

# **Linguagens Formais e Autômatos**

**Prof: Maurilio Martins Campano Júnior**

# Simplificação de GLC

- É possível simplificar algumas produções de uma GLC sem reduzir o seu poder de geração
- Tipos de simplificações:
  - Exclusão de símbolos inúteis
    - Exclusão de variáveis ou terminais não usados para gerar palavras
  - Exclusão de produções vazias
    - Exclusão de produções da forma  $A \rightarrow \lambda$  (se a palavra vazia pertence à linguagem, é incluída uma produção vazia específica para tal fim)
  - Exclusão de produções da forma  $A \rightarrow B$ 
    - Exclusão de produções da forma  $A \rightarrow B$ , ou seja, que simplesmente substituem uma variável por outra e, conseqüentemente, não adicionam qualquer informação na geração de palavras

# Simplificação de GLC – Exclusão de símbolos inúteis

- Variáveis (não-terminais) ou terminais que não contribuem com a produção de sentenças
- Etapas:
  - Exclusão de símbolos improdutivos
  - Exclusão de símbolos inacessíveis

# Simplificação de GLC – Exclusão de símbolos inúteis

- Símbolos inúteis
  - Variáveis (não-terminais) ou terminais
  - Não-usados na geração de palavras de terminais
  - Símbolos que não são produzidos
  - Símbolos que não são acessíveis
- 1)  $S \rightarrow aB \mid bC \mid aDa$
- 2)  $D \rightarrow aa \mid aS$
- 3)  $E \rightarrow aB$
- Quais são os símbolos improdutivos? E quais são os símbolos inalcançáveis?
- Símbolos improdutivos = B e C
- Símbolos inalcançáveis = E

# Simplificação de GLC – Exclusão de símbolos inúteis

- Algoritmo para exclusão dos símbolos inúteis
  - Seja  $G = (V, T, P, S)$  uma gramática livre de contexto. O algoritmo para exclusão dos símbolos inúteis é composto por duas etapas, como segue:
  - Etapa 1: Qualquer variável gera terminais. A gramática resultante desta etapa é  $G_1 = (V_1, T, P_1, S)$ , na qual  $V_1 \subseteq V$  é construído conforme o algoritmo abaixo.

$V_1 = \emptyset$   
repita  $V_1 = V_1 \cup \{A \mid A \rightarrow \alpha \in P \text{ e } \alpha \in (T \cup V_1)^*\}$   
até que o cardinal de  $V_1$  não aumente}

- O conjunto  $P_1$  possui os mesmos elementos que  $P$ , excetuando-se as produções cujas variáveis não pertencem a  $V_1$

# Simplificação de GLC – Exclusão de símbolos inúteis

- Algoritmo para exclusão dos símbolos inúteis
  - Etapa 2: qualquer símbolo é atingível a partir do símbolo inicial. A gramática resultante desta etapa é  $G_2 = (V_2, T_2, P_2, S)$ , na qual  $V_2 \subseteq V_1$  e  $T_2 \subseteq T$  são construídos conforme o algoritmo abaixo

$T_2 = \emptyset$   
 $V_2 = \{S\}$   
repita  $V_2 = V_2 \cup \{A \mid X \rightarrow \alpha A \beta \in P_1, X \in V_2\}$   
           $T_2 = T_2 \cup \{a \mid X \rightarrow \alpha a \beta \in P_1, X \in V_2\}$   
Até que os cardinais de  $V_2$  e  $T_2$  não aumentem

- O conjunto  $P_2$  possui os mesmos elementos que  $P_1$ , excetuando-se as produções cujos símbolos não pertencem a  $V_2$  ou  $T_2$

# Simplificação de GLC – Exclusão de símbolos inúteis

- Considere a seguinte gramática livre de contexto:
  - $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ , na qual:
  - $P = \{1) S \rightarrow aAa$
  - $2) S \rightarrow bBb$
  - $3) A \rightarrow a$
  - $4) A \rightarrow S$
  - $5) C \rightarrow c$

# Simplificação de GLC – Exclusão de símbolos inúteis – Etapa 1

iteração	variáveis
Início	$\emptyset$
1	{A, C}
2	{A, C, S}
3	{A, C, S}

- Gramática resultante
  - $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, \{S \rightarrow aAa, A \rightarrow a \mid S, C \rightarrow c\}, S)$



# Simplificação de GLC – Exclusão de símbolos inúteis – Etapa 2

iteração	variáveis	terminais
Início	{S}	$\emptyset$
1	{S, A}	{a}
2	{S, A}	{a}

- Gramática resultante
  - $G = (\{S, A\}, \{a\}, \{S \rightarrow aAa, A \rightarrow a \mid S\}, S)$

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias

- A exclusão de produções vazias (produções da forma  $A \rightarrow \lambda$ ) pode determinar modificações diversas nas produções da gramática. O algoritmo é dividido em três etapas, como segue:
  - Etapa 1: variáveis que constituem produções vazias.
    - Considera, inicialmente, todas as variáveis que geram diretamente a palavra vazia (exemplo:  $A \rightarrow \lambda$ ). A seguir são determinadas, sucessivamente, as variáveis que indiretamente geram a palavra vazia (exemplo:  $B \rightarrow A$ )

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias

- A exclusão de produções vazias (produções da forma  $A \rightarrow \lambda$ ) pode determinar modificações diversas nas produções da gramática. O algoritmo é dividido em três etapas, como segue:
  - Etapa 2: exclusão de produções vazias.
    - Inicialmente, são consideradas todas as produções não vazias. A seguir, cada produção cujo lado direito possui somente uma variável que gera a palavra vazia, determina uma produção adicional, sem essa variável

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias

- A exclusão de produções vazias (produções da forma  $A \rightarrow \lambda$ ) pode determinar modificações diversas nas produções da gramática. O algoritmo é dividido em três etapas, como segue:
  - Etapa 3: geração da palavra vazia, se necessário.
    - Se a palavra vazia pertence à linguagem, então é incluída uma produção para gerar a palavra vazia

# **Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Etapa 1**

- Seja  $G = (V, T, P, S)$  gramática livre de contexto. O algoritmo para exclusão das produções vazias é composto por três etapas, como segue:

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Etapa 1

- Etapa 1: variáveis que constituem produções vazias.
- O algoritmo para construir o conjunto das variáveis que geram  $\lambda$ , denotado por  $V_\lambda$ , é apresentado abaixo:

$$V_\lambda = \{A \mid A \rightarrow \lambda \in P\}$$

repita  $V_\lambda = V_\lambda \cup \{X \mid X \rightarrow X_1 \dots X_n \in P \text{ tal que } X_1, \dots, X_n \in V_\lambda\}$

até que o cardinal de  $V_\lambda$  não aumente

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Etapa 1

- Etapa 2: exclusão de produções vazias
- A gramática resultante desta etapa é  $G_1 = (V, T, P_1, S)$  O algoritmo , onde  $P_1$  é construído conforme o algoritmo abaixo:

$$P_1 = \{A \rightarrow \alpha \mid A \rightarrow \alpha \in P \text{ e } \alpha \neq \lambda\}$$

repita para toda  $A \rightarrow \alpha \in P_1$ ,  $X \in V_\lambda$  tal que  $\alpha = \alpha_1 X \alpha_2$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \neq \lambda$

faça  $P_1 = P_1 \cup \{A \rightarrow \alpha_1 \alpha_2\}$

até que o cardinal de  $P_1$  não aumente

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Etapa 1

- Etapa 3: geração da palavra vazia, se necessário.
- Se a palavra vazia pertence à linguagem, então a seguinte produção é incluída:  $S \rightarrow \lambda$ , resultando na seguinte gramática:
  - $G_2 = (V, T, P_2, S)$  onde:
    - $P_2 = P_1 \cup \{S \rightarrow \lambda\}$



# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Exemplo

- Considere a seguinte GLC:
  - $G = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S)$ , na qual:
  - $P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid Y, Y \rightarrow \lambda\}$

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Exemplo

- Etapa 1: variáveis que constituem produções vazias
  - O conjunto  $V_\lambda$  é construído conforme a tabela abaixo:

iteração	$V_\lambda$
Início	{S, X}
1	{S, Y, X}
2	{S, Y, X}

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Exemplo

- Etapa 2: exclusão de produções vazias
  - O novo conjunto de produções é construído conforme a tabela abaixo:

Iteração	produções
Início	$\{S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid Y\}$
1	$\{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb, X \rightarrow a \mid b \mid Y\}$
2	$\{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb, X \rightarrow a \mid b \mid Y\}$

- A gramática resultante desta etapa é a seguinte:
- $G_1 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb, X \rightarrow a \mid b \mid Y\}, S)$

# Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Exemplo

- Etapa 3: geração da palavra vazia se necessário
  - Como a palavra vazia pertence à linguagem, a produção  $S \rightarrow \lambda$  é incluída no conjunto de produções
  - A gramática resultante é a seguinte:
  - $G_2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \lambda, X \rightarrow a \mid b \mid Y\}, S)$

# **Simplificação de GLC – Exclusão de produções vazias – Simplificações combinadas**

- A gramática resultante da simplificação anterior resultou em uma gramática com um símbolo inútil. Ou seja, a exclusão de produções vazias gerou um símbolo inútil. De fato não é qualquer combinação de simplificações de gramática que atinge o resultado esperado. A combinação da sequência a seguir é recomendada:
  - Exclusão das produções vazias
  - Exclusão das produções que substituem variáveis
  - Exclusão dos símbolos inúteis

# Simplificação de GLC – Produções que substituem variáveis

- Uma produção que substitui diretamente uma variável por outra, ou seja, do tipo  $A \rightarrow B$  não adiciona informação alguma em termos de geração de palavras, a não ser o fato de que neste caso, a variável  $A$  pode ser substituída por  $B$ . Assim, se  $B \rightarrow \alpha$ , então a produção  $A \rightarrow B$  pode ser substituída por  $A \rightarrow \alpha$ . A generalização desta ideia é o algoritmo proposto, dividido em duas etapas

# Simplificação de GLC – Produções que substituem variáveis

- Etapa 1: fecho transitivo de cada variável.
  - Entende-se por fecho transitivo de uma variável o conjunto de variáveis que podem substituí-la transitivamente. Por exemplo, se  $A \rightarrow B$  e  $B \rightarrow C$ , então B e C pertencem ao fecho de A
- Etapa 2: exclusão das produções que substituem variáveis
  - Substitui as produções da forma  $A \rightarrow B$  por produções da forma  $A \rightarrow \alpha$ , na qual  $\alpha$  é atingível a partir de A através de seu fecho

# **Simplificação de GLC – Produções que substituem variáveis - Algoritmo**

- Seja  $G = (V, T, P, S)$  uma GLC, o algoritmo para exclusão das produções que substituem variáveis é composto por duas etapas, como segue:



# Simplificação de GLC – Produções que substituem variáveis - Algoritmo

- Etapa 1: fecho transitivo de cada variável
- O algoritmo para construir o fecho transitivo é apresentado abaixo:

para toda  $A \in V$   
faça  $\text{FECHO-}A = \{B \mid A \neq B \text{ e } A \Rightarrow B \text{ usando exclusivamente produções de } P \text{ da forma } X \rightarrow Y\}$

# Simplificação de GLC – Produções que substituem variáveis - Algoritmo

- Etapa 2: exclusão das produções que substituem variáveis
- A gramática resultante desta etapa é:  $G = (V, T, P_1, S)$ , na qual  $P_1$  é construído conforme o algoritmo abaixo

$P_1 = \{A \rightarrow \alpha \mid A \rightarrow \alpha \in P \text{ e } \alpha \notin V\}$   
para toda  $A \in V$  e  $B \in \text{FECHO-A}$   
faça se  $B \rightarrow \alpha \in P$  e  $\alpha \notin V$   
então  $P_1 = P_1 \cup \{A \rightarrow \alpha\}$

# Simplificação de GLC – Produções que substituem variáveis - Exemplo

- Considere a seguinte GLC
- $G = (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S)$ , onde:
  - $P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid S \mid \lambda\}$

# Simplificação de GLC – Produções que substituem variáveis - Exemplo

- Etapa 1: fecho transitivo de cada variável
  - FECHO-S =  $\emptyset$
  - FECHO-X = {S}

# Simplificação de GLC – Produções que substituem variáveis - Exemplo

- Etapa 2: exclusão das produções da forma  $A \rightarrow B$ 
  - Construção do conjunto de produções (a coluna iteração representa a execução do algoritmo para a variável referenciada) é conforme ilustrado abaixo

iteração	produções
Início	$\{S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid \lambda\}$
S	$\{S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid \lambda\}$
X	$\{S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid \lambda \mid aXa \mid bXb\}$

- A gramática resultante é a seguinte
  - $G = (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S)$ , onde  $P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid \lambda \mid aXa \mid bXb\}$

# **Simplificação de GLC – Sequencia de Simplificação**

- A combinação da sequência a seguir é recomendada:
  - Exclusão das produções vazias
  - Exclusão das produções que substituem variáveis
  - Exclusão dos símbolos inúteis

# Exercícios

- Simplifique as seguintes GLC

a)  $S \rightarrow AB \mid SCB$

$$A \rightarrow aA \mid C$$

$$B \rightarrow bB \mid b$$

$$C \rightarrow cC \mid \lambda$$

b)  $S \rightarrow aAd \mid A$

$$A \rightarrow Bc \mid \lambda$$

$$B \rightarrow Ac \mid a$$

# Exercícios

- Simplifique as seguintes GLC

c)  $S \rightarrow A \mid B \mid ABS$

$$A \rightarrow aA \mid \lambda$$

$$B \rightarrow aBA b \mid \lambda$$

d)  $S \rightarrow AB \mid CSB$

$$A \rightarrow aB \mid C$$

$$B \rightarrow bbB \mid b$$



# Exercícios

- Simplifique as seguintes GLC

e)  $S \rightarrow A \mid ABa \mid AbA$

$$A \rightarrow Aa \mid \lambda$$

$$B \rightarrow Bb \mid BC$$

$$C \rightarrow CB \mid CA \mid bB$$

f)  $S \rightarrow AB \mid BCS$

$$A \rightarrow aA \mid C$$

$$B \rightarrow bbB \mid b$$

$$C \rightarrow cC \mid \lambda$$

# Exercícios

- Simplifique as seguintes GLC

g)  $S \rightarrow aAd \mid A \mid \lambda$

$$A \rightarrow Bc \mid c$$

$$B \rightarrow Ac$$

h)  $S \rightarrow aAd \mid A \mid \lambda$

$$A \rightarrow Bc \mid c$$

$$B \rightarrow Ac \mid SS$$

# Exercícios

- Simplifique as seguintes GLC

i)  $S \rightarrow aAbBcC$

$$A \rightarrow aA \mid \lambda$$

$$B \rightarrow bB \mid A$$

$$C \rightarrow A \mid B \mid D$$

$$D \rightarrow aD \mid Db \mid cEc$$

$$E \rightarrow dEf \mid dfE \mid D$$

$$F \rightarrow Ea \mid bF \mid \lambda$$