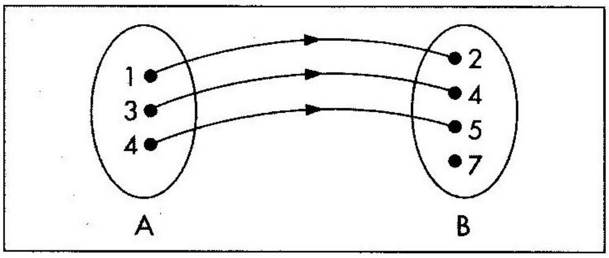
Resumo de aula 4

1 Inversão de Funções e outras operações

Função Injetora

Dizemos que uma função f é injetora se, quaisquer que sejam s e t no seu domínio,

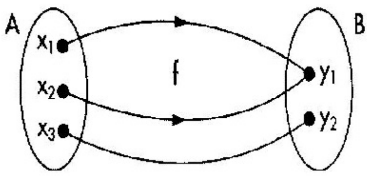
$$s \neq t \Longrightarrow f(s) \neq f(t)$$



Essa função é injetora.

Função sobrejetora

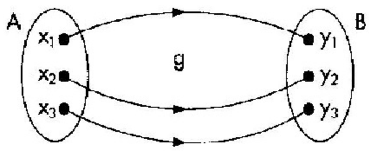
Dizemos que uma função é sobrejetora se, sua imagem coincide com seu contradomínio.



Essa função é sobrejetora.

Função bijetora

Dizemos que uma função é bijetora se, ela é injetora e sobrejetora.



Essa função é bijetora.

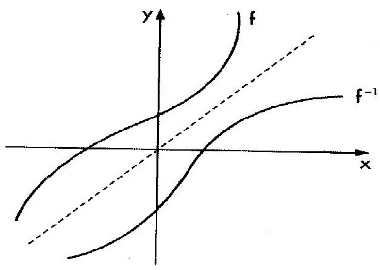
Função Inversa

Se $f : A \longrightarrow B$ for uma função bijetora (isto é, f é injetora e $B = Imf$) em que $y = f(x)$, então a função inversa de f, denotada por $f^{-1} : B \longrightarrow A$, é definida por

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y$$

Além disso, $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in B$

Graficamente, se (x, y) é um ponto de gráfico de f, então (y, x) é um ponto de gráfico de f^{-1}; logo, os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$



Exemplo 1.1. Seja $y = f(x) = 3x + 5$. Ela é uma funç ão bijetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, existe a função inversa f^{-1}, e ela é obtida isolando-se x na relação dada, isto é:

$$y = 3x + 5 \Longrightarrow x = \frac{y-5}{3}$$

Portanto, $f^{-1}(y) = x = \frac{y-5}{3}$

Exemplo 1.2. Encontre a função inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

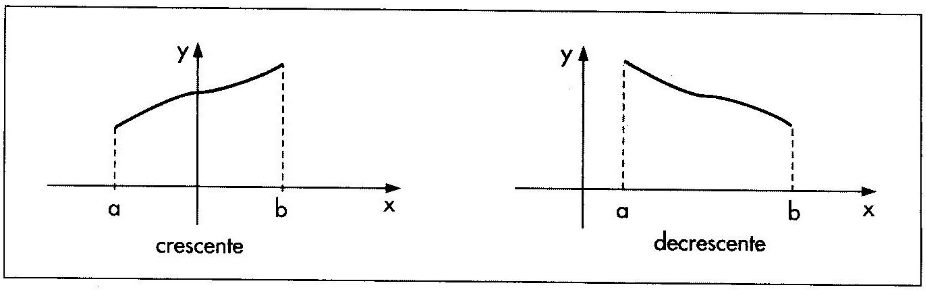
Solução: $y = f(x) = x^3 + 2$. Isolando-se x na equação dada $y = x^3 + 2$,

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y-2}$$

Portanto, $f^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y-2}$, ou seja, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-2}$.

Funções crescentes e decrescentes

Uma função é chamada de crescente em um intervalo $[a, b]$ se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em $[a, b]$. Ela é chamada de decrescente em $[a, b]$ se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I.



Observação: Se $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ é uma função crescente ou decrescente, então ela bijetora, logo admite a função inversa $f^{-1} : [c, d] \longrightarrow [a, b]$.