Ist $f^{(k)}: I \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert, so heißt f beliebig oft bzw. unendlich oft diffbar.

Bemerkung:

Wir haben bereits gesehen:

Polynome sind beliebig oft diffbar.

Satz:

Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$, $a \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe vom Konvergenzradius $R>0$. Dann ist $p: x \mapsto p(x)$ auf ganz (x_0-R, x_0+R) diffbar mit $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k$. Insbesondere ist p' auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius R.

Bemerkung:

i) Damit erhalten wir,

$$\exp'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}\right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \cdot \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \exp(x)$$

ii) Damit sind Potenzreihen ∞ oft diffbar

Beweis: Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konv.radius. Beachte dass

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot a_{k+1} (x-x_0)^k\right)(x-x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^{k+1}$$

Nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{p'} = \left(\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k+1]{|(k+1) \cdot a_{k+1}|}\right)^{-1} = R \quad (\text{da } \sqrt[k]{k} \to 1)$$

Wir zeigen, dass p' tatsächlich die Ableitung von p darstellt. OBdA sei $x_0 = 0$. Dann gilt für $y \in (-R, R)$

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x-y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k - y^k) - (k+1) a_{k+1} y^k (x-y)$$

Wir setzen $\Delta(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x-y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$

Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k, & n \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also folgt: $\Delta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right]$

Für $n=1$ ist $[\ldots] = 0$ und für $n \geq 2$

$$[\ldots] = \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1) y^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} k x^{n-1-k} y^k - (n-1) y^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k$$

$$= (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^{k-1}$$

Seien $|y| < r < R$ und $|x| \leq r$. Dann gilt:

$$|\Delta(x,y)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1}$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| r^{n-2} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k}_{\leq n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 |x-y|$$

Nach Cauchy-Hadamard hat die Potenzreihe $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$ den Konvergenzradius R, weshalb $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$ konvergiert.

Damit folgt aber $\lim_{x \to y} \Delta(x,y) = 0$

Proposition Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ streng monoton und diffbar in $p \in (a,b)$ mit $f'(p) \neq 0$

Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: f((a,b)) \to \mathbb{R}$ diffbar in $q = f(p)$ und es gilt:

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Beweis Da f streng monoton ist, ist f^{-1} stetig

Insbesondere gilt $f^{-1}(y) \to f^{-1}(q)$ für $y \to q$

Damit gilt $\lim_{y \to q} \frac{1}{y-q} \left(f^{-1}(y) - f^{-1}(q)\right) = \lim_{y \to q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}$

$= \left(\lim_{y \to q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)} \right)^{-1}$

$= \left(f'(f^{-1}(q))\right)^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$

Beispiele

- k-te Wurzel $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}: y \mapsto y^{1/k}$ ist diff'bar mit

  $g'(y) = \frac{1}{k} y^{1/k - 1}$

  denn: g ist Umkehrfunktion zu $f(x) = x^k$

Damit gilt: $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k\left(\sqrt[k]{y}\right)^{k-1}} = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k} - 1}$

- Logarithmus $\ln (0,\infty) \to \mathbb{R}: y \mapsto \ln y$. Es ist $\ln'(y) = \frac{1}{y}$,

denn: $\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$

Bemerkung:

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist $x^\alpha := \exp(\alpha \cdot \ln(x))$

Anwendung:

Die Funktion $(\cdot)^\alpha \cdot (0,\infty) \to (0,\infty). \ x \mapsto x^\alpha$ hat die Ableitung

$((\cdot)^\alpha)' \cdot (0,\infty) \to (0,\infty): x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$

denn $(x^\alpha)' = \exp'(\alpha \cdot \ln x) = \exp(\alpha \ln x) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \exp(\alpha \cdot \ln x) \exp(-\ln x)$

$= \alpha \exp((\alpha - 1)\ln x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

Es folgen die bekannten Rechenregeln $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ und

$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$

10: Diffbare Funktionen auf Intervallen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

Definition Sei $f: I \to \mathbb{R}$

Wir sagen, f hat in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum (lokales Minimum), falls ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\forall x \in B_\delta(x_0): f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0))$$

Gilt $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ für alle $x \in I$, so sagen wir, dass x_0 ein globales Maximum (globales Minimum) ist.

Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von strikten Maxima (strikte Minima)

Maximum und Minimum werden unter dem Begriff Extremum zusammengefasst.

Satz

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Hat f ein lokales Maximum (lok. Minimum) in $x_0 \in (a,b)$ und existiert $f'(x_0)$, so gilt $f'(x_0) = 0$

Beweis Wir behaupten den Fall des Maximums

Es gilt $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (*)$

und $\lim\limits_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (*)$

Wegen Diffbarkeit in x_0 folgt $(*) = (**)$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$