Конспект Лекций

Теоретическая механика

XIV. Динамика системы материальных точек.

§14.1. Дифференциальные уравнения движения механической системы.

n точек, ***i*** – номер точки, ***i****=1,2,…,****n*** , $\boldsymbol{m_i}$ – масса ***i***-той точки,

$\boldsymbol{r_i}$ – радиус-вектор ***i***-той точки отн. произв. т.***O***, $\boldsymbol{a_i}$ – ускорение ***i***-той точки,

$\boldsymbol{F_i^{(e)}}$ – равнодействующая внешних сил, приложенных к ***i***-той точке,

$\boldsymbol{F_i^{(i)}}$ – равнодействующая внутренних сил, приложенных к ***i***-той точке.

$$\left.\begin{array}{l} m_1\vec{a}_1=\vec{F}_1^{\,e}+\vec{F}_1^{\,i}\ , \\ m_2\vec{a}_2=\vec{F}_2^{\,e}+\vec{F}_2^{\,i}\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_i\vec{a}_i=\vec{F}_i^{\,e}+\vec{F}_i^{\,i}\ , \\ \dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ \dots \\ m_n\vec{a}_n=\vec{F}_n^{\,e}+\vec{F}_n^{\,i}\ , \end{array}\right\} \quad \textbf{(14.1)}$$

Это дифференциальные уравнения движения СМТ *в векторной форме*.

§14.2. Меры движения СМТ. Общие теоремы динамики.

Часто для понимания характера движения механической системы достаточно исследовать поведение интегральных параметров движения СМТ, называемых *мерами механического движения*.

Мерами движения являются ***количество движения***, момент количества движения (***кинетический момент***) и ***кинетическая энергия*** СМТ.

Меры механического движения изменяются под воздействием *суммарных мер действия сил* - ***главного вектора*** и ***главного момента***, а также ***работы*** приложенных к системе сил .

Эти изменения описываются с помощью ***общих теорем динамики***, которые связывают меры движения с суммарными мерами действия сил и позволяют исследовать их поведение.

В общих теоремах динамики используются интегральные *меры инертности* СМТ: **масса, центр масс, осевой** и **центробежный моменты инерции**.

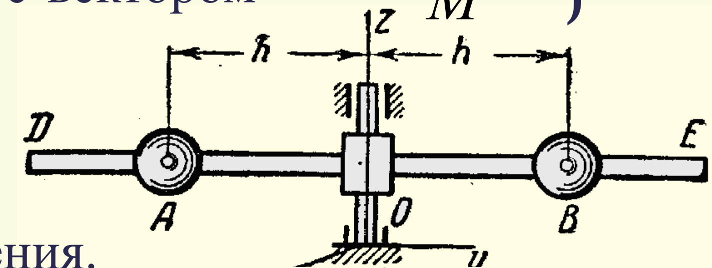
§14.3. Меры инертности СМТ.

1. ***Масса*** системы $M = \Sigma m_i .$ **(14.2)**

2. ***Центр масс*** (***центр инерции***) системы.

Точка С, положение которой относительно начала выбранной системы отсчёта определяется радиус-вектором

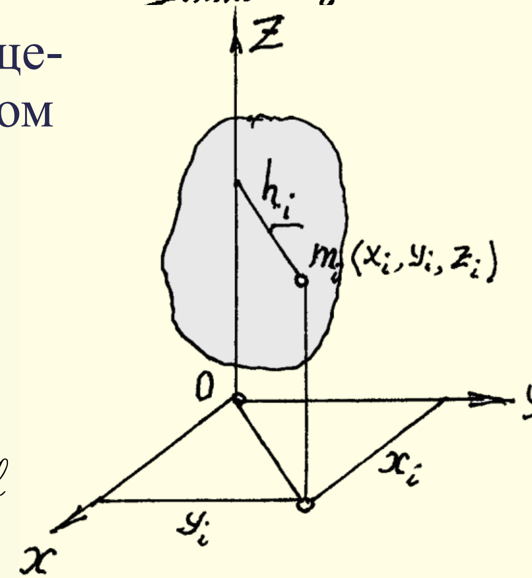
$$\vec{r}_c = \frac{\Sigma m_i \vec{r}_i}{M} \quad \textbf{(14.3)}$$



3. ***Осевой момент инерции*** тела.

$$J_z = \Sigma m_i h_i^2 \quad \textbf{(14.4)}, \qquad J_z = \int h^2 dm$$

где $\boldsymbol{h_i}$ - расстояние от ***i***-й точки до оси вращения. Характеризует удалённость точек СМТ от оси вращения, всегда >0. Играет роль массы при вращательном движении твёрдого тела.



Δm=ρ·ΔV - для объемного тела,

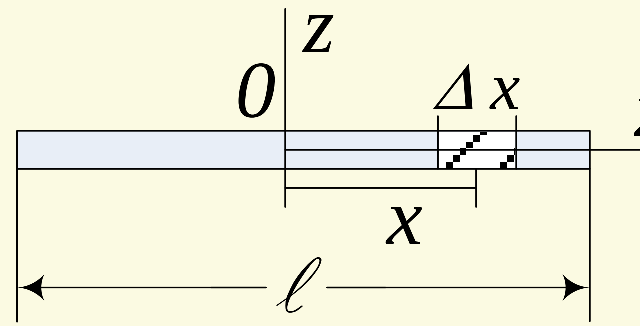
Δm=ρ·ΔS для материальной поверхности,

Δm=ρ·Δℓ для материальной кривой.

$$J_z = \rho \int\limits_{(V)} h^2 dV, \qquad J_z = \rho \int\limits_{(S)} h^2 ds, \qquad J_z = \rho \int\limits_{(\ell)} h^2 d\ell$$

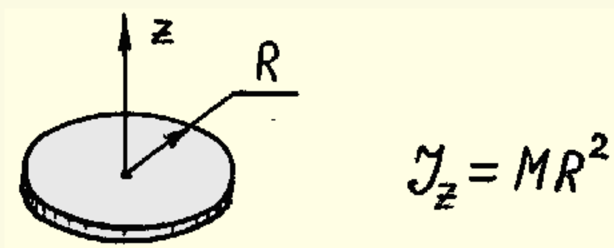
§14.3. Меры инертности СМТ. Продолжение 1.

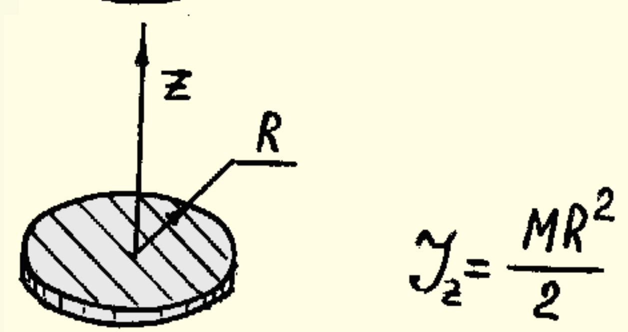
Пример. Найти осевой момент инерции стержня длиной ℓ, площадью поперечного сечения ***S*** и массой ***M*** относительно оси, проходящей через его центр тяжести. $\boldsymbol{M=\rho S\ell,\ \Delta m = \rho S\Delta x}$

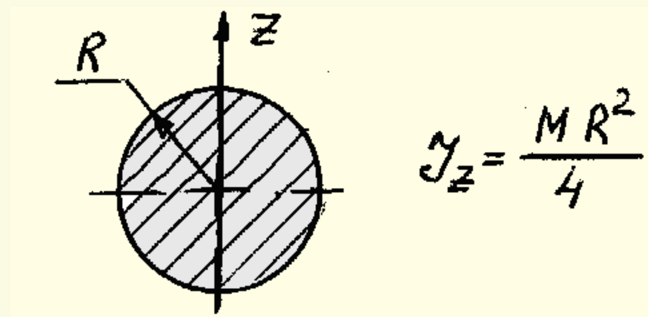


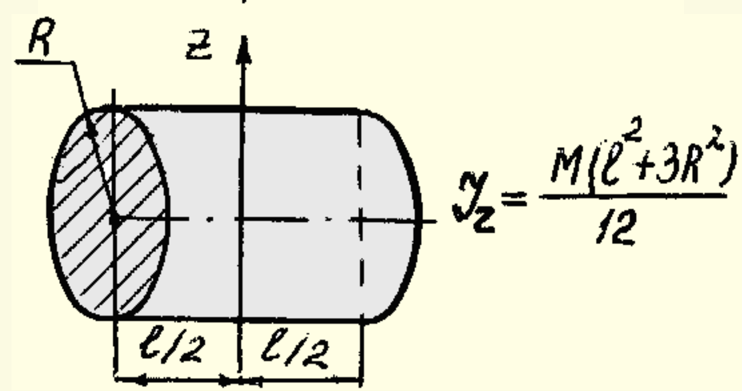
$$J_{oz} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 dm = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2 S\rho dx =$$

$$= S\rho \frac{x^3}{3}\Big|_{-\ell/2}^{\ell/2} = S\rho\frac{\ell^3}{12} = M\frac{\ell^2}{12} \qquad \textbf{(14.5)}$$

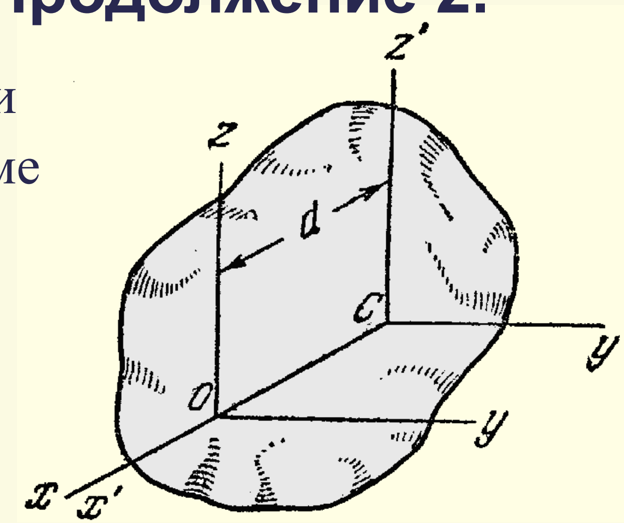






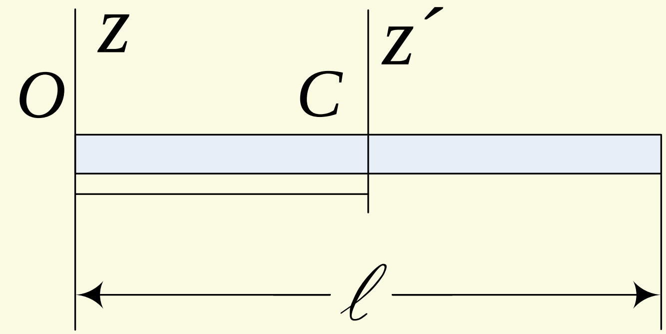


§14.3. Меры инертности СМТ. Продолжение 2.



Теорема Штейнера-Гюйгенса. Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела ***M*** на квадрат расстояния между осями. $J_{OZ} = J_{CZ'} + M \cdot d^2$ **(14.6)**

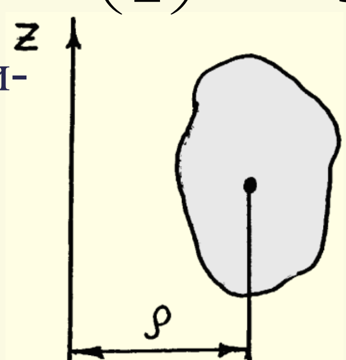
Пример. Найти осевой момент инерции стержня длиной ℓ относительно оси, проходящей через его конец. **(14.7)**

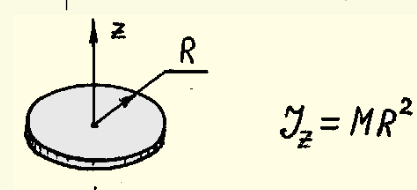


$$J_{OZ} = J_{CZ'} + Md^2 = \frac{M\ell^2}{12} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{3}$$

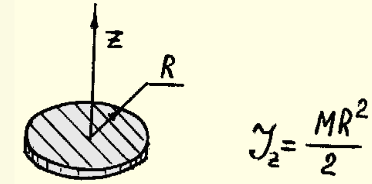
Радиус инерции тела относительно оси z – величина ρ, определяемая равенством:

$$J_z = M\rho^2.$$





$\rho = R.$



$\rho = R/\sqrt{2}.$

§14.4. Кинетическая энергия.

14.4.1. Кинетическая энергия точки и системы материальных точек.

Кинетической энергией точки массы ***m*** называется скалярная величина, равная

$$E_к = \frac{mv^2}{2}. \quad \textbf{(14.8)}$$

Кинетической энергией системы материальных точек называется скалярная величина $\boldsymbol{E_k}$, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$E_к = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} \quad \textbf{(14.9)}$$

$\boldsymbol{E_k}$ системы тел равна сумме кинетических энергий этих тел ($\boldsymbol{E_k}$ всегда >0).

Теорема Кёнига

Кинетическая энергия СМТ равна сумме кинетической энергии её центра масс, в котором сосредоточена масса системы, и кинетической энергии движения точек системы относительно центра масс.

$$E_к = \frac{Mv_C^2}{2} + \sum \frac{m_i v_{i_r}^2}{2}. \qquad \textbf{(14.10)}$$

§14.4. Кинетическая энергия. Продолжение 1.

$$E_к = \sum \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_{i_r})^2}{2} = \Sigma \frac{m_i \vec{v}_C^{\,2}}{2} + \Sigma m_i (\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{i_r}) + \Sigma \frac{m_i \vec{v}_{i_r}^{\,2}}{2}$$

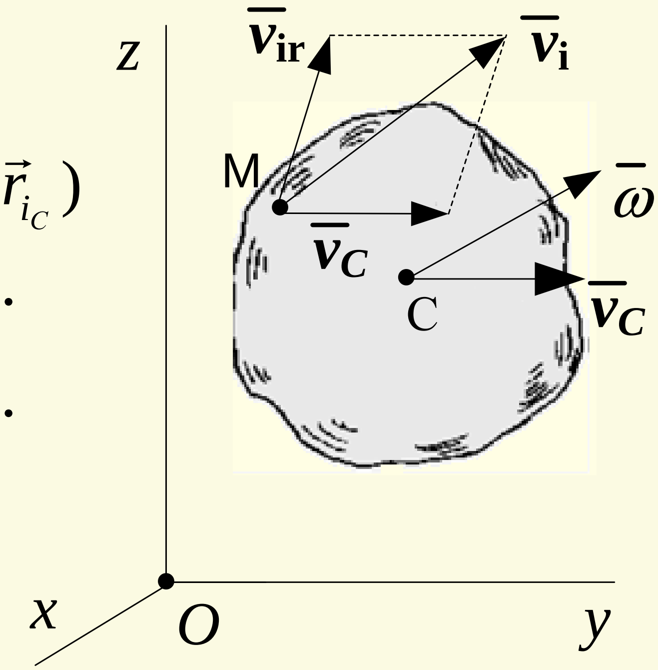
$$\Sigma \frac{m_i \vec{v}_C^{\,2}}{2} = \frac{\vec{v}_C^{\,2}}{2} \Sigma m_i = \frac{M \vec{v}_C^{\,2}}{2} = \frac{M v_C^2}{2};$$

$$\Sigma m_i (\vec{v}_C \cdot \vec{v}_{i_r}) = \vec{v}_C \Sigma m_i \vec{v}_{i_r} = \qquad (\vec{v}_{i_r} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i_C})$$

$$= \vec{v}_C \cdot (\Sigma m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_{i_C}) = \vec{v}_C \cdot (\vec{\omega} \times \Sigma m_i \vec{r}_{i_C}) = 0.$$

Из (14.3) имеем $\sum_i m_i \vec{r}_{i_C} = M \cdot \vec{r}_{C_C} = 0.$

$$E_к = \frac{M v_C^2}{2} + \sum \frac{m_i v_{i_r}^2}{2}.$$



§14.4. Кинетическая энергия. Продолжение 2.

E_k твёрдого тела при разных видах его движения:

1. Поступательное движение:

$$E_к = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \Sigma m_i = \frac{M v_C{}^2}{2}. \qquad \textbf{(14.11)}$$

2. Вращательное движение:

$$E_к = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \Sigma \mathrm{m_i} r_i^2 = \frac{J_O \omega^2}{2} \qquad \textbf{(14.12)}$$

Видно, что осевой момент инерции является мерой инертности тела во вращательном движении.

3. Плоскопараллельное движение:

Тело двигается поступательно со скоростью $\vec{v}_C$ вместе с центром тяжести и вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр тяжести. По теореме Кёнига имеем:

$$E_к = \frac{M v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}. \qquad \textbf{(14.13)}$$

§14.5. Теорема об изменении кинетической энергии.

Дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^{\,e} + \vec{F}_i^{\,i}$$

Умножим скалярно обе части на элементарное перемещение i-той точки, т.е. на дифференциал радиуса-вектора этой точки:

$$m_i\vec{a}_i d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{\,e} d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{\,i} d\vec{r}_i$$

$$m_i\vec{a}_i d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} d\vec{v}_i = m_i\vec{v}_i d\vec{v}_i = d(m_i \frac{\vec{v}_i^{\,2}}{2}) = dE_{\kappa i}$$

Слагаемые в правой части есть элементарная работа равнодействующих внешних и внутренних сил, приложенных к i-той точке:

$$\vec{F}_i^{\,e} d\vec{r}_i = \delta A_i^e ; \vec{F}_i^{\,i} d\vec{r}_i = \delta A_i^i ;$$

$$dE_{\kappa i} = \delta A_i^e + \delta A_i^i \qquad \textbf{(14.14)}$$

Просуммируем обе части выражения (14.8) по всем точкам системы:

$$\Sigma dE_{Ki} = \Sigma \delta A_i^e + \Sigma \delta A_i^i$$

$$\Sigma dE_{Ki} = d\Sigma E_{Ki} = dE_K \Rightarrow dE_K = \Sigma \delta A_i^e + \Sigma \delta A_i^i \qquad \textbf{(14.15)}$$

§14.5. Теорема об изменении кинетической энергии. Продолжение.

$$dE_K = \Sigma \delta A_i^e + \Sigma \delta A_i^i$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме: приращение кинетической энергии системы на элементарном участке пути равно сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на этом участке пути.

Проинтегрируем обе части (14.9) в пределах, соответствующих перемещению системы из начального положения, где кинетическая энергия равна E_{K_0}, в конечное положение, в котором кинетическая энергия равна E_K:

$$E_к - E_{к_0} = \Sigma A_i^e + \Sigma A_i^i \qquad E_к - E_{к_0} = A^e + A^i \qquad \textbf{(14.16)}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме: изменение кинетической энергии механической системы на её конечном перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе, на этом перемещении.

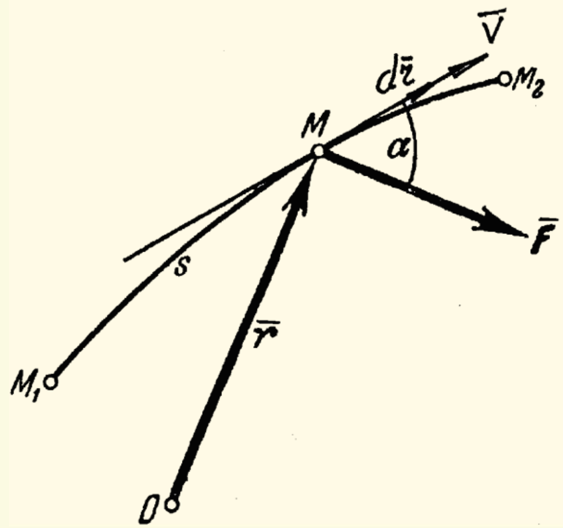
Продифференцируем по времени (14.10):

$$\frac{dE_к}{dt} = \frac{\delta A^e}{dt} + \frac{\delta A^i}{dt} = N^e + N^i \qquad \textbf{(14.17)}$$

Производная по времени от кинетической энергии СМТ равна сумме мощностей всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе.

§14.6. Работа силы. Мощность.

14.6.1. Работа силы.



Мера действия силы на материальную точку на некотором *пути* - ***работа силы***.

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha \ = F^{\tau} \cdot ds. \quad \textbf{(14.18)}$$

Работа силы равна скалярному произведению силы на перемещение точки её приложения.

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F \cos\alpha \ ds = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

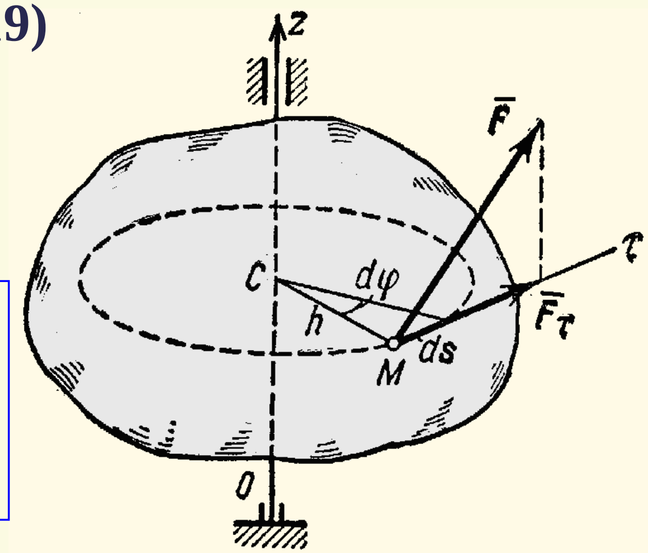
При $\vec{F} = \overrightarrow{const}$ и $\alpha = const \qquad A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$

Мощность силы $\quad N = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos\alpha.$

§14.6. Работа силы. Мощность. Продолжение 1.

14.6.2. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу.

$$\delta A = F^{\tau} ds = F^{\tau} h \cdot d\varphi = M_C(\vec{F}) \cdot d\varphi. \qquad \textbf{(14.19)}$$

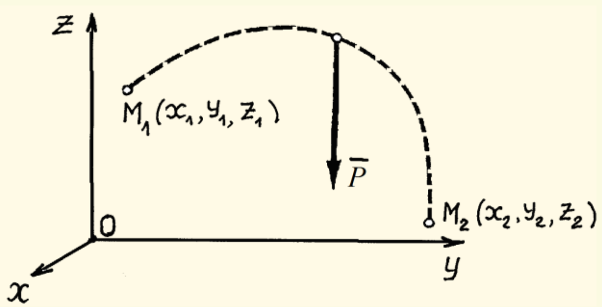


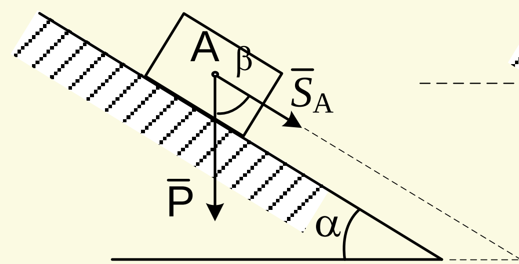
При повороте тела на конечный угол $\boldsymbol{\varphi}$

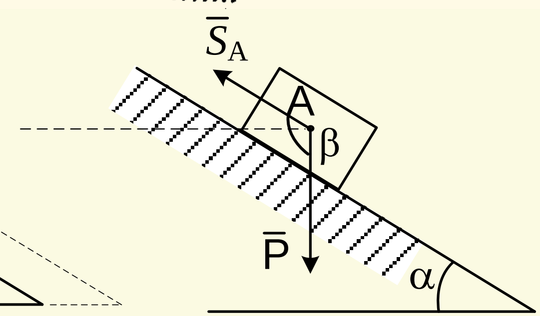
$$A = \int_0^{\varphi} M_z\, d\varphi = \pm M_z \cdot \varphi$$ при $\boldsymbol{M_z}$=const.

Работа момента силы равна произведению момента на угол поворота тела, к которому момент приложен. Работа >0, если M_z и φ направлены в одну сторону.

14.6.3. Работа силы тяжести.







$$P_x = P_y = 0\,, \quad P_z = -P \Rightarrow$$

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = P(z_1 - z_2)$$

$$A = \vec{P} \cdot \vec{S}_A = P \cdot S_A \cdot \cos\beta =$$

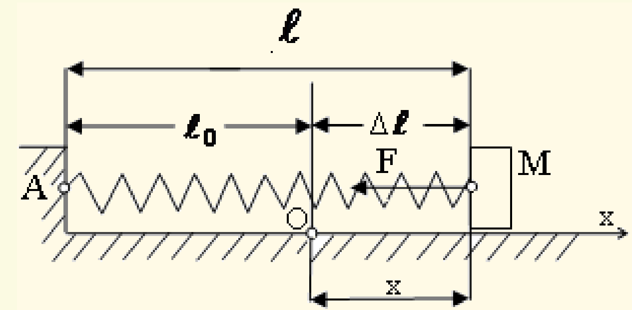
$$\equiv P S_A \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv P S_A \sin\alpha$$

$$\equiv P S_A \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \equiv -P S_A \sin\alpha$$

§14.6. Работа силы. Мощность. Продолжение 2.

14.6.4. Работа силы упругости.

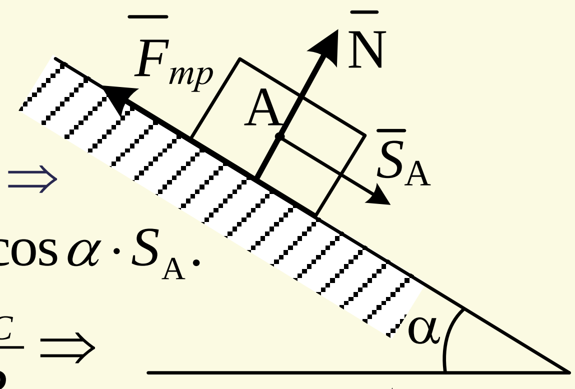
ℓ_0 - длина недеформированной пружины, $\Delta\ell$ - её удлинение.



$F = c\left|\Delta\ell\right| = c\left|x\right|$, ***c*** – коэффициент жёсткости.

$$F_x = -cx \Rightarrow \quad A = \int_x^0 F_x dx = -\int_x^0 cx\,dx = \frac{1}{2}cx^2$$

14.6.5. Работа сил реакций связей.



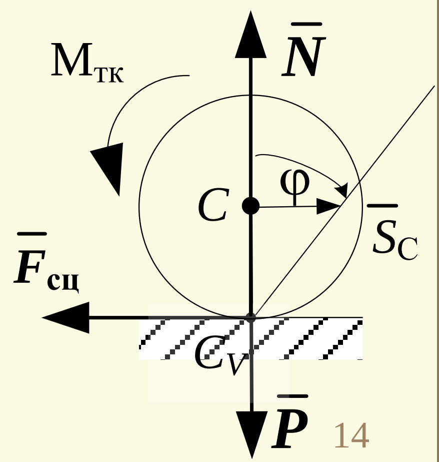
1. Трение скольжения: $\boldsymbol{F_{mp} = f_{тр} N = f_{тр}\, mg\cos\alpha \Rightarrow}$

$$A(\vec{F}_{mp}) = \vec{F}_{mp}\cdot\vec{S}_{\text{A}} = f_{mp} mg\cos\alpha\cdot S_{\text{A}}\cdot\cos\pi = -f_{mp} mg\cos\alpha\cdot S_{\text{A}}.$$

2. Трение качения: $M_{mк} = N\cdot\delta_{mк};\ \varphi = \dfrac{S_C}{CC_V} = \dfrac{S_C}{R} \Rightarrow$

$$A(M_{mк}) = M_{mк}\cdot\varphi = mg\cdot\delta_{mк}\cdot\frac{S_C}{R}.$$

3. Трение сцепления:

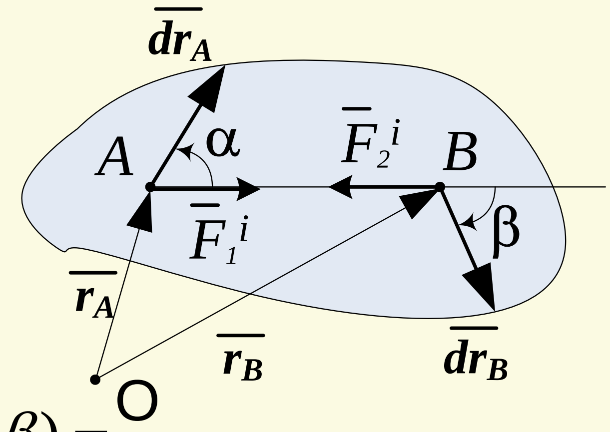


$$A(\vec{F}_{сц}) = \vec{F}_{сц}\cdot\cancel{\vec{S}_{C_V}} = 0.$$

0 - МЦС не двигается

§14.6. Работа силы. Мощность. Продолжение 3.

14.6.6. Работа внутренних сил.



1. Неизменяемая СМТ: ***(ΣA^i=0)***

Система состоит из абсолютно твердых тел с недеформируемыми связями (нерастяжимые нити и идеальные стержни)

$$\vec{F}_1^{\,i} = -\vec{F}_2^{\,i}; \quad dr = v dt.$$

$$\delta A^i(\vec{F}_1^{\,i}, \vec{F}_2^{\,i}) = F_1^i dr_A \cos\alpha + F_2^i dr_2 \cos(180^\circ - \beta) =$$

$$= F\,dt\,(v_A \cos\alpha - v_B \cos\beta) = 0.$$ (по теореме о проекциях скоростей).

2. Изменяемая СМТ: ***(ΣA^i*** может быть $\neq 0$).

$$E_\kappa - E_{\kappa_0} = \Sigma A_i^e + \Sigma A_i^i$$

14.6.7. Работа реакций идеальных связей.

Связи, *сумма работ реакций* которых на элементарном перемещении системы *равна нулю*, называются ***идеальными***.

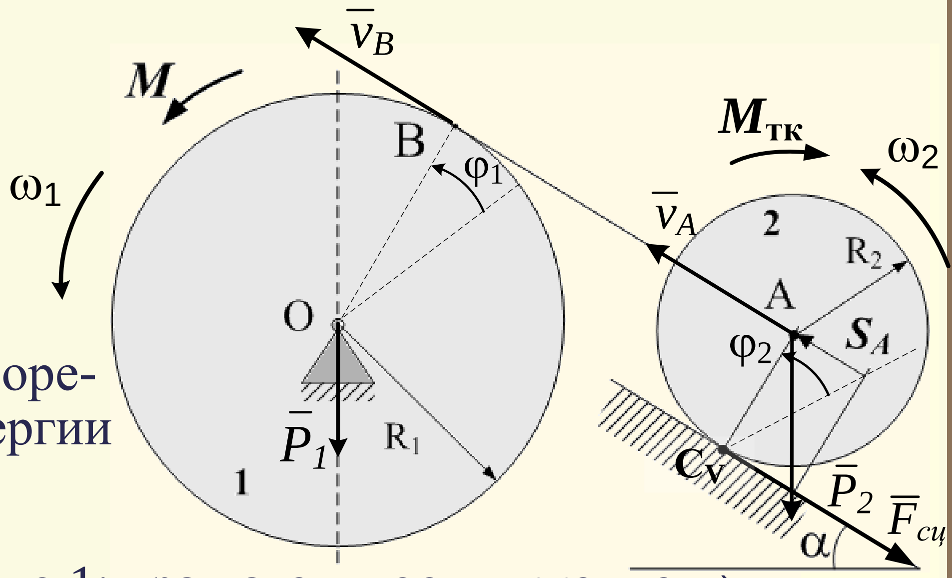
Абсолютно гладкая поверхность, абсолютно твёрдая шероховатая поверхность при качении тела без проскальзывания, идеальный стержень, цилиндрический шарнир, шаровой шарнир и подпятник без учета силы трения.

§14.6. Пример решения задачи.

Пример.

Дано: $m_1, m_2, R_1, R_2, f_{тк}, M$.

Найти: $v_A=f(S_A), a_A, T, F_{сц}, R_O$.



1. Условие, рисунок, силы.

$M_{тк} = f_{тк} m_2 g \cos\alpha$.

Для решения задачи используем теорему об изменении кинетической энергии

$$E_к - E_{к_0} = A^e + A^i$$

2. Кинематический анализ.

<u>**v:**</u> Пусть v_A известна. Тогда

$\omega_2 = v_A/AC_V = v_A/R_2$, (рисуем)

$v_B = v_A$. (рисуем)

$\omega_1 = v_B/BO = v_A/R_1$. (рисуем)

<u>**S:**</u> Пусть S_A известно. Тогда

$\varphi_2 = S_A/AC_V = S_A/R_2$, (рисуем)

$\varphi_1 = S_B/BO = S_A/R_1$. (рисуем)

3. Найдём E_K системы.

$$E_K = E_{K_1} + E_{K_2}.$$

Тело 1: вращательное движение ⇒

$$E_{K_1} = \frac{J_O\omega_1^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1R_1^2}{2}\cdot\frac{v_A^2}{R_1^2} = \frac{m_1v_A^2}{4}.$$

Тело 2: плоскопараллельное движение ⇒

$$E_{K_2} = \frac{m_2v_A^2}{2} + J_A\frac{\omega_2^2}{2} = $$

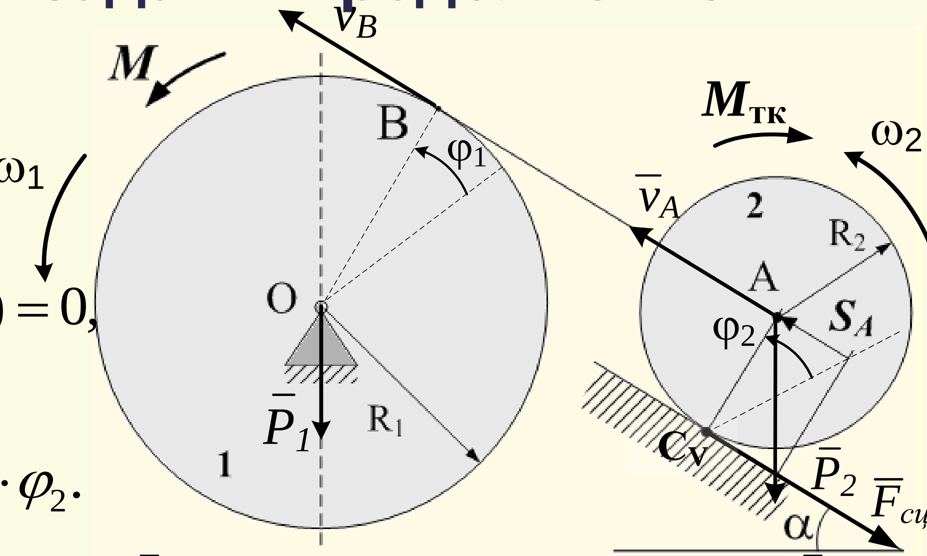
$$= \frac{m_2v_A^2}{2} + \frac{m_2R_2^2\cdot v_A^2}{2\cdot2\cdot R_2^2} = \frac{3m_2v_A^2}{4}.$$

$$E_K = \frac{v_A^2}{2}\left(m_1 + \frac{3m_2}{2}\right) = \frac{v_A^2}{2}\lambda.$$

§14.6. Пример решения задачи. Продолжение 1.

4. Найдём работу сил.

$$A = A(\vec{P}_2) + A(\vec{F}_{сц}) + $$
$$+ A(M_{тк}) + A(\vec{P}_1) + A(M).$$



$A(\vec{P}_2) = -m_2 g \sin\alpha\, S_A$. $A(\vec{F}_{сц}) = A(\vec{P}_1) = 0$,
т.к. силы $F_{сц}$ и P_1 приложены к неподвижным точкам.

$$A(M_{тк}) = -M_{тк}\cdot\varphi_2 = -f_{тк} m_2 g\cos\alpha\cdot\varphi_2.$$

$A(M) = M\cdot\varphi_1$, $A(\boldsymbol{M}) > 0$,

т.к. M и φ_1 направлены в одну сторону.

$$A = S_A\left[\frac{M_2}{R_1} - m_2 g\left(\sin\alpha + \frac{f_{тк}\cos\alpha}{R_2}\right)\right] = = S_A\cdot\sigma.$$

5. Подставим 3 и 4 в п.1, при этом : $E_{\kappa_0} = 0$, т.к. движение – из сост-я покоя.

$A^i = 0$, т.к. система тел - неизменяемая.

(1) $\frac{v_A^2}{2}\lambda = S_A\sigma \Rightarrow v_A = \sqrt{2\frac{\sigma}{\lambda}S_A}.$

$$\frac{dv_A}{dt} = a_A, \cdot \frac{dS_A}{dt} = v_A.$$

$\frac{d}{dt}$ от **(1)**: $\frac{2v_A}{2}\cdot\frac{dv_A}{dt}\cdot\lambda = \frac{dS_A}{dt}\cdot\sigma \quad\Rightarrow\quad v_A a_A\lambda = v_A\sigma \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_A = \frac{\sigma}{\lambda}.}$