Beweisen können: - Mittelwertsatz (verallgemeinerter MWS)
- Satz von Taylor

Sätze zu kennen: - Regel von l'Hospital
- Hauptsatz der Diff & Int. Rechnung
- glm. Limes stetiger Funktion ist stetig
- Integrations- & Diff-Regeln
- Satz von Heine-Borel
- Banachscher Fixpunktsatz

→ ZL

Der Begriff der offenen Menge bzw. der Umgebung eines Punkts erlaubt die folgende alternierende Charakterisierung von konvergenten Folgen.

Lemma 4

Sei (X,d) metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X.

Dann sind äquivalent:

i) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \in B_\varepsilon(x)$

iii) Für jede Umgebung U von x existiert ein $n_U \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $x_n \in U$ $(n \geq n_U)$

iv) Für jede offene Menge $V \subseteq X$ mit $x \in V$ existiert ein $n_V \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $x_n \in V$ $(n \geq n_V)$

Beweis: Die Äquivalenz von i) & ii) ist genau Lemma B des vorigen Kapitels.

ii) → iv) Da V offen ist existiert per Definition ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq V$. Dann gilt für alle $n \geq n_\varepsilon$: $x_n \in B_\varepsilon(x) \subseteq V$.

iv) → iii) Per Definition (von Umgebungen) gibt es eine offene Menge $V \subseteq U$ mit $x \in V$. Dann gilt für alle $n \geq n_V$: $x_n \in V \subseteq U$

iii) → ii) ~~Dann~~ Das folgt aus der Tatsache, dass $B_\varepsilon(x)$ Umgebung von x ist

Proposition 5

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt:

(T1) $\emptyset$, X sind offen

(T2) Sind $V_1, \dots, V_n$ offen, so ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ offen

(T3) Sei I eine beliebige Indexmenge und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie* offener Menge

Dann ist $\bigcup_{i \in I} V_i$ offen.

Beweis: (T1) & (T3) sind einfach.

(T2): Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Dann gilt also $x \in V_i$ $(i = 1, \dots, n)$.
Da die V_i offen sind, existiert jeweils ein $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq V_i$. Sei $\varepsilon = \min_{i=1,\dots,n} \varepsilon_i$. Dann gilt: $B_\varepsilon(x) \subseteq V_i$ $(i = 1, \dots, n)$.
Ergo: $B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Da x beliebig gewählt war, ist $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ offen.

* alternativ:

(T3) Sei $M \subseteq P(X)$ (= Potenzmenge von X, d.h. die Menge aller TM von X) so, dass für alle $U \in M$ gilt: ist offen.
Dann gilt: $\bigcup_{U \in M} U$ ist offen

Korollar 6

Sei (X, d) metrischer Raum und I eine beliebige Indexmenge und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossene Menge. Dann ist $\bigcap_{i\in I} B_i$ abgeschlossen.

Beweis: Es ist zu zeigen: $\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^{c} = X \setminus \bigcap_{i\in I} B_i$ ist offen. (komplement)

Mit den de Morgan'schen Regeln folgt:

$\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} B_i^c$ ist offen, ~~weil~~ da B_i^c offen ist und wegen Proposition 5 (T3).

Bemerkung: – Ist X eine Menge und $M \subseteq X$, so heißt $M^c := X \setminus M$ das Komplement von M (in X).

Korollar 7

Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen, sowie $U \subseteq X$ offen. Dann ist $U \setminus A$ offen und $A \setminus U$ abgeschlossen.

Beweis: $U \setminus A = U \cap A^c$ ist offen, da A^c offen ist und wegen (T2). $A \setminus U = A \cap U^c$ ist abgeschlossen, da U^c abgeschlossen ist und Korollar 6 gilt.

Definition 8:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt $\operatorname{int} M := \mathring{M}$ $:= M^\circ := \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \text{ ist offen}}}$ das Innere von M,

$\operatorname{cl} M := \overline{M} := \bigcap_{\substack{A \supseteq M \\ A \text{ ist abgeschlossen}}} A$ der Abschluß von M,

$\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M}$ der Rand von M

§ 9 - Grenzwerte & Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Wir wollen ganz analog zum Fall reell- bzw. komplexwertiger Funktionen, Begriffe wie den Grenzwert und Stetigkeit untersuchen.

Definition 1

Seien X, Y metrischer Raum und $f: D \subseteq X \to Y$ sowie $p \in X$ ein Häufungspunkt von D. Wir sagen f hat an der Stelle p den Grenzwert (GW) $q \in Y$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (B_\delta(p) \cap D) \setminus \{p\}: d(f(x), q) < \varepsilon$$

In diesem Falle schreiben wir wie üblich

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \quad \text{bzw.} \quad f(x) \xrightarrow{x \to p} q$$

Bemerkung: - Achtung! Hier stehen (implizit!) zwei unter Umständen komplett verschiedene Metriken (eine auf X, eine auf Y)

- p muss nicht in D liegen. Selbst wenn $p \in D$, ist $f(p)$ für die Existenz eines Grenzwerts komplett unerheblich

- wie im reellen folgt (direkt aus der Δ-Ungleichung) die Eigenschaft des GW

Satz 2

Seien X, Y metr. Räume, $f: D \subseteq X \to Y$ eine Abbildung und $p \in X$ ein Häufungspunkt von D. Dann sind äquivalent:

i) $\lim_{x \to p} f(x) = q$

ii) für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \neq p$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = p$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = q$

Beweis: Ganz analog zum reell- bzw. komplexwertigen Fall.

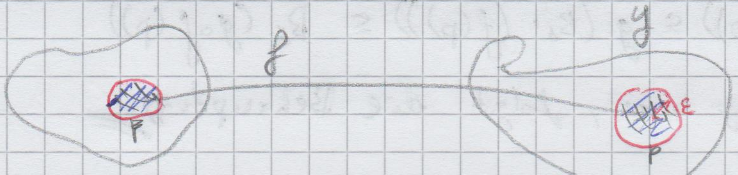
Definition 3

Seien X, Y metr. Räume und $f: X \to Y$. Dann heißt f stetig an der Stelle $p \in X$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in B_\delta(p): d(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

vergleiche: $(d(x,p) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(p)) < \varepsilon)$

Ist f stetig in jedem $p \in X$, so heißt f stetig.



Bemerkungen: - hier muss p selbstverständlich im Definitions-Bereich von f liegen

- in isolierten Punkten ist f stets stetig
- Erinnerung: Für $A \subseteq X$ sei $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

  Damit schreibt sich die Definition von Stetigkeit in $p \in X$ wie folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: f(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(f(p))$$

- Stetig heißt "Punkte nahe p werden in Punkte nahe $f(p)$ abgebildet"

Satz 4

Seien X, Y metrischer Raum und $f: X \to Y$ sowie $p \in X$ ein HP von X. Dann sind äquivalent:

i) f ist stetig in p

ii) $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

Beweis: Ganz analog zum Beweis der entsprechenden reell- bzw. komplexwertige Aussage.

Proposition 5

Seien X, Y, Z metrische Räume und $f: X \to Y$ stetig in $p \in X$ sowie $g: Y \to Z$ stetig in $f(p) \in Y$. Dann ist $g \circ f: X \to Z$ stetig in p.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da g stetig in $f(p)$ ist, gibt es $\delta' > 0$, so dass $g(B_\delta(p)) \subseteq B_{\delta'}(f(p))$. Dann gilt:

$$g \circ f\,(B_\delta(p)) \subseteq g\,(B_{\delta'}(f(p))) \subseteq B_\varepsilon(g \circ f\,(p))$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Proposition 6

Sei X ein metrischer Raum und $f, g: X \to \mathbb{K}$ stetig in $p \in X$. Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0$ $(x \in X)$ – $\frac{f}{g}$ stetig in p.

Beweis: Wir betrachten den Fall der Addition, die anderen Fälle laufen ganz analog. O.E. sei p HP von X. Dann gilt:

$$\lim_{x \to p} f(x) + g(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) + g(x_n)$$
$$= \lim_{n \to \infty} f(x_n) + \lim_{n \to \infty} g(x_n) \underset{\text{Stetigkeit in } p}{=} f(p) + g(p) = (f+g)(p),$$

wobei (x_n) eine beliebige Folge in X mit $x_n \neq p$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\lim_{n \to \infty} x_n = p$ sei. Wir haben also gezeigt:

$\lim_{x \to p} (f+g)(x) = (f+g)(p)$. Mit Satz 4 folgt die Behauptung.

Einschub:

Wir haben in den Übungen bereits Metriken auf dar Produkt metrischer Räume $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ kennengelernt, d.h.:

Metrik auf den Raum: $Y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Eine natürliche Metrik auf Y ist gegeben durch

$$d_+(y, y') = d_+((x_1, \dots, x_n), (x_1', \dots, x_n')) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, x_i')$$

Eine weitere natürliche Metrik auf Y ist gegeben durch

$$d_{max}(y, y') = d_{max}((x_1, \dots, x_n), (x_1', \dots, x_n'))$$
$$= \max_{i=1,\dots,n} d_i(x_i, x_i')$$

Es zeigt sich, dass d_+ und d_{max} äquivalent sind, denn:

$$d_m(y, y') \le d_+(y, y') \le n \cdot d_{max}(y, y')$$

Fazit: Bei der Betrachtung des Produktes $(x_1, \dots, x_n)$ ist es unerheblich für welche der beiden Metriken wir uns entscheiden.

Proposition 7:

Seien $X_1, \dots, X_n, Y$ metrische Räume und $f: Y \to X_1 \times \dots \times X_n$ mit $y \mapsto (f_1(y), \dots, f_n(y))$, wobei $f_i: Y \to X_i$ sei $(i = 1, \dots, n)$.
Dann ist f genau dann stetig in p in Y, wenn f stetig in p ist $(i = 1, \dots, n)$.

Beweis: "f stetig $\to$ f_i stetig":

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$d_{max}(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

sobald $x \in U_\delta(p)$. Damit gilt:

$$d(f_i(x), f_i(p)) \le d_{max}(f(x), f(p))$$
$$< \varepsilon$$

für alle $x \in B_\delta(p)$. Also ist f_i stetig.

"f_i ist stetig in $p \Rightarrow f$ ist stetig":

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert für $i = 1, \dots, n$ ein $\delta_i > 0$

mit: $d(f_i(x), f_i(p)) < \varepsilon$ sobald $d(x,p) < \delta_i$. Dann gilt

für alle x mit $d(x,p) < \delta$, wobei $\delta := \min_{i=1,\dots,n} \delta_i$:

$$d_{max}(f(x), f(p)) = \max_{i=1,\dots,n} d(f_i(x), f_i(p)) \leq \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Proposition 8 (Stetigkeit von Norm und Metrik)

Sei (X, d) metrischer Raum. Dann ist $d: X \times X \to \mathbb{R}$ stetig.

Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ stetig.

Beweis: Seien $(x_1, x_2) \in X \times X$ sowie $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wir zeigen: d ist stetig in (x_1, x_2).

Dann gilt:

$$\begin{aligned}|d(x_1,x_2) - d(x_1', x_2')| &= |d(x_1,x_2) - d(x_1, x_2') + d(x_1, x_2') - d(x_1', x_2')| \\ &\leq |d(x_1,x_2) - d(x_1,x_2')| + |d(x_1,x_2') - d(x_1', x_2')| \\ &\leq d(x_2, x_2') + d(x_1, x_1') \\ &= d_+((x_1,x_2), (x_1', x_2'))\end{aligned}$$

ungekehrte Δ-Ungleichung

Ergo: ist $d_+((x_1,x_2),(x_1',x_2')) < \delta$ (für $\delta = \varepsilon$),

dann ist $|d(\dots) - d(\dots)| < \varepsilon$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Für den zweiten Teil folgt die Behauptung aus:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

D.h. $\|B_\delta(x)\| \in B_\delta(\|x\|)$

Ein weiteres wichtiges Beispiel stetiger Funktionen:

Wir definieren die Koordinatenfunktion

$$\phi_i : \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}$$
$$(x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_i$$

für $i = 1, \ldots, d$. Offensichtlich gilt:

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq \|x-y\|_\infty$$

womit ϕ_i stetig ist. Durch wiederholte Anwendung von Proposition 6 enthalten wir dann, dass jedes Monom, d.h. jede Abbildung der Form

$$\mathbb{K}^d \ni x \mapsto x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{n_d} \text{ mit}$$

$n_1, \ldots, n_d \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, stetig ist.

Dasselbe gilt für Vielfaches und Summe von Monomen.

Ergo: Polynomen

d.h. Abb. $P: \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}$

$$(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \sum c_{n_1, \ldots, n_d} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{n_d}$$

wobei die Koeffizienten $c_{n_1, \ldots, n_d} \in \mathbb{K}$ und die Summe endlich ist, sind stetig. Analog sind rationale Funktionen, d.h. Abb.:

$$F: \mathbb{K}^d \setminus Q^{-1}(0) \to \mathbb{K}$$
$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

wobei P, Q Polynome sind, stetig.