Wählen $x_n := \frac{1}{n}$, $y_n := \frac{1}{n}$ und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{|x_n|-|0|}{x_n - 0} = \frac{|x_n|}{x_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{|y_n|-|0|}{y_n - 0} = \frac{|y_n|}{y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1$$

Also ist $x \mapsto |x|$ in $x_0 = 0$ nicht diff.bar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \cancel{\lim_{x\to 0} \frac{1+x-1-x}{x^2}} = \cancel{\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1+x-1+x}\ 2\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\underbrace{\sqrt{1+x}}_{\to 1} + \underbrace{\sqrt{1-x}}_{\to 1}} = \frac{2}{2} = 1$$

Vorlesung

Satz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$.

Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis: z.z. ist: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Äquivalent dazu: $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

Nun gilt: $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}$

$$= f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

Definition Stetigkeit

$g: I \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in I$, wenn gilt

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Bemerkung:

- Die Umkehrung der Aussage ist im Allgemeinen falsch!
- Jede nicht stetige Funktion ist nicht diffbar

Satz

Seien $f, g: I \to \mathbb{R}$ in $x \in I$ diffbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann sind $f+g$, $f\cdot g$ und f/g (sofern $g(x) \neq 0$) in x diffbar.

Es gilt:

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ (Summenregel)

(ii) $(fg)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ (Produktregel)

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

Beweis:

(i)
$$(f+g)'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t)+g(t) - (f(x)+g(x))}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$
$$= \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \lim_{t\to x} \frac{g(t)-g(x)}{t-x}$$
$$= f'(x) + g'(x)$$

(ii)
$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)}{y-x}$$
$$= \lim_{y\to x} f(y)\cdot \frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x)\cdot \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
$$= \lim_{y\to x} f(y)\cdot \frac{g(y)-g(x)}{y-x} + \lim_{y\to x} g(x)\cdot \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
$$= \lim_{y\to x} f(y)\cdot \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x)\cdot \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
$$= f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

(iii)
$$\lim_{y\to x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)}\cdot\frac{g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(y)}{g(y)}}{y-x}$$
$$= \lim_{y\to x} \frac{1}{g(y)\cdot g(x)} \cdot \frac{f(y)g(x) - f(x)g(y)}{y-x} = \frac{1}{g(x)^2}\cdot \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(x) - f(y)g(y) + f(y)g(y) - f(x)g(y)}{y-x}$$
$$= \frac{1}{g(x)^2}\cdot \lim_{y\to x} f(y)\cdot \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + g(y)\cdot \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
$$= \frac{1}{g(x)^2}\cdot \left(\lim_{y\to x} f(y)\cdot \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + \lim_{y\to x} g(y)\, \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)$$
$$= \frac{1}{g(x)^2}\cdot \left(f(x)\cdot(-g'(x)) + g(x)\cdot f'(x)\right)$$
$$= \frac{g(x)\cdot f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

Beispiel:

- $f(x) = c \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R})$

$\rightarrow f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{c - c}{y - x} = 0$

- $f(x) = x^n \quad (x \in \mathbb{R})$ wobei $n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = n x^{n-1}$ per Induktion:

$n = 1$: zweiter Punkt ✓

$n \to n-1$: Sei also $f(x) = x^{n+1}$. Dann gilt mit der Produktregel:

$$f'(x) = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot (x^n)'$$

$$= 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1) \cdot x^n$$

Damit sind alle Polynome, diffbar und für $p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$ gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^{n} l \cdot a_l x^{l-1}$$
$$= \sum_{l=1}^{n} l \cdot a_l x^{l-1}$$

Seien P_1 und P_2 Polynome. Dann nennt man die Abbildung:

$$Q: \mathbb{R} \setminus \{x \mid P_2(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$$

eine rationale Funktion. Mit Obiger sehen wir: rationale Fkt sind auf den kompletten Def-Bereich diffbar.

Die Funktion $|\cdot| : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$

ist nicht in 0 diffbar

Denn:

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} = \lim_{y \searrow 0} \frac{y - 0}{y - 0} = 1$$

$$\lim_{y \nearrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{-y - 0}{y - 0} = -1$$

Satz (Kettenregel)

I_f und I_g Intervalle, $x_0 \in I_f$ und $f: I_f \to \mathbb{R}$ in x_0 diffbar und $g: I_g \to \mathbb{R}$ sei in $f(x_0)$ diffbar und $f(I_f) \subseteq I_g$

Dann gilt:

$$\frac{d\, g\circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

Beweis:

Da f in x_0 diffbar ist, gilt für alle $x \in I_f$

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x))$$

Analog gilt für alle $y \in I_g$

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y))$$

Dann haben wir für alle $x \in I_f$

$$\begin{aligned} & g(f(x)) - g(f(x_0)) \\ &= (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0) \cdot (g'(f(x_0)) + 0) \\ &= f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

Definition

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar und $f': I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f <u>stetig differenzierbar</u>.

Wir definieren weiterhin induktiv die k-te Ableitung (für $k \in \mathbb{N}$) durch:

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(k+1)} := f^{(k)\prime}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.

Ist $f^{(k)}: I \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert, so heißt

f beliebig oft bzw. unendlich oft diffbar.

Bemerkung:

Wir haben bereits gesehen:

Polynome sind beliebig oft diffbar.