

# Занятие 9

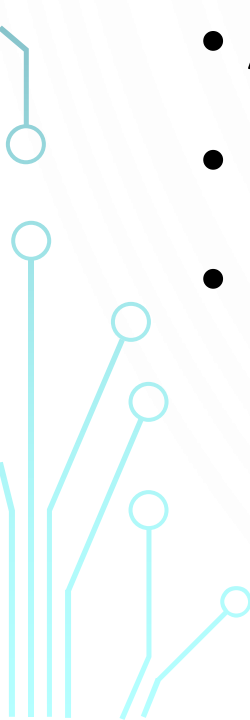
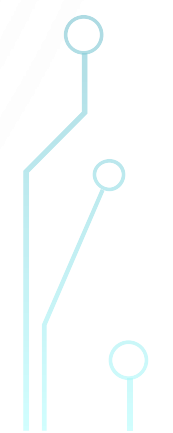
## Временные ряды

Елена Кантонистова

ВШЭ, 2021

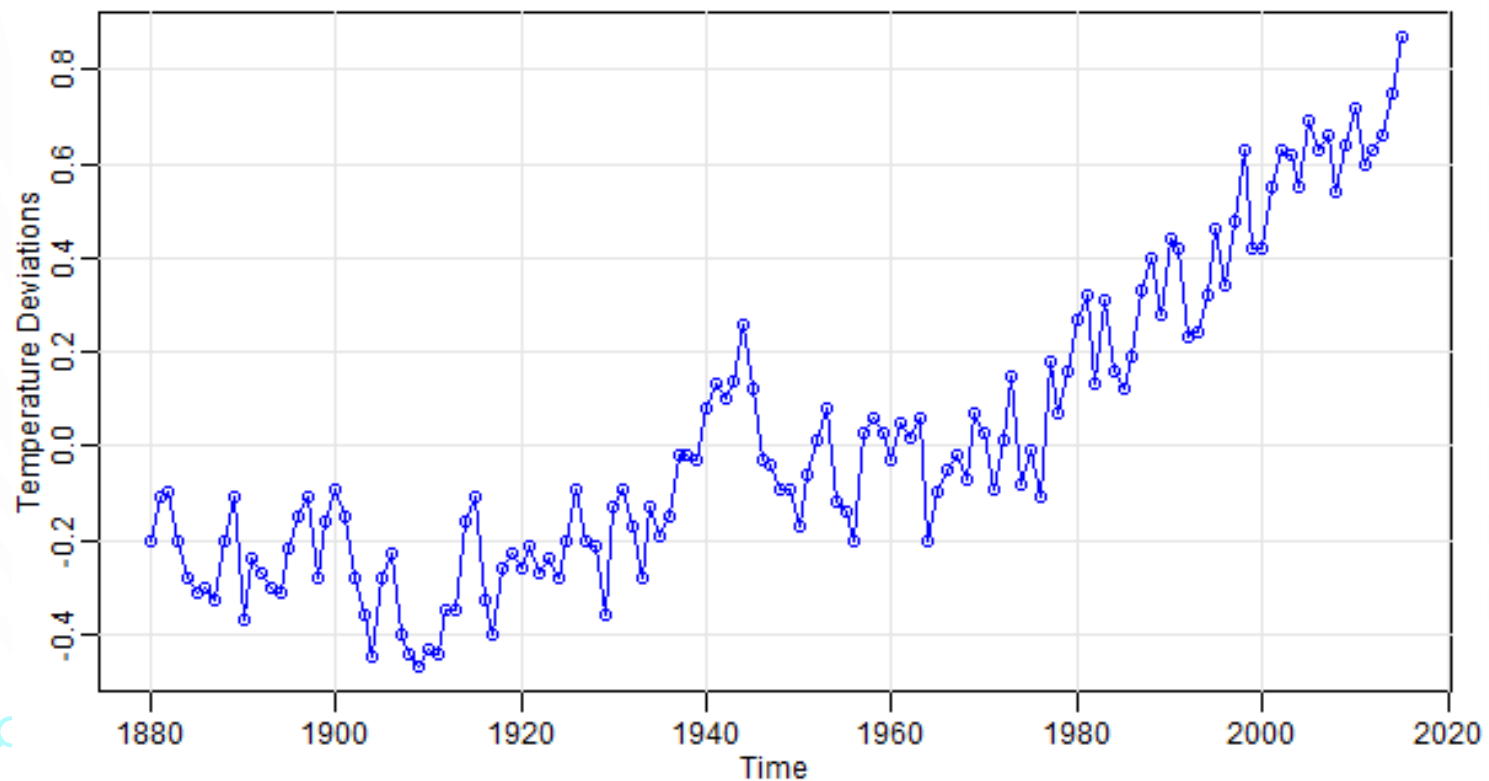


# ПЛАН ЗАНЯТИЯ

- Общие понятия временных рядов
  - Эконометрические модели
  - Адаптивные модели
  - Модели машинного обучения
  - Практика
- 
- 

# ВРЕМЕННОЙ РЯД

*Временной ряд* – это последовательность значений, описывающих протекающий во времени процесс, измеренных в последовательные моменты времени, обычно через равные промежутки.



# ЗАДАЧА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

$y_0, y_1, \dots, y_t, \dots$  - временной ряд,  $y_i \in \mathbb{R}$ .

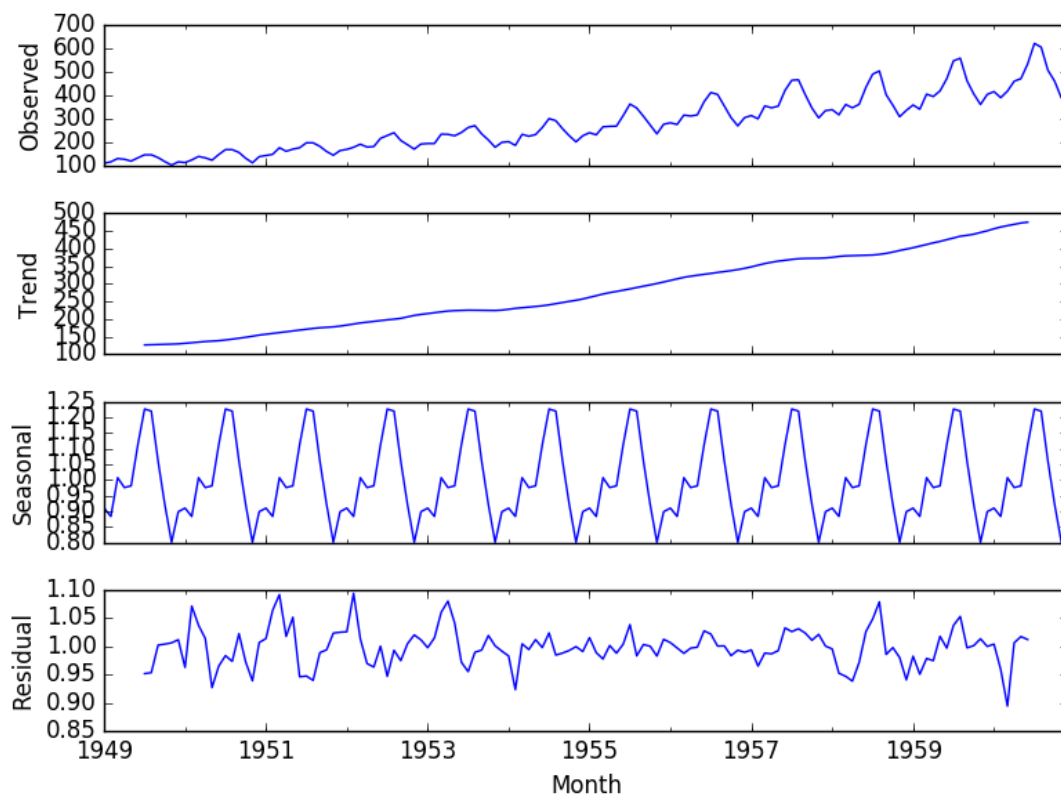
Задача: построить функцию

$$\hat{y}_{t+d}(w) = a_{t,d}(y_1, \dots, y_t; w)$$

- $d = 1, \dots, D$ , где  $D$  – горизонт прогнозирования
- $w$  – вектор параметров модели

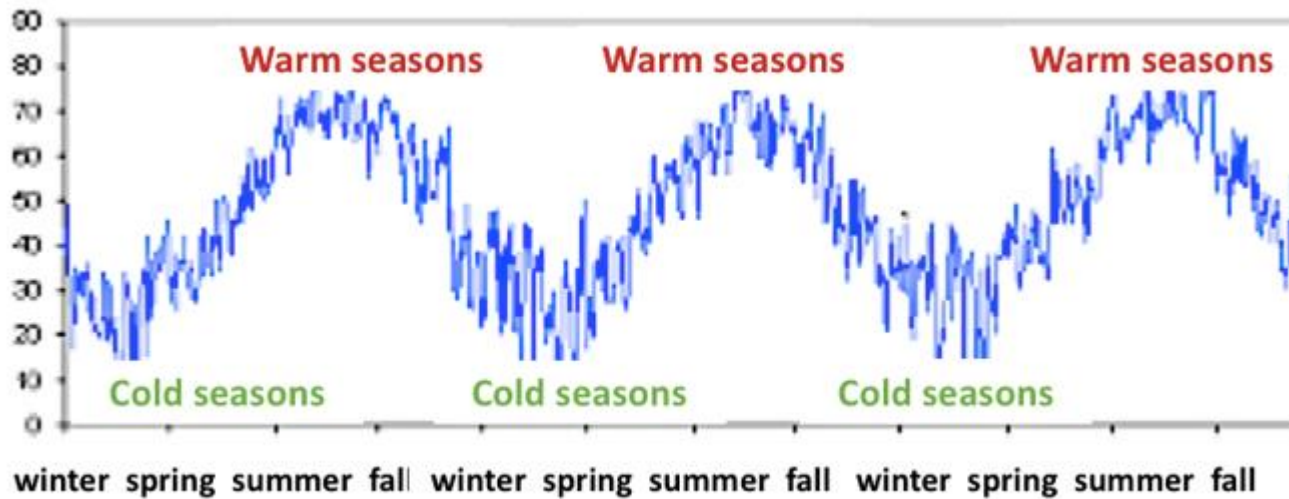
# КОМПОНЕНТЫ ВРЕМЕННОГО РЯДА

- *Тренд* – плавное долгосрочное изменение уровня ряда
- *Сезонность* – циклические изменения уровня ряда с постоянным периодом
- *Циклы* – изменения уровня ряда с переменным периодом (цикл жизни товара, экономические волны, периоды солнечной активности)
- *Ошибка (шум)* – непрогнозируемая случайная компонента ряда

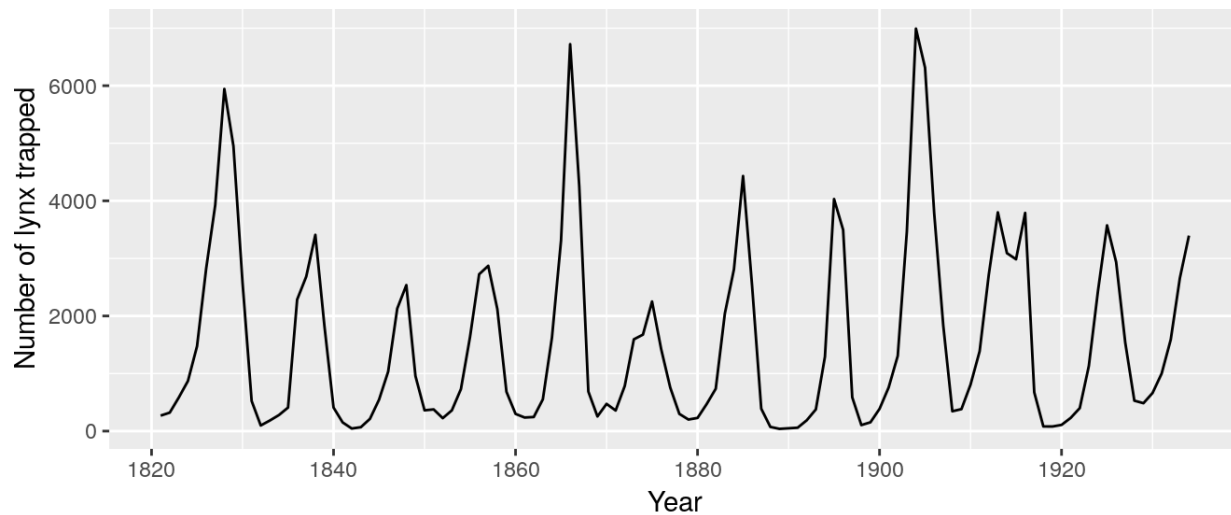


# ЦИКЛЫ И СЕЗОННОСТЬ

Сезонность:



Цикл:



# СТАЦИОНАРНОСТЬ

Ряд  $y_1, \dots, y_T$  **стационарен**, если для любого  $s$  распределение  $y_t, \dots, y_{t+s}$  не зависит от  $t$ , то есть его свойства не зависят от времени.

- тренд  $\Rightarrow$  нестационарность
- сезонность  $\Rightarrow$  нестационарность
- цикл — заранее неизвестно

# СТАЦИОНАРНОСТЬ

Ряд  $y_1, \dots, y_T$  **стационарен**, если для любого  $s$  распределение  $y_t, \dots, y_{t+s}$  не зависит от  $t$ , то есть его свойства не зависят от времени.

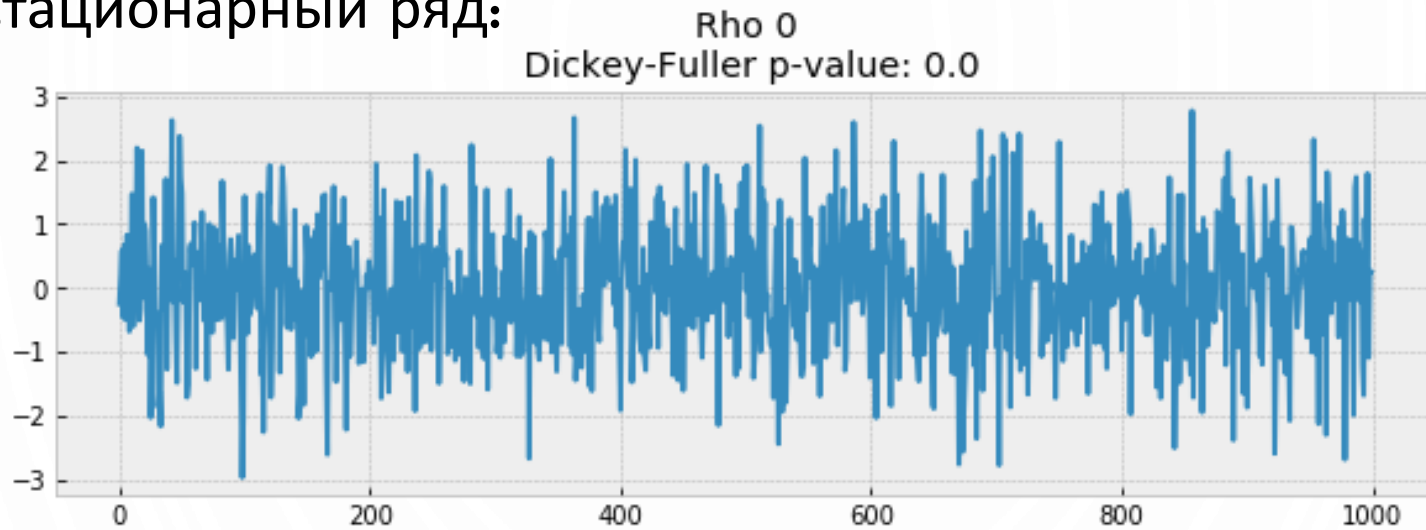
- тренд  $\Rightarrow$  нестационарность
- сезонность  $\Rightarrow$  нестационарность
- цикл — заранее неизвестно

*По стационарному ряду просто построить прогноз, так как мы полагаем, что его будущие статистические характеристики не будут отличаться от наблюдаемых текущих.*

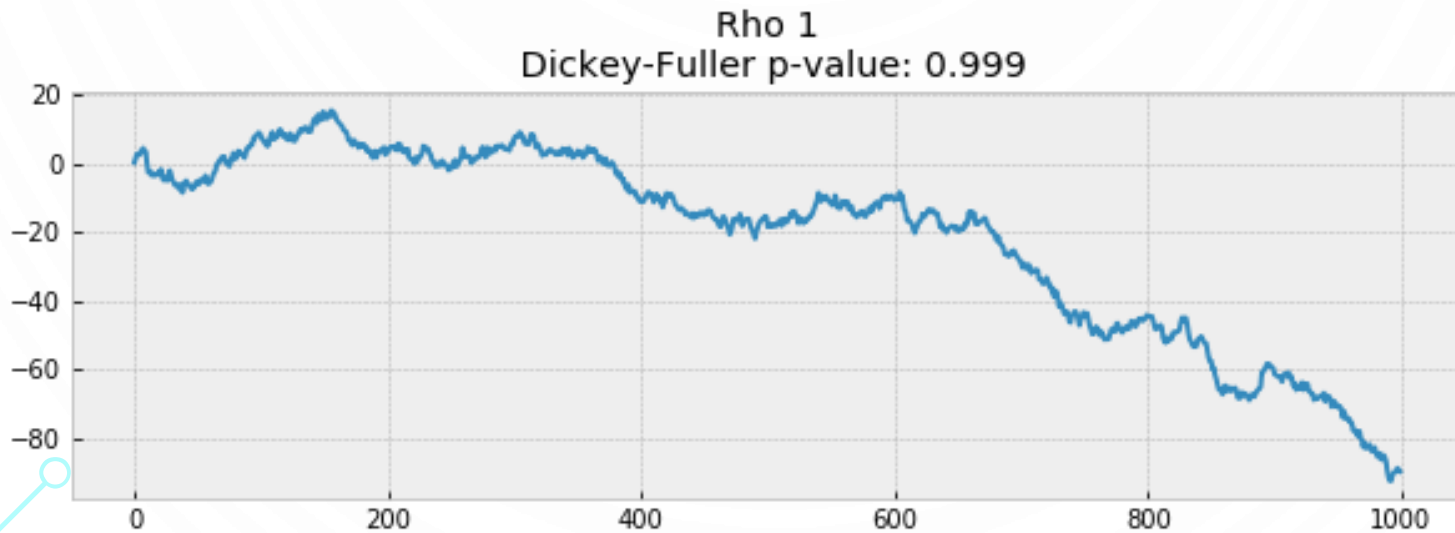


# ПРИМЕРЫ

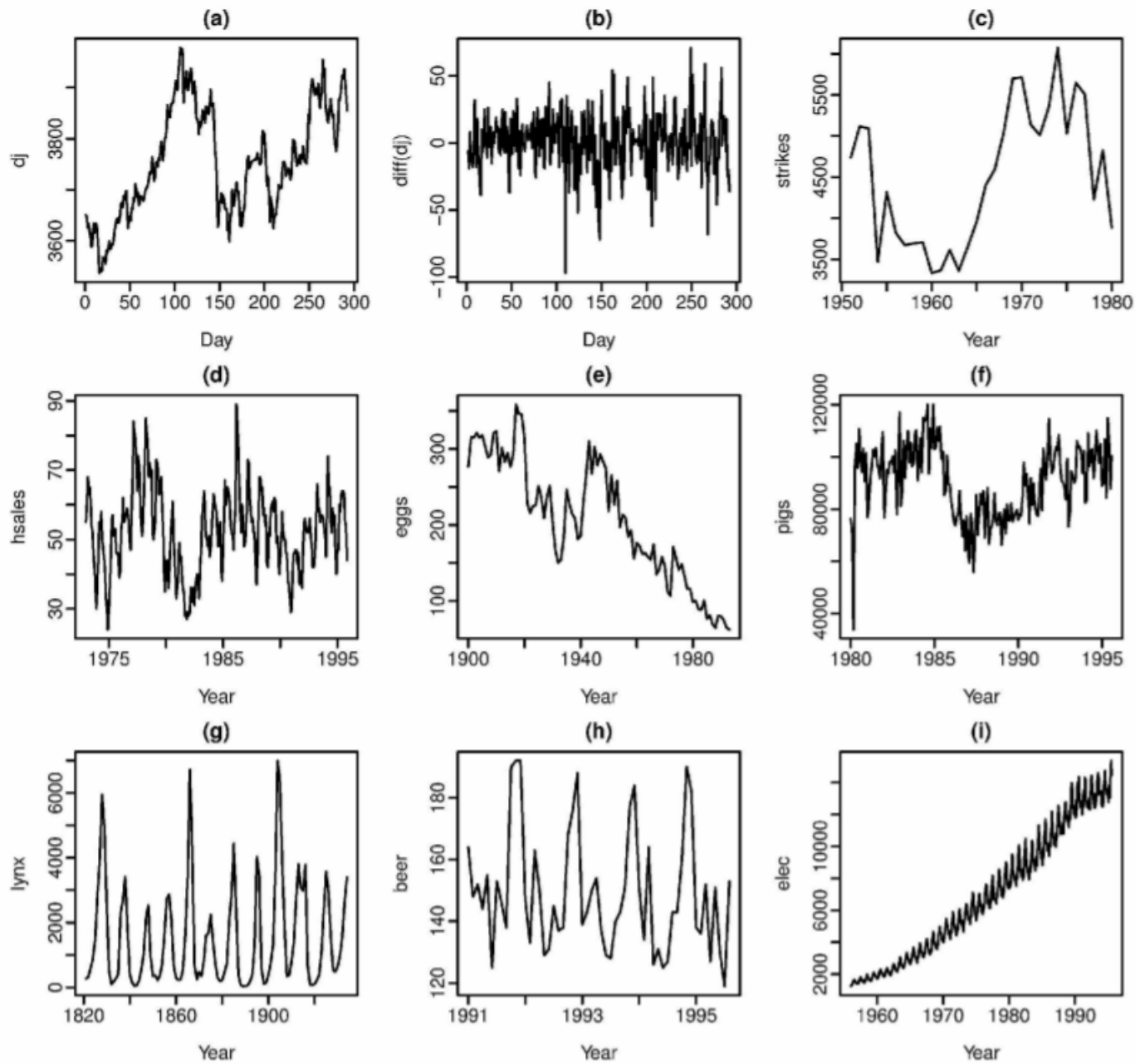
Стационарный ряд:



Нестационарный ряд:



# ПРИМЕРЫ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ





# ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

# ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ

- признаки -  $n$  предыдущих наблюдений ряда:

$$\hat{y}_{t+1}(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{w}_j y_{t-j+1}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$$

- объекты -  $t - n + 1$  моментов в истории ряда:

$$F_{\ell \times n} = \begin{pmatrix} y_{t-1} & y_{t-2} & y_{t-3} & \dots & y_{t-n} \\ y_{t-2} & y_{t-3} & y_{t-4} & \dots & y_{t-n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \dots & y_1 \\ y_{n-1} & y_{n-2} & y_{n-3} & \dots & y_0 \end{pmatrix}, \quad y_{\ell \times 1} = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \dots \\ y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$Q(\mathbf{w}) = \sum_{i=n}^t (\hat{y}_i(\mathbf{w}) - y_i)^2 = \|F\mathbf{w} - \mathbf{y}\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{w}}$$

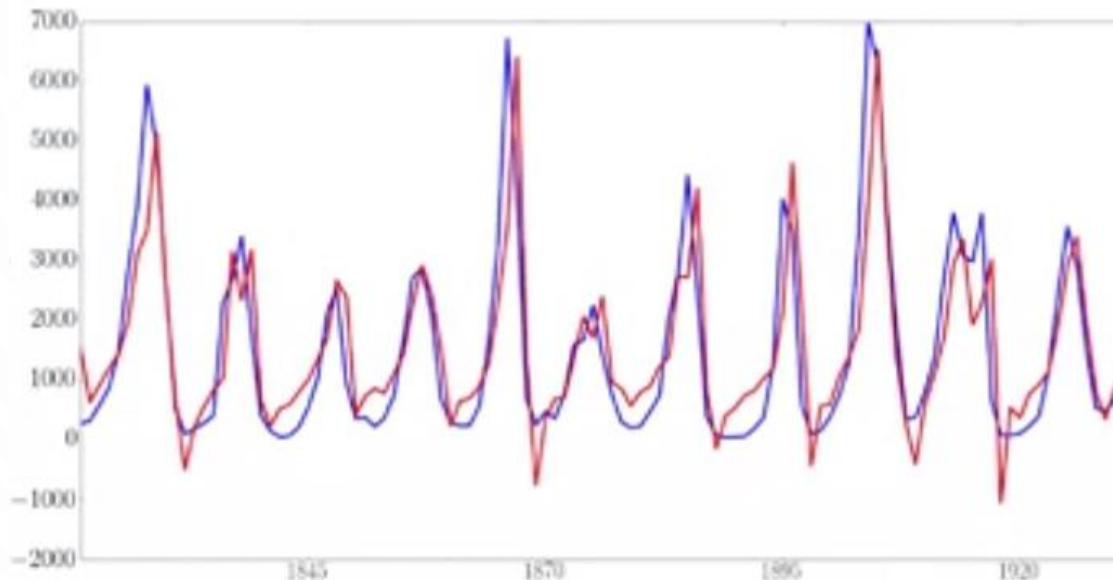
# ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД

- Смешанный процесс авторегрессии  $ARMA(p, q)$ :

$$y_t = \alpha + a_1 y_{t-1} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q},$$

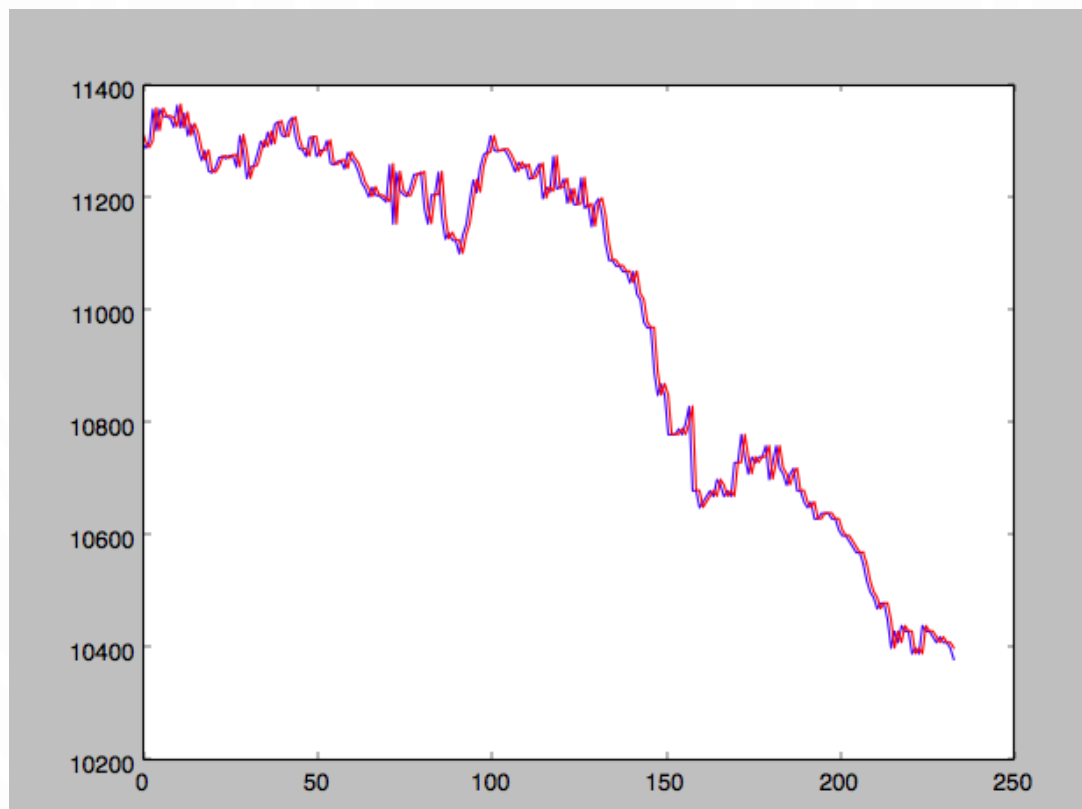
$$a_p, b_q \neq 0.$$

**Теорема Вольда.** Любой стационарный ряд можно приблизить моделью  $ARMA(p, q)$  сколь угодно точно.



# МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ – ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД

- Модель  $ARIMA$  - модель  $ARMA$ , учитывающая тренд.



- Модель  $SARIMA$  – модель  $ARMA$  с учетом наличия тренда и сезонности

The background features a series of concentric circles in a light gray color, centered on the page. In the four corners, there are stylized circuit board traces in a light blue color, with small circles at the end of the lines, resembling electronic components or data points.

# АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

# СКОЛЬЗЯЩЕЕ СРЕДНЕЕ

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_{t-i}$$

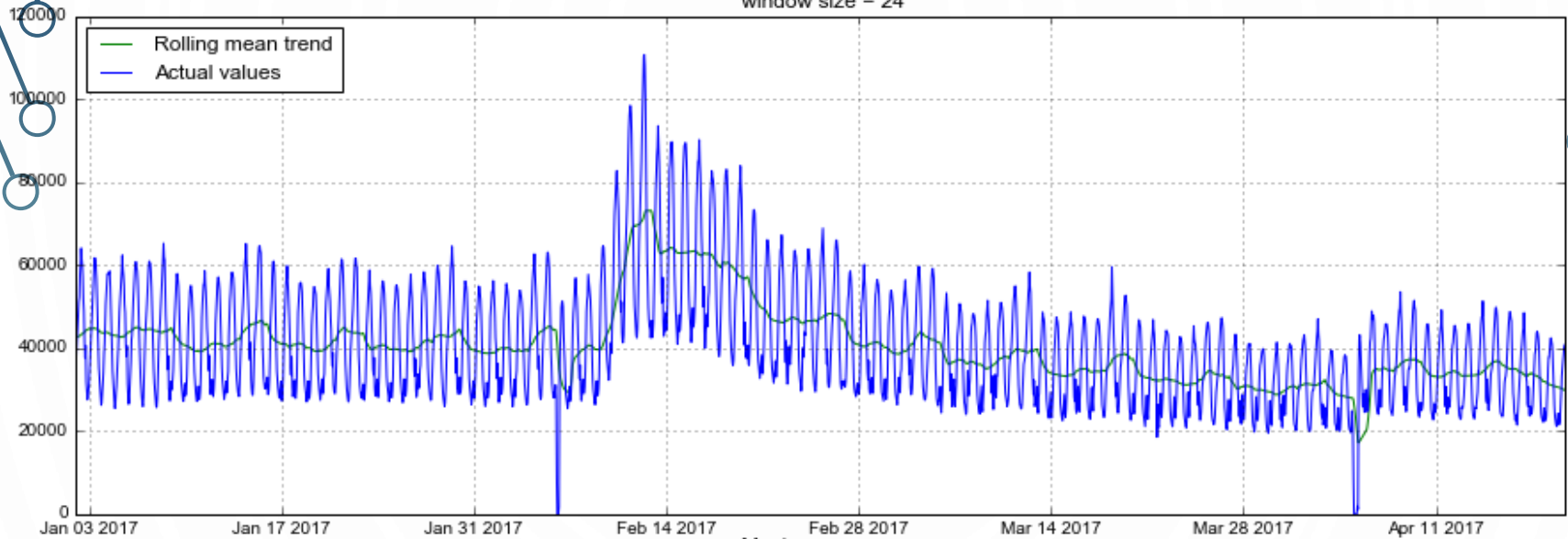
- чтобы сделать прогноз на следующий период времени, надо знать значение на текущий период (т.е. долгосрочный прогноз невозможен)

+ сглаживает данные

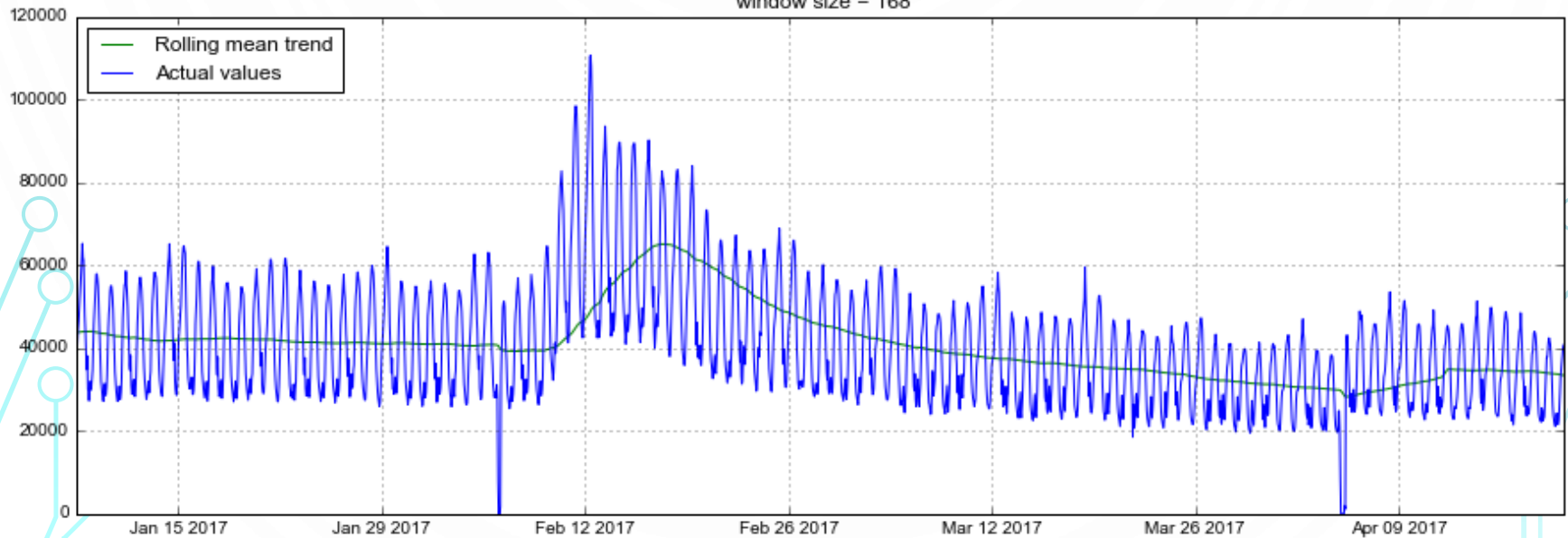


# СКОЛЬЗЯЩЕЕ СРЕДНЕЕ

Moving average  
window size = 24



Moving average  
window size = 168



# ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СКОЛЬЗЯЩЕЕ СРЕДНЕЕ (ЭСС)

*Идея: на значение ряда в данный момент времени больше всего влияет значение в предыдущий момент времени, затем – значение в предпредыдущий момент времени и т.д (то есть более поздние данные – более важные).*

Пример:

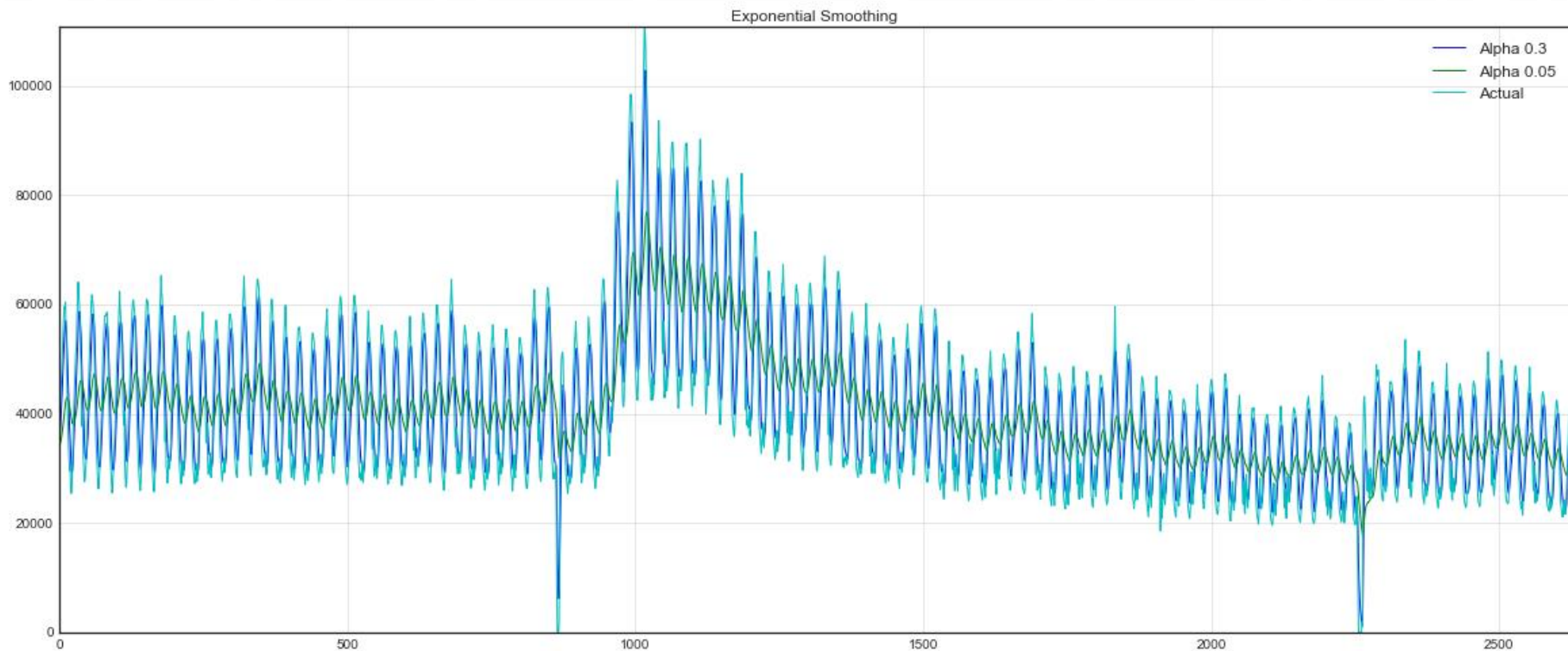
$$EMA(t) = \frac{1}{2}p_t + \frac{1}{4}p_{t-1} + \frac{1}{8}p_{t-2} + \dots$$

# ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ СКОЛЬЗЯЩЕЕ СРЕДНЕЕ (ЭСС)

Модель ЭСС можно записать в виде

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t, \alpha \in (0, 1)$$

- чем больше  $\alpha$ , тем больше вес последних точек
- чем меньше  $\alpha$ , тем сильнее сглаживание



# МОДЕЛИ С ТРЕНДОМ И СЕЗОННОСТЬЮ

## Модель Хольта

- модель линейного тренда

$$\hat{y}_{t+d} = a_t + b_t d,$$

где  $a_t, b_t$  - адаптивные компоненты линейного тренда.

- формулы для  $a_t, b_t$ :

$$a_t = \alpha_1 y_t + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \alpha_2(a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2)b_{t-1},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  - параметры сглаживания.

# МОДЕЛИ С ТРЕНДОМ И СЕЗОННОСТЬЮ

## Модель Тейла-Вейджа

- модель линейного тренда с аддитивной сезонностью

$$\hat{y}_{t+d} = (a_t + b_t d) + \theta_{t+(d \bmod s)-s},$$

$a_t + b_t d$  – тренд, очищенный от сезонных колебаний,

$\theta_0, \dots, \theta_{s-1}$  – сезонный профиль периода  $s$  без тренда.

формулы для  $a_t, b_t, \theta_t$ :

$$a_t = \alpha_1(y_t - \theta_{t-s}) + (1 - \alpha_1)(a_{t-1} + b_{t-1})$$

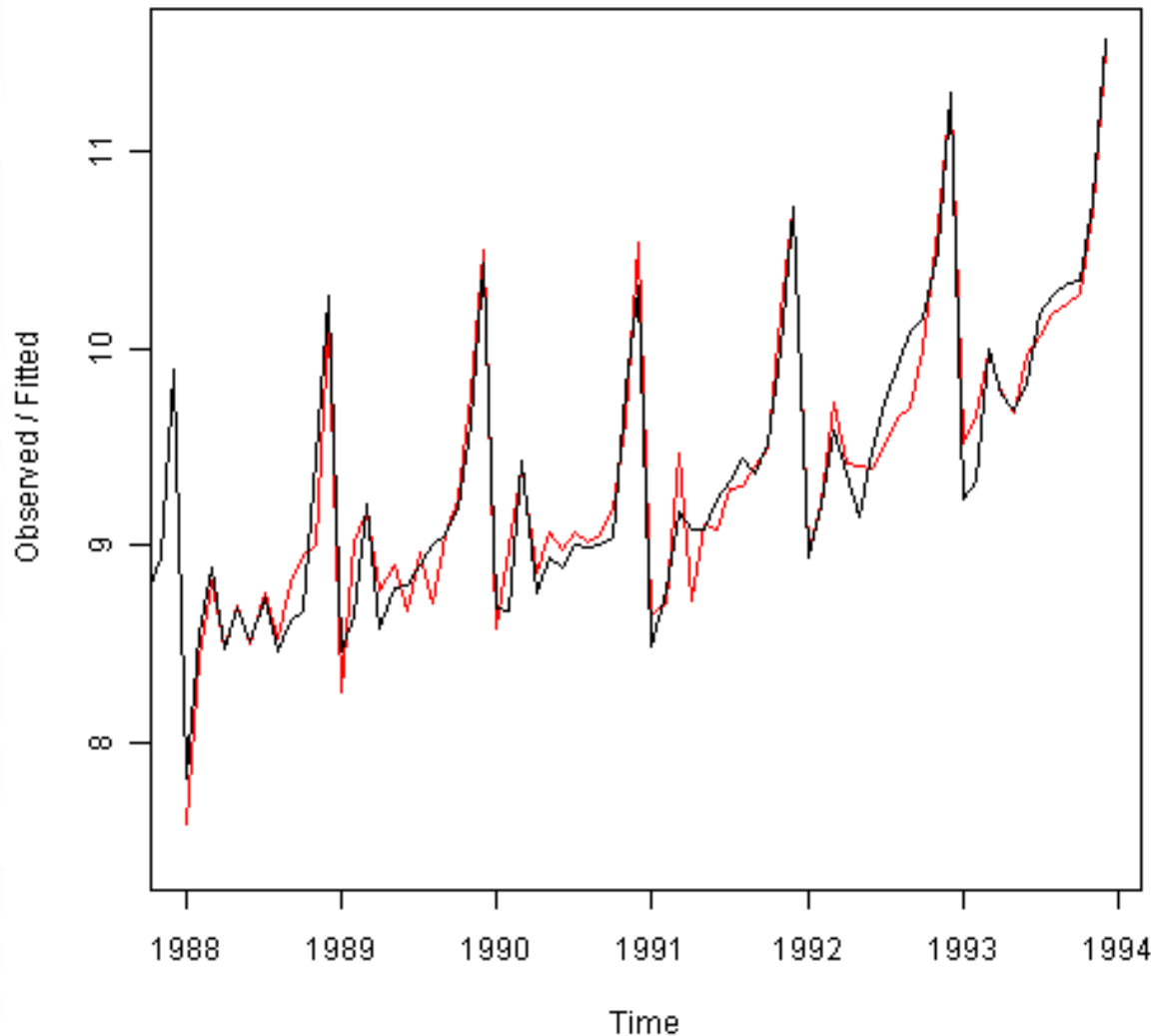
$$b_t = \alpha_2(a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2)b_{t-1}$$

$$\theta_t = \alpha_3(y_t - a_t) + (1 - \alpha_3)\theta_{t-s},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – параметры сглаживания.

# МОДЕЛИ С ТРЕНДОМ И СЕЗОННОСТЬЮ

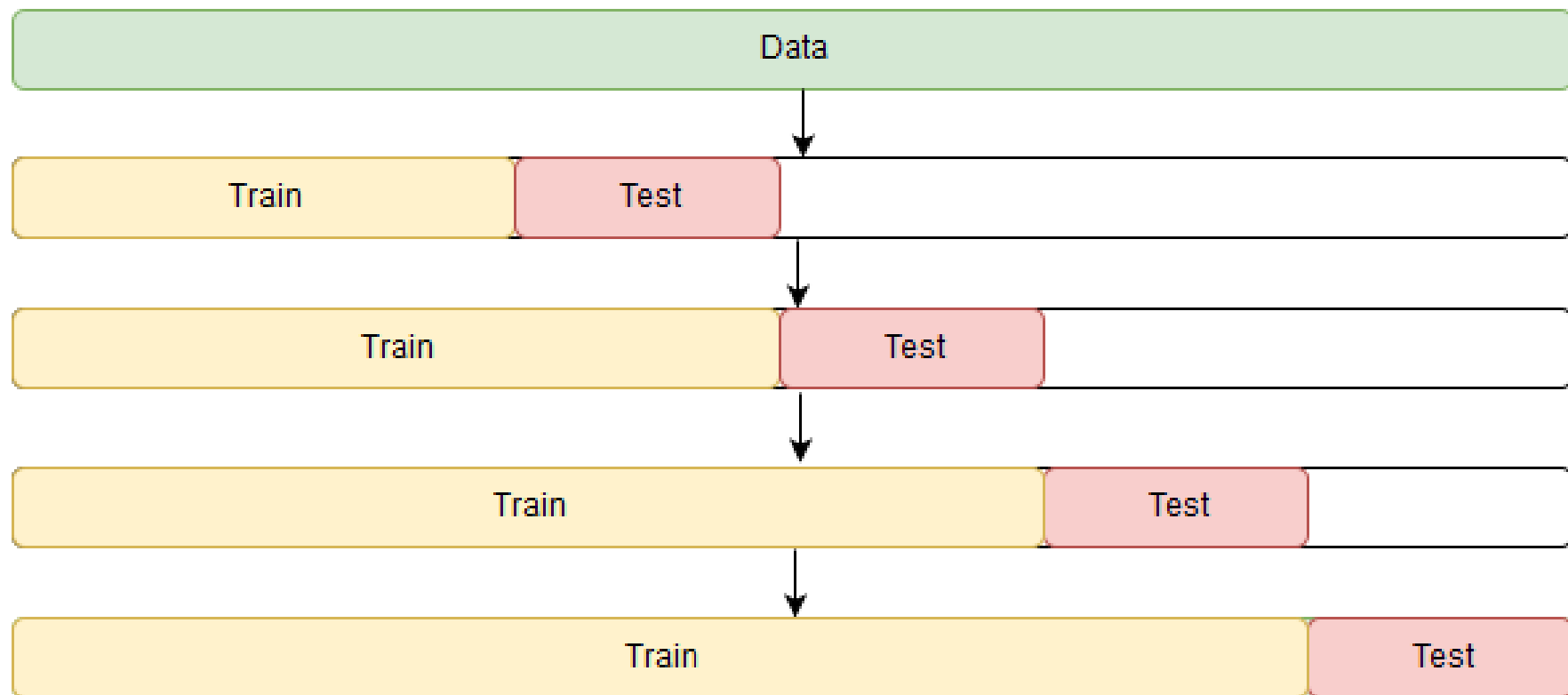
Модель Уинтерса с линейным трендом (модель Хольта-Уинтерса)





# МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ

# КРОСС-ВАЛИДАЦИЯ НА ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ





# МОДЕЛИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

- Часто затраты на настройку моделей (ARMA, ARIMA, SARIMA и др.), на выбор и обучение адаптивных моделей не окупаются, поэтому имеет смысл попробовать применить методы машинного обучения к предсказанию временных рядов.
- Можно, например, использовать линейную регрессию, в качестве признаков для которой использовать признаки, содержащие информацию о времени.

# МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ: ПРИЗНАКИ

- 1) Лаги** – значение временного ряда 1, 2, ... периодов назад
- 2) Агрегированные признаки** по дате (среднее значение таргета для каждого дня недели, часа и т.д.)
- 3) Другие характеристики**

# ГОТОВЫЕ РЕШЕНИЯ: FACEBOOK PROPHET

- Библиотека Prophet от компании Facebook для задач предсказания временных рядов.

Опубликованные посты на Хабрахабре



<https://github.com/facebook/prophet>

# ЛИТЕРАТУРА

- [www.machinelearning.ru](http://www.machinelearning.ru) – всё по временным рядам, в частности:

[http://www.machinelearning.ru/wiki/images/archive/e/e7/20150323154210%21Psad\\_corr.pdf](http://www.machinelearning.ru/wiki/images/archive/e/e7/20150323154210%21Psad_corr.pdf)

- <https://www.coursera.org/lecture/data-analysis-applications/arma-fXTrB> и остальные лекции этого курса по теме
- Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. Финансы и статистика, 2003.