Resumo de aula 13 - 1/3

1 Primitiva (Antiderivada) de uma função

Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo I. Uma primitiva (antiderivada) de $f(x)$ em I é uma função $F(x)$ definida no mesmo intervalo I, tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x em I.

Exemplo 1.1. $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$, pois, para todo x em $\mathbb{R}$,

$$F'(x) = [\frac{1}{3}x^3]' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

A primitiva (antiderivada) não é única. Para qualquer constante k, a função $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ é também uma primitiva (antiderivada) de $f(x) = x^2$ pois $G'(x) = [\frac{1}{3}x^3 + k]' = x^2 = f(x)$.

Segue que $\{\frac{1}{3}x^3 + k \mid k \in \mathbb{R}\}$ é chamada de família das primitivas (antiderivadas) de x^2 em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.2. Se $F(x)$ for uma primitiva (antiderivada) de $f(x)$ em I, então, para qualquer constante k, $F(x) + k$ também será uma primitiva (antiderivada) de $f(x)$ no mesmo intervalo. Escrevemos

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

Este processo de encontrar a família das primitivas (antiderivadas) a partir de uma função, em um intervalo qualquer, é chamado de **integral indefinida**, onde $\int$ é o símbolo de integração, a função $f(x)$ é integrando, dx é o diferencial que identificar a variável de integração e $F(x) + k$ é a primitiva (antiderivada).

Observação 1.3. *O domínio da fução f que ocorre em $\int f(x)dx$ deverá ser sempre um intervalo; nos casos em que o domínio não for mencionado, ficará implícito que se trata de um inetrvalo. Essa hipótese é para garantir a continuidade de $f(x)$ e por consequencia, obteremos que todas as antiderivadas de $f(x)$ diferem por apenas uma constante.*

Exemplo 1.4.

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + k$$

com o entendimento de que isso é válido no intervalo $(-\infty, 0)$ *ou no intervalo* $(0, \infty)$.

Exemplo 1.5. Veja.

a) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + k.$ pois $(\frac{x^4}{4})' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$

b) $\int dx = \int 1dx = x + k$, pois $(x)' = 1$

c) $\int sec^2 x dx = tg\, x + k$, pois $(tg\, x)' = sec^2 x$

Formúla.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$$

onde $\alpha \neq -1$ é uma constante fixa.

Prova. $[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}]' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^\alpha = x^\alpha.$

Exemplo 1.6. Calcule

a) $\int x^3 dx$

b) $\int \frac{1}{x^2} dx$

c) $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

d) $\int x\sqrt{x} dx$

Solução:

Propriedades de integral indefinida

1. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \quad k$ uma constante

2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Exemplo 1.7. Calcule

a) $\int 5x dx$

b) $\int (x^5 + \frac{1}{x^3} - 4)dx$

c) $\int 3dx$

d) $\int tg^2 x dx$

e) $\int (x^2 + \frac{3}{x^3})dx$

Solução:

Formúla.

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + k$$

Prova: Verifique $(ln|x|)' = \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$.

Se $x > 0$, $ln|x| = lnx$, então $(ln|x|)' = (lnx)' = \frac{1}{x}$

Se $x < 0$, $ln|x| = ln(-x)$, então $(ln|x|)' = (ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

Exemplo 1.8. Calcule

a) $\int (\frac{1}{x} + \sqrt{x})dx, \quad x > 0.$

b) $\int \frac{x^3+1}{x} dx$

Solução:

Fórmula.

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + k$$

onde α é uma constante fixa e $\alpha \neq 0$.

Prova:

$[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}]' = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha x} \cdot \alpha = e^{\alpha x}.$

Exemplo 1.9. Calcule

a) $\int e^x dx$

b) $\int e^{2x} dx$

c) $\int e^{5x}dx$

d) $\int e^{-3x}dx$

Solução:

Fórmula. Seja $\alpha \neq 0$ uma constante fixa.

a) $\int sen\ (\alpha x)\ dx = -\frac{cos\ (\alpha x)}{\alpha} \ + k$

b) $\int cos\ (\alpha x)\ dx = \frac{sen\ (\alpha x)}{\alpha} \ + k$

Prova:

a)
$$[-\frac{cos\ (\alpha x)}{\alpha}]' = -\frac{1}{\alpha}(-sen\ (\alpha x))(\alpha) = sen\ (\alpha x)$$

b)
$$[\frac{sen\ (\alpha x)}{\alpha}]' = \frac{1}{\alpha}(cos\ (\alpha x))(\alpha) = cos\ (\alpha x)$$

Exemplo 1.10. Calcule.

a) $\int senxdx$

b) $\int cosxdx$

c) $\int sen(5x)dx$

d) $\int cos(3x)dx$

e) $\int sen(4x)dx$

f) $\int cos(7x)dx$

Solução: