1.

证：若d整除m, n ，则d整除$m \pm n$

若d整除n，则d整除kn

∴若d整除m, n

则d整除$m - kn$ (m mod n)

∴ (m, n) 和 (m mod n, n) 的公约数相同

∴ gcd(m, n) = gcd(n, m mod n)

2.

① $i=0$

② 判断 i^2 和n的大小

大于

③ 输出 $i-1$

小于

④ $i=i+1$

3. 主定理

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

1. 若 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ 则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. 若 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, 则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. 若 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ 且对某个常数 $c < 1$ 和充分大的 n 有 $af(n/b) \le cf(n)$, 则 $T(n) = \Theta(f(n))$

[illegible]

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$$
$$= a[aT(\frac{n}{b^2}) + f(\frac{n}{b})] + f(n)$$
$$= \cdots$$
$$= a^k T(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$
$$(n = b^k)$$
$$= T(1) n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j f(\frac{n}{b^j})$$

当 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$:

$$T(n) = T(1) n^{\log_b a} + O(n^{\log_b a - \varepsilon} n^{\varepsilon}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

当 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$:

$$T(n) = T(1) n^{\log_b a} + \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

当 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ 且 $af(n/b) \le cf(n)$

$$T(n) \le T(1) n^{\log_b a} + \Theta(f(n)) = \Theta(f(n))$$

1-6.

(1) $f(n)=2\log n \quad g(n)=\log n+5$

$\therefore f(n)=\Theta(g(n))$

(2) $f(n)=2\log n \quad g(n)=\sqrt{n}$

$\therefore f(n)=O(g(n))$

(3) $f(n)=n \quad g(n)=\log^2 n$

$\therefore f(n)=\Omega(g(n))$

(4) $f(n)=\Omega(g(n))$

(5) $f(n)=\Theta(g(n))$

(6) $f(n)=\Omega(g(n))$

(7) $f(n)=\Omega(g(n))$

(8) $f(n)=O(g(n))$