Resumo de aula 10 - 2/2

1 Derivada de função inversa

Se $y = f(x)$ é uma função bijedora (inversíel) e derivável e sua função inversa, representada por $x = f^{-1}(y)$ é contínua, então $Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ se $f'(x) \neq 0$ para todo y de seu domínio, pois usando a regra de cadeia para $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$, temos $1 = \frac{dy}{dy} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$, isto é, $1 = f'(x) \cdot Df^{-1}(y)$, ou seja

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Exemplo 1.1. Seja $y = f(x) = cosx$, com $0 \leq x \leq \pi$. Determine a derivada de sua função inversa.

Solução: Seja $x = f^{-1}(y) = arc\,cos\,y$ a função inversa de $y = f(x) = cosx$. temos que

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-senx} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

pois usando $sen^2x + cos^2x = 1$ e $cosx = y$, implica que $senx = \sqrt{1-y^2}$.

2 Regra de L'Hôpital

Suponha que f e g são diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ próximo a a(execto possívelmente em a). Suponha que

$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = 0$, ou que

$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = \pm\infty$

(Em outras palavras, temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\pm\frac{\infty}{\infty}$). Então

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

A regra de L'Hôpital é válida também para limites laterais e para limites no infinito: Isto é "$x \longrightarrow a$" pode ser substituído por qualquer dos símbolos a seguir: $x \longrightarrow a^+, x \longrightarrow a^-, x \longrightarrow \infty, x \longrightarrow -\infty$.

Exemplo 2.1. Encontre $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{ln\, x}{x-1}$
Solução: 1

Exemplo 2.2. Calcule $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{sen\, x}$

Solução: 1

Exemplo 2.3. Calcule $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

Solução: $\frac{9}{5}$

Exemplo 2.4. Calcule $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

Solução: $\frac{1}{2}$