# Сборник задач по курсу "Машинное обучение"

авторы: Кантонистова Е.О., Титов В.В., Широков А., Поликарпов К.

13 октября 2020 г.

## Содержание

# 1 Матричное дифференцирование

## 1.1 Теория

Иногда при взятии производных по вектору или от вектор-функций удобно оперировать матричными операциями. Это сокращает запись и упрощает вывод формул. Введём следующие определения:

- При отображении вектора в число $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  $\nabla_x f(x) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}]^T$.
- При отображении матрицы в число $f(A) : \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}$
  $\nabla_A f(A) = (\frac{\partial f}{\partial A_{ij}})_{i,j=1}^{n,m}$.

Мы хотим оценить, как функция изменяется по каждому из аргументов по отдельности. Поэтому производной функции по вектору будет вектор, по матрице — матрица.

Полезные свойства:

1) $d(XY) = dX \cdot Y + X \cdot dY$
2) Если $A$ - матрица константа, то $dA = 0$
3) $d(X') = dX'$
4) $d \det X = \det X tr(X^{-1} dX)'$

## 1.2 Семинар

**Задача 1.1.** Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ – вектор параметров, а $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных. Необходимо найти производную их скалярного произведения по вектору переменных $\nabla_x a^T x$.

**Задача 1.2.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_A det A$.

**Задача 1.3.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_A tr(AB)$.

**Задача 1.4.** Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $y \in \mathbb{R}^m$. Необходимо найти $\nabla_A x^T A y$.

## 1.3 Домашнее задание

**Задача 1.5.** Пусть $t$ – скалярная переменная, $r$, $s$ – векторные переменные, $R$, $S$ – матричные переменные. Кроме того, $a$, $b$ – векторы констант, $A$, $B$ – матрицы констант. Применив базовые правила дифференцирования найдите:

1. $d(ARB)$
2. $d(r'r)$

3. $d(r'Ar)$
4. $d(R^{-1})$, воспользовавшись тем, что $R^{-1}R = I$
5. $d(cos(r'r))$
6. $d(r'Ar/r'r)$

**Задача 1.6.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Необходимо найти $\nabla_x x^T Ax$

# 2 Линейные классификаторы часть 1

## 2.1 Семинар

**Задача 2.1.** Линейный классификатор выдал следующие значения для объектов из набора данных: $b_i = \mathbb{P}(y_i = 1|x_i)$.

| $y_i$ | $b_i$ |
|---|---|
| 1 | 0.7 |
| -1 | 0.2 |
| -1 | 0.3 |
| -1 | 0.8 |
| 1 | 0.6 |

Необходимо:
1. Построить ROC-кривую
2. Найти площадь под ROC-кривой и индекс Джини
3. Построить PR-кривую (кривая точность-полнота)
4. Найти площадь под PR-кривой

**Задача 2.2.** Дан алгоритм классификации, который выдаёт вероятность принадлежности объекта к положительному классу $b_i = \mathbb{P}(y_i = 1|x_i)$. Также есть набор данных с объектами двух типов: 100 китов и 900 муравьев. В качестве признака алгоритм использует количество глаз у объекта (у китов и муравьёв 2 глаза). После применения алгоритма к набору данных для каждого объекта было получено число $b_i = f(x_i) \in [0; 1]$, оценка вероятности того, что наблюдение является китом.

Решите задачу минимизации эмпирической функции риска и найдите все $b_i$ для функций потерь:

1. $L(y_i, b_i) = (y_i - b_i)^2$, если для муравьёв $y_i = 0$;

2. $L(y_i, b_i) = |y_i - b_i|$, если для муравьёв $y_i = 0$;

## 2.2 Домашнее задание

**Задача 2.4.** Рассмотрим плоскость в $\mathbb{R}^3$ , задаваемую уравнением $5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 10 = 0$ и две точки, $A = (2, 1, 4)$ и $B = (4, 0, 4)$.
1. Найдите любой вектор, перпендикулярный плоскости;
2. Правда ли, что отрезок $AB$ пересекает плоскость?
3. Найдите длину отрезка $AB$;
4. Не находя расстояние от точек до плоскости, определите, во сколько раз точка $A$ дальше от плоскости, чем точка $B$;

5. Найдите расстояние от точки $A$ до плоскости.

**Задача 2.5.** Закончите предложения:
1. accuracy — это доля правильных ответов. . .
2. точность (precision) — это доля правильных ответов. . .
3. полнота (recall) — это доля правильных ответов. . .
4. TPR — это доля правильных ответов. . .

**Задача 2.6.** Алгоритм бинарной классификации выдаёт оценки вероятности $b_i = \mathbb{P}(y_i = 1|x_i)$. Всего проведено 10000 наблюдений. Если ранжировать их по возрастанию $b_i$ , то окажется что наблюдения с $y_i = 1$ занимают ровно места с 5501 по 5600. Найдите площадь по ROC-кривой и площадь под PR-кривой.

**Задача 2.7.** Для условия задачи 2.2. минимизируйте эмпирическую функцию риска и найдите все $b_i$ для функций потерь:

1. $L(y_i, b_i) = \begin{cases} \text{-log b}_i\text{, если } y_i = 1 \\ \text{-log (1 - b}_i\text{), иначе} \end{cases}$ ;

2. $L(y_i, b_i) = \begin{cases} 1/\text{b}_i\text{, если } y_i = 1 \\ 1/(1 - \text{b}_i)\text{, иначе} \end{cases}$ ;

# 3 Линейные классификаторы часть 2

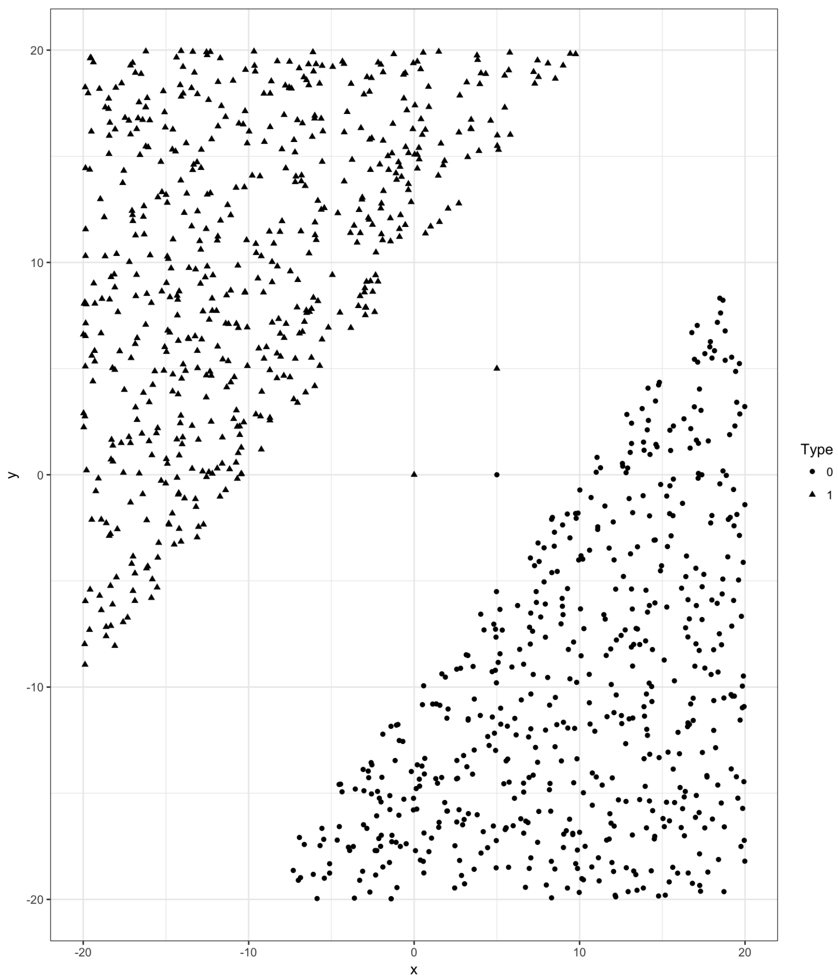
## 3.1 Семинар

**Задача 3.1.** Построить персептон, реализующий логическое ИЛИ.

**Задача 3.2.** На плоскости имеются точки двух цветов. Красные: (1, 1), (1, 1) и синие: (1, 1), (1, 1).

1. Найдите разделяющую гиперплоскость методом опорных векторов при разных $C$;
2. Укажите опорные вектора.

**Задача 3.3.** По картинке качественно решите задачу разделения точек:



Целевая функция имеет вид:

$$\min_{w,w_0} \frac{1}{2}w'w + C\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$$

Уравнение разделяющей поверхности: $w'x = w_0$, уравнения краёв полосы: $w'x = w_0 + 1$ и $w'x = w_0 - 1$. Нарушителями считаются наблюдения, которые попали на нейтральную полосу или на чужую территорию. Здесь $\epsilon_i = |w| \cdot d_i$, где $d_i$ - заступ наблюдения за черту.

1. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = 1$? Найдите $w, w_0$, величины штрафов $\epsilon_i$.
2. Как пройдёт разделяющая полоса при $C = +\infty$? Найдите $w, w_0$, величины штрафов $\epsilon_i$.

**Задача 3.4.** Дана таблица сопряженности $x$ и $y$:

| | $y_i = 1$ | $y_i = 0$ |
|---|---|---|
| $x_i = 1$ | 12 | 36 |
| $x_i = 0$ | 32 | 20 |

Будем использовать логистическую регрессию с константой для прогнозирования $y$ с помощью $x$.

1. Какие оценки коэффициентов мы получим?
2. Какой прогноз вероятности $y = 1$ при значении признака $x = 0$ даёт логистическая модель? Как это число можно посчитать без рассчитывания коэффициентов?

**Задача 3.5.** Показать, что из формулы логистической регрессии

$$p(y = +1|x) = \frac{1}{1 + e^{-w^T x}}$$

следует, что $(w, x)$ - это логарифм отношения шансов (log-odds).

**Задача 3.6.** Показать, что квадратичная функция потерь

$$L(y, z) = ([y = +1] - z)^2$$

позволяет предсказывать корректные вероятности.

## 3.2 Домашнее задание

Появится в пятницу.