Раздел 2. Линейные резистивные цепи и методы их анализа.

План

2.1. Основные понятия и соотношения. Общий алгоритм составления математической модели электрической цепи с сосредоточенными параметрами. Расчет линейных резистивных цепей на основе общей математической модели.
2.2. Расчет линейных резистивных цепей методом эквивалентных преобразований.
2.3. Теорема наложения (принцип суперпозиции).
2.4. Методы эквивалентного источника напряжения (Тевенена) и эквивалентного источника тока (Нортона).
2.5. Метод узловых напряжений.
2.6. Уравнение баланса мощностей (теорема Теледжена).

2.1. Основные понятия и соотношения. Общий алгоритм составления математической модели цепи с сосредоточенными параметрами

Математическая модель необходима для получения количественных и качественных характеристик процессов в электромагнитных устройствах (электрических цепях).

Причиной появления токов и напряжений пассивных элементов цепи являются сигналы источников. Токи и напряжения пассивных элементов цепи называются *реакциями*. Сигналы (напряжения или токи источников) называются *воздействиями*.

Математическая модель цепи представляется в общем случае *системой уравнений цепи*. Уравнения цепи связывают неизвестные реакции (токи или напряжения) с заданными воздействиями.

Система уравнений цепи должна быть линейно-независимой. Линейная независимость уравнений цепи достигается использованием топологических уравнений для линейно-независимых контуров и сечений (узлов) схемы.

Линейно-независимый контур должен содержать хотя бы одну ветвь (элемент), не вошедшую в другие контуры схемы.

Линейно-независимое сечение (узел) должно содержать хотя бы одну ветвь с током, не вошедшую в другие сечения (узлы).

Система уравнений цепи составляется следующим образом:

- записываются уравнения всех элементов цепи;
- составляются уравнения соединений для линейно-независимых контуров и сечений (узлов);
- выбираются искомые реакции (либо токи, либо напряжения).

Можно предложить следующую последовательность решения полученных уравнений:

- в уравнения соединений подставляются уравнения элементов, в соответствии с выбранными реакциями;
- результатом подстановки является система уравнений цепи для токов или напряжений;
- при необходимости система уравнений цепи упорядочивается.

Система уравнений цепи решается любым удобным (доступным) методом.

Очевидно, что математическая модель линейной резистивной цепи представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно токов $i_n(t)$ или напряжений $u_n(t)$ ветвей (элементов) цепи.

Ветвь, как понятие, в общем случае, может представлять какой-либо участок цепи, рассматриваемый по отношению к двум полюсам (узлам). При этом предполагается, что основными общими переменными, характеризующими эту ветвь, являются ток $i(t)$, протекающий от одного полюса ветви к другому, и напряжение $u(t)$ между полюсами.

В простейшем случае ветвью является двухполюсный элемент. В любой момент времени ток $i(t)$, протекающий через ветвь, имеет одно и то же значение вдоль всей ветви.

Ветвями можно считать последовательное соединение элементов и параллельное соединение элементов.

Последовательное соединение элементов (ветвей, участков) электрической цепи – это соединение, при котором через все элементы (участки) цепи проходит один и тот же ток $i(t)$.

Параллельное соединение элементов (ветвей, участков) электрической цепи – это соединение, при котором все элементы (ветви, участки) цепи присоединяются к одной паре узлов и на всех этих элементах (ветвях, участках) имеется одно и то же напряжение $u(t)$.

Например, для составления системы уравнений цепи, схема которой представлена на рис.2.1, следует вначале пронумеровать узлы (0, 1, 2), задать условно-положительные направления токов в ветвях (i_1, i_2, i_3, i_4) и полярности напряжений (u_1, u_2, u_3, u_4), согласованные с токами.

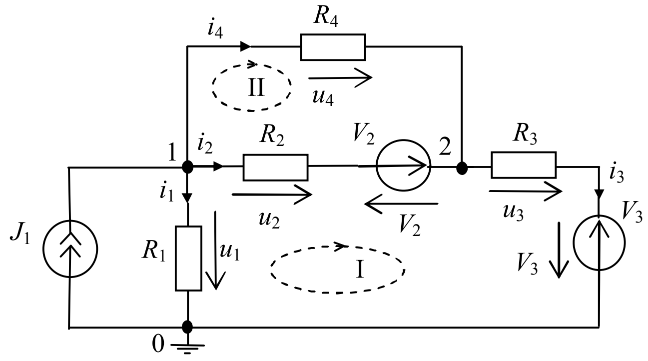

Рис.2.1. Расчетная схема

Затем следует выбрать главные контуры и главные сечения (узлы).

В этой схеме два главных контура и два главных сечения (узла).

Например, контур I (R_1, R_2, V_2, R_3, V_3) и контур II (R_4, V_2, R_2), а главные узлы (сечения) 1 и 2 (см. рис. 2.1).

Для главных контуров задаются условно-положительные направления обхода (на рис. 2.1 – по часовой стрелке).

Уравнения элементов для рассматриваемой схемы:

$$u_n(t) = R_n i_n(t), \tag{2.1}$$

или

$$i_n(t) = g_n u_n(t), \tag{2.2}$$

где n = 1, 2, 3, 4; $g_n = 1/R_n$.

Функции сигналов (воздействия)

$$J_1(t) = J_1, \tag{2.3}$$

$$V_2(t) = V_2, \tag{2.4}$$

$$V_3(t) = V_3. \tag{2.5}$$

Уравнения соединений для контуров

$$-u_1(t) + u_2(t) - V_2(t) + u_3(t) + V_3(t) = 0; \tag{2.6}$$

$$u_4(t) + V_2(t) - u_2(t) = 0. \tag{2.7}$$

и узлов

$$J_1(t) - i_1(t) - i_2(t) - i_4(t) = 0; \tag{2.8}$$

$$i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) = 0. \tag{2.9}$$

Выбирается вид неизвестных реакций, например, токи $i_n(t)$. В соответствии с таким выбором в уравнения соединений (2.6) и (2.7) подставляются соотношения элементов (2.2), (2.4), (2.5), а в уравнение (2.8) – соотношение (2.3).

$$R_1 i_1(t) - R_2 i_2(t) - R_3 i_3(t) = -V_2 + V_3, \tag{2.10}$$

$$R_2 i_2(t) - R_4 i_4(t) = V_2, \tag{2.11}$$

$$i_1(t) + i_2(t) + i_4(t) = J_1, \tag{2.12}$$

$$i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) = 0. \tag{2.13}$$

Система линейных алгебраических уравнений (2.10) … (2.13) является математической моделью линейной резистивной цепи (рис.2.1).

Существуют методы расчета, позволяющие снизить число совместно решаемых уравнений цепи на этапе их составления. Это достигается использованием других переменных, например, узловых напряжений, токов ячеек (контурных токов). Такой подход предполагает окончательное определение реакций по предварительно найденным значениям других переменных.

Определение реакций в линейных резистивных цепях для относительно несложных схем можно осуществлять, не составляя полной математической модели цепи.

В таких случаях используются эквивалентные преобразования, упрощающие схему цепи, и теоремы линейных цепей.

2.2. Эквивалентные преобразования цепей

Когда возникает необходимость в преобразованиях схемы какой-либо цепи, то эти преобразования должны быть обязательно э к в и в а л е н т н ы м и . В процессе преобразования какая-то часть исходной схемы должна оставаться неизменяемой (непреобразованной), в противном случае преобразования теряют смысл. При преобразовании некоторой части цепи условием э к в и в а л е н т н о с т и является н е и з м е н н о с т ь р е ж и м а в части, не подвергающейся преобразованию.

Токи и напряжения во всех ветвях (элементах) непреобразованной части цепи в результате преобразований должны остаться неизменными. Входное сопротивление преобразуемой части цепи до и после преобразований должно быть одинаковым.

Неизменяемая часть цепи в этом случае не должна "почувствовать" преобразования.

Простейшими эквивалентными преобразованиями являются преобразования участков с последовательными и параллельными соединениями резисторов (рис.2.2).

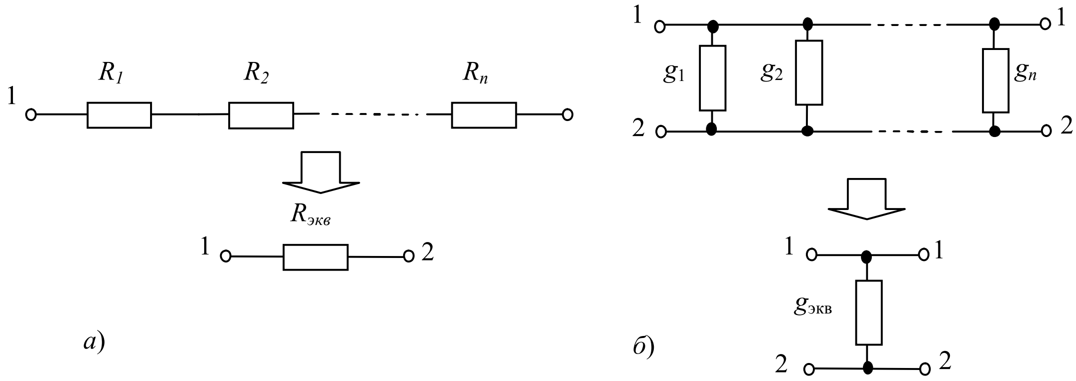

Рис. 2.2. Преобразования последовательного (*а*) и параллельного (*б*) соединений

Условиями эквивалентности являются:

- для последовательного соединения

$$R_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^{n} R_k \ ; \qquad (2.14)$$

- для параллельного соединения

$$g_{\text{экв}} = \sum_{k=1}^{n} g_k \ , \qquad (2.15)$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Относительно просто преобразуются друг в друга трехлучевая звезда сопротивлений и треугольник сопротивлений (рис.2.3).

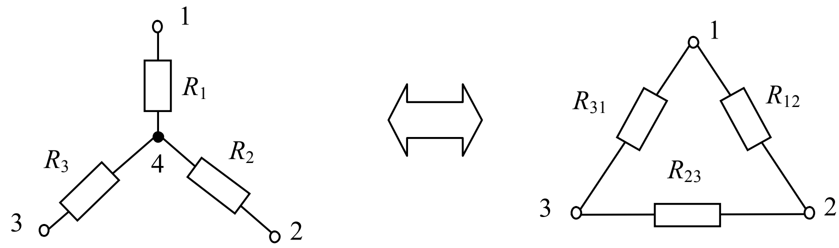

Рис. 2.3. Эквивалентное преобразование "звезда-треугольник"

Условия эквивалентности:

-для "звезды"

$$R_1 = R_{12}R_{31}/(R_{12} + R_{23} + R_{31}), \qquad (2.16)$$

$$R_2 = R_{12}R_{23}/(R_{12} + R_{23} + R_{31}), \qquad (2.17)$$

$$R_3 = R_{23}R_{31}/(R_{12} + R_{23} + R_{31}); \qquad (2.18)$$

-для "треугольника"

$$g_{12} = g_1 g_2/(g_1 + g_2 + g_3), \qquad (2.19)$$

$$g_{23} = g_2 g_3/(g_1 + g_2 + g_3), \qquad (2.20)$$

$$g_{31} = g_1 g_3/(g_1 + g_2 + g_3), \qquad (2.21)$$

где $g_{jk} = 1/R_{jk}$; $g_n = 1/R_n$, $j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, 3$.

Последовательное и параллельное соединения идеальных источников.

Последовательно соединенные источники напряжения (рис.2.4) преобразуются в один эквивалентный источник. Напряжение эквивалентного источника определяется, как алгебраическая сумма напряжений преобразуемых источников. При суммировании со знаком " + " берутся напряжения, полярности которых совпадают с принятой относительно рассматриваемых узлов полярностью напряжения эквивалентного источника, а со знаком " - " – несовпадающие.

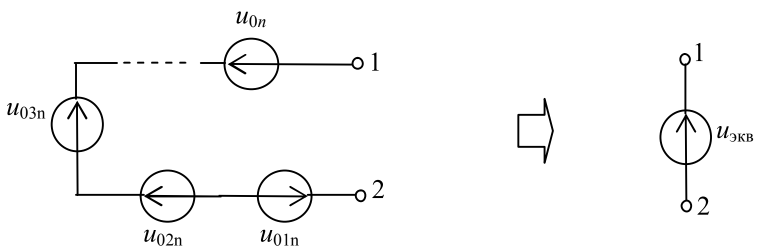

Рис.2.4. Преобразование последовательного соединения идеальных источников напряжений

Условия эквивалентности:

$$u_{экв} = \sum_{k=1}^{n} u_{0k}\ , \tag{2.22}$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Параллельно соединенные источники токов (рис.2.5) преобразуются в один эквивалентный источник. Ток эквивалентного источника определяется как алгебраическая сумма токов преобразуемых источников. При суммировании со знаком " + " берутся токи, положительные направления которых совпадают с принятым относительно рассматриваемых узлов направлением тока эквивалентного источника, а со знаком " - " - несовпадающие.

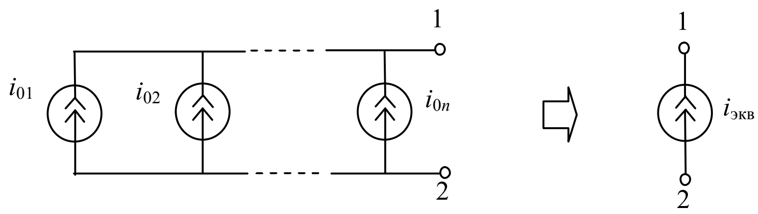

Рис.2.5. Преобразование параллельного соединения идеальных источников токов

Условия эквивалентности:

$$i_{экв} = \sum_{k=1}^{n} i_{0k}\ , \tag{2.23}$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Ограничения на соединения идеальных источников

Согласно определениям идеальных источников, не допускаются параллельное соединение идеальных источников напряжений с различными напряжениями и последовательное соединение идеальных источников токов с различными токами, т.к. это противоречит смыслу соответствующих определений.

Взаимное преобразование линейных источников напряжения и тока

В данном случае под линейными источниками понимаются их простейшие линейные модели: последовательное соединение идеального источника напряжения с линейным резистором и параллельное соединение идеального источника тока с линейной проводимостью (см. раздел 1.1, п.1.1.1).

Эквивалентно преобразуются друг в друга последовательное соединение идеального источника напряжения u_0 с линейным резистором (сопротивлением) R_0 и параллельное соединение идеального источника тока i_0 с линейным резистором (проводимостью) g_0 (рис.2.6).

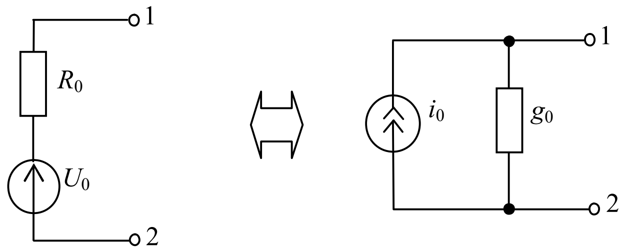

Рис.2.6. Взаимное преобразование источников напряжения и тока

Физическим условием эквивалентности источников по отношению к их внешним выводам (1, 2) является одинаковость их вольтамперных характеристик. Для простейших линейных моделей это условие сводится к одинаковости значений токов короткого замыкания и напряжений холостого режима.

Такие условия соблюдаются, если выполняются соотношения:

$$u_0 = i_0 / g_0 \,,\; R_0 = 1/g_0 \,; \qquad (2.24)$$

$$i_0 = u_0 / R_0 \,,\; g_0 = 1/R_0 \,. \qquad (2.25)$$

Когда возникает необходимость сведения исходной схемы к вариантам соединений, представленных на рис.2.6, то используется расщепление источников: источник напряжения u_0 расщепляется на нужное количество параллельно соединенных источников с напряжениями u_0, а источник тока i_0 расщепляется на последовательно соединенные источники с токами i_0.

2.3. Свойства линейных цепей и разработанные на их основе методы анализа позволяют в ряде случаев существенно упростить процедуру расчета интересующих реакций. Основное свойство линейных цепей – это свойство наложения, заключающее в себе принцип суперпозиции.

Свойство наложения: реакция в линейной цепи при одновременном действии нескольких независимых источников может быть определена, как суперпозиция реакций на действие каждого источника в отдельности (в предположении отсутствия других источников).

На основе этого свойства существует метод наложения, суть которого можно проиллюстрировать рис.2.7.

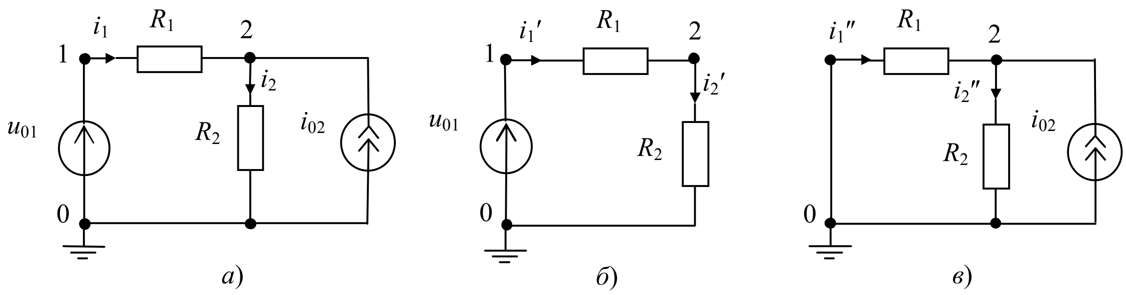

Рис.2.7. Иллюстрация метода наложения

Выражения для токов имеют вид $i_1 = i_1' + i_1''$; $\quad i_2 = i_2' + i_2''$.

2.4. Метод эквивалентного источника напряжения (Тевенена). Любая линейная цепь с рядом источников по отношению к одной из ветвей в виде двухполюсника (линейного или нелинейного) может быть заменена эквивалентным последовательным соединением идеального источника напряжения u_0 и линейного резистора R_0. При этом напряжение эквивалентного источника u_0 равно напряжению холостого режима на рассматриваемой ветви, а сопротивление резистора R_0 равно входному сопротивлению в исходную цепь со стороны рассматриваемой ветви при замкнутых накоротко источниках напряжений и разомкнутых источниках токов исходной цепи.

Метод эквивалентного источника тока (Нортона). Любая линейная цепь с рядом источников по отношению к одной из своих ветвей в виде двухполюсника (линейного или нелинейного) может быть заменена эквивалентным параллельным соединением идеального источника тока i_0 и линейного резистора (проводимости) g_0. При этом ток эквивалентного источника i_0 равен току короткого замыкания в рассматриваемой ветви, а проводимость g_0 равна входной проводимости в исходную цепь со стороны рассматриваемой ветви при замкнутых накоротко источниках напряжений и разомкнутых источниках токов исходной цепи.

На основе этих методов существует способ расчета эквивалентного генератора (активного двухполюсника). Метод весьма эффективен при определении тока или напряжения в одной из ветвей схемы. Суть его проиллюстрирована на рис.2.8.

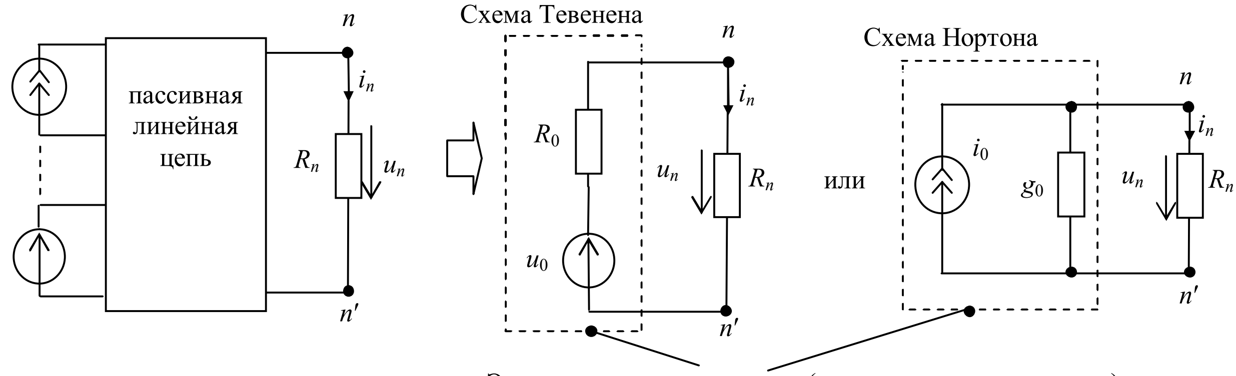

Рис.2.8. Метод эквивалентного генератора (активного двухполюсника)

Процедура включает два этапа. На первом этапе определяют параметры активного двухполюсника: u_0, R_0 или i_0, g_0 (рис.2.9).

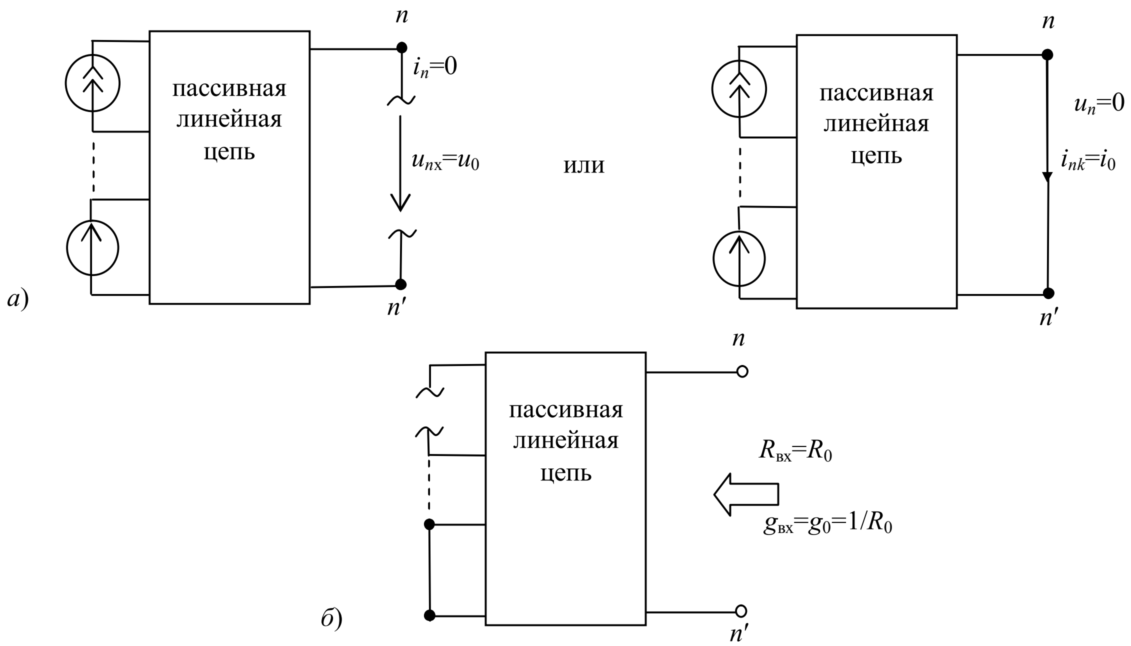

Рис.2.9. Определение параметров активных двухполюсников: *а* – определение значений u_0 или i_0, *б* – определение значений R_0 или g_0

При вычислении входного сопротивления $R_{вх}$ или входной проводимости $g_{вх}$ применяются соответствующие приемы эквивалентных преобразований резистивных линейных схем.

На втором этапе определяют искомые реакции:

$$i_n = u_0/(R_0 + R_n), \qquad (2.26)$$

или

$$u_n = i_0/(g_0 + g_n), \qquad (2.27)$$

где $g_n = 1/R_n$.

2.6. Закон сохранения энергии (уравнение баланса мощностей)

Для произвольной изолированной автономной цепи, (не связанной с другими цепями), алгебраическая сумма произведений тока $i_j(t)$ на напряжение $u_j(t)$ всех ветвей (элементов) в любой момент времени t равна нулю.

При суммировании со знаком " + " берутся слагаемые, у которых ток и напряжение согласованы, а со знаком " – " слагаемые с несогласованными токами и напряжениями.

$$\sum_{j=1}^{n_в} i_j(t)\, u_j(t) = 0, \qquad (2.28)$$

где j = 1, 2, 3, …, $n_в$; $n_в$ - количество ветвей (элементов).

Выражение (2.28) зачастую формулируют как баланс мощностей, утверждающий, что сумма мощностей всех источников цепи равна совокупной мощности, рассеиваемой на резистивных элементах.

Закон сохранения энергии (баланс мощностей) используется для контроля правильности результатов расчета токов и напряжений в цепи.

Например, для цепи рис. 2.1. уравнение, соответствующее этому закону, имеет вид:

$$i_1u_1 + i_2u_2 + i_3u_3 + i_4u_4 - J_1u_1 - i_2V_2 - i_3V_3 = 0. \qquad (2.29)$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какую электрическую цепь можно считать резистивной?
2. Какие процессы моделируются резистивными цепями?
3. Что такое линейная резистивная цепь?
4. В чем заключается общий алгоритм составления математической модели цепи с сосредоточенными параметрами?
5. Что такое уравнения цепи?
6. В чем заключается понятие главного контура, главного сечения (узла), ветви?
7. Что представляет собой в общем случае математическая модель линейной резистивной цепи?
8. Какое соединение элементов является последовательным, параллельным, смешанным?
9. Какое соединение элементов (ветвей) является "трехлучевой звездой", "треугольником"?
10. В чем заключается основной принцип преобразования соединений элементов (ветвей)?
11. В чем смысл простейших эквивалентных преобразований соединений элементов (схем) последовательного, параллельного, "звезды", "треугольника"?
12. В чем заключается практическое использование основных свойств линейных цепей?
13. В чем заключается основной смысл метода наложения?
14. В чем заключается основной смысл методов эквивалентного источника напряжения (метода Тевенена), источника тока (метода Нортона)?
15. Что такое активный двухполюсник?
16. Какие общие варианты простейших схем линейных активных двухполюсников отражены в методах Тевенена и Нортона?
17. Каким образом определяются параметры активных двухполюсников в соответствии с методами Тевенена и Нортона?
18. В чем основной практический смысл уравнения баланса мощностей?