1 Differentiation

Definition 1 Sei $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D(f)$ ein Punkt, um den ein offenes Intervall $B_\epsilon(x)$ (für geeignetes $\epsilon > 0$) komplett in $D(f)$ enthalten ist ($B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$). Dann heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
Wir meinen mit $f'(x_0)$ die **Ableitung** (seltener *Differentialquotient*) von f an der Stelle x_0.
Ist $f : D(f) \to \mathbb{R}$ in jedem $x \in D(f)$ differenzierbar, dann heißt f schlechthin **differenzierbar**. Etwas irreführend wird auch die Abbildung

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von f bezeichnet.

Satz 1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$, so dass*

   $$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$$

2. *Es gibt ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ und $u : I \to \mathbb{R}$, so dass*

   $$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$$

3. *f ist in x_0 differenzierbar*

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

D.h. insbesondere c und $\tilde{c}$ sind eindeutig bestimmt

Bemerkung 1

- Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ wählen und setzt

  $$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- Vergisst man die Funktion ϕ, versteht man mit der Geradengleichung

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an f in x_0

Beweis:

$1 \leftrightarrow 2$ Man setzte einfach $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$ und $\tilde{c} = c$
(in $x = x_0$ setze man $u(x_0) = 0$)

$1 \rightarrow 2$ ZZ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c \end{aligned}$$

$3 \rightarrow 1$ Wir setzten $c = f'(x_0)$ und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \left| \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right| &= \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Satz 2 *Es sind äquivalent:* $f : I \to \mathbb{R}$

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$
   mit: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi(x)}{|x-x_0|} = 0$

2. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$
   mit: $\lim\limits_{n\to\infty} u(x) = 0$

3. *Der Grenzwert* $f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existiert*

Satz 3 *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in I$*. Dann ist* f *in* x_0 *stetig.*
Beweis:

ZZ ist: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Äquivalent dazu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$

Nun gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{x-x_0} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

Bemerkung 2

- Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!
  Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind.
  (*Beispiel:* Weierhaus-Fkt: $\sum_{n\in\mathbb{N}} cos(b_n \pi x)$ mit $a_n \in (0, 1)$ und $a_n b_n > 1$)
- Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar

Satz 4 *Seien* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *in* $x \in I$ *differenzierbar,* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall. Dann sind* $f + g$*,* $f \cdot g$ *und* $\frac{f}{g}$ *(sofern* $g(x) \neq 0$*) in* x *differenzierbar.*
Es gilt:

1. $(f + g)' = f'(x) + g'(x)$ *(Summenregel)*
2. $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ *(Produktregel)*
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ *(Quotientenregel)*

Beweis:

1. $$(f+g)'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)+g(y)-(f(x)+g(x))}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$$
   $$= \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = f'(x) + g'(x)$$

2. $$\lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y)-f(x)g(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(x)g(x)}{y-x}$$
   $$= \lim_{y\to x} f(y)\frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x)\frac{f(x)-f(x)}{y-x}$$
   $$= \lim_{y\to x} f(y) \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x) \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
   $$\overset{Satz\ 3}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

3. $\lim\limits_{y\to x}\frac{\frac{f(y)}{g(y)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{y-x}=\lim\limits_{y\to x}\frac{\frac{f(y)}{g(y)}\frac{g(x)}{g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(y)}{g(y)}}{y-x}=\lim\limits_{y\to x}\frac{1}{g(y)g(x)}\frac{f(y)g(x)-f(x)g(y)}{y-x}$

$=\frac{1}{g^2(x)}\lim\limits_{y\to x}\frac{f(y)g(x)-f(y)g(y)+f(y)g(y)-f(x)g(y)}{y-x}$

$=\frac{1}{g^2(x)}\lim\limits_{y\to x}f(y)\cdot\frac{g(x)-g(y)}{y-x}+g(y)\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$=\frac{1}{g^2(x)}\cdot\left(\lim\limits_{y\to x}f(y)\frac{g(x)-g(y)}{y-x}+\lim\limits_{y\to x}g(y)\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)$

$=\frac{1}{g^2(x)}(f(x)\cdot(-g(x))+g(x)f'(x))=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Beispiel 1

- $f(x)=c\in\mathbb{R}(x\in\mathbb{R})$
  $\to f'(x)=\lim\limits_{x\to y}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\lim\limits_{x\to y}\frac{c-c}{y-x}=0$
- $f(x)=x(x\in\mathbb{R})$
  $f'(x)=\lim\limits_{x\to y}\frac{y-x}{y-x}=1$
- $f(x)=x^n,(x\in\mathbb{R})$ wobei $n\in\mathbb{N}$
  $f'(x)=nx^{n-1}$ per Induktion:
  $n=1$ Stichpunkt 2 ✓
  $n\to n+1$: Sei also $f(x)=x^{n+1}$. Das gibt mit der Produktregel:
  $f'(x)=(x\cdot x^n)'=(x)'\cdot(x^n)'=1\cdot xn+x\cdot n\cdot x^{n-1}=x^n+nx^n=(n+1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für $p(x)=\sum_{l=0}^n a_lx^l$ gilt (Summenregel):

$$p'(x)=\sum_{l=0}^n l\cdot a_l\cdot x^{l-1}=\sum_{l=1}^n l\cdot a_lx^{l-1}$$

- Seien P_1 und P_2 Polynome.
  Dann nennt man die Abbildung
  $Q:\mathbb{R}\setminus\{x|P_2(x)=0\}\to\mathbb{R}$
  $x\mapsto\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ eine rationale Funktion.
  Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.
- Die Funktion $|\circ|\cdot x\mapsto|x|=\begin{cases}x & \textit{für } x\geq 0\\ -x & \textit{sonst}\end{cases}$ ist nicht in 0 differenzierbar.
  Denn:
  $$\lim_{y\searrow 0}\frac{|y|-|0|}{y-0}=\lim_{y\searrow 0}\frac{y-0}{y-0}=1$$
  $$\lim_{y\nearrow 0}\frac{|y|-|0|}{y-0}=\lim_{y\nearrow 0}\frac{-y-0}{y-0}=-1$$

Satz 5 (Kettenregel) *Seien I_f und I_g Intervalle, $x_0\in I_f$ und $f:I_f\to\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $g:I_g\to\mathbb{R}$ sei in $f(x_0)$ differenzierbar und $f(I_f)\subseteq I_g$. Dann gilt:*

$$\frac{dg\circ f}{dx}(x_0)=\frac{dg}{dx}(f(x_0))\cdot\frac{df}{dx}(x_0)$$

Beweis: *Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt für alle $x\in I_f$:*

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\cdot(f'(x_0)+u(x))$$

(Wobei $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$)
Analog gilt für alle $y \in I_g$*:*

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei $\lim\limits_{y \to f(x_0)} v(y) = 0$
Damit haben wir für alle $x \in I_f$*:*

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) =& (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x)) \\ =& (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x)) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x)) + v(f(x)) \\ &= \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x \to x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0) g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

Definition 6 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f **stetig differenzierbar**. Wir definieren weiterhin induktiv die k-te Ableitung (für $k \in \mathbb{N}$) durch:

$$\begin{aligned} f^{(0)} :=& f \\ f^{(k+1)} :=& f^{(k+1)'} \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.
Ist $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert, so heißt f **beliebig oft** bzw. **unendlich oft differenzierbar**.

Bemerkung 3 Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

Satz 7 *Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k, a_k \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe vom Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $p : x \mapsto p(x)$ auf ganz $(x_0 - R, x_0 + R)$ differenzierbar mit $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$.*
Insbesondere ist p' auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius R.

Bemerkung 4

1. Damit erhalten wir:

$$exp'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}\right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = exp(x)$$

2. Damit sind Potenzreihen ∞ oft differenzierbar

Beweis Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k\right)(x-x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left(\limsup \sqrt[k+1]{(k+1) a_{k+1}}\right)^{-1} = R \left(da \sqrt[k]{k} \to 1\right)$$

Damit ist p' wohldefiniert.
Wir zeigen nun, dass p' tatsächlich die Ableitung von p darstellt. OBdA sei $x_0 = 0$.
Dann gilt für $y \in (-R, R)$:

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x-y) = \sum_{k=\sigma}^{\infty} a_k \left(x^k - y^k\right) - (k+1) a_{k+1} y^k (x-y)$$

Wir setzen $\Delta(x,y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x-y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$.
Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1}\right]$$

Für $n = 1$ ist $[...] = 0$ und für $n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
[...] &= \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1) y^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} k x^{n-1-k} y^k . (n-1) y^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\
&= (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^{k-1}
\end{aligned}
$$

Sein nun $|y| < r < R$ und $|x| \leq r$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|\Delta(x,y)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1} \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k \leq |a_n| r^{n-2} n^2 |x-y|
\end{aligned}
$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$ den Konvergenzradius R, weshalb $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$ konvergiert. Damit folgt aber $\lim_{x \to y} \Delta(x,y) = 0$

Proposition 1 *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in $p \in (a,b)$ mit $f'(p) \neq 0$ Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $q = f(p)$ und es gilt:*

$$
\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}
$$

Beweis *Da f streng monoton ist, ist f^{-1} stetig.*
Insbesondere gilt $f^{-1}(y) \to f^{-1}(q)$ für $y \to q$.
Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{y \to q} \frac{1}{y-q} \left(f^{-1}(y) - f^{-1}(q)\right) &= \lim_{y \to q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \\
&= \left(\lim_{y \to q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)} \right)^{-1} \\
&= \left(f'(f^{-1}(q))\right)^{-1} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(q)\right)}
\end{aligned}
$$

Beispiel 2

- k-te Wurtel $g : (0,\infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$ ist differenzierbar mit $g'(y) = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$
  Denn g ist Umkerhfunktion zu $f(x) = x^k$
  Damit gilt:
$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$$
- Logarithmus $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$. Es ist $\ln'(y) = \frac{1}{y}$, **denn:**
$$\ln'(y) = \frac{1}{exp'(\ln y)} = \frac{1}{exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Bemerkung 5 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist $x^\alpha := exp(\alpha \ln(x))$
Anwendung: Die Funktion $(\circ)^\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$ hat die Ableitung $((\circ)^\alpha)' : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ **denn**

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' =& exp'(\alpha \ln(x)) = exp(\alpha \ln x)\frac{\alpha}{x} \\ =& \alpha exp(\alpha \ln x) exp(-\ln x) = \alpha exp((\alpha-1)\ln x)) \\ =& \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ und $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

Definition 7 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Wir sagen, f hat in $x_0 \in I$ ein **lokales Maximum (lokales Minimum)**, falls ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \le f(x_0)(f(x) \ge f(x_0))$$

Gilt
$$f(x) \le f(x_0)(f(x) \ge f(x_0))$$
für alle $x \in I$, so sagen wir, dass x_0 ein **globales Maximum (globales Minimum)** ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von **strikten Maxima (strikte Minima)**. Maximum und Minimum werden unter dem Begriff **Extremum** zusammengefasst.

Satz 8 *Seif $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Hat f ein lokales Maximum (lokales Minimum) in $x_0 \in (a,b)$ und existiert $f'(x_0)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.*
Beweis *Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:*

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$

und
$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

Wegen differenzierbarkeit in x_0 folgt Gleichung $1 =$ Gleichung $2 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Satz 9 (verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf ganz (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit:*

$$(g(b) - g(a))\, f'(\xi) = (f(b) - f(a))\, g'(\xi)$$

Beweis: *Wir betrachten $h : [a,b] \to \mathbb{R}$*

$$t \mapsto (g(b) - g(a))\, f(t) - (f(b) - f(a))\, g(t)$$

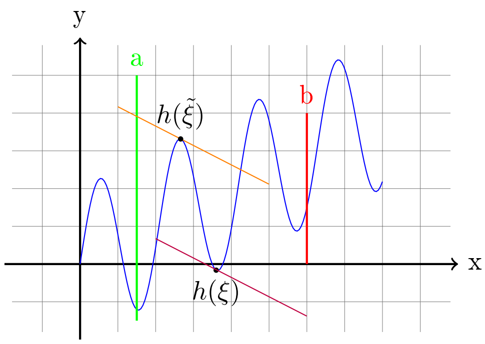
Offensichtlich (nach Summenregel) ist h differenzierbar auf (a,b). Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a))\, f'(t) - (f(b) - f(a))\, g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit folgt dann die Aussage.
Beachte:

$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a))\, f(a) - (f(b) - f(a))\, g(a) \\ &= g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ &= (g(b) - g(a))\, f(b) - (f(b) - f(a))\, g(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

Fall 1: *$h = const$ Dann gilt trivialerweise $h' = 0$ und wir sind fertig.*
Fall 2: *$h \neq const$ Offensichtlich ist h stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Damit besitzt h ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein $\tilde{\xi} \in (a,b)$ mit $h(\tilde{\xi}) > h(a)$, sonst betrachte $-h$ statt h.*
Also existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $h(\xi) \geq h(x)$ $(x \in [a,b])$. Mit anderen Worten: ξ ist auch ein globales Maximum und und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 8 folgt: $h'(\xi) = 0$



Satz 10 (Mittelwertsatz(MWS)) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt ex ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

Bemerkung: *Es ist oft wichtig, dass f nur auf (a,b) differenzierbar sein muss.*
Beweis: *Das folgt aus Satz 9 mit $g = id_{[a,b]}$, d.h. $g(x) = x$ $(x \in [a,b])$.*

Satz 11 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:*

a) $f = const \Leftrightarrow f'(x) = 0 (x \in (a, b))$

b) f *ist monoton wachsend* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (x \in (a, b))$

c) f *ist streng monoton wachsend* $\Leftrightarrow f'(x) > 0 (x \in (a, b))$

d) f *ist monoton fallend* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 (x \in (a, b))$

e) f *ist streng monoton fallend* $\Leftrightarrow f'(x) < 0 (x \in (a, b))$

Beweis: *a) folgt aus b) und c).*
Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).
Sei $y > x \in [a, b]$. Sei $f|_{[x,y]}$ die Einschränkung von f auf $[x, y]$, das heißt:

$$f|_{[x,y]} : [x, y] \to \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt $f|_{[x,y]}$ die Bedingungen des MWS.
Es existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi)$
Fall b) $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0$
$\quad \Rightarrow f(y) \geq f(x)$
Fall c) $f(y) - f(x) > 0$
$\quad \Rightarrow f(y) > f(x)$
Beweis der Richtung $\Leftarrow$ in Teil b): *Ist $f'(x) \geq 0$ so gilt*

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da f monoton wachsend ist, gilt für $y > x$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für $\lim\limits_{y \nearrow x}$

Korollar 1 *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $f'(x) = g'(x)$ für $x \in (a, b)$. Dann gilt $f - g = const$*
Beweis: *Es gilt:*

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 11.

Satz 12 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall). Gibt es $\xi \in I$ mit $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$ ($f''(\xi) > 0$), so nimmt f an der Stelle ξ ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.*

Beweis: *Wir betrachten nur den Fall $f''(\xi) < 0$. Für den Fall $f''(\xi) > 0$ betrachte man $-f$.*
Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$r := \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$
D.h. es existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für $\epsilon := \frac{r}{2}$ gilt daher:

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right|$$

für ein entsprechend gewähltes $\delta > 0$. Insbesondere gilt also:

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.
D.h. für $x < \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für $x > \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo: f' ist streng monoton fallend auf $(\xi - \delta, \xi]$ und streng monoton wachsend auf $[\xi, \xi + \delta)$
Da $f'(\xi) = 0$ folgt, dass $f'(x) > 0$ für $x \in (\xi - \delta, \xi]$ und $f'(x) < 0$ für $x \in [\xi, \xi + \delta)$.
Mit Satz 11 folgt:
$f|_{(\xi-\delta,\xi]}$ *ist streng monoton wachsend und*
$f|_{[\xi,\xi+\delta)}$ *ist streng monoton fallend.*

Satz 13 (Regel von l'Hospital) *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit*

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter gelte:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei $-\infty \leq A \leq \infty$ sei und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$,
sowie $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ bzw. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
Dann gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Die analoge Aussage gilt auch für $x \to b$.
Bemerkung:

- *Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h.* $\pm\infty$ *sind als Grenzwerte zulässig.*
- *Zwei wesentliche Voraussetzungen:*
  1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert!*
  2. *ebenso ist essentiell, dass* $f, g \to \frac{\circ}{\pm\infty}$
- *Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{exp(x)} = 0$$

- *Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form* $0 \cdot \infty$ *zu behandeln, indem wir diese in die Form*

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}}$$

  bzw.

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

  umrechnen.

Beweis: *Wir beschränken uns auf den Fall* $x \to a$ ($x \to b$ *läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:*
Behauptung: *Sei* $A \in [-\infty, \infty)$.
Dann existiert für jedes $q > A$ *ein* $c > a$ *mit* $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ $(x \in (a, c))$.
Beweis der Behauptung:
Da $\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x\searrow a}{\to} A$ *existiert ein* $c' > a$ *mit:* $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ *für ein beliebiges* $r \in (A, q)$ *und* $x \in (a, c')$.
Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{1}$$

für ein geeignetes t *zwischen* x *und* y.
Für $a < x < y < c'$ *gilt daher:*

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \tag{2}$$

Fall 1: $f, g \overset{x\to a}{\to} 0$. *Nach Gleichung (2) gilt für* $x \to a$

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q(y \in (a, c'))$$

Fall 2: $g(x) \overset{x\to a}{\to} \pm\infty$ *Multipliziere (1) mit* $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$.
Dann erhalten wir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)$$
$$\to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Für $x \to a$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein $c > a$ existieren mit: $\frac{f(x)}{g(x)} < r \ (x \in (a,c))$
Analog kann man zeigen:
Behauptung' : *Sei $A \in (-\infty, \infty]$. Dann existiert für jedes $p < A$ ein $d > a$, so dass $p < \frac{f(x)}{g(x)} \ (x \in (a,d))$*
Für $A = +\infty$ folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für $A = -\infty$ aus der ersten Behauptung.
Für $A \in \mathbb{R}$ argumentieren wir wie folgt:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert $c > a$, so dass $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon \ (x \in (a,c))$. Nach der zweiten Behauptung existiert $d > a$ mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \ (x \in (a,d))$$

Für $x \in (a, \min\{c,d\})$ gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

Beispiel 3 $f(x) = 1, g(x) = x + 7$
Dann gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$
aber: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

Beispiel 4

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \textit{ für } \alpha > 0$$

Definition 8 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in a *(rechtsseitig) differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass f in b *(linksseitig) differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existiert. Wir sagen, f ist auf $[a,b]$ *differenzierbar*, wenn f in (a,b) differenzierbar und in a rechtsseitig sowie in b linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe $n - Mal$ (stetig) differenzierbar etc...

Definition 9 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ $n - Mal$ differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha} :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto & \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!}(x-\alpha)^l \end{aligned}$$

das $n - te$ Taylorpolynom, wobei $\alpha \in I$ sei, von f an der Stelle α.
Bemerkung: Offensichtlich gilt: $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$. Weiter gilt:

$$f'(\alpha) = P'_{n,\alpha}(\alpha) = \left(\sum_{l=0}^{n} l \cdot \frac{f^l(\alpha)}{l!} \left(x-\alpha\right)^{l-1} \right)$$

und analog:

ich vermute, die Summe sollte bei 0 beginnen

$$f^{(l)}(\alpha) = P^{(l)}_{n,\alpha} = P^{(l)}_{n,\alpha}(\alpha)$$
$$(l = 1, ..., n)$$

Satz 14 (Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied)) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und f $(n-1)-mal$ stetig differenzierbar (auf $[a,b]$) und $n-mal$ differenzierbar auf (a,b). Seien $\alpha \neq \beta$ in $[a,b]$ gegeben. Dann existiert ein x zwischen α und β, so dass gilt:*

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

Beweis: *Wähle $M \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta-\alpha)^n$$

Man beachte, dass die $n-te$ Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch

$$P^{(n)}_{n-1,\alpha}(t) + n! \cdot M(\text{ für } t \in [a,b])$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein x zwischen α und β mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}
h(t) =& f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t-\alpha)^n \text{ für } t \in [a,b] \\
h(\beta) =& f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta-\alpha)^n = 0 \\
h(\alpha) =& f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) \cdot M(\alpha-\alpha)^n = 0 \text{ siehe obige Bemerekung} \\
h'(\alpha) =& f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - n \cdot M(\alpha-\alpha)^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ für } l = 1, ..., n-1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein x_1 zwischen α und β mit $h'(x_1) = 0$. Analog gibt es zwischen α und x_1 ein x_2 mit $h''(x_2) = 0$. Man findet also $x_1, ..., x_{n-1}$ mit $h^{(l)}(x_l) = 0$ $(l = 1, ..., n-1)$. Insbesondere existiert ein x zwischen α und x_{n-1} (also zwischen α und β) mit $h^{(n)}(x) = 0$. Damit gilt

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}(x) - M \cdot n! \cdot (x-\alpha)^0$$

und daher $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$
Bemerkung: *Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte Lagrange'sche Darstellung*

Beispiel 5 Sei $f(x) = \sqrt{1+x}$. Offensichtlich:

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} \\
f''(x) =& -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}t^2$$

für ein x zwischen 0 und t.
Für $t > 0$ ergibt sich damit:

$$\left|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)\right| < \frac{t^2}{8}$$

Korollar 2 *Ist $g : I \to \mathbb{R}$ $n-Mal$ differenzierbar und $g^{(n)} = 0$, so ist g ein Polynom höchstens $(n-1)-ten$ Gerades*

Korollar 3 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$mal stetig differenzierbar und $\alpha \in I$ mit $f^{(l)}(\alpha) = 0$ für alle $l = 1, ..., n-1$ und $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$.*
Dann gilt:

- *ist n ungerade, so ist α keine Extremstelle*
- *ist n gerade, so ist α eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist $f^{(n)}(\alpha) < 0$, so ist α eine Maximalstelle. Ist $f^{(n)}(\alpha) > 0$, so ist α Minimalstelle.*
  Beweis: *Wir betrachten nur den Fall n gerade und $f^{(n)}(\alpha) > 0$.*
  Nach dem Satz von Taylor gilt für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) =& P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\left(f^{(n)}(\alpha) + (\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)}(x-\alpha)\right) \end{aligned}$$

für ein t zwischen x und α. Für x hinreichend nah an α erhalten wir

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1}(x-\alpha)$$

Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

Da ist also $f(x) > f(\alpha)$ für x hinreichend nah an α.
Sprich: α ist strikte lokale Minimalstelle

Definition 10 Ist $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylorreihe am Entwicklungspunkt $\alpha \in I$.

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Bemerkung:

- im Allgemeinen konvergiert $T_{f,\alpha}(x)$ für $x \neq \alpha$ nicht
- Der Satz von Taylor behandelt <u>nicht</u> die Taylorreihe
- Selbst wenn $T_{f,\alpha}(x)$ konvergiert, muss $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$ nicht gelten
- Sei $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$ Dann gilt :

$$P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \to 0$$

Satz 15 *Sei $f(x) = \sum_{n_0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$ und $R > 0$ der zugehörige Konvergenzradius von f.*
Dann ist f auf $(\alpha - R, \alpha + R)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

das heißt, die Taylorreihe $T_{f,\alpha}$ stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.
Beweis: *Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x-\alpha)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$f^{(l)} = l! \cdot a_l + \sum_{n=l-1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-l)a_n(x-\alpha)^{n-l}$$

für $l \in \mathbb{N}$
$(x-\alpha) = 0$ für $x = \alpha$
Also: $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$

3 Riemann-Integral

<u>**Ziel**</u>: Wir wollen auf „natürliche“Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt, die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der $x-$Achse zu bestimmen (Abbildung 1).

eigentlich wäre " emphßogar besser als Anführungsstriche

Dabei heißt auf „natürliche Weise“ insbesondere:

- gilt $f(x) = c = const$ für alle $x \in D(f) = [a,b]$, so soll gelten (Abbildung 2)

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$$

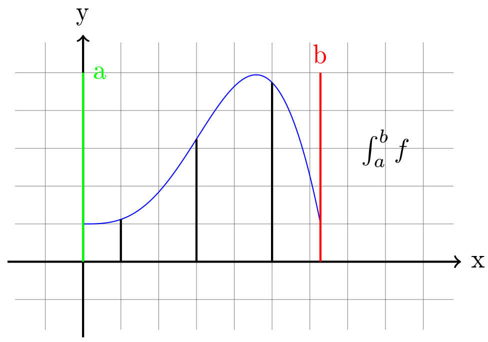


Abbildung 1: Vorgehen

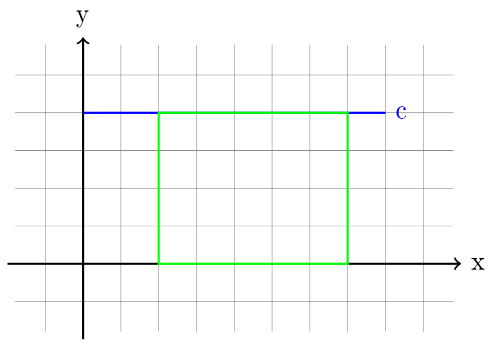


Abbildung 2: Konstante Funktion

- gilt $f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a, b])$ so fordern wir

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

- für $c \in [a, b]$ soll gelten (Abbildung 3)

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^c f \, \mathrm{d}x + \int_c^b f \, \mathrm{d}x$$

Vorgehen: Man unterteile $[a, b]$ in „viele“ Teilintervalle, auf denen f nahezu konstant ist.

Definition 11 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Partition P (Abbildung 4) von $[a, b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$.
Wir schreiben $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

das geht besser auch mit Stichwortverzeichnis. Baue ich später ein.

Definition 12 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$.
Wir schreiben:

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i(p) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

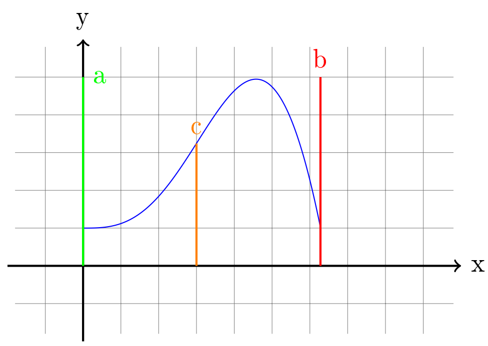


Abbildung 3: Integral aufteilen

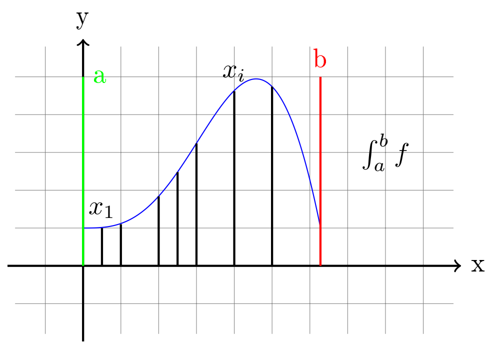


Abbildung 4: Partition

Weiter definieren wir:

$$S(P,f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

$$s(P,f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

Wir setzen:

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \inf S(P,f)$$

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \sup s(P,f)$$

wobei Infimum und Supremum über alle Partitionen von $[a,b]$ genommen werden. Wir nennen

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \;\text{ das } \underline{\text{obere}} \text{ und}$$

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \;\text{ das } \underline{\text{untere}}$$

Riemannintegral von f über $[a,b]$
Gilt

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

sagen wir f ist Riemann-integrierbar (integrierbar) und nennen

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

das Riemannintegral von f über $[a,b]$.
Die Menge der Riemanintegrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}$ beziehungsweise $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

Bemerkungen

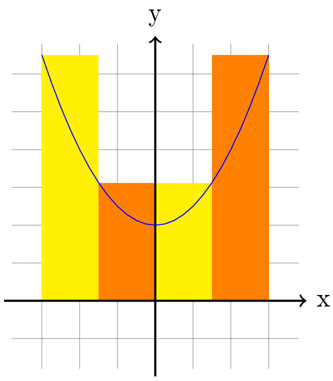


Abbildung 5: oberes Riemann-Integral

- Da f beschränkt ist, gibt es $m \leq M$ in $\mathbb{R}$ mit:

  $$m \leq f(x) \leq M \;\; (x \in [a,b])$$

  Damit gilt für jede jede Partition P:

  $$m \cdot (b-a) \leq s(P,f) \leq S(P,f) \leq M \cdot (b-a)$$

  Ergo: $\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$, $\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$ sind wohldefiniert.

- im gesamten Kapitel 3 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen

Definition 13 Seien P_1, P_2 zwei Partitionen eines Intervalls. Dann heißt P_1 Verfeinerung von P_2, wenn gilt: $P_2 \subseteq P_1$
Weiterhin nennen wir $P_1 \cup P_2$ die gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2

Satz 16 *Ist P' eine Verfeinerung der Partition P von $[a,b]$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} S(P,f) &\geq S(P',f) \\ s(P,f) &\leq s(P',f) \end{aligned}$$

(wobei f wie in Definition 12 sei)
Beweis: *Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass P' sich von P in nur einem Element x' unterscheidet. Das heißt: $P' = P \cup \{x'\}$*
Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x' \in [x_{i-1}, x_i]$
(wobei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ sei).
Wir definieren:

$$
\begin{aligned}
W_1 :=& \sup_{[x_{i-1}, x']} f(x) \\
W_2 :=& sup_{[x', x_i]} f(x)
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
S(P, f) - S(P', f) =& M_i \Delta x_i - W_1 \cdot (x' - x_{i-1}) - W_2 \cdot (x_i - x') \\
=& (M_i - W_1) \cdot (x' - x_{i-1}) + (M_i - W_2) \cdot (x_i - x') \geq 0
\end{aligned}
$$

Enthält von P' k Punkte, die nicht in P enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt k-mal durch.

Satz 17 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Beweis: *Seien P_1, P_2 zwei Partitionierungen von $[a, b]$ und P' die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:*

$$s(P_1, f) \leq s(P', f) \leq S(P', f) \leq S(P_2, f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$$

für alle Partitionierungen P_1, P_2.
Sprich: $S(P_2, f)$ ist stets obere Schranke von $s(P, f)$ für alle Partitionen P von $[a, b]$. Ergo:

$$\sup s(P, f) \leq S(P_2, f)$$

Damit ist also $\sup s(P, f)$ untere Schranke von $S(P, f)$ (P beliebige Partition).
Ergo: $\sup s(P, f) \leq \inf S(P, f)$
Wir haben also gezeigt:

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \sup s(P, f) \leq \inf S(P, f) = \inf \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Satz 18 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Partition P_ϵ existiert mit:*

$$S(P_2, f) - s(P_2, f) < \epsilon$$

Beweis: *Per Definition gilt*

$$s(P_\epsilon, f) \leq \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \overset{Satz\ 17}{\leq} \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon, f)$$

Damit erhalten wir:

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Das heißt, da ϵ beliebig, dass

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x$$

Ergo: $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Per Definition gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein P'_ϵ mit

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x - s(P'_\epsilon, f) < \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

Analog existiert ein P''_ϵ mit

$$S(P''_\epsilon, f) - \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x) < \frac{\epsilon}{2} \tag{4}$$

Wir setzten P_ϵ gleich der gemeinsamen Vereinigung von P'_ϵ und P''_ϵ. Man beachte: Wegen Satz 16 gelten Gleichung 3 und Gleichung 4, wenn wir P'_ϵ beziehungsweise P''_ϵ durch P_ϵ ersetzen. Da $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt außerdem

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x$$

Addition von Gleichung 3 und Gleichung 4 liefert:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Satz 19 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P_\epsilon = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$ mit $S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$.*

1. *Ist P eine Verfeinerung von P_ϵ, so gilt $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$*
2. *Sind s_i, t_i beliebige Punkte in $[x_{i-1}, x_i]$, so gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i < \epsilon$$

3. *Ist* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *und* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *so gilt*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| < \epsilon$$

Beweis:

1. *Das folgt aus Satz 16*

2.
$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

3. *Da* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *gilt* $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$
Damit folgt die Aussage aus
$$s(P_\epsilon, f) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f)$$
und $s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon, f)$

Wir wollen im Folgenden wichtige Vertreter Riemann-integrierbarer Funktionen kennenlernen.

Satz 20 *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig, so ist* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Beweis: *Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt sind, ist* f *offensichtlich beschränkt. Weiterhin ist* f *als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ *gleichmäßig stetig.*
Sei $\epsilon > 0$ *gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von* f *existiert ein* $\delta > 0$, *so dass folgende Implikation gilt:*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

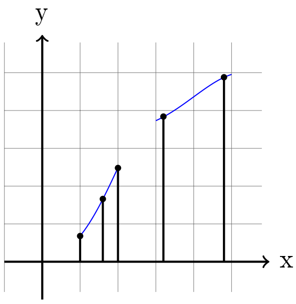
Wir wählen eine Partition $P_\epsilon = \{x_0, \ldots, x_n\}$, *so dass* $\Delta x_i < \delta$. *Dann gilt:*

$$M_i - m_i < \epsilon \text{ und daher}$$
$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \epsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon \cdot (b - a)$$

Da $\epsilon > 0$ *beliebig, folgt die Aussage mit Satz 18.*

Satz 21 *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monoton, so ist* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Beweis: *Da* f *monoton ist, gilt für alle* $x \in [a, b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
Das heißt f *ist beschränkt. Zu* $n \in \mathbb{N}$ *wählen wir eine Partition* $P_n = \{x_0, \ldots, x_k\}$ *mit* $\Delta x_i < \frac{1}{n}$. *Dann gilt:*

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$



Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend (der andere Fall läuft analog). Dann gilt

$$\begin{aligned} M_i =& f(x_i) \text{ und} \\ m_i =& f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} S(P_n, f) - s(P_n, f) =& \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ \leq& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle n_ϵ so dass gilt:

$$\frac{1}{n_\epsilon}(f(b) - f(a)) < \epsilon$$

Dann gilt mit $P_\epsilon := P_{n_\epsilon}$ die Aussage nach Satz 18

Satz 22 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Dann gilt $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*
Beweis: *Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $E = \{P_1, \dots, P_n\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\{a, b\} \cap E = \emptyset$ (der andere Fall läuft analog). Sei*

$$M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Wir wählen $u_j, v_j \in [a, b]$, $j = (1, \dots, n)$, so dass

$$\begin{aligned} P_s \in [u_j, v_j] & \text{ und} \\ 2M(u_j - v_j) < & \frac{\epsilon}{2n} \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} I_1^\epsilon =& [a, u_1], \\ I_l^\epsilon =& [v_{l-1}, u_l] \ (l = 2, \dots, n) \\ I_n^\epsilon =& [v_n, b] \end{aligned}$$

Per Vorraussetzung ist $f_{|I_j^\epsilon}(j = 1, \ldots, n+1)$ stetig.
Daher existiert nach Satz 20 eine Partition P_j^ϵ, so dass

$$S(P_j^\epsilon, f_{I_j\epsilon}) - s(P_j^\epsilon, f_{I_j^\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2(n+1)}$$

Wir setzen $P^\epsilon = \cup_{l=1}^n P_l^\epsilon \cup U_{l=1}^n \{u_l, v_l\}$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P^\epsilon, f) - s(P^\epsilon, f) &= \sum_{l=1}^{n+1} S(P_l^\epsilon, f_{|I_l^\epsilon}) - s(P_l^\epsilon, f_{|I_l^\epsilon}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n} \left(\sup_{x \in [u_l, v_l]} f(x) - \inf_{x \in [u_l, v_l]} f(x)(v_l - u_l) \right) \\ &\leq \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2(n+1)} + \sum_{l=1}^{n} 2M \cdot (v_l - u_l) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Definition 14 Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Partition $Z = \{y_0, \ldots, y_m\}$ von $[a, b]$ und für alle $i \in \{0, \ldots, m\}$ für $c_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = c_i \ (x \in (y_{i-1}, y_i))$$

Nach Satz 22 ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar.
Zur Berechnung des Intervalls bedienen wir uns der Notation von Satz 10 und verwenden Satz 19c.
Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass f in a und b stetig ist. Das heißt die Menge der Unstetigkeitsstellen ist gegeben durch $E = \{y_1, \ldots, y_{m-1}\}$.
Für $x \in I_l^\epsilon$ gilt dann $f(x) = c_l$ für alle $l = 1, \ldots, m$. Dann gilt nach Satz 19c:

$$\left| \int_a^b f \, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_l^\epsilon| + \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i) \cdot (v_i - u_i) \right| < \epsilon$$

Für $\lim\limits_{\epsilon \to 0}$ gilt: $\begin{cases} |I_1^1| \to y_{1-a} \\ |I_l^2| \to y_2 - y_{l-1} \quad (l = 2, ..., m) \\ |I_{m+1}^\epsilon| \to b - y_m \end{cases}$

Das heißt

$$\sum_{i=1}^{m+1} c_i |I_\epsilon^l \to c_i(y_i - a) \sum_{i=2}^{m} c_i \cdot (y_i - y_{i-1}) + c_m(b - y_m) \tag{5}$$

Außerdem gilt $v_i - u_j \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0$ gilt $\int_a^b f \, \mathrm{d}x =$ *Gleichung* 5

Korollar 4 *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, beziehungsweise monoton, beziehungsweise besitzt f höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen und ist beschränkt, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*

Bemerkung 6 Mit Hilfe des Lebesguesches Integrabilitätskriterium kann man sogar zeigen, dass beschränkte Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar sind.

Beispiel 6

$$\int_0^a x \,\mathrm{d}x$$

Da $id : [0,a] \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert das Integral.
Sei $P_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$ eine Partition von $[a,b]$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} S(P_n, x) =& \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ =& \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\ =& \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ =& \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(P_n, x) =& \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ =& \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ =& \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Da id integrierbar ist, gilt:

$$\int_0^a x \,\mathrm{d}x \in [s(P_n, x), S(P_n, x)] = \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n}\right] n \in \mathbb{N}$$

Das heißt:

$$\int_0^a x \,\mathrm{d}x \cap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n}\right]$$

Also: $\int_0^a x \,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$

Beispiel 7 Sei $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ die *Dirichlet-Funktion*, d.h

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für jede Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, dass

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) = 1 \text{ und}$$
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) = 0$$

Damit gilt:

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

Ergo: D ist nicht Riemann-integrierbar

Satz 23 *Sei* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *und* $m \leq f(x) \leq M$ $(x \in [a, b])$. *Sei ferner* $\Phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* $\Phi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Beweis: *Sei* $\epsilon > 0$ *gegeben. Da* Φ *auf dem abgeschlossenen Intervall* $[m, M]$ *stetig ist, existiert ein* $\delta > 0$ *(Ohne Eisnchränkung sei* $\delta < \epsilon$*) mit :*

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

Da f *integrierbar ist, gibt es eine Partition* $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ *mit*

$$S(P, f) - s(P, f) < \delta^2$$

Wie üblich bezeichnen wir

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) \text{ und}$$
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) \text{ und weiterhin}$$
$$M_i^+ = \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} \Phi \circ f \text{ sowie}$$
$$m_i^* = \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} \Phi \circ f(x)$$

Seien

$$A = \{i = 1, \dots, n | M_i - m < \delta\}$$
$$B = \{i = 1, \dots, n\} \setminus A$$

Aufgrund der Wahl von δ *gilt für alle* $i \in A : M_I^+ - m_i^* < \epsilon$ *Weiter gilt:*

$$\delta \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i = \sum_{i \in B} \delta \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \delta^2$$

Ergo: $\sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \delta$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned} S(P, \Phi \circ f) - s(P, \Phi \circ f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i \\ &= \sum_{i \in A} (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i^+ - m_i) \Delta x_i \\ &\leq \epsilon \sum_{i \in A} \Delta x_i + 2 \sup_{x \in [m, M]} |\Phi \circ f| \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i \\ &\leq \epsilon \left(|b - a| + 2 \sup_{x \in [m, M]} |\Phi \circ f(x)| \right) \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung mit 18.

Satz 24 *Seien $f_1, f_2, f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ Dann gilt:*

1. $$\int_a^b f_1 + f_2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

   und für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$\int_a^b cf \,\mathrm{d}x = c \int_a^b f \,\mathrm{d}x$$

   Insbesondere gilt also

   $$\begin{aligned} f_1 + f_2 \in \mathcal{R}_{[a,b]} & \mathit{und} \\ cf \in \mathcal{R}_{[a,b]} & \end{aligned}$$

2. *Gilt $f_1(x) \leq f_2(x)$ $(x \in [a,b])$ so folgt*

   $$\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

3. *Ist $c \in (a,b)$, und $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ so gilt*

   $$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x$$

4. *Gilt $M \geq f(x)$ $(x \in [a,b])$ so gilt*

   $$M \cdot (b-a) \geq \int_a^b f \,\mathrm{d}x$$

Beweis:

1. *Da $f_i \in \mathcal{R}_{[a,b]} (i = 1,2)$ gibt es Partitionen P_i von $[a,b]$ mit*

   $$S(P_i, f) - s(P_i, f) \leq \epsilon \textit{ für ein festes } \epsilon > 0$$

   Dann gilt für die gemeinsame Verfeinerung $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, \dots x_n\}$ nach Satz 16 , dass

   $$S(P, f_i) - s(P, f_i) \leq \epsilon \ (i = 1,2)$$

2. *Es gilt*

   $$\sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_1(x) + f_2(x) \leq \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_1(x) + \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_2(x)$$

   Analog gilt:

   $$\inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_1(x) + f_2(x) \geq \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_1(x) + \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_2(x)$$

Damit folgt:

$$s(P,f_1)+s(P,f_2) \leq s(P,f_1+f_2) \leq S(P,f_1+f_2) \leq S(P,f_1)+S(P,f_2)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}&S(P,f_1+f_2)-s(P,f_1+f_2)\\ &\qquad\leq S(P,f_1)-s(P,f_1)+S(P,f_2)-s(P,f_2) \leq 2\epsilon\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f_1+f_2 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ nach Satz 18.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned}s(P,f_1+f_2), S(P,f_1+f_2) \in&[s(P,f_1)-s(P,f_2), S(P,f_1)+S(P,f_2)]\\ \subseteq&\left[\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x + 2\epsilon\right]\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, gilt:

$$\int_a^b f_1 + f_2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

Die Aussage bezüglich $c \cdot f$ zeigt man analog.

3. *Sei $f_2(x) \geq f_1(x)$ $(x \in [a,b])$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}f_2(x)-f_1(x) \geq& 0 \text{ und daher}\\ s(P,f_2-f_1) \geq& 0\end{aligned}$$

für jede Partition P von $[a,b]$ Wegen 1 ist $f_2 - f_1 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und es gilt:

$$\int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 - f_1 \,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x$$

4. *Für 3. betrachtet man zu beliebiger Partition P von $[a,b]$ die Partition $P' = \{c\} \cup P$*

5. *Folgt aus 2. mit $f_1 = f$ und $f_2 = M$ soweit*

$$\int_a^b M \,\mathrm{d}x = M \cdot (b-a)$$

Bemerkung 7

- Eigenschaft 1 sagt, dass $\mathcal{R}_{[a,b]}$ ein bezüglich der Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist
- Eigenschaft 1 sagt weiterhin, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x : \mathcal{R}_{[a,b]} \to& \mathbb{R}\\ f \mapsto& \int_a^b f \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

  ein lineares Funktionsglied ist

- Eigenschaft 2 sagt, dass dieses Funktional positiv ist (also nicht-negative Funktionen einen nicht negativen Wert zuordnet)
- Eigenschaft 4 impliziert eine gewisse stetigkeit

Satz 25 *Für $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt:*

- $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
- $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *und* $\int_a^b |f| \,\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right|$

Beweis: *Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^2$.*
Dann ist Φ stetig und damit $\Phi \circ (f+g)$ bzw $\Phi \circ (f-g)$ aufgrund von Satz 24 und Satz 23 Riemann-integrierbar über $[a, b]$. Beachte:

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

Nach Satz 23 gilt wieder $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Sei nun $c \in \{-1, 1\}$ so gewählt, dass

$$c \int_a^b f \,\mathrm{d}x \geq 0$$

Offensichtlich gilt

$$absf(x) = |cf(x)| \geq cf(x) \ (x \in [a, b])$$

Damit gilt mit Satz 24

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right| = c \int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b cf \,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 24}{\leq} \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x$$

Satz 26 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 0$ $(x \in [a, b])$.*
Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g \,\mathrm{d}x$$

Bemerkung: *Für $g = 1$ gilt dann:*

$$int_a^b f \,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Beweis: *Man setze: $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y) \cdot \int_a^b g \,\mathrm{d}x$. h ist stetig und es gilt:*

$$\begin{aligned}
\inf_{y \in [a,b]} h(y) &= \inf_{y \in [a,b]} \int_a^b f(y) g(x) \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b \int_{y \in [a,b]} f(y) g(x) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{Satz\ 24}{\leq} \int_a^b f(x) g(x) \,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 24}{\leq} \int_a^b \sup_{y \in [a,b]} f(y) g(x) \,\mathrm{d}x = \sup_{y \in [a,b]} h(y)
\end{aligned}$$

D.h wir haben eine stetige Funktion h mit

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x \in [\inf_{y \in [a,b]} h(y), \sup_{y \in [a,b]} h(y)]$$

4 Differentiation und Integration

Bemerkung 8 Bisher hatten wir stets $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$ mit $a \leq b$ betrachtet. Für $a \geq b$ setze man

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x := -\int_b^a f \, \mathrm{d}x$$

Satz 27 *Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Für $a \leq x \leq b$ setze man*

$$F(x) = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$$

Dann gilt

1. *F ist stetig auf $[a, b]$*
2. *Ist f stetig in $x_0 \in [a, b]$, so ist F in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f'(x_0)$*

Beweis:

1. *Da $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, ist f insbesondere beschränkt. Das heißt es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit*

   $$|f(x)| \leq M \ (x \in [a, b])$$

   Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta := \frac{\epsilon}{M}$. Für $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ erhalten wir:

   $$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| =& \left| \int_a^x f \, \mathrm{d}t - \int_a^y f \, \mathrm{d}t \right| \\ =& \left| \int_a^x f \, \mathrm{d}t + \int_y^x f \, \mathrm{d}t - \int_a^y f \, \mathrm{d}t \right| \\ =& \left| \int_y^x f \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_y^x |f| \, \mathrm{d}t \\ \leq& M \cdot \int_y^x \mathrm{d}t = M(x - y) \leq \epsilon \end{aligned}$$

   Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Aussage

Sei $h \in \mathbb{R}$, so dass $x_0 + h \in [a, b]$. Dann gibgt es ein ξ_h zwischen x_0 und $x_0 + h$ mit:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} =& \frac{\int_a^{x_0+h} f(t) \, \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t) \, \mathrm{d}t}{h} \\ =& \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(t) \, \mathrm{d}t}{h} \\ =& f(\xi_h) \cdot \frac{\int_{x_0}^{h} \mathrm{d}t}{h} \\ =& f(\xi_h) \cdot \frac{h}{h} \text{ Damit gilt:} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x_0)$$

Satz 28 *Ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und es gilt $F : [a,] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F' = f$. Dann gilt*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Bemerkungen:

- *Eine Funktion F mit $F' = f$ nennt man eine* Stammfunktion *von f*
- *Man schreibt gerne $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$*

Beweis:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Man wähle eine Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit

$$S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$$

Weiter existiert aufgrund des Mittelwertsatzes der Differential-Rechnung $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ mit

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Nach Satz 7 P2 gilt

$$\begin{aligned} \epsilon > & \left| \int_a^b f \, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \\ = & \left| \int_a^b f \, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \right| \\ = & \left| \int_a^b f \, \mathrm{d}x - (F(b) - F(a)) \right| \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

Bemerkung 9

- Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ Dann bezeichnet man die Funktion

$$\begin{aligned} \int_a^{\circ} f \, \mathrm{d}x : & [a, b] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto & \int_a^b f \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

  als *unbestimmtes Integral* von f.

- Satz 2 sagt also das jede Stammfunktion ein unbestimmtes Integral von f ist

Proposition 2 *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Eine Funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f, wenn $F - G = konst.$*
Beweis: $\Leftarrow$
Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $F + c$

$$(F + c)' = F')f$$

$\Rightarrow$
Das war eine Folgerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

Bemerkung 10 Oftmals wird ignoriert, dass sobald es eine Stammfunktion F von f gibt, es automatisch unendlich viele gibt. So schreibt man beispielsweise

$$\int f \,\mathrm{d}x = F$$

oder spricht von „der“ Stammfunktion. Die obige Gleichung ist insofern problematisch, da die rechte Seite (und damit per Definition auch die linke Seite) nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Oftmals ist daher etwas laxe Umgang mit den Begriffen unkritisch.

Satz 29 (Partielle Integration) *Seien $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit*

$$F' = f \text{ und } G' = g$$

wobei $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Dann gilt:

$$\int_a^b F \cdot g \,\mathrm{d}x = FG|_a^b - \int_a^b f \cdot G \,\mathrm{d}x$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\left(FG|_a^x - \int_a^x f \cdot G \,\mathrm{d}t\right)' =& \left(F(x)\cdot G(x) - F(a)\cdot G(a) - \int_a^x fG \,\mathrm{d}t\right)' \\ =& F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - f(x)G(x)) \\ =& f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x)\end{aligned}$$

Ergo: die rechte Seite ist eine Stammfunktion des Integranden der linken Seite. Damit folgt die Aussage aus Satz 2.

Beispiel 8

$$\begin{aligned}\int_a^b cos^2(x) \,\mathrm{d}x =& \int_a^b cos(x) \cdot cos(x) \,\mathrm{d}x \\ =& cos(x) \cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b sin^2 \,\mathrm{d}x \\ =& cos(x) \cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b 1 - cos^2(x) \,\mathrm{d}x \\ =& cos(x) \cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b 1 \,\mathrm{d}x - \int_a^b cos^2(x) \,\mathrm{d}x \\ \text{Ergo: } \int_a^b cos^2(x) \,\mathrm{d}x =& \frac{1}{2}(cos(x)sin(x)|_a^b - (b-a))\end{aligned}$$

$$\int_a^b \ln(x) \,\mathrm{d}x \text{ wobei } 0 \notin [a,b]$$

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x) \,\mathrm{d}x =& x \ln(x)|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\ =& \ln(x)|_a^b - \int_a^b 1 \,\mathrm{d}x \\ =& \ln(x)|_a^b - x|_a^b \\ =& \ln(x)|_a^b - (b-a)\end{aligned}$$

Satz 30 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \,\mathrm{dt} = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) \,\mathrm{d}x$$

Beweis: *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $t \in [c,d]$:*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} F(\phi(t)) =& F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ =& f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ \textit{Ergo: } \int_{\phi(c)}^{\phi d} =& \int F(\phi(d)) - F(\phi(c)) \\ =& \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) \,\mathrm{dt}\end{aligned}$$

Bemerkung

- *Die Substitutionsregel lässt sich wie folgt nachrechnen*

$$\phi'(t)\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}} dt$$

Dann lässt sich die Substitutions-Regel

$$\int_c^d f(\phi) \,\mathrm{d}\phi = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) \,\mathrm{d}x$$

Beispiel 9

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \,\mathrm{d}x = r \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \,\mathrm{d}x$$

Wir wählen $\phi(t) = r \cdot sin(t)$ für $t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann gilt mit der Substitutionsregel (man beachte dass $\phi(\frac{-\pi}{2}) = -r$ und $\phi(\frac{\pi}{2}) = r$).

$$\begin{aligned}r \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \,\mathrm{d}x =& r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\phi^2(t)}{r^2}} \cdot \phi'(t) \,\mathrm{dt} \\ =& r \int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^2(t)} cos(t) r \,\mathrm{dt} \\ =& r^2 \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t) \,\mathrm{dt} \\ =& \frac{r^2}{2} \cdot \pi\end{aligned}$$

Beispiel 10

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} \text{ wobei } -1, 1 \notin [a,b]$$

Vorgehen Partialbruchzerlegung: Man zerlegt den Nennen in seine Linerarfaktoren und bestimmt Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-x}$$

Man beachte, dass $(1-x)(1+x) = 1-x^2$
Wir multiplizieren die Gleichung mit $(1+x)(1-x)$ und erhalten

$$1 = \alpha(1-x) + \beta(1+x) = \alpha + \beta(\beta - \alpha)x(x \in [a,b])$$

Also: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ Damit gilt:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right)$$

Nun gilt für $\phi(t) = 1-t$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \int_{1-a}^{1-b} \frac{-1\,\mathrm{d}t}{1\phi(t)} = -\int_{-a}^{1-b} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(t)|_a^b$$

Weiter gilt mit $\phi(t) = t-1$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_{1+a}^{1+b} \frac{\mathrm{d}t]}{t} = \ln(t)|_{1+a}^{1+b}$$

Ergo

$$\frac{1}{2}(\ln(1+b) - \ln(1-b) - (\ln(1+a) - \ln(1-a)) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}|_a^b$$