Theorem 12

Seien X, Y metr. Raum, X kompakt, $f: X \to Y$ stetig.

Beweis:

... $\exists\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_n, y_n$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Dann existiert TF $(x_{n_i}), (y_{n_i})$ von $(x_n), (y_n)$ mit:

- $\lim\limits_{i \to \infty} x_{n_i} =: x$

  $\lim\limits_{i \to \infty} y_{n_i} =: y$

- $$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, y) \leq \underbrace{d(x, x_{n_i})}_{\xrightarrow{i\to\infty} 0} + \underbrace{d(x_{n_i}, y_{n_i})}_{< \frac{1}{n_i}} + \underbrace{d(y_{n_i}, y)}_{\xrightarrow{i\to\infty} 0} \longrightarrow 0$$

  $\Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

- Da f stetig ist, existiert $f(x) := \lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i})$

  $f(y) := \lim\limits_{i\to\infty} f(y_{n_i})$

Es gilt: $(f(x_{n_i}), f(y_{n_i})) \xrightarrow{i\to\infty} (f(x), f(y))$

Da $d: X \times X \to [0, \infty)$ stetig ist, gilt

$$d(f(x), f(y)) = \lim_{i\to\infty} d(f(x_{n_i}), f(y_{n_i})) \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$ ↯ zur Tatsache, dass $x = y$

Theorem 13

Sei K ein kompakter metrischer Raum, X metrischer Raum und $f: K \to X$ stetig. Dann ist $f(K) = \{f(k) \mid k \in K\}$ kompakt.

Beweis: Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$.

z.z.: Es existiert eine konvergente TF (y_{n_i}) mit GW in $f(K)$. Sei k_n so, dass $f(k_n) = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Da (k_n) Folge in kompaktem metrischen Raum K ist, existiert eine konvergente TF (k_{n_i}) mit GW $k \in K$.

Dann gilt: $y_{n_i} := f(k_{n_i}) \xrightarrow{i \to \infty} f(k)$,

da f stetig ist. Da $f(k) \in f(K)$ liegt, folgt die Behauptung.

Korollar 14

Sei K ein kompakter metrischer Raum und $f: K \to \mathbb{R}$. Dann ist f beschränkt und nimmt in K sein Maximum sowie Minimum an.

Beweis: Nach Satz 12, ist $f(K)$ kompakt und daher beschränkt und abgeschlossen. Aufgrund der Beschränktheit existieren ein Supremum M und Infimum m der Funktionswerte von f. Wir zeigen:

M wird angenommen (der Fall m läuft analog). Da M Supremum von $f(K)$ ist, existiert eine Folge (y_n) mit $y_n \to M$. Da $f(K)$ abgeschlossen ist, muss $M \in f(K)$ gelten. Damit existiert also ein $k \in K$ mit $f(k) = M$.

§ Der Banach'sche Fixpunktsatz

Definition 1

Seien X, Y metr. R. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt Lipschitzstetig, wenn ein $L > 0$ existiert mit:

$$\forall x_1, x_2 \in X: d(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$$

In diesem Falle nennen wir L eine <u>Lipschitzkonstante</u> von f. Wir sagen eine Abbildung $f: X \to Y$ ist eine <u>Kontraktion</u>, wenn es für f eine Lipschitzkonstante L gibt mit $L < 1$.

Der nächste Satz ist der zentrale Fixpunktsatz der Analysis und damit einer der wichtigsten Sätze der Analysis schlechthin.

<u>Theorem 2:</u> (Banach'scher Fixpunktsatz)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Kontraktion. Dann gilt:

i) es existiert ein eindeutiger Fixpunkt $p \in X$ von f, dann heißt ein Punkt p mit: $f(p) = p$

(ii) Für beliebige $x \in X$ konvergiert die Folge $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}}$ gegen p

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zunächst:

Ist $p \in X$ ein Fixpunkt, so ist p der einzige Fixpunkt von f.

<u>Denn:</u> Angenommen es ist ein weiterer Fixpunkt $p' \neq p$. Dann gilt $0 < d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq L \cdot d(p, p') < d(p, p')$ ↯

D.h., p ist der einzige Fixpunkt sein muss.

Nun zur Existenz eines Fixpunkts. Sei $x \in X$ beliebig und $x_n = f^n(x)$ $(n \in \mathbb{N}_{\geq 0})$. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_{m+1}) &= d(f^m(x_0), f^m(x_1)) \\
&\leq L \cdot d(f^{m-1}(x_0), f^{m-1}(x_1)) \\
&\leq L^2 \cdot d(f^{m-2}(x_0), f^{m-2}(x_1)) \\
&\leq L^m \cdot d(x_0, x_1), \text{ wobei } 0 < L < 1 \text{ eine}
\end{aligned}
$$

Lipschitzkonstante von f sei. Sei nun $n, m \in \mathbb{N}$ und

O.E. $n \geq m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq \dots \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-m-1} d(x_{m+i+1}, x_{m+i}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-m-1} L^{m+i} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= L^m \cdot d(x_0, x_1) \cdot \sum_{i=0}^{n-m-1} L^i \\ &\leq L^m \, d(x_0, x_1) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} L^i \\ &= L^m \, d(x_0, x_1) \cdot \frac{1}{1-L} \\ &\xrightarrow{m \to \infty} 0 \end{aligned}$$

Ergo: (x_n) ist CF. Da (X, d) vollständig ist, konvergiert x_n gegen $x \in X$. Wir zeigen jetzt: $f(x) = x$.

Damit folgt dann die Behauptung.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lim_{n \to \infty} x_n) \\ &\overset{*}{=} \lim_{n \to \infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} f(f^n(x_0)) \\ &= \lim_{n \to \infty} f^{n+1}(x_0) \\ &= \lim_{n \to \infty} f^n(x_0) \\ &= x \end{aligned}$$

* f ist stetig, da Lipschitz-stetig