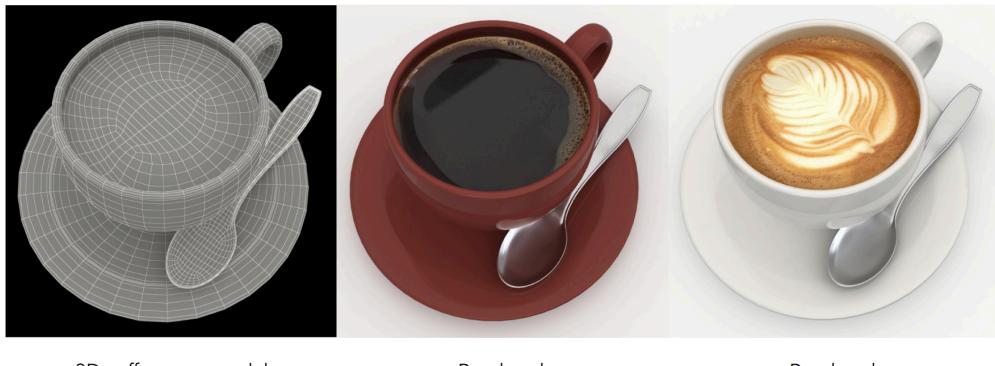


Lecture 17

What is Material in Computer Graphics?



3D coffee mug model

Rendered

Rendered

[From TurboSquid, created by artist 3dror]

上图中，右边两幅图源自同一个模型，但渲染出不同的结果，这是因为指定了模型不同的材质，而在图形学中，不做替换材质的工作，而是通过了解不同材质与光线进行作用的方式来表示不同的材质。所以现在的目标是如何描述一个材质，或说渲染方程中哪一项与材质有关，答案是 [Lecture 15 > BRDF](#) 中的 BRDF，BRDF决定了光线与表面作用的过程以及反射的过程，对于表面材质，最关键的描述也是反射光的方式，所以目前可以下结论 **材质=BRDF**

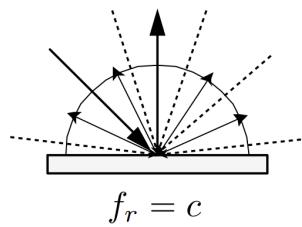
Diffuse / Lambertian Material

在 Diffuse 类材质中，光完全漫反射。也即 $L_r = L_i$ 又 *Radiance* 的计算公式可得

$$\begin{aligned} L_r &= \int_{H^2} f_r(p, w_i \rightarrow w_r) L_i(p, w_i) \cos\theta_i dw_i \\ &= f_r L_i \int_{H^2} \cos\theta_i dw_i \\ &= \pi f_r L_i \end{aligned}$$

得到在完全漫反射的材质表面的 $BRDF = \frac{1}{\pi}$

Suppose the incident lighting is uniform:



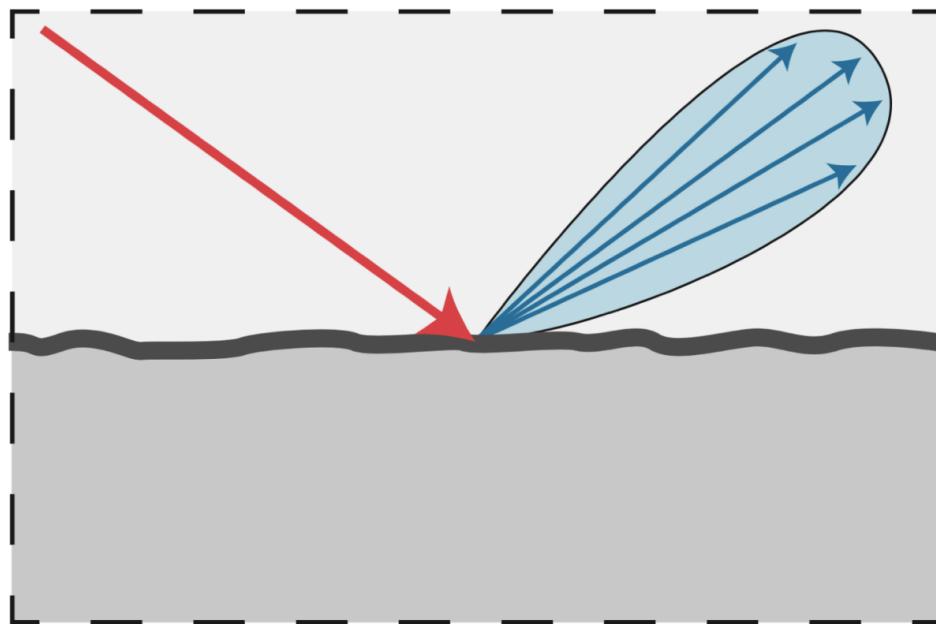
$$\begin{aligned} L_o(\omega_o) &= \int_{H^2} f_r L_i(\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \\ &= f_r L_i \int_{H^2} (\omega_i) \cos \theta_i d\omega_i \\ &= \pi f_r L_i \end{aligned}$$

$$f_r = \frac{\rho}{\pi} \quad \text{— albedo (color)}$$

写出表面完全不吸收能量，即反射光能量=入射光能量的情况后，我们也可以定义一个 **albedo(反射率)**，也就是 $\rho = [0, 1]$ ，代表着反射的多少，并且对于不同颜色的光在该点不同的反射率， f_r 可以是三通道的 (RGB)，分别存储不同颜色的 BRDF。

Glossy material

对于金属表面，其平面接近于镜面，但平面有一些粗糙，使其反射的情况综合了镜面反射和漫反射



Perfect Specular Reflection

物理中学到过，**入射角等于反射角**，这是在 2D 平面中的性质。可以根据入射方向确定唯一的出射方向，在图形学的 3D 立体中也可以推广此

性质。

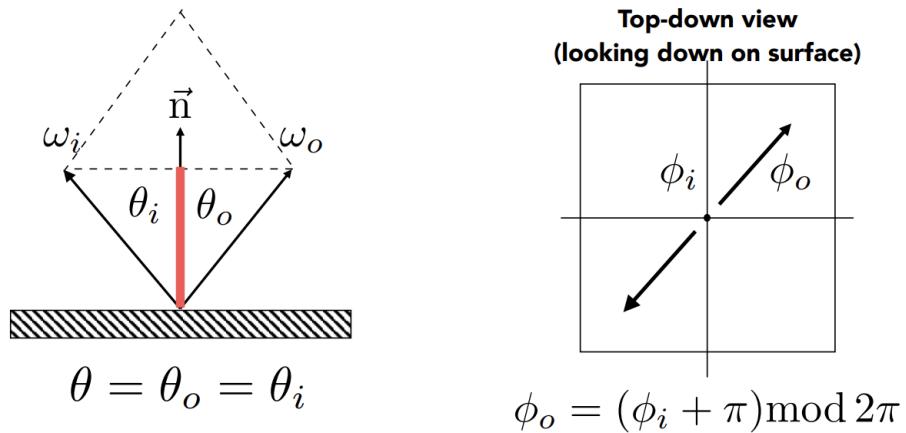
方法1 利用入射/法线/出射 三个中两个已知的情况，根据反射定律求出第三个未知量。

$$\omega_o + \omega_i = 2 \cos \theta \vec{n} = 2(\omega_i \cdot \vec{n})\vec{n}$$

$$\omega_o = -\omega_i + 2(\omega_i \cdot \vec{n})\vec{n}$$

方法2 将 3D 空间中的角度投影到局部平面上，将角度拆成 (θ, ϕ) 的形式，前者是与法线方向的夹角，后者是 入射/法线/出射 形成的平面绕法线旋转时产生的角度，即方位角，并且有性质 $\phi_i = \phi_o$ ，求出入射角度 (θ_i, ϕ_i) 则可以根据等式求出出射角度。如图

- 图1中朝法线所在平面垂直看去
- 图2中朝法线所指方向水平看去。



Specular Refraction

光在平面除了反射离开，还会有进入物体内部的 **散射**。



Snell's Law

折射同样使用方位角 (θ, ϕ) 分解入射光和出射光的角度

- 水平看满足折射定律 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
- 从上往下看, $\phi_i = -\phi_t$, 满足反向关系, 如此可以求出 **折射角的余弦**

- 为什么求折射角的余弦?

$$\eta_i \sin \theta_i = \eta_t \sin \theta_t$$

$$\begin{aligned}\cos \theta_t &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_i}{\eta_t}\right)^2 \sin^2 \theta_i} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\eta_i}{\eta_t}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta_i)}\end{aligned}$$

$$1 - \left(\frac{\eta_i}{\eta_t}\right)^2 (1 - \cos^2 \theta_i) < 0$$

- 回答：在全反射情况下，不存在折射情况，也就是等式右边的根号内的值为负数，而求折射角的余弦值可以判定折射现象是否存在。
- 补充：全反射发生在 入射介质的折射率大于出射介质的折射率时

Fresnel Reflection / Term

菲涅尔项表示了在不同的入射光与法线角度下，光的能量被反射的多少，如图所示，当书本越垂直与桌面，入射光方向与法线角度越小，反射能量越多。

Reflectance depends on incident angle (and polarization of light)

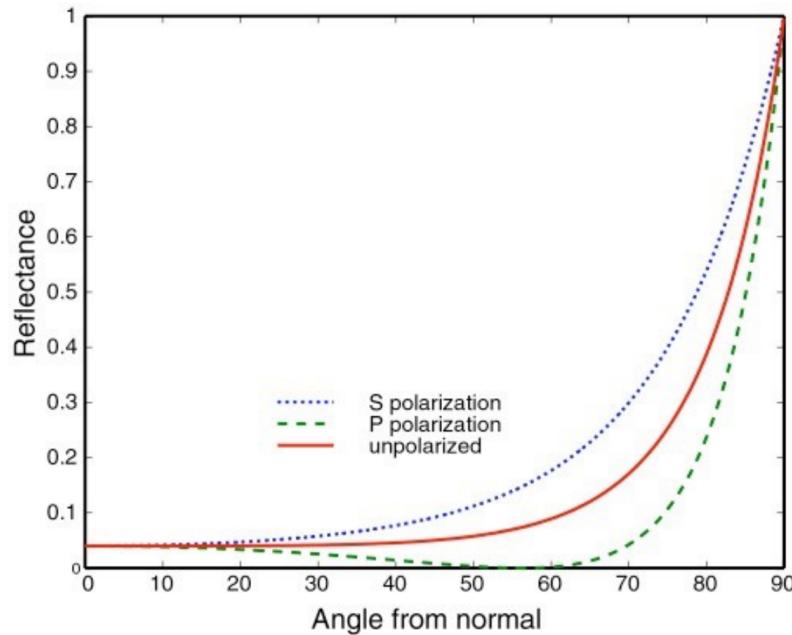


This example: reflectance increases with grazing angle

[Lafontaine et al. 1997]

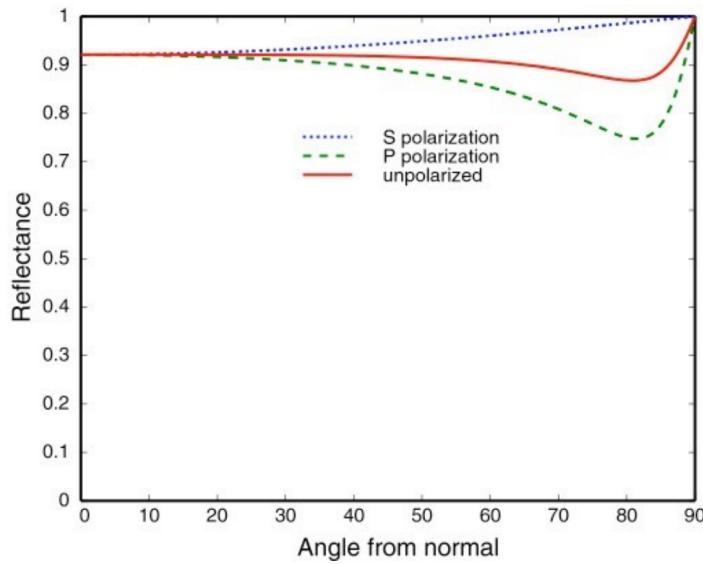
而在具体的菲涅尔项曲线中可以更准确地刻画其规律

- 补充：两条虚线为极化部分，因为光的波粒二象性，光同时具有粒子特性和波动特性，而极化部分只考虑粒子/波动特性。



对于金属的菲涅尔项曲线，则可以看出其反射比例一直较高。

Fresnel Term (Conductor)



Fresnel Term — Formulae

菲涅尔项公式如下

Accurate: need to consider polarization

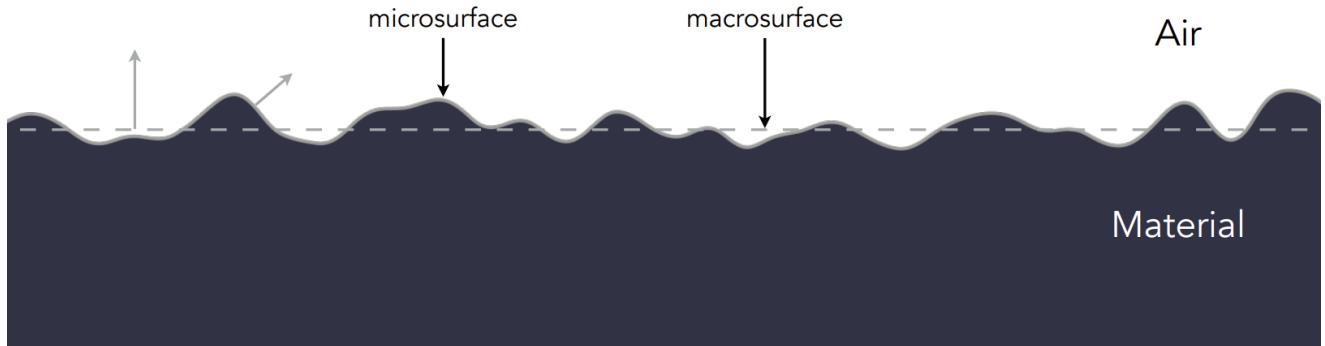
$$R_s = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right)^2}} \right|^2,$$
$$R_p = \left| \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right)^2} - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \right)^2} + n_2 \cos \theta_i} \right|^2.$$
$$R_{\text{eff}} = \frac{1}{2} (R_s + R_p).$$

Approximate: Schlick's approximation

$$R(\theta) = R_0 + (1 - R_0)(1 - \cos \theta)^5$$
$$R_0 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

- 其简化版本称为 Schlick's approximation
- R_0 表示基准反射率，即光线与法线夹角为 0° 时的反射率。

Microfacet Theory



伪表面理论的提出是为了精准的计算不同几何模型表面的反射

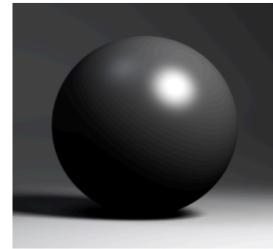
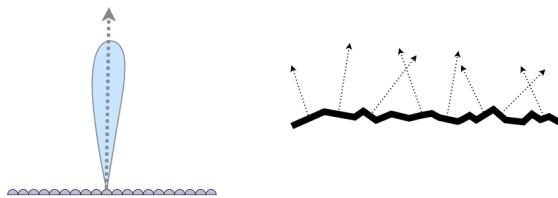
- Macrofacet: 即从远处看，是 flat & rough 的
- Microfacet: 近处观察表面的细节，bumpy & specular
- 每一个微表面都有自己的朝向，共同组成了从远处观看的 Macrofacet

Microfacet BRDF

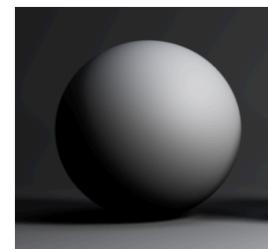
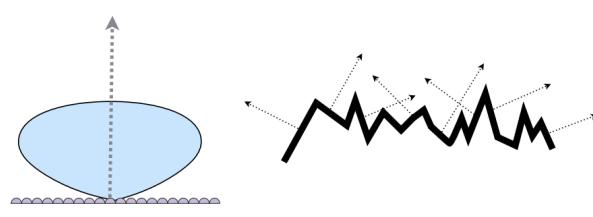
当微表面呈 glossy 的形状时，其反射部分相对集中，形成高光，而 diffuse 的表面更多的是漫反射，反射光相对分散。

- Key: the **distribution** of microfacets' normals

- Concentrated <=> glossy



- Spread <=> diffuse



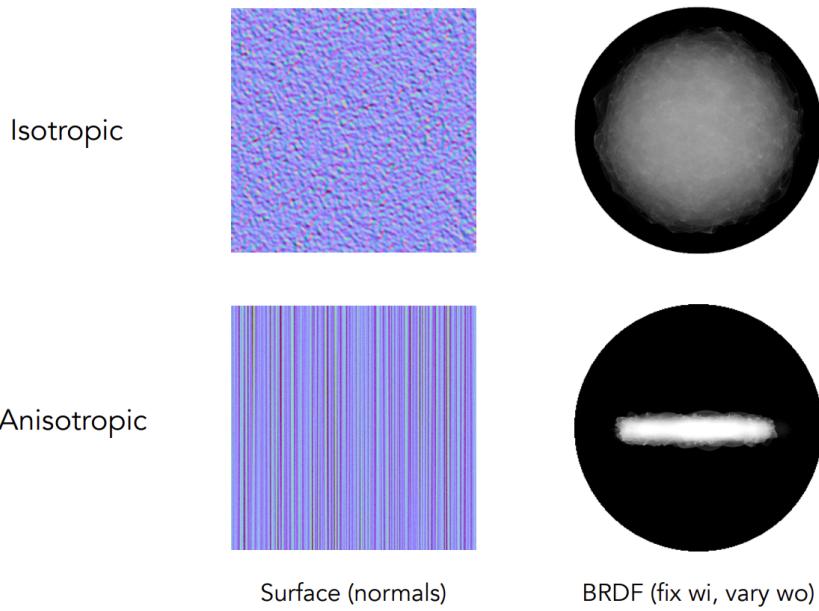
微表面的BRDF公式如下

$$f(\mathbf{i}, \mathbf{o}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{i}, \mathbf{h}) \mathbf{G}(\mathbf{i}, \mathbf{o}, \mathbf{h}) \mathbf{D}(\mathbf{h})}{4(\mathbf{n}, \mathbf{i})(\mathbf{n}, \mathbf{o})}$$

- 首先考虑菲涅尔项，计算反射的比率
- 再考虑法线的分布，最后考虑是否有在入射和出射方向的阻挡。

Isotropic / Anisotropic Materials (BRDFs)

isotropic 各项同性 anisotropic 各向异性 两个词指代着物体微表面是否存在方向性。



而区分两种材质的方式是根据 BRDF 的公式

$$f_r(\theta_i, \phi_i; \theta_r, \phi_r) \neq f_r(\theta_i, \theta_r, \phi_r - \phi_i)$$

BRDF 在物体微表面，指定一个入射角度和计算其出射角度之后，BRDF 在方位角上旋转，**保持相对角度不变**。如果 BRDF 的计算结果不变，则表面为**各向同性**，反之则为**各项异性**。

Properties of BRDFs

- Non-negativity BRDF 的计算结果一定是非负的。

$$f_r(\omega_i \rightarrow \omega_r) \geq 0$$

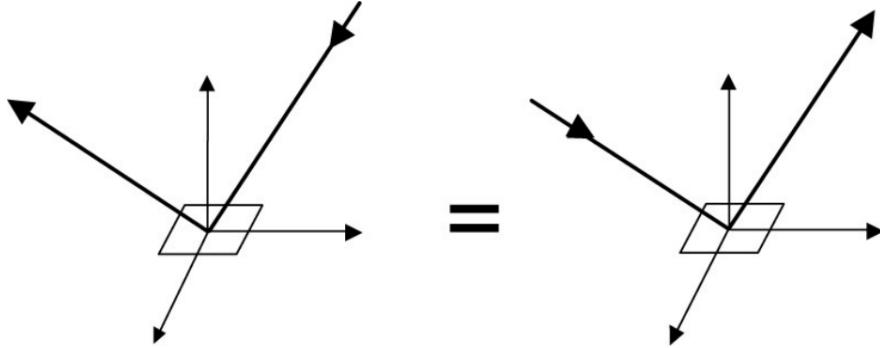
- *Linearity* (可以相加)

$$L_r(p, \omega_r) = \int_{H^2} f_r(p, \omega_i \rightarrow \omega_r) L_i(p, \omega_i) \cos \theta_i d\omega_i$$

BRDF 的线性性质使得可以将光照分为几部分的结果相加，这跟对所有光照做一次 BRDF 的结果是相同的。如 [Lecture 07 > 1.Blinn-Phong Reflection Model](#) 中，将着色分为漫反射/高光/环境光几部分计算，BRDF 也是同理的。

- Reciprocity principle BRDF 具有可逆性，交换入射和出射方向，得到的 BRDF 值是一样的。

$$f_r(\omega_r \rightarrow \omega_i) = f_r(\omega_i \rightarrow \omega_r)$$

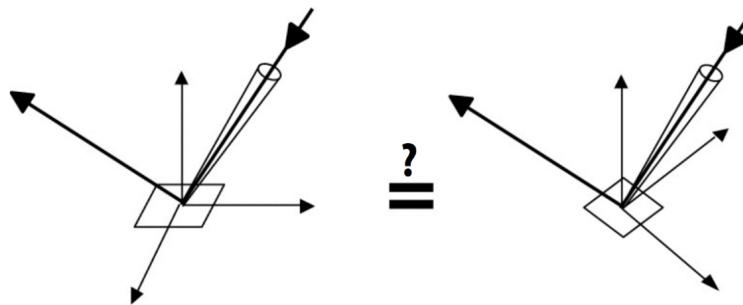


- Energy conservation BRDF 中规定了能量守恒，光线入射后的出射能量 **一定是小于等于** 入射能量的。

$$\forall \omega_r \int_{H^2} f_r(\omega_i \rightarrow \omega_r) \cos \theta_i d\omega_i \leq 1$$

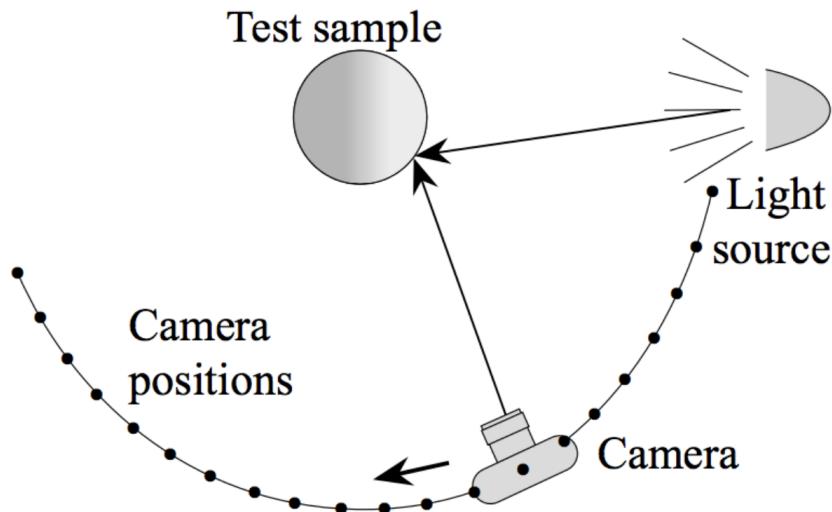
- Isotropic vs. anisotropic 在上面对各向异性和各项同性的 BRDF 进行判别后，发现对于 **各项同性** 的材质，BRDF 只跟方位角之差有关而跟具体入射角的方位角和出射角的方位角无关，并且 BRDF 的可逆性也确保了相对方位角不用考虑正负。使各向同性的 BRDF 维度降低了。

$$f_r(\theta_i, \theta_r, \phi_r - \phi_i) = f_r(\theta_r, \theta_i, \phi_i - \phi_r) = f_r(\theta_i, \theta_r, |\phi_r - \phi_i|)$$



Measuring BRDF

对真实物体测量的 BRDF 能更真实地计算出渲染结果，测量方法如下，固定物体，移动 相机/光源



[Marschner et al. 1999]

- 枚举所有出射方向，放上光源
- 枚举所有入射方向，放上相机
- (入射和出射方向可以互换)
- 测量 Radiance