数学分析讲义

作者：Ayame

时间：December 5, 2022

前言

这是由 Ayame（千从恋雨万花绫）编写的数学分析讲义

目录

第 1 章 集合 **1**

1.1 集合与子集 1

第 1 章 集合

在中学阶段，大家已经初步接触过关于集合的知识。例如，自然数全体形成一个集合，常记为 $\mathbb{N}$；有理数形成一个集合，常记为 $\mathbb{Q}$；实数形成一个集合，记为 $\mathbb{R}$. 关于集合的精确定义是很难给出的，根据 Cantor 给出的概念（概括性），可以这样定义集合

定义 1.1

集合是把具有某种特征或满足一定性质的所有对象视为整体时，这个整体是集合，而这些对象就称为集合中的元素 ♣

在这个描述性的定义上，需要建立公理，满足数学的严谨性要求。

1.1 集合与子集

我们约定，集合的符号用大写字母 $A, B, C, \cdots, X, Y, Z$ 等表示，集合中的元素用 $a, b, c, \cdots, x, y, z$ 等表示。若 a 是 A 的元素，则记为 $a \in A$，称 a 属于 A

对于集合，在中学阶段我们已经学过了这些定义

定义 1.2

对于两个集合 A, B. 若 $x \in A$ 必定有 $x \in B$，则称 A 是 B 的子集，记作：

$$A \subset B$$

如果 $\exists b \in B, b \notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$ ♣

定义 1.3

空集是不包含任何元素的集合，记作 $\varnothing$

规定：空集是任何集合的子集 ♣

定义 1.4

设集合 A, B，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等或等同，记作 $A = B$ ♣

对于一系列具有共同特征的集合，我们可以对每一个集合进行标号，可以将标号组成的集合记作 I，称为指标集。在此基础上，可以给出集合族的定义

定义 1.5

设 I 是给定的一个集合，对于每一个 $\alpha \in I$，指定一个集合 A_α，这样可以得到一系列集合，它们的总体称为集合族，记为 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 或者 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$

当 $I = \mathbb{N}$ 时，集合族也称为集合列，简记为 $\{A_i\}$ 这样的形式

集合族常常用花体字母表示，如 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}$ ♣

事实上，上述集合的描述是不完美的。我们可以构造出一种情况，使得一个元素既不能属于一个集合，又不能不属于这个集合。

例题 1.1 （罗素悖论）定义 $S = \{A : A \notin A\}$，判断 $S \in S$ 是否成立

首先，我们需要明白的是，上面的 $\notin$ 并不是 $\not\subset$，这里不是作者笔误（这是初学者常有的误解）。

为了便于理解 $A \in A$ 是什么情况，我们可以先尝试找到一个符合这种性质的集合。事实上，我们不难发现：由全体无限集组成的集合满足 $A \in A$。换句话说，全体无限集组成的集合属于它自身。

回到正题。假设 $S \in S$，那么根据 S 的定义，有 $S \notin S$；假设 $S \notin S$，则根据定义，有 $S \in S$. 从而无法判断 S 是否是 S 的元素

这个悖论类似于理发师悖论。感兴趣的同学可以上网搜索。

罗素悖论和它引申出的其他悖论要求对集合设置自洽的公理体系，著名的公理系统有 ZF 公理系统和 NBG 公理系统。这些内容超过了本书涉及范围，故不赘述。