数学分析讲义

作者：Ayame

时间：December 15, 2022

前言

这是由 Ayame（千丛恋雨万花绫）编写的数学分析讲义

目录

第 1 章 集合

在中学阶段，大家已经初步接触过关于集合的知识。例如，自然数全体形成一个集合，常记为 $\mathbb{N}$；有理数形成一个集合，常记为 $\mathbb{Q}$；实数形成一个集合，记为 $\mathbb{R}$. 关于集合的精确定义是很难给出的，根据 Cantor 给出的概念（概括性），可以这样定义集合。

定义 1.1

集合是把具有某种特征或满足一定性质的所有对象视为整体时，这个整体是集合，而这些对象就称为集合中的元素 ♣

在这个描述性的定义上，需要建立公理，满足数学的严谨性要求。

在集合的基础上，我们可以为集合定义距离、范数、向量内积、二元运算。通过定义运算，可以形成代数结构；通过定义距离、范数、向量内积，可以形成各种空间。

在对集合有基础的了解后，我们将在最常用的集合——实数集 $\mathbb{R}$ 上，定义序关系、加法、乘法，并开始我们的数学分析学习之旅。

1.1 集合与子集

我们约定，集合的符号用大写字母 $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ 等表示，集合中的元素用 $a, b, c, \cdots, x, y, z$ 等表示。若 a 是 A 的元素，则记为 $a \in A$，称 a 属于 A

对于集合，在中学阶段我们已经学过了这些定义

定义 1.2 (子集)

对于两个集合 A, B. 若 $x \in A$ 必定有 $x \in B$，则称 A 是 B 的子集，记作：

$$A \subset B$$

如果 $\exists b \in B, b \notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$ ♣

定义 1.3 (空集)

空集是不包含任何元素的集合，记作 $\varnothing$

规定：空集是任何集合的子集 ♣

定义 1.4

设集合 A, B，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等或等同，记作 $A = B$ ♣

对于一系列具有共同特征的集合，我们可以对每一个集合进行标号，可以将标号组成的集合记作 I，称为指标集。在此基础上，可以给出集合族的定义

定义 1.5 (集合族)

设 I 是给定的一个集合，对于每一个 $\alpha \in I$，指定一个集合 A_α，这样可以得到一系列集合，它们的总体称为集合族，记为 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 或者 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$

当 $I = \mathbb{N}$ 时，集合族也称为集合列，简记为 $\{A_i\}$ 这样的形式

集合族常常用花体字母表示，如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}$ ♣

事实上，上述集合的描述是不完美的。我们可以构造出一种情况，使得一个元素既不能属于一个集合，又不能不属于这个集合。

例题 1.1 罗素悖论 定义 $S = \{A : A \notin A\}$，判断 $S \in S$ 是否成立

首先，我们需要明白的是，上面的 $\notin$ 并不是 $\not\subset$，这里不是作者笔误（这是初学者常有的误解）。

为了便于理解 $A \in A$ 是什么情况，我们可以先尝试找到一个符合这种性质的集合。事实上，我们不难发现：由全体无限集组成的集合满足 $A \in A$。换句话说，全体无限集组成的集合属于它自身。

回到正题。假设 $S \in S$，那么根据 S 的定义，有 $S \notin S$；假设 $S \notin S$，则根据定义，有 $S \in S$. 从而无法判断 S 是否是 S 的元素

这个悖论类似于理发师悖论。感兴趣的同学可以上网搜索。

罗素悖论和它引申出的其他悖论要求对集合设置自洽的公理体系，著名的公理系统有 ZF 公理系统和 NBG 公理系统。这些内容超过了本书涉及范围，故不赘述。

1.2 集合的运算

集合的分解和合成是形成新集合的有效方法，这种分解和合成可以通过集合间的运算来表达。

在中学阶段，我们已经学过简单的集合的并、交、补。

1.2.1 交与并

定义 1.6

设集合 A, B，称集合 $\left\{x : x \in A \text{或} x \in B\right\}$ 为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$. ♣

定义 1.7

设集合 A, B，称集合 $\{x : x \in A \text{且} x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$.

若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B 互不相交。 ♣

显然，集合的运算满足结合律、交换律、分配律

定理 1.1

交换律：

$$A \cup B = B \cup A, \ A \cap B = B \cap A; \tag{1.1}$$

结合律：

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C; \end{aligned} \tag{1.2}$$

分配律：

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C); \end{aligned} \tag{1.3}$$

♡

类似于两个集合的交、并，可以定义多个集合的交、并。（此处的多个可以是无穷多个，甚至可以是比自然数的个数更大的无穷）

定义 1.8

设集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$，定义并集和交集如下：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

♣

根据上述定义，对于任意多（可以是无穷多）个的并或交，改变计算顺序不会影响结果。

注 上述结论并非通过数学归纳法和两个集合的交、并的性质得出。数学归纳法只能保证“任意有限”成立，对“无限”不能保证成立。

分配律对于多个集合的运算依然成立。

定理 1.2

多个集合运算的分配律：

$$\begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha); \\ A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &= \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha). \end{aligned} \tag{1.4}$$

♡

例题 1.2 康托尔集 取闭区间 $[0,1]$，挖去中间的 $1/3$，得到两个部分（闭区间），再分别对两个部分挖去中间，得到 4 个部分。不断地进行挖去中间的操作，重复无穷多次后，得到的集合就是康托尔集。请尝试用交集和并集表示康托尔集。

第一次挖去中间时，得到的两个闭区间是 $[0,1/3], [2/3,1]$，第二次挖去中间时，挖去的是 $[1/9,2/9], [7/9,8/9]$. 注意到分母总是 3^n，并且保留部分区间下限的分子始终是偶数，区间

上限的分子始终是下限 +1. 于是，康托尔集可以写成这样的形式

$$\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{3^k}\left[\frac{2i}{3^k},\frac{2i+1}{3^k}\right]$$

1.2.2 差与补

定义 1.9 (差集)

设集合 A,B，称 $\{x:x\in A,x\notin B\}$ 为 A 与 B 的差集，记作 $A\backslash B$.（读作 A 减 B）当 $B\subset A$ 时，称 $A\backslash B$ 为集合 B 相对于 A 的补集（或余集）。♣

在讨论某一问题时，常常规定一个默认的最大集合 X，我们称 X 为全集，此时，集合 B 相对于全集的补集就简称 B 的补集，并记作 B^c

显然，有如下事实：

1. $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing, (A^c)^c=A$
2. $X^c=\varnothing, \varnothing^c=X$
3. $A\backslash B=A\cap B^c$
4. 若 $A\supset B$，则 $A^c\subset B^c$
5. 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^c$

集合的补与交、并有如下运算法则

定理 1.3 (De.Morgan 法则)

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c \tag{1.5}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c \tag{1.6}$$

♡

证明 以(1.5)为例，对于任意 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$，有 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，即 $\forall\alpha\in I,x\notin A_\alpha$

也就是说 $\forall\alpha\in I,x\in A_\alpha^c$，故 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

所以，$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c\subset\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

反过来，对于任意 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$，有 $\forall\alpha\in I,x\in A_\alpha^c$，即 $\forall\alpha\in I,x\notin A_\alpha$

所以 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$

所以 $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c\subset\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$

综上，(1.5)得证

请读者模仿上述证明过程，自行证明(1.6)

注 证明两个集合互为子集是证明两个集合相等的一种常用方法。这种方法也可以推广到其他与“子集”相关的证明，如数论中证明两个整数相等可以用互相整除证明。

集合列的极限

本部分将在极限章节中讲述

1.2.3 笛卡尔积

笛卡尔积（Cartesian product）又称直积，是一种将多个集合中的元素直接组合起来的运算。

定义 1.10

设集合 X,Y，$x \in X, y \in Y$，称一切形如 (x,y) 的有序“元素对”形成的集合为 X,Y 的笛卡尔积，记作 $X \times Y$，即

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$$

集合对自身的笛卡尔积如 $X \times X$ 可以记为 X^2 ♣

1.2.4 幂集

定义 1.11

设 X 是一个非空集合，由 X 的一切子集（包括 $\varnothing$ 和自身）为元素形成的集合称为 X 的幂集，记作 $\mathcal{P}(X)$ ♣

例题 1.3 设 E 是有 n 个元素的有限集，求 $\mathcal{P}(E)$ 的元素个数

对于任何一个元素，要么它在 E 的子集中，要么不在。并且，一个元素是否在子集不影响另外一个元素是否在子集中。所以，$\mathcal{P}(E)$ 的元素个数为 2^n

从直观上看，一个集合的幂集的元素个数一定比这个集合本身的元素个数多。事实上，对于无限集来说也是如此，在之后的“基数”章节会给出严格的证明。

1.3 映射与基数

通过映射，我们把不同的集合联系起来。而运用映射联系不同的集合时，有时会出现不能建立联系的情况，这种情况发生的原因是因为集合中元素的多少不同。

对于有限集，我们很容易描述它元素的个数来表示其中元素的多少；而对于无限集，元素的多少是难以描述的。同为无限集时，有些集合的元素远多于另一个集合以至于不能一一对应。但有时，看起来元素不一样多的集合却能够形成一一对应的关系（比如说整数和偶数）。为了衡量集合中元素的多少，引入基数的概念。

1.3.1 映射

在中学中，我们已经学过函数的概念。函数是从定义域到 $\mathbb{R}$ 的一种对应关系，我们把这种概念推广到一般的集合。

定义 1.12 (映射)

设非空集合 X,Y，若 $\forall x \in X$，存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应，则称这个对应为映射。若用 f 表示这种对应，则记作

$$f : X \to Y$$

并称 f 是从 X 到 Y 的一个映射。♣

类似于复合函数，有复合映射

定义 1.13

设 $f : X \to Y, g : Y \to W$，则

$$h(x) = g(f(x)), x \in X$$

定义的 h 称为 g 与 f 的复合映射，可记作 $f \circ g$ ♣

类似于函数的自变量和因变量，映射有“像”和“原像”。

定义 1.14 (像、原像)

设 $x \in X$，y 是 Y 中与 x 对应的元素，称 $y = f(x)$ 是 x 的像，x 是 y 的原像。
对于集合，称 $f(A) = \{y \in Y : x \in A, y = f(x)\}$ 为 A 的像集（可简称为像）；
称 $f^{-1}(B) = \{x \in X : y \in B, y = f(x)\}$ 为 B 关于 f 的原像集（可简称为原像）。♣

显然，像具有以下性质

1. $f\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
2. $f\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
3. $f^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)(B_\alpha \subset Y, \alpha \in I)$
4. $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap\limits_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)(B_\alpha \in Y, \alpha \in I)$

5. 若 $B_1 \subset B_2 \subset Y$，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

接下来，将要讲到 3 个重要的映射——单射、满射、双射。

定义 1.15 (单射)

不同元有不同像的映射是单射，即：

设 $f: X \to Y$，若 $\forall x_1, x_2 \in X$且$x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则 f 是单射。♣

一种单射的等价描述是：任何一个像都只有一个原像的映射是单射

定义 1.16 (满射)

Y 是像的映射是满射，即：

设 $f: X \to Y$，若 $\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$，则 f 是满射。♣

定义 1.17 (双射)

既是单射又是满射的映射是双射 ♣

不难发现，整数集和偶数集能够形成双射。事实上，与真子集形成双射是无限集区别于有限集的一个重要特征。

命题 1.1

一个集合能够与它的真子集形成双射当且仅当它是无限集。♠

证明 先证明充分性。这个命题的逆否命题是：如果一个集合是有限集，那么它不能够和它的真子集形成双射。

有限集 E 的元素个数为 n，假设 E 的真子集 A 与 E 形成双射 $f: E \to A$。

因为 f 是双射，$\forall a \in A$，总能找到不重复的 $b \in E$ 使得 $f(b) = a$

因为 E 有 n 个元素，所以能在 A 中找到 n 个不重复的元素，这与 $A \subsetneq E$ 矛盾，所以假设不成立，充分性得证。

证明必要性只需要找到一个任何无限集都存在的到自身真子集的双射。

设无限集 B，由于 B 是无限集，由定理1.6，必定存在一个自然数集 $\mathbb{N}$ 到 B 的单射，于是，得到了一列元素 $b_n (n \in \mathbb{N}+)$.

这样，可以定义映射 $g: B \to B \backslash \{b_1\}$，$g$ 的定义如下：

若 $\forall n \in \mathbb{N}+, x \neq b_n$，则令 $g(x) = x$；若 $\exists n_0 \in \mathbb{N}+, x = b_{n_0}$，则令 $g(x) = b_{n_0+1}$

显然，g 是双射，必要性得证

在下一部分中，我们将比较集合的多少。比较集合的多少会经常需要证明两个集合之间存在双射。

1.3.2 基数

对于一个集合，集合中元素的个数是最基本的问题之一，设集合 A, B，如何比较哪一个集合元素的个数多？

对于有限集，比较集合元素的多少是简单的。但对于无限集，情况就复杂了。首先我要告诉你：无限集的元素并不是一样多的，不要因为不知道怎么比较就认为无限集的元素都一样多。

首先，一个经典且有趣的问题，自然数和偶数哪个多？

你也许会想当然地认为：自然数包含偶数和奇数，所以自然数多。但是，我们可以轻易地把自然数和偶数一一对应（只需要乘 2 就可以），这时，它们看起来是一样多的。

数学上要求，比较集合元素的多少用第二种方法——利用映射（尤其是双射）进行比较。

定义 1.18

设集合 A, B，若存在一个双射 $f : A \to B$，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$

例题 1.4 求证 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

证明 我们知道，任何一个大于 1 的整数都能够被素因数分解。并且，2 是最小的素数。

所以，任意自然数 n 均可唯一地表示为 $n = 2^p \cdot q$，其中 p 为非负整数，q 为正奇数。

于是，就存在双射

$$f(i, j) = 2^{i-1}(2j - 1), \quad (i, j \in \mathbb{N})$$

满足 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

显然，对等关系具有以下基本性质：

1. $A \sim A$
2. 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$
3. 若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$

由这些性质，我们就可以通过过渡集合获得两个集合之间的一一对应关系。此外，还可以采用分解与合成的思想，尤其是以下的 Cantor-Bernstein 定理，更是一种证明集合对等的重要手段。

注 这个定理的证明是一个难点

定理 1.4 (Cantor-Bernstein 定理)

若集合 X 与 Y 的某个真子集对等，Y 与 X 的某个真子集对等，则 $X \sim Y$

这个定理的一种等价叙述是：若集合 X, Y 间存在映射 $f : X \to Y, g : Y \to X$，且都是单射，则 $X \sim Y$

证明 首先对集合进行划分。设单射 $f : X \to Y, g : Y \to X$

定义一个可能用于划分集合的过程 r：

对集合 X 中的点 $x \in A$，$r(x) = g^{-1}(x) \in Y$；

对集合 B 中的点 $y \in B$，$r(y) = f^{-1}(y) \in X$.

对 X 中的点进行 r 过程，得到 Y 中的点，再对这个点进行 r 过程，会再次得到 X 中的点（假设这些操作均可行）

注意到，集合 $X \backslash g(Y)$ 和集合 $Y \backslash f(X)$ 中的点不能进行 r 过程。

根据是否能无限地迭代进行 r 过程，将 X,Y 分别分割成 3 个部分，即

$$X = X_\infty \sqcup X_X \sqcup X_Y$$

$$Y = Y_\infty \sqcup Y_X \sqcup Y_Y$$

其中下标为 ∞ 的集合中的点能够无限地进行 r 过程；下标为 X 的集合在进行 $n(n \geq 0)$ 次过程后，落入集合 $X \backslash g(Y)$；下标为 Y 的集合在进行 $n(n \geq 0)$ 次过程后，落入集合 $Y \backslash f(X)$

首先，限制在 $X_\infty \to Y_\infty$ 的映射 f 是一个双射，理由如下：

对任意一个 Y_∞ 中的点 y_∞，进行一次 r 过程，必定会得到 X_∞ 中的点 x_∞，即

$$\forall y_\infty \in Y_\infty,\ \exists x_\infty,\ f^{-1}(y_\infty) = x_\infty$$

所以，$f: X_\infty \to Y_\infty$ 是满射。

又因为 f 是单射，所以 $f: X_\infty \to Y_\infty$ 是双射。

同理，$f: X_X \to Y_X$ 是双射。

对于 X 的最后一部分（X_Y），我们不能仿照上面的做法。因为对于 $Y \backslash f(X) \subset Y_Y$，而 $Y \backslash f(X)$ 是 f 是达不到的。

所以对于这一部分，我们要用 g 构造双射。

对任意 X_Y 中的点 x_Y，进行一次过程 r，必然会得到 Y_Y 中的点 y_Y，即

$$\forall x_Y \in X_Y,\ \exists y_Y \in Y_Y,\ g^{-1}(x_Y) = y_Y$$

所以 $g: Y_Y \to X_Y$ 是双射，所以 $g^{-1}: X_Y \to Y_Y$ 是双射。

于是，就得到了双射 $h: X \to Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{当} x \in X_\infty \cup X_X \\ g^{-1}(x), \text{当} x \in X_Y \end{cases}$$

注 符号 $\sqcup$ 称作无交并，这个符号的意义是：对于满足 $M \cap N = \varnothing$ 的集合 M, N，有 $M \sqcup N = M \cup N$

在定理的基础上，有：设集合 A, B, C 满足以下关系：

$$C \subset A \subset B$$

那么就有：若 $B \sim C$，则 $B \sim A$

例题 1.5 求证：$[-1,1] \sim \mathbb{R}$

运用正切函数，不难证明 $(-1,1) \sim \mathbb{R}$

由于 $(-1,1) \subset [-1,1] \subset \mathbb{R}$

所以 $[-1,1] \sim \mathbb{R}$

■

事实上，建立 $[-1,1]$ 与 $\mathbb{R}$ 之间的双射是有些困难的，如果读者有兴趣，可以尝试一下。

现在，让我们正式开始讲基数的概念。

定义 1.19 (基数（势）)

若 $A \sim B$，那么 A 与 B 的基数是相同的。记作 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$
若 A 与 B 的子集对等，则记作 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$（反之同理）
若 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$，则记作 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$（反之同理）

由 Cantor-Bernstein 定理，显然，若 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$，则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

注 由于选择公理，不可能发生下述情景：A 与 B 的任一子集不对等且 B 与 A 的任一子集不对等。有些关于集合的命题的证明必须用到选择公理。但若承认选择公理成立，就会得出一些奇怪的结论，如“分球怪论”（Banach-Tarski 悖论）。

现在提出一个问题：是否有最大的基数？事实上，没有最大的基数。

定理 1.5 (无最大基数定理)

若 A 是非空集合，则 $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} > \overline{\overline{A}}$

证明 显然，$\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} \geq \overline{\overline{A}}$，只需证 $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} \neq \overline{\overline{A}}$
设 $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{A}}$，则存在双射 $f : A \to \mathcal{P}(A)$，
作集合 $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$
显然，$B \in \mathcal{P}(A)$
由双射定义，$\exists y \in A, f(y) = B \in \mathcal{P}(A)$
于是产生了类似于罗素悖论的情况。
1. 若 $y \in B$，则由 B 的定义，$y \notin f(y) = B$
2. 若 $y \notin B$，则由 B 的定义，$y \in f(y) = B$

这个矛盾表明 f 不存在，即 $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} \neq \overline{\overline{A}}$
■

有了基数的定义，就能够明确地定义有限集和无限集。

定义 1.20 (有限集和无限集)

设集合 A，如果 $\exists n, A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$，则 A 为有限集，并用 n 表示 A 的基数。
若一个集合不是有限集，则是无限集

1.4 可数集

定义 1.21 (可数集)

记自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数为 $\aleph_0$（读作阿列夫零，Aleph zero）。
若 $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$，则 A 为可数集（也叫作可列集）
若 $\overline{\overline{B}} > \aleph_0$，则 B 为不可数集

在日常生活中，通常，我们会用自然数来数数，因而将与 $\mathbb{N}$ 对等的集合称作可数集，因为可以将 A 中元素按一一对应关系以自然数附以下标，如

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

定理 1.6

任一无限集必定包含可数子集

证明 设无限集 E

任取 E 中一元素，记为 a_1，在从 $E\backslash\{a_1\}$ 中任取一元，记为 $a_2, \cdots$

设已选出 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 因为 E 是无限集，所以还可以继续重复

这样，就得到一个可数集且是 E 的子集

■

这个定理说明，在所有的无限集中，最小的基数是 $\aleph_0$

显然，可数集有以下性质：

若 A 和 B 是可数集，则

1. $A \cap B$ 是可数集或有限集或 $\varnothing$
2. $A \cup B$ 是可数集

定理 1.7

若 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为可数集，则并集

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

也是可数集

证明 只需讨论 $A_i \cap A_j \neq \varnothing (i \neq j)$ 的情景，设：

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1j}, \cdots\},$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2j}, \cdots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

将 A 中元素按照对角线排列形如

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & \cdots \\
& \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \cdots \\
& \nearrow & & \nearrow & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & \cdots \\
& \nearrow & & & & & & \\
a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

得到集合

$$\{a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots\}$$

因此，设集合 $\{b_n\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，$b_n = a_{ij}$，其中

$$n = j + \sum_{k=1}^{i+j-2} k$$

■

命题 1.2

$\mathbb{Q}$ 是可数集

证明 设集合 $A_i = \{i/k : k \in \mathbb{N}\}$

由定理1.7，正有理数集 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集

因为正有理数集是可数集，所以负有理数集也是可数集，所以有理数集是可数集。

■

命题 1.3

$\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$

证明 设数列 $\{a_n\}, \forall n, a_n \in \{0, 1\}$

令全体 $\{a_n\}$ 组成的数列为 A，则 $A \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$，因为存在双射 $f : \mathcal{P} \to A$，f 定义如下

$$\forall n, \text{若} n \in B(B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})), \text{则} a_n = 1, \text{否则} a_n = 0$$

注意到 $B = \{\{a_n\} : \exists k \geq 0, \forall n \geq k, a_n = 1\}$ 是可数的，所以 $\overline{\overline{A\backslash B}} = \overline{\overline{A}}$

而 $\forall a_n \in A\backslash B, r \in [0, 1)$ 可唯一表示为

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

所以 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{B\backslash A}} = \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}}$

注 上述 A 中的元素并不能唯一地表示为那个和式，这个原因之后再讲

由命题1.3，可得出 $\mathbb{R}$ 是不可数集

1.5 实数

实数理论这一节的目标是从基本的集合论出发（只假设同学们熟知有理数和　然数），通过严格和完备的推理，证明若干论题作为基本的工具。这些通过严格论证得来的工具将会撑着我们直观的图像，使得我们可以形象地思考和解决问题的同时不失严谨。

1.5.1 实数的公理化描述

$\mathbb{R}$ 是一个集合，设 $x, y, z \in \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}$ 上有两个操作
    - 加法 $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$
    - 乘法：$\cdot \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$
- $\mathbb{R}$ 上有一个序关系 $\leq$：$x \leq y$

规定四元组 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ 满足以下四套公理：

(F) 域公理：$\mathbb{R}$ 是一个域

(F1) 加法结合律：$x + (y + z) = (x + y) + z$

(F2) 加法交换律：$x + y = y + z$

(F3) 存在加法单位元 $\exists 0 \in \mathbb{R}. \forall x \in \mathbb{R}, 0 + x = x$

(F4) 加法逆元的存在性 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$

注 若 (F1)-(F4) 成立，则 $(\mathbb{R}, +)$ 被称作是一个交换群。同时，$-x$ 目前只是一个记号，因为我们还未定义减法运算。

(F5) 乘法结合律 $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(F6) 乘法交换律 $x \cdot y = y \cdot z$

(F7) 存在乘法单位元 $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, 1 \cdot x = x$

(F8) 乘法逆元的存在性 $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}, x \cdot x^{-1} = 1$

注 (F5)-(F9) 这四条公理表明：$(\mathbb{R}^{\times} := \mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot)$ 是一个交换群，同时强调 x^{-1} 也只是一个记号，因为还未定义乘方运算。

(F9) 乘法分配律 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

假定满足 (F1)-(F7) 以及 (F9)，我们就称 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 是一个交换环，满足这 9 条公理的 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 被称作是一个域

对于正整数 n，我们约定 $x^n = x \cdot x \cdot \cdots \cdot x$（共 n 个 x），$nx = x + x + \cdots + x$（共 n 个 x）。类似的，对于 $n \in \mathbb{Z}, n < 0$，我们约定 $x^n = x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \cdots \cdot x^{-1}$（共 n 个 x^{-1}），$nx = (-x) + (-x) + \cdots + (-x)$（共 n 个 $-x$）。我们规定 $0x = 0$，$x^0 = 1 (x \neq 0)$.

由此，我们定义了以整数 $n \in \mathbb{Z}$ 为幂的幂函数：

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$$

(O) $\mathbb{R}$ 是有序域

(O1) 序的传递性：$x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(O2) 序可以决定元素：$x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$

(O3) 全序关系 $\forall x, y$，要么 $x \leq y$，要么 $y \leq x$（可以都成立）

(O4) 与加法相容：$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(O5) 与乘法相容：$x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

在 $\geq, \leq$ 的基础上，我们给出大于号和小于号的定义：若 $x \leq y$ 且 $x \neq y$，则 $x < y$，类似地，可以定义 $x > y$.

由全序关系，我们可以知道，如下三种关系必居其一且互斥：

$x < y, x = y, x > y$

另外，若 $x > 0$，我们就称 x 是正实数并且称它的符号是正的，记作 $\mathrm{sign}(x) = +$；如果 $x < 0$，我们就称 x 是负实数并且称它的符号是负的，记作 $\mathrm{sign}(x) = -$. 换句话说，我们定义了一个映射：

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R}^{\times} \to \{+, -\}$$

注 注意这里的 sign 并非 sign 函数

定义 1.22 (区间)

设 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$，定义开区间、闭区间和半开半闭区间如下：

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

另外，作为约定：

$$[a, +\infty) := x \in \mathbb{R} : x \geq a$$

$$(a, +\infty) := x \in \mathbb{R} : x < a$$

$$(-\infty, b] := x \in \mathbb{R} : x \leq b$$

$$(-\infty, b) := x \in \mathbb{R} : x < b$$

其中 a 和 b 分别被称作这些区间的左端点和右端点 ♣

(A) Archimedes 公理：$\mathbb{R}$ 是 Archimedes 有序域，即

$\forall x > 0$ 和 y，$\exists n \in \mathbb{N}, nx \geq y$

基于以上公理，我们可以定义整数。进一步地，我们可以定义有理数。

定义 1.23 (有理数)

若 $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$，则定义 $\dfrac{p}{q}$ 为有理数

有理数集记作 $\mathbb{Q}$ ♣

由有理数的定义，我们将 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 称为无理数

在实数这一章节中，一个关键点就是构造 $\sqrt{2}, e, \pi$ 这样的数。中学数学似乎从未给出这些数的具体定义（只是告诉了某些性质）。然而，上述公理并不足够定义这些无理数。

(I) 区间套公理

给定有限（即下面的 a_n 和 b_n 均为实数）闭区间的序列 $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n=1,2,\cdots}$，如果这个序列是下降的，即 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$，那么他们的交集非空，即

$$\lim_{n\to\infty} I_n := \bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \varnothing$$

定义 1.24 (实数)

满足上述四套公理系统 (F),(O),(A),(I) 的四元组 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ 称作是实数 ♣

事实上，有理数也满足 (F),(O),(A) 这三套公理系统，所以，要想得到我们中学所熟悉的实数，区间套公理是不可或缺的。