Resumo de aula 9 - 1/2

1 Derivadas

Definição.(Derivada de uma função)

A derivada de uma função f em um número a, denotado por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se o limite existe. Outra definição alternativa é

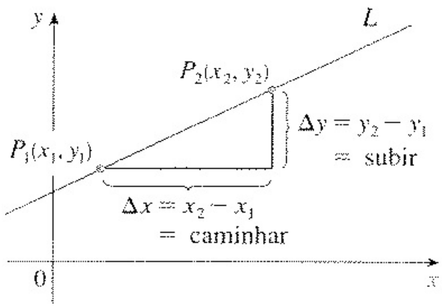
$$f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pois tome $x = a + h$, então $x - a = h$. Quando $x \longrightarrow a$, implica que $x - a = h \longrightarrow 0$. Diremos que f é derivável ou diferenciável em a. f é uma função derivável ou diferenciável se f for derivável em cada ponto de seu domínio.

Significados geométrico de derivadas

Lembramos que a inclinação (o coeficiente angular) de uma reta não vertical que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ é

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



A inclinação (O coeficiente angular)de uma reta vertical não está definida.

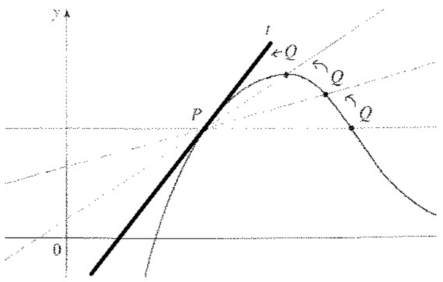
Uma equação da reta passando pelo ponto $P(a, b)$ com inclinação m é

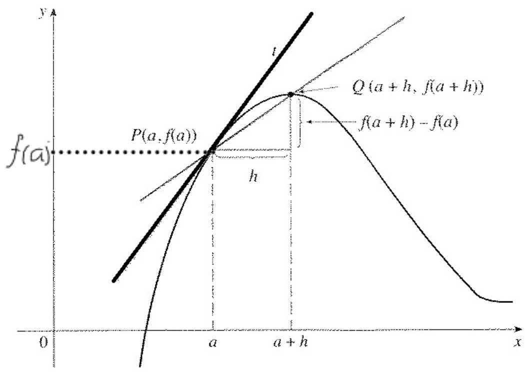
$$y - b = m(x - a)$$

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta que passa por P e tem a inclinação $m = f'(a)$. Logo a equação da reta tangente é

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Veremos por que $m = f'(a)$? Consideremos, então, a reta secante PQ que passa pelos pontos $P(a, f(a))$ e $Q(a + h, f(a + h))$.





A inclinação da reta secante PQ :

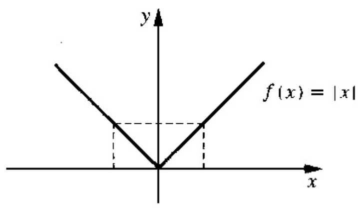
$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva $y = f(x)$ ao obrigar h tender a 0. Isso implica dizer que a reta tangente é a posição limite da reta secante PQ quando Q tende a P. Definimos, então, a inclinação da reta tangente, denotamos por m, como o limite de inclinação da reta secante quando Q aproximar-se de P, ou seja, h tender a 0. Temos

$$m = \lim_{Q \longrightarrow P} m_{PQ} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Exemplo 1.1. Seja $f(x) = k$ uma função constante. Mostre que $f'(x) = 0$ para todo x. (A derivada de uma constante é zero.)

Solução.



Exemplo 1.2. Mostre que $f(x) =\mid x \mid$ não é derivável em $p = 0$.

Solução.

Se o gráfico de uma função tiver uma "quina" (bico), então f não tem reta tangente naquele ponto. (não é derivável nesse ponto.)

A Regra de Potência

Se n for um número real qualquer, então é válido a fómula de derivação:

$$f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

A demostração se encontra na seção 3.8 do livro do James Stewart, volume I. A demostração para n número natural ou racional se encontra no livro de Guidorizzi, volume 1, $5^{\underline{a}}$ edição na pg.145.

Exemplo 1.3. Seja $f(x) = x^4$. Calcule.
(a)$f'(x)$
(b)$f'(\frac{1}{2})$

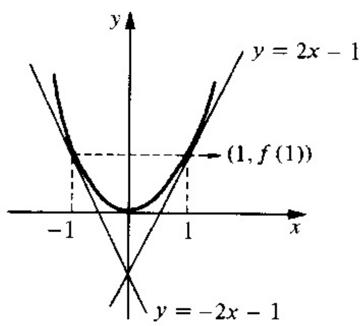
Solução.

Exemplo 1.4. Calcule $f'(x)$ sendo
(a)$f(x) = x^{-3}$.
(b)$f(x) = \frac{1}{x^5}$.
Solução.

Exemplo 1.5. Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule
(a)$f'(x)$
(b)$f'(3)$
Solução.

Exemplo 1.6. Seja $f(x) = x^2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$

Solução.



Aproximação Linear

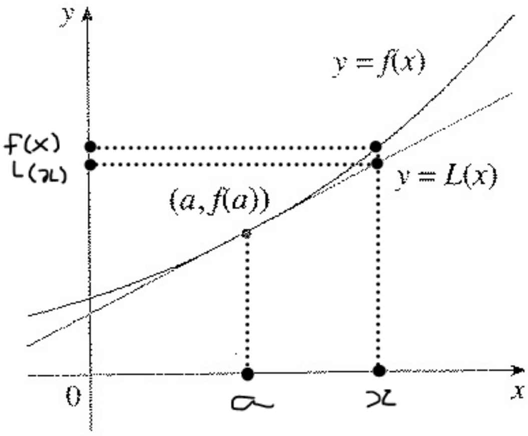
Vimos que uma curva fica muito perto de reta tangente nas proximidades do ponto de tangência. Essa observação é a base para método de encontrar os valores aproximados de funções. Em outras palavras, usamos a reta tangente em $(a, f(a))$ como uma aproximação para o gráfico da função $y = f(x)$ quando x está proximo de a. A função dessa reta tangente é

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

e a aproximação

$$f(x) \simeq L(x)$$

para todo x próximo de a é denominada aproximação linear ou aproximação pela reta tangente de f em a.



Exemplo 1.7. Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{x}$ em $a = 1$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0,9}$.

Solução: Tem -se

$$f(x) \simeq L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

para todo x proximi de a. A aproximação linear da função em $a = 1$ é

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$f(0,9) = \sqrt{0,9} \simeq L(0,9) = \frac{1}{2}(0,9) + \frac{1}{2} = 0,95$$

Portanto, $\sqrt{0,9} \simeq 0,95$