Erweiterungen des Integralbegriffs

Uneigentliche Integrale

Ziel: Die Erweiterung des Integralbegriffs auf Integranten, die möglicherweise nicht beschränkt sind, bzw. auf Integrationsintervalle, die nicht beschränkt sind.

Fall I: Eine Intervallgrenze ist unendlich

Definition 1:

Sei $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b] \subsetneq [a, \infty)$ Riemann intbar.

Wir sagen, f ist auf $[a, \infty)$ <u>uneigentlich intbar</u> bzw. $\int_a^\infty f\,dx$ existiert, sofern der folgende Grenzwert existiert:

$$\int_a^\infty f\,dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f\,dx$$

Analog definiert man $\int_{-\infty}^{b} f\,dx$ für Funktion $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$

Beispiele:

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ für $s > 1$

Denn für $b > 1$ gilt:

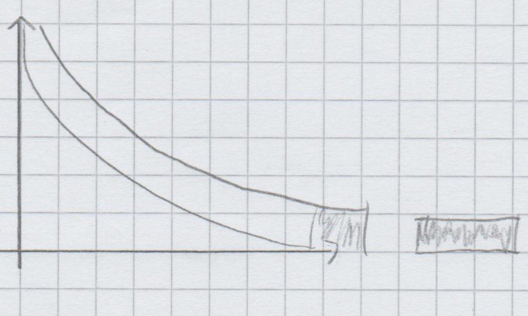
$$\int_a^b \frac{dx}{x^s} = \int_a^b x^{-s}\,dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_a^b = \frac{(b^{-s+1} - a^{-s+1})}{-s+1}$$

$$\overset{a=1}{=} \frac{1}{s-1}\left(1 - b^{-s+1}\right) \xrightarrow{b \to \infty} \frac{1}{s-1}$$

- Hingegen ist $\frac{1}{x^s}$ nicht uneigentlich intbar über $[1, \infty)$ falls $s \leq 1$

Für $s = 1$ folgt das wie folgt:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^b = \ln b \xrightarrow{b \to \infty} \infty$$



Fall II: Der Integrand ist an einer Intervallgrenze kritisch (also bsp. unbeschränkt)

Definition 2:

Sei $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ für jedes $\varepsilon \in (0, b-a)$ über $[a+\varepsilon, b]$ Riemannintbar. Dann sagen wir, dass f über $(a,b]$ uneigentlich intbar ist bzw. dass ${}_a\int^b f\,dx$ existiert, sofern folgender Limes existiert:

$$\int_a^b f\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f\,dx$$

Analog definiert man ${}_a\int^b f\,dx$ falls b kritisch ist.

Beispiele:

$\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ existiert für $s<1$:

für $\varepsilon > 0$ gilt: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \int_\varepsilon^1 x^{-s}\,dx = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-s}\cdot(1-\varepsilon^{1-s})$

$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-s}$

Fall III: Beide Integrationsgrenzen sind kritisch

Definition 3:

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ für alle $\alpha \in (a,b)$ und $\beta \in (\alpha, b)$ Riemannintbar über $[\alpha, \beta]$.

Dann definiert man das uneigentliche Integral von f über $[a,b]$ und sagt ${}_a\int^b f\,dx$ existiert, sofern folgender Grenzwert existiert:

$$\int_a^b f\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{c} f\,dx + \lim_{\delta \to 0} \int_c^{b-\delta} f\,dx$$

wobei $c \in (a,b)$ sei.

Bemerkungen:

- Die obige Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl der Zwischenstelle c
- Ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ so stimmt das Riemannintegral von f über $[a,b]$ und den uneigentlichen Integral überein

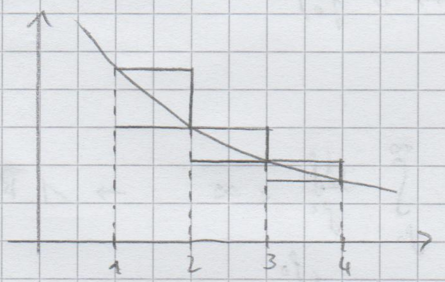
Satz 3

Sei $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende positive Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f\,dx \text{ existiert}$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Wir setzen $g(x) = f(\lfloor x \rfloor)$

Dann gilt:
- $g(x) \geq f(x) \quad (x \in [1,\infty))$
- $g \in \mathcal{R}_{[1,b]}$ für alle $b > 1$



$$\int_1^b f\,dx := \int_1^b g\,dx \leq \sum_{n=1}^{\lceil b \rceil} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

"$\Leftarrow$": Sei $h(x) = f(\lceil x \rceil)$. Dann gilt:
- $h \in \mathcal{R}_{[1,b]}$ für $b > 1$
- $h(x) \leq f(x) \quad (x \in [1,\infty))$

Damit gilt:

$$\sum_{n=1}^{\lceil b \rceil} f(n) = \underbrace{\int_1^{\lceil b \rceil} \cancel{d}\, h(x)}_{+f(1)} \leq \underbrace{\int_1^{\lceil b \rceil} f\,dx}_{+f(1)} \leq \infty$$

Anwendung:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert jedes $s > 1$

Bemerkung:

- für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x und $\lceil x \rceil$ die kleinste Zahl größer gleich x

- Die Gamma-Funktion

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

"wohldefiniert"

$$x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

t statt f

Die Γ-Funktion ist ~~wahrscheinlich~~ wohldefiniert:

Da $t^{x+1} \cdot e^{-t} \xrightarrow{t \to \infty} 0$ existiert ein $t_0 \in (0,\infty)$ mit

$t^{x-1} e^{-t} < \frac{1}{t^2}$ $\quad (t \geq t_0)$

Damit gilt:

- $\int_{t_0}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2} < \infty \quad \to$ 1. Bsp

- $\int_0^{t_0} t^{x-1} \underbrace{e^{-t}}_{\leq 1} \, dt \leq \int_0^{t_0} t^{x-1} \, dt < \infty$

(siehe Beispiel zu Fall 2)

Satz 4: (Funktionsgleichung der Γ-Funktion)

Für $x > 0$ gilt:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

Bemerkung:

- $\Gamma(1) = 1$ (einfach nachrechnen)
- $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$

usw.

Wir sehen: $\Gamma(n+1) = n!$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $R > \varepsilon$. Dann gilt:

$$\int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt = \underbrace{-t^{x-1} \cdot e^{-t} \Big|_\varepsilon^R}_{\xrightarrow{\varepsilon\to 0,\, R\to\infty} 0} + \int_\varepsilon^R (x-1) \cdot t^{x-2} \cdot e^{-t}\, dt$$

Für $x > 1$ gilt aber:

$$\Gamma(x) = (x-1) \cdot \Gamma(x-1)$$

Integrale über komplexwertige Funktionen

Definition 1:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$. Dann heißt f auf $[a,b]$ **Riemannintbar** falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ (Realteil bzw. Imaginärteil) Riemannintbar sind über $[a,b]$. In diesem Falle definieren wir $\int_a^b f\, dx = \int_a^b \operatorname{Re} f\, dx + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im} f\, dx$

Satz 2:

Seien $f, f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemannintbar über $[a,b]$.

Dann gilt:

a) Für $c \in \mathbb{C}$ ist $c \cdot f$ Riemannintbar über $[a,b]$ sowie $f_1 + f_2$ und es gilt:

$$\int_a^b f_1 + f_2\, dx = \int_a^b f_1\, dx + \int_a^b f_2\, dx \quad \text{und} \quad \int_a^b c \cdot f\, dx = c \cdot \int_a^b f\, dx$$

b) Ist $c \in (a,b)$, so ist f über $[a,c]$ und über $[c,b]$ intbar und es gilt

$$\int_a^b f\, dx = \int_a^c f\, dx + \int_c^b f\, dx$$

c) $f_1 \cdot f_2$ ist intbar über $[a,b]$

d) $\overline{f}$ ist intbar $[a,b]$

e) $|f|$ ist intbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$$

Beweis: a–d folgen sofort aus den Eigenschaften der Integrals über reellwertige Funktionen

e) $|f| = \sqrt{f\bar{f}}$ ist intbar wegen c, d und Satz 13 §2

Zur Ungleichung: Wähle $\phi \in [0, 2\pi]$, so dass $e^{i\phi} \cdot \int_a^b f\,dx \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|e^{i\phi}\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_a^b e^{i\phi} f\,dx\right| = \left|\int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{i\phi} f\,dx)\right|$$

$$\leq \int_a^b |\mathrm{Re}\,(e^{i\phi} f)|\,dx \leq \int_a^b |e^{i\phi} f|\,dx = \int_a^b |f|\,dx$$

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind eine spezielle Form von Funktionalgleichungen. Funktionalgleichungen sind Gleichungen in denen nach einer Funktion gesucht wird.

Bsp.: Welche Funktion erfüllt $f^2 = f$?

Oftmals ist die Lösung einer Funktionalgleichung in dieser Allgemeinheit gar nicht von Interesse und man schränkt den Lösungsraum in einer naheliegenden Weise ein. Man könnte bspw. für obige Gleichung fordern, dass f stetig sein soll. Aber selbst dann sind wir von einer eindeutigen Lösung entfernt. Man betrachte bspw.:

$$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = 1$$
$$f_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_0(x) = 0$$
$$f_2: [0,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = 0$$

Uns sind bereits Funktionalgleichungen begegnet. Bsp.

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$$

Mögliche Lsg. $\Phi(x) = a^x$, für $a > 0$

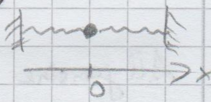
Eine spezielle Form von Funktionalgleichungen die insbesondere in den Natur-, Ingenieurs-, oder Wirtschaftswissenschaften eine zentrale Rolle spielt, sind sogenannte Differentialgleichungen (DGLs), d.h. Funktionalgleichungen, die neben der Funktion selbst auch deren Ableitung beinhalten.

Beispiele:

- sämtliche physikalische Grundgesetze beinhalten DGLs. Z.B.: 2. Newtonsches Gesetz: Es besagt, dass wenn ein Teilchen zur Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$ an einem Ort x_0 mit einer Geschwindigkeit v_0 ist, dass das Teilchen zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x(t)$ ist, wobei die Funktion $t \mapsto x(t)$ folgende DGL erfüllt: $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{F(x(t))}{m}$

  Hierbei ist $F(\cdot)$ die im jeweiligen Ort wirkende Kraft und $x(t_0) = x_0$, $\frac{dx(t_0)}{dt} = v_0$

  Konkretes Beispiel: Ein Massepunkt zwischen zwei Federn. Physik: $F(x) = -k\,x$ (k = Federkonstante)



  D.h.: Wir haben die folgende DGL zu lösen:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

  Mögliche Lösung: $x(t) = \alpha \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right) + \beta \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right)$

Überprüfung: $$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\alpha \sqrt{\tfrac{k}{m}} \cos \sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t - \beta \sqrt{\tfrac{k}{m}} \sin \sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right)$$

$$= -\alpha \frac{k}{m} \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right) - \beta \frac{k}{m} \cdot \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\, t\right)$$

$$= -\frac{k}{m} x(t)$$

Wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Durch Festlegen der Anfangsposition und Geschwindigkeit, können wir α, β festlegen und erhalten eine eindeutig bestimmte (ohne Beweis) Lösung des Anfangsproblems (d.h. Lösung der DGL + Erfüllen der Anfangsbedingungen)

Bemerkungen:

- Offensichtlich bedient die DGL alleine noch keine eindeutige Lösung. Für die Eindeutigkeit benötigen wir zusätzliche Information, z.B. in Form von Anfangsbedingungen
- Auch wenn man nicht jede DGL analytisch lösen kann, kann man Lösungen raten und durch Einsetzen verifizieren

Beispiel

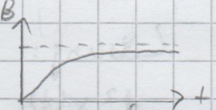
- Die logistische DGL (Anwendung in der Ökologie [Populationsentwicklung] bzw. in der Ökonometrie [Wachstum eines Marktes])

Sei $N(t)$ die Populationsgröße einer Bakterienkultur zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. Wir erwarten, dass die Änderungsrate $\frac{dN(t)}{dt}$ einerseits proportional zur aktuellen Populationsgröße $N(t)$ ist, andererseits aber natürlichen Grenzen (carrying capacity) unterliegen.

$$\frac{dN(t)}{dt} = A \cdot N(t)(B - N(t)) \quad \text{wobei } A, B > 0$$

Allgemeine Lösung:

$$N(t) = \frac{B}{1 + \alpha \cdot e^{-ABt}} \quad (t \geq 0) \quad \text{wobei } \alpha > -1$$



Definition 1:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f: G \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nennen wir

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(x)) \qquad (*)$$

eine (explizite, gewöhnliche) Differentialgleichung 1. Ordnung.
Wir sagen $y: (a,b) \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung von $(*)$, wenn y diffbar ist und es gilt:

i) $\{(t, y(t)) \mid t \in (a,b)\} \subseteq G$

ii) $\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \qquad (t \in (a,b))$

Bemerkung: – Punkt i) ist nötig, wenn Punkt ii) überhaupt formulieren zu können

– Gleichung (*) heißt DGL erster Ordnung, da nur erste Ableitungen der ~~gesd~~ gesuchten Funktion vorkommen. Allgemein kann man auch n-te Ableitungen zulassen und entsprechend DGL-s n-ter Ordnung betrachten.

(siehe Newton) was wir aber mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln ~~nicht~~ nicht systematisch machen können

– Im konkreten Fall der log. DGL können wir setzen:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(t, x) \mapsto Ax(B-x)$$

Wir sehen f ist unabhängig von t. Eine solche DGL nennen wir autonom.

Trennung der Variablen

Die Trennung der Variablen ist ein Verfahren, dass für DGLs der folgenden Form geeignet ist:

Sei $I, J \in \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \neq 0$ $(x \in J)$. Dann heißt:

$$\frac{d\, x(t)}{dt} = f(t) \cdot g\,(x(t)) \qquad (**)$$

eine DGL mit getrennter Variable.

Satz 2:

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und f, g wie oben. Sei $(t_0, x_0) \in I \times J$.
Wir definieren $F(t) := \int_{t_0}^{t} f(r)\, dr$, $G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{dr}{g(r)}$
Sei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $t_0 \in I'$ und $F(I') \subseteq G(J)$.
Dann gibt es genau eine Funktion $y : I' \to \mathbb{R}$, die (**) löst und $y(t_0) = x_0$ erfüllt und y genügt der Gleichung:

$$G(y(t)) = F(t)$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass jede Funktion $y : I' \to \mathbb{R}$, die (**) erfüllt, auch die Gleichung $G(y(t)) = F(t)$ erfüllt.

$$G(y(t)) = \int_{y(t_0) = x_0}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} \overset{\text{Substregel}}{=} \int_{t_0}^{t} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\, dr = \int_{t_0}^{t} \frac{f(r) \cdot \cancel{g(y(r))}}{\cancel{g(y(r))}}\, dr$$

$$= \int_{t}^{t_0} f(r)\, dr = F(t)$$

Nun zur Eindeutigkeit.

Da $g \neq 0$, ist G streng monoton wachsend (falls $g > 0$) oder streng monoton fallend (falls $g < 0$). Da G diffbar ist (Satz 1, §3) und invertierbar (wegen der Monotonie) existiert aber eine diffbare ~~Funktion~~ Umkehrfunktion G^{-1}. Damit haben wir, dass für jede [Lsg $y : I' \to \mathbb{R}$ von (**)] mit $y(t_0) = x_0$ gilt.

$$y(t) = G^{-1}(F(t)) \qquad (t \in I')$$

Bleibt die Existenz nachzuweisen.

Wir setzen einfach $G^{-1}(F(\cdot))$ in (**) ein. Dann erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} G^{-1}(F(t)) = \left(\frac{d}{dt} G^{-1}\right)(F(t)) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} F(t)}_{= f(t)}$$

$$= \left(\frac{d}{dt} G^{-1}\right)(F(t)) \cdot f(t)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{d}{dt} G\right)(G^{-1}(F(t)))} \cdot f(t)$$

$$= g\left(G^{-1}(F(t))\right) \cdot f(t)$$

Bemerkung:

Satz 2 lässt sich wie folgt merken:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t)\, g(x(t)) \qquad |: g(x(t))$$

$$\frac{1}{g(x(t))} \cdot \frac{dx(t)}{dt} = f(t) \qquad | \cdot \text{"}dt\text{"}$$

$$\frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt$$

und jetzt integrieren von $x_0 \to x$ bzw. $t_0 \to t$.