PROYECTO ECUACIONES DIFERENCIALES CORTE lll


INTEGRANTES

JHOJAN MARINO CHAVEZ

KEVIN ALEXANDER CORTES

JULIAN DAVID MURCIA DIAZ

UNIVERSIDAD DE SAN BUENAVENTURA

SEDE BOGOTA 2025


# METODO DE LAPLACE APLICADO A LA ECUACION EXPONENCIAL Y LOGISTICA

## Momento 1: Ecuación de crecimiento exponencial

$$\frac{dp}{dt} = KP$$

$K = 0{,}02568994931$
$P_0 = 18702688$
$t = 57$

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}02568994931. P(t)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{dp}{dt} = \mathcal{L}\{0{,}02568994931. P(t)\}$$

**Usamos la propiedad**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dp}{dt}\right\} = sP(s) - P(0)$$

$$s.\mathcal{L}\{p(t)\} - P(0) = 0{,}02568994931.\mathcal{L}\{P(t)\}$$

**Sustituimos $\boldsymbol{P(0) = 18702688}$**

$$s.\mathcal{L}\{P(t)\} - 18702688 = 0{,}02568994931.\mathcal{L}\{P(t)\}$$

**Despejamos $\boldsymbol{\mathcal{L}\{P(t)\}}$**

$$(s - 0{,}02568994931).\mathcal{L}\{P(t)\} = 18702688$$

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{18702688}{s - \ 0{,}02568994931}$$

**Transformada inversa para obtener $\boldsymbol{P(t)}$**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{kt}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{18702688}{s - 0{,}02568994931}\right\} = P_0.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 0{,}02568994931}\right\}$$

$$P(t) = 18702688.e^{0{,}02568994931.t}$$

**Evaluamos en $\boldsymbol{t = 57}$**

$$P(57) = 18702688\,.\ e^{0{,}02568994931(57)}$$

$$P(57) = 80882248\,personas$$

**Momento 2.**

$$\frac{dp}{dt} = KP$$

$K = 0{,}0184421661$
$P_0 = 18702688$
$t = 57$

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}0184421661.P(t)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{dp}{dt} = \mathcal{L}\{0{,}0184421661.P(t)\}$$

**Usamos la propiedad**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dp}{dt}\right\} = sP(s) - P(0)$$

$$s.\mathcal{L}\{p(t)\} - P(0) = 0{,}0184421661.\mathcal{L}\{P(t)\}$$

**Sustituimos $\boldsymbol{P(0) = 18702688}$**

$$s.\mathcal{L}\{P(t)\} - 18702688 = 0{,}0184421661.\mathcal{L}\{P(t)\}$$

**Despejamos $\boldsymbol{\mathcal{L}\{P(t)\}}$**

$$(s - 0{,}0184421661).\mathcal{L}\{P(t)\} = 18702688$$

$$\mathcal{L}\{P(t)\} = \frac{18702688}{s - \ 0{,}0184421661}$$

**Transformada inversa para obtener $\boldsymbol{P(t)}$**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = e^{kt}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{18702688}{s - 0{,}01844216611}\right\} = P_0.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 0{,}01844216611}\right\}$$

$$P(t) = 18702688.e^{0{,}0184421661(57)}$$

**Evaluamos en $\boldsymbol{t = 57}$**

$$P(57) = 18702688.e^{0{,}0184421661(57)}$$

$$P(57) = 53510116\,personas$$

## Momento 1: Ecuación de crecimiento logístico

$$\frac{dp}{dt} = rp\ \left(1 - \frac{p}{k}\right)$$

$$P\ (0) = 45259614$$
$$K = 53000000$$
$$C1\ = 0.1710219181$$
$$r\ =\ 0.2132096722$$

## Reescribir la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = rp - \frac{r}{k}p^2$$

$$\frac{dp}{dt} + \left(\frac{r}{k}\right)p^2 = rp$$

$$\frac{dp}{dt} - rp = \frac{r}{k}p^2$$

## Ecuación diferencial no lineal tipo Bernoulli

$$\frac{dp}{dt} + f\,(t)p = g\,(t)p^n$$

## En este caso

$$f(t) = -r$$

$$g(t) = -\frac{r}{k}$$

$$n = 2$$

## Sustitución de Bernoulli : Cambio de variable

$$u = p^{1-n} = p^{-1} = p = \frac{1}{u}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$$

**Sustituimos**

$$\frac{-1}{u^2}.\frac{du}{dt} - r\,.\frac{1}{u} = \frac{-r}{k}.\frac{1}{u^2}$$

**Eliminamos los denominadores multiplicando todo por $u^2$**

$$-\frac{du}{dt} - ru = \frac{-r}{K}$$

$$\frac{du}{dt} + ru = \frac{r}{K}$$ $\Rightarrow$ Ecuación diferencial de primer orden

**Transformada de Laplace**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt} + ru\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{r}{K}\right\}$$

**Propiedades**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\} = s\,U(s) - u(0)$$

$$\mathcal{L}\,\{u\} = u(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{r}{K}\right\} = \frac{r}{K}.\frac{1}{s}$$

**Sustituimos**

$$su(s) - U(0) + ru(s) = \frac{r}{K} . \frac{1}{s}$$

$$(s + r)u(s) = \frac{r}{K} . \frac{1}{s} + u\ (0)$$

**Despejamos $\boldsymbol{u(s)}$**

$$u(s) = \frac{\frac{r}{K} . \frac{1}{s} + u(0)}{s + r}$$

**Volver a $\boldsymbol{u(t)}$ con antitransformada**

$$u(s) = \frac{\frac{r}{K}}{s(s + r)} + \frac{1}{P_0} . \frac{1}{s + r}$$

**Transformada Inversa**

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + r)} \right\} = \frac{1}{r} (1 - e^{-rt})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 1} \right\} = e^{-rt}$$

$$u(t) = \frac{r}{K} . \frac{1}{r} (1 - e^{-rt}) + \frac{1}{P_0} . e^{-rt} = \frac{1}{K} (1 - e^{-rt}) + \frac{1}{P} . e^{-rt}$$

**Volvemos a $P(t)$**

$$u(t) = \frac{1}{P(t)}$$

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{K}(1 - e^{-rt}) + \frac{1}{P_0}e^{-rt}$$

$$P(t) = \frac{1}{\frac{1}{K}(1 - e^{-rt}) + \frac{1}{p_0}e^{-rt}}$$

$$P(t) = \frac{KP_0}{p_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}$$

**Sustituimos Valores**

$$P(4) = \frac{53000000}{1 + 0.1710219181e^{-(0.2132096754)(4)}}$$

$$P(4) = 49399281\ personas$$

## Momento 2: Ecuación de crecimiento logístico

$$\frac{dp}{dt} = rp\ \left(1 - \frac{p}{k}\right)$$

$$P\ (0) = 48131078$$
$$K = 53000000$$
$$C_2\ = 0.1011596291$$
$$r_2\ =\ 0.7705974824$$

## Reescribir la ecuación

$$\frac{dp}{dt} = rp - \frac{r}{k}p^2$$

$$\frac{dp}{dt} + \left(\frac{r}{k}\right)p^2 = rp$$

$$\frac{dp}{dt} - rp = \frac{r}{k}p^2$$

## Ecuación diferencial no lineal tipo Bernoulli

$$\frac{dp}{dt} + f\ (t)p = g\ (t)p^n$$

**En este caso**

$$f(t) = -r$$

$$g(t) = -\frac{r}{k}$$

$$n = 2$$

**Sustitución de Bernoulli: Cambio de variable**

$$u = p^{1-n} = p^{-1} = p = \frac{1}{u}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt}$$

**Sustituimos**

$$\frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{dt} - r \cdot \frac{1}{u} = \frac{-r}{k} \cdot \frac{1}{u^2}$$

**Eliminamos los denominadores multiplicando todo por $u^2$**

$$-\frac{du}{dt} - ru = \frac{-r}{K}$$

$$\frac{du}{dt} + ru = \frac{r}{K}$$ $\Rightarrow$ Ecuación diferencial de primer orden

**Transformada de Laplace**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}+ru\right\}=\mathcal{L}\left\{\frac{r}{K}\right\}$$

**Propiedades**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du}{dt}\right\}=s\,U(s)-u(0)$$

$$\mathcal{L}\{u\}=u(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{r}{K}\right\}=\frac{r}{K}.\frac{1}{s}$$

**Sustituimos**

$$su(s)-U(0)+ru(s)=\frac{r}{K}.\frac{1}{s}$$

$$(s+r)u(s)=\frac{r}{K}.\frac{1}{s}+u\,(0)$$

**Despejamos $\boldsymbol{u(s)}$**

$$u(s)=\frac{\frac{r}{K}.\frac{1}{s}+u(0)}{s+r}$$

## Volver a $u(t)$ con antitransformada

$$u(s) = \frac{\frac{r}{K}}{s(s+r)} + \frac{1}{P_0}.\frac{1}{s+r}$$

## Transformada Inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+r)}\right\} = \frac{1}{r}(1-e^{-rt})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-rt}$$

$$u(t) = \frac{r}{K}.\frac{1}{r}(1-e^{-rt}) + \frac{1}{P_0}.e^{-rt} = \frac{1}{K}(1-e^{-rt}) + \frac{1}{P}.e^{-rt}$$

## Volvemos a $P(t)$

$$u(t) = \frac{1}{P(t)}$$

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{K}(1-e^{-rt}) + \frac{1}{P_0}e^{-rt}$$

$$P(t) = \frac{1}{\frac{1}{K}(1 - e^{-rt}) + \frac{1}{p_0}e^{-rt}}$$

$$P(t) = \frac{KP_0}{p_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}$$

**Sustituimos Valores**

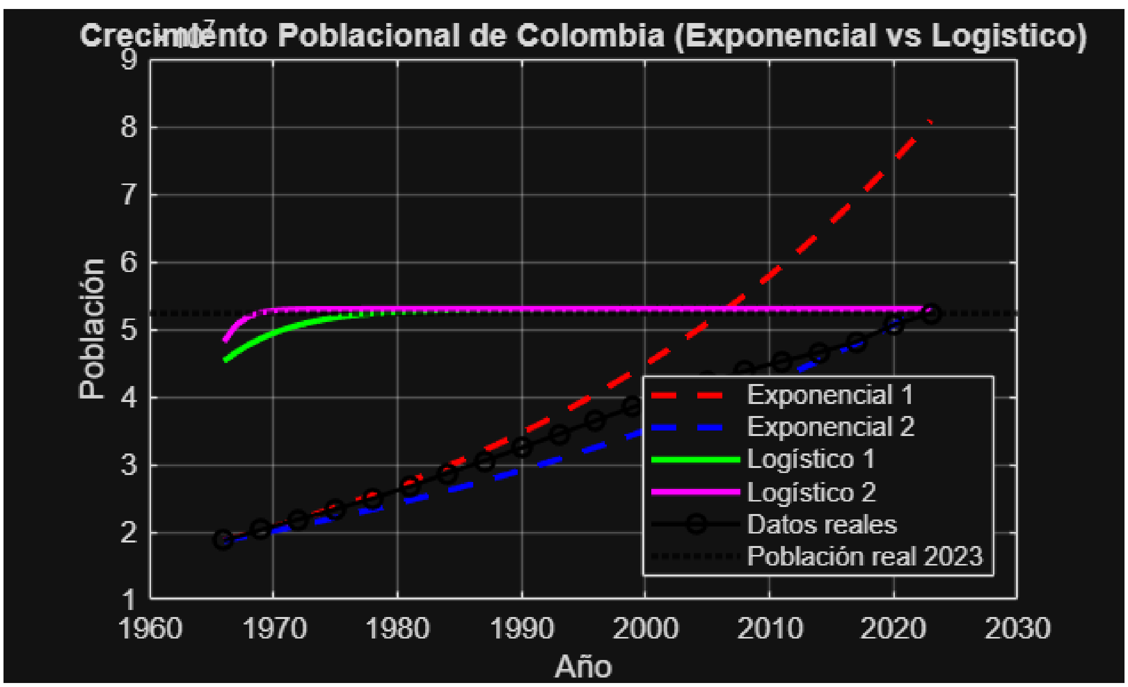
$$P(2) = \frac{53000000}{1 + 0.1011596291e^{-(0.7705974824)(2)}}$$

$$P(2) = 51876317 \; personas$$

**Codigo: Grafica de los 4 modelos**

```
% Años y datos reales desde la tabla
t_real = [0 3 6 9 12 15 18 21 24 27 30 33 36 39 42 45 48 51 54 57];
anio_real = 1966 + t_real;
P_real = [18702688 20291942 21819563 23346444 24950337 26713267 28642690 ...
          30499467 32440069 34441473 36462745 38454863 40324680 42128977 ...
          43758808 45256914 46565429 48131078 50629997 52321152];

% Modelos matemáticos
t = 0:1:57;
anios = 1966 + t;

% Exponenciales
P0 = 18702688;
r1 = 0.02568994931;
r2 = 0.0184421661;
P_exp1 = P0 * exp(r1 * t);
P_exp2 = P0 * exp(r2 * t);

% Logísticos
K = 53000000;
a1 = 0.1710219181;
r_log1 = 0.2132096754;
```

```
P_log1 = K ./ (1 + a1 * exp(-r_log1 * t));

a2 = 0.1011596291;
r_log2 = 0.7705974824;
P_log2 = K ./ (1 + a2 * exp(-r_log2 * t));

% Gráfico
figure;
plot(anios, P_exp1, 'r--', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(anios, P_exp2, 'b--', 'LineWidth', 2);
plot(anios, P_log1, 'g', 'LineWidth', 2);
plot(anios, P_log2, 'm', 'LineWidth', 2);
plot(anio_real, P_real, 'ko-', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerSize', 6); % Datos
reales
yline(52321152, 'k:', 'LineWidth', 2); % Línea horizontal 2023

% Detalles
xlabel('Año');
ylabel('Población');
title('Crecimiento Poblacional de Colombia (Exponencial vs Logistico)');
legend('Exponencial 1', 'Exponencial 2', ...
       'Logístico 1', 'Logístico 2', ...
       'Datos reales', 'Población real 2023', ...
       'Location', 'SouthEast');
grid on;
```



## CONCLUSIONES

- El método de Laplace simplifica la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Al transformar la ecuación diferencial de crecimiento poblacional a una expresión algebraica en el dominio de Laplace, se evita la integración directa, facilitando el manejo matemático del problema, especialmente cuando se incluyen condiciones iniciales.
- La ecuación logística requiere transformación previa para aplicar Laplace. Debido a su naturaleza no lineal, la ecuación logística no se puede resolver directamente con la transformada de Laplace. Para ello, se utiliza la transformación de Bernoulli, que convierte la ecuación en una forma lineal en una nueva variable.
- Estos modelos ayudan a gobiernos, urbanistas y entidades de salud a prever necesidades futuras: número de hospitales, escuelas, vivienda, transporte y recursos naturales. Anticipar el tamaño poblacional es esencial para una gestión eficiente y sostenible.