Resumo de aula 5

1 As funções Trigonométricas e suas inversas

Ângulos

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos(abreviamos por rad.) Tem-se:

$$\pi rad = 180^0$$

Exemplo 1.1. (a)Determine a medida em radianos de 60^0. (b) Expresse $\frac{5\pi}{4}$ rad em graus.
Solução: (a) $60^0 = \frac{\pi}{3}$ rad (b)$\frac{5\pi}{4}$ rad $= 225^0$

A tabela a seguir fornece a correspondência entre medidas de graus e radianos de alguns ângulos comuns.

Graus	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
Radianos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Posição Padrão

A posição padrão de um ângulo ocorre quando colocamos seu vértice na origem do sistema de coordenadas e seu lado inicial sobre o eixo x positivo. Um ângulo positivo é medido a partir do lado inicial no sentido anti-horário, da mesma forma, ângulo negativo é obtido girando-se no sentido horário.

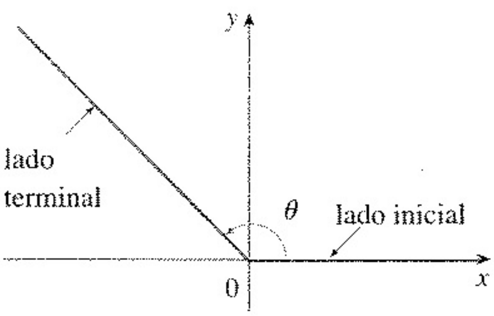


FIGURA 3
$\theta \geqslant 0$

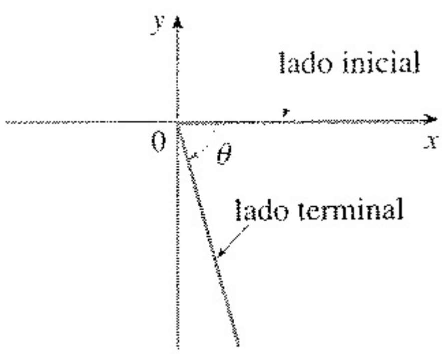
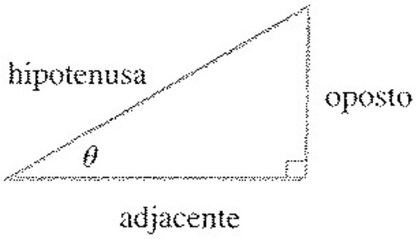


FIGURA 4
$\theta < 0$

As funções Trigonométricas

Para um ângulo θ, as seis funções trigonométricas são definidas como taxas de comprimentos dos lados de um triângulo retângulo como a seguir

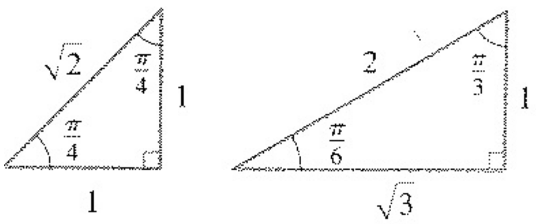


$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos \theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hip}} \qquad \sec \theta = \frac{\text{hip}}{\text{adj}}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{op}}{\text{adj}} \qquad \text{cotg } \theta = \frac{\text{adj}}{\text{op}}$$

As taxas exatas para certos ângulos podem ser lidas dos triângulos da figura abaixo. Por exemplo:

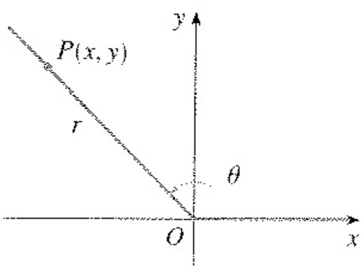


$$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } \frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{tg } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Essa definição não se aplica para ângulos obtusos ou negativos; logo, para um ângulo geral, na posição padrão, tomamos $P(x, y)$ como um ponto qualquer sobre o lado terminal de θ e seja r a distância $\mid OP \mid$ como na figura abaixo. Então definimos

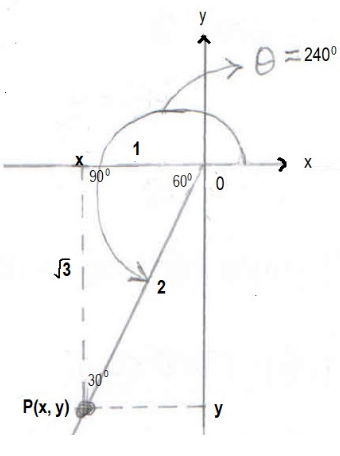


$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} \qquad \text{cossec } \theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{x} \qquad \text{cotg } \theta = \frac{x}{y}$$

Exemplo 1.2. Determine as taxas trigonomtricas exatas para ângulo cuja medida em radianos $\frac{4\pi}{3} = 240°$.
Solução: Tomemos $P(x, y)$ no lado terminal do ângulo $\frac{4\pi}{3}$ rad. Podemos supor que $x = -1, y = -\sqrt{3}$ e $r = 2$. Lodo, $sen\frac{4\pi}{3} = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}, cos\frac{4\pi}{3} = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$ e $tg\frac{4\pi}{3} = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$
Agora, $cossec\frac{4\pi}{3} = \frac{r}{y} = \frac{2}{-\sqrt{3}}, sec\frac{4\pi}{3} = \frac{r}{x} = \frac{2}{-1} = -2$ e $cotg\frac{4\pi}{3} = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



Uma identidade trigonométrica é uma relação entre as funções trigonométricas. As mais elemetares são as que se seguem.

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

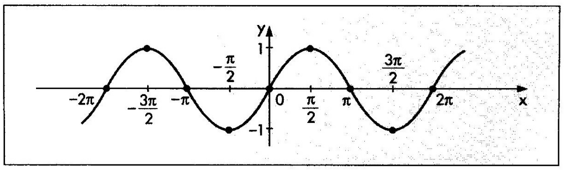
$$\boxed{\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

Função arco-seno

A função $f(x) = sen\, x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, é crescente, portanto inversível, e sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$. A inversa de f é a função $f^{-1}(x) = arc\, sen\, x$ (leia: arco-seno de x), $x \in [-1, 1]$, dada por

$$arc\, sen\, x = y \Longleftrightarrow sen y = x$$

com $x \in [-1, 1]$ e $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



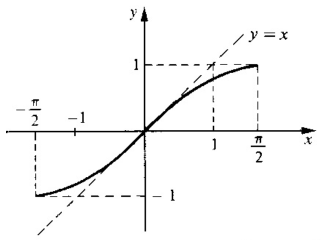
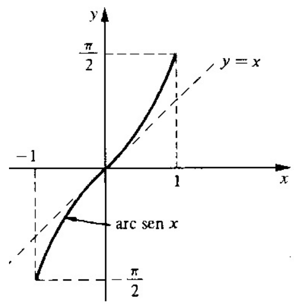


Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

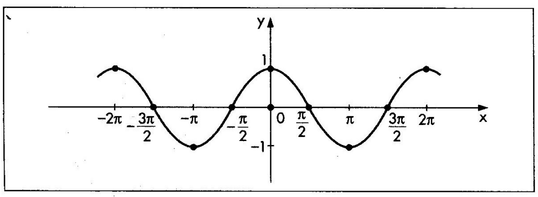


Função arco-cosseno

A função $f(x) = cos\, x, x \in [0, \pi]$, é decrescente, portanto inversível, e sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$. A inversa de f é a função $f^{-1}(x) = arc\, cos\, x$ (leia: arco-cosseno de x), $x \in [-1, 1]$, dada por

$$arc\, cos\, x = y \Longleftrightarrow cos y = x$$

com $x \in [-1, 1]$ e $y \in [0, \pi]$.



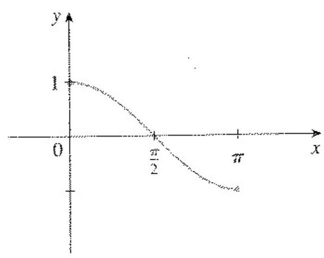
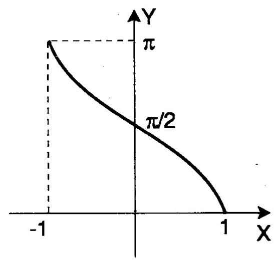


FIGURA 21

$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$



Função arco-tangente

A função $f(x) = tg\, x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, é crescente, portanto inversível, e sua imagem é $\mathbb{R}$. A inversa de f é a função $f^{-1}(x) = arc\,tg\, x$ (leia: arco-tangente de x), $x \in \mathbb{R}$, dada por

$$arc\,tg\, x = y \Longleftrightarrow tgy = x$$

com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.