Resumo de aula 14

1 A integral definida

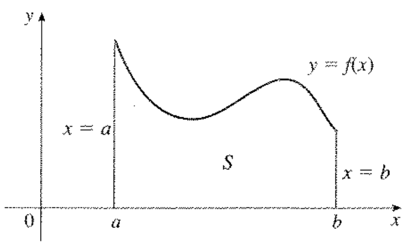
Definição 1.1. *(Integral Definida) Se $f(x)$ é uma função contínua definida no intervalo $[a, b]$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\triangle x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $x_\circ(= a), x_1, x_2, ..., x_n(= b)$ os extremos desses subintervalos e vamos esclher os pontos $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ nesses subintervalos de forma que x_i^* está no $i-$ ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então* **a integral definida de $f(x)$ no intervalo de a até b** *é representada pelo símbolo*

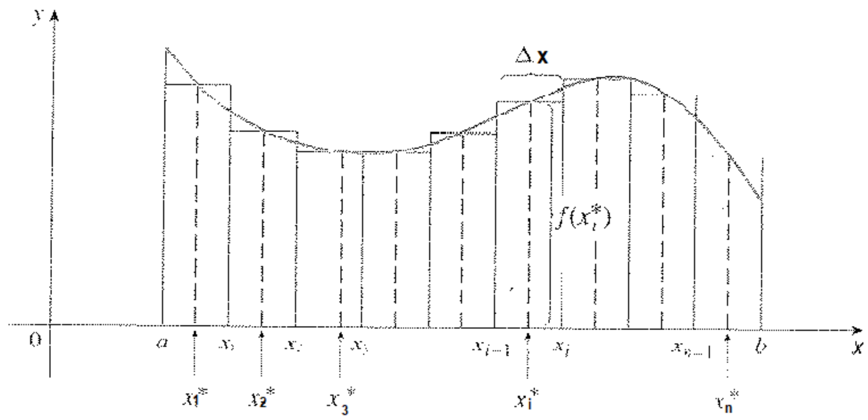
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x$$

Uma vez que assumimos f como contínua, pode ser provado que o limite acima na Definição sempre existe e fornece o mesmo valr, não importando como escolhemos os pontos x_i^*.

Significado Geométrico de integral definida

Seja $f(x)$ uma função contínua e não negativa definida num intervalo $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x)$, o eixo x e as retas verticais $x = a$ e $x = b$.





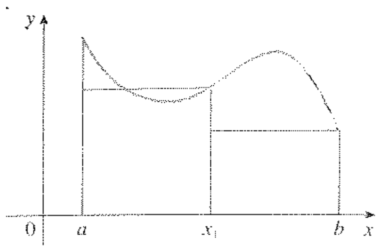
Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_\circ, x_1], [x_1, x_2], [x_3, x_4], ..., [x_{n-1}, x_n]$, onde $x_\circ = a$ e $x_n = b$ de mesmo tamanho

$$\triangle x = \frac{b-a}{n}$$

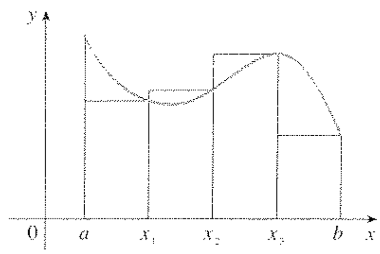
No primeiro subintervalo, escolhemos um ponto qualquer x_1^* e construímos um retângulo de base $\triangle x$ e a altura $f(x_1^*)$ e no segundo subintervalo, escolhemos um ponto qualquer x_2^* e construímos um retângulo de base $\triangle x$ e a altura $f(x_2^*)$, e assim, de maneira análoga, construímos o terceiro, o quarto, ..., até o $n-$ ésimo retângulo. A soma das áreas dos n retângulos é

$$S_n = f(x_1^*) \triangle x + f(x_2^*) \triangle x + ... + f(x_n^*) \triangle x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x$$

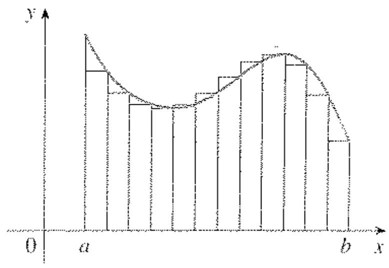
Essa soma S_n é chamada de **soma de Riemann** da função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, que é uma estimativa da área da região dada. Quando o intervalo $[a, b]$ for mais dividido, ou seja, quando n for maior, a estimativa será melhor.



$n = 2$



$n = 4$



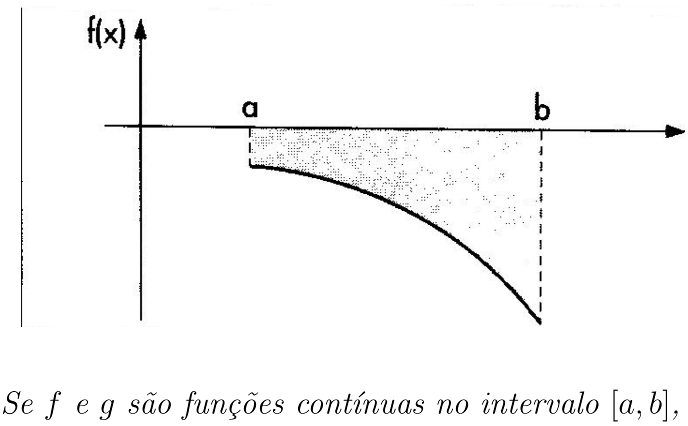
$n = 12$

É razoável portanto, definir a área da região dada como o limite de S_n quando $n \longrightarrow \infty$. Isto é:

$$A_R = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \triangle x = \int_a^b f(x)dx$$

Se $f(x) \leq 0$ e é contínua no intervalo $[a, b]$, a área da região compreendida entre o eixo x e o gráfico de f, e as retas verticais $x = a$ e $x = b$ dado por

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$



Proposition 1.2. *Se f e g são funções contínuas no intervalo $[a, b]$, então*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Proposition 1.3. *Se k é uma constante e f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$, ento* $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$

Teorema 1.4. *(Teorema Fundamental do Cálculo) Se a função é contínua no intervalo $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Proposition 1.5. *Se f é contínua no intervalo $[a, b]$, então* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Exemplo 1.6. *Calcule* $\int_1^4 x^2 dx$
Solução:

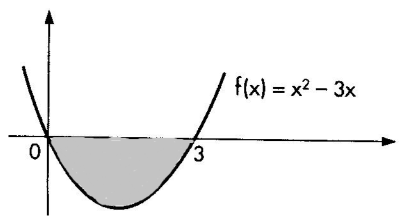
Exemplo 1.7. *Calcule* $\int_1^2 2x^3 dx$
Solução:

Exemplo 1.8. *Calcule* $\int_1^2 (2x - 1)dx$
Solução:

Exemplo 1.9. *Determine a área da região limitada pela curva* $y = x^2$ *e pelas retas* $x = 1$ *e* $y = 0$
Solução:

Exemplo 1.10. *Determine a área da região limitada pela curva* $y = e^x$ *e pelas retas* $x = 1$, $x = 2$ *e* $y = 0$
Solução:

Exemplo 1.11. *Determine a área destacada.*



Exemplo 1.12. *Calcule* $\int_1^2 (\frac{x^3-x^2+2}{x^2})dx$
Solução:

Exemplo 1.13. *Calcule* $\int_0^\pi cosxdx$
Solução:

Exemplo 1.14. *Calcule* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec\Theta tg\Theta d\Theta$
Solução:

Exemplo 1.15. *Calcule* $\int_1^2 (x-2)^5 dx$
Solução:

Exemplo 1.16. *Calcule* $\int_0^1 \sqrt{3x+1}dx$
Solução:

Exemplo 1.17. *Calcule* $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$
Solução:

Exemplo 1.18. *Calcule* $\int_0^{\frac{\pi}{3}} senx \, cos^2 x \, dx$
Solução:

Exemplo 1.19. *Calcule* $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x \, dx$
Solução:

Exemplo 1.20. *Calcule* $\int_1^2 ln\, xdx$
Solução: Temos $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$

Exemplo 1.21. *Calcule* $\int_1^2 xln\, xdx$
Solução: Temos $\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$