Lecture 03

本节课内容

- 变换 $transformation$ 的意义
- 2D 变换
- 齐次坐标系 Homogeneous coordinates
- 变换的组合

1.2D 变换

1.缩放

对于基础的缩放

$$
\begin{aligned}
x' &= sx \\
y' &= sy
\end{aligned}
$$

在矩阵运算里等价为

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

2.镜像

其矩阵变换形式如下

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

3.切变

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}
$$

4.旋转

默认前提下，绕原点 $(0, 0)$ 进行旋转
通过对特殊点 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$ 的旋转前后的运算，得到 R_θ 的表达式

$$R_\theta = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

注：$R_{-\theta} = R_\theta^T$ 即角度相反的旋转等价于对原角度旋转求转置。**旋转矩阵为正交矩阵**

5.线性变换

在以上的 2D 图形的缩放、镜像、切变、旋转时，其普遍的形式为以下所示的**线性变换**(liner map)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

也就是

$$x' = Mx$$

2.齐次坐标系

1.问题

对于 **平移**(translation)，线性变换是无法处理的，因为其平移移动的坐标为一个常数，也就是以下的形式

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

- **仿射变换：线性变换 + 平移**

2.构建

齐次坐标系 是在原有 2D 点或者 2D 向量的基础上多引入一个维度，即以下的形式

- 2D 点 $(x,y)->(x,y,1)^T$
- 2D 向量 $(x,y)->(x,y,0)^T$
- 2D 向量上最后一维的坐标为0，是为了维持平移不变性。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上为齐次坐标系下的 **仿射变换**

3.运算规律

- 向量 + 向量 = 向量 (0 + 0 = 0)
- 点 - 点 = 向量 (1 - 1 = 0)
- 点 + 向量 = 点 (1 + 0 = 1)
- 点 + 点？
  由于 点+点 的结果，最后一维的结果会大于1
  我们设定

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} is\ the\ 2D\ point \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ 1 \end{pmatrix}, w \neq 0$$

可以清晰的得到，点 + 点的结果是其 **中点**

4.基于齐次坐标系的2D变换

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha & 0 \\ sin\alpha & cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}(t_x, t_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可以观察到统一的表示形式是，左上角 2X2 的矩阵内与之前的 **线性变换** 矩阵一致。而其运算顺序中，是先进行 **线性变换** 再进行 **平移**

3.变换组合

1.运算顺序

由于矩阵乘法没有交换律 Lecture 02 > 2.矩阵运算
变换组合实质上为多个矩阵相乘，而从矩阵乘法式读出运算顺序时，是从左到右的顺序，即下图

Note that matrices are applied right to left:

$$T_{(1,0)} \cdot R_{45} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ & 0 \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

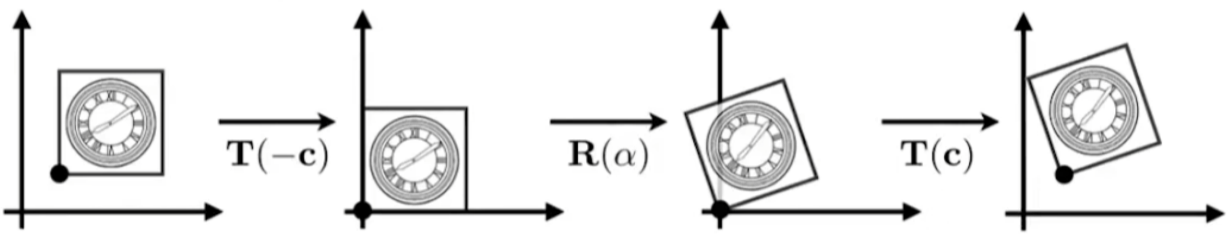
而推广到 n 个变换的组合可以以下图表示

$$A_n(\ldots A_2(A_1(x))) = \mathbf{A}_n \ldots \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

同时，由于结合律的存在，所有的变换都可以先行相乘合成成一个最终的矩阵。

2.分解复杂变换

对于一个复杂的变换，我们可以将其分解成数个简单的变换，比如对于沿某个非原点的点进行旋转：



其运算结果为：$\mathbf{T}(c) \cdot \mathbf{R}(\alpha) \cdot \mathbf{T}(-c)$
注意其顺序依然是 **从右到左**