1 Differentiation

Definition 1 Sei $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D(f)$ ein Punkt, um den ein offenes Intervall $B_\epsilon(x)$ (für geeignetes $\epsilon > 0$) komplett in $D(f)$ enthalten ist ($B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$). Dann heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
Wir meinen mit $f'(x_0)$ die **Ableitung** (seltener *Differentialquotient*) von f an der Stelle x_0.
Ist $f : D(f) \to \mathbb{R}$ in jedem $x \in D(f)$ differenzierbar, dann heißt f schlechthin **differenzierbar**. Etwas irreführend wird auch die Abbildung

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von f bezeichnet.

Satz 1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$, so dass*

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$$

2. *Es gibt ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ und $u : I \to \mathbb{R}$, so dass*

$$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

und

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$$

3. *f ist in x_0 differenzierbar*

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

D.h. insbesondere c und $\tilde{c}$ sind eindeutig bestimmt

Bemerkung 1

- Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ wählen und setzt

$$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- Vergisst man die Funktion ϕ, versteht man mit der Geradengleichung

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an f in x_0

Beweis:

$1 \leftrightarrow 2$ Man setzte einfach $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$ und $\tilde{c} = c$
(in $x = x_0$ setze man $u(x_0) = 0$)

$1 \to 2$ ZZ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c\end{aligned}$$

$3 \to 1$ Wir setzten $c = f'(x_0)$ und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \left|\frac{\phi(x)}{x - x_0}\right| &= \lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f(x_0) = 0\end{aligned}$$

Satz 2 *Es sind äquivalent:* $f : I \to \mathbb{R}$

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$
   mit: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi(x)}{|x-x_0|} = 0$

2. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$
   mit: $\lim\limits_{n\to\infty} u(x) = 0$

3. *Der Grenzwert* $f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existiert*

Satz 3 *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in I$*. Dann ist* f *in* x_0 *stetig.*

Beweis:

ZZ ist: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Äquivalent dazu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$

Nun gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\frac{x-x_0}{x-x_0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

Bemerkung 2

- Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!
  Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind.
  (*Beispiel:* Weierhaus-Fkt: $\sum_{n\in\mathbb{N}} cos(b_n \pi x)$ mit $a_n \in (0, 1)$ und $a_n b_n > 1$)

- Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar

Satz 4 *Seien* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *in* $x \in I$ *differenzierbar,* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall. Dann sind* $f + g$*,* $f \cdot g$ *und* $\frac{f}{g}$ *(sofern* $g(x) \neq 0$*) in* x *differenzierbar.*
Es gilt:

1. $(f + g)' = f'(x) + g'(x)$ *(Summenregel)*

2. $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ *(Produktregel)*

3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ *(Quotientenregel)*

Beweis:

1. $$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{f(y)+g(y)-(f(x)+g(x))}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \frac{g(y)-g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y)-f(x)g(x)}{y-x} &= \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(x)g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} f(y)\frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x)\frac{f(x)-f(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} f(y) \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x) \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &\overset{Satz\ 3}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{y\to x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y-x} = \lim\limits_{y\to x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)}\frac{g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(y)}{g(y)}}{y-x} = \lim\limits_{y\to x} \frac{1}{g(y)g(x)} \frac{f(y)g(x)-f(x)g(y)}{y-x}$

$= \frac{1}{g^2(x)} \lim\limits_{y\to x} \frac{f(y)g(x)-f(y)g(y)+f(y)g(y)-f(x)g(y)}{y-x}$

$= \frac{1}{g^2(x)} \lim\limits_{y\to x} f(y)\cdot \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + g(y)\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left(\lim\limits_{y\to x} f(y)\frac{g(x)-g(y)}{y-x} + \lim\limits_{y\to x} g(y)\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)$

$= \frac{1}{g^2(x)}(f(x)\cdot(-g(x)) + g(x)f'(x)) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Beispiel 1

- $f(x) = c \in \mathbb{R}(x \in \mathbb{R})$
  $\rightarrow f'(x) = \lim\limits_{x\to y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim\limits_{x\to y} \frac{c-c}{y-x} = 0$
- $f(x) = x(x \in \mathbb{R})$
  $f'(x) = \lim\limits_{x\to y} \frac{y-x}{y-x} = 1$
- $f(x) = x^n, (x \in \mathbb{R})$ wobei $n \in \mathbb{N}$
  $f'(x) = nx^{n-1}$ per Induktion:
  $n = 1$ Stichpunkt 2 ✓
  $n \to n+1$: Sei also $f(x) = x^{n+1}$. Das gibt mit der Produktregel:
  $f'(x) = (x{\cdot}x^n)' = (x)'{\cdot}(x^n)' = 1{\cdot}xn{+}x{\cdot}n{\cdot}x^{n-1} = x^n{+}nx^n = (n{+}1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für $p(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$ gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^{n} l\cdot a_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^{n} l \cdot a_l x^{l-1}$$

- Seien P_1 und P_2 Polynome.
  Dann nennt man die Abbildung
  $Q : \mathbb{R} \setminus \{x|P_2(x) = 0\} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ eine rationale Funktion.
  Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.
- Die Funktion $|\circ|\cdot x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \textit{für } x \geq 0 \\ -x & \textit{sonst} \end{cases}$ ist nicht in 0 differenzierbar.
  Denn:
  $$\lim_{y\searrow 0} \frac{|y|-|0|}{y-0} = \lim_{y\searrow 0} \frac{y-0}{y-0} = 1$$
  $$\lim_{y\nearrow 0} \frac{|y|-|0|}{y-0} = \lim_{y\nearrow 0} \frac{-y-0}{y-0} = -1$$

Satz 5 (Kettenregel) *Seien I_f und I_g Intervalle, $x_0 \in I_f$ und $f : I_f \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $g : I_g \to \mathbb{R}$ sei in $f(x_0)$ differenzierbar und $f(I_f) \subseteq I_g$. Dann gilt:*

$$\frac{dg\circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

Beweis: *Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt für alle $x \in I_f$:*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\cdot(f'(x_0) + u(x))$$

(*Wobei* $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$)
Analog gilt für alle $y \in I_g$*:*

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei $\lim\limits_{y \to f(x_0)} v(y) = 0$
Damit haben wir für alle $x \in I_f$*:*

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) =& (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x)) \\ =& (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x)) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =& \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x)) + v(f(x)) \\ =& \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x \to x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ =& (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0)g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

Definition 6 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f **stetig differenzierbar**. Wir definieren weiterhin induktiv die k-te Ableitung (für $k \in \mathbb{N}$) durch:

$$\begin{aligned} f^{(0)} :=& f \\ f^{(k+1)} :=& f^{(k+1)'} \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.
Ist $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert, so heißt f **beliebig oft** bzw. **unendlich oft differenzierbar**.

Bemerkung 3 Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

Satz 7 *Sei* $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, a_k \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ *eine Potenzreihe vom Konvergenzradius* $R > 0$*. Dann ist* $p : x \mapsto p(x)$ *auf ganz* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *differenzierbar mit* $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$*.*
Insbesondere ist p' *auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius* R*.*

Bemerkung 4

1. Damit erhalten wir:

$$exp'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = exp(x)$$

2. Damit sind Potenzreihen ∞ oft differenzierbar

Beweis Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k \right) (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left(\limsup \sqrt[k+1]{(k+1) a_{k+1}} \right)^{-1} = R \left(da \sqrt[k]{k} \to 1 \right)$$

Damit ist p' wohldefiniert.
Wir zeigen nun, dass p' tatsächlich die Ableitung von p darstellt. OBdA sei $x_0 = 0$.
Dann gilt für $y \in (-R, R)$:

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x - y) = \sum_{k=\sigma}^{\infty} a_k \left(x^k - y^k \right) - (k+1) a_{k+1} y^k (x - y)$$

Wir setzen $\Delta(x, y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x - y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$.
Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right]$$

Für $n=1$ ist $[...]=0$ und für $n\geq 2$

$$\begin{aligned}
[...] =& \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k}y^k-(n-1)y^{n-1} \\
=& \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)x^{n-1-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-2} kx^{n-1-k}y^k.(n-1)y^{k-1} \\
=& \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)x^{n-1-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-1} kx^{n-1-k}y^k \\
=& \sum_{k=0}^{n-1} kx^{n-k}y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} kx^{n-1-k}y^k \\
=&(x-y)\sum_{k=1}^{n-1} kx^{n-1-k}y^{k-1}
\end{aligned}$$

Sein nun $|y|<r<R$ und $|x|\leq r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Delta(x,y)| \leq& \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||x-y|\sum_{k=1}^{n-1}k|x|^{n-1-k}|y|^{k-1} \\
\leq& \sum_{n=2}^{\infty}|a_n||x-y|r^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}k \leq |a_n|r^{n-2}n^2|x-y|
\end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe $q(z)=\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|n^2z^n$ den Konvergenzradius R, weshalb $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^{n-2}n^2 = \frac{1}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|n^2r^n$ konvergiert. Damit folgt aber $\lim_{x\to y}\Delta(x,y)=0$

Proposition 1 *Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in $p\in(a,b)$ mit $f'(p)\neq 0$ Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}:f(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar in $q=f(p)$ und es gilt:*

$$\left(f^{-1}\right)'(q)=\frac{1}{f'(p)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Beweis *Da f streng monoton ist, ist f^{-1} stetig.*
Insbesondere gilt $f^{-1}(y)\to f^{-1}(q)$ für $y\to q$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to q}\frac{1}{y-q}\left(f^{-1}(y)-f^{-1}(q)\right) =& \lim_{y\to q}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(q))} \\
=& \left(\lim_{y\to q}\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(q)}\right)^{-1} \\
=& \left(f'(f^{-1}(q))\right)^{-1}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(q)\right)}
\end{aligned}$$

Beispiel 2

- k-te Wurtel $g : (0, \infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$ ist differenzierbar mit $g'(y) = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$
  Denn g ist Umkerhfunktion zu $f(x) = x^k$
  Damit gilt:
$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$$
- Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$. Es ist $\ln'(y) = \frac{1}{y}$, **denn:**
$$\ln'(y) = \frac{1}{exp'(\ln y)} = \frac{1}{exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Bemerkung 5 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist $x^\alpha := exp(\alpha \ln(x))$
Anwendung: Die Funktion $(\circ)^\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$ hat die Ableitung $((\circ)^\alpha)' : (0, \infty) \to (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ **denn**

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' =& exp'(\alpha \ln(x)) = exp(\alpha \ln x) \frac{\alpha}{x} \\ =& \alpha exp(\alpha \ln x) exp(-\ln x) = \alpha exp((\alpha - 1) \ln x)) \\ =& \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ und $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

Definition 7 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Wir sagen, f hat in $x_0 \in I$ ein **lokales Maximum (lokales Minimum)**, falls ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)(f(x) \geq f(x_0))$$

Gilt
$$f(x) \leq f(x_0)(f(x) \geq f(x_0))$$
für alle $x \in I$, so sagen wir, dass x_0 ein **globales Maximum (globales Minimum)** ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von **strikten Maxima (strikte Minima)**. Maximum und Minimum werden unter dem Begriff **Extremum** zusammengefasst.

Satz 8 *Seif $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Hat f ein lokales Maximum (lokales Minimum) in $x_0 \in (a, b)$ und existiert $f'(x_0)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.*
Beweis *Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:*

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und
$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Wegen differenzierbarkeit in x_0 folgt Gleichung $1 =$ Gleichung $2 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Satz 9 (verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf ganz (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit:*

$$(g(b) - g(a))\, f'(\xi) = (f(b) - f(a))\, g'(\xi)$$

Beweis: *Wir betrachten $h : [a, b] \to \mathbb{R}$*

$$t \mapsto (g(b) - g(a))\, f(t) - (f(b) - f(a))\, g(t)$$

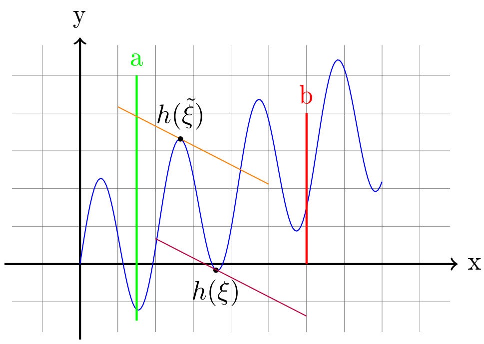
Offensichtlich (nach Summenregel) ist h differenzierbar auf (a, b). Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a))\, f'(t) - (f(b) - f(a))\, g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit folgt dann die Aussage.
Beachte:

$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a))\, f(a) - (f(b) - f(a))\, g(a) \\ &= g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ &= (g(b) - g(a))\, f(b) - (f(b) - f(a))\, g(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

Fall 1: *$h = const$ Dann gilt trivialerweise $h' = 0$ und wir sind fertig.*
Fall 2: *$h \neq const$ Offensichtlich ist h stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Damit besitzt h ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein $\tilde{\xi} \in (a, b)$ mit $h(\tilde{\xi}) > h(a)$, sonst betrachte $-h$ statt h.*
Also existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h(\xi) \geq h(x)$ $(x \in [a, b])$. Mit anderen Worten: ξ ist auch ein globales Maximum und und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 8 folgt: $h'(\xi) = 0$



Satz 10 (Mittelwertsatz(MWS)) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt ex ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

Bemerkung: *Es ist oft wichtig, dass f nur auf (a, b) differenzierbar sein muss.*
Beweis: *Das folgt aus Satz 9 mit $g = id_{[a,b]}$, d.h. $g(x) = x$ $(x \in [a, b])$.*

Satz 11 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:*

a) $f = const \Leftrightarrow f'(x) = 0 (x \in (a, b))$

b) *f ist monoton wachsend* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (x \in (a, b))$

c) *f ist streng monoton wachsend* $\Leftrightarrow f'(x) > 0 (x \in (a, b))$

d) *f ist monoton fallend* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 (x \in (a, b))$

e) *f ist streng monoton fallend* $\Leftrightarrow f'(x) < 0 (x \in (a, b))$

Beweis: *a) folgt aus b) und c).*
Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).
Sei $y > x \in [a, b]$. Sei $f|_{[x,y]}$ die Einschränkung von f auf $[x, y]$, das heißt:

$$f|_{[x,y]} : [x, y] \to \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt $f|_{[x,y]}$ die Bedingungen des MWS.
Es existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi)$
Fall b) $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0$
$\quad \Lsh\ f(y) \geq f(x)$
Fall c) $f(y) - f(x) > 0$
$\quad \Lsh f(y) > f(x)$
Beweis der Richtung $\Leftarrow$ in Teil b): *Ist $f'(x) \geq 0$ so gilt*

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da f monoton wachsend ist, gilt für $y > x$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für $\lim\limits_{y \nearrow x}$

Korollar 1 *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $f'(x) = g'(x)$ für $x \in (a, b)$. Dann gilt $f - g = const$*
Beweis: *Es gilt:*

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 11.

Satz 12 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall). Gibt es $\xi \in I$ mit $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$ ($f''(\xi) > 0$), so nimmt f an der Stelle ξ ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.*

Beweis: *Wir betrachten nur den Fall* $f''(\xi) < 0$. *Für den Fall* $f''(\xi) > 0$ *betrachte man* $-f$.
Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$r := \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$
D.h. es existiert für jedes $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *mit*

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für $\epsilon := \frac{r}{2}$ *gilt daher:*

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right|$$

für ein entsprechend gewähltes $\delta > 0$. *Insbesondere gilt also:*

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.
D.h. für $x < \xi$ *gilt:*

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für $x > \xi$ *gilt:*

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo: f' *ist streng monoton fallend auf* $(\xi - \delta, \xi]$ *und streng monoton wachsend auf* $[\xi, \xi + \delta)$
Da $f'(\xi) = 0$ *folgt, dass* $f'(x) > 0$ *für* $x \in (\xi - \delta, \xi]$ *und* $f'(x) < 0$ *für* $x \in [\xi, \xi + \delta)$.
Mit Satz 11 folgt:
$f|_{(\xi-\delta,\xi]}$ *ist streng monoton wachsend und*
$f|_{[\xi,\xi+\delta)}$ *ist streng monoton fallend.*

Satz 13 (Regel von l'Hospital) *Seien* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *mit*

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$. *Weiter gelte:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei $-\infty \leq A \leq \infty$ *sei und* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$,
sowie $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *bzw.* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
Dann gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. *Die analoge Aussage gilt auch für* $x \to b$.
Bemerkung:

- *Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h.* $\pm\infty$ *sind als Grenzwerte zulässig.*
- *Zwei wesentliche Voraussetzungen:*
  1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert!*
  2. *ebenso ist essentiell, dass* $f, g \to \frac{\circ}{\pm\infty}$
- *Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{exp(x)} = 0$$

- *Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form* $0 \cdot \infty$ *zu behandeln, indem wir diese in die Form*

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}}$$

  bzw.

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

  umrechnen.

Beweis: *Wir beschränken uns auf den Fall* $x \to a$ ($x \to b$ *läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:*
Behauptung: *Sei* $A \in [-\infty, \infty)$.
Dann existiert für jedes $q > A$ *ein* $c > a$ *mit* $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ ($x \in (a, c)$).
Beweis der Behauptung:
Da $\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x\searrow a}{\to} A$ *existiert ein* $c' > a$ *mit:* $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ *für ein beliebiges* $r \in (A, q)$ *und* $x \in (a, c')$.
Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{1}$$

für ein geeignetes t *zwischen* x *und* y.
Für $a < x < y < c'$ *gilt daher:*

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \tag{2}$$

Fall 1: $f, g \overset{x\to a}{\to} 0$. *Nach Gleichung (2) gilt für* $x \to a$

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q(y \in (a, c'))$$

Fall 2: $g(x) \overset{x\to a}{\to} \pm\infty$ *Multipliziere (1) mit* $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$.
Dann erhalten wir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)$$
$$\to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Für $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein $c > a$ existieren mit: $\frac{f(x)}{g(x)} < r$ $(x \in (a,c))$
Analog kann man zeigen:
Behauptung' : *Sei $A \in (-\infty, \infty]$. Dann existiert für jedes $p < A$ ein $d > a$, so dass $p < \frac{f(x)}{g(x)}$ $(x \in (a,d))$*
Für $A = +\infty$ folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für $A = -\infty$ aus der ersten Behauptung.
Für $A \in \mathbb{R}$ argumentieren wir wie folgt:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert $c > a$, so dass $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon$ $(x \in (a,c))$. Nach der zweiten Behauptung existiert $d > a$ mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \ (x \in (a,d))$$

Für $x \in (a, \min\{c,d\})$ gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

Beispiel 3 $f(x) = 1, g(x) = x + 7$
Dann gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$
aber: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

Beispiel 4

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \textit{ für } \alpha > 0$$

Definition 8 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in a *(rechtsseitig) differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass f in b *(linksseitig) differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

existiert. Wir sagen, f ist auf $[a,b]$ *differenzierbar*, wenn f in (a,b) differenzierbar und in a rechtsseitig sowie in b linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe $n-Mal$ (stetig) differenzierbar etc...

Definition 9 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ $n-Mal$ differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha} :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto & \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!}(x-\alpha)^l \end{aligned}$$

das $n-te$ Taylorpolynom, wobei $\alpha \in I$ sei, von f an der Stelle α.
Bemerkung: Offensichtlich gilt: $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$. Weiter gilt:

$$f'(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha) = \left(\sum_{l=0}^{n} l \cdot \frac{f^l(\alpha)}{l!} \left(x-\alpha\right)^{l-1} \right)$$

und analog:

$$\begin{aligned} f^{(l)}(\alpha) = P_{n,\alpha}^{(l)} &= P_{n,\alpha}^{(l)}(\alpha) \\ &(l = 1, ..., n) \end{aligned}$$

Satz 14 (Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied)) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und f $(n-1)-mal$ stetig differenzierbar (auf $[a,b]$) und $n-mal$ differenzierbar auf (a,b). Seien $\alpha \neq \beta$ in $[a,b]$ gegeben. Dann existiert ein x zwischen α und β, so dass gilt:*

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

Beweis: *Wähle $M \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta-\alpha)^n$$

Man beachte, dass die $n-te$ Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch

$$P^{(n)}_{n-1,\alpha}(t) + n! \cdot M(\text{ für } t \in [a,b])$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein x zwischen α und β mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}
h(t) =& f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t-\alpha)^n \text{ für } t \in [a,b] \\
h(\beta) =& f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta-\alpha)^n = 0 \\
h(\alpha) =& f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) \cdot M(\alpha-\alpha)^n = 0 \text{ siehe obige Bemerekung} \\
h'(\alpha) =& f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - n \cdot M(\alpha-\alpha)^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ für } l = 1, ..., n-1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein x_1 zwischen α und β mit $h'(x_1) = 0$. Analog gibt es zwischen α und x_1 ein x_2 mit $h''(x_2) = 0$. Man findet also $x_1, ..., x_{n-1}$ mit $h^{(l)}(x_l) = 0$ $(l = 1, ..., n-1)$. Insbesondere existiert ein x zwischen α und x_{n-1} (also zwischen α und β) mit $h^{(n)}(x) = 0$. Damit gilt

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}(x) - M \cdot n! \cdot (x-\alpha)^0$$

und daher $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$
Bemerkung: *Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte Lagrange'sche Darstellung*

Beispiel 5 Sei $f(x) = \sqrt{1+x}$. Offensichtlich:

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} \\
f''(x) =& -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}t^2$$

für ein x zwischen 0 und t.
Für $t > 0$ ergibt sich damit:

$$\left|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)\right| < \frac{t^2}{8}$$

Korollar 2 *Ist $g : I \to \mathbb{R}$ $n-Mal$ differenzierbar und $g^{(n)} = 0$, so ist g ein Polynom höchstens $(n-1)-ten$ Gerades*

Korollar 3 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$mal stetig differenzierbar und $\alpha \in I$ mit $f^{(l)}(\alpha) = 0$ für alle $l = 1, ..., n-1$ und $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$.*
Dann gilt:

- *ist n ungerade, so ist α keine Extremstelle*
- *ist n gerade, so ist α eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist $f^{(n)}(\alpha) < 0$, so ist α eine Maximalstelle. Ist $f^{(n)}(\alpha) > 0$, so ist α Minimalstelle.*
  Beweis: *Wir betrachten nur den Fall n gerade und $f^{(n)}(\alpha) > 0$.*
  Nach dem Satz von Taylor gilt für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) =& P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\left(f^{(n)}(\alpha) + (\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)}(x-\alpha)\right) \end{aligned}$$

für ein t zwischen x und α. Für x hinreichend nah an α erhalten wir

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1}(x-\alpha)$$

Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

Da ist also $f(x) > f(\alpha)$ für x hinreichend nah an α.
Sprich: α ist strikte lokale Minimalstelle

Definition 10 Ist $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylorreihe am Entwicklungspunkt $\alpha \in I$.

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Bemerkung:

- im Allgemeinen konvergiert $T_{f,\alpha}(x)$ für $x \neq \alpha$ nicht
- Der Satz von Taylor behandelt <u>nicht</u> die Taylorreihe
- Selbst wenn $T_{f,\alpha}(x)$ konvergiert, muss $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$ nicht gelten
- Sei $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$ Dann gilt :

$$P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \to 0$$

Satz 15 *Sei* $f(x) = \sum_{n_0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *und* $R > 0$ *der zugehörige Konvergenzradius von* f.
Dann ist f *auf* $(\alpha - R, \alpha + R)$ *beliebig oft differenzierbar und es gilt:*

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

das heißt, die Taylorreihe $T_{f,\alpha}$ *stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.*
Beweis: *Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x-\alpha)^{n-1} \\ &\vdots \\ f^{(l)} &= l! \cdot a_l + \sum_{n=l-1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-l)a_n(x-\alpha)^{n-l} \end{aligned}$$

für $l \in \mathbb{N}$
Also: $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$

3 Riemann-Integral

<u>Ziel</u>: Wir wollen auf „ natürliche“ Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt, die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der $x-$Achse zu bestimmen.
Dabei heißt auf „natürliche Weise“ insbesondere:

- gilt $f(x) = c = const$ für alle $x \in D(f) = [a, b]$, so soll gelten:

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$$

- gilt $f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a,b])$ so formulieren wir

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x$$

- für $c \in [a,b]$ soll gelten

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x$$

Vorgehen: Man unterteile $[a,b]$ in „viele" Teilintervalle, auf denen f nahezu konstant ist.

Definition 11 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Partition P von $[a,b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$.
Wir schreiben $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Definition 12 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$.
Wir schreiben:

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$m_i(p) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Weiter definieren wir:

$$S(P,f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$
$$s(P,f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

Wir setzen:

$$\int_a^{\overline{b}} f \,\mathrm{d}x = \inf S(P,f)$$
$$\int_{\underline{a}}^b f \,\mathrm{d}x = \sup s(P,f)$$

wobei Infimum und Supremum über alle Partitionen von $[a,b]$ genommen werden. Wir nennen

$$\int_a^{\overline{b}} f \,\mathrm{d}x \ \text{ das } \underline{\text{obere}} \text{ und}$$
$$\int_{\underline{a}}^b f \,\mathrm{d}x \ \text{ das } \underline{\text{untere}}$$

Riemannintegral von f über $[a,b]$
Gilt

$$\int_a^{\overline{b}} f \,\mathrm{d}x = \int_{\underline{a}}^b f \,\mathrm{d}x$$

sagen wir f ist Riemann-integrierbar (integrierbar) und nennen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$$

das Riemannintegral von f über $[a,b]$.
Die Menge der Riemanintegrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}$ beziehungsweise $\mathcal{R}_{[a,b]}$.
Bemerkungen

- Da f beschränkt ist, gibt es $m \leq M$ in $\mathbb{R}$ mit:

  $$m \leq f(x) \leq M \ (x \in [a,b])$$

  Damit gilt für jede jede Partition P:

  $$m \cdot (b-a) \leq s(P,f) \leq S(P,f)$$

  Ergo: $\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x\,, \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$ wohldefiniert.

- im gesamten Kapitel 3 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen

Definition 13 Seien P_1, P_2 zwei Partitionen eines Intervalls. Dann heißt P_1 Verfeinerung von P_2, wenn gilt: $P_2 \subseteq P_1$
Weiterhin nennen wir $P_1 \cup P_2$ die gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2

Satz 16 *Ist P' eine Verfeinerung der Partition P von $[a,b]$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \int (P,f) \geq& \int (P',f) \\ s(P,f) \leq& s(P',f) \end{aligned}$$

(wobei f wie in Definition 12 sei)
Beweis: *Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass P' sich von P in nur einem Element x' unterscheidet.
Das heißt: $P' = P \cup \{x'\}$
Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x' \in [x_{i-1}, x_i]$
(wobei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\}$ sei).
Wir definieren:*

$$\begin{aligned} W_1 :=& \sup_{[x_{i-1},x']} f(x) \\ W_2 :=& sup_{[x',x_i]} f(x) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P,f) - S(P',f) =& M_i \Delta x_i - W_1 \cdot (x' - x_{i-1}) - W_2 \cdot (x_i - x') \\ =& (M_i - W_1) \cdot (x' - x_{i-1}) + (M_i - W_2) \cdot (x_i - x') \geq 0 \end{aligned}$$

Enthält von P' k Punkte, die nicht in P enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt k-mal durch.

Satz 17 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x \geq \int_{\underline{a}}^b f \, \mathrm{d}x$$

Beweis: *Seien P_1, P_2 zwei Partitionierungen von $[a, b]$ und P' die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:*

$$s(P_1, f) \leq s(P', f) \leq S(P', f) \leq S(P_2, f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$$

für alle Partitionierungen P_1, P_2.
Sprich: $S(P_2, f)$ ist stets obere Schranke von $s(P, f)$ für alle Partitionen P von $[a, b]$. Ergo:

$$\sup s(P, f) \leq S(P_2, f)$$

Damit ist also $\sup s(P, f)$ untere Schranke von $S(P, f)$ (P beliebige Partition).
Ergo: $\sup s(P, f) \leq \inf S(P, f)$
Wir haben also gezeigt:

$$\int_{\underline{a}}^b f \, \mathrm{d}x = \sup s(P, f) \leq \inf S(P, f) = \inf \int_a^{\bar{b}} f \, \mathrm{d}x$$