# Resumo de aula 7 (2)

## 1 Limite de Funções

**Limites Laterais**

Escrevemos

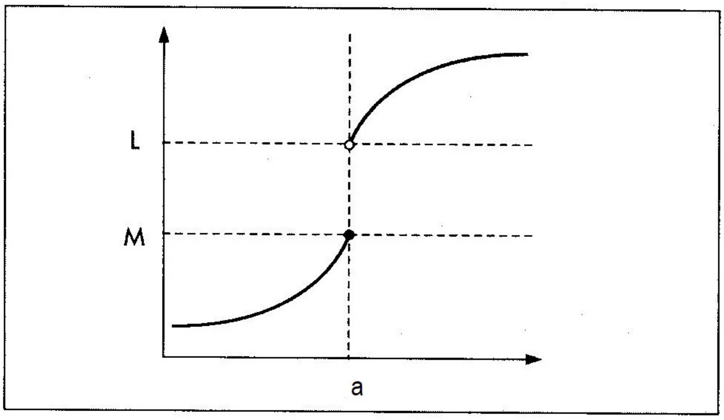
$$\lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = M$$

e dizemos que **o limite de** $f(x)$ **quando** $x$ **tende a** $a$ **pela esquerda** é igual a $M$ se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de $M$, tomando $x$ suficientemente próximo de $a$ e $x$ menor que $a$.

Analogamente, se for exigido que $x$ seja maior que $a$, obteremos **o limite de** $f(x)$ **quando** $x$ **tende a** $a$ **pela direita** como igual a $L$, e escrevemos

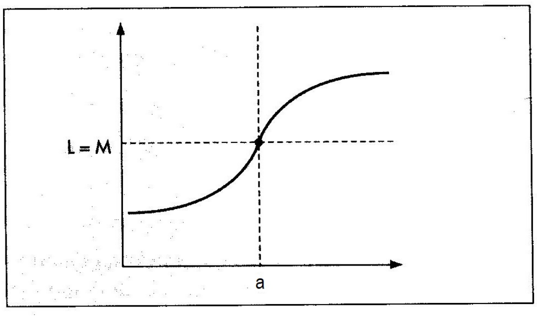
$$\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = L$$

A Figura abaixo mostra essa ideia.




Caso $L = M$, ou seja, os limites laterais são iguais, dizemos que existe o limite (global) de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ e escrevemos,

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L = M$$



Escrevemos

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$$

e dizemos que **o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ é igual a** $L$ se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de $L$, tomando $x$ suficientemente próximo de $a$ (por ambos os lados de $a$) mas não igual a $a$.

Quando os limites laterais $L$ e $M$ são distintos, dizemos que não existe o limite (global) de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$. (Embora existam os limites laterais)

**Exemplo 1.1.** *Consideremos a função dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & se \quad x \leq 3 \\ 2x, & se \quad x > 3 \end{cases}$$

*e calculemos os limites laterais quando $x$ tende a 3 pela direita e pela esquerda:*

**Limite pela esquerda**

*Consideremos uma sucessão que convirja para 3 pela esquerda, por exemplo* $(2,9; 2,99; 2,999; ...)$. *Nesse caso, como $x$ é menor do que 3, a expressão de $f(x) = x + 2$. Assim, temos a seguinte correspondência:*

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2,9 | 4,9 |
| 2,99 | 4,99 |
| 2,999 | 4,999 |
| ... | ... |

*Assim, percebe-se intuitivamente que quando $x$ tende a 3 pela esquerda, $f(x)$ tende a 5, e escrevemos*

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 5$$

**Limite pela direita**

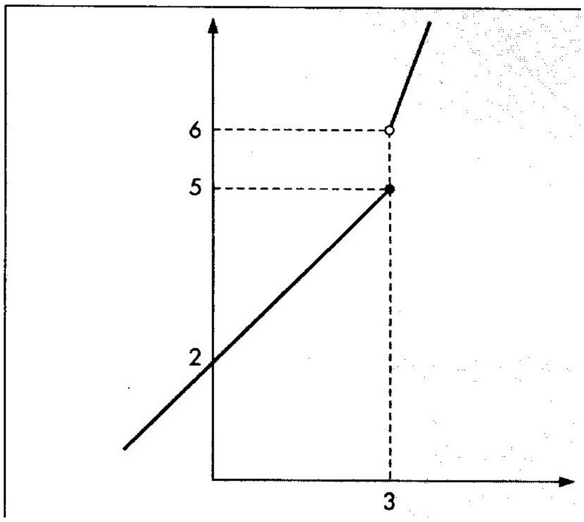
*Consideremos uma sucessão que convirja para 3 pela direita, por exemplo* $(3,1; 3,01; 3,001; ...)$. *Nesse caso, como $x$ é maior do que 3, a expressão de $f(x) = 2x$ . Assim, temos a seguinte correspondência:*

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3,1 | 6,2 |
| 3,01 | 6,02 |
| 3,001 | 6,002 |
| ... | ... |

*Assim, percebe-se intuitivamente que quando $x$ tende a 3 pela direita, $f(x)$ tende a 6, e escrevemos*

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 6$$

*Nesse caso, como os limites laterais existem, mas são diferentes, dizemos que não existe o limite (global) de $f(x)$ quando $x$ tende para 3. O gráfico abaixo representa dessa* *função e evidencia os limites laterais:*




**Exemplo 1.2.** *Consideremos a função* $f(x) = x^2$ *e calculemos os seus limites laterais:*

*Consideremos as mesmas sucessões usadas no exercício anterior que convergem para* 3

**Limite pela esquerda**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2,9 | 8,41 |
| 2,99 | 8,9401 |
| 2,999 | 8,9940 |
| ... | ... |

*É intuitivo perceber que* $\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = 9$

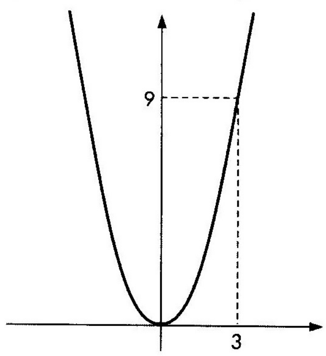
**Limite pela direita**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3,1 | 9,61 |
| 3,01 | 9,0601 |
| 3,001 | 9,0060 |
| ... | ... |

*É intuitivo perceber que* $\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = 9$ *Como os limites lateraissão iguais, podemos escrever:*

$$\lim_{x\longrightarrow 3} f(x) = 9$$

*A figura abaixo mostra o gráfico desta função.*

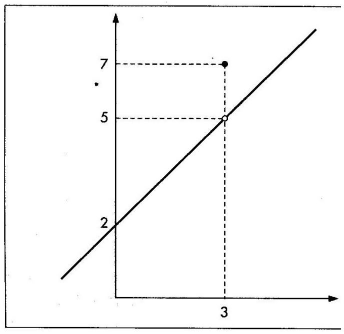



**Exemplo 1.3.** *Consideremos a função dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & se \quad x \neq 3 \\ 7, & se \quad x = 3 \end{cases}$$

*e calculemos os limites laterais quando $x$ tende a 3 pela direita e pela esquerda:*

*Consideremos as mesmas sucessões usadas no exercício anterior para caracterizar que $x$ tende a 3 pela esquerda e pela direita, percebemos que :*




$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 5$$

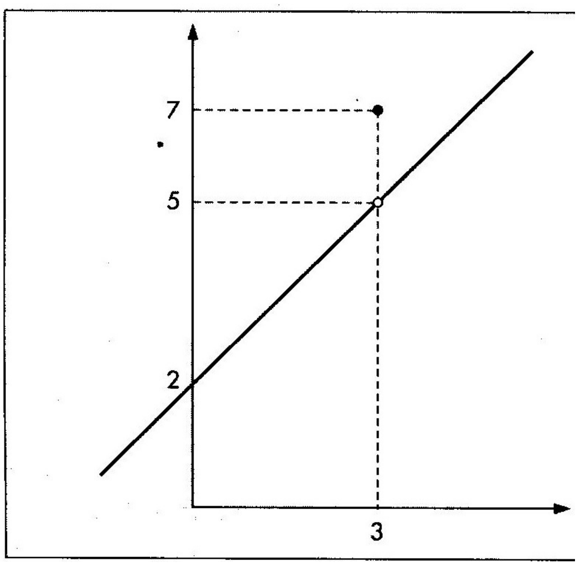
*e*

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 5$$

*Portanto, neste caso, como os limites lateraissão iguais, podemos escrever:*

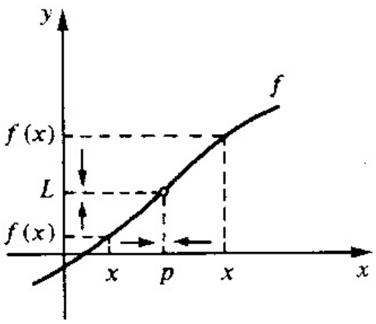
$$\lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = 5$$

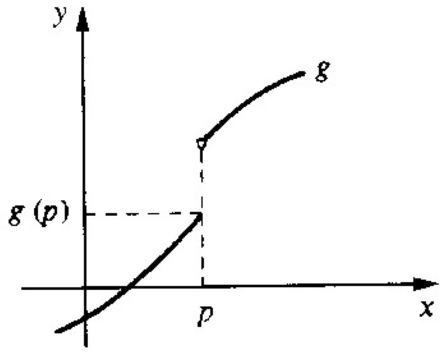
*É importante observamos, neste caso, que no cálculo do limite de $f(x)$, quando $x$ tende a 3, não importa o valor da função $f$ para $x = 3$, mas importa o que ocorre com os valores de $f$ quando $x$ está próximo de 3, mas mantendo - se diferente de 3. A figura abaixo mostra o gráfico desta função.*



## 2 Continuidade

Intuitivamente, uma função contínua em um ponto $p$ de seu domínio é uma função cujo gráfico não apresenta "buraco" ou "salto" em $p$.




$f$ apresenta um "buraco" em $p$ e $g$ apresenta um *salto* em $p$, logo $f$ e $g$ não são contítuas em $p$.

Se colocar um ponto para preencher o "buraco" no gráfico de $f$, $f$ se tornará contínua em $p$.

Assim, $f$ não está definido em $p$ e se $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$, então $L$ é o valor que $f$ deveria ter em $p$ para ser contínua em $p$. Ou seja, se definirmos $f(p) = L$, preencheremos o "buraco" no gráfico de $f$ e $f$ se tornará contínua em $p$.

Definição: (continuidade)

$f$ contínua em $p \iff \lim_{x \longrightarrow p} f(x) = f(p)$

**Exemplo 2.1.** *Calcule os limites:*

*(a)*$\lim_{x \longrightarrow 5}(2x^2 - 3x + 4)$

*(b)*$\lim_{x \longrightarrow 1}(x^2 - 1)$

*(b)*$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}} x sen(x)$