数学分析讲义

作者：Ayame

时间：December 6, 2022

前言

这是由 Ayame（千丛恋雨万花绫）编写的数学分析讲义

目录

第 1 章 集合

在中学阶段，大家已经初步接触过关于集合的知识。例如，自然数全体形成一个集合，常记为 $\mathbb{N}$；有理数形成一个集合，常记为 $\mathbb{Q}$；实数形成一个集合，记为 $\mathbb{R}$. 关于集合的精确定义是很难给出的，根据 Cantor 给出的概念（概括性），可以这样定义集合。

定义 1.1

集合是把具有某种特征或满足一定性质的所有对象视为整体时，这个整体是集合，而这些对象就称为集合中的元素 ♣

在这个描述性的定义上，需要建立公理，满足数学的严谨性要求。

在集合的基础上，我们可以为集合定义距离、范数、向量内积、二元运算。通过定义运算，可以形成代数结构；通过定义距离、范数、向量内积，可以形成各种空间。

在对集合有基础的了解后，我们将在最常用的集合——实数集 $\mathbb{R}$ 上，定义序关系、加法、乘法，并开始我们的数学分析学习之旅。

1.1 集合与子集

我们约定，集合的符号用大写字母 $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ 等表示，集合中的元素用 $a, b, c, \cdots, x, y, z$ 等表示。若 a 是 A 的元素，则记为 $a \in A$，称 a 属于 A

对于集合，在中学阶段我们已经学过了这些定义

定义 1.2 (子集)

对于两个集合 A, B. 若 $x \in A$ 必定有 $x \in B$，则称 A 是 B 的子集，记作：

$$A \subset B$$

如果 $\exists b \in B, b \notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$ ♣

定义 1.3 (空集)

空集是不包含任何元素的集合，记作 $\varnothing$

规定：空集是任何集合的子集 ♣

定义 1.4

设集合 A, B，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等或等同，记作 $A = B$ ♣

对于一系列具有共同特征的集合，我们可以对每一个集合进行标号，可以将标号组成的集合记作 I，称为指标集。在此基础上，可以给出集合族的定义

定义 1.5 (集合族)

设 I 是给定的一个集合，对于每一个 $\alpha \in I$，指定一个集合 A_α，这样可以得到一系列集合，它们的总体称为集合族，记为 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 或者 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$

当 $I = \mathbb{N}$ 时，集合族也称为集合列，简记为 $\{A_i\}$ 这样的形式

集合族常常用花体字母表示，如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}$ ♣

事实上，上述集合的描述是不完美的。我们可以构造出一种情况，使得一个元素既不能属于一个集合，又不能不属于这个集合。

例题 1.1 罗素悖论 定义 $S = \{A : A \notin A\}$，判断 $S \in S$ 是否成立

首先，我们需要明白的是，上面的 $\notin$ 并不是 $\not\subset$，这里不是作者笔误（这是初学者常有的误解）。

为了便于理解 $A \in A$ 是什么情况，我们可以先尝试找到一个符合这种性质的集合。事实上，我们不难发现：由全体无限集组成的集合满足 $A \in A$。换句话说，全体无限集组成的集合属于它自身。

回到正题。假设 $S \in S$，那么根据 S 的定义，有 $S \notin S$；假设 $S \notin S$，则根据定义，有 $S \in S$. 从而无法判断 S 是否是 S 的元素

这个悖论类似于理发师悖论。感兴趣的同学可以上网搜索。

罗素悖论和它引申出的其他悖论要求对集合设置自洽的公理体系，著名的公理系统有 ZF 公理系统和 NBG 公理系统。这些内容超过了本书涉及范围，故不赘述。

1.2 集合的运算

集合的分解和合成是形成新集合的有效方法，这种分解和合成可以通过集合间的运算来表达。

在中学阶段，我们已经学过简单的集合的并、交、补。

1.2.1 交与并

定义 1.6

设集合 A, B，称集合 $\left\{x : x \in A \text{或} x \in B\right\}$ 为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$. ♣

定义 1.7

设集合 A, B，称集合 $\{x : x \in A \text{且} x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$.

若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B 互不相交。 ♣

显然，集合的运算满足结合律、交换律、分配律

定理 1.1

交换律：

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A; \tag{1.1}$$

结合律：

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \end{aligned} \tag{1.2}$$

分配律：

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \end{aligned} \tag{1.3}$$

♡

类似于两个集合的交、并，可以定义多个集合的交、并。（此处的多个可以是无穷多个，甚至可以是比自然数的个数更大的无穷）

定义 1.8

设集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$，定义并集和交集如下：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

♣

根据上述定义，对于任意多（可以是无穷多）个的并或交，改变计算顺序不会影响结果。

注 上述结论并非通过数学归纳法和两个集合的交、并的性质得出。数学归纳法只能保证“任意有限”成立，对“无限”不能保证成立。

分配律对于多个集合的运算依然成立。

定理 1.2

多个集合运算的分配律：

$$\begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha); \\ A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha). \end{aligned} \tag{1.4}$$

♡

例题 1.2 康托尔集 取闭区间 $[0,1]$，挖去中间的 $1/3$，得到两个部分（闭区间），再分别对两个部分挖去中间，得到 4 个部分。不断地进行挖去中间的操作，重复无穷多次后，得到的集合就是康托尔集。请尝试用交集和并集表示康托尔集。

第一次挖去中间时，得到的两个闭区间是 $[0,1/3], [2/3,1]$，第二次挖去中间时，挖去的是 $[1/9,2/9], [7/9,8/9]$. 注意到分母总是 3^n，并且保留部分区间下限的分子始终是偶数，区

间上限的分子始终是下限 +1. 于是，康托尔集可以写成这样的形式

$$\bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{3^k}\left[\frac{2i}{3^k},\frac{2i+1}{3^k}\right]$$

1.2.2 差与补

定义 1.9 (差集)

设集合 A,B，称 $\{x:x\in A,x\notin B\}$ 为 A 与 B 的差集，记作 $A\backslash B$.（读作 A 减 B）
当 $B\subset A$ 时，称 $A\backslash B$ 为集合 B 相对于 A 的补集（或余集）。♣

在讨论某一问题时，常常规定一个默认的最大集合 X，我们称 X 为全集，此时，集合 B 相对于全集的补集就简称 B 的补集，并记作 B^c

显然，有如下事实：

1. $A\cup A^c=X,A\cap A^c=\varnothing,(A^c)^c=A$
2. $X^c=\varnothing,\varnothing^c=X$
3. $A\backslash B=A\cap B^c$
4. 若 $A\supset B$，则 $A^c\subset B^c$
5. 若 $A\cap B=\varnothing$，则 $A\subset B^c$

集合的补与交、并有如下运算法则

定理 1.3 (De.Morgan 法则)

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c \tag{1.5}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c \tag{1.6}$$

♡

证明 以(1.5)为例，对于任意 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$，有 $x\notin\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，即 $\forall\alpha\in I,x\notin A_\alpha$

也就是说 $\forall\alpha\in I,x\in A_\alpha^c$，故 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

所以，$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c\subset\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$

反过来，对于任意 $x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c$，有 $\forall\alpha\in I,x\in A_\alpha^c$，即 $\forall\alpha\in I,x\notin A_\alpha$

所以 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$

所以 $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c\subset\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$

综上，(1.5)得证

请读者模仿上述证明过程，自行证明(1.6)

注 证明两个集合互为子集是证明两个集合相等的一种常用方法。这种方法也可以推广到其他与“子集”相关的证明，如数论中证明两个整数相等可以用互相整除证明。

集合列的极限

本部分将在极限章节中讲述

1.2.3 笛卡尔积

笛卡尔积（Cartesian product）又称直积，是一种将多个集合中的元素直接组合起来的运算。

定义 1.10

设集合 X, Y，$x \in X, y \in Y$，称一切形如 (x, y) 的有序“元素对”形成的集合为 X, Y 的笛卡尔积，记作 $X \times Y$，即

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

集合对自身的笛卡尔积如 $X \times X$ 可以记为 X^2 ♣

1.2.4 幂集

定义 1.11

设 X 是一个非空集合，由 X 的一切子集（包括 $\varnothing$ 和自身）为元素形成的集合称为 X 的幂集，记作 $\mathcal{P}(X)$ ♣

例题 1.3 设 E 是有 n 个元素的有限集，求 $\mathcal{P}(E)$ 的元素个数

对于任何一个元素，要么它在 E 的子集中，要么不在。并且，一个元素是否在子集不影响另外一个元素是否在子集中。所以，$\mathcal{P}(E)$ 的元素个数为 2^n

1.3 映射与基数

通过映射，我们把不同的集合联系起来。而运用映射联系不同的集合时，有时会出现不能建立联系的情况，这种情况发生的原因是因为集合中元素的多少不同。

对于有限集，我们很容易描述它元素的个数来表示其中元素的多少；而对于无限集，元素的多少是难以描述的。同为无限集时，有些集合的元素远多于另一个集合以至于不能一一

对应。但有时，看起来元素不一样多的集合却能够形成一一对应的关系（比如说整数和偶数）。为了衡量集合中元素的多少，引入基数的概念。

1.3.1 映射

在中学中，我们已经学过函数的概念。函数是从定义域到 $\mathbb{R}$ 的一种对应关系，我们把这种概念推广到一般的集合。

定义 1.12 (映射)

设非空集合 X, Y，若 $\forall x \in X$，存在唯一的 $y \in Y$ 与之对应，则称这个对应为映射。若用 f 表示这种对应，则记作

$$f : X \to Y$$

并称 f 是从 X 到 Y 的一个映射。♣

类似于复合函数，有复合映射

定义 1.13

设 $f : X \to Y, g : Y \to W$，则

$$h(x) = g(f(x)), x \in X$$

定义的 h 称为 g 与 f 的复合映射，可记作 $f \circ g$ ♣

类似于函数的自变量和因变量，映射有“像”和“原像”。

定义 1.14 (像、原像)

设 $x \in X$，y 是 Y 中与 x 对应的元素，称 $y = f(x)$ 是 x 的像，x 是 y 的原像。
对于集合，称 $f(A) = \{y \in Y : x \in A, y = f(x)\}$ 为 A 的像集（可简称为像）；
称 $f^{-1}(B) = \{x \in X : y \in B, y = f(x)\}$ 为 B 关于 f 的原像集（可简称为原像）。♣

显然，像具有以下性质

1. $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
2. $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)(B_\alpha \subset Y, \alpha \in I)$
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)(B_\alpha \in Y, \alpha \in I)$
5. 若 $B_1 \subset B_2 \subset Y$，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

接下来，将要讲到 3 个重要的映射——单射、满射、双射。

定义 1.15 (单射)

不同元有不同像的映射是单射，即：

设 $f: X \to Y$，若 $\forall x_1, x_2 \in X$且$x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则 f 是单射。♣

一种单射的等价描述是：任何一个像都只有一个原像的映射是单射

定义 1.16 (满射)

Y 是像的映射是满射，即：

设 $f: X \to Y$，若 $\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$，则 f 是满射。♣

定义 1.17 (双射)

既是单射又是满射的映射是双射 ♣

不难发现，整数集和偶数集能够形成双射。事实上，与真子集形成双射是无限集区别于有限集的一个重要特征。

命题 1.1

一个集合能够与它的真子集形成双射当且仅当它是无限集。♠

证明 先证明充分性。