Bemerkung: - Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen eine f, nennen wir f den gleichmäßigen Limes / GW von (f_n). Analog reden wir von punktweise Limes / GW

- Der letzte Satz sagt, dass wir bei gleichmäßigen Konvergenz gewisse GW vertauschen können, d.h.:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to y} f_n(x) = \lim_{x\to y} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(unter der Voraussetzung von Satz 2)

- Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R>0$ von dem Punkt x_0. Setzen wir $f_N = \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n$, so ist f per Definition der punktweise Limes von (f_N). Tatsächlich konvergiere die Funktion $f_N|_{B_r(x_0)}$ für beliebige $r \in (0,R)$ gleichmäßig gegen $f|_{B_r(x_0)}$. Denn:

$$\forall x \in B_r(x_0): |f(x) - f_N(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n\right|$$

$$= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right|$$

$$\le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (x-x_0)^n$$

$$< \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty,$$ wobei die absolute Konvergenz von Potenzreihen innerhalb des Konvergenzkreises angewandt wurde.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert also N_ε, so dass für alle $N \geq N_\varepsilon$ gilt: $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \varepsilon$. Ergo: Wir haben gezeigt, dass für $N \geq N_\varepsilon$ gilt:

$|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon \quad (x \in B_r(x_0))$. Das zeigt insbesondere mit Satz 3, dass Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius stetig sind.

4. Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$. Dann gilt: (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn gilt:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n, m \geq n_\varepsilon \ \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Beweis:

„$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f_n gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{K}$ konvergiert, gibt es ein n_ε, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt:

$$\forall x \in D: \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann gilt für $n, m \geq n_\varepsilon$:

$$\forall x \in D: \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D.h. $(*)$ ist erfüllt.

„$\Leftarrow$": Da für alle $x \in D$ $(f_n(x))$ nach $(*)$ eine Cauchy-Folge ist, konvergiert $(f_n(x))$.

Wir definieren: $f: D \to \mathbb{K}$

$$x \mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Es bleibt zu zeigen, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert nach $(*)$ ein n_ε, so dass für alle $x \in D$ gilt: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $(**)$ solange $n, m \geq n_\varepsilon$. Damit gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \to \infty} f_m(x)|$$
$$= \lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Mit $(**)$ folgt $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (x \in D)$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt die gleichmäßige Konvergenz und damit die Behauptung.

5. Satz: Sei (f_n) eine Funktionenfolge von auf $[a,b]$-intbaren Funktionen, die gleichmäßig gegen $f: [a,b] \to \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist f intbar und

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \, dx = \int_a^b f \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx$$

Beweis: Wir betrachten im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt sofort aus der separaten Betrachtung von Real- & Imaginärteil.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert per Voraussetzung ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $\forall x \in D \; \forall n \geq n_\varepsilon: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Mit anderen Worten, es gilt:

$$\forall n \geq n_\varepsilon: \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Es gilt also: $f_{n_\varepsilon}(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_{n_\varepsilon}(x) + \varepsilon \quad (x \in [a,b])$

Daher gilt:

$$\int_a^b f_{n_\varepsilon} + \varepsilon \, dx = \int_a^b f_{n_\varepsilon} + \varepsilon(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \, dx \leq \overline{\int_a^b} f \, dx$$

$$\leq \int_a^b f \, dx + \varepsilon(b-a)$$

Ergo: $\left| \underline{\int_a^b} f \, dx - \int_a^b f \, dx \right| \leq 2\varepsilon \, (b-a)$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $\underline{\int_a^b} f \, dx = \int_a^b f \, dx$, d.h. $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$.

Weiter gilt:

$$\left| \int_a^b f - f_n \, dx \right| = \int_a^b \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \varepsilon} dx \leq \varepsilon \cdot (b-a)$$

Für $n \to \infty$ folgt die Behauptung.

6. Korollar

Ist $f_n \in R_{[a,b]}$ $(n \in \mathbb{N})$ und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen $f: [a,b] \to \mathbb{K}$, so ist $f \in \mathbb{R}_{[a,b]}$ und

$$\int_a^b f \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n \, dx$$

Bemerkung: Wir können aber gliedweise integrieren!

7. Satz

Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar $(n \in \mathbb{N})$. Weiter gelte, dass (f_n) punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert und (f_n') gleichmäßig gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig diffbar und es gilt:

$$f'(x) = g(x) \qquad (x \in [a,b])$$

Beweis: Da f_n' gleichmäßig gegen g konvergiert ist g stetig (Satz 3). Daher gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass $G(x) = \int_a^x g \, dt$
↳ Satz 1, § 3

diffbar ist und als Ableitung g besitzt.

Weiterhin gilt mit Satz 5:

$$\lim_{n\to\infty} f_n' \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' \, dt = G(x)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung gilt außerdem:

$$\int_a^x f_n' \, dt = f_n(x) - f_n(a). \quad \text{Ergo:}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' \, dt + f_n(a)$$
$$= G(x) + f(a)$$

Damit ist f diffbar und es gilt: $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} G(x) = g(x)$

Bemerkung: – Das zeigt insbesondere, dass wir Potenzreihen gliedweise differenzieren können.

§ 1 Fourierreihen

Fourierreihen sind spezielle Reihen, die insbesondere für die Approximation periodischer Funktionen geeignet sind.

1. Definition:

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt p-periodisch bzw. periodisch mit Perioden p, wobei $p > 0$ sei, wenn gilt:

$$f(x+p) = f(x)$$

Beispiel: - sin, cos sind 2π-periodisch

Bemerkung: - Selbstverständlich gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$: $f(x+np) = f(x)$

- Wir werden uns im Folgenden aus Notationsgründen auf 1-periodische Funktionen beschränken.

Beachte: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ p-periodisch, so ist $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(x) = f(p \cdot x)$

1-periodisch: $\tilde{f}(x+1) = f(p(x+1))$
$$= f(px+p) = f(px) = \tilde{f}(x)$$

D.h. Jede p-periodische Funktion lässt sich einfach in eine 1-periodische Funktion überführen und umgekehrt.

Achtung: In der Literatur beschränkt man sich auch gerne auf 2π-periodische Funktionen.

2 Definition

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodisch und Riemann-intbar über $[0,1]$. Dann heißen die Zahlen $\hat{f}(n) := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx$ mit $n \in \mathbb{Z}$, die Fourier-koeffizienten von f. Weiter heißt die Reihe

$$F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$, d.h. die Folge der Partialsumme $F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$ mit $n \in \mathbb{N}$, Fourierreihe von f.

Bemerkung: - Die Fourierreihe lässt sich zunächst für jede 1-periodische, intbare Funktion definieren. Ähnlich wie bei Taylorreihen ist aber a priori nicht klar ob die Fourierreihe konvergiert, in welchem Sinne sie konvergiert und wenn sie konvergiert, ob sie gegen die Originalfunktion f konvergiert.

Man kann zeigen: Die Fourierreihe konvergiert immer gegen f im sogenannten "quadratischen Mittel", ein Begriff den wir hier nicht behandeln werden.