

Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Кафедра физики

Избранные главы физики

Методические указания к решению задач

Москва
2013

Избранные главы физики: методические указания к решению задач /

А.А.Колоколов. – М.: ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН», 2013. – 17с.

Рассматривается использование законов классической и квантовой физики для расчетов тепловых, электрических и магнитных характеристик кристаллов.

Методические указания предназначены для студентов второго курса факультета ИТС по направлениям подготовки 221700 «Стандартизация и метрология» и 200100 «Приборостроение», изучающих дисциплину «Избранные главы физики».

УДК 539

© Колоколов А.А., 2013

© ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН», 2013

1. Тепловые свойства твердых тел

1. Температура Дебая для кристалла $\theta_D=100\text{K}$. Средняя скорость звука в кристалле $v=1380\text{м/с}$. Оценить постоянную кристаллической решетки a и сравнить максимальную энергию фонона (кванта звуковой волны) ε_{Φ}^{max} со средней тепловой энергией гармонического осциллятора в классической теории при температуре $T=100\text{K}$.

Решение

Согласно определению температура Дебая

$$\theta_D = \frac{\hbar \cdot \Omega_{max}}{k}, \quad (1.1)$$

где максимальная частота звуковых волн в кристалле

$$\Omega_{max} = 2\pi \cdot \frac{v}{a}. \quad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$a = \frac{2\pi\hbar v}{k\theta_D} = \frac{h \cdot v}{k\theta_D} = 6,63 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (1.3)$$

Энергия фонона с максимальной частотой

$$\varepsilon_{\Phi}^{max} = \hbar \cdot \Omega_{max} = k \cdot \theta_D = 1,38 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}. \quad (1.4)$$

Средняя тепловая энергия гармонического осциллятора при $T=300\text{K}$ в классической теории

$$\varepsilon_T = kT = 4,4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}. \quad (1.5)$$

Таким образом, $\varepsilon_{\Phi}^{max} < \varepsilon_T$.

Ответ: $a = 6,63 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

2. Какое количество теплоты ΔQ необходимо для нагревания кристалла поваренной соли NaCl массой $m=100\text{г}$ на $\Delta T=5\text{K}$, если начальная температура T_1 кристалла: 1) 10K , 2) 800K (температура плавления кристалла $\text{NaCl} \sim 1074\text{K}$). Температура Дебая для кристалла NaCl $\theta_D=275\text{K}$. Молярная масса NaCl $\mu=58,44\text{г/моль}$.

Решение

В первом случае $T_1 \ll \theta_D$, поэтому

$$c_{\mu V} = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3, \quad (2.1)$$

$$\Delta Q_1 = \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_1 + \Delta T} c_{\mu V}(T) dT = \frac{m}{\mu} \frac{12\pi^4 R}{20\theta_D^3} [(T_1 + \Delta T)^4 - T_1^4] = 1,6 \text{ Дж}. \quad (2.2)$$

Во втором случае $T_1 > \theta_D$, поэтому

$$c_{\mu V} = 3R, \quad (2.3)$$

$$\Delta Q_2 = \frac{m}{\mu} \int_{T_1}^{T_1 + \Delta T} c_{\mu V}(T) dT = \frac{m}{\mu} 3R \Delta T = 213 \text{ Дж}. \quad (2.4)$$

Ответ: $\Delta Q_1 = 1,6 \text{ Дж}$; $\Delta Q_2 = 213 \text{ Дж}$.

3. Какое нормальное напряжение σ_n необходимо приложить к концам алюминиевого стержня, чтобы при его нагревании на $\Delta T = 1 \text{ К}$ длина стержня не изменилась? Коэффициент линейного растяжения алюминия $\alpha_T = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, модуль Юнга для алюминия $E = 6,9 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.

Решение

Согласно закону линейного теплового расширения кристаллов относительное изменение длины l стержня при его нагревании на ΔT определяется формулой

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_T \cdot \Delta T. \quad (3.1)$$

В соответствии с законом Гука для однородного стержня такая деформация наблюдается при приложении к концам стержня растягивающего усилия с нормальным напряжением

$$\sigma_n = E \frac{\Delta l}{l}, \quad (3.2)$$

где E – модуль Юнга материала стержня.

Из формул (3.1) и (3.2) следует, что для предотвращения теплового расширения стержня к его концам необходимо приложить сжимающее усилие с нормальным напряжением

$$\sigma_n = E \cdot \alpha_T \cdot \Delta T = 1,8 \cdot 10^6 \text{ Па} . \quad (3.3)$$

Ответ: $\sigma_n = 1,8 \cdot 10^6 \text{ Па} .$

2. Модель свободных электронов металла

4. Оценить энергию Ферми ε_F и скорость Ферми v_F для свободных электронов меди при $T=0\text{К}$. Концентрация свободных электронов в меди $n=10^{22} \text{ см}^{-3}$.

Решение

Согласно определению энергия Ферми

$$\varepsilon_F = \sqrt[3]{9\pi^4 n^2} \frac{\hbar^2}{2m} = 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} . \quad (4.1)$$

Отсюда получим, что скорость Ферми

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}} = 9,2 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}} . \quad (4.2)$$

При комнатной температуре $T=300\text{К}$ энергия классического теплового движения частицы

$$\varepsilon_F \sim kT = 10^{-21} \text{ Дж}$$

и соответствующая средняя скорость теплового движения электрона

$$v_T \sim \sqrt{\frac{kT}{m}} \sim 10^4 \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Таким образом, квантовое движение свободных электронов с энергией Ферми в кристалле меди при $T=0\text{К}$ намного интенсивней классического теплового движения электронов при $T=300\text{К}$.

Ответ: $\varepsilon_F = 2,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, $v_F = 9,2 \cdot 10^5 \text{ м/с}$.

5. Определить внутреннюю контактную разность потенциалов V_i и напряженность электрического поля E внутри запирающего слоя толщиной $h=0,1\text{ мкм}$ в случае электрического контакта двух металлов с энергиями Ферми $\varepsilon_{F1}=2\text{ эВ}$ и $\varepsilon_{F2}=1\text{ эВ}$.

Решение

Согласно определению внутренней контактной разности потенциалов

$$V_i = \frac{\varepsilon_{F2} - \varepsilon_{F1}}{e} = 1\text{ В}. \quad (5.1)$$

Здесь учтено, что $1\text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ Дж}$. Напряженность электрического поля внутри запирающего слоя

$$E = \frac{V_i}{h} = 10^7\text{ В/м}. \quad (5.2)$$

Таким образом, внутри запирающего слоя возникает сильное электрическое поле, которое, однако, существенно меньше внутрикристаллического поля, определяющего энергетические зоны металла.

Ответ: $V_i = 1\text{ В}$, $E = 10^7\text{ В/м}$.

6. Построить график распределения Ферми-Дирака $f(\varepsilon, T)$ для двух случаев: 1) $T=0\text{ К}$, 2) $T>0\text{ К}$. Оценить температуру T_1 , при которой необходимо учитывать дискретность энергетического спектра свободных электронов в меди.

Решение

При $T=0\text{ К}$ экспоненциальная функция в знаменателе $f(\varepsilon, T)$ имеет всего два значения:

$$e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} = \begin{cases} 0, & \mu(0) > \varepsilon > 0; \\ 1, & \infty > \varepsilon > \mu(0), \end{cases} \quad (6.1)$$

поэтому зависимость функции $f(\varepsilon, 0)$ от энергии принимает вид, показанный на рис.6.1. Здесь $\mu(0) = \varepsilon_F$ – максимальная энергия свободного электрона при $T=0\text{ К}$.

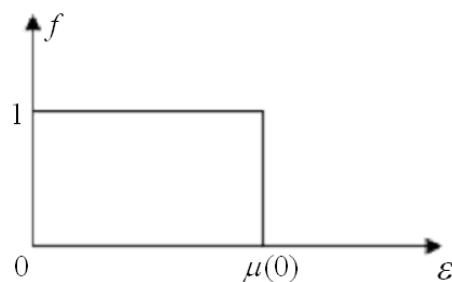


Рис.6.1

В области температур $T > 0\text{K}$ экспоненциальная функция монотонно растет с увеличением энергии ε , а функция $f(\varepsilon, T)$ монотонно уменьшается, как показано на рис. 6.2. Здесь $\mu(T) > \mu(0)$ – химический потенциал системы свободных электронов при температуре T .

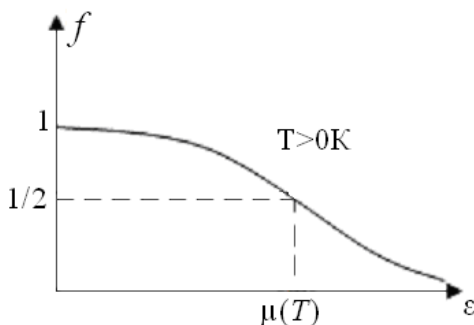


Рис.6.2

Согласно решению задачи №4 для куска меди с линейным размером $L=1\text{см}$, средний энергетический интервал между соседними энергетическими уровнями свободных электронов меди по порядку величины

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_F}{2n} \cong 10^{-41} \text{ Дж}, \quad (6.2)$$

где n – концентрация свободных электронов.

Дискретность энергетического спектра необходимо учитывать, если

$$\Delta\varepsilon > kT.$$

Отсюда получим, что по порядку величины

$$T_1 \sim \frac{\Delta\varepsilon}{k} \sim 10^{-18} \text{ К}. \quad (6.3)$$

Отметим, что наименьшая температура, достигнутая на настоящее время $\sim 10^{-9} \text{ К} \gg T_1$.

Ответ: $T_1 = 10^{-18} \text{ К}$.

3. Электропроводность полупроводников

7. Определить среднюю концентрацию n_e электронов в зоне проводимости собственного (беспримесного) полупроводника при температуре $T \ll \Delta E_g/k$, если эффективная масса электрона в зоне проводимости m_e^* , а эффективная масса дырки в валентной зоне m_p^* .

Решение

Среднее число электронов, находящихся в квантовом состоянии с энергией ε при температуре T , определяется распределением Ферми-Дирака

$$f_e(\varepsilon, T) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} + 1}, \quad (7.1)$$

где μ - химический потенциал системы электронов, k - постоянная Больцмана. При выполнении условия

$$\varepsilon - \mu \gg kT$$

можно приближенно положить

$$f_e(\varepsilon, T) \approx e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}}, \quad (7.2)$$

что соответствует классическому закону Больцмана.

Электроны переходят в зону проводимости из валентной зоны, поэтому функция распределения $f_p(\varepsilon, T)$ дырок в валентной зоне удовлетворяет соотношению

$$f_p(\varepsilon, T) + f_e(\varepsilon, T) = 1, \quad (7.3)$$

т.е. в квантовом состоянии валентной зоны находится либо электрон, либо дырка. Если для энергетических уровней валентной зоны выполняется условие

$$\mu - \varepsilon \gg kT,$$

то из (7.1) и (7.3) следует, что

$$f_p(\varepsilon, T) \approx e^{\frac{\mu - \varepsilon}{kT}}. \quad (7.4)$$

Согласно законам квантовой механики средняя концентрация электронов в зоне проводимости описывается выражением

$$n_e = \int_{E_c}^{\infty} f_e(\varepsilon, T) g_e(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{E_c}^{\infty} e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} \cdot \frac{\sqrt{2m_e^{*3}}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\varepsilon - E_c} d\varepsilon = 2 \left(\frac{m_e^* kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{E_c - \mu}{kT}}, \quad (7.5)$$

где $\varepsilon > E_c$ и

$$g_e(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2m_e^{*3}}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{\varepsilon - E_c} \quad (7.6)$$

-энергетическая плотность квантовых состояний для электронов в зоне проводимости (число квантовых состояний, приходящихся на единичный интервал энергии и единичный объем кристалла). Формула (7.6) получается методами квантовой механики в рамках модели свободных электронов, которую можно использовать для описания электронов в зоне проводимости.

Средняя концентрация дырок в валентной зоне вычисляется аналогично:

$$n_p = \int_{-\infty}^{E_v} f_p(\varepsilon, T) g_p(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\infty}^{E_v} e^{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}} \cdot \frac{\sqrt{2m_p^{*3}}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E_v - \varepsilon} d\varepsilon = 2 \left(\frac{m_p^* kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{E_v - \mu}{kT}}, \quad (7.7)$$

где $E_v > \varepsilon$ и

$$g_p(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2m_p^{*3}}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E_v - \varepsilon} \quad (7.8)$$

-энергетическая плотность квантовых состояний для дырок в валентной зоне на единицу объема.

Для собственных (беспримесных) полупроводников

$$n_e = n_p, \quad (7.9)$$

поэтому согласно (7.5) и (7.7) химический потенциал

$$\mu = \frac{E_v + E_c}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \left(\frac{m_p^*}{m_e^*} \right) \quad (7.10)$$

и средняя концентрация электронов в зоне проводимости

$$n_e = 2 \left(\frac{m_e^* kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_p^*}{m_e^*} \right)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{E_c - E_v}{2kT}}. \quad (7.11)$$

Отметим, что при $T \rightarrow 0$ $n_e \rightarrow 0$ и $n_p \rightarrow 0$. С повышением температуры до $T \sim (E_c - E_v)/2k$ концентрации n_e и n_p растут по экспоненциальному закону.

Ответ: $n_e = 2 \left(\frac{m_e^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_p^*}{m_e^*} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{E_c - E_v}{2kT}} .$

8. Определить среднюю концентрацию n_e электронов проводимости и химический потенциал μ электронов для случая несобственного полупроводника с примесями донорного типа, если концентрация атомов проводимости N_d , эффективная масса электрона проводимости m_e^* и температура полупроводника удовлетворяет условиям $\Delta E_g \gg kT \gg \Delta E_d$.

Решение

При заданной в условиях задачи температуре полупроводника вероятность тепловой ионизации атома примеси

$$P \sim e^{-\frac{\Delta E_d}{kT}} \approx 1, \quad (8.1)$$

поэтому можно считать, что все атомы примеси ионизированы и концентрация электронов проводимости равна концентрации атомов примеси

$$n_e = N_d . \quad (8.2)$$

Поскольку $kT \ll \Delta E_g$, тепловым возбуждением электронов валентной зоны и их переходом в зону проводимости можно пренебречь.

Используя результат задачи №10, можно записать

$$n_e = 2 \left(\frac{m_e^* kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_c - \mu}{kT}} . \quad (8.3)$$

Из (8.3) с учетом (8.2) получим

$$\mu = E_c + kT \ln \frac{N_d}{2(m_e^* kT / 2\pi\hbar^2)^{3/2}} . \quad (8.4)$$

Ответ: $n_e = N_d$, $\mu = E_c + kT \ln \frac{N_d}{2(m_e^* kT / 2\pi\hbar^2)^{3/2}} .$

9. Определить коэффициент выпрямления

$$K = \frac{I_{np}(V)}{|I_{обр}(V)|}$$

p/n -перехода при температуре $T=300\text{K}$ и внешнем напряжением $V=0,2\text{В}$.

Решение

Согласно определению коэффициента выпрямления

$$K = \frac{I_{\text{пр}}(V)}{|I_{\text{обр}}(V)|} = \frac{I_0(e^{\frac{eV}{kT}} - 1)}{\left| I_0(e^{\frac{-eV}{kT}} - 1) \right|} = \frac{e^{\frac{eV}{kT}} - 1}{1 - e^{\frac{-eV}{kT}}} \approx 2.3 \cdot 10^3. \quad (9.1)$$

Ответ: $K \approx 2.3 \cdot 10^3$.

4. Магнитные свойства твердых тел

10. Определить молярную магнитную восприимчивость $\chi_{\text{мол}}$ атомарного водорода в основном состоянии, описываемом волновой функцией

$$\psi_1 = \frac{e^{-\frac{r}{r_1} - i \frac{E_1 t}{\hbar}}}{\sqrt{\pi r_1^3}},$$

где $E_1 = -me^4/32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2 = -13,6\text{эВ}$ - энергия основного состояния атома водорода, $r_1 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 0,53 \cdot 10^{-10}\text{м}$ - радиус первой боровской орбиты электрона и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - расстояние от центра атома до точки наблюдения. Вкладом магнитных моментов электрона и протона, связанных с их спином, можно пренебречь.

Решение

В основном состоянии водорода орбитальный момент импульса электрона равен нулю, поэтому магнитный момент, обусловленный орбитальным движением электрона, также равен нулю. Диамагнитный отклик атома водорода возникает благодаря изменению орбитального движения электрона под действием внешнего магнитного поля. Электрон приобретает орбитальный момент импульса и связанный с ним магнитный момент.

Согласно законам классической динамики изменение орбитального движения электрона обусловлено с действием силы Лоренца

$$\vec{F}_L = e[\vec{v} \cdot \vec{B}], \quad (10.1)$$

где $e < 0$ – заряд электрона, \vec{v} – скорость электрона, \vec{B} – вектор магнитной индукции. Под действием силы Лоренца электрон вращается вокруг протона с угловой скоростью

$$\vec{\Omega} = -\frac{e}{2m} \vec{B} \quad (10.2)$$

и создает круговой ток

$$J = \frac{|e|}{T} = \frac{|e|}{2\pi/\Omega} = \frac{e^2 B}{4\pi m} . \quad (10.3)$$

Магнитный момент данного тока

$$\vec{\mu}_a = JS \cdot \vec{n} = -\frac{|e|S}{2\pi} \cdot \vec{\Omega} = -\frac{e^2 S}{4\pi m} \cdot \vec{B} , \quad (10.4)$$

где

$$S = \pi r_{\perp}^2 = \pi(x^2 + y^2) \quad (10.5)$$

- площадь круга, описываемого электроном, если ось z направить по вектору \vec{B} (см.рис. 10.1).

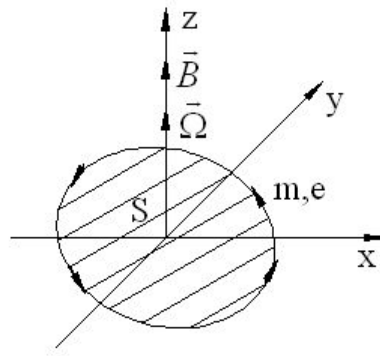


Рис. 10.1

Площадь S вычисляется с помощью волновой функции ψ_1 основного состояния без учета вклада возбужденных состояний атома водорода. Для сферически-симметричной функции ψ_1 справедливы следующие соотношения:

$$\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = 3\langle x^2 \rangle = 3\langle y^2 \rangle = 3\langle z^2 \rangle = \langle r^2 \rangle , \quad (10.6)$$

где угловые скобки обозначают усреднение координат электрона по объёму атома водорода с помощью с помощью волновой функции ψ_1 и

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 |\Psi_1|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^\infty r^2 \frac{e^{-\frac{2r}{r_1}}}{\pi r_1^3} \cdot 4\pi \cdot r^2 dr = \frac{r_1^2}{8} \int_0^\infty u^4 e^{-u} du = 3r_1^2 . \quad (10.7)$$

Из (10.6) и (10.7) следует, что

$$\langle S \rangle = \pi (\langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle) = \pi \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle = 2\pi \cdot r_1^2 . \quad (10.8)$$

Поскольку для слабо намагниченных веществ $\mu \approx 1$ и

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} , \quad (10.9)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, то используя (10.4), (10.8) и (10.9), легко получить атомную магнитную восприимчивость

$$\chi_a = \frac{\mu_a}{H} = -\mu_0 \frac{e^2 r_1^2}{2m} . \quad (10.10)$$

По определению **молярная магнитная восприимчивость**

$$\chi_{\text{мол}} = N_A \cdot \chi_a = -\mu_0 \cdot N_A \frac{e^2 r_1^2}{2m} \approx -2,56 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{моль} , \quad (10.11)$$

где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ 1/моль – число Авогадро.

Ответ: $\chi_{\text{мол}} = -\mu_0 \cdot N_A \frac{e^2 r_1^2}{2m} \approx -2,56 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{моль} .$

11. Определить магнитную восприимчивость 1моля парамагнитного атомарного газа в состоянии термодинамического равновесия при температуре T , если постоянный магнитный момент атома μ_a . Магнитное поле считается слабым и выполняется условие $\mu_a B / kT \ll 1$, где B – магнитная индукция.

Решение

В постоянном магнитном поле частица с постоянным магнитным моментом обладает энергией

$$\varepsilon = -(\mu_a \cdot \vec{B}) . \quad (11.1)$$

Вероятность нахождения частицы в состоянии с энергией ε описывается функцией распределения Больцмана

$$g = c e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} , \quad (11.2)$$

где c – нормировочная постоянная, T – абсолютная температура системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, k – постоянная Больцмана.

В нашем случае

$$g(\theta, \varphi) = ce^{\frac{\mu_a B \cos \theta}{kT}} \approx c \left(1 + \frac{\mu_a B}{kT} \cos \theta \right), \quad (11.3)$$

где углы θ и φ определяют ориентацию вектора $\vec{\mu}_a$ относительно вектора \vec{B} , θ – угол между векторами \vec{B} и $\vec{\mu}_a$, φ – угол поворота вектора $\vec{\mu}_a$ вокруг вектора \vec{B} (при $\theta = \text{const}$). В (11.3) использовано условие задачи $\mu_a B / kT \ll 1$ и разложение экспоненциальной функции в ряд по степеням аргумента: $e^x \approx 1 + x$, $|x| \ll 1$.

Записав условие нормировки функции $g(\theta, \varphi)$ в виде:

$$\int g(\theta, \varphi) d\Omega = c \int d\Omega + c \frac{\mu_a B}{kT} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = c \cdot 4\pi = 1, \quad (11.4)$$

где $d\Omega = d\varphi \sin \theta d\theta$ – бесконечно малый элемент телесного угла, получим, что

$$c = \frac{1}{4\pi}. \quad (11.5)$$

С учетом (11.3) и (11.5) средняя проекция магнитного момента частицы на направление вектора \vec{B} определяется выражением

$$\begin{aligned} \mu_{aB} &= \int g(\theta, \varphi) \mu_a \cos \theta d\Omega = \frac{\mu_a}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta + \frac{\mu_a B}{kT} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right] = \\ &= \frac{\mu_a^2 B}{4\pi kT} \left[2\pi \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi \right) \right] = \frac{\mu_a^2 B}{3kT} = \frac{\mu_a^2 \mu_0}{3kT} H. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Отсюда находим, что атомная магнитная восприимчивость

$$\chi_a = \frac{\mu_0 \mu_a^2}{3kT} \quad (11.7)$$

и молярная магнитная восприимчивость

$$\chi_{\text{мол}} = N_A \cdot \chi_a = N_A \frac{\mu_0 \mu_a^2}{3kT}, \quad (11.8)$$

где N_A – число Авогадро. Таким образом, в отличие от диамагнетиков (см. задачу №10) магнитная восприимчивость парамагнетиков сильно зависит от температуры.

Ответ: $\chi_{\text{мол}} = N_A \frac{\mu_0 \mu_a^2}{3kT}$.

12. Оценить ширину a магнитных доменов в кристалле железа, если поверхностная плотность энергии в доменных стенках $W_s = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/м}^2$, объемная плотность магнитоупругой энергии $W_v = 4 \cdot 10^4 \text{ Дж/м}^3$ и длина магнитного домена $l_z = 1 \text{ см}$.

Решение

Доменная структура, образующаяся в кристалле железа, показана на рис.12.1, где ось z направлена вдоль оси «легкого намагничивания».

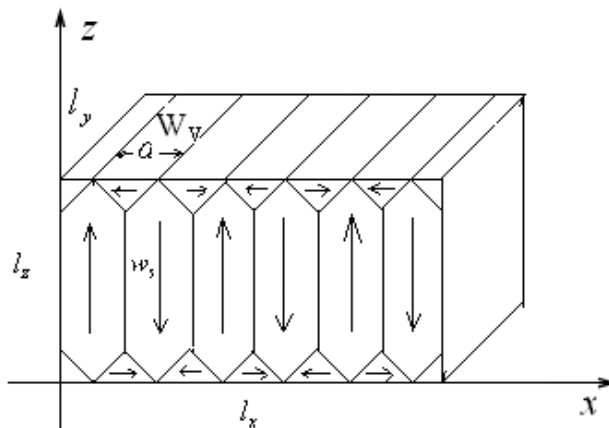


Рис. 12.1

Стрелки указывают направление локальных векторов намагниченности, образующих замкнутые структуры. В пределах каждого домена вещество спонтанно намагничено в определенном направлении.

Формирование доменной структуры при спонтанном намагничивании ферромагнетика обусловлено переходом вещества в состояние с минимальной энергией магнитного поля. Противоположная ориентация векторов намагниченности в соседних доменах обращает в нуль магнитное поле за пределами кристалла и связанную с ним энергию.

Ширина a домена находится из условия минимума суммарной энергии W доменной структуры, состоящей из l_x/a доменов,

$$\frac{dW}{da} = \frac{d}{da} \left\{ \frac{l_x}{a} \left(2 \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 l_y W_v}_V + \underbrace{l_z l_y W_s}_S \right) \right\} = \frac{d}{da} \left(\alpha a + \frac{\beta}{a} \right) = \alpha - \frac{\beta}{a^2} = 0 \quad (12.1)$$

или

$$a = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}. \quad (12.2)$$

Здесь $\alpha = \sqrt{3} l_x l_y W_v / 2$, $\beta = l_x l_y l_z W_s$, l_x, l_y, l_z – линейные размеры доменной структуры вдоль осей x, y, z соответственно, $\sqrt{3} a^2 l_y / 2$ – объем треугольной призмы, с которой связана магнитоупругая энергия (энергия магнитной анизотропии), $l_y l_z$ – площадь одной доменной стенки, с которой связана поверхностная энергия доменных сторон (энергия обменного взаимодействия).

Отсюда находим, что

$$a = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{W_s l_z}{W_v}} \cong 23 \text{ мкм}. \quad (12.3)$$

Отметим, что толщина доменной стенки между соседними доменами порядка 100 атомных слоев ($\sim 0,01$ мкм).

Ответ: $a \approx 23$ мкм.

Содержание

1. Тепловые свойства твердых тел.....	3
2. Модель свободных электронов металла.....	5
3. Электропроводность полупроводников.....	8
4. Магнитные свойства твердых тел.....	11