Lista - Equações diferenciais de primeira ordem

Equações diferenciais

1. Classifique as equações diferenciais dizendo se elas são lineares ou não-lineares. Informe também a ordem de cada equação.

   (a) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

   (b) $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

   (c) $yy' + 2y = 1 + x^2$

   (d) $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

   (e) $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$

   (f) $\frac{d^y}{dx^2} + 9y = \operatorname{sen} y$

2. Verifique se a função dada é uma solução para a equação diferencial (c_1 e c_2 são constantes)

   (a) $2y' + y = 0$, $y = e^{-x/2}$

   (b) $y' + 4y = 32$, $y = 8$

   (c) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$, $y = e^{3x} + 10e^{2x}$

   (d) $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$, $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$

   (e) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$,
   $y = (\sqrt{x} + c_1)^2$, $x > 0$, $c_1 > 0$

   (f) $y' + y = \operatorname{sen} x$,
   $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$

   (g) $x^2dy + 2xydx = 0$, $y = -\frac{1}{x^2}$

   (h) $y' + 2xy = 1$,
   $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + c_1e^{-x^2}$

   (i) $y'' + y' - 12y = 0$, $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x}$

   (j) $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y = e^{3x}\cos 2x$

   (k) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y = e^{2x} + xe^{2x}$

   (l) $y'' + 25y = 0$, $y = c_1\cos 5x$

   (m) $xy'' + 2y' = 0$, $y = c_1 + c_2x^{-1}$

   (n) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$,
   $y = c_1\operatorname{sen} 3x + c_2\cos 3x + 4e^x$

3. Verifique que $y = cx + c^2$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação
$$y = xy' + (y')^2$$

4. Verifique que $y = cx + \sqrt{1+c^2}$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação
$$y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$$

5. Encontre valores de m para que $y = e^{mx}$ seja solução da equação diferncial dada:

   (a) $y'' - 5y' + 6y = 0$

   (b) $y'' + 10y' + 25y = 0$

6. Encontre valores de m para que $y = x^m$ seja solução da equação diferncial dada:

   (a) $x^2y'' - y = 0$

   (b) $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$

7. Mostre que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ são soluções para
$$x^2y'' + 4xy' + 6y = 0.$$

Equações separáveis

8. Resolva a equação diferencial.

   (a) $(1-x)ydx + (1+y)xdy = 0$

   (b) $xdy = ydx$

   (c) $ydy = x^2dx$

   (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

   (e) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

   (f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^y}$

   (g) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x}$

   (h) $xdx - y^2dy = 0$

   (i) $y' = y^2x^3$

   (j) $y' = \frac{x+1}{y^4+1}$

   (k) $xe^xdx + (y^5 - 1)dy = 0$

   (l) $xe^xdx - 2ydy = 0$

   (m) $y' = \frac{x^2y - y}{y+1}$

   (n) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

   (o) $2xydx + (1+x^2)dy = 0$

9. Resolva o provblema de valor inicial dado.

   (a) $e^xdx = ydy$, $y(0) = 1$

   (b) $xe^{x^2}dx + (y^5 - 1)dy = 0$, $y(0) = 0$

   (c) $x\cos xdx + (1 - 6y^5)dy = 0$, $y(\pi) = 0$

   (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$, $y(0) = -3$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}$, $y(1) = 2$

(f) $\frac{du}{dt} = \frac{2t+\sec^2 t}{2u}$, $u(0) = -5$

(g) $y' = \frac{xy \operatorname{sen} x}{y+1}$, $y(0) = 1$

(h) $\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}$, $P(1) = 2$

10. (a) Resolva a equação diferencial $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$.

    (b) Resolva o problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 0$ e faça um gráfico da dolução.

    (c) O problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 2$ tem solução? Explique.

11. Resolva o PVI $y' = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$. Trace a solução.

12. Resolva a equação diferencial $y' = x + y$, usando a mudança de coordenadas $u = x + y$.

Equações homogêneas

13. Determine se a função dada é homogênea e, em caso afirmativo, especifique o grau de homogeneidade.

    (a) $x^3 + 2xy^2 - \frac{y^4}{x}$

    (b) $\sqrt{x+y}(4x+3y)$

    (c) $\frac{x^3y - x^2y^2}{(x+8y)^2}$

    (d) $\frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}$

    (e) $\cos \frac{x^2}{x+y}$

    (f) $\ln x^2 - 2\ln y$

    (g) $(x+y+1)^2$

    (h) $x + ye^{y/x}$

    (i) $xe^{y/x}$

14. Resolva a equação diferencial usando uma substituição apropriada.

    (a) $(x-y)dx + xdy = 0$

    (b) $xdx + (y-2x)dy = 0$

    (c) $(y^2+yx)dx - x^2dy = 0$

    (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

    (e) $-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$

    (f) $2x^2ydx = (3x^3+y^3)dy$

    (g) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$

    (h) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

    (i) $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

    (j) $(x+y)dx + xdy = 0$

    (k) $ydx = 2(x+y)dy$

    (l) $(y^2+xy)dx + x^2dy = 0$

    (m) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$

    (n) $(x^4+y^4)dx - 2x^3ydy = 0$

15. Resolva o PVI dado.

    (a) $xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$, $y(1) = 2$

    (b) $2x^2\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2$, $y(1) = -2$

    (c) $(x + e^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$, $y(1) = 0$

    (d) $(x + \sqrt{xy})\frac{dy}{dx} + x - y = x^{-1/2}y^{3/2}$, $y(1) = 1$

    (e) $y^2dx + (x^2+xy+y^2)dy = 0$, $y(0) = 1$

    (f) $(x^2+2y^2)dx = xydy$, $y(-1) = 1$

    (g) $xydx - x^2dy = y\sqrt{x^2+y^2}dy$, $y(0) = 1$

    (h) $y^3dx = 2x^3dy - 2x^2ydx$, $y(1) = \sqrt{2}$

    (i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2dx = xdy$, $y(1) = 0$

EDO linear de primeira ordem

16. Encontre a solução geral para a equação dada.

    (a) $y' = 5y$

    (b) $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$

    (c) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$

    (d) $y' + 3x^2y = x^2$

    (e) $x^2y' + xy = 1$

    (f) $(x+4y^2)dy + 2ydx = 0$

    (g) $(1+e^x)\frac{dy}{dx} + e^xy = 0$

    (h) $\cos x\frac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 0$

    (i) $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

    (j) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$

    (k) $ydx + (xy + 2x - ye^y)dy = 0$

    (l) $x\frac{dy}{dx} + (3x+1)y = e^{-3x}$

    (m) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}$

(n) $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(o) $\frac{dy}{dx} = y + e^x$

(p) $y' + 2xy = x^3$

(q) $y' = 2y + x^2 + 5$

17. Resolva o PVI dado.

(a) $\frac{dy}{dx} + 5y = 20, y(0) = 2$

(b) $y' + (\operatorname{tg} x)y = \cos^2 x, y(0) = -1$

(c) $\frac{dT}{dt} = k(T - 50); k$ constante $, T(0) = 200$

(d) $(x+1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x, y(1) = 10$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}, y(5) = 2$

(f) $xy' + y = e^x, y(1) = 2$

Equações de Bernoulli e Ricatti

18. Resolva a equação de Bernoulli dada:

(a) $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$

(b) $\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

(c) $\frac{dy}{dx} = y(xy^3 - 1)$

(d) $x\frac{dy}{dx} - (1+x)y = xy^2$

19. Resolva a equação de Ricatti dada, onde y_1 é uma solução conhecida.

(a) $\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$, $y_1 = 2$

(b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$, $y_1 = \frac{2}{x}$

(c) $\frac{dy}{dx} = 1 - x - y + xy^2$, $y_1 = 1$

(d) $\frac{dy}{dx} = 2x^2 + \frac{1}{x}y - 2y^2$, $y_1 = x$.