Vorlesung

Gegebenenfalls lässt sich L'Hospital iterieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Man kann L'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form $0\cdot\infty$ zu behandeln, indem wir diesen in die Form $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}$ bzw. $\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$

Beispiel

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$$

(für $\alpha > 0$)

Beweis (L'hospital)

Wir beschränken uns auf den Fall $x\to a$ ($x\to b$ läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage.

Behauptung Sei $A\in[-\infty,\infty)$. Dann existiert für jedes $q>A$ ein $c>a$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ $(x\in(a,c))$.

Beweis der Behauptung:

Da $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x\downarrow a} A$, existiert ein $c'>a$ mit $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ für ein beliebiges $r\in(A,q)$ und $x\in(a,c')$

Nach dem verallgemeinerten MWS gilt:

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

für ein geeignetes t zwischen x und y.

Für $a<x<y<c'$ gilt daher:

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < r \qquad (**)$$

Fall I: $f,g \xrightarrow{x\to a} 0$. Nach $(**)$ gilt für $x\to a$:

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q \quad (y\in(a,c'))$$

Fall II:

$g(x) \xrightarrow{x \to a} \pm\infty$ Multipliziere (*) mit $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$.

Dann erhalten wir $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \cdot \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)$

$$\rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \cdot \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Für $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein $c > a$ existieren mit $\frac{f(x)}{g(x)} < r \quad (x \in (a,c))$

Analog kann man zeigen:

Behauptung':

Sei A $(-\infty, \infty]$. Dann existiert für jeder $p < A$ ein $d > a$, so dass $p < \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in (a,d))$

Für $A = +\infty$ folgt die Aussage aus der letzten Behauptung für $A = -\infty$ aus der ersten Behauptung.

Für $A \in \mathbb{R}$ argumentieren wie folgt:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach der ersten Behauptung existierd $c > a$, so dass $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon \quad (x \in (a,c))$. Nach der zweiten Behauptung existiert $d > a$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \varepsilon \quad (x \in (a,d))$$

Für $x \in (a, \min\{c,d\})$ gilt daher

$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\varepsilon(A)$

Definition:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Wir sagen, dass f in a rechtsseitig diffbar ist, falls der Grenzwert $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert.

Analog sagen wir, dass f in b <u>(linksseitig) diffbar</u> ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

existiert.

Wir sagen f ist $[a,b]$ <u>diffbar</u>, wenn f in (a,b) diffbar und in a rechtsseitig sowie in b linksseitig diffbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe n-mal (stetig) diffbar, etc...

<u>Definition:</u> Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar. Dann heißt $P_{n,\alpha}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} \cdot (x-\alpha)^l$, wobei $\alpha \in I$ sei, das <u>n-te Polynom</u> von f an der Stelle α

<u>Bemerkung:</u>

Offensichtlich gilt $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$. Weiter gilt $f'(\alpha) = P'_{n,\alpha}(\alpha)$ $= \left(\sum_{l=0}^{n} l \cdot \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x-\alpha)^{l-1}\right)$

und analog:

$$f^{(l)}(\alpha) = P_{n,\alpha}^{(l)}(\alpha) \qquad (l=1,\dots,n)$$

<u>Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied)</u>

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und f $(n-1)$-mal stetig diffbar (auf $[a,b]$) und n-mal diffbar auf (a,b). Seien $\alpha \neq \beta$ in $[a,b]$ gegeben. Dann existiert ein x zwischen α & β sodass gilt:

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

Beweis:

Wähle $M \in \mathbb{R}$ mit $f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta-\alpha)^n$.

Man beachte dass die n-te Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch

$$\underbrace{P_{n-1,\alpha}^{(n)}(t)}_{=0} + n!\,M \qquad (\text{für } t \in [a,b])$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein x zwischen α und β mit

$$f^{(n)}(x) = n!\,M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$h(t) = f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t-\alpha)^n \quad \text{für } t \in [\alpha, b]$$

$$h(\beta) = f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M\cdot(\beta-\alpha)^n = 0$$

$$h(\alpha) = f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - \underbrace{M\cdot(\alpha-\alpha)^n}_{=0} = 0 \qquad \text{(siehe obige Bemerkung)}$$

$$h'(\alpha) = f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}'(\alpha) - \underbrace{n\cdot M(\alpha-\alpha)^{n-1}}_{=0} = 0$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \quad \text{für } l = 1, \dots, n-1$$

Damit existiert aufgrund des MWS ein x_1 zwischen α und β mit $h'(x_1) = 0$. Analog gibt es zwischen α und x_1 ein x_2 mit $h''(x_2) = 0$. Man findet also $x_1, \dots, x_{n-1}$ mit $h^{(l)}(x_l) = 0$ $(l = 1, \dots, n-1)$. Insbesondere existiert ein x zwischen α und x_{n-1} (also zwischen α und β) mit $h^{(n)}(x) = 0$.

Damit gilt $0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}(x) - Mn!\underbrace{(x-\alpha)^0}_{=1}$

und daher $f^{(n)}(x) = Mn!$

Bemerkung: Die obige Darstellung des Restglieds ist die sogenannte Lagrang'sche Darstellung.

Beispiel

Sei $f(x) = \sqrt{1+x}$. Offensichtlich:

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^{3/2}}$

Damit erhalten wir $\quad P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2} \cdot t$

Nach dem Satz von Taylor gilt

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2!} \cdot t^2$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1+x)^{3/2}} \cdot t^2$$

für ein x zwischen 0 und t.

Für $t > 0$ ergibt sich damit:

$$\left| \sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) \right| < \frac{t^2}{8}$$

Korollar

Ist $g: I \to \mathbb{R}$ n-mal diffbar und $g^{(n)} = 0$, so ist g ein Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades

Korollar

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig diffbar und $\alpha \in I$ mit $f^{(l)}(\alpha) = 0$ für alle $l = 1, \dots, n-1$ und $f^{(n)}(\alpha) \neq 0$

Dann gilt:

- ist n ungerade, so ist α keine Extremstelle
- ist n gerade, so ist α eine Extremstelle. Genauer gilt: ist $f^{(n)}\alpha < 0$ so ist α eine Maximalstelle. Ist $f^{(n)}\alpha > 0$, so ist α eine Minimalstelle

~~Ist $f^{(n)}(\alpha) > 0$ so ist α~~

Beweis

Wir betrachten nur den Fall n gerade und $f^{(n)}(\alpha) > 0$.

Nach dem Satz von Taylor gilt für alle $x \in I$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \cdot (x-\alpha)^{n+1} \\
&= f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\
&= f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot \left(f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)\right) \quad ?
\end{aligned}
$$

für ein t zwischen x und α.

Für x hinreichend nah an α erhalten wir