Министерство образования Российской Федерации

Московский государственный технологический университет
“С Т А Н К И Н”

С.А. Еленев
В.Г. Новиков
Г.И. Шевелева

# КИНЕМАТИКА

Москва 2002

УДК 531.2.075

Учебное пособие по кинематике: / Сост. С.А. Еленев, В.Г. Новиков, Г.И. Шевелева. – М.: МГТУ “СТАНКИН”, 2002. – 126с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов дневного и вечернего отделений технических высших учебных заведений. От известных отличается сжатостью изложения и большим количеством разобранных задач.

В пособии приведены индивидуальные задания по темам: кинематика точки, вращательное движение твердого тела, плоскопараллельное движение твердого тела и сложное движение точки.

Рис. 131. Библ. 10 назв.

Составители:
д.т.н., профессор Еленев Сергей Алексеевич,
к.т.н., профессор Новиков Вячеслав Григорьевич,
д.т.н., профессор Шевелева Галина Ивановна

Утверждено кафедрой теоретической механики.
Протокол №5 от 1.07.2002

# КИНЕМАТИКА

Кинематика – это раздел теоретической механики, в котором изучается движение геометрических точек и тел без учета сил, вызывающих это движение. Кинематика делится на кинематику точки и кинематику твердого тела.

# 1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

## 1.1. Способы задания движения точки

Задать движение точки – значит дать информацию, с помощью которой можно определить положение точки в любой момент времени в выбранной системе отсчета.

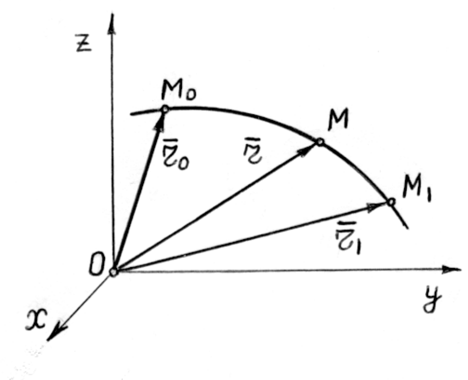



*Рис.1.1*

Рассмотрим *три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.*

***Векторный способ.*** При векторном способе в декартовой системе координат задается радиус-вектор $\vec{r}$ точки как функция времени t (рис.1.1):

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1.1)$$

Пусть, например, радиус-вектор движущейся точки M равен

$$\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + 2\vec{k},$$

и надо определить положение точки в разные моменты времени. Путем подстановки конкретного значения времени t в выражение для радиус-вектора точки получаем (рис.1.2):

$t_0 = 0, \quad \vec{r}_0 = 2\vec{k},$

$t_1 = 1c, \quad \vec{r}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},$

$t_2 = 2c, \quad \vec{r}_2 = 8\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$

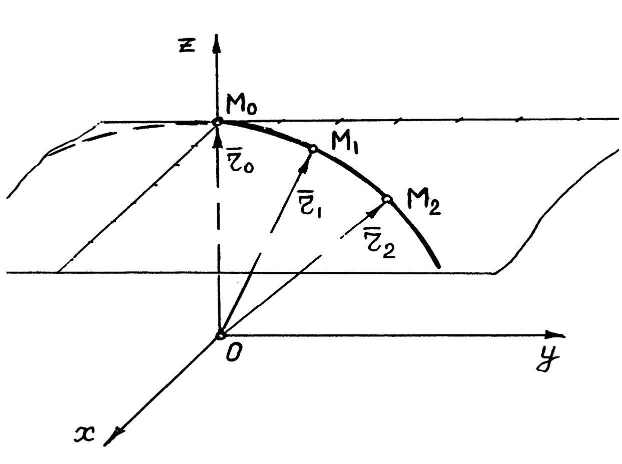



*Рис.1.2*

Если соединить последовательно концы радиус-вектора ($\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ и т.д.), то получим линию, описываемую точкой в пространстве. Эту линию называют *траекторией точки.*

Как известно из математики, линия, последовательно соединяющая концы некоторого вектора (построенного из одной точки), называется *годографом* этого вектора. Следовательно, траектория точки – это годограф радиус-вектора $\vec{r}(t)$.

***Координатный способ.*** При координатном способе задаются координаты движущейся точки как функции времени t:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1.2}$$

Уравнения (1.2) называются *кинематическими уравнениями движения точки.* Одновременно они являются параметрическими уравнениями траектории. Чтобы от параметрических уравнений траектории перейти к уравнениям в явной или неявной форме, дающим непосредственную связь между координатами, следует исключить из уравнений (1.2) параметр t.

Координатный способ неразрывно связан с векторным способом, так как координаты x, y, z можно рассматривать как координаты точки M (рис.1.1) – конца радиус-вектора

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.3}$$

Если в рассмотренном выше примере векторный способ заменить координатным, то движение точки будет описываться уравнениями:

$$x = 2t^2, \quad y = t, \quad z = 2.$$

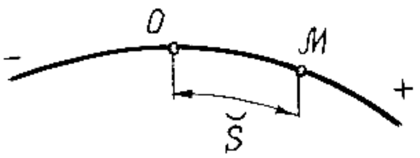



*Рис.1.3*

Из этих уравнений видно, что точка движется в плоскости z = 2 по ветви параболы $x = 2y^2$ в направлении от $M_0$ к $M_2$

***Естественный способ.*** При естественном способе задается траектория точки, начало отсчета на траектории, положительное направление по траектории и *закон движения вдоль траектории* (рис.1.3):

$$S = S(t),$$

причем S - это дуговая координата, определяющая положение точки на траектории, а не пройденный ею путь.

Дуговая координата может быть как положительной, так и отрицательной.

**Пример 1.1.** Точка М движется по окружности радиуса R=30 см в соответствии с законом (рис.1.4):

$$OM = S = 15\pi \sin(\pi t / 6).$$

Найти положение точки М в моменты времени $t_1 = 1c$, $t_2 = 3c$ и $t_3 = 6c$, а также вычислить путь, пройденный точкой М за 6 секунд.

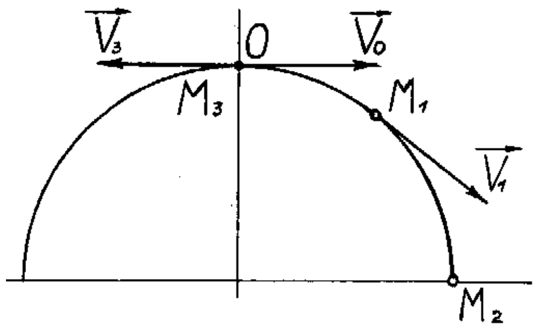



*Рис.1.4*

*Решение.* Чтобы найти положение точки М на окружности, подставим конкретное значение времени t в закон движения. При этом для $t_1 = 1c$ получаем $S_1 = OM_1 = 7{,}5\pi$ см и точка попадает в положение $M_1$ (рис.1.4).

При $t_2 = 3c$ дуговая координата точки М равна $S_2 = OM_2 = 15\pi$ см, и точка находится в положении $M_2$.

При $t_3 = 6c$ точка $M_3$ совпадает с точкой О, поскольку $S_3 = OM_3 = 0$.

За время, равное 6с, точка пройдет по окружности путь, равный 30 $\pi$ см (от О до $M_2$, а затем от $M_2$ до $M_3$).

Убедитесь самостоятельно (увеличивая значение времени t) в том, что точка М совершает колебательное движение вокруг точки О.

## 1.2. Переход от координатного способа к естественному

Пусть движение точки задано координатным способом, т.е. уравнениями (1.2). Как уже было сказано выше, по этим уравнениям можно определить траекторию точки. Для нахождения закона движения по траектории воспользуемся следующими соотношениями, известными из математики:

$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ или $dS = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$, где $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ и т.д. Отсюда, считая, что при t = 0 дуговая координата S = 0, получим

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt. \qquad (1.4)$$

**Пример 1.2.** Движение точки задано уравнениями:

$$x = 3\cos \pi t + 2, \quad y = 3\sin \pi t - 5,$$

где x и y в сантиметрах, а t - в секундах. Требуется найти траекторию точки и закон движения по ней.

*Решение.* Чтобы найти траекторию, надо исключить параметр t из заданных уравнений. Для этой цели перепишем уравнения так:

$$x - 2 = 3\cos \pi t, \quad y + 5 = 3\sin \pi t,$$

возведем их в квадрат и сложим левые и правые части. При этом, учитывая, что $(3\cos \pi t)^2 + (3\sin \pi t)^2 = 3^2$, получим уравнение траектории:

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 3^2.$$

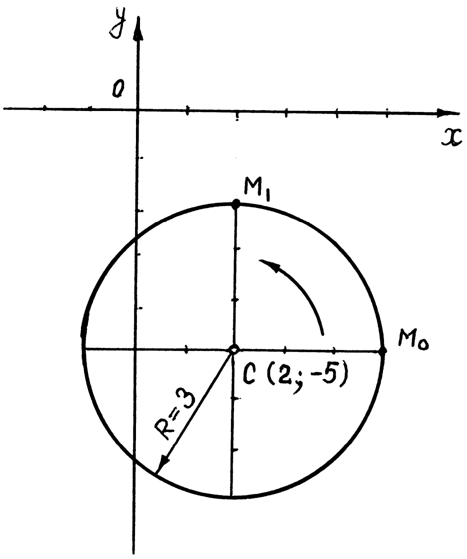


*Рис.1.5*

этого уравнения видно, что траекторией )кружность радиуса 3 см с центром в точке ıс.1.5).

Подставляя в заданные параметрические уравнения конкретные значения времени, находим положение точки на траектории. Так, в начальный момент, т.е. при t = 0, точка находится в положении $M_0(5,-5)$, а при t = 0,5 в $M_1$ (2,-2). Следовательно, точка движется по окружности в направлении, показанном стрелкой.

Для определения закона движения по траектории воспользуемся выражением (1.4):

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^t \sqrt{(-3\pi \sin \pi t)^2 + (3\pi \cos \pi t)^2}\,dt = 3\pi t \text{ см}.$$

## 1.3. Определение скорости точки при различных способах задания движения

***Векторный способ.*** Пусть в момент времени t положение точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ - радиус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ (рис.1.6).

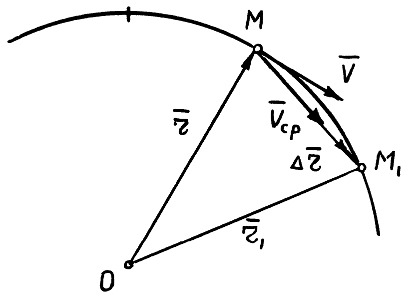



*Рис.1.6*

Отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ характеризует скорость изменения положения точки и называется средней скоростью точки за время $\Delta t$: $\vec{v}_{cp} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется истинной скоростью точки:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.5}$$

Из математики известно, что *производная по времени от вектора - это вектор, направленный по касательной к годографу дифференцируемого вектора*. А так как годографом дифференцируемого вектора $\vec{r}$ служит траектория точки, то, следовательно, *вектор скорости идет по касательной к траектории.*

Например, при $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + 2\vec{k}$ скорость точки равна $\vec{v} = 4t\vec{i} + \vec{j}$.

***Координатный способ***. Если представить радиус-вектор точки в виде (1.3), то скорость точки определяется формулой:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{1.6}$$

Вектор скорости точки можно записать через проекции на декартовы оси координат:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \tag{1.7}$$

Сравнивая (1.6) с (1.7), заключаем, что

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{1.8}$$

Модуль вектора скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \tag{1.9}$$

а его направляющие косинусы вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v} \quad . \qquad (1.10)$$

**Пример 1.3.** Определить скорость точки, движущейся согласно уравнениям:

$$x = 2t^2, \quad y = t, \quad z = 2,$$

где x, y, z в сантиметрах, а t – в секундах.

*Решение.* Проекции вектора скорости на декартовы оси координат в любой момент времени определяются с помощью формул (1.8):

$$v_x = 4t, \quad v_y = 1, \quad v_z = 0.$$

Модуль вектора скорости и его направляющие косинусы такие:

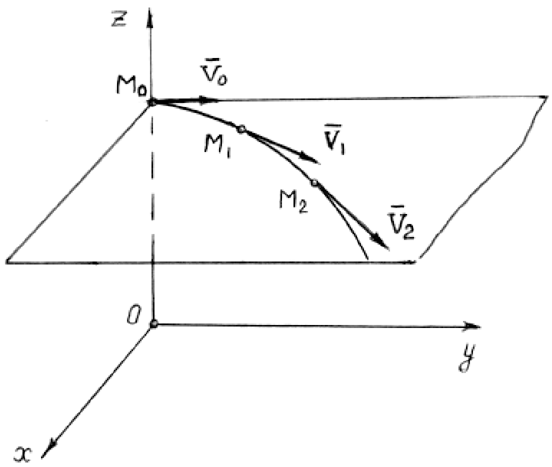



*Рис.1.7*

$$v = \sqrt{16t^2 + 1}\ \text{см/с},$$

$$\cos\alpha = \frac{4t}{\sqrt{16t^2+1}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{16t^2+1}},$$

$$\cos\gamma = 0.$$

При t = 0

$v_x = 0,\ v_y = 1,\ v_z = 0,\ v_0 = 1$ см/с ,

при t = 1с

$v_x = 4,\ v_y = 1,\ v_z = 0,\ v_1 = \sqrt{13}$ см/с,

при $t_2$ = 2с $\quad v_x = 8, \quad v_y = 1, \quad v_z = 0, \quad v_2 = \sqrt{65}$ см/с (рис.1.7).

***Естественный способ.*** Пусть в момент времени t точка находилась на заданной траектории в положении M с дуговой координатой S (рис.1.8), а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – в положении $M_1$ с $S_1 = S + \Delta S$. Величина средней скорости точки M за время $\Delta t$ определяется так:

$$v_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Величина истинной скорости точки M равна

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \qquad (1.11)$$

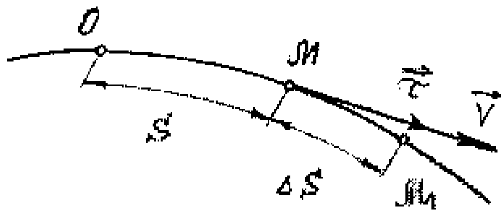



*Рис.1.8*

Как было показано выше, скорость точки направлена по касательной к траектории. Введем орт $\vec{\tau}$ касательной. Тогда вектор скорости определяется формулой:

$$\vec{v} = \frac{dS}{dt}\vec{\tau} = v\vec{\tau}. \qquad (1.12)$$

**Пример 1.4.** Вычислить скорость точки, движущейся по окружности радиуса R = 30 см, считая, что $S = 15\pi \sin(\pi t/6)$ см.

*Решение.* По формуле (1.11) имеем:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{5\pi^2}{2}\cos(\pi t/6).$$

При $t_0 = 0$ $\quad v_0 = 5\pi^2/2$ см/с,

при $t_1 = 1$ с $\quad v_1 = 5\sqrt{3}\pi^2/4$ см/с,

при $t_2 = 3$ с $\quad v_2 = 0$ ,

при $t_3 = 6$ с $\quad v_3 = -5\pi^2/2$ см/с (рис.1.4).

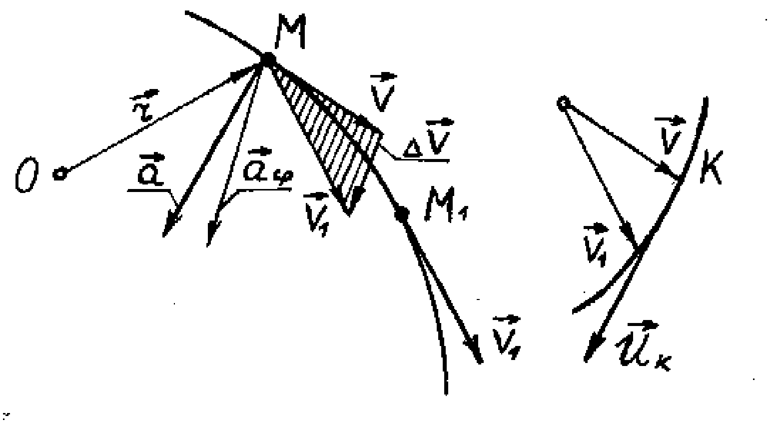
## 1.4. Определение ускорения точки при различных способах задания движения

***Векторный способ.*** Пусть в момент времени t скорость точки равна $\vec{v}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ - $\vec{v}_1$ (рис.1.9а). Среднее ускорение точки за время $\Delta t$ - это вектор

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \qquad (1.13)$$

а истинное ускорение точки - это предел, к которому стремится среднее ускорение при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.14)$$




*а)* *б)*

*Рис.1.9*

Вектор среднего ускорения лежит в плоскости, образованной векторами $\vec{v}, \vec{v}_1, \Delta\vec{v}$ (см. заштрихованную плоскость на рис.1.9а). Предельное положение этой плоскости при $\Delta t \to 0$ называется *соприкасающейся плоскостью* к пространственной кривой в точке М. Следовательно, вектор ускорения точки, определяемый формулой (1.14), лежит в соприкасающейся плоскости и параллелен касательной к годографу вектора скорости (рис.1.9б).

**Пример 1.5.** Определить вектор ускорения точки, движение которой задано в виде: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} + 2\vec{k}$.

*Решение.* Дифференцируем дважды радиус-вектор по времени:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 4\vec{i}.$$

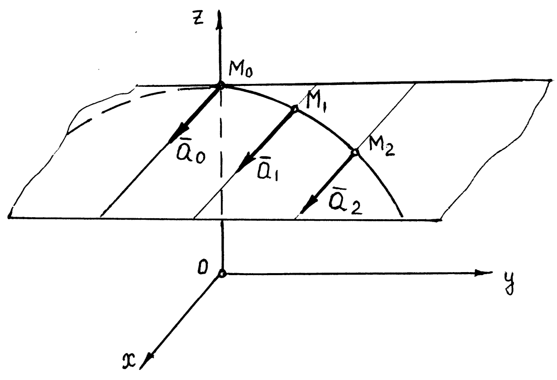



*Рис.1.10*

Полученное выражение показывает, что вектор ускорения в данном примере не зависит от времени t и в каждой точке траектории параллелен оси x (рис.1.10).

***Координатный способ.*** Вектор ускорения точки можно представить в виде:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (1.15)$$

или

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,. \tag{1.16}$$

Сравнивая правые части выражений (1.15) и (1.16), видим, что проекции ускорения на декартовы оси координат равны

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}\,. \tag{1.17}$$

Модуль и направляющие косинусы вектора ускорения равны:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \tag{1.18}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}\,. \tag{1.19}$$

**Пример 1.6.** Определить ускорение точки, движение которой задано координатным способом: $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 2$ (координаты в сантиметрах, время в секундах).

*Решение.* Дифференцируя заданные уравнения дважды по времени, получаем:

$$a_x = 4\,,\quad a_y = 0\,,\quad a_z = 0\,,$$

следовательно, a = 4 см/с$^2$, $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$.

Естественно, результаты совпадают с теми, что были получены для этого примера выше (рис.1.10).

***Естественный способ.*** Так как $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, а $\vec{v} = v\vec{\tau}$, то

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{ds}{ds}$$

или

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}\,. \tag{1.20}$$

Первая составляющая в этом выражении характеризует изменение величины скорости и направлена по касательной к траектории. Ее называют *касательной составляющей* вектора ускорения и обозначают $\vec{a}^{\tau}$.Она равна

$$\vec{a}^{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}. \tag{1.21}$$

Проанализируем второе слагаемое в выражении (1.20). Сначала вычислим модуль вектора $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ (рис.1.11):

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right| = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{2\tau\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta s}.$$

Преобразуем полученное выражение, умножив и разделив его на $\frac{\Delta\alpha}{2}$:

$$\frac{d\tau}{ds} = \lim_{\substack{\Delta s \to 0\\ \Delta\alpha \to 0}}\frac{2\tau\sin\frac{\Delta\alpha}{2}\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}\Delta s} = \lim_{\substack{\Delta s \to 0\\ \Delta\alpha \to 0}}\left(\tau\frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right). \tag{1.22}$$

Так как

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\frac{\Delta\alpha}{2}} = 1$$

и модуль орта $\vec{\tau}$ равен 1, то из (1.22) получаем

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{1.23}$$

Из дифференциальной геометрии известно, что угол $\Delta\alpha$ между двумя соседними касательными называется *углом смежности,* а его производная по ds - *кривизной k* кривой в данной точке:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k = \frac{1}{\rho}, \tag{1.24}$$

где $\rho$ - *радиус кривизны* кривой в данной точке.

Подставляя (1.24) в (1.23), получаем:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho}. \tag{1.25}$$

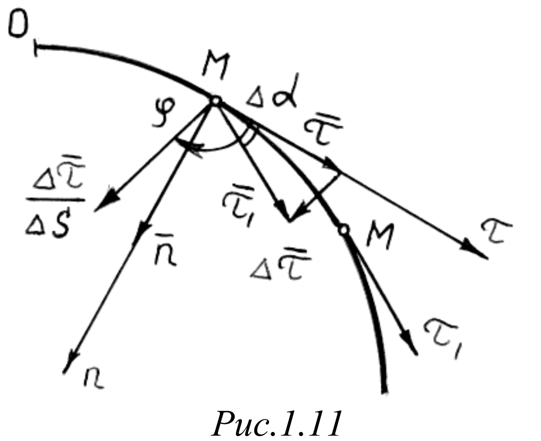


*Рис.1.11*

Теперь выясним направление вектора $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$. С этой целью предварительно рассмотрим вектор $\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$. Угол между векторами $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ и $\vec{\tau}$ равен $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\Delta\alpha}{2}$ (рис.1.11)**.** В пределе при $\Delta\alpha \to 0$ и $\Delta s \to 0$ угол $\varphi$ стремится к $\dfrac{\pi}{2}$, а вектор $\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$ - к вектору $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$. Следовательно, вектор $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ образует с вектором $\vec{\tau}$ угол $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau} \tag{1.26}$$

Введем орт $\vec{n}$, перпендикулярный орту $\vec{\tau}$ и параллельный вектору $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$. Тогда на основании (1.25) и (1.26) имеем:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n}. \tag{1.27}$$

Подставляя (1.27) в (1.20), получаем формулу для определения ускорения точки при естественном способе задания движения (рис.1.12):

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \tag{1.28}$$

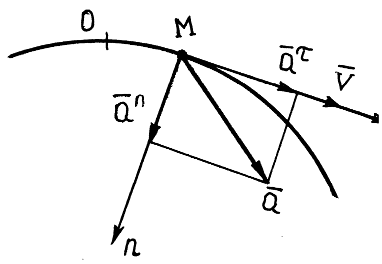


*Рис.1.12*

Покажем, что орт $\vec{n}$ есть орт главной нормали. Так как вектор $\vec{a}$ лежит в соприкасающейся плоскости и вектор $\dfrac{dv}{dt}\vec{\tau}$ лежит в той же плоскости, то и вектор $\dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$, равный разности этих векторов, также лежит в соприкасающейся плоскости. Следовательно, $\vec{n}$ - орт нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости, т.е. орт главной нормали.

Таким образом, второе слагаемое в формуле (1.28) характеризует изменение направления вектора скорости и идет по главной нормали к траектории. Оно называется нормальной составляющей ускорения:

$$\vec{a}^{n} = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \tag{1.29}$$

В каждой точке пространственной кривой можно построить так называемый естественный трехгранник (рис.1.13) с осями $\tau$, $n$, $b$ (касательная, главная нормаль и бинормаль). Любой вектор, в том числе и вектор ускорения, можно разложить по осям естественного трехгранника:

$$\vec{a} = a^{\tau}\vec{\tau} + a^{n}\vec{n} + a^{b}\vec{b}. \qquad (1.30)$$

Последнее слагаемое в этой формуле - составляющая вектора ускорения на бинормаль. Сравнивая (1.30) с (1.28), видим, что

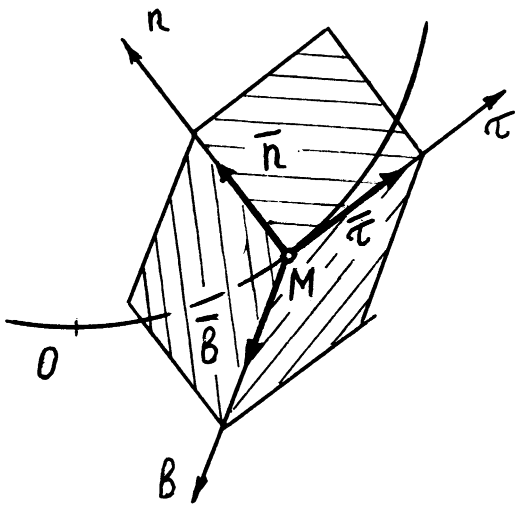



*Рис.1.13*

$$a^{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \qquad (1.31)$$

$$a^{n} = \frac{v^2}{\rho}, \qquad (1.32)$$

$$a^{b} = 0. \qquad (1.33)$$

Модуль полного ускорения точки определяется по формуле:

$$a = \sqrt{(a^{\tau})^2 + (a^{n})^2}. \quad (1.34)$$

**Пример 1.7.** Определить ускорение точки, если ее движение происходит по окружности радиуса 30 см в соответствии с законом: $S = 15\pi \sin(\pi t/6)$ см.

*Решение.* С помощью формул (1.32) и (1.33) получаем проекции ускорения на оси естественного трехгранника в произвольный момент времени:

$$a^{\tau} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{5\pi^3}{12}\sin\frac{\pi}{6}t,$$

$$a^{n} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\left(5\frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi}{6}t\right)^2}{30}.$$

При t = 1 с значения этих величин такие: $a^{\tau} = -\frac{5\pi^3}{24}\,\frac{см}{с^2}$, $a^{n} = \frac{5\pi^4}{32}\,\frac{см}{с^2}$.

## 1.5. Решение задач

**Задача 1.1.** По данным уравнениям движения точки:

$$x = 2t \text{ см}, \quad y = 8t^2 \text{ см}$$

найти уравнение (в координатной форме) ее траектории, а также скорость, касательное и нормальное ускорения точки в момент времени t = 1 с.

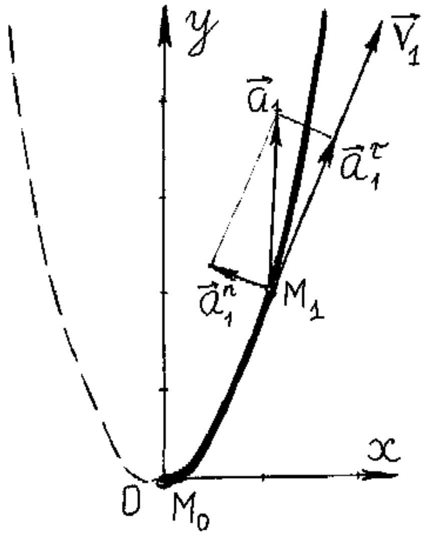



*Рис.1.14*

*Решение.* В данной задаче движение точки задано координатным способом. Точка перемещается в плоскости xoy. Для определения траектории точки в координатной форме необходимо исключить параметр t из уравнений движения. Определяя t из первого уравнения и подставляя во второе, получаем:

$$y = 2x^2.$$

Это уравнение параболы с вершиной в начале координат (рис.1.14). Однако не вся парабола является траекторией движения точки.

Определяем положение точки в начальный момент времени, т.е. при t = 0. Для этого подставляем t = 0 в уравнения движения и получаем: $x_0=0$; $y_0=0$. Следовательно, движение начинается из точки $M_0(0,0)$.

Из уравнений движения видно, что с увеличением времени t координаты точки возрастают, оставаясь положительными.

Таким образом, траекторией точки является правая ветвь параболы с начальной точкой $M_0(0,0)$. Движение точки происходит из $M_0$ в сторону увеличения координат точки. При t = 1 с точка попадает в положение $M_1$ с координатами $x_1=2$ см, $y_1=8$ см.

Определим скорость точки:

$$v_x = \dot{x} = 2 \text{ см/с}, \quad v_y = \dot{y} = 16t \text{ см/с}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4 + 256t^2}.$$

$$\text{При } t = 1 \text{ с} \qquad v_1 = \sqrt{260} \text{ см/с}.$$

Определим полное ускорение точки:

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = 16 \text{ см/с}^2, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 16 \text{ см/с}^2.$$

Найдем касательное и нормальное ускорения точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{4 + 256t^2} = \frac{256t}{\sqrt{4 + 256t^2}}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

$$\text{При } t = 1 \text{ с} \qquad a_{\tau_1} = \frac{256}{\sqrt{260}} \text{ см/с}^2, \quad a_{n_1} = \frac{16}{\sqrt{65}} \text{ см/с}^2.$$

**Задача 1.2.** По данным уравнениям движения точки:

$$x = 5\sin\pi t \text{ см}, \quad y = 3\cos\pi t \text{ см}$$

найти уравнение ее траектории в координатной форме, скорость, касательное, нормальное и полное ускорения, а также радиус кривизны траектории в моменты времени t = 0 и t = 1/2 с.

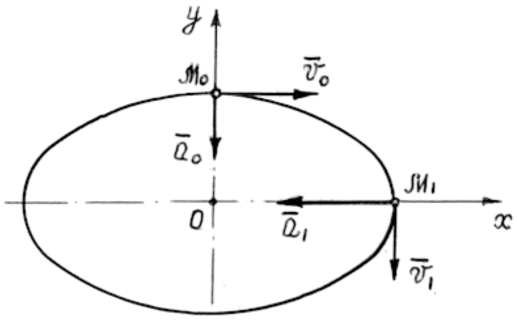



*Рис.1.15*

*Решение.* Определяем траекторию точки в координатной форме, исключая параметр ($\pi t$) из уравнений движения. С этой целью представим уравнения движения в виде:

$$\frac{x}{5} = \sin\pi t; \quad \frac{y}{3} = \cos\pi t.$$

После возведения в квадрат этих выражений и их сложения получаем:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Полученное уравнение - это уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями 5 см и 3 см (рис.1.15).

Подставляя t = 0 в уравнения движения, находим начальное положение точки - $M_0(5,0)$.

При $t \geq 0$ $-5 \leq x \leq 5$; $-3 \leq y \leq 3$; следовательно, весь эллипс является траекторией движения точки.

Определим скорость точки:

$$v_x = \dot{x} = 5\pi\cos\pi t \text{ см/с}, \quad v_y = \dot{y} = -3\pi\sin\pi t \text{ см/с},$$

следовательно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \pi\sqrt{25\cos^2\pi t + 9\sin^2\pi t} \text{ см/с}.$$

При t = 0 $\quad v_x = 5\pi \text{ см/с}, \quad v_y = 0, \quad v_0 = 5\pi \text{ см/с}.$

Определим полное ускорение точки:

$$a_x = \ddot{x} = -5\pi^2\sin\pi t \text{ см/с}^2, \quad a_y = \ddot{y} = -3\pi^2\cos\pi t \text{ см/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{25\sin^2\pi t + 9\cos^2\pi t} \text{ см/с}^2.$$

При t = 0 $\quad a_x = 0, \quad a_y = -3\pi^2 \text{ см/с}^2, \quad a_0 = 3\pi^2 \text{ см/с}^2$.

Находим касательное и нормальное ускорение точки:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-50\pi^2 \cos\pi t \sin\pi t + 18\pi^2 \cos\pi t \sin\pi t}{2\sqrt{25\cos^2\pi t + 9\sin^2\pi t}} = \frac{-8\pi^2 \sin 2\pi t}{\sqrt{25\cos^2\pi t + 9\sin^2\pi t}},$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

При t = 0

$$a_{\tau_0} = 0, \quad a_{n_0} = \sqrt{a_0^2 - a_{\tau_0}^2} = 3\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

следовательно, в начальный момент времени касательное ускорение отсутствует, а нормальное ускорение совпадает с полным ускорением (рис.1.15).

Зная нормальное ускорение и скорость точки, находим по формуле (1.32) радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{a^n}. \qquad \text{При } t = 0 \qquad \rho_0 = \frac{v_0^2}{a_0^n} = \frac{25\pi^2}{3\pi^2} = \frac{25}{3} \text{см.}$$

При $t_1$ = 1/2 с аналогичным образом получаем:

$$v_x = 0, \quad v_y = -3\pi \text{ см/с}, \quad v_1 = 3\pi \text{ см/с},$$

$$a_x = -5\pi^2 \text{ см/с}^2, \quad a_y = 0, \quad a_1 = 5\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\tau_1} = 0, \quad a_{n_1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau_1}^2} = 5\pi^2 \text{ см/с}^2,$$

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_1^n} = \frac{9\pi^2}{5\pi^2} = \frac{9}{5} \text{см.}$$

**Задача 1.3.** По данным уравнениям движения точки:

$$x = a\cos^2 t, \quad y = a\sin^2 t$$

найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

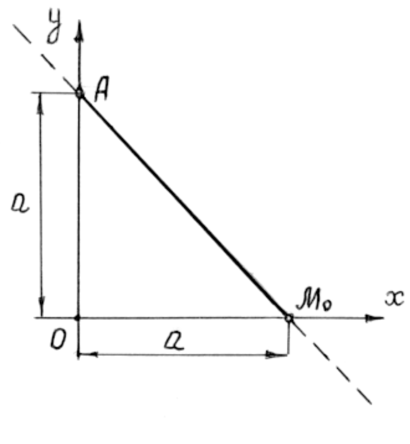


*Рис.1.16*

*Решение.* Уравнение траектории находим, сложив левые и правые части заданных уравнений друг с другом:

$$x + y = a.$$

Это уравнение прямой (рис.1.16). При $t = 0$, $x_0 = a$, $y_0 = 0$. Следовательно, движение начинается из точки $M_0$ (a; 0). С увеличением времени t координата x уменьшается, а y — увеличивается. Так как $\cos^2 t$ и $\sin^2 t$ при любом t не превышают единицу:

$$0 \le \cos^2 t \le 1; \qquad 0 \le \sin^2 t \le 1,$$

то x и y изменяются от 0 до a: $0 \le x \le a$; $0 \le y \le a$. Таким образом, траекторией движения будет лишь отрезок прямой (сплошная линия на рис.1.16).

Для нахождения закона движения точки по траектории воспользуемся выражением (1.4):

$$dS = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \sqrt{(-2a\cos t \sin t)^2 + (2a\sin t \cos t)^2}\,dt = a\sqrt{2}\sin 2t\,dt,$$

$$S = \int_0^t dS = a\sqrt{2}\int_0^t \sin 2t\,dt = -a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2t\Big|_0^t = a\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \cos 2t).$$

Точка совершает колебательное движение от $M_0$ к A и обратно.

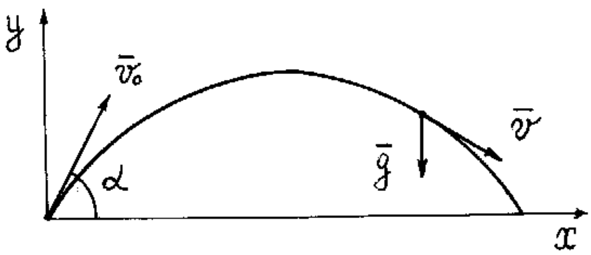


*Рис.1.17*

**Задача 1.4.** Точка движется в вертикальной плоскости xy в поле земного притяжения, т.е. в каждый момент времени имеет ускорение g (рис.1.17). Начальная скорость точки равна $\vec{v}_0$ и образует с осью x угол $\alpha$. Составить уравнения движения, определить координаты точки в наивысшем положении и вычислить радиус кривизны траектории при $t = 0$.

*Решение*. В предыдущих задачах были заданы уравнения движения, и мы находили скорость и ускорение точки в разные моменты времени. Такие задачи называют *прямыми задачами* кинематики точки. В данной задаче известно ускорение точки, а требуется определить уравнения движения. Такую задачу называют *обратной задачей* кинематики точки.

Найдем проекции ускорения точки на оси координат:

$$a_x = 0, \quad a_y = -g.$$

Так как между скоростями и ускорениями точки имеется зависимость (1.17), то, интегрируя полученные выражения, находим проекции скорости точки:

$$v_x = \int a_x dt = C_1,$$
$$v_y = \int a_y dt = -\int g dt = -gt + C_2.$$

Постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ найдем из начальных условий: при $t = 0$

$$v_{x_0} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{y_0} = v_0 \sin\alpha.$$

Подставляя эти данные в полученные выражения для проекций скоростей и полагая при этом $t = 0$, имеем:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha, \quad C_2 = v_0 \sin\alpha,$$

следовательно

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

Интегрируя $v_x$ и $v_y$, получаем уравнения движения точки:

$$x = \int v_x dt = \int v_0 \cos\alpha\, dt = v_0 t \cos\alpha + C_3,$$

$$y = \int v_y dt = \int (-gt + v_0 \sin\alpha)\, dt = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha + C_4.$$

Подставляя в полученные выражения $t = 0$ и используя начальные условия: $x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$ определяем постоянные интегрирования:

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0.$$

С учетом этих выражений уравнения движения точки приобретают вид:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - gt^2/2.$$

Полученные уравнения представляют собой параметрические уравнения параболы. Чтобы получить явное уравнение параболы, достаточно исключить параметр t из параметрических уравнений. По условию задачи этого не требуется.

Для нахождения координат наивысшей точки траектории, используем то обстоятельство, что в этой точке скорость параллельна оси x и, следовательно, ее проекция на ось y равна нулю:

$$v_{y_1} = -gt_1 + v_0 \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Подставляя найденное значение времени в уравнения движения, получаем координаты наивысшей точки (рис.3.18):

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Для определения радиуса кривизны траектории используем формулу (1.32):

$$\rho = \frac{v^2}{a^n}.$$

Находим величины, входящие в эту формулу:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0 \sin\alpha},$$

$$a = g, \qquad a^\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2t - gv_0 \sin\alpha}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0 \sin\alpha}},$$

$$a^n = \sqrt{a^2 - (a^\tau)^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^4t^2 - 2g^3tv_0 \sin\alpha + g^2v_0^2 \sin^2\alpha}{v_0^2 + g^2t^2 - 2gtv_0 \sin\alpha}}.$$

Подставляя в последнее выражение t = 0, получаем

$$a_0^n = g\cos\alpha,$$

следовательно,

$$\rho_0 = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}.$$

Однако радиус кривизны траектории в начальной точке можно было определить гораздо проще, разложив в этой точке полное ускорение g на касательную и нормальную составляющую и найдя $a_0^n$ из прямоугольного треугольника (рис.1.18).

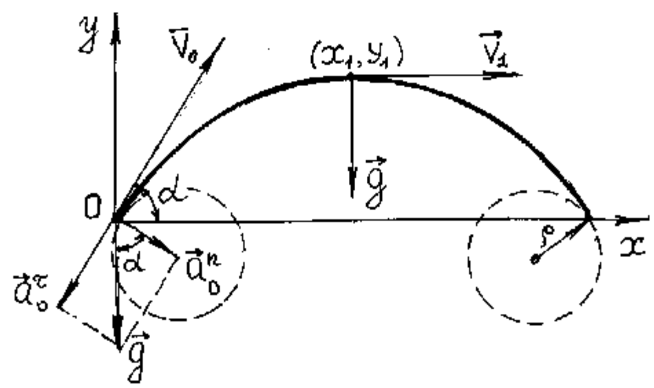



*Рис.1.18*

Заметим, что вследствие симметрии, радиус кривизны в конечной точке траектории равен радиусу кривизны в начальной точке.

## 1.6. Контрольные вопросы

**1.1.** Движение точки задано уравнением: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} - 2t\vec{k}$. Чему равен модуль скорости точки при t = 1 с?

**1.2.** Движение точки задано уравнением: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} - 2t\vec{k}$. Чему равен модуль ускорения точки при t = 1 с?

**1.3.** Движение точки задано уравнением: $\vec{r} = t\vec{j} - 2t\vec{k}$. Какова траектория движения точки и какой путь пройдет точка за t = 3 с?

**1.4.** Движение точки задано уравнением: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} - 2t\vec{k}$. Чему равно касательное ускорение точки при t = 1 с?

**1.5.** Движение точки задано уравнением: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + t\vec{j} - 2t\vec{k}$. Чему равно нормальное ускорение точки при t = 1 с?

**1.6.** Уравнения движения имеют вид: $x = 5\cos 3t + 4, \quad y = 1 - 2\cos 3t$. Каков радиус кривизны траектории?

**1.7.** Точка движется по окружности с постоянной скоростью. Имеет ли точка ускорение ?

**1.8.** На какую высоту поднимется точка, брошенная вертикально вверх с начальной скоростью $v_0$ в поле земного притяжения?

**1.9.** Какой путь пройдет точка, движущаяся по оси x в соответствии с законом $S = 5\sin 2\pi t$, за время, равное 2 с?

**1.10.** Точка движется согласно уравнениям:

$$x = 5\cos 3\pi t + 4, \quad y = 1 - 2\cos 3\pi t.$$

Чему равно нормальное ускорение точки?

**1.11.** Чему равен угол между вектором полного ускорения точки и главной нормалью к траектории, если касательное и нормальное ускорения точки равны соответственно $2\sqrt{3}$ м/с$^2$ и 2 м/с$^2$?

# 2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 2.1. Поступательное движение твердого тела

*Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению во все время движения.*

Примерами поступательно движущихся тел могут служить: вагон, перемещающийся по прямолинейному пути; кабина лифта; кабина колеса обозрения; звено AB спарника (рис.2.1).

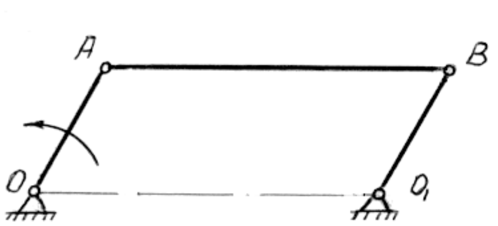



*Рис.2.1*

***Теорема.*** *При поступательном движении твердого тела все его точки имеют одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и векторно-равные в каждый момент времени скорости и ускорения.*

*Доказательство*. Пусть твердое тело совершает поступательное движение (рис.2.2). Выберем в теле произвольные точки A и B с радиус-векторами $\vec{r}_A$ и $\vec{r}_B$. По определению поступательного движения вектор $\overrightarrow{AB}$ есть вектор, постоянный по величине и направлению. Из рис.2.2 видно, что

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}. \tag{2.1}$$

Так как $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ определяет траекторию точки A, а $\vec{r}_B = \vec{r}_B(t)$ - траекторию точки B, то последняя может быть получена сдвигом траектории точки A на постоянный вектор $\overrightarrow{AB}$. Следовательно, траектории точек A и B при наложении совпадают.

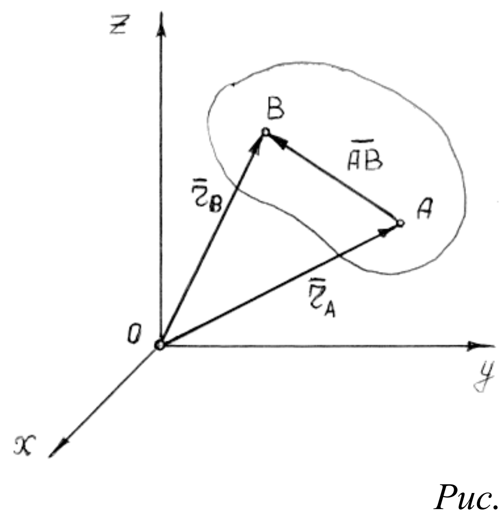



*Рис.2.2*

Продифференцируем выражение (2.1) по времени:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}.$$

Так как $\dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \vec{v}_B$ , $\dfrac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$ , $\dfrac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = 0$ (поскольку $\overrightarrow{AB} = \text{const}$) , то

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A . \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что вектор скорости поступательного движения тела можно приложить в любой точке тела. Иными словами, *вектор* $\vec{v}$ - *свободный вектор.*

При повторном дифференцировании выражения (2.1) по времени получаем:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A . \tag{2.3}$$

Доказанная теорема позволяет кинематику поступательно движущегося тела свести к кинематике одной его точки. Уравнения движения этой точки одновременно являются *уравнениями поступательного движения твердого тела:*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) . \tag{2.4}$$

## 2.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

*Вращательным называют такое движение твердого тела, при котором две точки тела остаются неподвижными во все время движения.*

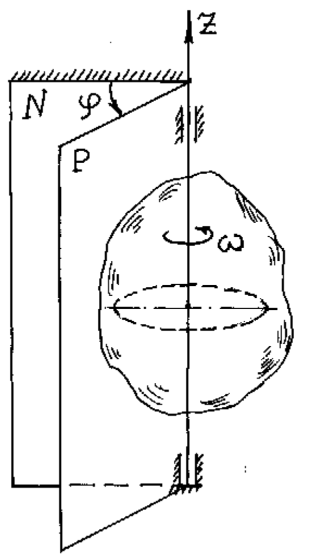



*Рис.2.3*

Прямую, проходящую через эти точки, называют осью вращения. Все точки тела описывают окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения.

Примерами вращательного движения твердого тела могут служить: движение вала, установленного в неподвижных опорах; поворот двери, вокруг оси, проходящей через ее петли; вращение кривошипа ОА (рис.2.1).

Вращение вокруг неподвижной оси – это самый распространенный вид движения в разнообразных технических устройствах.

Пусть твердое тело совершает вращательное движение вокруг оси z (рис.2.3). Через ось z проведем неподвижную плоскость N и подвижную плоскость P, жестко связанную с вращающимся телом. Угол $\varphi$ между этими плоскостями в произвольный момент времени однозначно определяет положение твердого тела относительно неподвижной системы отсчета, связанной с неподвижной плоскостью N:

$$\varphi = \varphi(t)\,. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) является *уравнением вращательного движения твердого тела.*

Условимся считать угол $\varphi$ положительным, если этот угол отсчитывается от плоскости N против часовой стрелки (глядя с конца оси z). Угол $\varphi$ измеряют в радианах, т.е. $\varphi$ - безразмерная величина.

## 2.3. Угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела

Пусть в момент времени t угол поворота был $\varphi$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ стал $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$. Отношение $\Delta\varphi$ к $\Delta t$ характеризует быстроту изменения угла поворота во времени. Это отношение называют средней угловой скоростью вращающегося тела за время $\Delta t$:

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\,. \tag{2.6}$$

Истинная угловая скорость тела – это предел, к которому стремится средняя угловая скорость при $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}\,. \tag{2.7}$$

Если $\omega > 0$, то вращение происходит в сторону увеличения угла поворота (рис.2.3), т.е. в положительном направлении (против часовой стрелки), а при $\omega < 0$ - в отрицательном направлении.

Скорость вращения измеряется в радианах в секунду ($c^{-1}$) или в оборотах в минуту. Если тело вращается со скоростью n об/мин, то угловая скорость в $c^{-1}$ подсчитывается по формуле:

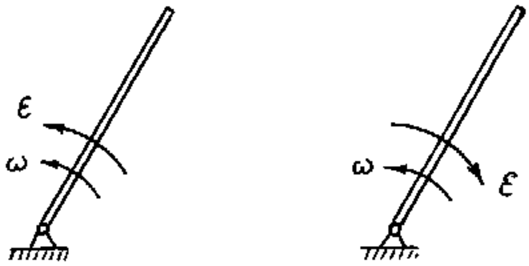
$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad \left[\frac{1}{c}\right]. \tag{2.8}$$

Зная угловую скорость $\omega$ в данный момент t и $\omega + \Delta\omega$ - в момент $t_1 = t + \Delta t$ , можно найти среднее угловое ускорение тела:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Истинное угловое ускорение тела - это предел среднего углового ускорения при $\Delta t \to 0$:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \left[\frac{1}{c^2}\right]. \tag{2.9}$$




а) б)

**Рис.2.4**

Направления угловой скорости и углового ускорения можно изображать круговыми стрелками. Если вращение ускоренное, то стрелки для $\omega$ и $\varepsilon$ имеют одинаковое направление (рис.2.4а), а если замедленное - противоположное (рис.2.4б).

## 2.4. Равномерное и равнопеременное вращение

Если угловая скорость постоянна, т.е. $\omega = \text{const}$, то вращение называют *равномерным*. В этом случае $\varepsilon = 0$, а угол поворота определяется так:

$$\varphi = \int \omega dt = \omega t + C.$$

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий: при t = 0 угол $\varphi$ равен $\varphi_0$, следовательно, $C = \varphi_0$, и уравнение равномерного вращения имеет вид:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \tag{2.10}$$

Если угловое ускорение постоянно, т.е. $\varepsilon = \text{const}$, то такое вращение называют *равнопеременным*. В этом случае

$$\omega = \int \varepsilon \, dt = \varepsilon t + C_1, \qquad (2.11)$$

$$\varphi = \int \omega dt = \int (\varepsilon \; t + C_1) \, dt = \varepsilon \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \; . \qquad (2.12)$$

При $t = 0$ $\omega = \omega_0$, $\varphi = \varphi_0$, следовательно, $C_1 = \omega_0$, $C_2 = \varphi_0$. Подставляя выражения для постоянных интегрирования в выражения (2.11) и (2.12), получаем формулы для скорости и закона движения при равнопеременном вращении тела:

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0, \qquad (2.13)$$

$$\varphi = \varepsilon \frac{t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 . \qquad (2.14)$$

## 2.5. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Определим скорость произвольной точки M тела (рис.2.5), вращающегося вокруг неподвижной оси в соответствии с уравнением: $\varphi = \varphi(t)$. Точка M перемещается по окружности радиуса R согласно закону:

$$\breve{S} = M_0 M = R\varphi, \qquad (2.15)$$

причем $M_0$ - положение точки при $t = 0$, а M - при повороте тела на угол $\varphi$.

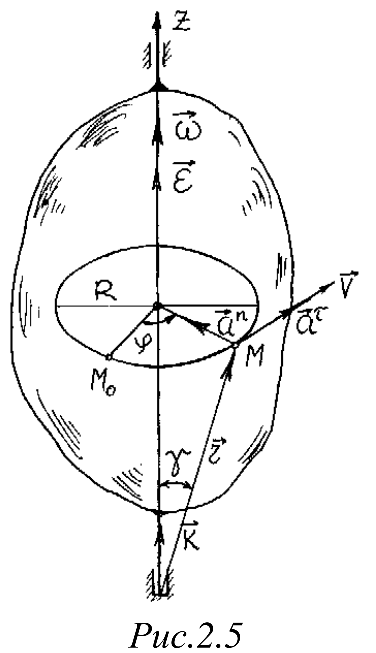



*Рис.2.5*

Движение точки M задано естественным способом: известна траектория (окружность радиуса R) и закон движения по траектории ($S = R\varphi$). Скорость точки M равна

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R\varphi)}{dt} = R\omega \qquad (2.16)$$

и направлена по касательной к окружности.

Касательное ускорение точки M равно

$$a^{\tau}=\frac{dv}{dt}=\frac{d(R\omega)}{dt}=R\varepsilon \qquad (2.17)$$

и направлено в ту же сторону, что и скорость точки, если вращение ускоренное и в противоположную - если замедленное.

Нормальное ускорение точки всегда направлено к оси вращения и определяется по формуле:

$$a^{n}=\frac{v^{2}}{\rho}.$$

Так как в данном случае $\rho = R$, а $v = \omega \cdot R$, то

$$a^{n}=R\omega^{2}. \qquad (2.18)$$

Полное ускорение точки М равно

$$a=\sqrt{(a^{\tau})^{2}+(a^{n})^{2}}=R\sqrt{\varepsilon^{2}+\omega^{4}} \qquad (2.19)$$

и направлено по диагонали параллелограмма, построенного на касательном и нормальном ускорениях как на сторонах.

## 2.6. Векторные формулы для скоростей и ускорений точек вращающегося тела

Представим угловую скорость в виде вектора $\vec{\omega}$, идущего по оси вращения, модуль которого равен $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$, а направление выбрано так, чтобы, глядя с конца вектора $\vec{\omega}$, видеть вращение тела против часовой стрелки.

В рассматриваемом случае, а именно, когда тело вращается вокруг оси z (рис.2.5), вектор угловой скорости равен

$$\vec{\omega}=\frac{d\varphi}{dt}\vec{k}, \qquad (2.20)$$

где $\vec{k}$ - орт оси z.

Точка приложения вектора $\vec{\omega}$ на оси вращения произвольна. Следовательно, $\vec{\omega}$ - *скользящий вектор*.

Вектор углового ускорения определим так:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{k}. \qquad (2.21)$$

Из формулы (2.21) видно, что вектор $\vec{\varepsilon}$ также направлен по оси вращения.

С помощью векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ легко показать характер вращательного движения: если оно ускоренное, то векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены в одну сторону (рис.2.5), а если замедленное, - то в противоположные стороны.

Покажем, что скорость произвольной точки М вращающегося тела можно определить *по формуле Эйлера*:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad (2.22)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки М (рис.2.5).

Действительно, модуль вектора скорости из (2.22) равен

$$v = \omega r \sin\gamma = \omega R,$$

что совпадает с полученным выше выражением (2.16).

Направлен вектор $\vec{v}$ перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$, т.е. по касательной к окружности радиуса R в сторону вращения тела (рис.2.5). Следовательно, формула Эйлера справедлива.

Вектор ускорения точки М найдем как производную от $\vec{v}$ по t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (2.23)$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, а $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, имеем:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}. \qquad (2.24)$$

Первое слагаемое в этой формуле - касательное ускорение точки М, а второе - нормальное:

$$\vec{a}^{\tau} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}, \qquad (2.25)$$

$$\vec{a}^{n} = \vec{\omega}\times\vec{v}. \qquad (2.26)$$

Модули этих ускорений вычисляются по формулам:

$$a^{\tau} = \varepsilon\, r \sin\gamma = \varepsilon R\,, \tag{2.27}$$

$$a^{n} = \omega\, v \sin 90^{\circ} = \omega^{2} R\,. \tag{2.28}$$

Отметим, что модули и направления этих ускорений совпадают с полученными выше (см. формулы (2.17) и (2.18)), что также удостоверяет справедливость формулы Эйлера.

Таким образом, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси ускорение точки этого тела равно геометрической сумме касательного и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^{n}\,. \tag{2.29}$$

Модуль ускорения $\vec{a}$ определяется по формуле (2.19).

## 2.7. Решение задач

**Задача 2.1.** Диск вращается вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной плоскости рисунка (рис.2.6), согласно уравнению: $\varphi = 3t^2$. Определить скорость и ускорение точки M диска, отстоящей от оси вращения на расстоянии 10 см в момент времени t =2 с.

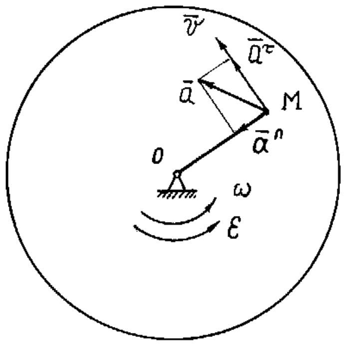


*Рис.2.6*

*Решение.* Определим по формулам (2.7) и (2.9) угловую скорость и угловое ускорение диска:

$$\omega = 6t\ c^{-1}, \qquad \varepsilon = 6\ c^{-2}.$$

По формуле (2.16) определяем скорость точки M диска:

$$v = \omega \cdot OM = 6t \cdot 10,\ \text{при}\ t = 2\ \text{с}\quad v = 120\ \text{см/с}.$$

По формулам (2.17) и (2.18) найдем $a^{\tau}$ и $a^{n}$:

$$a^{\tau} = \varepsilon \cdot OM = 6 \cdot 10 = 60\ \text{см/с}^2\,;\ a^{n} = \omega^2\, OM = 12^2 \cdot 10 = 1440\ \text{см/с}^2.$$

Полное ускорение точки равно

$$a = \sqrt{(a^{\tau})^2 + (a^n)^2} \approx 1441{,}2 \text{ см/с}^2.$$

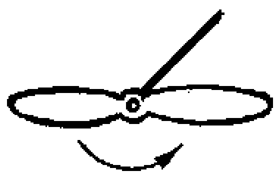


*Рис.2.7*

**Задача 2.2.** С момента выключения мотора пропеллер самолета**,** вращавшийся с угловой скоростью, соответствующей n = 1200 об/мин, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера (рис.2.7) равнозамедленным?

*Решение*. При равнозамедленном вращении угол поворота пропеллера и его угловая скорость, согласно (2.13) и (2.14), определяются по формулам:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \varepsilon \frac{t^2}{2}, \qquad (2.30)$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t \qquad (2.31)$$

Момент выключения мотора примем за $t_0 = 0$ , т.е. за начало отсчета времени. При $t_0$

$$\varphi_0 = 0, \quad \omega_0 = \frac{\pi n}{30} = 40\pi \text{ с}^{-1}.$$

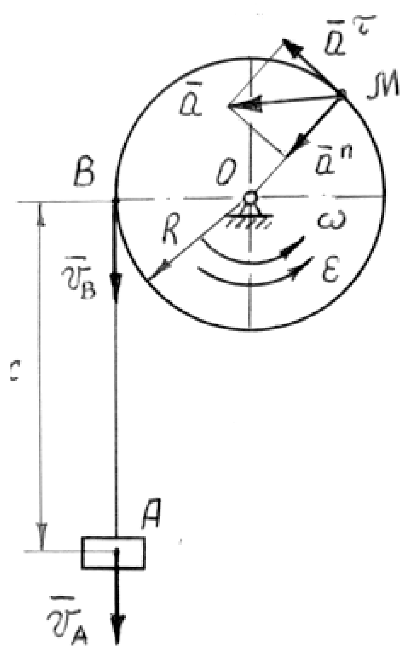



*Рис.2.8*

В момент $t_1$ остановки пропеллера его угловая скорость равна нулю, а угол поворота в радианах равен произведению $2\pi$ на число оборотов:

$$\omega_1 = 0, \quad \varphi_1 = 2\pi \cdot 80 = 160\pi.$$

Из уравнений (2.30) и (2.31) после подстановки в них $\varphi_0$ , $\omega_0$, $\omega_1$ и $\varphi_1$ получаем:

$$t_1 = 8 \text{ с}.$$

**Задача 2.3.** Вал радиуса R = 10

см приводится во вращение гирей А, привешенной к нему на нити (рис.2.8). Движение гири выражается уравнением:

$$x = 100\,t^2,$$

где x - расстояние от гири до места схода нити в сантиметрах, t - время в секундах. Определить в произвольный момент t угловую скорость $\omega$ и угловое ускорение $\varepsilon$ вала, а также полное ускорение точки на поверхности вала.

*Решение.* Определим скорость гири А (рис.2.8):

$$v_A = \frac{dx}{dt} = 200t\ \text{см/с}.$$

Скорость точки В схода нити с поверхности вала равна скорости точки А:

$$v_B = v_A = 200t\ \text{см/с}.$$

Так как точка В принадлежит не только нити, но и валу, то ее скорость равна

$$v_B = \omega \cdot R.$$

Приравнивая друг другу левые части двух последних выражений, получаем:

$$\omega = \frac{v_B}{R} = \frac{200t}{10} = 20t\ \text{с}^{-1}.$$

Угловая скорость вала направлена против часовой стрелки, что определяется направлением скорости точки В.

Вычислим угловое ускорение вала:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(20t) = 20\ \text{с}^{-2}.$$

Так как $\omega$ и $\varepsilon$ имеют одинаковые знаки, то вращение ускоренное.

Найдем касательное и нормальное ускорения точки М:

$$a^{\tau} = \varepsilon R = 20 \cdot 10 = 200\ \text{см/с}^2, \quad a^{n} = \omega^2 R = (20t)^2 \cdot 10 = 4000t^2\ \text{см/с}^2.$$

Полное ускорение точки М равно:

$$a = \sqrt{(a^{\tau})^2 + (a^{n})^2} = 200\sqrt{1 + 400t^4} \text{ см/с}^2 .$$

**Задача 2.4.** От шкива 1 электромотора передается вращение с помощью бесконечного ремня на шкив 2 станка; $r_1$ = 75 см, $r_2$ = 30 см (рис.2.9). После пуска электромотора ускорение шкива 1 постоянно и равно $\varepsilon_1$= 0,4π $с^{-2}$. Пренебрегая скольжением ремня по шкивам, определить через сколько времени шкив 2 будет делать 300 об/мин.

*Решение.* Шкив 1 по условию задачи вращается равноускоренно. Следовательно, его угловая скорость равна

$$\omega_1 = \varepsilon_1 t = 0{,}4\pi t .$$

Так как скорости $v_1$ и $v_2$ точек $M_1$ и $M_2$ , принадлежащих ремню, равны между собой, то угловые скорости $\omega_1$ и $\omega_2$ шкивов обратно пропорциональны их радиусам:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} . \qquad (2.31)$$

Действительно, так как скорости $v_1 = \omega_1 r_1$ и $v_2 = \omega_2 r_2$ равны друг другу, то $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, откуда и следует пропорция (2.31).

Из (2.31) получаем:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = 0{,}4\pi t \frac{75}{30} = \pi t \text{ с}^{-1} .$$

В искомый момент $t_1$ число оборотов шкива 2 равно n = 300 об/мин. В этот момент его угловая скорость равна

$$\omega_2 = \frac{\pi n}{30} \text{ с}^{-1} .$$

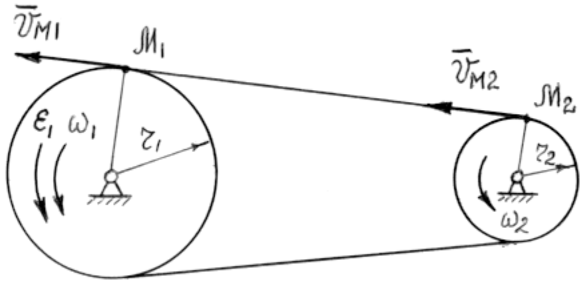



Рис.2.9

В момент $t_1$ правые части двух последних выражений равны друг другу:

$$\pi t_1 = \frac{\pi n}{30} ,$$

откуда

$t_1 = 10$с.

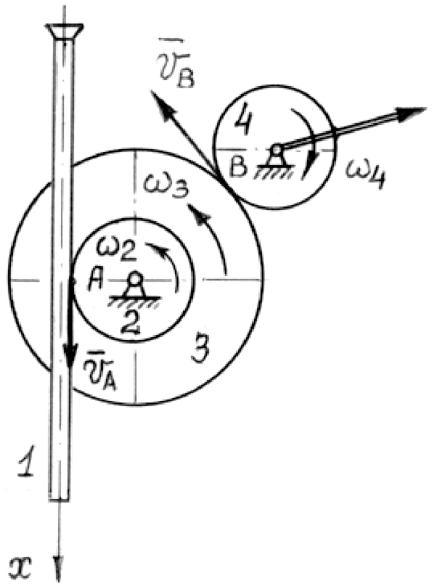



Рис. 2.10

**Задача 2.5.** В механизме стрелочного индикатора (рис.2.10) движение от рейки мерительного штифта 1 передается шестерне 2, на оси которой укреплено зубчатое колесо 3, сцепляющееся с шестерней 4, несущей стрелку. Определить угловую скорость стрелки, если движение штифта задано уравнением x = a sin(kt), и радиусы зубчатых колес соответственно равны $r_2$ , $r_3$ и $r_4$ .

*Решение*. Определяем скорость точки A рейки 1:

$$v_A = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(a \sin kt) = ak \cos kt.$$

Так как точка A принадлежит и колесу 2, то

$$v_A = \omega_2 r_2 ,$$

следовательно,

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{ak}{r_2}\cos kt.$$

Колесо 3 жестко связано с колесом 2, поэтому их угловые скорости одинаковы:

$$\omega_3 = \omega_2 = \frac{ak}{r_2}\cos kt.$$

Скорость точки B контакта колес 3 и 4, составляющих зубчатую передачу, равна

$$v_B = \omega_3 r_3 = \omega_4 r_4 ,$$

следовательно,

$$\frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{r_4}{r_3},$$

откуда угловая скорость стрелки индикатора, насаженой на ту же ось, что и колесо 4, равна

$$\omega_4 = \omega_3 \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_3}{r_2 r_4} ak \cos kt \, .$$

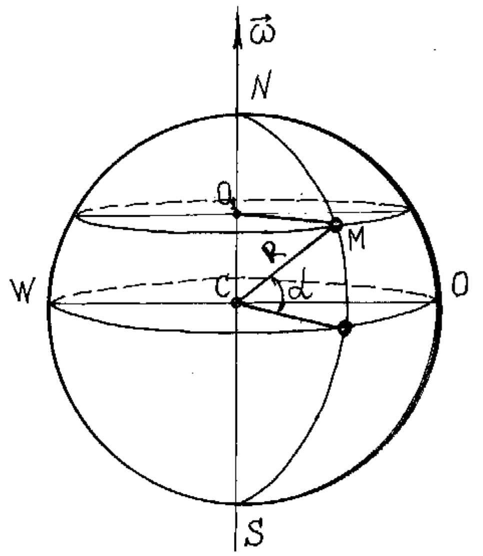



*Рис.2.14*

**Задача 2.6.** Определить скорость точек поверхности Земли на экваторе и на широте Москвы (55°45′) при вращении Земли вокруг своей оси. Средний радиус Земли равен R = 6371 км, cos55°45′=0,5628.

*Решение.* Земля совершает полный оборот вокруг своей оси за 24 часа (24·60·60 = 86400с). Следовательно, угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси равна

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 727 \cdot 10^{-7} \, c^{-1} \, .$$

Расстояние от точки М земной поверхности на широте Москвы до оси вращения равно (рис.2.11)

$$MO_1 = R \cos\alpha = 6371 \cdot 0{,}5628 = 3585{,}6 \text{ км}$$

Скорость точки М равна $v_M = \omega \cdot MO_1 = 261$ м/с.

Скорость точки земной поверхности на экваторе равна

$$v \ = \omega \cdot R = 463 \text{ м/с.}$$

## 2.8. Контрольные вопросы

**2.1.** Тело вращается согласно уравнению: $\varphi = 4\sin(3\pi t)$. Через какое время после начала движения направление вращения изменится на противоположное?

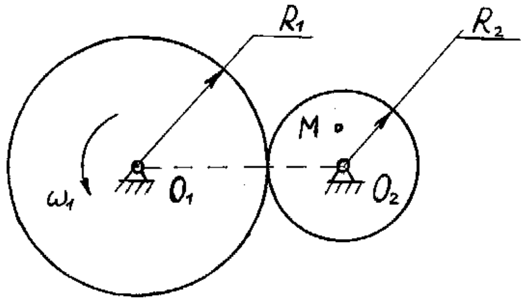



*Рис.2.12*

**2.2.** Тело вращается согласно уравнению: $\varphi = 4\sin(3\pi t)$. Чему равна угловая скорость тела при $t = 1/2$ с?

**2.3.** Зубчатые колеса 1 и 2 находятся в зацеплении (рис.2.12). Определить скорость точки М колеса 2 в момент $t_1 = 3$ с, если $R_1$ = 10 см, $R_2$ = 5 см, $O_2M$ = 3 см, $\omega_1 = 2t$ $c^{-1}$.

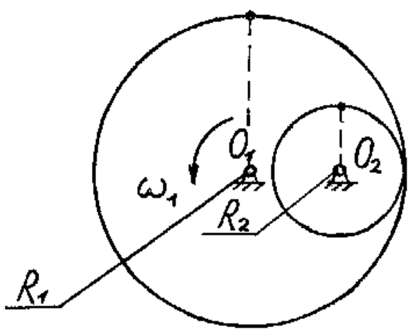



*Рис.2.13*

**2.4.** По данным задачи 2.3 определить полное ускорение точки М.

**2.5.** Зубчатые колеса находятся в зацеплении (рис.2.13). Определить скорость точки обода малого колеса , если $R_1$ = 20 см, $R_2$ = 5 см, $\omega_1 = 4t^2$ $c^{-1}$.

**2.6.** По данным задачи 2.5 определить полное ускорение точки обода малого колеса .

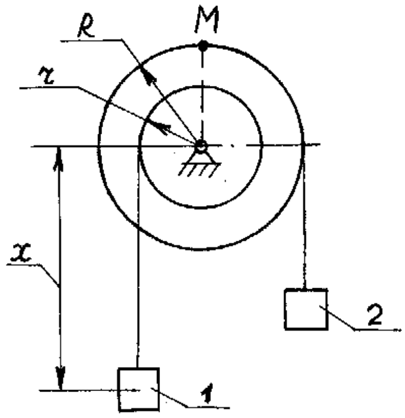


*Рис.2.14*

**2.7.** Груз 1 (рис.2.14) перемещается согласно закону: $x = 5t^2$. Определить скорость и ускорение груза 2 в момент $t_1 = 2$ с , если R = 80 см, r = 40 см.

**2.8.** Одинаковы ли ускорения груза 2 (рис.2.14) и точки М шкива?

# 3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Плоскопараллельным (или плоским) движением твердого тела называют такое движение, при котором все точки тела описывают плоские траектории, лежащие в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.*

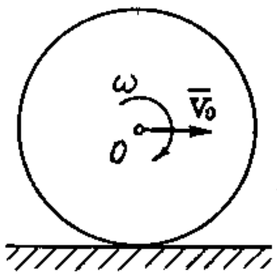



*Рис.3.1*

Плоскопараллельное движение совершает, например, колесо, катящееся по прямолинейному рельсу (рис.3.1) или шатун AB кривошипно-шатунного механизма (рис.3.2).

Частным случаем плоского движения является вращение тела вокруг неподвижной оси, поскольку все точки тела описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях.

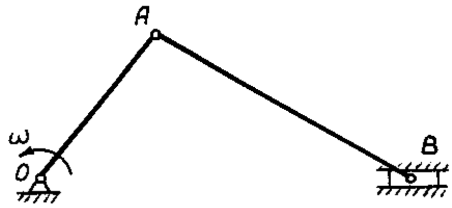



*Рис.3.2*

Поступательное движение тела является частным случаем плоскопараллельного только тогда, когда траекториями его точек служат плоские кривые. Отметим, что при поступательном движении тела траекториями точек могут быть и пространственные кривые. Тогда поступательное движение не является частным случаем плоскопараллельного.

### Уравнения плоскопараллельного движения

Пусть твердое тело (рис.3.3) совершает плоско-параллельное движение, причем все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных неподвижной плоскости N. Выделим в этом теле отрезок AB, перпендикулярный плоскости N. При плоскопараллельном движении тела отрезок AB остается параллельным самому себе и, следовательно, совершает поступательное движение. Все

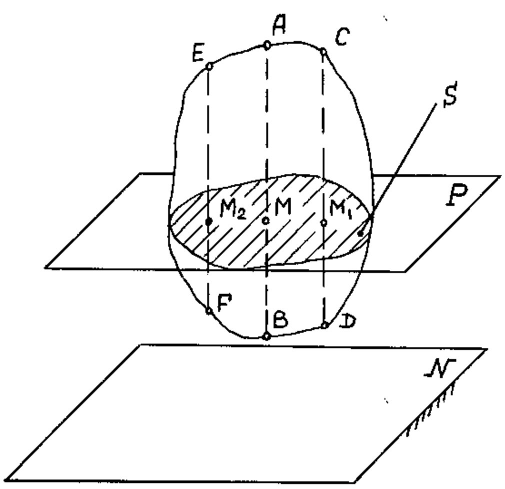



*Рис.3.3*

точки этого отрезка имеют одинаковые траектории и векторно равные скорости и ускорения. Следовательно, для описания движения отрезка AB достаточно знать движение одной его точки, например, точки M.

Рассматриваемое тело можно представить как совокупность отрезков CD, EF и др. (рис.3.3), перпендикулярных плоскости N, движение которых описывается движением точек $M_1$ , $M_2$ и др., лежащих в сечении S, параллельном неподвижной плоскости N.

Таким образом, изучение плоскопараллельного движения твердого тела сводится к изучению движения плоской фигуры (сечения S) в своей плоскости.

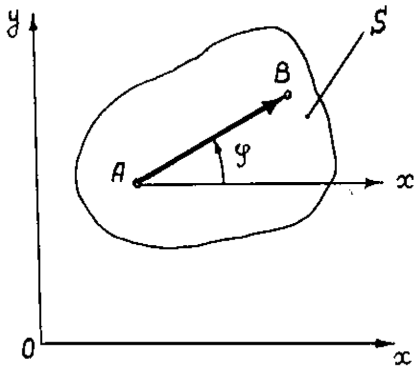



*Рис.3.4*

Рассмотрим движение плоской фигуры S в ее плоскости (рис.3.4). Положение фигуры в неподвижной плоскости xoy определяется положением любого отрезка, например, отрезка AB этой фигуры. В свою очередь, положение отрезка AB на плоскости xoy можно задать координатами x, y одной из его точек (например, точки A) и углом φ, который составляет вектор $\overrightarrow{AB}$ с осью x.

Угол φ считается положительным, если поворот оси x вокруг точки A до совмещения с вектором $\overrightarrow{AB}$ происходит против часовой стрелки.

При движении тела переменные $x_A, y_A, \varphi$ являются функциями времени t. Следовательно, уравнения

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t), \\ y_A &= y_A(t), \qquad (3.1) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned}$$

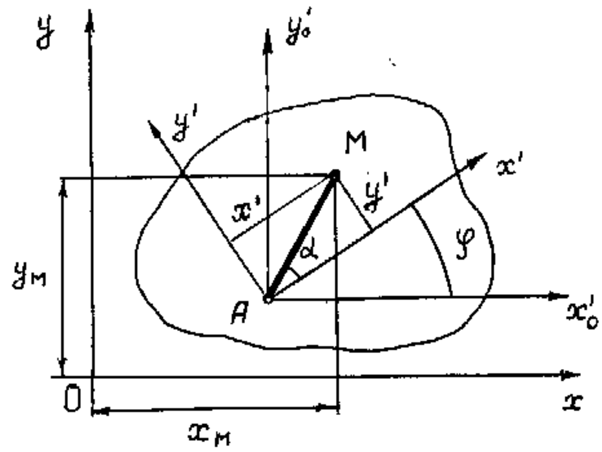



*Рис.3.5*

являются *уравнениями плоскопараллельного движения твердого тела*.

Зная уравнения (3.1) движения фигуры S, можно записать уравнения движения любой ее точки, например, точки M (рис.3.5):

$$x_M = x_A + AM\cos(\alpha + \varphi),$$
$$y_M = y_A + AM\sin(\alpha + \varphi)$$

или

$$x_M = x_A + AM\cos\alpha\cos\varphi - AM\sin\alpha\sin\varphi,$$
$$y_M = y_A + AM\sin\alpha\cos\varphi + AM\cos\alpha\sin\varphi. \quad (3.2)$$

В подвижной системе $x'Ay'$, жестко связанной с фигурой S, точка M имеет координаты $x' = AM\cos\alpha$, $y' = AM\sin\alpha$. Учитывая эти выражения, из (3.2) получаем уравнения движения произвольной точки M плоской фигуры:

$$x_M = x_A + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y_M = y_A + y'\cos\varphi + x'\sin\varphi. \quad (3.3)$$

**Пример 3.1.** Записать уравнения движения звена AB (рис.3.6), если OA = r, AB = $\ell$ и угловая скорость кривошипа OA постоянна и равна $\omega_{OA}$. В начальный момент времени звенья OA и AB располагались на положительной части оси x.

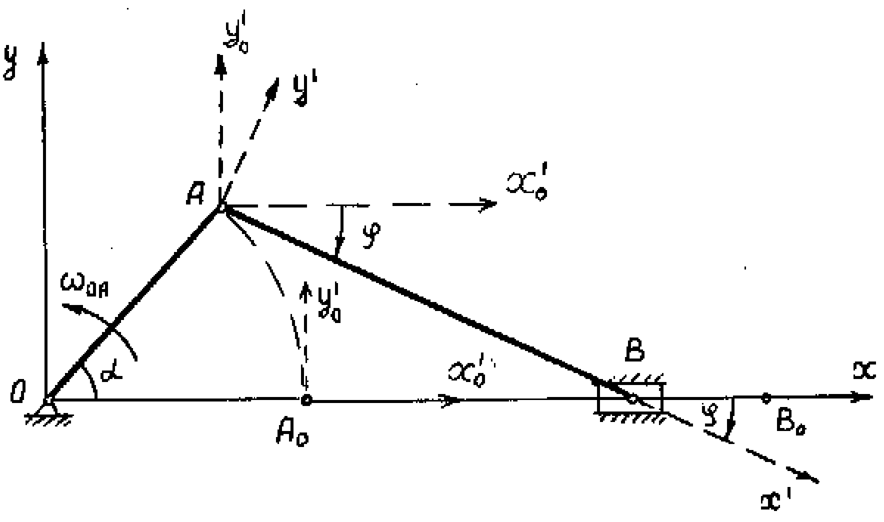



*Рис.3.6*

*Решение.* В произвольный момент времени t угол поворота кривошипа равен

$$\alpha = \omega_{OA} t. \quad (3.4)$$

При этом

$$x_A = OA\cos\alpha,\ \ y_A = OA\sin\alpha$$

или

$$x_A = r\cos(\omega_{OA}t),$$
$$y_A = r\sin(\omega_{OA}t).$$

Для получения третьего уравнения ( $\varphi = \varphi(t)$ ) свяжем со звеном AB подвижную систему $x'Ay'$, начальное положение которой - $x'_0A_0y'_0$ -показано на рис.3.6. Угол $\varphi$ - это угол между осями $x'_0$ и $x'$. В данном случае этот угол отрицателен, поскольку для совмещения оси $x'_0$ с осью $x'$ необходимо повернуть ось $x'_0$ по часовой стрелке. Для определения величины угла $\varphi$ рассмотрим треугольник OAB. В этом треугольнике угол OBA равен углу $\varphi$. По теореме синусов имеем:

$$\frac{OA}{\sin\varphi} = \frac{AB}{\sin\alpha},$$

отсюда

$$\sin\varphi = \frac{OA\sin\alpha}{AB} = \frac{r\sin(\omega_{OA}t)}{\ell}. \qquad (3.5)$$

Таким образом, уравнения движения звена AB имеют вид:

$$x_A = r\cos(\omega_{OA}t),$$
$$y_A = r\sin(\omega_{OA}t),$$
$$\varphi = -\arcsin\frac{r\sin(\omega_{OA}t)}{\ell}.$$

## Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное

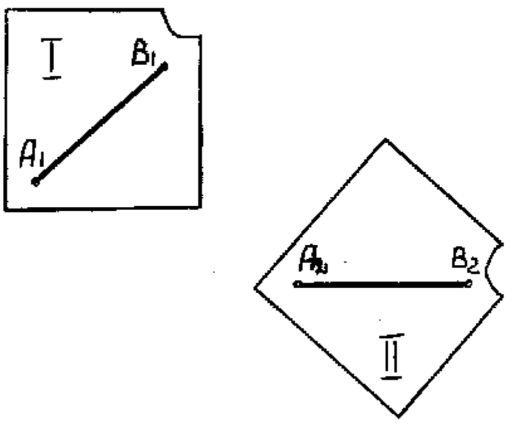



*Рис.3.7*

Пусть известны два положения плоской фигуры - I и II - в моменты времени $t_1$ и $t_2$ (рис.3.7). Как в действительности происходило перемещение фигуры из положения I в положение II – мы не знаем. Но это перемещение можно осуществить с помощью двух движений: поступательного с выбранной точкой (полюсом) и вращательного вокруг этого полюса.

Выберем в качестве полюса точку A. Тогда, поступательно перемещая фигуру, совмещаем $A_1$ с $A_2$ (рис.3.8), а затем поворачиваем ее вокруг $A_2$ на угол $\varphi$ до совмещения $B_1'$ с $B_2$. При этом фигура из положения I перейдет в положение II. Поступательная часть плоскопараллельного движения описывается уравнениями

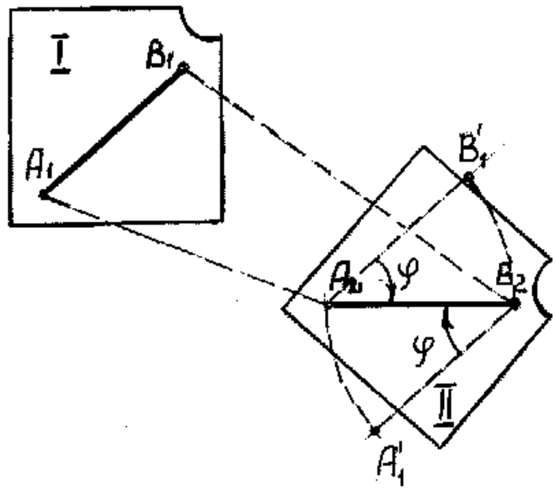


Рис.3.8

$$x_A = x_A(t),$$
$$y_A = y_A(t),$$

а вращательная часть – уравнением

$$\varphi = \varphi(t).$$

За полюс можно принять любую точку фигуры. Если за полюс принять точку B, то уравнения, описывающие поступательную часть движения, станут иными:

$$x_B = x_B(t),$$
$$y_B = y_B(t),$$

а уравнение вращательного движения останется прежним:

$$\varphi = \varphi(t),$$

поскольку, как видно из рис.3.8, ни величина угла $\varphi$, ни направление поворота не изменятся. Следовательно, *угол поворота не зависит от выбора полюса.*

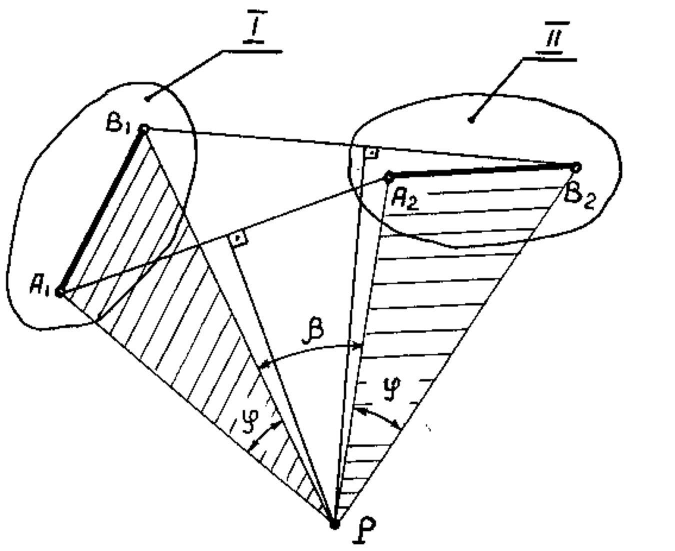
Таким образом, *плоскопараллельное движение твердого тела можно представить как совокупность двух движений: поступательного с выбранным полюсом и вращательного вокруг этого полюса.*

Однако такое представление плоского движения не является единственно возможным. В следующем параграфе будет показано, что плоское движение в каждый момент времени можно представить как одно вращение вокруг некоторого центра.

## Теорема о центре конечного вращения

Докажем следующую **теорему**: *любое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно осуществить одним поворотом вокруг некоторого центра P, называемого центром конечного поворота.*

Пусть положение I фигуры определяется отрезком $A_1B_1$, а положение II – отрезком $A_2B_2$ (рис.3.9). Докажем, что одним поворотом вокруг центра P, находящегося в точке пересечения двух перпендикуляров, проведенных к отрезкам $A_1A_2$ и $B_1B_2$ через их середины, фигуру можно переместить из положения I в положение II. Для этой цели докажем равенство углов $A_1PB_1$ и $A_2PB_2$.




Треугольники $A_1B_1P$ и $A_2B_2P$ равны по трем равным сторонам. В самом деле, $A_1B_1 = A_2B_2$ , так как это один и тот же отрезок в двух разных положениях, а $A_1P = A_2P$ и $B_1P = B_2P$ по свойству перпендикуляров, проведенных через середины отрезков. Следовательно,

$$\angle A_1PB_1 = \angle A_2PB_2 = \varphi.$$

Поворачивая отрезок $A_1P$ на угол $\varphi + \beta$, совмещаем точку $A_1$ с точкой $A_2$ , а поворачивая отрезок $B_1P$ на такой же угол $\beta + \varphi$, совмещаем точку $B_1$ с точкой $B_2$ .Таким образом, путем одного поворота вокруг центра P на угол $\varphi + \beta$ плоскую фигуру из положения I можно переместить в положение II, что и требовалось доказать.

Если рассматривать два бесконечно близких положения фигуры, т.е. устремить $\Delta t \to 0$, то центр конечного поворота превращается в *мгновенный центр вращения*, и плоскопараллельное движение тела можно представить в данный момент времени как одно мгновенное вращение вокруг этого центра.

## Определение скоростей точек плоской фигуры

Ниже описаны 4 способа определения скоростей точек плоской фигуры.

***3.4.1. Определение скорости по уравнениям движения точки.*** Дифференцируя уравнения (3.3), получаем:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}_M = \dot{x}_A - x'\dot{\varphi}\sin\varphi - y'\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ v_y &= \dot{y}_M = \dot{y}_A - y'\dot{\varphi}\sin\varphi + x'\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Этот способ удобен тем, что дает аналитические выражения для скорости точки как функции времени. Иными словами, скорость можно определить в любой момент времени.

**Пример 3.2**. Определить проекции скорости точки М, лежащей в середине шатуна АВ (рис.3.6), на указанные оси координат. Все данные те же, что и в примере 3.1.

*Решение.* Составляем уравнения движения точки М, базируясь на уравнениях (3.3) и учитывая, что $x' = \ell/2$, $y' = 0$:

$$\begin{aligned} x_M &= r\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\cos\varphi, \\ y_M &= r\sin\alpha + \frac{\ell}{2}\sin\varphi. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= -r\dot{\alpha}\sin\alpha - \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y}_M &= r\dot{\alpha}\cos\alpha + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Входящие в эти выражения производные от $\alpha$ и $\varphi$ вычисляем, дифференцируя (3.4) и (3.5) по времени:

$$\dot{\alpha} = \omega_{OA}\ , \quad \dot{\varphi} = \frac{r\omega_{OA}\cos\alpha}{\ell\cos\varphi}\,. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.8), получаем проекции скорости точки M на оси координат:

$$\dot{x}_M = -r\,\omega_{OA}\sin\alpha\left(1+\frac{r\cos\alpha}{2\ell\cos\varphi}\right),$$

$$\dot{y}_M = \frac{3}{2}r\,\omega_{OA}\cos\alpha\,.$$

***3.4.2. Определение скорости по векторной формуле.*** Из рис.3.10 имеем:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}\,. \tag{3.10}$$

Дифференцируя (3.10), получим:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$$

или

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}\,, \tag{3.11}$$

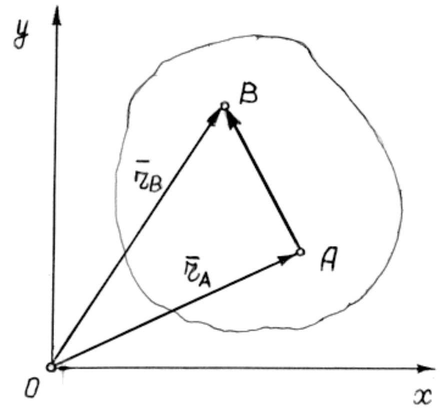



*Рис.3.10*

где $\vec{v}_{BA} = \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$. Чтобы раскрыть это выражение, вспомним, что плоскопараллельное движение можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений (см. параграф 3.1). Базируясь на таком представлении, интерпретируем формулу (3.10) так: $\vec{v}_A$ - это та скорость, которую приобретает точка B при поступательном движении фигуры

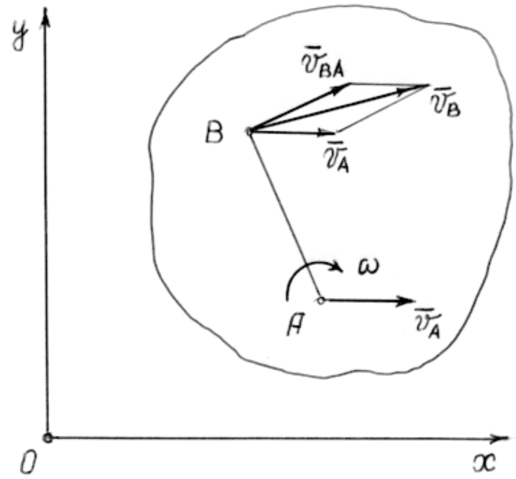



*Рис.3.11*

вместе с полюсом А, а $\vec{v}_{BA} = \dfrac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$ - это скорость, которую получает точка В при вращении фигуры вокруг полюса А, следовательно, согласно (2.22)

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}. \qquad (3.12)$$

*Скорость* $\vec{v}_{BA}$ *называют вращательной составляющей скорости точки В.*

С учетом (3.12) векторная формула (3.11) для определения скорости точки плоской фигуры приобретает вид:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}. \qquad (3.13)$$

Вращательная скорость $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ направлена перпендикулярно отрезку АВ (рис.3.11) и по величине равна

$$v_{BA} = \omega \cdot AB. \qquad (3.14)$$

**Пример 3.3.** Определить с помощью векторной формулы (3.11) скорость ползуна В кривошипно-шатунного механизма при следующих данных: OA = AB = 20 см; $\omega_{OA}$ = 5 $c^{-1}$ ; $\varphi$ = 60° (рис.3.12).

*Решение.* Принимаем точку А за полюс и определяем ее скорость: $v_A = \omega_{OA} \cdot OA$ = 100 см/с.

Вектор скорости точки А направлен перпендикулярно отрезку ОА (рис.3.12).

Вектор $\vec{v}_{BA}$, входящий в формулу (3.9), перпендикулярен отрезку АВ, но заранее неизвестно в какую сторону он направлен. Предположим, что он направлен так, как показано на рис.3.12. Если предположительное направление окажется неверным, то величина этого вектора в ходе решения задачи

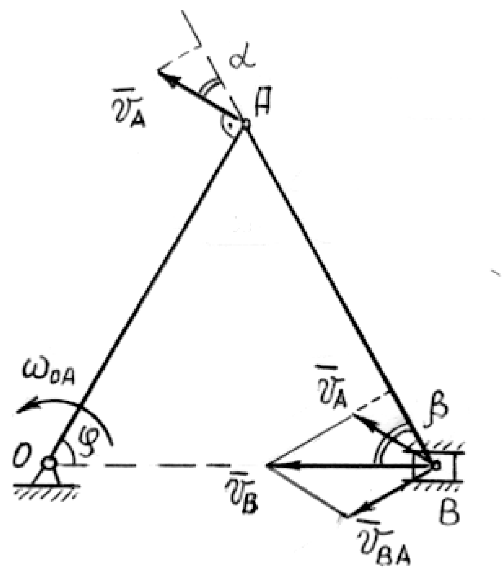



*Рис. 3.12*

получится отрицательной и, следовательно, правильным направлением будет противоположное.

Запишем выражение (3.11) в проекциях на оси x и y, считая (предположительно), что скорость точки B направлена от B к O:

$$-v_B = -v_A \cos 30^\circ - v_{BA} \cos 30^\circ \ ,$$

$$0 = v_A \sin 30^\circ - v_{BA} \sin 30^\circ \ .$$

Из этих уравнений получаем:

$$v_{BA} = v_A \ , \quad v_B = v_A \sqrt{3} = 100\sqrt{3} \text{ см/с}$$

Поскольку $v_{BA}$ и $v_B$ получились положительными, предположительное направление векторов $\vec{v}_{BA}$ и $\vec{v}_B$ оказалось истинным.

***3.4.3. Определение скорости с помощью мгновенного центра скоростей.*** *Мгновенным центром скоростей (МЦС) называют точку плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.*

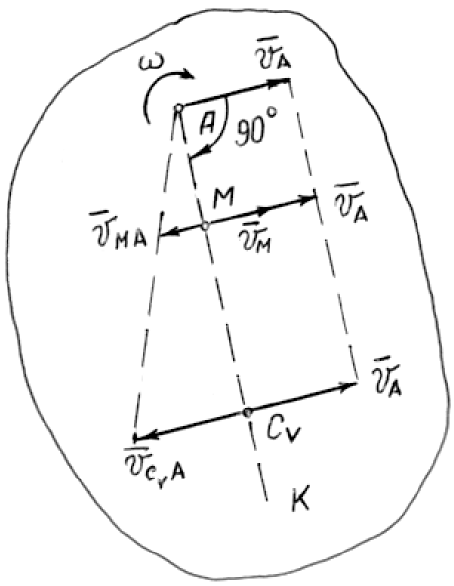



*Рис. 3.13*

Покажем, что при непоступательном движении плоской фигуры в ее плоскости существует единственная точка, скорость которой в данное мгновение равна нулю. Пусть задана скорость $\vec{v}_A$ некоторой точки A плоской фигуры и угловая скорость ω вращения этой фигуры (рис.3.12). Повернем вектор $\vec{v}_A$ вокруг точки A на 90° в направлении ω и получим луч AK. Возьмем на этом луче произвольную точку M. По формуле (3.11) скорость этой точки равна

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \,.$$

Векторы $\vec{v}_M$ и $\vec{v}_{MA}$ направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, на луче AK найдется такая точка $C_V$, для которой

$$\left|\vec{v}_{C_vA}\right| = \left|\vec{v}_A\right|. \qquad (3.15)$$

и

$$\vec{v}_{C_v} = \vec{v}_A + \vec{v}_{C_vA} = 0\,.$$

Положение точки $C_V$ на луче АК можно определить с помощью (3.15):

$$\omega \cdot AC_v = v_A\,,$$

отсюда

$$AC_v = \frac{v_A}{\omega}\,. \qquad (3.16)$$

Точка $C_v$ является единственной в данный момент времени точкой плоской фигуры, скорость которой равна нулю, поскольку только на луче АК вектор полюсной скорости и вектор вращательной скорости идут по одной прямой и притом в противоположные стороны. Для любой другой точки плоской фигуры указанные два вектора образуют угол, отличный от 180° и поэтому не могут сократиться.

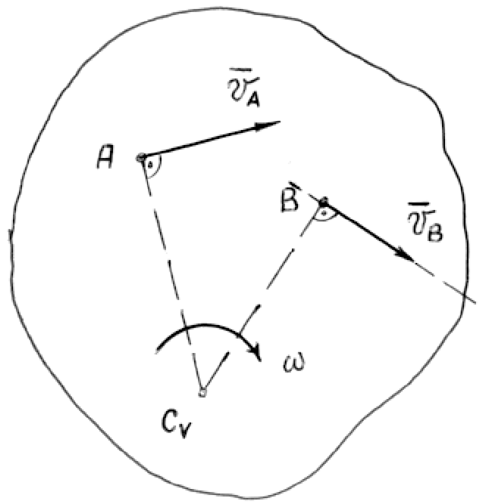



*Рис. 3.14*

Мгновенный центр скоростей совпадает с мгновенным центром вращения (см. параграф 3.3).

Знание МЦС значительно упрощает определение скоростей точек плоской фигуры в данный момент времени. Поэтому важно уметь находить положение МЦС. Покажем некоторые способы нахождения МЦС и определения скоростей точек с помощью МЦС.

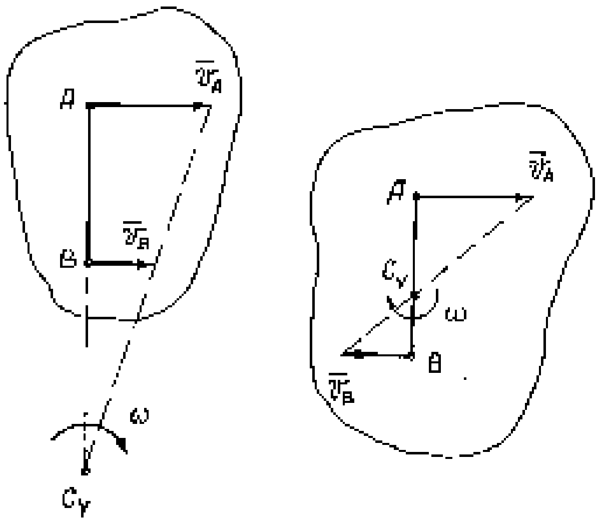
1. Если дана скорость $\vec{v}_A$ точки А плоской фигуры и линия действия вектора скорости точки В этой же фигуры (рис.3.14), то МЦС лежит в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к направлениям скоростей в точках А и В. Зная положение МЦС (точка $C_v$), легко определить угловую скорость вращения фигуры, а с ее помощью величину и направление скорости точки В:

$$\omega = \frac{v_A}{AC_V}\quad,\quad v_B = \omega \cdot BC_V\,.$$

Направление $\vec{v}_B$ должно быть согласовано с направлением $\omega$.

Скорости точек плоской фигуры прямо пропорциональны расстояниям до МЦС:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AC_V}{BC_V}. \qquad (3.17)$$




*а)* *б)*

*Рис.3.15*

2. Если известны скорости двух точек плоской фигуры и они параллельны друг другу (рис.3.15), причем векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ перпендикулярны отрезку AB, то МЦС находится в точке пересечения линии AB с линией, соединяющей концы векторов $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$. Угловая скорость и расстояние $AC_V$ или $BC_V$ рассчитываются по формулам:

$$\omega = \frac{v_A}{AC_V} = \frac{v_B}{BC_V} = \frac{v_A - v_B}{AB}, \qquad (3.18)$$

$$\omega = \frac{v_A}{AC_V} = \frac{v_B}{BC_V} = \frac{v_A + v_B}{AB}, \qquad (3.19)$$

причем формула (3.18) - для случая *а*, изображенного на рис.3.15, а формула (3.19) - для случая *б*.

3. Если скорости двух произвольных точек плоской фигуры в некоторый момент времени равны по величине и направлению (рис.3.16), то мгновенный центр скоростей не существует, и фигура совершает *мгновенно поступательное движение* ($\omega = 0$).

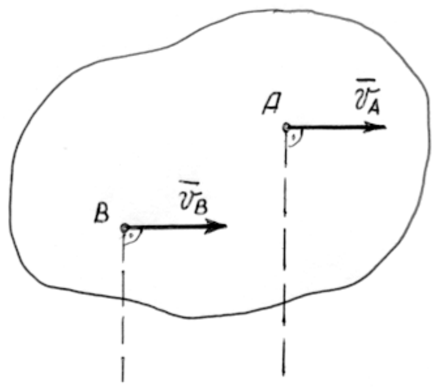
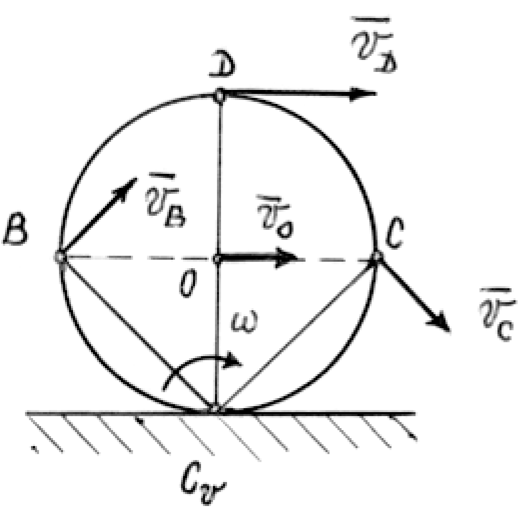



*Рис.3.16*

При мгновенно поступательном движении *скорости всех точек одинаковы, а ускорения не одинаковы,* чем и отличается мгновенно поступательное движение от поступательного.

4. Если известна скорость какой-либо точки фигуры и угловая скорость этой фигуры, то положение мгновенного центра скоростей определяется по формуле (3.16).

5. В некоторых случаях положение МЦС известно из условия задачи. Например, мгновенный центр скоростей колеса, катящегося без скольжения по рельсу, лежит в точке касания колеса с рельсом (рис.3.17), поскольку при движении без скольжения одного тела по другому скорости точек касания этих тел равны друг другу. Так как скорость любой точки неподвижного рельса равна нулю, то, следовательно, и скорость точки колеса, которая касается в данное мгновение рельса, тоже равна нулю.




**Пример 3.4**. Определить угловую скорость колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу (рис.3.17), а также скорости точек B, C, D, если $v_0$= 5 м/с, а R = 0,1 м.

*Решение*. Зная скорость точки O колеса и положение МЦС, находим по формуле, аналогичной (3.16), угловую скорость колеса:

$$\omega = \frac{v_0}{OC_V} = \frac{v_0}{R} = 50\ c^{-1}.$$

Скорости точек, лежащих на ободе колеса, равны:

$$v_B = \omega \cdot BC_V = \omega R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ м/с,$$

$$v_C = v_B, \quad v_D = \omega \cdot DC_V = \omega \cdot 2R = 10\ м/с.$$

Направления скоростей показаны на рис.3.17.

### *3.4.4. Определение скорости с помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек.*

***Теорема****: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на линию, соединяющую эти точки, равны между собой.*

*Доказательство.* Запишем выражение (3.11) в проекции на направление AB (рис.3.18):

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha + v_{BA} \cos 90^\circ ,$$

но cos 90° = 0, следовательно,

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha , \quad (3.20)$$

что и требовалось доказать.

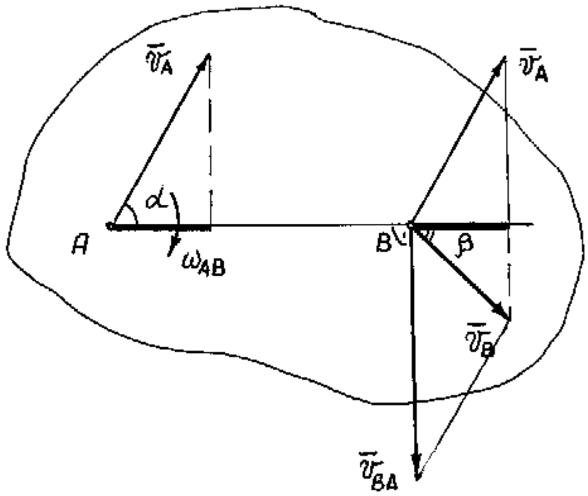


*Рис.3.18*

**Пример 3.5.** Определить скорость ползуна B (рис.3.12), пользуясь теоремой о проекциях скоростей двух точек. Данные те же , что в примере 3.3.

*Решение*. Из рис.3.12, в соответствии с формулой (3.20), имеем:

$$v_A \cos 30^\circ = v_B \cos 60^\circ ,$$

отсюда

$$v_B = v_A \sqrt{3} .$$

### 3.5. Определение ускорений точек плоской фигуры

Ускорение точки плоской фигуры найдем, дифференцируя по времени векторную формулу (3.11) или (3.13):

$$\vec{a}_B=\frac{d\vec{v}_B}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{v}_A+\vec{v}_{BA})=\frac{d}{dt}(\vec{v}_A+\vec{\omega}_{AB}\times\overrightarrow{AB})=\frac{d\vec{v}_A}{dt}+\frac{d\vec{\omega}_{AB}}{dt}\times\overrightarrow{AB}+\vec{\omega}_{AB}\times\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{v}_A}{dt}=\vec{a}_A$ , $\frac{d\vec{\omega}_{AB}}{dt}=\vec{\varepsilon}_{AB}$ и используя формулу (3.12) для $\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt}$ , получаем:

$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}_{AB}\times\overrightarrow{AB}+\vec{\omega}_{AB}\times\vec{v}_{BA}. \qquad (3.21)$$

Векторное произведение $\vec{\varepsilon}_{AB}\times\overrightarrow{AB}$ называют *вращательным (или касательным) ускорением точки* B при вращении фигуры вокруг полюса A и обозначают $\vec{a}_{BA}^{вр}$. Вектор $\vec{a}_{BA}^{вр}$ перпендикулярен отрезку AB и направлен в соответствии с направлением $\vec{\varepsilon}_{AB}$ (рис.3.19). Величина вращательного ускорения равна

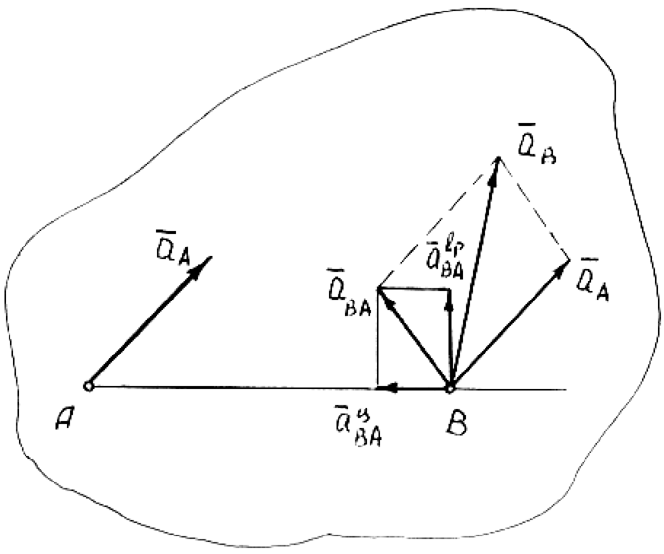



*Рис.3.19*

$$a_{BA}^{вр}=\varepsilon AB. \qquad (3.22)$$

Векторное произведение $\vec{\omega}_{AB}\times\vec{v}_{BA}$ называют *центростремительным (или нормальным) ускорением* точки B при вращении фигуры вокруг полюса А и обозначают $\vec{a}_{BA}^{ц}$. Вектор $\vec{a}_{BA}^{ц}$ направлен от В к А (рис.3.19). Величина центростремительного ускорения равна

$$a_{BA}^{ц} = \omega_{AB} \cdot v_{BA} = \omega_{AB}^2 \cdot AB. \qquad (3.23)$$

С учетом введенных обозначений формула (3.21) приобретает вид:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ц} + \vec{a}_{BA}^{вр}. \qquad (3.24)$$

Таким образом, ускорение любой точки (например, точки В) плоской фигуры можно представить в виде геометрической суммы двух ускорений: полюсного ускорения $\vec{a}_A$, которое приобретает точка В при поступательном движении фигуры вместе с полюсом А, и ускорения $\vec{a}_{BA}$, которое получает точка В при вращении фигуры вокруг полюса А:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \qquad (3.25)$$

Последнее слагаемое состоит из двух составляющих:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{ц} + \vec{a}_{BA}^{вр}. \qquad (3.26)$$

Для нахождения величины ускорения точки В следует выражение (3.24) записать в проекциях на оси x и y выбранной системы координат и вычислить $a_{Bx}$ и $a_{By}$, тогда

$$a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2}. \qquad (3.27)$$

**Пример 3.6**. Колесо радиуса R катится без скольжения по прямолинейному рельсу (рис.3.20). Заданы скорость $v_0$ и ускорение $a_0$ оси колеса. Определить ускорение точки B.

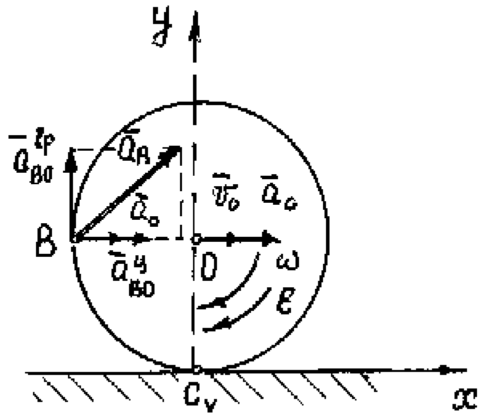



*Рис.3.20*

*Решение.* Найдем предварительно скорость и ускорение колеса, без которых невозможно вычислить ускорение точки B. Зная, что мгновенный центр скоростей находится в точке касания колеса с неподвижным рельсом, определяем угловую скорость колеса:

$$\omega = \frac{v_0}{OC_v} = \frac{v_0}{R}. \qquad (3.28)$$

Для нахождения углового ускорения колеса продифференцируем это выражение по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{OC_v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dv_0}{dt} = \frac{a_0^\tau}{R}. \qquad (3.29)$$

Заметим, что формула (3.29) справедлива только в том случае, когда расстояние от точки O до мгновенного центра скоростей остается постоянным во все время движения (это дает возможность вынести величину $OC_v$.из под знака производной).

Касательное ускорение точки O, входящее в формулу (3.29), равно полному ускорению $a_0$ , так как точка O движется по прямой, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{a_0}{R}.$$

Принимая точку O за полюс, определяем ускорение точки B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_0 + \vec{a}_{B0}^{ц} + \vec{a}_{B0}^{вр}. \qquad (3.30)$$

С учетом (3.28) и (3.29) вычисляем центростремительное и вращательное ускорения точки B:

$$a_{B0}^{ц} = \omega^2 OB = \frac{v_0^2}{R^2} R = \frac{v_0^2}{R}, \quad a_{B0}^{вр} = \varepsilon \cdot OB = \frac{a_0}{R} R = a_0.$$

Центростремительное ускорение направлено от B к O, а вращательное - перпендикулярно отрезку OB в сторону, согласованную с направлением углового ускорения колеса (рис.3.20).

Записывая выражение (3.30) в проекциях на оси координат, получим:

$$a_{Bx} = a_0 + a_{B0}^{ц} = a_0 + \frac{v_0^2}{R},$$

$$a_{By} = a_{B0}^{вр} = a_0.$$

Ускорение точки B равно

$$a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2} = \sqrt{(a_0 + \frac{v_0^2}{R})^2 + a_0^2}.$$

### 3.6. Решение задач

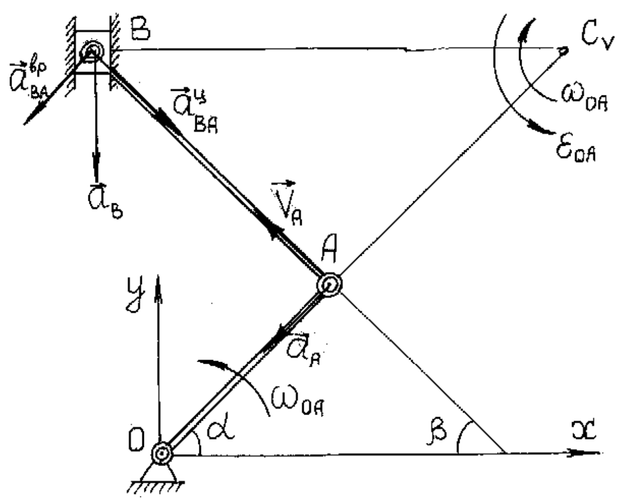



*Рис.3.21*

**Задача 3.1.** Кривошип OA длиной 20 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_{OA}$ =10 $c^{-1}$ и приводит в движение шатун AB длиной 100 см; ползун B движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45°$ и $\beta = 45°$ (рис.3.21).

*Решение.* Находим скорость точки А:

$$v_A = \omega_{OA} OA = 200\ см/с.$$

Вектор скорости точки А направлен перпендикулярно кривошипу 0А, т.е. по прямой АВ.

Чтобы найти угловую скорость звена АВ, построим мгновенный центр скоростей этого звена (рис.3.21). Он лежит на пересечении перпендикуляров, проведенных в точках А и В к скоростям этих точек (скорость точки В направлена вертикально). По найденной скорости точки А определяем угловую скорость шатуна АВ:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{200}{100} = 2\ с^{-1}.$$

Для вычисления ускорения точки В надо знать ускорение какой-либо точки звена АВ. Такой точкой может быть точка А, которая принадлежит как шатуну, так и кривошипу. Поскольку кривошип 0А вращается с постоянной скоростью, касательное ускорение точки А равно нулю и полное ускорение этой точки равно ее нормальному ускорению:

$$a_A = a_A^n = \omega_{0A}^2 \cdot 0A = 10^2 \cdot 20 = 2000\ см/с^2$$

Вектор ускорения точки А направлен из точки А к точке 0.

Принимая точку А за полюс, записываем формулу для определения ускорения точки В:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ц} + \vec{a}_{BA}^{вр}.$$

Вектор центростремительного ускорения, входящий в эту формулу, направлен от точки В к полюсу, т.е. к точке А (рис.3.21) и равен

$$a_{BA}^{ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 100 = 400 см/с^2.$$

Вектор вращательного ускорения направлен перпендикулярно вектору центростремительного ускорения и равен

$$a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} AB.$$

Однако вычислить вращательное ускорение пока невозможно, поскольку угловое ускорение шатуна тоже является величиной неизвестной. Чтобы выйти из этого затруднения выберем произвольные направления векторов $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^{вр}$, линии действия которых известны, и запишем трехчленную векторную формулу для определения ускорения точки B в проекциях на оси x и y (рис.3.21):

$$0 = -a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^{ц} \cos 45^\circ - a_{BA}^{вр} \cos 45^\circ,$$

$$-a_B = -a_A \sin 45^\circ - a_{BA}^{ц} \sin 45^\circ - a_{BA}^{вр} \sin 45^\circ.$$

Из этих двух скалярных уравнений находим $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^{вр}$:

$$a_B = 565{,}6 \text{ см/с}^2, \qquad a_{BA}^{вр} = 1600 \text{ см/с}^2.$$

Так как обе найденные величины положительны, то это означает, что предположительные направления векторов $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^{вр}$, показанные на рис.3.21, оказались правильными. По найденному значению вращательного ускорения находим угловое ускорение шатуна AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{1600}{100} = 16 \text{ с}^{-2}.$$

**Задача 3.2.** Определить угловое ускорение шатуна AB и ускорение ползуна B кривошипно-шатунного механизма (рис.3.22), если $\omega_{0A} = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{0A} = 3$ с$^{-2}$, OA = 10 см, $\alpha = 30°$.

*Решение*. Определяем ускорение точки A как точки кривошипа OA, совершающего вращательное движение вокруг оси O:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,\tau},$$

причем

$$a_A^n = \omega_{0A}^2 \cdot 0A = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см/с}^2,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{0A} \cdot 0A = 3 \cdot 10 = 30 \text{ см/с}^2.$$

Для определения ускорения точки B нужно какую-либо точку звена, к которому принадлежит точка B, принять за полюс. Так как точка A принадлежит не только кривошипу 0А, но и шатуну АВ, принимаем точку А за полюс и записываем формулу для определения ускорения точки В:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ц} + \vec{a}_{BA}^{вр}. \qquad (3.31)$$

Чтобы определить центростремительное и вращательное ускорения, входящие в эту формулу, надо знать угловую скорость и угловое ускорение звена АВ. Так как скорости точек А и В параллельны друг другу, то мгновенный центр скоростей звена АВ находится в бесконечности и,

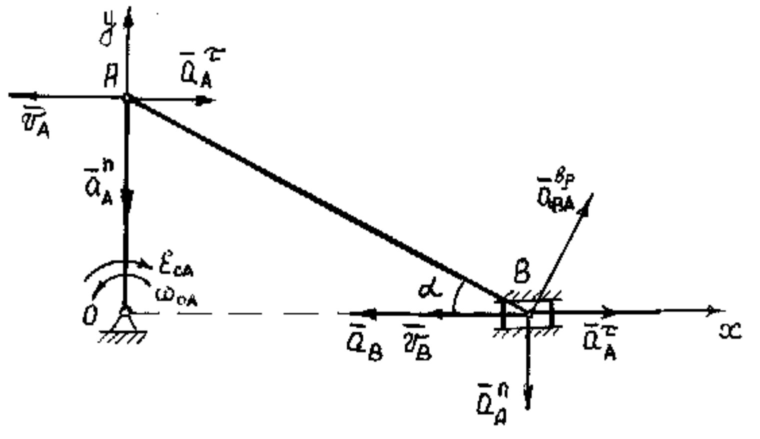



*Рис.3.22*

следовательно, $\omega_{AB} = 0$. Однако угловое ускорение звена АВ *не равно нулю* (одновременное равенство нулю скорости и ускорения присуще только неподвижным телам).

Для определения углового ускорения звена АВ, к сожалению, невозможно воспользоваться операцией дифференцирования угловой скорости $\omega_{AB}$, поскольку неизвестен закон ее изменения во времени (известно лишь значение этой скорости в данное мгновение). Поэтому для вычисления углового ускорения звена АВ выбирается другой путь.

На схему наносятся векторы $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^{вр}$, линии действия которых заранее известны (вектор $\vec{a}_B$ идет по горизонтали, а вектор $\vec{a}_{BA}^{вр}$ - по перпендикуляру к звену АВ). Направление этих векторов выбирается произвольным образом. Если выбранное направление не соответствует истинному направлению, то при решении задачи величина вектора получится отрицательной.

Векторное уравнение (3.31) записывается в проекциях на оси x и y:

$$\begin{aligned} -a_B &= a_A^\tau + a_{BA}^{вр}\sin\alpha, \\ 0 &= -a_A^n + a_{BA}^{вр}\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (3.31а)$$

Из полученных уравнений находим

$$a_{BA}^{вр} = \frac{a_A^n}{\cos 30^\circ} = \frac{80}{\sqrt{3}} \frac{см}{с^2},$$

$$a_B = -a_A^\tau - a_{BA}^{вр} \sin 30^\circ \approx -53\,см/с^2.$$

Знак минус указывает на то, что истинное ускорение точки В направлено не так, как указано на рис.3.22, а в противоположную сторону.

Угловое ускорение звена АВ, согласно (3.22), определяется так:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{3}}\,с^{-2}.$$

*Замечание.* Если бы в этой задаче требовалось найти ускорение не точки В ползуна, направление ускорения которого заранее известна, а произвольной точки М, принадлежащей шатуну АВ, то определить ускорение такой точки по формуле

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{ц} + \vec{a}_{MA}^{вр} \qquad (3.32)$$

было бы невозможно, поскольку заранее неизвестно направление ускорения точки М. В системе двух скалярных уравнений, получаемых при проектировании векторного равенства (3.32) на оси координат, оказалось бы не две, как в (3.31а), а три неизвестные величины: $a_{M_x}, a_{M_y}, a_{MA}^{вр}$. В этом случае решение задачи должно происходить следующим образом. На первом этапе решение не должно отличаться от того, что приведено выше, а именно, должна использоваться точка В для определения углового ускорения шатуна АВ. На втором этапе нужно составить векторное равенство (3.32), в котором ускорение $a_{MA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ уже будет известно, и заменить (3.32) системой двух скалярных уравнений в проекциях на оси координат. На третьем этапе из полученной системы скалярных уравнений определить проекции ускорения точки М на выбранные оси координат, а следовательно, и ускорение точки М:

$$a_M = \sqrt{a_{M_x}^2 + a_{M_y}^2}.$$

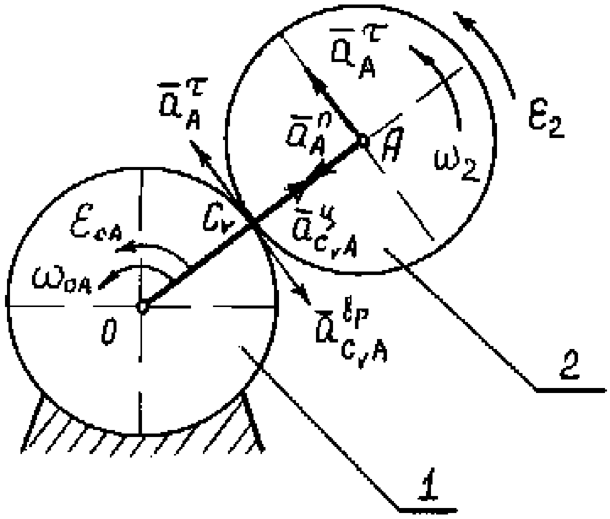



*Рис.3.23*

**Задача 3.3.** Зубчатое колесо 2 радиуса R = 12 см эпициклического механизма приводится в движение кривошипом 0A, который вращается вокруг оси O неподвижного зубчатого колеса 1 того же радиуса (рис.3.23). Кривошип вращается с угловым ускорением $\varepsilon_{0A} = 8\ \text{с}^{-2}$ и имеет в данный момент угловую скорость $\omega_{0A} = 2\ \text{с}^{-1}$. Определить в данный момент времени угловую скорость и угловое ускорение колеса 2, а также ускорение той точки колеса 2, которая контактирует с колесом 1.

*Решение.* Скорость точки A кривошипа равна

$$v_A = \omega_{0A} \cdot 2R = 48\ \text{см/с}.$$

Угловую скорость колеса 2 находим с помощью мгновенного центра скоростей этого колеса, который находится в точке контакта колес:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AC_v} = \frac{48}{12} = 4\ \text{с}^{-1}.$$

Ускорение точки A кривошипа, движущейся по окружности радиуса OA = 2R , состоит из нормального и касательного ускорений, причем

$$a_A^n = \omega_{0A}^2 \cdot 2R = 10^2 \cdot 2 \cdot 12 = 96\ \text{см/с}^2,$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{0A} \cdot 2R = 8 \cdot 2 \cdot 12 = 192\ \text{см/с}^2.$$

Векторы нормального и касательного ускорений точки показаны на рис.3.23.

Определяем по формуле (3.29) угловое ускорение колеса 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{R} = \frac{192}{12} = 16\ c^{-2}.$$

Принимая точку А за полюс, записываем формулу для определения ускорения точки $C_v$ :

$$\vec{a}_{C_v} = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{C_vA}^{ц} + \vec{a}_{C_vA}^{вр}. \qquad (3.32)$$

Вектор центростремительного ускорения, входящий в эту формулу, направлен от точки $C_v$ к полюсу, т.е. к точке А (рис.3.23), и равен

$$a_{C_vA}^{ц} = \omega_2^2 \cdot R = 2^2 \cdot 12 = 48 см/с^2$$

Вектор вращательного ускорения направлен перпендикулярно вектору центростремительного ускорения и равен

$$a_{C_vA}^{вр} = \varepsilon_2 R = 16 \cdot 12 = 192\ см/с^2.$$

Векторы $\vec{a}_A^\tau$ и $\vec{a}_{C_vA}^{вр}$, входящие в выражение (3.32), как равные и противоположно направленные, сокращаются, вследствие чего ускорение точки $C_v$ направлено к точке А и равно

$$a_{C_v} = a_{C_vA}^{ц} - a_A^n = 96 - 48 = 48\ см/с^2.$$

**Задача 3.4.** Определить скорость и ускорение (нормальное и касательное) ползуна В механизма, изображенного на рис.3.24, в момент, когда кривошип 0А, вращающийся с постоянной скоростью $\omega_{0A} = 2\ c^{-1}$, составляет с горизонтальной осью угол 60°. Ползун движется по дуге окружности радиуса R = 120 см , ОА = 20 см.

*Решение.* Определяем скорость точки А:

$$v_A = \omega_{0A} 0A = 40\ см/с.$$

Зная величину и направление скорости точки А и линию, по которой направлена скорость точки В (по касательной к дуге окружности), используем векторную формулу:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

и записываем ее в проекциях на оси x и y:

$$-v_B = -v_A \cos 30^\circ + v_{BA} \cos 60^\circ,$$
$$0 = v_A \cos 60^\circ - v_{BA}^{в} \cos 30^\circ,$$

отсюда

$$v_B = 80\sqrt{3}/3, \quad v_{BA} = 40\sqrt{3}/3.$$

Определяем угловую скорость шатуна AB:

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{2}{3}\, c^{-1}.$$

Переходим к вычислению ускорений. Так как кривошип 0A вращается равномерно, то ускорение точки A направлено к точке 0 и равно

$$a_A = a_A^n = \omega_{0A}^2\, 0A = 80\ см/c^2.$$

Записываем формулу для определения ускорения точки B, как точки шатуна AB, совершающего плоскопараллельное движение:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ц} + \vec{a}_{BA}^{вр}. \tag{3.33}$$

Векторное уравнение решается только в том случае, если в нем содержится не более двух неизвестных, причем под неизвестным понимается не только величина вектора, но и его направление.

В векторном уравнении (3.33) содержится три неизвестных, а именно, величина и линия действия вектора ускорения точки B, а также величина вектора вращательного ускорения (линия действия вектора $\vec{a}_{BA}^{вр}$ известна: она перпендикулярна отрезку AB, предположительное направление этого вектора показано на рис.3.24).

Центростремительное ускорение известно и по направлению (от точки B к полюсу A) и по величине, поскольку оно связано с угловой скоростью шатуна:

$$a_{BA}^{ц} = \omega_{AB}^{2} \cdot AB = 2^{2} \cdot 40\sqrt{3} = 160\sqrt{3}\ см/с^{2}.$$

Векторному уравнению (3.33) соответствует система двух скалярных уравнений в проекциях на оси координат. Но из двух скалярных уравнений невозможно определить три неизвестных ($a_{B_x}, a_{B_y}, a_{BA}^{вр}$).

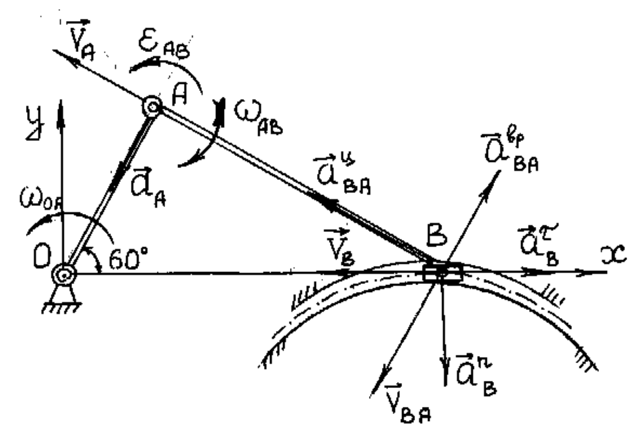



*Рис.3.24*

Для решения задачи используем то обстоятельство, что точка B принадлежит не только шатуну AB, но и ползуну. Ускорение точки B ползуна как точки, движущейся по окружности радиуса R, вычисляется по формуле:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{n} + \vec{a}_B^{\tau}. \qquad (3.34)$$

Вектор нормального ускорения точки B направлен по нормали к окружности радиуса R и равен

$$a_B^{n} = \frac{v_B^{2}}{R} = \frac{160}{9}\ см/с^{2}.$$

Новым неизвестным в выражении (3.34) является только величина касательного ускорения точки B (линия действия вектора касательного ускорения известна: по перпендикуляру к вектору нормального ускорения; предположительное направление вектора $\vec{a}_B^{\tau}$ показано на рис.3.24).

Таким образом, в двух векторных уравнениях (3.33) и (3.34) содержатся четыре неизвестных, следовательно, задача решается. Для ее решение приравняем правые части выражений (3.33) и (3.34) друг другу:

$$\vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ц} + \vec{a}_{BA}^{вр} = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau . \qquad (3.35)$$

Записываем полученное равенство в проекциях на оси x и y (рис.3.24):

$$-a_A \cos 60^\circ - a_{BA}^{ц} \cos 30^\circ + a_{BA}^{вр} \cos 60^\circ = a_B^\tau,$$
$$-a_A \sin 60^\circ + a_{BA}^{ц} \sin 30^\circ + a_{BA}^{вр} \sin 60^\circ = -a_B^n.$$

Из этой системы скалярных уравнений находим $a_{BA}^{вр}$ и $a_B^\tau$, а затем угловое ускорение шатуна AB:

$$a_{BA}^{вр} = -100{,}55\,см/с^{-2}, \quad \vec{a}_B^\tau = -330{,}27\,см/с^{-2},$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^{вр}}{AB} = -\frac{100{,}55}{20\sqrt{3}} \approx -2{,}89\ с^{-2} \quad .$$

Знак минус у полученных величин указывают на то, что предположительные направления векторов оказались неправильными. Истинные направления противоположны указанным на рисунке.

Величина полного ускорения точки B равна

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{\left(\frac{160}{9}\right)^2 + 330^2} = 330{,}5\ см/с^2 .$$

**Задача 3.5.** Квадрат ABCD со стороной AB = 10 см совершает плоское движение в плоскости чертежа (рис.3.25). Найти скорость и ускорение квадрата, а также ускорение вершины C, если известно, что в данный момент ускорения вершин A и B одинаковы по величине и равны 10 см/с$^{-2}$.

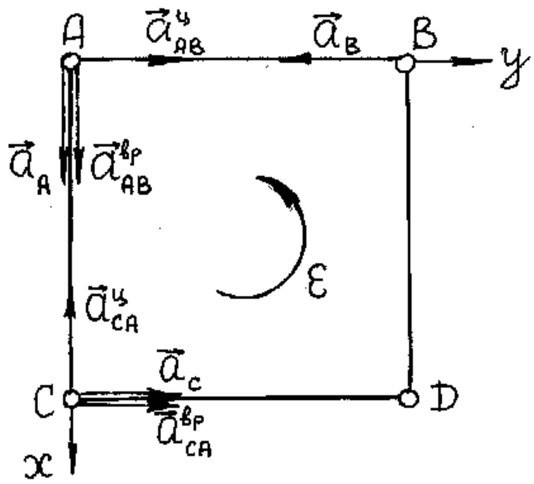


*Рис.3.25*

*Решение*. Если заданы ускорения двух точек фигуры, то с их помощью можно определить угловую скорость и угловое ускорение фигуры. Для этой цели одну из этих точек (например, точку B) принимаем за полюс, а для другой (точки A) записываем векторную формулу (3.24) для определения ее ускорения:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^{ц} + \vec{a}_{AB}^{вр}$$

и проектируем обе части этого векторного выражения на выбранные оси координат (предположительные направления углового ускорения и связанного с ним вращательного ускорения показаны на рис.3.25):

$$a_A = a_{AB}^{вр},$$
$$0 = -a_B + a_{AB}^{ц}.$$

Из этих двух скалярных уравнений находим $a_{AB}^{ц}$ и $a_{AB}^{вр}$, а с их помощью - угловую скорость $\omega$ и угловое ускорение $\varepsilon$ квадрата:

$$a_{AB}^{ц} = 10\,см/с^2, \quad a_{AB}^{вр} = 10\,см/с^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{a_{AB}^{ц}}{AB}} = 1\,с^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{a_{AB}^{вр}}{AB} = 1\,с^{-2}.$$

Поскольку ускорение $\varepsilon$ получилось положительным, предположительное направление, показанное на рис.3.25, является истинным.

Зная $\omega$ и $\varepsilon$, легко подсчитать ускорение вершины C квадрата:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^{ц} + \vec{a}_{CA}^{вр}.$$

Из рис.3.25 видно, что $\vec{a}_A = -\vec{a}_{CA}^{ц}$, следовательно,

$$a_C = a_{CA}^{вр} = 10\,см/с^2.$$

## 3.7. Контрольные вопросы

**3.1.** Каково минимальное число уравнений, которыми можно описать плоскопараллельное движение твердого тела?


*Рис.3.26*

**3.2.** Является ли вращательное движение частным случаем плоскопараллельного движения?

**3.3.** Является ли любое поступательное движение частным случаем плоскопараллельного движения?

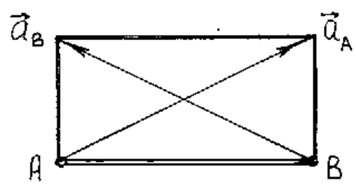



*Рис.3.27*

**3.4.** Имеет ли ускорение точка плоской фигуры, совпадающая с мгновенным центром скоростей?

**3.5**. Возможно ли при движении стержня AB такое расположение векторов скоростей $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$, которое изображено на рис.3.26?

**3.6.** Стержень AB совершает плоское движение. Чему равно его ускорение в момент, когда $|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B|$ (рис.3.27)?

**3.7.** В какую сторону переместится ось O катушки, катящейся без скольжения, если скорость точки A направлена вправо (рис.3.28)?

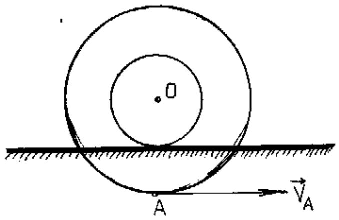



*Рис.3.28*

**3.8.** В каком случае векторы ускорений точек A, B, C обода колеса, катящегося без скольжения, направлены к центру O (рис.3.29)?

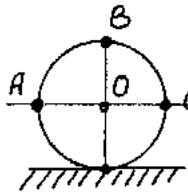



*Рис.3.29*

**3.9.** Как направлен вектор ускорения точки $C_v$ (рис.3.30)?

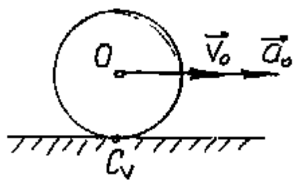



*Рис.3.30*

**3.10.** Чему равна угловая скорость звена АВ и скорость точки В, если $\omega_{0A} = 2\ c^{-1}$, ОА = 10 см (рис.3.31)?

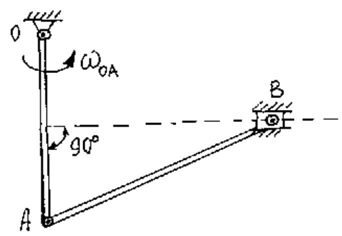



*Рис.3.31*

**3.11.** Колесо радиуса 4 см катится без проскальзывания (рис.3.29). Скорость оси колеса равна 2 см/с. Чему равна скорость точки А ?

**3.12.** Задана угловая скорость кривошипа ОА. Чему равна скорость ползуна В (рис.3.32)?

**3.13.**Задана угловая скорость $\omega_{0A}$ кривошипа ОА. Чему равна угловая скорость шатуна АВ, если известно, что АВ = 2·ОА (рис.3.32)?

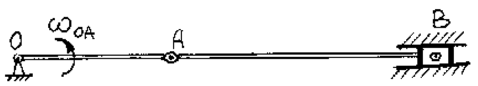



*Рис.3.32*

**3.14.** Чему равна скорость точки В (рис.3.33)?

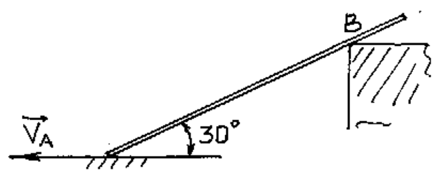



*Рис.3.33*

# 4. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ И ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 4.1. Сферическое движение твердого тела

*Если во все время движения тела одна его точка остается неподвижной (рис.4.1), то такое движение тела называют сферическим.* Точки тела описывают траектории, лежащие на сферах, центры которых совпадают с неподвижной точкой.

В технических устройствах сферическое движение твердого тела используется гораздо реже, чем вращательное или плоскопараллельное. Однако изучение этого движения очень важно, так как именно такое движение совершают гироскопы – удивительные приборы, широко применяемые в системах управления самолетами, ракетами и морскими судами.

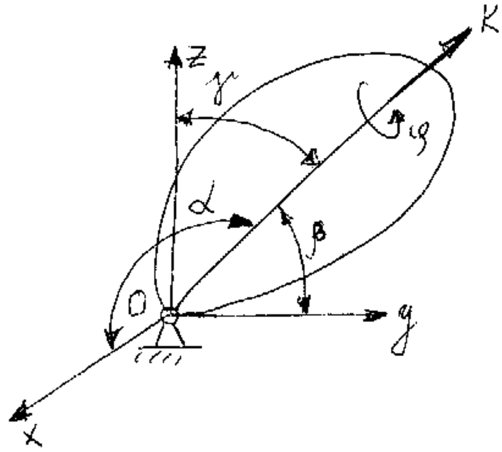


Рис.4.1

Для определения положения твердого тела в неподвижной системе $xyz$ проведем через неподвижную точку O ось OK (рис.4.1), жестко связанную с движущимся телом. Положение этой оси определяется углами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, которые ось OK составляет с осями координат. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то для задания оси OK достаточно двух углов, например, $\alpha$ и $\beta$. При этом положение тела в неподвижном пространстве в каждый момент времени может быть определено с помощью трех углов: $\alpha$, $\beta$ и $\varphi$, причем угол $\varphi$ определяет поворот тела вокруг оси OK. Если бы было известно как изменяются эти углы во время движения тела, то уравнения вида:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(t), \\ \beta &= \beta(t), \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

могли бы служить уравнениями сферического движения твердого тела. Однако во многих задачах трудно найти указанные функции.

Чаще всего вводят подвижную систему $x'y'z'$, жестко связанную с движущимся телом (рис.4.2), и определяют положение подвижной системы относительно неподвижной в данный момент времени с помощью матрицы

$$B = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix}, \qquad (4.2)$$

элементами которой являются направляющие косинусы ортов $\vec{i}'(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, $\vec{j}'(\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$ и $\vec{k}'(\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3)$ в системе $xyz$.

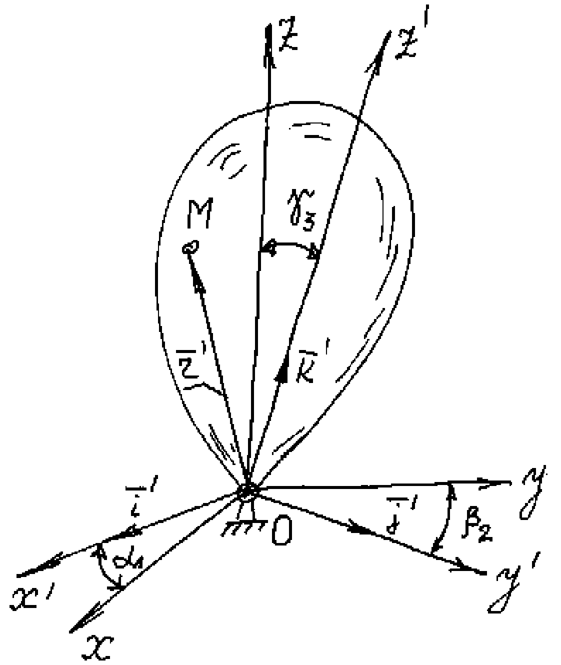



Рис.4.2

Если известен радиус-вектор $\vec{r}'$ произвольной точки M в подвижной системе $x'y'z'$ и матрица B, то радиус-вектор $\vec{r}$ той же точки в неподвижной системе $xyz$ определяется так:

$$\vec{r} = B\vec{r}'. \qquad (4.3)$$

Уравнение (4.3) записано в матричной форме, в котором $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ нужно понимать как матрицы-столбцы.

Таким образом, положение подвижной системы относительно неподвижной определяется 9-ю направляющими косинусами. Эти 9 направляющих косинусов связаны между собой 6-ю соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1,\\
&2)\quad \cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2=1,\\
&3)\quad \cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3=1,\\
&4)\quad \cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,\\
&5)\quad \cos\alpha_1\cos\alpha_3+\cos\beta_1\cos\beta_3+\cos\gamma_1\cos\gamma_3=0,\\
&6)\quad \cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Последние три соотношения выражают условия перпендикулярности ортов подвижной системы координат.

Из 9-ти направляющих косинусов, входящих в (4.4), независимыми являются только три.

Задание уравнений сферического движения в виде каких-либо трех направляющих косинусов, изменяющихся во времени, весьма неудобен, поскольку для нахождения остальных шести направляющих косинусов придется для каждого момента времени решать систему (4.4) - систему шести нелинейных уравнений с шестью неизвестными.

Положение твердого тела с одной неподвижной точкой удобно определять тремя другими углами, *называемыми углами Эйлера.* Углы (рис.4.3), предложенные Эйлером, имеют специальные названия:

$\psi$ - *угол прецессии* - угол между осью x и линий ON узлов (линией пересечения плоскостей xOy и $x'Oy'$);

$\theta$ - *угол нутации* - угол между осями z и $z'$;

$\varphi$ - *угол собственного вращения* - угол между линией узлов и $x'$.

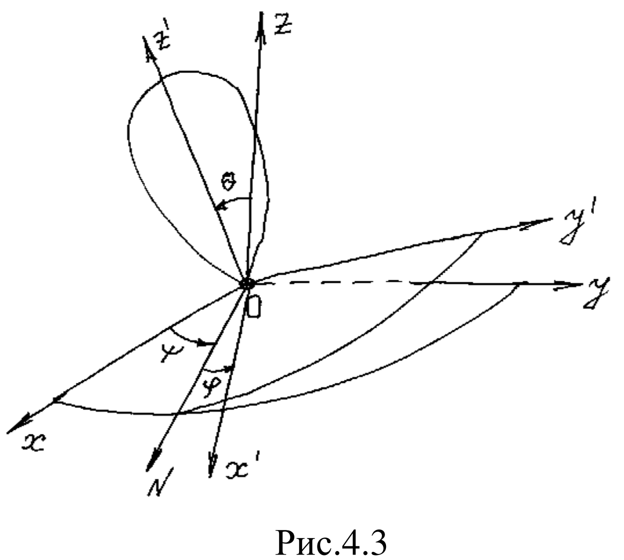



Рис.4.3

Названия этих углов заимствованы из астрономии.

Углы Эйлера удобны тем, что все направляющие косинусы подвижных осей координат можно выразить через тригонометрические функции углов Эйлера (соответствующие формулы приведены, например, в [4]).

Уравнения

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi(t), \\
\theta &= \theta(t), \qquad (4.5) \\
\varphi &= \varphi(t)
\end{aligned}$$

называют *уравнениями сферического движения твердого тела*.

Покажем, что, зная эти уравнения, легко установить положение твердого тела в любой момент времени.

Пусть в начальный момент времени оси подвижной и неподвижной систем координат совпадают. Чтобы тело оказалось в положении, показанном на рис.4.3, нужно произвести три поворота тела (подвижной системы):

1) на угол $\psi$ вокруг оси z; при этом ось $x'$ займет положение линии узлов, ось $y'$ попадет в плоскость xOy, а оси z и $z'$ совпадут друг с другом;
2) на угол $\theta$ вокруг линии узлов; при этом ось $x'$ совпадет с линией узлов, ось $y'$ перейдет в плоскость $x'Oy'$, а ось $z'$ займет свое окончательное положение;
3) на угол $\varphi$ вокруг оси $z'$; при этом оси $x'$ и $y'$ перейдут в положение, показанное на рис.4.3.

## Теорема об оси конечного поворота. Мгновенная ось вращения

**Теорема:** *твердое тело с одной неподвижной точкой из данного положения в другое можно переместить одним поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку.*

*Доказательство.* Рассмотрим два положения твердого тела, совершающего сферическое движение. Положение твердого тела в пространстве определяется тремя его точками, не лежащими на одной прямой. Пусть положение 1 (рис.4.4) определяется точками O, $A_1, B_1$, причем O – неподвижная точка, точку $A_1$ выбираем произвольно, а точку $B_1$ - там, где во втором положении тела окажется точка $A_1$.

Положение 2 тела определяется точками O, $A_2, B_2$, причем точка $A_2$ совпадает с точкой $B_1$.

Через точки $A_1, B_1(A_2), B_2$ проведем плоскость П и из точки O опустим на эту плоскость перпендикуляр OD.

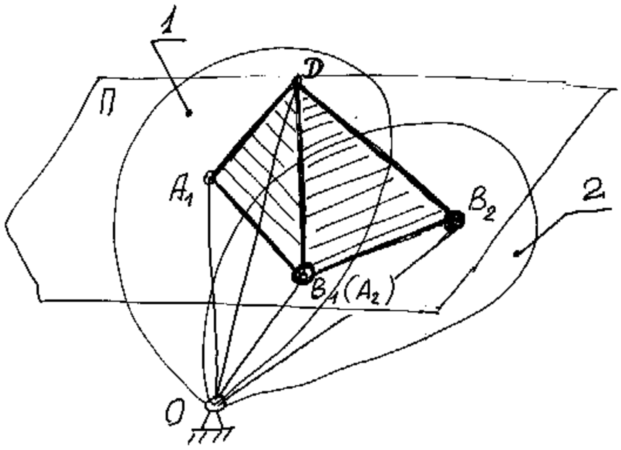



Рис.4.4

Соединим точку D с точками A и B. При этом образуется два треугольника: $\Delta A_1 D B_1$ и $\Delta A_2 D B_2$, лежащие в пл.П. Эти треугольники равны между собой по трем равным сторонам, а именно, $A_1 B_1 = A_2 B_2$ по условию, $A_1 D$ = $B_1 D$ = $B_2 D$ - как проекции равных наклонных ($O A_1 =$ $O B_1 =$ $O B_2$) на плоскость П. Из равенства треугольников следует, что $\angle A_1 D B_1 = \angle A_2 D B_2 = \varphi$ (рис.4.4).

При повороте тела вокруг оси OD на угол $\varphi$ , треугольник $A_1 D B_1$ совмещается с треугольником $A_2 D B_2$, и точки $A_1$, $B_1$ переходят в положение $A_2$, $B_2$ .Но три точки (O, $A_2$, $B_2$) определяют положение 2, следовательно, одним поворотом вокруг оси OD твердое тело переместилось из положения 1 в положение 2, что и требовалось доказать.

*Ось OD называют осью конечного поворота.*

Докажем методом от противного, что для положений 1 и 2 ось конечного поворота является единственной. Пусть для положений 1 и 2 имеется еще одна ось конечного поворота - ось OD′. При этом три точки тела - O, D и D′ - окажутся неподвижными. Но если три точки тела, не лежащие на одной прямой, неподвижны, то и все тело неподвижно, что является противоречием, поскольку по условию тело движется. Следовательно, второй оси конечного поворота для одной и той же пары положений твердого тела быть не может.

Если рассматриваются два бесконечно близких положения тела, то ось конечного поворота превращается в *мгновенную ось вращения*.

## Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, совершающего сферическое движение

Сферическое движение тела в данный момент времени можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис.4.5). Величина вектора $\vec{\omega}$ не является производной от некоторого угла по времени, так как при сферическом движении, в отличие от вращения вокруг неподвижной оси, такого угла просто не существует. Тем не менее скорость произвольной точки М этого тела можно определить по формуле Эйлера:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \,. \tag{4.6}$$

Вектор $\vec{v}$ направлен по перпендикуляру к плоскости, проведенной через мгновенную ось и рассматриваемую точку, в сторону вращения тела (рис.4.5). Величина скорости равна

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin\gamma = \omega \cdot h_{\omega}, \tag{4.7}$$

где $h_{\omega}$ - кратчайшее расстояние от точки М до мгновенной оси вращения.

Для нахождения ускорения произвольной точки М продифференцируем по времени выражение (4.6):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \,. \tag{4.8}$$

Производная по времени от угловой скорости представляет собой угловое ускорение:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (4.9)$$

*По величине и направлению вектор* $\vec{\varepsilon}$ *совпадает со скоростью* $\vec{u}_k$ *конца вектора* $\vec{\omega}$ *при движении точки* K *по годографу вектора* $\vec{\omega}$ (рис.4.5).

Заметим, что скорость $u_k$ имеет размерность с$^{-2}$.

Подставляя (4.9) в (4.8) и имея в виду, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, получаем выражение для ускорения точки при сферическом движении тела:

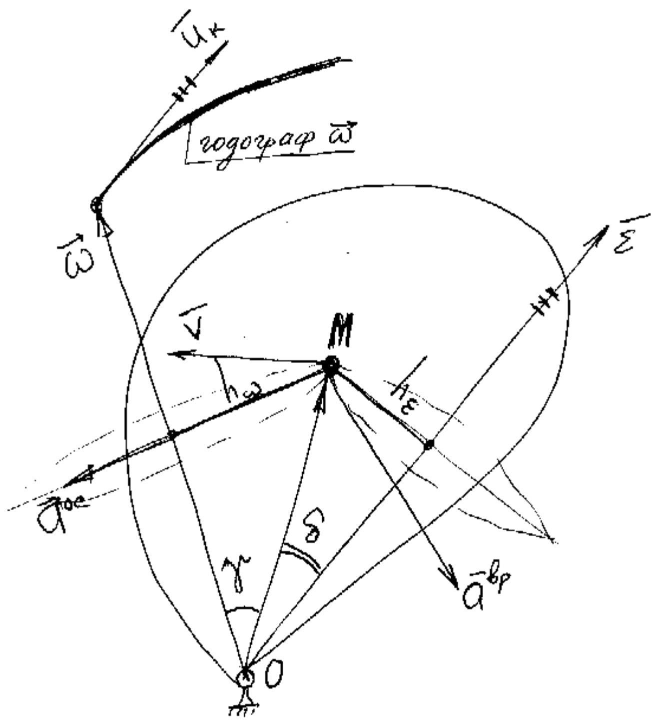



Рис.4.5

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \qquad (4.10)$$

Первое слагаемое в формуле (4.10) называют *вращательным ускорением*:

$$\vec{a}^{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \qquad (4.11)$$

а второе - *осестремительным ускорением*:

$$\vec{a}^{ос} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \qquad (4.12)$$

Вектор вращательного ускорения перпендикулярен плоскости, образованной векторами $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{r}$ и равен (рис.4.5):

$$a^{вр} = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\delta = \varepsilon \cdot h_\varepsilon, \qquad (4.13)$$

где $h_\varepsilon$ - кратчайшее расстояние от точки М до прямой, по которой направлен вектор углового ускорения.

Вектор осестремительного ускорения направлен из точки М к мгновенной оси вращения и равен, согласно (4.12) и с учетом (4.7):

$$a^{oc} = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot h_{\omega}. \qquad (4.14)$$

Таким образом, ускорение любой точки тела, совершающего сферическое движение, равно

$$\vec{a} = \vec{a}^{oc} + \vec{a}^{вр}, \qquad (4.15)$$

причем вектор $\vec{a}^{oc}$ направлен к мгновенной оси вращения, а вектор $\vec{a}^{вр}$ - по касательной к окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\varepsilon}$ (рис.4.5).

В общем случае векторы $\vec{a}^{oc}$ и $\vec{a}^{вр}$ расположены друг по отношению к другу не под прямым углом.

## Общий случай движения твердого тела

Рассмотрим самый общий случай движения свободного твердого тела в пространстве. Такое движение совершает, например, брошенный камень или самолет, выполняющий фигуры высшего пилотажа.

Свяжем с телом подвижную систему $x'y'z'$. Положение твердого тела в неподвижной системе $xyz$ определяется координатами $x_{o'}, y_{o'}, z_{o'}$ полюсной точки O′ (начало координат подвижной системы) и углами Эйлера, образованными подвижными осями с неподвижными. Следовательно, общий случай движения твердого тела в неподвижной системе описывается 6-ю уравнениями:

$$\begin{aligned} &x_{o'} = f_1(t), \quad y_{o'} = f_2(t), \quad z_{o'} = f_3(t), \\ &\varphi = f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \theta = f_6(t). \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Элементарное перемещение твердого тела из данного положения в соседнее можно осуществить с помощью двух движений: поступательного вместе с полюсом и сферического вокруг полюса. Последнее представляет собой элементарный поворот вокруг мгновенной оси вращения.

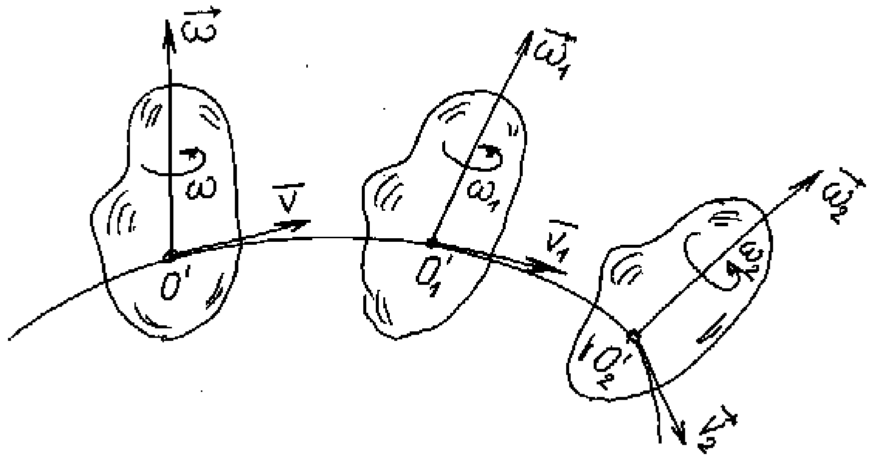



Рис.4.6

Поскольку движение тела является совокупностью элементарных перемещений, приходим к следующему утверждению: *движение свободного твердого тела слагается в общем случае из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как полюс со скоростью* $\vec{v}_{0'}$, *и из серии элементарных поворотов с угловой скоростью* $\vec{\omega}$ *вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через полюсную точку* (рис.4.6).

Поступательная часть движения свободного твердого тела описывается первыми тремя уравнениями из (4.16), а вращение вокруг полюса (сферическое движение) – последними тремя из этих уравнений.

На основании сформулированного утверждения запишем выражение для скорости произвольной точки М свободно движущегося тела (рис.4.7):

$$\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \vec{v}^{вр}, \qquad (4.17)$$

где $\vec{v}^{вр}$ - это скорость, полученная точкой М при сферическом движении тела вокруг полюса, равная $\vec{\omega}\times\vec{r}'$, следовательно,

$$\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega}\times\vec{r}', \qquad (4.18)$$

причем $\vec{r}'$ - радиус-вектор точки М в подвижной системе отсчета (на рис.4.7 она не показана).

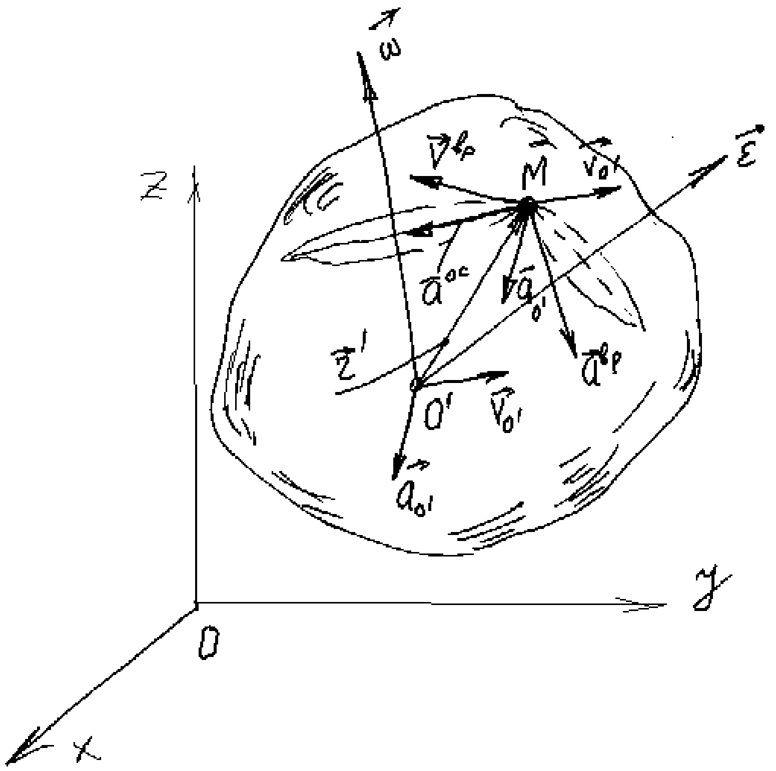



Рис.4.7

Ускорение точки М равно геометрической сумме полюсного ускорения $\vec{a}_{0'}$ и того, которое получает точка М при сферическом движении тела вокруг полюса, что при использовании формул (4.15), (4.11) и (4.12) дает следующее выражение (рис.4.8):

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}^{ос} + \vec{a}^{вр} = \vec{a}_{0'} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}'. \qquad (4.19)$$

## Решение задач

**Задача 4.1.** Конус, вершина О которого неподвижна, перекатывается по плоскости без скольжения (рис.4.8). Высота СО конуса равна 18 см, а угол при вершине - 90°. Точка С - центр основания конуса - движется равномерно и возвращается в первоначальное положение через $t_1$ = 1с. Определить скорости точек А, В, С и угловую скорость конуса.

*Решение.* Конус совершает сферическое движение, так как точка О конуса при его движении остается неподвижной. Точка С описывает окружность радиуса $O_1C = OC\cdot\cos 45^\circ = 9\sqrt{2}$ см. По условию точка С проходит равномерно всю эту окружность за время $t_1$ = 1с., следовательно, ее скорость равна

$$v_C = \frac{2\pi \cdot O_1C}{t_1} = 18\pi\sqrt{2}\ \text{см/с}.$$

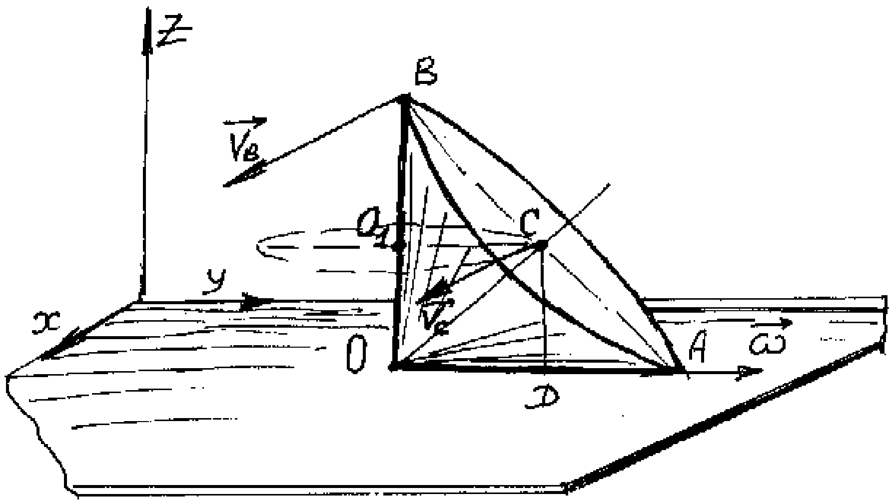



Рис.4.8

Вектор скорости точки С направлен по касательной к окружности радиуса $O_1C$ (параллельно оси x).

Так как перекатывание конуса по плоскости происходит без проскальзывания, то все точки образующей ОА, касающиеся в данный момент неподвижной плоскости, имеют скорости, равные нулю. Следовательно, мгновенная ось вращения совпадает с образующей ОА и направлена в положительную сторону координатной оси y (это направление согласовано с направлением скорости точки С). Скорость точки А, лежащей на мгновенной оси вращения равна

$$v_A = 0.$$

Чтобы определить величину мгновенной угловой скорости, нужно скорость какой-либо точки разделить на расстояние от этой точки до мгновенной оси вращения. В качестве такой точки берем точку С, скорость которой известна. При этом получаем:

$$\omega = \frac{v_C}{CD} = \frac{18\pi\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = 2\pi\ c^{-1}.$$

Скорость точки В, в соответствии с формулой (4.7), равна произведению угловой скорости тела на кратчайшее расстояние до мгновенной оси вращения:

$$v_B = \omega \cdot OB = 2\pi \cdot 18\sqrt{2} = 36\pi\sqrt{2}\ \text{см}/\text{с}.$$

Направление вектора скорости точки В, как точки, описывающей в данное мгновение окружность вокруг мгновенной оси вращения, совпадает с направлением оси x (рис.4.8).

**Задача 4.2.** В условии задачи 4.2 определить угловое ускорение конуса и ускорения точек А и В.

*Решение.* Вектор углового ускорения

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

по величине и направлению совпадает со скоростью точки К (конца вектора $\vec{\omega}$) при ее движении по годографу вектора $\vec{\omega}$, т.е.

$$\vec{\varepsilon} = \vec{u}_K. \tag{4.20}$$

Вектор $\vec{\omega}$ вращается вокруг вертикальной оси ОВ со скоростью $\vec{\omega}_\omega$, описывая в горизонтальной плоскости круг радиуса ОК (рис.4.9).

Годографом вектора $\vec{\omega}$ является окружность радиуса ОК, лежащая в горизонтальной плоскости. Точка К движется по этой окружности со скоростью

$$\vec{u}_K = \vec{\omega}_\omega \times \vec{\omega}. \tag{4.21}$$

Формула (4.21) является аналогом формулы Эйлера (см. формулу (4.6)), в которой роль радиус-вектора играет вектор $\vec{\omega}$.

Угловая скорость $\omega_\omega$ вращения вектора $\vec{\omega}$ равна угловой скорости вращения отрезка $O_1C$ при движении точки С по окружности радиуса $O_1C$:

$$\omega_\omega = \frac{v_C}{O_1C} = \frac{18\pi\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} = 2\pi \text{ c}^{-1}. \tag{4.22}$$

Используя (4.20), (4.21) и (4.22), определяем величину углового ускорения конуса:

$$\varepsilon = u_K = \omega_\omega \cdot \omega = 2\pi \cdot 2\pi = 4\pi^2 \text{ c}^{-2}.$$

Вектор углового ускорения, параллельный вектору $\vec{u}_K$, следует проводить из неподвижной точки О конуса (рис.4.9).

Зная угловую скорость и угловое ускорение конуса, определяем ускорения точек А и В. По формуле (4.15) ускорение точки А равно

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\,ос} + \vec{a}_A^{\,вр}.$$

Осестремительное ускорение $\vec{a}_A^{\,ос}$ точки А, лежащей на мгновенной оси вращения, равно нулю, поскольку $h_\omega = 0$ (см. формулу (4.14)).

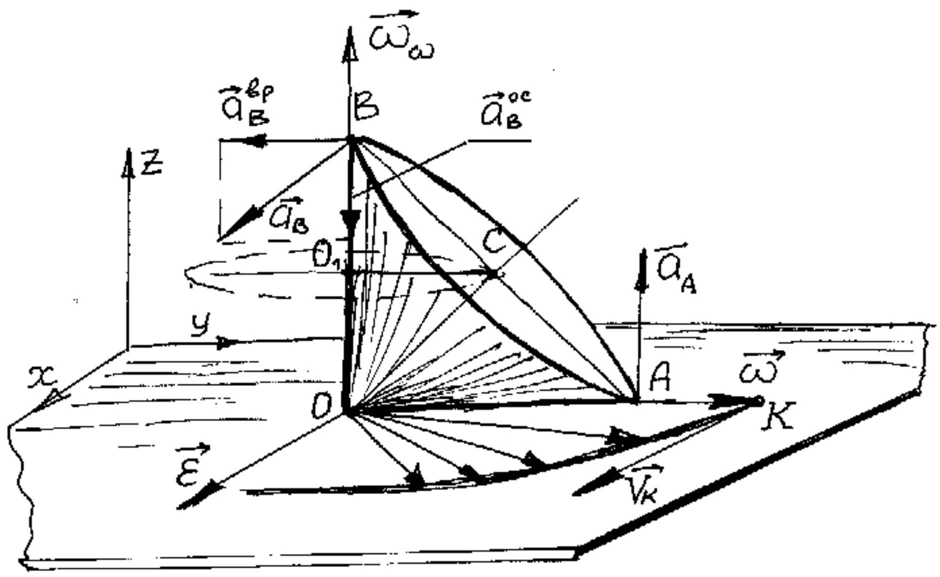



Рис.4.9

Вращательное ускорение $\vec{a}_A^{вр}$ точки А, согласно (4.11) и (4.13), направлено перпендикулярно вектору $\vec{\varepsilon}$ и отрезку ОА (рис.4.9) и равно

$$a_A = a_A^{вр} = \varepsilon \cdot OA = 4\pi^2 \cdot 18\sqrt{2} = 72\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Ускорение точки В равно

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{ос} + \vec{a}_B^{вр}.$$

Осестремительное ускорение точки В направлено от В к О и равно

$$a_B^{ос} = \omega^2 \cdot OB = 4\pi^2 \cdot 18\sqrt{2} = 72\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Вращательное ускорение точки В перпендикулярно вектору $\vec{\varepsilon}$ и отрезку ОВ (рис.4.9) и равно

$$a_B^{вр} = \varepsilon \cdot OB = 4\pi^2 \cdot 18\sqrt{2} = 72\pi^2\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Так как в данной задаче составляющие ускорений взаимно перпендикулярны, а их величины равны друг другу, то вектор полного ускорения точки В составляет угол 45° с направлением ВО и равен

$$a_B = \sqrt{(a_B^{ос})^2 + (a_B^{вр})^2} = 144\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

## Контрольные вопросы

**4.1.** Чем отличается сферическое движение тела от вращательного движения вокруг неподвижной оси ?

**4.2.** Каково наименьшее число уравнений, с помощью которых можно описать сферическое движение твердого тела?

**4.3.** Каково наименьшее число уравнений, с помощью которых можно описать общий случай движения твердого тела?

# 5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

## 5.1. Относительное, переносное и абсолютное движения

В первой главе данного курса изучалось движение точки по отношению к одной, условно неподвижной, системе отсчета. В данной главе, наряду с неподвижной системой, вводится подвижная система, и движение точки рассматривается в двух системах : подвижной и неподвижной.

В разных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, движение одной и той же точки выглядит по-разному. Может оказаться, что в неподвижной системе движение точки будет довольно сложным, а в подвижной - простым. Если к тому же и движение самой подвижной системы относительно неподвижной окажется простым, то в таком случае имеет смысл сложное движение точки относительно неподвижной системы описать с помощью двух простых движений или, как говорят, разложить на два простых движения. Одно из них - это движение точки по отношению к подвижной системе, а другое - это движение точки вместе с подвижной системой относительно неподвижной.

*Сложным движением точки будем называть такое ее движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях.*

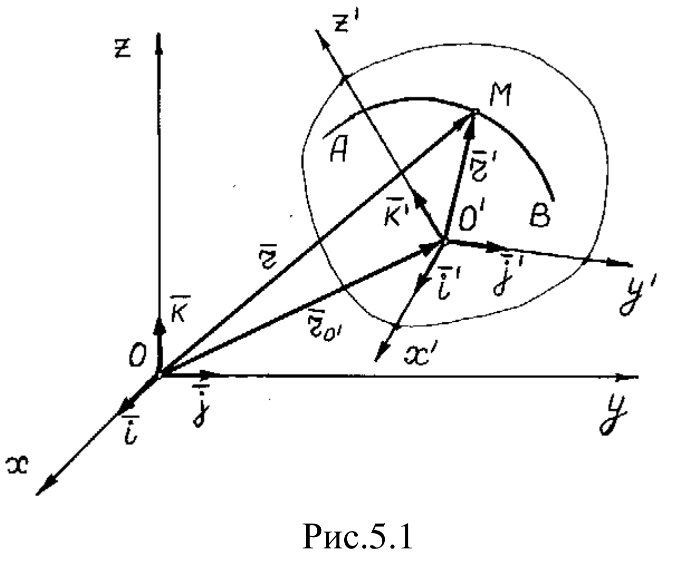



Рис.5.1

Пусть точка M (рис.5.1) перемещается в системе $x'y'z'$ по некоторой траектории AB, а сама система $x'y'z'$ движется относительно неподвижной системы xyz.

*Движение точки M по траектории AB назовем относительным движением, движение точки M относительно неподвижной системы xyz назовем абсолютным движением, а движение относительно неподвижной системы xyz той точки системы $x'y'z'$, с которой в данный момент совпадает точка M, назовем переносным движением.*

Например, при движении вагона по прямолинейному рельсу точка M обода колеса в неподвижной системе xyz, связанной с землей, совершает движение, траекторией которого является кривая с петлями, называемая удлиненной циклоидой (рис.5.2). Однако это движение можно разложить на два простых, а именно, на движение точки М по окружности радиуса СМ в подвижной системе $x'y'z'$, связанной с вагоном, и на прямолинейное движение вдоль оси x вместе с вагоном (по отношению к земле). Естественно, что законы этих двух простых движений легко перевести на язык математики, после чего можно получить закон сложного движения точки М в неподвижной системе xyz.

Возможность разложить сложное движение точки на два более простых путем введения вспомогательной подвижной системы используется при решении многих кинематических задач и составляет основную ценность теории сложного движения.

Встречаются задачи и иного рода, когда движение точки в неподвижной системе является заданным, а ее движение относительно некоторого подвижного тела (подвижной системы) - искомым. Решение таких задач также основано на излагаемой в этой главе теории сложного движения точки.

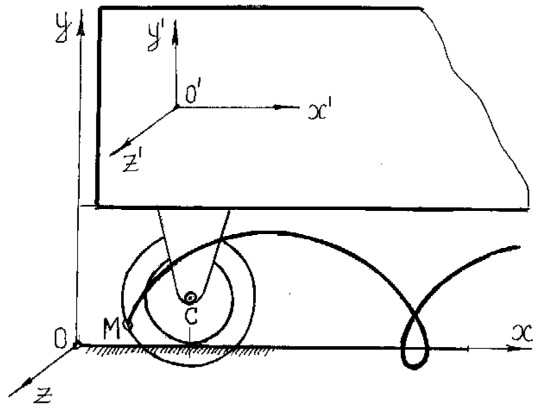


Рис.5.2

Заметим, что время во всех системах отсчета считается одинаковым, иными словам, *время в ньютоновской механике абсолютно*.

Остановимся поподробнее на описании сложного движения точки. Систему xyz (рис.5.1) будем называть *абсолютной*, а систему $x'y'z'$ - *относительной*. Термины «абсолютный» и «относительный» имеют здесь условный характер. В зависимости от содержания решаемых задач то одну, то другую систему целесообразно принимать за абсолютную.

Движение точки М относительно подвижной системы описывается векторным уравнением:

$$\vec{r}' = x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}' \qquad (5.1)$$

где $\vec{r}'$ - радиус-вектор точки М в системе $x'y'z'$, а $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ - орты координатных осей этой системы.

Векторному уравнению (5.1) соответствует три скалярные уравнения в проекциях на оси координат системы $x'y'z'$:

$$x' = x'(t)\,, \quad y' = y'(t)\,, \quad z' = z'(t)\,. \qquad (5.2)$$

Более трудным для восприятия является понятие о переносном движении. В каждый момент времени движущаяся точка М проходит через некоторый пункт подвижной системы отсчета. Этот пункт в своем движении относительно неподвижной системы имеет определенную траекторию, скорость и ускорение. Если бы движущаяся точка М, проходя через этот пункт, вдруг «приклеилась» бы к движущемуся телу (к системе $x'y'z'$), то она «поехала» бы дальше по траектории, которую описывает пункт в неподвижном пространстве, т.е. ее движение изменилось бы. Это изменившееся движение точки и названо переносным.

Если в относительном движении точка М имеет единственную траекторию, то в переносном - целое семейство траекторий. Связано это с тем, что разные пункты подвижной системы, через которые проходит движущаяся точка М, имеют разные траектории в неподвижном пространстве. Поэтому нельзя говорить о траектории переносного движения вообще, а можно лишь говорить о траектории переносного движения в данный момент времени.

Наряду с понятием переносного движения точки введем еще понятие о *переносном движении тела* как о движении подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

Траектория абсолютного движения точки М называется *абсолютной траекторий.* Ее уравнение в векторной записи имеет вид (рис.5.1):

$$\vec{r} = \vec{r}_{0'} + \vec{r}\,', \qquad (5.3)$$

где $\vec{r}_{0'}$ - радиус-вектор точки $O'$ (начала подвижной системы отсчета) в системе xyz.

Заметим, что векторы, входящие в (5.3), принадлежат разным системам отсчета: $\vec{r}$ и $\vec{r}_{0'}$ абсолютной, а $\vec{r}\,'$ - относительной системе. Чтобы определить координаты точки М в абсолютной системе воспользуемся матричной записью:

$$\vec{r} = \vec{r}_{0'} + B\vec{r}\,', \qquad (5.4)$$

где $\vec{r}$, $\vec{r}_{0'}$, $\vec{r}\,'$ - столбцовые матрицы, а B – квадратная матрица, элементами которой являются направляющие косинусы ортов $\vec{i}\,'(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$, $\vec{j}\,'(\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$ и $\vec{k}\,'(\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3)$ в системе $xyz$. Вид матрицы B приведен в главе 4 (см. (4.2)).

С учетом (4.2) выражение (5.4) можно записать так:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0'} \\ y_{0'} \\ z_{0'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0'} + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y_{0'} + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z_{0'} + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{bmatrix}$$

Из полученного выражения видно, что координаты произвольной точки М в абсолютной системе равны:

$$\begin{aligned} x &= x_{0'} + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= y_{0'} + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= z_{0'} + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Все величины, входящие в уравнения (5.5) являются функциями времени.

## 5.2. Абсолютная и относительная производные вектора по времени

Между кинематическими характеристиками всех трех движений - абсолютного, относительного и переносного - имеется количественная взаимосвязь. Для установления этой взаимосвязи потребуются следующие две леммы.

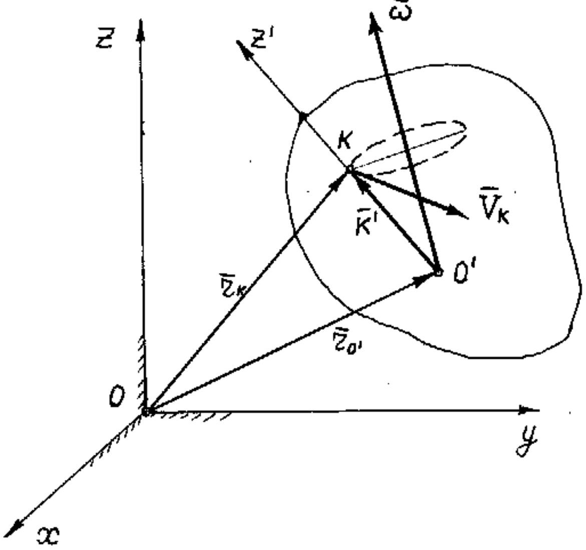



Рис.5.3

***Лемма 1. Об абсолютной производной по времени от вектора постоянной длины, записанного в подвижной системе отсчета***. Пусть система $x'y'z'$ совершает произвольное движение относительно неподвижной системы xyz. В качестве вектора постоянной длины, записанного в подвижной системе $x'y'z'$, возьмем орт $\vec{k}'$.

Производная по времени от вектора $\vec{k}'$ - это скорость его конца, т.е. скорость точки K (рис.5.3). Скорость точки K подвижной системы, находящейся в общем случае движения относительно неподвижной системы, согласно (4.18), равна

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{k}', \tag{5.6}$$

причем $\vec{\omega}$ - угловая скорость подвижной системы. Из рис.5.3 следует, что

$$\vec{r}_K = \vec{r}_{0'} + \vec{k}'.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем:

$$\frac{d\vec{r}_K}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

или

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{0'} + \frac{d\vec{k}'}{dt}. \tag{5.7}$$

Так как левые части (5.6) и (5.7) равны, то и правые равны, следовательно,

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}'. \tag{5.8}$$

Аналогичным образом получаем:

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}', \qquad \frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}'. \tag{5.9}$$

Заметим, что скорость поступательной части движения подвижной системы не вошла в полученные формулы. Это связано с тем, что при поступательном движении подвижной системы относительно неподвижной орты $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ не получают приращения.

***Лемма 2. Об абсолютной производной по времени от вектора переменной длины, записанного в подвижной системе отсчета***. В качестве вектора переменной длины, записанного в проекциях на оси подвижной системы, возьмем вектор

$$\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'. \tag{5.10}$$

и продифференцируем его по времени:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}. \tag{5.11}$$

Преобразуем полученное выражение (5.11), используя (5.8), (5.9) и (5.10):

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}', \tag{5.12}$$

где

$$\frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'. \tag{5.13}$$

Производную $d\tilde{\vec{r}}'/dt$ называют *локальной или относительной производной*, поскольку при ее вычислении не учитывается движение системы $x'y'z'$ относительно неподвижной системы xyz. В отличие от этого, производную $d\vec{r}'/dt$ называют *абсолютной производной*, так как при ее вычислении учитывается полное изменение вектора $\vec{r}'(t)$, состоящее из двух частей: из изменения со временем этого вектора в системе $x'y'z'$, и из его изменения, обусловленного движением системы $x'y'z'$ относительно системы xyz. Можно сказать, что относительную производную $d\tilde{\vec{r}}'/dt$ вычисляет человек, находящийся в системе $x'y'z'$ и даже не подозревающий, что эта система движется, а производную $d\vec{r}'/dt$ определяет наблюдатель, находящийся в системе xyz и видящий как изменяется вектор $\vec{r}'(t)$ в системе $x'y'z'$ и как движется сама эта система.

## 5.3. Теорема о сложении скоростей точки

Рассмотрим движение точки М в двух системах отсчета: неподвижной xyz с началом в точке O и подвижной $x'y'z'$ с началом в точке $O'$. Положение точки М в неподвижной системе xyz задается радиус-вектором (рис.5.1)

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \tag{5.14}$$

а в подвижной $x'y'z'$ - радиусом-вектором

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}'.$$

*Скорость точки относительно подвижной системы $x'y'z'$ называют относительной скоростью* и обозначают $\vec{v}_r$ (индекс r - от начала французского слова relatif, что в переводе означает «относительный»).

Относительная скорость точки M равна относительной (локальной) производной от радиус-вектора $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{v}_r = \frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt}. \tag{5.15}$$

*Переносная скорость точки M - это скорость того пункта подвижной системы (относительно неподвижной), с которым в данный момент совпадает движущаяся точка M.* Переносная скорость точки обозначается $\vec{v}_e$ (индекс e - от начала французского слова entrainer, что в переводе означает «увлекать за собой»).

Так как подвижная система $x'y'z'$ находится в общем случае движения относительно неподвижной системы xyz, то скорость пункта подвижной системы определяется формулой (4.18), и следовательно, переносная скорость точки M равна

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \tag{5.16}$$

*Абсолютная скорость точки - это скорость точки относительно неподвижной системы xyz.* Она обозначается $\vec{v}_a$ (индекс a - от начала французского слова absolue, что в переводе означает «абсолютный») и равна абсолютной производной по времени от радиус-вектора (5.13):

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{5.17}$$

Из рис.5.1 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}_{0'} + \vec{r}'.$$

Подставляя это выражение в (5.17) и произведя дифференцирование, получаем абсолютную скорость точки:

$$\vec{v}_a = \frac{d(\vec{r}_{0'} + \vec{r}')}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}. \tag{5.18}$$

Последнее слагаемое в этой формуле представляет собой абсолютную производную от вектора $\vec{r}'$, записанного в подвижной системе отсчета. На основании (5.12) она равна относительной производной от этого вектора, сложенной с векторным произведением угловой скорости подвижной системы на дифференцируемый вектор, что с учетом (5.15) дает:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{r}}'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{r}' = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}'. \tag{5.19}$$

Подставляя это выражение в (5.18) и учитывая при этом, что $\frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} = \vec{v}_{0'}$,

получаем:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{0'} + \vec{\omega}\times\vec{r}'. \tag{5.20}$$

Поскольку сумма двух последних слагаемых есть не что иное, как переносная скорость (5.14), окончательно получаем:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e. \tag{5.21}$$

Полученная запись выражает ***теорему о сложении скоростей точки***: *абсолютная скорость точки, совершающей сложное движение, равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.*

Если известны абсолютная и переносная скорости, то нетрудно из (5.21) получить относительную скорость:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e. \tag{5.22}$$

**Пример 5.1**. По диагонали боковой грани куба, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего ребра, движется точка М со скоростью *u* (рис.5.4). Определить абсолютную скорость этой точки в момент, когда она находится в вершине В куба. Длина ребра куба равна $\ell$.

*Решение.* Точка М находится в сложном движении: она движется относительно куба - это относительное движение точки, и переносится вращающимся кубом в неподвижном пространстве - это переносное движение точки.

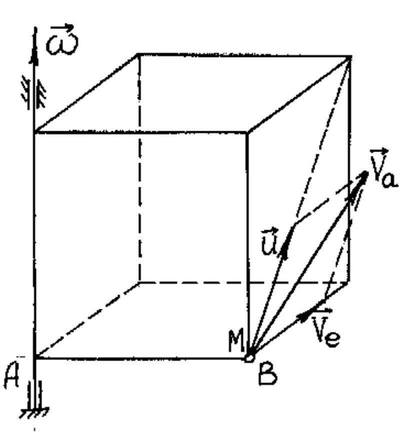



Рис.5.4

Вектор относительной скорости точки М равен $\vec{v}_r = \vec{u}$ и направлен по диагонали боковой грани куба. Вектор переносной скорости, равный $v_e = \omega\ell$, идет по касательной к окружности радиуса AB, которую описывает вершина B куба (с вершиной B в данный момент совпадает движущаяся точка M). Вектор абсолютной скорости точки M направлен по диагонали параллелограмма, построенного на этих скоростях (рис.5.4), и равен

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos 45^\circ} = \sqrt{u^2 + \omega^2\ell^2 + 2u\omega\ell \cos 45^\circ} .$$

## 5.4. Сложение скоростей в общем случае сложного движения точки

Пусть точка M совершает движение относительно системы $S_1$, которая в свою очередь совершает некоторое движение относительно системы $S_2$. Пусть, кроме того, система $S_2$ движется относительно системы $S_3$ и т.д., и, наконец, некоторая система $S_к$ совершает движение относительно системы S (рис.5.5).

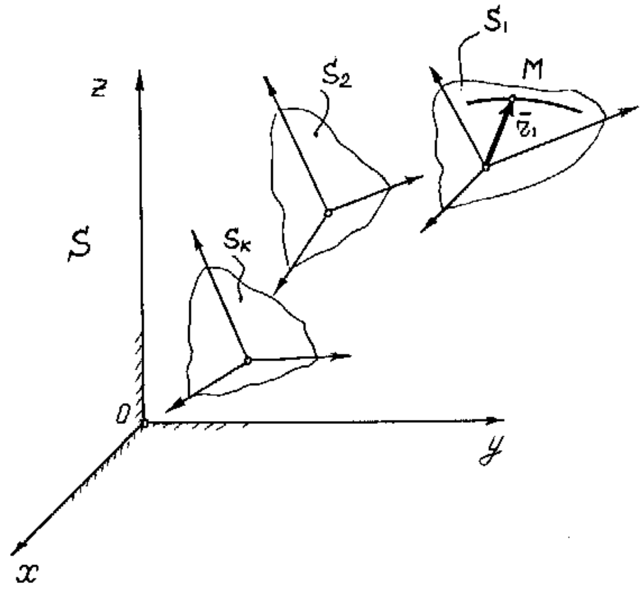



Рис.5.5

В отличие от предыдущего параграфа, абсолютное движение точки M относительно системы S состоит уже не из двух, а из *k+1* движений. Определим скорость точки M относительно системы S.

Обозначая скорость точки M относительно системы $S_1$ через $\vec{v}_{r1}$, а через $\vec{v}_{e1}$ - скорость относительно системы $S_2$ той точки системы $S_1$, с которой в данный момент совпадает точка M, по теореме о сложении скоростей находим скорость точки M относительно системы $S_2$:

$$\vec{v}_{r_2} = \vec{v}_{r_1} + \vec{v}_{e_1}.$$

Обозначая, далее, через $\vec{v}_{e_2}$ - скорость относительно системы $S_3$ той точки системы $S_2$, с которой в данный момент совпадает точка М, по теореме сложения скоростей находим скорость точки М относительно системы $S_3$:

$$\vec{v}_{r_3} = \vec{v}_{r_2} + \vec{v}_{e_2} = \vec{v}_{r_1} + \vec{v}_{e_1} + \vec{v}_{e_2}.$$

Продолжая процесс далее, определим скорость точки М относительно системы S:

$$\vec{v} = \vec{v}_{r_k} + \vec{v}_{e_k} = \vec{v}_{r_1} + \sum_{i=1}^{k} \vec{v}_{e_i}, \tag{5.23}$$

где $\vec{v}_{e_i}$ - скорость относительно системы $S_{i+1}$ точки системы $S_i$, совпадающей в данный момент с точкой М.

Таким образом, на основании (5.23) заключаем, что *скорость абсолютного движения точки равна геометрической сумме скоростей составляющих движений.*

Заметим, что *k* в формуле (5.23) - это число подвижных систем отсчета.

## 5.5. Теорема о сложении ускорений точки (теорема Кориолиса)

*Относительное ускорение точки - это то ускорение, которое имеет точка при движении относительно подвижной системы $x'y'z'$.* Оно равно относительной производной от вектора относительной скорости:

$$\vec{a}_r = \frac{d\tilde{\vec{v}}_r}{dt}. \tag{5.24}$$

При вычислении относительного ускорения движение подвижной системы не учитывается.

*Переносное ускорение точки - это ускорение того пункта подвижной системы (относительно неподвижной), с которым в данный момент совпадает движущаяся точка.* Оно обозначается $\vec{a}_e$ Так как подвижная система находится в общем случае движения относительно неподвижной системы, то ускорение пункта подвижной системы определяется формулой (4.19), и следовательно, переносное ускорение точки М равно

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{0'} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}\,'. \tag{5.25}$$

*Абсолютное ускорение точки - это ускорение точки при движении относительно неподвижной системы.* Оно обозначается $\vec{a}_a$ и равно

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt}. \tag{5.26}$$

Для определения абсолютного ускорения подставим в (5.26) выражение (5.15) и вычислим абсолютную производную:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_r + \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,') = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}\,'}{dt}. \tag{5.27}$$

Векторы $\vec{v}_{0'}$, $\vec{\omega}$, характеризующие движение подвижной системы, записаны в абсолютной системе, поскольку движение подвижной системы может видеть только наблюдатель, находящийся в неподвижной системе. Абсолютные производные от этих векторов, входящие в (5.27), равны

$$\frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} = \vec{a}_{0'} \quad , \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}. \tag{5.28}$$

Векторы $\vec{r}\,', \vec{v}_r$, определяющие положение и скорость точки М в подвижной системе, естественно, записаны наблюдателем, находящимся в этой подвижной системе. Следовательно, на основании (5.12), их абсолютные производные, входящие в (5.27), равны:

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{r}}\,'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,', \quad \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{v}}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}\,'_r. \tag{5.29}$$

С учетом формул (5.15) и (5.24), а именно,

$$\frac{d\tilde{\vec{r}}\,'}{dt} = \vec{v}_r, \quad \frac{d\tilde{\vec{v}}_r}{dt} = \vec{a}_r,$$

выражения (5.29) преобразуются к виду:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_r + \vec{\omega}\times\vec{r}', \quad \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{v}_r'.$$

Подставляя эти выражения в (5.27) и учитывая при этом (5.28), получаем

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{0'} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}' + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r. \qquad (5.30)$$

Сумма $\vec{a}_{0'} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'$, входящая в (5.30), представляет собой переносное ускорение. Слагаемое $2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ называют кориолисовым ускорением и обозначают $\vec{a}_c$ (индекс с - начальная буква фамилии французского механика Coriolis, получившего формулу (5.30)).

Таким образом, абсолютное ускорение точки равно

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c. \qquad (5.31)$$

Полученная формула выражает ***теорему Кориолиса***: *абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение, равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и кориолисова*.

## 5.6. Вычисление и построение кориолисова ускорения

Величина вектора кориолисова ускорения

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e\times\vec{v}_r \qquad (5.32)$$

равна

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_r). \qquad (5.33)$$

Чтобы построить вектор $\vec{a}_c$, можно воспользоваться правилом Жуковского:

1) через точку М, ускорение которой определяется, провести плоскость П, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}_e$ - угловой скорости переносного движения (рис.5.6);

2) на плоскость П спроектировать вектор $\vec{v}_r$ относительной скорости точки М;

3) полученную проекцию $\vec{v}_r'$ повернуть в плоскости П на 90° в сторону, согласованную с направлением угловой скорости $\vec{\omega}_e$.

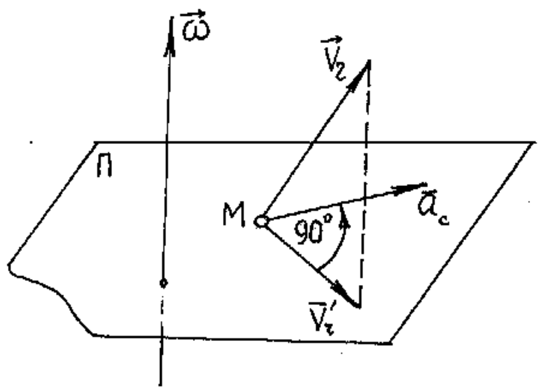


Рис.5.6

Построенный по этому правилу вектор совпадает по направлению с вектором кориолисова ускорения.

В частных случаях кориолисово ускорение может оказаться равным нулю. Из (5.32) следует, что $\vec{a}_c = 0$, если

1) $\vec{\omega}_e = 0$, т.е. переносное движение - поступательное;

2) $\vec{v}_r = 0$ (в некоторые моменты времени скорость относительного движения точки может оказаться равной нулю, например, в моменты перемены направления движения при колебательном движении);

3) $\vec{\omega}_e \parallel \vec{v}_r$, при этом $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0$.

Влияние кориолисова ускорения, возникающего в результате вращения Земли вокруг ее оси, отражается на разнообразных явлениях, которые наблюдаются на земной поверхности.

Рассмотрим точку М, движущуюся вдоль меридиана с севера на юг со скоростью $\vec{v}_r$ (рис.5.7). Принимая во внимание направление угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения Земли, определяем на основании формулы (5.32) направление вектора $\vec{a}_c$ - кориолисова ускорения. В северном полушарии этот вектор направлен на восток (по касательной к параллели), а в южном - на запад. На экваторе кориолисово ускорение равно нулю.

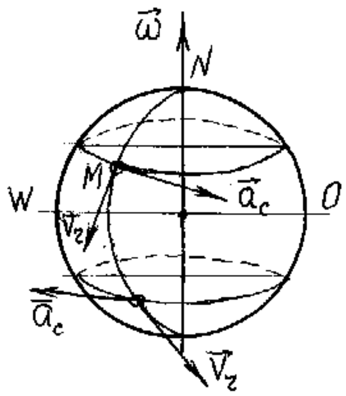



Рис.5.7

Пусть рассмотренная точка М - частица воды в реке, текущей вдоль меридиана с севера на юг. Наличие кориолисова ускорения свидетельствует о наличии некоторой силы, действующей на частицу воды. Но действию соответствует противодействие. Следовательно, частица воды действует на русло реки. Из-за этого реки, текущие в северном полушарии вдоль меридиана с севера на юг (или с юга на север), размывают свой правый берег, а в южном полушарии - левый берег (закон Бера).Поэтому в северном полушарии правые берега рек крутые, а левые - пологие.

Аналогично можно объяснить и направление пассатов вблизи экватора.

Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в «Динамике».

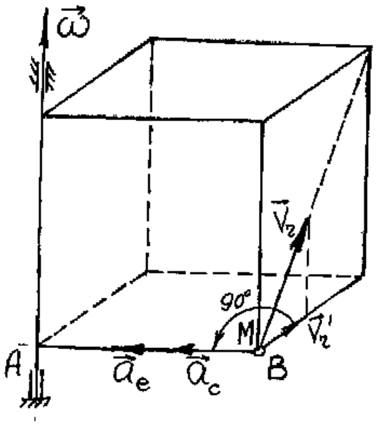



Рис.5.8

**Пример 5.2.** По диагонали боковой грани куба, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего ребра, движется точка М с постоянной скоростью $v_r$ (рис.5.8). Определить абсолютное ускорение точки М в момент, когда она находится в вершине В куба. Длина ребра куба равна $\ell$.

*Решение.* По теореме Кориолиса абсолютное ускорение точки М равно

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c .$$

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ равно нулю, так как относительное движение точки М - это движение по прямой с постоянной скоростью $v_r$.

Переносное ускорение равно $a_e = \omega^2 \ell$ и направлено к оси вращения куба.

Чтобы определить Кориолисово ускорение воспользуемся правилом Жуковского. Плоскость П, перпендикулярная вектору $\vec{\omega}$ и проходящая через точку М - это нижнее основание куба. Спроектируем на эту плоскость вектор $\vec{v}_r$, и полученный вектор $\vec{v}'_r$ .повернем в плоскости нижней грани куба на 90° в сторону, согласованную с направлением угловой скорости вращения куба (в данном примере против часовой стрелки). Вектор кориолисова ускорения направлен, как и вектор переносного ускорения, к оси вращения (рис.5.8). Величина кориолисова ускорения равна $a_c = 2\omega v_r \sin 45^\circ$.

Абсолютное ускорение точки М равно

$$a_a = \omega^2 \ell + 2\omega v_r \sin 45^\circ .$$

## 5.7. Сложение ускорений в общем случае сложного движения точки

Пусть точка М совершает движение относительно системы $S_1$, которая в свою очередь совершает некоторое движение относительно системы $S_2$., а система $S_2$ движется относительно системы $S_3$ и т.д., и, наконец, некоторая система $S_к$ совершает движение относительно системы S (рис.5.5). Требуется определить ускорение точки М относительно системы S.

Обозначая ускорение точки М относительно системы $S_1$ через $\vec{a}_r$, а через $\vec{a}_{e_1}$ - ускорение относительно системы $S_2$ той точки системы $S_1$, с которой в данный момент совпадает точка М, по теореме Кориолиса находим ускорение точки М относительно системы $S_2$:

$$\vec{a}_{r_2} = \vec{a}_r + \vec{a}_{e_1} + 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_{r_1} , \qquad (5.34)$$

где $\vec{\omega}_1$ - угловая скорость системы $S_1$ относительно системы $S_2$.

Обозначая, далее, через $\vec{a}_{e_2}$ - ускорение относительно системы $S_3$ той точки системы $S_2$, с которой в данный момент совпадает точка М, по теореме о сложении ускорений имеем:

$$\vec{a}_{r_3} = \vec{a}_{r_2} + \vec{a}_{e_2} + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{r_2} = \vec{a}_r + \vec{a}_{e_1} + \vec{a}_{e_2} + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{r_2} ,$$

или, с учетом (5.34),

$$\vec{a}_{r3} = \vec{a}_r + \vec{a}_{e1} + \vec{a}_{e2} + 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{r2} ,$$

где $\vec{\omega}_2$ - угловая скорость системы $S_2$ относительно системы $S_3$.

Продолжая процесс далее, определим ускорение точки M относительно системы S:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \sum_{i=1}^{k} \vec{a}_{e_i} + 2\sum_{i=1}^{k} \vec{\omega}_i \times \vec{v}_{r_i} . \qquad (5.35)$$

Нетрудно видеть, что при k = 1 формула (5.35) выражает теорему Кориолиса.

## 5.8. Решение задач

**Задача 5.1.** Записать уравнения абсолютного движения точки M обода колеса, движущегося без проскальзывания с постоянной скоростью v по прямолинейному рельсу (рис.5.2).

Точка M находится на расстоянии CM = R от оси колеса, а касание колеса с рельсом происходит на расстоянии r от его оси. В начальный момент точка M занимает крайнее нижнее положение $M_0$. Уравнения записать в неподвижной системе $xC_0y$, показанной на рис.5.9.

*Решение.* Движение точки M относительно движущегося вагона, т.е. движение по окружности радиуса CM, - это относительное движение.

Чтобы определить переносное движение точки, «приклеим» точку M к вагону. То обстоятельство, что точка M лежит за пределами вагона, не должно мешать ее «приклеиванию».

Нужно понимать, что с вагоном скреплено тело (подвижная система отсчета), занимающее все пространство, причем это тело движется точно так же, как и вагон. Поэтому при мысленной операции «приклеивания» точки M к вагону, последний нужно увеличить до таких размеров, не изменяя характера его движения, чтобы он включил в себя точку M. Прямолинейное движение «приклеенной» к вагону точки M - это переносное движение точки.

Переносное движение тела  -  это поступательное движение вагона относительно земли.

Наконец, движение точки М относительно земли  -  это абсолютное движение точки (движение по удлиненной циклоиде).

Уравнения относительного движения точки М в системе $x'Cy'$, согласно (5.2) и рис.5.9, имеют вид:

$$x' = R\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -R\sin\varphi, \quad y' = R\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -R\cos\varphi. \qquad (5.36)$$

Угол $\varphi$ можно выразить через время t. Так как точка касания колеса с рельсом является мгновенным центром скоростей колеса, то

$$\omega = \frac{v}{r},$$

следовательно,

$$\varphi = \int \omega dt = \frac{v}{r}t. \qquad (5.37)$$

Переходим в неподвижную систему $xC_0y$. Поскольку подвижная система $x'Cy'$ движется относительно неподвижной поступательно, матрица B, фигурирующая в (5.4), превращается в единичную матрицу, и уравнения (5.4) абсолютного движения приобретают вид (роль точки $O'$ играет в рассматриваемой задаче точка C):

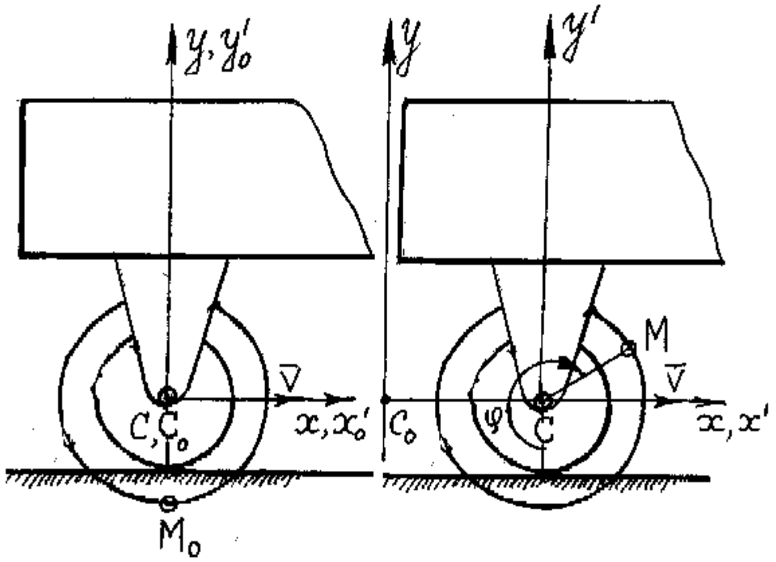



Рис.5.9

$$x = x_C + x', \quad y = y_C + y'.$$

Подставляя в эти уравнения $x_C = vt$, $y_C = 0$ и учитывая (5.36) и (5.37), получаем уравнения абсолютного движения точки М:

$$x = vt - R\sin\left(\frac{vt}{r}\right), \quad y = -R\cos\left(\frac{vt}{r}\right). \tag{5.38}$$

Уравнения (5.38) - это параметрические уравнения удлиненной циклоиды, показанной на рис.5.2.

**Задача 5.2.** По радиусу диска, вращающегося вокруг оси АВ (рис.5.10) с угловой скоростью $\omega$ = 2t $c^{-1}$, в направлении от центра О диска к его ободу движется точка М по закону: ОМ = $4t^2$ см. Радиус ОМ составляет с осью АВ угол $60^\circ$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М при t = 1 с.

*Решение.* Найдем положение точки М при t = 1 с: ОМ = 4 см (рис.5.10). Разложим сложное движение точки М на составляющие: относительное (относительно диска) и переносное (вместе с диском). Траекторией относительного движения является прямая ОМ. Относительная скорость точки М равна

$$v_r = \frac{d(OM)}{dt} = \frac{d(4t^2)}{dt} = 8t$$

и направлена по радиусу диска (рис.5.10). Относительное ускорение равно

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = 8.$$

Вектор относительного ускорения направлен так же, как и вектор относительной скорости.

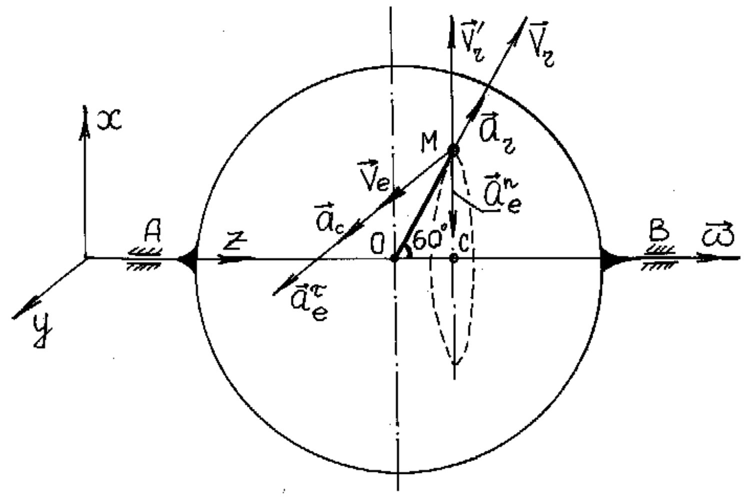



Рис.5.10

Траекторией переносного движения точки М, как точки вращающегося диска, служит окружность радиуса СМ, располагающаяся в плоскости, перпендикулярной оси АВ вращения диска. Центр С этой окружности лежит на оси АВ. Переносная скорость направлена по касательной к этой окружности (параллельно оси y) и равна

$$v_e = \omega \cdot CM = 2t \cdot OM\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\,t^2.$$

Так как переносное движение происходит по кривой, то переносное ускорение имеет две составляющие:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau.$$

Нормальная составляющая направлена к центру С окружности и равна

$$a_e^n = \omega^2 \cdot CM = 8\sqrt{3}t^2.$$

Касательная составляющая равна

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot CM = \frac{d\omega}{dt} \cdot OM\cos 30^\circ = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

и направлена по касательной к окружности радиуса СМ (параллельно координатной оси y) в ту же сторону, что и переносная скорость, поскольку угловое ускорение диска получилось положительным ($\varepsilon = 2$).

Для определения кориолисова ускорения воспользуемся правилом Жуковского. Нанесем на чертеж вектор $\vec{\omega}$ вдоль оси АВ, причем так, чтобы с конца этого вектора вращение диска виделось против часовой стрелки (рис.5.10), и проведем через точку М плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{\omega}$. След этой плоскости проходит через точки С и М. На эту плоскость спроектируем вектор $\vec{v}_r$. Полученную проекцию, т.е. вектор $\vec{v}'_r$, повернем в проведенной плоскости на 90° в сторону переносного вращения. Образованный таким образом вектор параллелен оси x. Величина кориолисова ускорения равна

$$a_c = 2\omega v_r \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_r) = 2 \cdot 2t \cdot 8t \cdot \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}\, t^2 .$$

Вычислим абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M. Так как вектор $\vec{v}_e$ перпендикулярен плоскости диска, а вектор $\vec{v}_r$ лежит в плоскости диска, то абсолютная скорость точки M равна

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = 4t\sqrt{4 + 3t^4} .$$

Для вычисления абсолютного ускорения запишем векторное равенство

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

в проекциях на оси координат (рис.5.10):

$$a_{a_x} = a_r \sin 60^\circ + a_e^n = 4\sqrt{3} - 8\sqrt{3}\, t^2 ,$$

$$a_{a_y} = a_e^\tau + a_c = 4\sqrt{3}t + 16\sqrt{3}\, t^2 ,$$

$$a_{a_z} = a_r \cos 60^\circ = 4 .$$

Абсолютное ускорение равно

$$a_a = \sqrt{a_{a_x}^2 + a_{a_y}^2 + a_{a_z}^2} .$$

При t =1c $\quad v_a = 4\sqrt{7}$ см/с, $\quad a_a \approx 35{,}56$ см/с$^2$.

**Задача 5.3.** В неподвижной системе отсчета диск A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$ вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рис.5.11, а ползун B движется по горизонтальным направляющим с постоянной скоростью v. Линия действия вектора скорости ползуна проходит через точку O. В момент, когда ползун B находится на расстоянии $\ell$ от центра диска, найти его скорость и ускорение относительно системы отсчета, жестко связанной с вращающимся диском A.

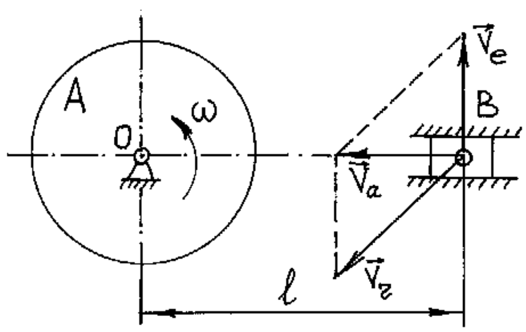



Рис.5.11

*Решение.* В этой задаче, в отличие от предыдущей, задана абсолютная скорость $\vec{v}_a$ точки В ($\vec{v}_a = \vec{v}$), а найти нужно относительную скорость $\vec{v}_r$ точки В.

Для решения этой задачи представим движение точки В как совокупность переносного движения (вместе с диском) и относительного (относительно системы, связанной с диском). Тогда, согласно (5.21), запишем относительную скорость точки В как разность векторов абсолютной и переносной скоростей:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e .$$

Абсолютная скорость ползуна В известна: $\vec{v}_a = \vec{v}$ . Следовательно, для определения относительной скорости ползуна нужно знать его переносную скорость. Чтобы найти переносную скорость, мысленно свяжем точку В с диском А (для этой операции следует мысленно увеличить диск до таких размеров, чтобы точка В оказалась на увеличенном диске). Траекторией переносного движения точки В, как точки вращающегося тела, в момент, изображенный на рис.5.11, является окружность радиуса ОВ = $\ell$. Вектор переносной скорости направлен по касательной к этой окружности и равен

$$v_e = \omega \ell .$$

Для построения вектора относительной скорости нужно соединить концы векторов переносной и абсолютной скоростей, и полученный отрезок (относительную скорость) перенести в точку В. Направление относительной скорости следует выбрать так, чтобы вектор абсолютной скорости оказался диагональю параллелограмма, построенного на векторах переносной и относительной скоростей. Из (рис.5.11) следует, что относительная скорость точки В равна

$$v_r = \sqrt{v_a^2 + v_e^2} = \sqrt{v^2 + \omega^2 \ell^2} .$$

Переходим к вычислению относительного ускорения точки В. Согласно формуле (5.26), относительное ускорение равно

$$\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c ,$$

следовательно, для определения относительного ускорения нужно знать абсолютное, переносное и кориолисово ускорения.

Определим абсолютное ускорение точки B. Так как ползун B в абсолютном движении перемещается по прямой OB с постоянной скоростью v, то его абсолютное ускорение равно нулю, т.е. $\vec{a}_a = 0$.

Определим кориолисово ускорение точки B. Для этого воспользуемся вектором $\vec{v}_r$. Этот вектор лежит в плоскости,

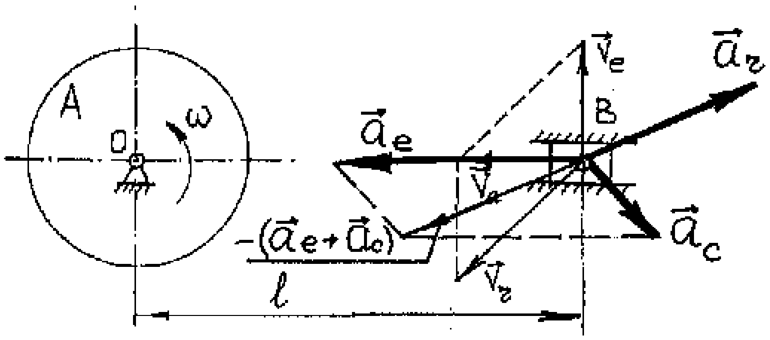



Рис.5.12

перпендикулярной вектору $\vec{\omega}$. Поэтому для определения направления вектора кориолисова ускорения достаточно повернуть в плоскости чертежа (рис.5.12) вектор $\vec{v}_r$ на угол 90° в сторону переносного вращения (против часовой стрелки). Величина кориолисова ускорения равна $a_c = 2\omega v_r = 2\omega\sqrt{v^2 + \omega^2\ell}$ .

Определим переносное ускорение точки B. Для этого свяжем мысленно точку B с вращающимся диском. При этом она будет равномерно двигаться по окружности радиуса OB, а ее ускорение в этом движении будет направлено к центру O и равно $a_e = \omega^2\ell$ .

Теперь, когда абсолютное, переносное и кориолисово ускорения известны, можно определить относительное ускорение - $\vec{a}_r$. Так как $\vec{a}_a = 0$, то

$$\vec{a}_r = -(\vec{a}_e + \vec{a}_c) .$$

Следовательно, вектор $\vec{a}_r$ идет в сторону, противоположную диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}_e$ и $\vec{a}_c$ (рис.5.12).
Величину относительного ускорения найдем по теореме косинусов:

$$a_r = \sqrt{a_e^2 + a_c^2 + 2a_e a_c \cos(\vec{a}_e, \vec{a}_c)} .$$

Так как

$$\cos(\vec{a}_e, \vec{a}_c) = -\frac{v_e}{v_a} = -\frac{\omega\ell}{v},$$

то

$$a_r = \omega^2 \sqrt{\ell^2 + 4(v^2 + \omega^2\ell) - 4\ell^2(1 + \omega^2\ell / v^2)^{1/2}} .$$

**Задача 5.4.** В кулисном механизме (рис.5.13) при качании кривошипа ОА вокруг оси О, перпендикулярной к плоскости чертежа, ползун М, перемещаясь вдоль кривошипа, приводит в движение стержень ВМ, движущийся в вертикальных направляющих. В момент $t_1 = \frac{1}{12}$с определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение ползуна М, если $\varphi = \frac{\pi}{3}\sin 2\pi t$. Расстояние между осью О и вертикальными направляющими равно $\ell$.

*Решение.* Абсолютное движение ползуна М вдоль вертикальной прямой ВМ можно рассматривать как состоящее из двух движений : по кривошипу (относительное движение) и вместе с кривошипом (переносное движение).

Вектор относительной скорости направлен по прямой ОМ и равен

$$v_r = \frac{d(OM)}{dt} = \frac{d(\ell / \cos\varphi)}{dt} = \ell\frac{\dot{\varphi}\sin\varphi}{\cos^2\varphi},$$

где

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{2\pi^2}{3}\cos 2\pi t .$$

Вектор переносной скорости перпендикулярен кривошипу OA и равен

$$v_e = \omega \cdot OM = \omega \frac{\ell}{\cos\varphi}.$$

Вектор абсолютной скорости направлен по вертикальной прямой BM и равен (рис.5.13)

$$v_a = v_r \sin\varphi + v_e \cos\varphi. \tag{5.39}$$

Переходим к вычислению ускорений. Вектор относительного ускорения направлен по прямой OM и равен

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ell \frac{\dot\varphi \sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) = \ell \frac{\ddot\varphi \sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \ell\dot\varphi^2 \frac{1+2\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi},$$

где

$$\ddot\varphi = \varepsilon = -\frac{4\pi^3}{3}\sin 2\pi t.$$

Переносное ускорение имеет две составляющие: касательную и нормальную, поскольку траекторией переносного движения является окружность радиуса OM. Вектор нормального ускорения в переносном движении направлен к оси O и равен

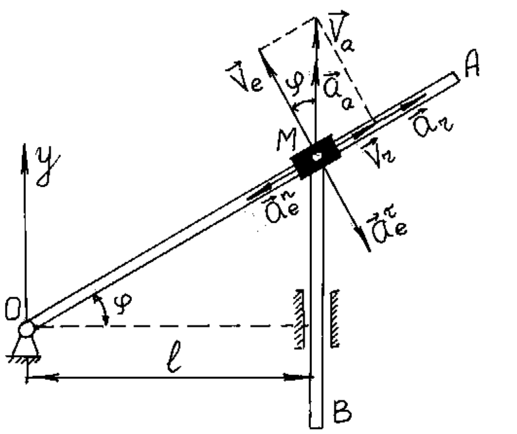


Рис.5.13

$$a_e^n = \omega^2 \cdot OM = \omega^2 \frac{\ell}{\cos\varphi}.$$

Вектор касательного ускорения в переносном движении идет перпендикулярно вектору нормального ускорения и равен

$$a_e^\tau = \varepsilon \cdot OM = \varepsilon \frac{\ell}{\cos\varphi}.$$

Так как $\varepsilon < 0$, то вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную переносной скорости (рис.5.13).

Вектор кориолисова ускорения направлен под углом в 90° к вектору $\vec v_r$ и равен

$$a_c = 2\omega v_r\,.$$

Вектор абсолютного ускорения точки М, как точки стержня ВМ, движущегося в вертикальных направляющих, может быть направлен только по вертикальной прямой. Поэтому, проектируя все составляющие ускорения на вертикаль (ось у), получаем абсолютное ускорение точки М:

$$a_a = a_r \sin\varphi - a_e^n \sin\varphi - a_e^\tau \cos\varphi + a_c \cos\varphi\,. \qquad (5.40)$$

Ускорение $a_e^\tau$ нужно подставлять в (5.40) без учета знака, поскольку то обстоятельство, что это ускорение идет в сторону, противоположную переносной скорости, учтено при проектировании.

При $t_1$ = 1/12c угловые характеристики принимают следующие значения:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}\sin 2\pi t_1 = \frac{\pi}{6}\,,$$

$$\dot\varphi_1 = \omega_1 = \frac{2\pi^2}{3}\cos 2\pi t_1 = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{3}\,,$$

$$\ddot\varphi_1 = \varepsilon_1 = -\frac{4\pi^3}{3}\sin 2\pi t_1 = -\frac{2\pi^3}{3}\,.$$

В рассматриваемый момент времени составляющие линейной скорости и линейного ускорения точки М приобретают такие значения:

$$v_{r_1} = \ell\frac{\dot\varphi_1 \sin\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\ell\pi^2\,, \quad v_{e_1} = \omega_1\frac{\ell}{\cos\varphi_1} = \frac{2}{3}\ell\pi^2\,,$$

$$a_{e_1}^n = \omega_1^2\frac{\ell}{\cos\varphi_1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\ell\pi^4\,, \quad a_{e_1}^\tau = \varepsilon_1\frac{\ell}{\cos\varphi_1} = -\frac{4\sqrt{3}}{9}\ell\pi^3\,,$$

$$a_{r_1} = \ell\frac{\ddot\varphi_1\sin\varphi_1}{\cos^2\varphi_1} + \ell\dot\varphi_1^2\frac{1+2\sin^2\varphi_1}{\cos^3\varphi_1} = -\frac{4}{9}\ell\pi^3 + \frac{10\sqrt{3}}{27}\ell\pi^4\,,$$

$$a_{c_1} = 2\omega_1 v_{r_1} = \frac{4}{9}\ell\pi^4\,.$$

В рассматриваемый момент времени абсолютная скорость и абсолютное ускорение точки М в соответствии с формулами (5.39) и (5.40) равны:

$$v_{a_1} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\ell\pi^2, \qquad a_{a_1} = \frac{8\sqrt{3}}{27}\ell\pi^3(\pi\sqrt{3}-3). \tag{5.41}$$

***Другой способ решения.*** В неподвижной (абсолютной) системе положение точки М в произвольный момент времени определяется координатой (рис.5.13)

$$y = \ell \cdot \mathrm{tg}\varphi .$$

Первая производная от y по t дает абсолютную скорость точки М:

$$v_a = \dot{y} = \ell\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi},$$

а вторая - абсолютное ускорение:

$$a_a = \ddot{y} = \ell\frac{\ddot{\varphi}\cos^2\varphi + 2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi}.$$

Предоставляем самостоятельно убедиться в том, что после подстановки в эти формулы значений угловых характеристик при t = 1/12c получаются выражения (5.41) для абсолютной скорости и абсолютного ускорения.

**Задача 5.5.** По подвижному радиусу диска от центра к ободу движется точка М с постоянной скоростью $\vec{v}_r$. Подвижный радиус поворачивается в плоскости диска с постоянной скоростью $\omega_1$ вокруг центра О. Плоскость диска вращается вокруг диаметра диска с постоянной скоростью $\omega_2$. (рис.5.14).

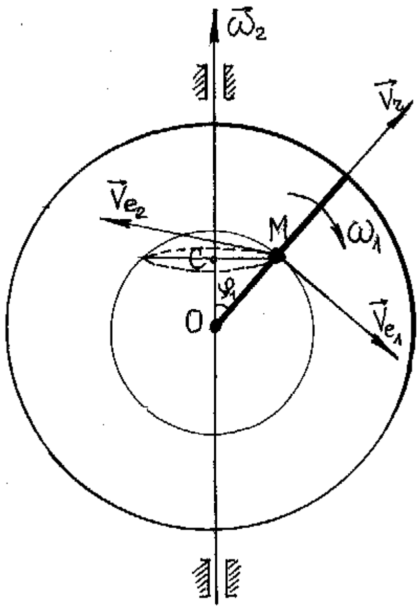


Рис.5.14

Найти абсолютную скорость точки М, считая, что при $t = 0$ точка М находилась в центре диска, а подвижный радиус был направлен по оси вращения диска.

*Решение.* В момент t подвижный радиус повернется от своего начального вертикального положения на угол

$$\varphi_1 = \omega_1 t.$$

За это время точка М пройдет по этому радиусу расстояние

$$OM = v_r t.$$

Точка М находится в трех движениях:

1) вдоль подвижного радиуса со скоростью $v_r$ ;

2) вместе с подвижным радиусом по окружности радиуса ОМ со скоростью

$$v_{e_1} = \omega_1 \cdot OM = \omega_1 \cdot v_r t\ ;$$

3) вместе с вращающимся диском вокруг диаметральной оси диска с угловой скоростью $\omega_2$. Траекторией этого движения служит окружность радиуса $CM = OM \cdot \sin\varphi$. Скорость в этом движении направлена перпендикулярно плоскости рисунка и равна

$$v_{e_2} = \omega_2 \cdot CM = \omega_2 \cdot OM \cdot \sin\varphi_1 = \omega_2 \cdot v_r t \sin(\omega_1 t).$$

Так как скорости трех составляющих движений взаимно перпендикулярны (рис.5.14), то абсолютная скорость точки M равна

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_{e_1}^2 + v_{e_2}^2} = v_r \sqrt{1 + t^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 \sin^2 \omega_1 t)} \; .$$

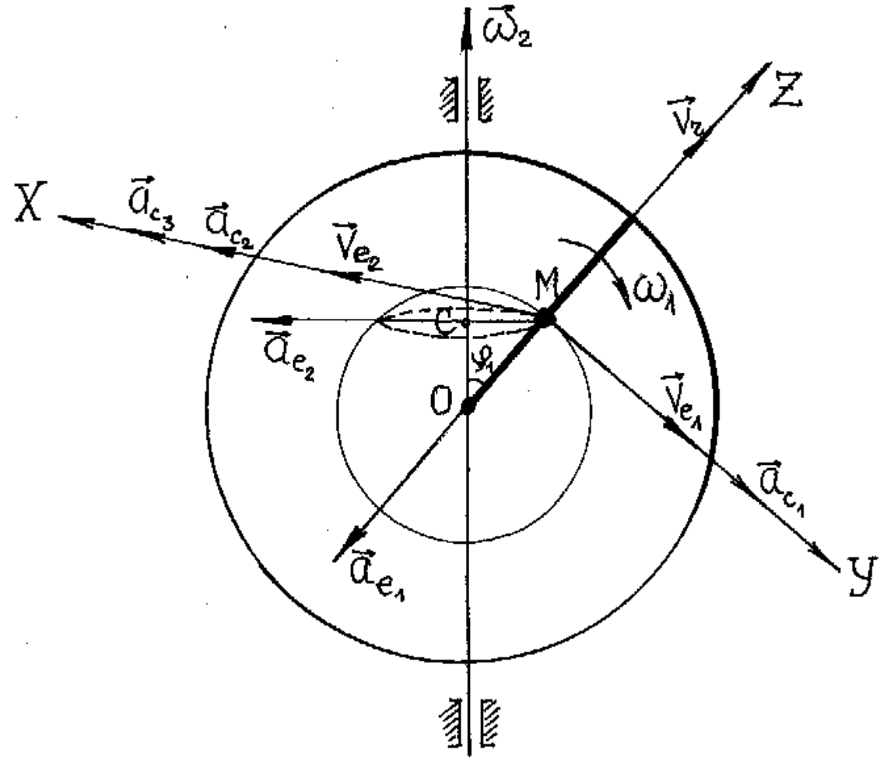



Рис.5.15

Переходим к определению ускорений. В данной задаче k - число

подвижных систем - равно 2. Одна подвижная система связана с подвижным радиусом, другая - с вращающимся диском. При k = 2 формула (5.35) приобретает вид:

$$\vec{a} \; = \vec{a}_r \; + \vec{a}_{e_1} + \vec{a}_{e_2} + + \vec{a}_{c_1} + \vec{a}_{c_2} + \vec{a}_{c_3} \quad , \qquad (5.42)$$

где

$$\vec{a}_{c_1} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_r \;\; , \;\; \vec{a}_{c_2} = 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_r \; , \;\; \vec{a}_{c_3} = 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{e_1} \, .$$

Относительное ускорение $\vec{a}_r$ равно нулю, так как относительное движение точки M - это прямолинейное движение вдоль подвижного радиуса с постоянной скоростью $\vec{v}_r$.

Переносное ускорение $\vec{a}_{e_1}$ - это ускорение той точки подвижного радиуса (при его вращении относительно диска), с которой совпадает в данное мгновение точка M. Так как подвижный радиус вращается с постоянной скоростью $\omega_1$ вокруг оси O диска, то вектор $\vec{a}_{e_1}$ направлен к оси O (рис.5.15) и равен $a_{e_1} = \omega_1^2 OM = \omega_1^2 v_r t$.

Кориолисово ускорение $\vec{a}_{c_1} = 2\vec{\omega}_1 \times \vec{v}_r$ лежит в плоскости диска и составляет прямой угол с вектором $\vec{v}_r$. Оно равно $a_{c_1} = 2\omega_1 v_r$ .

Ускорение $\vec{a}_{e_2}$ - это ускорение точки диска (совпадающей с точкой M) при его вращении с постоянной скоростью $\omega_2$ вокруг диаметральной оси диска. Оно направлено к оси вращения диска и равно

$$a_{e_2} = \omega_2^2 \cdot CM = \omega_2^2 \cdot OM \sin\varphi_1 = \omega_2^2 v_r t \sin(\omega_1 t).$$

Вектор $\vec{a}_{c_2} = 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_r$ перпендикулярен плоскости диска и равен

$$a_{c_2} = 2\omega_2 v_r \sin\varphi_1 = 2\omega_2 v_r \sin(\omega_1 t).$$

Вектор $\vec{a}_{c_3} = 2\vec{\omega}_2 \times \vec{v}_{e_1}$ тоже перпендикулярен плоскости диска и равен

$$a_{c_3} = 2\omega_2 v_{e_1} \sin(90^\circ - \varphi_1) = 2\omega_2\omega_1 OM \cos\varphi_1 = 2\omega_2\omega_1 v_r t \cos(\omega_1 t)$$

.

Для определения абсолютного ускорения точки M выбираем удобную для проектирования декартову систему XYZ и записываем векторное равенство (5.42) в проекциях на выбранные оси координат (рис.5.15):

$$a_X = a_{c_2} + a_{c_3} = 2\omega_2 v_r (\sin(\omega_1 t) + \omega_1 t \cos(\omega_1 t)),$$

$$a_Y = -a_{e_2} \cos\varphi_1 + a_{c_1} = -\omega_2^2 v_r t \sin(\omega_1 t) \cos(\omega_1 t) + 2\omega_1 v_r ,$$

$$a_Z = a_{e_1} + a_{e_2} \sin\varphi_1 = \omega_1^2 v_r t + \omega_2^2 v_r t \sin^2(\omega_1 t).$$

Абсолютное ускорение точки М равно

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2}\ .$$

Из данного примера видно, что если точка находится более чем в двух движениях, то вычислить по формуле (5.35) абсолютное ускорение этой точки оказывается делом затруднительным. В таких случаях обычно прибегают к другому методу, а именно, к *методу перехода из одной системы координат в другую.* Метод заключается в следующем.

Сначала записывают радиус-вектор точки в первой подвижной системе (в рассмотренном примере - это система, жестко связанная с подвижным радиусом). Затем, учитывая движение первой системы относительно второй, записывают радиус-вектор той же точки во второй подвижной системе (в рассмотренном примере - это система, жестко связанная с вращающимся диском), и так далее, вплоть до неподвижной системы (удобнее всего формулы перехода из одной системы в другую записывать в матричной форме). После того как получен радиус-вектор точки в неподвижной системе, его дважды дифференцируют по времени и тем самым получают абсолютное ускорение точки.

Не решая заново задачу целиком, покажем лишь основные моменты описанного алгоритма.

Вводим 3 системы отсчета - неподвижную xyz и две подвижных: $x'y'z'$ и $x''y''z''$. Система $x'y'z'$ связана с вращающимся радиусом, а система $x''y''z''$ - с вращающимся диском.

При t = 0 все три системы совпадают друг с другом (рис.5.16).

Запишем радиус-вектор точки М в системе $x'y'z'$:

$$\vec{r}\,' = v_r t \vec{k}\,', \qquad (5.43)$$

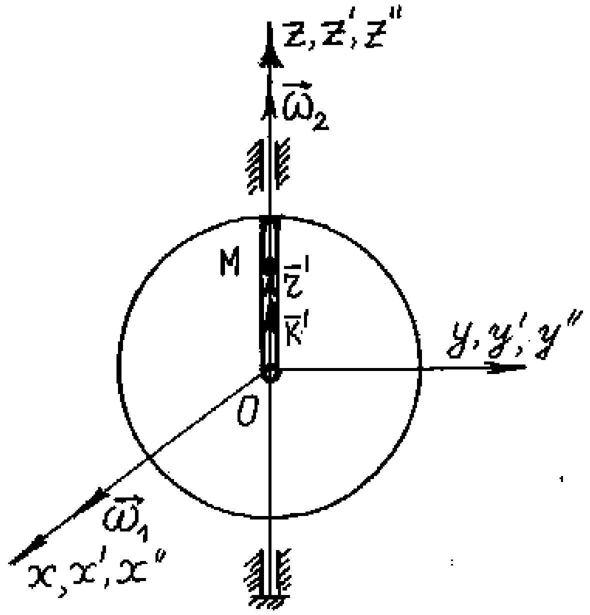



*Рис.5.16*

где $\vec{k}'$ - орт оси $z'$.

В системе $x''y''z''$, по отношению к которой система $x'y'z'$ вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_1$ вокруг оси $x''$, радиус-вектор той же точки М выглядит так:

$$\vec{r}'' = B_1 \vec{r}', \tag{5.44}$$

где $B_1$ - матрица поворота системы $x'y'z'$ на угол $(-\varphi_1)$, имеющая вид:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ 0 & -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix}.$$

В неподвижной системе $xyz$, по отношению к которой система $x''y''z''$ вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_2$ вокруг оси z, радиус-вектор точки М будет таким:

$$\vec{r} = B_2 \vec{r}'', \tag{5.45}$$

где $B_2$ - матрица поворота системы $x''y''z''$, определяемая так:

$$B_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С учетом (5.43) и (5.44) радиус-вектор точки М в системе $xyz$ приобретает вид:

$$\vec{r} = B_2 B_1 v_r t \vec{k}'. \tag{5.46}$$

Дифференцируя по времени это выражение, получаем вектор абсолютной скорости точки M:

$$\vec{v} = \dot{B}_2 B_1 v_r t \vec{k}' + B_2 \dot{B}_1 v_r t \vec{k}' + B_2 B_1 v_r t \vec{k}'. \qquad (5.47)$$

Дифференцируя по времени абсолютную скорость, получаем абсолютное ускорение точки M:

$$\vec{a} = \ddot{B}_2 B_1 v_r t \vec{k}' + 2\dot{B}_2 \dot{B}_1 v_r t \vec{k}' + B_2 \ddot{B}_1 v_r t \vec{k}' + 2\dot{B}_2 B_1 v_r \vec{k}' + 2B_2 \dot{B}_1 v_r \vec{k}'$$

или

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = (\ddot{B}_2 B_1 v_r t + 2\dot{B}_2 \dot{B}_1 v_r t + B_2 \ddot{B}_1 v_r t + 2\dot{B}_2 B_1 v_r + 2B_2 \dot{B}_1 v_r) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (5.48)$$

где $a_x, a_y, a_z$ - проекции абсолютного ускорения на оси неподвижной системы $xyz$.

Заметим, что между слагаемыми в матричном выражении (5.48) и векторами ускорений, показанными на рис.(5.15), имеется взаимно однозначное соответствие. Однако проекции абсолютного ускорения точки M на оси x, y, z не совпадают с проекциями этого вектора на оси X, У, Z , т.е. $a_x \neq a_X$ , $a_y \neq a_Y$ и $a_z \neq a_Z$, так как оси x, y, z (рис.5.16) не совпадают с осями X, У, Z (рис.5.15).

# 6. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

## 6.1. Сложение поступательных движений

В предыдущей главе было рассмотрено сложное движение точки. Если размеры тела невелики, так что траектории его точек мало отличаются друг от друга, то сложное движение тела можно изучать как сложное движение точки, что и было сделано в главе 5. В данной главе изучается сложное движение тела, размеры которого достаточно велики (по сравнению с другими размерами в рассматриваемой задаче).

Будем считать, что сложное движение тела состоит по крайней мере из двух составляющих движений: *относительного* - по отношению к некоторой подвижной системе и *переносного* - вместе с этой подвижной системой относительно неподвижной системы отсчета. Каждое из составляющих движений может быть либо поступательным, либо вращательным.

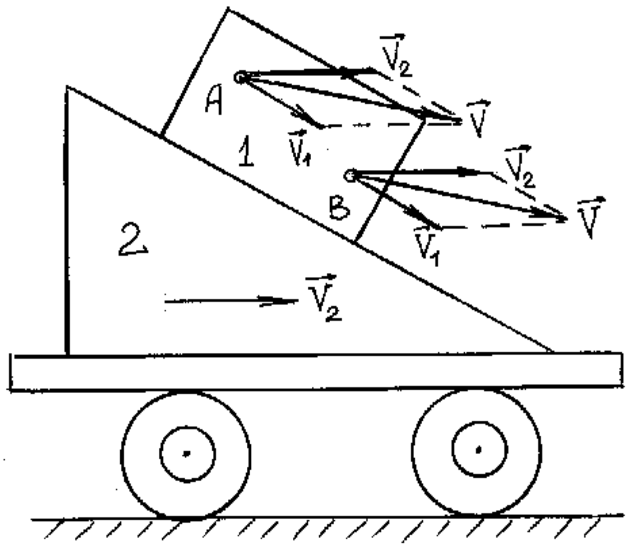



Рис.6.1

Заметим, что границы данного тела можно расширять и рассматривать не движение тела по отношению к некоторой системе отсчета, а движение всего пространства, связанного с телом, по отношению к другому пространству, связанному с неподвижной системой отсчета.

Пусть относительное движение тела 1 (рис.6.1) является поступательным со скоростью $\vec{v}_1$ (относительно системы координат, связанной с движущимся телом 2), а переносное - тоже поступательным со скоростью $\vec{v}_2$. Определим скорости каких-нибудь двух точек тела 1, например, точек А и В.

В относительном движении скорости точек А и В одинаковы и равны $\vec{v}_1$, а в переносном - $\vec{v}_2$. По теореме сложения скоростей обе точки тела в абсолютном движении будут иметь одну и ту же скорость $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Следовательно, абсолютным движением тела является поступательное движение, поскольку только при поступательном движении скорости двух точек могут оказаться одинаковыми и притом не равными нулю.

Таким образом, *при сложении двух поступательных движений тела со скоростями* $\vec{v}_1$ *и* $\vec{v}_2$ *результирующим движением тела является также поступательное движение со скоростью* $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

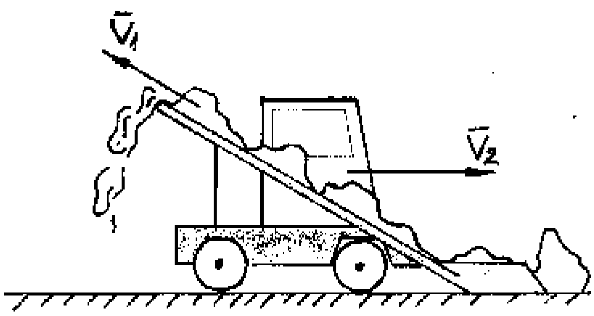



Рис.6.2

Примером тела, совершающим рассмотренное сложное движение, может служить перемещение пласта снега по транспортеру снегоуборочной машины (рис.6.2).

Нетрудно показать, что результирующим движением тела, совершающим *n* поступательных движений, будет поступательное движение со скоростью, равной геометрической сумме скоростей составляющих движений:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \,. \tag{6.1}$$

## 6.2. Сложение двух одинаково направленных вращений вокруг параллельных осей

Пусть тело вращается вокруг оси $O_1B$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ и вместе с осью $O_1B$ - вокруг оси $O_2A$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, причем оси вращений параллельны друг другу, а векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены в одну сторону (рис.6.3).

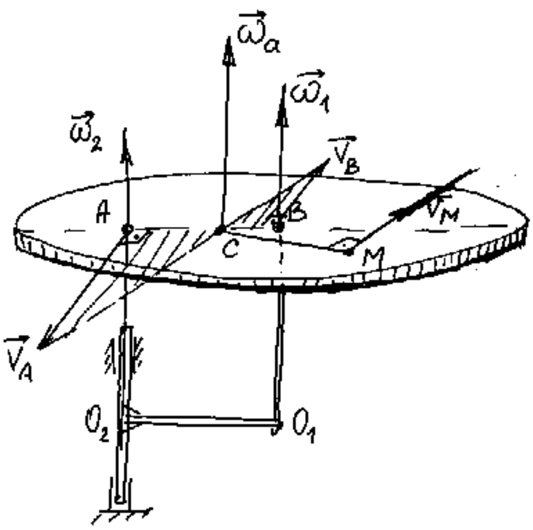



Рис.6.3

Движение тела с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ - это относительное движение, а с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ - переносное.

Поскольку траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях, результирующим движением тела является плоскопараллельное.

При плоскопараллельном движении тела в каждом сечении, перпендикулярном осям вращения, существует точка C, абсолютная скорость которой равна нулю (мгновенный центр скоростей). В сечении, показанном на рис.6.3, эта точка лежит на отрезке AB. Чтобы найти ее местоположение, приравняем друг другу относительную и переносную скорости точки C:

$$\omega_1 \cdot BC = \omega_2 \cdot AC,$$

отсюда

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \qquad (6.2)$$

Прямая, проходящая через точку C параллельно заданным осям вращения, является мгновенной осью вращения. Как видно из (6.3), она делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные угловым скоростям составляющих вращений. Угловая скорость результирующего (абсолютного) вращения равна

$$\omega_a = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC}. \qquad (6.3)$$

Точка B лежит на оси относительного вращения, следовательно, ее абсолютная скорость совпадает с переносной скоростью и равна $v_B = \omega_2 \cdot AB$. Точка A лежит на оси переносного вращения, поэтому ее абсолютная скорость совпадает с относительной скоростью и равна $v_A = \omega_1 \cdot AB$. Направления скоростей этих точек показаны на рис.6.3.

Подставляя полученные выражения для скоростей точек A и B в (6.3) и используя свойства пропорции, получаем абсолютную мгновенную угловую скорость тела:

$$\omega_a = \frac{\omega_1 AB}{AC} = \frac{\omega_2 AB}{BC} = \frac{\omega_1 AB + \omega_2 AB}{AC + BC} = \omega_1 + \omega_2 . \qquad (6.4)$$

Таким образом, *если тело участвует в двух вращениях вокруг параллельных осей, направленных в одну сторону, то его результирующим движением будет мгновенное вращение вокруг оси, параллельной заданным осям вращений.*

Абсолютная угловая скорость результирующего вращения по величине равна арифметической сумме угловых скоростей составляющих вращений и направлена в ту же сторону, что и заданные угловые скорости. Мгновенная ось вращения делит расстояние между осями заданных вращений на части, обратно пропорциональные угловым скоростям составляющих вращений

С течением времени мгновенная ось вращения меняет свое положение в пространстве, описывая цилиндрическую поверхность.

В каждый момент времени абсолютную скорость произвольной точки M тела можно определить по формуле (рис.6.3):

$$v_M = \omega_a \cdot CM . \qquad (6.5)$$

## 6.3. Сложение двух противоположно направленных вращений вокруг параллельных осей

Пусть тело вращается вокруг оси $O_1B$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (относительное движение) и вместе с осью $O_1B$ - вокруг оси $O_2A$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ (переносное движение), причем оси вращений параллельны друг другу, а векторы $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ направлены в противоположные стороны (рис.6.4). Результирующим движением тела, как и в предыдущем случае, является плоскопараллельное. Мгновенная ось вращения проходит через точку С (мгновенный центр скоростей), которая лежит на продолжении отрезка АВ. Положение точки С определяется формулой (6.2).

Мгновенную угловую скорость находим тем же способом, что и в предыдущем случае:

$$\omega_a = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} = \frac{\omega_1 AB}{AC} = \frac{\omega_2 AB}{BC} = \frac{\omega_1 AB - \omega_2 AB}{AC - BC} = \omega_1 - \omega_2 . \quad (6.6)$$

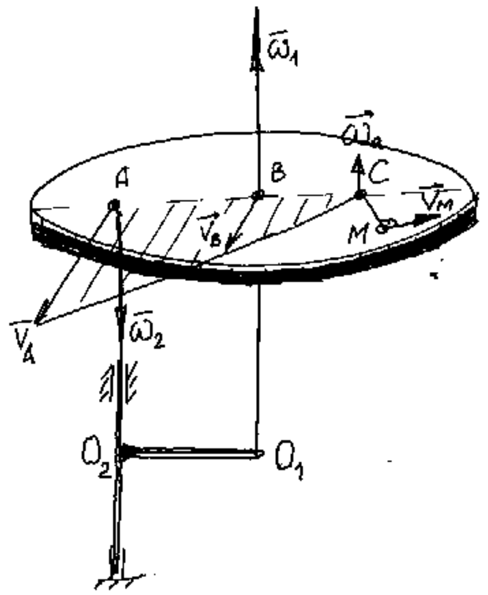


Рис.6.4

Таким образом, *если тело участвует в двух вращениях вокруг параллельных осей, направленных в противоположные стороны, то его результирующим движением будет мгновенное вращение вокруг оси, параллельной заданным осям, с абсолютной угловой скоростью, равной разности угловых скоростей составляющих вращений и направленной в сторону большей из них*.

В каждый момент времени абсолютную скорость произвольной точки М тела (рис.6.4) можно определить по формуле (6.5).

Результаты, полученные в данном и предыдущем параграфах, показывают, что векторы параллельных угловых скоростей складываются по тем же правилам, что и параллельные силы (см. параграф 5.7 в «Статике»).

## 6.4. Пара вращений

Рассмотрим частный случай, когда $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_2$, $|\vec{\omega}_1| = |\vec{\omega}_2| = \omega$. Такая совокупность вращений называется *парой вращений, а векторы* $\vec{\omega}_1$ *и* $\vec{\omega}_2$ *- парой угловых скоростей.* В этом случае скорости двух точек тела, а именно, точек A и B, направлены в одну и ту же сторону (рис.6.5) и равны между собой:

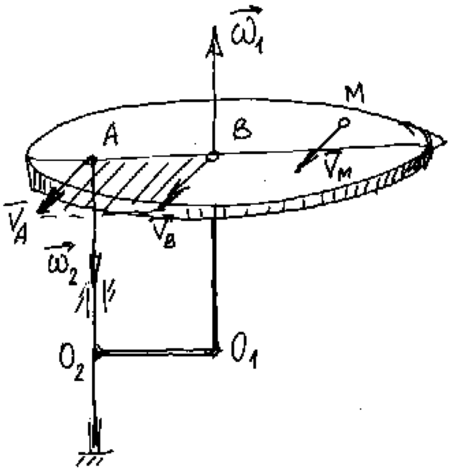



Рис.6.5

$$v_A = v_B = \omega \cdot AB. \qquad (6.8)$$

Следовательно, *результирующим движением тела является поступательное (или мгновенно поступательное) движение со скоростью* $\vec{V}$*, численно равной моменту пары угловых скоростей и направленной перпендикулярно плоскости расположения осей вращения.*

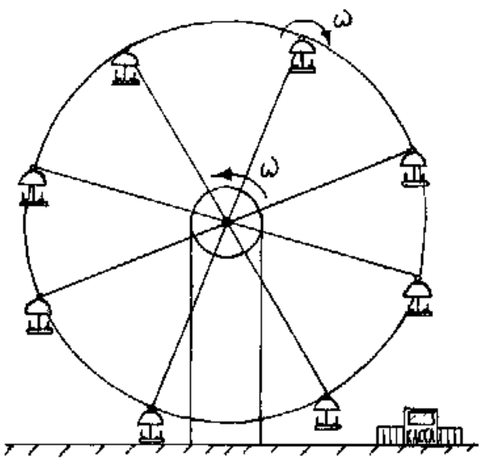



Рис.6.6

Естественно, что при таком характере результирующего движения абсолютные скорости всех точек тела (включая точку M, рис.6.5) векторно равны между собой.

Примером тела, находящегося в рассмотренном движении, может служить кабина колеса обозрения (рис.6.6).

## 6.5. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть тело вращается вокруг оси ОВ с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (относительное движение) и вместе с осью ОВ - вокруг оси ОА с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ (переносное движение), причем оси вращений пересекаются в точке О (рис.6.7).

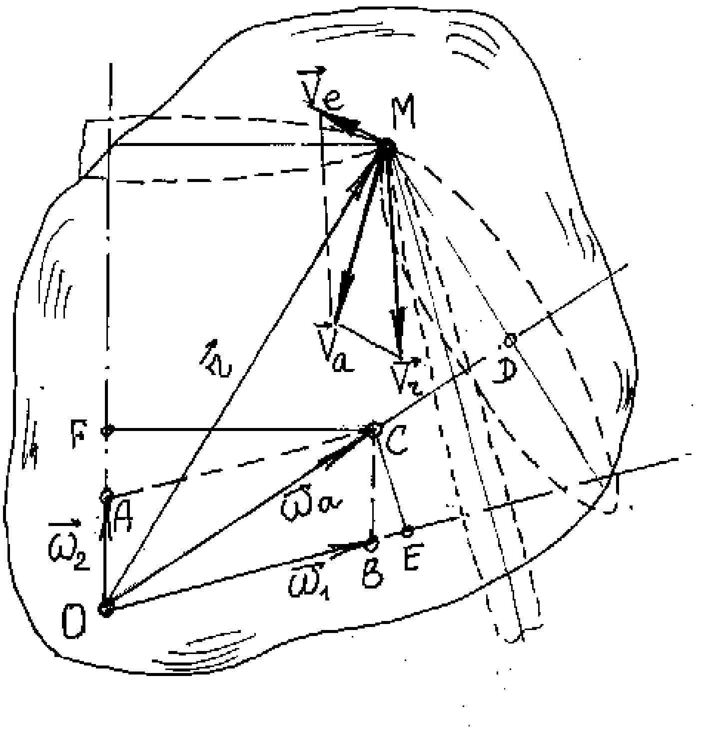



Рис.6.7

Одна точка тела, а именно, точка О пересечения осей вращения во все время движения остается неподвижной. Поэтому результирующим движением тела является сферическое, которое, как было показано в главе 4, представляет собой в каждый момент времени мгновенное вращение вокруг оси, проходящей через неподвижную точку.

Для определения положения мгновенной оси вращения достаточно найти еще одну точку, которая была бы неподвижна в данное мгновение.

Предварительно определим абсолютную скорость произвольной точки М тела с помощью теоремы сложения скоростей (рис.6.7):

$$\vec{v}_M = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r} \qquad (6.9)$$

А теперь запишем выражение для скорости той же точки по формуле (4.6), полученной при описании сферического движения:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_a \times \vec{r}\,, \qquad (6.10)$$

где $\vec{\omega}_a$ - мгновенная (абсолютная) угловая скорость.

Сопоставляя (6.9) с (6.10), заключаем, что

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 . \qquad (6.11)$$

Докажем, что ось ОС, направленная по вектору $\vec{\omega}_a$, *является мгновенной осью вращения.* С этой целью вычислим скорость произвольной точки С, лежащей на оси ОС, причем будем считать, что плоскость расположения векторов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ совпадает с плоскостью рис.6.7.

Относительная скорость точки С направлена на читателя (перпендикулярно плоскости рисунка) и равна $v_{C_r} = \omega_1 \cdot CB$. Переносная скорость этой же точки направлена от читателя (по той же прямой что и относительная скорость) и равна $v_{C_e} = \omega_2 \cdot CA$. Эти скорости равны друг другу, поскольку произведения $\omega_1 \cdot CB$ и $\omega_2 \cdot CA$ представляют собой площади одного и того же параллелограмма ОАВС, только в первом произведении за основание принята его сторона ОА, а во втором - сторона ОВ. Следовательно, в данный момент времени абсолютная скорость точки С равна нулю.

Таким образом, *при сложении вращений вокруг двух осей, пересекающихся в точке О, результирующее движение тела будет мгновенным вращением вокруг оси ОС, проходящей через точку О, причем угловая скорость* $\vec{\omega}_a$ *этого вращения равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей*.

Зная $\vec{\omega}_a$ и положение мгновенной оси вращения, легко вычислить скорость произвольной точки М тела (рис.6.7):

$$v_M = \omega_a \cdot MD .$$

Примером тела, совершающим рассмотренное сложное движение, может служить волчок (рис.6.8).

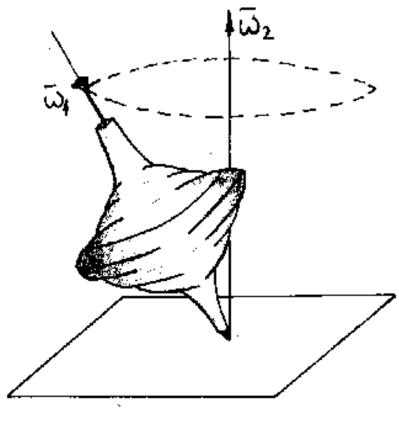


Рис.6.8

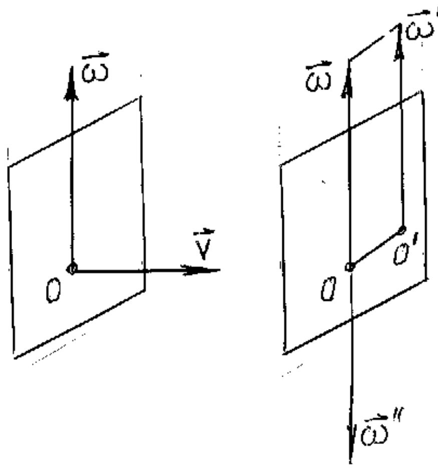
Обращаем внимание на тот факт, что векторы пересекающихся угловых скоростей складываются так же, как и силы, пересекающиеся в одной точке (см. «Статику»).

## 6.6. Сложение поступательного и вращательного движений

**А.** Пусть тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси ОА и вместе с этой осью движется поступательно со скоростью $\vec{v}$, причем $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ (рис.6.9а).

Такое движение тела по определению (см. главу 3) является плоскопараллельным. В каждый момент времени, как показано в главе 3, оно может быть представлено как мгновенное вращение вокруг оси, параллельной заданной оси вращения и отстоящей от нее на расстоянии $v/\omega$.

Покажем, как можно получить этот же результат иным методом, используя положения данной главы. Заменим вектор $\vec{v}$ парой угловых скоростей $(\vec{\omega}', \vec{\omega}'')$, расположенных в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{v}$, причем $\vec{\omega}' = -\vec{\omega}'' = \vec{\omega}$ (рис.6.9б). Направление вращения пары должно видеться с конца вектора $\vec{v}$ против часовой стрелки. Плечо пары вращений равно $OO' = v/\omega$. Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}''$ дают при сложении нуль, следовательно, остается только вектор $\vec{\omega}'$.



а) б)

Рис.6.9

Таким образом, *при сложении поступательного движения со скоростью* $\vec{v}$ *и вращательного с угловой скоростью* $\vec{\omega}$, *перпендикулярной вектору* $\vec{v}$, *результирующим движением тела будет мгновенное вращение со скоростью* $\vec{\omega}$, *вокруг мгновенной оси, параллельной заданной оси вращения и отстоящей от нее на расстоянии* $OO' = v/\omega$.

Основываясь на этом результате, заключаем, что *ось вращения можно переносить параллельно самой себе, прибавляя поступательное движение, скорость которого равна скорости во вращательном движении той точки тела, в которую переносят ось вращения.*

Аналогичная процедура проводилась в «Статике» при параллельном переносе силы. Этот перенос сопровождался прибавлением пары сил, момент которой равнялся моменту переносимой силы относительно точки переноса.

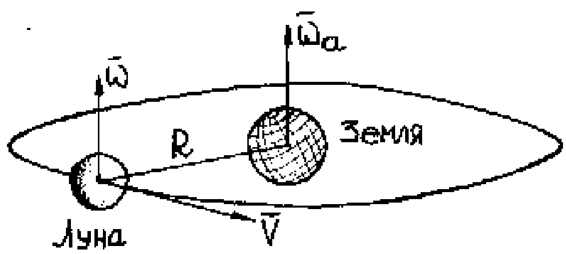


Рис.6.10

**Пример 6.1.** Известно, что за полный оборот вокруг Земли Луна делает один оборот вокруг своей оси. Определить результирующее движение Луны, принимая орбиту Луны за окружность радиуса R и допуская, что ось вращения Луны перпендикулярна плоскости орбиты.

*Решение.* Движение Луны слагается из поступательного движения по окружности радиуса R с постоянной скоростью $v$ и вращательного движения вокруг собственной оси с постоянной угловой скоростью $\omega$, причем $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ (рис.6.10). Такая совокупность движений, как показано выше, приводится к мгновенному вращению с угловой скоростью $\vec{\omega}_a = \vec{\omega}$ вокруг оси, отстоящей от оси Луны на расстоянии, равном $S = v / \omega$. Чтобы найти расстояние S, нужно вычислить скорость v поступательного движения Луны. Эта скорость равна

$$v = \frac{2\pi R}{T}, \qquad (6.12)$$

где T – время полного оборота Луны вокруг Земли. За это же время T Луна, вращаясь с угловой скоростью $\omega$, делает один оборот вокруг собственной оси:

$$2\pi = \omega T. \qquad (6.13)$$

Выражая T из (6.13) и подставляя найденное выражение $T = 2\pi/\omega$ в (6.12), получаем поступательную скорость Луны:

$$v = \omega R. \qquad (6.14).$$

Искомое расстояние от центра Луны до мгновенной оси вращения равно

$$S = \frac{v}{\omega} = \frac{\omega R}{\omega} = R\,. \tag{6.15}$$

Следовательно, мгновенная ось вращения Луны совпадает с одним из диаметров Земли (рис.6.10).

**Б.** Пусть тело вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси ОА и вместе с этой осью движется поступательно с постоянной скоростью $\vec{v}$, причем $\vec{v} \parallel \vec{\omega}$ (рис.6.11).

Такое движение тела называется *винтовым,* а ось ОА - осью винта. Если $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ направлены в одну сторону, то винт - правый, если в разные - левый. Любая точка тела, не лежащая на оси винта, во все время движения остается на поверхности круглого цилиндра, описывая винтовую линию.

Полный оборот каждая точка на теле делает за время $T = 2\pi/\omega$. Расстояние, на которое поднимается точка за время одного оборота, называется шагом винта. Шаг винта равен $h = 2\pi p$, где p – параметр винта, равный отношению линейной скорости к угловой.

Скорость произвольной точки М, находящейся на расстоянии r от оси винта, складывается из поступательной скорости $\vec{v}$ и перпендикулярной к ней вращательной скорости, равной $v^{вр} = \omega \cdot r$, так что абсолютная скорость точки М равна (рис.6.11)

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}$$

и направлена по касательной к винтовой линии.

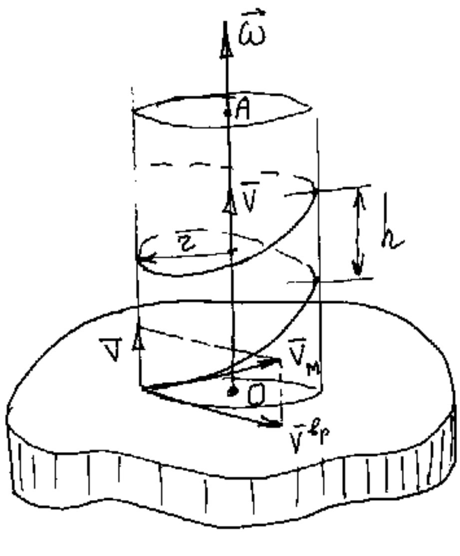


Рис.6.11

Примером тела, совершающим рассмотренное сложное движение, может служить вращающийся винт вертикально взлетающего вертолета (рис.6.12).

**В**. Пусть тело вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси ОА и вместе с этой осью движется поступательно со скоростью $\vec{v}$, причем $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ образуют произвольный угол $\alpha$ (рис.6.13а). Результирующим движением тела будет общий случай движения, рассмотренный в главе 4.

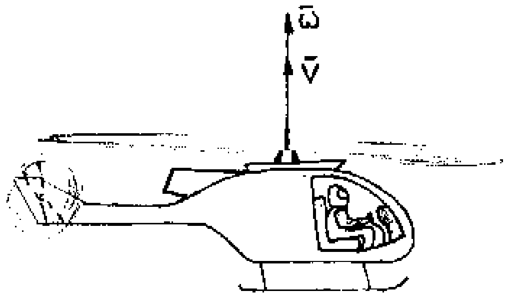
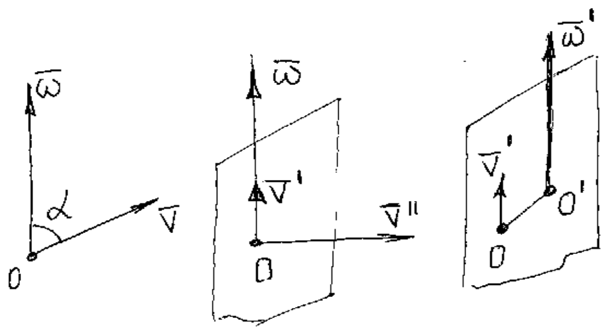


Рис.6.12

Покажем, что в этом случае в каждый момент времени тело совершает *мгновенное винтовое движение.*

Разложим вектор $\vec{v}$ на составляющие $\vec{v}'$ и $\vec{v}''$, причем вектор $\vec{v}'$ идет по $\vec{\omega}$, а вектор $\vec{v}''$ - в перпендикулярном к $\vec{\omega}$ направлении (рис.6.13б).

Совокупность взаимно перпендикулярных векторов $\vec{v}''$ и $\vec{\omega}$ заменяем, как показано в пункте А данного параграфа, вектором $\vec{\omega}'$, параллельным заданной оси вращения и отстоящим от нее на расстоянии ОО′= v/ω (рис.6.13в).



*а)* *б)* *в)*

Рис.6.13

Совокупность показанных на рис.6.13в векторов $\vec{v}'$ и $\vec{\omega}'$ образует мгновенный винт с осью, совпадающей с $\vec{\omega}'$. Вектор $\vec{v}'$, как вектор свободный, можно перенести параллельно самому себе на ось $\vec{\omega}'$.

Ось, совпадающую с $\vec{\omega}'$, называют *мгновенной винтовой осью*, поскольку в общем случае векторы $\vec{v}$ и $\vec{\omega}$ являются функциями времени, и положение этой оси непрерывно меняется в пространстве.

Таким образом, *общий случай движения твердого тела можно представить как серию мгновенных винтовых движений вокруг непрерывно меняющих свое положение винтовых осей.*

Примером тела, совершающим рассмотренное сложное движение, может служить вращающаяся цистерна с цементом, перевозимая на машине (рис.6.14)

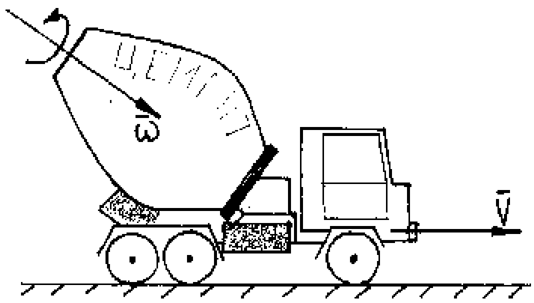



Рис.6.14

## 6.7. Сложение двух вращений вокруг скрещивающихся осей

Пусть тело вращается вокруг оси, проходящей через точку В, с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (относительное движение) и вместе с этой осью - вокруг оси, проходящей через точку А, с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$ (переносное движение), причем оси вращений - скрещивающиеся прямые (рис.6.15). Требуется определить результирующее движение тела.

Для решения этой задачи проделаем следующие операции.

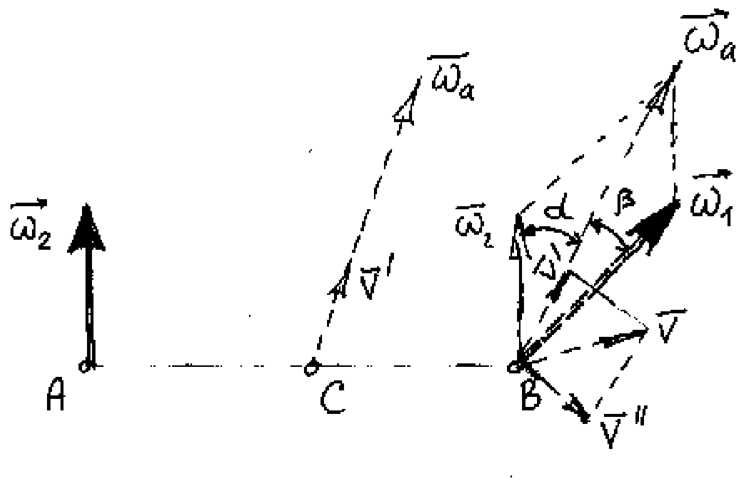



Рис.6.15

1) Перенесем вектор $\vec{\omega}_2$ из точки А в точку В с добавлением вектора $\vec{v}$, величина которого равна $\omega \cdot AB$, а направление - перпендикулярно плоскости, содержащей вектор $\vec{\omega}_2$ и точку В. Эту операцию запишем символически

так: $\vec{\omega}_2\big|_A \infty\, (\vec{\omega}_2\big|_B\,, \vec{v}\big|_B)$ , причем буква под чертой означает точку, через которую проходит данный вектор.

2) Сложим векторы угловых скоростей: $\vec{\omega}_1\big|_B + \vec{\omega}_2\big|_B = \vec{\omega}_a\big|_B$ .

3). Разложим вектор $\vec{v}$ на две составляющие: $\vec{v}'$ по $\vec{\omega}_a$ , а $\vec{v}'' \perp \vec{\omega}_a$ .

4). Совокупность $(\vec{\omega}_a\big|_B, \vec{v}''\big|_B)$ заменим одним вектором $\vec{\omega}_a\big|_C$ .

5) Перенесем вектор $v'\big|_B$ в точку C.

Полученная совокупность $(\vec{\omega}_a\big|_C, \vec{v}'\big|_C)$ указывает на то, что результирующим движением тела является мгновенное винтовое движение вокруг оси, проходящей через точку C.

Точка C делит кратчайшее расстояние AB между осями вращений обратно пропорционально тангенсам углов $\alpha$ и $\beta$, составляемых соответственно векторами $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_1$ с вектором $\vec{\omega}_a$ (рис.6.15):

$$\frac{AC}{BC} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}.$$

## 6.8. Сложение произвольного числа поступательных и вращательных движений

Пусть тело совершает одновременно *n* вращательных и *m* поступательных движений. Методы сложения движений имеют полную аналогию с методами приведения системы сил к центру. Аналогом силы (скользящего вектора в статике), приложенной к твердому телу, служит угловая скорость вращения тела. Моменту пары сил соответствует момент пары вращений, выражающий скорость поступательного движения.

Выбираем в теле произвольную точку O (центр приведения) и переносим в эту точку параллельно самим себе, во-первых, все векторы скоростей поступательных движений и, во-вторых, все векторы угловых скоростей с добавлением векторов скоростей поступательных движений, равных моментам угловых скоростей относительно центра приведения. После этого, складывая угловые скорости, получаем *главный вектор угловых скоростей*, равный

$$\vec{\omega}_a = \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_i ,$$

а складывая скорости поступательных движений, получаем *главный момент*, равный скорости суммарного мгновенно поступательного движения:

$$\vec{v}_a = \sum_{k=1}^{m} \vec{v}_k + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{\omega}_i ,$$

где $\vec{r}_i$ - радиус-вектор, идущий из центра приведения в любую точку, лежащую на оси $\vec{\omega}_i$.

Таким образом, совокупность произвольного числа одновременных вращательных и поступательных движений тела приведена к двум одновременным движениям: вращательному с угловой скоростью $\vec{\omega}_a$ и поступательному со скоростью $\vec{v}_a$.

Результирующее движение тела зависит от величин и направлений векторов $\vec{\omega}_a$ и $\vec{v}_a$, причем аналогами методов получения результирующего движения служат методы приведения системы сил к простейшему виду, изложенные с «Статике» (роль вектора силы играет вектор $\vec{\omega}$, роль вектора момента - вектор $\vec{v}$ ). Так, если

1) $\vec{\omega}_a \neq 0$, $\vec{v}_a = 0$, то тело совершает мгновенное вращательное движение;

2) $\vec{\omega}_a = 0$, $\vec{v}_a \neq 0$, то тело совершает мгновенное поступательное движение;

3) $\vec{\omega}_a \neq 0$, $\vec{v}_a \neq 0$, $\vec{v}_a \perp \vec{\omega}_a$, то тело совершает мгновенное вращательное движение;

4) $\vec{\omega}_a \neq 0$, $\vec{v}_a \neq 0$, причем $\vec{v}_a$ образует произвольный угол с $\vec{\omega}_a$, то тело совершает мгновенное винтовое движение.

Все эти случаи достаточно подробно были рассмотрены выше.

## 1. Кинематика точки

По заданным уравнениям движения точки установить вид ее траектории и для момента времени $t_1$ найти положение точки на траектории, ее скорость, касательное, нормальное и полное ускорение.

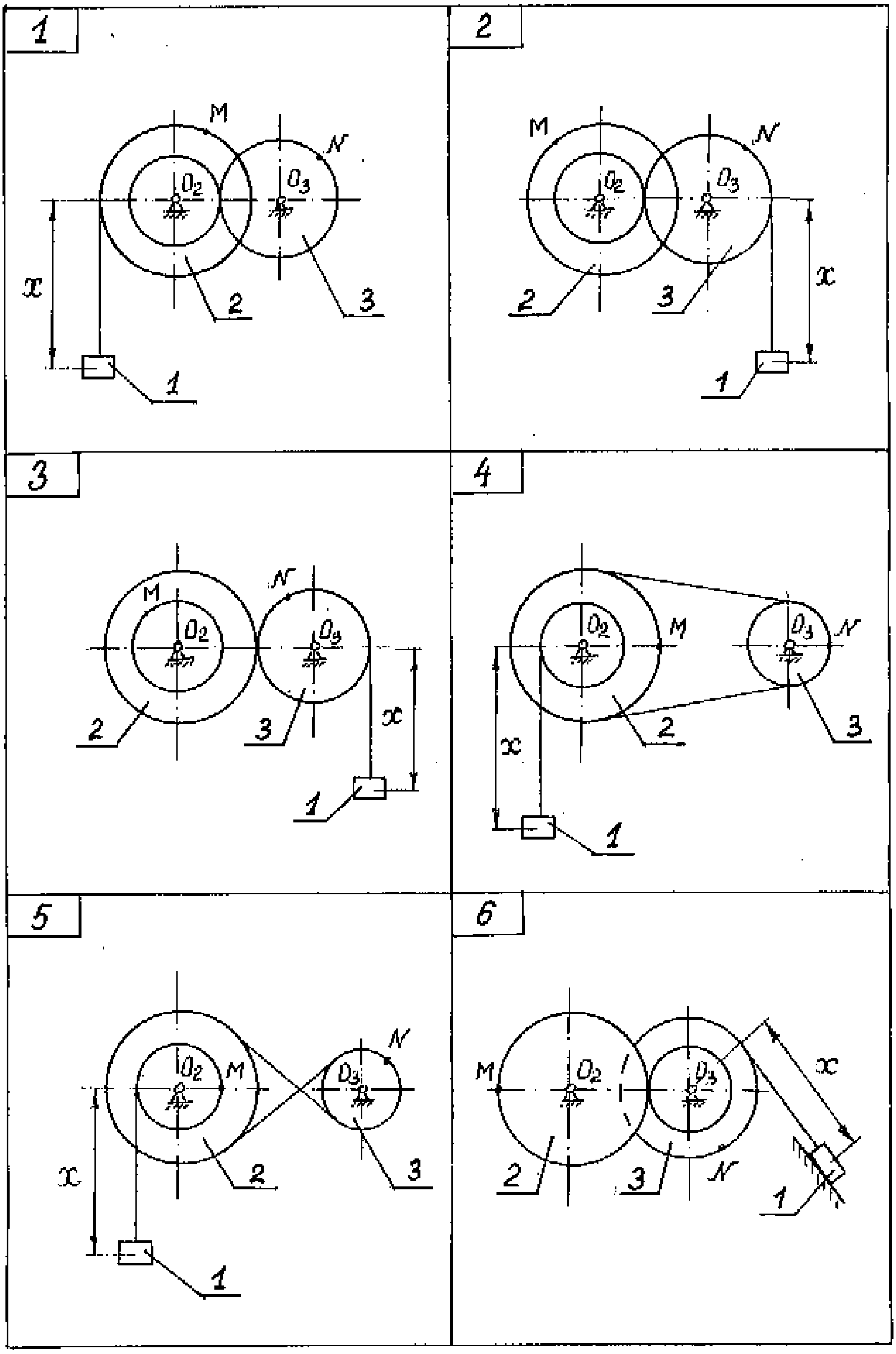
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| №1 | $x = 2\sin(\pi t/3),$<br>$y = -3\cos(\pi t/3) + 4.$ | $t_1=1$ | №2 | $x = 3t^2 - t + 1,$<br>$y = 5t^2 - 5t/3 - 2.$ | $t_1=1$ |
| №3 | $x = -3\sin(\pi t^2/6) + 3,$<br>$y = 1 - 3\cos(\pi t^2/6).$ | $t_1=1$ | №4 | $x = -3/(t+2),$<br>$y = 3t + 6.$ | $t_1=2$ |
| №5 | $x = -5\cos(\pi t/3),$<br>$y = -2\sin(\pi t/3) - 4.$ | $t_1=1$ | №6 | $x = -4t^2 + 1,$<br>$y = -3t.$ | $t_1=1/2$ |
| №7 | $x = -4\sin^2(\pi t/6),$<br>$y = -4\cos^2(\pi t/6) - 3.$ | $t_1=1$ | №8 | $x = 5\cos(\pi t^2/3) - 4,$<br>$y = 1 - 5\sin(\pi t^2/3).$ | $t_1=1$ |
| №9 | $x = -2t - 2,$<br>$y = -2/(t+1).$ | $t_1=2$ | №10 | $x = 3t,$<br>$y = 4t^2 + 1.$ | $t_1=1/2$ |
| №11 | $x = 7\sin^2(\pi t/6) - 5,$<br>$y = -7\cos^2(\pi t/6).$ | $t_1=1$ | №12 | $x = 1 + 2\cos(\pi t^2/3),$<br>$y = 2\sin(\pi t^2/3) + 3.$ | $t_1=1$ |
| №13 | $x = -5t^2 - 4,$<br>$y = 3t.$ | $t_1=1$ | №14 | $x = 2 - 3t - 6t^2,$<br>$y = 3 - 3t/2 - 3t^2.$ | $t_1=0$ |
| №15 | $x = 2\sin(\pi t^2/6) - 1,$<br>$y = 2\cos(\pi t^2/6) + 4.$ | $t_1=1$ | №16 | $x = 7t^2 - 3,$<br>$y = 5t.$ | $t_1=1/4$ |
| №17 | $x = 3t - 3t^2 + 1,$<br>$y = 4 - 5t^2 - 5t/3.$ | $t_1=1$ | №18 | $x = 1 - 4\cos(\pi t/3),$<br>$y = 3 - \sin(\pi t/3).$ | $t_1=1$ |
| №19 | $x = -6t,$<br>$y = -2t^2 - 4.$ | $t_1=1$ | №20 | $x = 2\cos^2(\pi t/6) + 2,$<br>$y = -2\sin^2(\pi t/6) - 7.$ | $t_1=1$ |
| №21 | $x = -3 - \sin(\pi t^2/6),$<br>$y = -\cos(\pi t^2/6).$ | $t_1=1$ | №22 | $x = -4t^2 + 1,$<br>$y = -3t.$ | $t_1=1$ |
| №23 | $x = 2\cos(\pi t^2/3) - 2,$<br>$y = -2\sin(\pi t^2/3).$ | $t_1=1$ | №24 | $x = -2t^2 + 3,$<br>$y = -5t.$ | $t_1=1/2$ |
| №25 | $x = 3\cos^2(\pi t/6) + 2,$<br>$y = 4 - 3\sin^2(\pi t/6).$ | $t_1=1$ | №26 | $x = -\cos(\pi t/3) + 3,$<br>$y = \sin(\pi t/3) - 1.$ | $t_1=1$ |
| №27 | $x = 4t + 4,$<br>$y = -4/(t+1).$ | $t_1=2$ | №28 | $x = 3\cos(\pi t/2) + 3,$<br>$y = \sin(\pi t/2) - 5.$ | $t_1=1/4$ |
| №29 | $x = -4\cos(\pi t/2) + 3,$<br>$y = 2\sin(\pi t/2) - 1.$ | $t_1=1/4$ | №30 | $x = 3 - \cos(\pi t/2),$<br>$y = 4 - \sin(\pi t/2) - 1.$ | $t_1=1/4$ |

## 2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Условия задач и схемы механизмов к данной таблице приведены ниже

| № варианта | № условия | № схемы | $x$ | $x_0$ | $\varphi_3$ | $\omega_3$ | $r_2$ | $R_2$ | $R_3$ | $t_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $10t^2$ | - | - | - | 15 | 30 | 40 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | - | 3 | $5t^3$ | - | 20 | 25 | 30 | 1 |
| 3 | 3 | 3 | - | - | - | - | 25 | 30 | 35 | - |
| 4 | 4 | 4 | - | - | - | $2t^2$ | 30 | 40 | 50 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | - | 5 | - | - | 40 | 45 | 55 | 4 |
| 6 | 1 | 6 | $3t^2+1$ | - | - | - | 10 | 20 | 30 | 3 |
| 7 | 2 | 1 | - | 2 | $4t^2+t$ | - | 15 | 25 | 35 | 2 |
| 8 | 3 | 2 | - | - | - | - | 35 | 45 | 55 | - |
| 9 | 4 | 3 | - | - | - | $3t^2$ | 40 | 50 | 60 | 5 |
| 10 | 5 | 4 | - | 6 | - | - | 10 | 30 | 40 | 7 |
| 11 | 1 | 5 | $2t^2-1$ | - | - | - | 20 | 30 | 50 | 4 |
| 12 | 2 | 6 | - | 4 | $2t^3+3$ | - | 15 | 25 | 45 | 1 |
| 13 | 3 | 1 | - | - | - | - | 30 | 40 | 60 | - |
| 14 | 4 | 2 | - | - | - | $t^3$ | 25 | 30 | 40 | 2 |
| 15 | 5 | 3 | - | 7 | - | - | 10 | 20 | 60 | 3 |
| 16 | 1 | 4 | $t^2+t$ | - | - | - | 15 | 30 | 40 | 1 |
| 17 | 2 | 5 | - | 1 | $t^3+2$ | - | 40 | 50 | 60 | 2 |
| 18 | 3 | 6 | - | - | - | - | 10 | 30 | 40 | - |
| 19 | 4 | 1 | - | - | - | $2t^3$ | 20 | 30 | 50 | 1 |
| 20 | 5 | 2 | - | 8 | - | - | 15 | 25 | 45 | 4 |
| 21 | 1 | 3 | $t^3$ | - | - | - | 30 | 40 | 60 | 5 |
| 22 | 2 | 4 | - | 2 | $3t^3-t$ | - | 25 | 30 | 40 | 3 |
| 23 | 3 | 5 | - | - | - | - | 10 | 20 | 60 | - |
| 24 | 4 | 6 | | | | $5t^3$ | 15 | 30 | 40 | 4 |
| 25 | 5 | 1 | - | 6 | - | - | 20 | 30 | 50 | 3 |
| 26 | 1 | 2 | $t^3+t$ | - | - | - | 10 | 20 | 30 | 2 |
| 27 | 2 | 3 | - | 3 | $4t^2-t$ | - | 15 | 25 | 35 | 1 |
| 28 | 3 | 4 | - | - | - | - | 35 | 45 | 55 | - |
| 29 | 4 | 5 | - | - | - | $4t^2$ | 40 | 50 | 60 | 3 |
| 30 | 5 | 6 | - | 5 | - | - | 10 | 30 | 40 | 2 |

Линейные размеры указаны в сантиметрах, время - в секундах.


1
M
N
$O_2$
$O_3$
x
2
3
1
2
M
N
$O_2$
$O_3$
x
2
3
1
3
M
N
$O_2$
$O_3$
x
2
3
1
4
M
N
$O_2$
$O_3$
x
2
3
1
5
M
N
$O_2$
$O_3$
x
2
3
1
6
M
N
$O_2$
$O_3$
x
2
3
1

## Условия задач

***Условие №1.*** Груз опускается по закону $x = x(t)$. Определить и нанести на чертеж угловые скорости и ускорения колес 2 и 3, а также скорости, касательные, нормальные и полные ускорения точек M и N в момент времени $t_1$.

***Условие №2.*** Тело 3 вращается вокруг оси $0_3$ в соответствии с законом $\varphi_3 = \varphi_3(t)$, при этом груз опускается. Определить закон движения груза, если в начальный момент времени груз находился на расстоянии $x_0$ от линии $0_2 0_3$. Вычислить и нанести на чертеж скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки N в момент времени $t_1$.

***Условие №3.*** Определить время $t_1$, при котором скорость точки M окажется равной 100 см/с. Для этого момента времени вычислить и нанести на чертеж касательное, нормальное и полное ускорения точки M, а также угловые скорости и угловые ускорения эвеньев 2 и 3.

***Условие №4.*** Колесо 3 начало вращаться из состояния покоя вокруг оси $0_3$ с угловой скоростью $\omega_3(t)$. Определить закон опускания груза, если в начальный момент времени груз находился на расстоянии $x_0$ от линии $0_2 0_3$, а также вычислить и нанести на чертеж скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки N в момент времени $t_1$.

***Условие №5.*** Касательное ускорение точки M постоянно и равно 3 см/с$^2$ .Определить при $t_1$ и нанести на чертеж скорость, касательное, нормальное и полное ускорения точки N, а также вычислить расстояние, на которое опустится груз , если в начальный момент механизм находился в покое и груз находился на расстоянии $x_0$ от линии $0_2 0_3$.

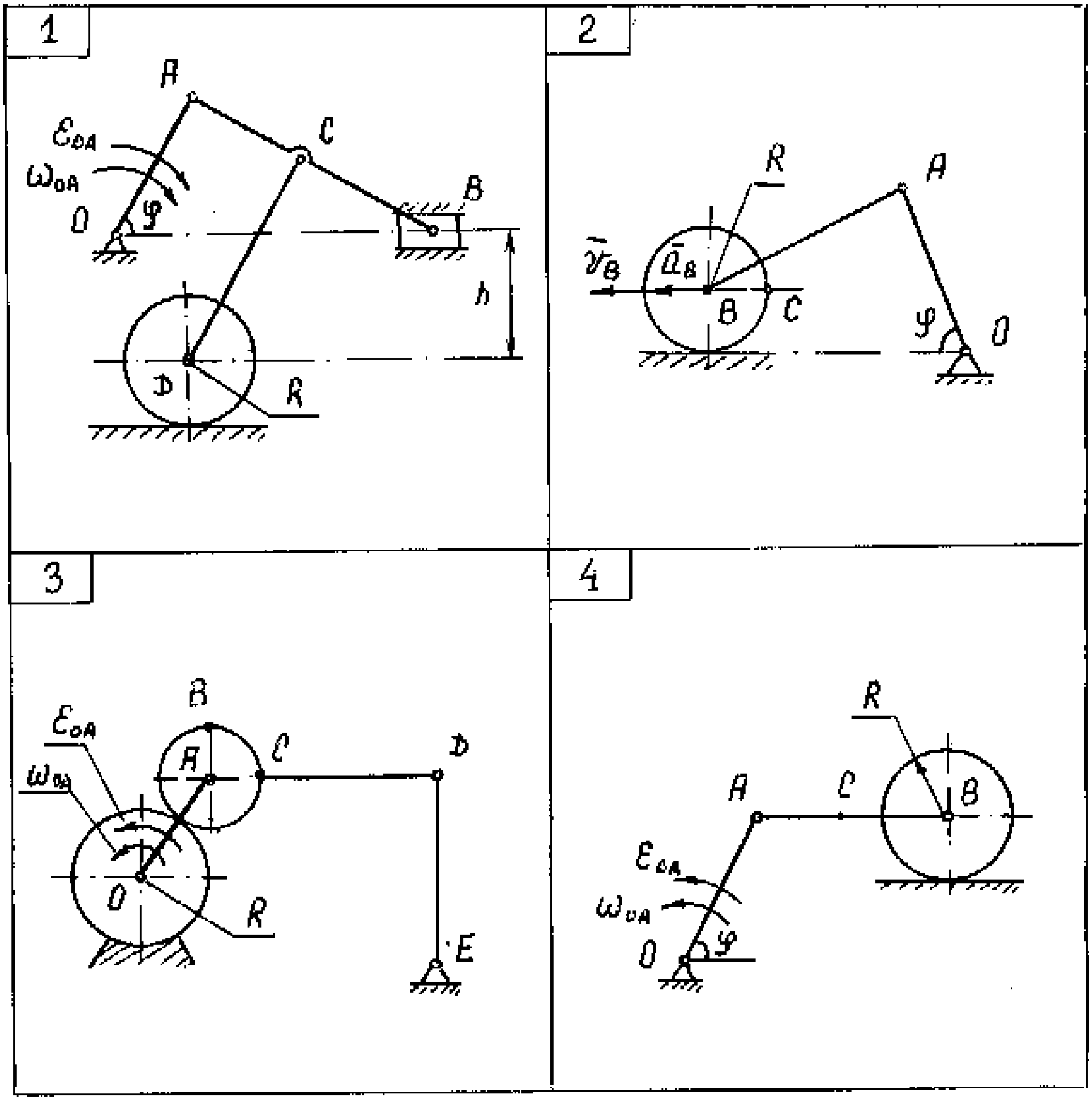
## 3. Плоскопараллельное движение твердого тела

Условия задач и схемы механизмов к данной таблице приведены ниже

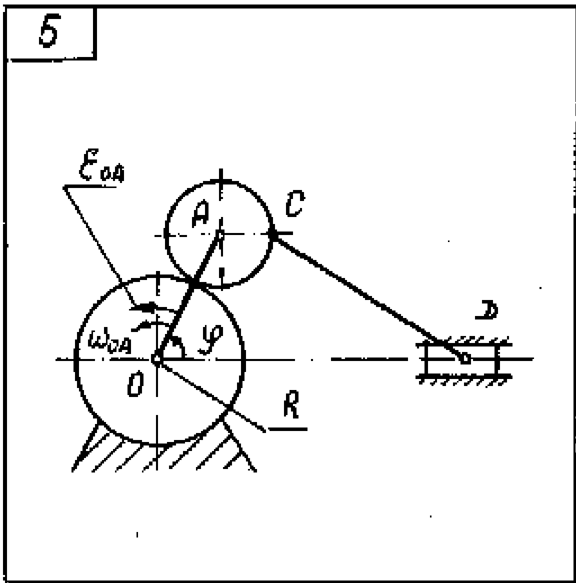
| № вар. | № схемы | φ рад. | ωOA 1/с | εOA 1/с2 | VB $\frac{см}{с}$ | aB $\frac{см}{с^2}$ | OA см | AB см | AC см | h см | CD см | DE см | R см |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 60° | 10 | 0 | - | - | 30 | 60 | 30 | 40 | 55 | - | 15 |
| 2 | 1 | 90° | 5 | 3 | - | - | 30 | 60 | 30 | 40 | 55 | - | 15 |
| 3 | 1 | 0° | 5 | 2 | - | - | 30 | 60 | 30 | 40 | 55 | - | 15 |
| 4 | 1 | 45° | 10 | 4 | - | - | 30 | 60 | 30 | 40 | 55 | - | 15 |
| 5 | 1 | 180° | 10 | 1 | - | - | 30 | 60 | 30 | 40 | 55 | - | 15 |
| 6 | 2 | 45° | - | - | 10 | 2 | 40 | 50 | - | - | - | - | 15 |
| 7 | 2 | 90° | - |  | 10 | 1 | 40 | 50 | - | - | - | - | 15 |
| 8 | 2 | 30° | - |  | 10 | 0 | 40 | 50 | - | - | - | - | 15 |
| 9 | 3 | 45° | 5 | 2 | - | - | 35 | - | - | - | 45 | 40 | 20 |
| 10 | 3 | 45° | 6 | 0 | - | - | 35 | - | - | - | 45 | 40 | 20 |
| 11 | 4 | 90° | 5 | 2 | - | - | 30 | 40 | 20 | - | - | - | 10 |
| 12 | 4 | 45° | 6 | 0 | - | - | 40 | 60 | 30 | - | - | - | 15 |
| 13 | 5 | 60° | 10 | 0 | - | - | 40 | - | - | - | 80 | - | 30 |
| 14 | 5 | 90° | 5 | 3 | - | - | 40 | - | - | - | 80 | - | 30 |
| 15 | 5 | 0° | 5 | 2 | - | - | 40 | - | - | - | 80 | - | 30 |
| 16 | 5 | 45° | 10 | 4 | - | - | 40 | - | - | - | 80 | - | 30 |
| 17 | 5 | 135° | 10 | 1 | - | - | 40 | - | - | - | 80 | - | 30 |
| 18 | 6 | - | - | - | 5 | 3 | - | - | 70 | 35 | 50 | - | 40 |
| 19 | 6 | - | - | - | 10 | 4 | - | - | 70 | 0 | 50 | - | 40 |
| 20 | 7 | - | - | - | 5 | 3 | - | - | 70 | 35 | 50 | - | 40 |
| 21 | 7 | - | - | - | 10 | 4 | - | - | 70 | 0 | 50 | - | 40 |
| 22 | 8 | 60° | 6 | 3 | - | - | 50 | 60 | 50 | 20 | - | - | 15 |
| 23 | 8 | 90° | 2 | 4 | - | - | 50 | 60 | 60 | 20 | - | - | 15 |
| 24 | 8 | 60° | 10 | 0 | - | - | 50 | 60 | 50 | 20 | - | - | 15 |
| 25 | 9 | 45° | 8 | 3 | - | - | 30 | - | - | - | 60 | 20 | 50 |
| 26 | 9 | 60° | 7 | 4 | - | - | 30 | - | - | - | 60 | 20 | 50 |
| 27 | 9 | 90° | 4 | 7 | - | - | 30 | - | - | - | 60 | 20 | 50 |
| 28 | 10 | - | 1 | 2 | - | - | 40 | - | - | 80 | 30 | 15 | 60 |
| 29 | 10 | - | 2 | 3 | - | - | 40 | - | - | 80 | 40 | 20 | 60 |
| 30 | 10 | - | 3 | 4 | - | - | 40 | - | - | 80 | 50 | 25 | 60 |

**Общее условие для всех вариантов**

Определить скорости и ускорения всех точек, указанных на схемах механизмов, а также угловые скорости и угловые ускорения звеньев механизмов. Во всех вариантах колеса перекатываются без проскальзывания.

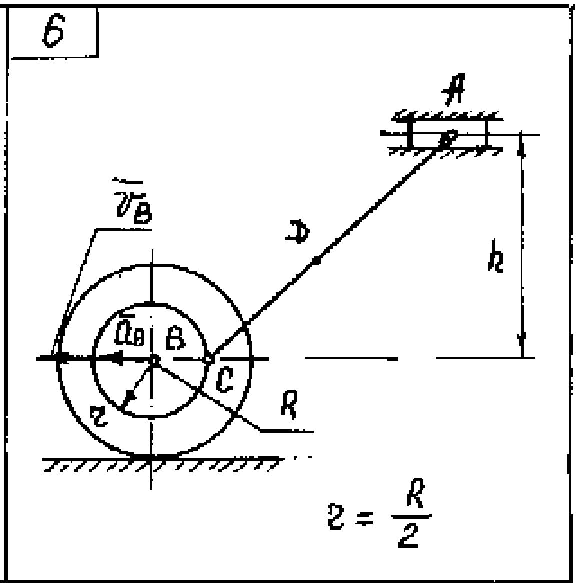


5



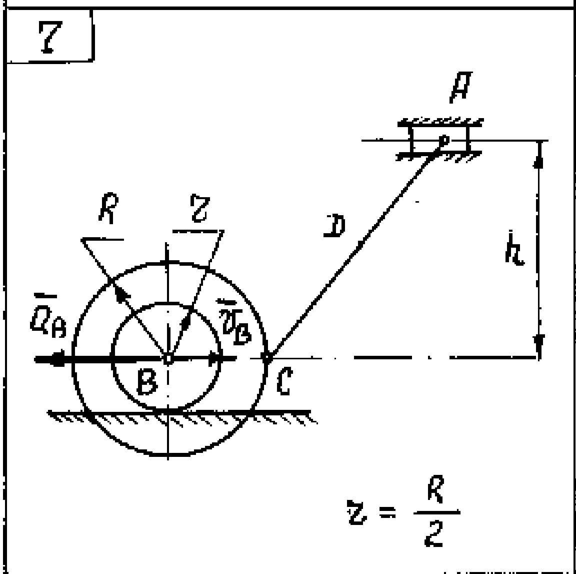
εOA
A
C
ωOA
φ
O
R
D


6



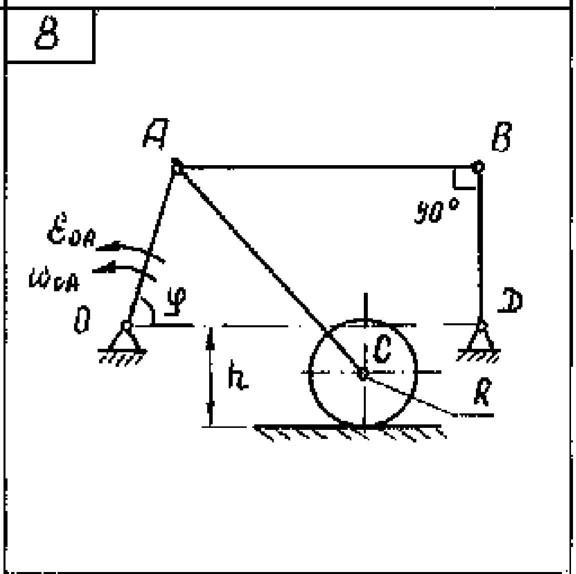
A
vB
D
h
aB
B
C
R
r
r = R/2


7



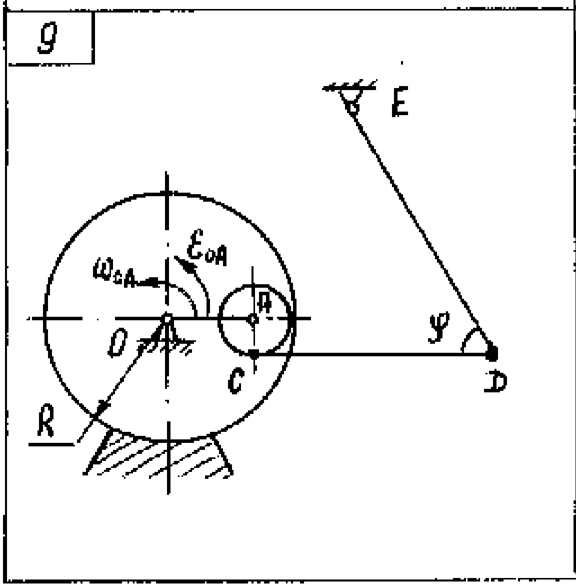
A
R
r
D
h
aB
vB
B
C
r = R/2


8



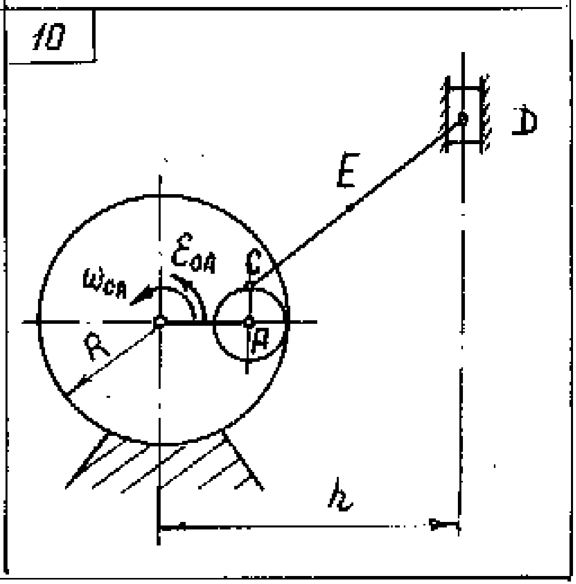
A
B
90°
εOA
ωOA
φ
O
D
h
C
R


9



E
ωOA
εOA
A
O
C
φ
D
R

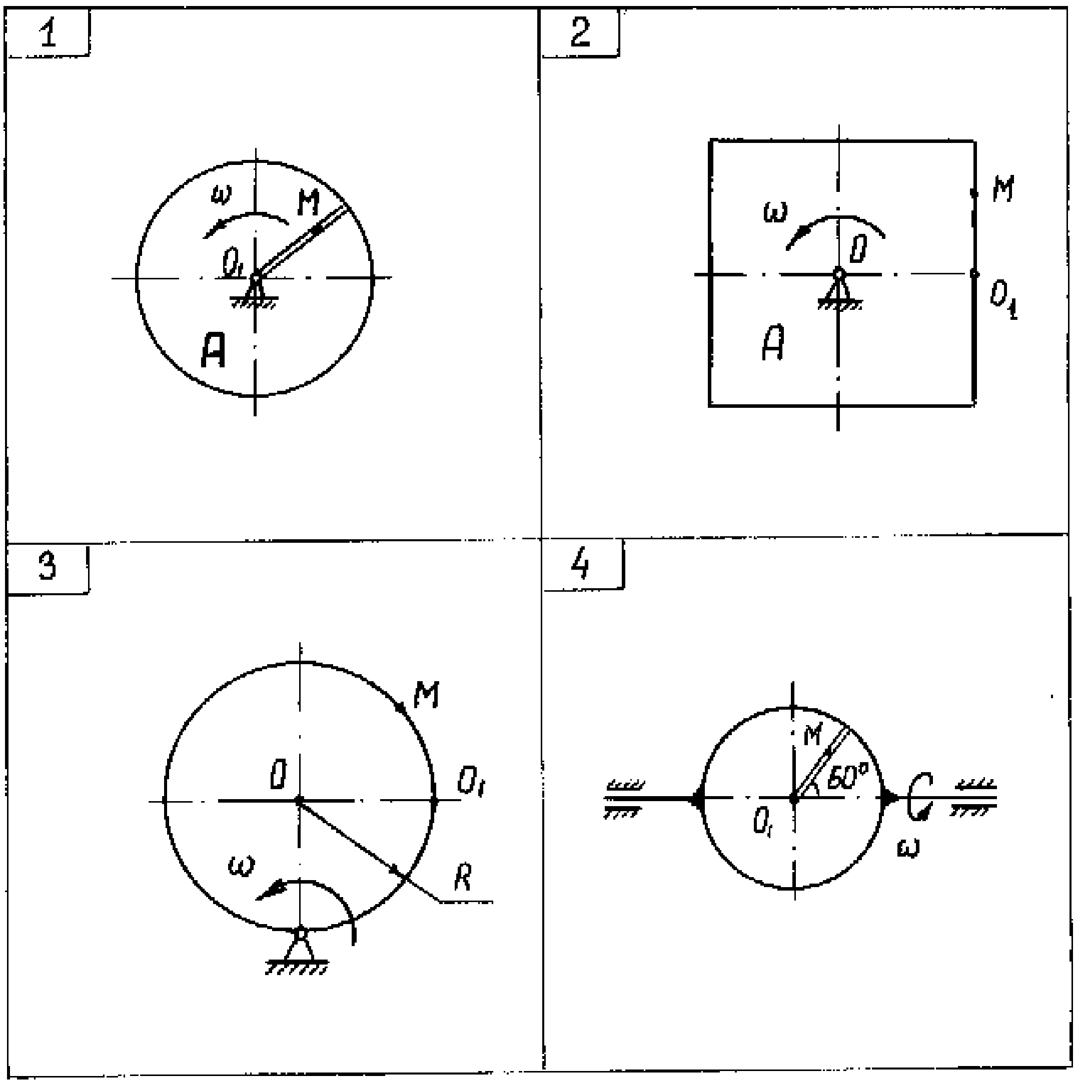

10



D
E
εOA
ωOA
C
R
A
h

## 4. Сложное движение точки

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени $t_1$ .



| № варианта | № схемы | $O_1M$ | ω | R | $t_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $2t^2 + 1$ | $3t^3$ | - | 2 |
| 2 | 1 | $3t^2 - 2t$ | $4t - 3t^2$ | - | 1 |
| 3 | 1 | $t^2 - 4t$ | $5t^2$ | - | 3 |
| 4 | 2 | $2\sin(\pi t/2)$ | $3t^3$ | 5 | 0,5 |
| 5 | 2 | $3\cos(\pi t/6)$ | $4t - 3t^2$ | 5 | 1 |
| 6 | 2 | $4\sin(\pi t/3)$ | $5t^2$ | 5 | 2 |
| 7 | 3 | $10\pi t^2$ | $2t^2$ | 10 | 1 |
| 8 | 3 | $10\pi t$ | $4 - 3t^2$ | 10 | 0,5 |
| 9 | 3 | $5\pi t^2$ | $5t^2$ | 10 | 1 |
| 10 | 4 | $2t^2 + 1$ | $3t^3$ | - | 2 |
| 11 | 4 | $3t^2 - 2t$ | $4t - 3t^2$ | - | 1 |
| 12 | 4 | $t^2 - 4t$ | $5t^2$ | - | 3 |
| 13 | 5 | $5\sqrt{2}\pi\sin(5\pi t)$ | $4t$ | 20 | 1/20 |
| 14 | 5 | $10\sqrt{2}\pi\sin(5\pi t)$ | $4t$ | 20 | 1/20 |
| 15 | 5 | $15\sqrt{2}\pi\sin(5\pi t)$ | $t^2$ | 20 | 1/20 |
| 16 | 6 | $3\sin(2\pi t)$ | $5t$ | 5 | 1/8 |
| 17 | 6 | $4\sin(2\pi t)$ | $t^2$ | 5 | 1/12 |
| 18 | 6 | $5\sin(2\pi t)$ | $3t$ | 5 | 1/6 |
| 19 | 7 | $5\sqrt{2}\pi\cos(\pi t)$ | $3t^2$ | 30 | 1/4 |
| 20 | 7 | $5\pi\cos(\pi t)$ | $t^3$ | 10 | 1/3 |
| 21 | 7 | $5\sqrt{2}\pi\cos(\pi t)$ | $5t - t^3$ | 20 | 1/4 |
| 22 | 8 | $20t^2$ | $2\sin(\pi t)$ | - | 1/4 |
| 23 | 8 | $36t^3+2$ | $\sin(\pi t)$ | - | 1/6 |
| 24 | 8 | $81t^3$ | $3\sin(\pi t)$ | - | 1/3 |
| 25 | 9 | $3t^2-t$ | $8t$ | - | 2 |
| 26 | 9 | $4t^2-1$ | $5t^2$ | - | 1 |
| 27 | 9 | $5t^2+t$ | $8t$ | - | 1 |
| 28 | 10 | $5\pi\sin(\pi t)$ | $3t^2$ | 10 | 1/6 |
| 29 | 10 | $10\pi\sin(\pi t)$ | $4t^2$ | 10 | 1/6 |
| 30 | 10 | $15\pi\sin(\pi t)$ | $2t^2$ | 10 | 1/6 |

## Словарь-справочник

**Абсолютная производная по времени вектора, записанного в подвижной системе отсчета** - стр.75.

**Абсолютное движение точки** - движение точки относительно неподвижной системы отсчета, стр.71.

**Абсолютная скорость точки** - скорость точки относительно неподвижной системы отсчета, стр.76.

**Абсолютное ускорение точки** - ускорение точки при движении относительно неподвижной системы, стр.80.

**Винтовое движение твердого тела** - совокупность вращательного движения вокруг некоторой оси и поступательного вдоль той же оси, стр.106.

**Вращательное движение твердого тела** - движение, при котором две точки тела остаются все время неподвижными, стр.22.

**Годограф вектора** - линия, последовательно соединяющая концы векторов, построенных из одной точки для разных моментов времени.

**Годограф радиус-вектора** - траектория движения точки, стр.4.

**Закон движения точки по траектории**, стр. 4

**Мгновенная ось вращения** - стр.62.

**Мгновенный центр вращения** - стр.38.

**Мгновенный центр скоростей** - точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, стр.41.

**Мгновенно поступательное движение тела** - движение, характеризующееся тем, что в данный момент скорости всех точек тела одинаковы ($\omega = 0$), а ускорения - неодинаковы, стр.43.

**Общий случай движения твердого тела** - совокупность поступательного вместе с полюсом и сферического вокруг полюса, стр.66.

**Ось конечного поворота** - стр.63.

**Относительное движение тела** - движение тела относительно подвижной системы отсчета, стр.98.

**Относительное движение точки** - движение точки относительно подвижной системы, стр.71.

**Относительная скорость точки** - скорость точки относительно подвижной системы отсчета, стр. 76.

**Относительное ускорение точки** - ускорение точки при движении относительно подвижной системы, стр.79.

**Основные виды движения твердого тела** - поступательное, вращательное, плоскопараллельное, сферическое, общий случай.

**Относительная производная по времени вектора, записанного в подвижной системе отсчета** - стр.75.

**Пара вращений** – совокупность двух противоположно направленных вращений твердого тела с одинаковыми угловыми скоростями (тело вращается вокруг некоторой оси и вместе с этой осью вращается вокруг другой оси), стр.102.

**Переносное движение тела** - движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной, стр.73, стр.98.

**Переносное движение точки** - это движение того пункта подвижной системы отсчета (относительно неподвижной), с которым в данный момент совпадает рассматриваемая точка, стр. 71.

**Переносная скорость точки** - это скорость того пункта подвижной системы (относительно неподвижной), с которым в данный момент совпадает движущаяся точка, стр.76.

**Переносное ускорение точки** - это ускорение того пункта подвижной системы (относительно неподвижной), с которым в данный момент совпадает движущаяся точка, стр.79.

**Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела** - это такое движение, при котором все точки тела описывают плоские траектории, лежащие в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, стр.33.

**Поступательное движение твердого тела** - это такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе во все время движения, стр.21.

**Способы задания движения точки -** векторный (стр.3), координатный (стр.4) и естественный (стр.4).

## Ответы к контрольным вопросам

1.1. $\sqrt{21}$
1.2. 4
1.3. Прямая,$3\sqrt{5}$
1.4. $16/\sqrt{21}$
1.5. $(2\sqrt{10})/7$
1.6. $\infty$
1.7. да, $a=a^n=v^2/a^n$

2.1. Ответ: 1/6 с.
2.2…… Ответ: 0.….
2.3. Ответ $36\pi^2$
2.4. Ответ $12\pi$.
2.5. Ответ $36\pi^2$
2.6. Ответ 0
2.7. Ответ $36\pi^2$
2.8. Ответ 1,2
2.9. Ответ2,4
2.10. Ответ $\omega$=1,2 v =0,6
2.11. Ответ $\varepsilon$=0,4, $a\approx$0,75

4.1. Векторы углового ускорения и угловой скорости не расположены на одной прямой.

## Литература


1. Бражниченко Н.А. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие.- М.:Высшая школа, 1986, 325 с.
2. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. - М.:Высшая школа, 1986.- 325 с.
3. Еленев С.А., Шевелева Г.И. Теоретическая механика. Статика. Конспект лекций.- М.: МГТУ»Станкин», 1999.- 78 с.
4. Лойцянский Л.Г. и Лурье А.И.. Курс теоретической механики. Т.Т.1,2. -.М.:Госиздат технико-теоретической литературы, 1954. - 379 с. и 595 с.
5. Люкшин В.С., Исаев И.А., Станкевич И.И. Методические указания к выполнению заданий по статике. - М.:Мосстанкин, 1969.- 62 с.
6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие.- М.: Наука, 1986.- 480 с.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.:Наука, 1967, 479 с.
8. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие / Под редакцией Колесникова К.С. - М.: Наука,1983.- 318 с.
9. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Учебное пособие. / Под редакцией Яблонского А.А. - М.: Высшая школа, 1985.- 432 с.
10. Meriam J.L. Statics. New Jork. 1975.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**4. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой и общий случай движения**



**5. Сложное движение точки.**



**6. Сложное движение твердого тела**