x}) dx = \int (6^x - 7 \cdot 2^{3x}) dx = \int 6^x dx - 7 \int 8^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} - 7 \frac{8^x}{\ln 8} + c$$

Метод замены переменной.

Если найти интеграл $\int f(x) dx$ непосредственно не удается, то к успеху может привести введение новой переменной t с помощью соотношения $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$-некоторая функция с непрерывной производной $\varphi'(t)$, имеющая обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$. Поскольку $dx = \varphi'(t) dt$, то справедливо равенство

$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int \psi(t)dt$ - табличный интеграл в новых переменных. Здесь введено обозначение
$\psi(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Существуют разновидности метода замены переменной: метод подведения под знак дифференциала, метод подстановки.

Пример 3.

$$\int \sin(5x-3)dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}(-\cos t) + c = -\frac{1}{5}\cos(5x-3) + c,$$

где $t = 5x - 3 \Rightarrow x = \dfrac{t-3}{5}; dx = \dfrac{1}{5}dt$.

Решим этот же пример методом подведения под знак дифференциала, при котором не вводят явно новую переменную:

$$\int \sin(5x-3)dx = \int \sin(5x-3)\frac{1}{5}d(5x-3) = \frac{1}{5}(-\cos(5x-3)) + c$$

Метод интегрирования по частям.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ функции, имеющие непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$, и при этом требуется найти интеграл

$$\int u(x)v'(x)dx.$$

В таком случае имеет место формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или эквивалентная формула, записанная в дифференциалах

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \qquad (1.7)$$

Пример 4.

$$\int x\ln 2x dx = \begin{vmatrix} u = \ln 2x, & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln 2x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln 2x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

Замечание. В качестве $v(x)$ можно взять любую функцию из множества $F(x)+c$. В нашем примере $v=\int xdx=\frac{1}{2}x^2+c$, при этом мы выбрали $c=0$.

Пример 5.

$$\int x^2\sin 4xdx=\begin{vmatrix} u=x^2, & dv=\sin 4xdx \\ du=2xdx, & v=-\frac{1}{4}\cos 4x\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}x^2\cos 4x-(-\frac{1}{2})\int x\cos 4xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u_1=x, & dv_1=\cos 4xdx \\ du_1=dx, & v_1=\frac{1}{4}\sin 4x\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}x^2\cos 4x+\frac{1}{2}(\frac{1}{4}x\sin 4x-\frac{1}{4}\int\sin 4xdx)=$$

$$=-\frac{1}{4}x^2\cos 4x+\frac{1}{8}x\sin 4x-\frac{1}{8}(-\frac{1}{4}\cos 4x)+c=$$

$$=-\frac{1}{4}x^2\cos 4x+\frac{1}{8}x\sin 4x+\frac{1}{32}\cos 4x+c$$

Замечание. В данном примере формула интегрирования по частям была применена дважды.

Пример 6.

$$\int e^x\cos 2xdx=\begin{vmatrix} u=\cos 2x, & dv=e^xdx \\ du=-2\sin 2xdx, & v=e^x\end{vmatrix}=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u_1=\sin 2x, & dv_1=e^xdx \\ du_1=2\cos 2xdx, & v_1=e^x\end{vmatrix}=e^x\cos 2x+2\left(e^x\sin 2x-2\int e^x\cos 2xdx\right)=$$

$$=e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x-4\int e^x\cos 2xdx.$$

Обозначим $e^x\cos 2x+2e^x\sin 2x=\varphi(x)$, и $\int e^x\cos 2xdx=F$, понимая под F одну из первообразных. Тогда из последнего равенства получаем:

$$F=\varphi(x)-4F\Rightarrow F=\frac{1}{5}\varphi(x)\Rightarrow F=\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x).$$

Поскольку F - одна из первообразных, то окончательно получаем:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2\sin 2x) + c .$$

Интегрирование рациональных дробей.

Определение 3. Дробной рациональной функцией (рациональной дробью) называется функция, являющаяся отношением двух многочленов (полиномов)

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}, \quad a_0 \neq 0, b_0 \neq 0 , \qquad (1.8)$$

где $b_0, b_1, \ldots b_m, a_0, a_1, \ldots a_n$ - действительные числа; m, n -целые неотрицательные степени многочленов.

Если $m < n$, то рациональная дробь называется правильной, если же $m \geq n$, то - неправильной.

Имеет место

Теорема 3. Любая неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Подобное представление нетрудно получить с помощью известного правила деления многочленов. Так, например,

$$\frac{x^3 + 5x}{x+2} = x^2 - 2x + 9 - \frac{18}{x+2}$$

Определение 4. Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}, k = 2,3,4,\ldots;$

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \frac{p^2}{4} - 4 < 0;$

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, k = 2,3,4,\ldots; \frac{p^2}{4} - 4 < 0,$

где A, B, a, p, q - действительные числа, причем квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Теорема 4. Любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде

$$P_n(x) = a_n(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}...(x-a_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1} \cdot$$

$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{t_2}...(x^2+p_ex+q_e)^{t_e}, \qquad (1.9)$$

где $a_n, p_1, q_1, p_2, q_2...p_e, q_e$ - действительные числа; $k_1, k_2, ...k_s, t_1, t_2, ..., t_e$ - целые положительные числа, причем $k_1+k_2+...k_s+2t_1+2t_2+...2t_e = n$; числа $a_1, a_2, ..., a_s$ - действительные корни многочлена $P_n(x)$ кратности $k_1, k_2, ...k_s$ соответственно, а все трехчлены $x^2+p_ix+q_i (i=1,2,...,e)$ не имеют действительных корней.

Теорема 5. Всякую правильную рациональную дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}, (m<n)$ можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей указанных выше четырех типов.

Пусть (для простоты) $P_n(x)$ раскладывается так:

$$P_n(x) = (x-\alpha)^k(x-\beta)^r(x^2+px+q)^t.$$

Тогда

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + ... + \frac{B_r}{(x-\beta)^r} +$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{C_tx+D_t}{(x^2+px+q)^t},$$

где $k+r+2t=n$, а все $A_1, ..., A_k, B_1, ..., B_r, C_1, D_1, ..., C_t, D_t$ - неизвестные действительные числа, которые можно найти методом неопределенных коэффициентов. Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 7. Представьте правильную дробь $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x+1}{x^4-16}}$ в виде суммы простейших правильных дробей и вычислите интеграл $\boldsymbol{\int f(x)dx}$.

Раскладываем исходную правильную дробь на сумму простейших правильных дробей:

$$\frac{2x+1}{x^4-16}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+4}=$$

$$=\frac{A_1(x-2)(x^2+4)+A_2(x+2)(x^2+4)+(x^2-4)(A_3x+A_4)}{(x^2+4)(x^2-4)},$$

и приравняем числители обеих частей последнего равенства:

$$2x+1=A_1(x-2)(x^2+4)+A_2(x+2)(x^2+4)+(x^2-4)(A_3x+A_4)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4 можем применить один из известных методов (например, метод неопределенных коэффициентов, или метод приравнивания значений многочленов при определенных (четырех) значениях неизвестной x; эти методы достаточно подробно описаны в литературе). В результате получаем:

$$A_1=\frac{3}{32}; A_2=\frac{5}{32}; A_3=-\frac{1}{4}; A_4=-\frac{1}{8}.$$

Используя полученное разложение дробно-рациональной функции, находим интеграл:

$$\int f(x)dx=\int(\frac{2x+1}{x^4-16}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+4})dx=$$

$$=\frac{3}{32}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{x^2+4}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\frac{3}{32}\ln|x+2|+\frac{5}{32}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}-\frac{1}{8}(\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2})=$$

$$=\frac{3}{32}\ln|x+2|+\frac{5}{32}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\ln(x^2+4)-\frac{1}{16}arctg\frac{x}{2}+c$$

Сделаем одно замечание относительно интегрирования правильных дробей типа IV , которые с помощью выделения полного квадрата в квадратном трехчлене можно привести к виду

$$\int\frac{A_1t+B_1}{(t^2+m^2)^k}dt=A_1\int\frac{tdt}{(t^2+m^2)^k}+B_1\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$$

При этом первый интеграл в правой части последней формулы с помощью простой замены легко раскрывается, а для нахождения второго интеграла используется рекуррентная формула[3]:

$$\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{t}{2(k-1)m^2(t^2+m^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2(k-1)m^2}\int\frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \quad (1.10)$$

Интегрирование тригонометрических функций.

Представим некоторые случаи интегрируемости тригонометрических функций.

I. $J_{mn} = \int \sin^m x \cos^n x dx$,

где m, n - целые числа.

1) Пусть $m = 2k+1$-нечетно. Тогда

$$J_{mn} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) =$$

$$= -\int (1-z^2)^k z^n dz,$$

где $z = \cos x$, т.е. задача свелась к интегрированию полинома (если k и n- положительные)или дробно-рациональной функции (если k или n отрицательно). Аналогично поступают, если нечетно n.

Пример 8.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x d(\sin x) = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x) d(\sin x) =$$

$$= \int \sin^2 x d \sin x - \int \sin^4 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c.$$

Пример 9.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} d\cos x = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} d\cos x =$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} + \int d\cos x = \frac{1}{\cos x} + \cos x + c.$$

2) Пусть оба числа m, n- четные и неотрицательные. В этом случае подынтегральную функцию преобразуют с помощью формул понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 10.

$$\int \sin^2 x\cos^2 xdx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\int \cos 4xd(4x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

. Пример 11. $J = \int \frac{dx}{\cos^5 x \sin^3 x} = ?$

$$J = \int \frac{dx}{\cos^2 x\cos^3 x\sin^3 x} = 2^3\int \frac{dx}{\cos^2 x(\sin 2x)^3}$$

Выбрав $t = tgx$, получим $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, откуда

$$J = 2^3\int \frac{dt(1+t^2)^3}{(2t)^3} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^3}dt = \int\left(\frac{1}{t^3}+3\frac{1}{t}+3t+t^3\right)dt =$$

$$= \frac{t^{-2}}{-2} + 3\ln|t| + \frac{3t^2}{2} + \frac{t^4}{4} + C = -\frac{2}{tg^2 x} + 3\ln|tgx| + \frac{3}{2}tg^2 x + \frac{1}{4}tg^4 x + C.$$

Выполните самостоятельно. Проинтегрируйте тригонометрическое выражение:

1) $\int \sin^3(2x)dx$; 2) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

II. $J_{mn} = \int \sin^m x\cos^n xdx$,

где одно из чисел или нечетно и положительно, а другое из них – любое действительное. Метод интегрирования в этом случае работает так же, как и при целых m, n, если одно из них нечетно.

III. Интеграл $J = \int R(\sin x, \cos x)dx$ с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$ всегда приводится к интегралу от дробно-рациональной функции аргумента t, причем

$$x = 2arctgt,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Однако указанная подстановка может приводить к интегралу от дробно-рациональной функции сложного вида, поэтому удобнее использовать другие подстановки.

1) Для нахождения интеграла $J=\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)dx$ применяется подстановка $t=tgx$, причем

$$x=arctgt,\quad dx=\frac{dt}{t^2+1},\quad \sin^2 x=\frac{t^2}{t^2+1},\quad \cos x=\frac{1}{t^2+1}.$$

Пример 12.

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(tg^2 x+1)dtgx=\frac{tg^3 x}{3}+tgx+c.$$

2) Интеграл $J=\int R(tgx)dx$

раскрывается с помощью подстановки $t=tgx,\quad dx=\dfrac{dt}{t^2+1}$.

3) Интеграл $J=\int R(\sin x)\cos xdx$

берется с помощью подстановки

$t=\sin x,\quad dt=\cos xdx$.

4) Для вычисления интеграла $J=\int R(\cos x)\sin xdx$

используется подстановка $t=\cos x,\quad dt=-\sin xdx$.

IV. В интегралах

$\int\sin mx\cos nxdx,\quad \int\sin mx\sin nxdx,\quad \int\cos mx\cos nxdx$ следует использовать формулы обращения произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x];$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x];$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x],$$

где $m,n-$ действительные числа.

Пример 13.

$$\int\sin^2 x\cos 3xdx=\int\frac{1}{2}(1-cos2x)\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int\cos 3xdx-$$

$$-\frac{1}{2}\int \cos 2x \cos 3x dx = \frac{1}{6}\int \cos 3x d(3x) - \frac{1}{4}\int (\cos x + \cos 5x) dx = .$$
$$= \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{20}\sin 5x + c$$

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана некоторая функция $y = f(x)$.

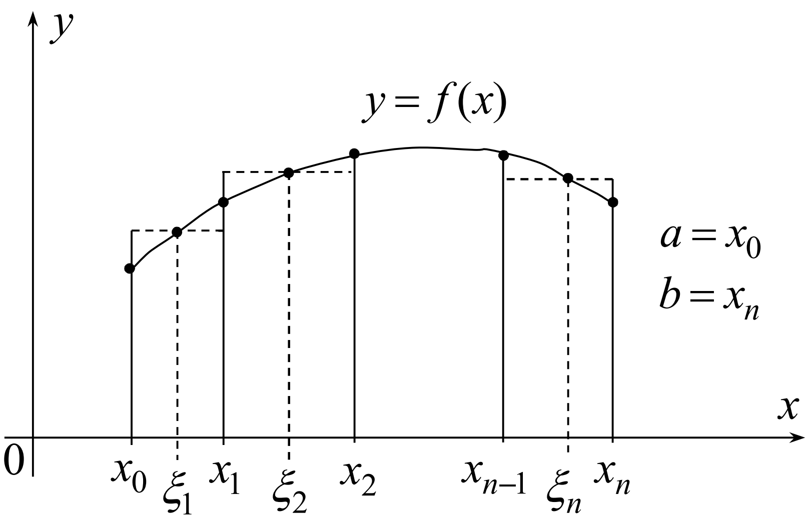


Рис. 2.1

Отрезок $[a, b]$ точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ разбивается на n частей, которые необязательно равны между собой, так, чтобы $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (рис. 2.1). Обозначим длину отрезка $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $(i = 1, 2, ..., n)$. На каждом отрезке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ выберем по произвольной точке ξ_i. Назовем *шагом разбиения* λ наибольшую из длин Δx_i : $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$.

Определение 5. *Интегральной суммой* σ_n функции $f(x)$ на $\left[a, b\right]$ называется следующая величина:

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (2.1)$$

Устремляя шаг разбиения λ к нулю дроблением $[a, b]$ на все большее количество отрезков, получим последовательность соответствующих интегральных сумм $\sigma_n\ (n \to \infty)$.

Определение 6. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ ни от выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (2.2)$$

Величины a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Если для функции $f(x)$ существует определенный интеграл (2.2), то $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a, b]$.

Теорема 6 (достаточное условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке интегрируема. Это условие не является необходимым.

Замечания.

1. В соотношении (2.2) предполагалось $a < b$. Если же $a > b$ или $a = b$, то принимается по определению соответственно

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \quad \int_a^a f(x)dx = 0 \quad (2.3)$$

2.Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то интеграл (2.2) равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью ox и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

3.Вычисление определенного интеграла по формуле (2.2) связано, как правило, с большими трудностями, поэтому для его вычисления используется приводимая ниже формула Ньютона-Лейбница, выражающая связь между определенными и неопределенными интегралами.

Перечислим основные свойства определенного интеграла, предполагая, что $f(x)$, $\varphi(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ интегрируемы на $[a,b]$.

$1^0. \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где $k = const$. (2.4)

$2^0. \int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$ (2.5)

3^0.Если $f(x) \le \varphi(x), x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx.$ (2.6)

4^0.Если m и M – наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ при $a \le x \le b$,то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{2.7}$$

5^0.**Теорема о среднем**. Если $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то найдется такая точка* $\xi \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi), \tag{2.8}$$

при этом величина $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

6^0.Независимо от того, принадлежит точка c отрезку $[a, b]$ или нет, имеет место соотношение:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{2.9}$$

если каждый из этих интегралов существует.

Пример 14. Оцените интеграл $J = \int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{10 + 3\cos x}$.

Наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)=\dfrac{1}{10+3\cos x}$ на $[0;\,2\pi]$ являются $m=\dfrac{1}{10+3}=\dfrac{1}{13}$; $M=\dfrac{1}{10-3}=\dfrac{1}{7}$, то согласно (2.7), получим $\dfrac{2\pi}{13}\le J\le\dfrac{2\pi}{7}$.

Рассмотрим функцию $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt,\, x\in[a,b]$.

Теорема 7. Если $f(x)$ непрерывна на $\left[a,\,b\right]$, то $\Phi(x)$ есть ее первообразная, т.е.

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt=f(x). \qquad (2.10)$$

Теорема 8. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная, то справедливо соотношение:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a), \qquad (2.11)$$

которое называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Пример 15.

$$J=\int\limits_0^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2}=\arcsin\left(\sqrt{3}/2\right)-\arcsin 0=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}.$$

Выполните самостоятельно. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница:

1) $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 t dt$; 2) $\int\limits_0^1\dfrac{tdt}{3+t^2}$

Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема 9 (правило замены переменной). *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и выполняются условия:*

1) *функция* $x=\varphi(t)$ *и ее производная* $\varphi'(t)$ *непрерывны при* $\alpha \le t \le \beta$;

2) $\varphi(\alpha)=a; \varphi(\beta)=b$;

3) $x=\varphi(t)\in[a;b]$ *при всех* $t\in[\alpha;\beta]$.

Тогда справедливо соотношение

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{2.12}$$

Пример 16. Вычислите $J=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$

Положим $x=\sin t$, тогда $dx=\cos tdt$. При $x=0$ $\sin t=0$, т.е. $t=\arcsin 0=0$; при $x=1$ $\sin t=1$, т.е. $t=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, таким образом здесь $a=0, b=1, \alpha=0, \beta=\frac{\pi}{2}$. Согласно формуле (2.12), получим

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Теорема 10 (правило интегрирования по частям). *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны на* $[a,b]$ *вместе со своими производными* $u'(x), v'(x)$. *Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{2.13}$$

Пример 17. Вычислите $J=\int_0^1 xe^{2x}dx.$

Примем $u(x)=x, v'(x)=e^{2x}$, тогда $u'(x)=1,\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ и, согласно формуле (2.13):

$$J=\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2-0-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{1}{4}(e^2+1).$$

Несобственный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\left[a;+\infty\right).$ Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом с бесконечной верхней границей от функции* $f(x)$ и обозначается:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx .$$

При этом говорят, что несобственный интеграл *сходится*. Если такого предела не существует (в частности, он бесконечен), то соответствующий несобственный интеграл не существует и называется *расходящимся*.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty,b]$, то несобственный интеграл с бесконечной нижней границей определяется аналогично:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx ,$$

если же функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty,+\infty)$, то несобственный интеграл с двумя бесконечными границами определяется соотношением:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx ,$$

где c – любая фиксированная точка оси x.

Пример 18. Установить, сходится или расходится интеграл $J = \int\limits_0^{\infty}\cos 3x dx.$

Решение: $J = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \cos 3x dx$, но поскольку $\int\limits_0^b \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^b = \frac{1}{3}\sin 3b$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\sin 3b$ не существует, то $J = \int\limits_0^{\infty}\cos 3x dx$ расходится.

Выполните самостоятельно. Вычислите несобственный интеграл с бесконечными пределами (если он сходится) или установите его расходимость:

$$1)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2};\ \ 2)\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\left[a;b\right)$ и $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=\infty.$ Если существует предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$, то он называется сходящимся несобственным интегралом от $f(x)$ на $\left[a;b\right]$ и обозначается $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx$.

Если указанного предела не существует, то несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ называется расходящимся.

Для случая, когда $f(x)$ непрерывна на $\left(a;b\right]$ и $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty$, несобственный интеграл определяется аналогично: $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x\in[a;c)\cup(c;b],\ a<c<b$, и имеет в точке $x=c$ разрыв второго рода. Тогда *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ на $\left[a;b\right]$ называется

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0+}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon_1}f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0+}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b}f(x)dx,$$

при этом $\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$ называется *сходящимся*, если существует каждый из пределов, стоящих справа и *расходящимся*, если хотя бы один из них не существует.

Пример 19**.** Вычислить $J=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=?$

$$J=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty,$$

несобственный интеграл расходится.

Пример 20. Вычислить $J=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}=?$

$$J=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right)=2,$$

несобственный интеграл сходится и его значение равно двум.

Выполните самостоятельно. Вычислите несобственный интеграл от неограниченной функции на конечном отрезке (если он сходится) или докажите его расходимость:

$$1)\int\limits_0^2\frac{dx}{4-x^2};\ \ 2)\int\limits_1^e\frac{dx}{x\ln x}.$$

Геометрические и механические приложения определенного интеграла.

Площадь плоской фигуры. Если функция $y=f(x)\geq 0$ непрерывна на $[a,b]$ то, как отмечалось выше, площадь фигуры, ограниченной графиком $f(x)$, осью абсцисс и двумя вертикалями $x=a,\ x=b$ равна

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.14}$$

Если функция $f(x)$ на $[a,b]$ отрицательна или меняет знак, то площадь соответствующей фигуры определяется формулой:

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{2.15}$$

Если же фигура ограничена двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и двумя вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$, причем $f_1(x)\leq f_2(x)$ при $x\in[a,b]$, то ее площадь S определяется:

$$S=\int\limits_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,dx. \tag{2.16}$$

Пусть кривая задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi'(t), \psi(t)$ непрерывны на $[t_1, t_2]$. Тогда площадь фигуры, ограниченной этой кривой, отрезком $a \le x \le b$ оси абсцисс и вертикалями $x = a = \varphi(t_1)$ и $x = b = \varphi(t_2)$ вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)| \varphi'(t) dt. \tag{2.17}$$

Рассмотрим полярную систему координат. Для этого зафиксируем некоторую ось (называемую *полярной осью*) с началом в точке O (*полюсом*). Любой точке M на плоскости соответствует радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, который определяется своей длиной r (*полярным радиусом*) и единственным полярным углом φ, отсчитываемым от полярной оси против часовой стрелки и изменяющимся в пределах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Величины r и φ называются *полярными координатами* точки $M(r, \varphi)$. Если в качестве полярной оси l с полюсом O выбрать ось абсцисс прямоугольной декартовой системы координат xoy, то справедливы соотношения:

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

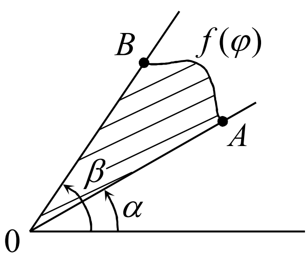


Рис. 2.2

Пусть кривая задана в полярных координатах функцией $r = f(\varphi)$, непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда площадь криволинейного сектора AOB (рис.2.2), ограниченного этой кривой и двумя отрезками OA и OB с углами α и β равна:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi. \tag{2.18}$$

Пример 21. Найдите площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2 + \cos\varphi$.

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\left(8\pi+4\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi\right)=4\pi+\frac{1}{4}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=4\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{2}.$$

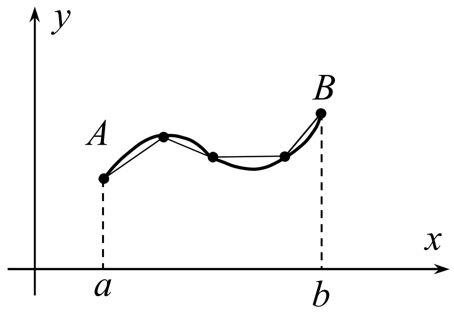


Рис. 2.3

Длина дуги кривой.

Определение 7. *Длиной дуги кривой* AB называется предел, к которому стремится периметр (т.е. сумма длин всех звеньев) вписанной в эту дугу ломаной (рис 2.3), когда длина наибольшего ее звена стремится к нулю (при этом количество звеньев неограниченно растет).

Пусть кривая AB определяется функцией $y=f(x)$, имеющей на $[a,b]$ непрерывную производную $f'(x)$ (такая кривая называется *гладкой*). Тогда длина дуги AB равна

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (2.19)$$

Пусть кривая AB задана параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ имеют на $[t_1,t_2]$ непрерывные производные, причем t_1 и t_2 – значения параметра, соответствующего концам дуги A *и* B. Тогда длина дуги AB равна

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\,dt. \qquad (2.20)$$

Пример 22. Найти длину l окружности радиуса R с центром в начале координат, задаваемой соотношениями:

$x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin t, 0 \le t \le 2\pi$ (параметр t есть полярный угол). Поскольку $x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t,$ получим

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = R\int_0^{2\pi} dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Если гладкая кривая в полярных координатах r, φ определяется функцией $r = f(\varphi),$ имеющей на $[\alpha, \beta]$ непрерывную производную, при этом α и β – полярные углы крайних точек дуги, тогда ее длина равна

$$l = \int_a^{\beta} \sqrt{f^2(\varphi) + [f'(\varphi)]^2} d\varphi. \qquad (2.21)$$

Поверхность тела вращения.

Рассмотрим поверхность, образованную вращением вокруг оси ox гладкой кривой определяемой функцией $y = f(x) \ge 0, \quad x \in [a,b],$ имеющей на $[a,b]$ непрерывную производную.

Площадь этой поверхности определяется формулой

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \qquad (2.22)$$

Вычисление объемов.

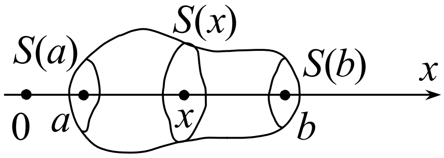


Рис. 2.4

Пусть с некоторым конечным телом связана ось ox и для каждого $x \in [a,b]$ известна площадь $S(x)$ поперечного сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси x

(рис. 2.4), при этом точки $x = a$ и $x = b$ соответствуют крайним сечением тела. Тогда объем V тела равен

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (2.23)$$

Пример 23. Найдите объем шара $x^2 + y^2 + z^2 = R.^2$

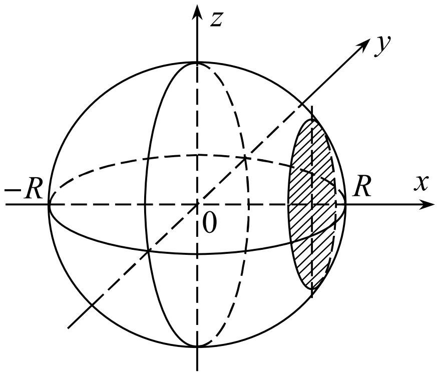


Рис.2.5

В сечении шара плоскостью, параллельной плоскости oyz (рис. 2.5) и пересекающей ось ox в точке x получается круг радиуса $\sqrt{R^2 - x^2}$, площадь которого $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Тогда объем шара равен

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\, dx = \pi\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси $ox(oy)$ криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью ox и вертикалями $x = a$ и $x = b$. Объем такого тела выражается соотношением

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx, (V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx) \qquad (2.24)$$

Пример 24. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \le x \le \pi$ оси ox.

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Механические приложения.

Пусть материальная точка движется по прямой с переменной скоростью, которая выражается известной функцией времени $v = f(t)$. Тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$ равен

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt. \qquad (2.25)$$

Рассмотрим материальную точку, которая движется прямолинейно вдоль оси ox под воздействием приложенной к ней силы $\vec{F}$, при этом проекция $\vec{F}$ на ox есть функция x: $np_x\vec{F} = f(x)$. Тогда для работы силы на отрезке $\left[x_1, x_2\right]$справедлива формула

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \qquad (2.26)$$

3. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗБОР ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Этот раздел содержит решение типового варианта контрольной работы.

Задания 1-6. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{(3-2x)^2}{x}dx$; 2) $\int ctg^3 xdx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$; 4) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$; 5) $\int x\ln 2xdx$; 6) $\int \frac{(2x+1)dx}{x^3-2x^2-3x}dx$.

Задания 7,8. Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенные интегралы:

7) $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{3^x dx}{1+9^x}$; 8) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (x-1)\cos x dx$.

Задание 9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Задание 10. а) Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$;

б) Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Решение.

1) Применяя тождественные преобразования подынтегральной функции и используя свойства неопределенного интеграла, получаем:

$$\int \frac{(3-2x)^2}{x} dx = \int \frac{9-12x+4x^2}{x} dx = 9\int \frac{dx}{x} - 12\int dx + 4\int x dx = .$$
$$= 9\ln|x| - 12x + 2x^2 + c$$

2) Применяем тригонометрические преобразования и метод подведения под знак дифференциала (аналог метода замены переменной):

$$\int ctg^3 x dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x) d\sin x}{\sin^3 x} = \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x} - \int \frac{d\sin x}{\sin x} = .$$
$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + c$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6-(x-2)^2}} = \left| \begin{matrix} t = x-2 \\ dt = dx \\ a = \sqrt{6} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{t}{a} + c = \arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} + c.$$

4) Применяя метод замены переменной (подведение под знак дифференциала), приводим к табличному интегралу:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{9-e^{2x}}} = \int \frac{de^x}{\sqrt{3^2-(e^x)^2}} = \arcsin\frac{e^x}{3} + c\,.$$

5) Используем метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле:

$$\int x\ln 2x dx = \begin{vmatrix} u=\ln 2x, & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=xdx, & v=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{1}{4}x^2 + c\,.$$

6) Разлагаем знаменатель исходной правильной дроби на простые множители и представляем в виде суммы простейших правильных дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{2x+1}{x^3-2x^2-3x} = \frac{2x+1}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}\,.$$

Приводим дроби в правой части к общему знаменателю и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях. В результате получаем:

$$A_1 = -\frac{1}{3},\quad A_1 = -\frac{1}{4},\quad A_1 = \frac{7}{12};$$

$$\int \frac{(2x+1)dx}{x^3-2x^2-3x}dx = A_1\int\frac{dx}{x} + A_2\int\frac{dx}{x+1} + A_3\int\frac{dx}{x-3} =.$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{7}{12}\ln|x-3| + c$$

7) Находим сперва одну из первообразных:

$$F(x) = \int\frac{3^x dx}{1+9^x} = \frac{1}{\ln 3}\int\frac{d3^x}{1+3^{2x}} = \frac{1}{\ln 3}arctg(3^x)\,.$$

Будем считать постоянную интегрирования $c=0$. Подставим это значение в формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_{-1/2}^{1/2}\frac{3^x dx}{1+9^x} = F(\frac{1}{2}) - F(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\ln 3}(arctg\sqrt{3} - arctg\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\ln 3}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6\ln 3}$$

8) С помощью метода интегрирования по частям находим одну из первообразных:

$$F(x)=\int (x-1)\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x-1, & du=dx \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x \end{vmatrix}=(x-1)\sin x+\cos x .$$

Применяем формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\pi/2} (x-1)\cos x dx = F(\frac{\pi}{2})-F(0)=(\frac{\pi}{2}-1)-1=\frac{\pi}{2}-2 .$$

9) Найдем точки пересечения кривых $y=f_2(x)=\sqrt{x}$ и $y=f_1(x)=x^2$, ограничивающих плоскую фигуру:

$$x^2=\sqrt{x} \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow x=\left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. .$$

Применяем формулу (2.16):

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx=(\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\frac{1}{3} \text{ (кв.ед.).}$$

10а) Подставим точки пересечения кривых, найденные в предыдущем примере, в формулу (2.24). Находим:

$$V_x=\pi\int_a^b [f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx=\pi\int_0^1 (x-x^4)dx=\pi(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5})\Big|_0^1=\frac{3\pi}{10} \text{ (куб.ед.).}$$

10б) Используем формулу (2.24):

$$V_y=2\pi\int_a^b x(f_2(x)-f_1(x))dx=2\pi\int_0^1 x(\sqrt{x}-x^2)dx=2\pi\int_0^1 (x^{3/2}-x^3)dx=$$

$$=2\pi(\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{x^4}{4})\Big|_0^1=\frac{3\pi}{20} \text{ (куб.ед.).}$$

Таким образом, получили, что $V_x=V_y$, что и следовало ожидать в силу симметрии преобразований вращения исходной плоской области вокруг осей ox и oy.

4. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

В задачах1-6 требуется найти неопределенный интеграл. В задачах 7 и 8 нужно вычислить определенный интеграл. Задачи 9 и

10 относятся к приложениям и решаются с использованием определенного интеграла.

Вариант 1

1. $\int \frac{(3x-5)^2}{x}dx$ 2. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{15+8x-16x^2}}$

4. $\int \frac{e^x dx}{2e^x+3}$ 5. $\int \frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 6. $\int \frac{x^2-x-1}{x^3-x^2}dx$

7. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{2\sqrt{x}+1}$ 8. $\int\limits_0^{\pi/3} x^2 \cos 3x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x, \quad y=0, \quad x=-7\pi/6, \quad x=\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy=6, \quad x=1, \quad x=4$, вокруг оси ox.

Вариант 2

1. $\int \frac{(2x+5)^2}{x^2}dx$ 2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$ 3. $\int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{16x^2-24x+25}}$

4. $\int e^x\sqrt{2e^x-1}dx$ 5. $\int \frac{1+\ln x}{x^2}dx$ 6. $\int \frac{5x^2-5x+2}{x^3-2x^2}dx$

7. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ 8. $\int\limits_0^{\pi/3} (x^2+1)\sin x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$y=\cos x, \quad y=0, \quad x=-\pi/2, \quad x=3\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy=6, \quad x=1, \quad x=4$, вокруг оси oy.

Вариант 3

1. $\int \frac{(3-2x)^2}{x}dx$
2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$
3. $\int \frac{(x+1)dx}{2x^2+4x+3}$
4. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$
5. $\int \ln 2x dx$
6. $\int \frac{2x^2+3x+1}{x^3+x^2}dx$
7. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$
8. $\int_0^{\pi/3} (2x^2+3)\cos 3x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$y=\sin x, \quad y=2\sin x, \quad x=0, \quad x=7\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ вокруг оси ox.

Вариант 4

1. $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x}dx$
2. $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{1-\cos^2 x})dx$
3. $\int \frac{dx}{(3-2x)^{10}}$
4. $\int ctg 2x dx$
5. $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$
6. $\int \frac{2x^2+3x+1}{x^3+x^2}dx$
7. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$
8. $\int_0^{\pi/3} (2x^2+3)\cos 3x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x, \quad y = 2\sin x, \quad x = 0, \quad x = 7\pi/4$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси oy.

Вариант 5

1. $\int \frac{(3-2x)^2}{x^2} dx$ 2. $\int \frac{\cos^2 x - \cos x}{sin^2 x} dx$ 3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 5}}$

4. $\int \sqrt{1 + 4\sin x} \cos x dx$ 5. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$ 6. $\int \frac{x^2 - 5x + 2}{x^3 + 2x^2} dx$

7. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ 8. $\int_0^1 x^2 e^{x-1} dx$

9. Найдите площадь поверхности параболоиды, образованного вращением дуги параболы $y^2 = 2x$ вокруг оси ox от $x = 0$ до $x = 2$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$.

Вариант 6

1. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$ 2. $\int \frac{\cos 2x}{cos^2 x \cdot sin^2 x} dx$ 3. $\int \frac{(2x+1)dx}{4x^2 + 4x + 5}$

4. $\int \frac{\sqrt{tgx} + 1}{\cos^2 x} dx$ 5. $\int \ln(x^2 + 1) dx$ 6. $\int \frac{3x^2 - 8x - 12}{x^3 - 3x^2} dx$

7. $\int\limits_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ 8. $\int\limits_{0}^{1}(x^2-x)e^x dx$

9. Найдите площадь поверхности параболоиды, образованного вращением дуги параболы $y^2=4x$ вокруг оси ox от $x=0$ до $x=3$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox одной полуволны графика функции $y=\cos x$.

Вариант 7

1. $\int(x+\sqrt{x})^2 dx$ 2. $\int\frac{sin^4 x-\cos^4 x}{cos^2 x}dx$ 3. $\int\frac{(x+1)dx}{2x^2+4x+11}$

4. $\int\frac{1-3\cos x}{sin^2 x}dx$ 5. $\int\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}dx$ 6. $\int\frac{2x^2+2x+14}{(x+2)(x^2-5x+4)}dx$

7. $\int\limits_{4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$ 8. $\int\limits_{0}^{2}x^2e^{2-x}dx$

9. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{x^3}$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(4;8)$.

10. Вычислите площадь шарового пояса, получаемого при вращении вокруг оси ox дуги окружности $x^2+y^2=4,(y>0)$ между точками с абсциссами $x=-1$ и $x=1$.

Вариант 8

1. $\int(x-\sqrt{x})^2 dx$ 2. $\int e^x(1+\frac{e^{-x}}{1+x^2})dx$ 3. $\int\frac{dx}{3-5x}$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}dx$ 5. $\int \sqrt[3]{x^2}\ln x dx$ 6. $\int \frac{9x^2+5x+10}{4x^3+4x^2+5x}dx$

7. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$ 8. $\int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{\sin^2 \pi x}dx$

9. Скорость точки задана формулой $v=\sqrt{1+t}$ $м/сек$. Найдите длину пути, пройденного точкой за первые $10 сек$ после начала движения.

10. Найдите статический момент M_x относительно оси ox треугольника, ограниченного прямыми $x+y=6;\quad x=0;\quad y=0$.

Вариант 9

1. $\int (\sqrt{x}-1)^2 dx$ 2. $\int \frac{\sin^4 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$ 3. $\int \frac{(3x+2)dx}{9x^2+6x+2}$

4. $\int \frac{3^x}{9^x-1}dx$ 5. $\int (2x+1)\cos 3x dx$ 6. $\int \frac{-x^2+7x+12}{(x+1)(x^2+3x)}dx$

7. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$ 8. $\int_{-1}^{0} \ln(x+2)dx$

9. Скорость точки задана формулой $v=10t+2$ $м/сек$. Найдите длину пути, пройденного точкой за первые $4 сек.$ после начала движения.

10. Найдите статический момент M_y относительно оси oy треугольника, ограниченного прямыми $x+y=6;\quad x=0;\quad y=0$.

Вариант 10

1. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$ 2. $\int \frac{\sin^4 x - \sin^2 x}{cos^2 x} dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 6x - 9x^2}}$

4. $\int \frac{x}{2x^2 - 1} dx$ 5. $\int (2x+3)e^{-x} dx$ 6. $\int \frac{4x^2 + x + 9}{(x^2 + x)(x-3)} dx$

7. $\int_2^5 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ 8. $\int_1^4 (x-2)\ln x dx$

9. Автобус движется с ускорением $1 \quad м/сек$. Найдите длину пути, которую пройдет автобус за первые $12 сек$. после начала движения.

10. Найдите статический момент прямоугольника с основанием $3 см$ и высотой $4 см$ относительно его основания.

Вариант 11

1. $\int \sqrt{x}(x + \frac{1}{x})^2 dx$ 2. $\int \frac{\cos^4 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$

4. $\int \frac{5x}{(x^2 - 1)^3} dx$ 5. $\int xe^{-2x+1} dx$ 6. $\int \frac{9x^2 - 19x + 8}{(x+1)(x^2 - 2x)} dx$

7. $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ 8. $\int_1^3 (3-2x)\ln x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2 + 1, \quad y = 3x + 7$.

10. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(6;8)$.

Вариант 12

1. $\int\sqrt{x}(2-5x)^2dx$ 2. $\int\frac{\sin^3x-\sin x+\sin^2x-1}{\cos^2x}dx$ 3. $\int\frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$

4. $\int x(2x^2+1)^5dx$ 5. $\int(3x-5)e^{2x}dx$ 6. $\int\frac{10x^2-2x-12}{(x-5)(x^2+2x)}dx$

7. $\int\limits_2^{10}\frac{(x-2)dx}{\sqrt{x-1}}$ 8. $\int\limits_1^2(3x^2-4)\ln xdx$

9. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$.

10. Найдите статический момент прямоугольника с основанием $3см$ и высотой $4см$ относительно его высоты.

Вариант 13

1. $\int(\sqrt[3]{x}-1)^2dx$ 2. $\int\frac{1}{1+tg^2x}dx$ 3. $\int\frac{xdx}{4x^2+12x+25}$

4. $\int\frac{\sin x-\cos x}{\cos^3x}dx$ 5. $\int(x^2+x+1)\ln xdx$ 6. $\int\frac{15x^2+2x+45}{(x^2-3x)(x+5)}dx$

7. $\int\limits_3^8\frac{(x+2)dx}{\sqrt{x+1}}$ 8. $\int\limits_0^3(x^2-3x)e^xdx$

9. Найдите длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-3)^3}$ от точки $A(3;0)$ до точки $B(7;8)$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси oy кривой $y^2=(1-x^2)^3$.

Вариант 14

1. $\int(\sqrt[3]{x}-x)^2dx$

2. $\int\frac{1}{1+ctg^2x}dx$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$

4. $\int\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

5. $\int(5x-1)\cos 3x dx$

6. $\int\frac{8x^2+20x+14}{(x^2+x)(x+2)}dx$

7. $\int_2^5\frac{x^2dx}{\sqrt{x-1}}$

8. $\int_1^3(4x-9)\ln x dx$

9. Найдите статический момент относительно оси ox кривой $y=\cos x$ от $x=-\pi/2$ до $x=\pi/2$.

10. Вычислите площадь шарового пояса, полученного при вращении вокруг оси ox дуги окружности $x^2+y^2=25$ между точками с абсциссами $x=-1$ и $x=1$.

Вариант 15

1. $\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$

2. $\int\frac{(\sin x-\cos x)^2-1}{\cos x}dx$

3. $\int\frac{(x-1)dx}{9x^2-6x+5}$

4. $\int\frac{1+2\sin 2x}{cos^2x}dx$

5. $\int(3x-2)e^{-2x}dx$

6. $\int\frac{10x^2-2x+5}{(x-5)(x^2+x)}dx$

7. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$ 8. $\int\limits_2^3 (4x-2)\ln(x-1)dx$

9. Найдите длину дуги кривой $y=\ln\cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $y=1$, $x=1$.

Вариант 16

1. $\int \frac{2x^2+x-\sqrt{x}}{x}dx$ 2. $\int \frac{dx}{1+cos2x}$ 3. $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x^2-4x-7}}$

4. $\int \frac{dx}{x(2\ln x+3)}$ 5. $\int (2-x)\sin 3x dx$ 6. $\int \frac{7x^2+11x-72}{(x-4)(x^2+3x)}dx$

7. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ 8. $\int\limits_0^4 (4x-x^2)e^x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x=5-y^2, x=-4y$.

10. Найдите статический момент прямоугольника с основанием $5см$ и высотой $6см$ относительно его высоты.

Вариант 17

1. $\int \frac{0.5\sqrt{x}+x-1}{x}dx$ 2. $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}dx}{e^x+e^{-x}}$ 3. $\int \frac{dx}{4-7x}$

4. $\int \frac{(\ln^2 x+1)dx}{x}$ 5. $\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}$ 6. $\int \frac{x^2-3x-3}{2x^3+4x^2+3x}dx$

7. $\int\limits_4^9 \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ 8. $\int\limits_0^{1/3} \arcsin 3x dx$

9. Найдите статический момент прямоугольника с основанием $5см$ и высотой $6см$ относительно его основания.

10. Найдите длину дуги кривой $y = \ln \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Вариант 18

1. $\int \frac{1-2x^2}{\sqrt{x}} dx$ 2. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$ 3. $\int \frac{dx}{(2-3x)^5}$

4. $\int \frac{(1-2\sin 2x)dx}{cox^2 x}$ 5. $\int \sqrt{x} \ln x dx$ 6. $\int \frac{x^2+9x+22}{2x^3+4x^2+11x} dx$

7. $\int\limits_0^4 \frac{xdx}{x+\sqrt{x}}$ 8. $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x dx$

9. Найдите площадь шарового пояса, получаемого при вращении вокруг оси ox дуги окружности $x^2 + y^2 = 25, (y > 0)$ между точками с абсциссами $x = 1, \quad x = -1$.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x$ и $y = 2x - x^2$.

Вариант 19

1. $\int \frac{5x^2-2x+1}{\sqrt{x}} dx$ 2. $\int (2^x + 3^x)^2 dx$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}$

4. $\int \frac{(\arcsin x + 1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 5. $\int \ln(x^2 - 1)dx$ 6. $\int \frac{2x^2-3x-20}{x^3+2x^2+10x} dx$

7. $\int_4^9 \frac{xdx}{x-\sqrt{x}}$ 8. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2 xdx$

9. Автобус движется с ускорением $3\,м/сек$. Найдите путь, пройденный автобусом за $10 сек$ от начала движения.

10. Найдите длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \pi/4$.

Вариант 20

1. $\int \frac{4x^4 + x - \sqrt{x}}{x} dx$ 2. $\int \frac{4^x + 6^x dx}{2^x}$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}}$

4. $\int \frac{(\ln x + 3)^5 dx}{x}$ 5. $\int arcctgxdx$ 6. $\int \frac{3x^2 + 20x + 40}{4x^3 + 8x^2 + 20x} dx$

7. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x-1}dx}{x}$ 8. $\int_1^2 (x^2 - 1)\cos\frac{\pi x}{2} dx$

9. Найдите статический момент относительно оси ox треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 8, \quad x = 0, \quad y = 0$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x, y = \sin x, (0 \le x \le \frac{\pi}{4})$.

Вариант 21

1. $\int \frac{x\sqrt[3]{x} + 2x - 1}{x} dx$ 2. $\int \frac{8^x - 6^x dx}{2^x}$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x}}$

4. $\int \frac{(1 + \sin\ln x)dx}{x}$ 5. $\int \arcsin 2xdx$ 6. $\int \frac{5x^2 - 2x + 19}{2x^3 - 12x^2 + 19x} dx$

7. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}dx}{x}$ 8. $\int_1^2 (x^2-x)\sin\frac{\pi x}{4}dx$

9. Найдите статический момент M_x относительно оси oy треугольника, ограниченного прямыми $x+y=8,\quad x=0,\quad y=0$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y=\cos^2 x, y=0, (-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})$.

Вариант 22

1. $\int \frac{4x^2-1}{2x+1}dx$ 2. $\int (e^x-2)^3 dx$ 3. $\int \sqrt[5]{1-3x}dx$

4. $\int \frac{(2\ln x+1)^3 dx}{x}$ 5. $\int \arccos x dx$ 6. $\int \frac{2x^2+5x-16}{3x^3-12x^2+16x}dx$

7. $\int_4^7 \frac{xdx}{\sqrt{x-3}}$ 8. $\int_0^{1/4} \frac{xdx}{\cos^2 \pi x}$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4x+3$ и $y=-x^2+2x+3$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1,\quad x=-1,\quad x=1,\quad y=0$.

Вариант 23

1. $\int \frac{9x^2-1}{3x+1}dx$ 2. $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$ 3. $\int \frac{3x-1}{9x^2-12x+5}dx$

4. $\int \frac{(\sqrt{2+3x}+1)dx}{x}$ 5. $\int (3x-1)2^{-x} dx$ 6. $\int \frac{8x^2-48x+70}{(x^2-2x)(x-5)}dx$

7. $\int_0^4 \frac{3\sqrt{x}dx}{x\sqrt{x}+1}$

8. $\int_0^{1/3} arctg 3x dx$

9. Найдите объем тела, образованного вращением вогруг оси ox одной полуволны синусоиды $y = 3\sin 2x$.

10. Найдите длину дуги CD кривой $x = \sqrt{9 - y^2}$, где $C(3;0), D(0;3)$.

Вариант 24

1. $\int \frac{4x^2 - 9}{2x+3} dx$

2. $\int \frac{\sin x dx}{\sin 2x \cos x}$

3. $\int \sqrt{5 - 2x} dx$

4. $\int \frac{xdx}{4 - 3x^4}$

5. $\int xe^{2x+3} dx$

6. $\int \frac{x - 16}{x^3 + 4x^2 + 28x} dx$

7. $\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

8. $\int_0^{1/2} arcctg 2x dx$

9. Найдите момент инерции фигуры, ограниченной дугой полуокружности $x^2 + y^2 = 49, \quad y > 0$ относительно оси ox.

10. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной осью ox и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$.

Вариант 25

1. $\int \frac{4 - 9x^2}{3x+2} dx$

2. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sin 2x \cos x}$

3. $\int \sqrt[3]{1 + 3x} dx$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^4 - 3}}$ 5. $\int (1-4x)3^x dx$ 6. $\int \frac{x^2 + 8x + 30}{2x^3 + 4x^2 + 10x} dx$

7. $\int_8^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x-4}}$ 8. $\int_0^{1/2} arccos 2x dx$

9. Найдите центр тяжести фигуры, ограниченной осью ox и одной полуволной графика функции $y = \cos x$.

10. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3 - 12x$ осью ox.

Вариант 26

1. $\int (x\sqrt{x} - 10x + 1)dx$ 2. $\int \frac{\sin x dx}{tg \frac{x}{2}}$ 3. $\int (2-5x)^{10} dx$

4. $\int \frac{(x - arctgx)dx}{1 + x^2}$ 5. $\int (7x+3)\sin 5x dx$ 6. $\int \frac{3x^2 - 5x + 26}{x^3 - 6x^2 + 13x} dx$

7. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{x + \sqrt{x}}$ 8. $\int_{-1}^1 (x-1)^2 e^{x+1} dx$

9. Найдите всю площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \frac{1}{10}(x^4 - 13x^2 + 36)$ и осью ox.

10. Скорость точки дается формулой $v = \sqrt{9 + t}$ м/сек. Найдите путь, пройденный точкой за первые 5 сек. после начала движения.

Вариант 27

1. $\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$ 2. $\int (\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})^2 dx$ 3. $\int \sqrt{4-3x}dx$

4. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 5. $\int (2-x)\cos 3x dx$ 6. $\int \frac{3x^2-5x+33}{2x^3-4x^2+11x}dx$

7. $\int\limits_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+3}}$ 8. $\int\limits_0^2 (2x-x^2)e^x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью ox, прямой $x=1$ и линией $y=x\sqrt{1-x^2}$.

10. Скорость точки дается формулой $v=\sqrt{10-t}$ м/сек. Найдите путь, пройденный точкой за первые 3 секунды после начала движения.

Вариант 28

1. $\int \sqrt{x}(3x+\frac{1}{x})dx$ 2. $\int (tgx+ctgx)^2 dx$ 3. $\int (3x+5)^9 dx$

4. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 5. $\int \frac{x}{\sin^2 3x}dx$ 6. $\int \frac{3x^2+12x+20}{4x^3+12x^2+10x}dx$

7. $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+3}}$ 8. $\int\limits_0^2 (x-x^2)e^{x-2}dx$

9. Найдите координаты центра тяжести дуги полуокружности $x^2+y^2=25, (y>0)$.

10. Найдите длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-3)^3}$ от точки $A(3;0)$ до точки $B(4;1)$.

Вариант 29

1. $\int \frac{2x-3}{x^2+5x}dx$ 2. $\int \cos^3 5xdx$ 3. $\int (5x+2)^{10}dx$

4. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+2}$ 5. $\int x\sin 2xdx$ 6. $\int \frac{2x^3+3x}{x-1}dx$

7. $\int\limits_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})dx}{x^2}$ 8. $\int\limits_0^{\pi/2} (x+2)\cos xdx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2x+3$ и $y=-x+3$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$ и $y=0, (0\le x\le \pi)$.

Вариант 30

1. $\int \frac{3x+4}{x^2-x}dx$ 2. $\int \sin^4 xdx$ 3. $\int (7x-3)^5 dx$

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$ 5. $\int (2x+3)\cos xdx$ 6. $\int \frac{4+3x}{5-2x}dx$

7. $\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ 8. $\int\limits_0^1 (x-1)e^x dx$

9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x=\sqrt{9-y^2}$ $y=\sqrt{x+1}, \quad y=\sqrt{7-x}, \quad y=0$.

10. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}, \quad y = o, \quad x = 1, \quad x = 4$.

5. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ИЗ КУРСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Выберем точку $M(x; y)$ внутри области определения $f(x, y)$ и рассмотрим малое приращение Δx аргумента $x = x + \Delta x$, оставив другой аргумент фиксированным и равным y. Тогда разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции $f(x, y)$ в точке M.

Определение 7. *Частной производной* функции $z = f(x, y)$ по переменной x, обозначаемой $f'_x(x, y)$ или $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, в точке $M(x; y)$ называется предел

$$f_x'(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \tag{5.1}$$

если он существует.

Аналогично вводятся частное приращение $\Delta_y z$ и частная производная функции z по y в точке M_0, обозначаемая $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ или $f'_y(x_0, y_0)$:

$$f_y'(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{5.2}$$

Определение 8. *Полным приращением функции* $f(x, y)$ в точке M называется разность

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{5.3}$$

Определение 9. Функция $z = f(x,\ y)$ называется *дифференцируемой* в точке $M(x; y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{5.4}$$

при этом величины A и B зависят только от точки M и не зависят от $\Delta x, \Delta y,$ а функция $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ при $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (ее вид определяется видом функции $f(x, y)$ и координатами точки M_0).

Полным дифференциалом df (или dz) указанной функции $z = f(x, y)$ в точке M называется *главная часть ее полного приращения*, линейная относительно Δx и Δy:

$$dz(x, y) = df(x, y) = A\Delta x + B\Delta y, \tag{5.5}$$

при этом $dy = \Delta y,\ dx = \Delta x.$

С точностью до бесконечно малой высшего порядка $\Delta z \approx dz$ при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$

Теорема 8. Если $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* M, *то в этой точке существуют* $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$, *причем* $\frac{\partial f}{\partial x} = A,\ \frac{\partial f}{\partial y} = B.$

Если $z = f(x, y)$ - дифференцируемая функция двух независимых переменных x и y, которые в свою очередь, являются функциями двух независимых переменных

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v),$$

то частные производные z по u и v преобразуются по следующим формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{5.6}$$

Пример 23. Найдите частные производные и полный дифференциал функции $z = \sqrt{x}y^3$ в точке $M_0(4, 2)$.

Решение. В произвольной точке $M_0(x, y)$ будем иметь $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot y^3;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x} \cdot 3y^2;\ dz = \frac{1}{2\sqrt{x}} y^3 dx + 3\sqrt{x} y^2 dy.$ В заданной точке $M_0(4, 2)$ получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 2^3 = 2;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3\sqrt{4} \cdot 2^2 = 24;\ dz = 2dx + 24dy.$$

Выполните самостоятельно. Найдите частные производные и полный дифференциал функции двух переменных $z = f(x, y)$ в заданной точке $M_0(x_0,\, y_0)$:

1) $z = \sin^2(xy);\ M_0\left(1; \dfrac{\pi}{4}\right)$ **;** **2)** $z = \dfrac{x^2 - y}{x + y};\ M_0(1;\, 0).$

Пример 24**.** Вычислить приближенно $\sin 28^0 \cos 61^0$

Переведем угловые значения из градусной меры в радианы:

$$28^0 = 30^0 - 2^0 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{90};\ 61^0 = 60^0 + 1^0 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}.$$

Рассмотрим функцию $z = \sin x \cos y$, дифференцируемую в любой точке (x, y) и вычислим приближенно значение этой функции в точке:

$$M\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{90}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right).$$

Рассмотрим точку $M_0\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right)$ и примем $dx = -\dfrac{\pi}{90},\ dy = \dfrac{\pi}{180}$.

Поскольку $z(M) = z(M_0) + \Delta z \approx z(M_0) + dz,$ то

$$z(M) \approx z(M_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)dx + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)dy.$$

Вычислим: $z(M_0) = \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4};$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = \cos x \cos y\,|_{M_0} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = -\sin x \sin y\,|_{M_0} = -\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

В результате будем иметь:

$$z(M) \approx \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\pi}{90}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\pi}{180} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\pi}{90}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\pi}{60} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{60}\right).$$

Если принять $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ и $\pi \approx 3{,}14$, то $z(M) \approx 0{,}227.$

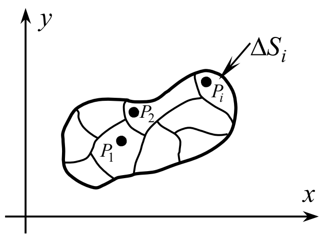
Выполните самостоятельно. Используя дифференциал функции, вычислите приближенно заданное выражение:

1) $\cos 44^0 \sin 92^0$; 2) $\sqrt{(4,05)^2 + (2,98)^2}$.

6. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ. ПОВТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПОНЯТИЕ ПРАВИЛЬНОЙ (СТАНДАРТНОЙ) ОБЛАСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть в замкнутой ограниченной области S плоскости oxy задана функция $z = f(x, y) = f(P)$. Разобьем область S произвольными линиями на n составных частей (площадок) $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ (рис.6.1.).

Рис. 6.1.



Здесь и далее буквами $S, \Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ будем обозначать как сами области, так и их площади. Выберем на каждой из указанных площадок ΔS_i по произвольной точке $P_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i (i = 1, 2, ..., n)$. Наибольший размер площадки ΔS_i будем называть ее диаметром $diam \Delta S_i$.

Определение 10. *Интегральной суммой* функции $f(x, y)$ в области S называется величина:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \Delta S_i.$$

Стягивая каждую из площадок ΔS_i в точку ($diam \Delta S_i \to 0$) дроблением области S на все большее количество этих площадок, получим последовательность интегральных сумм σ_n.

Определение 11. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{diam \Delta S_i \to 0} \sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения S, ни от выбора точек $P_i \in \Delta S_i$, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области S и обозначается:

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \iint\limits_S f(x,y)dxdy = \iint\limits_S f(P)dS = \lim_{diam \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i, \qquad (6.1)$$

при этом S называется *областью интегрирования*, dS *−элементом площади.*

Теорема 9(о существовании двойного интеграла). Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области S, то существует $\iint\limits_S f(x,y)dS$.

Замечание. Если $f(x,y) \geq 0$ в области S, то двойной интеграл (6.1) равен объему тела, ограниченного поверхностью $z = f(x,y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси oz, а направляющая является границей ∂S

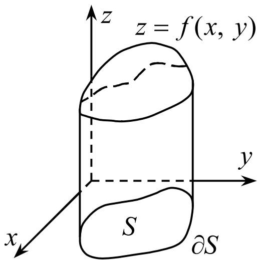


рис.6.2.

области S (рис.6.2.). Если же $f(x,y) = 1$, то двойной интеграл (6.1) равен площади $S = \iint\limits_S dS.$

Приведем основные свойства двойного интеграла, понимая под S замкнутую ограниченную область и предполагая, что указанные ниже двойные интегралы существуют.

1^0. $\iint\limits_S kf(x,y)dS = k\iint\limits_S f(x,y)dS.$

2^0. $\iint\limits_S \left[f_1(x,y) \pm f_2(x,y) \right] dS = \iint\limits_S f_1(x,y)dS \pm \iint\limits_S f_2(x,y)dS$

3^0. Пусть S разбита на несколько частей $S_1, S_2, \ldots, S_k$, которые не имеют общих внутренних точек, тогда:

$$\iint_S f(x,y)dS = \iint_{S_1} f(x,y)dS + \iint_{S_2} f(x,y)dS + \ldots + \iint_{S_k} f(x,y)dS.$$

$4.^0$ Если $f(x,y) \le \phi(x,y)$ при $(x,y) \in S,$ то

$$\iint_S f(x,y)dS \le \iint_S \phi(x,y)dS$$

5^0 Если m и M наименьшее и наибольшее значения $f(x,y)$ при $(x,y) \in S$, то

$$m \cdot S \le \iint_S f(x,y)dS \le M \cdot S$$

(напомним, что под S также понимается и площадь области S).

6^0. Теорема о среднем. Если $f(x,y)$ непрерывна в S, то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0) \in S,$ что

$$\iint_S f(x,y)dS = f(x_0,y_0) \cdot S,$$

при этом величина $f(x_0,y_0) = \dfrac{1}{S}\iint_S f(x,y)dS$ называется *средним значением функции* $f(x,y)$ в области S.

Вычисление двойного интеграла по формуле (6.1) достаточно сложно, поэтому его сводят к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

Определение 12. Область S называется *правильной (стандартной) в направлении* oy, если она образована линиями $y = \varphi_1(x),$ $y = \varphi_2(x)$ и прямыми $x = a,\ x = b,\ (a < b),$ причем на отрезке $[a,b]$ обе функции $\varphi_{1,}\ \varphi_2$ непрерывны и $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ (см.рис.). В частности, любая из прямолинейных границ $x = a$ или $x = b$ может вырождаться в точку.

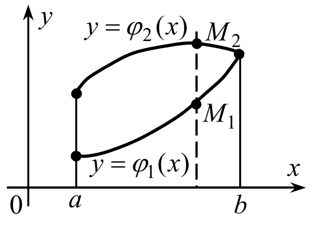


Рис.6.3.

Заметим, что любая прямая, параллельная оси oy и проходящая через какую-либо внутреннюю точку области S пересекает границу ∂S только в двух точках M_1, M_2.

Теорема10(о вычислении двойного интеграла). Если $f(x,y)$ непрерывна в области S, которая является правильной в направлении oy, то:

$$\iint_S f(x,y)dS = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (6.2)$$

Средний и правый интегралы в формуле (6.2) называются *повторными* или *двукратными* интегралами. Формула (6.2) означает, что для вычисления указанного двойного интеграла нужно сначала найти внутренний определенный интеграл $\Phi(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$, считая x фиксированным (а значит нижний и верхний пределы интегрирования $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ также будут фиксированными). Полученную функцию $\Phi(x)$ надо затем проинтегрировать по x от a до b, т.е. вычислить $\int_a^b \Phi(x)dx$.

Определение 13. Область S называется *правильной (стандартной) в направлении* ox, если она образована линиями $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$ и прямыми $y = c, y = d\ (c < d)$, причем на $[c,d]$ обе функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны и $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$. Если область правильная как в направлении ox, так и в направлении oy то она называется *правильной (стандартной).*

Для функции $f(x,y)$ непрерывной в области S, правильной в направлении ox**,** справедлива формула, аналогичная (3.2):

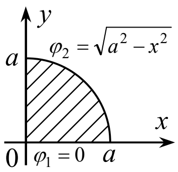
$$\iint_S f(x,y)dS = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (6.3)$$

Замечания.

1. Если область S правильная, то для вычисления двойного интеграла можно пользоваться любой из формул (6.2), (6.3).
2. Если область S не является правильной ни в каком из направлений ox или oy, то ее следует разбить на правильные в каких-либо направлениях области и затем использовать свойство двойного интеграла и формулы (3.2), (3.3).

Пример 25. Вычислить $J=\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$,

где $S-$ четверть круга радиуса a с центром в точке $O(0,0)$, для которой $x\ge 0,\, y\ge 0$.



Область S правильная в обоих направлениях (рис.6.4.). В направлении oy будем иметь $\varphi_1(x)=0, \varphi_2(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, т.к. уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$.

Рис.6.4.

Применяя формулу (3.2), получим:

$$J=\int\limits_o^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\int\limits_0^a dx\left(\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\int\limits_0^a dx(\arcsin 1-\arcsin 0)=\int\limits_0^a\frac{\pi}{2}dx=\frac{\pi\, a}{2}.$$

Пример 25. Вычислить $J=\iint\limits_S (x^2\sin^2 y)dS$, где S образована осью oy и кривой $x=3\cos y$.

Область S правильная. В направлении ox будем иметь: $\psi_1(y)=0; \psi_2(y)=3\cos y;\, c=-\frac{\pi}{2};\, d=\frac{\pi}{2}$.

Согласно формуле (3.3) получим

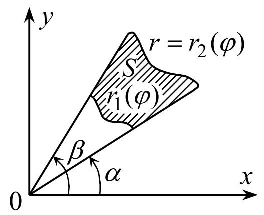
$$J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy\int\limits_0^{3\cos y}(x^2\sin^2 y)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy\sin^2 y\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{3\cos y}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dy\left[\frac{1}{3}\sin^2 y\left(3\cos y\right)^3\right]=$$

$$=9\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 y(1-\sin^2 y)d(\sin y)=9\left[\frac{\sin^3 y}{3}-\frac{\sin^5 y}{5}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}.$$

Замена переменных в двойном интеграле. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

При вычислении определенного интеграла для упрощения расчетов часто используется замена переменной. Аналогичным образом, вычисление двойного интеграла иногда можно упростить заменой переменных x, y новыми переменными u, v. Здесь рассмотрим лишь случай замены декартовых координат x, y полярными r, φ, который очень важен для приложений. Выбрав в качестве полюса начало декартовой системы координат, а в качестве полярной оси $-ox$, получим $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$

Определение 14. Область S называется *правильной(стандартной)вполярных координатах*, если она образована лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta (\alpha < \beta)$ и линиями $r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi),$



причем на отрезке $\alpha \le \varphi \le \beta$ Рис.6.5.

обе функции $r_1(\varphi),\ r_2(\varphi)$ непрерывны и $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$ (рис.6.5).

Можно показать, что если $f(x, y)$ непрерывна в области S, которая является правильной*(стандартной)* в полярных координатах, то:

$$\iint_S f(x, y)dS = \int_\alpha^\beta d\phi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \qquad (6.4)$$

Заметим, что если полюс лежит внутри S, то $0 \le \varphi \le 2\pi$, т.е. $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi.$ Если область S не является правильной в полярных координатах, то ее следует разбить на правильные части.

С помощью двойного интеграла можно решать ряд прикладных задач. Среди них нахождение:

1.-площади области S;

2.-объема цилиндрического тела;

3.-массы M пластинки, занимащей область S;

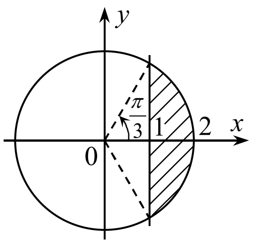
4.-статических моментов M_x и M_y пластинки относительно координатных осей ox и oy соответственно;

5.-координат центра тяжести пластины x_c и y_c;

6.-моментов инерции пластинки относительно координатных осей J_x и J_y;

7.-моментов инерции относительно начала координат J_o.

Пример 26**.** Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $r\cos\varphi = 1$



(т.е. $x = 1$) и окружностью $r = 2$ и не содержащей начала координат (рис.6.6.).

Рис.6.6.

Площадь $S = \iint\limits_S dS.$ Здесь область S образована линиями

$r_1 = \dfrac{1}{\cos\varphi,}$ $r_2 = 2$ и лучами $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{3}$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{3}$

(т.к. $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \dfrac{1}{2}$). Следовательно, область S правильная в полярных координатах и ее площадь равна:

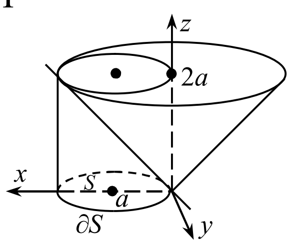
$$S = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\cos\phi}}^{2} r dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2 - \frac{1}{2\cos^2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \left(2\varphi - \frac{1}{2} tg\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} (кв.ед.).$$

Заметим, что эту же площадь можно найти и с помощью определенного интеграла.

Пример 27. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью xoy, цилиндром $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (a = const)$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$ при $z \ge 0$.

Линией пересечения цилиндра с плоскостью xoy является окружность радиуса a с центром на оси ox в точке a $(a > 0)$, т.е. рассматриваемое тело ограничено кругом $S = \left\{ (x, y) \,|\, (x-a)^2 + y^2 \le a^2 \right\}$, конической поверхностью Рис.6.7.



$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными oz (см.рис.).

Как было отмечено ранее,

$$V = \iint_S f(x,y)dS = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$$

Этот интеграл удобнее вычислить в полярной системе координат по формуле (3.4), при этом $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$ Уравнение окружности ∂S (границы круга S) получим в виде:

$$(r\cos\varphi - a)^2 + r^2\sin^2\varphi = a^2, \text{ т.е. } r(r - 2a\cos\varphi) = 0,$$

откуда $r = 2a\cos\varphi,$ при этом $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ (верхняя полуокружность) и

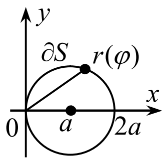


Рис.6.8.

В силу симметрии тела относительно плоскости xoz, ограничимся рассмотрением его половины, соответствующей $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. В данном случае кривая $r_1(\varphi)$ формулы (3.4) вырождается в точку $r = 0;\ r_2(\varphi) = 2a\cos\varphi;\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$ Таким образом,

$$V = 2\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2a\cos\varphi} r\cdot r dr = 2\int_0^{\pi/2} d\phi \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi} = 2\int_0^{\pi/2} 8\frac{a^3}{3}\cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{16a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1 - \sin^2\varphi\right) d\left(\sin\varphi\right) = \frac{16a^3}{3}\left(\sin\kappa - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{16a^3}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{32a^3}{9}(куб.ед.).$$

Пусть в плоскости xoy область S занята плоской фигурой (пластинкой), поверхностная плотность которой задана как функция координат $\rho(x,y).$ Тогда масса всей пластинки равна

$$M = \iint_S \rho(x,y)dS. \qquad (6.5)$$

Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c)$ пластинки вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M}, \tag{6.6}$$

где $M_x = \iint\limits_S y\rho(x,y)dS,\ M_y = \iint\limits_S x\rho(x,y)dS, -$ статические моменты пластинки относительно осей ox, oy.

Если пластинка однородна, то $\rho(x,y) = \rho_0 = const.$

Моменты инерции J_x, J_y пластинки относительно осей ox и oy, а также момент инерции J_0 относительно начала координат определяются соотношениями:

$$J_x = \iint\limits_S y^2\rho(x,y)dS,\ J_y = \iint\limits_S x^2\rho(x,y)dS,\ J_0 = J_x + J_y. \tag{6.7}$$

Пример 28**.** Найти координаты центра тяжести однородной пластинки $(\rho(x,y) = \rho_0 = const),$ имеющей форму кругового сектора радиуса a с углом при вершине 2α (рис.6.9.).

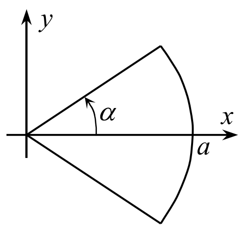


Рис.6.9.

Проведем расчеты по формулам (6.5), (6.6) в полярных координатах r,φ пользуясь соотношением (6.4). В силу симметрии относительно оси ox получим

$$M = \rho_0 \iint\limits_S dS = 2\rho_0 \int\limits_0^\alpha d\varphi \int\limits_0^a rdr = 2\rho_0 \int\limits_0^\alpha \frac{a^2}{2} d\varphi = \rho_0 a^2 \alpha.$$

В силу той же симметрии ясно, что $y_c = 0,$ а M_y можно найти таким образом $(x = r\cos\varphi)$:

$$M_y = \rho_0 \iint\limits_S xdS = 2\rho_0 \int\limits_0^\alpha d\varphi \int\limits_0^a r^2 \cos\varphi dr =$$

$$=2\rho_0\int_0^\alpha d\varphi\cos\varphi\frac{a^3}{3}=\frac{2}{3}\rho_0 a^3\sin\varphi\Big|_0^\alpha=\frac{2}{3}\rho_0 a^3\sin\alpha,$$

в результате чего:

$$x_c=\frac{M_y}{M}=\frac{2\rho_0 a^3\sin\alpha}{3\rho_0 a^2\alpha}=\frac{2}{3}a\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

7. ЗАДАЧА О МАССЕ НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пусть в замкнутой ограниченной области V пространства $oxyz$ задана функция $u=f(x,y,z)=f(P),\ P\in V$. Аналогично тому, как это делалось для случая двух переменных, разобьем V на n малых частей $\Delta V_1,\Delta V_2,...,\Delta V_n$ (буквами $V,\Delta V_1,...,\Delta V_n$ будем обозначать как сами области, так и их объемы). В каждой области ΔV_i выберем по произвольной точке $P_i(x_i,y_i,z_i)\in\Delta V_i (i=1,2,...,n)$ и составим сумму, называемую интегральной:

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i=\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta V_i.$$

Дробя V на все большее количество частей, будем стягивать каждую из них в точку (при этом максимальное расстояние между точками границы области ΔV_i, т.е. диаметр $diam\,\Delta V_i$ стремится к нулю). В результате получим последовательность интегральных сумм $\sigma_n, n\to\infty$.

Определение 15. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{diam\Delta V_i\to 0}\sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения V, ни от выбора точек $P_i\in\Delta V_i$, то этот предел называется *тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV=\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_V f(P)dV=\lim_{diam\Delta V_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta V_i, \tag{7.1}$$

при этом V называется *областью интегрирования*, dV – *элементом объема.*

Теорема 11(о существовании тройного интеграла). Если функция $u = f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области V, то тройной интеграл существует.

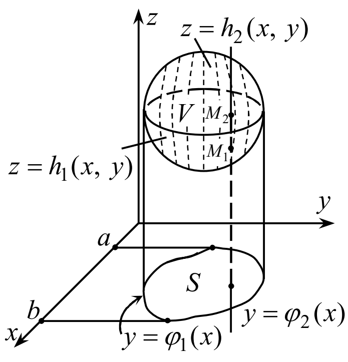
Замечания.

1. Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам 1^0 - 6^0 двойного интеграла.
2. Если объемная плотность ρ тела, занимающего область V, задана как функция координат $\rho = f(x,y,z)$, то тройной интеграл (4.2) равен *массе M* этого тела.
3. Если в формуле (4.2) принять функцию $f(x,y,z) \equiv 1$, то тройной интеграл равен объему тела $V = \iiint\limits_V dV$.

Вычисление тройного интеграла сводят к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Пусть замкнутая ограниченная область интегрирования V обладает следующими свойствами:

1) она вся проецируется на плоскость oxy в двумерную область S, правильную в направлении oy, т.е. ограниченную прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_2(x) \ge \varphi_1(x)$ при $x \in [a,b]$);
2) снизу область V ограничена поверхностью, определяемой функцией $z = h_1(x,y)$, а сверху – поверхностью, определяемою



функцией $z = h_2(x,y)$, причем обе функции непрерывны в S и $h_2(x,y) \geq h_1(x,y)$ Рис.7.1.

Заметим, что любая прямая, параллельная оси z и проходящую через какую-либо внутреннюю точку области V, пересечет ее границу (т.е. ограничивающую ее поверхность) только в двух точках M_1 и M_2.

Теорема 12 (о вычислении тройного интеграла). Если $u = f(x,y,z)$ *непрерывна в области V рассмотренного вида, то:*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_S \left\{ \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\kappa_2(x)} dy \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (7.2)$$

Самый правый интеграл в формуле (4.2) называется *трехкратным интегралом* по области *V***.**

Если проекция *V* на oxy является правильной в направлении ox, то левое равенство в формуле (4.3) выполняется и мы получим трехкратный интеграл, соответствующий соотношению (4.2).

Пример 29**.** Вычислить $J = \iiint\limits_V x^2 dV$, где $V -$ шар $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Поскольку проекция шара на $oxy -$ круг $x^2 + y^2 = R^2$, то получим:

$$J = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 dz.$$

Вычислим внутренний интеграл, считая x, y постоянными:

$$J_1(x,y) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} x^2 dz = x^2 z \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = 2x^2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Затем, считая x постоянным, вычислим:

$$J_2(x) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2x^2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dy = 2x^2 \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dy = 2x^2 \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}dy,$$

Где $a = \sqrt{R^2 - x^2}$. Поскольку:

$$\int \sqrt{a^2 - y^2}dy = \frac{1}{2}\left[a^2 \arcsin\frac{y}{a} + y\sqrt{a^2 - y^2} \right] + C,$$

то

$$J_2(x) = 2x^2 \cdot \frac{1}{2}\left[a^2 \arcsin\frac{a}{a} + a\sqrt{a^2 - a^2} - a^2 \arcsin\left(-\frac{a}{a}\right) + a\sqrt{a^2 - a^2} \right] =$$
$$= 2a^2x^2 \arcsin 1 = \pi\, a^2x^2 = \pi\, x^2(R^2 - x^2).$$

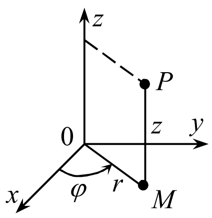
Теперь найдем J:

$$J = \int_{-R}^{R} \pi\, x^2(R^2 - x^2)dx = \pi\left[R^2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]\Bigg|_{-R}^{R} = 2\pi\left[\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{5} \right] = \frac{4\pi\, R^5}{15}.$$

Геометрические и механические приложения тройного интеграла

Пример 30. Найдите с помощью тройного интеграла объем шара $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Поскольку $V = \iiint\limits_V dV$,, то, проделав все выкладки предыдущего примера, с той лишь разницей, что здесь $f(x, y, z) \equiv 1$, а не x^2, получим известную формулу $V = \frac{4}{3}\pi\, R^3$.



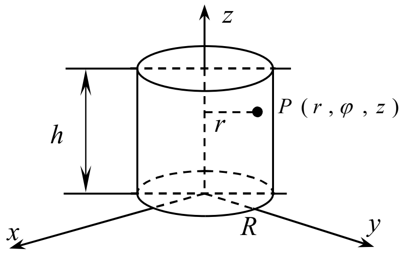
Введем понятие цилиндрической системы координат. Для этого рассмотрим в декартовой системе координат точку $P(x, y, z)$ и ее проекцию M на плоскость oxy (рис.7.2.). Положение P вполне определяется полярными координатами r, φ точки M в плоскости oxy и аппликатой z. Указанные величины r, φ, z называются *цилиндрическими координатами* точки M , причем ее декартовы координаты x, y, z связаны с цилиндрическими r, φ, z соотношениями:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = z \tag{7.3}$$

Если проекцией тела V на плоскость oxy является область S, правильная в полярных координатах, то можно получить выражение для тройного интеграла в цилиндрической системе координат:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} rdr \int_{h_1(\cos\varphi, r\sin\varphi)}^{h_2(r\cos\varphi, r\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)dz. \tag{7.4}$$

Пример 31. Найти массу M прямого кругового цилиндра высотой h и радиуса R, если его плотность $\rho(P)$ равна квадрату расстояния r от точки P до его оси.



Рассмотрим цилиндрическую систему координат, выбрав начало оси z в центре основания цилиндра, а саму ось направив вдоль оси цилиндра (рис.7.3.). Тогда $\rho(P)=r^2$ и для массы M, согласно (7.4) получим:

$$M=\iiint\limits_V r^2 dV=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R rdr\int\limits_0^h r^2 dz=h\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^R r^3 dr=\frac{\pi\, hR^4}{2}.$$

Если тело с плотностью $\rho(x,y,z)$ занимает область V, то для координат точки его центра тяжести $C(x_c,y_c,z_c)$, а также моментов инерции J_x,J_y,J_z относительно декартовых осей ox,oy,oz справедливы формулы:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{M},\quad y_c=\frac{M_{zx}}{M},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{M}, \tag{7.5}$$

где $M_{xy}=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)z\,dV$; $M_{yz}=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)x\,dV$; $M_{zx}=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)y\,dV$ - статические моменты относительно координатных плоскостей;

$$\begin{gathered} J_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dV,\\ J_y=\iiint\limits_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dV,\\ J_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dV. \end{gathered} \tag{7.6}$$

8. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ.

Определение 16. Если каждой точке $M(x,y)$ области S плоскости oxy поставлен в соответствие вектор $\vec{F}(M)$, то говорят, что в области S задано *векторное поле* $\vec{F}(M)$ или $\vec{F}(x,y)$.

Проекциями вектора (вектор-функции) $\vec{F}(x,y)$ на оси координат являются функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, т.е.:

$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = \{P(x,y), Q(x,y)\}.$$

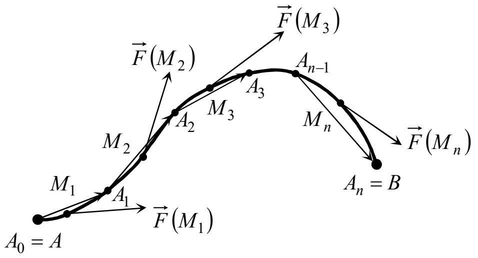
Пусть в области S плоскости oxy задана непрерывная кривая L с началом в точке A и концом в точке B. Пусть в области S также задано векторное поле $\vec{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$.

Разобьем кривую L на n не обязательно равных частей точками:

$$A_0(x_0,y_0) = A,\ \ A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2), ..., A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}),\ \ A_n(x_n,y_n) = B.$$

На каждом участке $A_{i-1}A_i$ выберем по произвольной точке $M_i(\xi_i,\eta_i), i = 1,2,...,n$ (см.рис.) и составим сумму скалярных произведений, называемую *интегральной:*

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \sum_{i=1}^{n} \left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i \right],$$



при этом $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_i = y_i - y_{i-1},\ i = 1,2,...,n.$ Дробя кривую L на все большее количество участков и стягивая длину Δl_i каждого из них к нулю, получим последовательность интегральных сумм $\sigma_n (n \to \infty)$.

Определение 17. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sigma_n$, который не зависит ни от способа разбиения L, ни от выбора точек M_i, то этот предел называется *криволинейным интегралом* от вектор-функции $\vec{F}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$ вдоль кривой L (дуги AB) в направлении от A к B и обозначается:

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$=\int\limits_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_L \vec{F}(x,y)d\vec{r}= \qquad (8.1)$$

$$=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right],$$

где $d\vec{r}=\{dx,dy\}$. Согласно данному определению, криволинейный интеграл (4.9) равен работе силы $\vec{F}$ при перемещении вдоль кривой L от точки A к точке B. Отметим некоторые свойства криволинейного интеграла.

1^0. При изменении направления интегрирования вдоль кривой L знак интеграла (5.1) меняется на противоположный

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=-\int\limits_{BA} Pdx+Qdy.$$

2^0. *Свойство аддитивности* (предполагается, что все интегралы существуют):

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy=\int\limits_{AC} Pdx+Qdy+\int\limits_{CB} Pdx+Qdy.$$

Определение 18. Если кривая L замкнута (т.е. ее начальная и конечная точки совпадают), то интеграл (4.9) называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру L и обозначается:

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy=\oint\limits_L \vec{F}d\vec{r}, \qquad (8.2)$$

при этом обязательно следует указать направление обхода контура L.

Рассмотрим кривую L (дугу AB), заданную параметрически с помощью функций $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$, которые имеют на $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные $\varphi'(t),\psi'(t)$, причем значение $t=\alpha$ соответствует точке A, а $t=\beta-$ точке B. Такую кривую будем называть гладкой.

Теорема 13 (о существовании криволинейного интеграла). Для любой вектор-функции $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$, непрерывной вдоль гладкой кривой AB (т.е. при $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывных вдоль AB) существует криволинейный интеграл (5.1). При этом:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left\{ P\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\varphi'(t) + Q\left[\varphi(t),\psi(t)\right]\psi'(t) \right\} dt. \qquad (8.3)$$

Пример 32**.** Вычислить $J = \int\limits_{L} y^2 dx + x^2 dy,$

где L – верхняя половина эллипса, заданного параметрически: $x = a\cos t, y = b\sin t$ (t – полярный угол), пробегаемая по ходу часовой стрелки.

Согласно (5.3) и свойству интеграла будем иметь:

$$J = -\int\limits_{0}^{\pi} \left[y^2(t)x'(t) + x^2(t)y'(t) \right] dt = -\int\limits_{0}^{\pi} \left[b^2 \sin^2 t(-a\sin t) + a^2 \cos^2 t(b\cos t) \right] dt =$$

$$= -\int\limits_{0}^{\pi} \left[ab^2(1-\cos^2 t)d\cos t + a^2 b(1-\sin^2 t)d\sin t \right] =$$

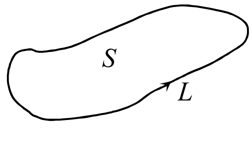
$$= -ab^2 \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]\Bigg|_0^{\pi} - a^2 b\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]\Bigg|_0^{\pi} = -ab^2\left(-2 + \frac{2}{3} \right) - a^2 b\left(0 - 0\right) = \frac{4}{3}ab^2.$$

5.2. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Связь криволинейного и двойного интегралов. Формула Грина

Пусть границей ∂S области S является гладкий замкнутый контур L. Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывны в $\overline{S} = S \cup \partial S$, то справедлива *формула Грина:*

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \qquad (8.4)$$

при этом контур Lобходится в положительном направлении, т.е. так, чтобы область S оставалась все время слева (рис.8.1.).



Пример 33. Вычислить:$J = \oint\limits_{L} xy^2 dy - x^2 y dx,$

где L – окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}=y^2, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(-x^2y)}{\partial y}=-x^2$, то согласно (8.4) получим:

$$J=\iint_S (y^2+x^2)dxdy=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R r^2rdr=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Если в (5.3) принять $P(x)\equiv 0, \quad Q(x)=x$, или же $P(x)=-y, Q(x)\equiv 0,$то получим формулы вычисления площади S фигуры, ограниченной замкнутым контуром L:

$$S=\oint_L xdy=-\oint_L ydx=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx, \tag{8.5}$$

при этом обход контура L совершается в положительном направлении.

Пример 34**.** Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t.$

Применяя формулы (5.5) и (5.3) будем иметь:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos t(b\cos t)-b\sin t(-a\sin t)\right]dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi\, ab$$

Определение 19. Если для любых двух точек A и B из области S интеграл $\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по любому контуру, целиком лежащему в S и соединяющему A и B, принимает одно и то же значение, зависящее только от положения точек A и B, то говорят, что этот интеграл не зависит от пути интегрирования в области S.

Теорема 14.Для того, чтобы интеграл:

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

в области S не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint_\Gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

где Γ − любой замкнутый контур, лежащий в S.

Определение 20. Область S *называется односвязной,* если для любого замкнутого контура, лежащего в S, ограниченная им часть плоскости целиком содержится в S.

Теорема 15. Пусть $P(x,y)$,Q(x,y), $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, непрерывны в односвязной области S.

Тогда для того, чтобы $\int\limits_L Pdx+Qdy$ *в* S *не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы в* S *выполнялось соотношение:*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \qquad (8.6)$$

Будем называть выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *дифференциальным.*

Теорема 16. Пусть $P(x,y), Q(x,y), \frac{\partial P}{\partial y}(x,y), \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ *непрерывны в односвязной области S. Тогда для того чтобы дифференциальное выражение* $Pdx+Qdy$ *в области S было полным дифференциалом некоторой функции* $U(x,y)$, *т.е.* $dU(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, *необходимо и достаточно, чтобы в S выполнялось соотношение* (8.6)

Пусть в *S задано векторное поле* $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$.

Определение 21. Если функция $U(x,y)$ такова, что $dU=Pdx+Qdy$ в S, то она называется *первообразной* данного дифференциального выражения; $U(x,y)$ также называется *потенциалом* векторного поля $\vec{F}$, а само поле $\vec{F}$ *–потенциальным.*

Важно подчеркнуть следующее:

(1) Для первообразной *U(x, y)* выполняются соотношения:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y). \qquad (8.7)$$

(2) Можно показать, что первообразная $U(x,y)$ находится по ее дифференциалу с помощью формулы

$$U(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dU=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(\xi,\eta)\,d\xi+Q(\xi,\eta)\,d\eta\,, \qquad (8.8)$$

при этом начальная точка $M_0(x_0,y_0)$ фиксирована, конечная – $M(x,y)$ является переменной точкой области *S,* а сам интеграл не зависит от пути интегрирования от M_0 к *M.* Переменные интегрирования здесь обозначены через ξ,η, чтобы не спутать их с координатами точки $M(x,y)$.

(3) Если $dU=Pdx+Qdy,$ то для любых двух точек $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$ справедлива формула

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=U(x_1,y_1)-U(x_0,y_0)\,. \qquad (8.9)$$

Поскольку при заданных начальной $M_0(x_0,y_0)$ и конечной $M(x,y)$ точках для вычисления интеграла (5.8) можно взять любой контур, то выберем в качестве него ломаную M_0M_1M; где $M_1(x,y_0)$. Тогда вдоль M_0M_1 выполняется $\eta=y_0,\,d\eta=0,\ x_0\le\xi\le x,$ а вдоль M_1M $\xi=x,\,d\xi=0,\,y_0\le\eta\le y$, откуда, согласно (5.8) будем иметь:

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(\xi,y_0)d\xi+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta)d\eta\,. \qquad (8.10)$$

Пример 34.

а) Найти первообразную $U(x,y)$ дифференциального выражения $xdx+ydy.$

б) Вычислите интеграл $J=\int\limits_{(0;1)}^{(3;4)} xdx+ydy.$

Данное выражение есть полный дифференциал, поскольку $P(x,y)=x,\,Q(x,y)=y$ и $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$. Зафиксируем некоторую точку $M_0(x_0;y_0)$. Тогда, согласно (5.10),

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\xi d\xi+\int\limits_{y_0}^{y}\eta d\eta=\left.\frac{\xi^2}{2}\right|_{x_0}^{x}+\left.\frac{\eta^2}{2}\right|_{y_0}^{y}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{2}(x_0^2+y_0^2)\,.$$

Если теперь константу $-\frac{1}{2}(x_0^2+y_0^2)$ обозначить через *c,* то мы получим множество всех первообразных: $U(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+c$.

Для того, чтобы посчитать J, воспользуемся формулой (8.9):

$$J=U(3;4)-U(0;1)=\frac{1}{2}(9+16)+c-\frac{1}{2}(0+1)-c=12.$$

9. ФОРМУЛА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ, ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЕ. ФОРМУЛА СТОКСА.

Напомним некоторые понятия, введенные в курсе дифференциального исчисления функций многих переменных. Пусть в объеме $V\subset R^3$ введены непрерывные скалярное и векторное поля $U=U(x,y,z)$ и $\vec{a}(x,y,z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ соответственно.

Определение 22. Вектор

$$gradU(M)=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \qquad (9.1)$$

называется *градиентом* поля $U(M)$ в точке $M\in V$.

Градиент направлен по нормали к поверхности уровня в точке M в сторону возрастания функции $U(M)$ и по длине равен:

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

Величина

$$\frac{\partial U}{\partial l}=gradU\cdot\vec{l}^{\,0}=\frac{1}{\left|\vec{l}\right|}\left(\frac{\partial U}{\partial x}l_x+\frac{\partial U}{\partial y}l_y+\frac{\partial U}{\partial z}l_z\right)$$

назыаетя *производной функции* $U(M)$ *по направлению*

$$\vec{l}^{\,0}=\frac{1}{\left|\vec{l}\right|}\left(l_x\vec{i}+l_y\vec{j}+l_z\vec{k}\right).$$

Определение 23. *Дивергенцией* векторного поля $\vec{a}(M)$ называется *скаляр*

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \tag{9.2}$$

Вихрем векторного поля $\vec{a}(M)$ называется *вектор*

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\vec{k} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{a} \tag{9.3}$$

Формально последний вектор можно записать в удобном виде:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим поверхность $S(M) \in V$ с единичным вектором внешней нормали

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}\ .$$

Определение 24. *Потоком векторного поля* $\vec{a}(M)$ через поверхность S в сторону, определенную единичным вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности S называется интеграл:

$$\iint\limits_{(S)} \vec{a} \cdot \vec{n}dS \equiv \iint\limits_{(S)} a_n dS \equiv \iint\limits_{(S)} \left(a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma \right) dS =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[a_x(M_i)\cos\alpha + a_y(M_i)\cos\beta + a_z(M_i)\cos\gamma \right]\Delta S_i \tag{9.4}$$

Теорема 17 (связь поверхностного и тройного интегралов). Если $S-$ замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, то справедлива следующая *формула Гаусса-Остроградского*

$$\oiint\limits_{(S)} a_n dS = \iiint\limits_{(V)} div\vec{a}dV \tag{9.5}$$

Определение 25. Криволинейный интеграл векторного поля $\vec{a}$ по кривой L:

$$\int\limits_{(L)} \vec{a}d\vec{r} = \int\limits_{(A)}^{(B)} a_x dx + a_y dy + a_z dz \tag{9.6}$$

представляет собой *работу поля* $\vec{a}$ вдоль кривой L (A и B – начальная и конечная точки на кривой L). Если кривая L - замкнутая, то криволинейный интеграл (6.6) называется *циркуляцией векторного поля* $\vec{a}$ вдоль контура L.

Теорема18 (связь криволинейного и поверхностного интегралов). Если замкнутая кривая L ограничивает двустороннюю поверхность S, то имеет формула Стокса:

$$\oint_{(L)} \vec{a}d\vec{r} = \iint_{(S)} \left(rot\vec{a}\right)_n dS \ , \tag{9.7}$$

где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности S, направление которого выбирается таким образом, чтобы для наблюдателя, смотрящего на направление $\vec{n}$, обход контура L совершается против хода часовой стрелки.

Определение 26. Вектороное поле $\vec{a}$ называется *потенциальным*, если существует функция $U = U(M)$, такая что $\vec{a} = gradU$.

Для потенциальности поля $\vec{a}$, определенного в односвязанной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е. чтобы $rot\vec{a} = 0$. В этом случае существует потенциал U, который определяется из уравнения $dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz$. Если потенциал U – однозначная функция, то

$$\int_{(A)}^{(B)} \vec{a}d\vec{r} = U(B) - U(A),$$

т.е. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит от точек начала и конца пути. В частности, для замкнутого контура L циркуляция вектора $\vec{a}$ равна нулю $\oint_{(L)} \vec{a}d\vec{r} = 0$.

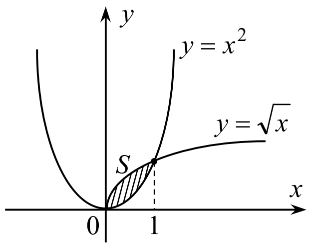
10. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗБОР ВАРИАНТА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Раздел содержит некоторые типичные задачи, относящиеся к материалу, изложенному в предыдущих разделах. Сначала представлены общие формулировки этих задач и даны образцы их решений в конкретных примерах. Если задача уже разбиралась ранее, то указывается соответствующая ссылка. Далее следуют варианты заданий для самостоятельного решения, относящиеся ко всем разобранным задачам.

Разбор примера задания 1.

Пример 1. Вычислить двукратный интеграл $J=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xydy$ и представить графически область интегрирования

Решение. Область интегрирования S представлена на рис.



$$J=\int_0^1 dx\,x\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left(x-x^4\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-x^5\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}.$$

Разбор примера задания 2.

Пример 2**.**Найдите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$**,** где

$D=\{0\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$, $f(x,y)=5$.

Решение.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D 5dxdy=5\int_0^2 dx\int_{y=0}^{y=x} dy=5\int_0^2 xdx=10,$$

что в действительности совпадает с объемом прямой призмы с основанием в форме треугольника площади 2 (кв.ед.) и высотой 5(ед.дл.).

Разбор примера задания 3.

Пример 3. Переходя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл:

$$J=\iint\limits_S\frac{dS}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Решение.

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^a\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^a\frac{-d\left(a^2-r^2\right)}{2\sqrt{a^2-r^2}}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_0^a=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\,d\varphi=\frac{a\pi}{2}.$$

где s – четверть круга радиуса a с центром в точке $O(0,0)$, для которой $x\ge 0,\ y\ge 0.$

Разбор примера задания 4.

Пример 4. Вычислите координаты центра тяжести однородной пластины, занимающей четверть эллипса:

$x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1,(x\ge 0, y\ge 0)$.

Решение. Координаты центра тяжести для однородной пластины, занимающей область S, имеют вид:

$x_c=\dfrac{M_y}{M}; y_c=\dfrac{M_x}{M}$, где $M=\iint\limits_S dxdy$, $M_y=\iint\limits_S xdxdy$, $M_x=\iint\limits_S ydxdy$. Вычислим двойные интегралы, переходя к обобщенным полярным координатам $(r;\varphi)$: $\dfrac{x}{a}=r\cos\varphi; \dfrac{y}{b}=r\sin\varphi$, $a=1; b=2; 0\le x\le a; 0\le y\le b$, причем якобиан преобразования $J(r;\varphi)=rab$:

$$M=\iint\limits_S dxdy=\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^1 (rab)dr=\frac{\pi ab}{4}=\frac{\pi}{2};$$

$$M_y=\iint\limits_S xdxdy=\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^1 (ar\cos\varphi)(rab)dr=a^2b\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int_0^1 r^3dr=\frac{a^2b}{3}=\frac{2}{3};$$

$$M_x=\iint\limits_S ydxdy=\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^1 (br\sin\varphi)(rab)dr=ab^2\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^3dr=\frac{ab^2}{3}=\frac{4}{3}.$$

В результате, $x_c=\dfrac{4}{3\pi}; y_c=\dfrac{8}{3\pi}$.

Разбор примера задания 5.

Пример 5. Вычислите момент инерции относительно оси x для однородной пластины (плотность пластины положить равной 1) в форме треугольника, образованного прямыми $x+y=2, x=2, y=2$.

Решение. $J_{xx}=\iint\limits_S y^2\rho_0 dxdy=\left|\rho_0=1\right|=\int_0^2 dx\int_{y=2-x}^{y=2} y^2dy=\int_0^2 dx\dfrac{y^3}{3}\Bigg|_{2-x}^{2}=$

$$=\frac{1}{3}\int_0^2\left[2^3-(2-x)^3\right]dx=\frac{1}{3}\int_0^2\left(x^3-6x^2+12x\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{12x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=4$$

Пример 6. Вычислить моменты инерции J_x, J_y, J_0 однородной пластины в форме четверти круга $x^2+y^2\le 1;\ x\ge 0; y\ge 0$ относительно осей ox, oy и начала координат.

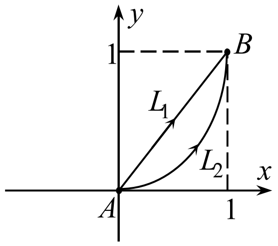
Решение. $J_x=\rho_0\iint\limits_S y^2dS,\quad J_y=\rho_0\iint\limits_S x^2dS$ (ρ – постоянная плотность пластины). Удобно перейти к полярным координатам $y=r\sin\varphi,\ x=r\cos\varphi,$ тогда:

$$J_x=\rho_0\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 r^2\sin^2\varphi\, rdr=\rho_0\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr=\rho_0\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\, d\varphi\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1\right)=$$

$$=\frac{\rho_0}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\rho_0}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{\rho_0}{8}\left.\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{16}\rho_0.$$

Аналогично $J_y=\frac{\pi}{16}\rho_0$, причем очевидно $J_x=J_y$ в силу симметрии пластины относительно прямой $y=x$. В результате получим $J_0=J_x+J_y=\frac{\pi}{8}\rho_0$.

Разбор примера задания 6.



Пример 7. Вычислить $J=\int\limits_{(A)}^{(B)}(x+y)dx+2xydy,$ где $A(0;\,0);\ B(1;\,1)$ - вдоль различных путей L_1 и L_2:

L_1 – отрезок прямой AB;

L_2 – участок AB параболы $y=x^2$

Решение.

1) На пути L_1 $y=x,\ dy=dx,$ поэтому:

$$J=\int\limits_0^1\left[(x+x)dx+2x^2dx\right]=\int\limits_0^1\left(2x+2x^2\right)dx=2\left.\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}.$$

2) На пути L_2 $y=x^2,\ dy=2xdx,$ поэтому:

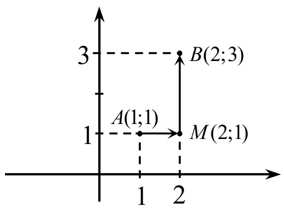
$$J=\int\limits_0^1\left[\left(x+x^2\right)dx+2xx^2 2xdx\right]=$$

$$\int_0^1 \left(x+x^2+4x^4\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right)=\frac{49}{30}.$$

Разбор примера задания 7.

Пример 38. Вычислить $J=\int\limits_{A(1;1)}^{B(2;3)} y^2dx+2xydy.$

Решение. Подынтегральное выражение действительно представляет собой полный дифференциал, поскольку $P(x,y)=y^2;\ Q(x,y)=2xy$ и $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2y,$ а это значит, что J не зависит от пути L интегрирования, соединяющего точки A и B.



Выбрав в качестве L ломаную AMB, где $M(2;1)$ получим:

$$J=\int_1^2 1^2dx+\int_1^3 2\cdot 2ydy=x\Big|_1^2+\frac{4y^2}{2}\Bigg|_1^3=2-1+2(9-1)=17.$$

11.ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ.

Задание 1. Вычислите двукратный интеграл и представьте графически область интегрирования.

1.1. $\int_0^{\pi/2} dx\int_{\cos x}^{1} y^2dy$ **1.2.** $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}$ **1.3.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy\int_0^{\cos y} x\sin ydx$

1.4. $\int_{-1}^{2} dx\int_{x^2}^{x+2} x^2ydy$ **1.5.** $\int_0^{\pi} dx\int_{\sin x}^{1} y\cos xdy$ **1.6.** $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} x^3(1+y)dx$

1.7. $\int_0^1 dx\int_{e^{-x}}^{e^x}\frac{x^4}{y}dy$ **1.8.** $\int_1^2 dx\int_0^{1/x} e^{xy}dy$ **1.9.** $\int_0^{\pi} dy\int_0^{2\sin y} e^{\cos y}dx$

1.10. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} x^2e^ydy$ **1.11.** $\int_{-1}^{0} dx\int_{\sqrt{x+1}}^{1} xy^3dy$ **1.12.** $\int_0^1 dy\int_{y^3}^{\sqrt[3]{y}} (x^2+1)ydx$

1.13. $\int_{-1}^{2} dx\int_{x^2-1}^{x+1} xydy$ **1.14.** $\int_0^{\pi/4} dx\int_{\sin x}^{\cos x} ydy$ **1.15.** $\int_0^1 dy\int_{y-1}^{0} e^ydx$

1.16. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} dx \int\limits_{ctgx}^{tgx} dy$

Задание 2.Найдите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Сравните результат с объемом соответствующего тела.

2.1. $D=\{0\le x\le 2; 0\le y\le 1\}$; $f(x,y)=3$.

2.2. $D=\{0\le x\le 2;\ 0\le y\le x\}$; $f(x,y)=3$.

2.3. $D=\{0\le x\le 2;\ 0\le y\le x\}$; $f(x,y)=3y$.

2.4. $D=\{0\le x\le 2;\ 0\le y\le x\}$; $f(x,y)=3x$.

2.5. $D=\{0\le x\le 2;\ -x\le y\le x\}$; $f(x,y)=3y$.

2.6. $D=\{0\le x\le 2;\ -x\le y\le x\}$; $f(x,y)=3x$.

2.7. $D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6x$.

2.8. $D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6y$.

2.9. $D=\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=2x$.

2.10. $D=\{0\le x\le 1;\ x-1\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6x$.

2.11. $D=\{0\le x\le 1;\ x-1\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6y$.

2.12. $D=\{0\le x\le 1;\ x-1\le y\le 1-x\}$; $f(x,y)=6$.

2.13. $D=\{(x;y)\,|\,0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$; $\quad f(x,y)=x$

2.14. $D=\{(x;y)\,|\,1\le x\le 2; 0\le y\le 3\}$; $\quad f(x,y)=10$

2.15. $D=\{(x;y)\,|\,2\le x\le 4; 0\le y\le 3\}$; $\quad f(x,y)=5$

2.16. $D=\{(x;y)\,|\,0\le x\le 2; 0\le y\le 1\}$; $\quad f(x,y)=4$

Задание 3. Переходя к полярным координатам, вычислите заданные двойные интегралы.

3.1 $\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, где S – полукруг радиуса $r=2$ с центром в начале координат ($y\ge 0$).

3.2 $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S – круг $x^2+y^2 \le 2x$.

3.3 $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S – круг $x^2+y^2 \le 2y$.

3.4 $\iint_S x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S – четверть круга радиуса $r=2$ с центром в начале координат $(x \ge 0,\ y \ge 0)$.

3.5 $\iint_S y\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S – четверть круга радиуса $r=2$ с центром в начале координат $(x \le 0,\ y \ge 0)$.

3.6 $\iint_S ydxdy$, где S – круг $x^2+y^2-4x \le 0$.

3.7 $\iint_S xdxdy$, где S – круг $x^2+y^2-4y \le 0$.

3.8 $\iint_S \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, где S – четверть круга радиуса $r=3$ с центром в начале координат $(x \ge 0, y \le 0)$.

3.9 $\iint_S \sqrt{16-x^2-y^2}\,dxdy$, где S – четверть круга радиуса $r=4$ с центром в начале координат $(x \le 0, y \le 0)$.

3.10 $\iint_S x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S – полукруг радиуса $r=2$ с центром в начале координат $(x \ge 0)$.

3.11 $\iint_S y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S – четверть круга радиуса $r=2$ с центром в начале координат ($x \geq 0, y \geq 0$)

3.12 $\iint\limits_S (x^2 - y^2)dxdy$, где S – полукруг радиуса $r = 3$ с центром в начале координат ($y \leq 0$).

3.13 $\iint\limits_S xdxdy$, где S – полукруг $x^2 + y^2 + 2y \leq 0,\ x \geq 0$.

3.14 $\iint\limits_S ydxdy$, где. S – полукруг $x^2 + y^2 + 2x \leq 0,\ y \geq 0$

3.15 $\iint\limits_S xy^2dxdy$, где S – полукруг радиуса $r = 1$ с центром в начале координат ($x \geq 0$).

3.16 $\iint\limits_S yx^2dxdy$, где S – четверть круга радиуса $r = 1$ с центром в начале координат ($x \leq 0, y \geq 0$).

Задание 4. Построить область и вычислите координаты центра тяжести однородной пластины, имеющей форму:

4.1 треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(0;4)$, $C(-2;4)$.

4.2 фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x + 4;\ \ y^2 = -2x + 4$.

4.3 четверти эллипса $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, y \geq 0$.

4.4 фигуры, ограниченной кривой $y = 1 - x^2$, осью ох и осью оу.

4.5 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами: $r \leq 2;\ \dfrac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$

4.6 треугольника с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(2;3)$, $C(0;3)$.

4.7 фигуры, ограниченной кривыми $x = 1 - y^2;\ \ x - y + 1 = 0$.

4.8 четверти эллипса $x^2 + \frac{y^2}{9} \le 1, \quad x \ge 0, y \ge 0$.

4.9 фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x$, осью ох и осью оу.

4.10 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами: $r \le 3$; $\frac{5\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$

4.11 треугольника с вершинами в точках $A(0;0), B(-2;0), C(0;-3)$.

4.12 фигуры, ограниченной кривыми $x = y^2$; $x = 9$.

4.13 четверти круга $x^2 + y^2 \le 4, \quad x \ge 0, y \ge 0$.

4.14 фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$

4.15 фигуры, определяемой в полярных координатах неравенствами: $r \le 1$; $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

4.16 треугольника с вершинами в точках $A(0;0), B(1;0), C(1;-2)$.

Задание 5. Вычислите моменты инерции относительно указанных осей для однородной пластины, имеющей форму:

5.1 Треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 2$; $x = 2$; $y = 2$ относительно оси *ox*.

5.2 Прямоугольника со сторонами 1 и 2 относительно оси, проходящей через меньшую сторону.

5.3 Треугольника, ограниченного прямыми $y = x$; $y = -x$; $y = 1$ относительно оси *oy*.

5.4 Треугольника с вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(0;1)$ относительно оси ох.

5.5 Квадрата, ограниченного линиями $x=0; x=2; y=0; y=2$ относительно начала координат.

5.6 Плоской фигуры, ограниченной линиями $y=1+2x^2$, $y=3x$, относительно оси ох.

5.7 Кольцевой пластины $1 \le x^2+y^2 \le 4$ относительно оси ох.

5.8 Четверти кольца $4 \le x^2+y^2 \le 9, x \ge 0, y \ge 0$ относительно начала координат.

5.9 Треугольника, ограниченного прямыми $x+y=3; x=3; y=3$ относительно оси oy.

5.10 Прямоугольника со сторонами 2 и 3 относительно оси, проходящей через большую сторону.

5.11 Треугольника, ограниченного прямыми $y=x;\ y=-x;\ y=1$ относительно оси ox.

5.12 Треугольника с вершинами $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(0;2)$ относительно оси oy.

5.13 Плоской фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2; y=0$ относительно оси oy.

5.14 Плоской фигуры, ограниченной линиями $y=1+2x^2, y=3x$, относительно оси oy.

5.15 Кольцевой пластины $1 \le x^2 + y^2 \le 9$ относительно начала координат.

5.16 Полукольца $4 \le x^2 + y^2 \le 16, x \ge 0,$ относительно оси oy.

Задание 6. Вычислите криволинейный интеграл.

Варианты 1 – 5: вычислите интеграл вдоль указанной кривой от точки

A до точки B.

Варианты 6– 10: вычислите интеграл вдоль кривой L, заданной параметрически.

Варианты 11 – 16: вычислите интеграл по замкнутому контуру L, проходя его в положительном направлении; используйте формулу Грина. В вариантах **14 – 16** формулу Грина проверьте непосредственными вычислениями интегралов.

6.1 $\int\limits_{(A)}^{(B)} \frac{x^2}{y+1}dx + xdy; \quad y = x^3; \quad A(0;0),\ B(1;1)$

6.2 $\int\limits_{(A)}^{(B)} (x^2 - xy)dx + (xy + y^2)dy; \quad y = x^2; \quad A(1;1),\ B(2;4)$

6.3 $\int\limits_{(A)}^{(B)} \frac{y^4}{x}dx - (y^3 + x^2 y)dy$**;** $\quad y = \sqrt{x}$**;** $\quad A(1;1),\ B(4;2)$

6.4 $\int\limits_{(A)}^{(B)} y^3 dx + xdy; \quad y = e^x; \quad A(0;1),\ B(1;e)$

6.5 $\int\limits_{(A)}^{(B)} ydx + x^2 ydy$; $y = \ln x$; $A(1;0)$, $B(e;1)$

6.6 $\int\limits_{L} y^2 dx + xdy$; $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \pi$

6.7 $\int\limits_{L} xydx - (x+y)dy$; $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$

6.8 $\int\limits_{L} ydx - xdy$; $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$

6.9 $\int\limits_{L} x^2 ydx + (y-x)dy$; $x = t^3$, $y = t^4 - 1$, $0 \le t \le 1$

6.10 $\int\limits_{L} (x-y)dx + 2ydy$; $x = t^2$, $y = \cos t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

6.11 $\oint\limits_{L} -y^3 dx + x^3 dy$; L – окружность $x^2 + y^2 = 4$.

6.12 $\oint\limits_{L} (2x - \dfrac{y^3}{3})dx + (5y + \dfrac{x^3}{3})dy$; L – окружность $x^2 + y^2 = 1$.

6.13 $\oint\limits_{L} (-2yx^2 + x + 1)dx + (2x-1)y^2 dy$; L – окружность $x^2 + y^2 = 9$.

6.14 $\oint\limits_{L} (x+y)dx + x^2 ydy$; L – треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;2)$.

6.15 $\oint\limits_{L} (2xy+1)dx + xy^2 dy$; L – треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(1;-3)$ $C(1;0)$.

6.16 $\oint\limits_L (x^2 - y^2)dx + 2(x-y)^2 dy$; L – треугольник с вершинами $A(0;0), B(-1;3), C(-1;0)$.

Задание 7.Вычислите криволинейный интеграл от выражения, являющегося полным дифференциалом.

7.1. $\int\limits_{A(-1;2)}^{B(2;3)} ydx + xdy$ **7.2.** $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;1)} (x+y)(dx+dy)$

7.3. $\int\limits_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} \cos xdx + \sin ydy$ **7.4.** $\int\limits_{A(1;2)}^{B(2;5)} x^2dx + y^2dy$

7.5. $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;2)} xdx + ydy$ **7.6.** $\int\limits_{A(-1;1)}^{B(2;2)} x^2dx - ydy$

7.7. $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;2)} 2xydx + x^2dy$ **7.8.** $\int\limits_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)} \sin xdx - \cos ydy$

7.9. $\int\limits_{A(-2;1)}^{B(0;2)} (x+y)dx + xdy$ **7.10.** $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;1)} xdx + 2y^2dy$

7.11. $\int\limits_{A(0;0)}^{B(2;1)} (x-y)dx - xdy$ **7.12.** $\int\limits_{A(1;1)}^{B(2;3)} 2xdx - ydy$

7.13. $\int\limits_{A(-1;0)}^{B(0;2)} xdx - y^2dy$ **7.14.** $\int\limits_{A(-1;0)}^{B(2;2)} x^2dx - y^2dy$

7.15. $\int\limits_{A(0;0)}^{B\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} \sin x dx - \sin y dy$ **7.16.** $\int\limits_{A(0;0)}^{B(1;1)} x dx + y^3 dy$

12. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под редакцией Демидовича Б.П. – М., АСТ, 2001.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. – М., Наука, 1985.

2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. 3-е изд. – М., ЮНИТИ, 2010.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., Наука, 1988.

5. Данко И.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1, 2. – М., Высшая школа, 1996.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч.1,2. – М.,Физматлит, 2005.

7. Лунгу К.Н., Макаров Е.В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.2.-М.:Физматлит, 2005.

8. Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. - М.: Физматлит,2002.

9. С.К. Быстриков, В.А. Кадымов. Интегральное исчисление функции одной независимой переменной: неопределенный и

определенный интегралы. Элементы теории с примерами и вариантами расчетно-графических работ. Методические указания для студентов заочного отделения всех специальностей. ФГБОУ ВПО Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ) 107023, г. Москва, ул. Б.Семеновская, 38. М. 2014.