

Forma Normal de Greibach

- Uma GLC = (V, T, P, S), é dita estar na Forma normal de Greibach se todas as suas produções são da forma (suponha que A é uma variável de V, a é terminal de T e $\alpha \in V^*$):
 - $A \rightarrow a\alpha$
- Portanto, a palavra vazia não pertence à linguagem gerada por uma gramática na FNC
- A transformação de uma GLC em uma Gramática na FNG segue os seguintes passos:
 - Etapa 1: Simplificação da gramática
 - Etapa 2: Renomeação das variáveis em uma ordem crescente qualquer
 - Etapa 3: transformação de produções para a forma $A_r \rightarrow A_s\alpha$ onde $r \leq s$
 - Etapa 4: exclusão das recursões da forma $A_r \rightarrow A_r\alpha$
 - Etapa 5: um terminal no início do lado direito de cada produção
 - Etapa 6: produções na forma $A \rightarrow a\alpha$ onde α é composta por variáveis

Etapa 1 – Simplificação da gramática

- Análoga à correspondente etapa do algoritmo referente à FNC

Etapa 2 – Renomeação das variáveis em uma ordem crescente qualquer

- As variáveis da gramática são renomeadas em uma ordem crescente qualquer, como, por exemplo, A_1, A_2, \dots, A_n , em que n é o cardinal do conjunto de variáveis. Diferentes critérios de renomeação podem resultar em diferentes gramáticas na forma normal de Greibach. Entretanto, todas são equivalentes (geram a mesma linguagem)

Etapa 3 – transformação de produções para a forma $A_r \rightarrow A_s\alpha$ onde $r \leq s$

- As produções são modificadas, garantindo que a primeira variável do lado direito é maior ou igual que a do lado esquerdo, considerando-se a ordenação da etapa anterior. As produções $A_r \rightarrow A_s\alpha$ tais que $r > s$ são modificadas, substituindo-se a variável A_s pelas suas correspondentes produções ($A_s \rightarrow \beta_1 \mid \dots \mid \beta_m$), resultando em $A_r \rightarrow \beta_1\alpha \mid \beta_m\alpha$ e assim sucessivamente. Entretanto, como o conjunto de variáveis é finito, existe um limite para as produções crescentes, que pode ser a geração de um terminal ($A_r \rightarrow a\alpha$) ou de uma recursão ($A_r \rightarrow A_r\alpha$)

Etapa 4 – exclusão das recursões da forma $A_r \rightarrow A_r\alpha$

- As recursões (à esquerda) podem existir originalmente na gramática, ou serem geradas pela etapa anterior. A eliminação da recursão pode ser realizada, introduzindo-se variáveis auxiliares e incluindo-se recursão à direita ($B_r \rightarrow \alpha B_r$)

Etapa 5 – um terminal no início do lado direito de cada produção

- Após a execução da etapa anterior, todas as produções da forma $A_r \rightarrow A_s \alpha$ são tais que $r < s$. Consequentemente, as produções da maior variável A_n só podem iniciar por um terminal no lado direito. Assim, se, em $A_{n-1} \rightarrow A_n \alpha$, for substituído A_n pelas suas correspondentes produções (exemplo: $A_{n-1} \rightarrow a\beta\alpha$). A repetição do algoritmo para A_{n-2}, \dots, A_1 resultará em produções exclusivamente da forma $A_r \rightarrow a\alpha$

Etapa 6 – produções na forma $A \rightarrow a\alpha$ onde α é composta por variáveis

- É análoga à correspondente etapa do algoritmo relativo à forma normal de Chomsky

Exemplo 1

- $G = (V = \{S, A\}, T = \{a, b\}, P, S)$, onde:

- $P = \{S \rightarrow AAb \mid a$
- $A \rightarrow SSa \mid b\}$

A partir desta gramática, ao realizarmos os seis passos para a transformação para a Forma Normal de Greibach, os resultados de cada etapa são descritos abaixo

Etapa 1: simplificação: A gramática já se encontra simplificada, não é necessário realizar nenhuma alteração

Etapa 2: renomear: Substitui S por A_1 e A por A_2 , resultando nas seguintes regras de produção:

- $A_1 \rightarrow A_2A_2b \mid a$
- $A_2 \rightarrow \underline{A_1}A_1a \mid b$

Etapa 3: ver se: $A_r \rightarrow A_s$ com $r \leq s$, se sim substituir o A_s por o que ele gera: como temos a regra $A_2 \rightarrow A_1A_1a$, esta regra apresenta $r = 2$ e $s = 1$, sendo então $r > s$. Quando isso ocorre iremos substituir o primeiro símbolo do lado direito da regra, por todas as regras existentes, ou seja, para $A_2 \rightarrow A_1A_1a$, iremos substituir no primeiro A_1 , buscando todas as regras de A_1 , e colocando no lugar desta regra. Por exemplo, a primeira regra de A_1 é $A_1 \rightarrow A_2A_2b$, colocamos esta regra no lugar do A_1 da regra que houve problema ($A_2 \rightarrow A_1A_1a$), resultando em $A_2 \rightarrow A_2A_2bA_1a$. E para a segunda regra de A_1 , substituímos também na regra com problema, resultando em $A_2 \rightarrow aA_1a$. Assim as regras resultantes da terceira etapa são:

- $A_1 \rightarrow A_2A_2b \mid a$
- $A_2 \rightarrow \underline{A_2}A_2bA_1a \mid aA_1a \mid b$

Etapla 4: eliminar $A_r \rightarrow A_rX$ e substituir por o que ele gera e $B \rightarrow X$ e $B \rightarrow XB$ (Tirar a recursão da esquerda e passar para a direita): nesta quarta etapa devemos procurar regras que estejam no formato $A_r \rightarrow A_rX$, tal como a regra acima $A_2 \rightarrow \underline{A_2}A_2bA_1a$. Quando temos uma regra com problema nesta etapa, precisamos criar uma nova variável auxiliar, utilizaremos o nome B para esta variável. A variável B será formada sempre pelas variáveis e terminais existentes na regra problemática, com exceção do termo da recursão, por exemplo, a regra problemática é $A_2 \rightarrow \underline{A_2}A_2bA_1a$, sendo assim, B é formado por A_2bA_1a , resultando na regra $B \rightarrow A_2bA_1a$. Além disso, uma segunda regra de produção em B é criada, adicionando esta mesma variável criada (B), no fim desta regra, sendo assim, $B \rightarrow A_2bA_1aB$. Resumindo esta primeira parte da quarta etapa, a partir de uma regra com recursão $A_r \rightarrow A_rX$, criamos uma nova variável (B) que gera X resultando na regra $B \rightarrow X$ e uma segunda regra de produção $B \rightarrow XB$. Além disso, na regra com problema $A_2 \rightarrow \underline{A_2}A_2bA_1a$, buscamos as outras regras de produção de A_2 e colocamos no lugar desta, com a sua nova variável B no final, resultando assim em $A_2 \rightarrow aA_1aB$ e $A_2 \rightarrow bB$, sendo que aA_1a é a segunda regra de A_2 , que é inserida no lugar do A_2 sublinhado na regra com problema, mantendo-se o final da regra, que agora é chamado de B, portanto $A_2 \rightarrow aA_1aB$. E para a terceira regra de A_2 , $A_2 \rightarrow b$, inserimos o b no lugar do A_2 sublinhado da regra com problema, mantendo o novo final da regra que agora é chamado de B, resultando em $A_2 \rightarrow bB$. Portanto as regras resultantes desta etapa são:

- $A_1 \rightarrow A_2A_2b \mid a$
- $A_2 \rightarrow aA_1a \mid b \mid aA_1aB \mid bB$
- $B \rightarrow A_2bA_1a \mid A_2bA_1aB$

Etapla 5: ver se $A \rightarrow a\alpha$, (terminal como primeiro elemento): esta etapa visa garantir que todas as regras de produção iniciem com um símbolo terminal, uma vez que o formato das regras de uma gramática na FNG é $A \rightarrow a\alpha$. Este problema ocorre com três regras do nosso primeiro exemplo, são elas: $A_1 \rightarrow A_2A_2b$, $B \rightarrow A_2bA_1a$ e $B \rightarrow A_2bA_1aB$.

Para a regra $A_1 \rightarrow A_2A_2b$, separamos o lado direito da regra em duas partes, uma formada pelo primeiro elemento (A_2) e a segunda parte com o restante das variáveis e terminais (A_2b). O que realizamos nesta etapa é buscar as regras do primeiro elemento (A_2), inserimos cada regra de A_2 no lugar dele, mantendo a segunda parte da regra sem alterar. Assim, temos que A_2 tem quatro regras ($A_2 \rightarrow aA_1a \mid b \mid aA_1aB \mid bB$), e cada regra de A_2 , será substituída no primeiro elemento, mantendo a segunda parte da regra. A partir da primeira regra de A_2 , criamos uma nova regra para A_1 , que será formada por: aA_1aA_2b . A partir da segunda regra de A_2 , criamos uma nova regra para A_1 , que será formada por bA_2b . Na terceira regra de A_2 , temos a terceira regra de A_1 , formada por

aA_1aBA_2b , e por fim da quarta regra de A_2 , formamos a quarta regra de A_1 , sendo então bBA_2b . Assim, para a regra $A_1 \rightarrow A_2A_2b$, que não inicia-se com terminal, criamos então quatro novas regras (pois temos quatro regras em A_2), formando assim as regras $A_1 \rightarrow \underline{aA_1a}A_2b \mid \underline{bA_2b} \mid \underline{aA_1aBA_2b} \mid \underline{bBA_2b}$, sendo que o trecho sublinhado em cada regra é originário de A_2 , e o restante é a segunda parte da regra que ocasionou o problema.

Para a regra $B \rightarrow \underline{A_2b}A_1a$, precisamos realizar a mesma etapa, pois começa com variável (A_2), assim dividimos a regra em duas partes, uma com o primeiro elemento (sublinhado) e o restante. Buscamos as regras do elemento sublinhado e inserimos no lugar dele, mantendo a segunda parte da regra inalterável. Como resultado para esta regra, criamos quatro regras para B , que são $B \rightarrow \underline{aA_1ab}A_1a \mid \underline{bb}A_1a \mid \underline{aA_1aBb}A_1a \mid \underline{bBb}A_1a$, sendo a parte sublinhada de A_2 e o restante, a segunda parte da regra com problema ($\underline{A_2b}A_1a$).

Por fim, a terceira regra com problema na quinta etapa da FNG é $B \rightarrow \underline{A_2b}A_1aB$. Novamente dividimos a regra em duas partes, sendo que a primeira é o primeiro elemento da regra (parte sublinhada), e a segunda parte é o restante. Substituímos a parte sublinhada da regra por todas as regras da variável, neste caso A_2 . Assim, para regra $B \rightarrow A_2bA_1aB$ com problema, criamos quatro novas regras em B , inserindo no lugar de A_2 as quatro regras de A_2 , com o restante da regra que originou o problema na quinta etapa. As regras resultantes são: $B \rightarrow aA_1abA_1aB \mid bbA_1aB \mid aA_1aBbA_1aB \mid bBbA_1aB$.

Corrigidas as três regras que geram problema na quinta etapa, temos as seguintes regras de produção como resultado da etapa:

- $A_1 \rightarrow aA_1aA_2b \mid bA_2b \mid aA_1aBA_2b \mid bBA_2b \mid a$
- $A_2 \rightarrow aA_1a \mid b \mid aA_1aB \mid bB$
- $B \rightarrow aA_1abA_1a \mid bbA_1a \mid aA_1aBbA_1a \mid bBbA_1a \mid aA_1abA_1aB \mid bbA_1aB \mid aA_1aBbA_1aB \mid bBbA_1aB$

Etapa 6: ver se: $A \rightarrow \alpha\alpha$ onde α é só variável, se não tiver, cria-se uma variável X e $X \rightarrow$ terminal, e substitui o terminal por X nas regras onde ele aparecer (com exceção da primeira posição): a sexta etapa da transformação de GLC em FNG visa garantir que todos os símbolos após o primeiro terminal (foi feito na quinta etapa) são somente variáveis. Isto é realizado criando-se uma variável para cada terminal, e substituindo o terminal pela variável onde este aparecer.

Analisaremos a resolução desta etapa para o exemplo acima por partes, primeiro as regras de A_1 , depois A_2 e por fim B .

Nas regras de A_1 , temos: $A_1 \rightarrow aA_1aA_2b \mid bA_2b \mid aA_1aBA_2b \mid bBA_2b \mid a$, sendo que os símbolos sublinhados devem ser substituídos por variáveis auxiliares. Assim, podemos

criar duas variáveis, X e Y , sendo que $X \rightarrow a$ e $Y \rightarrow b$, e substituir os termos sublinhados por X e Y , resultando em: $A_1 \rightarrow aA_1XA_2Y \mid bA_2Y \mid aA_1XBA_2Y \mid bBA_2Y \mid a$. Lembrando que o primeiro elemento de cada regra não é substituído, portanto, para a última regra $A_1 \rightarrow a$, este terminal não é substituído por X , pois é o primeiro símbolo de uma regra. Após a criação de X e Y , estes devem agora ser incluídos nas variáveis da gramática.

Para as regras de A_2 , temos $A_2 \rightarrow aA_1a \mid b \mid aA_1aB \mid bB$, sendo que os terminais sublinhados devem ser substituídos. Neste caso, como já criamos uma variável para o terminal a (X), podemos utilizar a mesma e realizar a substituição de a por X , que resulta em $A_2 \rightarrow aA_1X \mid b \mid aA_1XB \mid bB$.

Em B , temos as seguintes regras: $B \rightarrow aA_1aBbA_1a \mid bA_1a \mid aA_1aBbA_1a \mid bBbA_1a \mid aA_1aBbA_1aB \mid bA_1aB \mid aA_1aBbA_1aB \mid bBbA_1aB$, sendo então que os símbolos terminais sublinhados devem ser substituídos, e podemos utilizar as mesmas variáveis X e Y , resultando assim nas seguintes regras: $B \rightarrow aA_1XYA_1X \mid bYA_1X \mid aA_1XBYA_1X \mid bBYA_1X \mid aA_1XYA_1XB \mid bYA_1XB \mid aA_1XBYA_1XB \mid bBYA_1XB$

Realizada a substituição dos terminais por variáveis nas regras das três variáveis, temos que as regras de produção resultantes da sexta etapa são:

- $A_1 \rightarrow aA_1XA_2Y \mid bA_2Y \mid aA_1XBA_2Y \mid bBA_2Y \mid a$
- $A_2 \rightarrow aA_1X \mid b \mid aA_1XB \mid bB$
- $B \rightarrow aA_1XYA_1X \mid bYA_1X \mid aA_1XBYA_1X \mid bBYA_1X \mid aA_1XYA_1XB \mid bYA_1XB \mid aA_1XBYA_1XB \mid bBYA_1XB$
- $X \rightarrow a$
- $Y \rightarrow b$

Assim, a partir da gramática original abaixo, transformamos em uma gramática na Forma Normal de Greibach, descrita abaixo também.

- **Gramática original:**
- $G = (V = \{S, A\}, T = \{a, b\}, P, S)$, onde:
 - $P = \{S \rightarrow AAb \mid a$
 - $A \rightarrow SSa \mid b\}$
- **Gramática resultante:**
 - $G = (V = \{A_1, A_2, B, X, Y\}, T = \{a, b\}, P, A_1)$, onde:
 - $P = \{A_1 \rightarrow aA_1XA_2Y \mid bA_2Y \mid aA_1XBA_2Y \mid bBA_2Y \mid a$
 - $A_2 \rightarrow aA_1X \mid b \mid aA_1XB \mid bB$

- $B \rightarrow aA_1XYA_1X \mid bYA_1X \mid aA_1XBYA_1X \mid bBYA_1X \mid aA_1XYA_1XB \mid bYA_1XB \mid aA_1XBYA_1XB \mid bBYA_1XB$
- $X \rightarrow a$
- $Y \rightarrow b$

Exemplo 2

- $G = (V = \{S, A, B, C\}, T = \{a, b, c\}, P, S)$, onde:
 - $P = \{S \rightarrow aAB \mid BC$
 - $A \rightarrow aBB \mid b$
 - $B \rightarrow baA \mid ba \mid Cc$
 - $C \rightarrow BAC \mid cC\}$

Para a primeira etapa, temos que a gramática já está simplificada, não havendo produções vazias, unitárias e símbolos inúteis. Para a segunda etapa, renomeamos as variáveis, sendo que S vira A1, A vira A2, B vira A3 e C vira A4, resultando nas seguintes produções:

- $P = \{A_1 \rightarrow aA_2A_3 \mid A_3A_4$
- $A_2 \rightarrow aA_3A_3 \mid b$
- $A_3 \rightarrow baA_2 \mid ba \mid A_4c$
- $A_4 \rightarrow \underline{A_3A_2A_4} \mid cA_4\}$

Para a terceira etapa temos uma regra com problema, a regra sublinhada nas regras de produção acima. Assim substituímos o primeiro elemento desta regra (A3), por todas as regras de A3, com o mesmo final (A2A4), inserindo então três regras no lugar desta regra com problema, resultando nas seguintes regras de produção:

- $P = \{A_1 \rightarrow aA_2A_3 \mid A_3A_4$
- $A_2 \rightarrow aA_3A_3 \mid b$
- $A_3 \rightarrow baA_2 \mid ba \mid A_4c$
- $A_4 \rightarrow baA_2A_2A_4 \mid baA_2A_4 \mid \underline{A_4cA_2A_4} \mid cA_4\}$

Na quarta etapa, devemos resolver o problema da recursão, que pode ser encontrado em uma regra acima, a regra sublinhada. Excluindo o primeiro elemento desta regra, criamos a variável auxiliar B, e inserimos duas regras para B, sendo elas $B \rightarrow cA_2A_4$ e $B \rightarrow cA_2A_4B$. E para substituir a regra sublinhada acima, buscamos as outras três regras

de A_4 , e inserimos no lugar do A_4 sublinhado, mantendo o final da regra, que agora é chamado de B. Isto resulta nas seguintes regras:

- $P = \{A_1 \rightarrow aA_2A_3 \mid \underline{A_3A_4}$
- $A_2 \rightarrow aA_3A_3 \mid b$
- $A_3 \rightarrow baA_2 \mid ba \mid \underline{A_4c}$
- $A_4 \rightarrow baA_2A_2A_4 \mid baA_2A_4 \mid cA_4 \mid baA_2A_2A_4B \mid baA_2A_4B \mid cA_4B$
- $B \rightarrow cA_2A_4 \mid cA_2A_4B\}$

A quinta etapa visa deixar todas as regras com um símbolo terminal como primeiro elemento, e isto não ocorre em duas regras, que pode ser vista sublinhada nas produções acima. Neste caso devemos substituir primeiro a segunda regra sublinhada depois a primeira regra, pois a primeira regra com problema depende da variável indicada na segunda regra com problema. A substituição da segunda regra resulta em

- $P = \{A_1 \rightarrow aA_2A_3 \mid \underline{A_3A_4}$
- $A_2 \rightarrow aA_3A_3 \mid b$
- $A_3 \rightarrow baA_2 \mid ba \mid \underline{baA_2A_2A_4c} \mid \underline{baA_2A_4c} \mid cA_4c \mid \underline{baA_2A_2A_4Bc} \mid \underline{baA_2A_4Bc} \mid cA_4Bc$
- $A_4 \rightarrow baA_2A_2A_4 \mid baA_2A_4 \mid cA_4 \mid baA_2A_2A_4B \mid baA_2A_4B \mid cA_4B$
- $B \rightarrow cA_2A_4 \mid cA_2A_4B\}$

Agora podemos resolver o problema na regra de A_1 , que resulta nas seguintes regras de produção:

- $P = \{A_1 \rightarrow aA_2A_3 \mid \underline{baA_2A_4} \mid \underline{baA_4} \mid \underline{baA_2A_2A_4cA_4} \mid \underline{baA_2A_4cA_4} \mid cA_4cA_4 \mid \underline{baA_2A_2A_4BcA_4} \mid \underline{baA_2A_4BcA_4} \mid cA_4BcA_4$
- $A_2 \rightarrow aA_3A_3 \mid b$
- $A_3 \rightarrow \underline{baA_2} \mid \underline{ba} \mid \underline{baA_2A_2A_4c} \mid \underline{baA_2A_4c} \mid cA_4c \mid \underline{baA_2A_2A_4Bc} \mid \underline{baA_2A_4Bc} \mid cA_4Bc$
- $A_4 \rightarrow \underline{baA_2A_2A_4} \mid \underline{baA_2A_4} \mid cA_4 \mid \underline{baA_2A_2A_4B} \mid \underline{baA_2A_4B} \mid cA_4B$
- $B \rightarrow cA_2A_4 \mid cA_2A_4B\}$

E por fim, a sexta etapa visa transformar os terminais em variáveis, exceto aqueles que aparecem como primeiro elemento de uma regra. Sendo assim, precisamos criar uma variável para o terminal a, e uma para o terminal c, sendo então as variáveis X e Z criadas e substituídos os terminais sublinhados acima por X e Z, resultando nas seguintes regras de produção, e gramática na Forma Normal de Greibach abaixo:

- $G = (V = \{A_1, A_2, A_3, A_4, B, X, Y\}, T = \{a, b, c\}, P, A_1)$, onde:
- $P = \{A_1 \rightarrow aA_2A_3 \mid bXA_2A_4 \mid bXA_4 \mid bXA_2A_2A_4ZA_4 \mid bXA_2A_4ZA_4 \mid cA_4ZA_4 \mid bXA_2A_2A_4BZA_4 \mid bXA_2A_4BZA_4 \mid cA_4BZA_4$
- $A_2 \rightarrow aA_3A_3 \mid b$
- $A_3 \rightarrow bXA_2 \mid bX \mid bXA_2A_2A_4Z \mid bXA_2A_4Z \mid cA_4Z \mid bXA_2A_2A_4BZ \mid bXA_2A_4BZ \mid cA_4BZ$
- $A_4 \rightarrow bXA_2A_2A_4 \mid bXA_2A_4 \mid cA_4 \mid bXA_2A_2A_4B \mid bXA_2A_4B \mid cA_4B$
- $B \rightarrow cA_2A_4 \mid cA_2A_4B$
- $X \rightarrow a$
- $Y \rightarrow b\}$

Bibliografia

VIEIRA, NEWTON JOSÉ. **Introdução aos Fundamentos da Computação**. São Paulo. Pioneira Thomson Learning. 2006;
MENEZES, P. B.; DIVERIO, T. A.; **Teoria da Computação: Máquinas Universais e Computabilidade**; 3ª edição Bookman 2011
MENEZES, P. B. ; **Linguagens Formais e Autômatos**. 6ª edição. Ed. Artmed. 2011
SIPSER M. **Introdução à Teoria da Computação**. 2 ed. Cengage Learning.2007
MORET, B. M. "**Theory of Computation**". Addison-Wesley, 1998.
HOPCROFT, JOHN E.; ULLMAN, JEFFREY D.; MOTWANI, RAJEEV **Introdução à Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação** Ed.Campus 2002
SILVA, FLAVIO SOARES CORRÊA; MELO, ANA CRISTINA VIEIRA; **Modelos Clássicos de Computação** Ed. Thomson 1ª Edição 2006