

1 Differentiation

Definition 1 Sei $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D(f)$ ein Punkt, um den ein offenes Intervall $B_\epsilon(x)$ (für geeignetes $\epsilon > 0$) komplett in $D(f)$ enthalten ist ($B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$). Dann heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Wir meinen mit $f'(x_0)$ die **Ableitung** (seltener *Differentialquotient*) von f an der Stelle x_0 .

Ist $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem $x \in D(f)$ differenzierbar, dann heißt f schlechthin **differenzierbar**. Etwas irreführend wird auch die Abbildung

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von f bezeichnet.

Satz 1 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$$

2. Es gibt ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ und $u : I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

3. f ist in x_0 differenzierbar

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

D.h. insbesondere c und \tilde{c} sind eindeutig bestimmt

Bemerkung 1

- Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ wählen und setzt

$$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- Vergisst man die Funktion ϕ , versteht man mit der Geradengleichung

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an f in x_0

Beweis:

$1 \leftrightarrow 2$ Man setze einfach $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$ und $\tilde{c} = c$
(in $x = x_0$ setze man $u(x_0) = 0$)

$1 \rightarrow 2$ ZZ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c \end{aligned}$$

$3 \rightarrow 1$ Wir setzten $c = f'(x_0)$ und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right| &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Satz 2 Es sind äquivalent: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$
mit: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{|x - x_0|} = 0$
2. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$
mit: $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x) = 0$
3. Der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

Satz 3 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis:

$$\text{ZZ ist: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{Äquivalent dazu: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

$$\text{Nun gilt: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{x - x_0}{x - x_0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Bemerkung 2

- Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!
Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind.
(Beispiel: Weierhaus-Fkt: $\sum_{n \in \mathbb{N}} \cos(b_n \pi x)$ mit $a_n \in (0, 1)$ und $a_n b_n > 1$)
- Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar

Satz 4 Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in I$ differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (sofern $g(x) \neq 0$) in x differenzierbar.
Es gilt:

1. $(f + g)' = f'(x) + g'(x)$ (Summenregel)
2. $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Produktregel)
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

Beweis:

$$\begin{aligned} 1. (f + g)'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) + g(y) - (f(x) + g(x))}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y) \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y) \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &\stackrel{\text{Satz 3}}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}}{y-x} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} - \frac{f(x)-f(x)}{g(x)-g(x)}}{y-x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{g(y)-g(x)} \frac{f(y)g(x)-f(x)g(y)}{y-x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(x)-f(x)g(y)+f(y)g(y)-f(x)g(y)}{y-x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y \rightarrow x} f(y) \cdot \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + g(y) \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left(\lim_{y \rightarrow x} f(y) \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + \lim_{y \rightarrow x} g(y) \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right) \\
&= \frac{1}{g^2(x)} (f(x) \cdot (-g'(x)) + g(x)f'(x)) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

Beispiel 1

- $f(x) = c \in \mathbb{R} (x \in \mathbb{R})$
 $\rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{x \rightarrow y} \frac{c-c}{y-x} = 0$
- $f(x) = x (x \in \mathbb{R})$
 $f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{y-x}{y-x} = 1$
- $f(x) = x^n, (x \in \mathbb{R})$ wobei $n \in \mathbb{N}$
 $f'(x) = nx^{n-1}$ per Induktion:
 $n = 1$ Stichpunkt 2 ✓
 $n \rightarrow n+1$: Sei also $f(x) = x^{n+1}$. Das gibt mit der Produktregel:
 $f'(x) = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot (x^n)' = 1 \cdot xn + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für $p(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$ gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^n l \cdot a_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^n l \cdot a_l x^{l-1}$$

- Seien P_1 und P_2 Polynome.
Dann nennt man die Abbildung
 $Q : \mathbb{R} \setminus \{x | P_2(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ eine rationale Funktion.
Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.
- Die Funktion $| \circ | \cdot x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$ ist nicht in 0 differenzierbar.

Denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \searrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} &= \lim_{y \searrow 0} \frac{y - 0}{y - 0} = 1 \\
\lim_{y \nearrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} &= \lim_{y \nearrow 0} \frac{-y - 0}{y - 0} = -1
\end{aligned}$$

Satz 5 (Kettenregel) Seien I_f und I_g Intervalle, $x_0 \in I_f$ und $f : I_f \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $f(x_0)$ differenzierbar und $f(I_f) \subseteq I_g$. Dann gilt:

$$\frac{dg \circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

Beweis: Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt für alle $x \in I_f$:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x))$$

(Wobei $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$)

Analog gilt für alle $y \in I_g$:

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} v(y) = 0$

Damit haben wir für alle $x \in I_f$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0)g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

Definition 6 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f **stetig differenzierbar**. Wir definieren weiterhin induktiv die k -te Ableitung (für $k \in \mathbb{N}$) durch:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f \\ f^{(k+1)} &:= f^{(k+1)'} \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.

Ist $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert, so heißt f **beliebig oft** bzw. **unendlich oft differenzierbar**.

Bemerkung 3 Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

Satz 7 Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe vom Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $p : x \mapsto p(x)$ auf ganz $(x_0 - R, x_0 + R)$ differenzierbar mit $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$. Insbesondere ist p' auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius R .

Bemerkung 4

1. Damit erhalten wir:

$$\exp'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \exp(x)$$

2. Damit sind Potenzreihen ∞ oft differenzierbar

Beweis Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k \right) (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k+1]{(k+1) a_{k+1}} \right)^{-1} = R \left(da \sqrt[k]{k} \rightarrow 1 \right)$$

Damit ist p' wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass p' tatsächlich die Ableitung von p darstellt. OBdA sei $x_0 = 0$.

Dann gilt für $y \in (-R, R)$:

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x - y) = \sum_{k=\sigma}^{\infty} a_k (x^k - y^k) - (k+1) a_{k+1} y^k (x - y)$$

Wir setzen $\Delta(x, y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x - y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$.

Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right]$$

Für $n = 1$ ist $[...] = 0$ und für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
[...] &= \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1)y^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} kx^{n-1-k} y^k \cdot (n-1)y^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} kx^{n-1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kx^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} kx^{n-1-k} y^k \\
&= (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} kx^{n-1-k} y^{k-1}
\end{aligned}$$

Sein nun $|y| < r < R$ und $|x| \leq r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Delta(x, y)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1} \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k \leq |a_n| r^{n-2} n^2 |x-y|
\end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$ den Konvergenzradius R , weshalb $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$ konvergiert. Damit folgt aber $\lim_{x \rightarrow y} \Delta(x, y) = 0$

Proposition 1 Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in $p \in (a, b)$ mit $f'(p) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $q = f(p)$ und es gilt:

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Beweis Da f streng monoton ist, ist f^{-1} stetig.

Insbesondere gilt $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(q)$ für $y \rightarrow q$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow q} \frac{1}{y-q} (f^{-1}(y) - f^{-1}(q)) &= \lim_{y \rightarrow q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \\
&= \left(\lim_{y \rightarrow q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)} \right)^{-1} \\
&= (f'(f^{-1}(q)))^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}
\end{aligned}$$

Beispiel 2

- k-te Wurzel $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$ ist differenzierbar mit $g'(y) = \frac{1}{k}y^{\frac{1}{k}-1}$
Denn g ist Umkehrfunktion zu $f(x) = x^k$
 Damit gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k}y^{\frac{1}{k}-1}$$

- Logarithmus $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$. Es ist $\ln'(y) = \frac{1}{y}$, **denn:**

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Bemerkung 5 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist $x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x))$

Anwendung: Die Funktion $(\circ)^\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$ hat die Ableitung $((\circ)^\alpha)' : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ **denn**

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \exp'(\alpha \ln(x)) = \exp(\alpha \ln x) \frac{\alpha}{x} \\ &= \alpha \exp(\alpha \ln x) \exp(-\ln x) = \alpha \exp((\alpha - 1) \ln x) \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ und $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

Definition 7 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen, f hat in $x_0 \in I$ ein **lokales Maximum** (**lokales Minimum**), falls ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

Gilt

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

für alle $x \in I$, so sagen wir, dass x_0 ein **globales Maximum** (**globales Minimum**) ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von **strikten Maxima** (**strikte Minima**). Maximum und Minimum werden unter dem Begriff **Extremum** zusammengefasst.

Satz 8 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Hat f ein lokales Maximum (lokales Minimum) in $x_0 \in (a, b)$ und existiert $f'(x_0)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Wegen Differenzierbarkeit in x_0 folgt Gleichung 1 = Gleichung 2 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Satz 9 (verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf ganz (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit:

$$(g(b) - g(a)) f'(\xi) = (f(b) - f(a)) g'(\xi)$$

Beweis: Wir betrachten $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto (g(b) - g(a)) f(t) - (f(b) - f(a)) g(t)$$

Offensichtlich (nach Summenregel) ist h differenzierbar auf (a, b) . Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a)) f'(t) - (f(b) - f(a)) g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit folgt dann die Aussage.

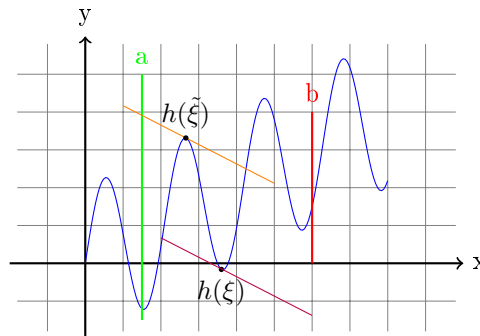
Beachte:

$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a)) f(a) - (f(b) - f(a)) g(a) \\ &= g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ &= (g(b) - g(a)) f(b) - (f(b) - f(a)) g(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

Fall 1: $h = \text{const}$ Dann gilt trivialerweise $h' = 0$ und wir sind fertig.

Fall 2: $h \neq \text{const}$ Offensichtlich ist h stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Damit besitzt h ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein $\tilde{\xi} \in (a, b)$ mit $h(\tilde{\xi}) > h(a)$, sonst betrachte $-h$ statt h .

Also existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h(\xi) \geq h(x)$ ($x \in [a, b]$). Mit anderen Worten: ξ ist auch ein globales Maximum und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 8 folgt: $h'(\xi) = 0$



Satz 10 (Mittelwertsatz(MWS)) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

Bemerkung: Es ist oft wichtig, dass f nur auf (a, b) differenzierbar sein muss.

Beweis: Das folgt aus Satz 9 mit $g = \text{id}_{[a, b]}$, d.h. $g(x) = x$ ($x \in [a, b]$).

Satz 11 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gilt:

- a) $f = \text{const} \Leftrightarrow f'(x) = 0 (x \in (a, b))$
- b) f ist monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (x \in (a, b))$
- c) f ist streng monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) > 0 (x \in (a, b))$
- d) f ist monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 (x \in (a, b))$
- e) f ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) < 0 (x \in (a, b))$

Beweis: a) folgt aus b) und c).

Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).

Sei $y > x \in [a, b]$. Sei $f|_{[x, y]}$ die Einschränkung von f auf $[x, y]$, das heißt:

$$f|_{[x, y]} : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt $f|_{[x, y]}$ die Bedingungen des MWS.

Es existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi)$

Fall b) $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0$

$$\hookrightarrow f(y) \geq f(x)$$

Fall c) $f(y) - f(x) > 0$

$$\hookrightarrow f(y) > f(x)$$

Beweis der Richtung \Leftarrow in Teil b): Ist $f'(x) \geq 0$ so gilt

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da f monoton wachsend ist, gilt für $y > x$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für $\lim_{y \nearrow x}$

Korollar 1 Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $f'(x) = g'(x)$ für $x \in (a, b)$. Dann gilt $f - g = \text{const}$

Beweis: Es gilt:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 11.

Satz 12 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall). Gibt es $\xi \in I$ mit $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$ ($f''(\xi) > 0$), so nimmt f an der Stelle ξ ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $f''(\xi) < 0$. Für den Fall $f''(\xi) > 0$ betrachte man $-f$.

Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$$r := \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$$

D.h. es existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für $\epsilon := \frac{r}{2}$ gilt daher:

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right|$$

für ein entsprechend gewähltes $\delta > 0$. Insbesondere gilt also:

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.

D.h. für $x < \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für $x > \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo: f' ist streng monoton fallend auf $(\xi - \delta, \xi]$ und streng monoton wachsend auf $[\xi, \xi + \delta)$

Da $f'(\xi) = 0$ folgt, dass $f'(x) > 0$ für $x \in (\xi - \delta, \xi]$ und $f'(x) < 0$ für $x \in [\xi, \xi + \delta)$.

Mit Satz 11 folgt:

$f|_{(\xi - \delta, \xi]}$ ist streng monoton wachsend und
 $f|_{[\xi, \xi + \delta)}$ ist streng monoton fallend.

Satz 13 (Regel von l'Hospital) Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter gelte:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei $-\infty \leq A \leq \infty$ sei und $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$,

sowie $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ bzw. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Die analoge Aussage gilt auch für $x \rightarrow b$.

Bemerkung:

- Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h. $\pm\infty$ sind als Grenzwerte zulässig.
- Zwei wesentliche Voraussetzungen:
 1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert!
 2. ebenso ist essentiell, dass $f, g \rightarrow \frac{0}{\pm\infty}$
- Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0$$

- Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$ zu behandeln, indem wir diese in die Form

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}}$$

bzw.

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

umrechnen.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow b$ läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:

Behauptung: Sei $A \in [-\infty, \infty)$.

Dann existiert für jedes $q > A$ ein $c > a$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ ($x \in (a, c)$).

Beweis der Behauptung:

Da $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ existiert ein $c' > a$ mit: $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ für ein beliebiges $r \in (A, q)$ und $x \in (a, c')$.

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad (1)$$

für ein geeignetes t zwischen x und y .

Für $a < x < y < c'$ gilt daher:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \quad (2)$$

Fall 1: $f, g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Nach Gleichung (2) gilt für $x \rightarrow a$

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q (y \in (a, c'))$$

Fall 2: $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$ Multipliziere (1) mit $\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$.

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(y)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \\ \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(y)} \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein $c > a$ existieren mit: $\frac{f(x)}{g(x)} < r$ ($x \in (a, c)$)

Analog kann man zeigen:

Behauptung' : Sei $A \in (-\infty, \infty]$. Dann existiert für jedes $p < A$ ein $d > a$, so dass $p < \frac{f(x)}{g(x)}$ ($x \in (a, d)$)

Für $A = +\infty$ folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für $A = -\infty$ aus der ersten Behauptung.

Für $A \in \mathbb{R}$ argumentieren wir wie folgt:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert $c > a$, so dass $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon$ ($x \in (a, c)$). Nach der zweiten Behauptung existiert $d > a$ mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \quad (x \in (a, d))$$

Für $x \in (a, \min\{c, d\})$ gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

Beispiel 3 $f(x) = 1, g(x) = x + 7$

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$

aber: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

Beispiel 4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \text{ für } \alpha > 0\end{aligned}$$

Definition 8 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in a (*rechtsseitig*) *differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass f in b (*linksseitig*) *differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existiert. Wir sagen, f ist auf $[a, b]$ *differenzierbar*, wenn f in (a, b) differenzierbar und in a rechtsseitig sowie in b linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe n -Mal (stetig) differenzierbar etc...

Definition 9 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -Mal differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned}P_{n,\alpha} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{l=0}^n \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^l\end{aligned}$$

das n -te Taylorpolynom, wobei $\alpha \in I$ sei, von f an der Stelle α .

Bemerkung: Offensichtlich gilt: $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$. Weiter gilt:

$$f'(\alpha) = P_{n,\alpha}'(\alpha) = \left(\sum_{l=0}^n l \cdot \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^{l-1} \right)$$

und analog:

$$\begin{aligned}f^{(l)}(\alpha) &= P_{n,\alpha}^{(l)}(\alpha) = P_{n,\alpha}^{(l)}(\alpha) \\ (l &= 1, \dots, n)\end{aligned}$$

Satz 14 (Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied)) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und f $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar (auf $[a, b]$) und n -mal differenzierbar auf (a, b) . Seien $\alpha \neq \beta$ in $[a, b]$ gegeben. Dann existiert ein x zwischen α und β , so dass gilt:

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n$$

Beweis: Wähle $M \in \mathbb{R}$ mit

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta - \alpha)^n$$

Man beachte, dass die n -te Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch

$$P_{n-1,\alpha}^{(n)}(t) + n! \cdot M \text{ für } t \in [a, b]$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein x zwischen α und β mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t - \alpha)^n \text{ für } t \in [a, b] \\ h(\beta) &= f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta - \alpha)^n = 0 \\ h(\alpha) &= f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - M(\alpha - \alpha)^n = 0 \text{ siehe obige Bemerkung} \\ h'(\alpha) &= f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}'(\alpha) - n \cdot M(\alpha - \alpha)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ für } l = 1, \dots, n-1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein x_1 zwischen α und β mit $h'(x_1) = 0$. Analog gibt es zwischen α und x_1 ein x_2 mit $h''(x_2) = 0$. Man findet also x_1, \dots, x_{n-1} mit $h^{(l)}(x_l) = 0$ ($l = 1, \dots, n-1$). Insbesondere existiert ein x zwischen α und x_{n-1} (also zwischen α und β) mit $h^{(n)}(x) = 0$. Damit gilt

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}^{(n)}(x) - M \cdot n! \cdot (x - \alpha)^0$$

und daher $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$

Bemerkung: Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte Lagrange'sche Darstellung

Beispiel 5 Sei $f(x) = \sqrt{1+x}$. Offensichtlich:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}t^2$$

für ein x zwischen 0 und t .

Für $t > 0$ ergibt sich damit:

$$|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)| < \frac{t^2}{8}$$

Korollar 2 Ist $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -Mal differenzierbar und $g^{(n)} = 0$, so ist g ein Polynom höchstens $(n-1)$ -ten Grades

Korollar 3 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $\alpha \in I$ mit $f^{(l)}(\alpha) = 0$ für alle $l = 1, \dots, n-1$ und $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$.

Dann gilt:

- ist n ungerade, so ist α keine Extremstelle
- ist n gerade, so ist α eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist $f^{(n)}(\alpha) < 0$, so ist α eine Maximalstelle. Ist $f^{(n)}(\alpha) > 0$, so ist α Minimalstelle.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall n gerade und $f^{(n)}(\alpha) > 0$.

Nach dem Satz von Taylor gilt für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ &= f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ &= f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \left(f^{(n)}(\alpha) + \left(\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)}(x-\alpha) \right) \right) \end{aligned}$$

für ein t zwischen x und α . Für x hinreichend nah an α erhalten wir

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1}(x-\alpha)$$

Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

Da ist also $f(x) > f(\alpha)$ für x hinreichend nah an α .

Sprich: α ist strikte lokale Minimalstelle

Definition 10 Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylorreihe am Entwicklungspunkt $\alpha \in I$.

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n$$

Bemerkung:

- im Allgemeinen konvergiert $T_{f,\alpha}(x)$ für $x \neq \alpha$ nicht
- Der Satz von Taylor behandelt nicht die Taylorreihe
- Selbst wenn $T_{f,\alpha}(x)$ konvergiert, muss $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$ nicht gelten
- Sei $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$ Dann gilt :

$$P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \rightarrow 0$$

Satz 15 Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n$ und $R > 0$ der zugehörige Konvergenzradius von f .

Dann ist f auf $(\alpha - R, \alpha + R)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

das heißt, die Taylorreihe $T_{f,\alpha}$ stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.

Beweis: Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - \alpha)^{n-1} \\ &\vdots \\ f^{(l)} &= l! \cdot a_l + \sum_{n=l-1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-l) a_n(x - \alpha)^{n-l} \end{aligned}$$

für $l \in \mathbb{N}$

$(x - \alpha) = 0$ für $x = \alpha$

Also: $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$

3 Riemann-Integral

Ziel: Wir wollen auf „natürliche“ Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt, die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der x -Achse zu bestimmen (Abbildung 1).

Dabei heißt auf „natürliche Weise“ insbesondere:

- gilt $f(x) = c = \text{const}$ für alle $x \in D(f) = [a, b]$, so soll gelten (Abbildung 2)

$$\int_a^b f \, dx = c \cdot (b - a)$$

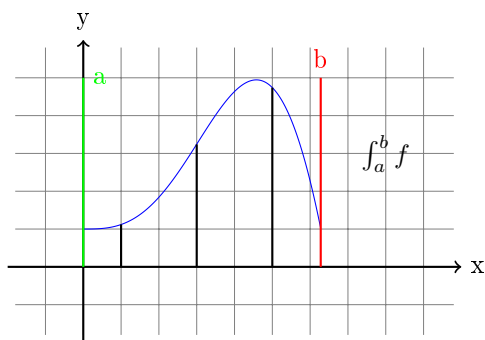


Abbildung 1: Vorgehen

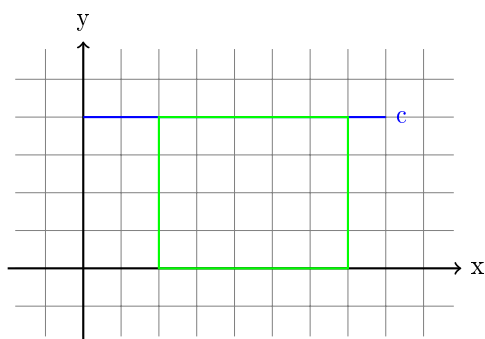


Abbildung 2: Konstante Funktion

- gilt $f(x) \leq g(x)$ ($x \in [a, b]$) so formulieren wir

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

- für $c \in [a, b]$ soll gelten (Abbildung 3)

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

Vorgehen: Man unterteile $[a, b]$ in „viele“ Teilintervalle, auf denen f nahezu konstant ist.

Definition 11 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Partition P (Abbildung 4) von $[a, b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$.

Wir schreiben $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Definition 12 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$.

Wir schreiben:

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i(p) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

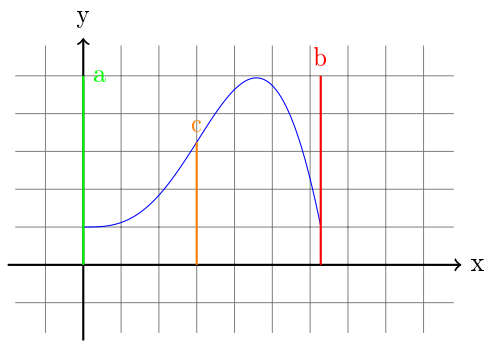


Abbildung 3: Integral aufteilen

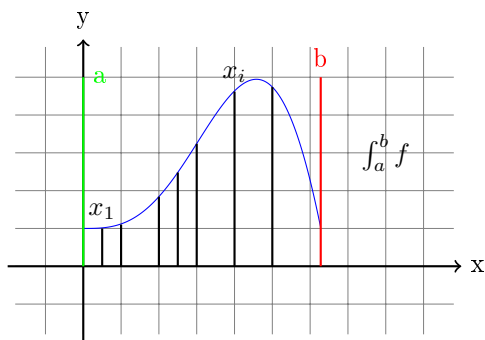


Abbildung 4: Partition

Weiter definieren wir:

$$S(P, f) := \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i$$

$$s(P, f) := \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i$$

Wir setzen:

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dx = \inf S(P, f)$$

$$\int_{\underline{a}}^b f \, dx = \sup s(P, f)$$

wobei Infimum und Supremum über alle Partitionen von $[a, b]$ genommen werden. Wir nennen

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dx \text{ das } \underline{\text{obere}} \text{ und}$$

$$\int_{\underline{a}}^b f \, dx \text{ das } \underline{\text{untere}}$$

Riemannintegral von f über $[a, b]$
Gilt

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dx = \int_{\underline{a}}^b f \, dx$$

sagen wir f ist Riemann-integrierbar (integrierbar) und nennen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_{\underline{a}}^b f \, dx = \int_a^{\bar{b}} f \, dx$$

das Riemannintegral von f über $[a, b]$.

Die Menge der Riemannintegrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit \mathcal{R} beziehungsweise $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

Bemerkungen

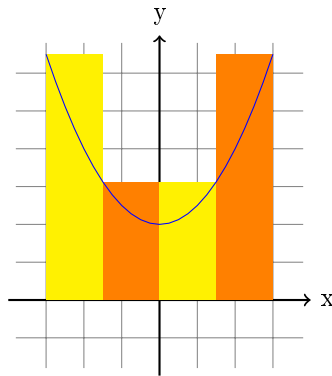


Abbildung 5: oberes Riemann-Integral

- Da f beschränkt ist, gibt es $m \leq M$ in \mathbb{R} mit:

$$m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a, b])$$

Damit gilt für jede Partition P :

$$m \cdot (b - a) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq M \cdot (b - a)$$

Ergo: $\int_a^{\bar{b}} f \, dx, \int_{\underline{a}}^b f \, dx$ sind wohldefiniert.

- im gesamten Kapitel 3 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen

Definition 13 Seien P_1, P_2 zwei Partitionen eines Intervalls. Dann heißt P_1 Verfeinerung von P_2 , wenn gilt: $P_2 \subseteq P_1$

Weiterhin nennen wir $P_1 \cup P_2$ die gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2

Satz 16 Ist P' eine Verfeinerung der Partition P von $[a, b]$, dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f) &\geq S(P', f) \\ s(P, f) &\leq s(P', f) \end{aligned}$$

(wobei f wie in Definition 12 sei)

Beweis: Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass P' sich von P in nur einem Element x' unterscheidet.

Das heißt: $P' = P \cup \{x'\}$

Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x' \in [x_{i-1}, x_i]$

(wobei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ sei).

Wir definieren:

$$W_1 := \sup_{[x_{i-1}, x']} f(x)$$

$$W_2 := \sup_{[x', x_i]} f(x)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f) - S(P', f) &= M_i \Delta x_i - W_1 \cdot (x' - x_{i-1}) - W_2 \cdot (x_i - x') \\ &= (M_i - W_1) \cdot (x' - x_{i-1}) + (M_i - W_2) \cdot (x_i - x') \geq 0 \end{aligned}$$

Enthält von P' k Punkte, die nicht in P enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt k -mal durch.

Satz 17 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dx \geq \int_{\underline{a}}^b f \, dx$$

Beweis: Seien P_1, P_2 zwei Partitionierungen von $[a, b]$ und P' die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:

$$s(P_1, f) \leq s(P', f) \leq S(P', f) \leq S(P_2, f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$$

für alle Partitionierungen P_1, P_2 .

Sprich: $S(P_2, f)$ ist stets obere Schranke von $s(P, f)$ für alle Partitionen P von $[a, b]$. Ergo:

$$\sup s(P, f) \leq S(P_2, f)$$

Damit ist also $\sup s(P, f)$ untere Schranke von $S(P, f)$ (P beliebige Partition).

Ergo: $\sup s(P, f) \leq \inf S(P, f)$

Wir haben also gezeigt:

$$\int_a^b f \, dx = \sup s(P, f) \leq \inf S(P, f) = \inf \int_a^b f \, dx$$

Satz 18 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Partition P_ϵ existiert mit:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Beweis: Per Definition gilt

$$s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \, dx \stackrel{\text{Satz 17}}{\leq} \int_a^{\bar{b}} f \, dx \leq S(P_\epsilon, f)$$

Damit erhalten wir:

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dx - \int_a^b f \, dx \leq S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Das heißt, da ϵ beliebig, dass

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^{\bar{b}} f \, dx$$

Ergo: $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$

Per Definition gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein P'_ϵ mit

$$\int_a^b f \, dx - s(P'_\epsilon, f) < \frac{\epsilon}{2} \quad (3)$$

Analog existiert ein P''_ϵ mit

$$S(P''_\epsilon, f) - \int_a^{\bar{b}} f \, dx < \frac{\epsilon}{2} \quad (4)$$

Wir setzen P_ϵ gleich der gemeinsamen Vereinigung von P'_ϵ und P''_ϵ . Man beachte: Wegen Satz 16 gelten Gleichung 3 und Gleichung 4, wenn wir P'_ϵ beziehungsweise P''_ϵ durch P_ϵ ersetzen. Da $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ gilt außerdem

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^{\bar{b}} f \, dx$$

Addition von Gleichung 3 und Gleichung 4 liefert:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Satz 19 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $P_\epsilon = x_0, \dots, x_n$ eine Partition von $[a, b]$ mit $S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$.

1. Ist P eine Verfeinerung von P_ϵ , so gilt $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$
2. Sind s_i, t_i beliebige Punkte in $[x_{i-1}, x_i]$, so gilt $\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \delta x_i < \epsilon$
3. Ist $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ und $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, so gilt $\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \delta x_i - \int_a^b f \, dx \right| < \epsilon$

Beweis:

1. Das folgt aus Satz 16

2.

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \delta x_i = S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

3. Da $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, gilt $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$
Damit folgt die Aussage aus

$$s(P_\epsilon, f) \leq \sum_{i=1}^n m_i \cdot \delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \delta x_i = S(P_\epsilon, f)$$

$$\text{und } s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \, dx \leq S(P_\epsilon, f)$$

Wir wollen im Folgenden wichtige Vertreter Riemann-integrierbarer Funktionen kennenlernen.

Satz 20 Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Beweis: Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt, ist f offensichtlich beschränkt. Weiterhin ist f als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\Delta > 0$, so dass folgende Implikation gilt:

$$|x - y| < \Delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wir wählen eine Partition $P_\epsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$, so dass $\delta x_i < \Delta$. Dann gilt: $M_i - m_i < \epsilon$ und daher

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) = \sum_{i=1}^n \delta x_i \leq \epsilon \cdot \sum_{i=1}^n \delta x_i = \epsilon \cdot (b - a)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die Aussage mit Satz 18.

Satz 21 Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Beweis: Da f monoton ist, gilt für alle $x \in [a, b]$: $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. D.h. f ist beschränkt. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Partition $P_n = x_0, \dots, x_k$ mit $\delta x_i < \frac{1}{n}$

Dann gilt: $S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \delta x_i$

Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend (der andere Fall läuft analog).

Dann gilt $M_i = f(x_i)$, $m_i = f(x_{i-1})$ und daher

$$\begin{aligned} S(P_n, f) - s(P_n, f) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \delta x_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle n_ϵ so dass gilt:

$$\frac{1}{n_\epsilon} (f(b) - f(a)) < \epsilon$$

Dann gilt mit $P_\epsilon := P_{n_\epsilon}$ die Aussage nach Satz 18

Satz 22 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Dann gilt $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $E = P_1, \dots, P_n$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f . Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\{a, b\} \cap E = \emptyset$ (der andere Fall läuft analog).

Sei $M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Wir wählen $u_j, v_j \in [a, b]$ $j = 1, \dots, n$, so dass $P_s \in [u_j, v_j]$ und $2M(u_j - v_j) < \frac{\epsilon}{2n}$. Sei $I_1^\epsilon = [a, u_1]$, $I_l^\epsilon = [v_{l-1}, u_l]$ ($l = 2, \dots, n$), $I_n^\epsilon = [v_n, b]$. Per Voraussetzung ist $f|_{I_j^\epsilon}$ ($j = 1, \dots, n+1$) stetig. Daher existiert nach Satz 20 eine Partition P_j^ϵ , so dass

$$S(P_j^\epsilon, f|_{I_j^\epsilon}) - s(P_j^\epsilon, f|_{I_j^\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2(n+1)}$$

Wir setzen $P^\epsilon = \cup_{l=1}^n P_l^\epsilon \cup U_{l=1}^n \{u_l, v_l\}$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P^\epsilon, f) - s(P^\epsilon, f) &= \sum_{l=1}^{n+1} S(P_l^\epsilon, f|_{I_l^\epsilon}) - s(P_l^\epsilon, f|_{I_l^\epsilon}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \left(\sup_{x \in [u_l, v_l]} f(x) - \inf_{x \in [u_l, v_l]} f(x) (v_l - u_l) \right) \\ &\leq \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2(n+1)} + \sum_{l=1}^n 2M \cdot (v_l - u_l) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Definition 14 Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Partition $Z = \{y_0, \dots, y_m\}$ von $[a, b]$ und für alle $i \in \{0, \dots, m\}$ für $c_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = c_i \quad (x \in (y_{i-1}, y_i))$$

Nach Satz 22 ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar.

Zur Berechnung des Integrals bedienen wir uns der Notation von Satz 10 und verwenden Satz 19c.

Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass f in a und b stetig ist. Das heißt die Menge der Unstetigkeitsstellen ist gegeben durch $E = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$.

Für $x \in I_l^\epsilon$ gilt dann $f(x) = c_l$ für alle $l = 1, \dots, m$. Dann gilt nach Satz 19c:

$$\left| \int_a^b f \, dx - \sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_i^\epsilon| + \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i) \cdot (v_i - u_i) \right| < \epsilon$$

$$\text{Für } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{ gilt: } \begin{cases} |I_1^1| \rightarrow y_1 - a \\ |I_l^2| \rightarrow y_l - y_{l-1} \quad (l = 2, \dots, m) \\ |I_{m+1}^\epsilon| \rightarrow b - y_m \end{cases}$$

Das heißt

$$\sum_{i=1}^{m+1} c_i (y_i - y_{i-1}) + c_m (b - y_m) \tag{5}$$

Außerdem gilt $v_i - u_j \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ gilt $\int_a^b f \, dx = \text{Gleichung 5}$