Грустная аналитическая геометрия

МКН-116

1 семестр

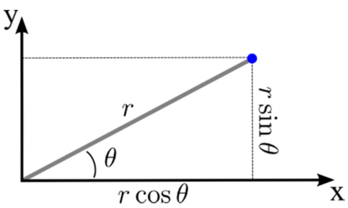
Содержание

1 Векторная алгебра

Деление отрезка в заданном отношении. Найдем координаты точки М на отрезке АВ, которая делит этот отрезок в отношениии $\frac{\lambda}{\mu}$.

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu},\ y = \frac{\mu y_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu},\ z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu} \tag{1.1}$$

Преобразование координат из полярных в декартовы. Полярная система определена, если задана точка O (полюс), исходящий из полюса луч l (полярная ось). Положение точки M фиксируется двумя числами: радиус-вектором $r = |\vec{OM}|$ и углом ϕ (полярным углом) между полярной осью и вектором $\vec{OM}$.



$$x = rcos\phi$$
$$y = rsin\phi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Замена базиса Положение новго базиса относительно старого должно быть задано:

$$e_1' = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \alpha_1^2 e_3$$
$$e_2' = \alpha_2^1 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \alpha_2^2 e_3$$
$$e_3' = \alpha_3^1 e_1 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^2 e_3$$

Матрицей перехода называется матрица, в столбцах коротой стоят компоненты векторов e_1', e_2', e_3' в старом базисе.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix}$$

Координаты вектора в старом и новом базисе связаны уравнением

$$X' = \Sigma^{-1} X$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Обратную матрицу можно найти по методу Гаусса или с помощью формулы

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det \Sigma} \cdot \Sigma^V, \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение к элементам матрицы Σ.

Изменение системы координат.

2 Исследование уравнения второго порядка

В общей декартовой системе координат линия второго порядка может быть задана уравнением:

$$\begin{gathered} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

Избавимся от слагаемого, содержащего xy. Для этого введем новую декартову прямоугольную систему координат, у которой старые координаты выражаются через новые следующим образом:

$$\begin{cases} x = x'cos\phi - y'sin\phi \\ y = x'sin\phi + y'cos\phi \end{cases} \tag{2.2}$$

В новых координатаз уравнение примет вид:

$$\begin{gathered} A(x\cos\phi - y'sin\phi)^2 + 2B(x\cos\phi - y'sin\phi)(x\sin\phi + y'cos\phi) + \\ +C(x\sin\phi + y'cos\phi)^2 + ... = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Все что отмечено многоточием нас сейчас не интересует. Раскроем скобки и получим, что в новой системе координат коэффициент при $x'y'$ равен: $B' = -Asin\phi cos\phi + B(cos^2\phi - sin^2\phi) + Csin\phi cos\phi$