

Skript zur Vorlesung Analysis 2 für  
Lehramtsstudenten für das Gymnasium

19. Juni 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Differentiation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Differenzierbare Funktionen auf Intervallen</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Riemann-Integral</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>Differentiation und Integration</b>	<b>34</b>
4.1	Erweiterungen des Integralbegriffs . . . . .	38
4.1.1	Uneigentliche Integrale . . . . .	38
4.1.2	Integrale über komplexwertige Funktionen . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>44</b>
5.1	Trennung der Variablen . . . . .	46
5.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	47
5.3	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Folgen und Reihen von Funktionen</b>	<b>59</b>
6.1	Fourier-Reihen . . . . .	63

# 1 Differentiation

**Definition 1.1.** Sei  $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D(f)$  ein Punkt, um den ein offenes Intervall  $B_\epsilon(x)$  (für geeignetes  $\epsilon > 0$ ) komplett in  $D(f)$  enthalten ist ( $B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$ ). Dann heißt  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Wir meinen mit  $f'(x_0)$  die Ableitung (seltener Differentialquotient) von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Ist  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem  $x \in D(f)$  differenzierbar, dann heißt  $f$  schlechthin differenzierbar. Etwas irreführend wird auch die Abbildung

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von  $f$  bezeichnet.

**Satz 1.1.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein  $c \in \mathbb{R}$  und  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0 \tag{1}$$

2. Es gibt ein  $\tilde{c} \in \mathbb{R}$  und  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

3.  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

Das heißt insbesondere  $c$  und  $\tilde{c}$  sind eindeutig bestimmt

**Bemerkung.**

- Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  wählen und setzt

$$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- Vergisst man die Funktion  $\phi$ , versteht man mit der Geradengleichung

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an  $f$  in  $x_0$

*Beweis.*

1  $\leftrightarrow$  2 Man setze einfach  $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$  und  $\tilde{c} = c$   
(in  $x = x_0$  setze man  $u(x_0) = 0$ )

1  $\rightarrow$  2 ZZ  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c \end{aligned}$$

3  $\rightarrow$  1 Wir setzten  $c = f'(x_0)$  und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right| &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

■

**Satz 1.2.** Es sind äquivalent:  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$   
mit:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{|x - x_0|} = 0$
2.  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$   
mit:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x) = 0$
3. Der Grenzwert  $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert

**Satz 1.3.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

*Beweis.* ZZ ist:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Äquivalent dazu:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ .

$$\text{Nun gilt: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{x - x_0}{x - x_0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

■

Hier ist  
der Satz  
unvollständig

**Bemerkung.**

- Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!  
Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind.  
(Beispiel: Weierhaus-Fkt:  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \cos(b_n \pi x)$  mit  $a_n \in (0, 1)$  und  $a_n b_n > 1$ )
- Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar

**Satz 1.4.** Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x \in I$  differenzierbar,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann sind  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$  (sofern  $g(x) \neq 0$ ) in  $x$  differenzierbar.  
Es gilt:

1.  $(f + g)' = f'(x) + g'(x)$  (Summenregel)
2.  $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  (Produktregel)
3.  $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$  (Quotientenregel)

*Beweis.*

1. 
$$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) + g(y) - (f(x) + g(x))}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$
2. 
$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y) \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y) \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &\stackrel{\text{Satz 1.3}}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\end{aligned}$$
3. 
$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y - x} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} \frac{g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(y)}{g(y)}}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{g(y)g(x)} \frac{f(y)g(x) - f(x)g(y)}{y - x} \\ &= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(x) - f(y)g(y) + f(y)g(y) - f(x)g(y)}{y - x} \\ &= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y \rightarrow x} f(y) \cdot \frac{g(x) - g(y)}{y - x} + g(y) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left( \lim_{y \rightarrow x} f(y) \frac{g(x) - g(y)}{y - x} + \lim_{y \rightarrow x} g(y) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right) \\ &= \frac{1}{g^2(x)} (f(x) \cdot (-g'(x)) + g(x)f'(x)) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

■

**Beispiel 1.1.**

- $f(x) = c \in \mathbb{R} (x \in \mathbb{R})$   
 $\rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{x \rightarrow y} \frac{c - c}{y - x} = 0$
- $f(x) = x (x \in \mathbb{R})$   
 $f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{y - x}{y - x} = 1$

- $f(x) = x^n, (x \in \mathbb{R})$  wobei  $n \in \mathbb{N}$   
 $f'(x) = nx^{n-1}$  per Induktion:  
 $n = 1$  Stichpunkt 2 ✓  
 $n \rightarrow n + 1$ : Sei also  $f(x) = x^{n+1}$ . Das gibt mit der Produktregel:  
 $f'(x) = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot (x^n)' = 1 \cdot xn + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für  $p(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$  gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^n l \cdot a_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^n l \cdot a_l x^{l-1}$$

- Seien  $P_1$  und  $P_2$  Polynome.

Dann nennt man die Abbildung

$$Q : \mathbb{R} \setminus \{x | P_2(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \text{ eine rationale Funktion.}$$

Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

- Die Funktion  $| \cdot | : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$  ist nicht in 0 differenzierbar.

Denn:

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} = \lim_{y \searrow 0} \frac{y - 0}{y - 0} = 1$$

$$\lim_{y \nearrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{-y - 0}{y - 0} = -1$$

**Satz 1.5** (Kettenregel). Seien  $I_f$  und  $I_g$  Intervalle,  $x_0 \in I_f$  und  $f : I_f \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und  $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $f(x_0)$  differenzierbar und  $f(I_f) \subseteq I_g$ . Dann gilt:

$$\frac{dg \circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

*Beweis.* Da  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, gilt für alle  $x \in I_f$ :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x))$$

(Wobei  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ )

Analog gilt für alle  $y \in I_g$ :

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei  $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} v(y) = 0$

Damit haben wir für alle  $x \in I_f$ :

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) &= (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0)g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

■

**Definition 1.6.** Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt  $f$  stetig differenzierbar. Wir definieren weiterhin induktiv die  $k$ -te Ableitung (für  $k \in \mathbb{N}$ ) durch:

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f \\ f^{(k+1)} &:= f^{(k+1)'} \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.

Ist  $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  definiert, so heißt  $f$  beliebig oft beziehungsweise unendlich oft differenzierbar.

**Bemerkung.** Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

**Satz 1.7.** Sei  $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine Potenzreihe vom Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $p : x \mapsto p(x)$  auf ganz  $(x_0 - R, x_0 + R)$  differenzierbar mit  $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$ . Insbesondere ist  $p'$  auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius  $R$ .

**Bemerkung.**

1. Damit erhalten wir:

$$\exp'(x) = \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \exp(x)$$

2. Damit sind Potenzreihen  $\infty$  oft differenzierbar

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k \right) (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left( \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k+1]{(k+1) a_{k+1}} \right)^{-1} = R \left( da \sqrt[k]{k} \rightarrow 1 \right)$$

Damit ist  $p'$  wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass  $p'$  tatsächlich die Ableitung von  $p$  darstellt. ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $x_0 = 0$ .

Dann gilt für  $y \in (-R, R)$ :

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x - y) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (x^k - y^k) - (k+1) a_{k+1} y^k (x - y)$$

Wir setzen  $\Delta(x, y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x - y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$ .  
 Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right] \quad (2)$$

Für  $n = 1$  ist [...] = 0 und für  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned} [\dots] &= \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1) y^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} k x^{n-1-k} y^k - (n-1) y^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\ &= (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^{k-1} \end{aligned} \quad (3)$$

Hier nicht  
... sondern Gleichungs-  
nummer  
?

Sein nun  $|y| < r < R$  und  $|x| \leq r$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\Delta(x, y)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x - y| \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x - y| r^{n-2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \leq |a_n| r^{n-2} n^2 |x - y| \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe  $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$  den Konvergenzradius  $R$ , weshalb

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$$

konvergiert. Damit folgt aber  $\lim_{x \rightarrow y} \Delta(x, y) = 0$  ■

**Proposition 1.1.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton und differenzierbar in  $p \in (a, b)$  mit  $f'(p) \neq 0$ . Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $q = f(p)$  und es gilt:

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$



*Beweis.* Da  $f$  streng monoton ist, ist  $f^{-1}$  stetig.  
 Insbesondere gilt  $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(q)$  für  $y \rightarrow q$ .  
 Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow q} \frac{1}{y - q} (f^{-1}(y) - f^{-1}(q)) &= \lim_{y \rightarrow q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \\ &= \left( \lim_{y \rightarrow q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)} \right)^{-1} \\ &= (f'(f^{-1}(q)))^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))} \end{aligned}$$

■

### Beispiel 1.2.

- $k$ -te Wurzel  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$  ist differenzierbar mit  $g'(y) = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$

**Denn**  $g$  ist Umkehrfunktion zu  $f(x) = x^k$

Damit gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$$

- Logarithmus  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$ . Es ist  $\ln'(y) = \frac{1}{y}$ , **denn:**

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

**Bemerkung.** Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$  ist  $x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x))$

**Anwendung:** Die Funktion  $(\circ)^\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$  hat die Ableitung  $((\circ)^\alpha)' : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$  **denn**

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \exp'(\alpha \ln(x)) = \exp(\alpha \ln x) \frac{\alpha}{x} \\ &= \alpha \exp(\alpha \ln x) \exp(-\ln x) = \alpha \exp((\alpha - 1) \ln x) \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln  $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$  und  $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

## 2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall

**Definition 2.1.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen,  $f$  hat in  $x_0 \in I$  ein lokales Maximum (lokales Minimum), falls ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \text{ (} f(x) \geq f(x_0) \text{) gilt.}$$

Gilt:

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (} f(x) \geq f(x_0) \text{)}$$

für alle  $x \in I$ , so sagen wir, dass  $x_0$  ein globales Maximum (globales Minimum) ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von strikten Maxima (strikte Minima). Maximum und Minimum werden unter dem Begriff Extremum zusammengefasst.

**Satz 2.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Hat  $f$  ein lokales Maximum (lokales Minimum) in  $x_0 \in (a, b)$  und existiert  $f'(x_0)$ , so gilt  $f'(x_0) = 0$ .

*Beweis.* Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Wegen Differenzierbarkeit in  $x_0$  folgt:

$$\text{Gleichung 1} = \text{Gleichung 2} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

■

**Satz 2.2** (verallgemeinerter Mittelwertsatz). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf ganz  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit:

$$(g(b) - g(a)) f'(\xi) = (f(b) - f(a)) g'(\xi)$$

*Beweis.* Wir betrachten  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto (g(b) - g(a)) f(t) - (f(b) - f(a)) g(t)$$

Offensichtlich (nach Summenregel) ist  $h$  differenzierbar auf  $(a, b)$ . Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a)) f'(t) - (f(b) - f(a)) g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $h'(\xi) = 0$ . Damit folgt dann die Aussage.

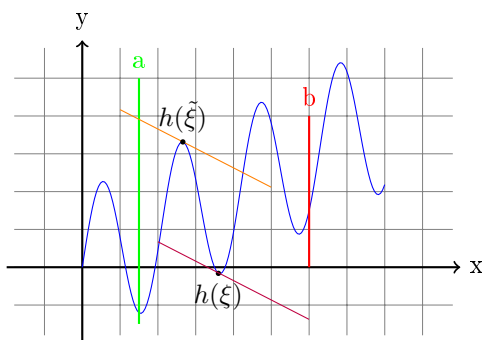
*Beachte:*

$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a)) f(a) - (f(b) - f(a)) g(a) \\ &= g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ &= (g(b) - g(a)) f(b) - (f(b) - f(a)) g(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

**Fall 1:**  $h = \text{const}$  Dann gilt trivialerweise  $h' = 0$  und wir sind fertig.

**Fall 2:**  $h \neq \text{const}$  Offensichtlich ist  $h$  stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Damit besitzt  $h$  ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein  $\tilde{\xi} \in (a, b)$  mit  $h(\tilde{\xi}) > h(a)$ , sonst betrachte  $-h$  statt  $h$ .

Also existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $h(\xi) \geq h(x)$  ( $x \in [a, b]$ ). Mit anderen Worten:  $\xi$  ist auch ein globales Maximum und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 2.1 folgt:  $h'(\xi) = 0$  ■



**Satz 2.3** (Mittelwertsatz(MWS)). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

**Bemerkung.** Es ist oft wichtig, dass  $f$  nur auf  $(a, b)$  differenzierbar sein muss.

*Beweis.* Das folgt aus Satz 2.2 mit  $g = \text{id}_{[a, b]}$ , d.h.  $g(x) = x$  ( $x \in [a, b]$ ). ■

**Satz 2.4.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gilt:

- a)  $f = \text{const} \Leftrightarrow f'(x) = 0$  ( $x \in (a, b)$ )
- b)  $f$  ist monoton wachsend  $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$  ( $x \in (a, b)$ )
- c)  $f$  ist streng monoton wachsend  $\Leftrightarrow f'(x) > 0$  ( $x \in (a, b)$ )
- d)  $f$  ist monoton fallend  $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$  ( $x \in (a, b)$ )
- e)  $f$  ist streng monoton fallend  $\Leftrightarrow f'(x) < 0$  ( $x \in (a, b)$ )

*Beweis.* a) folgt aus b) und c).

Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).

Sei  $y > x \in [a, b]$ . Sei  $f|_{[x, y]}$  die *Einschränkung* von  $f$  auf  $[x, y]$ , das heißt:

$$f|_{[x, y]} : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt  $f|_{[x, y]}$  die Bedingungen des MWS.

Es existiert ein  $\xi \in (x, y)$  mit  $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi)$

**Fall b)**  $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0$

$$\hookrightarrow f(y) \geq f(x)$$

**Fall c)**  $f(y) - f(x) > 0$

$$\hookrightarrow f(y) > f(x)$$

*Beweis der Richtung  $\Leftarrow$  in Teil b):* Ist  $f'(x) \geq 0$  so gilt

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da  $f$  monoton wachsend ist, gilt für  $y > x$ :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für  $\lim_{y \nearrow x}$ . ■

**Korollar 2.1.** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $f'(x) = g'(x)$  für  $x \in (a, b)$ . Dann gilt  $f - g = \text{const}$

*Beweis.* Es gilt:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 2.4. ■

**Satz 2.5.** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar ( $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall). Gibt es  $\xi \in I$  mit  $f'(\xi) = 0$  und  $f''(\xi) < 0$  ( $f''(\xi) > 0$ ), so nimmt  $f$  an der Stelle  $\xi$  ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall  $f''(\xi) < 0$ . Für den Fall  $f''(\xi) > 0$  betrachte man  $-f$ .

Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$$r := \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$$

Das heißt es existiert für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit:

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für  $\epsilon := \frac{r}{2}$  gilt daher:

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right| \text{ für ein entsprechend gewähltes } \delta > 0$$

Insbesondere gilt also:

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle  $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ .

Das heißt für  $x < \xi$  gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für  $x > \xi$  gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo:  $f'$  ist streng monoton fallend auf  $(\xi - \delta, \xi]$  und streng monoton wachsend auf  $[\xi, \xi + \delta)$

Da  $f'(\xi) = 0$  folgt, dass  $f'(x) > 0$  für  $x \in (\xi - \delta, \xi]$  und  $f'(x) < 0$  für  $x \in [\xi, \xi + \delta)$ .

Mit Satz 2.4 folgt:

$f|_{(\xi - \delta, \xi]}$  ist streng monoton wachsend und

$f|_{[\xi, \xi + \delta)}$  ist streng monoton fallend. ■

**Satz 2.6** (Regel von l'Hospital). Seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

differenzierbar und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Weiter gelte:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei  $-\infty \leq A \leq \infty$  sei und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,

sowie  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ .

Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ . Die analoge Aussage gilt auch für  $x \rightarrow b$ .

**Bemerkung.**

- Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h.  $\pm\infty$  sind als Grenzwerte zulässig.
- Zwei wesentliche Voraussetzungen:
  1.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert!
  2. ebenso ist essentiell, dass  $f, g \rightarrow \overset{\circ}{\pm\infty}$
- Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0$$

- Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form  $0 \cdot \infty$  zu behandeln, indem wir diese in die Form

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}} \text{ beziehungsweise}$$

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

umrechnen.

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Fall  $x \rightarrow a$  ( $x \rightarrow b$  läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:

*Behauptung:* Sei  $A \in [-\infty, \infty)$ .

Dann existiert für jedes  $q > A$  ein  $c > a$  mit  $\frac{f(x)}{g(x)} < q$  ( $x \in (a, c)$ ).

*Beweis der Behauptung:*

Da  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A$  existiert ein  $c' > a$  mit:  $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$  für ein beliebiges  $r \in (A, q)$  und  $x \in (a, c')$ .

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad (4)$$

für ein geeignetes  $t$  zwischen  $x$  und  $y$ .

Für  $a < x < y < c'$  gilt daher:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \quad (5)$$

Fall 1:  $f, g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ . Nach Gleichung (5) gilt für  $x \rightarrow a$

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q \quad (y \in (a, c'))$$

Fall 2:  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$  Multipliziere (4) mit  $\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$ .

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \\ \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \end{aligned}$$

Für  $x \rightarrow a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein  $c > a$  existieren mit:  $\frac{f(x)}{g(x)} < r$  ( $x \in (a, c)$ )

Analog kann man zeigen:

*Behauptung':* Sei  $A \in (-\infty, \infty]$ . Dann existiert für jedes  $p < A$  ein  $d > a$ , so dass  $p < \frac{f(x)}{g(x)}$  ( $x \in (a, d)$ )

Für  $A = +\infty$  folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für  $A = -\infty$  aus der ersten Behauptung.

Für  $A \in \mathbb{R}$  argumentieren wir wie folgt:

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert  $c > a$ , so dass  $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon$  ( $x \in (a, c)$ ). Nach der zweiten Behauptung existiert  $d > a$  mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \quad (x \in (a, d))$$

Für  $x \in (a, \min\{c, d\})$  gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

■

**Beispiel 2.1.**  $f(x) = 1, g(x) = x + 7$

Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$

aber:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

**Beispiel 2.2.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \text{ für } \alpha > 0 \end{aligned}$$

**Definition 2.2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen, dass  $f$  in  $a$  (rechtsseitig) differenzierbar ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass  $f$  in  $b$  (linksseitig) differenzierbar ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existiert. Wir sagen,  $f$  ist auf  $[a, b]$  differenzierbar, wenn  $f$  in  $(a, b)$  differenzierbar und in  $a$  rechtsseitig sowie in  $b$  linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe  $n$ -Mal (stetig) differenzierbar etc...

**Definition 2.3.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -Mal differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{l=0}^n \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^l \end{aligned}$$

das  $n$ -te Taylorpolynom, wobei  $\alpha \in I$  sei, von  $f$  an der Stelle  $\alpha$ .

**Bemerkung.** Offensichtlich gilt:  $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$ . Weiter gilt:

$$f'(\alpha) = P'_{n,\alpha}(\alpha) = \left( \sum_{l=0}^n l \cdot \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^{l-1} \right)$$

und analog:

$$\begin{aligned} f^{(l)}(\alpha) &= P_{n,\alpha}^{(l)} = P_{n,\alpha}^{(l)}(\alpha) \\ (l &= 1, \dots, n) \end{aligned}$$

ich vermute, die Summe sollte bei 0 beginnen

**Satz 2.7** (Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied)). Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f$   $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar (auf  $[a, b]$ ) und  $n$ -mal differenzierbar auf  $(a, b)$ . Seien  $\alpha \neq \beta$  in  $[a, b]$  gegeben. Dann existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ , so dass gilt:

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n$$

*Beweis.* Wähle  $M \in \mathbb{R}$  mit

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta - \alpha)^n$$

Man beachte, dass die  $n - te$  Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch:

$$P_{n-1,\alpha}^{(n)}(t) + n! \cdot M \text{ (für } t \in [a, b])$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t - \alpha)^n \text{ für } t \in [a, b] \\ h(\beta) &= f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta - \alpha)^n = 0 \\ h(\alpha) &= f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - M(\alpha - \alpha)^n = 0 \text{ siehe obige Bemerkung} \\ h'(\alpha) &= f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}'(\alpha) - n \cdot M(\alpha - \alpha)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ für } l = 1, \dots, n-1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein  $x_1$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $h'(x_1) = 0$ . Analog gibt es zwischen  $\alpha$  und  $x_1$  ein  $x_2$  mit  $h''(x_2) = 0$ . Man findet also  $x_1, \dots, x_{n-1}$  mit  $h^{(l)}(x_l) = 0$  ( $l = 1, \dots, n-1$ ). Insbesondere existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $x_{n-1}$  (also zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ ) mit  $h^{(n)}(x) = 0$ . Damit gilt

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}^{(n)}(x) - M \cdot n! \cdot (x - \alpha)^0$$

und daher  $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$  ■

**Bemerkung.** Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte *Lagrange'sche Darstellung*

**Beispiel 2.3.** Sei  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Offensichtlich:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}t^2$$

für ein  $x$  zwischen 0 und  $t$ .

Für  $t > 0$  ergibt sich damit:

$$|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)| < \frac{t^2}{8}$$



**Korollar 2.2.** Ist  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  – Mal differenzierbar und  $g^{(n)} = 0$ , so ist  $g$  ein Polynom höchstens  $(n - 1)$  – ten Grades

**Korollar 2.3.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $(n + 1)$  – mal stetig differenzierbar und  $\alpha \in I$  mit  $f^{(l)}(\alpha) = 0$  für alle  $l = 1, \dots, n - 1$  und  $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$ . Dann gilt:

- ist  $n$  ungerade, so ist  $\alpha$  keine Extremstelle
- ist  $n$  gerade, so ist  $\alpha$  eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist  $f^{(n)}(\alpha) < 0$ , so ist  $\alpha$  eine Maximalstelle. Ist  $f^{(n)}(\alpha) > 0$ , so ist  $\alpha$  Minimalstelle.

*Beweis.*

- Wir betrachten nur den Fall  $n$  gerade und  $f^{(n)}(\alpha) > 0$ . Nach dem Satz von Taylor gilt für alle  $x \in I$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x - \alpha)^{n+1} \\ &= f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x - \alpha)^{n+1} \\ &= f(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^n}{n!} \left( f^{(n)}(\alpha) + \left( \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)} (x - \alpha) \right) \right) \end{aligned}$$

für ein  $t$  zwischen  $x$  und  $\alpha$ . Für  $x$  hinreichend nah an  $\alpha$  erhalten wir:

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1} (x - \alpha)$$

Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

Da ist also  $f(x) > f(\alpha)$  für  $x$  hinreichend nah an  $\alpha$ .  
Sprich:  $\alpha$  ist strikte lokale Minimalstelle

■

**Definition 2.4.** Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylorreihe am Entwicklungspunkt  $\alpha \in I$ .

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n$$

**Bemerkung.**

- im Allgemeinen konvergiert  $T_{f,\alpha}(x)$  für  $x \neq \alpha$  nicht
- Der Satz von Taylor behandelt nicht die Taylorreihe
- Selbst wenn  $T_{f,\alpha}(x)$  konvergiert, muss  $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$  nicht gelten
- Sei  $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$  Dann gilt :

$$P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \rightarrow 0$$

**Satz 2.8.** Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n$  und  $R > 0$  der zugehörige Konvergenzradius von  $f$ .

Dann ist  $f$  auf  $(\alpha - R, \alpha + R)$  beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

das heißt, die Taylorreihe  $T_{f,\alpha}$  stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - \alpha)^{n-1} \\ &\vdots \\ f^{(l)} &= l! \cdot a_l + \sum_{n=l-1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-l) a_n(x - \alpha)^{n-l} \end{aligned}$$

für  $l \in \mathbb{N}$ :

$$x - \alpha = 0 \text{ für } x = \alpha$$

Also:  $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$

■

### 3 Riemann-Integral

**Ziel:** Wir wollen auf „natürliche“ Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der  $x$ -Achse zu bestimmen (Abbildung 1).

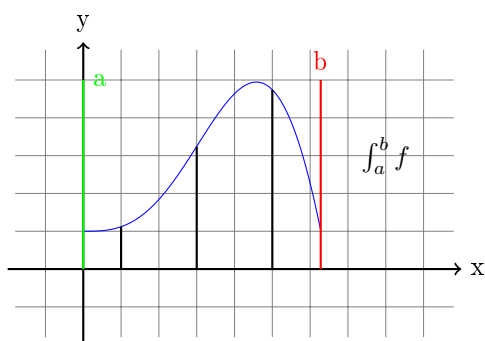


Abbildung 1: Vorgehen

Dabei heißt auf *natürliche Weise* insbesondere:

- gilt  $f(x) = c = \text{const}$  für alle  $x \in D(f) = [a, b]$ , so soll gelten (Abbildung 2)

$$\int_a^b f \, dx = c \cdot (b - a)$$

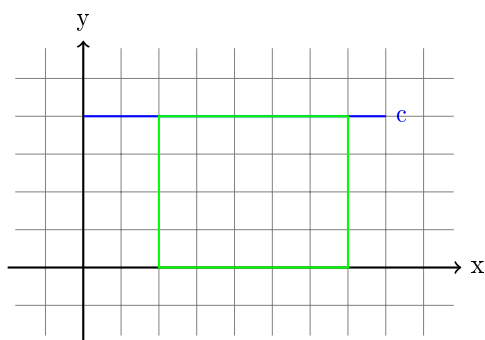


Abbildung 2: Konstante Funktion

- gilt  $f(x) \leq g(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) so fordern wir (Abbildung 3)

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

- für  $c \in [a, b]$  soll gelten (Abbildung 4)

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

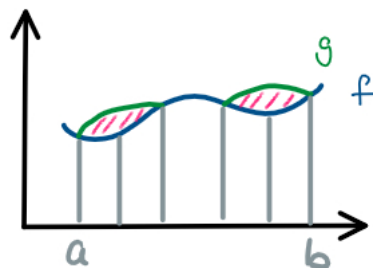


Abbildung 3: Flächeninhalt zweier Funktionen

Vorgehen: Man unterteile  $[a, b]$  in „viele“ Teilintervalle, auf denen  $f$  nahezu konstant ist.

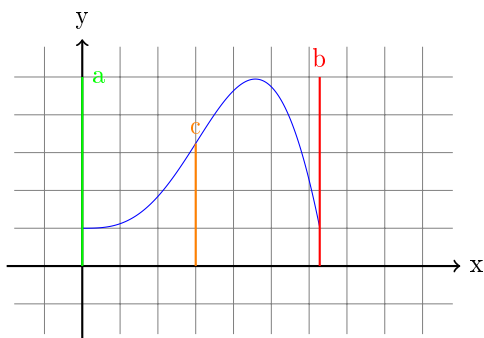


Abbildung 4: Integral aufteilen

**Definition 3.1.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Partition  $P$  (Abbildung 5) von  $[a, b]$  ist eine endliche Menge von Punkten  $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ . Wir schreiben  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

**Definition 3.2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Partition von  $[a, b]$ . Wir schreiben:

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i(p) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Weiter definieren wir:

$$S(P, f) := \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i$$

$$s(P, f) := \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i$$

das geht besser auch mit Stichwortverzeichnis. Baue ich später ein.

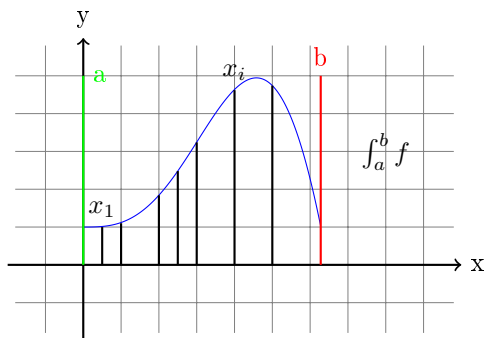


Abbildung 5: Partition

Wir setzen:

$$\overline{\int_a^b f \, dx} = \inf S(P, f)$$

$$\underline{\int_a^b f \, dx} = \sup s(P, f)$$

wobei Infimum und Supremum über alle Partitionen von  $[a, b]$  genommen werden. Wir nennen

$$\overline{\int_a^b f \, dx} \text{ das obere und}$$

$$\underline{\int_a^b f \, dx} \text{ das untere}$$

Riemannintegral von  $f$  über  $[a, b]$

Gilt:

$$\overline{\int_a^b f \, dx} = \underline{\int_a^b f \, dx}$$

so sagen wir  $f$  ist Riemann-integrierbar (integrierbar) und nennen

$$\int_a^b f(x) \, dx := \underline{\int_a^b f \, dx} = \overline{\int_a^b f \, dx}$$

das Riemannintegral von  $f$  über  $[a, b]$ .

Die Menge der Riemannintegrierbaren Funktionen auf  $[a, b]$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}$  beziehungsweise  $\mathcal{R}_{[a, b]}$ .

**Bemerkung.**

- Da  $f$  beschränkt ist, gibt es  $m \leq M$  in  $\mathbb{R}$  mit:

$$m \leq f(x) \leq M \quad (x \in [a, b])$$

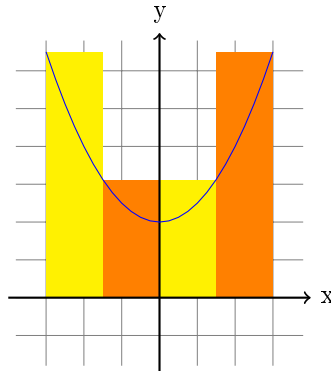


Abbildung 6: oberes Riemann-Integral

Damit gilt für jede Partition  $P$ :

$$m \cdot (b - a) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq M \cdot (b - a)$$

Ergo:  $\overline{\int_a^b} f \, dx, \underline{\int_a^b} f \, dx$  sind wohldefiniert.

- im gesamten Kapitel 3 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen

**Definition 3.3.** Seien  $P_1, P_2$  zwei Partitionen eines Intervalls. Dann heißt  $P_1$  Verfeinerung von  $P_2$ , wenn gilt:  $P_2 \subseteq P_1$ . Weiterhin nennen wir  $P_1 \cup P_2$  die gemeinsame Verfeinerung von  $P_1$  und  $P_2$ .

**Satz 3.1.** Ist  $P'$  eine Verfeinerung der Partition  $P$  von  $[a, b]$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f) &\geq S(P', f) \\ s(P, f) &\leq s(P', f) \end{aligned}$$

(wobei  $f$  wie in Definition 3.2 sei).

*Beweis.* Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass  $P'$  sich von  $P$  in nur einem Element  $x'$  unterscheidet. Das heißt:  $P' = P \cup \{x'\}$

Dann gibt es ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $x' \in [x_{i-1}, x_i]$  (wobei  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$  sei).

Wir definieren:

$$\begin{aligned} W_1 &:= \sup_{[x_{i-1}, x']} f(x) \\ W_2 &:= \sup_{[x', x_i]} f(x) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f) - S(P', f) &= M_i \Delta x_i - W_1 \cdot (x' - x_{i-1}) - W_2 \cdot (x_i - x') \\ &= (M_i - W_1) \cdot (x' - x_{i-1}) + (M_i - W_2) \cdot (x_i - x') \geq 0 \end{aligned}$$

Enthält von  $P'$   $k$  Punkte, die nicht in  $P$  enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt  $k$ -mal durch. ■

**Satz 3.2.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann gilt:

$$\overline{\int_a^b f \, dx} \geq \underline{\int_a^b f \, dx}$$

*Beweis.* Seien  $P_1, P_2$  zwei Partitionierungen von  $[a, b]$  und  $P'$  die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:

$$s(P_1, f) \leq s(P', f) \leq S(P', f) \leq S(P_2, f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$$

für alle Partitionierungen  $P_1, P_2$ .

Sprich:  $S(P_2, f)$  ist stets obere Schranke von  $s(P, f)$  für alle Partitionen  $P$  von  $[a, b]$ . Ergo:

$$\sup s(P, f) \leq S(P_2, f)$$

Damit ist also  $\sup s(P, f)$  untere Schranke von  $S(P, f)$  ( $P$  beliebige Partition).

Ergo:  $\sup s(P, f) \leq \inf S(P, f)$

Wir haben also gezeigt:

$$\underline{\int_a^b f \, dx} = \sup s(P, f) \leq \inf S(P, f) = \overline{\int_a^b f \, dx}$$

■

**Satz 3.3.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  genau dann, wenn für jedes  $\epsilon > 0$  eine Partition  $P_\epsilon$  existiert mit:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

*Beweis.* Per Definition gilt

$$s(P_\epsilon, f) \leq \underline{\int_a^b f \, dx} \stackrel{\text{Satz 3.2}}{\leq} \overline{\int_a^b f \, dx} \leq S(P_\epsilon, f)$$

Damit erhalten wir:

$$\overline{\int_a^b f \, dx} - \underline{\int_a^b f \, dx} \leq S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Das heißt, da  $\epsilon$  beliebig, dass:

$$\underline{\int_a^b f \, dx} = \overline{\int_a^b f \, dx}$$

Ergo:  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Per Definition gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $P'_\epsilon$  mit:

$$\underline{\int_a^b f \, dx} - s(P'_\epsilon, f) < \frac{\epsilon}{2} \tag{6}$$

Analog existiert ein  $P'_\epsilon$  mit

$$S(P'_\epsilon, f) - \int_a^b f \, dx < \frac{\epsilon}{2} \quad (7)$$

Wir setzen  $P_\epsilon$  gleich der gemeinsamen Vereinigung von  $P'_\epsilon$  und  $P''_\epsilon$ . Man beachte: Wegen Satz 3.1 gelten Gleichung 6 und Gleichung 7, wenn wir  $P'_\epsilon$ , beziehungsweise  $P''_\epsilon$ , durch  $P_\epsilon$  ersetzen. Da  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  gilt außerdem:

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^b f \, dx$$

Addition von Gleichung 6 und Gleichung 7 liefert:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

■

**Satz 3.4.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und  $P_\epsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$  eine Partition von  $[a, b]$  mit  $S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$  für ein  $\epsilon > 0$ .

1. Ist  $P$  eine Verfeinerung von  $P_\epsilon$ , so gilt  $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$
2. Sind  $s_i, t_i$  beliebige Punkte in  $[x_{i-1}, x_i]$ , so gilt:

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i < \epsilon$$

3. Ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , so gilt

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f \, dx \right| < \epsilon$$

*Beweis.*

1. Das folgt aus Satz 3.1
- 2.

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

3. Da  $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , gilt  $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$   
Damit folgt die Aussage aus

$$s(P_\epsilon, f) \leq \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f)$$

$$\text{und } s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \, dx \leq S(P_\epsilon, f)$$

■



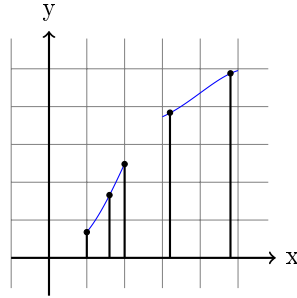


Abbildung 7: Monotone Funktion

Wir wollen im Folgenden wichtige Vertreter Riemann-integrierbarer Funktionen kennenlernen.

**Satz 3.5.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ .

*Beweis.* Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt sind, ist  $f$  offensichtlich beschränkt. Weiterhin ist  $f$  als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig stetig.

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  existiert ein  $\delta > 0$ , so dass folgende Implikation gilt:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wir wählen eine Partition  $P_\epsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$ , so dass  $\Delta x_i < \delta$ . Dann gilt:

$$M_i - m_i < \epsilon \text{ und daher}$$

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \epsilon \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon \cdot (b - a)$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig, folgt die Aussage mit Satz 3.3. ■

**Satz 3.6.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, so ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

*Beweis.* Da  $f$  monoton ist, gilt für alle  $x \in [a, b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ .

Das heißt  $f$  ist beschränkt. Zu  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir eine Partition  $P_n = \{x_0, \dots, x_k\}$  mit  $\Delta x_i < \frac{1}{n}$ . Dann gilt:

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i$$

Ohne Einschränkung sei  $f$  monoton wachsend (der andere Fall läuft analog). Dann gilt:

$$\begin{aligned} M_i &= f(x_i) \text{ und} \\ m_i &= f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} S(P_n, f) - s(P_n, f) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wähle  $n_\epsilon$  so dass gilt:

$$\frac{1}{n_\epsilon} (f(b) - f(a)) < \epsilon$$

Dann gilt mit  $P_\epsilon := P_{n_\epsilon}$  die Aussage nach Satz 3.3 ■

**Satz 3.7.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Dann gilt  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ .

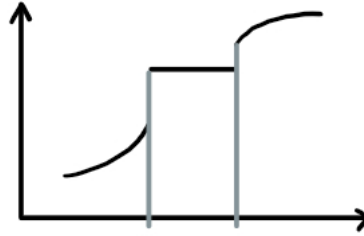


Abbildung 8: Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben und  $E = \{P_1, \dots, P_n\}$  die Menge der Unstetigkeitsstellen von  $f$ . Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass  $\{a, b\} \cap E = \emptyset$  (der andere Fall läuft analog). Sei

$$M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Wir wählen  $u_j, v_j \in [a, b]$ ,  $j = (1, \dots, n)$ , so dass

$$\begin{aligned} P_s &\in [u_j, v_j] \text{ und} \\ 2M(u_j - v_j) &< \frac{\epsilon}{2n} \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} I_1^\epsilon &= [a, u_1], \\ I_l^\epsilon &= [v_{l-1}, u_l] \quad (l = 2, \dots, n) \\ I_n^\epsilon &= [v_n, b] \end{aligned}$$

Per Voraussetzung ist  $f|_{I_j^\epsilon}$  ( $j = 1, \dots, n+1$ ) stetig.

Daher existiert nach Satz 3.5 eine Partition  $P_j^\epsilon$ , so dass:

$$S(P_j^\epsilon, f|_{I_j^\epsilon}) - s(P_j^\epsilon, f|_{I_j^\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2(n+1)}$$

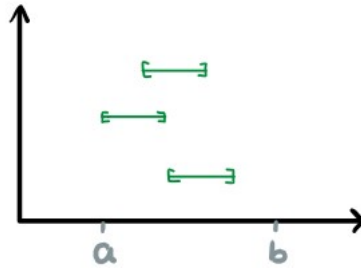


Abbildung 9: Treppenfunktion

Wir setzen  $P^\epsilon = \cup_{l=1}^n P_l^\epsilon \cup U_{l=1}^n \{u_l, v_l\}$ .  
Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P^\epsilon, f) - s(P^\epsilon, f) &= \sum_{l=1}^{n+1} S(P_l^\epsilon, f|_{I_l^\epsilon}) - s(P_l^\epsilon, f|_{I_l^\epsilon}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^n \left( \sup_{x \in [u_l, v_l]} f(x) - \inf_{x \in [u_l, v_l]} f(x) (v_l - u_l) \right) \\ &\leq \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2(n+1)} + \sum_{l=1}^n 2M \cdot (v_l - u_l) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

■

**Definition 3.4.** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Treppenfunktion (Abbildung 9), wenn es eine Partition  $Z = \{y_0, \dots, y_m\}$  von  $[a, b]$  gibt und für alle  $i \in \{0, \dots, m\}$  für  $c_i \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$f(x) = c_i \quad (x \in (y_{i-1}, y_i))$$

Satzbau?

gilt. Nach Satz 3.7 ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar.

Zur Berechnung des Integrals bedienen wir uns der Notation von Satz 10 und verwenden Satz 3.4c.

Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass  $f$  in  $a$  und  $b$  stetig ist. Das heißt die Menge der Unstetigkeitsstellen ist gegeben durch  $E = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$ .

Für  $x \in I_l^\epsilon$  gilt dann  $f(x) = c_l$  für alle  $l = 1, \dots, m$ . Dann gilt nach Satz 3.4c:

falsche Referenz -> hardgecodet

$$\left| \int_a^b f \, dx - \sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_i^\epsilon| + \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i) \cdot (v_i - u_i) \right| < \epsilon$$

$$\text{Für } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{ gilt: } \begin{cases} |I_1^1| \rightarrow y_1 - a \\ |I_l^2| \rightarrow y_l - y_{l-1} & (l = 2, \dots, m) \\ |I_{m+1}^\epsilon| \rightarrow b - y_m \end{cases}$$

Das heißt

$$\sum_{i=1}^{m+1} c_i |I_i^\epsilon| \rightarrow c_i (y_i - a) \sum_{i=2}^m c_i \cdot (y_i - y_{i-1}) + c_m (b - y_m) \quad (8)$$

Außerdem gilt  $v_i - u_j \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$  gilt  $\int_a^b f \, dx = \text{Gleichung 8}$

**Korollar 3.1.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, beziehungsweise monoton, beziehungsweise besitzt  $f$  höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen und ist beschränkt, so ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ .

**Bemerkung.** Mit Hilfe des Lebesgueschen Integrabilitätskriterium kann man sogar zeigen, dass beschränkte Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar sind.

**Beispiel 3.1.**

$$\int_0^a x \, dx$$

Da  $id : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, existiert das Integral.

Sei  $P_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$  eine Partition von  $[a, b]$ .

Es gilt:

$$\begin{aligned} S(P_n, x) &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(P_n, x) &= \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Da  $id$  integrierbar ist, gilt:

$$\int_0^a x \, dx \in [s(P_n, x), S(P_n, x)] = \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n} \right] n \in \mathbb{N}$$

Das heißt:

$$\int_0^a x \, dx \cap_{n \in \mathbb{N}} \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n} \right]$$

Also:  $\int_0^a x \, dx = \frac{a^2}{2}$

**Beispiel 3.2.** Sei  $D : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  die *Dirichlet-Funktion*, d.h

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für jede Partition  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ , dass

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1 \text{ und} \\ m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$$

Damit gilt:

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 1$$

Ergo:  $D$  ist nicht Riemann-integrierbar

**Satz 3.8.** Sei  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und  $m \leq f(x) \leq M$  ( $x \in [a,b]$ ). Sei ferner  $\Phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $\Phi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Da  $\Phi$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[m, M]$  stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$  (Ohne Einschränkung sei  $\delta < \epsilon$ ) mit :

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \epsilon$$

Da  $f$  integrierbar ist, gibt es eine Partition  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  mit

$$S(P, f) - s(P, f) < \delta^2$$

Wie üblich bezeichnen wir

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ und} \\ m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ und weiterhin} \\ M_i^+ = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \Phi \circ f \text{ sowie} \\ m_i^* = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \Phi \circ f(x)$$

Seien

$$A = \{i = 1, \dots, n \mid M_i - m_i < \delta\} \\ B = \{i = 1, \dots, n\} \setminus A$$

Aufgrund der Wahl von  $\delta$  gilt für alle  $i \in A$ :  $M_i^+ - m_i^* < \epsilon$  Weiter gilt:

$$\delta \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i = \sum_{i \in B} \delta \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \delta^2$$

Ergo:  $\sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \delta$ .

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
S(P, \Phi \circ f) - s(P, \Phi \circ f) &= \sum_{i=1}^n (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i \\
&= \sum_{i \in A} (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i^+ - m_i) \Delta x_i \\
&\leq \epsilon \sum_{i \in A} \Delta x_i + 2 \sup_{x \in [m, M]} |\Phi \circ f| \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i \\
&\leq \epsilon \left( |b - a| + 2 \sup_{x \in [m, M]} |\Phi \circ f(x)| \right)
\end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig, folgt die Behauptung mit 3.3. ■

**Satz 3.9.** Seien  $f_1, f_2, f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  Dann gilt:

1.

$$\int_a^b f_1 + f_2 \, dx = \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 \, dx$$

und für  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_a^b cf \, dx = c \int_a^b f \, dx$$

2. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned}
f_1 + f_2 &\in \mathcal{R}_{[a, b]} \text{ und} \\
cf &\in \mathcal{R}_{[a, b]}
\end{aligned}$$

3. Gilt  $f_1(x) \leq f_2(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) so folgt

$$\int_a^b f_1 \, dx \leq \int_a^b f_2 \, dx$$

4. Ist  $c \in (a, b)$ , und  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  so gilt

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^c f \, dx + \int_c^b f \, dx$$

5. Gilt  $M \geq f(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) so gilt

$$M \cdot (b - a) \geq \int_a^b f \, dx$$

*Beweis.* 1. Da  $f_i \in \mathcal{R}_{[a, b]}$  ( $i = 1, 2$ ) gibt es Partitionen  $P_i$  von  $[a, b]$  mit

$$S(P_i, f) - s(P_i, f) \leq \epsilon \text{ für ein festes } \epsilon > 0$$

Dann gilt für die gemeinsame Verfeinerung  $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, \dots, x_n\}$  nach Satz 3.1, dass

$$S(P, f_i) - s(P, f_i) \leq \epsilon \quad (i = 1, 2)$$

2. Es gilt

$$\sup_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + f_2(x) \leq \sup_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + \sup_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_2(x)$$

Analog gilt:

$$\inf_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + f_2(x) \geq \inf_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + \inf_{x \in [x_{i-1}-x_i]} f_2(x)$$

Damit folgt:

$$s(P, f_1) + s(P, f_2) \leq s(P, f_1 + f_2) \leq S(P, f_1 + f_2) \leq S(P, f_1) + S(P, f_2)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f_1 + f_2) - s(P, f_1 + f_2) &\leq S(P, f_1) - s(P, f_1) + S(P, f_2) - s(P, f_2) \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt war, gilt  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  nach Satz 3.3.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} s(P, f_1 + f_2), S(P, f_1 + f_2) &\in [s(P, f_1) - s(P, f_2), S(P, f_1) + S(P, f_2)] \\ &\subseteq \left[ \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 \, dx + 2\epsilon \right] \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt wurde, gilt:

$$\int_a^b f_1 + f_2 \, dx = \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 \, dx$$

Die Aussage bezüglich  $c \cdot f$  zeigt man analog.

3. Sei  $f_2(x) \geq f_1(x)$  ( $x \in [a, b]$ ). Dann gilt

$$\begin{aligned} f_2(x) - f_1(x) &\geq 0 \text{ und daher} \\ s(P, f_2 - f_1) &\geq 0 \end{aligned}$$

für jede Partition  $P$  von  $[a, b]$  Wegen 1 ist  $f_2 - f_1 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und es gilt:

$$\int_a^b f_2 \, dx = \int_a^b f_1 \, dx + \int_a^b f_2 - f_1 \, dx \geq \int_a^b f_1 \, dx$$

4. Für 3. betrachtet man zu beliebiger Partition  $P$  von  $[a, b]$  die Partition  $P' = \{c\} \cup P$

5. Folgt aus 2. mit  $f_1 = f$  und  $f_2 = M$  soweit

$$\int_a^b M \, dx = M \cdot (b - a)$$

■

**Bemerkung.**

- Eigenschaft 1 sagt, dass  $\mathcal{R}_{[a,b]}$  ein bezüglich der Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist
- Eigenschaft 1 sagt weiterhin, dass die Abbildung

$$\int_a^b dx : \mathcal{R}_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_a^b f \, dx$$

ein lineares Funktional ist

- Eigenschaft 2 sagt, dass dieses Funktional positiv ist (also nicht-negative Funktionen einen nicht negativen Wert zuordnet)
- Eigenschaft 4 impliziert eine gewisse Stetigkeit

**Satz 3.10.** Für  $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  gilt:

- $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
- $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und  $\int_a^b |f| \, dx \geq \left| \int_a^b f \, dx \right|$

*Beweis.* Sei  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2$ .

Dann ist  $\Phi$  stetig und damit  $\Phi \circ (f + g)$  bzw.  $\Phi \circ (f - g)$  aufgrund von Satz 3.9 und Satz 3.8 Riemann-integrierbar über  $[a, b]$ . Beachte:

$$fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

Nach Satz 3.8 gilt wieder  $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Sei nun  $c \in \{-1, 1\}$  so gewählt, dass

$$c \int_a^b f \, dx \geq 0$$

Offensichtlich gilt

$$|f(x)| = |cf(x)| \geq cf(x) \quad (x \in [a, b])$$

Damit gilt mit Satz 3.9

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| = c \int_a^b f \, dx = \int_a^b cf \, dx \stackrel{\text{Satz 3.9}}{\leq} \int_a^b |f| \, dx$$

■

**Satz 3.11** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g(x) \geq 0$  ( $x \in [a, b]$ ).

(Abbildung 10)

Dann existiert ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b fg \, dx = f(\xi) \int_a^b g \, dx$$



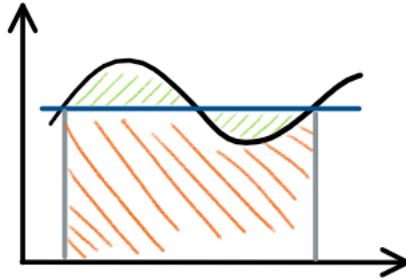


Abbildung 10: Mittelwertsatz der Integralrechnung

**Bemerkung:** Für  $g = 1$  gilt dann:

$$\int_a^b f \, dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

*Beweis.* Man setze:  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto f(y) \cdot \int_a^b g \, dx$ .  $h$  ist stetig und es gilt:

$$\begin{aligned} \inf_{y \in [a, b]} h(y) &= \inf_{y \in [a, b]} \int_a^b f(y)g(x) \, dx \\ &\leq \int_a^b \int_{y \in [a, b]} f(y)g(x) \, dx \\ &\stackrel{\text{Satz 3.9}}{\leq} \int_a^b f(x)g(x) \, dx \stackrel{\text{Satz 3.9}}{\leq} \int_a^b \sup_{y \in [a, b]} f(y)g(x) \, dx = \sup_{y \in [a, b]} h(y) \end{aligned}$$

Das heißt wir haben eine stetige Funktion  $h$  mit:

$$\int_a^b fg \, dx \in \left[ \inf_{y \in [a, b]} h(y), \sup_{y \in [a, b]} h(y) \right]$$

■

**Bemerkung.** Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

## 4 Differentiation und Integration

**Bemerkung.** Bisher hatten wir stets  $\int_a^b f \, dx$  mit  $a \leq b$  betrachtet. Für  $a \geq b$  setze man

$$\int_a^b f \, dx := - \int_b^a f \, dx$$

**Satz 4.1.** Sei  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Für  $a \leq x \leq b$  setze man

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

Dann gilt

1.  $F$  ist stetig auf  $[a, b]$
2. Ist  $f$  stetig in  $x_0 \in [a, b]$ , so ist  $F$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt:  $F'(x_0) = f(x_0)$

*Beweis.*

1. Da  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ , ist  $f$  insbesondere beschränkt. Das heißt es existiert ein  $M \in \mathbb{R}$  mit

$$|f(x)| \leq M \quad (x \in [a, b])$$

Sei nun  $\epsilon > 0$  gegeben. Setze  $\delta := \frac{\epsilon}{M}$ . Für  $x, y \in [a, b]$  mit  $|x - y| < \delta$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f \, dt - \int_a^y f \, dt \right| \\ &= \left| \int_a^x f \, dt + \int_y^x f \, dt - \int_a^y f \, dt \right| \\ &= \left| \int_y^x f \, dt \right| \leq \int_y^x |f| \, dt \\ &\leq M \cdot \int_y^x 1 \, dt = M(x - y) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt war, folgt die Aussage

Sei  $h \in \mathbb{R}$ , so dass  $x_0 + h \in [a, b]$ . Dann gibt es ein  $\xi_h$  zwischen  $x_0$  und  $x_0 + h$  mit:

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \frac{\int_a^{x_0+h} f(t) \, dt - \int_a^{x_0} f(t) \, dt}{h} \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(t) \, dt}{h} \\ &= f(\xi_h) \cdot \frac{\int_{x_0}^h dt}{h} \\ &= f(\xi_h) \cdot \frac{h}{h} \quad \text{Damit gilt:} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x_0) \end{aligned}$$

■

**Satz 4.2.** Ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und es gilt  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $F' = f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a)$$

**Bemerkung.**

- Eine Funktion  $F$  mit  $F' = f$  nennt man eine Stammfunktion von  $f$
- Man schreibt gerne  $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Man wähle eine Partition  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  mit

$$S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$$

Weiter existiert aufgrund des Mittelwertsatzes der Differential-Rechnung (Satz 2.3)  $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$  mit

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Nach Satz 3.4 gilt

$$\begin{aligned} \epsilon &> \left| \int_a^b f \, dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \\ &= \left| \int_a^b f \, dx - \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \right| \\ &= \left| \int_a^b f \, dx - (F(b) - F(a)) \right| \end{aligned}$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung.**

- Sei  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Dann bezeichnet man die Funktion

$$\begin{aligned} \int_a^\circ f \, dx : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_a^b f \, dx \end{aligned}$$

als unbestimmtes Integral von  $f$ .

- Satz 4.2 sagt also das jede Stammfunktion ein unbestimmtes Integral von  $f$  ist

**Proposition 4.1.** Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Eine Funktion  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann Stammfunktion von  $f$ , wenn  $F - G = \text{konst.}$

*Beweis.*  $\Leftarrow$

Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $F + c$

$$(F + c)' = F' = f$$

$\Rightarrow$

Das war eine Folgerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 2.3). ■

ich bin mir hier nicht sicher ob das nicht  $t \mapsto \int_a^x f \, dt$  sein müsste

**Bemerkung.** Oftmals wird ignoriert, dass sobald es eine Stammfunktion  $F$  von  $f$  gibt, es automatisch unendlich viele gibt. So schreibt man beispielsweise

$$\int f \, dx = F$$

oder spricht von „der“ Stammfunktion. Die obige Gleichung ist insofern problematisch, da die rechte Seite (und damit per Definition auch die linke Seite) nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Oftmals ist daher der etwas laxer Umgang mit den Begriffen unkritisch.

**Satz 4.3** (Partielle Integration). Seien  $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit

$$F' = f \text{ und } G' = g$$

wobei  $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ . Dann gilt:

$$\int_a^b F \cdot g \, dx = FG|_a^b - \int_a^b f \cdot G \, dx$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left( FG|_a^x - \int_a^x f \cdot G \, dt \right)' &= \left( F(x) \cdot G(x) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^x f G \, dt \right)' \\ &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - f(x)G(x) \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) \end{aligned}$$

Ergo: die rechte Seite ist eine Stammfunktion des Integranden der linken Seite. Damit folgt die Aussage aus Satz 4.2. ■

**Beispiel 4.1.**

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos^2(x) \, dx &= \int_a^b \cos(x) \cdot \cos(x) \, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x)|_a^b + \int_a^b \sin^2 \, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x)|_a^b + \int_a^b 1 - \cos^2(x) \, dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x)|_a^b + \int_a^b 1 \, dx - \int_a^b \cos^2(x) \, dx \Bigg| + \int_a^b \cos^2(x) \, dx \\ \Leftrightarrow 2 \int_a^b \cos^2(x) \, dx &= \cos(x) \cdot \sin(x)|_a^b + x|_a^b \Bigg| \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \int_a^b \cos^2(x) \, dx &= \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \sin(x) + x)|_a^b \\ \text{Ergo: } \int_a^b \cos^2(x) \, dx &= \frac{1}{2} (\cos(x) \sin(x)|_a^b + (b - a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln(x) \, dx & \text{ wobei } 0 \notin [a, b] \\
\int 1 \cdot \ln(x) \, dx &= x \cdot \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= x \cdot \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b 1 \, dx \\
&= x \cdot \ln(x) \Big|_a^b - x \Big|_a^b \\
&= x \cdot \ln(x) \Big|_a^b - (b - a)
\end{aligned}$$

**Satz 4.4.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \, dt = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) \, dx$$

*Beweis.* Sei  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt für  $t \in [c, d]$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F(\phi(t)) &= F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
&= f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
\text{Ergo: } \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} &= \int F(\phi(d)) - F(\phi(c)) \\
&= \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) \, dt
\end{aligned}$$

■

**Bemerkung.**

- Die Substitutionsregel lässt sich wie folgt nachrechnen

$$\phi'(t) dt = \frac{d\phi}{dt} dt$$

Dann lässt sich die Substitutions-Regel

$$\int_c^d f(\phi) \, d\phi = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x) \, dx$$

**Beispiel 4.2.**

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = r \int_{-r}^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \, dx$$

Wir wählen  $\phi(t) = r \cdot \sin(t)$  für  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Dann gilt mit der Substitutionsregel

(man beachte dass  $\phi(\frac{-\pi}{2}) = -r$  und  $\phi(\frac{\pi}{2}) = r$ ):

$$\begin{aligned} r \cdot \int_{-r}^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} dx &= r \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\phi^2(t)}{r^2}} \cdot \phi'(t) dt \\ &= r \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \cdot \cos(t) \cdot r dt \\ &= r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \\ &= \frac{r^2}{2} \cdot \pi \end{aligned}$$

**Beispiel 4.3.**

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} \text{ wobei } -1, 1 \notin [a, b]$$

Vorgehen Partialbruchzerlegung: Man zerlegt den Nennen in seine Linearfaktoren und bestimmt Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{1-x}$$

Man beachte, dass  $(1-x)(1+x) = 1-x^2$

Wir multiplizieren die Gleichung mit  $(1+x)(1-x)$  und erhalten:

$$1 = \alpha(1-x) + \beta(1+x) = \alpha + \beta + (\beta - \alpha)x \quad (x \in [a, b])$$

Also:  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  Damit gilt:

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left( \int_a^b \frac{dx}{1-x} + \int_a^b \frac{dx}{1+x} \right)$$

Nun gilt für  $\phi(t) = 1-t$ :

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x} = \int_{1-a}^{1-b} \frac{-1 dt}{1\phi(t)} = - \int_{-a}^{1-b} \frac{dt}{t} = -\ln(t)|_a^b$$

Weiter gilt mit  $\phi(t) = t-1$ :

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x} = \int_{1+a}^{1+b} \frac{dt}{t} = \ln(t)|_{1+a}^{1+b}$$

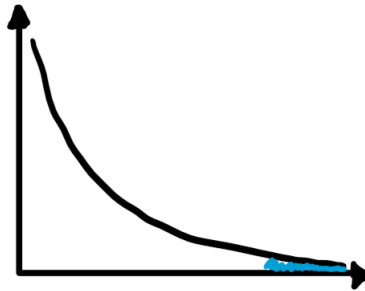
Ergo:

$$\frac{1}{2}(\ln(1+b) - \ln(1-b) - (\ln(1+a) - \ln(1-a))) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_a^b$$

## 4.1 Erweiterungen des Integralbegriffs

### 4.1.1 Uneigentliche Integrale

**Ziel:** Die Erweiterung des Integralbegriffs auf Integranden, die möglicherweise nicht beschränkt sind, beziehungsweise auf Integrationsintervalle, die nicht beschränkt sind.



1. Eine Intervallgrenze ist unendlich.

**Definition 4.1.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  auf jedem Intervall  $[a, b] \subset [a, \infty)$  Riemann-integrierbar.

Wir sagen  $f$  ist auf  $[a, \infty)$  uneigentlich integrierbar beziehungsweise  $\int_a^\infty f \, dx$  existiert, sofern der folgende Grenzwert existiert:

$$\int_a^\infty f \, dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f \, dx$$

Analog definiert man  $\int_{-\infty}^b f \, dx$  für  $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beispiel 4.4.**

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} \text{ für } s > 1$$

Denn: für  $b > 1$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x^s} &= \int_a^b x^{-s} \, dx = \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_a^b \\ &= \frac{(b^{-s+1} - a^{-s+1})}{-s+1} \stackrel{a=1}{=} \frac{1}{s-1} (1 - b^{-s+1}) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Hingegen ist  $\frac{1}{x^s}$  nicht unendlich integrierbar über  $[1, \infty)$ , falls  $s \leq 1$ . Für  $s = 1$  folgt das wie folgt:

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_1^b = \ln b \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \infty$$

2. Der Integrand ist an einer Intervallgrenze kritisch (also beispielsweise unbeschränkt).

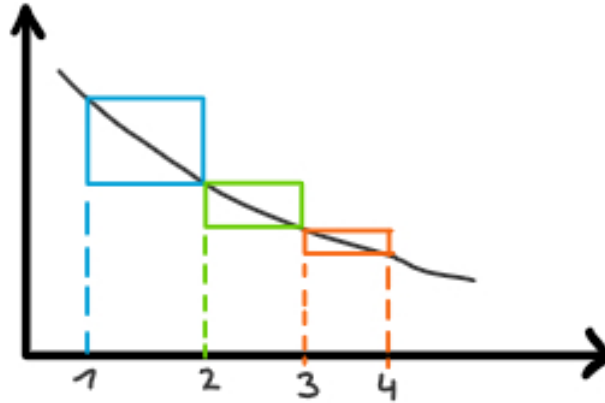
**Definition 4.2.** Sei  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  für jedes  $\epsilon \in (0, b-a)$  über  $[a+\epsilon, b]$  Riemann-integrierbar. Dann sagen wir, dass  $f$  über  $(a, b]$  uneigentlich integrierbar ist beziehungsweise dass  $\int_a^b f \, dx$  existiert, sofern folgender Grenzwert existiert:

$$\int_a^b f \, dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f \, dx$$

Analog bestimmt man  $\int_a^b f \, dx$ , falls  $b$  kritisch ist.

Caption  
fehlt

Abbildung 11: Monoton fallende positive Funktion



**Beispiel 4.5.**

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} \text{ existiert für } s < 1$$

für  $\epsilon > 0$  gilt:

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^s} = \int_{\epsilon}^1 x^{-s} dx = \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_{\epsilon}^1 = \frac{1}{1-s} (1 - \epsilon^{1-s}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-s}$$

3. Beide Integrationsgrenzen sind kritisch

**Definition 4.3.** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  für alle  $\alpha \in (a, b)$  und  $\beta \in (\alpha, b)$  Riemann-integrierbar über  $[\alpha, \beta]$ . Dann definiert man das uneigentliche Integral von  $f$  über  $[a, b]$  und sagt  $\int_a^b f dx$  existiert, sofern folgender Grenzwert existiert:

$$\int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^c f dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_c^{b-\delta} f dx \text{ wobei } c \in (a, b) \text{ sei}$$

**Bemerkung.**

- Die obige Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl der Zwischenstelle  $c$
- Ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  so stimmt das Riemann-Integral von  $f$  über  $[a, b]$  mit dem uneigentlichen Integral überein.

**Satz 4.5.** Sei  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton fallende positive Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f dx \text{ existiert}$$



*Beweis.*  $\Rightarrow$  Wir setzen  $g(x) = f(\lfloor x \rfloor)$

Dann gilt:

- $g(x) \geq f(x)$  ( $x \in [1, \infty]$ )
- $g \in \mathcal{R}_{[1,b]}$  für alle  $b > a$

$$\int_1^b f \, dx \leq \int_1^b g \, dx \leq \sum_{n=1}^{\lfloor b \rfloor} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

$\Leftarrow$  Sei  $h(x) = f(\lceil x \rceil)$  Dann gilt:

- $h \in \mathcal{R}_{[1,b]}$  für  $b > a$
- $h(x) \leq f(x)$  ( $x \in [1, \infty)$ )

Damit gilt:

$$\sum_{n=1}^{\lfloor b \rfloor} f(n) = f(1) + \int_1^{\lfloor b \rfloor} h(x) \, dx \leq f(1) + \int_1^{\lfloor b \rfloor} f \, dx < \infty$$

■

**Anwendung:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  konvergiert für jedes  $s > 1$

**Bemerkung** (Gauß-Klammer).

- für  $x \in \mathbb{R}$  bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  die größte ganze Zahl kleiner gleich  $x$  und  $\lceil x \rceil$  die kleinste ganze Zahl größer gleich  $x$
- Die *Gamma-Funktion*

$$\begin{aligned} \Gamma : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) \, dt \\ \Gamma(n) &= \int_0^1 (-\log x)^{n-1} \, dx \end{aligned}$$

Die  $\Gamma$ -Funktion ist wohldefiniert. Da

$$t^{x-1} \exp(-t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

existiert ein  $t_0 \in (0, \infty)$  mit:

$$t^{x-1} \exp(-t) < \frac{1}{t^2} \quad (t \geq t_0)$$

Damit gilt:

- $\int_{t_0}^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) \, dt \leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t^2} < \infty$
- $\int_0^{t_0} t^{x-1} \exp(-t) \, dt \leq \int_0^{t_0} t^{x-1} \, dt < \infty$  (siehe Beispiel 4.5)

**Satz 4.6** (Funktionsgleichung der  $\Gamma$ -Funktion). Für  $x > 0$  gilt:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

**Bemerkung.**

- $\Gamma(1) = 1$  (einfach nachrechnen)
- $\Gamma(2) = 2 \cdot \Gamma(1) = 2$

und so weiter. Wir sehen:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0, R > \epsilon$ . Dann gilt:

$$\int_{\epsilon}^R t^{x-1} \exp(-t) dt = -t^{x-1} \cdot \exp(-t) \Big|_{\epsilon}^R + \int_{\epsilon}^R (x-1)t^{x-2} \exp(-t) dt$$

Für  $x > 1$  gilt daher  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$

■

Bemerkung  
statt  $x-1$   
 $\rightarrow x+1$  ?

#### 4.1.2 Integrale über komplexwertige Funktionen

**Definition 4.4.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann heißt  $f$  auf  $[a, b]$  Riemann-integrierbar, falls  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  (Realteil beziehungsweise Imaginärteil von  $f$ ) Riemann-integrierbar sind über  $[a, b]$ . In diesem Falle definieren wir:

$$\int_a^b f dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f) dx$$

**Satz 4.7.** Seien  $f, f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Riemann-integrierbar über  $[a, b]$ , dann gilt:

- a) Für  $c \in \mathbb{C}$  ist  $c \cdot f$  Riemann-integrierbar über  $[a, b]$  sowie  $f_1 + f_2$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1 + f_2 dx &= \int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx \\ \int_a^b c \cdot f dx &= c \cdot \int_a^b f dx \end{aligned}$$

- b) Ist  $c \in (a, b)$ , so ist  $f$  über  $[a, c]$  und über  $[c, b]$  integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

- c)  $f_1 \cdot f_2$  ist integrierbar über  $[a, b]$   
d)  $\overline{f}$  ist integrierbar über  $[a, b]$

e)  $|f|$  ist integrierbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx$$

*Beweis.* a)-d) folgen sofort aus den Eigenschaften des Integrals über reellwertige Funktion

Punkt f  
fehlt oben  
?

e)  $|f| = \sqrt{f \cdot \bar{f}}$  ist integrierbar, auf Grund von c), d) und Satz 3.9

f) Wähle  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , so dass:

$\exp(i\varphi) \cdot \int_a^b f \, dx \in \mathbb{R}$  Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \, dx \right| &= \left| \exp(i\varphi) \cdot \int_a^b f \, dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \exp(i\varphi) \cdot f \, dx \right| = \left| \int_a^b \operatorname{Re}(\exp(i\varphi)f) \, dx \right| \\ &\leq \int_a^b |\operatorname{Re}(\exp(i\varphi)f)| \, dx \leq \int_a^b |\exp(i\varphi)f| \, dx \\ &= \int_a^b |f| \, dx \end{aligned}$$

■

**Bemerkung.**  $|\exp(i\varphi)| > 0$

## 5 Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind eine spezielle Form von Funktionalgleichungen. Funktionalgleichungen sind Gleichungen, in denen nach einer Funktion gesucht wird.

**Beispiel 5.1** (Welche Funktion erfüllt  $f^2 = f$ ?). Beispielsweise  $f(x) = 0$  oder  $f(x) = 1$ .

Oftmals ist die Lösung einer Funktionalgleichung in dieser Allgemeinheit gar nicht von Interesse und man schränkt den Lösungsraum in einer naheliegenden Weise ein. Man könnte beispielsweise für obige Gleichung fordern, dass  $f$  stetig sein soll. Aber selbst dann sind wir von einer eindeutigen Lösung entfernt. (Man betrachte beispielsweise

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 1; \\ f_0 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, f_0(x) = 0; \\ f_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

).

Uns sind bereits Funktionalgleichungen begegnet. Beispielsweise

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$$

Mögliche Lösung:  $\Phi(x) = a^x$  für  $a > 0$

Eine spezielle Form von Funktionalgleichungen die insbesondere in den Natur-, Ingenieurs-, oder Wirtschaftswissenschaften eine zentrale Rolle spielt, sind sogenannte *Differenzialgleichungen (DGLs)*, das heißt Funktionalgleichungen, die neben der Funktion selbst auch deren Ableitung beinhalten.

**Beispiel 5.2.** Sämtliche physikalische Grundgesetze beinhalten Differentialgleichungen.

Das 2. Newton'sche Gesetz: Das besagt, dass wenn ein Teilchen zur Zeit  $t_0 \in \mathbb{R}$  an einem Ort  $x_0$  mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  ist, dass das Teilchen zur Zeit  $t \in \mathbb{R}$  an der Stelle  $x(t)$  ist, wobei die Funktion  $t \mapsto x(t)$  folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{F(x(t))}{m}$$

Hierbei ist  $F(\cdot)$  die im jeweiligen Ort wirkende Kraft und  $x(t_0) = x_0, \frac{dx}{dt}(x_0) = v_0$ .

Konkretes Beispiel: Ein Massepunkt zwischen zwei Federn

Physik:  $F(x) = -k \cdot x$  ( $k$  Federkonstante)

Das heißt wir haben die folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{-k}{m} \cdot x$$

Mögliche Lösung:

$$x(t) = \alpha \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \beta \cos\left(\frac{k}{m}t\right)$$

Überprüfung:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \alpha \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) - \beta \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \right) \\ &= -\alpha \cdot \frac{k}{m} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) - \beta \cdot \frac{k}{m} \cdot \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \\ &= -\frac{k}{m} \cdot x(t)\end{aligned}$$

Wobei  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Durch Festlegen der Anfangsposition und Geschwindigkeit, können wir  $\alpha, \beta$  festlegen und erhalten eine eindeutig bestimmte (ohne Beweis) Lösung des Anfangswertproblems (das heißt Lösung der Differentialgleichung und Erfüllen der Anfangsbedingung).

Der Satz  
kling doof  
formuliert

**Bemerkung.**

- *Offensichtlich besitzt die Differentialgleichung alleine noch keine eindeutige Lösung. Für die Eindeutigkeit benötigen wir zusätzliche Informationen, zum Beispiel in Form von Anfangsbedingungen.*
- *Auch wenn man nicht jede Differentialgleichung analytisch lösen kann, kann man Lösungen raten und durch Einsetzen verifizieren.*

**Beispiel 5.3.** Die logistische Differentialgleichung (Anwendung in der Ökologie [Populationsentwicklung] beziehungsweise in der Ökonometrie [Wachstum eines Marktes])

Sei  $N(t)$  die Populationsgröße einer Bakterienkultur zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$ . Wir erwarten, dass die Änderungsrate  $\frac{dN(t)}{dt}$  einerseits proportional zur aktuellen Populationsgröße  $N(t)$  ist, andererseits aber natürlichen Grenzen (*Carrying capacity*) unterliegt.

$$\frac{dN(t)}{dt} = A \cdot N(t) \cdot (B - N(t)) \text{ wobei } A, B > 0$$

Allgemeine Lösung:

$$N(t) = \frac{1}{\alpha \cdot \exp(-ABt) + 1} \quad (t \geq 0)$$

wobei  $\alpha > -1$ .

**Definition 5.1.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nennen wir

$$\frac{dx(t)}{dx} = f(t, x(t)) \tag{9}$$

eine (explizite gewöhnliche) Differentialgleichung 1. Ordnung. Wir sagen:  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Lösung von Gleichung 9, wenn  $y$  differenzierbar ist und es gilt:

- i)  $\{(t, y(t)) | t \in (a, b)\} \subseteq G$
- ii)  $\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad (t \in (a, b))$

### Bemerkung.

- Punkt 1 ist nötig, um Punkt 2 überhaupt formulieren zu können.
- Gleichung 9 heißt Differentialgleichung erster Ordnung, da nur die erste Ableitung der gesuchten Funktion vorkommt. Allgemein kann man auch  $n$ -te Ableitungen zulassen und entsprechende Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung betrachten (siehe Newton), was wir aber mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht schematisch machen können.
- Im konkreten Fall der logistischen Differentialgleichung können wir setzen:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto A \cdot x \cdot (B - x) \end{aligned}$$

Wir sehen:  $f$  ist unabhängig von  $t$ . Eine solche Differentialgleichung nennen wir autonom.

## 5.1 Trennung der Variablen

Die Trennung der Variablen ist ein Verfahren, welches für Differentialgleichungen der folgenden Form geeignet ist:

Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  offene Intervalle und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $g(x) \neq 0$  ( $x \in J$ ). Dann heißt

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t) \cdot g(x(t)) \quad (10)$$

eine Differentialgleichung mit *getrennten Variablen*

das konnte keiner lesen

**Satz 5.1.** Seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  und  $f, g$  wie oben. Sei  $(t_0, x_0) \in I \times J$ . Wir definieren:

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(s) ds, G(x) := \int_{x_0}^x \frac{ds}{g(s)}$$

Sei  $I' \subseteq I$  ein Intervall mit  $t_0 \in I'$  und  $F(I') \subseteq G(J)$ . Dann gibt es genau eine Funktion  $y : I' \rightarrow \mathbb{R}$ , die Gleichung 10 löst und  $y(t_0) = x_0$  erfüllt und  $y$  genügt der Gleichung:

$$G(y(t)) = F(t)$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass jede Funktion  $y : I' \rightarrow \mathbb{R}$  die Gleichung 10 erfüllt, auch die Gleichung  $G(y(t)) = F(t)$  erfüllt.

$$\begin{aligned} G(y, t) &= \int_{y(t_0)=x_0}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} \\ &\stackrel{\text{Sub.-regel}}{=} \int_{t_0}^t \frac{y'(r)}{g(y(r))} dr = \int_{t_0}^t \frac{f(r)g(y(r))}{g(y, r)} dr \\ &= \int_{t_0}^t f(r) dr = F(t) \end{aligned}$$

Nun zur Eindeutigkeit:

Da  $g \neq 0$ , ist  $G$  streng monoton wachsend (falls  $g > 0$ ) oder streng monoton

fallend, falls  $g < 0$ . Da  $G$  differenzierbar ist (Satz vor dem Hauptsatz der Differentialrechnung) und invertierbar (wegen der Monotonie) existiert also eine differenzierbare Umkehrfunktion  $G^{-1}$ . Damit haben wir, dass für jede Lösung  $y : I' \rightarrow \mathbb{R}$  von Gleichung 10 mit  $y(t_0) = x_0$  gilt:

Referenzierung  
Satz 1 § 3

$$y(t) = G^{-1}(F(t)) \quad (t \in I')$$

Bleibt die Existenz nachzuweisen:

Wir setzen einfach  $G^{-1}(F(\cdot))$  in Gleichung 10 ein. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G^{-1}F(t) &= \left( \frac{d}{dt} G^{-1} \right) (F(t)) \cdot \frac{d}{dt} F(t) \\ &= \left( \frac{d}{dt} G^{-1} \right) \cdot (F(t)) \cdot f(t) \\ &= \frac{1}{\left( \frac{d}{dt} (G^{-1}(F(*))) \right)} \cdot f(t) \\ &= g(G^{-1}(F(t))) f(t) \end{aligned}$$

■

**Bemerkung.** Satz 5.1 lässt sich wie folgt merken:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t) \cdot g(x(t)) : g(x(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g(x(t))} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t) \mid \cdot „dt“ \\ \frac{dx}{g(x)} &= f(t) dt \end{aligned}$$

und integriere anschließend von  $x_0 \rightarrow x$  beziehungsweise  $t_0 \rightarrow t$

## 5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

**Bemerkung.** Bisher haben wir Differentialgleichungen stets in der Form

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

notiert. Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir im Folgenden etwas verkürzt schreiben:

$$x' = f(t, x)$$

und damit genau die obige Differentialgleichung meinen.

**Definition 5.2.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nennen wir die Differentialgleichung

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \tag{11}$$

eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Ist  $b = 0$  so nennen wir Gleichung 11 homogen, sonst inhomogen.

**Satz 5.2.** Wir betrachten die Differentialgleichung 11 mit den Bezeichnungen von oben und  $b = 0$ .

Für  $t_0 \in I$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  gilt:

Es gibt genau eine Lösung von Gleichung 11,  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(t_0) = x_0$  und zwar:

$$y(t) = x_0 \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right)$$

*Beweis.* Offensichtlich gilt:  $y(t_0) = x_0$ . Weiter haben wir:

$$y'(t) = x_0 \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t a(x) \, ds \right) \cdot a(t)$$

Ergo:  $y$  ist in der Tat eine Lösung von Gleichung 11 mit  $y(t_0) = x_0$ .

Eindeutigkeit: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{y} : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \exp \left( - \int_{t_0}^t a(x) \, ds \right) \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich:

$$\tilde{y}'(t) = -a(t) \cdot \tilde{y}(t).$$

Sei  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Lösung von Gleichung 11 mit  $z(t_0) = x_0$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (z \cdot \tilde{y})'(t) &= z'(t) \cdot \tilde{y}(t) + z(t) \cdot \tilde{y}'(t) \\ &= a(t) \cdot z(t) \cdot \tilde{y}(t) - z(t) \cdot a(t) \cdot \tilde{y}(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ergo:  $z \cdot \tilde{y} = \text{konst.} = c$

Ergo:

$$z(t) = c \cdot \frac{1}{\tilde{y}(t)} = c \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right).$$

Da

$$x_0 = z(t_0) = c \cdot \exp \left( \int_{t_0}^{t_0} a(s) \, ds \right) = c$$

folgt die Behauptung. ■

**Beispiel 5.4.** Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = \frac{-x}{t}, \text{ d.h. } a(t) = -\frac{1}{t}$$

Zum Anfangspunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist die eindeutige Lösung gegeben durch:

$$\begin{aligned} y(t) &= x_0 \cdot \exp \left( - \int_{t_0}^t \frac{1}{s} \, ds \right) \\ &= x_0 \cdot \exp \left( - \ln \left| \frac{t}{t_0} \right| \right) \\ &= x_0 \cdot \exp (\ln(t_0) - \ln(t)) = x_0 \cdot \frac{t_0}{t} \end{aligned}$$



**Satz 5.3** (Variation der Konstante). Wir betrachten die Differentialgleichung 11 mit den obigen Bezeichnungen und Annahmen an  $a$  und  $b$  (diesmal mit  $b \neq 0$ ). Dann gibt es für jedes  $t_0 \in I$  und alle  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  von Gleichung 11 mit  $y(t_0) = x_0$  und zwar:

$$y(t) = y_0(t) \left( x_0 + \int_{t_0}^t y_0(s)^{-1} b(s) \, ds \right),$$

wobei:

$$y_0(t) = \exp \left( \int_{t_0}^t a(s) \, ds \right) \quad (t \in I)$$

**Bemerkung.** Zur Bezeichnung „Variation der Konstante“: die obige Lösung sieht so aus wie die Lösung in Satz 5.2 nur, dass der Vorfaktor nicht mehr konstant ist, sondern von  $t$  abhängt, also „variiert“.

*Beweis.* Es gilt:

$$y(t_0) = y_0(t_0) \cdot x_0 = x_0$$

sowie

$$\begin{aligned} y'(t) &= y_0'(t) \cdot \left( x_0 + \int_{t_0}^t y_0(s)^{-1} \cdot b(s) \, ds \right) + y_0(t) \cdot y_0(t)^{-1} \cdot b(t) \\ &= a(t) \cdot y_0(t) \cdot \left( x_0 + \int_{t_0}^t \frac{1}{y_0(s)} b(s) \, ds \right) + b(t) \\ &= a(t)y(t) + b(t) \end{aligned}$$

für alle  $t \in I$ . Damit ist:  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von Gleichung 11 mit  $y(t_0) = x_0$ . Eindeutigkeit: Sei  $z: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Lösung von Gleichung 11 mit  $z(t_0) = x_0$ . Dann gilt für  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(t) = z(t) - y(t)$

$$\begin{aligned} h'(t) &= z'(t) - y'(t) = a(t)z(t) + b(t) - (a(t)y(t) + b(t)) \\ &= a(t)(z(t) - y(t)) = a(t) \cdot h(t) \end{aligned}$$

Ergo:  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lösung von Gleichung 11 mit  $b = 0$  mit Anfangswert  $h(t_0) = z(t_0) - y(t_0) = 0$ . Nach Satz 5.2 gilt:

$$h(t) = 0 \cdot \exp(\dots) = 0.$$

Damit gilt:  $z(t) = y(t)$  das heißt:

$$z(t) = y(t) \quad (t \in I).$$

■

**Beispiel 5.5.** Wir betrachten:  $x' = -\frac{x}{t} + t^3$  mit  $x(1) = x_0$ . Dann gilt:

$$y(t) = \frac{1}{t} \cdot \left( x_0 + \int_1^t s \cdot s^2 \, ds \right) = \frac{1}{t} \left( x_0 + \frac{s^5}{5} \Big|_1^t \right) = \frac{1}{t} \left( x_0 + \frac{t^5}{5} - \frac{1}{5} \right)$$

### 5.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Es wird im Folgenden nützlich sein auch komplexwertige Funktionen ableiten zu können.

**Definition 5.3.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Wir sagen,  $f$  ist stetig in  $x_0 \in I$ , wenn  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  stetig in  $x_0$  sind. Wir sagen  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  ist stetig, wenn  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  stetig ist. Wir sagen  $f$  ist in  $x_0 \in I$  differenzierbar, wenn  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  in  $x_0$  differenzierbar sind. Wir sagen, dass  $f$  differenzierbar ist, falls  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in I$  differenzierbar ist.

In diesem Falle ist die Ableitung von  $f$  gegeben durch  $f'(x) = \operatorname{Re}(f')(x) + i \cdot \operatorname{Im}(f')(x)$

**Bemerkung.** Aus der entsprechenden Aussage für reellwertige Funktionen sieht man sofort:

Ist  $f$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ , so ist  $f$  dort auch stetig.

**Satz 5.4.** Seien  $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Dann gilt:

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- Falls  $g(x) \neq 0$ , so gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

*Beweis.* Möglichkeit 1: genauso wie für reellwertige Funktionen.

Möglichkeit 2: mit Hilfe der Aussagen für reellwertige Funktionen. *Beispiel:*  $(f + g)' = (\operatorname{Re}(f) + \operatorname{Re}(g) + i \cdot (\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)))' = \operatorname{Re}(f') + \operatorname{Re}(g') + i \cdot (\operatorname{Im}(f') + \operatorname{Im}(g')) = f' + g'$  ■

**Satz 5.5.** Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g(J) \subseteq I$ . Ist  $g$  in  $x_0 \in J$  sowie  $f$  in  $g(x_0) \in I$  differenzierbar, so ist  $f \circ g$  in  $x_0$  differenzierbar und es gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

*Beweis.*  $f \circ g(x) = \operatorname{Re}(f \circ g)(x) + i \cdot \operatorname{Im}(f \circ g)(x)$  Also folgt mit der Kettenregel für reellwertige Funktionen:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \operatorname{Re}(f')(g(x_0)) \cdot g'(x_0) + i(\operatorname{Im}(f')g(x_0))g'(x_0) \\ &= (\operatorname{Re}(f')(g(x_0)) + i(\operatorname{Im}(f')g(x_0))) \cdot g'(x_0) \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

■

**Beispiel 5.6.**

$$\begin{aligned} \exp(ix)' &= (\cos(x) + i \sin(x))' = \cos'(x) + i \sin'(x) \\ &= -\sin(x) + i \cos(x) = i(i \sin(x) + \cos(x)) = i \exp(ix) \\ \exp(if(x))' &= if'(x) \exp(if(x)) \text{ Mit Satz 5.5} \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt damit auch für Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , das heißt:  
Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  Riemann-integrierbar und gibt es

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit} \\ F'(x) = f(x) \quad (x \in [a, b])$$

so gilt:

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a)$$

*Beweis.* folgt sofort aus der reellen Version. ■

**Definition 5.4.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und seien  $a_k : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) sowie  $b : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann heißt:

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \quad (12)$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. Ist  $b = 0$  so nennen wir Gleichung 12 homogen, sonst inhomogen. Wir nennen

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0x = 0 \quad (13)$$

auch den homogenen Teil von Gleichung 12. Wir sagen:  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $J \subseteq I$  ist eine Lösung von  $\begin{cases} \text{Gleichung 12} \\ \text{Gleichung 13} \end{cases}$ , falls:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

**Satz 5.6.** Wir betrachten die Differentialgleichung 12, sowie 13 mit den gleichen Bezeichnungen wie oben.

- Sei  $L_h$  die Menge aller Lösungen  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  von 13. Dann ist  $L_h$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$
- Sei  $L_i$  die Menge aller Lösungen  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  von 12. Dann gilt für ein beliebiges  $z_0 \in L_i$ :

$$L_i = z_0 + L_h = \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y = z_0 + f \text{ für ein } f \in L_h\}.$$

**Bemerkung.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Dann bedeutet  $\mathbb{K}^I = \{f : I \rightarrow \mathbb{K}\}$  die Menge aller Abbildungen von  $I$  nach  $\mathbb{K}$ . Auf  $\mathbb{K}^I$  definieren wir:

$$+ : \mathbb{K}^I \times \mathbb{K}^I \rightarrow \mathbb{K}^I \\ (f, g) \mapsto f + g$$

wobei  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  sei ( $x \in I$ ), sowie:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^I \rightarrow \mathbb{K}^I (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$$

Kennzeichnung  
als Ein-  
schub -  
Anfang

wobei  $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$  ( $x \in I$ ). Man kann leicht zeigen, dass  $(\mathbb{K}^I, \cdot, +)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist. Neutrales Element bezüglich  $+$ :

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{K}^I} : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

**Satz 5.7.** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $\emptyset \neq U \subseteq V$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} U \text{ ist ein VR} &\Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in U : x + y \in U \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in U : \lambda \cdot x &\in U \end{aligned}$$

ohne Nummer

*Beweis.* Lineare Algebra ■

**Beispiel 5.7.** Sei  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist n-mal stetig differenzierbar}\}$  beziehungsweise  $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist n-mal differenzierbar}\}$ .

Aufgrund der Summenregel der Differenzial-Rechnung sieht man mit obigen Satz sofort:

$$\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \text{ sind Vektorräume.}$$

Ist nun  $V$  ein Vektorraum, so sagen wir  $x_1, \dots, x_n \in V$  sind *linear unabhängig*, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \dots = \alpha_n = 0$$

Im konkreten Beispiel  $\mathbb{K}^I$  heißt das:

Die Funktionen  $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$  sind linear unabhängig, wenn für alle  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$  ein  $x \in I$  existiert mit:

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) \neq 0$$

Eine linear unabhängige Menge von Elementen  $x_1, \dots, x_n \in V$  heißt *Basis* von  $V$ , falls für alle  $x \in V$   $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  existiert mit:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

Wir sagen  $V$  hat *Dimension*  $n$ , wenn es eine  $n$ -elementige Basis von  $V$  gibt.

*Beweis.* 1. Die Existenz von Lösungen, das heißt  $L_h \neq \emptyset$ , sowie die Dimensionalität von  $L_h$  folgen mit Hilfe des Satzes von Picard- Lindelöf, den wir nicht behandeln werden.

Wir zeigen:  $L_h$  ist ein Vektorraum.

Seien dazu  $y_1, y_2 \in L_h$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} &(y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(\lambda)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + a_0(t)(y_1 + y_2) \\ &= y_1^{(n)} + a_{n-1}(t)y_1^{(n-1)} + \dots \\ &\quad + a_0(t)y_1 + y_2^{(n)} + a_{n-1}(t)y_2^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y_2 = 0 \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} &(\lambda y_1)^{(n)} + a_{n-1}(t)(\lambda y_1)^{(n-1)} + \dots + a_0(t)(\lambda y_1) \\ &= \lambda(y_1^{(n)} + a_{n-1}(t)y_1^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y_1) = 0 \end{aligned}$$

2. Sei  $z$  eine beliebige Lösung von 13. Dann gilt für jede Lösung  $y$  von 13:

$$\begin{aligned} & (z-y)^{(n)} + a_{n-1}(t)(z-y)^{(n-1)} + \dots + a_0(t)(z-y) \\ &= z^{(n)} + a_{n-1}(t)z^{(n-1)} + \dots + a_0(t)z \\ & \quad - \left( y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ergo:

$$(z-y) \in L_h \Rightarrow y-z \in L_h \mid +z \Leftrightarrow y \in L_h + z$$

■

**Definition 5.5.** Man nennt eine Basis des Vektorraums  $L_h$  auch ein Fundamentalsystem von 13

**Definition 5.6.** Seien  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}, I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $b : I \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Wir nennen:

Kennzeichnung  
Einschub -  
Ende

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = \begin{cases} b(t), & (14a) \\ 0, & (14b) \end{cases}$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir sagen:  $y : I \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Lösung von Gleichung 14a beziehungsweise 14b, falls:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

**Bemerkung.** Wir werden zunächst, um Rechenarbeit zu sparen, komplexwertige Lösungen zulassen und später aus diesen reellwertige konstruieren. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich vereinfacht mit „Differentialpolynomen“ beschreiben. Sei  $\mathbb{C}[t]$  die Menge aller Polynome der Form:

$$P(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$$

Wobei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Ersetzt man in  $P$  formal die Unbekannte  $t$  durch  $\frac{d}{dt}$ , so erhält man einen Differentialoperator.

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_0 + a_1 \cdot \frac{d}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n}{dt^n}$$

Das heißt  $P\left(\frac{d}{dt}\right)$  ist als Abbildung zu verstehen, die jedem  $n$ - und differenzierbaren  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion wie folgt zuweist:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) : \mathcal{D}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$$

das n  
klingt  
falsch

$$f \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} f$$

Der Witz an dieser Sichtweise : Jede lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, lässt sich einfach als

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

schreiben, wobei  $P \in \mathbb{C}[t]$  ein Polynom entsprechender Ordnung mit führendem Koeffizienten gleich 1 ist.

**Beispiel 5.8.** Die Differentialgleichung

$$x^{(3)} - 2x'' + x' - 2x = 0$$

lässt sich mit:

$$P(t) = t^3 - 2t^2 + t - 2$$

schreiben als:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = 0$$

**Proposition 5.1.** Seien  $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[t]$  und  $P = P_1 + P_2, Q = P_1 \cdot P_2$ . Dann gilt für jede ausreichend oft differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

1.  $P\left(\frac{d}{dt}\right)f = P_1\left(\frac{d}{dt}\right)f + P_2\left(\frac{d}{dt}\right)f$
2.  $Q\left(\frac{d}{dt}\right)f = P_1\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot P_2\left(\frac{d}{dt}\right)f$

*Beweis.* Wir machen Teil 1, Teil 2 läuft analog. Sei  $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $n$ -mal differenzierbar. Dann gilt mit:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \sum_{l=0}^{n_1} a_l \frac{d^l}{dt^l} f + \sum_{k=0}^{n_2} b_k \frac{d^k}{dt^k} f \\ &\stackrel{\substack{n_1 \leq n_2 \\ \text{o. E.}}}{=} \sum_{k=0}^{n_2} a_k \frac{d^k}{dt^k} f + b_k \frac{d^k}{dt^k} f + \sum_{l=0}^{n_1} a_l \frac{d^l}{dt^l} f \\ &= \sum_{k=0}^{n_2} (a_k + b_k) \frac{d^k}{dt^k} f + \sum_{k=n_2+1}^{n_1} a_k \frac{d^k}{dt^k} f \\ &= P\left(\frac{d}{dt}\right)f \end{aligned}$$

■

**Bemerkung.** Die obige Proposition sagt, dass wir mit Differentialpolynomen genauso rechnen können wie mit „monotonen“ Polynomen.

**Proposition 5.2.** Sei  $P(t) \in \mathbb{C}[t]$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\exp(\lambda t) = P(\lambda) \cdot \exp(\lambda t)$$

*Beweis.* Betrachte:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \exp(\lambda t) &= \lambda \cdot \exp(\lambda t) \text{ und analog} \\ \frac{d^l}{dt^l} \exp(\lambda t) &= \lambda^l \cdot \exp(\lambda t)\end{aligned}$$

Damit gilt für  $P(t) = \sum_{l=0}^n a_l t^l$ :

$$\begin{aligned}P\left(\frac{d}{dt}\right) \exp(\lambda t) &= \sum_{l=0}^n a_l \frac{d^l}{dt^l} \exp(\lambda t) \\ &= \sum_{l=0}^n a_l \lambda^l \exp(\lambda t) = P(\lambda) \exp(\lambda t)\end{aligned}$$

■

**Satz 5.8.** Sei

$$P(t) = \sum_{l=0}^n a_l t^l \in \mathbb{C}[t]$$

Angenommen  $P$  hat  $n$  paarweise verschiedene Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann sind die Funktionen

$$\begin{aligned}\varphi_k &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \\ \varphi_k(t) &= \exp(\lambda_k t) \quad (k = 1, \dots, n)\end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen von  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = 0$ .

*Beweis.* Tatsächlich gilt für alle  $k = 1, \dots, n$  dass:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi_k = P(\lambda_k) \cdot \exp(\lambda_k t) = 0$$

Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit der Funktionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  für  $k = 1, \dots, n$  mittels vollständiger Induktion.

$k = 1$  :

$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 t) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$k \rightarrow k+1$  Angenommen

$$\alpha_i \varphi_i + \dots + \varphi_{k+1} \alpha_{k+1} = 0$$

Zu zeigen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$$

Wir wenden

$$\left(\lambda_{k+1} - \frac{d}{dt}\right)$$

auf obige Gleichung an. Also:

$$\begin{aligned} \left(\lambda_{k+1} - \frac{d}{dt}\right) \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i \varphi_i(t) &= \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \left(\lambda_{k+1} - \frac{d}{dt}\right) \varphi_i(t) \\ &\stackrel{5.1}{=} \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \varphi_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \varphi_i(t) = 0 \end{aligned}$$

Da laut Induktionsvoraussetzung  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  linear unabhängig sind, muss gelten:

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1) - \alpha_2(\lambda_{k+1} - \lambda_1) = \dots = \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0$$

Da  $(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \neq 0$  ( $i \neq k$ ), folgt

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Da  $\varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) \neq 0$ , muss auch  $\lambda_{k+1}$  gelten und die lineare Unabhängigkeit folgt. ■

**Beispiel 5.9.** Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right) f &= 0 \text{ mit} \\ P(t) &= t^3 - 2t^2 + t - 2 = (t-i)(t+i)(t-2) \end{aligned}$$

hat die linear unabhängige Lösung

$$\varphi_1(t) = \exp(it), \varphi_2(t) = \exp(-it), \varphi_3 = \exp(2t)$$

Angenommen sämtliche Koeffizienten der Differentialgleichung sind reell. Wie erhalten wir aus Satz 5.5 ein reellwertiges Fundamentalsystem? Also sei  $P(t) \in \mathbb{R}[t]$  mit paarweise verschiedenen Nullstellen.

ref?

$$\begin{aligned} \lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_k, \overline{\lambda_k} &\in \mathbb{C} \\ \eta_1, \dots, \eta_l &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dann betrachten wir für  $i = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} \Psi_{i,1} &= \frac{1}{2} (\exp(\lambda_i \cdot t) + \exp(\overline{\lambda_i} \cdot t)) \\ &= \frac{1}{2} \exp(\operatorname{Re}(\lambda) \cdot t) \cdot \cos(\operatorname{Im}(\lambda) \cdot t) \\ \Psi_{i,2} &= \frac{1}{2i} (\exp(\lambda_i \cdot t) - \exp(\overline{\lambda_i} \cdot t)) \\ &= \exp(\operatorname{Re}(\lambda) \cdot t) \cdot \sin(\operatorname{Im}(\lambda) \cdot t) \end{aligned}$$

Und für  $i = 1, \dots, l$ :



$$\Psi_i = \exp(\eta \cdot t)$$

Da

$$\Psi_{i,1} + i\Psi_{i,2} = \exp(\lambda \cdot t) \text{ und}$$

$$\Psi_{i,1} - i\Psi_{i,2} = \exp(\overline{\lambda}t)$$

Sind  $\Psi_{1,1}, \Psi_{1,2}, \dots, \Psi_i$  ein Fundamentalsystem von  $P\left(\frac{d}{dt}\right)f = 0$ . Wir werden uns bei der Behandlung inhomogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf spezielle Inhomogenitäten der Form

$$b(t) = q(t) \cdot \exp(\mu t) \quad (\mu \in \mathbb{C})$$

beschränken, wobei  $q \in \mathbb{C}[t]$

**Definition 5.7.** Wir sagen die Differentialgleichung  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = q(t)\exp(\mu t)$  ist in Resonanz, falls  $P(\mu) = 0$ .

**Satz 5.9.** Sei  $P(t) = \sum_{l=0}^n a_l t^l \in \mathbb{C}[t]$  mit  $a_n = 1$  und  $\mu \in \mathbb{C}$  mit  $P(\mu) \neq 0$ . Sei weiter  $q \in \mathbb{C}[t]$ . Dann besitzt die Differentialgleichung

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = q(t)\exp(\mu t)$$

eine spezielle Lösung der Gestalt  $y(t) = r(t)\exp(\mu t)$ , wobei  $r \in \mathbb{C}[t]$  mit  $\deg(r) = \deg(q)$

**Bemerkung.** Mit Satz 10 und Satz 5 kennen wir also den kompletten Lösungsraum, das heißt, die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung, sobald wir das Polynom  $r$  kennen.

*Beweis.* Beachte:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} t^m \exp(\mu t) &= (mt^{m-1} + \mu t^m) \cdot \exp(\mu t) \\ \frac{d^2}{dt^2} t^m \exp(\mu t) &= (m(m-1)t^{m-2} + 2m\mu t^{m-1} + \mu^2 t^m) \exp(\mu t) \\ &\vdots \\ \frac{d^l}{dt^l} t^m \exp(\mu t) &= (\mu^l t^m + s_l(t)) \exp(\mu t) \end{aligned} \tag{15}$$

■

**Beispiel 5.10.**

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} - 2\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} + 2\right)x(t) = 2\sin(t)$$

Wir betrachten

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y_1(t) = i\exp(-it) \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y_2(t) = i\exp(it) \tag{18}$$

fehlt

Das bedeutet beide Polynome haben den selben Grad.

ref

ref

Mit Satz 12 (beziehungsweise dessen Beweis), sehen wir, dass

ref

$$y_1(t) = \frac{i}{P(-i)} \exp(-it) \text{ und } y_2(t) = \frac{i}{P(i)} \exp(it)$$

Lösungen von Gleichung 17 und Gleichung 18 sind. Mit

$$\begin{aligned} P(-i) &= (-i)^3 - 2(-i)^2 - 2(-i) + 2 \\ &= i + 2 + 2i + 2 = 4 + 3i \end{aligned}$$

und  $P(i) = \overline{P(-i)} = 4 - 3i$  ergibt sich

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right)(y_1(t) - y_2(t)) &= -i \exp(it) + i \exp(-it) \\ &= -i(\exp(it) - \exp(-it)) = 2 \sin t \end{aligned}$$

Eine spezielle reellwertige Lösung ist damit gegeben durch:

$$y(t) = \frac{8}{25} \sin(t) + \frac{6}{25} \cos(t)$$

**Beispiel 5.11.**

$$\frac{d^3}{dt^3} x(t) - x(t) = t = t \exp(0 \cdot t)$$

Mit  $P(t) = t^3 - t$  gilt  $P(0) \neq 0$

Nach Satz 12 existiert eine spezielle Lösung der Form  $y(t) = a + bt$ . Eingesetzt in die Differentialgleichung liefert das:

ref

$$\frac{d^3}{dt^3}(a + bt) - (a + bt) = -a - bt = t$$

Das heißt  $a = 0$  und  $b = -1$ . Damit ist  $y(t) = -t$  eine spezielle Lösung der Differentialgleichung  $P\left(\frac{d}{dt}\right)x = t$ .

## 6 Folgen und Reihen von Funktionen

Im Folgenden sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  beziehungsweise  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Sei  $D \subseteq K$  eine nicht leere Menge, dann bezeichnen wir mit  $\mathbb{K}^D$  die Menge aller Funktionen von  $D$  nach  $\mathbb{K}$ .

Eine *Folge* von Funktionen in  $\mathbb{K}^D$  ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{K}^D$ , wobei wir das Bild von  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f_n$  bezeichnen.

**Definition 6.1.** Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ . Wir sagen,  $(f_n)$  konvergiert Punktweise gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ , falls für alle  $x \in D$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

Analog sagen wir  $\sum_{n \geq 1} f_n$  konvergiert punktweise gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ , falls:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in D)$$

**Bemerkung.** In obiger Definition wird insbesondere voraus gesetzt, dass die Folge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

- Der Grenzwert  $f$  einer punktweise konvergenten Funktionenfolge ist stets eindeutig, da für jedes  $x \in D$  der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  eindeutig ist

*Fundamentales Problem im Kontext der Konvergenz von Funktionenfolgen:* „Hat Grenzwert  $f$  die „gleichen“ Eigenschaften wie die Folgenglieder  $f_n$ ?“

*Im Spezialfall:* Ist der punktweise Grenzwert  $f$  einer Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von stetigen Funktionen automatisch stetig?

*Kurz gesagt:* Sei  $f$  der punktweise Grenzwert von  $f_n$ , gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow y} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow y} f_n(x) = f(y)?$$

Die Antwort ist: **Nein!**

**Beispiel 6.1.** Sei

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1 - \frac{1}{n}) \\ nx - (n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Behauptung:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Dann sei  $x \in [0, 1]$ . Dann existiert ein  $n_x \in \mathbb{N}$  mit  $1 - \frac{1}{n_x} > x$  und entsprechend  $1 - \frac{1}{n} > x$  für alle  $n \geq n_x$ . Das heißt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

Andererseits gilt  $f_n(1) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Ergo:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$ .

Fazit: Um aus der Stetigkeit der Folgenglieder auf die Stetigkeit des Grenzwerts schließen zu können, braucht es eine Verschärfung des Konvergenzbegriffs. Ähnlich sieht es mit anderen Eigenschaften, wie Differenzierbarkeit beziehungsweise Integrierbarkeit aus.

**Definition 6.2.** Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ . Wir sagen  $(f_n)$  konvergiert gleichmäßig (glm.) gegen die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ , wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \forall x \in D \forall n \geq n_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Analog sagen wir  $\sum_{k \geq 1} f_k$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \forall x \in D \forall n \geq n_\epsilon : \left| \sum_{l=1}^n f_l(x) - f(x) \right| < \epsilon$$

**Bemerkung.** Offensichtlich impliziert gleichmäßige Konvergenz stets punktweise Konvergenz

**Satz 6.1.** Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig.

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Wähle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|f_n - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$  für alle  $x \in D$ . Da  $f_n$  stetig ist, gibt es für jedes  $x_0 \in D$  ein  $\delta > 0$ , so dass für  $y \in D$  mit  $|y - x_0| < \delta$  gilt:  $|f_n(y) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ . Dann gilt für alle  $y \in D$  mit  $|y - x_0| < \delta$ :

$$|f(x_0) - f(y)| \leq |f_n(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \epsilon$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig war, folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung.**

- Konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$ , so nennen wir  $f$  auch den gleichmäßigen Limes / Grenzwert von  $(f_n)$ . Analog reden wir vom Punktweisen Limes / Grenzwert.
- Der letzte Satz sagt, dass wir bei gleichmäßiger Konvergenz gewisse Grenzwerte vertauschen können, das heißt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow y} f_n(x) \text{ Unter den Voraussetzungen von Satz 2}$$

ref

- Ist  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$  um den Punkt  $x_0$ . Setzen wir

$$f_N = \sum_{n=0}^N a_n(x - x_0)^n$$

so ist  $f$  per Definition der punktweise Limes von  $(f_N)$ . Tatsächlich konvergieren die Funktionen  $f_N|_{B_r(x_0)}$  für beliebiges  $r \in (0, R)$  gleichmäßig gegen  $f|_{B_r(x_0)}$ . Denn:

$$\begin{aligned} \forall x \in B_r(x_0) : |f(x) - f_N(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n - \sum_{n=0}^N a_n(x - x_0)^n \right| \\ &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|(x - x_0)^n \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|r^n < \infty \end{aligned}$$

wobei die absolute Konvergenz von Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius ausgenutzt wurde.

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann existiert also  $N_\epsilon$ , so dass für alle  $N \geq N_\epsilon$  gilt:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|r^n < \epsilon.$$

Ergo: Wir haben gezeigt, dass für  $N \geq N_\epsilon$  gilt:

$$|f(x) - f_N(x)| < \epsilon \quad (x \in B_r(x_0))$$

Das zeigt insbesondere mit Satz 3, dass Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius stetig sind. ref

**Satz 6.2.** Sei  $D \subseteq \mathbb{K}$  und  $(f_n)$  eine Folge von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{K}$ . Dann gilt:

$(f_n)$  konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \forall n, m \geq n_\epsilon \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad (19)$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$  Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Da  $f_n$  gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  konvergiert, gibt es  $n_\epsilon$ , so dass für alle  $n \geq n_\epsilon$  gilt:

$$\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Dann gilt für  $n, m \geq n_\epsilon$ :

$$\forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Das heißt Gleichung 19 ist erfüllt.

$\Leftarrow$  Da für alle  $x \in D$   $(f_n(x))$  nach Gleichung 19 eine Cauchy-Folge ist, konvergiert  $(f_n(x))$ . Wir definieren:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert. Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann existiert nach 19 ein  $n_\epsilon$ , so dass für alle  $x \in D$  gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad (20)$$

solange  $n, m \geq n_\epsilon$ . Damit gilt für alle  $n \geq n_\epsilon$ :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Mit Gleichung 20 folgt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad (x \in D)$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig, folgt die gleichmäßige Konvergenz und damit die Behauptung. ■

**Satz 6.3.** Sei  $(f_n)$  eine Funktionenfolge von auf  $[a, b]$ -integrierbaren Funktionen, die gleichmäßig gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  konvergiert. Dann ist  $f$  integrierbar und

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, dx = \int_a^b f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dx$$

*Beweis.* Wir betrachten im Folgenden  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Der Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  folgt stets aus der separaten Betrachtung von Real- und Imaginärteil.

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann existiert per Voraussetzung ein  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$\forall x \in D : \forall n \geq n_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Es gilt also:

$$f_{n_\epsilon} - \epsilon \leq f(x) \leq f_{n_\epsilon} + \epsilon \quad (x \in [a, b])$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_{n_\epsilon} + \epsilon \, dx &= \int_a^b f_{n_\epsilon} \, dx + \epsilon \cdot (b - a) \\ &\leq \int_a^b f \, dx \leq \overline{\int_a^b f \, dx} \\ &\leq \int_a^b f \, dx + \epsilon \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Ergo:

$$\left| \int_a^b f \, dx - \overline{\int_a^b f \, dx} \right| \leq 2 \cdot \epsilon(b - a)$$

Da  $\epsilon > 0$  beliebig, folgt  $\int_a^b f \, dx = \overline{\int_a^b f \, dx}$ , das heißt  $f \in \mathcal{R}_{[a, b]}$ . Weiter gilt:

$$\left| \int_a^b f - f_n \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \, dx \leq \epsilon \cdot (b - a)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt die Behauptung. ■

**Korollar 6.1.** Ist  $f_n \in \mathcal{R}_{[a,b]}$   $n \in \mathbb{N}_0$  und konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  gleichmäßig gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , so ist  $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$  und

$$\int_a^b f \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n \, dx$$

**Bemerkung.** Wir können also gliedweise integrieren.

**Satz 6.4.** Seien  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar ( $n \in \mathbb{N}$ ). Weiter gelte, dass  $(f_n)$  punktweise gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert und  $(f'_n)$  gleichmäßig gegen  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  stetig differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = g(x) \quad (x \in [a, b])$$

*Beweis.* Da  $f'_n$  gleichmäßig gegen  $g$  konvergiert ist  $g$  stetig (Satz 3). Daher gilt nach Satz 4.1 dass  $G(x) = \int_a^x g \, dt$  differenzierbar ist und als Ableitung  $g$  besitzt. Weiterhin gilt mit Satz 5 :

$$\int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n \, dt = G(x)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt außerdem:

$$\int_a^x f'_n \, dt = f_n(x) - f_n(a)$$

Ergo:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n \, dt + \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = G(x) + f(a)$$

Damit ist  $f$  differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} G(x) = g(x)$$

■

**Bemerkung.** Das zeigt insbesondere, dass wir Potenzreihen gliedweise differenzieren können.

## 6.1 Fourier-Reihen

Fourier-Reihen sind spezielle Reihen, die insbesondere für die Approximation periodischer Funktionen geeignet sind.

**Definition 6.3.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $p$ -periodisch, beziehungsweise periodisch mit Periode  $p$ , wobei  $p > 0$  sei, wenn gilt:

$$f(x + p) = f(x)$$

**Beispiel 6.2.**  $\sin, \cos$  sind  $2\pi$ -periodisch.

**Bemerkung.**

- Selbstverständlich gilt für alle  $n \in \mathbb{Z}$ :  $f(x + np) = f(x)$ .
- Wir werden uns im Folgenden aus Notationsgründen auf 1-periodische Funktionen beschränken.  
Beachte: Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $p$ -periodisch, so ist

$$\begin{aligned}\tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \hat{f} &= f(px + 1)\end{aligned}$$

1-periodisch:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x + 1) &= f(px + 1) \\ &= f(px + p) = f(px) = \hat{f}\end{aligned}$$

Das heißt: Jede  $p$ -periodische Funktion lässt sich einfach in eine 1-periodische Funktion überführen und umgekehrt.

**Achtung:** In der Literatur beschränkt man sich auch gerne auf  $2\pi$ -periodische Funktionen.

**Definition 6.4.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  1-periodisch und Riemann-integrierbar über  $[0, 1]$ . Dann heißen die Zahlen

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 f(x) \cdot \exp(-2\pi \cdot i \cdot n \cdot x) \, dx$$

mit  $n \in \mathbb{Z}$  die Fourier-Koeffizienten von  $f$ . Weiter heißt die Reihe

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot \exp(2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot x),$$

das heißt die Folge der Partialsummen,

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) \exp(2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot x)$$

mit  $N \in \mathbb{N}$  Fourier-Reihe von  $f$ .

**Bemerkung.**

- Die Fourier-Reihe lässt sich zunächst für jede 1-periodische, integrierbare Funktion definieren. Ähnlich wie bei Taylorreihen ist aber a priori nicht klar, ob die Fourier-Reihe konvergiert, in welchem Sinne sie konvergiert und wenn sie konvergiert, ob sie gegen die original Funktion  $f$  konvergiert. Man kann zeigen: Die Fourier-Reihe konvergiert immer gegen  $f$  im sogenannten „quadratischen Mittel“, ein Begriff den wir hier nicht behandeln werden.

Satz nicht eindeutig von Weiter heißt die Reihe ... Fourier-Reihe von  $f$