2. A é um conjunto com 5 elementos e $R = \{(0,1); (1,2); (2,3); (3,4)\}$ é uma relação sobre A. Pede-se obter:

a) Os elementos de A

$A = \{0, 1, 2, 3\}$

b) Domínio e imagem de R

$Dom(R) = \{0, 1, 2, 3\}$
$Img(R) = \{1, 2, 3, 4\}$

c) Os elementos, domínio e imagem de R^{-1}

$R^{-1} = \{(1,0), (2,1), (3,2), (4,3)\}$
$Dom(R^{-1}) = \{1, 2, 3, 4\}$
$Img(R^{-1}) = \{0, 1, 2, 3\}$

3. Seja $R = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 4x^2 + 9y^2 = 36\}$. Achar:

a) O domínio de R e a imagem de R

$Dom(R) = \{x : -3 \leq x \leq 3\}$
$Img(R) = \{y : -2 \leq y \leq 2\}$

b) R^{-1}

$R^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \mid y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, 4x^2 + 9y^2 = 36\}$

5. Sejam A e B dois conjuntos com m e n elementos, respectivamente. Calcule o número de elementos de $A \times B$ e os elementos de relações de A em B.

$|A \times B| = m \times n$. O número de elementos de relações é o conjunto potência $A \times B$, o qual possui $2^{m \times n}$ elementos

9. Determinar todas as relações binárias sobre o conjunto $A = \{a, b\}$. Quais são reflexivas? E simétricas? E transitivas? E antissimétricas?

1 = (a, a)
2 = (a, b)
3 = (b, a)
4 = (b, b)

$R_1 = \{\emptyset\}$
$R_2 = \{1\}$
$R_3 = \{2\}$
$R_4 = \{3\}$
$R_5 = \{4\}$
$R_6 = \{1, 2\}$
$R_7 = \{1, 3\}$
$R_8 = \{1, 4\}$
$R_9 = \{2, 3\}$
$R_{10} = \{2, 4\}$
$R_{11} = \{3, 4\}$
$R_{12} = \{1, 2, 3\}$
$R_{13} = \{1, 2, 4\}$
$R_{14} = \{1, 3, 4\}$

$R_{15} = \{2, 3, 4\}$
$R_{16} = \{1, 2, 3, 4\}$

Reflexivas: R_8, R_{13}, R_{14} e R_{16}
Simétricas: $R_1, R_2, R_5, R_8, R_9, R_{12}, R_{15}$ e R_{16}
Transitivas: R_1 à R_8, R_{10}, R_{11}, R_{16}
Anti-simétricas: R_1 à R_8, R_{10}, R_{11}, R_{13} e R_{14}

10. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Considerem-se as seguintes relações sobre A:

$R_1 = \{(1,2), (1,1), (2,2), (2,1), (3,3)\}$
$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$
$R_3 = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,3), (3,1)\}$
$R_4 = A \times A$
$R_5 = \emptyset$

Quais são reflexivas? simétricas? transitivas? anti-simétricas?

Reflexivas: $\{R_1, R_2, R_3\}$
Simétricas: $\{R_1, R_4, R_5\}$
Transitivas: $\{R_1, R_4, R_5\}$
Anti-simétricas: $\{R_2, R_3, R_5\}$

13. Seja A um conjunto finito com n elementos:
a) Quantas são as relações binárias sobre A?

2^{n^2}

b) Quantas são as relações reflexivas sobre A?

$n \cdot 2^{n(n-n)}$

c) Quantas são as relações simétricas sobre A?

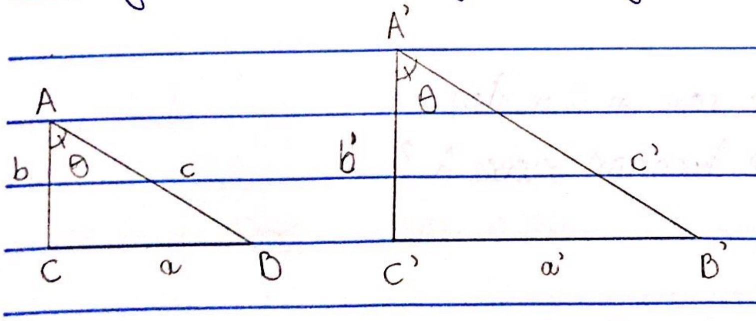
$2^{n((n+1)/2)}$

17. Quais das relações abaixo são relações de equivalência sobre $E = \{a, b, c\}$?

$R_1 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c)\}$
$R_2 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (b,c)\}$
$R_3 = \{(a,a), (b,b), (b,c), (c,b), (a,c), (c,a)\}$
$R_4 = E \times E$
$R_5 = \emptyset$

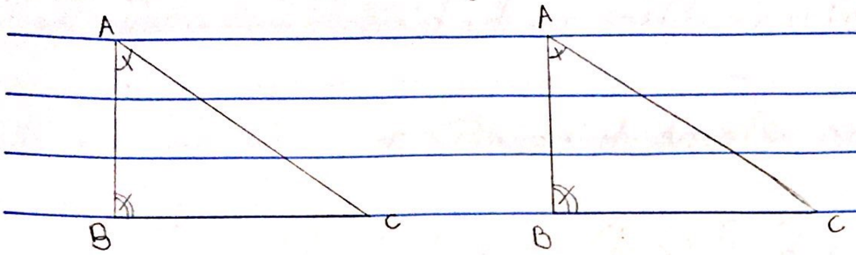
R é equivalente se R é reflexiva, simétrica e transitiva. Logo R_1 e R_4 são equivalentes. R_2, R_3 e R_5 não são reflexivas.

19. Seja A um conjunto dos triângulos do espaço euclidiano. Seja R a relação sobre A definida por: $xRy \Leftrightarrow x$ é semelhante a y. Mostre que R é uma relação de equivalência.



Provar que R é equivalente:

I) $xRx \Rightarrow$ R deve ser reflexiva

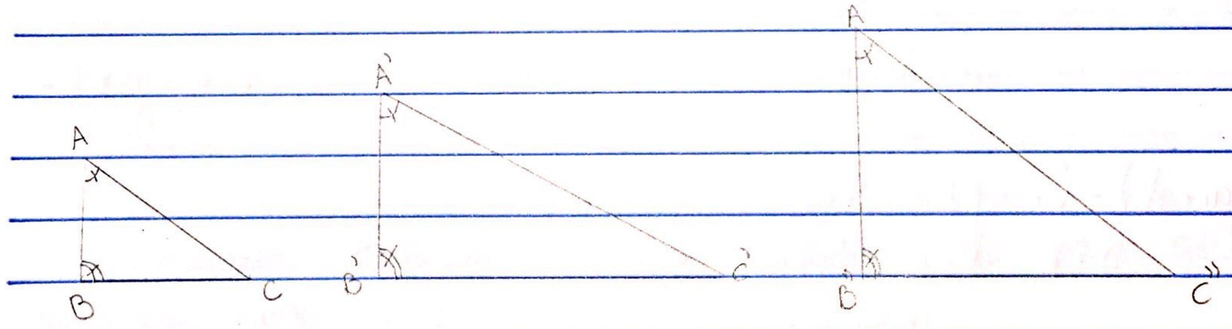


Pela regra se dois triângulos possuem dois ângulos ordenamente congruentes, então eles são semelhantes. Portanto, um triângulo é semelhante a ele mesmo (xRx).

II) R deve ser simétrica $\Rightarrow xRy \Rightarrow yRx$

Se x é semelhante a y então y é semelhante a x

III) R deve ser transitiva $\Rightarrow xRy, yRz \Rightarrow xRz$



Se x é semelhante a y, e y é semelhante a z, então x é semelhante a z.

$\therefore$ Logo R é equivalente

21. Mostre que a relação R sobre $N \times N$ tal que $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow$

$a + d = b + c$ é uma relação de equivalência

$R \subseteq N \times N$ e $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

Provar que R é uma relação de equivalência:

i) R é reflexiva: $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

$c = a, \ d = b$
$a + b = b + a$ ✓

ii) R é simétrica: $(a,b) R (c,d) \Rightarrow (c,d) R (a,b)$

$a + d = b + c$ e $c + b = d + a$ ✓

iii) R é transitiva: $(a,b) R (c,d), (c,d) R (e,f) \Rightarrow (a,b) R (e,f)$

$\underset{\text{I}}{a + d = b + c}$ $\underset{\text{II}}{c + f = d + e}$ $\underset{\text{III}}{a + f = b + e}$

$(a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e)$
$a + f + \underline{d + c} = b + e + \underline{d + c}$
$a + f = b + e$

∴ Portanto R é uma relação de equivalência

24. Seja $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 10\}$ e R a relação sobre A definida por $xRy \Leftrightarrow$ existe $K \in \mathbb{Z} : x - y = 4K$. Determinar o conjunto quociente A/R.

tilibra

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$[a] = \{x \in A \mid x R a\}$

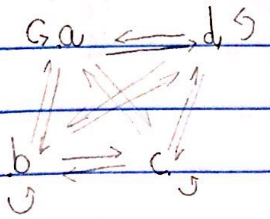
$[0] = \{0, 4, 8\}$
$[1] = \{1, 5, 9\}$
$[2] = \{2, 6, 10\}$
$[3] = \{3, 7\}$

$A/R = \{[0], [1], [2], [3]\}$

28. Seja $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\}$. Provar que R é uma relação de equivalência e descrever as classes representadas por $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{2}$.

$[\frac{1}{2}] = \mathbb{Q}$
$[\sqrt{2}] = \{\sqrt{2} + r \mid r \in \mathbb{Q}\}$

32. Enumerar todas as relações de equivalência que podem ser estabelecidas sobre $E = \{a, b, c, d\}$?



5 relações