Ergo: ~~sup(s~~ $\sup s(P,f) \leq \inf S(P,f)$

Wir haben also gezeigt:

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup s(P,f) \leq \inf S(P,f) = \overline{\int_a^b} f\,dx$$

Satz

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f \in R_{[a,b]}$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon>0$ eine Partition P_ε existiert mit

$$S(P_\varepsilon,f) - s(P_\varepsilon,f) < \varepsilon$$

Beweis:

Per Definition gilt Satz über Beschränktheit.

$$s(P_\varepsilon,f) \leq \underline{\int_a^b} f\,dx \leq \overline{\int_a^b} f\,dx \leq S(P_\varepsilon,f)$$

~~Ergo $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$~~

Damit erhalten wir

$$\overline{\int_a^b} f\,dx - \underline{\int_a^b} f\,dx \leq S(P_\varepsilon,f) - s(P_\varepsilon,f) < \varepsilon$$

D.h., da $\varepsilon>0$ beliebig, dass

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx$$

Ergo: $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$

Definition sup:

$\sup M := S$, wobei $S \geq m$ $(m\in M)$ und für jede obere Schranke R von M $R \geq S$

$\Leftrightarrow$ $S \geq m$ $(m \in M)$ & $\forall \varepsilon>0\ \exists m\in M: m+\varepsilon > S$

Per Definition gibt für alle $\varepsilon > 0$ ein P_ε' mit

$$\underline{\int_a^b} f\,dx - s(P_\varepsilon', f) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Analog existiert ein P_ε'' mit

$$S(P_\varepsilon'', f) - \overline{\int_a^b} f\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (**)$$

Wir setzen P_ε gleich der gemeinsamen Verfeinerung von P_ε' und P_ε''. Man beachte: Wegen Satz 4 gelte: $(*)$ und $(**)$

Wenn wir P_ε' bzw. P_ε'' durch P_ε ersetzen. Da $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$ gilt außerdem

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^b} f\,dx$$

Addition von $(*)$ und $(**)$ liefert:

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Satz:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P_\varepsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$ mit $S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$.

a) Ist P eine Verfeinerung von P_ε, so gilt:

$$S(P, f) - s(P, f) < \varepsilon$$

b) Sind s_i, t_i beliebige Punkte in $[x_{i-1}, x_i]$, so gilt $\sum_{i=1} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i < \varepsilon$

c) Ist $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$ und $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, so gilt

$$\left| \sum_{i=1} f(t_i)\,\Delta x_i - \int_a^b f\,dx \right| < \varepsilon$$

Beweis:

a) Das folgt aus Satz 4

b) $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i$
$= S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$

c) Da $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, gilt $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$

Damit folgt die Aussage aus

$$s(P_\varepsilon, f) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = S(P_\varepsilon, f)$$

und $s(P_\varepsilon, f) \leq \int_a^b f dx \leq S(P_\varepsilon, f)$

Wir wollen im folgenden wichtige Vertreter Riemann-integr. Funktionen kennenlernen.

Satz

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \in \mathbb{R}[a,b]$

Beweis:

Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt, ist f offensichtlich beschränkt.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass folgende Implikation gilt:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Wir wählen eine Partition $P_\varepsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$, so dass $\Delta x_i < \delta$. Dann gilt: $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$

und daher:

$$S(P_\varepsilon, f) - s(P_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i \leq \varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot (b-a)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig folgt die Aussage des vorletzten Satzes

Satz

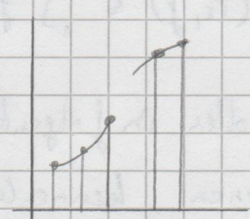
Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Beweis:

Da f monoton ist, gilt für alle $x \in [a,b]$: $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

D.h. f ist beschränkt.

Zu $n \in \mathbb{N}$, wählen wir eine Partition $P_n = \{x_0, \dots, x_k\}$ mit $\Delta x_i < \frac{1}{n}$



Dann gilt:

$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i$

Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend (der andere Fall läuft analog)

Da gilt $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$ und daher

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n} \cdot (f(b) - f(a))$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle n_ε so, dass gilt

$$\frac{1}{n_\varepsilon} (f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

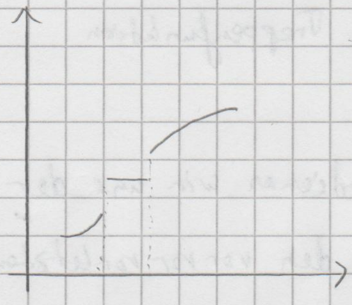
Dann gilt mit $P_\varepsilon := P_{n_\varepsilon}$ die Aussage nach dem vorvorvorletzten Satz.

Satz

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Dann gilt $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $E = \{p_1, \dots, p_n\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\{a,b\} \cap E = \emptyset$ (der andere Fall läuft analog).



Sei $M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Wir wählen $u_i, v_i \in [a,b]$ $(i = 1, \dots, n)$ so, dass $P_i \in [u_i, v_i]$ und $2M \cdot (v_i - u_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$.
Sei $I_1^\varepsilon = [a, u_1]$, $I_k^\varepsilon = [v_{k-1}, u_k]$ $(k = 2, \dots, n)$, $I_{n+1}^\varepsilon = [v_n, b]$.

[a, b] und nicht R, ich weiss ;)

Per Voraussetzung ist $f|_{I_i}$ $(i = 1, \dots, n+1)$ stetig. Daher existiert nach vorvorletztem Satz eine Partition P_i^ε, sodass

$$S(P_i^\varepsilon, f|_{I_i^\varepsilon}) - s(P_i^\varepsilon, f|_{I_i^\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (n+1)}$$

Wir sehen $P^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n+1} P_i^\varepsilon \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{u_i, v_i\}$

Da gilt

$$S(P^\varepsilon, f) - s(P^\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^{n+1} S(P_i^\varepsilon, f|_{I_i^\varepsilon}) - s(P_i^\varepsilon, f|_{I_i^\varepsilon})$$

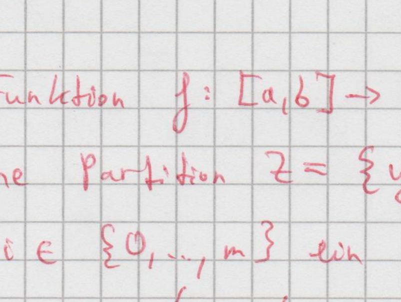
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in [u_i, v_i]} f(x) - \inf_{x \in [u_i, v_i]} f(x) \right)(v_i - u_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{2M \cdot (v_i - u_i)}_{< \frac{\varepsilon}{2n}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Definition:

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Partition $Z = \{y_0, \dots, y_m\}$ von $[a,b]$ und für alle $i \in \{0, \dots, m\}$ ein $c_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = c_i \qquad (x \in (y_{i-1}, y_i))$$



Nach dem letzten Satz ist jede Treppenfunktion Riemann-intbar.

Zur Berechnung des Integrals bedienen wir uns der Notation des letzten Satzes und verwenden den vorvorvorletzten Satz. Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass f in a und b stetig ist. D.h. die Menge der Unstetigkeitsstellen ist gegeben durch $F = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$.

Für $x \in I_i^\varepsilon$ gilt dann $f(x) = c_i$ für alle $i = 1, \dots, m$. Dann gilt nach vorvorvorletztem Satz:

$$\left| \int_a^b f dx - \sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_i^\varepsilon| + \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i) \cdot (v_i - u_i) \right| < \varepsilon$$

Für $\varepsilon \to 0$ gilt:

$|I_1^\varepsilon| \to y_1 - a$

$|I_i^\varepsilon| \to y_i - y_{i-1}$ $\qquad (i = 2, \dots, m)$

$|I_{m+1}^\varepsilon| \to b - y_m$

D.h. $\sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_i^\varepsilon| \to c_1 (y_1 - a) + \sum_{i=2}^{m} c_i \cdot (y_i - y_{i-1}) + c_m (b - y_m) \overset{(*)}{=}$

Außerdem geht $y - u_i \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$ und daher gilt $\int_a^b f dx = (*)$