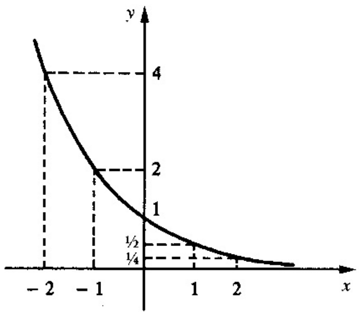
Resumo de aula 8

1 Limites no Infinito

Introdução:

Vimos o gráfico da função $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

x	$(\frac{1}{2})^x$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
-1	2
2	$\frac{1}{4}$
-2	4



Quanto maior o x, mais próximos de 0 ficam os valores de $y = f(x)$, ou seja, podemos tornar os valores de $y = f(x)$ tão próximos de 0, quanto tomarmos x suficientemente grande. Nesta situação, escrevemos

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{1}{2})^x = 0$$

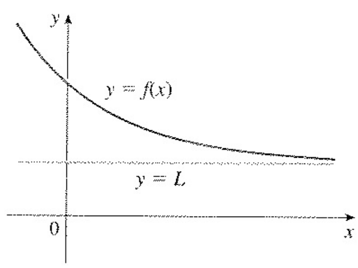
Definição 1 :
Seja f uma função definida em algum intervalo $(0, \infty)$. Então

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = L$$

significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L tornando - se x suficientemente grande.

O símbolo ∞ não representa um número real. $x \longrightarrow \infty$ é para mostrar que x pode assumir valores tão grandes quanto quisermos.

Ilustrações geométricas da Definição estão na Figura. o gráfico aproxima-se da reta $y = L$ (chamada de assíntota horizontal) quando fazemos x tende a ∞

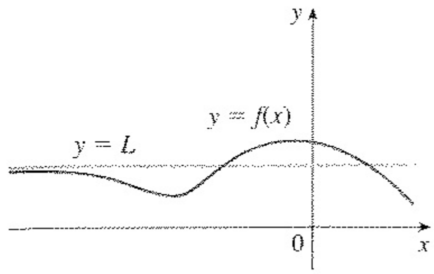


De maneira análoga, podemos ter Definição 2:
Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = L$$

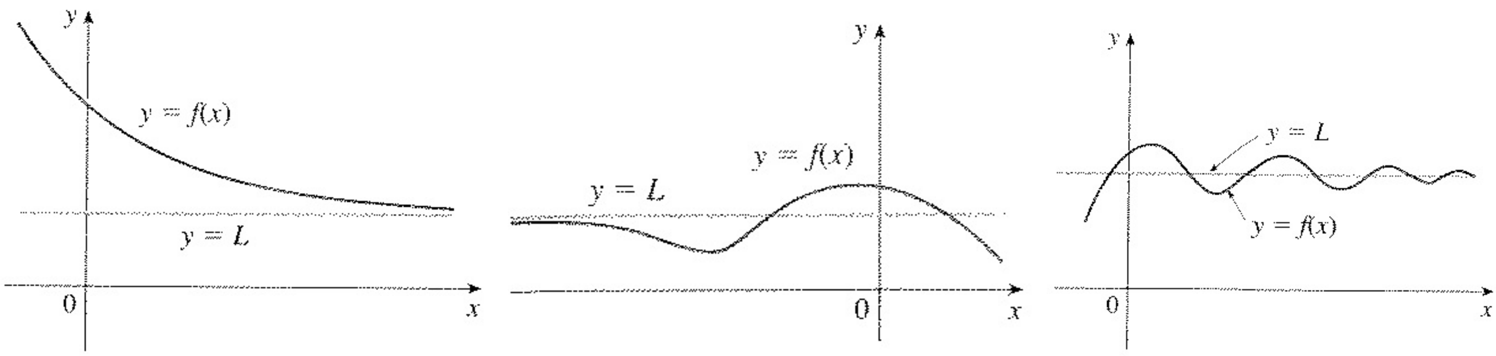
significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de L tornando - se x suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo.

A definição 2 está ilustrada na Figura embaixo. Note que o gráfico aproxima-se da reta $y = L$ (chamada de assíntota horizontal) quando x tende a $-\infty$



2 Assíntotas Horizontais

A reta $y = L$ é chamada de assíntota horizontal da curva (do gráfico) $y = f(x)$ se ou $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = L$



Exemplo 2.1. Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e tomaremos os valores de x que tendem para infinito, por exemplo: $x = 10, 100, 1.000, 10.000$, ... os valores correspondentes de y são:

$f(10) = \frac{1}{10} = 0,1$

$f(100) = \frac{1}{100} = 0,01$

$f(1.000) = \frac{1}{1.000} = 0,001$

$f(10.000) = \frac{1}{10.000} = 0,0001$

...

Observamos que os valores de y vão tendendo para 0. Dizemos, neste caso, que o limite de $f(x)$, quando x tende a ∞ é 0 e escrevemos

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Analogamente, para calcularmos o limite de $f(x)$ quando x tende a $-\infty$, vamos atribuir a x, por exemplo, os valores $x = -10, -100, -1.000, -10.000$, ... os valores correspondentes de y são:

$f(-10) = \frac{1}{-10} = -0,1$

$f(-100) = \frac{1}{-100} = -0,01$

$f(-1.000) = \frac{1}{-1.000} = -0,001$

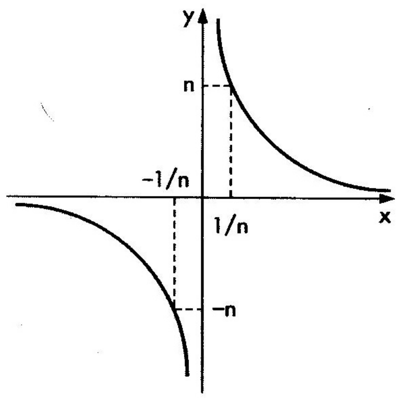
$f(-10.000) = \frac{1}{-10.000} = -0,0001$

...

Observamos que os valores de y vão tendendo também para 0. Dizemos, neste caso, que o limite de $f(x)$, quando x tende a $-\infty$ é 0 e escrevemos

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

O gráfico da função é dado abaixo. A reta $y = 0$, ou seja, o eixo x é assíntota horizontal da função $f(x) = \frac{1}{x}$.



Na prática de substituição, podemos ter as seguints regras :

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{-\infty} = 0$$

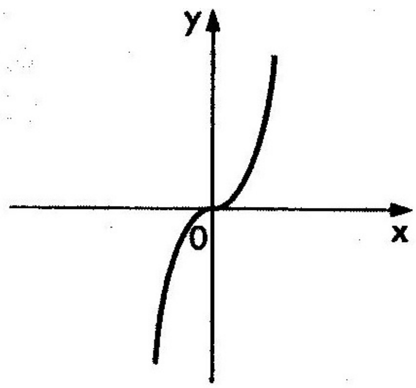
Exemplo 2.2. Consideremos a função $f(x) = x^3$. Se consideremos as mesmas sucessões divergentes para mais ou menos infinito dadas no exemplo anterior, poderemos concluir que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} x^3 = \infty$$

e

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

O gráfico da função é dado abaixo.



Observação: O limite nos infinitos de uma função polinomial é igual ao limite de seu termo de maior exponente, pois colocando - se este termo em evidência, todos os outros termos tendem a 0

Exemplo 2.3. Calcule $\lim_{x \longrightarrow \infty}(2x^3 + 4x^2 - 5x + 9)$

Solução:
$\lim_{x \longrightarrow \infty}(2x^3 + 4x^2 - 5x + 9) = \lim_{x \longrightarrow \infty} 2x^3(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{2x^2} + \frac{9}{2x^3}) = \lim_{x \longrightarrow \infty} 2x^3 = \infty$

Observação: Como consequencia da observação anterior, quando tivermos o limite nos infinitos nas de um quociente de dois polinômios,, ele será igual ao limite do quociente dos termos de maior exponente do numerador e denominador. Assim, poe exemplo:

Exemplo 2.4. Calcule $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^3 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Solução:
$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^3 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^3}{5x^2} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3}{5}x = \infty$

3 Limites infinitos

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Calculamos o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 pela direita, por exemplo $x = 3,1; 3,01; 3,001; 3,0001, ...$, os valores correspondentes de y são:

$f(3,1) = \frac{1}{0{,}1} = 10$

$f(3,01) = \frac{1}{0{,}01} = 100$

$f(3,001) = \frac{1}{0{,}001} = 1000$

$f(3,0001) = \frac{1}{0{,}0001} = 10.000$

...

Observamos que os valores de y vão ficando cada vez maiores, superando qualquer valor fixado. Dizemos, neste caso, que o limite de $f(x)$, quando x tende a 3 pela direita, é infinito e escrevemos

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty$$

Analogamente, para calcularmos o limite de $f(x)$ quando x tende a 3 pela esquerda, vamos atribuir a x, por exemplo, os valores $x = 2,9; 2,99; 2,999; 2,9999, ...$, os volores correspondentes de y são:

$f(2,9) = \frac{1}{-0{,}1} = -10$

$f(2,99) = \frac{1}{-0{,}01} = -100$

$f(2,999) = \frac{1}{-0{,}001} = -1000$

$f(2,9999) = \frac{1}{-0{,}0001} = -10.000$

...

Observamos que os valores de y vão ficando cada vez menores, ficando abaixo de qualquer valor fixado. Dizemos, neste caso, que o limite de $f(x)$, quando x tende a 3 pela esquerda, é menos infinito e escrevemos

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Na prática, podemos ter as seguints regras :

$$\frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

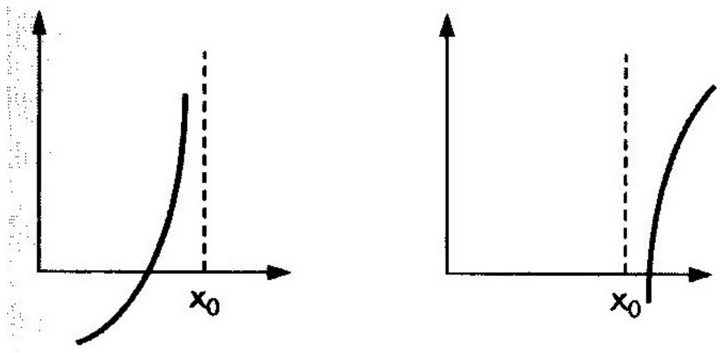
Exemplo 3.1. Para cada função $f(x)$ abaixo, calcule $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x)$

$(a) f(x) = \frac{4}{x-6}, a = 6$

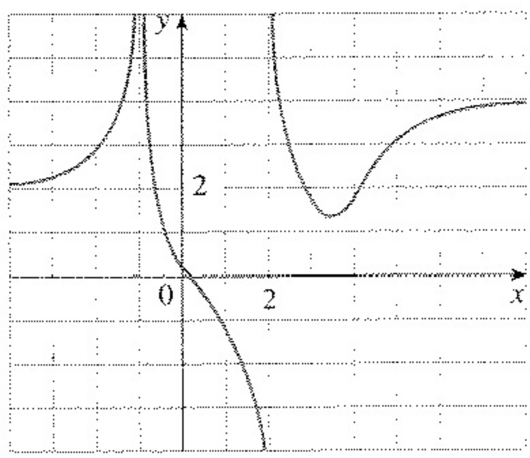
$(b) f(x) = \frac{3}{1-x}, a = 1$

4 Assíntotas Verticais

Se existir um número $x_\circ$ tal que pelo menos um dos limites laterais de $x_\circ$ seja infinito ou menos infinito, então a reta vertical $x = x_\circ$ é uma assíntota vertical da função considerada.



Exemplo 4.1. Dado o gráfico da função $y = f(x)$ na figura



(a) Encontre os limites infinitos da função.

(b) Encontre os limites no infinito da função.

(c) Determine as equações de assíntotas da função.

Solução: