Sequências e séries

Antonio Carlos Nogueira

1 Sequências numéricas

Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Em geral, consideraremos sequências cujo domínio é do tipo $\{n \in \mathbb{N}; n \geq q\}$, onde q é um número natural fixo.

Notação: a_n indicará o valor que a sequência assume no número natural n e será chamado o enésimo termo da sequência ou termo geral da sequência. Escreve-se $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (a_n) para indicar a sequência cujo enésimo termo é a_n.

Exemplo 1 *Seja a sequência de termo geral $a_n = 2^n$. Temos*

$$a_0 = 2^0 = 1, a_1 = 2^1 = 2, a_2 = 2^2 = 4, \cdots$$

Exemplo 2 *Seja a sequência cujo enésimo termo é $s_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Temos*

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + 2 = 3, s_3 = 1 + 2 + 3 = 6, s_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \cdots$$

Exemplo 3 *seja a sequência cujo termo geral é $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i}$. Temos*

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{2}, s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \cdots$$

Exemplo 4 *Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência*

$$\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \cdots$$

Solução: Temos:

$$a_1 = \frac{3}{5}, a_2 = -\frac{4}{25}, a_3 = \frac{5}{125}, a_4 = -\frac{6}{625}, a_5 = \frac{7}{3125}$$

Observe que os numeradores começam com 3 e são aumentados por 1 à medida que avançamos para o próximo termo; o segundo termo tem numerador 4, o terceiro, numerador 5; generalizando, o $n-$ésimo termo terá numerador $n + 2$. Os denominadores são as potências de 5, logo a_n terá denominador 5^n. Os sinais de cada termo também se alternam entre positivo e negativo; assim precisamos multiplicar por uma paotência de -1: como o primeiro termo tem sinal positivo multiplicaremos o termo geral por $(-1)^{n+1}$. Assim,

$$a_n = (-1)^{n+1}\ \frac{n+2}{5^n}.$$

Exemplo 5 *A sequência de Fibonacci (f_n) é definida recursivamente pelas condições*

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Em outras palavras, exceto os dois primeiros, cada termo é a soma dos dois termos precedentes. Os primeiros termos da sequência são

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$$

Essa sequência surgiu quando o matemático italiano conhecido como Fibonacci resolveu, no século XIII, um problema envolvendo a reprodução de coelhos.

Podemos visualizar algumas sequências, como por exemplo $a_n = \frac{n}{n+1}$, marcando seus termos na reta real (fig. **??**) ou traçando seu gráfico (fig. **??**). Observe que, como uma sequência é uma

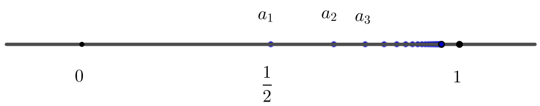

Figura 1

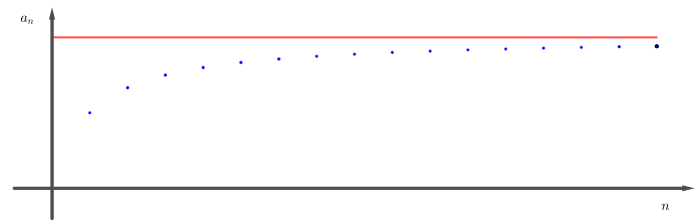

Figura 2

função cujo domínio é o conjunto dos números naturais, seu gráfico consiste de pontos isolados com coordenadas da forma (n, a_n):

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \cdots, (n, a_n), \cdots$$

Observando a figura **??** ou a figura **??** parece que os termos da sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$ estão se aproximando de 1 quando n se torna grande. Na verdade a diferença

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

pode ficar tão pequena quanto se desejar, tomando n suficientemente grande. Indica-se isso escrevendo-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Em geral, a notação

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

significa que os termos da sequência (a_n) se aproximam de L quando n torna-se grande.

Definição 1 *Seja a_n uma sequência e seja L um número real. Diz-se que L é o limite de (a_n) (ou que (a_n) converge para L, se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que $n > n_o \Longrightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$ (equivalentemente, $n > n_0 \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon$).*

Diremos neste caso que a sequência (a_n) é uma sequência convergente ou que a sequência (a_n) converge. Caso o limite não exista diremos que a sequência é divergente ou que a sequência diverge.

Simbolicamente:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \text{ (ou simplesmente } \lim a_n = L) \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Observamos que a definição acima é a mesma dada para o limite de uma função $f(x)$, para $x \to +\infty$; logo todos os resultados válidos para limites da forma $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ são válidos neste contexto. A única diferença é que n precisa ser um número inteiro. Logo temos o seguinte teorema, que será útil futuramente.

Teorema 1 *Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ quando n é um número natural, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.*

Exemplo 6 *Calcular* $\lim \dfrac{1}{n^r}$, $r > 0$.

Solução: Como sabemos que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$, quando $r > 0$, segue do teorema **??**

$$\lim \frac{1}{n^r} = 0, \quad \text{se } r > 0.$$

Se a_n aumentar quando n aumentar, usaremos a notação $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ou simplesmente $\lim a_n = \infty$.

Definição 2 $\lim a_n = \infty$ *significa que para cada número positivo M existe um número natural n_0 tal que $n > n_0 \Longrightarrow a_n > M$. Neste caso a seqeuência a_n é divergente.*

Lembramos abaixo as propriedades de limites adaptadas para limites de sequências.

Teorema 2 (Unicidade do limite) *O limite de uma sequência, se existe, é único.*

Teorema 3 (Propriedades de limites) *Se (a_n) e (b_n) são sequências convergentes e c é um número real qualquer, então*

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$.
2. $\lim ca_n = c \lim a_n$.
3. $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$.
4. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$, *desde que* $\lim b_n \neq 0$.

Outros resultados úteis seguem abaixo:

Teorema 4 (Teorema do Confronto) *Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim a_n = \lim c_n = L$, então $\lim b_n = L$.*

Teorema 5 *Se $lim|a_n| = 0$, então $\lim a_n = 0$.*

Teorema 6 *Se $\lim a_n = L$ e se a função f for contínua em L, então*

$$\lim f(a_n) = f(L).$$

Observação 1 *Relembre também as Regras de L'Hospital, pois elas poderão ser úteis.*

Exemplo 7 *Encontre* $\lim \frac{n}{n+1}$

Solução: O método é semelhante ao utilizado para calcular limites da forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde p e q são polinômios: dividir numerador e denominador pela maior de potência de n que ocorre no denominador e depois usar as regras de limites.

$$\lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{n/n}{(n+1)/n} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim 1}{\lim 1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Exemplo 8 *A sequência $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{10+n}}$ é convergente ou divergente?*

Solução: Como no exemplo anterior, dividimos numerador e denominador por n:

$$\lim \frac{n}{\sqrt{10+n}} = \lim \frac{n/n}{\sqrt{10+n}/n} =$$

$$\lim \frac{1}{\sqrt{(10+n)/n^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{10}{n^2}+\frac{1}{n}}} = \infty$$

porque o numerador é constante e o denominador se aproxima de zero. Logo a sequência (a_n) é divergente.

Exemplo 9 *Calcular* $\lim \dfrac{\ln n}{n}$

Solução: Observe que tanto numerador quanto denominador se aproximam de infinito quando $n \to \infty$. Não podemos aplicar a Regra de L'Hospital diretamente, porque ela não se aplica a sequências, mas, sim, a funções de uma vairável real. Contudo, podemos usar a Regra de L'Hospital para função relacionada $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ e obter

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Segue, portanto, do teorema **??**, que

$$\lim \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Exemplo 10 *Determine se a sequência* $(-1)^n$ *é convergente ou divergente.*

Solução: Se escrevermos os termos da sequência, obteremos

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$$

Uma vez que os termos oscilam entre 1 e -1 com frequência indefinida, a_n não se aproxima de valor algum. Logo $\lim a_n$ não existe, ou seja, a sequência é divergente.

Exemplo 11 *Calcule* $\lim \dfrac{(-1)^n}{n}$ *se existir.*

Solução: Observe que

$$\lim \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim \frac{1}{n} = 0,$$

logo pelo teorema **??**, segue que

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Exemplo 12 *Calcule* $\lim \operatorname{sen}(\pi/n)$*.*

Solução: Como $\pi/n \to 0$ e a função seno é contínua em 0, pelo teorema **??** podemos escrever

$$\lim \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim \frac{\pi}{n}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0.$$

Definição 3 *Uma sequência* (a_n) *é dita* ***crescente*** *se* $a_n \leq a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,* $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$*. Dizemos que a sequência* a_n *é* ***decrescente*** *se* $a_n \geq a_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Uma sequência é dita* ***monótona*** *se for crescente ou decrescente.*

Exemplo 13 *A sequência $a_n = \frac{3}{n+5}$ é decrescente porque*

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}, \forall n \in \mathbb{N},$$

e portanto $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 1 *Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ é decrescente.*

Definição 4 *Uma sequência (a_n) é **limitada superiormente** se existir um número real M tal que $a_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência será **limitada inferiormente** se existir um número real m tal que $a_n \geq m$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se (a_n) for limitada inferiormente e superiormente diremos então que a sequência é **limitada**: em outras palavras, se existirem números reais m e M tais que $m \leq a_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por exemplo, a sequência $a_n = n$ é limitada inferiormente (pois $a_n \geq 1$, para todo n) mas não é limitada superiormente. A sequência $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ é limitada pois $0 \leq n \leq 1$ para todo n.

Destacamos aqui o seguinte teorema

Teorema 7 (Teorema da sequência monótona) *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Exemplo 14 *Vamos mostrar que a sequência $a_n = r^n$, $-1 < r < 1$ é convergente.*

Solução: Considere inicialmente $0 < r < 1$, multiplicando tudo por r^n, obtemos

$$0 < r^{n+1} < r^n < 1.$$

Conclui-se daí que a_n é limitada e decrescente. Portanto, pelo teorema **??**, a_n é convergente.

Vamos agora mostrar que $lima_n = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$, como $\frac{1}{r} > 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{1}{r}\right)^{n_0} > \frac{1}{\epsilon},$$

ou seja, $r^{n_0} < \epsilon$. Logo, como $a_n = r^n$ é decrescente, segue que para todo $n > n_0$, $r^n < r^{n_0} < \epsilon$, ou seja, $\lim r^n = 0$.

Se $-1 < r < 0$, então $0 < |r| < 1$ logo

$$\lim |r^n| = \lim |r|^n = 0$$

e, portanto, $\lim r^n = 0$ (pelo teorema 5).

Obs: Se $r \leq -1$, então (r^n) diverge, como no exemplo 10. Se $r > 1$, então $\lim r_n = \infty$.

Exemplo 15 *Investigue a sequência a_n definida pela relação de recorrência*

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \textit{para } n = 1, 2, 3, \cdots$$

Solução: Vamos listar alguns termos:

$a_1 = 2$	$a_2 = \frac{1}{2}(2+6) = 4$	$a_3 = \frac{1}{2}(4+6) = 5$
$a_4 = \frac{1}{2}(5+6) = 5,5$	$a_5 = 5,75$	$a_6 = 5,875$
$a_7 = 5,9375$	$a_8 = 5,96875$	$a_9 = 5,984375$

Com base nestes termos parece que a sequência é crescente e está convergindo para 6. Vamos mostrar inicialmente que a_n é de fato crescente. Para isso vamos usar Indução Matemática.

1.1 Exercícios

1.1 Liste os cinco primeiros termos da sequência:

(a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$

(b) $a_n = \dfrac{3^n}{1+2^n}$

(c) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

(d) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

(e) $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

(f) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

(g) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

1.2 Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continue.

(a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \cdots$

(b) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots$

(c) $-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \cdots$

(d) $5, 8, 11, 14, 17, \cdots$

(e) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \cdots$

1.3 Verifique se a sequência converge ou diverge. Se for convergente calcule o limite.

(a) $a_n = 1 - (0,2)^n$;

(b) $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+1}$

(c) $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$

(d) $a_n = \dfrac{n^3}{n+1}$

(e) $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

(f) $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}}$

(g) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$

(h) $a_n = \cos(n/2)$

(i) $a_n = \cos(2/n)$

(j) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

(k) $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

(l) $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

(m) $a_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}-1}$

(n) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1+\sqrt{n}}$

(o) $a_n = n^2 e^{-n}$

(p) $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

1.4 (a) Determine se a sequência a seguir é convergente ou divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geq 1.$$

(b) O que acontece se $a_1 = 2$?

1.5 Se $R\$1000,00$ forem investidos a uma taxa de juros de 6%, contabilizados anualmente, depiis de n anos o investimento valerá

$$a_n = 1000(1,06)^n \text{ reais.}$$

(a) Encontre os cinco primeiros termos da sequência.

(b) A sequência é convergente ou divergente? Explique.

1.6 Um piscicultor possui 5000 bagres em sua lagoa. O número de bagres aumenta 8% ao mês e o agricultor retira 300 bagres por mês.

(a) Determine a população P_n de bagres na lagoa após n meses.

(b) Quantos bagres estarão na lagoa após 6 meses?

1.7 Se a sequência (a_n) for convergente mostre que a sequência $b_n = a_{n+1}$ também é convergente e

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n.$$

1.8 A sequência (a_n) é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, para $n \geq 1$. Supondo que a_n seja convergente calcule o seu limite. Sugestão: use o resultado do exercício anterior.

1.9 Admitindo que a sequência (a_n) definida por

$$a_1 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+6) \quad \text{para } n \geq 1$$

é convergente calcule seu limite.

1.10 Verifique se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

(a) $a_n = (-2)^{n+1}$

(b) $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$

(c) $a_n = n(-1)^n$

(d) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$

(e) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$

(f) $a_n = n + \frac{1}{n}$

1.11 Calcule o limite da sequência

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$$

1.12 Uma sequência a_n é dada por

$$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

(a) Mostre que a_n é crescente e limitada superiormente por 3. Mostre em seguida que (a_n) é convergente.

(b) Calcule $\lim a_n$.

1.13 Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{n}$$

é crescente $a_n < 3$ para todo n. Deduza que a_n é convergente e calcule seu limite.

1.14 Mostre que a sequência a_n definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$$

satisfaz $0 < a_n \geq 2$ e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e calcule seu limite.

1.15 (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada para produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um para recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no enésimo mês? MOstre que a resposta é f_n onde f_n é a sequência de Fibonacci definida no exemplo **??**.

(b) Seja $a_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ e mostre que $a_{n-1} = 1 + \dfrac{1}{a_{n-2}}$. Supondo que $A-n$ seja convergente, encontre seu limite.

1.16 (a) Sejam $a_1 = a, a_2 = f(a), a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \cdots, a_{n+1} = f(a_n)$, onde f é uma função contínua. Se $\lim a_n = L$, mostre que $f(L) = L$.

(b) Ilustre a parte (**??**) tomando $f(x) = \cos x$, $a = 1$, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.

2 Séries

Nesta seção estenderemos a operação de adição de modo a atribuir sigificado a uma igualdade do tipo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1,$$

na qual o primeiro membro é uma soma com uma quantidade infinita de parcelas. Na verdade o que o primeiro membro da igualdade acima exprime é o limite

$$\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right).$$

A igualdade acima significa que, dado $\epsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, para todo $n>n_o$ tems-e

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1\right|<\epsilon.$$

Em outras palavras, a sequência (s_n) dada por

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

é tal que $\lim s_n=1$.

Definição 5 *Uma série numérica é uma soma $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ com um número infinito de parcelas. Em geral uma série é denotada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ ou } \sum a_n.$$

Faz sentido falar sobre a soma de uma quantidade infinita de termos? Por exemplo, seria impossível encontrar uma soma finita para a série

$$1+2+3+\cdots+n+\cdots$$

pois, se começarmos a adicionar os termos, obteremos as somas cumulativas $1,3,6,10,15,21,\cdots$ e depois do enésimo termo, obtemos $n(n+1)/2$, que se torna muito grande à medida que n aumenta.

Por outro lado, se começarmos a somar os termos da série

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

obtemos $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\frac{63}{64},\cdots,1-\frac{1}{2^n},\cdots$. Observe que, somando um número suficiente de termos da série, podemos fazer as somas parciais se tornarem tão próximas de 1 quanto quisermos. Assim, é razoável dizer que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

2.1 Séries convergentes

Usamos uma ideia parecida para determinar se uma série $\sum a_n$ tem uma soma ou não. Consideramos as **somas parciais**

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1\\
s_2 &= a_1+a_2\\
s_3 &= a_1+a_2+a_3\\
s_4 &= a_1+a_3+a_3+a_4
\end{aligned}$$

e em geral,

$$s_n \quad = \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1}$$

Essas somas parciais formam uma nova sequência (s_n) que pode ter um limite ou não. Se $\lim s_n = s$ existir (como um número finito), então, como no exemplo acima,o chamamos de soma da série infinita $\sum a_n$.

Definição 6 *Dada uma série $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote pos s_n sua enésima soma parcial*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

*Se a sequência (s_n) for convergente e $\lim s_n = s$ existir como um número real, então diremos que a série $\sum a_n$ é **convergente** e podemos escrever*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = s \text{ ou } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

*O número $s = \lim s_n$ é chamado a **soma** da série. Se a sequência (s_n) é divergente, então a série é dita **divergente**.*

Observação 2 *Observe que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Às vezes será conveniente considerar séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Exemplo 16 *Um exemplo importante de série infinita é a chamada **série geométrica** que é dada por*

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, \quad a \neq 0.$$

Observe que cada termo é obtido a partir do anterior, multiplicando-se pela razão comum r; já consideramos acima o caso em que $a = 1/2$ e $r = 1/2$.

Se $r = 1$, então $s_n = a + a + \cdots + a = na \longrightarrow \pm\infty$. Como, neste caso, $\lim s_n$ não existe, então a série diverge se $r = 1$.

Se $r \neq 1$ temos

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

e

$$rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n$$

Subtraindo essas equações, ficamos com

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

e daí

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1-r} \tag{2}$$

Se $-1 < r < 1$, do exemplo **??** segue que $r^n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, e daí

$$\lim s_n = \lim \frac{a-ar^n}{1-r} = \lim \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Assim quando $|r| < 1$, série geométrica é convergente, e sua soma é $\dfrac{a}{1-r}$. Se $r \leq -1$ ou $r > 1$, a sequência r^n é divergente; logo $\lim s_n$ não existe nesses casos.

Conclusão: A série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

é convergente se $|r| < 1$ e sua soma é

$$\frac{a}{1-r}.$$

Se $|r| \geq 1$, série geométrica é divergente.

Exemplo 17 *Encontre a soma da série geométrica*

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O primeiro termo é $a = 5$ e a razão $r = -2/3$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, a série é convergente e sua soma é

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1-(-2/3)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3.$$

Exercício 2 *Decida se a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$$

é convergente ou divergente.

Exemplo 18 *Escreva o número (dízima periódica)* $2,3\overline{17} = 2,3171717\ldots$ *como uma razão de inteiros.*

Solução:

$$2,3\overline{17} = 2,3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Depois do primeiro termo temos uma série geométrica com $a = \frac{17}{10^3}$ e $r = \frac{1}{10^2}$. Logo,

$$2,3\overline{17} = 2,3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2,3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}.$$

Exemplo 19 *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdot$$

é divergente, pois a soma parcial s_n *é igual a zero quando* n *é par e igual a 1 quando* n *é ímpar. Logo, não existe* $\lim s_n$.

Exemplo 20 *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

é convergente.

Solução: A n-ésima soma parcial é dada por

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo,

$$\lim s_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Exemplo 21 (A série harmônica) *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots +$$

é divergente.

Solução: Para essa série particular vamos considerar as somas parciais $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \cdots$ e mostrar que elas se tornam arbitrariamente grandes.

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1 + \frac{2}{2} \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \\
s_{16} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$ e, em geral,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Isso mostra que $s_{2^n} \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$ e assim (s_n) é divergente. Portanto, a série harmônica é divergente.

Exemplo 22 *Enocntre a soma da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

onde $|x| < 1$.

Solução: Observe que esta série começa com $n = 0$, de modo que o primeiro termo é $x^0 = 1$. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = x$. Visto que $|r| \; = |x| < 1$, essa série converge e sua soma é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Teorema 8 *Se a série* $\sum a_n$ *for convergente, então* $\lim a_n = 0$.

Prova. Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Então $a_n = s_n - s_{n-1}$. Como $\sum a_n$ é convergente então a sequência (s_n) também é convergente. Seja $\lim s_n = s$. Como $n - 1 \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, temos também que $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

$\square$

Observação 3 *A recíproca do teorema* **??** *não é verdadeira, em geral, ou seja, se* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *não podemos concluir que a série* $\sum a_n$ *é convergente. De fato, para a série harmônica* $\sum 1/n$, *temos* $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, *mas como visto no exemplo* **??** $\sum 1/n$ *é divergente.*

Como consequência imediata do teorema **??** temos o seguinte:

Teorema 9 (Teste de divergência) *Se* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *não existir ou* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Exemplo 23 *Mostre que a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$$

é divergente.

Solução: Temos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

Assim, de acordo com o teorema **??**, a série é divergente.

Observação 4 *Se encontrarmos* $\lim a_n \neq 0$, *sabemos que a série* $\sum a_n$ *diverge. Se encontrarmos* $\lim a_n = 0$, *a série* $\sum a_n$ *pode convergir ou pode divergir.*

Teorema 10 *Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem séries convergentes, então também o serão as séries $\sum ca_n$ (onde c é uma constante), $\sum(a_n + b_n)$ e $\sum(a_n - b_n)$; além disso tem-se:*

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Observação 5 *Essas propriedades de séries convergentes seguemdas propriedades correspondetens para limites de sequências. Por exemplo, vejamos como a parte (ii) do teorema acima é demonstrada. Sejam:*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

A n-ésima soma parcial de $\sum(a_n + b_n)$ é

$$u_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$$

e daí

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i =$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t$$

Portanto $\sum(a_n + b_n)$ é convergente e sua soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Exercício 3 *Calcule a soma da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$$

3 Testes de convergência

Em geral não é fácil encontrar a soma exata de uma série. Fizemos isso para algumas séries específicas, nos exemplos anteriores, pois foi possível encontrar uma fórmula simples para a soma parcial s_n. Mas, geralmente, não é fácil obter uma tal fórmula. Nas seções seguintes vamos estudar alguns métodos que permitem determinar se uma série é convergente ou divergente sem encontrar sua soma parcial s_n explicitamente.

3.1 Teste da integral

Vamos começar investigando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Não existe uma fórmula simples para a soma s_n dos n primeiros termos, mas uma tabela de valores aproximados gerada, por exemplo, em uma planilha (Excel ou OpenOffice) sugere que as somas parciais estão próximas do número 1,64 quando $n \longrightarrow \infty$; logo, parece que a série é convergente. Procedemos agora para verificar que de fato é isso que acontece.

Considere o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e colquemos retângulos abaixo desse gráfico da seguinte forma: a base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1 e a altura é igual ao valor da função $f(x) = 1/x^2$ na extremidade direita do intervalo; assim o primeiro retângulo terá área igual a $1/1^2$; o segundo terá área igual a $1/2^2$; depois $1/3^2$; $1/4^2$, etc. Dessa forma a soma das áreas desses retângulos é

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Se excluirmos o primeiro retângulo, a aŕea total dos retângulos restantes será menor que a aŕea sob o gráfico da função $f(x) = 1/x^2$ para $x \geq 1$; essa área, como sabemos é igual ao valor da integral imprópria

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

Essa integral imprópria é convergente e tem valor igual a 1. Assim, a figura (GeoGebra) mostra que todas as somas parciais são menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 + 1 = 2$$

Concluimos daí que a sequência s_n é limitada. Sabemos também que a somas parciais são crescentes (porque todos os termos são positivos). Logo, pelo teorema da sequência monótona, a sequência s_n das somas parciais é convergente e, dessa forma, a série é convergente. A soma da série (isto é, o limite das somas parciais) também é menor do que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < 2.$$

A soma exata dessa série, encontrada por Leonard Euler (1707-1783), é igual a $\frac{\pi^2}{6}$, mas a demonstração desse fato não é elementar.

Consideremos agora a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

Uma tabela de valores para s_n sugere que as somas parciais estão aumentando quando n cresce; assim podemos suspeitar que essa série diverge. Vamos então proceder como antes e utilizar o gráfico da função $y = 1/\sqrt{(x)}$, porém dessa vez utilizaremos retângulos cujos topos estão acima da curva. A base de cada retângulo é um intervalo de comprimento 1 e a altura é igual ao valor da função $f(x) = 1/\sqrt{(x)}$ na extremidade esquerda do intervalo. Dessa forma, a soma das áreas de todos os retângulos é igual a

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Essa área é maior que a área sob o gráfico da função $y = 1/\sqrt{(x)}$, para $x \geq 1$, que é igual à integral imprópria $\int_1^\infty (1/\sqrt{x})dx$. Mas, essa integral é divergente; logo a área abaixo da curva é infinita. Assim, a soma da série deve ser teambém infinita. Em outras palavras a série é divergente.

Com uma argumentação semelhante a que usamos acima para analisar essas duas séries pode-se demonstrar o seguinte teste (não faremos a demonstração aqui).

Teorema 11 (Teste da Integral) *Seja f uma função contínua, positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$. Então a série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)dx$ for convergente. Em outras palavras:*

1. *Se $\int_1^\infty f(x)dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^\infty a_n$ é convergente.*
2. *Se $\int_1^\infty f(x)dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^\infty a_n$ é divergente.*

Observação 6 *Quando se usa o teste da integral não é necessário começar a série ou a integral em $n = 1$. Por exemplo, testando a série*

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \textit{usamos} \qquad \int_4^\infty \frac{1}{(x-3)^2}\, dx$$

Também não é necessário que f seja sempre decrescente; o importane é que f seja decrescente a partir de certo ponto, isto é, decrescente para x maior que algum número N.

Exemplo 24 *Verifique se a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

é convergente ou divergente.

Solução: A função $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ é contínua, positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty)$ e assim podemos usar o teste da integral:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \arctan(x)]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\arctan(t) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Logo, como a integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1}$ também é convergente.

Exemplo 25 *Para quais valores de p a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

é convergente?

Solução: Se $p < 0$, então $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = \infty$. Se $p = 0$, então $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = 1$. Em ambos os casos, tem-se $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) \neq 0$, e assim a série é divergente, pelo Teste de Divergência.

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é contínua, positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty)$. Vamos agora calcular a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$, $p > 0$. Para $p \neq 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx &= \int_1^\infty x^{-p} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p} dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^t \\
&= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left(t^{-p+1} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \\ \infty & \text{se } 0 < p < 1 \end{cases}$$

Para $p = 1$, a integral fica assim

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \infty$$

Segue do teste da integral que a série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $0 < p \leq 1$. (Observe que, se $p = 1$, esta série é a série harmônica.)

A série do exemplo acima é chamada de **série p** ou **p-série**. Assim, para referências futuras, vamos destacar este resultado.

A série p $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$.

Exemplo 26 *(a) A série*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots$$

é convergente porque ela é uma série p com $p = 3 > 1$.

b) A série

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1/3}} = \frac{1}{1^{1/3}} + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \frac{1}{4^{1/3}} + \frac{1}{5^{1/3}} + \cdots$$

é divergente por que ela é uma série p com $p = 1/3 < 1$.

Exemplo 27 *Determine se a série $\sum_{n+1}^\infty \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.*

Exercício 4 *Use o Teste da Integral para determinar se a série é convergente ou divergente.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$
7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

Exercício 5 *Dtermine os valores de p para os quais a série é convergente.*

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+1)^p$

3.2 Testes de Comparação

Nos testes de comparação, a ideia é comparar uma série dada com uma que se sabe ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \tag{3}$$

nos remere à série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, que é uma série geométrica com $a = 1/2$ e razão $r = 1/2$ sendo, portanto, convergente. Observe que a série dada é bem parecida a uma série que é convergente, temos a impressão de que essa série também é convergente, e de fato o é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$$

nos diz que a série **??** tem termos menores que os termos da série geométrica, logo todas as suas somas parciais serão menores que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma sequência crescente e limitada, logo convergente, pelo teorema da sequência monótona. Em outras palavras, a série **??** é convergente.

Argumentação semelhante pode ser usada para demosntrar o seguinte teorema, conhecido como teste de comparação, que se aplica a séries cujos termos são positivos.

Teorema 12 (Teste de Comparação) *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries com termos positivos ($a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, $\forall n$). Vale as seguintes afirmações:*

1. *Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$, para todo n, então $\sum a_n$ também é convergente.*
2. *Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$, para todo n, então $\sum a_n$ também é divergente.*

Observação 7 *Ao usarmos o teste da comparação devemos ter algumas séries conhecidas $\sum b_n$ para fazermos a comparação. Na maioria das vezes utilizaremos uma destas séries:*

- *uma série p: $\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$;*
- *uma série geométrica: $\sum ar^{n-1}$ converge de $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$.*

Exemplo 28 *Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ converge ou diverge*

Solução: Observe inicialmente que, para n suficientemente grande, o termo dominante no denominador é $2n^2$; assim vamos comparar a série dada com a série $\sum 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2n^2}$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. Por outro lado, sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente porque é uma constante multiplicada por uma série p com $p = 2 > 1$. Logo, de acordo com a parte **??** do teste da comparação, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

é convergente.

Observação 8 *Embora a condição $a_n \leq b_n$ (ou $a_n \geq b_n$), no teste da comparação, seja dada para toda n, na prática só precisamos verificar que ela vale para $n \geq n_0$, onde n_0 é algum inteiro fixo. Isto porque a convergência de uma série não é afetada por um número finito de termos.*

Exemplo 29 *Teste a convergência (ou divergência) da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.*

Solução: Comece observando que, para $n \geq 3$ tem-se $\ln n > 1$. Assim

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}, \forall n \geq 3$$

A série $\sum 1/n$ sabemos ser divergente (série harmônica); logo pela parte 2 do teste da comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

Exemplo 30 *Teste a convergência ou divergência das séries*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$

Solução: 1) Observe que

$$\frac{5}{5n-1} = \frac{1}{n - \frac{1}{5}} > \frac{1}{n}$$

Logo, pelo teste da comparação, como $\sum \frac{1}{n}$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1}$ também diverge.

2) Os termos da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

são todos positivos e menores ou iguais que os respectivos termos da série

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

Como esta última série converge pois

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3$$

segue, do teste da comparação que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge. Pode ser mostrado, na verdade, que esta série converge para e:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

3) Para a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$ é fácil notar que

$$\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n.$$

Como a série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge (série geométrica), segue do teste da comparação, que a série dada também converge.

Teste da comparação no limite

O teste a seguir é particularmente útil para séries cujos termos gerais são funções racionais.

Teorema 13 (Teste de comparação no limite) *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ série de termos positivos.*

1. *Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, então ambas as séries convergem ou divergem.*
2. *Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge.*
3. *Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.*

Prova. □

Exemplo 31 *Quais das séries a seguir convergem? E quais divergem?*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n-1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+n\ln n}{n^2+5}$

Solução: 1) Seja $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}$; para n suficientemente grande, espera-se que a_n se comporte como $\frac{2n}{n^2} = 2/n$, já que os termos principais dominam para n grande; assim tomaremos $b_n = 1/n$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2+2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2 > 0,$$

segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}$ diverge, pela parte (1) do teste de comparação no limite.

2) Seja $a_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$; para n grande espera-se que a_n se comporte como $\dfrac{1}{2^n}$, assim tomaremos $b_n = \dfrac{1}{2^n}$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ converge}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - (1/2^n)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

segue, pela parte 1 do teste de comparação no limite, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n - 1}$ converge.

3) Seja $a_n = \dfrac{1 + n \ln n}{n^2 + 5}$; para n grande, espera-se que a_n se comporte como $\dfrac{n \ln n}{n^2} = \dfrac{\ln n}{n}$; $\dfrac{\ln n}{n}$ por sua vez é maior que $\dfrac{1}{n}$ para $n \geq 3$; logo usaremos $b_n = \dfrac{1}{n}$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 \ln n}{n^2 + 5} = \infty$$

segue da parte (3) do teste de comparação no limite que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 + n \ln n}{n^2 + 5}$ diverge.

3.3 Séries Alternadas

Uma **série alternada** é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos. Por exemplo:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Veja que o enésimo termo de uma tal série é da forma $a_n = (-1)^n b_n$ ou $a_n = (-1)^{n-1} b_n$ onde b_n é um número positivo (na verdade, $b_n = |a_n|$). O próximo teste dá condições para que uma série alternada seja convergente.

Teorema 14 (Teste da série alternada) *Se a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \dots$$

onde $b_n > 0$ satisfaz

(i) $b_{n+1} \leq b_n$, *para todo n, ou seja, b_n é decrescente;*

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Exemplo 32 *A série harmônica alternada*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfaz

(i) $b_{n+1} \leq b_n$ visto que $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Logo, a série é convergente pelo Teste da série alternada.

Exemplo 33 *Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$ quanto à convergência ou divergência.*

Solução: A série é alternada; assim devemos verificar as condições (i) e (ii) do teste da série alternada. Ao contrário do exemplo anterior, não é óbvio que a sequência seja $b_n = \frac{n^2}{n^3+1}$ decrescente. Assim consideraremos a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$; sua derivada é

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

Como nos interessa apenas x positivo, vemos que $f'(x) < 0$ se $2 - x^3 < 0$, ou seja, se $x > \sqrt{3}2$. Isso significa que f é decrescente no intervalo $(\sqrt{3}2, \infty)$, logo podemos considerar que $f(n+1) < f(n)$ e, portanto, $b_{n+1} < b_n$, para $n \geq 2$.

A condição (ii) é facilmente verificada:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim \frac{1/n}{1+1/n^3} = 0.$$

Assim, a série dada é convergente.

3.4 Convergência absoluta e os testes da razão e da raiz

Dada qualquer série $\sum a_n$ podemos considerar a série correspondente de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

Definição 7 *Uma série* $\sum a_n$ *converge absolutamente se a série de valores absolutos* $\sum |a_n|$ *for convergente.*

Observação 9 *Se* $\sum a_n$ *for uma série com termos positivos, então* $|a_n| = a_n$ *e, assim, a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.*

Exemplo 34 *A série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é aboslutamente convergente porque a série dos valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma série p *convergente* $(p = 2)$.

Exemplo 35 *A série harmônica alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

é convergente, mas não é absolutamente convergente, pois a série de valores absolutso correspondentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

é a série harmônica que como sabemos é divergente.

Definição 8 *Uma série* $\sum a_n$ *é dita condicionalmente convergente se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.*

O **??** acima mostra que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente.

Teorema 15 (Teste da convergência absoluta) *Se uma série* $\sum a_n$ *for absolutamente convergente, então ela é convergente.*

Exemplo 36 *Determine se a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

Solução: Essa série tem termos positivos e negativos mas não é alternada (o primeiro termo é positivo, os próximos três são negativos e os três seguintes são positivos. Os sinais se alternam de maneira irregular). Para analisar a convergência (ou divergência) vamos considerar a série de valores absolutos e tentar o teste da comparação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Visto que $|\cos n| \leq 1$, para todo n, segue que

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \ \ \forall n$$

Como $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente (série p com $p = 2$) então $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ também é convergente (pelo teste da comparação). Assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ é absolutamente convergente e, portanto, pelo teorema **??**, ela é convergente.

O próximo teste é útil para determinar se uma série é absolutamente convergente.

Teorema 16 (Teste da razão) *Seja $\sum a_n$ uma série qualquer e suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

Temos:

(i) Se $L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(ii) Se $L > 1$ ou $L = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $L = 1$ o teste é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusãon pode ser tirada.

Observação 10 *O teste da razão é particularmente útil quando os termos de uma série contém expressões envolvendo fatoriais ou expressões elevadas a uma potência envolvendo n.*

Exemplo 37 *Investigue a convergência das séries abaixo.*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + 5}{3^n}$ *2.* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ *3.* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! + n^2}{(n+1)!}$

Solução: 1) Para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + 5}{3^n}$, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1}+5)3^n}{(2^n+5)3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{5}{2^n}}{1 + \frac{5}{2^n}} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Logo, pelo teste da razão, a série converge pois $L = 2/3$ é menor que 1. A título de informação, 2/3 não é a soma da série. Veja que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{1-(2/3)} + \frac{5}{1-(1/3)} \\
&= \frac{21}{2}
\end{aligned}$$

2) Para a série de termo geral $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ temos $a_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n!(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!(n+1)n!(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1}{(n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{n+1} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Pelo teste da razão, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ diverge pois o limite $L = 4$ é maior do que 1.

3) Para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! + n^2}{(n+1)!}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!+(n+1)^2}{(n+2)!}}{\dfrac{n!+n^2}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!+(n+1)^2}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!+n^2} \\
&= \frac{(n+1)!+(n+1)^2}{(n+2)(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n!+n^2} = \frac{(n+1)!+(n+1)^2}{(n+2)(n!+n^2)} \\
&= \frac{(n+1)n!+(n+1)^2}{(n+2)(n!+n^2)} = \frac{(n+1)(n!+(n+1))}{(n+2)(n!+n^2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n!+(n+1)}{n!+n^2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \cdot \frac{1+\frac{n+1}{n!}}{1+\frac{n}{(n-1)!}}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

e, portanto, o teste da razão é inconclusivo. A série poderá ser convergente ou não. Vejamos o que realmente acontece:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n! + n^2}{(n+1)!} = \frac{n! + n^2}{n!(n+1)} \\
&= \frac{1 + \frac{n^2}{n!}}{n+1} = \frac{1 + \frac{n}{(n-1)!}}{n+1} \\
&= \frac{1 + \frac{n}{(n-1)!}}{n\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{n}{(n-1)!}}{\frac{n+1}{n}}
\end{aligned}$$

Podemos então usar o teste de comparação no limite com $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{n}{(n-1)!}}{\frac{n+1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1 + \frac{n}{(n-1)!}}{\frac{n+1}{n}}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{n}{(n-1)!}}{\frac{n+1}{n}} = 1$$

e a série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, segue, do teste de comparação no limite, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! + n^2}{(n+1)!}$ também diverge.

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando ocorrem potências enésimas.

Teorema 17 (Teste da raiz) *Seja $\sum a_n$ uma série qualquer. Temos:*

(i) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o teste da raiz é inconclusivo.

Exemplo 38 *Teste a convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n .$$

Solução:

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

e

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}}$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1.$$

Portanto, pelo teste da raiz, a série dada é convergente.

Exemplo 39 *Teste a convergância da série* $\sum a_n$*, onde*

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \\ \frac{1}{2^n}, & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}$$

Solução: Aplicando o teste da raiz vemos que

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{n}}{2}, & \text{se } n \textit{ é ímpar} \\ \frac{1}{2}, & \text{se } n \textit{ é par} \end{cases}$$

Portanto

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, segue do teorema do confronto que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$. Como o limite é menor do que 1, pelo teste da raiz, a série converge.

Exercícios

Séries

1. Seja $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
   (a) Determine se a sequência (a_n) é convergente.
   (b) Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

2. Determine se a série geométrica é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.
   (a) $3 + 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \cdots$
   (b) $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$
   (c) $10 - 2 + 0,4 - 0,08 + \cdots$
   (d) $1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + \cdots$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

3. Determine se a série converge ou diverge.
   (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \cdots$
   (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$
   (c) $\sum n = 1^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

4. Seja $x = 0,9999\ldots$ (dízima periódica).
   (a) Responda o que você pensa: $x < 1$ ou $x = 1$?
   (b) Some uma série geométrica para encontrar o valor de x.

5. Sabendo que a enésima soma parcial de uma série $\sum a_n$ é
$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$
   encontre a_n e $\sum a_n$.

6. Se a enésima soma parcial de $\sum a_n$ é $s_n = 3 - n2^{-n}$, encotre a_n e $\sum a_n$.

7. Determine o valor de $c > 0$ sabendo que
$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2.$$

Teste da integral

8. Use o teste da integral para determinar se a série é convergente ou divergente (não esqueça de verificar as condições do teste!).

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$
   (f) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$
   (g) $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$
   (h) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+6n+13}$
   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$
   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$
   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$
   (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$
   (n) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$
   (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$
   (p) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$
   (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$
   (r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

9. Determine os valores de p para os quais a série é convergente.

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+1)^p$

Teste da comparação

10. Utilize um teste de comparação para determinar se a série converge ou diverge.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n-2}$
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$
   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$
   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$
   (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Séries alternadas

11. Teste a série alternada quanto a convergência ou divergência.

   (a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \cdots$
   (b) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$
   (c) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3n-1}{2n+1}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{10^n}}$
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

12. Para que valores de p a série alternada abaixo é convergente?

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$
   (c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

Testes da razão e da raiz

13. Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

    (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

    (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$

    (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

    (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

    (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

    (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

    (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. Os termos de uma série são definidos de forma recursiva pelas equações

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n.$$

Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

15. Seja (b_n) uma sequência de números positivos que converge para $\frac{1}{2}$. Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^n \cos(n\pi)}{n}$ é absolutamente convergente.

16. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo x.

17. Determine os valores de k para os quais a série abaixo é convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

4 Séries de potências

Uma série de potências é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

onde x é uma variável e as constantes $c_0, c_1, c_2, \cdots$ são chamadas de coeficientes da série. Para cada x fixado, a série se torna uma série como as que vimos estudando até agora e podemos estudá-la quanto a sua convergência ou divergência. Uma série de potências pode convergir para alguns valores de x e divergir para outros.

Definição 9 *Uma série de potências centrada em $x = 0$ é uma série da forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_x^n + \cdots$$

Uma série de potências centrada em $x = a$ (ou em torno de a) é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

Observe que quando $x = a$ (ou $x = 0$) a série de potências se reduz a $c_0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$ e é claramente convegente.

Em geral, uma série de potências define uma função $f(x)$ em um certo intervalo onde ela é convergente. Essa função é chamada soma da série.

Exemplo 40 *A série geométrica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$

converge para $|x| < 1$ *(ou seja,* $-1 < x < 1$*) e diverge para* $|x| \geq 1$ *(ou seja,* $x \leq -1$ *ou* $x \geq 1$*).*

Exemplo 41 *Para quais valores de* x *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ *é convergente?*

Solução: Utilizaremos o teste da razão. Tomando $a_n = n!x^n$, para $x \neq 0$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

Pelo teste da razão, a série diverge para $x \neq 0$. Logo, a série de potências converge somente quando $x = 0$.

Exemplo 42 *Para quais valores de* x *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ *converge?*

Solução: Seja $a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$. Então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}}\right| \\
&= \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right| \\
&= |x-3|\frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x-3|\frac{n}{n+1} = |x-3|$$

Pelo teste da razão, a série dada é absolutamente convergente e, portanto convergente, quando $|x-3| < 1$ e é divergente quando $|x-3| \geq 1$. Mas

$$|x-3| < 1 \Longleftrightarrow -1 < x-3 < 1 \Longleftrightarrow 2 < x < 4$$

de modo que a série é convergente para $2 < x < 4$ e divergente para $x < 2$ ou $x > 4$.

O teste da razão não fornece informação quando $|x-3| = 1$; assim devemos considerar $x = 2$ e $x = 4$ separadamente. Para $x = 4$, a série se torna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que é a série harmônica que sabemos ser divergente; para $x = 2$, a série fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

a qual é convergente, pelo teste da sérire alternada. Concluimos então que a série dada converge para $2 \leq x < 4$.

Exemplo 43 *Determine para quais valores de x a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

é convergente.

Solução: Seja $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$. Então

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}} \right| \\
&= \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2 (n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}} \right| \\
&= \frac{x^2}{4(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{4(n+1)^2} = 0 < 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, pelo teste da razão, a série dada é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 18 (Convergência para séries de potências) *Existem apenas três possibilidades para a convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n$:*

(i) A série converge apenas quando $x = a$;

(ii) A série converge para todo x;

(iii) Existe um número real positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

O número R no teorema acima é chamado de **raio de convergência** da série de potências. Por convenção o raio de convergência será $R = 0$ no caso (i) e $R = \infty$ no caso (ii). O **intervalo de convergência** de uma série de potências é aquele que consiste de todos os valores de x para os quais a série converge. No caso (i) o intervalo consiste em apenas um único ponto a. No caso (ii) o intervalo é $(-\infty, \infty)$. No caso (iii) observe que a desigualdade $|x-a| < R$ é equivalente a $-R < x-a < R$ que por sua vez é equivalente a $a-R < x < a+R$. Quando x é uma extremidade do intervalo, isto é, $x = a \pm R$, qualquer coisa pode acontecer - a série pode convergir em uma ou ambas as estremidades ou divergir em ambas as extremidades. Assim, no caso (iii) existem quatro possibilidades para o intervalo de convergência:

$$(a-R, a+R) \qquad (a-R, a+R] \qquad [a-R, a+r) \qquad [a-R, a+R]$$

Para os exemplos anteriores temos:

Série	Raio de convergência	Intervalo de convergência
$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$	$R=1$	$(-1,1)$
$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$	$R=0$	$\{0\}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R=1$	$[2,4)$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R=\infty$	$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$

Observação 11 *Em geral, utilizamos o teste da razão (ou o teste da raiz) para determinar o raio de convergência R da série. Nas extremidades (finitas) do intervalo, ou seja para $x=a-R$ ou $x=a+R$, os testes da razão ou da raiz são inconclusivos, logo deve-se utilizar outro teste (integral, comparação ou teste da série alternada) para estudar a convergência/divergência nas extremidades.*

Exemplo 44 *Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

Solução: Seja $a_n = \dfrac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$. Então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| \\
&= \left|-3x\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right| \\
&= \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right| \\
&= 3|x|\sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 3|x|\sqrt{\frac{1+1/n}{1+2/n}} = 3|x|$$

Pelo teste da razão, a série é absolutamente convergente (e, portanto convergente) se $3|x| < 1$ e diverge se $3|x| > 1$. Logo, ela converge se $|x| < \frac{1}{3}$ e diverge se $|x| > \frac{1}{3}$. Isso significa que o raio de convergência é $R = \frac{1}{3}$. Assim, a série converge no intervalo $(-1/3, 1/3)$. Devemos agora testar a convergência nas extremidades desse intervalo. Se $x = -1/3$, a série se torna

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(-1/3)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

a qual é divergente pois é uma série p com $p = \frac{1}{2} < 1$.

Se $x = \frac{1}{3}$ a série fica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(1/3)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

que, pelo teste da série alternada, é convergente. Assim, o intervalo de convergência da série de potências dada será o intervalo $(-1/3, 1/3]$.

Exemplo 45 *Determine o raio de concergência e o intervalo de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Solução: Seja $a_n = \dfrac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$. Então

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right| \\ &= \frac{n+1}{n}\frac{|x+2|}{3} \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{|x+2|}{3} = \frac{|x+2|}{3}$$

Pelo teste da razão, segue que a série será convergente quando $\frac{|x+2|}{3} < 1$ e divergente quando $\frac{|x+2|}{3} > 1$. Assim, a série converge se $|x+2| < 3$ e diverge se $|x+2| > 3$. Asism, o raio de convergência será $R = 3$.

A desigualdade $|x+2| < 3$ é equivalente a $-3 < x+2 < 3$ que por sua vez é equivalente a $-5 < x < 1$. Agora devemos então testar a série nas extremidades -5 e 1 do intervalo. Quando $x = 1$, a série fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n$$

que é claramente divergente pois $\sum_{n=1}^{\infty} n$ é divergente. Quando $x = -5$, a série fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$$

que é divergente pois seu termo geral $(-1)^n n$ não converge para 0.

4.1 Exercícios

1. O que é uma série de potências?

2. (a) O que é o raio de convergência de uma série de potências? Como você pode determiná-lo?

   (b) O que é o intervalo de convergência de uma série de potências? Como você pode determiná-lo?

3. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convegência das séries.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2 x^n}{2^n}$

   (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{n^3}$

   (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^n}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x-3)^n}{2n+1}$

   (j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

   (k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}(x+1)^n$

   (l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-4)^n}{n^3}$

   (m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$

   (n) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n!}$

   (o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^3 3^n}$

4. Verdadeiro ou falso? Justifique!
   Sabendo que a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ é convergente pode-se dizer que que:

   (a) a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ é convergente.

   (b) a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$ é convergente.

5. Sendo k um inteiro positivo, determine o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^k x^n}{(kn)!}$$

6. Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

7. Determine o intervalo de convergência da série e, dentro desse intervalo, encontre a soma da série como uma função de x.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^x-4)^n$

4.2 Representação de funções em séries de potências

Veremos agora como representar funções em séries de potências; para isso utilizaremos a manipulação de séries geométricas ou pela derivação e integração de tais séries. Mas, por quê representar uma função como uma soma infinita de termos? Este tipo de procedimento, como veremos nos exemplos, será útil para integrar funções que não tem primitivas elementares, para resolver equações diferenciais e, principalmente, para aproximar funções por polinômios (cientistas fazem isso para simplificar expressões que eles utilizam; cientistas que trabalham com computadores fazem isso para representar as funções em suas calculadoras e computadores).

Vejamos um exemplo para ilustrar o que estamos dizendo. Considere a equação:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \ |x|<1 \tag{4}$$

Esta equação é a mesma que encontramos no exemplo **??** da seção anterior, sendo que ela foi obtida observando que ela é uma série geométrica com $a=1$ e $r=x$. Mas, agora nosso ponto de vista é diferente: vamos nos referir à equação **??** como uma expressão da função $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

como uma soma de uma série de potências.

Assim, veja que como a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais, temos

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

onde $s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ é a n-ésima soma parcial. Observe que a medida que n aumenta $s_n(x)$ se torna uma aproximação cada vez melhor de $f(x)$ para $-1 < x < 1$.

Exemplo 46 *Expresse* $\dfrac{1}{1+x^2}$ *como a soma de uma série de potências e encontre o intervalo de convergência.*

Solução: Trocando x por $-x^2$ na equação **??**, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \\
&= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots
\end{aligned}$$

Como essa é uma série geométrica, com $a = 1$ e $r = -x^2$, ela converge quando $|-x^2| < 1$, isto é, $|x^2| < 1$, ou $|x| < 1$. Portanto o intervalo de convergência é $(-1, 1)$

Em geral, dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ podemos substituir x por $f(x)$, de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 19 *Se* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *converge absolutamente para* $|x| < R$*, então a série* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (f(x))^n$ *converge absolutamente para qualquer função contínua* f *em* $|f(x)| < R$*.*

Exemplo 47 *Encontre uma representação em série de potências para a função* $\dfrac{1}{x+2}$

Solução: A idéia é colocar essa função na forma do lado esquerdo da equação **??**:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{1}{2(1-(-\frac{x}{2}))} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}\right)$$

Agora substituímos x por $-\frac{x}{2}$ na equação **??** obtendo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n
\end{aligned}$$

Esta série converge quando $\left|\frac{-x}{2}\right| < 1$, isto é, para $|x| < 2$. Logo o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

Exemplo 48 *Encontre uma representação em série de potências para a função* $\dfrac{x^3}{x+2}$

Solução: Veja que essa função é a função $\frac{1}{2+x}$ multiplicada por x^3. Assim, tudo o que precisamos fazer é multiplicar a série obtida no exemploa anterior por x^3:

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{x+2} &= x^3 \cdot \frac{1}{x+2} \\ &= x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3} \\ &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{16}x^6 + \cdots\end{aligned}$$

Esta série ainda pode ser escrita na forma:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n$$

Como no exemplo anterior o intervalo de convergência é $(-2, 2)$.

4.2.1 Derivação e integração de séries de potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Um teorema do Cálculo Avançado diz que podemos derivar ou integrar termo a termo uma série, como faríamos com um polinômio, para obter a derivada ou a integral de $f(x)$.

Teorema 20 (Derivação termo a termo) *Se a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *possui um raio de convergência* $R > 0$, *então a função definida no intervalo* $(a - R, a + R)$ *por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

possui derivadas de todas as ordens dentro desse intervalo, e as derivadas são obtidas através da derivação da série termo a termo:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

e assim por diante. Cada uma dessas séries converge em todo ponto do intervalo $(a - R, a + R)$.

Exemplo 49 *Encontre a série para $f'(x)$ e $f"(x)$ sendo*

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1$$

Solução: Derivando a série de potências termo a termo obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

Da mesma forma, também é verdade que uma série de potências pode ser integrada termo a termo ao longo de todo o seu intervalo de convergência.

Teorema 21 (Integração termo a termo) *Suponha que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

é convergente para cada x no intervalo $(a-R, a+R)$ $(R > 0)$. Então

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \cdots \\ &= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Observação 12 *No cálculo da integral acima $\int c_0 dx = c_0 x + C_1$, é escrito como $c_0(x-a) + C$, onde $C = C_1 + ac_0$; assim todos os termos da série terão a mesam forma.*

Exemplo 50 *Encontre uma representação em série de potências para a função $\ln(1+x)$ e determine seu raio de convergência.*

Solução: Primeiro, observamos que a derivada dessa função é igual a $\dfrac{1}{1+x}$, logo

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}dx$$

Da equação **??** segue que:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad |x| < 1.$$

Integrando ambos os lados da equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int \frac{1}{1+x}dx = \int (1-x+x^2-x^3+\cdots)dx \\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+C \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+C, \ \ |x|<1\end{aligned}$$

Para determinarmos o valor de C, fazemos $x=0$ nessa equação e obtemos $\ln(1+0)=C$; logo $C=\ln(1)=0$e, portanto

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \ \ |x|<1$$

Pode-se também mostrar que a série é convergente quando $x=1$; assim tem-se que

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

O raio de convergência é o mesmo que o da série original: $R=1$.

4.3 Séries de Taylor e Maclaurin

Na seção anteriro conseguimos representar algumas funções em séries de potências. Agora investigaremos questões mais gerais: quais funções podem ser representadas em séries de potências? Como determinar tais representações?

Começamos supondo que f seja qualquer função que possa ser representada por uma série de potências, digamos

$$f(x) = c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+c_4(x-a)^4+\cdots, \ \ |x-a|<R \qquad (5)$$

A partir daí, vamos tentar determinar os coeficientes $c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots$ em termos da função f.

Observe que, se colocarmos $x=a$ na equação **??**, então todos os termos após o primeiro serão anulados e obteremos

$$f(a)=c_0$$

Pelo teorema da derivação termo a termo, podemos derivar a série na equação **??** obtendo

$$f'(x) = c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+4c_4(x-a)^3+\cdots, \ \ |x-a|<R \qquad (6)$$

e substituindo $x=a$ na equação **??** obtemos

$$f'(a)=c_1$$

Derivando ambos os lados da equação **??** obtemos

$$f''(x) = 2c_2+2\cdot 3c_3(x-a)+3\cdot 4c_4(x-a)^2+\cdots, \ \ |x-a|<R \qquad (7)$$

Novamente substituindo $x = a$ na equação, obtemos

$$f''(a) = 2c_2$$

e portanto

$$c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

Aplicando o procedimento mais uma vez: a derivação da série na equação **??** nos fornece

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5(x-a)^2 + \cdots, \quad |x-a| < R \tag{8}$$

e a susbtituição de $x = a$ na equação **??** nos dá

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

e portanto

$$c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

Veja que um padrão parece ter se estabelecido. Se continuarmos a derivar e susbtituir $x = a$, obteremos

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

e daí segue que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Observação 13 *A expressão $f^{(n)}$ na fórmula acima representa a derivada de ordem n da função f. Essa fórmula é válida mesmo para $n = 0$ desde que adotemos as convenções de que $0! = 1$ e $f^{(0)} = f$.*

Fica assim demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 22 *Se uma função f pode ser representada em série de potências em torno de a, isto é, se*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Substiuindo essa fórmula de c_n de volta na série vemos que, se f tiver uma representação em séries de potências em torno de a, então ela deve ter a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (9) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

Mas se começarmos com uma função arbitrária f que seja infinitamente derivável em um intervalo I contendo a e gerarmos a série na equação **??**, será que a série convergirá para $f(x)$

para cada x no interior do intervalo I? A resposta é talvez - para algumas funções, isso ocorrerá, para outras funções, não.

A série apresentada na equação **??** é a mais importante que vamos estudar.

Definição 10 *Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo a como um ponto interior. Então a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

*é chamada **série de Taylor da função f em torno de** a (ou **centrada em** a).*

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

*obtida da série de Taylor fazendo $a = 0$ é chamada **série de Maclaurin da função f**.*

Exemplo 51 *Encontre a série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{x}$ em $a = 2$. Verifique também se, em algum intervalo contendo 2, a série converge para a função $f(x)$.*

Solução: Para obter a série de Taylor de f em $a = 2$ precisamos encontrar $f(2), f'(2), f''(2), \ldots$. As derivadas sucessivas de $f(x)$ são dadas por:

$$f(x) = x^{-1}, f'(x) = -x^{-2}, f''(x) = 2x^{-3}, f'''(x) = -2{\cdot}3\,x^{-4}, f^{(4)}(x) = 2{\cdot}3{\cdot}4\,x^{-5}, \cdots, f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,x^{-(n+1)},$$

de modo que

$$f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, f'(2) = -\frac{1}{2^2}, f''(2) = 2!\frac{1}{2^3}, \cdots, f^{(n)}(2) = (-1)^n n! \frac{1}{2^{n+1}}$$

Assim, a série de Taylor será dada por:

$$\begin{aligned} & f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2!}f''(2)(x-2)^2 - \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(2)(x-2)^n + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-2) + \frac{1}{2!}2!\frac{1}{2^3}(x-2)^2 - \cdots + \frac{1}{n!}(-1)^n n! \frac{1}{2^{n+1}}(x-2)^n + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (x-2)^n \end{aligned}$$

Esta é uma série geométrica com primeiro termo igual a $\frac{1}{2}$ e razão $r = -\frac{x-2}{2}$. Esta série converge absolutamente para $\frac{|x-2|}{2} < 1$, ou seja $|x-2| < 2$ e, neste intervalo sua soma é dada por

$$\frac{1/2}{1 - (-\frac{x-2}{2})} = \frac{1/2}{1 + \frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x}$$

Logo, a série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{x}$ em torno de $a = 2$ converge para $f(x)$ para $|x-2| < 2$ ou seja no intervalo $0 < x < 4$. □

Exemplo 52 *Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência.*

Solução: Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo n. Logo $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, para todo n. Portanto, a série de Maclaurin de f (isto é a série de Taylor de f em torno de $a = 0$) é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para determinar o raio de convergência vamos usar o teste da razão; fazendo $a_n = \frac{x^n}{n!}$ temos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, segue do teste da razão que a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, o raio de convergência da mesma é $R = \infty$. $\square$

Exemplo 53 *Encontre a série de Taylor de $f(x) = \cos x$ em $x = 0$ e o raio de convergência da mesma.*

Solução: As derivadas sucessivas de $f(x) = \cos x$ são

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos x & f'(x) = -\operatorname{sen} x \\
f''(x) = -\cos x & f'''(x) = \operatorname{sen} x \\
\vdots & \vdots \\
f^{(2n)} = (-1)^n \cos x & f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \operatorname{sen} x
\end{array}$$

Em $x = 0$, os cossenos são iguais a 1 os senos são iguais a 0, portanto $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ e $f^{(2n+1)}(0) = 0$. A série de Taylor de f em 0 será dada por

$$\begin{aligned}
f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\
= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Para determinar o raio de convergência vamos, novamente, utilizar o teste da razão; fazendo $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ temos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}} \right| = \left| \frac{-x^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

Veja que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R};$$

logo pelo teste da razão, segue que a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observe que apenas potências pares de x ocorrem na série de Taylor da função cosseno e isso é consistente com o fato de que se trata de uma função par. Veremos mais adiante que essa série converge para $\cos x$ para todo x.

Observação 14 *A conclusão que podemos tirar dos exemplos* **??** *e* **??** *é que se as funções e^x e $\cos x$ tiverem uma expansão em série de potências em torno de $a = 0$, então deveremos ter*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

A questão que surge então é: como determinar se e^x (ou $\cos x$) tem uma representação em série de potências?

Para responder essa questão investigaremos ums situação mais geral: sob que circunstâncias uma função coincide com sua série de Taylor? Em outras palavras, se a função f tiver derivadas de todas as ordens, quando é verdade que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \,?$$

Como qualquer série convergente, isso significa que $f(x)$ é o limite da sequência das somas parciais da série. No caso da série de Taylor, as somas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Observe que $T_n(x)$ é um polinômio de grau n; este polinômio é chamado **polinômio de Taylor de ordem n de f em a.**

Exemplo 54 *Para a função $f(x) = e^x$, os polinômios de Taylor de ordem 1, 2 e 3 são dados por:*

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 1 + x \\ T_2(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \\ T_3(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

Exemplo 55 *Para a função $f(x) = \cos x$, os polinômios de taylor de ordem 1, 2 e 3 são dados por:*

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 1 \\ T_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} \\ T_3(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} \end{aligned}$$

A convergência da série de Taylor

Em geral, $f(x)$ coicncide com sua série de Taylor se

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Para cada n, seja $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ de modo que $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Assim, dizemos que $R_n(x)$ é o resto da série de Taylor. Se pudermos, de alguma forma, mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, teremos mostrado que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - R_n(x)) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n = f(x)$$

Este fato será resumido no seguinte teorema:

Teorema 23 *Se $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a e*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

então f coicncide com sua série de Taylor no intervalo de convergência da mesma (digamos para $|x-a| < R$.)

Na prática, ao tentarmos mostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para uma função específica f, geralmente utilizamos o seguinte:

Teorema 24 (Desigualdade de Taylor) *Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, para algum núemero positivo d, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor de f satisfaz a desigualdade*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \quad \textit{para } |x-a| \leq d.$$

Ao aplicar os teoremas **??** e **??**, muitas vezes será útil o fato a seguir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \qquad \text{para todo número real } x \tag{10}$$

Esse fato é verdade, pois a série $\sum \frac{x^n}{n!}$ é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, logo seu termo geral deve tender a zero.

Exemplo 56 *Vamos mostrar que e^x é igual à soma de sua série de Maclaurin.*

Solução: Primeiro observamos novamente que se $f(x) = e^x$, então $f^{(n+1)}(x) = e^x$, para todo n. Se d é qualquer número real positivo e $|x| \leq d$, então $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leq e^d$. Assim, a desigualdade de Taylor com $A = 0$ e $M = e^d$, diz que

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1}, \qquad \text{para } |x| \leq d$$

Pela equação **??** temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Segue do teorema do confronto que

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para cada valor de x. Segue do teorema **??** que e^x coincide com a soma de sua série de Maclaurin, isto é,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \tag{11}$$

Em particular se colocarmos $x = 1$ na equação **??**, obteremos a seguinte expressão para o número e como a soma de uma série infinita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Exemplo 57 *Mostre que* $\cos x$ *é igual à soma de sua série de Maclaurin.*

Solução: Primeiro observamos que para $f(x) = \cos x$, então $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm\cos x$ ou $\pm\operatorname{sen} x$, e como $|\cos x| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, vamos tomar $M = 1$ na desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \tag{12}$$

Pela equação **??**, o lado direito dessa desigualdade tende a 0, quando $n \to \infty$; dessa forma, pelo teorema do Confronto, $|R_n(x)| \to 0$. Segue que $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ e assim, pelo teorema **??**, podemos concluir que $\cos x$'é igual à soma de sua série de Maclaurin, ou seja

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} \tag{13}$$

Exemplo 58 *Mostre que a série de Taylor para* $\operatorname{sen} x$ *em* $x = 0$ *converge para todo* x.

Solução: A função $f(x)$ e suas derivadas são:

$$\begin{array}{lcllcl} f(x) & = & \operatorname{sen} x & f'(x) & = & \cos x \\ f''(x) & = & -\operatorname{sen} x & f'''(x) & = & -\cos x \\ & \vdots & & & \vdots & \\ f^{(2n)}(x) & = & (-1)^n \operatorname{sen} x & f^{(2n+1)}(x) & = & (-1)^n \cos x \end{array}$$

Logo,

$$f^{(2n)}(0) = 0 \text{ e } f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n.$$

A série terá portanto somente termos de ordem ímpar e será dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{14}$$

Vamos verificar agora que, para todo $x \in\ R$, essa série converge para a própria função $\operatorname{sen} x$. Como $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, segue então que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$, para todo x e para todo n. Tomamos então $M = 1$ na desigualdade de Taylor:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \tag{15}$$

Como $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$, quando $n \to \infty$, segue do teorema do confronto, quw $|R_n(x)| \to 0$ e, portanto $R_n)()(x) \to 0$, quando $n \to \infty$. Concluímos a partir do teorema **??** que a série **??** converge para a função $\operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 59 *Encontre a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em torno de $a = 2$.*

Solução: Devemos agora calcular as derivadas sucessivas de $f(x)$ no ponto $a = 2$; como $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo n, então $f^{(n)}(2) = e^2$, para todo n. Assim, utilizando a equação **??** com $a = 2$ obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Pode ser verificado, como no exemplo **??**, que o raio de convergência dessa série é $R = \infty$ e que a mesma converge para e^x, para todo x, ou seja,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Utilizando a série de Taylor

Como a série de Taylor é uma série de potências, as operações de adição, subtração e multiplicação das séries de Taylor são todas válidas desde que respeite-se os intervalos de convergência dessas séries. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 60 *Utilizando séries conhecidas encontre as séries de Taylor em $a = 0$ para a função dada:*

1. $f(x) = x \cos x$
2. $f(x) = \frac{1}{3}(2x + x\ cosx)$
3. $f(x) = e^x \cos x$
4. $f(x) = \cos(2x)$

Solução:

1) $f(x) = x\cos x$. Em vez de calcular derivadas e substituir na equação **??**, é mais fácil multiplicar a série para $\cos x$ por x:

$$\begin{aligned} x\cos x &= x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} \end{aligned}$$

2) $f(x) = \frac{1}{3}(2x + x\ cosx)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2x + x\ cosx) &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\cos x \\ &= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!} \\ &= \frac{2}{3}x + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3(2n)!} \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} e^x\cos x &= (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots)\cdot(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots) \\ &= (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots) \\ &- (\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{2!2!} + \frac{x^5}{2!3!} + \cdots) + (\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^6}{2!4!} + \frac{x^7}{3!4!} + \cdots) + \cdots \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots \end{aligned}$$

4) Para obter a séire de Taylor de $f(x) = \cos(2x)$ vamos utilizar o teorema **??** e substituir x por $2x$ na expressão da série de Taylor de $\cos x$:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Exemplo 61 *Mostre que a série de Maclaurin da função $f(x) = (1+x)^k$, onde k é qualquer número real, é dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

e que o raio de convergência dessa série é $R = 1$.

Esta série é chamada série binomial; a notação tradicional para os coefcientes da série binomial é

$$\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

e estes números são chamados números binomiais (ou coeficientes binomiais). Assim

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} x^n, \quad |x| < 1.$$

Exemplo 62 *Encontre a série de Maclaurin da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ e seu raio de convergência.*

Solução: Vamos manipular a função f de modo a podermos utilizar a série binomial do exemplo **??**.

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{\left(1-\frac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Usando a série binomial com $k = -1/2$ e substiuindo x por $-x/4$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{4-x}} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix}\left(\frac{-x}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{-x}{4}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(\frac{-x}{4}\right)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(\frac{-x}{4}\right)^3\right. \\
&+ \left.\cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(\frac{-x}{4}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1\cdot 3}{2!8}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!8^n}x^n\right]
\end{aligned}$$

Esta série converge quando $|-x/4| < 1$, ou seja, para $|x| < 4$, de modo que o raio de convergência é $R = 4$.

A tabela a seguir lista algumas das séries de Maclaurin que foram deduzidas até aqui.

$\frac{1}{1-x}$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$=$	$1+x+x^2+x^3+\cdots$	R =1
e^x	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$=$	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots$	$R=\infty$
$\operatorname{sen} x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$=$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots$	$R=\infty$
$\cos x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$=$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots$	$R=\infty$
$arctgx$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$=$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\cdots$	$R=1$
$\ln(1+x)$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$=$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots$	$R=1$
$(1+x)^k$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c}k\\n\end{array}\right)x^n$	$=$	$1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\cdots$	$R=1$

Tabela 1: Séries importantes

Exemplo 63 *Calcule a soma da série*

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$$

Solução: Usando a notação de somatório podemos escrever a série dada como:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n}$$

Observe que, de acordo com a tabela **??**, a série acima corresponde à função $f(x)=\ln(1+x)$ com $x=\frac{1}{2}$. Logo,

$$\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots=\ln(1+1/2)=\ln\frac{3}{2}.$$

Exemplo 64 *Calcule* $\int e^{-x^2}dx$

Solução: Primeiro encontramos a série de Maclaurin de $f(x)=e^{-x^2}$. Ao invés de usar o método direto, vamos econtrá-la simplesmente trocando x por $-x^2$ na série de Maclaurin de e^x dada na tabela **??**. Então, para cada valor de x, temos

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots$$

Agora, integrando termo a termo, obtemos:

$$\begin{aligned}\int e^{-x^2}dx &= \int\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots\right)dx\\ &= C+x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}+C\end{aligned}$$

Essa série é convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, pois a série original para e^{-x^2} é convergente para todo x.

Aproximando funções por polinômios

Suponha que $f(x)$ seja igual à soma de sua série de Taylor em a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Lembre que o polinômio de Taylor de ordem n de f em a é dado por:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Como $f(x)$ é a soma de sua série de Taylor, então $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$ e assim T_n pode ser usado para aproximar f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Veremos na sequência algumas aplicações usando aproximações. Quando usamos um polinômio de Taylor T_n para aproximar uma função f, devemos fazer as seguintes perguntas: Quão boa é a aproximação? Quão grande devemos deixar n para obter a precisão desejada? Para responder tais perguntas precisamos olhar para o valor abolsuto do resto

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|.$$

Existem alguns métodos possíveis para estimar o tamanho do erro:

1. Se uma ferramenta gráfica estiver disponível (por exemplo, GeoGebra), podemos usá-la para traçar $|R(x)|$ e assim estimar o erro.
2. Podemos usar a Desigualdade de Taylor (teorema **??**), que diz que, se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, então

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

3. Se a série for uma série alternada, podemos usar o teorema a seguir, chamado Teorema de estimativa de Séries Alternadas.

Teorema 25 *Se $S = \sum(-1)^n b_n$ for a soma de uma série alternada que satisfaz*

(i) $b_{n+1} \leq b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

então, $|R_n| = |S - s_n| \leq b_{n+1}$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 65 *Calcule $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ com precisão de 0,001.*

Solução: Segue do exemplo **??** e do Teorema Fundamental do Cálculo que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2} dx &= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \cdots \right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + \cdots \\
&\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,7475
\end{aligned}$$

Como a soma acima é alternada, pelo teorema **??** (Teorema da estimativa da série alternada) o erro cometido nessa aproximação é menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0,001$$

Exemplo 66

1. *Aproxime a função* $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *por um polinômio de Taylor de de ordem* 2 *em* $a = 8$.
2. *Qual a precisão dessa aproximação quando* $7 \leq x \leq 9$*?*

Solução:
1. As derivadas sucessivas de f em $a = 8$ são:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} && f(8) = 2 \\
&f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} && f'(8) = \tfrac{1}{12} \\
&f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} && f''(8) = -\tfrac{1}{144} \\
&f'''(x) = \tfrac{10}{27}x^{-8/3} &&
\end{aligned}$$

Assim, o poinômio de Taylor de ordem 2 é dado por

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\
&= 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2
\end{aligned}$$

A aproximação desejada é

$$\sqrt[3]{x} \approx 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$$

2. Como a série não é alternada não podemos usar o teorema **??**. Vamos utilizar então a desigualdade de Taylor (teorema **??**) com $n = 2$ e $a = 8$:

$$|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

onde $|f'''(x)| \leq M$. Como $x \geq 7$, temos $x^{8/3} \geq 7^{8/3}$ e, portanto,

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leq \frac{10}{27} \frac{1}{7^{8/3}} < 0,0021$$

Assim, podemos tomar $M = 0,0021$. Além disso, como $7 \leq x \leq 9$, segue que $-1 \leq x - 8 \leq 1$, ou seja, $|x - 8| \leq 1$. Então, segue da desigualdade de Taylor, que

$$|R_2(x)| \leq \frac{0,0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0,0021}{6} < 0,0004$$

Log, se $7 \leq x \leq 9$, a aproximação na parte (1) tem precisão de $0,0004$.

Exemplo 67 *Qual é o erro máximo possível ao usar a aproximação*

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

quando $-0,3 \leq x \leq 0,3$*? Use essa aproximação para encontrar* $\operatorname{sen} 12^o$ *com precisão de seis casas decimais.*

Solução: Observe que a série de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

é alternada para todos os valores de x diferentes de zero e os termos sucessivos são decrescentes pois $|x| < 1$; assim, podemos utilizar o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas (teorema **??**). O erro na aproximação de $\operatorname{sen} x$ pelos três primeiros termos de sua série de Maclaurin é de no máximo

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5040}$$

Sendo $-0,3 \leq x \leq 0,3$, ou seja, $|x| < 0,3$, então o erro será menor que

$$\frac{(0,3)^7}{5040} \approx 4,3 \times 10^{-8}$$

Para encontrarmos $\operatorname{sen} 12^o$, primeiro convertemos para radianos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 12^o &= \operatorname{sen} \frac{12\pi}{180} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right) \\ &\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \\ &\approx 0,20791169 \end{aligned}$$

Logo, com precisão de seis casas decimais, $\operatorname{sen} 12^o \approx 0,207912$.

Exemplo 68 *Para quais valores de* x *a aproximação de* $\operatorname{sen} x$ *por* $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ *tem precisão de 0,00005?*

Solução: O erro será menor que $0,00005$ se

$$\frac{|x|^7}{5040} < 0,00005$$

Resolvendo essa inequação para x, temos

$$|x|^7 < 0,252 \quad \text{ou} \quad |x| < (0,252)^{1/7} \approx 0,821$$

Assim, a aproximação dada tem precisão de 0,00005 quando $|x| < 0,82$

4.4 Exercícios

1. Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ escreva uma fórmula adequada para o coeficiente b_8.

2. Se $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, encontre a série de Maclaurin de f e seu raio de convergência.

3. Encontre a série de Taylor de f centrada em 4 sabendo que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

   Qual o raio de convergência da série?

4. Encontre a série de Maclaurin de $f(x)$ a partir da definição de uma série de Maclaurin. Encontre também o raio de convergência da série.

   (a) $f(x) = (1-x)^2$
   (b) $f(x) = \ln(1+x)$
   (c) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$
   (d) $f(x) = 2^x$
   (e) $f(x) = \cos 3x$
   (f) $f(x) = x\, e^x$
   (g) $f(x) =$
   (h) $f(x) =$

5. Encontre a série de Taylor de $f(x)$ centrada no valor dado de a. Encontre também o raio de convergência da série.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \frac{\pi}{3}$
   (b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$
   (c) $f(x) = \ln x, \quad a = 2$
   (d) $f(x) = e^{2x}, \quad a = 3$
   (e) $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$
   (f) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = -3$
   (g) $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 16$

6. Mostre que a série obtida no exercício **??** representa $\operatorname{sen}(\pi x)$ para todo x.

7. Mostre que a série obtida no exercício **??** representa $\operatorname{sen} x$ para todo x.

8. Use a série binomial para expandir a função como série de potências. Examine o raio de convergência.

   (a) $\sqrt[4]{1-x}$
   (b) $\sqrt[3]{8+x}$
   (c) $\frac{1}{(2+x)^3}$
   (d) $(1-x)^{2/3}$

9. Use uma série de Maclurin da tabela **??** para obter a série de Maclaurin da função dada

   (a) $f(x) = e^x + e^{2x}$
   (b) $f(x) = \cos(\pi x/2)$
   (c) $f(x) = e^x + 2e^{-x}$
   (d) $f(x) = x^2 \ln(1+x^3)$
   (e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$
   (f) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (Dica: use $sen^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$)

10. Use a série de Maclaurin de $\cos x$ para calcular $\cos 5^o$ com precisão de cinco casas decimais.

11. Encontre a soma da série dada.

    (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$
    (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{3^n}{n5^n}$
    (d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$
    (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$
    (f) $3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \cdots$

12. Encontre os polinômios de Taylor até ordem 6 de $f(x) = \cos x$ centrados em $a = 0$. Calcule f e esses polinômios em $x = \pi/4$, $\pi/2$ e π.

13. Encontre os polinômios de Taylor até ordem 3 de $f(x) = \frac{1}{x}$ centrados em $a = 1$. Calcule f e esses polinômios em $x = 0,9$ e $1,3$.

14. Encontre o polinômio de Taylor $T_3(x)$ de f centrado em a.

(a) $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$

(b) $f(x) = \cos x, \quad a = \frac{\pi}{2}$

(c) $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad a = 0$

(d) $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

(e) $f(x) = x \cos x, \quad a = 0$

(f) $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$

(g) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 2$

15. Aproxime f por um pilnômio de Taylor de ordem n no número a. Em seguida use a Desigualdade de Taylor para estimar a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n(x)$ quando x estiver no intervalo dado.

    (a) $f(x) = \sqrt{x}, \; a = 4, \; n = 2, \; 4 \leq x \leq 4,2$

    (b) $f(x) = x^{-2}, \; a = 1, \; n = 2, \; 0,9 \leq x \leq 1,1$

    (c) $f(x) = x^{2/3}, \; a = 1, \; n = 3, \; 0,8 \leq x \leq 1,2$

    (d) $f(x) = \operatorname{sen} x, \; a = \pi/6, \; n = 4, \; 0 \leq x \leq \pi/3$

    (e) $f(x) = e^{x^2}, \; a = 0, \; n = 3, \; 0 \leq x \leq 0,1$

    (f) $f(x) = x \ln x, \; a = 1, \; n = 3, \; 0,5 \leq x \leq 1,5$

    (g) $f(x) = x \operatorname{sen} x, \; a = 0, \; n = 4, \; -1 \leq x \leq 1$

16. Use a informação do exercício **??** para estimar $\cos 80^o$ com precisão de cinco casas decimais.

17. Use a informação do exercício **??** para estimar $\operatorname{sen} 38^o$ com precisão de cinco casas decimais.

18. Use a Desigualdade de Taylor para determinar o número de termos da série de Maclaurin de e^x são necessários para estimar $e^{0,1}$ com precisão de 0,00001.

19. Use o Teorema da Estimativa de Séries Alternadas ou a Desigualdade de Taylor para estimar os valores de x para os quais a aproximação dada tem precisão dentro do erro estabelecido.

    (a) $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x}{6} \; (|Erro| < 0,001)$

    (b) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \; (|Erro| < 0,005)$