

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Differentiation</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Differenzierbare Funktionen auf Intervallen</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Riemann-Integral</b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Differentiation und Integration</b>	<b>35</b>
<b>5</b>	<b>Erweiterungen des Integralbegriffs</b>	<b>40</b>
5.1	Uneigentliche Integrale . . . . .	40
5.2	Integrale über komplexwertige Funktionen . . . . .	43

# 1 Differentiation

**Definition 1.1.** Sei  $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D(f)$  ein Punkt, um den ein offenes Intervall  $B_\epsilon(x)$  (für geeignetes  $\epsilon > 0$ ) komplett in  $D(f)$  enthalten ist ( $B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$ ). Dann heißt  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Wir meinen mit  $f'(x_0)$  die Ableitung (seltener Differentialquotient) von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Ist  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem  $x \in D(f)$  differenzierbar, dann heißt  $f$  schlechthin differenzierbar. Etwas irreführend wird auch die Abbildung

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von  $f$  bezeichnet.

**Satz 1.1.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein  $c \in \mathbb{R}$  und  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0 \tag{1}$$

2. Es gibt ein  $\tilde{c} \in \mathbb{R}$  und  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

3.  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

Das heißt insbesondere  $c$  und  $\tilde{c}$  sind eindeutig bestimmt

**Bemerkung.**

- Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  wählen und setzt

$$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- Vergisst man die Funktion  $\phi$ , versteht man mit der Geradengleichung

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an  $f$  in  $x_0$

Beweis.

$1 \leftrightarrow 2$  Man setze einfach  $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$  und  $\tilde{c} = c$   
(in  $x = x_0$  setze man  $u(x_0) = 0$ )

$1 \rightarrow 2$  ZZ  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c \end{aligned}$$

$3 \rightarrow 1$  Wir setzten  $c = f'(x_0)$  und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right| &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

■

Hier ist  
der Satz  
unvollstän-  
dig

**Satz 1.2.** Es sind äquivalent:  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$   
mit:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{|x - x_0|} = 0$
2.  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$   
mit:  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$
3. Der Grenzwert  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert

**Satz 1.3.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

*Beweis.* ZZ ist:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Äquivalent dazu:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ .

Nun gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{x - x_0}{x - x_0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$  ■

**Bemerkung.**

- Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!  
Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind.  
(Beispiel: Weierhaus-Fkt:  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \cos(b_n \pi x)$  mit  $a_n \in (0, 1)$  und  $a_n b_n > 1$ )
- Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar

**Satz 1.4.** Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x \in I$  differenzierbar,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann sind  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$  (sofern  $g(x) \neq 0$ ) in  $x$  differenzierbar.  
Es gilt:

1.  $(f + g)' = f'(x) + g'(x)$  (Summenregel)
2.  $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  (Produktregel)
3.  $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$  (Quotientenregel)

*Beweis.*

1. 
$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) + g(y) - (f(x) + g(x))}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$
2. 
$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y) \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y) \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &\stackrel{\text{Satz 1.3}}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}}{y - x} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{g(y)g(x)} \frac{f(y)g(x) - f(x)g(y)}{y - x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(x) - f(y)g(y) + f(y)g(y) - f(x)g(y)}{y - x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y \rightarrow x} f(y) \cdot \frac{g(x) - g(y)}{y - x} + g(y) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left( \lim_{y \rightarrow x} f(y) \frac{g(x) - g(y)}{y - x} + \lim_{y \rightarrow x} g(y) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right) \\
&= \frac{1}{g^2(x)} (f(x) \cdot (-g'(x)) + g(x)f'(x)) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

■

### Beispiel 1.1.

- $f(x) = c \in \mathbb{R} (x \in \mathbb{R})$   
 $\rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{x \rightarrow y} \frac{c - c}{y - x} = 0$
- $f(x) = x (x \in \mathbb{R})$   
 $f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{y - x}{y - x} = 1$
- $f(x) = x^n, (x \in \mathbb{R})$  wobei  $n \in \mathbb{N}$   
 $f'(x) = nx^{n-1}$  per Induktion:  
 $n = 1$  Stichpunkt 2 ✓  
 $n \rightarrow n + 1$ : Sei also  $f(x) = x^{n+1}$ . Das gibt mit der Produktregel:  
 $f'(x) = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot (x^n)' = 1 \cdot xn + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für  $p(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$  gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^n l \cdot a_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^n l \cdot a_l x^{l-1}$$

- Seien  $P_1$  und  $P_2$  Polynome.  
Dann nennt man die Abbildung  
 $Q : \mathbb{R} \setminus \{x | P_2(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$  eine rationale Funktion.  
Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.
- Die Funktion  $| \cdot | : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$  ist nicht in 0 differenzierbar.  
Denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \searrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} &= \lim_{y \searrow 0} \frac{y - 0}{y - 0} = 1 \\
\lim_{y \nearrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} &= \lim_{y \nearrow 0} \frac{-y - 0}{y - 0} = -1
\end{aligned}$$

**Satz 1.5** (Kettenregel). Seien  $I_f$  und  $I_g$  Intervalle,  $x_0 \in I_f$  und  $f : I_f \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und  $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $f(x_0)$  differenzierbar und  $f(I_f) \subseteq I_g$ . Dann gilt:

$$\frac{dg \circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

*Beweis.* Da  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, gilt für alle  $x \in I_f$ :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x))$$

(Wobei  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ )

Analog gilt für alle  $y \in I_g$ :

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei  $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} v(y) = 0$

Damit haben wir für alle  $x \in I_f$ :

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0)g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

■

**Definition 1.6.** Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt  $f$  stetig differenzierbar. Wir definieren weiterhin induktiv die  $k$ -te Ableitung (für  $k \in \mathbb{N}$ ) durch:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f \\ f^{(k+1)} &:= f^{(k+1)'} \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.

Ist  $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  definiert, so heißt  $f$  beliebig oft beziehungsweise unendlich oft differenzierbar.

**Bemerkung.** Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

**Satz 1.7.** Sei  $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine Potenzreihe vom Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $p : x \mapsto p(x)$  auf ganz  $(x_0 - R, x_0 + R)$  differenzierbar mit  $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$ . Insbesondere ist  $p'$  auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius  $R$ .

**Bemerkung.**

1. Damit erhalten wir:

$$\exp'(x) = \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \exp(x)$$

2. Damit sind Potenzreihen  $\infty$  oft differenzierbar

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k \right) (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left( \limsup \sqrt[k+1]{(k+1) a_{k+1}} \right)^{-1} = R \left( \text{da } \sqrt[k]{k} \rightarrow 1 \right)$$

Damit ist  $p'$  wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass  $p'$  tatsächlich die Ableitung von  $p$  darstellt. ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $x_0 = 0$ .

Dann gilt für  $y \in (-R, R)$ :

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x - y) = \sum_{k=\sigma}^{\infty} a_k (x^k - y^k) - (k+1) a_{k+1} y^k (x - y)$$

Wir setzen  $\Delta(x, y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x - y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$ .

Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right] \quad (2)$$

Für  $n = 1$  ist  $[...] = 0$  und für  $n \geq 2$ :

Hier nicht ... sondern Gleichungsnummer ?

$$\begin{aligned}
[...] &= \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1)y^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} kx^{n-1-k} y^k \cdot (n-1)y^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} kx^{n-1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kx^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} kx^{n-1-k} y^k \\
&= (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} kx^{n-1-k} y^{k-1}
\end{aligned} \tag{3}$$

Sein nun  $|y| < r < R$  und  $|x| \leq r$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Delta(x, y)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1} \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| r^{n-2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \leq |a_n| r^{n-2} n^2 |x-y|
\end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe  $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$  den Konvergenzradius  $R$ , weshalb

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$$

konvergiert. Damit folgt aber  $\lim_{x \rightarrow y} \Delta(x, y) = 0$  ■

**Proposition 1.1.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton und differenzierbar in  $p \in (a, b)$  mit  $f'(p) \neq 0$ . Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $q = f(p)$  und es gilt:

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

*Beweis.* Da  $f$  streng monoton ist, ist  $f^{-1}$  stetig.

Insbesondere gilt  $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(q)$  für  $y \rightarrow q$ .

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow q} \frac{1}{y - q} (f^{-1}(y) - f^{-1}(q)) &= \lim_{y \rightarrow q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \\
&= \left( \lim_{y \rightarrow q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)} \right)^{-1} \\
&= (f'(f^{-1}(q)))^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}
\end{aligned}$$
■



### Beispiel 1.2.

- $k$ -te Wurzel  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$  ist differenzierbar mit  $g'(y) = \frac{1}{k}y^{\frac{1}{k}-1}$   
**Denn**  $g$  ist Umkehrfunktion zu  $f(x) = x^k$   
Damit gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k}y^{\frac{1}{k}-1}$$

- Logarithmus  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$ . Es ist  $\ln'(y) = \frac{1}{y}$ , **denn:**

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

**Bemerkung.** Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$  ist  $x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x))$

**Anwendung:** Die Funktion  $(\circ)^\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$  hat die Ableitung  $((\circ)^\alpha)' : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$  **denn**

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= \exp'(\alpha \ln(x)) = \exp(\alpha \ln x) \frac{\alpha}{x} \\ &= \alpha \exp(\alpha \ln x) \exp(-\ln x) = \alpha \exp((\alpha - 1) \ln x) \\ &= \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln  $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$  und  $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

## 2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall

**Definition 2.1.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen,  $f$  hat in  $x_0 \in I$  ein lokales Maximum (lokales Minimum), falls ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \text{ (} f(x) \geq f(x_0) \text{) gilt.}$$

Gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (} f(x) \geq f(x_0) \text{)}$$

für alle  $x \in I$ , so sagen wir, dass  $x_0$  ein globales Maximum (globales Minimum) ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von strikten Maxima (strikte Minima). Maximum und Minimum werden unter dem Begriff Extremum zusammengefasst.

**Satz 2.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Hat  $f$  ein lokales Maximum (lokales Minimum) in  $x_0 \in (a, b)$  und existiert  $f'(x_0)$ , so gilt  $f'(x_0) = 0$ .

*Beweis.* Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Wegen Differenzierbarkeit in  $x_0$  folgt:

$$\text{Gleichung 1} = \text{Gleichung 2} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

■

**Satz 2.2** (verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf ganz  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit:

$$(g(b) - g(a)) f'(\xi) = (f(b) - f(a)) g'(\xi)$$

*Beweis.* Wir betrachten  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto (g(b) - g(a)) f(t) - (f(b) - f(a)) g(t)$$

Offensichtlich (nach Summenregel) ist  $h$  differenzierbar auf  $(a, b)$ . Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a)) f'(t) - (f(b) - f(a)) g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $h'(\xi) = 0$ . Damit folgt dann die Aussage.

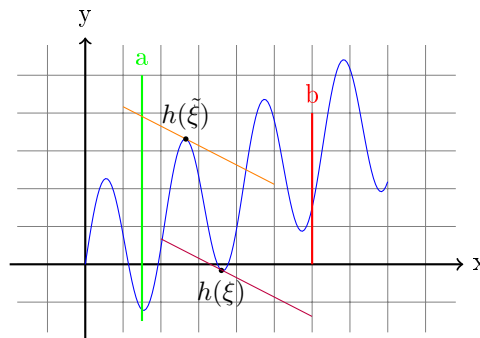
*Beachte:*

$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a)) f(a) - (f(b) - f(a)) g(a) \\ &= g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ &= (g(b) - g(a)) f(b) - (f(b) - f(a)) g(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

**Fall 1:**  $h = \text{const}$  Dann gilt trivialerweise  $h' = 0$  und wir sind fertig.

**Fall 2:**  $h \neq \text{const}$  Offensichtlich ist  $h$  stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Damit besitzt  $h$  ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein  $\tilde{\xi} \in (a, b)$  mit  $h(\tilde{\xi}) > h(a)$ , sonst betrachte  $-h$  statt  $h$ .

Also existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $h(\xi) \geq h(x)$  ( $x \in [a, b]$ ). Mit anderen Worten:  $\xi$  ist auch ein globales Maximum und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 2.1 folgt:  $h'(\xi) = 0$  ■



**Satz 2.3** (Mittelwertsatz(MWS)). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

**Bemerkung.** Es ist oft wichtig, dass  $f$  nur auf  $(a, b)$  differenzierbar sein muss.

*Beweis.* Das folgt aus Satz 2.2 mit  $g = \text{id}_{[a, b]}$ , d.h.  $g(x) = x$  ( $x \in [a, b]$ ). ■

**Satz 2.4.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gilt:

- a)  $f = \text{const} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \ (x \in (a, b))$
- b)  $f$  ist monoton wachsend  $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \ (x \in (a, b))$
- c)  $f$  ist streng monoton wachsend  $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \ (x \in (a, b))$
- d)  $f$  ist monoton fallend  $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \ (x \in (a, b))$
- e)  $f$  ist streng monoton fallend  $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \ (x \in (a, b))$

*Beweis.* a) folgt aus b) und c).

Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).

Sei  $y > x \in [a, b]$ . Sei  $f|_{[x, y]}$  die *Einschränkung* von  $f$  auf  $[x, y]$ , das heißt:

$$f|_{[x, y]} : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt  $f|_{[x, y]}$  die Bedingungen des MWS.

Es existiert ein  $\xi \in (x, y)$  mit  $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi)$

**Fall b)**  $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0$

$$\hookrightarrow f(y) \geq f(x)$$

**Fall c)**  $f(y) - f(x) > 0$

$$\hookrightarrow f(y) > f(x)$$

*Beweis der Richtung  $\Leftarrow$  in Teil b):* Ist  $f'(x) \geq 0$  so gilt

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da  $f$  monoton wachsend ist, gilt für  $y > x$ :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für  $\lim_{y \nearrow x}$ . ■

**Korollar 2.1.** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $f'(x) = g'(x)$  für  $x \in (a, b)$ . Dann gilt  $f - g = \text{const}$

*Beweis.* Es gilt:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 2.4. ■

**Satz 2.5.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar ( $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall). Gibt es  $\xi \in I$  mit  $f'(\xi) = 0$  und  $f''(\xi) < 0$  ( $f''(\xi) > 0$ ), so nimmt  $f$  an der Stelle  $\xi$  ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall  $f''(\xi) < 0$ . Für den Fall  $f''(\xi) > 0$  betrachte man  $-f$ .

Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$$r := \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$$

Das heißt es existiert für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit:

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für  $\epsilon := \frac{r}{2}$  gilt daher:

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right| \text{ für ein entsprechend gewähltes } \delta > 0$$

Insbesondere gilt also:

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle  $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ .

Das heißt für  $x < \xi$  gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für  $x > \xi$  gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo:  $f'$  ist streng monoton fallend auf  $(\xi - \delta, \xi]$  und streng monoton wachsend auf  $[\xi, \xi + \delta)$

Da  $f'(\xi) = 0$  folgt, dass  $f'(x) > 0$  für  $x \in (\xi - \delta, \xi]$  und  $f'(x) < 0$  für  $x \in [\xi, \xi + \delta)$ .

Mit Satz 2.4 folgt:

$f|_{(\xi - \delta, \xi]}$  ist streng monoton wachsend und

$f|_{[\xi, \xi + \delta)}$  ist streng monoton fallend. ■

**Satz 2.6** (Regel von l'Hospital). Seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

differenzierbar und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Weiter gelte:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei  $-\infty \leq A \leq \infty$  sei und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,

sowie  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ .

Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ . Die analoge Aussage gilt auch für  $x \rightarrow b$ .

**Bemerkung.**

- Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h.  $\pm\infty$  sind als Grenzwerte zulässig.
- Zwei wesentliche Voraussetzungen:
  1.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert!
  2. ebenso ist essentiell, dass  $f, g \rightarrow \frac{\circ}{\pm\infty}$
- Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0$$

- Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form  $0 \cdot \infty$  zu behandeln, indem wir diese in die Form

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}} \text{ beziehungsweise } \frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

umrechnen.

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Fall  $x \rightarrow a$  ( $x \rightarrow b$  läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:

*Behauptung:* Sei  $A \in [-\infty, \infty)$ .

Dann existiert für jedes  $q > A$  ein  $c > a$  mit  $\frac{f(x)}{g(x)} < q$  ( $x \in (a, c)$ ).

*Beweis der Behauptung:*

Da  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A$  existiert ein  $c' > a$  mit:  $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$  für ein beliebiges  $r \in (A, q)$  und  $x \in (a, c')$ .

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad (4)$$

für ein geeignetes  $t$  zwischen  $x$  und  $y$ .

Für  $a < x < y < c'$  gilt daher:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \quad (5)$$

Fall 1:  $f, g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ . Nach Gleichung (5) gilt für  $x \rightarrow a$

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q \quad (y \in (a, c'))$$

Fall 2:  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$  Multipliziere (4) mit  $\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$ .

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \\ \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \end{aligned}$$

Für  $x \rightarrow a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein  $c > a$  existieren mit:  $\frac{f(x)}{g(x)} < r$  ( $x \in (a, c)$ )

Analog kann man zeigen:

*Behauptung'*: Sei  $A \in (-\infty, \infty]$ . Dann existiert für jedes  $p < A$  ein  $d > a$ , so dass  $p < \frac{f(x)}{g(x)}$  ( $x \in (a, d)$ )

Für  $A = +\infty$  folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für  $A = -\infty$  aus der ersten Behauptung.

Für  $A \in \mathbb{R}$  argumentieren wir wie folgt:

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert  $c > a$ , so dass  $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon$  ( $x \in (a, c)$ ). Nach der zweiten Behauptung existiert  $d > a$  mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \quad (x \in (a, d))$$

Für  $x \in (a, \min\{c, d\})$  gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

■

**Beispiel 2.1.**  $f(x) = 1, g(x) = x + 7$

Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$

aber:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

**Beispiel 2.2.**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \text{ für } \alpha > 0\end{aligned}$$

**Definition 2.2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen, dass  $f$  in  $a$  (rechtsseitig) differenzierbar ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass  $f$  in  $b$  (linksseitig) differenzierbar ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existiert. Wir sagen,  $f$  ist auf  $[a, b]$  differenzierbar, wenn  $f$  in  $(a, b)$  differenzierbar und in  $a$  rechtsseitig sowie in  $b$  linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe  $n$ -Mal (stetig) differenzierbar etc...

**Definition 2.3.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -Mal differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned}P_{n,\alpha} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{l=0}^n \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^l\end{aligned}$$

das  $n$ -te Taylorpolynom, wobei  $\alpha \in I$  sei, von  $f$  an der Stelle  $\alpha$ .

**Bemerkung.** Offensichtlich gilt:  $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$ . Weiter gilt:

$$f'(\alpha) = P'_{n,\alpha}(\alpha) = \left( \sum_{l=0}^n l \cdot \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^{l-1} \right)$$

und analog:

$$\begin{aligned}f^{(l)}(\alpha) &= P_{n,\alpha}^{(l)} = P_{n,\alpha}^{(l)}(\alpha) \\ &\quad (l = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

ich vermute, die Summe sollte bei 0 beginnen

**Satz 2.7** (Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied)). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f$   $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar (auf  $[a, b]$ ) und  $n$ -mal differenzierbar auf  $(a, b)$ . Seien  $\alpha \neq \beta$  in  $[a, b]$  gegeben. Dann existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ , so dass gilt:

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n$$

*Beweis.* Wähle  $M \in \mathbb{R}$  mit

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta - \alpha)^n$$

Man beachte, dass die  $n$ -te Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch:

$$P_{n-1,\alpha}^{(n)}(t) + n! \cdot M \text{ (für } t \in [a, b])$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t - \alpha)^n \text{ für } t \in [a, b] \\ h(\beta) &= f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta - \alpha)^n = 0 \\ h(\alpha) &= f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - M(\alpha - \alpha)^n = 0 \text{ siehe obige Bemerkung} \\ h'(\alpha) &= f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}'(\alpha) - n \cdot M(\alpha - \alpha)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ für } l = 1, \dots, n-1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein  $x_1$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $h'(x_1) = 0$ . Analog gibt es zwischen  $\alpha$  und  $x_1$  ein  $x_2$  mit  $h''(x_2) = 0$ . Man findet also  $x_1, \dots, x_{n-1}$  mit  $h^{(l)}(x_l) = 0$  ( $l = 1, \dots, n-1$ ). Insbesondere existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $x_{n-1}$  (also zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ ) mit  $h^{(n)}(x) = 0$ . Damit gilt

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}^{(n)}(x) - M \cdot n! \cdot (x - \alpha)^0$$

und daher  $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$  ■

**Bemerkung.** Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte *Lagrange'sche Darstellung*

**Beispiel 2.3.** Sei  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Offensichtlich:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}t^2$$

für ein  $x$  zwischen 0 und  $t$ .

Für  $t > 0$  ergibt sich damit:

$$|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)| < \frac{t^2}{8}$$



**Korollar 2.2.** Ist  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -Mal differenzierbar und  $g^{(n)} = 0$ , so ist  $g$  ein Polynom höchstens  $(n - 1)$ -ten Grades

**Korollar 2.3.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar und  $\alpha \in I$  mit  $f^{(l)}(\alpha) = 0$  für alle  $l = 1, \dots, n - 1$  und  $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$ .  
Dann gilt:

- ist  $n$  ungerade, so ist  $\alpha$  keine Extremstelle
- ist  $n$  gerade, so ist  $\alpha$  eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist  $f^{(n)}(\alpha) < 0$ , so ist  $\alpha$  eine Maximalstelle. Ist  $f^{(n)}(\alpha) > 0$ , so ist  $\alpha$  Minimalstelle.

*Beweis.*

- Wir betrachten nur den Fall  $n$  gerade und  $f^{(n)}(\alpha) > 0$ .  
Nach dem Satz von Taylor gilt für alle  $x \in I$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ &= f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ &= f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \left( f^{(n)}(\alpha) + \left( \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)}(x-\alpha) \right) \right) \end{aligned}$$

für ein  $t$  zwischen  $x$  und  $\alpha$ . Für  $x$  hinreichend nah an  $\alpha$  erhalten wir:

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1}(x-\alpha)$$

Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

Da ist also  $f(x) > f(\alpha)$  für  $x$  hinreichend nah an  $\alpha$ .  
Sprich:  $\alpha$  ist strikte lokale Minimalstelle

■

**Definition 2.4.** Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylorreihe am Entwicklungspunkt  $\alpha \in I$ .

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n$$

**Bemerkung.**

- im Allgemeinen konvergiert  $T_{f,\alpha}(x)$  für  $x \neq \alpha$  nicht
- Der Satz von Taylor behandelt nicht die Taylorreihe
- Selbst wenn  $T_{f,\alpha}(x)$  konvergiert, muss  $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$  nicht gelten
- Sei  $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$  Dann gilt :

$$P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \rightarrow 0$$

**Satz 2.8.** Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n$  und  $R > 0$  der zugehörige Konvergenzradius von  $f$ .

Dann ist  $f$  auf  $(\alpha - R, \alpha + R)$  beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

das heißt, die Taylorreihe  $T_{f,\alpha}$  stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - \alpha)^{n-1} \\ &\vdots \\ f^{(l)} &= l! \cdot a_l + \sum_{n=l-1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-l) a_n(x - \alpha)^{n-l} \end{aligned}$$

für  $l \in \mathbb{N}$ :

$$x - \alpha = 0 \text{ für } x = \alpha$$

Also:  $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$  ■

### 3 Riemann-Integral

**Ziel:** Wir wollen auf „natürliche“ Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der  $x$ -Achse zu bestimmen (Abbildung 1).

Dabei heißt auf *natürliche Weise* insbesondere:

- gilt  $f(x) = c = \text{const}$  für alle  $x \in D(f) = [a, b]$ , so soll gelten (Abbildung 2)

$$\int_a^b f \, dx = c \cdot (b - a)$$

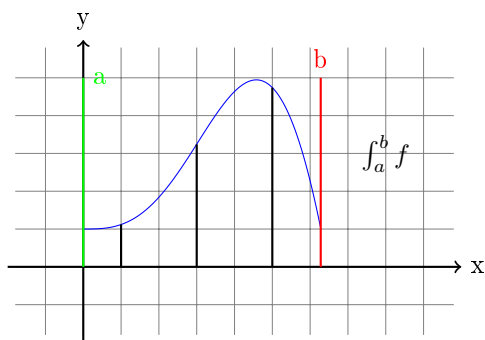


Abbildung 1: Vorgehen

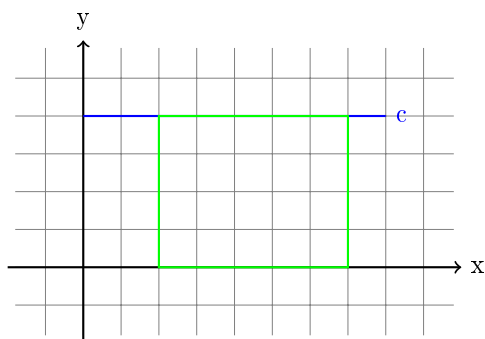


Abbildung 2: Konstante Funktion

- gilt  $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) so fordern wir (Abbildung 3)

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

- für  $c \in [a, b]$  soll gelten (Abbildung 4)

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

Vorgehen: Man unterteile  $[a, b]$  in „viele“ Teilintervalle, auf denen  $f$  nahezu konstant ist.

**Definition 3.1.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Partition  $P$  (Abbildung 5) von  $[a, b]$  ist eine endliche Menge von Punkten  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ . Wir schreiben  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

**Definition 3.2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Partition von  $[a, b]$ .

Wir schreiben:

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i(p) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

das geht besser auch mit Stichwortverzeichnis. Baue ich später ein.

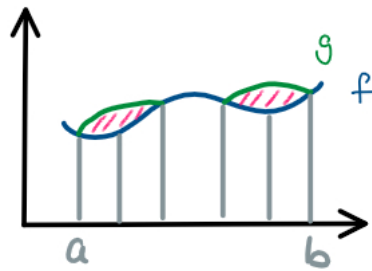


Abbildung 3: Flächeninhalt zweier Funktionen

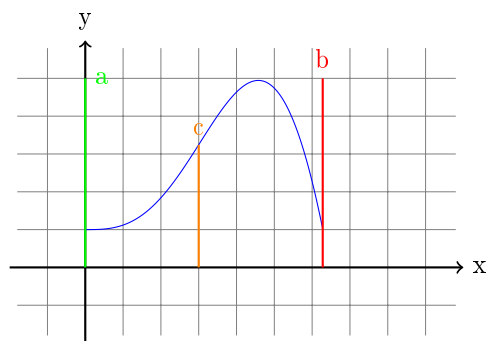


Abbildung 4: Integral aufteilen

Weiter definieren wir:

$$S(P, f) := \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i$$

$$s(P, f) := \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i$$

Wir setzen:

$$\overline{\int_a^b} f \, dx = \inf S(P, f)$$

$$\underline{\int_a^b} f \, dx = \sup s(P, f)$$

wobei Infimum und Supremum über alle Partitionen von  $[a, b]$  genommen werden. Wir nennen

$$\overline{\int_a^b} f \, dx \text{ das obere und}$$

$$\underline{\int_a^b} f \, dx \text{ das untere}$$

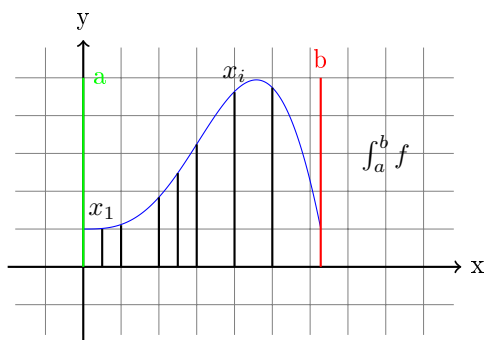


Abbildung 5: Partition

Riemannintegral von  $f$  über  $[a, b]$

Gilt:

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dx = \int_a^b f \, dx$$

so sagen wir  $f$  ist Riemann-integrierbar (integrierbar) und nennen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b f \, dx = \overline{\int_a^b f \, dx}$$

das Riemannintegral von  $f$  über  $[a, b]$ .

Die Menge der Riemannintegrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}$  beziehungsweise  $\mathcal{R}_{[a, b]}$ .

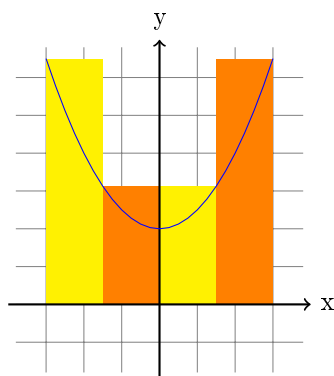


Abbildung 6: oberes Riemann-Integral

**Bemerkung.**

- Da  $f$  beschränkt ist, gibt es  $m \leq M$  in  $\mathbb{R}$  mit:

$$m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a, b])$$

Damit gilt für jede Partition  $P$ :

$$m \cdot (b - a) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq M \cdot (b - a)$$

Ergo:  $\overline{\int_a^b f \, dx}, \underline{\int_a^b f \, dx}$  sind wohldefiniert.

- im gesamten Kapitel 3 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen

**Definition 3.3.** Seien  $P_1, P_2$  zwei Partitionen eines Intervalls. Dann heißt  $P_1$  Verfeinerung von  $P_2$ , wenn gilt:  $P_2 \subseteq P_1$ . Weiterhin nennen wir  $P_1 \cup P_2$  die gemeinsame Verfeinerung von  $P_1$  und  $P_2$ .

**Satz 3.1.** Ist  $P'$  eine Verfeinerung der Partition  $P$  von  $[a, b]$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f) &\geq S(P', f) \\ s(P, f) &\leq s(P', f) \end{aligned}$$

(wobei  $f$  wie in Definition 3.2 sei).

*Beweis.* Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass  $P'$  sich von  $P$  in nur einem Element  $x'$  unterscheidet.

Das heißt:  $P' = P \cup \{x'\}$

Dann gibt es ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $x' \in [x_{i-1}, x_i]$

(wobei  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$  sei).

Wir definieren:

$$\begin{aligned} W_1 &:= \sup_{[x_{i-1}, x']} f(x) \\ W_2 &:= \sup_{[x', x_i]} f(x) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f) - S(P', f) &= M_i \Delta x_i - W_1 \cdot (x' - x_{i-1}) - W_2 \cdot (x_i - x') \\ &= (M_i - W_1) \cdot (x' - x_{i-1}) + (M_i - W_2) \cdot (x_i - x') \geq 0 \end{aligned}$$

Enthält von  $P'$   $k$  Punkte, die nicht in  $P$  enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt  $k$ -mal durch. ■

**Satz 3.2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt:

$$\overline{\int_a^b f \, dx} \geq \underline{\int_a^b f \, dx}$$

*Beweis.* Seien  $P_1, P_2$  zwei Partitionierungen von  $[a, b]$  und  $P'$  die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:

$$s(P_1, f) \leq s(P', f) \leq S(P', f) \leq S(P_2, f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$$

für alle Partitionierungen  $P_1, P_2$ .

Sprich:  $S(P_2, f)$  ist stets obere Schranke von  $s(P, f)$  für alle Partitionen  $P$  von  $[a, b]$ . Ergo:

$$\sup s(P, f) \leq S(P_2, f)$$

Damit ist also  $\sup s(P, f)$  untere Schranke von  $S(P, f)$  ( $P$  beliebige Partition).

Ergo:  $\sup s(P, f) \leq \inf S(P, f)$

Wir haben also gezeigt:

$$\int_a^b f \, dx = \sup s(P, f) \leq \inf S(P, f) = \int_a^b f \, dx$$

■

**Satz 3.3.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  genau dann, wenn für jedes  $\epsilon > 0$  eine Partition  $P_\epsilon$  existiert mit:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

*Beweis.* Per Definition gilt

$$s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \, dx \stackrel{\text{Satz 3.2}}{\leq} \overline{\int_a^b f \, dx} \leq S(P_\epsilon, f)$$

Damit erhalten wir:

$$\overline{\int_a^b f \, dx} - \int_a^b f \, dx \leq S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Das heißt, da  $\epsilon$  beliebig, dass:

$$\int_a^b f \, dx = \overline{\int_a^b f \, dx}$$

Ergo:  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Per Definition gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $P'_\epsilon$  mit:

$$\int_a^b f \, dx - s(P'_\epsilon, f) < \frac{\epsilon}{2} \quad (6)$$

Analog existiert ein  $P''_\epsilon$  mit

$$S(P''_\epsilon, f) - \overline{\int_a^b f \, dx} < \frac{\epsilon}{2} \quad (7)$$

Wir setzen  $P_\epsilon$  gleich der gemeinsamen Vereinigung von  $P'_\epsilon$  und  $P''_\epsilon$ . Man beachte: Wegen Satz 3.1 gelten Gleichung 6 und Gleichung 7, wenn wir  $P'_\epsilon$ , beziehungsweise  $P''_\epsilon$ , durch  $P_\epsilon$  ersetzen. Da  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  gilt außerdem:

$$\int_a^b f \, dx = \overline{\int_a^b f \, dx}$$

Addition von Gleichung 6 und Gleichung 7 liefert:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

■

**Satz 3.4.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $P_\epsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Partition von  $[a, b]$  mit  $S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$  für ein  $\epsilon > 0$ .

1. Ist  $P$  eine Verfeinerung von  $P_\epsilon$ , so gilt  $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$
2. Sind  $s_i, t_i$  beliebige Punkte in  $[x_{i-1}, x_i]$ , so gilt:

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i < \epsilon$$



3. Ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , so gilt

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f \, dx \right| < \epsilon$$

*Beweis.*

1. Das folgt aus Satz 3.1

2.

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

3. Da  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , gilt  $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$   
Damit folgt die Aussage aus

$$s(P_\epsilon, f) \leq \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f)$$

$$\text{und } s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \, dx \leq S(P_\epsilon, f)$$

■

Wir wollen im Folgenden wichtige Vertreter Riemann-integrierbarer Funktionen kennenlernen.

**Satz 3.5.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ .

*Beweis.* Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt sind, ist  $f$  offensichtlich beschränkt. Weiterhin ist  $f$  als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig stetig.

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass folgende Implikation gilt:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wir wählen eine Partition  $P_\epsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$ , so dass  $\Delta x_i < \delta$ . Dann gilt:

$$M_i - m_i < \epsilon \text{ und daher}$$

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \epsilon \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon \cdot (b - a)$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig, folgt die Aussage mit Satz 3.3. ■

**Satz 3.6.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, so ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

*Beweis.* Da  $f$  monoton ist, gilt für alle  $x \in [a, b]$ :  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ .

Das heißt  $f$  ist beschränkt. Zu  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir eine Partition  $P_n = \{x_0, \dots, x_k\}$  mit  $\Delta x_i < \frac{1}{n}$ . Dann gilt:

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i$$

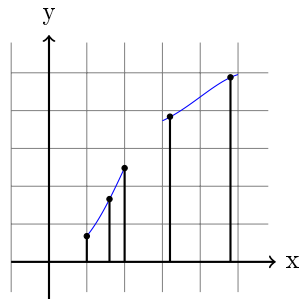


Abbildung 7: Monotone Funktion

Ohne Einschränkung sei  $f$  monoton wachsend (der andere Fall läuft analog).  
Dann gilt:

$$M_i = f(x_i) \text{ und} \\ m_i = f(x_{i-1})$$

und daher:

$$\begin{aligned} S(P_n, f) - s(P_n, f) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wähle  $n_\epsilon$  so dass gilt:

$$\frac{1}{n_\epsilon} (f(b) - f(a)) < \epsilon$$

Dann gilt mit  $P_\epsilon := P_{n_\epsilon}$  die Aussage nach Satz 3.3

■

**Satz 3.7.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen  
Dann gilt  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ .

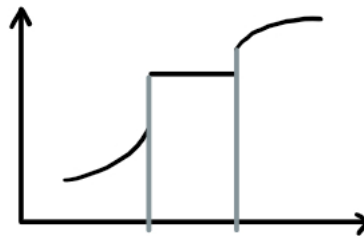


Abbildung 8: Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben und  $E = \{P_1, \dots, P_n\}$  die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$ . Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass  $\{a, b\} \cap E = \emptyset$  (der andere Fall läuft analog). Sei

$$M := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Wir wählen  $u_j, v_j \in [a, b]$ ,  $j = (1, \dots, n)$ , so dass

$$P_s \in [u_j, v_j] \text{ und} \\ 2M(u_j - v_j) < \frac{\epsilon}{2n}$$

Sei

$$I_1^\epsilon = [a, u_1], \\ I_l^\epsilon = [v_{l-1}, u_l] \quad (l = 2, \dots, n) \\ I_n^\epsilon = [v_n, b]$$

Per Voraussetzung ist  $f|_{I_j^\epsilon}$  ( $j = 1, \dots, n+1$ ) stetig. Daher existiert nach Satz 3.5 eine Partition  $P_j^\epsilon$ , so dass:

$$S(P_j^\epsilon, f|_{I_j^\epsilon}) - s(P_j^\epsilon, f|_{I_j^\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2(n+1)}$$

Wir setzen  $P^\epsilon = \cup_{l=1}^n P_l^\epsilon \cup U_{l=1}^n \{u_l, v_l\}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P^\epsilon, f) - s(P^\epsilon, f) &= \sum_{l=1}^{n+1} S(P_l^\epsilon, f|_{I_l^\epsilon}) - s(P_l^\epsilon, f|_{I_l^\epsilon}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \left( \sup_{x \in [u_l, v_l]} f(x) - \inf_{x \in [u_l, v_l]} f(x)(v_l - u_l) \right) \\ &\leq \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2(n+1)} + \sum_{l=1}^n 2M \cdot (v_l - u_l) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

■

**Definition 3.4.** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfunktion (Abbildung 9), wenn es eine Partition  $Z = \{y_0, \dots, y_m\}$  von  $[a, b]$  gibt und für alle  $i \in \{0, \dots, m\}$  für  $c_i \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$f(x) = c_i \quad (x \in (y_{i-1}, y_i))$$

Satz unvollständig / falsch

Nach Satz 3.7 ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar.

Zur Berechnung des Integrals bedienen wir uns der Notation von Satz 10 und verwenden Satz 3.4c.

Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass  $f$  in  $a$  und  $b$  stetig ist. Das heißt die Menge der Unstetigkeitsstellen ist gegeben durch  $E = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$ .

Für  $x \in I_l^\epsilon$  gilt dann  $f(x) = c_l$  für alle  $l = 1, \dots, m$ . Dann gilt nach Satz 3.4c:

falsche Referenz -> hardgecodet

$$\left| \int_a^b f \, dx - \sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_i^\epsilon| + \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i) \cdot (v_i - u_i) \right| < \epsilon$$

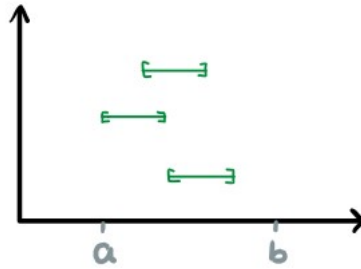


Abbildung 9: Treppenfunktion

Für  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$  gilt: 
$$\begin{cases} |I_1^1| \rightarrow y_1 - a \\ |I_l^2| \rightarrow y_l - y_{l-1} & (l = 2, \dots, m) \\ |I_{m+1}^\epsilon| \rightarrow b - y_m \end{cases}$$

Das heißt

$$\sum_{i=1}^{m+1} c_i |I_\epsilon^l| \rightarrow c_i (y_i - a) \sum_{i=2}^m c_i \cdot (y_i - y_{i-1}) + c_m (b - y_m) \quad (8)$$

Außerdem gilt  $v_i - u_j \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$  gilt  $\int_a^b f \, dx = \text{Gleichung 8}$

**Korollar 3.1.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, beziehungsweise monoton, beziehungsweise besitzt  $f$  höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen und ist beschränkt, so ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ .

**Bemerkung.** Mit Hilfe des Lebesgueschen Integrabilitätskriterium kann man sogar zeigen, dass beschränkte Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar sind.

**Beispiel 3.1.**

$$\int_0^a x \, dx$$

Da  $id : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, existiert das Integral.

Sei  $P_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$  eine Partition von  $[a, b]$ .

Es gilt:

$$\begin{aligned} S(P_n, x) &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(P_n, x) &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Da  $id$  integrierbar ist, gilt:

$$\int_0^a x \, dx \in [s(P_n, x), S(P_n, x)] = \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n} \right] \quad n \in \mathbb{N}$$

Das heißt:

$$\int_0^a x \, dx \cap_{n \in \mathbb{N}} \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n} \right]$$

Also:  $\int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2}$

**Beispiel 3.2.** Sei  $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  die *Dirichlet-Funktion*, d.h

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für jede Partition  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ , dass

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1 \text{ und} \\ m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$$

Damit gilt:

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1$$

Ergo:  $D$  ist nicht Riemann-integrierbar

**Satz 3.8.** Sei  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und  $m \leq f(x) \leq M$  ( $x \in [a,b]$ ). Sei ferner  $\Phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $\Phi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Da  $\Phi$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[m, M]$  stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$  (Ohne Einschränkung sei  $\delta < \epsilon$ ) mit :

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

Da  $f$  integrierbar ist, gibt es eine Partition  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  mit

$$S(P, f) - s(P, f) < \delta^2$$

Wie üblich bezeichnen wir

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ und} \\ m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ und weiterhin} \\ M_i^+ = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \Phi \circ f \text{ sowie} \\ m_i^* = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \Phi \circ f(x)$$

Seien

$$A = \{i = 1, \dots, n \mid M_i - m_i < \delta\} \\ B = \{i = 1, \dots, n\} \setminus A$$

Aufgrund der Wahl von  $\delta$  gilt für alle  $i \in A$  :  $M_i^+ - m_i^* < \epsilon$  Weiter gilt:

$$\delta \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i = \sum_{i \in B} \delta \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \delta^2$$

Ergo:  $\sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \delta$ .

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
S(P, \Phi \circ f) - s(P, \Phi \circ f) &= \sum_{i=1}^n (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i \\
&= \sum_{i \in A} (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i^+ - m_i) \Delta x_i \\
&\leq \epsilon \sum_{i \in A} \Delta x_i + 2 \sup_{x \in [m, M]} |\Phi \circ f| \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i \\
&\leq \epsilon \left( |b - a| + 2 \sup_{x \in [m, M]} |\Phi \circ f(x)| \right)
\end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig, folgt die Behauptung mit 3.3. ■

**Satz 3.9.** Seien  $f_1, f_2, f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  Dann gilt:

1.

$$\int_a^b f_1 + f_2 \, dx = \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 \, dx$$

und für  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_a^b cf \, dx = c \int_a^b f \, dx$$

2. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned}
f_1 + f_2 &\in \mathcal{R}_{[a, b]} \text{ und} \\
cf &\in \mathcal{R}_{[a, b]}
\end{aligned}$$

3. Gilt  $f_1(x) \leq f_2(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) so folgt

$$\int_a^b f_1 \, dx \leq \int_a^b f_2 \, dx$$

4. Ist  $c \in (a, b)$ , und  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  so gilt

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

5. Gilt  $M \geq f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) so gilt

$$M \cdot (b - a) \geq \int_a^b f \, dx$$

*Beweis.* 1. Da  $f_i \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  ( $i = 1, 2$ ) gibt es Partitionen  $P_i$  von  $[a, b]$  mit

$$S(P_i, f) - s(P_i, f) \leq \epsilon \text{ für ein festes } \epsilon > 0$$

Dann gilt für die gemeinsame Verfeinerung  $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, \dots, x_n\}$  nach Satz 3.1, dass

$$S(P, f_i) - s(P, f_i) \leq \epsilon \quad (i = 1, 2)$$

2. Es gilt

$$\sup_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + f_2(x) \leq \sup_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + \sup_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_2(x)$$

Analog gilt:

$$\inf_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + f_2(x) \geq \inf_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + \inf_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_2(x)$$

Damit folgt:

$$s(P, f_1) + s(P, f_2) \leq s(P, f_1 + f_2) \leq S(P, f_1 + f_2) \leq S(P, f_1) + S(P, f_2)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f_1 + f_2) - s(P, f_1 + f_2) &\leq S(P, f_1) - s(P, f_1) + S(P, f_2) - s(P, f_2) \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt war, gilt  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  nach Satz 3.3.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} s(P, f_1 + f_2), S(P, f_1 + f_2) &\in [s(P, f_1) - s(P, f_2), S(P, f_1) + S(P, f_2)] \\ &\subseteq \left[ \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 \, dx + 2\epsilon \right] \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt wurde, gilt:

$$\int_a^b f_1 + f_2 \, dx = \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 \, dx$$

Die Aussage bezüglich  $c \cdot f$  zeigt man analog.

3. Sei  $f_2(x) \geq f_1(x)$  ( $x \in [a, b]$ ). Dann gilt

$$\begin{aligned} f_2(x) - f_1(x) &\geq 0 \text{ und daher} \\ s(P, f_2 - f_1) &\geq 0 \end{aligned}$$

für jede Partition  $P$  von  $[a, b]$  Wegen 1 ist  $f_2 - f_1 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und es gilt:

$$\int_a^b f_2 \, dx = \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 - f_1 \, dx \geq \int_a^b f_1 \, dx$$

4. Für 3. betrachtet man zu beliebiger Partition  $P$  von  $[a, b]$  die Partition  $P' = \{c\} \cup P$

5. Folgt aus 2. mit  $f_1 = f$  und  $f_2 = M$  soweit

$$\int_a^b M \, dx = M \cdot (b - a)$$

■



**Bemerkung.**

- Eigenschaft 1 sagt, dass  $\mathcal{R}_{[a,b]}$  ein bezüglich der Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist
- Eigenschaft 1 sagt weiterhin, dass die Abbildung

$$\int_a^b dx : \mathcal{R}_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_a^b f \, dx$$

ein lineares Funktional ist

- Eigenschaft 2 sagt, dass dieses Funktional positiv ist (also nicht-negative Funktionen einen nicht negativen Wert zuordnet)
- Eigenschaft 4 impliziert eine gewisse Stetigkeit

**Satz 3.10.** Für  $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  gilt:

- $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
- $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und  $\int_a^b |f| \, dx \geq \left| \int_a^b f \, dx \right|$

*Beweis.* Sei  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2$ .

Dann ist  $\Phi$  stetig und damit  $\Phi \circ (f + g)$  bzw.  $\Phi \circ (f - g)$  aufgrund von Satz 3.9 und Satz 3.8 Riemann-integrierbar über  $[a, b]$ . Beachte:

$$fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

Nach Satz 3.8 gilt wieder  $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Sei nun  $c \in \{-1, 1\}$  so gewählt, dass

$$c \int_a^b f \, dx \geq 0$$

Offensichtlich gilt

$$|f(x)| = |cf(x)| \geq cf(x) \quad (x \in [a, b])$$

Damit gilt mit Satz 3.9

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| = c \int_a^b f \, dx = \int_a^b cf \, dx \stackrel{\text{Satz 3.9}}{\leq} \int_a^b |f| \, dx$$

■

**Satz 3.11** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g(x) \geq 0$  ( $x \in [a, b]$ ).

(Abbildung 10)

Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b fg \, dx = f(\xi) \int_a^b g \, dx$$

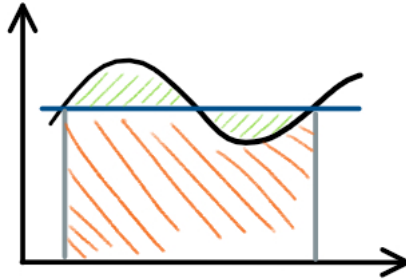


Abbildung 10: Mittelwertsatz der Integralrechnung

**Bemerkung:** Für  $g = 1$  gilt dann:

$$\int_a^b f \, dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

*Beweis.* Man setze:  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(y) \cdot \int_a^b g \, dx$ .  $h$  ist stetig und es gilt:

$$\begin{aligned} \inf_{y \in [a, b]} h(y) &= \inf_{y \in [a, b]} \int_a^b f(y)g(x) \, dx \\ &\leq \int_a^b \int_{y \in [a, b]} f(y)g(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{Satz 3.9}}{\leq} \int_a^b f(x)g(x) \, dx \stackrel{\text{Satz 3.9}}{\leq} \int_a^b \sup_{y \in [a, b]} f(y)g(x) \, dx = \sup_{y \in [a, b]} h(y) \end{aligned}$$

Das heißt wir haben eine stetige Funktion  $h$  mit:

$$\int_a^b fg \, dx \in \left[ \inf_{y \in [a, b]} h(y), \sup_{y \in [a, b]} h(y) \right]$$

■

**Bemerkung.** Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

## 4 Differentiation und Integration

**Bemerkung.** Bisher hatten wir stets  $\int_a^b f \, dx$  mit  $a \leq b$  betrachtet. Für  $a \geq b$  setze man

$$\int_a^b f \, dx := - \int_b^a f \, dx$$

**Satz 4.1.** Sei  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Für  $a \leq x \leq b$  setze man

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

Dann gilt

1.  $F$  ist stetig auf  $[a, b]$
2. Ist  $f$  stetig in  $x_0 \in [a, b]$ , so ist  $F$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt  $F'(x_0) = f(x_0)$

*Beweis.* 1. Da  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ , ist  $f$  insbesondere beschränkt. Das heißt es existiert ein  $M \in \mathbb{R}$  mit

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in [a, b])$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  gegeben. Setze  $\delta := \frac{\epsilon}{M}$ . Für  $x, y \in [a, b]$  mit  $|x - y| < \delta$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f \, dt - \int_a^y f \, dt \right| \\ &= \left| \int_a^x f \, dt + \int_y^x f \, dt - \int_a^y f \, dt \right| \\ &= \left| \int_y^x f \, dt \right| \leq \int_y^x |f| \, dt \\ &\leq M \cdot \int_y^x 1 \, dt = M(x - y) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt war, folgt die Aussage

Sei  $h \in \mathbb{R}$ , so dass  $x_0 + h \in [a, b]$ . Dann gibt es ein  $\xi_h$  zwischen  $x_0$  und  $x_0 + h$  mit:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{\int_a^{x_0+h} f(t) \, dt - \int_a^{x_0} f(t) \, dt}{h} \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(t) \, dt}{h} \\ &= f(\xi_h) \cdot \frac{\int_{x_0}^h 1 \, dt}{h} \\ &= f(\xi_h) \cdot \frac{h}{h} \quad \text{Damit gilt:} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x_0) \end{aligned}$$

■

**Satz 4.2.** Ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und es gilt  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $F' = f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a)$$

**Bemerkung.**

- Eine Funktion  $F$  mit  $F' = f$  nennt man eine Stammfunktion von  $f$
- Man schreibt gerne  $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Man wähle eine Partition  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  mit

$$S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$$

Weiter existiert aufgrund des Mittelwertsatzes der Differential-Rechnung (Satz 2.3)  $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$  mit

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Nach Satz 3.4 gilt

$$\begin{aligned} \epsilon &> \left| \int_a^b f \, dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \\ &= \left| \int_a^b f \, dx - \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \right| \\ &= \left| \int_a^b f \, dx - (F(b) - F(a)) \right| \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung.**

- Sei  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Dann bezeichnet man die Funktion

$$\begin{aligned} \int_a^\circ f \, dx : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_a^t f \, dx \end{aligned}$$

als unbestimmtes Integral von  $f$ .

- Satz 4.2 sagt also das jede Stammfunktion ein unbestimmtes Integral von  $f$  ist

**Proposition 4.1.** Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Eine Funktion  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann Stammfunktion von  $f$ , wenn  $F - G = \text{konst.}$

*Beweis.*  $\Leftarrow$

Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $F + c$

$$(F + c)' = F' = f$$

$\Rightarrow$

Das war eine Folgerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 2.3). ■

**Bemerkung.** Oftmals wird ignoriert, dass sobald es eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  gibt, es automatisch unendlich viele gibt. So schreibt man beispielsweise

$$\int f \, dx = F$$

oder spricht von „der“ Stammfunktion. Die obige Gleichung ist insofern problematisch, da die rechte Seite (und damit per Definition auch die linke Seite) nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Oftmals ist daher etwas laxer Umgang mit den Begriffen unkritisch.

**Satz 4.3** (Partielle Integration). Seien  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit

$$F' = f \text{ und } G' = g$$

wobei  $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Dann gilt:

$$\int_a^b F \cdot g \, dx = FG|_a^b - \int_a^b f \cdot G \, dx$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left( FG|_a^x - \int_a^x f \cdot G \, dt \right)' &= \left( F(x) \cdot G(x) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^x f G \, dt \right)' \\ &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - f(x)G(x) \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) \end{aligned}$$

Ergo: die rechte Seite ist eine Stammfunktion des Integranden der linken Seite. Damit folgt die Aussage aus Satz 4.2. ■

**Beispiel 4.1.**

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos^2(x) \, dx &= \int_a^b \cos(x) \cdot \cos(x) \, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x)|_a^b + \int_a^b \sin^2 \, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x)|_a^b + \int_a^b 1 - \cos^2(x) \, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x)|_a^b + \int_a^b 1 \, dx - \int_a^b \cos^2(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \sin(x) + x)|_a^b \\ \text{Ergo: } \int_a^b \cos^2(x) \, dx &= \frac{1}{2}(\cos(x)\sin(x)|_a^b + (b-a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln(x) \, dx \quad \text{wobei } 0 \notin [a, b] \\
\int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
= x \cdot \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b 1 \, dx \\
= x \cdot \ln(x) \Big|_a^b - x \Big|_a^b \\
= x \cdot \ln(x) \Big|_a^b - (b - a)
\end{aligned}$$

**Satz 4.4.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) \, dx$$

*Beweis.* Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt für  $t \in [c, d]$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F(\phi(t)) &= F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
&= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
\text{Ergo: } \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} &= \int F(\phi(d)) - F(\phi(c)) \\
&= \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt
\end{aligned}$$

■

**Bemerkung.**

- Die Substitutionsregel lässt sich wie folgt nachrechnen

$$\phi'(t) dt = \frac{d\phi}{dt} dt$$

Dann lässt sich die Substitutions-Regel

$$\int_c^d f(\phi) \, d\phi = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) \, dx$$

**Beispiel 4.2.**

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = r \int_{-r}^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \, dx$$

Wir wählen  $\phi(t) = r \cdot \sin(t)$  für  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Dann gilt mit der Substitutionsregel

(man beachte dass  $\phi(\frac{-\pi}{2}) = -r$  und  $\phi(\frac{\pi}{2}) = r$ ).

$$\begin{aligned} r \int_{-r}^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} dx &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\phi^2(t)}{r^2}} \cdot \phi'(t) dt \\ &= r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) r dt \\ &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \pi \end{aligned}$$

**Beispiel 4.3.**

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} \text{ wobei } -1, 1 \notin [a, b]$$

Vorgehen Partialbruchzerlegung: Man zerlegt den Nennen in seine Linearfaktoren und bestimmt Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-x}$$

Man beachte, dass  $(1-x)(1+x) = 1-x^2$

Wir multiplizieren die Gleichung mit  $(1+x)(1-x)$  und erhalten

$$1 = \alpha(1-x) + \beta(1+x) = \alpha + \beta(\beta - \alpha)x \quad (x \in [a, b])$$

Also:  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  Damit gilt:

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left( \int_a^b \frac{dx}{1-x} + \int_a^b \frac{dx}{1+x} \right)$$

Nun gilt für  $\phi(t) = 1-t$ :

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x} = \int_{1-a}^{1-b} \frac{-1 dt}{1\phi(t)} = - \int_{-a}^{1-b} \frac{dt}{t} = -\ln(t)|_a^b$$

Weiter gilt mit  $\phi(t) = t-1$

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x} = \int_{1+a}^{1+b} \frac{dt}{t} = \ln(t)|_{1+a}^{1+b}$$

Ergo

$$\frac{1}{2}(\ln(1+b) - \ln(1-b) - (\ln(1+a) - \ln(1-a))) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_a^b$$

## 5 Erweiterungen des Integralbegriffs

### 5.1 Uneigentliche Integrale

**Ziel:** Die Erweiterung des Integralbegriffs auf Integranden, die möglicherweise nicht beschränkt sind, beziehungsweise auf Integrationsintervalle, die nicht beschränkt sind.

1. Eine Intervallgrenze ist unendlich

**Definition 5.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[a, b] \subsetneq [a, \infty)$  Riemann-integrierbar.

Wir sagen  $f$  ist auf  $[a, \infty)$  uneigentlich integrierbar beziehungsweise  $\int_a^\infty f \, dx$  existiert, sofern der folgende Grenzwert existiert:

$$\int_a^\infty f \, dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f \, dx$$

Analog definiert man  $\int_{-\infty}^b f \, dx$

**Beispiel 5.1.**

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \text{ für } s > 1$$

Denn: für  $b > 1$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x^s} &= \int_a^b x^{-s} \, dx = \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_a^b \\ &= \frac{(b^{-s+1} - a^{-s+1})}{-s+1} \stackrel{a=1}{=} \frac{1}{s-1} (1 - b^{-s+1}) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Hingegen ist  $\frac{1}{x^s}$  nicht unendlich integrierbar, über  $[1, \infty)$  falls  $s \leq 1$ .  
Für  $s = 1$  folgt das wie folgt:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_1^b = \ln b \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \infty$$

2. Der Integrand ist an einer Intervallgrenze kritisch (also beispielsweise unbeschränkt)

**Definition 5.2.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $\epsilon \in (0, b-a)$  über  $[a+\epsilon, b]$  Riemann-integrierbar. Dann sagen wir, dass  $f$  über  $(a, b]$  uneigentlich integrierbar ist beziehungsweise dass  $\int_a^b f \, dx$  existiert, sofern folgender Limes existiert:

$$\int_a^b f \, dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f \, dx$$

Analog bestimmt man  $\int_a^b f \, dx$ , falls  $a$  kritisch ist.



**Beispiel 5.2.**

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} \text{ existiert für } s < 1$$

für  $\epsilon > 0$  gilt:

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^s} = \int_{\epsilon}^1 x^{-s} dx = \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_{\epsilon}^1 = \frac{1}{1-s} (1 - \epsilon^{1-s}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-s}$$

3. Beide Integrationsgrenzen sind kritisch

**Definition 5.3.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  für alle  $\alpha \in (a, b)$  und  $\beta \in (\alpha, b)$  Riemann-integrierbar über  $[\alpha, \beta]$ . Dann definiert man das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und sagt  $\int_a^b f dx$  existiert, sofern folgender Grenzwert existiert:

$$\int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^c f dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_c^{b-\delta} f dx \text{ wobei } c \in (a, b) \text{ sei}$$

**Bemerkung.**

- Die obige Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl der Zwischenstelle  $c$
- Ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  so stimmt das Riemann-Integral von  $f$  über  $[a, b]$  mit dem uneigentlichen Integral überein.

**Satz 5.1.** Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton fallende positive Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f dx \text{ existiert}$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$  Wir setzen  $g(x) = f(\lfloor x \rfloor)$

Dann gilt:

- $g(x) \geq f(x)$   $x \in [1, \infty]$
- $g \in \mathcal{R}_{[1,b]}$  für alle  $b > a$

$$\int_1^b f dx \leq \int_1^b g dx \leq \sum_{n=1}^{\lceil b \rceil} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

$\Leftarrow$  Sei  $h(x) = f(\lceil x \rceil)$  Dann gilt:

- $h \in \mathcal{R}_{[1,b]}$  für  $b > a$
- $h(x) \leq f(x)$  ( $x \in [1, \infty)$ )

Damit gilt:

$$\sum_{n=1}^{\lceil b \rceil} f(n) = f(1) + \int_1^{\lceil b \rceil} h(x) dx \leq f(1) + \int_1^{\lceil b \rceil} f dx < \infty$$

■

**Anwendung:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  konvergiert für jedes  $s > 1$

**Bemerkung** (Gauß-Klammer).

- für  $x \in \mathbb{R}$  bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  die größte ganze Zahl kleiner gleich  $x$  und  $\lceil x \rceil$  die kleinste ganze Zahl größer gleich  $x$
- Die *Gamma-Funktion*

$$\begin{aligned}\Gamma : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) \, dt \\ \Gamma(n) &= \int_0^1 (-\log x)^{n-1} \, dx\end{aligned}$$

Die  $\Gamma$ -Funktion ist wohldefiniert. Da

$$t^{x-1} \exp(-t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

existiert ein  $t_0 \in (0, \infty)$  mit:

$$t^{x-1} \exp(-t) < \frac{1}{t^2} \quad (t \geq t_0)$$

Damit gilt:

- $\int_{t_0}^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) \, dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2} < \infty$
- $\int_0^{t_0} t^{x-1} \exp(-t) \, dt \leq \int_0^{t_0} t^{x-1} \, dt < \infty$  (siehe Beispiel 5.2)

**Satz 5.2** (Funktionsgleichung der  $\Gamma$ -Funktion). Für  $x > 0$  gilt:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

**Bemerkung.**

- $\Gamma(1) = 1$  (einfach nachrechnen)
- $\Gamma(2) = 2 \cdot \Gamma(1) = 2$

und so weiter. Wir sehen:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0, R > \epsilon$  Dann gilt:

$$\int_{\epsilon}^R t^{x-1} \exp(-t) \, dt = -t^{x-1} \cdot \exp(-t) \Big|_{\epsilon}^R + \int_{\epsilon}^R (x+1)t^{x-2} \exp(-t) \, dt$$

Für  $x > 1$  gilt daher  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$

■

## 5.2 Integrale über komplexwertige Funktionen

**Definition 5.4.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann heißt  $f$  auf  $[a, b]$  Riemann-integrierbar, falls  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  (Realteil beziehungsweise Imaginärteil von  $f$ ) Riemann-integrierbar sind über  $[a, b]$ . In diesem Falle definieren wir:

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) \, dx$$

**Satz 5.3.** Seien  $f, f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Riemann-integrierbar über  $[a, b]$ , dann gilt:

- a) Für  $c \in \mathbb{C}$  ist  $c \cdot f$  Riemann-integrierbar über  $[a, b]$  sowie  $f_1 + f_2$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1 + f_2 \, dx &= \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 \, dx \\ \int_a^b c \cdot f \, dx &= c \cdot \int_a^b f \, dx \end{aligned}$$

- b) Ist  $c \in (a, b)$ , so ist  $f$  über  $[a, c]$  und über  $[c, b]$  integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

- c)  $f_1 \cdot f_2$  ist integrierbar über  $[a, b]$   
d)  $\overline{f}$  ist integrierbar über  $[a, b]$   
e)  $|f|$  ist integrierbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx$$

*Beweis.* a)-d) folgen sofort aus den Eigenschaften des Integrals über reellwertige Funktion

- e)  $|f| = \sqrt{f \cdot \overline{f}}$  ist integrierbar, auf Grund von c), d) und Satz 3.9  
f) Wähle  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , so dass:

$$\exp(i\varphi) \cdot \int_a^b f \, dx \in \mathbb{R} \text{ Dann gilt:}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \, dx \right| &= \left| \exp(i\varphi) \cdot \int_a^b f \, dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \exp(i\varphi) \cdot f \, dx \right| = \left| \int_a^b \operatorname{Re}(\exp(i\varphi)f) \, dx \right| \\ &\leq \int_a^b |\operatorname{Re}(\exp(i\varphi)f)| \, dx \leq \int_a^b |\exp(i\varphi)f| \, dx \\ &= \int_a^b |f| \, dx \end{aligned}$$

■

**Bemerkung.**  $|\exp(i\varphi)| > 0$