Proposition 14:

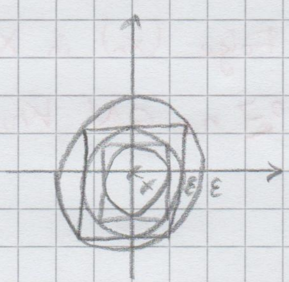
Sei X eine Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf X. Dann sind äquivalent:

i) d_1 erzeugt die gleiche Topologie wie d_2

ii) $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$
$B_\delta^{d_1}(x) \subseteq B_\varepsilon^{d_2}(x)$ und
$B_\delta^{d_2}(x) \subseteq B_\varepsilon^{d_1}(x)$

Beispiel: $- X = \mathbb{R}^2, \ x = (0,0)$

$d_1 = d_\infty$, $d_1 = d_2$ (d.h. die l_2-Metrik)



Beweis: i) $\to$ ii), Angenommen die Aussage ist falsch. D.h. angenommen:

$\exists x \ \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 : \ B_\delta^{d_1}(x) \nsubseteq B_\varepsilon^{d_2}(x)$ oder
$B_\delta^{d_2}(x) \nsubseteq B_\varepsilon^{d_1}(x)$

O.E. gilt, dass ein x existiert sowie $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ $B_\delta^{d_1}(x) \nsubseteq B_\varepsilon^{d_2}(x)$. D.h. insbesondere:

$\exists x \in X \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \ B_{\frac{1}{n}}^{d_1}(x) \nsubseteq B_\varepsilon^{d_2}(x)$. Wir wählen nun für $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in B_{\frac{1}{n}}^{d_1}(x) \setminus B_\varepsilon^{d_2}(x)$.

Damit konvergiert $x_n \to x$ bzgl. d_1 aber $x_n \not\to x$ bzgl. d_2 ↯

ii) $\to$ i) Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x$ bzgl. d_1. z.z.: $x_n \to x$ bzgl. d_2. D.h. z.z.:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \in B_\varepsilon^{d_2}(x)$ (wegen Lemma 13).

Wähle n_ε so, dass $x_n \in B_\delta^{d_1}(x)$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt, wobei δ wie in Punkt (i) gewählt sei. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \in B_\delta^{d_1}(x) \subseteq B_\varepsilon^{d_2}(x)$$

Bemerkung: - erzeugen zwei Metriken d_1, d_2 auf X die gleiche Topologie, so haben nach dem obigen die Metrik R. (X, d_1), (X, d_2) die „gleiche lokale Struktur"

- Auf $\mathbb{K}^n$ gilt: alle Normen sind äquivalent!

Definition 15:

Sei (X,d) ein metr. R. Eine Folge (x_n) in X heißt Cauchy-Folge, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n,m \geq n_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Proposition 16:

Sei (X, d) metr. R. und (x_n) in X konvergent. Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge

Beweis: Sei aber $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert aber ein n_ε, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt:

$d(x_n, x) < \varepsilon$. Seien $n, m \geq n_\varepsilon$. Dann gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x, x_m)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Bemerkung: - Die Umkehrung dieser Aussage ist i. A. falsch!

Definition 17

Ein metr. R. (X,d) heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in (X,d) einen Grenzwert besitzt.

Beispiele: - $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständig

- $(\mathbb{K}^n, d_2)$ ist vollständig, denn:

Sei $(x^l)_{l\in\mathbb{N}} = ((x_1^l, \dots, x_n^l))_{l\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$.

Dann gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$|x_i^l - x_i^{l'}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^l - x_i^{l'}|^2} = d_2(x^l, x^{l'}) \to 0$$

D.h. $(x_i^l)_{l\in\mathbb{N}}$ ist für alle $i = 1, \dots, n$ ~~ist~~ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ und daher (siehe erstes Bsp.) konvergent. D.h. für alle $i = 1, \dots, n$ können wir definieren.

$$x_i = \lim_{l\to\infty} x_i^l$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ gilt dann:

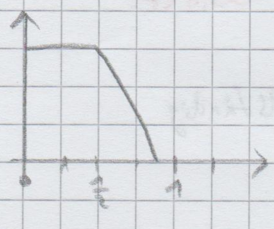
$$d_2(x, x^l) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - x_i^l|^2} \xrightarrow{l\to\infty} 0$$

- Man mache sich klar: Sind d_1, d_2 äquivalente Metriken auf X, so ist (X,d_1) genau dann vollständig, wenn (X,d_2) vollständig ist. Es gibt aber Fälle von Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X so, dass d_1 & d_2 die gleiche Topologie erzeugen, aber (X,d_1) vollständig ist, während (X,d_2) nicht vollständig ist.
- die letzten beiden Beispiele zeigen:

$(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ist vollständig für jede Norm auf $\mathbb{K}^n$

- l_2 ist vollständig (OB)
- $C([a,b], \mathbb{K})$ versehen mit d_∞ ist (siehe Kapitel über gleichmäßige Konvergenz und beachte dass $f_n \to f$ bzgl. d_∞ genau dann gilt, wenn $f_n \to f$ glm. konvergiert
- $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig
- $(0,1]$ ist nicht vollständig

- $C([a,b], \mathbb{R})$ mit der Skalarprodukt $\langle f,g \rangle = \int_a^b fg\,dx$ ist nicht vollständig



§ Topologie metrischer Räume

Eng verwandt mit dem Begriff der offenen Kugel um einen Punkt sind die folgenden Konzepte.

Definition 1

Sei (X,d) ein metr. R. und $x \in X$. Dann heißt $V \subseteq X$ eine Umgebung von x, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $B_{r}(x) \subseteq V$ ist.

Beispiele: - Selbstverständlich ist jede offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ eine Umgebung von x.

Definition 2

Sei (X,d) ein metr. R. Dann heißt $U \subseteq X$ offen, wenn U für jedes $x \in U$ eine Umgebung ist.

D.h. $U \subseteq X$ ist offen, wenn für alle $x \in U$ ein $r_x > 0$ existiert mit $B_{r_x}(x) \subseteq U$. $A \subseteq X$ ist abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Bemerkung: – Es gibt Mengen, die weder offen, noch abgeschlossen sind $[0,1]$

– Es gibt auch Mengen, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind: $\mathbb{R}, \emptyset$

Lemma 3

Jede offene Kugel in einem metr. R. (X,d) ist offen.

Beweis: Sei eine offene Kugel $B_\varepsilon(x)$ gegeben und $y \in B_\varepsilon(x)$. Dann gilt $d(x,y) = r < \varepsilon$. Wähle $\delta > 0$ mit $r+\delta < \varepsilon$.

Dann gilt für alle $z \in B_\delta(y)$:

$$d(z,x) \leq \underbrace{d(z,y)}_{<\delta} + \underbrace{d(y,x)}_{<r} < r + \delta < \varepsilon$$

D.h. $z \in B_\varepsilon(x)$