



数学分析讲义

作者: Ayame

时间: December 9, 2022

前言

这是由 Ayame（千丛恋雨万花绫）编写的数学分析讲义

目录

第 1 章 集合	1
1.1 集合与子集	1
1.2 集合的运算	2
1.3 映射与基数	5

第1章 集合

在中学阶段，大家已经初步接触过关于集合的知识。例如，自然数全体形成一个集合，常记为 \mathbb{N} ；有理数形成一个集合，常记为 \mathbb{Q} ；实数形成一个集合，记为 \mathbb{R} 。关于集合的精确定义是很难给出的，根据 Cantor 给出的概念（概括性），可以这样定义集合。

定义 1.1

集合是把具有某种特征或满足一定性质的所有对象视为整体时，这个整体是集合，而这些对象就称为集合中的元素

在这个描述性的定义上，需要建立公理，满足数学的严谨性要求。

在集合的基础上，我们可以为集合定义距离、范数、向量内积、二元运算。通过定义运算，可以形成代数结构；通过定义距离、范数、向量内积，可以形成各种空间。

在对集合有基础的了解后，我们将在最常用的集合——实数集 \mathbb{R} 上，定义序关系、加法、乘法，并开始我们的数学分析学习之旅。

1.1 集合与子集

我们约定，集合的符号用大写字母 A, B, C, \dots, X, Y, Z 等表示，集合中的元素用 a, b, c, \dots, x, y, z 等表示。若 a 是 A 的元素，则记为 $a \in A$ ，称 a 属于 A

对于集合，在中学阶段我们已经学过了这些定义

定义 1.2 (子集)

对于两个集合 A, B 。若 $x \in A$ 必定有 $x \in B$ ，则称 A 是 B 的子集，记作：

$$A \subset B$$

如果 $\exists b \in B, b \notin A$ ，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$

定义 1.3 (空集)

空集是不包含任何元素的集合，记作 \emptyset

规定：空集是任何集合的子集

定义 1.4

设集合 A, B ，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称 A 与 B 相等或等同，记作 $A = B$

对于一系列具有共同特征的集合，我们可以对每一个集合进行标号，可以将标号组成的集合记作 I ，称为指标集。在此基础上，可以给出集合族的定义

定义 1.5 (集合族)

设 I 是给定的一个集合, 对于每一个 $\alpha \in I$, 指定一个集合 A_α , 这样可以得到一系列集合, 它们的总体称为集合族, 记为 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 或者 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$
 当 $I = \mathbb{N}$ 时, 集合族也称为集合列, 简记为 $\{A_i\}$ 这样的形式
 集合族常常用花体字母表示, 如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}$



事实上, 上述集合的描述是不完美的。我们可以构造出一种情况, 使得一个元素既不能属于一个集合, 又不能不属于这个集合。

例题 1.1 罗素悖论 定义 $S = \{A : A \notin A\}$, 判断 $S \in S$ 是否成立

首先, 我们需要明白的是, 上面的 \notin 并不是 \nlessdot , 这里不是作者笔误 (这是初学者常有的误解)。

为了便于理解 $A \in A$ 是什么情况, 我们可以先尝试找到一个符合这种性质的集合。事实上, 我们不难发现: 由全体无限集组成的集合满足 $A \in A$ 。换句话说, 全体无限集组成的集合属于它自身。

回到正题。假设 $S \in S$, 那么根据 S 的定义, 有 $S \notin S$; 假设 $S \notin S$, 则根据定义, 有 $S \in S$ 。从而无法判断 S 是否是 S 的元素

这个悖论类似于理发师悖论。感兴趣的同学可以上网搜索。

罗素悖论和它引申出的其他悖论要求对集合设置自治的公理体系, 著名的公理系统有 ZF 公理系统和 NBG 公理系统。这些内容超过了本书涉及范围, 故不赘述。

1.2 集合的运算

集合的分解和合成是形成新集合的有效方法, 这种分解和合成可以通过集合间的运算来表达。

在中学阶段, 我们已经学过简单的集合的并、交、补。

1.2.1 交与并

定义 1.6

设集合 A, B , 称集合 $\{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$.

**定义 1.7**

设集合 A, B , 称集合 $\{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相交。



显然, 集合的运算满足结合律、交换律、分配律

定理 1.1

交换律:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A; \quad (1.1)$$

结合律:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C; \end{aligned} \quad (1.2)$$

分配律:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C); \end{aligned} \quad (1.3)$$



类似于两个集合的交、并，可以定义多个集合的交、并。（此处的多个可以是无穷多个，甚至可以是比自然数的个数更大的无穷）

定义 1.8

设集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ，定义并集和交集如下：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$



根据上述定义，对于任意多（可以是无穷多）个的并或交，改变计算顺序不会影响结果。

注 上述结论并非通过数学归纳法和两个集合的交、并的性质得出。数学归纳法只能保证“任意有限”成立，对“无限”不能保证成立。

分配律对于多个集合的运算依然成立。

定理 1.2

多个集合运算的分配律:

$$\begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha); \\ A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &= \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha). \end{aligned} \quad (1.4)$$



例题 1.2 康托尔集 取闭区间 $[0, 1]$ ，挖去中间的 $1/3$ ，得到两个部分（闭区间），再分别对两个部分挖去中间，得到 4 个部分。不断地进行挖去中间的操作，重复无穷多次后，得到的集合就是康托尔集。请尝试用交集和并集表示康托尔集。

第一次挖去中间时，得到的两个闭区间是 $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ ，第二次挖去中间时，挖去的是 $[1/9, 2/9]$, $[7/9, 8/9]$. 注意到分母总是 3^n ，并且保留部分区间下限的分子始终是偶数，区间

上限的分子始终是下限 +1. 于是, 康托尔集可以写成这样的形式

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{3^k} \left[\frac{2i}{3^k}, \frac{2i+1}{3^k} \right]$$

1.2.2 差与补

定义 1.9 (差集)

设集合 A, B , 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的差集, 记作 $A \setminus B$. (读作 A 减 B)
当 $B \subset A$ 时, 称 $A \setminus B$ 为集合 B 相对于 A 的补集 (或余集)。



在讨论某一问题时, 常常规定一个默认的最大集合 X , 我们称 X 为全集, 此时, 集合 B 相对于全集的补集就简称 B 的补集, 并记作 B^c

显然, 有如下事实:

1. $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset, (A^c)^c = A$
2. $X^c = \emptyset, \emptyset^c = X$
3. $A \setminus B = A \cap B^c$
4. 若 $A \supset B$, 则 $A^c \subset B^c$
5. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $A \subset B^c$

集合的补与交、并有如下运算法则

定理 1.3 (De.Morgan 法则)

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c \quad (1.5)$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c \quad (1.6)$$



证明 以(1.5)为例, 对于任意 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c$, 有 $x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}$, 即 $\forall \alpha \in I, x \notin A_{\alpha}$

也就是说 $\forall \alpha \in I, x \in A_{\alpha}^c$, 故 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c$

所以, $\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c \subset \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c$

反过来, 对于任意 $x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c$, 有 $\forall \alpha \in I, x \in A_{\alpha}^c$, 即 $\forall \alpha \in I, x \notin A_{\alpha}$

所以 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c$

所以 $\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c$

综上, (1.5)得证

请读者模仿上述证明过程, 自行证明(1.6)

注 证明两个集合互为子集是证明两个集合相等的一种常用方法。这种方法也可以推广到其他与“子集”相关的证明, 如数论中证明两个整数相等可以用互相整除证明。

集合列的极限

本部分将在极限章节中讲述

1.2.3 笛卡尔积

笛卡尔积 (Cartesian product) 又称直积, 是一种将多个集合中的元素直接组合起来的运算。

定义 1.10

设集合 X, Y , $x \in X, y \in Y$, 称一切形如 (x, y) 的有序“元素对”形成的集合为 X, Y 的笛卡尔积, 记作 $X \times Y$, 即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

集合对自身的笛卡尔积如 $X \times X$ 可以记为 X^2



1.2.4 幂集

定义 1.11

设 X 是一个非空集合, 由 X 的一切子集 (包括 \emptyset 和自身) 为元素形成的集合称为 X 的幂集, 记作 $\mathcal{P}(X)$



例题 1.3 设 E 是有 n 个元素的有限集, 求 $\mathcal{P}(E)$ 的元素个数

对于任何一个元素, 要么它在 E 的子集中, 要么不在。并且, 一个元素是否在子集不影响另外一个元素是否在子集中。所以, $\mathcal{P}(E)$ 的元素个数为 2^n

从直观上看, 一个集合的幂集的元素个数一定比这个集合本身的元素个数多。事实上, 对于无限集来说也是如此, 在之后的“基数”章节会给出严格的证明。

1.3 映射与基数

通过映射, 我们把不同的集合联系起来。而运用映射联系不同的集合时, 有时会出现不能建立联系的情况, 这种情况发生的原因是因为集合中元素的多少不同。

对于有限集，我们很容易描述它元素的个数来表示其中元素的多少；而对于无限集，元素的多少是难以描述的。同为无限集时，有些集合的元素远多于另一个集合以至于不能一一对应。但有时，看起来元素不一样多的集合却能够形成一一对应的关系（比如说整数和偶数）。为了衡量集合中元素的多少，引入基数的概念。

1.3.1 映射

在中学中，我们已经学过函数的概念。函数是从定义域到 \mathbb{R} 的一种对应关系，我们把这种概念推广到一般的集合。

定义 1.12 (映射)

设非空集合 X, Y ，若 $\forall x \in X$ ，存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应，则称这个对应为映射。若用 f 表示这种对应，则记作

$$f : X \rightarrow Y$$

并称 f 是从 X 到 Y 的一个映射。

类似于复合函数，有复合映射

定义 1.13

设 $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow W$ ，则

$$h(x) = g(f(x)), x \in X$$

定义的 h 称为 g 与 f 的复合映射，可记作 $f \circ g$

类似于函数的自变量和因变量，映射有“像”和“原像”。

定义 1.14 (像、原像)

设 $x \in X$ ， y 是 Y 中与 x 对应的元素，称 $y = f(x)$ 是 x 的像， x 是 y 的原像。

对于集合，称 $f(A) = \{y \in Y : x \in A, y = f(x)\}$ 为 A 的像集（可简称为像）；

称 $f^{-1}(B) = \{x \in X : y \in B, y = f(x)\}$ 为 B 关于 f 的原像集（可简称为原像）。

显然，像具有以下性质

1. $f\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_{\alpha})$
2. $f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}\right) \subset \bigcap_{\alpha \in I} f(A_{\alpha})$
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_{\alpha}) (B_{\alpha} \subset Y, \alpha \in I)$
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_{\alpha}) (B_{\alpha} \subset Y, \alpha \in I)$

5. 若 $B_1 \subset B_2 \subset Y$, 则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

接下来, 将要讲到 3 个重要的映射——单射、满射、双射。

定义 1.15 (单射)

不同元有不同像的映射是单射, 即:

设 $f: X \rightarrow Y$, 若 $\forall x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则 f 是单射。

一种单射的等价描述是: 任何一个像都只有一个原像的映射是单射

定义 1.16 (满射)

Y 是像的映射是满射, 即:

设 $f: X \rightarrow Y$, 若 $\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$, 则 f 是满射。

定义 1.17 (双射)

既是单射又是满射的映射是双射

不难发现, 整数集和偶数集能够形成双射。事实上, 与真子集形成双射是无限集区别于有限集的一个重要特征。

命题 1.1

一个集合能够与它的真子集形成双射当且仅当它是无限集。

证明 先证明充分性。这个命题的逆否命题是: 如果一个集合是有限集, 那么它不能够和它的真子集形成双射。

有限集 E 的元素个数为 n , 假设 E 的真子集 A 与 E 形成双射 $f: E \rightarrow A$ 。

因为 f 是双射, $\forall a \in A$, 总能找到不重复的 $b \in E$ 使得 $f(b) = a$

因为 E 有 n 个元素, 所以能在 A 中找到 n 个不重复的元素, 这与 $A \subsetneq E$ 矛盾, 所以假设不成立, 充分性得证。

证明必要性只需要找到一个任何无限集都存在的到自身真子集的双射。

设无限集 B , 由于 B 是无限集, 必定存在一个自然数集 \mathbb{N} 到 B 的单射, 于是, 得到了一系列元素 $b_n (n \in \mathbb{N}^+)$ 。

这样, 可以定义映射 $g: B \rightarrow B \setminus \{b_1\}$, g 的定义如下:

若 $\forall n \in \mathbb{N}^+, x \neq b_n$, 则令 $g(x) = x$; 若 $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+, x = b_{n_0}$, 则令 $g(x) = b_{n_0+1}$

显然, g 是双射, 必要性得证

在下一部分中, 我们将比较集合的多少。比较集合的多少会经常需要证明两个集合之间存在双射。

1.3.2 基数

对于一个集合, 集合中元素的个数是最基本的问题之一, 设集合 A, B , 如何比较哪一个集合元素的个数多?

对于有限集，比较集合元素的多少是简单的。但对于无限集，情况就复杂了。首先我要告诉你：无限集的元素并不是一样多的，不要因为不知道怎么比较就认为无限集的元素都一样多。

首先，一个经典且有趣的问题，自然数和偶数哪个多？

你也许会想当然地认为：自然数包含偶数和奇数，所以自然数多。但是，我们可以轻易地把自然数和偶数一一对应（只需要乘 2 就可以），这时，它们看起来是一样多的。

数学上要求，比较集合元素的多少用第二种方法——利用映射（尤其是双射）进行比较。

定义 1.18

设集合 A, B ，若存在一个双射 $f: A \rightarrow B$ ，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$



例题 1.4 求证 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

证明 我们知道，任何一个大于 1 的整数都能够被素因数分解。并且，2 是最小的素数。

所以，任意自然数 n 均可唯一地表示为 $n = 2^p \cdot q$ ，其中 p 为非负整数， q 为正奇数。

于是，就存在双射

$$f(i, j) = 2^{i-1}(2j-1), \quad (i, j \in \mathbb{N})$$

满足 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

显然，对等关系具有以下基本性质：

1. $A \sim A$
2. 若 $A \sim B$ ，则 $B \sim A$
3. 若 $A \sim B, B \sim C$ ，则 $A \sim C$

由这些性质，我们就可以通过过渡集合获得两个集合之间的一一对应关系。此外，还可以采用分解与合成的思想，尤其是以下的 Cantor-Bernstein 定理，更是一种证明集合对等的重要手段。

注 这个定理的证明是一个难点

定理 1.4 (Cantor-Bernstein 定理)

若集合 X 与 Y 的某个真子集对等， Y 与 X 的某个真子集对等，则 $X \sim Y$

这个定理的一种等价叙述是：若集合 X, Y 间存在映射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ ，且都是单射，则 $X \sim Y$



证明 首先对集合进行划分。设单射 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$

定义一个可能用于划分集合的过程 r ：

对集合 X 中的点 $x \in A$ ， $r(x) = g^{-1}(x) \in Y$ ；

对集合 B 中的点 $y \in B$ ， $r(y) = f^{-1}(y) \in X$ 。

对 X 中的点进行 r 过程，得到 Y 中的点，再对这个点进行 r 过程，会再次得到 X 中的点（假设这些操作均可行）

注意到，集合 $X \setminus g(Y)$ 和集合 $Y \setminus f(X)$ 中的点不能进行 r 过程。

根据是否能无限地迭代进行 r 过程, 将 X, Y 分别分割成 3 个部分, 即

$$X = X_\infty \sqcup X_X \sqcup X_Y$$

$$Y = Y_\infty \sqcup Y_X \sqcup Y_Y$$

其中下标为 ∞ 的集合中的点能够无限地进行 r 过程; 下标为 X 的集合在进行 $n(n \geq 0)$ 次过程后, 落入集合 $X \setminus g(Y)$; 下标为 Y 的集合在进行 $n(n \geq 0)$ 次过程后, 落入集合 $Y \setminus f(X)$

首先, 限制在 $X_\infty \rightarrow Y_\infty$ 的映射 f 是一个双射, 理由如下:

对任意一个 Y_∞ 中的点 y_∞ , 进行一次 r 过程, 必定会得到 X_∞ 中的点 x_∞ , 即

$$\forall y_\infty \in Y_\infty, \exists x_\infty, f^{-1}(y_\infty) = x_\infty$$

所以, $f: X_\infty \rightarrow Y_\infty$ 是满射。

又因为 f 是单射, 所以 $f: X_\infty \rightarrow Y_\infty$ 是双射。

同理, $f: X_X \rightarrow Y_X$ 是双射。

对于 X 的最后一部分 (X_Y), 我们不能仿照上面的做法。因为对于 $Y \setminus f(X) \subset Y_Y$, 而 $Y \setminus f(X)$ 是 f 是达不到的。

所以对于这一部分, 我们要用 g 构造双射。

对任意 X_Y 中的点 x_Y , 进行一次过程 r , 必然会得到 Y_Y 中的点 y_Y , 即

$$\forall x_Y \in X_Y, \exists y_Y \in Y_Y, g^{-1}(x_Y) = y_Y$$

所以 $g: Y_Y \rightarrow X_Y$ 是双射, 所以 $g^{-1}: X_Y \rightarrow Y_Y$ 是双射。

于是, 就得到了双射 $h: X \rightarrow Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in X_\infty \cup X_X \\ g^{-1}(x), & \text{当 } x \in X_Y \end{cases}$$

注 符号 \sqcup 称作无交并, 这个符号的意义是: 对于满足 $M \cap N = \emptyset$ 的集合 M, N , 有 $M \sqcup N = M \cup N$