Lecture 11

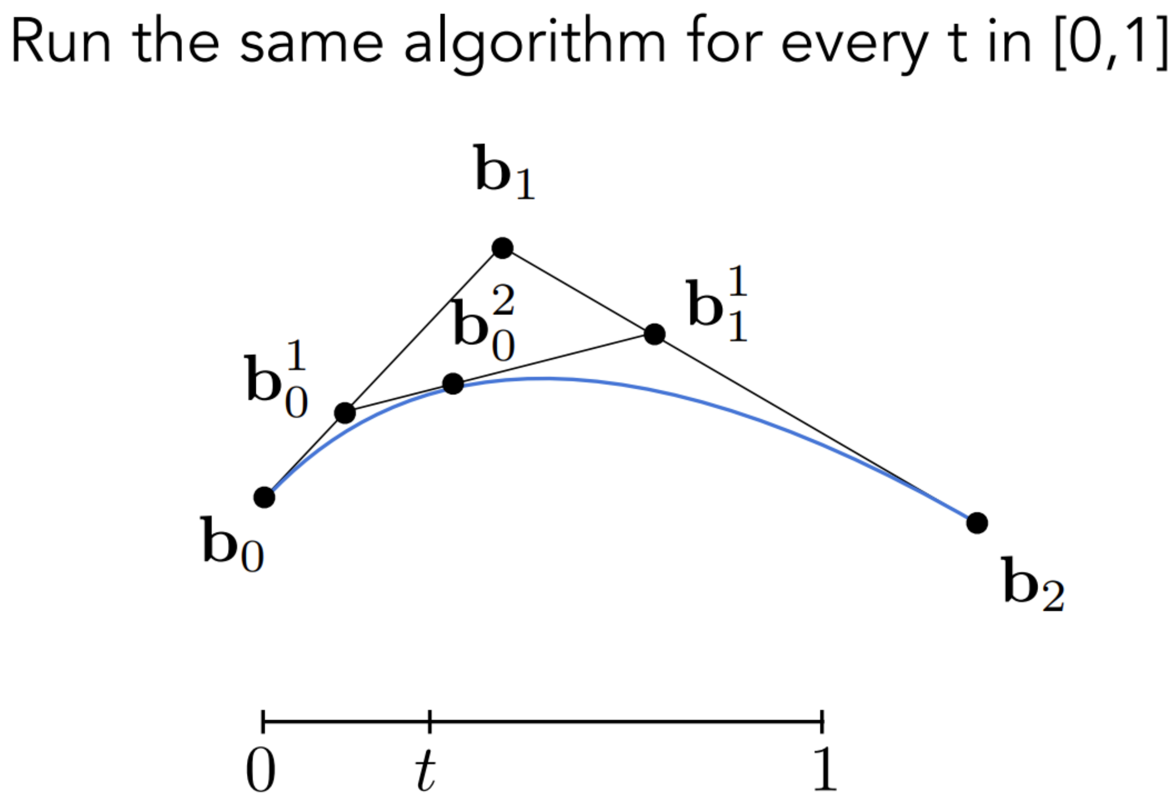
1.Explicit Representation

- Point Cloud 点云
- Polygon Mesh 多边形网格
- Wavefront Object File .obj文件

2.Bezier Curves 贝塞尔曲线

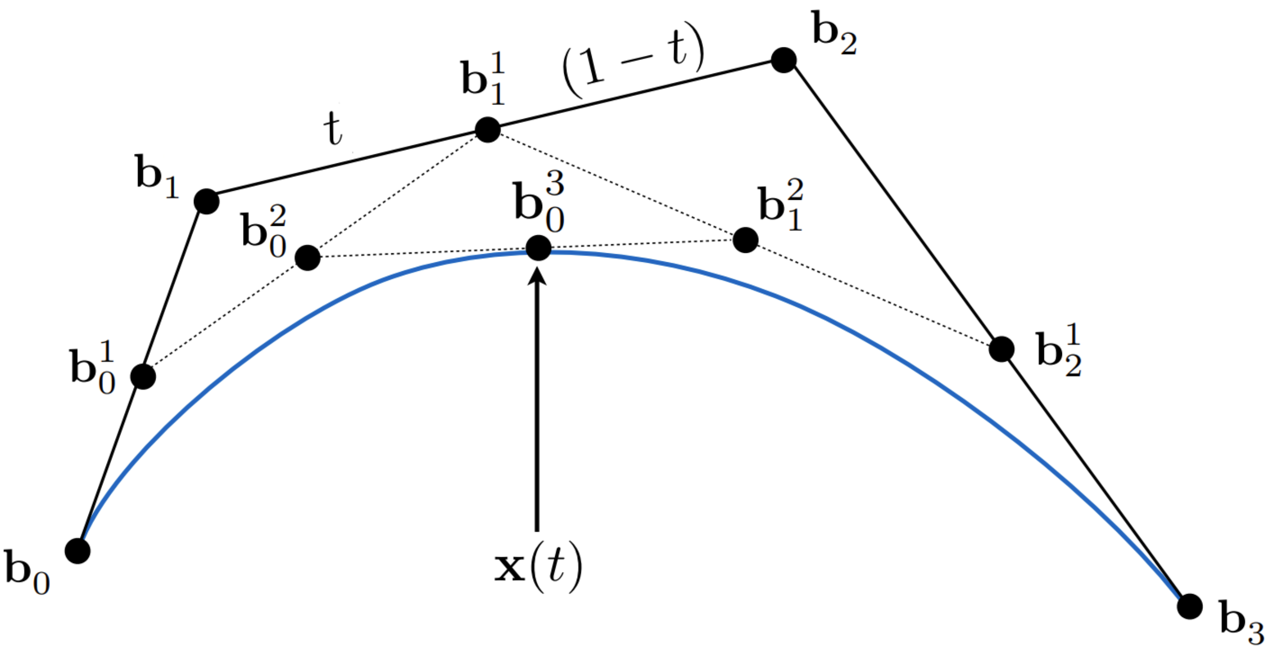
1.de Casteljau Algorithm 德卡斯特里奥算法

该算法用于在三个控制点之间插值出平滑的曲线



$$
\begin{aligned}
&b_0\ b_0^1 = t\ b_0 b_1\\
&b_1\ b_1^1 = t\ b_1 b_2\\
&t\ in\ [0,1]
\end{aligned}
$$

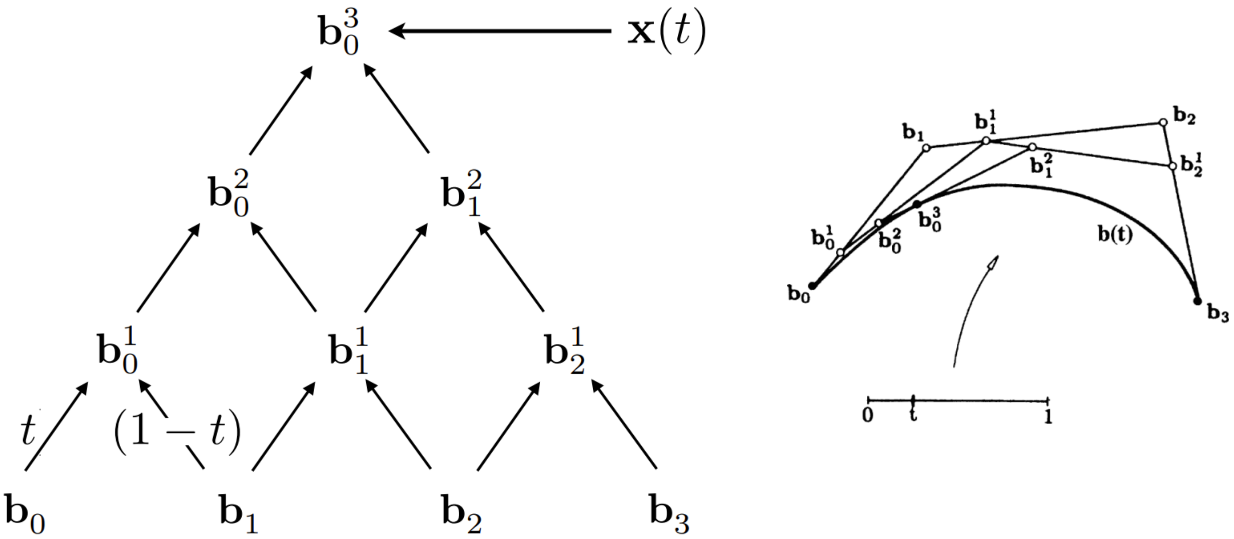
对 $[0,1]$ 上所有 t 进行采样，可以得到 **二阶贝塞尔曲线** 同理对于四个点，我们可以将其分解成两个 **二阶贝塞尔曲线** 进行插值，得到一个最终的 **二阶贝塞尔曲线**，如图



$$
\begin{aligned}
&\text{两个贝塞尔曲线}\\
&b_0\ b_0^1 = t\ b_0 b_1\\
&b_1\ b_1^1 = t\ b_1 b_2\\
&b_1\ b_1^1 = t\ b_1 b_2\\
&b_2\ b_2^1 = t\ b_2 b_3\\
\\
&\text{中间贝塞尔曲线}\\
&b_0^1\ b_0^2 = t\ b_0^1 b_1^1\\
&b_1^1\ b_1^2 = t\ b_1^1 b_2^1\\
&t\ in\ [0,1]
\end{aligned}
$$

2.de Casteljau 与 伯恩斯坦多项式

由于二阶和三阶的公式，可以得出其计算过程的 **树**



Every rightward arrow is multiplication by t,
Every leftward arrow by (1–t)

因此 n 阶的贝塞尔曲线，曲线上 t 位置的点 b(t) 坐标是由 n+1 个控制点的伯恩斯坦多项式的乘积求和得到的

$$
\begin{aligned}
b(t) &= k_0 b_0 + k_1 b_1 + \ldots + k_n b_n \\
k_i &= B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\
b(t) &= B_0^n(t)\ b_0 + B_1^n(t)\ b_1 + \ldots + B_n^n(t)\ b_n
\end{aligned}
$$

由于伯恩斯坦多项式的递归性，其有性质，性质推导见 https://zhuanlan.zhihu.com/p/366082920

> $B_i^n = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$

根据此可以将伯恩斯坦多项式中的高阶多项式展开成低阶多项式，即将，参考：https://zhuanlan.zhihu.com/p/366678047

$$
\begin{aligned}
b(t) &= \sum_{i=0}^{n} b_i((1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}((1-t)b_i + tb_{i+1})B_i^{n-1}(t)
\end{aligned}
$$

此时将 n 个控制点通过伯恩斯坦多项式的递归性变成了 n-1 个控制点，因此可以用递归的方式，一直到最后只剩下 1 个控制点，而这就是 **de Casteljau** 算法中的 $b_0\ b_0^1 : b_0^1\ b_1 = t : 1-t$ ，这样完成了 de Casteljau 与伯恩斯坦多项式的联系。

对比于伯恩斯坦多项式推导的 $b(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n b_0$ ， de Casteljau 的递归形式的 $b(t)$ 更加数值稳定，所以实际上使用 de Casteljau 的效果更好。

3.贝塞尔曲线的端点性质

伯恩斯坦多项式有端点性质

$$B_i^n(0) = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

同理，对贝塞尔曲线曲线也有，从第一个控制点开始，到最后一个控制点结束，即

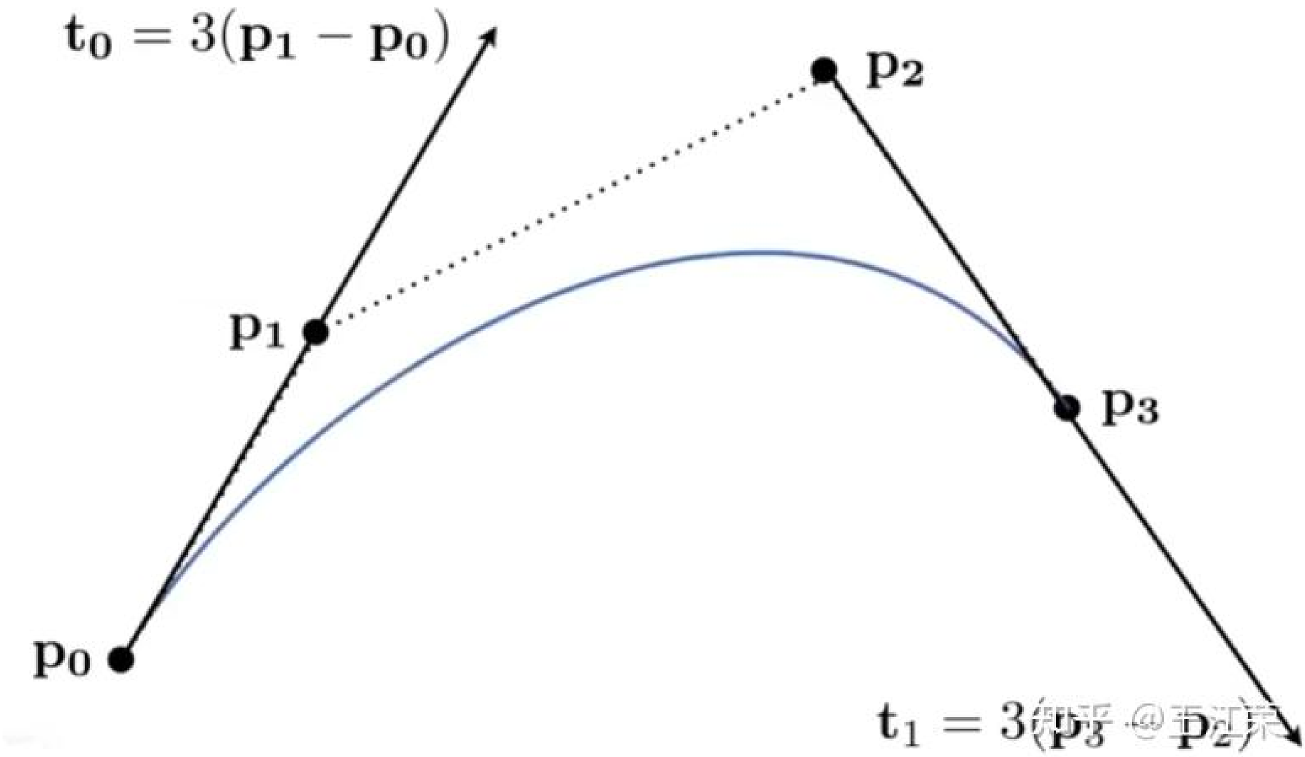
$$P(t) = \begin{cases} b_0 & t = 0 \\ b_n & t = 1 \end{cases}$$

4.切向量

对贝塞尔曲线求导，取 $t = 0/t = 1$ 时可求得在第一个控制点和最后一个控制点时曲线的切线方向，即

$$b'(0) = n(b_1 - b_0)$$
$$b'(n) = n(b_n - b_{n-1})$$

由此可得三阶贝塞尔曲线中，其起点和终点的切向量系数为 3。



同样对贝塞尔曲线求二阶导数，可以算出曲线的弯曲程度，即曲率。见 https://zhuanlan.zhihu.com/p/366678047

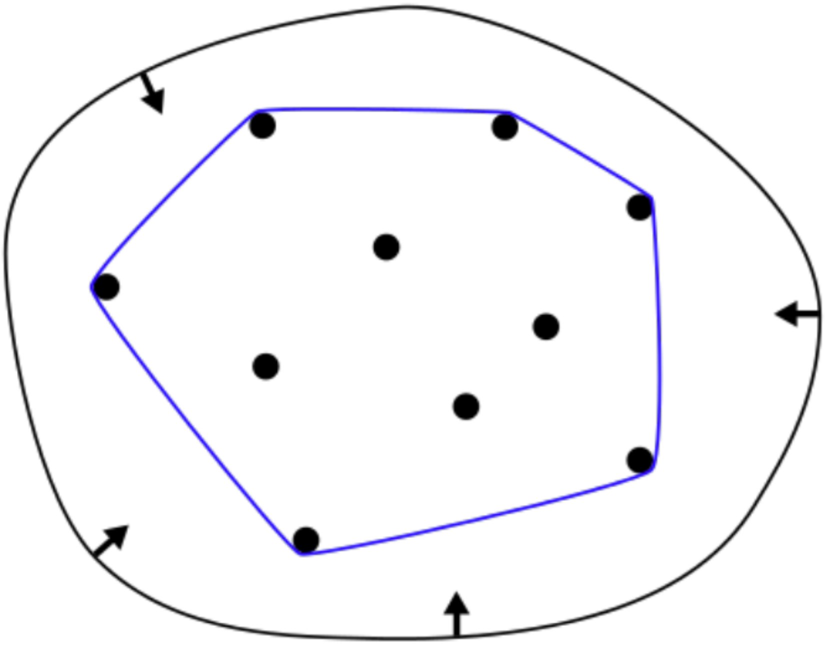
5.对称性

伯恩斯坦多项式有对称性，贝塞尔曲线一样具有多样性。

6.凸包性

根据伯恩斯坦多项式的 *归一性*，贝塞尔曲线具有凸包性，即贝塞尔曲线必定在所有控制点的凸包内部。

- 凸包：包含所有顶点的最小凸多边形
- 如图，黑色的是控制点，蓝色的就是这些控制点的凸包，类比橡皮筋，蓝色的就是原始的橡皮筋，其拉伸到黑色的范围后松手，橡皮筋还是会返回蓝色的凸包状态。



[from Wikipedia]

7.几何不变性

贝塞尔曲线的性质依赖于控制点，不随坐标系变换而变换。

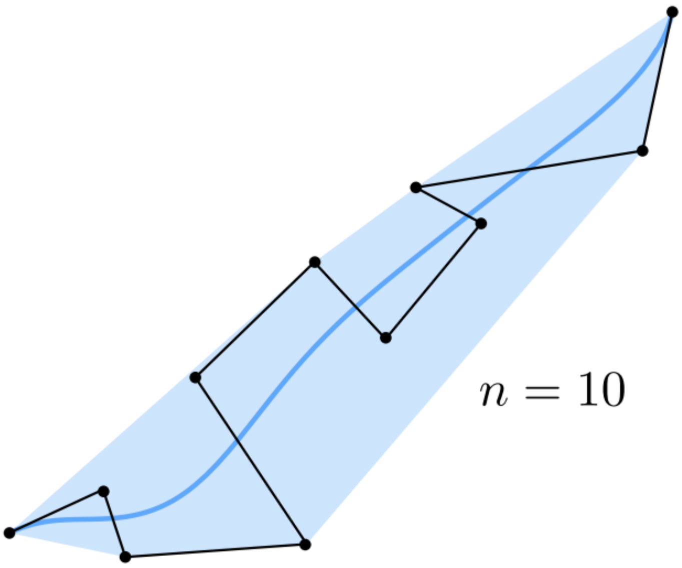
8.仿射变换

对贝塞尔曲线做放射变换再得到曲线 = 得到曲线对曲线做仿射变换

- 注：**透视投影变换** 中不能这么操作。

9.分段贝塞尔曲线

在低阶的贝塞尔曲线中，理想中的曲线是非常容易想象的，到了高阶中，控制点分散，理想曲线不容易想象，并且对曲线的修改会笔记难控制

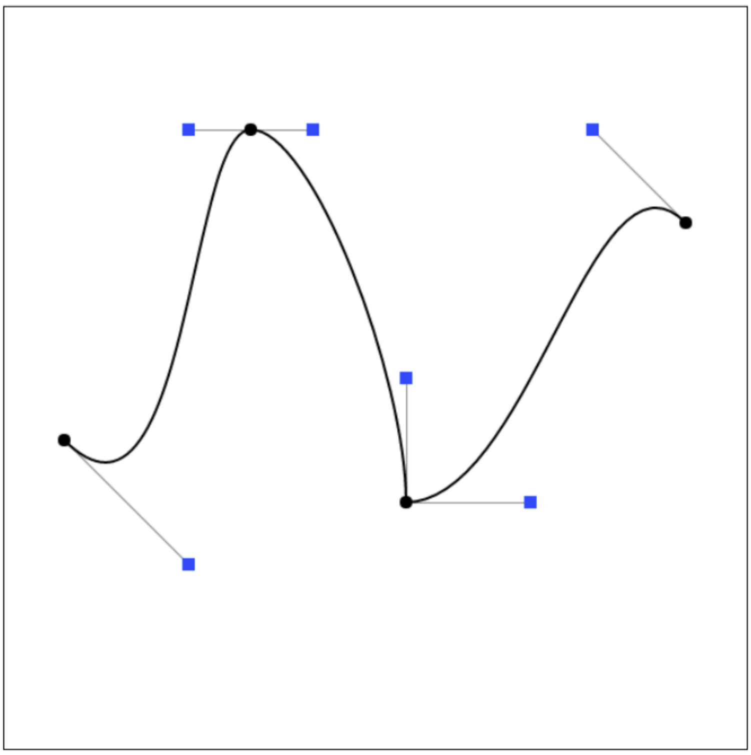


Very hard to control!

Uncommon

通常在绘图软件中，不常使用高阶贝塞尔曲线，而是使用多个低阶贝塞尔曲线（一般是3阶，4个控制点），也即 **分段贝塞尔曲线**

Demo – Piecewise Cubic Bézier Curve

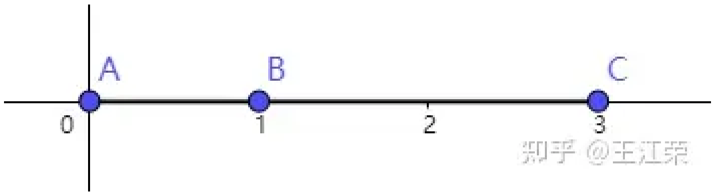


David Eck, http://math.hws.edu/eck/cs424/notes2013/canvas/bezier.html

10.连续性

数学中的连续性指

- 对曲线上某一点左右求导，导数相等则连续。
- 对于上图中分段贝塞尔曲线，可以看出第三个插值点处左右的导数为 3(a-b) 于 3(c-b)，是不相同的，此处明显也不连续。



此图中 AB≠BC，但是三点在同一直线上，不符合数学上不连续的判断。

图形学中的连续

- $A = B$，两线有交点，此处为 **0阶连续**，称为 G^0/C^0
- **几何连续性**： $A - B = k(B - C)$,且四个点共线，此处为 **1阶几何连续**，如果 k=1，则为 **1阶连续**，称为G^1/C^1
- 二阶导数相等，曲率连续，称为 **2阶连续**，即 G^2/C^2

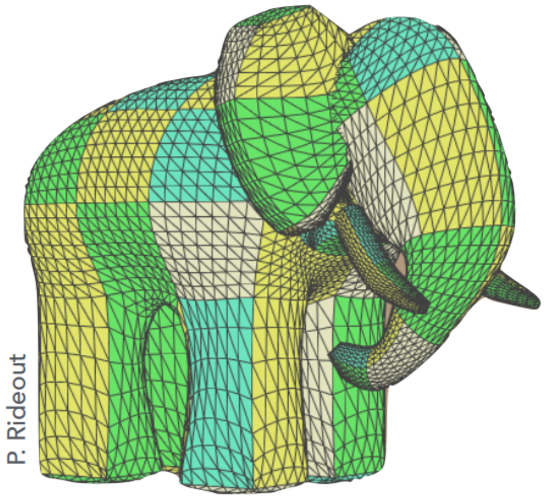
11.其他曲线

- Spline 样条
- B-Spline B样条

3.表面

- *贝塞尔表面*

Extend Bézier curves to surfaces



Ed Catmull's "Gumbo" model

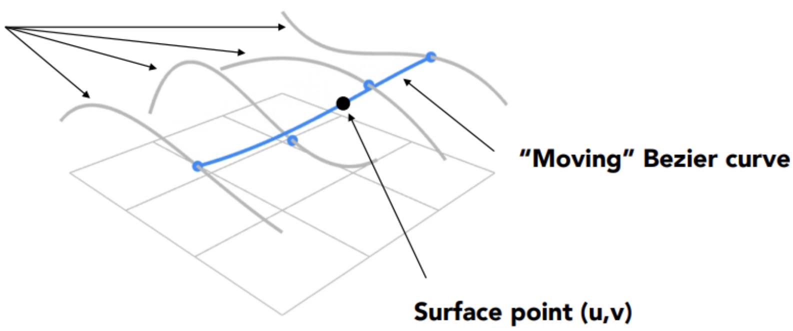
Utah Teapot

- 贝塞尔表面路径，由 4x4 的控制点组成，其先横向得出曲线，再于纵向得出曲线。具体过程如图

Goal: Evaluate surface position corresponding to (u,v)

(u,v)-separable application of de Casteljau algorithm

- Use de Casteljau to evaluate point u on each of the 4 Bezier curves in u. This gives 4 control points for the "moving" Bezier curve
- Use 1D de Casteljau to evaluate point v on the "moving" curve



- 几何处理
  - 升阶
  - 降阶

- 正则化