Семинар 5. Тема семинара:"Анализ переходных процессов в линейных RL и RC цепях первого порядка. Определение характера переходного процесса в линейных RLC цепях второго порядка". 4 часа

Цель семинара: на примерах расчётов электрических цепей научиться определять характер переходного процесса, его показатели (длительность процесса, устойчивость, перерегулирование).

Напомнить основные понятия темы - законы коммутации, идеализацию ключа, вид решения дифференциальных уравнений.

Пример расчёта цепи первого порядка при нулевых начальных условиях.

Линейная динамическая электрическая цепь, схема которой приведена на рис.7.2,*а*, содержит идеальный источник постоянного напряжения $V(t) = V = const$, потребитель, представляющий последовательное соединение элементов *R* и *C*. Емкость *C* разряжена, потребитель подключается к источнику сигнала идеальным коммутатором (ключом) в момент времени $t_0 = 0$. Параметры сигнала и элементов потребителя заданы: *V* = 100 В; *R* = 10 Ом;
C = 100 мкФ. Требуется определить реакции цепи в переходном режиме.

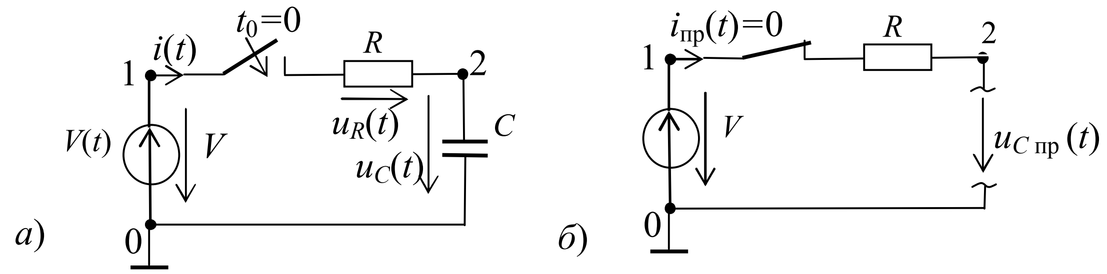

Рис.1. Схема *RC*-цепи: *а* – исходная; *б* – для установившегося режима ($t = \infty$)

- Очевидно, что для рассматриваемой цепи переменной состояния является только напряжение $u_C(t)$ на емкости *C*.

- Согласно условию емкость *C* до коммутации была разряжена $u_C(-0) = 0$. Следовательно независимые начальные условия, определяемые из (7.8), являются нулевыми:

$$u_C(-0) = u_C(+0) = 0\,. \qquad (1)$$

- Составим уравнение цепи для схемы, соответствующей переходному режиму (ключ замкнут).

Уравнения элементов:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t);\quad i_C(t) = Cdu_C(t)/dt;\quad V(t) = V. \qquad (2)$$

Уравнения соединений:

$$i(t) = i_R(t) = i_C(t);\quad u_R(t) + u_C(t) - V(t) = 0. \qquad (3)$$

Уравнение цепи: $$R \cdot i_R(t) + u_C(\mathrm{t}) = V(t). \qquad (4)$$

С учетом (7.12) выражение (7.14) имеет вид: $RCdu_C(t)/dt + u_C(t) = V$ или

$$du_C(t)/dt + u_C(t)/RC = V/RC. \qquad (5)$$

Уравнение (5) в совокупности с независимыми начальными условиями (1) представляет собой математическую модель цепи для анализа переходных процессов.

В данном случае цепь достаточно простая, имеет первый порядок *n* = 1. Порядок цепи определяется порядком дифференциального уравнения (количеством переменных состояния). Решаем уравнение (5) классическим методом, определяя полный интеграл в виде суперпозиции частного и общего решений. В электротехнических задачах частное решение называется п р и н у ж д е н н о й составляющей, а общее решение –

с в о б о д н о й составляющей. Таким образом, переменная состояния определяется выражением:

$$u_C(t) = u_{C\text{св.}}(t) + u_{C\text{пр.}}(t). \qquad (6)$$

- Принужденная составляющая $u_{C\text{пр.}}(t)$ соответствует установившемуся процессу при $t = \infty$ и зависит от вида сигнала. В данном случае $V(t) = V = const$ и при $t = \infty$ в цепи установится режим постоянного тока (напряжения), которому соответствует схема рис.1,*б*.

Емкость *C* для постоянного тока представляет бесконечно большое сопротивление (разрыв цепи), $i_{\text{пр.}}(t) = 0$ и $u_{R\text{пр.}}(t) = 0$. Таким образом:

$$u_{C\text{пр.}}(t) = V = 100 \text{ В}. \qquad (7)$$

Свободная составляющая $u_{C\text{св.}}(t)$ (общее решение) определяется как сумма экспонент:

$$u_{C\text{св.}}(t) = \sum_{k=1}^{n} B_k e^{\lambda_k t}, \qquad (8)$$

где B_k - постоянные интегрирования, определяемые на основе независимых начальных условий, λ_k - корни характеристического уравнения.

Для нашего случая *n* = 1 и свободная составляющая будет определяться выражением:

$$u_{C\text{св.}}(t) = Be^{\lambda t}. \qquad (9)$$

Характеристическое уравнение можно строить, используя дифференциальное уравнение (или систему дифференциальных уравнений), например из (7.15): $\lambda + 1/RC = 0$.

В теории электрических цепей существует способ построения характеристического уравнения по выражению полного комплексного входного сопротивления цепи $Z_{\text{вх}}(j\omega)$.

Схема, соответствующая переходному режиму цепи, разрывается в любой удобной точке. Относительно точек разрыва записывается выражение полного комплексного сопротивления $Z_{\text{вх}}(j\omega)$. Точки разрыва в этом случае считаются входными полюсами. В выражении $Z_{\text{вх}}(j\omega)$ комплексная частота $j\omega$ заменяется на λ и выражение $Z_{\text{вх}}(\lambda)$ приравнивается нулю:

$$Z_{\text{вх}}(\lambda) = 0. \qquad (10)$$

Выражение (7.20) соответствует характеристическому уравнению цепи.
Для нашей цепи (рис.1,*а*):

$$Z_{\text{вх}}(j\omega) = R + 1/j\omega C; \quad Z_{\text{вх}}(\lambda) = R + 1/\lambda C = 0 \text{ или } \quad \lambda + 1/RC = 0. \qquad (11)$$

Из (11) значение $\lambda = -1/RC = -10^3$ с$^{-1}$.

Введем постоянную времени цепи $\tau = RC$. Тогда корень $\lambda = -1/\tau$, где $\tau = 10^{-3}$ с = 1мс.

Для определения постоянной интегрирования *B* используем выражения (6), (9), (7) и (1) при $t_0 = 0$:

$$u_C(0) = u_{C\text{св.}}(0) + u_{C\text{пр.}}(0), \text{ или } 0 = Be^{\lambda 0} + V.$$

Откуда имеем: $B = -V$; $u_{C\text{св.}}(t) = -Ve^{\lambda t}$.

Решение (6) принимает вид:

$$u_C(t) = -Ve^{\lambda t} + V = V(1 - e^{\lambda t}) = V(1 - e^{-t/\tau});$$

$$u_C(t) = 100(1 - e^{-1000t}), \text{ В.} \tag{12}$$

- Проверка на удовлетворение независимым начальным условиям (1):

$$u_C(0) = 100(1 - e^0) = 0.$$

- Реакция $i(t)$ в переходном режиме определяется уравнением емкостного элемента *C*:

$$i(t) = i_C(t) = Cdu_C(t)/dt = (V/R)e^{\lambda t} = 10e^{-1000t}, \text{ А.}$$

- Реакция $u_R(t)$ в переходном режиме определяется уравнением резистивного элемента *R*:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) = R \cdot i(t) = Ve^{\lambda t} = 100e^{-1000t}, \text{ В.}$$

Графическая иллюстрация результатов анализа приведена на рис.7.3.

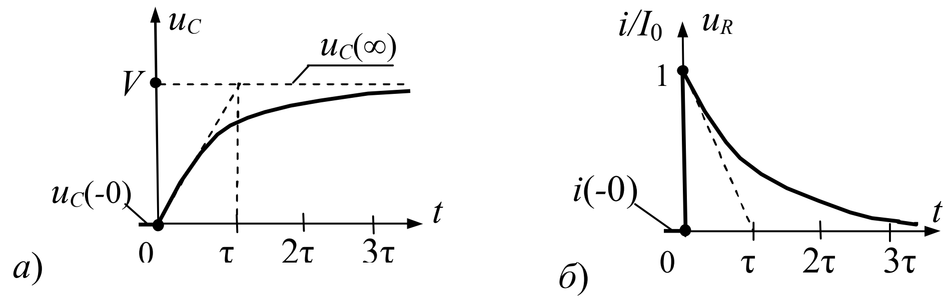

Рис.2**.** Временные зависимости реакций цепи в переходном процессе:
а – напряжение на емкости $u_C(t)$; *б* – ток $i(t)$ и напряжение на резисторе $u_R(t)$

Напряжение на емкости $u_C(t)$ не изменяется скачком в момент коммутации $t_0 = 0$, а монотонно изменяется по экспоненциальному закону от значения начального условия $u_C(0)$ до установившегося значения $u_C(\infty) = u_{C\text{пр.}}(t) = V$. Происходит процесс заряда емкости до напряжения источника (рис.7.3,*а*).

Ток емкости $i_C(t)$, ток резистора $i_R(t)$ и напряжение на резисторе $u_R(t)$ изменяются скачком в момент коммутации, а затем плавно, по экспоненциальному закону стремятся к своим установившимся значениям (рис.2,*б*).

Крутизна характеристик (скорость изменения переменных) определяется значением постоянной времени цепи τ. Значение τ численно равно длине подкасательной в любой точке экспоненциальной функции (рис.2).

В табл.1 приведены относительные значения переменной в процентах от ее теоретического установившегося значения через промежутки времени $t = \tau$.

Таблица 7.1

t, с	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	∞
$(u_C/u_{C\text{пр.}}) \cdot 100\%$	63,2	86,5	95,0	98,2	99,3	100

Определение характера переходного процесса в цепи второго порядка.

Цепи второго порядка содержат два накопителя энергии и описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. Характер переходного процесса можно определить по виду корней характеристического уравнения, которое имеет следующий вид:

$$F_2(\lambda) = \lambda^2 + (R/L)\lambda + 1/LC = 0. \tag{13}$$

Корни характеристического уравнения (14):

$$\lambda_{1,2} = -R/2L \pm \sqrt{(R/2L)^2 - 1/LC}\,. \tag{14}$$

Обозначим константы: $R/2L = \delta$; $1/LC = \omega_0^2$, где ω_0 - резонансная (собственная) частота контура. Таким образом, корни:

$$\lambda_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};\;\; \lambda_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\,. \tag{15}$$

Вид корней зависит от соотношения параметров цепи *R*, *L* и *C*.

Для реальных электрических цепей (электромагнитных устройств) в общем случае возможны два вида корней:

- корни вещественные простые при $\delta > \omega_0$;

- корни комплексные сопряженные при $\delta < \omega_0$.

Для устойчивых систем (цепей) согласно теореме Ляпунова вещественные части корней должны быть отрицательными. В противном случае система неустойчива и не имеет решения (интеграл не сходится, т. е. отсутствует установившаяся составляющая). Диссипативные системы (цепи) без обратных связей устойчивы.