Lista 2 - Séries de Potências

Séries de potências

1. O que é uma série de potências?

2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você pode determiná-lo?

   (b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você pode determiná-lo?

3. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convegência das séries.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2 x^n}{2^n}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{n^3}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-3)^n}{2n+1}$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}(x+1)^n$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-4)^n}{n^3}$

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$

   (n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n!}$

   (o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^3 3^n}$

4. Verdadeiro ou falso? Justifique!
   Sabendo que a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ é convergente pode-se dizer que que:

   (a) a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ é convergente.

   (b) a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$ é convergente.

5. Sendo k um inteiro positivo, determine o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k x^n}{(kn)!}$$

6. Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

7. Determine o intervalo de convergência da série e, dentro desse intervalo, encontre a soma da série como uma função de x.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^x-4)^n$

8. Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência.

   (a) $f(x)=\frac{1}{1+x}$

   (b) $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$

   (c) $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

   (d) $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$

   (e) $f(x)=\frac{1}{x+10}$

   (f) $f(x)=\frac{x}{2x^2+1}$

9. Use derivação para encontrar a representação em série de potências para a função

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$$

   Qual é o raio de convergência?

10. Use o exercício anterior para encontrar uma série de potências para

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)^3}$$

11. Agora encontre uma série de potências para

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)^3}$$

Séries de Taylor e Maclaurin

12. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ escreva uma fórmula adequada para o coeficiente b_8.

13. Se $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, encontre a série de Maclaurin de f e seu raio de convergência.

14. Encontre a série de Taylor de f centrada em 4 sabendo que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

Qual o raio de convergência da série?

15. Encontre a série de Maclaurin de $f(x)$ a partir da definição de uma série de Maclaurin. Encontre também o raio de convergência da série.

(a) $f(x) = (1-x)^2$
(b) $f(x) = \ln(1+x)$
(c) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$
(d) $f(x) = 2^x$
(e) $f(x) = \cos 3x$
(f) $f(x) = x\, e^x$
(g) $f(x) =$
(h) $f(x) =$

16. Encontre a série de Taylor de $f(x)$ centrada no valor dado de a. Encontre também o raio de convergência da série.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \frac{\pi}{3}$
(b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$
(c) $f(x) = \ln x, \quad a = 2$
(d) $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$
(e) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$
(f) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = -3$
(g) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$

17. Mostre que a série obtida no exercício 15c representa $\operatorname{sen}(\pi x)$ para todo x.

18. Mostre que a série obtida no exercício 16a representa $\operatorname{sen} x$ para todo x.

19. Use a série binomial para expandir a função como série de potências. Examine o raio de convergência.

(a) $\sqrt[4]{1-x}$
(b) $\sqrt[3]{8+x}$
(c) $\frac{1}{(2+x)^3}$
(d) $(1-x)^{2/3}$

20. Use uma série de Maclurin da tabela **??** para obter a série de Maclaurin da função dada

(a) $f(x) = e^x + e^{2x}$
(b) $f(x) = \cos(\pi x/2)$
(c) $f(x) = e^x + 2e^{-x}$
(d) $f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$
(e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$
(f) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (Dica: use $sen^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$)

21. Use a série de Maclaurin de $\cos x$ para calcular $\cos 5^o$ com precisão de cinco casas decimais.

22. Encontre a soma da série dada.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n5^n}$
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$
(f) $3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \cdots$

23. Encontre os polinômios de Taylor até ordem 6 de $f(x) = \cos x$ centrados em $a = 0$. Calcule f e esses polinômios em $x = \pi/4$, $\pi/2$ e π.

24. Encontre os polinômios de Taylor até ordem 3 de $f(x) = \frac{1}{x}$ centrados em $a = 1$. Calcule f e esses polinômios em $x = 0,9$ e $1,3$.

25. Encontre o polinômio de Taylor $T_3(x)$ de f centrado em a.

(a) $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$
(b) $f(x) = \cos x, \quad a = \frac{\pi}{2}$
(c) $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad a = 0$
(d) $f(x) = \ln x, \quad a = 1$
(e) $f(x) = x\cos x, \quad a = 0$
(f) $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$
(g) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 2$

26. Aproxime f por um pilnômio de Taylor de ordem n no número a. Em seguida use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.

    (a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leq x \leq 4,2$

    (b) $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0,9 \leq x \leq 1,1$

    (c) $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0,8 \leq x \leq 1,2$

    (d) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \leq x \leq \pi/3$

    (e) $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leq x \leq 0,1$

    (f) $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0,5 \leq x \leq 1,5$

    (g) $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leq x \leq 1$

27. Use a informação do exercício 25b para estimar $\cos 80^o$ com precisão de cinco casas decimais.

28. Use a informação do exercício 26d para estimar $\operatorname{sen} 38^o$ com precisão de cinco casas decimais.

29. Use a Desigualdade de Taylor para determinar o número de termos da série de Maclaurin de e^x são necessários para estimar $e^{0,1}$ com precisão de 0,00001.

30. Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar os valores de x para os quais a aproximação dada tem precisão dentro do erro estabelecido.

    (a) $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x}{6}$ $(|Erro| < 0,001)$

    (b) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ $(|Erro| < 0,005)$