Bemerkung:

- Ist f eine p-periodische Funktion, so ist die Fourierreihe F von f definiert als $\tilde{F}(\frac{x}{p})$, wobei $\tilde{F}$ die Fourierreihe der (1-periodischen) Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit $\tilde{f}(x) = f(px)$ ist.

D.h. $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{f}}(k) e^{2\pi i k \frac{x}{p}}$

wobei $\hat{\tilde{f}}(k) = \int_0^1 \tilde{f}(x) e^{-2\pi i k x}\, dx = \int_0^1 f(px) e^{-2\pi i k x}$

$$\overset{t=px}{=} \frac{1}{p} \int_0^p f(t) e^{-\frac{2\pi}{p} i k t}\, dt$$

- Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodisch, so gilt

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x}\, dx$$

$$= \int_0^1 f(x) \overline{e^{2\pi i k x}}\, dx$$

$$= \overline{\int_0^1 f(x) e^{2\pi i k x}\, dx} = \overline{\hat{f}(-k)}$$

D.h. $F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} + \hat{f}(-k) e^{-2\pi i k x}$

$$\overset{f \text{ ist reellwertig}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x} + \overline{\hat{f}(k) e^{2\pi i k x}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\left(\hat{f}(k)\, e^{2\pi i k x}\right)$$

Spezialfall: $f(x) = f(-x)$, d.h. f ist gerade. Dann gilt:

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i k x}\, dx \overset{-x+1=t}{=} (-1)\int_1^0 f(-t+1) e^{-2\pi i k(-t+1)}\, dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{f(-t+1)}_{=f(-t)=f(t)} e^{2\pi i k t - 2\pi i k}\, dt$$

$$= \int_0^1 f(t) e^{2\pi i k t}\, dt = \hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$$

Ergo: $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k) \in \mathbb{R}$. Mit $(*)$ folgt:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\hat{f}(k) \cos 2\pi k x$$

Analog kann man zeigen: gilt $f(-x) = -f(x)$ (d.h. f ist ungerade)

Dann lässt sich $F(x)$ schreiben als $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(2\pi k x)$

Proposition 3

Sei $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{2\pi i k x}$,

wobei $\gamma_k \in \mathbb{K}$ und die trigonometrische Reihe auf der rechten Seite glm. konvergiert. Dann gilt: f ist 1-periodisch und Riemann-intbar über $[0,1]$ und $\hat{f}(k) = \gamma_k$

Beweis:

Sei $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{2\pi i k x}$. Es gilt:

$$f_n(x+1) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{2\pi i k (x+1)} = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{2\pi i k x} \cdot \underbrace{e^{2\pi i k}}_{=1}$$
$$= f_n(x)$$

D.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f_n 1-periodisch

Damit gilt:

$$f(x+1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

D.h. f ist 1-periodisch. Mit Satz 5 aus dem vorigen Abschnitt folgt $f \in \mathcal{R}_{[0,1]}$. Weiter gilt:

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) \cdot e^{-2\pi i k x} \, dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l e^{2\pi i l x} \right) \cdot e^{-2\pi i k x} \, dx$$

$$\overset{\text{Satz 5}}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \gamma_l e^{2\pi i l x} e^{-2\pi i k x} \, dx$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l \cdot \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi i (l-k) x} \, dx}_{= \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq k \\ 1 & \text{für } l = k \end{cases}}$$

$$= \gamma_k$$

Satz 4

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 1-periodische Funktion, die stückweise stetig diffbar ist, d.h. es existiert eine Partition:

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \quad \text{von } [0,1], \text{ so dass}$$

$$f|_{[t_{i-1}, t_i]} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \text{ stetig diffbar ist.}$$

Dann konvergiert die Fourierreihe von f glm. gegen f.

Ohne Beweis.

§ 7 - Grundbegriffe in metrische und normierte Räume

Ziel des Kapitels: Vereinheitlichung und Verallgemeinerung bekannter Konvergenz- und Abstandsbegriffe.

Definition 1:

Sei X eine Menge. Eine Metrik auf X ist eine Abbildung $d: X \times X \to [0, \infty)$ mit

(M1) $\quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

(M2) $\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ für alle $x,y,z \in X$

(M3) $\quad d(x,y) = d(y,x)$ für $x,y \in X$

Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum. Oftmals sagt man einfach X ist ein metrischer Raum, sofern die entsprechende Metrik aus dem Kontext hervorgeht.

Bemerkung:

- (M2) heißt Δ-Ungleichung
- (M3) heißt Symmetrie

Beispiele:

a) Auf $\mathbb{K}$ definiert $d(x,y) = |x-y|$ eine Metrik.

b) Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir die l_1-Metrik durch

$$d_1((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

d_1 ist eine Metrik, denn...

M1 und M3 sind trivial. M2 folgt mit:

Seien $\underbrace{x}_{x_1,\dots,x_n}, \underbrace{y}_{y_1,\dots,y_n}, \underbrace{z}_{z_1,\dots,z_n} \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i - y_i|}_{\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| = d(x,z) + d(z,y)$$

c) Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir für $p \in \mathbb{N}$ die l_p-Metrik:

$$d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

(M1) & (M3) sind offensichtlich. Die Δ-Ungleichung macht in diesem Falle durchaus Arbeit. (Stichwort: Minkowski-Ungleichung)

d) Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir die l_∞-Metrik

$$d_\infty(x,y) = \max \{ |x_i - y_i| \mid i = 1,\dots,n \}$$

(M1) und (M3) sind weiter einfach zu sehen. (M2) folgt aus:

Seien $x,y,z \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$d_\infty(x,y) = \max \{ \underbrace{|x_i - y_i|}_{\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|} \mid i = 1,\dots,n \}$$

$$\leq \max \{ |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \mid i = 1,\dots,n \}$$

$$\leq \max \{ |x_i - z_i| \mid i = 1,\dots,n \} + \max \{ |z_i - y_i| \mid i = 1,\dots,n \}$$

$$= d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $d_\infty(x,y) = \lim_{p \to \infty}$

e) Sei X eine bel. nichtleere Menge

Dann definiert $d_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

die sogenannte <u>diskrete Metrik</u> auf X. (M1) und (M2) sind wieder einfach zu sehen.

(M3): O.E. sei $x \neq y$ und $z \in X$ bel. Ist $z = x$ (bzw. y), so gilt:

$$1 = d_D(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{=0} + \underbrace{d(z,y)}_{=0} = 1$$

Ist $z \notin \{x,y\}$, so gilt:

$$1 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{=1} + \underbrace{d(z,y)}_{=1} = 2$$

f) Sei $X \neq \emptyset$ eine bel. Menge und $B = \{f: X \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$

Wir definieren: $d_\infty(f,g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$

(das verallgemeinert Beispiel d)