Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Кафедра теоретической механики и
сопротивления материалов

Уравнения Лагранжа II рода

*Методические указания к выполнению
самостоятельной работы*

Москва
2014

УДК 531.1 / Д46
ББК 22.23

Уравнения Лагранжа II рода: метод. указ. к выполнению самостоятельной работы / сост. Е.Н.Лычкин, Харыбина И.Н. . — М.: ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН», 2014. — 21 с.

В данных указаниях изложена методика решения задач с помощью уравнений Лагранжа II рода. Описаны основные теоретические сведения. Сформулирована последовательность решения задачи. Приведены примеры решения задач для движения, в том числе и колебательного, точки, тела и системы тел с одной и двумя степенями свободы. Рассмотрены как потенциальные силы тяжести и упругости, так и силы трения скольжения и качения.

Предназначены для студентов 2 курса дневной и очно-заочной форм обучения.

УДК 547.21(075)
ББК 22.23

Решение задач
с помощью уравнений Лагранжа II рода

Содержание

1. Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Перемещения точек несвободной механической системы ограничены имеющимися связями. В аналитической механике связи описываются уравнениями или неравенствами, которым подчиняются координаты и скорости точек механической системы. Мы будем рассматривать механические системы с голономными стационарными удерживающими идеальными связями. Если система состоит из ***n*** точек с радиус-векторами $\overline{r_i}(x_i, y_i, z_i)$, ***i=1,…,n***, то такие связи описываются совокупностью уравнений следующего вида:

$$f_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n) = 0, \quad i=1,\dots,m \quad , \tag{1}$$

где ***m*** - количество уравнений связей.

При этом идеальными связями называют связи, сумма работ реакций которых на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Возможное перемещение - это любое мысленное бесконечно малое перемещение точек системы, допускаемое в данный момент времени наложенными на систему связями. Из уравнений (1) видно, что координаты точек системы зависят друг от друга, поэтому чем больше связей наложено на систему, тем меньше независимых возможных перемещений она имеет.

Действительно, для ***n*** точек имеем ***3*n*** координат этих точек, и если имеется **m** уравнений связей, то задав произвольно ***k=3*n - m*** координат точек, остальные ***m*** координат можем получить из уравнений связей. В качестве этих независимых координат необязательно использовать декартовы координаты. Это могут быть любые независимые параметры, однозначно определяющие положения точек системы в произвольный момент времени. Например, в качестве такого параметра для математического маятника (Рис.1) можно выбрать угол φ отклонения нити от вертикального положения.

Такие независимые параметры называются ***обобщёнными координатами***. Через них можно выразить значения всех декартовых координат точек системы. Для механической системы с голономными стационарными связями количество обобщённых координат определяет число степеней свободы системы. Так у математическог маятника одна степень свободы.

Обобщённые координаты обычно обозначаются буквой ***q***, а производные от обобщенных координат по времени называются ***обобщенными скоростями*** системы и обозначаются $\dot{q}$.

2. Обобщенные силы

Если сообщить механической системе из ***n*** точек с ***k*** степенями свободы возможное перемещение, то сумма элементарных работ на этом перемещении сил, приложенных к точкам системы, выразится следующим образом:

$$\delta A = \Sigma \delta A_i = \Sigma \overline{F_i} \cdot \delta \overline{r_i}, \; i=1,\dots,n \quad , \tag{2}$$

где $\delta \overline{r_i}$ - возможное перемещение ***i***-й точки.

Подставив в (2) выражение $\delta \overline{r_i}$ через возможные перемещения по каждой из независимых обобщённых координат $\delta \overline{r_i} = \Sigma \frac{\partial \overline{r_i}}{\partial q_j} \cdot \delta q_j$, ***j=1,…,k***, имеем:

$$\delta A=\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}\cdot(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\overline{r_i}}{\partial q_j}\cdot\delta q_j)=\sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{n}\overline{F_i}\cdot\frac{\partial\overline{r_i}}{\partial q_j})\cdot\delta q_j=Q_1\cdot\delta q_1+Q_2\cdot\delta q_2+\ldots+Q_k\cdot\delta q_k \qquad (3)$$

Коэффициенты Q_j при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил называются ***обобщенными силами*** по соответствующим обобщённым координатам.

Они имеют размерность, равную размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты: $[Q_j]=[\delta A]/[\delta q_j]$.

Поскольку возможные перемещения по обобщённым координатам независимы, то для определения значения обобщённой силы по какой-либо j-той обобщённой координате нужно дать системе возможное перемещение по этой координате ($\delta q_j \neq 0$), а остальные обобщённые координаты оставить неизменными ($\delta q_i = 0$, i=1,…,k и i≠j). Затем вычислить элементарную работу всех активных сил, приложенных к системе, на тех перемещениях $\delta\overline{r_i}$ точек их приложения, которые соответствуют δq_j. Из (3) следует, что в этом случае

$$Q_j=\delta A/\delta q_j \qquad (4)$$

Из выражения $\delta A=Q_j\cdot\delta q_j$ следует ***физический смысл*** обобщённой силы: это такая вымышленная сила, которая на возможном перемещении по своей обобщённой координате совершает такую же работу, что и все приложенные к системе силы на соответствующих возможных перемещениях точек их приложения.

Для потенциального силового поля обобщенные силы равны частным производным от потенциальной энергии $E_\text{п}$ по соответствующим обобщенным координатам, взятым с обратным знаком: $Q_j=-\dfrac{\partial E_\text{П}}{\partial q_j}$.

Примеры определения обобщённых сил для различных систем приведены ниже.

3. Уравнения Лагранжа II рода

Для построения дифференциальных уравнений движения системы в обобщенных координатах используются уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_\text{К}}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_\text{К}}{\partial q_j}=Q_j.,\ \text{j=1,…,k}, \qquad (5)$$

где $E_\text{к}$ - кинетическая энергия системы.

Количество уравнений равно числу степеней свободы системы и не зависит от количества исследуемых тел.

При идеальных связях правая часть уравнений содержит только активные силы, позволяя тем самым исключить из рассмотрения неизвестные реакции связей.

Если все действующие на систему силы являются потенциальными, то уравнения Лагранжа II рода имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial q_j}=-\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial q_j}.,\ \ j=1,\ldots,k \tag{6}$$

Уравнения Лагранжа II рода являются наиболее мощным инструментом исследования динамики сложных систем и позволяют формальным образом составить систему дифференциальных уравнений движения. Мы применим эти уравнения для изучения колебаний механических систем, а также движения системы двумя степенями свободы.

4. Последовательность решения задач

Чтобы для данной системы составить уравнения Лагранжа, нужно:

1. Изобразить систему в произвольном положении, указав активные силы и силы реакций неидеальных связей;
2. Установить число степеней свободы, выбрать обобщенные координаты и записать уравнения Лагранжа II рода в виде (5) или (6);
3. Определить кинетическую энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости. Вычислить соответствующие производные от кинетической энергии по каждой из обобщённых координат;
4. Вычислить обобщенные силы, а в случае потенциальных сил – потенциальную энергию, выразив ее через обобщенные координаты. Вычислить соответствующие производные от потенциальной энергии по каждой из обобщённых координат;
5. Подставить полученные выражения в уравнения Лагранжа II рода.

3. Примеры решения задач

Рассмотрим применение уравнений Лагранжа II рода для исследования движения и свободных колебаний механических систем с одной и двумя степенью свободы.

3.1. Математический маятник

Математическим маятником называется механическая система, состоящая из материальной точки, прикреплённой с помощью невесомой нерастяжимой нити к неподвижной точке (Рис.1). Пусть масса точки равна ***m=0,1кг***, а длина нити **l=*1м*** .Получим дифференциальное уравнение малых колебаний маятника с помощью уравнения Лагранжа II рода и вычислим круговую частоту колебаний маятника.

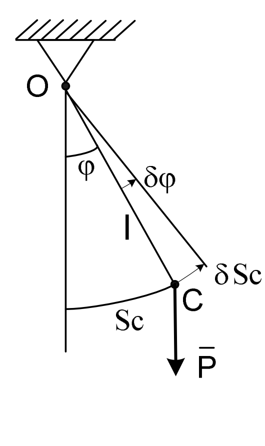

Рис 1.

1. На точку действует единственная активная сила - сила тяжести. Поскольку нить является идеальной связью, то силу её натяжения указывать не будем.

2. Маятник имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол отклонения маятника от положения равновесия φ. Воспользуемся уравнением Лагранжа в виде (5):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_К}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_К}{\partial \varphi} = Q \tag{7}$$

3. Кинетическая энергия материальной точки $E_К = \frac{m \cdot V_c^2}{2}$. Поскольку дуговая координата точки $S_c = l \cdot \varphi$, то $V_c = \dot{S}_c = \ell \dot{\varphi}$, поэтому $E_К = \frac{m\ell^2 (\dot{\varphi})^2}{2}$.

Вычислим производные от кинетической энергии:

- ♦ частная производная по обобщенной скорости: $\frac{\partial E_К}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2 \dot{\varphi}$; (8)
- ♦ полная производная по времени от частной производной по обобщенной скорости $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_К}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m\ell^2 \ddot{\varphi}$; (9)
- ♦ частная производная по обобщенной координате $\frac{\partial E_К}{\partial \varphi} = 0$, так как кинетическая энергия не зависит от координаты φ. (10)

4. Найдём обобщённую силу Q. Для этого дадим системе возможное перемещение $\delta\varphi$ по обобщённой координате φ. При этом точка С переместится на δS_c. Найдём элементарную работу силы тяжести P на этом перемещении. Её удобно искать как работу момента этой силы $M_o(P)$ относительно неподвижной точки О: $\delta A(P) = -M_o(P) \cdot \delta\varphi = -P\ell \sin(\varphi) \cdot \delta\varphi$. Тогда в соответствии с (4) получаем

$$Q = \delta A / \delta\varphi = -P\ell \sin(\varphi) \tag{11}$$

5. Подставим полученные выражения (8)–(11) в (7): $m\ell^2 \ddot{\varphi} = -P\ell \sin(\varphi)$. При малых φ $\sin(\varphi) \approx \varphi$, поэтому получаем $m\ell^2 \ddot{\varphi} + mg\ell\varphi = 0$. В итоге дифференциальное уравнение малых свободных колебаний математического маятника имеет вид $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$ или

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0, \tag{12}$$

где $k = \sqrt{g/\ell}$ - круговая частота колебаний - количество колебаний за 2π секунд.

Подставляя числовые значения, имеем $k = \sqrt{\frac{9{,}8 м/с^2}{1 м}} \approx 3{,}1 \frac{1}{с}$.

3.2. Сила упругости для материальной точки. Пружинный маятник

К вертикальной пружине жесткостью ***c=40н/см*** прикреплен груз массой ***m=1кг*** (Рис.2). Найти циклическую частоту и период малых свободных колебаний пружинного маятника. Получить уравнение движения груза, которое возникает, если в положении равновесия системы ему сообщить начальную скорость ***V_0=2м/с*** , направленную вниз. Массой пружины пренебречь, трение отсутствует.

1. На груз, который будем рассматривать как материальную точку, действуют две активные силы: сила тяжести ***P*** и сила упругости пружины $\boldsymbol{F}_{\text{упр}}$.

2. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем вертикальное отклонение ***y*** груза от положения равновесия. При этом в положении равновесия (***y***=0) пружина будет растянута на величину λ_{cm} (Рис.2).

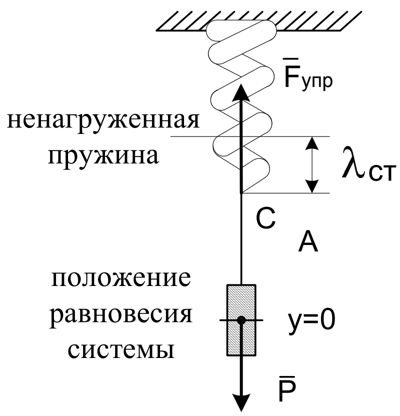

Рис 2.

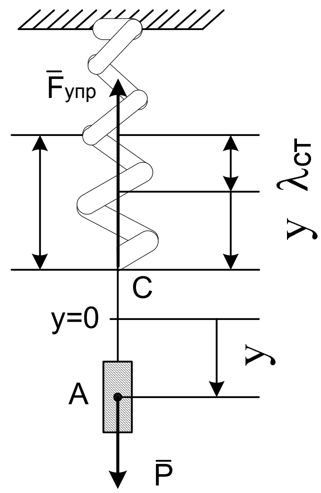

Рис 3.

Поскольку рассматриваемая система находится под действием консервативных сил тяжести и упругости, можем воспользоваться уравнением Лагранжа в виде (6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_{\kappa}}{\partial y} = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y} \tag{13}$$

3. Нарисуем систему в отклонённом от положения равновесия состоянии (Рис.3). Её кинетическая энергия определяется кинетической энергией точки $E_k = \dfrac{m\dot{y}^2}{2}$.

Вычислим производные от кинетической энергии:,

$$\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\,,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\kappa}}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}\,,\ \frac{\partial E_{\kappa}}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

Потенциальную энергию системы в положении, определяемом координатой y, найдем как сумму работ, совершаемых силой тяжести, действующей на груз m, и силой упругости пружины при переходе из рассматриваемого положения в положение равновесия (y=0).

Для силы тяжести $E_{П1} = -mgy$.

Поскольку работа силы упругости по переходу из нагруженного состояния (2) в ненагруженное (0) есть $A_{2\to 0} = \frac{c\lambda^2}{2}$, где λ - удлинение пружины, то для консервативных сил работа по переходу из текущего положения (2) в положение равновесия (1) есть сумма работ $A_{2\to 1} = A_{2\to 0} + A_{0\to 1} = \frac{c\lambda^2}{2} - \frac{c\lambda_{ст}^2}{2}$, где $\lambda_{ст}$ – удлинение пружины в положение равновесия. В итоге для потенциальной энергии деформации пружины имеем:

$$E_{П2} = \frac{c(\lambda_{СТ} + y)^2}{2} - \frac{c\lambda_{СТ}^2}{2} = c\lambda_{СТ} y + \frac{cy^2}{2}.$$

Суммарная потенциальная энергия системы:

$$E_П = E_{П1} + E_{П2} = -mgy + c\lambda_{СТ} y + \frac{cy^2}{2}.$$

Для консервативной системы с одной степенью свободы в положении равновесия (в нашем случае при $y=0$) потенциальная энергия имеет экстремум, т.е. $\frac{\partial E_П}{\partial y} = 0$.

Вычислим частную производную от потенциальной энергии системы:

$$\frac{\partial E_П}{\partial y}\Big|_{y=0} = -mg + c\lambda_{СТ} + cy\Big|_{y=0} = 0.$$

Из этого следует, что

$$\lambda_{СТ} = \frac{mg}{c}.$$

Частная производная от суммарной потенциальной энергии системы с учетом значения $\lambda_{ст}$:

$$\frac{\partial E_П}{\partial y} = -mg + mg + cy = cy \qquad (15)$$

Подставив (14) и (15) в (13) имеем: $m\ddot{y} = -cy$ или

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением малых свободных колебаний, аналогичным (12), при этом циклическая частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

При подстановке числовых значений получаем $k = \sqrt{\frac{4\frac{кг}{мс^2}/0{,}01м}{1кг}} = 20\frac{1}{c}$.

Период свободных колебаний

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}=0{,}314\text{ с}$$

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1\cos kt+C_2\sin kt.$$

Продифференцируем это выражение по t:

$$\dot{y}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt\,.$$

Подставляя в эти уравнения $t=0$, $y=0$, $\dot{y}=V_0$, находим постоянные интегрирования: $0=C_1$; $V_0=kC_2$, откуда $C_2=\frac{V_0}{k}$.

При найденных значениях C_1 и C_2 уравнение движения груза получает вид

$$y=\frac{V_0}{k}\cdot\sin kt \qquad (16)$$

При подстановке числовых значений имеем: $\boldsymbol{y}=0{,}1\sin 20\boldsymbol{t}$

3.3. Физический маятник. Экспериментальное определение осевого момента инерции твёрдого тела

Очень часто определить радиус инерции $\boldsymbol{\rho}$ тела сложной формы (Рис.4) аналитически не представляется возможным. В этом случае его находят экспериментально. Для этого сначала экспериментально определяют положение центра тяжести ***C*** тела, затем закрепляют его с помощью неподвижного шарнира ***O***. Измеряя период малых колебаний ***T*** полученного таким образом физического маятника, можно аналитически определить радиус инерции.

Получим с помощью уравнения Лагранжа II рода зависимость радиуса инерции $\boldsymbol{\rho}$ тела массой ***m*** от ***T*** и расстояния **a** между точкой подвеса ***O*** и центром тяжести ***C***. Найдём $\boldsymbol{\rho}$, если ***m=0,5кг***, ***T=2с***, **a=*0,1м*.**

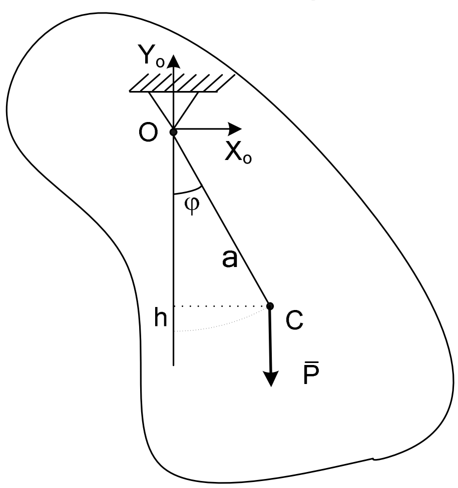

Рис 4.

Маятник имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ отклонения маятника от положения равновесия.

Маятник находится под действием силы тяжести ***P*** и сил реакции в шарнире ***O***. Воспользуемся уравнением Лагранжа в виде (6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_К}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial E_К}{\partial\varphi}=-\frac{\partial E_П}{\partial\varphi} \qquad (17)$$

Кинетическая энергия маятника, совершающего вращательное движение, $E_К=\frac{J_o\cdot\omega^2}{2}$, где J_o. - осевой момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{\omega}$ - угловая скорость тела. Поскольку $\omega = \dot{\varphi}$, имеем

$$\boldsymbol{E}_{\text{К}} = \frac{\boldsymbol{J_o} \cdot \dot{\varphi}^2}{2}$$

Вычислим производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\text{К}}}{\partial \dot{\varphi}} = \boldsymbol{J_o}\,\dot{\varphi}, \quad \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\text{К}}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \boldsymbol{J_o} \cdot \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\text{К}}}{\partial \varphi} = 0 \tag{18}$$

Определим потенциальную энергию силы тяжести маятника, отклоненного от вертикального положения на малый угол φ.

Предположим, что потенциальная энергия маятника в вертикальном положении равна нулю, тогда при отклонении маятника на угол φ центр тяжести маятника получит вертикальное перемещение вверх h:

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cos\varphi = \boldsymbol{a}(1 - \cos\varphi).$$

При малых колебаниях $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx 2\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{2}$, поэтому имеем $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{a}\varphi^2}{2}$ и значение потенциальной энергии $\boldsymbol{E}_{\text{П}} = \boldsymbol{mgh} = \frac{\boldsymbol{mga}\varphi^2}{2}$.

Вычислим частную производную от потенциальной энергии по обобщенной координате

$$\frac{\partial \boldsymbol{E_П}}{\partial \varphi} = \boldsymbol{mga}\varphi \tag{19}$$

Подставим значения производных (18) и (19) в уравнение Лагранжа (17):

$$\ddot{\varphi} + \frac{\boldsymbol{mga}}{\boldsymbol{J_o}}\varphi = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением (12) малых свободных колебаний системы, где k - циклическая частота колебаний

$$\boldsymbol{k} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{mga}}{\boldsymbol{J_o}}}.$$

Поскольку период свободных колебаний

$\boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\boldsymbol{k}}$, то $\boldsymbol{k}^2 = \frac{4\pi^2}{\boldsymbol{T}^2} = \frac{\boldsymbol{mga}}{\boldsymbol{J_o}}$, откуда $\boldsymbol{J_o} = \frac{\boldsymbol{mgaT}^2}{4\pi^2}$. По теореме Штейнера

$\boldsymbol{J_o} = \boldsymbol{J_c} + \boldsymbol{ma}^2$, поэтому $\boldsymbol{J_c} = \boldsymbol{J_o} - \boldsymbol{ma}^2 = \frac{\boldsymbol{mgaT}^2}{4\pi^2} - \boldsymbol{ma}^2 = \boldsymbol{ma}(\frac{\boldsymbol{gT}^2}{4\pi^2} - \boldsymbol{a})$.

Т.к. $\boldsymbol{J_c} = \boldsymbol{m}\rho^2$, то для радиуса инерции имеем $\rho = \sqrt{\boldsymbol{a}(\frac{\boldsymbol{gT}^2}{4\pi^2} - \boldsymbol{a})}$.

Вычислим радиус инерции: $\rho = \sqrt{0{,}1(\frac{g2^2}{4\pi^2} - 0{,}1)} \approx 0{,}3\,м$.

Таким образом, зная расстояние **а** от точки подвеса до центра тяжести физического маятника и измерив период $\boldsymbol{T}$ его малых колебаний, можно вычислить радиус инерции **ρ**.

3.4. О качении цилиндра по вогнутой поверхности

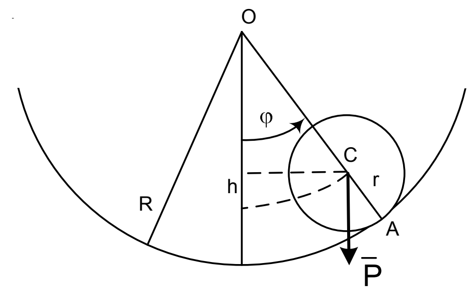

Рис.5.

Определить период малых колебаний сплошного однородного цилиндра массой ***m=0,1кг*** и радиуса ***r=5см*** по шероховатой цилиндрической поверхности радиуса ***R=25см*** (Рис.5).

1. На точку действует единственная активная сила - сила тяжести ***P***. Нормальная (***N***) и горизонтальная ($F_{сц}$) составляющие силы реакции поверхности работу не производят, поскольку приложены в неподвижной точке цилиндра, поэтому указывать их на рисунке не будем.

2. Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем угол φ отклонения от положения равновесия радиуса ***OA*** цилиндрической поверхности, проведённого через точку ***C*** оси симметрии цилиндра.

Воспользуемся уравнением Лагранжа в виде (6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_К}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial E_К}{\partial \varphi}=-\frac{\partial E_П}{\partial \varphi} \qquad (20)$$

Цилиндр совершает плоскопараллельное движение, поэтому его кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и вращательного движения вокруг него:

$$E_K=\frac{mV_c{}^2}{2}+\frac{J_c\omega^2}{2} \qquad (21)$$

Поскольку цилиндр однородный, то $J_c = mr^2/2$. Точка ***C*** цилиндра двигается по окружности, длина дуги S, которую она описывает, равна $\varphi(R\text{-}r)$. Поэтому $V_c=\dot{S}_c=\dot{\varphi}(R-r)$. При этом, поскольку цилиндр катится без проскальзывания, угловая скорость ω вращения самого цилиндра есть V_c/r. Подставляя эти выражения в (21), имеем:

$$E_K=\frac{m(\dot{\varphi})^2(R-r)^2}{2}+\frac{mr^2}{2}\cdot\frac{(\dot{\varphi})^2(R-r)^2}{2r^2}=\frac{3m(\dot{\varphi})^2(R-r)^2}{4}$$

Вычислим производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi},\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi},\ \frac{\partial E_К}{\partial \varphi}=0 \qquad (22)$$

Определим потенциальную энергию цилиндра, отклоненного от вертикального положения на малый угол φ.

Считаем, что потенциальная энергия цилиндра в его нижнем положении равна нулю, тогда при отклонении оси цилиндра на угол φ центр тяжести получит вертикальное перемещение вверх на величину h:

$$h=(R-r)-(R-r)\cos\varphi=(R-r)(1-\cos\varphi).$$

Ограниваясь малыми величинами второго порядка, получаем

$1-\cos\varphi = 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2} \approx 2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)^2 = \dfrac{\varphi^2}{2}$, поэтому $h = \dfrac{(R-r)\varphi^2}{2}$ и значение потенциальной энергии $\boldsymbol{E}_{\Pi} = \boldsymbol{mgh} = \dfrac{\boldsymbol{mg(R-r)}\varphi^2}{2}$.

Вычислим частную производную от потенциальной энергии по обобщенной координате

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\Pi}}{\partial\varphi} = \boldsymbol{mg(R-r)}\varphi \tag{23}$$

Подставим значения производных (22) и (23) в уравнение Лагранжа (20):

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} = -mg(R-r)\varphi \quad \text{или}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2g}{3(R-r)}\varphi = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением малых свободных колебаний системы:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0.$$

Циклическая частота свободных колебаний $k = \sqrt{\dfrac{2g}{3(R-r)}}$.

Период свободных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}.$$

Подставляя числовые значения, имеем $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3(0{,}25-0{,}05)}{20}} \approx 1{,}1c$.

3.5. Движение системы тел с одной степенью свободы

На катушку 3 намотана нить, переброшенная через блок 2 и прикреплённая к грузу 1 (Рис.6). Найти ускорение центра тяжести А тела 1. Даны массы тел $\boldsymbol{m_1}$*=6кг*, $\boldsymbol{m_2}$*=0,2кг*, $\boldsymbol{m_3}$*=1кг*, радиусы $\boldsymbol{r}$*=20см* и $\boldsymbol{R}$*=30см*, радиус инерции катушки ρ*=25см*, угол α*=30º* и коэффициенты трения скольжения $\boldsymbol{f}_{\text{ск}}$*=0,1* для груза 1 и трения качения $\boldsymbol{f}_{\text{тк}}$*=0,2см* для катушки 3.

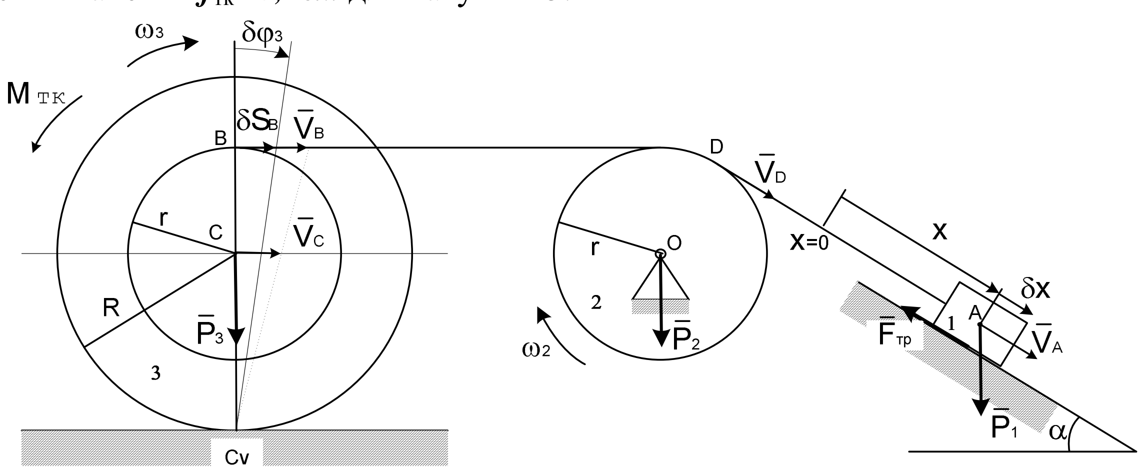

Рис. 6

1. Укажем активные силы - силы тяжести, приложенные к центрам тяжести А, О и С тел системы. В качестве реакций неидеальных связей укажем силы реакции, производящие работу на возможных перемещениях точек и тел их приложения: силу трения скольжения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ и момент сил трения качения $\boldsymbol{M}_{\text{тк}}$, приложенный к телу 3. Их значения вычисляются по формулам:

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = \boldsymbol{f}_{\text{ск}}\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{f}_{\text{ск}}\boldsymbol{P}_1\cos(\alpha),\ \boldsymbol{M}_{\text{тк}} = \boldsymbol{f}_{\text{тк}}\boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{f}_{\text{тк}}\boldsymbol{P}_3\ , \tag{24}$$

где N_1 и N_3 - нормальные составляющие сил реакции поверхностей.

2. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату примем отклонение $\boldsymbol{x}$ центра тяжести А груза 1 от начального положения $\boldsymbol{x}$=0. Поскольку рассматриваемая система находится под действием неконсервативных сил трения, можем воспользоваться уравнением Лагранжа в виде (5):

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\text{К}}}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\text{К}}}{\partial \varphi} = \boldsymbol{Q} \tag{25}$$

3. Найдём кинетическую энергию системы, которая представляет собой сумму кинетических энергий тел 1,2 и 3: $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}1} + \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}2} + \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}3}$ (26)

Тело 1 совершает поступательное движение, поэтому $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}1} = \dfrac{\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{V}_{\text{А}}^{\ 2}}{2}$, тело 2 - вращательное, следовательно $\boldsymbol{E}_{\text{К}2} = \dfrac{\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{o}}\cdot\omega_2^{\ 2}}{2}$, где $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{o}} = \dfrac{\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{r}^2}{2}$, тело 3 - плоскопараллельное движение, следовательно $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}3} = \dfrac{\boldsymbol{m}_3\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{c}}^{\ 2}}{2} + \dfrac{\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{c}}\omega_3^{\ 2}}{2}$, где $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{m}_3\rho^2$.

Выразим кинематические характеристики, входящие в эти формулы, через обобщённую скорость $\dot{\boldsymbol{x}}$ и координату $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{x}},\ \omega_2 = \dfrac{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{r}}$. Поскольку тело 3 катится без проскальзывания, то точка касания поверхности является его мгновенным центром скоростей, поэтому $\omega_3 = \dfrac{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}}}{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{C}} = \omega_3\boldsymbol{R} = \dfrac{\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}}$. Подставляя эти выражения в (25), имеем:

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}} = \frac{\boldsymbol{m}_1(\dot{\boldsymbol{x}})^2}{2} + \frac{\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{r}^2}{2}\cdot\frac{(\dot{\boldsymbol{x}})^2}{2\boldsymbol{r}^2} + \frac{\boldsymbol{m}_3(\dot{\boldsymbol{x}})^2\boldsymbol{R}^2}{2(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})^2} + \frac{\boldsymbol{m}_3\rho^2(\dot{\boldsymbol{x}})^2}{2(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})^2} = \frac{(\dot{\boldsymbol{x}})^2}{2}\left\{\boldsymbol{m}_1 + \frac{\boldsymbol{m}_2}{2} + \boldsymbol{m}_3\frac{\boldsymbol{R}^2+\rho^2}{(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})^2}\right\} = \frac{(\dot{\boldsymbol{x}})^2}{2}\psi$$

Вычислим производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \dot{\boldsymbol{x}}\psi\ ,\ \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{K}}}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) = \ddot{\boldsymbol{x}}\psi\ ,\ \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\text{К}}}{\partial \boldsymbol{x}} = 0 \tag{27}$$

4. Найдём обобщённую силу $\boldsymbol{Q}$. Для этого дадим системе возможное перемещение $\boldsymbol{\delta x}$ по обобщённой координате $\boldsymbol{x}$. При этом точка А переместится на $\boldsymbol{\delta x}$, точка В переместится на $\boldsymbol{\delta S_B}$, а тело 3 повернётся на угол $\boldsymbol{\delta\varphi_3}$. На таком перемещении системы работу будут совершать сила тяжести $\boldsymbol{P_1}$, , сила трения скольжения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ и момент сил трения качения $\mathbf{M}_{\text{тк}}$.

Найдём их элементарную работу $\delta\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{\delta x}\cdot\sin(\alpha) - \boldsymbol{F}_{\text{тр}}\cdot\boldsymbol{\delta x} - \boldsymbol{M}_{\text{тк}}\cdot\delta\varphi_3$. Зависимости между перемещениями точек и тел аналогичны зависимостям между их скоростями: $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}}$.

Тогда в соответствии с (4) и (24) получаем

$$\boldsymbol{Q} = \delta A / \delta \boldsymbol{x} = \left[\boldsymbol{P}_1 \sin(\alpha)\delta \boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}_{\text{тр}}\boldsymbol{P}_1 \cos(\alpha)\delta \boldsymbol{x} - \boldsymbol{f}_{\text{тк}}\boldsymbol{P}_3 \frac{\delta \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}} \right] / \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{m}_1 \boldsymbol{g}[\sin(\alpha) - \boldsymbol{f}_{\text{тр}} \cos(\alpha)] - \frac{\boldsymbol{f}_{\text{тк}} \boldsymbol{m}_3 \boldsymbol{g}}{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}} \qquad (28)$$

Подставим значения производных (27) и обобщённой силы (28) в уравнение Лагранжа (25):

$$\ddot{\boldsymbol{x}}\psi - 0 = \boldsymbol{Q}, \text{ откуда } \boldsymbol{a}_A = \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}/\psi = \frac{\boldsymbol{m}_1 \boldsymbol{g}[\sin(\alpha) - \boldsymbol{f}_{\text{ск}} \cos(\alpha)] - \dfrac{\boldsymbol{f}_{\text{тк}} \boldsymbol{m}_3 \boldsymbol{g}}{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}}}{\boldsymbol{m}_1 + \dfrac{\boldsymbol{m}_2}{2} + \boldsymbol{m}_3 \dfrac{\boldsymbol{R}^2 + \rho^2}{(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})^2}}.$$

Подставив числовые значения, получаем:

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{6\boldsymbol{g}\left(0{,}5 - 0{,}1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{0{,}002 \cdot 1\boldsymbol{g}}{0{,}2+0{,}3}}{6 + \dfrac{0{,}2}{2} + 1 \cdot \dfrac{0{,}3^2 + 0{,}25^2}{(0{,}2+0{,}3)^2}} \approx 0{,}37\boldsymbol{g} \approx 3{,}7\boldsymbol{м}/\boldsymbol{c}.$$

3.6. Малые колебания системы с одной степенью свободы

Определить период малых колебаний системы, состоящей из груза 1 массой $\boldsymbol{m_1}$*=0,7 кг*, блока 2 массой $\boldsymbol{m_2}$*=0,2 кг* и стержня 3 массой $\boldsymbol{m_3}$*=0,3 кг*, соединенных невесомой нерастяжимой нитью (Рис.7). Жесткость пружины $\boldsymbol{c}$ равна *10 н/м*, длина стержня $\boldsymbol{l}$*=0,5 м*, OE= ¾OD, радиус блока $\boldsymbol{r}$*=10 см*. На рисунке система находится в положении равновесия.

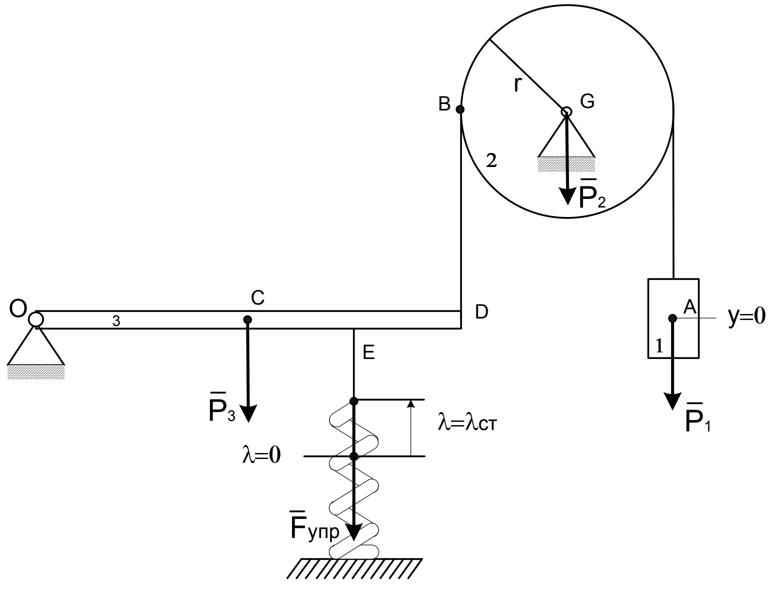

Рис.7

1. Укажем активные силы - силы тяжести, приложенные к центрам тяжести A, G и C тел системы, а также силу упругости пружины $\boldsymbol{F}_{\text{упр}}$.

2. Рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты примем вертикальное отклонение $\boldsymbol{y}$ центра тяжести груза от положения равновесия. При этом в положении равновесия ($\boldsymbol{y}$=0) пружина будет растянута на величину $\boldsymbol{\lambda}_{\text{ст}}$ (Рис.7).

Поскольку рассматриваемая система находится под действием консервативных сил тяжести и упругости, можем воспользоваться уравнением Лагранжа в виде (6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial E_{К}}{\partial y} = -\frac{\partial E_{П}}{\partial y} \qquad (29)$$

3. Нарисуем систему в отклонённом от положения равновесия состоянии (Рис.8) в произвольный момент времени. Точка А опустилась на расстояние $\boldsymbol{y}$, блок повернулся на угол φ_2, а стержень - на угол φ_3. Точки C, E и D поднялись вместе со стержнем, описав соответствующие дуги. Укажем соответствующие линейные и угловые скорости точек и звеньев механизма.

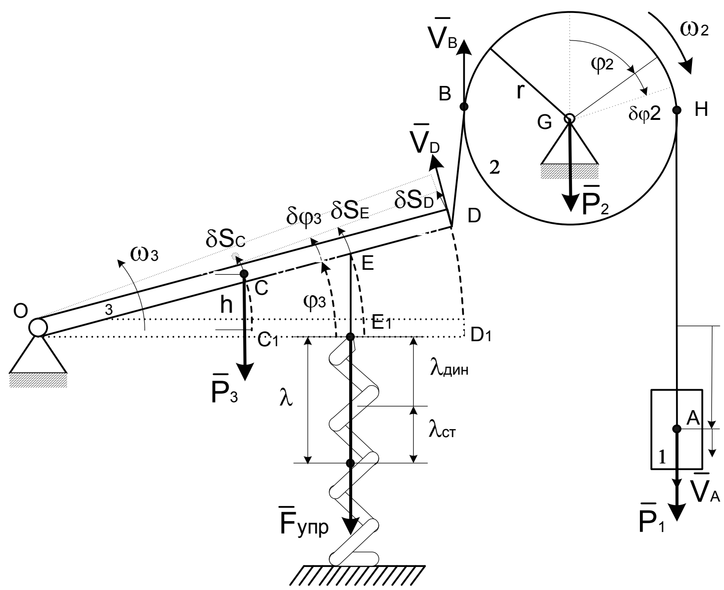

Рис.8

Кинетическая энергия системы определяется кинетической энергией груза, совершающего поступательное движение, и кинетических энергий блока и стержня, совершающих вращательное движение:

$$E_k = \frac{m_1 V_A^{\;2}}{2} + \frac{J_G \omega_2^{\;2}}{2} + \frac{J_O \omega_3^{\;2}}{2}, \text{ где} \qquad (30)$$

$\boldsymbol{J}_{\text{G}}=\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{r}^2/2$, а осевой момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец, $\boldsymbol{J}_{\text{O}}=\boldsymbol{m}_3\cdot\mathtt{l}^2/3$. Выразим кинематические характеристики, входящие в (29), через обобщённую скорость $\dot{\mathbf{y}}$. Поскольку на участке АН нить движется поступательно, а на участке касания её с блоком отсутствует проскальзывание, то $\boldsymbol{V}_{\text{B}}=\boldsymbol{V}_{\text{A}}=\dot{\mathbf{y}}$. Будем считать, что длина нити BD много больше горизонтального отклонения точки D при малом повороте стержня, поэтому нить

BD будем считать вертикальной и вектор $\boldsymbol{V}_B$ направленным вверх.

При таком движении нити вертикальная составляющая $\boldsymbol{V}_{Dy}$ скорости точки D стержня должна совпадать со скоростью точки B: $\boldsymbol{V}_B=\boldsymbol{V}_{Dy}=\boldsymbol{V}_D\cdot\cos(\varphi_3)$. При малых φ_3 $\cos(\varphi_3)\approx 1-\frac{\varphi_3^{\ 2}}{2!}+\frac{\varphi_3^{\ 4}}{4!}-...$, поэтому с точностью до величин первого порядка малости $\cos(\varphi_3)\approx 1$. В итоге имеем $\boldsymbol{V}_D\approx\boldsymbol{V}_B=\dot{\mathbf{y}}$, $\omega_3=\boldsymbol{V}_D/\mathbf{l}=\dot{\mathbf{y}}/\mathbf{l}$, $\omega_2=\dot{\mathbf{y}}/\mathbf{r}$. Подставляя эти формулы в (30), получаем:

$$\boldsymbol{E}_k=\frac{\boldsymbol{m}_1(\dot{\boldsymbol{y}})^2}{2}+\frac{\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{r}^2(\dot{\boldsymbol{y}})^2}{2\cdot\boldsymbol{r}^2\cdot 2}+\frac{\boldsymbol{m}_3\boldsymbol{l}^2(\dot{\boldsymbol{y}})^2}{3\cdot\boldsymbol{l}^2\cdot 2}=\frac{(\dot{\boldsymbol{y}})^2}{2}\left(\boldsymbol{m}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{m}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{m}_3\right)=\frac{(\dot{\boldsymbol{y}})^2}{2}\cdot\boldsymbol{m}^*, \tag{31}$$

Вычислим производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}_K}{\partial\dot{\boldsymbol{y}}}=(\dot{\boldsymbol{y}})\cdot\boldsymbol{m}^*,\ \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial\boldsymbol{E}_K}{\partial\dot{\boldsymbol{y}}}\right)=(\ddot{\boldsymbol{y}})\cdot\boldsymbol{m}^*,\ \frac{\partial\boldsymbol{E}_K}{\partial\boldsymbol{y}}=0 \tag{32}$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии груза ($\boldsymbol{E}_{п1}$), стержня ($\boldsymbol{E}_{п2}$) и потенциальной энергии упруго деформированной пружины ($\boldsymbol{E}_{п3}$).

$\boldsymbol{E}_{п1}=-\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}$. Вычислим вертикальное перемещение $\boldsymbol{h}$ центра тяжести С стержня. Оно равно проекции отрезка ОС на вертикаль $\boldsymbol{h}=C_1C\cdot\sin(\varphi_3)$. При малых φ_3 $\sin(\varphi_3)\approx\frac{\varphi_3^{\ 1}}{1!}-\frac{\varphi_3^{\ 3}}{3!}+...$, поэтому с точностью до величин первого порядка малости $\sin(\varphi_3)\approx\varphi_3$. Длина дуги $D_1D=\boldsymbol{y}$, $\varphi_3=D_1D/\mathbf{l}$, поэтому $\boldsymbol{h}=C_1C\cdot\varphi_3=(\mathbf{l}/2)\cdot\boldsymbol{y}/\mathbf{l}=\boldsymbol{y}/2$. В итоге $\boldsymbol{E}_{п3}=\boldsymbol{P}_3\cdot\boldsymbol{h}=\boldsymbol{m}_3\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}/2$.

Удлинение $\boldsymbol{\lambda}$ деформированной пружины складывается из $\boldsymbol{\lambda}_{ст}$ и $\boldsymbol{\lambda}_{дин}$. По аналогии с $\boldsymbol{h}$ $\boldsymbol{\lambda}_{дин}$ равна проекции отрезка ОС на вертикаль $\boldsymbol{\lambda}_{дин}=3/4\ \boldsymbol{y}$. Поэтому (см. **Задачу 2** на стр.9)

$$\boldsymbol{E}_{П3}=\frac{\boldsymbol{c}\left(\lambda_{СТ}+\frac{3}{4}\boldsymbol{y}\right)^2}{2}-\frac{\boldsymbol{c}\lambda_{СТ}^2}{2}=\boldsymbol{c}\lambda_{СТ}\frac{3}{4}\boldsymbol{y}+\frac{\boldsymbol{c}9\boldsymbol{y}^2}{32}.$$

В итоге $\boldsymbol{E}_П=\boldsymbol{E}_{П1}+\boldsymbol{E}_{П2}+\boldsymbol{E}_{П2}=-\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{gy}+\frac{1}{2}\boldsymbol{m}_2\boldsymbol{gy}+\frac{3}{4}\boldsymbol{c}\lambda_{СТ}\boldsymbol{y}+\frac{9}{32}\boldsymbol{cy}^2$,

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}_П}{\partial\boldsymbol{y}}=-\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{g}+\frac{1}{2}\boldsymbol{m}_3\boldsymbol{g}+\frac{3}{4}\boldsymbol{c}\lambda_{СТ}+\frac{9}{16}\boldsymbol{cy}=\frac{9}{16}\boldsymbol{cy}, \tag{33}$$

поскольку в положении равновесия $\frac{\partial\boldsymbol{E}_П}{\partial\boldsymbol{y}}|_{y=0}=-\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{g}+\frac{1}{2}\boldsymbol{m}_3\boldsymbol{g}+\frac{3}{4}\boldsymbol{c}\lambda_{СТ}=0$. Подставляя (32) и (33) в (29), имеем $\boldsymbol{m}^*\times\ddot{\boldsymbol{y}}=-\frac{9}{16}\boldsymbol{cy}$ или

$$\ddot{\boldsymbol{y}}+\frac{\boldsymbol{c}^*}{\boldsymbol{m}^*}\boldsymbol{y}=0,$$

где $\boldsymbol{c}^*=\frac{9}{16}\boldsymbol{c}$ - приведённый коэффициент упругости, а $\boldsymbol{m}^*$ - приведённая масса системы $\boldsymbol{m}^*=\boldsymbol{m}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{m}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{m}_3$. Круговая частота колебаний системы $\boldsymbol{k}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{c}^*}{\boldsymbol{m}^*}}$, а период колебаний $\boldsymbol{T} = 2\pi/\boldsymbol{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{m}^*}{\boldsymbol{c}^*}}$.

Вычислим период колебаний, подставив числовые значения переменных:

$$\boldsymbol{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\boldsymbol{m}^*}{\boldsymbol{c}^*}} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{\frac{m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3}m_3}{c}} = \frac{8}{3}\pi\sqrt{\frac{0{,}7 + \frac{1}{2}0{,}2 + \frac{1}{3}0{,}3}{10}} \approx 2{,}5c\,.$$

Покажем теперь, как можно решить ту же задачу, используя уравнение Лагранжа II рода в виде (5), т.е. найдём обобщённую силу непосредственно по её определению (4).

Для этого дадим системе возможное перемещение $\boldsymbol{\delta y}$ по обобщённой координате $\boldsymbol{y}$ (Рис.8). При этом блок повернётся на угол $\boldsymbol{\delta\varphi_2}$, точка D переместится на $\boldsymbol{\delta S_D} = \boldsymbol{\delta y}$, а стержень повернётся на угол $\boldsymbol{\delta\varphi_3} = \boldsymbol{\delta S_D}/\mathtt{l} = \boldsymbol{\delta y}/\mathtt{l}$. Найдём сумму элементарных работ всех активных сил на таком перемещении системы. При этом элементарные работы сил $\boldsymbol{P_3}$ и $\boldsymbol{F_{упр}} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c}\cdot(3\boldsymbol{y}/4 + \boldsymbol{\lambda}_{\text{ст}})$ будем искать как работы их моментов относительно неподвижной точки O:

$$\delta \mathbf{A} = \boldsymbol{P}_1\delta\boldsymbol{y} - \boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{l}/2)\cos(\varphi_3)\delta\varphi_3 - \boldsymbol{F}_{\text{упр}}(3\boldsymbol{l}/4)\cos(\varphi_3)\delta\varphi_3 \approx \delta\boldsymbol{y}[\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{g} - \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{g}/2 - \boldsymbol{c}(\frac{3}{4}\boldsymbol{y} + \lambda_{\text{СТ}})\frac{3}{4}]\,.$$

Из (4) получаем $\qquad \boldsymbol{Q} = \delta\mathbf{A}/\delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{g} - \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{g}/2 - \boldsymbol{c}(\frac{3}{4}\boldsymbol{y} + \lambda_{\text{СТ}})\frac{3}{4}] \qquad$ (34

. Чтобы избавиться от $\boldsymbol{\lambda}_{\text{СТ}}$, рассмотрим систему в положении равновесия (Рис.7) и воспользуемся принципом возможных перемещений. Для этого дадим системе возможное перемещение $\boldsymbol{\delta y}$. В соответствии с этим принципом при равновесии сумма элементарных работ всех активных сил на таком перемещении системы равна 0:

$\delta\mathbf{A} = \boldsymbol{P}_1\delta\boldsymbol{y} - \boldsymbol{P}_3\delta\boldsymbol{y}/2 - \boldsymbol{F}_{\text{упр}}(3\delta\boldsymbol{y}/4) = \delta\boldsymbol{y}(\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{g} - \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{g}/2 - \boldsymbol{c}\lambda_{\text{СТ}}\frac{3}{4}) = 0$, откуда следует, что

$$\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{g} - \boldsymbol{m}_3\boldsymbol{g}/2 - \boldsymbol{c}\lambda_{\text{СТ}}\frac{3}{4} = 0\,.$$

Подставляя получившийся результат в (34) для обобщённой силы имеем

$$\boldsymbol{Q} = -\frac{9}{16}\boldsymbol{cy}\,,$$

что соответствует формуле (33).

3.7. Движение системы с двумя степенями свободы

Невесомая нить, переброшенная через невесомые блоки 4, 5 и 6, соединяет тела груз 1 массой 3***m*** и каток 2 массой 4***m***, который катится без проскальзывания (Рис.9). К блоку 4 с помощью нити прикреплён груз 3 массой ***m***. Коэффициент трения скольжения груза 1 равен $\boldsymbol{f}_{\text{тр}}$. Определить ускорение груза 3 и условие, при котором груз 1 будет двигаться.

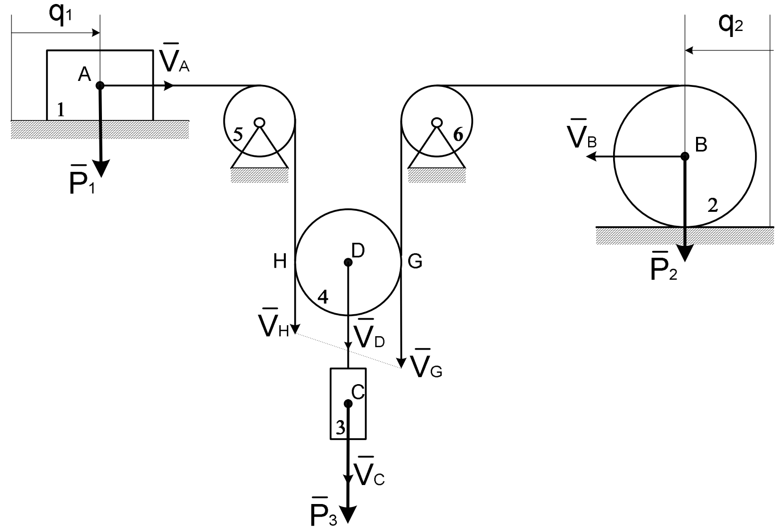

Рис.9

1.Укажем активные силы - силы тяжести тел 1 - 3, а также реактивную силу трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}=\boldsymbol{f}_{\text{тр}}\cdot\boldsymbol{P}_1$, которая будет совершать работу при перемещении системы.

2. Рассматриваемая механическая система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат примем координату $\boldsymbol{q}_1$ центра тяжести А груза 1 и координату $\boldsymbol{q}_2$ центра тяжести В катка 2. Для системы можно записать два уравнения Лагранжа II рода в виде (5):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial q_1}=Q_1, \tag{35}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial E_{\text{К}}}{\partial q_2}=Q_2 \tag{36}$$

3. Тела 1 и 3 двигаются поступательно, каток 3 - плоскопараллельно. Поэтому

$$E_k=\frac{m_1V_A^{\ 2}}{2}+\frac{m_2V_B^{\ 2}}{2}+\frac{J_B\omega_2^{\ 2}}{2}+\frac{m_3V_C^{\ 2}}{2},\ \text{где}\ J_B=\frac{m_2r_2^{\ 2}}{2}, V_A=\dot{q}_1, V_B=\dot{q}_2 \tag{37}$$

Выразим кинетическую энергию системы через скорости точек А и В. Из рисунка видно, что $\omega_2=V_B/r_2$, $V_H=V_A$, $V_G=2V_B$, $V_D=(V_H+V_G)/2$, $V_C=V_D$. Поэтому

$$E_k=\frac{m_1\dot{q}_1^{\ 2}}{2}+\frac{3m_2\dot{q}_2^{\ 2}}{4}+\frac{m_3(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)^2}{2\cdot 4}=\frac{\dot{q}_1^{\ 2}}{2}(m_1+\frac{m_3}{4})+\frac{\dot{q}_2^{\ 2}}{2}(\frac{3m_2}{2}+m_3)+\frac{1}{2}m_3\dot{q}_1\dot{q}_2, \tag{38}$$

Найдём составляющие уравнения (35). Производные от кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_1}\right) = \ddot{q}_1\left(m_1 + \frac{m_3}{4}\right) + \ddot{q}_2\frac{m_3}{2}; \quad \frac{\partial E_К}{\partial q_1} = 0 \tag{39}$$

Найдём обобщённую силу $\boldsymbol{Q_1}$. Для этого дадим системе возможное перемещение $\boldsymbol{\delta q_1}$, при этом $\boldsymbol{\delta q_2}$=0. При этом $\boldsymbol{\delta S_H}$=$\boldsymbol{\delta q_1}$. Поскольку нить в правой части системы в этом случае не двигается, то точка G является мгновенным центром скоростей блока 4, следовательно $\boldsymbol{\delta S_D}$= $\boldsymbol{\delta S_C}$=$\boldsymbol{\delta q_1}$/2. Тогда элементарную работу совершают только силы $\boldsymbol{P}_3$ и $\boldsymbol{F}_{тр}$.

$$\delta A = -F_{тр}\cdot\delta q_1 + P_3(\delta q_1/2) = \delta q_1[-f_{тр}m_1g + m_3g/2],\ Q_1 = -f_{тр}m_1g + m_3g/2 \tag{40}$$

Найдём составляющие уравнения (35). Производные от кинетической энергии:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_2}\right) = \ddot{q}_1\frac{m_3}{2} + \ddot{q}_2\left(\frac{3m_2}{2} + m_3\right); \quad \frac{\partial E_К}{\partial q_2} = 0 \tag{41}$$

Найдём обобщённую силу $\boldsymbol{Q_2}$. Для этого дадим системе возможное перемещение $\boldsymbol{\delta q_2}$, а $\boldsymbol{\delta q_1}$=0. При этом $\boldsymbol{\delta S_G}$=2$\boldsymbol{\delta q_2}$. Поскольку нить в левой части системы в этом случае не двигается, то точка H является мгновенным центром скоростей блока 4, следовательно, $\boldsymbol{\delta S_D}$= $\boldsymbol{\delta S_C}$=$\boldsymbol{\delta q_2}$. Тогда элементарную работу совершает только сила $\boldsymbol{P}_3$.

$$\delta A = P_3\ \delta q_2 \quad = \delta q_2 m_3 g \quad,\ Q_2 = m_3 g\,. \tag{42}$$

Подставляя (38) и (39) в (34), (40) и (41) в (35), получаем два уравнения Лагранжа II рода:

$$\ddot{q}_1\left(m_1 + \frac{m_3}{4}\right) + \ddot{q}_2\frac{m_3}{2} = -f_{тр}m_1g + m_3g/2 \tag{43}$$

$$\ddot{q}_1\frac{m_3}{2} + \ddot{q}_2\left(\frac{3m_2}{2} + m_3\right) = m_3g \tag{44}$$

Решая совместно эти уравнения, можно найти ускорения точек A и B, а затем найти и ускорение точки C по формуле, аналогичной формуле для скорости этой точки: $a_C = (a_A + 2a_B)/2 = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2)$. Однако можно это сделать короче, для чего сложим уравнения (43) и (44) и подставим значения масс тел 1 и 2:

$$\ddot{q}_1\left(m_1 + \frac{3m_3}{4}\right) + \ddot{q}_2\left(\frac{3m_2}{2} + \frac{3m_3}{2}\right) = -f_{тр}m_1g + 1{,}5m_3g\ .$$

Подставим $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$

$$\ddot{q}_1\left(3m + \frac{3m_3}{4}\right) + 2\ddot{q}_2\left(3m + \frac{3m_3}{4}\right) = g(1{,}5m_3 - f_{тр}3m)\,.$$

Вынесем общий множитель

$$\frac{1}{2}(\ddot{q}_1 + 2\ddot{q}_2)\cdot\left(6m + \frac{3m_3}{2}\right) = 1{,}5g(m_3 - f_{тр}2m)\,.$$

После подстановки $\boldsymbol{m_3}$ получим для ускорения точки C:

$$a_c = \frac{1{,}5g(m - f_{тр}2m)}{7{,}5m} = \frac{1 - 2f_{тр}}{5}g$$

Из результата видно, что для того, чтобы тело 1 двигалось, должно выполняться условие:

$$1-2f_{\text{тр}}>0,\ \text{т.е.}\ f_{\text{тр}}<\frac{1}{2}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое связь в аналитической механике?
2. Какую связь называют идеальной?
3. Что такое возможное перемещение?
4. Что такое обобщённые координаты?
5. Что такое обобщённые силы, их физический смысл?
6. Как выглядят и для чего применяются уравнения Лагранжа II рода?
7. Каков алгоритм решения задачи с помощью уравнений Лагранжа II рода?
8. Как вычислить кинетическую энергию тела при различных видах его движения?
9. Как вычислить обобщённую силу по некоторой обобщённой координате?

Список литературы

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Учебник для вузов.-М.:"Интеграл-Пресс, 2006 – 603 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник для вузов.-М.: "Высшая школа", 2007 - 415 с.
3. Еленев С.А., Новиков В.Г., Огурцов А.И., Шевелёва Г. И. «Динамика» Учебное пособие для вузов. М.: МГТУ "Станкин", 2010 - 257 с.
4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. Учебное пособие для вузов. М.: "Лань", 2006 - 447 с.

Учебное издание

Составитель:
Лычкин Евгений Николаевич
Харыбина Ирина Николаевна

Теоретическая механика

Методические указания к выполнению самостоятельной работы