Beweis:

$$\frac{d}{dt} F(t)G(t) = F'(t)\, G(t) + F(t)\, G'(t)$$
$$= f(t)\, G(t) + F(t)\, g(t)$$

Da $f, g \in \mathbb{R}_{[a,b]}$ und F, G diffbar (und daher auch in $\mathbb{R}_{[a,b]}$), ist die rechte Seite in $R_{[a,b]}$.

Mit Satz 2 haben wir $\int_a^b f(t)\, G(t) + F(t) g(t)\, dt$
$$= F(b)\, G(b) - F(a)\, G(a) \quad (*)$$

Weiter aufgrund der Linearität des Integrals

$$\int_a^b f\, G + F g\, dt = \int_a^b f G\, dt + \int_a^b F g\, dt \overset{(*)}{=} \int_a^b f G\, dt$$

liefert die Behauptung.

- (f) X - bel. Menge auf $B(x) = \{ f : x \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist beschränkt} \}$

definieren wir $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$

(M1) & (M3) sind weiter einfach.

(M3) folgt aus:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$
$$\leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{y \in X} |h(y) - g(y)|$$
$$= d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g) \quad \text{für alle } f,g,h \in B(x)$$

- (g) $X = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ - die Menge aller stetigen Funktion von $[a,b]$ nach $\mathbb{K}$. Auch auf $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ definieren wir

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

- (h) X - Personen auf Facebook. Mögliches Abstandsmaß: kürzeste Verbindung zwischen Person A & Person B entlang der Freundschaftsrelation

i) Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, so ist auch $(Y, d|_{Y \times Y})$ ein metrischer Raum, den wir üblicherweise einfach mit (Y,d) bezeichnen.

Bemerkung: - Mit Ausnahme von Beispiel (e), (h) & (i) gehören die obigen Beispiele zur ~~[illegible]~~ Klasse sogenannter normierter Räume bzw. Skalarprodukträume, auf denen noch mehr Struktur vorliegt als "nur" eine Metrik

Definition 2:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt konvergent gegen $x \in X$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon$$

Wir schreiben $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ bzw. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und nennen x den Grenzwert (GW) in (x_n).

Bemerkung: - Man vergleiche die obige Definition mit der Definition konvergenter Zahlenfolgen

- Man mache sich klar, dass gilt:

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \iff \underbrace{d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0}_{\text{(}x_n \text{ in } \mathbb{R}\text{)}}$$

Lemma 3

Sei (X,d) ein metrischer Raum und (x_n) eine konvergente Folge in X. Dann ist der GW von (x_n) eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien x, y GW der Folge (x_n). Dann gilt:

$0 \leq d(x,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $d(x,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $d(y,x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

gilt: $d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x,y) \leq \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(x,x_n)}_{\to 0} + \underbrace{d(x_n,y)}_{\to 0} = 0$

Mit (M1) folgt $x = y$

//

Beispiel: – Was heißt Konvergenz einer Folge (f_n) gegen f in $B(X)$ bzgl. der Metrik d_∞?

Per Definition gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \; d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \; \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon \; \forall x \in X : \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$ f_n konvergiert glm. gegen f

Im Folgenden lernen wir eine wichtige Teilklasse von metrischen sogenannten normierten Räumen kennen, die insbesondere eine VR-Struktur besitzen.

Definition 4:

Sei V ein VR über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ heißt Norm (auf V), wenn gilt:

(N1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(N2) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

(N3) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Proposition & Definition 5:

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt bzw. ist

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \to [0, \infty)$$
$$(v, w) \mapsto \|v - w\|$$

eine Metrik auf V. Wir nennen $d_{\|\cdot\|}$ die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik.

Beweis: Wir haben nur (M1) - (M3) nachzuprüfen:

(M1) $d_{\|\cdot\|}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0$

$\Leftrightarrow \quad x-y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=y$

(M2) Seien $x,y,z \in V$, dann gilt:

$$d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\|$$
$$\overset{(N2)}{\leq} \|x-z\| + \|z-y\| = d_{\|\cdot\|}(x,z) + d_{\|\cdot\|}\, d(z,y)$$

(M3) $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\|$

$$= |-1|\, \|y-x\| = \|y-x\| = d_{\|\cdot\|}(y,x)$$

Beispiele – auf $V = \mathbb{K}^n$ definiert für $p \in \mathbb{N}$

$\|\cdot\|_p : V \to [0,\infty)$

$x \mapsto \|x_p\| := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$

die sogenannte l_p-Norm

Man sieht sofort: die von $\|\cdot\|_p$ induzierte Metrik ist genau die l_p-Metrik

– ~~als~~ auf $V = \mathbb{K}^n$ definiert für $p \in \mathbb{N}$.

$\|\cdot\|_p : V \to [0,\infty)$

$x \mapsto \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

der l_∞-Norm, die weiter die l_∞-Metrik induziert

– auf $B(X)$ sowie $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ ist $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ eine Norm, die sogenannte Supremumnorm.

Proposition 6 (Umgekehrte Δ-Ungl.)

Sei (X,d) metrischer Raum. Dann gilt:

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z) \qquad (x,y,z \in X)$$

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann gilt:

$$\big| \|y\| - \|z\| \big| \le \|y - z\| \qquad (y, z \in V)$$

Beweis: Wegen (M2) gilt:

$(*)$ $d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z)$ und außerdem

$(**)$ $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

Mit $(*)$ $-d(x,z)$ und $(**)$ $-d(x,y)$ folgt

$$d(y,z) \ge d(x,y) - d(x,z)$$
$$d(x,z) - d(x,y)$$

Da für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $|\lambda| = \max\{-\lambda, \lambda\}$ gilt

$$d(y,z) \ge |d(x,y) - d(x,z)|$$

Das zeigt den ersten Teil der Aussage. Zum zweiten Teil:

Da für alle $x \in V$ gilt: $d_{\|\cdot\|}(x, 0) = \|x\|$, folgt die Behauptung indem wir d durch $d_{\|\cdot\|}$ einsetzen und $x = 0$ einsetzen.