

Lecture 06

1. 上节内容

- View + Projection + Viewport(将 cuboid 变换到屏幕空间)
- Rasterizing triangles
- 采样
- Boudning box
- Aliasing 走样

2. Sampling Artifacts

在图形学里，Artifacts 指 Errors / Mistakes / Inaccuracies，泛指不准确或与预期不一样的效果

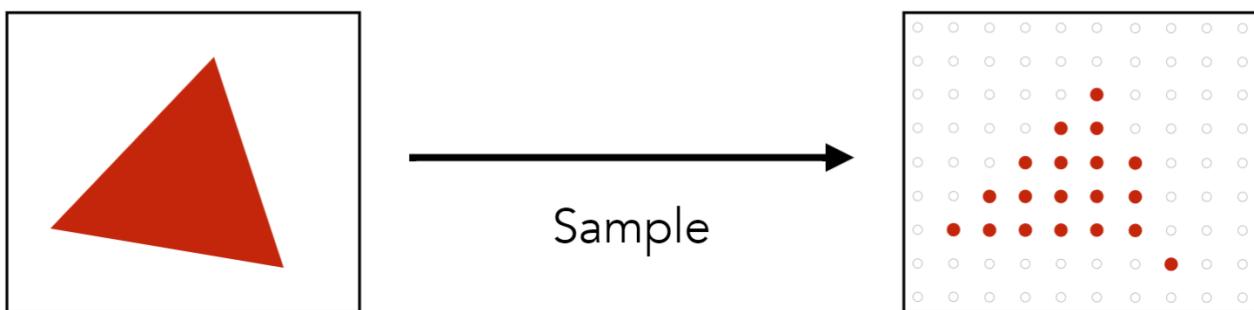
1. Artifacts

Artifacts 有以下几种表示形式

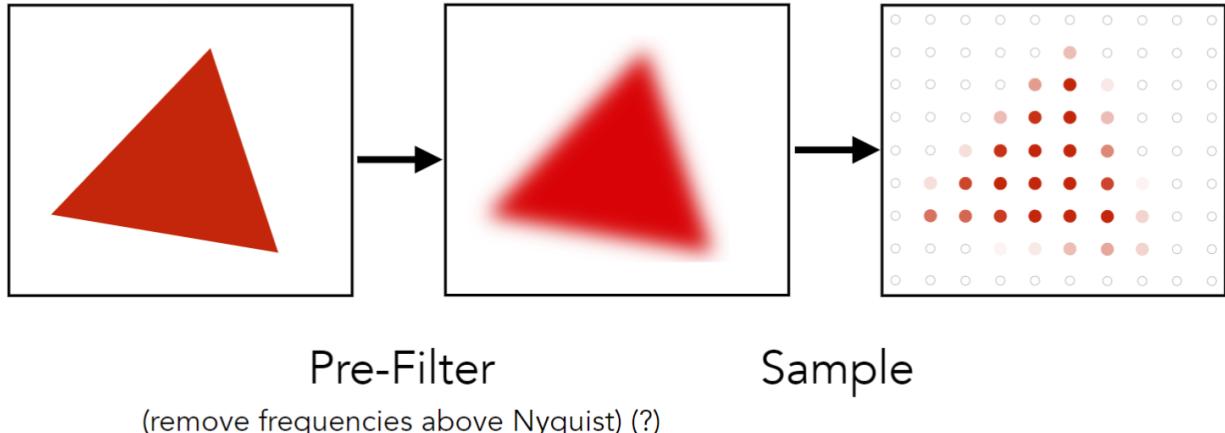
- Jaggies - sampling in **space** 锯齿
- Moire - undersampling **images** 摩尔纹
- Wagon wheel effect - sampling in **time** 车轮效应

一种 Antialiasing 的想法是，模糊图像再进行采样。

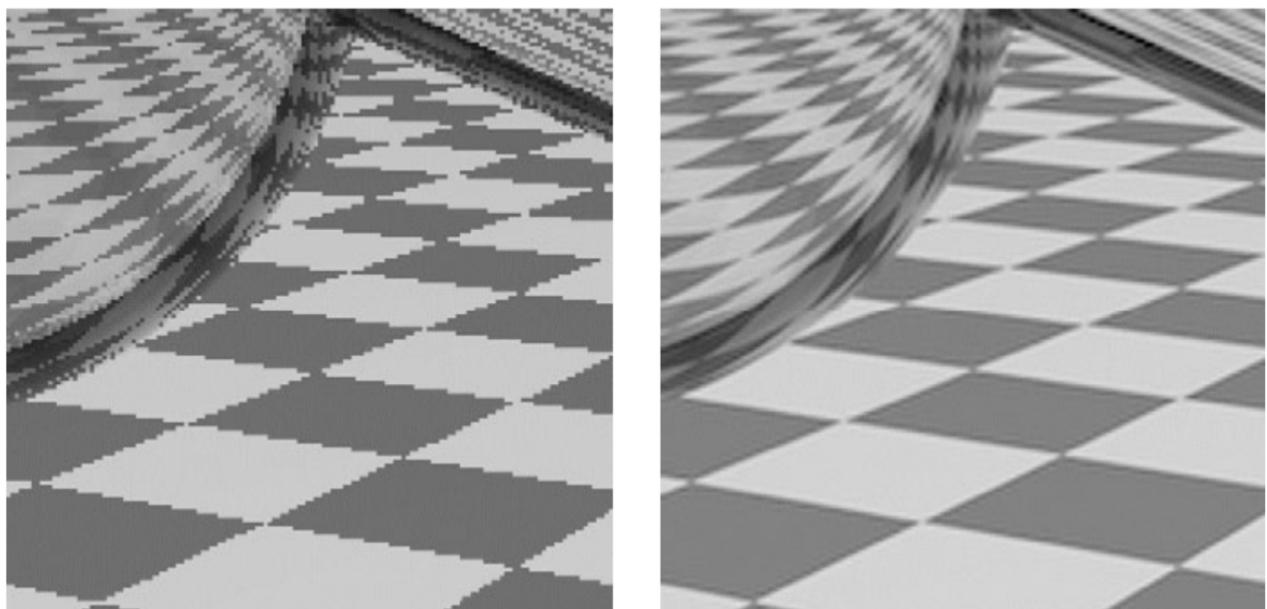
原本直接采样如图：



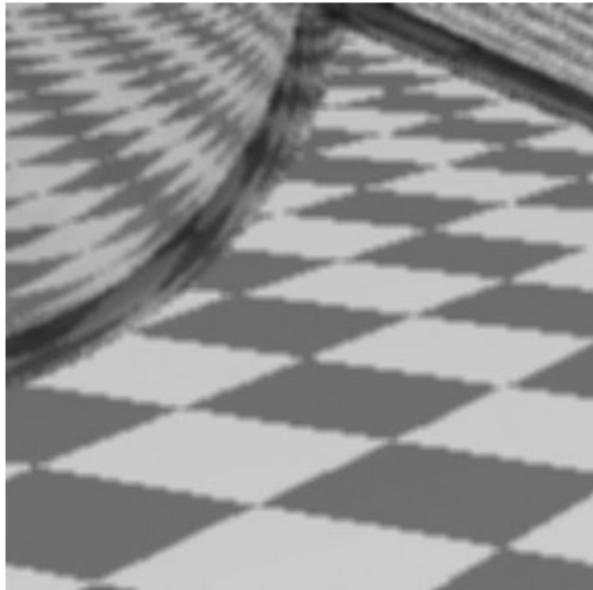
在模糊图像后再进行采样，即对每个像素的值采样到结果的平均值。



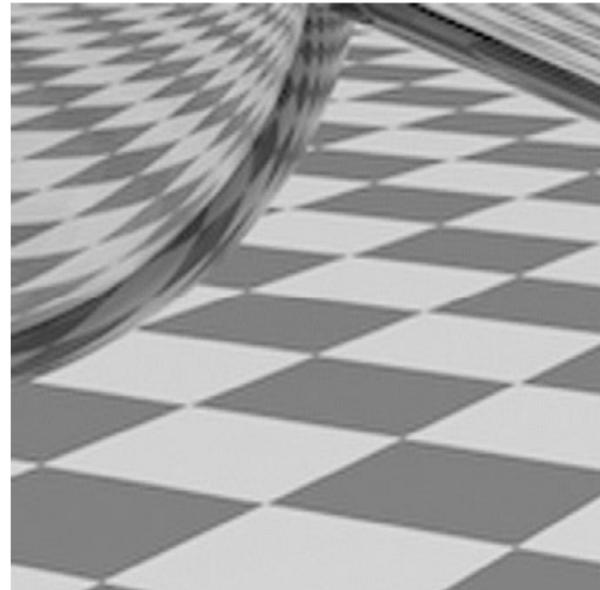
可以从实际图像中见得其效果



但是如果先采样再模糊，不仅保留了锯齿还使得画面更恶劣。



(Sample then filter, WRONG!)



(Filter then sample)

3. Frequency Domain 频域

1. 傅里叶级数

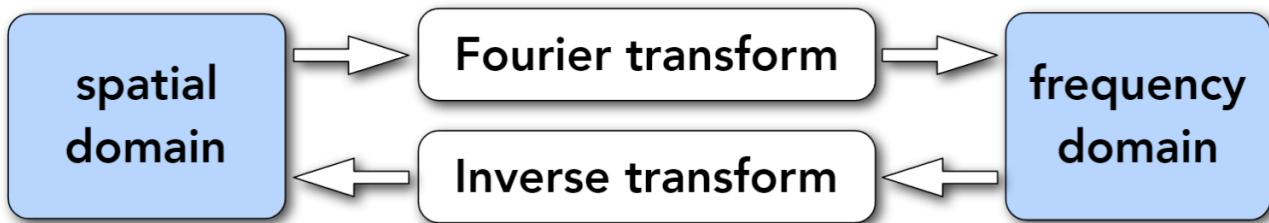
傅里叶级数 能将任何周期函数或周期信号分解成一个（可能由无穷个元素组成的）简单振荡函数的集合，即正弦函数和余弦函数（或者，等价地使用复指数）。

其公式如下

$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A\cos(t\omega)}{\pi} - \frac{2A\cos(3t\omega)}{3\pi} + \frac{2A\cos(5t\omega)}{5\pi} - \frac{2A\cos(7t\omega)}{7\pi}$$

傅里叶级数的函数有性质

$$f(x) \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \quad F(\omega)$$



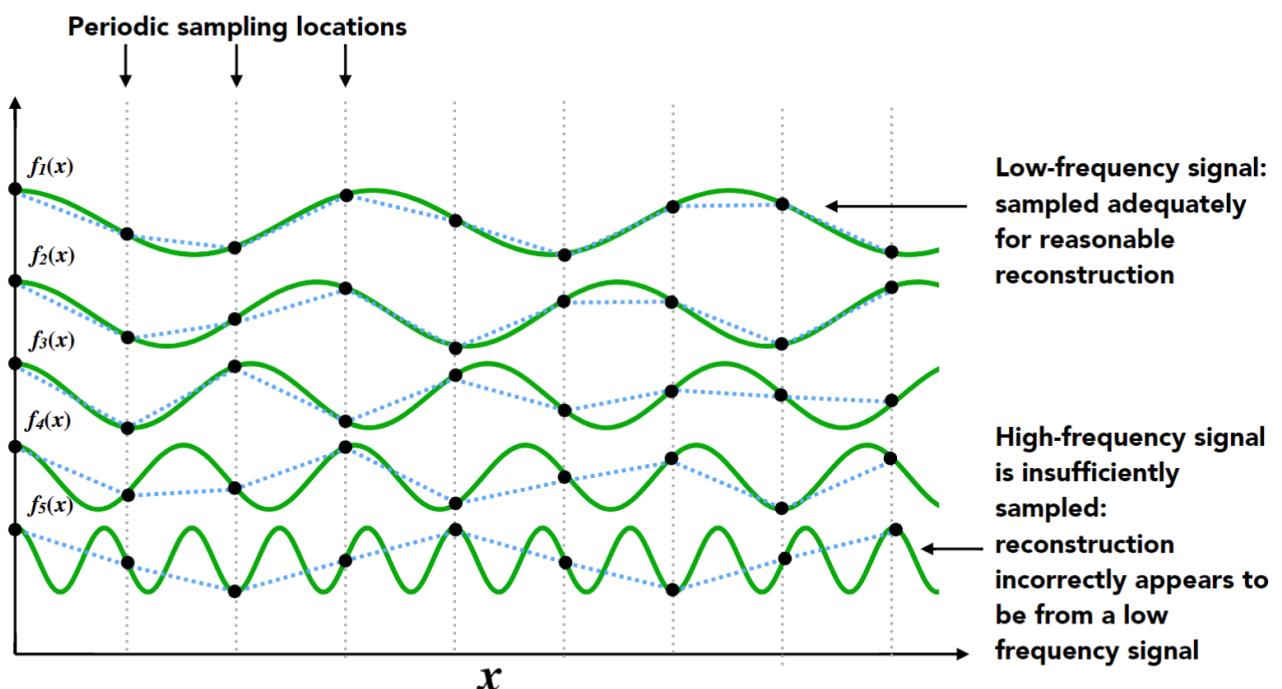
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega$$

Recall $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

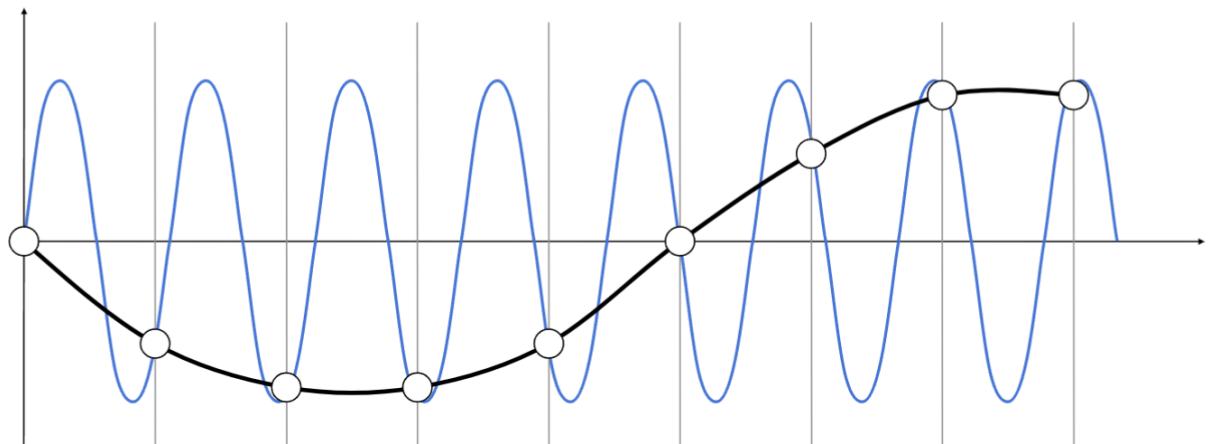
- **实域** 积分得到 **频域**，**频域** 积分得到 **实域**，前者称为傅里叶变换，后者称为逆变换。

2. 走样

对于连续的信号，采样出来的点是离散的，因此采样结果的好坏与采样速度和频率是相关的，如图所示，对于 $f_1(x)$ 其拟合效果很好，但对于 $f_5(x)$ 其效果较差。



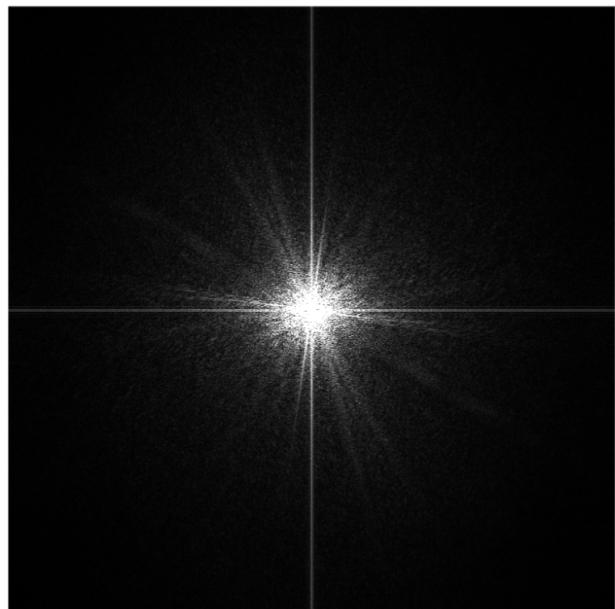
更精确地说，一种采样方式对两种不同的函数，产生的采样结果一致，从而无法区分两种函数，这称之为 **走样**，如图可见。



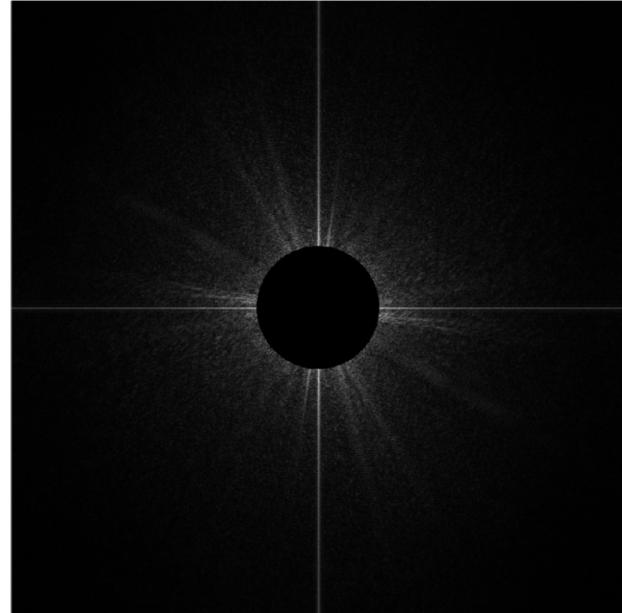
3. 滤波

滤波 表示去除某种特定的频率（如高频、低频）信息。

对于一张图，我们可以使用不同种类的滤波



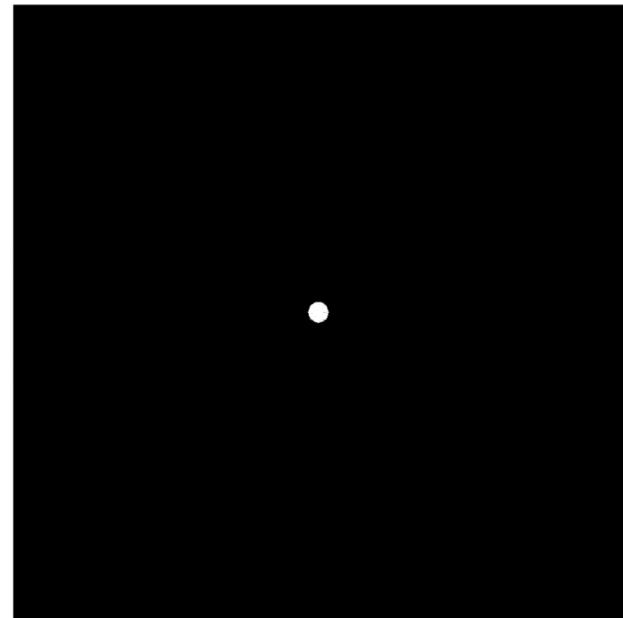
- High-pass filter: 寻找边界



High-pass filter

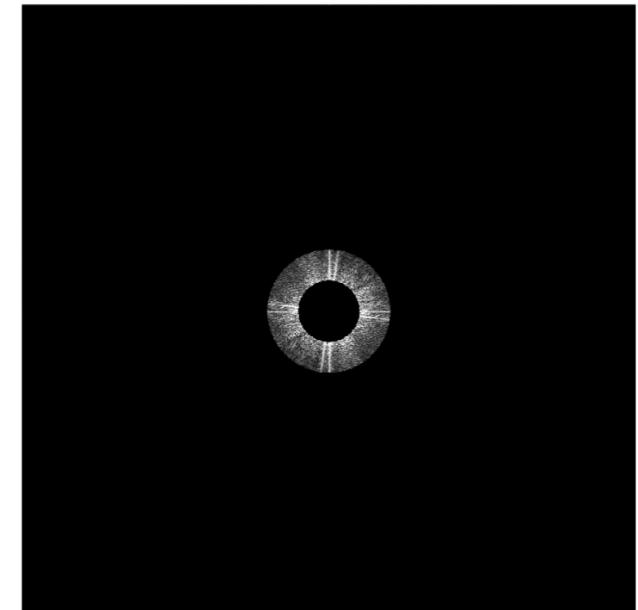
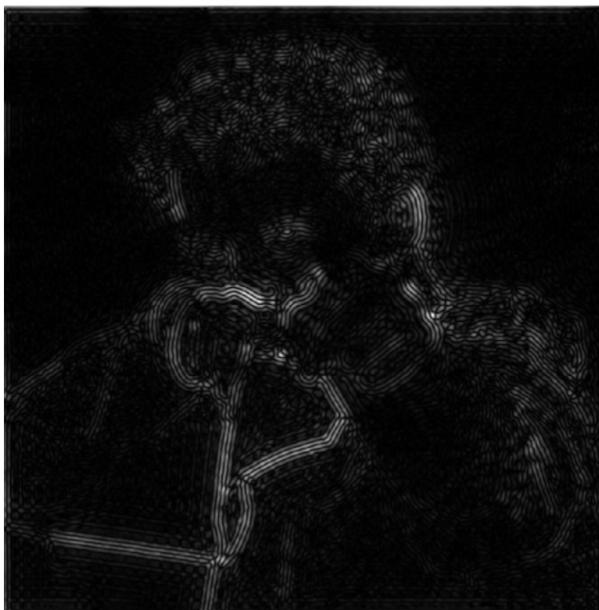
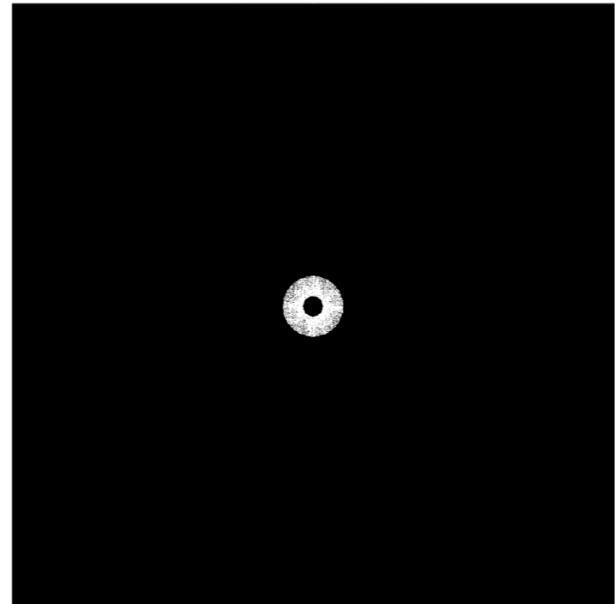
对于高通滤波，其只留下高频信息，而颜色变化剧烈的便是高频信息，而边界的颜色变化剧烈，所以一般得到的是边界信息。

- Low-pass filter: 得到一张模糊的图



Low-pass filter

- Filter Out Low and high:称之为 band-pass filter，即带通滤波。得到不太重要的边界信息，去除高频和低频信息，如果保留越多高频信息，图像越近似 High-pass filter



- 可以发现，当白圈越靠近外侧，即越接近高通滤波，边界信息保留越多。

4. 卷积

filtering(滤波) = convolution(卷积) = averaging(平均)，即得到卷积的定义：
类似 CNN 中的卷积，做 **滑动窗口** 对信号取加权平均值

Signal

1	3	5	3	7	1	3	8	6	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Filter

1/4	1/2	1/4
-----	-----	-----

$$1 \times (1/4) + 3 \times (1/2) + 5 \times (1/4) = 3$$

Result

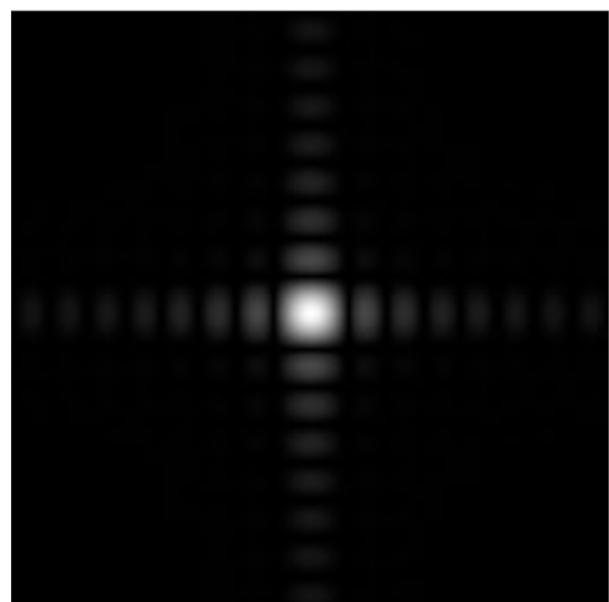
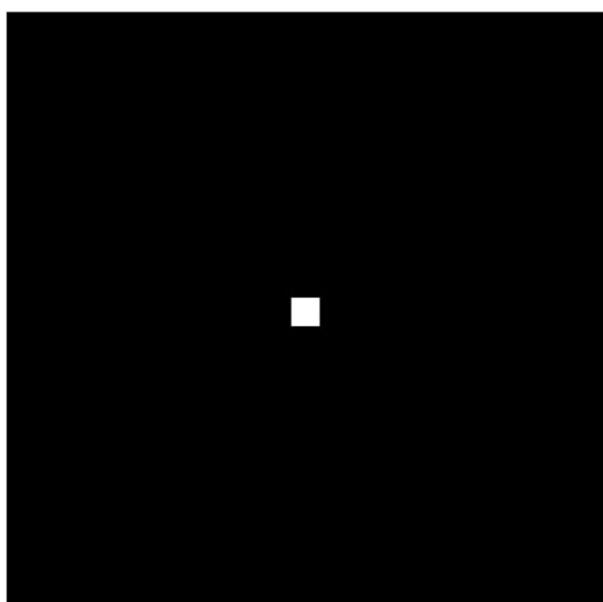
	3								
--	---	--	--	--	--	--	--	--	--

卷积定理：时域(spatial domain) 上的卷积等价于频域(frequency domain)上的乘积，时域上的乘积等价于频域上的卷积。

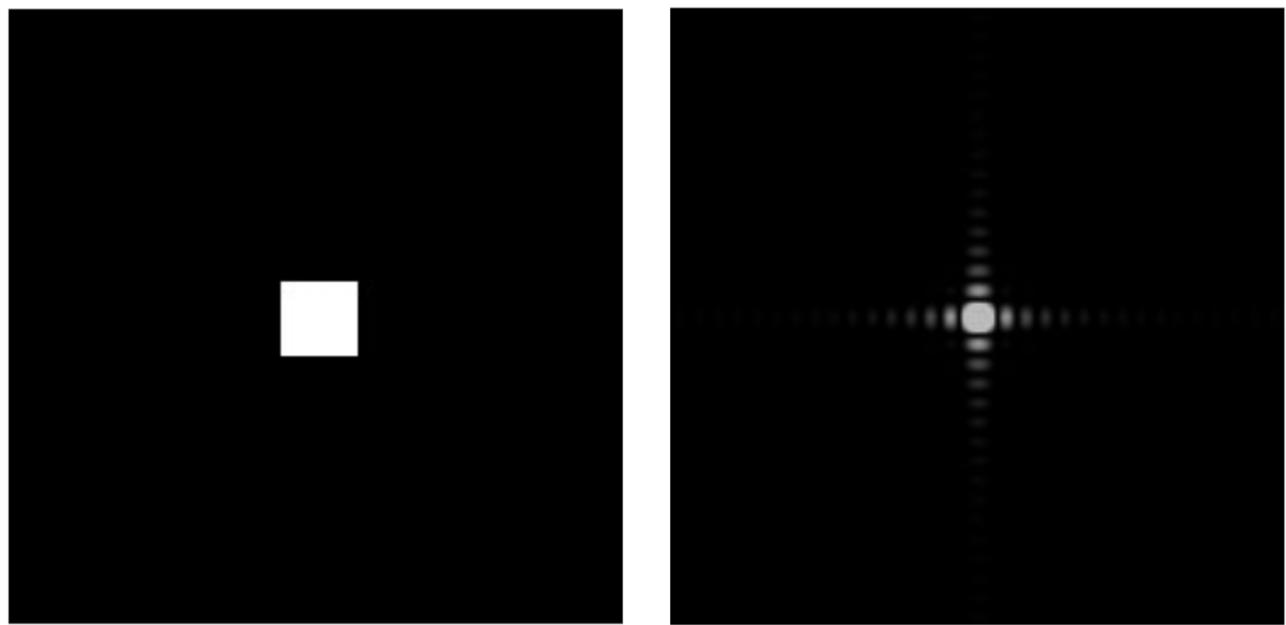
因此实域和频域可以相互转换，利用傅里叶定理即可：

- 实域到频域：傅里叶变换
- 频域到实域：逆傅里叶变换
- 时域上卷积核的大小与频域上的关系是负相关，如下图所示

Box Function = Low Pass Filter

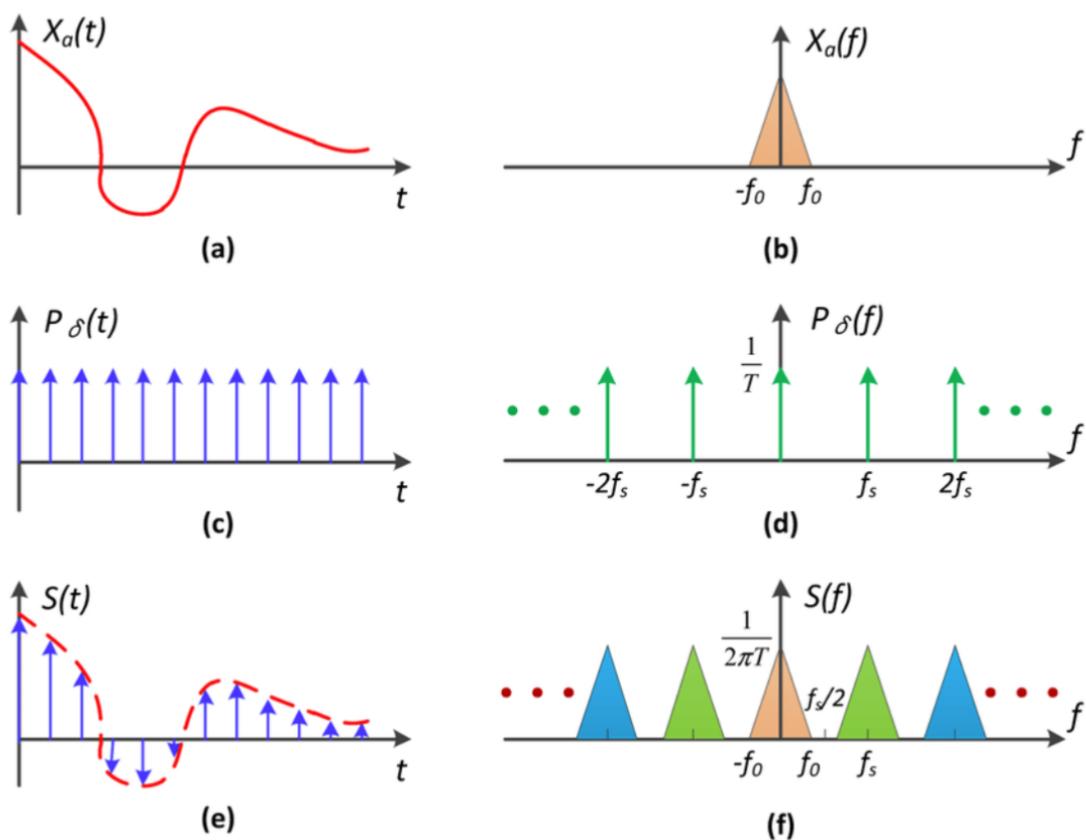


Wider Filter Kernel = Lower Frequencies(box范围变大，频域上的范围变小)



5. Sampling 采样

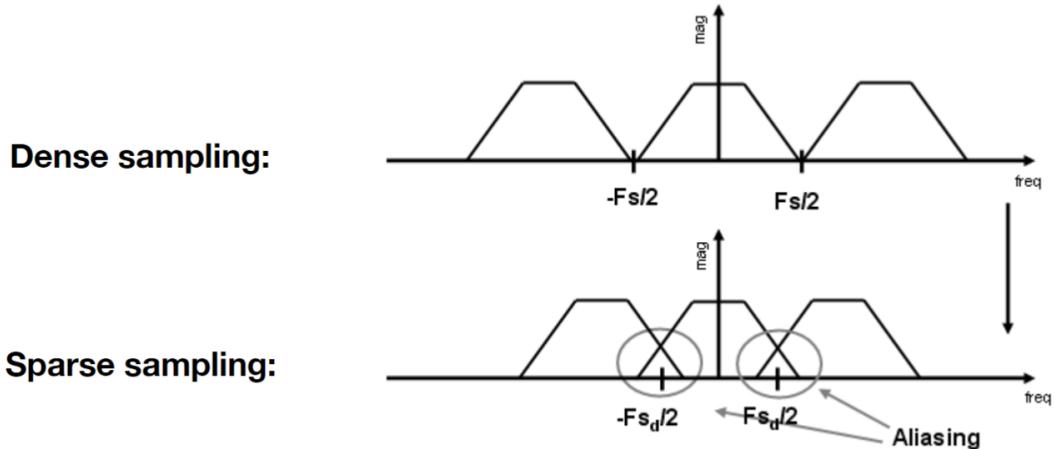
采样，即重复原始信号的频谱，不同采样的速度会引起不同的重复结果。



- (a) 是信号的时域函数，(b) 是信号的频域函数

- (c) 是一个冲击函数，用于采样，而 (d) 是冲激函数的频域
- (e) 是采样结果的时域，(f) 为采样结果的频域
- 由于对时域的卷积等于对频域的乘积，可以得到频域是不断重复原始信号的频谱。

采样间隔较长会导致 sparse sampling，即频域信号在重复时发生混叠，导致 Aliasing。Aliasing = Mixed Frequency Contents



(横轴表示频率，纵轴表示信号强度)

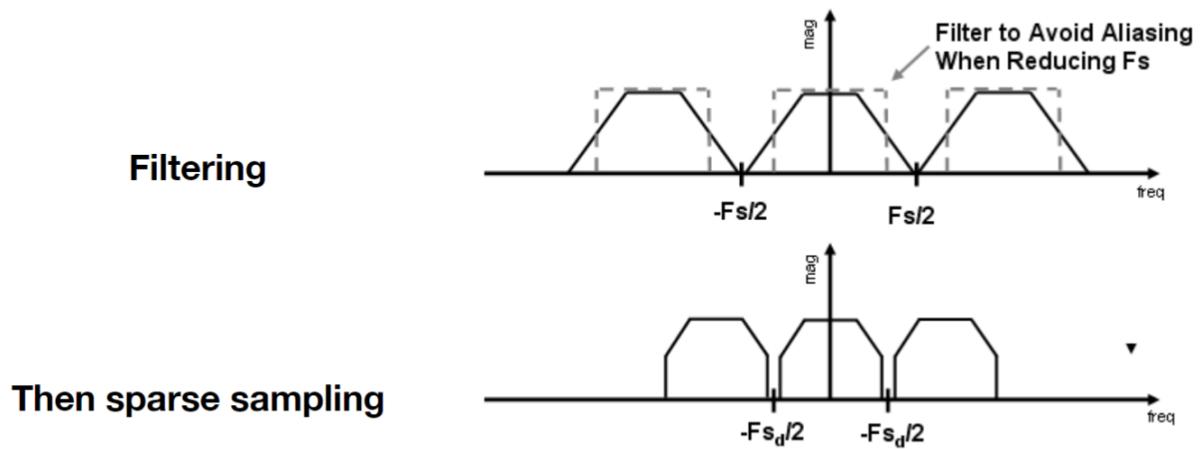
6. Antialiasing

对于减少 Aliasing 走样，有两种方法

- 增加采样率 (成本高)
- 采用反走样方法

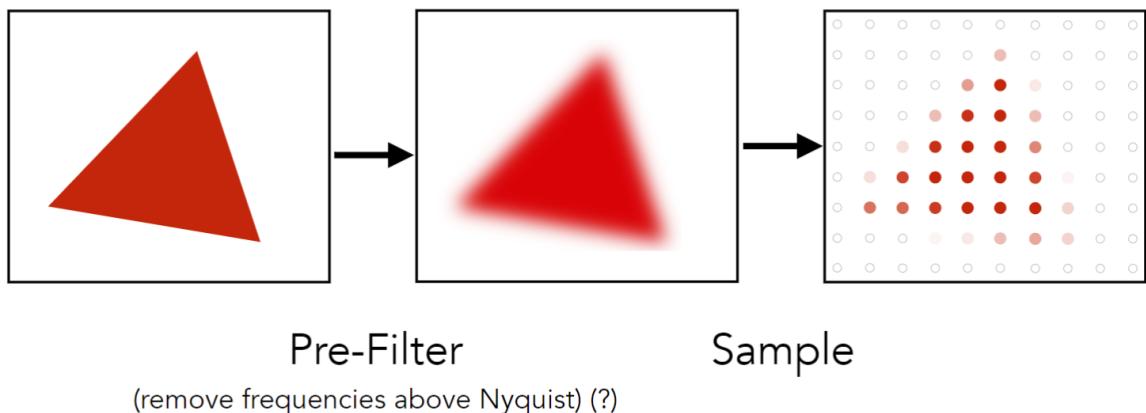
Antialiasing 反走样，即先限制信号的形状，再来采样重复信号。

比如下方的示例，通过截断高频信号限制信号，再重复原始信号，避免走样。



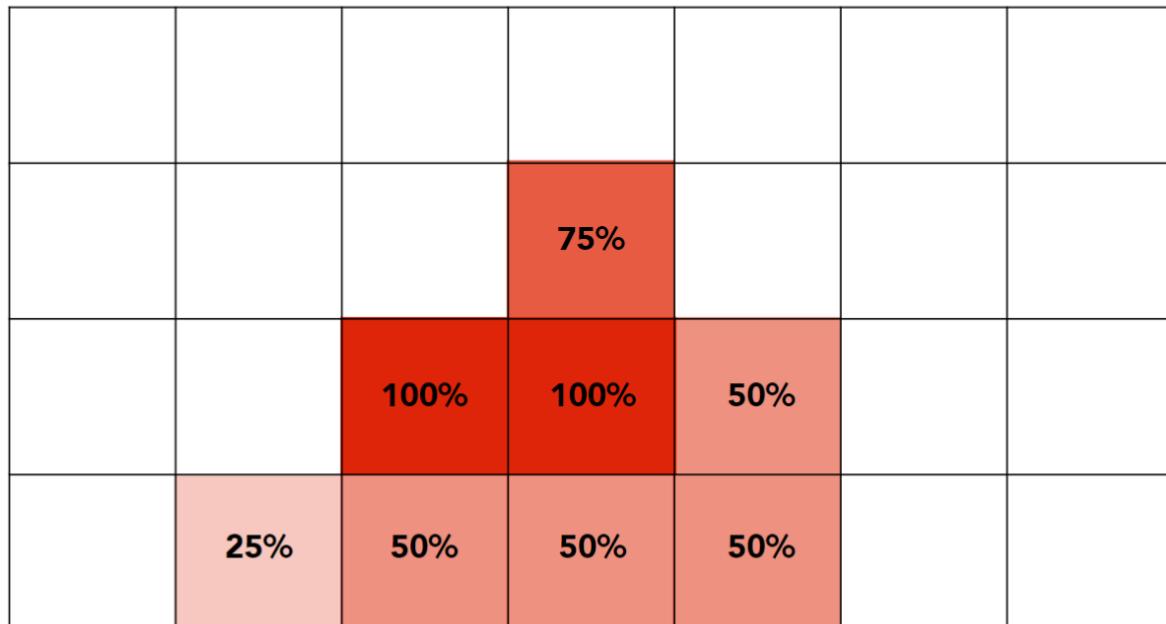
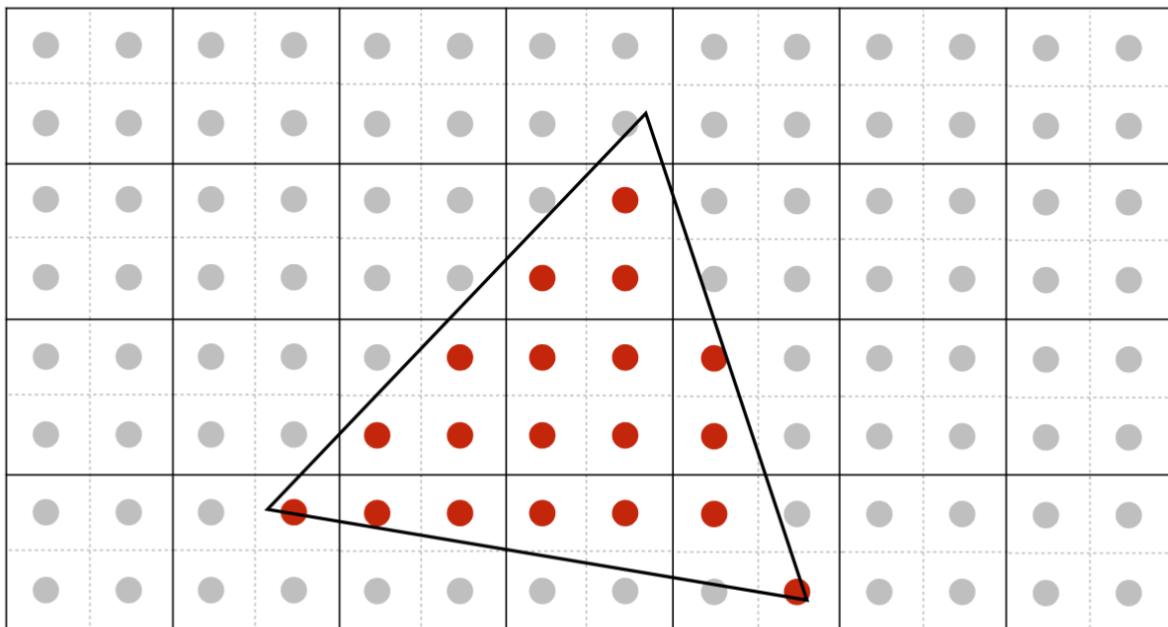
而之前反走样的图片可以印证反走样方法的步骤

- 通过低通滤波截断高频信号
- 对信号进行采样



7.MSAA

对每个像素进行细分，划分成 4个 子像素，再计算覆盖个数，计算对于原本像素的颜色。



MSAA 通过增加每个像素内部的划分计算像素的颜色，增加了计算量，如下有其他方法

- FXAA
- TAA
- 超分辨率 / 超采样 : DLSS