Taylor-Polynom

$$P_{n,\alpha}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \overbrace{\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}}^{\text{Koeffizienten sind linear}} \cdot \overbrace{(x-\alpha)^k}^{\text{Polynom}}$$

- Approximation einer Funktion durch Polynome
- Entwicklung in einem Punkt α

Satz von Taylor

$$\underset{\text{„interessante Funktion"}}{f(\beta)} = \underset{\substack{\text{Taylorpolynom} \\ \text{von Grad } n-1 \\ \text{als Approximation} \\ \text{„können wir ausrechnen"}}}{P_{n-1,\alpha}(f)(\beta)} + \underbrace{\overbrace{\frac{f^{(n)}(x)}{n!}}^{\text{hoffentlich kleiner Koeffizient}} (\beta-\alpha)^n}_{\text{Fehler als Lagrange-Restglied}}$$

Ü6

B) a) $f(x) := e^x$ mit $x_0 = 0$

$$P_4(f(0)) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n$$

$$= \frac{1}{1} \cdot x^0 + \frac{1}{1} \cdot x^1 + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4$$

$$= x^0 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

b) $g(x) := \ln(x)$ mit $x_0 = 1$

$$P_4(g(1)) = \sum_{n=0}^{4} \frac{g^{(n)}(1)}{n!} \cdot (x-1)^n$$

$$= \frac{0}{1} \cdot (x-1)^0 + \frac{1}{1} \cdot (x-1)^1 - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot (x-1)^3 - \frac{1}{4} \cdot (x-1)^4$$

$$= x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

Vorlesung

Definition

Ist $f: I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylorreihe um Entwicklungspunkt $\alpha \in I$.

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} \cdot (x-\alpha)^n$$

Bemerkung:

- in A konvergiert $T_{f,\alpha}(x)$ für $x \neq \alpha$ nicht
- Der Satz von Taylor behandelt nicht die Taylorreihe
- Selbst wenn $T_{f,\alpha}(x)$ konvergiert, muss nicht gelten:

$$T_{f,\alpha}(x) = f(x)$$

- Sei $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$

Dann gilt: $P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \Leftrightarrow$

$R_n(x) \to 0$

Satz

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-\alpha)^n$ und $R > 0$ der zugehörige Konvergenzradius von f.

Dann ist f auf $(\alpha - R, \alpha + R)$ beliebig oft diffbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

d.h. die Taylorreihe $T_{f,\alpha}$ stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.

Beweis:

Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-\alpha)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$f^{(l)}(x) = l! \cdot a_l + \sum_{n=l+1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-l) \cdot a_n \cdot (x-\alpha)^{n-l}$$

für $l \in \mathbb{N}$

Also: $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$

Bemerkung:

- in A konvergiert $T_{f,\alpha}(x)$ für $x \neq \alpha$ nicht
- Der Satz von Taylor behandelt nicht die Taylorreihe
- Selbst wenn $T_{f,\alpha}(x)$ konvergiert, muss nicht gelten:

  $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$
- Sei $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$

  Dann gilt: $P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \Leftrightarrow$

  $R_n(x) \to 0$

Satz

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-\alpha)^n$ und $R>0$ der zugehörige Konvergenzradius von f.

Dann ist f auf $(\alpha - R, \alpha + R)$ beliebig oft diffbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

d.h. die Taylorreihe $T_{f,\alpha}$ stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.

Beweis:

Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-\alpha)^{n-1}$$

$$\vdots$$

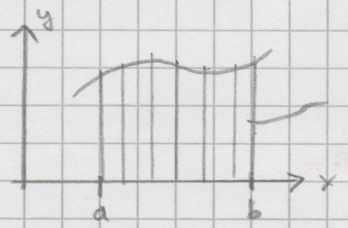
$$f^{(l)}(x) = l! \cdot a_l + \sum_{n=l+1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-l) \cdot a_n \cdot (x-\alpha)^{n-l}$$

für $l \in \mathbb{N}$

Also: $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$

2. Riemann – Integral

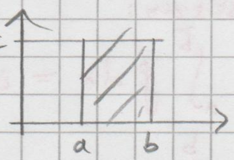
Ziel: Wir wollen auf "natürliche" Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der x-Achse zu bestimmen.



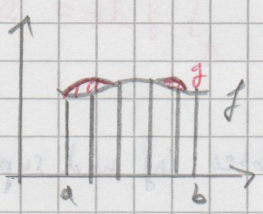
$\int_a^b f\,dx$

Dabei heißt auf "natürliche Weise" insbesondere:

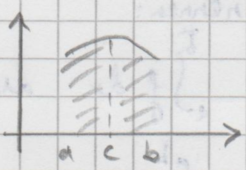
- gilt $f(x) = c = \text{const.}$ für alle $x \in D(f) = [a,b]$, so soll gelten: $\int_a^b f\,dx = c \cdot (b-a)$



- gilt $f(x) \leq g(x)$ $\quad (x \in [a,b])$
  so fordern wir $\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$



- für $c \in [a,b]$ soll gelten
  $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$



Vorgehen: Man unterteile $[a,b]$ in "viele" Teilintervalle, auf denen f nahezu konstant ist.

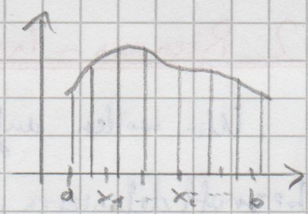
Definition: Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Partition P von $[a,b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $a \leq x_0 \leq x_1 \ldots \leq x_n \leq b$

Wir schreiben: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$.

Wir schreiben:

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$



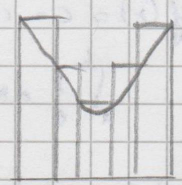
$$m_i(P) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Weiter definieren wir:

$$S(P,f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

$$s(P,f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

Wir setzen:



$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf S(P,f)$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup s(P,f)$$

Wobei inf und sup über alle Partitionen von $[a,b]$ genommen werden.

Wir nennen:

$\overline{\int_a^b} f\,dx$ das <u>obere</u> und

$\underline{\int_a^b} f\,dx$ das <u>untere</u>

<u>Riemannintegral</u> von f über $[a,b]$

Gilt $\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx$, so sagen wir f ist <u>Riemann-integrierbar</u> (<u>intbar</u>) und nennen

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f\,dx := \overline{\int_a^b} f\,dx$$

das <u>Riemannintegral</u> von f über $[a,b]$. Die Menge der Riemann intbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit R bzw. $R_{[a,b]}$.

Bemerkung:

- Da f beschränkt ist, gibt es $m \leq M$ in $\mathbb{R}$ mit:

  $m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a,b])$.

  Damit gilt für jede Partition P:

  $m \cdot (b-a) \leq s(P,f) \leq S(P,f) \leq M \cdot (b-a)$

  Ergo: ${}_a\overline{\int}^b f\,dx$, ${}_{\underline{a}}\int^b f\,dx$ sind wohldefiniert

- Im gesamten Thema 2 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen

Definition:

Seien P_1, P_2 zwei Partitionen eines Intervalls.

Dann heißt P_1 <u>Verfeinerung</u> von P_2, wenn gilt:

$$P_2 \subseteq P_1$$

Weiter nennen wir $P_1 \cup P_2$ die <u>gemeinsame</u> Verfeinerung in P_1 und P_2

Satz:

Ist P' eine Verfeinerung der Partition P von $[a,b]$, dann gilt:

$$S(P,f) \geq S(P',f)$$

$$s(P,f) \leq s(P',f)$$

(wobei f wie in der Definition sei)

Beweis: Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog.

Wir nehmen zunächst an, dass P' sich von P in nur einem Element x' unterscheidet. D.h.

$$P' = P \cup \{x'\}$$

Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x' \in [x_{i-1}, x_i]$

(wobei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ sei)

Wir definieren

$$W_1 := \sup_{x \in [x_{i-1}, x']} f(x)$$

$$W_2 := \sup_{x \in [x', x_i]} f(x)$$

Dann gilt:

$$S(P,f) - S(P',f) = M_i \underbrace{\Delta x_i}_{*} - W_1 \cdot (x' - x_{i-1}) - W_2 \cdot (x_i - x')$$

$* = x - x_{i-1}$

$$\underbrace{(M_i - W_1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x' \cdot x_{i-1})}_{>0} + \underbrace{(M_i - W_2)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_i - x')}_{>0} \geq 0$$

Enthält von P' k Punkte, die nicht in P enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt k-mal durch.

Satz:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$\overline{\int_a^b} f\,dx \geq \underline{\int_a^b} f\,dx$$

Beweis: Seien P_1, P_2 zwei Partitionierungen von $[a,b]$ und P' die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:

$$s(P_1,f) \leq s(P',f) \leq S(P',f) \leq S(P_2,f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1,f) \leq S(P_2,f)$$

für alle Partitionierungen P_1, P_2. Sprich $S(P_2,f)$ ist stets obere Schranke von $s(P,f)$ für alle Partitionen P von $[a,b]$.

Ergo: $\sup s(P,f) \leq S(P_2,f)$

Damit ist also $\sup s(P,f)$ untere Schranke von $S(P,f)$ (P - beliebiger Partition).

Bemerkung:

- Da f beschränkt ist, gibt es $m \leq M$ in $\mathbb{R}$ mit:

  $m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a,b])$.

  Damit gilt für jede Partition P:

  $m \cdot (b-a) \leq s(P,f) \leq S(P,f) \leq M \cdot (b-a)$

  Ergo: $\overline{\int_a^b} f\,dx$, $\underline{\int_a^b} f\,dx$ sind wohldefiniert

- Im gesamten Thema 2 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen

Definition:

Seien P_1, P_2 zwei Partitionen eines Intervalls.

Dann heißt P_1 Verfeinerung von P_2, wenn gilt:

$P_2 \subseteq P_1$

Weiter nennen wir $P_1 \cup P_2$ die gemeinsame Verfeinerung in P_1 und P_2

Satz:

Ist P' eine Verfeinerung der Partition P von $[a,b]$, dann gilt:

$S(P,f) \geq S(P',f)$

$s(P,f) \leq s(P',f)$

(wobei f wie in der Definition sei)

Beweis: Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog.

Wir nehmen zunächst an, dass P' sich von P in nur einem Element x' unterscheidet. D.h.

$P' = P \cup \{x'\}$

Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x' \in [x_{i-1}, x_i]$

(wobei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ sei)

Ergo: ~~sup(s~~ $\sup s(P,f) \leq \inf S(P,f)$

Wir haben also gezeigt:

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup s(P,f) \leq \inf S(P,f) = \overline{\int_a^b} f\,dx$$