



数学分析讲义

作者: Ayame

时间: December 5, 2022

前言

这是由 Ayame（千丛恋雨万花绫）编写的数学分析讲义

目录

第 1 章 集合	1
1.1 集合与子集	1
1.2 集合的运算	2

第1章 集合

在中学阶段，大家已经初步接触过关于集合的知识。例如，自然数全体形成一个集合，常记为 \mathbb{N} ；有理数形成一个集合，常记为 \mathbb{Q} ；实数形成一个集合，记为 \mathbb{R} 。关于集合的精确定义是很难给出的，根据 Cantor 给出的概念（概括性），可以这样定义集合。

定义 1.1

集合是把具有某种特征或满足一定性质的所有对象视为整体时，这个整体是集合，而这些对象就称为集合中的元素

在这个描述性的定义上，需要建立公理，满足数学的严谨性要求。

在集合的基础上，我们可以为集合定义距离、范数、向量内积、二元运算。通过定义运算，可以形成代数结构；通过定义距离、范数、向量内积，可以形成各种空间。

在对集合有基础的了解后，我们将在最常用的集合——实数集 \mathbb{R} 上，定义序关系、加法、乘法，并开始我们的数学分析学习之旅。

1.1 集合与子集

我们约定，集合的符号用大写字母 A, B, C, \dots, X, Y, Z 等表示，集合中的元素用 a, b, c, \dots, x, y, z 等表示。若 a 是 A 的元素，则记为 $a \in A$ ，称 a 属于 A

对于集合，在中学阶段我们已经学过了这些定义

定义 1.2 (子集)

对于两个集合 A, B 。若 $x \in A$ 必定有 $x \in B$ ，则称 A 是 B 的子集，记作：

$$A \subset B$$

如果 $\exists b \in B, b \notin A$ ，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$

定义 1.3 (空集)

空集是不包含任何元素的集合，记作 \emptyset

规定：空集是任何集合的子集

定义 1.4

设集合 A, B ，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称 A 与 B 相等或等同，记作 $A = B$

对于一系列具有共同特征的集合，我们可以对每一个集合进行标号，可以将标号组成的集合记作 I ，称为指标集。在此基础上，可以给出集合族的定义

定义 1.5 (集合族)

设 I 是给定的一个集合, 对于每一个 $\alpha \in I$, 指定一个集合 A_α , 这样可以得到一系列集合, 它们的总体称为集合族, 记为 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 或者 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$
 当 $I = \mathbb{N}$ 时, 集合族也称为集合列, 简记为 $\{A_i\}$ 这样的形式
 集合族常常用花体字母表示, 如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}$



事实上, 上述集合的描述是不完美的。我们可以构造出一种情况, 使得一个元素既不能属于一个集合, 又不能不属于这个集合。

例题 1.1 罗素悖论 定义 $S = \{A : A \notin A\}$, 判断 $S \in S$ 是否成立

首先, 我们需要明白的是, 上面的 \notin 并不是 \nless , 这里不是作者笔误 (这是初学者常有的误解)。

为了便于理解 $A \in A$ 是什么情况, 我们可以先尝试找到一个符合这种性质的集合。事实上, 我们不难发现: 由全体无限集组成的集合满足 $A \in A$ 。换句话说, 全体无限集组成的集合属于它自身。

回到正题。假设 $S \in S$, 那么根据 S 的定义, 有 $S \notin S$; 假设 $S \notin S$, 则根据定义, 有 $S \in S$ 。从而无法判断 S 是否是 S 的元素

这个悖论类似于理发师悖论。感兴趣的同学可以上网搜索。

罗素悖论和它引申出的其他悖论要求对集合设置自治的公理体系, 著名的公理系统有 ZF 公理系统和 NBG 公理系统。这些内容超过了本书涉及范围, 故不赘述。

1.2 集合的运算

集合的分解和合成是形成新集合的有效方法, 这种分解和合成可以通过集合间的运算来表达。

在中学阶段, 我们已经学过简单的集合的并、交、补。

交与并

定义 1.6

设集合 A, B , 称集合 $\{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$.

**定义 1.7**

设集合 A, B , 称集合 $\{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$.

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相交。



显然, 集合的运算满足结合律、交换律、分配律

定理 1.1

交换律:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A; \quad (1.1)$$

结合律:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C; \end{aligned} \quad (1.2)$$

分配律:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C); \end{aligned} \quad (1.3)$$



类似于两个集合的交、并，可以定义多个集合的交、并。（此处的多个可以是无穷多个，甚至可以是比自然数的个数更大的无穷）

定义 1.8

设集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ，定义并集和交集如下：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \exists \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in I, x \in A_\alpha\}$$



根据上述定义，对于任意多（可以是无穷多）个的并或交，改变计算顺序不会影响结果。

注 上述结论并非通过数学归纳法和两个集合的交、并的性质得出。数学归纳法只能保证“任意有限”成立，对“无限”不能保证成立。

分配律对于多个集合的运算依然成立。

定理 1.2

多个集合运算的分配律:

$$\begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha); \\ A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &= \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha). \end{aligned} \quad (1.4)$$



例题 1.2 康托尔集 取闭区间 $[0, 1]$ ，挖去中间的 $1/3$ ，得到两个部分（闭区间），再分别对两个部分挖去中间，得到 4 个部分。不断地进行挖去中间的操作，重复无穷多次后，得到的集合就是康托尔集。请尝试用交集和并集表示康托尔集。

第一次挖去中间时，得到的两个闭区间是 $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ ，第二次挖去中间时，挖去的是 $[1/9, 2/9]$, $[7/9, 8/9]$. 注意到分母总是 3^n ，并且保留部分区间下限的分子始终是偶数，区间

上限的分子始终是下限 +1. 于是, 康托尔集可以写成这样的形式

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{3^k} \left[\frac{2i}{3^k}, \frac{2i+1}{3^k} \right]$$

差与补

定义 1.9 (差集)

设集合 A, B , 称 $\{x : x \in A, x \notin B\}$ 为 A 与 B 的差集, 记作 $A \setminus B$. (读作 A 减 B)
当 $B \subset A$ 时, 称 $A \setminus B$ 为集合 B 相对于 A 的补集 (或余集)。



在讨论某一问题时, 常常规定一个默认的最大集合 X , 我们称 X 为全集, 此时, 集合 B 相对于全集的补集就简称 B 的补集, 并记作 B^c

显然, 有如下事实:

1. $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \emptyset, (A^c)^c = A$
2. $X^c = \emptyset, \emptyset^c = X$
3. $A \setminus B = A \cap B^c$
4. 若 $A \supset B$, 则 $A^c \subset B^c$
5. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $A \subset B^c$

集合的补与交、并有如下运算法则

定理 1.3 (De.Morgan 法则)

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c \quad (1.5)$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}^c \quad (1.6)$$



证明 以(1.5)为例, 对于任意 $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right)^c$, 有 $x \in \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}^c$