2 Demonstre que $3^n < n!$, $n > 6$.

Demonstração:

I) $P(7)$: $n = 7$ $\qquad 3^7 < 7!$

$P(7)$ ✓ $\qquad 2.187 < 5.040$ ✓

II) Assumindo $P(n)$: $3^n < n!$, $n > 6$ (H.I)

provaremos $P(n+1)$: $3^{(n+1)} < (n+1)!$, $(n+1) > 6$

$3^{(n+1)} = 3^n \cdot 3$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

H.I $\qquad 3^n < n!$, $n > 6$

$3^n \cdot 3 < (n+1) \cdot n!$, $(n+1) > 6$

$3 < (n+1)$, $(n+1) > 6$

$P(n+1)$ vale.

pelo princípio da Indução matemática

$3^n < n!$, $n > 6$

vale para todos números naturais.

4- Demonstre que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^3(n+1)^3}{4}$ sempre que n for um número inteiro positivo

Demonstração:

I) $P(1): n = 1$ $\quad 0^3 + 1^3 = \frac{1^3(1+1)^3}{4}$

$$2 = \frac{1 \cdot 8}{4}$$

$P(1)$ ✓

$$2 = 2 \checkmark$$

II) Assumindo: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^3(n+1)^3}{4}$ (H.I)

provaremos $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^3[(n+1)+1]^3}{4}$

$(n+1)^3 \cdot [(n+1)+1]^3 = (n+1)^3 \cdot (n+2)^3$

$\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3} + (n+1)^3 = \frac{n^3(n+1)^3}{4} + (n+1)^3$

$= \frac{(n+1)^2}{4}[n^3 + (n+1) + 4(n+1)]$

$= \frac{(n+1)^2}{4}[n^3 + 5n + 6] = \frac{(n+1)^3 \cdot (n+2)^3}{4}$

$= \frac{(n+1)^3[(n+1)+1]^3}{4}$

pelo princípio da Indução matemática

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^3(n+1)^3}{4}, \; n \in \mathbb{N}$$

5. Sejam $a_0 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $n \geq 1$. Prove que $a_n = 2^{n+1} - 1$.

Demonstração:

$P(n) = 2^{n+1} - 1$

$P(n+1) = 2^{n+2} - 1$

I) $n = 0$

$a_0 = 1$

$2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$

$a_0 = 2^1 - 1$ $\quad P(0) \checkmark$

II) Assumindo: $P(0)$, $P(n)$ valem provaremos $P(n+1)$ vale

$a_{n+1} = 2(a_{n+1}) - 1 + 1$

$a_{n+1} = 2a_n + 1$ $\qquad a_n = 2^{n+1} - 1$

$a_{n+1} = 2 \cdot (2^{n+1} - 1) + 1$

$a_{n+1} = 2(2^n \cdot 2 - 1) + 1$

$a_{n+1} = 2^{n+2} - 2 + 1$

$a_{n+1} = 2^{n+2} - 1$

Pelo princípio da Indução Matemática (completa) $a_n = 2^{n+1} - 1$ vale para todos números naturais

7. Ache a soma de $5+7+9+11+\dots+521$

$a_0 + a_1 + \dots + a_n = \frac{a_0 + a_d}{2} (n+1)$ $\quad n = \frac{521-5}{2} = 258$

$\overset{2}{\overbrace{5+7}} + \dots + 521 = \frac{5+521}{2} \cdot 259 = 68.117$

10. Ache x e y tais que {5, x, y, 32} seja uma parte de:

a) Progressão aritmética

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$32 = 5 + (4-1)d$

$3d = 27$

$d = 9$

$x = 14$ e $y = 23$

b) Progressão geométrica

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$32 = 5 \cdot q^3$

$q^3 = \frac{32}{5} = \sqrt[3]{\frac{32}{5}} = 2\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$

$x = 10\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ e $y = 10\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \cdot 2\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = 20\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$

11. Calcule: MDC (20,25), MDC (0,10), MDC (123, -123), MDC (-89, -98), MDC (54321, 50), MDC (1739, 29341).

MDC (20,25) = 5
MDC (0,10) = 10
MDC (123, -123) = 123
MDC (-89, -98) = 1
MDC (54 321, 50) = 1
MDC (1739, 29 341) = 37

12. Calcule em $\mathbb{Z}_{10}$: $3 \oplus 3,6 \oplus 6,7 \oplus 3,9 \oplus 8,3 \otimes 3,7 \otimes 3,5 \otimes 2,6 \otimes 6,4 \otimes 6,4 \otimes 1,2 \otimes 5,5 \otimes 8,5 \otimes 9$.

$a \oplus b = a + b \bmod n$
$a \otimes b = a \cdot b \bmod n$

3 + 3,6 = 6,6 mod 10 = 66
66 + 6,7 = 72,7 mod 10 = 27
27 + 3,9 = 30,9 mod 10 = 9
9 + 8,3 = 17,3 mod 10 = 73
73 . 3,7 = 270,1 mod 10 = 1
1 . 3,5 = 3,5 mod 10 = 35
35 . 2,6 = 91 mod 10 = 1
1 . 6,4 = 6,4 mod 10 = 64
64 . 6,4 = 409,6 mod 10 = 96
96 . 1,2 = 115,2 mod 10 = 52
52 . 5,5 = 286 mod 10 = 6
6 . 8,5 = 51 mod 10 = 1
1 . 9 = 9 mod 10 = 9

17. Ache o coeficiente de x^3 em $(2x-3)^6$

$$x^3: \quad (2x-3)^6 = (2x)^6 + \binom{6}{1}(2x)^5\,(-3) + \binom{6}{2}(2x)^4(-3)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3(-3)^3$$

O coeficiente de x^3: $\binom{6}{3} \cdot 2^3 \cdot x^3 \cdot (-3)^3$

18. Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ache:

a) O número dos subconjuntos de S.

$|P(S)| = 2^{|S|} = 2^6 = 64$

b) O número dos subconjuntos de S que tenha $\{2, 3, 5\}$ como subconjunto.

$2^3 = 8$

c) O número dos subconjuntos de S que contém pelo menos um número ímpar.

$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow 2^3 = 8$, logo $64 - 8 = 56$

d) O número dos subconjuntos de S que contém exatamente um número par.

tilibra

Subconjuntos c que contém: 2 (não 4 e 6) = 8
4 (não 2 e 6) = 8
6 (não 4 e 2) = 8

Logo $8 \times 3 = 24$ subconjuntos.

19. Ache o coeficiente de x^{12} em $(x+1)^{15}$.

$$x^{12} : (x+1)^{15} = (x+1)^{15} + \binom{15}{1} x^{14} (1) + \binom{15}{2} x^{13} (1)^2 + \binom{15}{3} x^{12} (1)^3$$

O coeficiente de x^{12}: $\binom{15}{3} \cdot x^{12} \cdot 1^3$