Resumo de aula 2

1 Módulo ou Valor absoluto

Seja x um número real, definimos o módulo ou valor absoluto de x por $\mid x \mid = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$

De acordo com a definição acima, para todo x, $\mid x \mid \geq 0$, isto é, o valor absoluto de um número real é sempre não negativo.

Exemplo 1.1. $(a) \mid 5 \mid = 5 \quad (b) \mid -3 \mid = -(-3) = 3$

Exemplo 1.2. Temos que, para todo x real, $\mid x \mid^2 = x^2$

Demonstração: Se $x \geq 0, \mid x \mid = x$, passando o quadrado aos dois lados da igauldade, temos $\mid x \mid^2 = x^2$. Se $x < 0, \mid x \mid = -x$, passando o quadrado aos dois lados da igauldade, temos $\mid x \mid^2 = (-x)^2 = (-1)^2(x)^2 = x^2$. Portanto $\mid x \mid^2 = x^2$.

Exemplo 1.3. Temos que, para todo x real, $\sqrt{x^2} = \mid x \mid$

Demonstração: Suponha que $\sqrt{x^2} = y$ (1). Pela definição de raiz quadrada, tem-se $y \geq 0$ e $y^2 = x^2$ (2). Por outro lado, $\mid x \mid^2 = x^2$ (3). Por (2) e (3), tem-se $\mid x \mid^2 = y^2$ (4). Como $y \geq 0$ e $\mid x \mid \geq 0$ e por (4), tem-se $y = \mid x \mid$. Por(1), tem - se $\sqrt{x^2} = \mid x \mid$, o que queríamos provar.

Propriedade do Módulo

Se $\mid x \mid = k$, ento $x = k$ ou $x = -k$

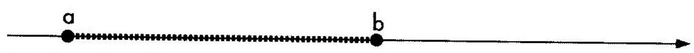
Exemplo 1.4. $\mid x \mid = 3 \Longrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Exemplo 1.5. Resolva a equação $\mid 2x + 1 \mid = 3$

Solução: $2x + 1 = 3$ ou $2x + 1 = -3 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -2$

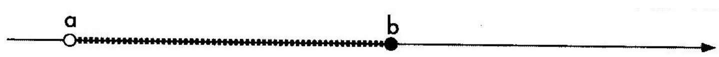
2 Intervalos

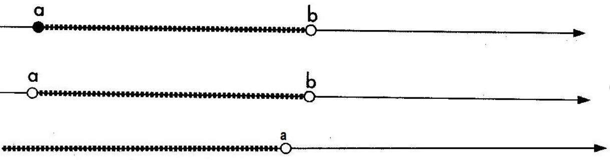
Sejam a e b dois reais, com $a < b$. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que tem uma das seguintes formas:



$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



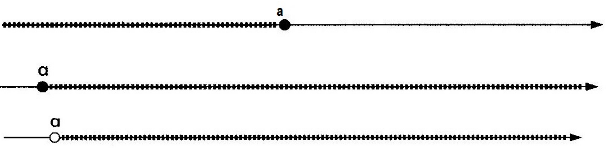


$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

Observação: ∞ e $-\infty$ não são números, ∞ e $-\infty$ são apenas um símbolo. ∞ simboliza um número positivo tão grande quanto quisermos. $-\infty$ simboliza um número negativo cujo módulo será tão grande quanto quisermos.



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

3 Inequações do Primeiro Grau

Inequações do Primeiro Grau na incógnita x sãoo aquelas redutíveis a uma das formas:

$a \cdot x < b$ ou $a \cdot x \leq b$ ou $a \cdot x > b$ ou $a \cdot x \geq b$
em que a e b são números reais quaisquer com $a \neq 0$. A inequação dada fica satisfeita por alguns valores de x mas não por outros. Resolver uma inequação significa determinar o conjunto de número x para os quais a inequação é verdadeira. Ele é chamado *conjunto solução.*

A resolução é feita de modo análogo ao das equações do 1° grau, porém lembrando que, quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros da inequação por um número negativo, o sentido da desigualdade muda. No caso de multiplicarmos ou dividirmos os membros por um número positivo, o sentido da desigualdade não se altera.

Exemplo 3.1. Resolva inequação $5x + 3 < 2x + 7$
Solução:
$5x + 3 < 2x + 7$
$5x < 2x + 7 - 3$
$5x < 2x + 4$
$5x - 2x < 4$
$3x < 4$ $(\div 3 \iff \cdot \frac{1}{3})$
$x < \frac{4}{3}$
Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{4}{3}\}$ é o conjunto solução da inequação dada. Na notação de intervalo, o conjunto solução $S = (-\infty, \frac{4}{3})$.

Exemplo 3.2. Resolva inequação $1 - 4x \geq 0$
Solução:
$1 - 4x \geq 0$
$-4x \geq -1$ $(\div -4 \iff \cdot \frac{1}{-4})$
$x \leq \frac{-1}{-4}$

$x \leq \frac{1}{4}$
Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4}\}$ é o conjunto solução da inequação dada. Na notação de intervalo, o conjunto solução $S = (-\infty, \frac{1}{4}]$.