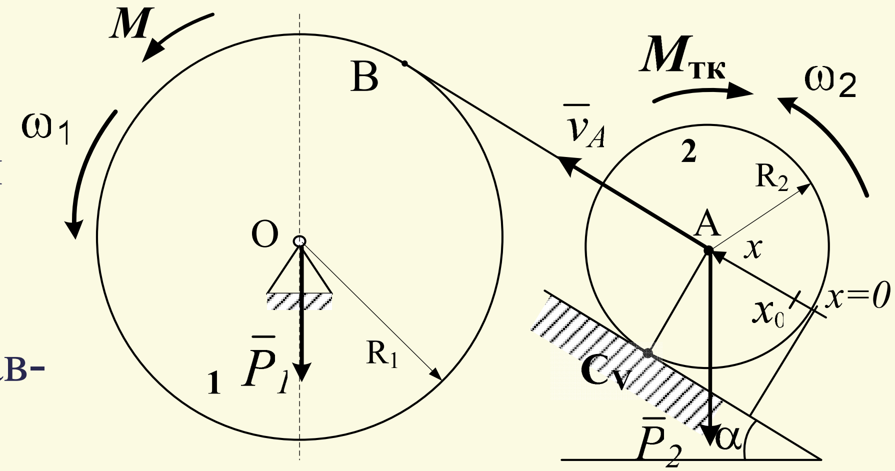
§17.4. Уравнения Лагранжа II рода. Пример1.

Дано: $m_1, m_2, R_1, R_2, f_{тк}, M, \alpha$.
При $t=0$ $v_A=v_0$, $x_A=x_0$.
Найти: a_A и $x_A= x_A(t)$.

1. Условие, рисунок, активные силы и реакции неидеальных связей.



$$M_{тк}= f_{тк}m_2 g\cos\alpha\,.$$

Для решения задачи используем уравнение Лагранжа II рода.

2. Система имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты q примем отклонение x центра тяжести А тела 2 от положения x=0.

Запишем уравнение Лагранжа II рода.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_К}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_К}{\partial x} = Q.$$

3. Найдём E_K системы.

$$E_K = E_{K_1} + E_{K_2}.$$

Тело 1: вращательное движение $\Rightarrow$

$$E_{K_1} = \frac{J_O\omega_1^2}{2}, \text{где } J_O = \frac{m_1 R_1^2}{2}.$$

Тело 2: плоскопараллельное движение $\Rightarrow$

$$E_{K_2} = \frac{m_2 v_A^2}{2} + J_A\frac{\omega_2^2}{2}, \text{где } J_A = \frac{m_2 R_2^2}{2}.$$

Выразим ω_1, v_A, ω_2 через обобщённую скорость $\dot{x}$ и координату x:

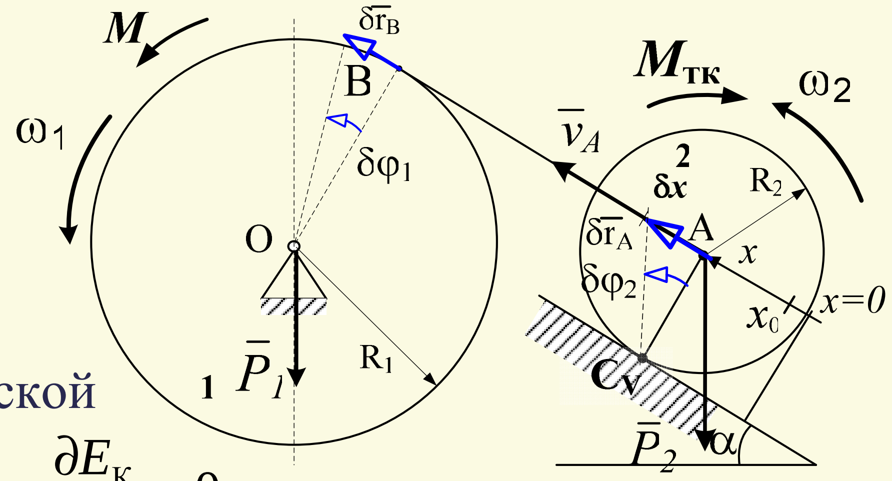
$v_A= \dot{x}$, $\omega_2=v_A/AC_V= \dot{x}/R_2$,

$\omega_1=v_B/BO= \dot{x}/R_1$.

§17.4. Уравнения Лагранжа II рода. Пример1.

$$E_К = \frac{m_1 R_1^2 \cdot \dot{x}^2}{2 \cdot 2 \cdot R_1^2} + \frac{m_2 \dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2 \cdot \dot{x}^2}{2 \cdot 2 \cdot R_2^2} =$$

$$= \frac{\dot{x}^2}{2}\left(m_1 + \frac{3m_2}{2}\right) = \frac{\dot{x}^2}{2}\lambda.$$



Вычислим производные от кинетической энергии: $\dfrac{\partial E_К}{\partial \dot{x}} = \dot{x}\lambda,\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_К}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x}\lambda,\quad \dfrac{\partial E_К}{\partial x} = 0.$

4. Найдём обобщённую силу **Q**. Для этого дадим системе возможное перемещение $\boldsymbol{\delta x}$ в сторону возрастания обобщённой координаты $\boldsymbol{x}$.

При этом точка **А** переместится на $\delta\vec{r}_A$, **В** – на $\delta\vec{r}_B$, тело **2** повернётся на угол $\delta\varphi_2$, а тело **1** повернётся на угол $\delta\varphi_1$. Элементарная работа сил и моментов:

$$\delta A = -P_2 \cdot \delta r_A \cdot \sin(\alpha) - M_{тк} \cdot \delta\varphi_2 + M \cdot \delta\varphi_1$$

Выразим $\boldsymbol{\delta r_A}$, $\boldsymbol{\delta\varphi_2}$, и $\boldsymbol{\delta\varphi_1}$ через $\boldsymbol{\delta x}$:

$$\delta A = \delta x\left(\frac{M}{R_1} - m_2 g \sin(\alpha) - \frac{m_2 g f_{тк} \cos(\alpha)}{R_2}\right);$$

$$Q = \frac{\delta A}{\delta x} = \left(\frac{M}{R_1} - m_2 g \sin(\alpha) - \frac{m_2 g f_{тк} \cos(\alpha)}{R_2}\right);$$

$\boldsymbol{\delta r_A = \delta r_B = \delta x}$,

$\boldsymbol{\delta\varphi_2 = \delta r_A / AC_V = \delta x / R_2}$,

$\boldsymbol{\delta\varphi_1 = \delta r_B / BO = \delta x / R_1}$.

§17.4. Уравнения Лагранжа II рода. Пример1.

5. Подставим значения производных (3) и обобщённой силы (4) в уравнение Лагранжа (2):.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_К}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial E_К}{\partial x} = Q. \qquad \frac{\partial E_К}{\partial \dot{x}} = \dot{x}\lambda, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_К}{\partial \dot{x}}\right) = \ddot{x}\lambda, \quad \frac{\partial E_К}{\partial x} = 0.$$

$$Q = \frac{\delta A}{\delta x} = \left(\frac{M}{R_1} - m_2 g \sin(\alpha) - \frac{m_2 g f_{тк}\cos(\alpha)}{R_2}\right);$$

$$\ddot{x}\lambda - 0 = Q, \qquad a_A = \ddot{x} = \frac{Q}{\lambda} = \frac{\dfrac{M}{R_1} - m_2 g \sin(\alpha) - \dfrac{m_2 g f_{тк}\cos(\alpha)}{R_2}}{m_1 + \dfrac{3m_2}{2}}. \quad \textbf{(5)}$$

$$v_A = \int a_A dt = a_A \cdot t + C_1 \qquad \text{(т.к. } \boldsymbol{a_A = const}\text{)}$$

При $\boldsymbol{t=0}$ $\boldsymbol{v_A=v_0} \Rightarrow \boldsymbol{v_0}=0+C_1$, откуда $C_1=\boldsymbol{v_0} \Rightarrow \boldsymbol{v_A = a_A t+v_0}$.

Найдём закон движения точки ***A***. $\quad v_A = \dfrac{dx_A}{dt} \Rightarrow dx_A = v_A \cdot dt \Rightarrow$

$$x_A = \int v_A dt = \int (a_A t + v_0)dt = a_A \cdot t^2/2 + v_0 \cdot t + C_2$$

При t=0 $\boldsymbol{x_A=x_0} \Rightarrow \boldsymbol{x_0=0+0+C_2} \Rightarrow \boldsymbol{C_2=x_0} \Rightarrow \boldsymbol{x_A= a_A t^2/2+v_0 t+x_0}$.