第8章　线性规划

(Linear Programming)

学习要点

- 理解线性规划算法模型
- 掌握解线性规划问题的单纯形算法

8.1 线性规划问题

某企业计划生产甲、乙两种产品。这些产品分别要在A、B、C、D、四种不同的设备上加工。按工艺资料规定，单件产品在不同设备上加工所需要的台时如下表所示，企业决策者应如何安排生产计划，使企业总的利润最大?

设备 / 产品	A	B	C	D	利润（元）
甲	2	1	4	0	2
乙	2	2	0	4	3
有效台时	12	8	16	12	

设x1 、x2 分别为甲、乙两种产品的产量

$$\max \ Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

8.1 线性规划问题

线性规划的数学模型由三个要素构成

- 决策变量 Decision variables
- 目标函数 Objective function
- 约束条件 Constraints

$$\max \ Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

怎样辨别一个模型是线性规划模型?

特征是:

- 问题的目标函数是多个决策变量的线性函数，通常是求最大值或最小值;
- 问题的约束条件是一组多个决策变量的线性不等式或等式。

8.1 线性规划问题和单纯形算法

线性规划问题及其表示

线性规划问题可表示为如下形式：

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{8.1}$$

s. t.

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} x_t \le b_i \quad i = 1,2,\cdots,m_1 \tag{8.2}$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_{jt} x_t = b_j \quad j = m_1+1,\cdots,m_1+m_2 \tag{8.3}$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_{kt} x_t \ge b_k \quad k = m_1+m_2+1,\cdots,m_1+m_2+m_3 \tag{8.4}$$

$$x_t \ge 0 \quad t = 1,2,\cdots,n \tag{8.5}$$

- 变量满足约束条件(8.2)-(8.5)式的一组值称为线性规划问题的一个**可行解**。
- 所有可行解构成的集合称为线性规划问题的**可行区域**。
- 使目标函数取得极值的可行解称为**最优解**。
- 在最优解处目标函数的值称为**最优值**。
- 有些情况下可能不存在最优解。
- 通常有两种情况：

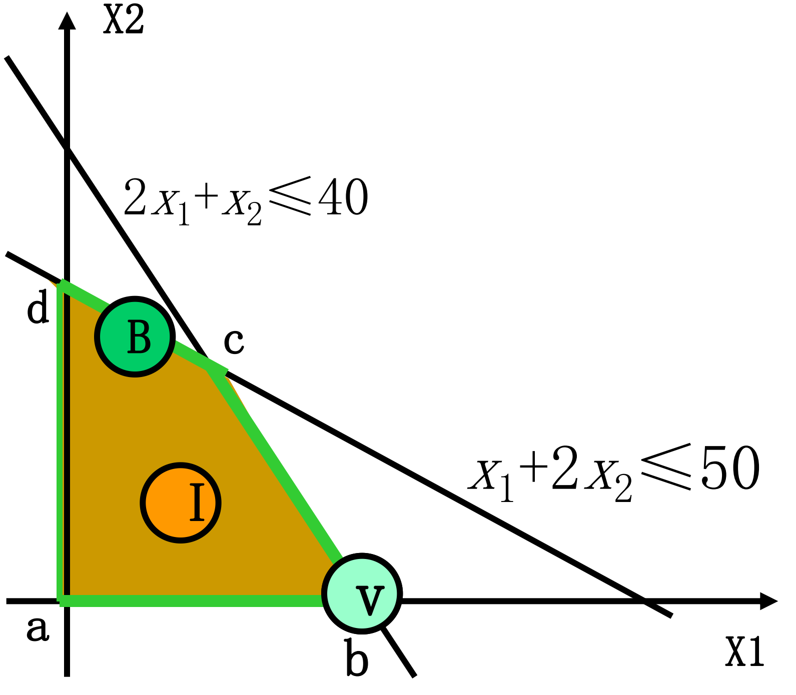
(1)根本没有可行解，即给定的约束条件之间是相互排斥的，可行区域为空集；

(2)目标函数没有极值，也就是说在n 维空间中的某个方向上，目标函数值可以无限增大，而仍满足约束条件，此时目标函数值无界。

线性规划模型

线性规划解的若干概念

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 5x_1+3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1+x_2 \leqslant 40 \\
& x_1+2x_2 \leqslant 50 \\
& x_1,\ x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$



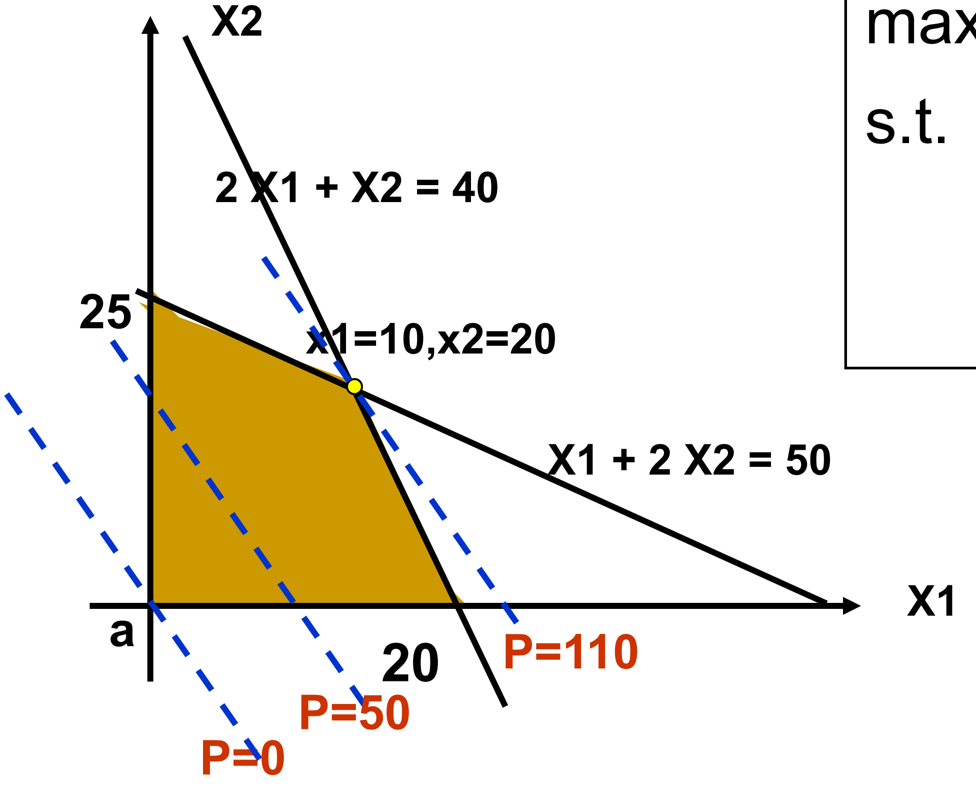
可行点

可行域

凸多面体

线性规划模型

线性规划解的图示



$$\max \ z = 5x_1+3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1+x_2\le 40$$

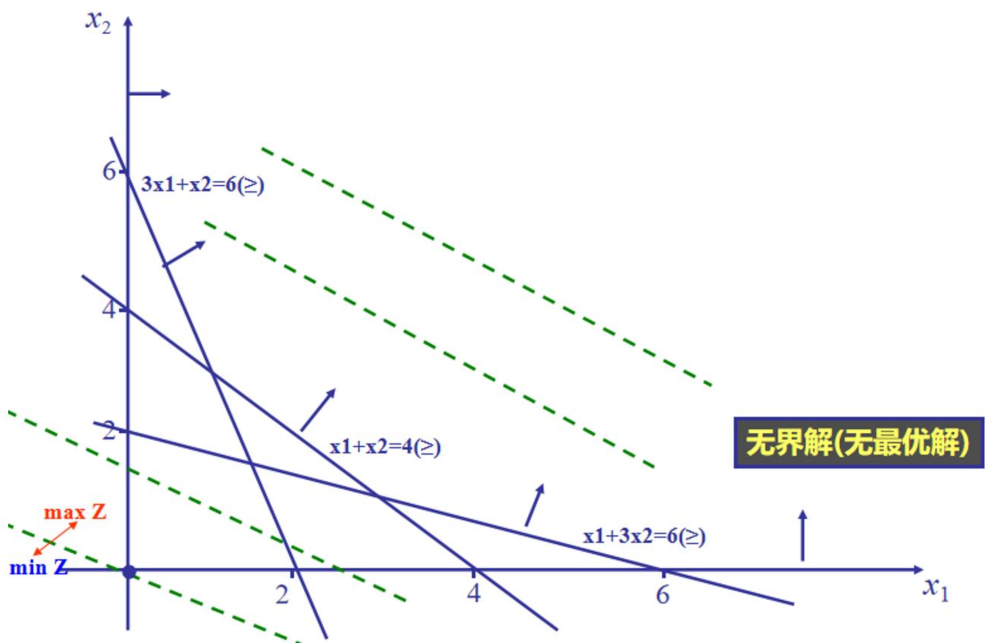
$$x_1+2x_2\le 50$$

$$x_1，\ x_2\ge 0$$

无最优解

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

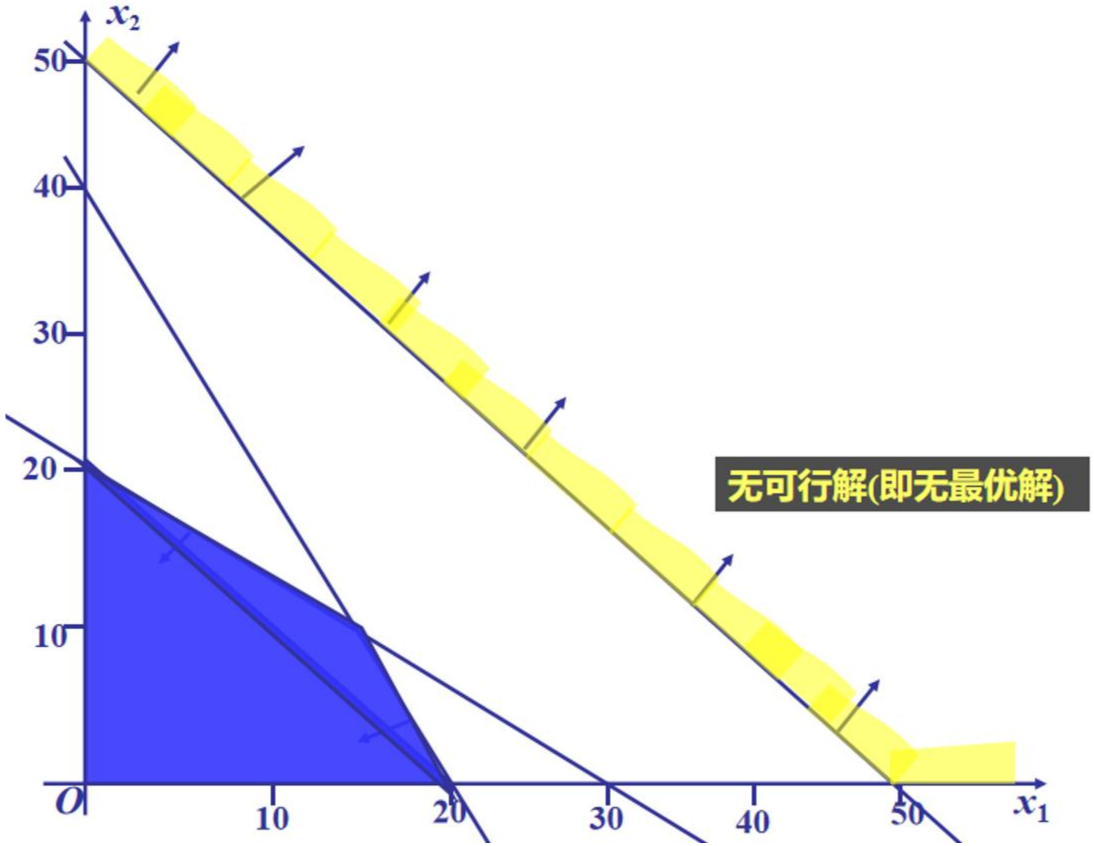
$$s.t = \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



无可行解

$$maxZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$s.t = \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 40 \\ x_1 + 1.5x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \ge 50 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



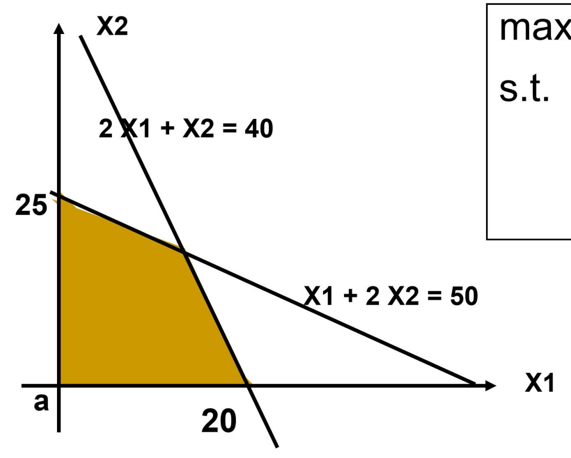
- 图解法

优点：可直观简便地获得最优解。

缺点：高维问题很难画图，同时如果没有代数语言的描述就缺乏严谨理论的保证。

- 最优解非常容易出现在可行域构成的多面体的顶点处。

设想如果最优解总是会出现在顶点上的话，我们就可以只通过搜索可行域构成的多面体的顶点（极点）就可以找到最优解了，这个方法被称为单纯型法



$$\max \ z = 5x_1+3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1+x_2\le 40$$

$$x_1+2x_2\le 50$$

$$x_1，x_2\ge 0$$

线性规划基本定理

- 约束条件(8.2)-(8.5) n+m 个约束中某 n 个约束以等号满足的可行解称为线性规划问题的**基本可行解**。
- 若n>m，则基本可行解中至少有 n-m 个分量为0，也就是说，基本可行解中最多有 m 个分量非零。
- **线性规划基本定理：**如果线性规划问题有最优解，则必有一基本可行最优解。
- 上述定理的重要意义在于，它把一个最优化问题转化为一个组合问题，即在(8.2)-(8.5)式的 m+n 个约束条件中，确定最优解应满足其中哪n个约束条件的问题。
- 由此可知，只要对各种不同的组合进行测试，并比较每种情况下的目标函数值，直到找到最优解。

- Dantzig于1948年提出了线性规划问题的单纯形算法。
- 单纯形算法的特点是：

（1）只对约束条件的若干组合进行测试，测试的每一步都使目标函数的值增加；

（2）一般经过不大于m或n次迭代就可求得最优解。

约束标准型线性规划问题的单纯形算法

- 当线性规划问题中**没有不等式约束(8.2)和(8.4)式**，而只有等式约束(8.3)和变量非负约束(8.5)时，称该线性规划问题具有**标准形式**
- 先考察一类更特殊的标准形式线性规划问题。这一类线性规划问题中，**每一个等式约束中，至少有一个变量的系数为正**，且这个变量只在该约束中出现。
- 在每一约束方程中选择一个这样的变量，并以它作为变量求解该约束方程。这样选出来的变量称为左端变量或**基本变量**，其总数为m个。剩下的n-m个变量称为右端变量或**非基本变量**。
- 这一类特殊的标准形式线性规划问题称为**约束标准型线性规划问题**

- 虽然约束标准型线性规划问题非常特殊，但是对于理解线性规划问题的单纯形算法是非常重要的。
- 后面将看到，任意一个线性规划问题可以转换为约束标准型线性规划问题。

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad ------------(1)$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \ (i=1,2,\cdots,m) & --(2)\\ x_j\geq 0, j=1,2,\cdots,n & -------(3)\end{cases}$$

特点：

(1) 目标函数求最大值（有时求最小值）

(2) 约束条件都为等式方程，且右端常数项b_i都大于或等于零

(3) 决策变量x_j为非负。

例子

$$\max \quad z = -x_2 + 3x_3 - 2x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= 7 \\ x_4 - 2x_2 + 4x_3 &= 12 \\ x_6 - 4x_2 + 3x_3 + 8x_5 &= 10 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3,4,5,6$$

		x_2	x_3	x_5
z	0	-1	3	-2
x_1	7	3	-1	2
x_4	12	-2	4	0
x_6	10	-4	3	8

- 任何约束标准型线性规划问题，只要将所有非基本变量都置为0，从约束方程式中解出满足约束的基本变量的值，可求得一个基本可行解。
- 单纯形算法的基本思想就是从一个基本可行解出发，进行一系列的基本可行解的变换。
- 每次变换将一个非基本变量与一个基本变量互调位置，且保持当前的线性规划问题是一个与原问题完全等价的标准线性规划问题。
- 基本可行解

x=(7, 0, 0, 12, 0, 10)。

		x_2	x_3	x_5
z	0	-1	3	-2
x_1	7	3	-1	2
x_4	12	-2	4	0
x_6	10	-4	3	8

- **单纯形算法的第1步：**选出使目标函数增加的非基本变量作为**入基变量**。
- 查看单纯形表的第1行（也称之为z行）中标有非基本变量的各列中的值。
- 选出使目标函数增加的非基本变量作为入基变量。
- z行中的正系数非基本变量都满足要求。
- 在上面单纯形表的z行中只有1列为正，即非基本变量相应的列，其值为3。
- 选取非基本变量x_3

作为入基变量。

		x_2	x_3	x_5
z	0	-1	3	-2
x_1	7	3	-1	2
x_4	12	-2	4	0
x_6	10	-4	3	8

- **单纯形算法的第2步：**选取**离基变量**。
- 在单纯形表中考察由第1步选出的入基变量所相应的列。
- 在一个基本变量变为负值之前，入基变量可以增到多大。
- 如果入基变量所在的列与基本变量所在行交叉处的表元素为负数，那么该元素将不受任何限制，相应的基本变量只会越变越大。
- 如果入基变量所在列的所有元素都是负值，则目标函数无界，已经得到了问题的无界解。
- 如果选出的列中有一个或多个元素为正数，要弄清是哪个数限制了入基变量值的增加。

		x_2	x_3	x_5
z	0	-1	3	-2
x_1	7	3	-1	2
x_4	12	-2	4	0
x_6	10	-4	3	8

- 受限的增加量可以用入基变量所在列的元素（称为主元素）来除主元素所在行的“常数列”（最左边的列）中元素而得到。所得到数值越小说明受到限制越多。
- 应该选取受到限制最多的基本变量作为离基变量，才能保证将入基变量与离基变量互调位置后，仍满足约束条件。
- 上例中，惟一的一个值为正的z行元素是3，它所在列中有2个正元素，即4和3。
- min{12/4, 10/3}=3，应该选取x_4为离基变量；
- 入基变量x_3取值为3。

		x_2	x_3	x_5
z	0	-1	3	-2
x_1	7	3	-1	2
x_4	12	-2	4	0
x_6	10	-4	3	8

- **单纯形算法的第3步：转轴变换**。
- 转轴变换的目的是将入基变量与离基变量互调位置。
- 给入基变量一个增值，使之成为基本变量；
- 修改离基变量，让入基变量所在列中，离基变量所在行的元素值减为零，而使之成为非基本变量。

- 解离基变量所相应的方程，将入基变量x_3用离基变量x_4表示为 $x_3 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4 = 3$
- 再将其代入其他基本变量和所在的行中消去x_3 ，

$$x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + 2x_5 = 10$$

$$x_6 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_4 + 8x_5 = 1$$

- 代入目标函数得到

$$z = 9 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_4 - 2x_5$$

- 形成新单纯形表

		x_2	x_4	x_5
z	9	1/2	-3/4	-2
x_1	10	5/2	1/4	2
x_3	3	-1/2	1/4	0
x_6	1	-5/2	-3/4	8

- **单纯形算法的第4步：**转回并重复第1步，进一步改进目标函数值。
- 不断重复上述过程，直到z行的所有非基本变量系数都变成负值为止。这表明目标函数不可能再增加了。
- 在上面的单纯形表中，惟一的值为正的z行元素是非基本变量x_2相应的列，其值为1/2。
- 因此，选取非基本变量x_2作为入基变量。
- 它所在列中有惟一的正元素5/2，即基本变量x_1相应行的元素
- 因此，选取x_1为离基变量。

		x_2	x_4	x_5
z	9	1/2	-3/4	-2
x_1	10	5/2	1/4	2
x_3	3	-1/2	1/4	0
x_6	1	-5/2	-3/4	8

- 再经步骤3的转轴变换得到新单纯形表。
- 新单纯形表z行的所有非基本变量系数都变成负值，求解过程结束。
- 整个问题的解可以从最后一张单纯形表的常数列中读出。
- 目标函数的最大值为11；
- 最优解为：x*=(0, 4, 5, 0, 0, 11)。

		x_1	x_4	x_5
z	11	-1/5	-4/5	-12/5
x_2	4	2/5	1/10	4/5
x_3	5	1/5	3/10	2/5
x_6	11	1	-1/2	10

单纯形算法计算步骤

- 单纯形算法的计算过程可以用单纯形表的形式归纳为一系列基本矩阵运算
- 主要运算为转轴变换，该变换类似解线性方程组的高斯消去法中的消元变换。

单纯形表：

- $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为基本变量，$x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 为非基本变量。
- 基本变量下标集为B={1, 2, ···, m}；

  非基本变量下标集为

  N={m+1, m+2, ···, n}；
- 当前基本可行解为

  （$b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0$）。

		x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_n
z	c_0	c_{m+1}	c_{m+2}	$\cdots$	c_n
x_1	b_1	a_{1m+1}	a_{1m+2}	$\cdots$	a_{1n}
x_2	b_2	a_{2m+1}	a_{2m+2}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$				
x_m	b_m	a_{mm+1}	a_{mm+2}	$\cdots$	a_{mn}

单纯形算法计算步骤

步骤1：选入基变量。

- 如果所有$c_j \le 0$，则当前基本可行解为最优解，计算结束。
- 否则取$c_e > 0$相应的非基本变量x_e为入基变量。

步骤2：选离基变量。

- 对于步骤1选出的入基变量x_e，如果所有$a_{ie} \le 0$，则最优解无界，计算结束。
- 否则计算 $\theta = \min_{a_{ie}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ie}}\right\} = \frac{b_k}{a_{ke}}$
- 选取基本变量x_k为离基变量。
- 新的基本变量下标集为 $\overline{B} = B + \{e\} - \{k\}$
- 新的非基本变量下标集为 $\overline{N} = N + \{k\} - \{e\}$

		x_{m+1}	x_{m+2}	…	x_n
z	c_0	c_{m+1}	c_{m+2}	…	c_n
x_1	b_1	a_{1m+1}	a_{1m+2}	…	a_{1n}
x_2	b_2	a_{2m+1}	a_{2m+2}	…	a_{2n}
⋮	⋮				
x_m	b_m	a_{mm+1}	a_{mm+2}	…	a_{mn}

■步骤3：转轴变换。

■新单纯形表中各元素变换如下。

$$\begin{cases} \bar{b}_i = b_i - a_{ie}\dfrac{b_k}{a_{ke}} & i \in \bar{B} \\ \bar{b}_e = \dfrac{b_k}{a_{ke}} \end{cases}$$

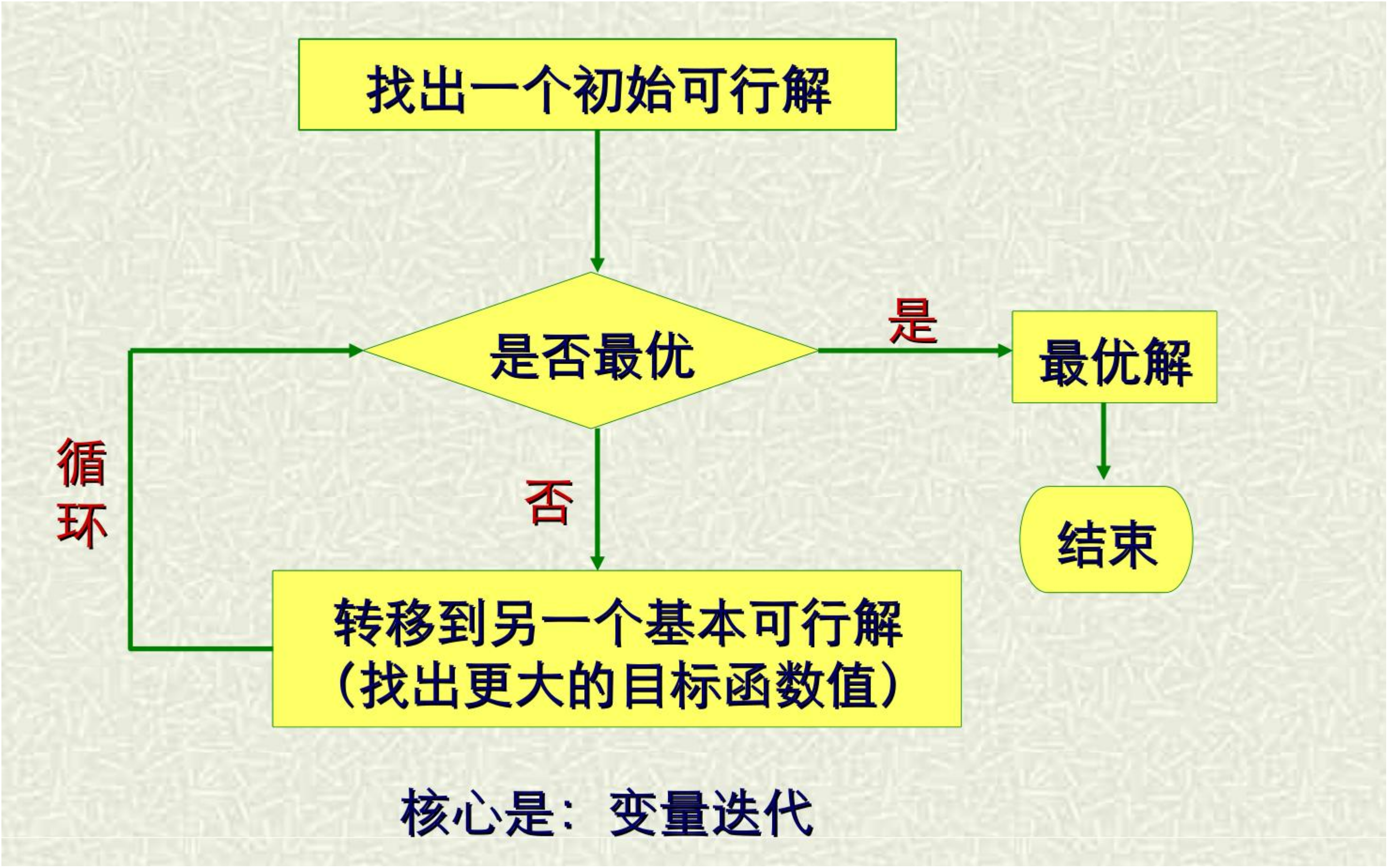
$$\begin{cases} \bar{a}_{ij} = a_{ij} - a_{ie}\dfrac{a_{kj}}{a_{ke}} & i \in \bar{B}, \quad j \in \bar{N} \\ \bar{a}_{ik} = -\dfrac{a_{ie}}{a_{ke}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{ej} = \dfrac{a_{kj}}{a_{ke}} & j \in \bar{N} \\ \bar{a}_{ek} = \dfrac{1}{a_{ke}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{c}_i = c_i - c_e\dfrac{a_{ki}}{a_{ke}} & i \in \bar{N} \\ \bar{c}_k = -\dfrac{c_e}{a_{ke}} \end{cases}$$

■步骤4：转步骤1。

单纯形法思路



找出一个初始可行解
是否最优
是
最优解
结束
否
循
环
转移到另一个基本可行解
（找出更大的目标函数值）
核心是：变量迭代

将一般问题转化为约束标准型

- 线性规划标准形式

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$s.t\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geq 0, j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

- 目标函数的转换

如果是求极小值即 $\min z=\sum c_jx_j$，则可将目标函数乘以(-1)，可化为求极大值问题。

即 $\max z'=-z=-\sum c_jx_j$

也就是：令 $z'=-z$，可得到上式。

将一般问题转化为约束标准型

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

- 变量的变换

变量$x_j \leq 0$的变换

可令 $x_j' = -x_j$ ，显然 $x_j' \geq 0$

若存在取值无约束的变量 x_j，可令 $x_j = x_j' - x_j''$
其中：$x_j', x_j'' \geq 0$

将一般问题转化为约束标准型

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

约束方程的变换

引入**松弛变量**，利用松弛变量的非负性，将不等式转化为等式。

- 松弛变量记为y_i，共有m_1+m_3个。
- 在求解过程中，应当将松弛变量与原来变量同样对待。求解结束后，抛弃松弛变量。
- 注意松弛变量前的符号由相应的原不等式的方向所确定。

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i \longrightarrow \sum a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \qquad x_{n+i} \geq 0$$

$$\sum a_{ij} x_j \geq b_i \longrightarrow \sum a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$$

进一步讨论一人工变量法

- 前面讨论了在标准型中系数矩阵有单位矩阵，很容易确定一组基可行解。在实际问题中有些模型并不含有单位矩阵，为了得到一组基向量和初基可行解，在约束条件的等式左端加一组虚拟变量，得到一组基变量。这种人为加的变量称为人工变量，构成的可行基称为人工基，用大M 法或两阶段法求解，这种用人工变量作桥梁的求解方法称为人工变量法。

$$\max \qquad z = -x_2 + 3x_3 - 2x_5$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= 7 \\ x_4 - 2x_2 + 4x_3 &= 12 \\ x_6 - 4x_2 + 3x_3 + 8x_5 &= 10 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3,4,5,6$$

- 为了进一步构造标准型约束，还需要引入m个**人工变量**，记为z_i。
- 至此，原问题已经变换为等价的约束标准型线性规划问题。
- 对极小化线性规划问题，只要将目标函数乘以-1即可化为等价的极大化线性规划问题。

$$
\begin{aligned}
z_1 + x_1 + 2x_3 + y_1 &= 18 \\
z_2 + 2x_2 - 7x_4 + y_2 &= 0 \\
z_3 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\
z_4 + x_2 - x_3 + 2x_4 - y_3 &= 1
\end{aligned}
$$

一般线性规划问题的2阶段单纯形算法

- 引入人工变量后的线性规划问题与原问题并不等价，除非所有z_i都是0　。
- 为了解决这个问题，在求解时必须分2个阶段进行。
- 第一阶段用一个辅助目标函数 $z' = -\sum_{i=1}^{m} z_i$ 替代原来的目标函数。
- 这个线性规划问题称为原线性规划问题所相应的辅助线性规划问题
- 对辅助线性规划问题用单纯形算法求解。
- 如果原线性规划问题有可行解，则辅助线性规划问题就有最优解，且其最优值为0，即所有z_i都为0。

- 在辅助线性规划问题最后的单纯形表中，所有z_i均为非基本变量。
- 划掉所有z_i相应的列，剩下的就是只含x_i和y_i的约束标准型线性规划问题了。
- 单纯形算法第一阶段的任务就是构造一个初始基本可行解。
- 单纯形算法第二阶段的目标是求解由第一阶段导出的问题。
- 此时要用原来的目标函数进行求解。
- 如果在辅助线性规划问题最后的单纯形表中，z_i不全为0，则原线性规划问题没有可行解，从而原线性规划问题无解。

一般线性规划问题的大M单纯形算法

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1、x_2、x_3 \ge 0 \end{cases}$$

标准形式

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

系数矩阵中不存在单位矩阵，无法建立初始单纯形表。

人为添加两个单位向量，得到人工变量单纯形法

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,7 \end{cases}$$

M是一个很大的抽象的数，不需要给出具体的数值，可以理解为它能大于给定的任何一个确定数值。再用前面介绍的单纯形法求解该模型。

随堂练习

- 8-6

8-6　试用单纯形算法解下面的线性规划问题：

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} &2x_1 + 7.5x_2 + 3x_2 \geqslant 10000 \\ &20x_1 + 5x_2 + 10x_3 \geqslant 30000 \\ &x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

退化情形的处理

- 用单纯形算法解一般的线性规划问题时，可能会遇到退化的情形，即在迭代计算的某一步中，常数列中的某个元素的值变成0，使得相应的基本变量取值为0。
- 如果选取退化的基本变量为离基变量，则作转轴变换前后的目标函数值不变。在这种情况下，算法不能保证目标函数值严格递增，因此，可能出现无限循环。

$$\max \quad z=\frac{3}{4}x_1-20x_2+\frac{1}{2}x_3-6x_4$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}x_1-8x_2-x_3+9x_4 &\le 0\\
\frac{1}{2}x_1-12x_2-\frac{1}{2}x_3+3x_4 &\le 0 \qquad x_i\ge 0 \qquad i=1,2,3,4\\
x_3 &\le 1
\end{aligned}$$

- Bland提出避免循环的一个简单易行的方法。
- Bland提出在单纯形算法迭代中，按照下面的2个简单规则就可以避免循环。
- 规则1：设 $e = \min\{j \mid c_j > 0\}$ ，取x_e为入基变量。
- 规则2：设 $k = \min\left\{ l \mid \frac{b_l}{a_{le}} = \min_{a_{ie}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ie}}\right\}\right\}$ 取x_k为离基变量。
- 算法leave(col)已经按照规则2选取离基变量。
- 选取入基变量的算法enter(objrow) 中只要加一个break语句即可。

对偶单纯形

使用要求/条件要求b列至少有一个数小于0。检验数都小于0

与单纯形法一样，对偶法第一步仍然是要化成标准形式，但是注意这里化成标准形式时和单纯形法不同。由于对偶法计算时等式右端可以为负值，所以为了简化计算，统一将不等式符号化为“<=”，也就是只添加松弛变量。即原式化为：

$$
\min S = x_1 + 2x_2 + 3x_3
$$
$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
x_2 - x_3 \geq 2 \\
x_1、x_2、x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

$$
\min S = x_1 + 2x_2 + 3x_3
$$
$$
\begin{cases}
-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 8 \\
-x_2 + x_3 + x_6 = -2 \\
x_1, x_2, \cdots, x_6 \geq 0
\end{cases}
$$

$$\min S = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 8 \\ -x_2 + x_3 + x_6 = -2 \\ x_1,\ x_2, \cdots,\ x_6 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形表

S	0	-1	-2	-3	0	0	0
x_4	-4	-1	1	-1	1	0	0
x_5	8	1	1	2	0	1	0
x_6	-2	0	-1	1	0	0	1

判断对偶法为最优解的方法：左下值(b值)全为正数(也就是-4,8,-2那里)，以及检验数全为非正

S	0	-1	-2	-3	0	0	0
x_4	-4	$\boxed{-1}$	1	-1	1	0	0
x_5	8	1	1	2	0	1	0
x_6	-2	0	-1	1	0	0	1

对偶法的换基迭代方式，与单纯法所考虑的重点不同，对偶法主要目的是要将b值全部化为正数，因此要优先考虑将b值中最小的数做出基处理，这里选的值为-4，然后用检验数除以该行对应的相应列的数(-1/-1，-3/-1)，取最小的值做入基处理

S	4	0	-3	-2	-1	0	0
x_1	4	1	-1	1	-1	0	0
x_5	4	0	2	1	1	1	0
x_6	-2	0	$\boxed{-1}$	1	0	0	1

S	10	0	0	-5	-1	0	-3
x_1	6	1	0	0	-1	0	-1
x_5	0	0	0	3	1	1	-2
x_2	2	0	1	-1	0	0	1

因为b值全都非负，得最优单纯形表，所以得原问题得最优解为x1 = 6，x2 = 2，x3 = 10，最优值为S = 10.