习题7.2.1 用CFL泵引理来证明下面的语言都不是上下文无关的：

* a) $\{a^ib^jc^k \mid i < j < k\}$。

b) $\{a^nb^nc^i \mid i \leqslant n\}$。

c) $\{0^p \mid p$是素数$\}$。提示：使用和例4.3中证明不是正则语言时采用的相同的思想。

*! d) $\{0^i1^j \mid j = i^2\}$。

! e) $\{a^nb^nc^i \mid n \leqslant i \leqslant 2n\}$。

! f) $\{ww^Rw \mid w$是0和1的串$\}$。也就是说，由某个串w和它的反向串再和它本身连接起来的串（比如001100001）构成的集合。

a) 取 $z = a^p b^{p+1} c^{p+2} \in L$，设 $z = uvwxy$

$|vwx| \leq p \quad |vx| \geq 1$

可能出现以下情况：

① vwx 只含 a　则 $|v^2wx^2|$ 的长度 $> |vwx|$

∴ a 的数量 $> p$

不满足 $uv^2wx^2y \in L$

② 只含 b，与只含 a 同理

③ 只含 c，$|v^0wx^0|$ 的长度 $< |vwx|$

∴ c 的数量 $\leq p+1$

不满足 $uv^0wx^0y \in L$

④ 包含 a, b　如 若 $|x| > 0$ 则 $|v^2wx^2|$ 使得 b 长于 c

若 $|x| = 0$ 则 $|v^2wx^2|$ 使得 a 长于 b

∴ 不满足

⑤ 包含 b, c　若 $|v^0wx^0|$ 自会使 $|a| \geq |b|$ 或 $|b| \geq c$

∴ 不满足

∴ 不是上下文无关语言

b) 取 $z = a^p b^p c^p \in L$ 设 $z = uvwxy$

① vwx 只含 a v^0wx^0 使 a 的长度与 b 不等

不满足

② vwx 只含 b，与只含 a 同理

不满足

③ vwx 只含 c v^2wx^2 使 c 的长度比 a 和 b 更长

不满足

④ vwx 含 a, b，v^0wx^0 使 a 或 b 的长度小于 c

不满足

⑤ vwx 含 b, c，v^2wx^2 会使 a 的长度与 b 不同，或 c 长于 a

不满足

∴ 不是上下文无关语言

c) 若该语言是上下文无关的，设其常的长度为 n，

考虑素数 $p \geq n+2$（素数是无穷的）

0^p 可写为 $uvwxy$

设 $|vx| = m$ 则 $|uwy| = p-m$

$|uv^{p-m}wx^{p-m}y| = p-m+m(p-m) = (m+1)(p-m)$

$p-m > 1$ ($p \geq n+2$, $m \leq n$)

$m+1 > 1$ ($m \geq 1$)

∴ $|uv^{p-m}wx^{p-m}y|$ 为合数

∴ 不是上下文无关语言

d) 取 $z = 0^p 1^{p^2}$ 设 $z =$ [redacted] $uvwxy$

① vwx 只含 0　v^0wx^0 使得 0 的长度不为 1 长度的平方根

② vwx 只含 1　同理

③ vwx 含 0, 1, ~~[illegible]~~ v, x 必定分别只含 0 和 1, 否则 v^2wx^2 使其不满足。

设 $|v| = a$　$|x| = b$

$(p+a)^2 = p^2 + b \Rightarrow p^2 + a^2 + 2pa = p^2 + b \Rightarrow a^2 + 2pa = b$

$(p+2a)^2 = p^2 + 2b \Rightarrow p^2 + 4a^2 + 4pa = p^2 + 2b \Rightarrow a^2 + 2pa = \frac{b}{2}$

$\Downarrow$

$a^2 = 2a^2 \Rightarrow a = 0$

$\because a + b \geq 1 \therefore b \geq 1$

$b = 0^2 + 2p \times 0 = 0$ 矛盾

$\therefore$ 不满足

$\therefore$ 不是上下文无关语言

e) 取 $z=a^pb^pc^{2p}$ 设 $z=uvwxy$

① vwx 只含 a　v^0wx^0 使 a 的长度与 b 不相等，不满足

② vwx 只含 b　与只含 a 同理

③ vwx 只含 c　v^2wx^2 使 c 的长度大于 a 的 2 倍，不满足

④ vwx 含 a, b　$v^{2p}wx^{2p}$ 使得 a 或 b 的长度长于 c，不满足

⑤ vwx 含 b, c　若 $|v|\geq 1$　v^0wx^0 使 a b 长度不等

若 $|v|=0$ 则 $|x|\geq 1$　v^2wx^2 使 c 长度大于 a 的 2 倍

∴不满足

∴不是上下文无关语言

取 $z=1^p0^p0^p1^p1^p0^p$ 设 $z=uvwxy$

① vwx 只含 1　v^0wx^0 会使得前部分的 1 的数量不再等于后部分的 1 的数量的一半，不满足

② vwx 只含 0　v^0wx^0 会使得前部分的 0 的数量不再等于后部分的 0 的数量的两倍，不满足

③ vwx 含 0, 1　同上，v^0wx^0 只能改变相邻两个 0、1 段中的数量，从而使不同段之间不再具有倍数关系，不满足

∴不是上下文无关语言

习题7.2.5 使用奥格登引理（习题7.2.3）来证明下列语言不是CFL：

! a) $\{0^i1^j0^k \mid j=\max(i,k)\}$。

!! b) $\{a^nb^nc^i \mid i\neq n\}$。提示：如果$n$是奥格登引理的常数，考虑串$z=a^nb^nc^{n+n!}$。

a) 取 $z = 0^n 1^{n+1} 0^{n+1}$

将0全部取为显著位置 $z = uvwxy$

v和x不可能为01混合（uv^2wx^2y不满足）

∴ vx至少有1个显著位置

∴ v和x要么为空 要么为0串，且不同时为空

uv^3wx^3y，1的个数不等于两边的0的个数

不满足，∴不是上下文无关语言

b) 取 $z = a^n b^n c^{n+n!}$

取a为显著位置 $z = uvwxy$

∴ v只可能为a串

x只可能为等长的b串（否则a b长度不等）

设 $|v| = m \leq n$

取 $u v^{\frac{n!}{m}} w x^{\frac{n!}{m}} y$（一定能整除）

$= a^{n+n!} b^{n+n!} c^{n+n!}$ 长度相等

∴不满足

∴不是上下文无关语言

1: 构造与下列文法等价的CNF。

S -> ABB | bAA

B ->aBa|aa|ε

A ->bbA|ε

① $S \to ABB \mid CAA$ $\quad C \to b$

$B \to DBD \mid DD \mid \varepsilon$ $\quad D \to a$

$A \to CCA \mid \varepsilon$

② $S \to EB \mid FA$ $\quad C \to b \quad E \to AB \quad F \to CA$

$B \to GD \mid DD \mid \varepsilon$ $\quad D \to a \quad G \to DB$

$A \to HA \mid \varepsilon$ $\quad H \to CC$