Lista de MATCC

2 de novembro de 2021

1. Sejam $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 3, 5, 9\}$. Enumerar os elementos das seguintes relações $R_1 = \{(x, y) \in A \times B | y = x + 1\}$ e $B = \{(x, y) \in A \times B | x \leq y\}$. Dizer qual é o domínio, a imagem e a inversa de cada relação.

2. A é um conjunto com 5 elementos e $R = \{(0, 1); (1, 2); (2, 3); (3, 4)\}$ é uma relação sobre A. Pede-se obter:
(a) os elementos de A;
(b) domínio e imagem de R;
(c) os elementos, domínio e imagem de R^{-1}.

3. Seja $R = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 4x^2 + 9y^2 = 36\}$. Achar:
(a) o domínio de R e a imagem de R; (b) R^{-1}.

4. Seja R uma relação nos números $\mathbb{N} = 1, 2, 3, ...$ definida pela sentença aberta"$2x + y = 10$". Achar o domínio, a imagem e R^{-1}.

5. Sejam A e B dois conjuntos com m e n elementos, respectivamente. Calcule o número de elementos de $A \times B$ e os elementos de relaçções de A em B.

6. Seja R a relação sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que: $xRy \iff (x - y \quad \text{é múltiplo de} 2)$. Enumerar os elementos de R. Que propriedades R apresentar.

7. Um casal tem 5 filhos: álvaro, bruno, cláudio, dario e elizabete. Enumerar os elementos da relação R definida no conjunto $E = \{a, b, c, d, e\}$ por $xRy \iff x \quad \text{é irmão de} \quad y$. Que propriedades R apresenta? (Nota: x é irmão de y quando x é homen, $x \neq y$ e x e y têm os mesmos pais.)

8. Seja A um conjunto das retas definidas pelos vértices de um paralelogramo $abcd$. Enumerar os elementos da relação R em A assim definida: $xRy \iff x \parallel y$. Quais são as propriedades apresentadas por R? (Nota: x é paralela a y quando $x = y$ ou $x \cap y = \phi$ com x e y coplanares.)

9. Determinar todas as relações binárias sobre o conjunto $A = \{a, b\}$. Quais são reflexivas? E simétricas? E transitivas? E antessimétricas?

10. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Considerem-se as seguintes relações sobre A:
$R_1 = \{(1, 2); (1, 1); (2, 2); (2, 1); (3, 3)\}$
$R_2 = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2); (2, 3)\}$
$R_3 = \{(1, 1); (2, 2); (1, 2); (2, 3); (3, 1)\}$
$R_4 = A \times A$
$R_5 = \phi$
Quais são reflexivas? simétricas? transitivas? antissémtricas?

11. Construir sobre o conjunto $E = \{a, b, c, d\}$ relações R_1, R_2, R_3 e R_4 tais que R_1 só tem a propriedade reflexiva, R_2 só a simétrica, R_3 só transitiva e R_4 só a antissimétrica.

12. Pode uma relação sobre um conjunto $E \neq \phi$ ser simétricae e antissimétrica? Pode uma relação sobre E não ser simétrica nem antissimétrica? Justifique.

13. Seja A um conjunto finito com n elementos:
(a) Quantas são as relações binárias sobre A?
(b) Quantas são as relações reflexivas sobre A?
(c) Quantas são as relações simétricas sobre A?

14. Prove que se uma relação R é transitiva, então R^{-1} também o é.

15. Sejam R e S relações sobre o mesmo conjunto A. Provar que:
(a) $R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1}$
(b) $R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}$
(c) Se R e S são transitivas, então $R \cap S$ é transitiva.
(d) Se R e S são simétricas, então $R \cup S$ e $R \cap S$ são simétricas.
(e) Para todo R, $R \cup R^{-1}$ é simétrica.

16. Seja R uma relação de E em F e S uma relação de F em G. Chama-se relação composta de R e S a seguinte relação (indicada por $S \circ R$) de E em G:
$S \circ R = \{(x, z) \in E \times G | \quad \text{existe} \quad y \in F : (x, y) \in R \quad \text{e} \quad (y, z) \in S\}$.
Mostre que:
(a) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$
(b) Se R é reflexiva, então $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$ também o são. $(R \subset E \times E)$
(c) Se R é uma relação sobre E, então $R \circ R^{-1}$ e $R^{-1} \circ R$ são simétricas.
(d) Se R e S são relações simétricas sobre um conjunto E, então: $S \circ R$ é simétrica $\iff S \circ R = R \circ S$

17. Quais das relações abaixo são relações de equivalência sobre $E = \{a, b, c\}$?
$R_1 = \{(a, a); (a, b); (b, a); (b, b); (c, c)\}$

$R_2 = \{(a,a);(a,b);(b,a);(b,b);(b,c)\}$
$R_3 = \{(a,a);(b,b);(b,c);(c,b);(a,c);(c,a)\}$
$R_4 = E \times E$
$R_5 = \phi$

18. Quais das seguintes sentenças abertas definem uma relação de equivalência sobre (N) (conjunto dos números naturais, $1, 2, 3, ...$)?
(a) $xRy \iff \quad \text{existe} k \in \mathbb{Z} : x = y = 3k$ (b) $x|y$
(c) $x \leq y$ (d) $mdc(x,y) = 1$ (e) $x + y = 10$

19. Seja A um conjunto dos triângulos do espaço euclidiano. Seja R a relação sobre A definida por: $xRy \iff x$ é semelhante a y. Mostre que R é uma relação de equivalência.

20. Seja A o conjunto das retas de um plano α e seja P uma ponto fixo de α. Quais das relações abaixo definidas são relações de equivalência sobre A?
(a) $xRy \iff x \parallel y$ (b) $xRy \iff x \perp y$ (c) $xRy \iff P \in x \cap y$

21. Mostre que a relação R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a,b)R(c,d) \iff a + d = b + c$ é uma relação de equivalência.

22. Mostre que a relação S sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$ tal que $(a,b)S(c,d) \iff ad = bc$ é uma relaçãod e equivalência.

23. Seja E um conjunto não vazio. Dados $X, Y \in \mathbb{P}(E)$ (conjunto das partes de E), mostre que as relação R e S são de equivalência sobre $\mathbb{P}(E)$:
(a) $XRY \iff X \cap A = Y \cap A$
(b) $XSY \iff X \cup A = Y \cup A$
onde A é um subconjunto fixo de E.

24. Seja $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 10\}$ e R a relação sobre A definida por $xRy \iff \quad \text{existe} k \in \mathbb{Z} : x - y = 4k$. Determinar o conjunto quociente A/R.

25. Seja $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 5\}$ e R a relação sobre A definida por $xRy \iff x^2 + 2xy = y^2 + 2y$. Determinar o conjunto quociente A/R.

26. Sejam $E = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ e $R = \{(x,y) \in E \times E : x + |x| = y + |y|\}$. Mostre que R é uma relação de equivalênica e descrever E/R.

27. Seja R a relação sobre $\mathbb{Q}$ definida da forma seguinte $xRy \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Provar que R é uma relação de equivalência e descrever a classe [1].

28. Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\}$. Provar que R é uma relação de equivalência e descrever as classes representadas por $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{2}$.

29. Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, Y_2)$ pontos genéricos de um plano cartesiano π. Mostre que as relações a seguir são relações de equivalência sobre π e interprete geometricamente as classes de equivalência e o conjunto quociente, em cada caso.
(a) $PRQ \iff x_1y_2 = x_2y_1$
(b) $PSQ \iff y_2 - y_1 = x_2 - x_1$
(c) $PTQ \iff x_1^2 + y_2^2 = x_2^2 + y_1^2$

30. Qual é a relação de equivalência associada a cada uma das seguintes partições?
(a) $A/R = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$.
(b) $A/R = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\}$.
(c) $A/R = \{\{0, \pm 2, \pm 4, ...\}, \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}$

31. Quais são as relações de equivalência sobre $E = \{a, b\}$?

32. Enumerar todas as relações de equivalência sobre $A = \{a, b, c\}$?

33. Quantas são as relações de equivalência que podem ser estabelecidas sobre $E = \{a, b, c, d\}$?

34. Seja R uma relação reflexiva sobre um conjunto E. Mostre que R é uma relação de equivalência se, e somente se, $R \circ R^{-1} = R$.