TEORIA DOS JOGOS

ALGORITMOS PROBABILÍSTICOS

O EQUILÍBRIO DE NASH NA ANÁLISE DE SISTEMAS MULTIAGENTES

- A Teoria dos Jogos é crucial para modelar a **tomada de decisão** racional em ambientes competitivos ou cooperativos, base de muitos Algoritmos Probabilísticos e de Aprendizado por Reforço.
- Permite projetar sistemas distribuídos (como redes de comunicação e leilões online) onde agentes autônomos buscam **otimizar seus resultados individuais**.
- Iremos analisar o **Equilíbrio de Nash** — o conceito de estabilidade para jogos simultâneos, onde não há incentivo para que um agente mude sua estratégia unilateralmente.

ESTRATÉGIAS DOMINANTES

- Mostrar como analisar jogos simultâneos sem estratégias dominantes visando chegar a um equilíbrio dito de Nash que represente o resultado do jogo

- O método EIEED (Eliminação Iterativa de Estratégias Estritamente Dominadas) não é aplicável quando não existem estratégias estritamente dominadas nos jogos simultâneos. O Equilíbrio de Nash traz um conceito mais geral que permite solucionar jogos onde não é possível identificar estratégias estritamente dominadas.

DEFINIÇÃO FORMAL DO EQUILÍBRIO DE NASH

- Uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando :
- Cada estratégia é a **melhor resposta possível** às estratégias dos demais jogadores.
- Essa condição é verdadeira para **todos os jogadores.**
- Jogo de prevenção de entrada no mercado nacional, que não pode ser resolvido pela EIEED.
- **Estratégias: Empresa dominante:** Investe ou não em expansão.
- **Entrante potencial:** Não exporta, ou exporta em pequena escala, ou exporta em larga escala.

EXEMPLO: MATRIZ DE RECOMPENSAS

- Apresenta a matriz de recompensas para o jogo :
- **Linha "Investe na expansão:** (2, 1), (1, 0), (1, 0).
- **Linha "Não investe:** (2, 1), (0, -1), (-1, 2).

PASSOS PARA OBTER O EQUILÍBRIO DE NASH

- **Marcar com (l):** Para cada estratégia na coluna (Entrante potencial), a melhor estratégia nas linhas (Empresa dominante).
- 2. **Marcar com (c):** Para cada estratégia na linha (Empresa dominante), a melhor estratégia nas colunas (Entrante potencial)

O EQUILÍBRIO ENCONTRADO

- A combinação de estratégias onde houver simultaneamente assinalados (l) e (c) será um equilíbrio de Nash.
- **Equilíbrio de Nash:** A combinação **("investe", "não exporta")**.
- A situação onde duas empresas, Auto Branco (AB) e Auto Azul (AA), competiam no mercado automobilístico, resolvida anteriormente pelo EIEED, também pode ser resolvida aplicando-se o equilíbrio de Nash.

O EQUILÍBRIO ESTRITO DE NASH

- Se um jogo apresenta um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes (obtido pelo EIEED), esse equilíbrio é também denominado de **equilíbrio estrito de Nash**. Esse equilíbrio estabelece que uma dada a estratégia de um jogador deve resultar em uma **recompensa estritamente maior** do que qualquer outra estratégia que ele possa adotar.
- O equilíbrio de Nash garante a cada jogador adotar individualmente a **melhor estratégia** frente à dos outros. No entanto, o Equilíbrio de Nash **não garante** que a situação resultante das decisões conjuntas seja a melhor possível (ou seja, não garante um ótimo de Pareto).

DEFININDO O ÓTIMO DE PARETO

- O Ótimo de Pareto é um conceito proveniente da economia.
- **Definição:** É a situação na qual qualquer mudança no sentido da melhoria para um agente implica na deterioração da situação de outro agente.
- **Melhoria Paretiana:** Enquanto o ótimo não é atingido, existe espaço para a melhoria da situação de um agente sem piorar a dos outros

EXEMPLO: NASH VS. PARETO (TARIFAS)

- Dois países (A e B) têm duas opções para tributar importações: tarifas altas e tarifas baixas.
- O Equilíbrio de Nash é ($100, $100), resultado de ambos adotarem **Tarifas Altas**.
- O Equilíbrio de Nash não encontrou um ótimo de Pareto, mas apenas a melhor resposta para um jogador frente à dos demais (sem combinar).

O ÓTIMO DE PARETO NO EXEMPLO

- O Ótimo de Pareto seria alcançado se Países A e B combinassem manter suas **tarifas baixas**. A recompensa conjunta seria **($150, $150)**, superior ao Nash de ($100, $100).

CURIOSIDADE: JOHN FORBES NASH JR.

- John Forbes Nash Jr. (1928 – 2015) foi um matemático norte-americano que trabalhou, entre outras coisas, com a teoria dos jogos. Compartilhou o Prêmio Nobel de 1994 com Reinhard Selten e John Harsanyi. Sua vida foi retratada no filme **Uma Mente Brilhante (2001)**, onde foi interpretado por Russell Crowe.

EXERCÍCIO PRÁTICO: IMPLEMENTAÇÃO DO EQUILÍBRIO DE NASH EM PYTHON

- O estudante deverá criar um algoritmo que recebe a matriz de recompensas de um jogo simultâneo e identifica todas as células que representam um Equilíbrio de Nash (ENEP).
- Utilizaremos o **Exemplo de Tarifas (País A x País B)**, onde dois países escolhem, simultaneamente, entre aplicar "Tarifas Altas" ou "Tarifas Baixas" em suas importações.

EXERCÍCIO PRÁTICO: IMPLEMENTAÇÃO DO EQUILÍBRIO DE NASH EM PYTHON

- **Jogador 1 (País A):** Estratégias são as Linhas (L1 e L2).
- **Jogador 2 (País B):** Estratégias são as Colunas (C1 e C2).
- **Recompensas (País A, País B)**: (Recompensa do Jogador da Linha, Recompensa do Jogador da Coluna).
- O Equilíbrio de Nash esperado é **(L1, C1)**, ou seja, onde ambos jogam "Tarifas Altas".

	País B (C1: T. Alta)	**País B (C2: T. Baixa)**
País A (L1: T. Alta)	(\$100, \$100)	(\$250, -\$50)
País A (L2: T. Baixa)	(-\$50, \$250)	(\$150, \$150)

TAREFA DE PROGRAMAÇÃO

Crie uma função em Python, encontrar_nash(matriz_recompensas), que siga os seguintes passos:

Entrada: A função deve receber uma matriz 2D que representa o jogo.

Cada elemento da matriz é uma tupla (rA, rB), onde rA é a recompensa do País A (linha) e rB é a recompensa do País B (coluna).

Lógica: O algoritmo deve iterar por cada célula da matriz (i, j) e verificar se aquela célula é um ENEP.

TAREFA DE PROGRAMAÇÃO

Condição de Nash (para a célula (i, j): Uma célula é um Nash se:

Para o Jogador A (Linha i): Sua recompensa rA na célula (i, j) deve ser a melhor em sua coluna j, comparada com todas as outras linhas k ≠ i da mesma coluna j.

Para o Jogador B (Coluna j): Sua recompensa rB na célula (i, j) deve ser a melhor em sua linha i, comparada com todas as outras colunas k ≠ j da mesma linha i.

Saída: A função deve retornar uma lista de tuplas (i, j) que representam as coordenadas (índice da linha, índice da coluna) dos Equilíbrios de Nash encontrados.

CONCLUSÃO

O que o algoritmo encontrou? Encontrou o ENEP (Tarifas Altas, Tarifas Altas).

O que o algoritmo NÃO encontrou? A célula (L2, C2)

— Tarifas Baixas, Tarifas Baixas — que representa o Ótimo de Pareto (recompensa conjunta superior: $150+150=300$ vs $100+100=200$

Conclusão: O algoritmo, ao simular agentes individuais e egoístas, confirma que o Equilíbrio de Nash nem sempre é a solução mais eficiente para o sistema como um todo.