Resumo de aula 3

1 Função, Domínio, Imagem e Gráfico

Função

Uma função f de um conjunto A em um conjunto B, indicado por

$$f : A \longrightarrow B$$

é uma lei a qual para cada elemento x do conjunto A faz corresponder exatamente um elemeto chamado $f(x)$, no conjunto B.

Domínio

O conjunto A é chamado de domínio da função f e o conjunto B é o contra domínio de f

Imagem

A imagem de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$ quando x varia por todo o domínio, ou seja, a imagem de f é o conjunto $\{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$.

Gráfico

O gráfico de f é o conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A\}$$

Se tanto A como B forem subconjuntos dos reais, dizemos que f é uma função real de variável real.

Observação:
Por simplificação, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando tal ocorrer, ficar implícito que o contradomínio é $\mathbb{R}$ e o domínio o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual faz sentido a lei em questão.

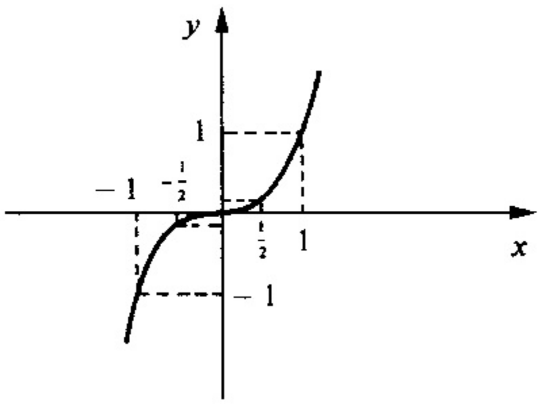
Exemplo 1.1. Seja $y = f(x), f(x) = x^3$. Tem-se
(a) O domínio de f, $D_f = \mathbb{R}$, pois para que x^3 seja um número real, x pode ser qualquer

real.
(b) O valor que f assume em x é $f(x) = x^3$. Essa função associa a cada real x o número real $y = f(x) = x^3$.
(c) O gráfico de f

$$G_f = \{(x, y) \mid y = x^3, x \in \mathbb{R}\}$$

Se $x = -1$, $y = f(-1) = (-1)^3 = -1 \Longrightarrow (x, y) = (-1, -1)$
Se $x = 0$, $y = f(0) = (0)^3 = 0 \Longrightarrow (x, y) = (0, 0)$
Se $x = 1$, $y = f(1) = (1)^3 = 1 \Longrightarrow (x, y) = (1, 1)$
Se $x = \frac{1}{2}$, $y = f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} \Longrightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
Se $x = -\frac{1}{2}$, $y = f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8} \Longrightarrow (x, y) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$
Se calcularmos mais pontos ordenados (x, y), obteremos uma ideia melhor para esboçar o gráfico da função. O esboço de gráfico de função, veremos mais tarde na aplicação de derivada. Veja abaixo o gráfico de f:

x	$f(x)$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

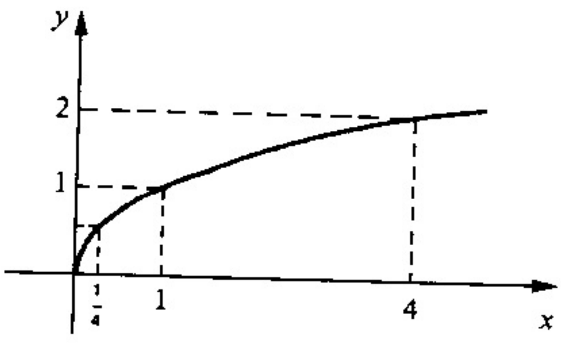


Exemplo 1.2. Seja f a função dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Tem-se
(a) O domínio de f, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, pois para que $\sqrt{x}$ seja um número real, x tem que ser positivo ou zero.
(b) O gráfico de f,

$$G_f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}, x \in D_f\} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \geq 0\}$$

Veja abaixo o gráfico de f:

x	$\sqrt{x}$
0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	1
4	2

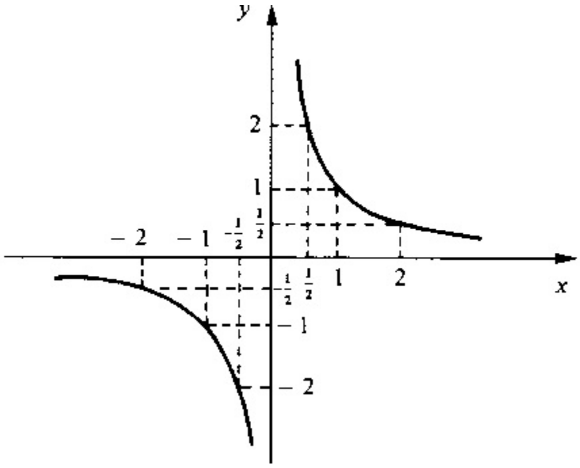


Exemplo 1.3. Considere a função g dada por $g(x) = \frac{1}{x}$. Tem-se
(a) O domínio de g, $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$, pois para que $\frac{1}{x}$ seja um número real, x não pode ser zero.
(b) O gráfico de g,

$$G_g = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x}, x \in D_g\} = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$$

Veja abaixo o gráfico de g:

x	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	-2
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$



Exemplo 1.4. (Função Constante) Uma função $y = f(x), x \in \mathbb{R}$, dada por $f(x) = k, k$ constante, denomine - se função constante.

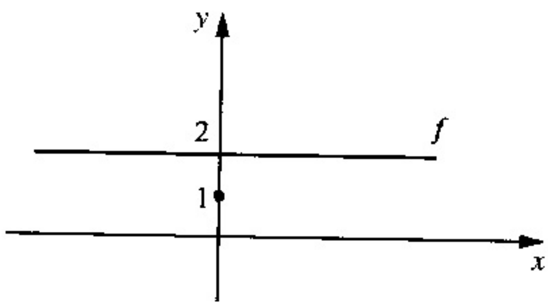
Por exemplo, $f(x) = 2$ é uma função constante: tem-se

(a) $D_f = \mathbb{R}$
(b) O gráfico de f,

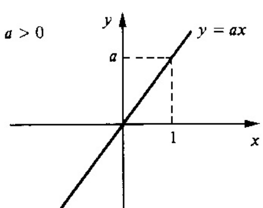
$$G_f = \{(x, y) \mid y = 2, x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

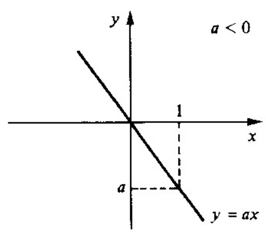
Veja abaixo o gráfico de f:

x	y
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2



Exemplo 1.5. (Função Linear) Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax, a$ constante, denomine - se função linear, seu gráfico é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$

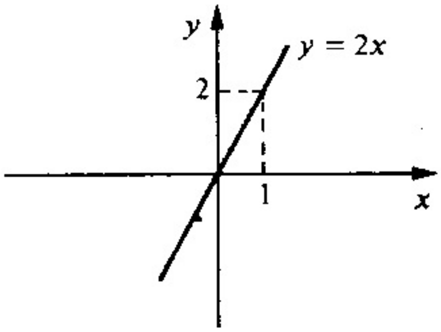




Exemplo 1.6. Esboce os gráficos: $(a) f(x) = 2x \quad (b) f(x) = -2x$

(a)

x	$y = f(x)$
0	0
1	2



(b)

x	$y = g(x)$
0	0
1	− 2