Resumo de aula 7 (1)

1 Sucessões e Sequências

Seja
$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

Qualquer função $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma sucessão ou sequência $(f(1), f(2), f(3), ..., f(n), ...)$, ou seja, chamamos de sucessão ou sequência a toda função real cujo domínio é o conjunto de números naturais.

Exemplo 1.1. *Seja a sucessão dada por* $f(n) = \frac{1}{n}$ *com* $n \in \mathbb{N}^*$. *A sucessão dada nesse exemplo pode ser representada por*

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$$

Exemplo 1.2. *Seja a sucessão dada por* $f(n) = \frac{n}{n+1}$ *com* $n \in \mathbb{N}^*$. *A sucessão dada nesse exemplo pode ser representada por*

$$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...)$$

Exemplo 1.3. *A sucessão* $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$ *é definida por* $f(n) = n$ *com* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 1.4. *A sucessão* $(-1, -2, -3, -4, -5, ...)$ *é definida por* $f(n) = -n$ *com* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 1.5. *A sucessão* $(1, 3, 5, 7, ...)$ *é definida por* $f(n) = 2n - 1$ *com* $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Convergência de Sucessões (Sequências)

Dizemos que uma sucessão **converge** para um número se, à medida que n aumentar, o valor de $f(n)$ vai se aproximando deste número. Por exemplo, intuitivamente, a sucessão

$$(0,1, \;\; 0,01, \;\; 0,001, \;\; 0,0001, \;\; ..., \frac{1}{10^n}, ...) \textit{ converge para } 0$$

Formalmente, podemos dizer que uma sucessão $(f(1), f(2), f(3), ...)$ converge para um número a se para todo intervalo I centrado em a existir um número natural k tal que $f(k+1), f(k+2), f(k+3), ...$ pertencem a I.

Tomamos a mesma sucessão acima e vamos conferir se ela converge para zero:

Se $I_1 = (-0,1; 0,1)$, então $f(2), f(3), f(4), ...$ são todos os elementos que pertencem ao intervalo I_1.

Se $I_2 = (-0,01; 0,01)$, então $f(3), f(4), f(5), ...$ são todos os elementos que pertencem ao intervalo I_2.

Se $I_3 = (-0,001; 0,001)$, então $f(4), f(5), f(6), ...$ são todos os elementos que pertencem ao intervalo I_3.

Na verdade, qualquer intervalo centrado em 0, por menor amplitude que tenha, permite encontrar um termo a parir do qual os elementos da sucessão pertencem ao intervalo. Portanto, a sucessão $(0,1,\ \ 0,01,\ \ 0,001,\ \ 0,0001,\ \ ..., \frac{1}{10^n}, ...)$ converge para 0.

Agora tomamos a sucessão

$$(-1, 2, -3, 4, -5, ...)$$

veremos que à medida que n aumentar, os valores de $f(n)$ não convergem para nenhum valor fixodo; Diremos que tal sucessão **diverge**.

Entre as sucessões divergentes, existem aquelas em que à medida que n aumentar, os valores de $f(n)$ conseguem superar qualquer valor fixado, dizemos que essas sucessões divergem para mais infinito, esse é o caso de

$$(1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

Pode ocorrer que à medida que n aumentar, os valores de $f(n)$ conseguem ficar abaixo de qualquer valor fixo, por menor que ele seja, dizemos que essas sucessões divergem para menos infinito; o que é o caso de

$$(-1, -3, -5, -7, ...)$$

Observações

1)Quando uma sucessão convergir para certo valor a, mas sempre por valores menores do que a, dizemos que a sucessão converge para a pela esquerda. Assim, por exemplo, a sucessão

$$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}, ...)$$

converge para 1 pela esquerda. Analogamente, temos sucessões que convergem para a pela direita. (E ainda aquelas que convergem para a oscilando, isto é, tanto pela esquerda como pela direita.)

2) Dado um número a qualquer, é geralmente possível construir sucessões que convirjam para esse valor. Assim, por exemplo, dado o número 3, a sucessão

$$(3,1; 3,001; 3,0001; ...; 3 + \frac{1}{10^n}; ...)$$

converge para 3 pela direita, ao passo que a sucessão

$$(2,9; 2,99; 2,999; ...; 3 - \frac{1}{10^n}; ...)$$

converge para 3 pela esquerda.

Exercícios:(a) Dado o número 5, Construir uma sucessão que converge para 5 pela direita, e a outra que converge para 5 pela esquerda.

(b) Dado o número -2, Construir uma sucessão que converge para -2 pela direita, e a outra que converge para -2 pela esquerda.