Skript zur Vorlesung Analysis 2 für Lehramtsstudenten für das Gymnasium

19. Juli 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Differentiation **4**

2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen **11**

3 Riemann-Integral **21**

4 Differentiation und Integration **36**
4.1 Erweiterungen des Integralbegriffs 41
4.1.1 Uneigentliche Integrale 41
4.1.2 Integrale über komplexwertige Funktionen 45

5 Differentialgleichungen **46**
5.1 Trennung der Variablen 48
5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung 49
5.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) 52

6 Folgen und Reihen von Funktionen **61**
6.1 Fourier-Reihen 66

7 Grundbegriffe in metrischen und normierten Räumen **70**

8 Topologie metrischer Räume **81**

9 Grenzwerte & Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen **84**

10 Kompaktheit **88**

11 Der Banach'sche Fixpunktsatz **92**

Klausur

Beweis können. Aussage können.

- Mittelwertsatz (verallgemeinerter Mittelwertsatz)
- Regel von l'Hospital
- Satz von Taylor
- Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung
- Gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig
- Satz von Heine-Borel
- Banach'scher Fixpunktsatz

Keine Hilfsmittel!
Definitionen werden abgefragt. 6 Aufgaben, 50% Bestehensgrenze.
120 Minuten. $10^{\underline{00}}h - 12^{\underline{00}}h \rightarrow 9^{\underline{45}}h$ da sein

Konsultation zur Prüfung : Freitag 20.07.2018, ab $9^{\underline{00}}$ Uhr, SR 384 CZ 3

1 Differentiation

Definition 1.1. *Sei $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D(f)$ ein Punkt, um den ein offenes Intervall $B_\epsilon(x)$ (für geeignetes $\epsilon > 0$) komplett in $D(f)$ enthalten ist ($B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$). Dann heißt f an der Stelle x_0* differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
Wir meinen mit $f'(x_0)$ die Ableitung *(seltener* Differentialquotient*) von f an der Stelle x_0.*
Ist $f : D(f) \to \mathbb{R}$ in jedem $x \in D(f)$ differenzierbar, dann heißt f schlechthin differenzierbar. *Etwas irreführend wird auch die Abbildung*

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von f bezeichnet.

Satz 1.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$, so dass

   $$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0 \tag{1}$$

2. Es gibt ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ und $u : I \to \mathbb{R}$, so dass

   $$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$$

3. f ist in x_0 differenzierbar

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

Das heißt insbesondere c und $\tilde{c}$ sind eindeutig bestimmt

Bemerkung.

- *Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ wählen und setzt*

  $$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- *Vergisst man die Funktion ϕ, versteht man mit der Geradengleichung*

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an f in x_0

Hier ist der Satz unvollständig

Beweis.

$1 \leftrightarrow 2$ Man setzte einfach $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$ und $\tilde{c} = c$
(in $x = x_0$ setze man $u(x_0) = 0$)

$1 \to 2$ ZZ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c\end{aligned}$$

$3 \to 1$ Wir setzten $c = f'(x_0)$ und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \left|\frac{\phi(x)}{x - x_0}\right| &= \lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f(x_0) = 0\end{aligned}$$

■

Satz 1.2. Es sind äquivalent: $f : I \to \mathbb{R}$

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$
   mit: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\phi(x)}{|x-x_0|} = 0$
2. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$
   mit: $\lim\limits_{n \to \infty} u(x) = 0$
3. Der Grenzwert $f'(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert

Satz 1.3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis. ZZ ist: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Äquivalent dazu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.

Nun gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\frac{x-x_0}{x-x_0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$ ■

Bemerkung.

- *Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!*
  Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind.
  (Beispiel: Weierhaus-Fkt: $\sum_{n\in\mathbb{N}} cos(b_n \pi x)$ mit $a_n \in (0,1)$ und $a_n b_n > 1$)

- *Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar*

Satz 1.4. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x \in I$ differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (sofern $g(x) \neq 0$) in x differenzierbar.
Es gilt:

1. $(f+g)' = f'(x) + g'(x)$ (Summenregel)
2. $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Produktregel)
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

Beweis.

1. $$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{f(y)+g(y)-(f(x)+g(x))}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \frac{g(y)-g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y)-f(x)g(x)}{y-x} &= \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(x)g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} f(y) \frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x) \frac{f(x)-f(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} f(y) \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x) \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &\overset{Satz\ 1.3}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\lim_{y\to x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y-x} &= \lim_{y\to x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)}\frac{g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(y)}{g(y)}}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{1}{g(y)g(x)} \frac{f(y)g(x)-f(x)g(y)}{y-x} \\ &= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(x)-f(y)g(y)+f(y)g(y)-f(x)g(y)}{y-x} \\ &= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y\to x} f(y) \cdot \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + g(y) \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left(\lim_{y\to x} f(y) \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + \lim_{y\to x} g(y) \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right) \\ &= \frac{1}{g^2(x)} (f(x) \cdot (-g(x)) + g(x)f'(x)) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

■

Beispiel 1.1.

- $f(x) = c \in \mathbb{R} (x \in \mathbb{R})$
  $\to f'(x) = \lim_{x\to y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{x\to y} \frac{c-c}{y-x} = 0$

- $f(x) = x (x \in \mathbb{R})$
  $f'(x) = \lim_{x\to y} \frac{y-x}{y-x} = 1$

- $f(x) = x^n, (x \in \mathbb{R})$ wobei $n \in \mathbb{N}$
  $f'(x) = nx^{n-1}$ per Induktion:
  $n = 1$ Stichpunkt 2 ✓
  $n \to n+1$: Sei also $f(x) = x^{n+1}$. Das gibt mit der Produktregel:
  $f'(x) = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot (x^n)' = 1 \cdot xn + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für $p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$ gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^{n} l \cdot a_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^{n} l \cdot a_l x^{l-1}$$

- Seien P_1 und P_2 Polynome.
  Dann nennt man die Abbildung
  $Q : \mathbb{R} \setminus \{x | P_2(x) = 0\} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ eine rationale Funktion.
  Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

- Die Funktion $|\circ| \cdot x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \textit{für } x \geq 0 \\ -x & \textit{sonst} \end{cases}$ ist nicht in 0 differenzierbar.
  Denn:

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} = \lim_{y \searrow 0} \frac{y - 0}{y - 0} = 1$$
$$\lim_{y \nearrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{-y - 0}{y - 0} = -1$$

Satz 1.5 (Kettenregel)**.** Seien I_f und I_g Intervalle, $x_0 \in I_f$ und $f : I_f \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $g : I_g \to \mathbb{R}$ sei in $f(x_0)$ differenzierbar und $f(I_f) \subseteq I_g$. Dann gilt:

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

Beweis. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt für alle $x \in I_f$:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x))$$

(Wobei $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$)
Analog gilt für alle $y \in I_g$:

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei $\lim\limits_{y \to f(x_0)} v(y) = 0$
Damit haben wir für alle $x \in I_f$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) =& (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x)) \\ =& (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x)) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x)) + v(f(x)) \\ &= \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x \to x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0) g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

■

Definition 1.6. *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f* stetig differenzierbar. *Wir definieren weiterhin induktiv die k-te Ableitung (für $k \in \mathbb{N}$) durch:*

$$\begin{aligned} f^{(0)} &:= f \\ f^{(k+1)} &:= f^{(k)'} \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.
Ist $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert, so heißt f beliebig oft *beziehungsweise* unendlich oft differenzierbar.

Bemerkung. *Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.*

Satz 1.7. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, a_k \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe vom Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $p : x \mapsto p(x)$ auf ganz $(x_0 - R, x_0 + R)$ differenzierbar mit $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$.
Insbesondere ist p' auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius R.

Bemerkung.

1. *Damit erhalten wir:*

$$exp'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = exp(x)$$

2. *Damit sind Potenzreihen ∞ oft differenzierbar*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k \right) (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left(\limsup \sqrt[k+1]{(k+1) a_{k+1}} \right)^{-1} = R \left(da \sqrt[k]{k} \to 1 \right)$$

Damit ist p' wohldefiniert.
Wir zeigen nun, dass p' tatsächlich die Ableitung von p darstellt. ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$.
Dann gilt für $y \in (-R, R)$:

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x - y) = \sum_{k=\sigma}^{\infty} a_k \left(x^k - y^k \right) - (k+1) a_{k+1} y^k (x - y)$$

Wir setzen $\Delta(x,y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x-y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$.
Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass:

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right] \tag{2}$$

Für $n = 1$ ist $[...] = 0$ und für $n \geq 2$:

Hier nicht ... sondern Gleichungsnummer ?

$$\begin{aligned} [...] =& \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1) y^{n-1} \qquad (3) \\ =& \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} k x^{n-1-k} y^k . (n-1) y^{k-1} \\ =& \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\ =& \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\ =& (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^{k-1} \end{aligned}$$

Sein nun $|y| < r < R$ und $|x| \leq r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\Delta(x,y)| \leq& \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||x-y| \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1} \\ \leq& \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||x-y| r^{n-2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \leq |a_n| r^{n-2} n^2 |x-y| \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$ den Konvergenzradius R, weshalb

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$$

konvergiert. Damit folgt aber $\lim_{x \to y} \Delta(x,y) = 0$ ■

Proposition 1.1. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in $p \in (a,b)$ mit $f'(p) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $q = f(p)$ und es gilt:*

$$\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Beweis. Da f streng monoton ist, ist f^{-1} stetig.
Insbesondere gilt $f^{-1}(y) \to f^{-1}(q)$ für $y \to q$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to q} \frac{1}{y-q}\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(q)\right) &= \lim_{y\to q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \\
&= \left(\lim_{y\to q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}\right)^{-1} \\
&= \left(f'(f^{-1}(q))\right)^{-1} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(q)\right)}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Beispiel 1.2.

- k-te Wurtel $g : (0,\infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$ ist differenzierbar mit $g'(y) = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$
  Denn g ist Umkehrfunktion zu $f(x) = x^k$
  Damit gilt:
  $$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$$
- Logarithmus $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$. Es ist $\ln'(y) = \frac{1}{y}$, **denn:**
  $$\ln'(y) = \frac{1}{exp'(\ln y)} = \frac{1}{exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Bemerkung. *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist $x^\alpha := exp(\alpha \ln(x))$*
Anwendung: *Die Funktion $(\circ)^\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$ hat die Ableitung $((\circ)^\alpha)' : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$* ***denn***

$$\begin{aligned}
(x^\alpha)' =& exp'(\alpha \ln(x)) = exp(\alpha \ln x)\frac{\alpha}{x} \\
=& \alpha exp(\alpha \ln x) exp(-\ln x) = \alpha exp((\alpha-1)\ln x)) \\
=& \alpha x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ und $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

Definition 2.1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Wir sagen, f hat in $x_0 \in I$ ein* lokales Maximum (lokales Minimum), *falls ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0))\ \textit{gilt.}$$

Gilt:

$$f(x) \leq f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0))$$

für alle $x \in I$, so sagen wir, dass x_0 ein globales Maximum (globales Minimum) *ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von* strikten Maxima (strikte Minima). *Maximum und Minimum werden unter dem Begriff* Extremum *zusammengefasst.*

Satz 2.1. Seif $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Hat f ein lokales Maximum (lokales Minimum) in $x_0 \in (a, b)$ und existiert $f'(x_0)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Wegen differenzierbarkeit in x_0 folgt:

$$\textit{Gleichung } 1 = \textit{Gleichung } 2 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

■

Satz 2.2 (verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf ganz (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit:

$$(g(b) - g(a))\, f'(\xi) = (f(b) - f(a))\, g'(\xi)$$

Beweis. Wir betrachten $h : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto (g(b) - g(a))\, f(t) - (f(b) - f(a))\, g(t)$$

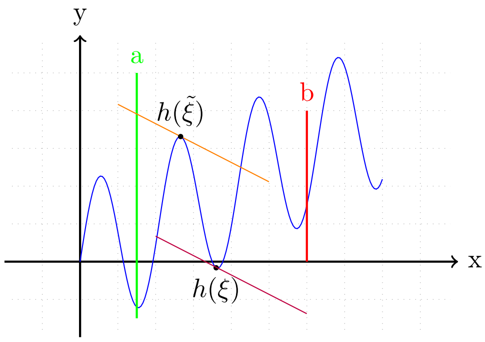
Offensichtlich *(nach Summenregel)* ist h differenzierbar auf (a, b). Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a))\, f'(t) - (f(b) - f(a))\, g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit folgt dann die Aussage.
Beachte:

$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a))\, f(a) - (f(b) - f(a))\, g(a) \\ &= g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ &= (g(b) - g(a))\, f(b) - (f(b) - f(a))\, g(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

Fall 1: $h = const$ Dann gilt trivialerweise $h' = 0$ und wir sind fertig.
Fall 2: $h \neq const$ Offensichtlich ist h stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Damit besitzt h ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein $\tilde{\xi} \in (a, b)$ mit $h(\tilde{\xi}) > h(a)$, sonst betrachte $-h$ statt h.[1]
Also existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h(\xi) \geq h(x)$ $(x \in [a, b])$. [2] Mit anderen Worten: ξ ist auch ein globales Maximum und und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 2.1 folgt: $h'(\xi) = 0$ ■



Satz 2.3 (Mittelwertsatz(MWS))**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

Bemerkung. *Es ist oft wichtig, dass f nur auf (a, b) differenzierbar sein muss.*

Beweis. Das folgt aus Satz 2.2 mit $g = id_{[a,b]}$, d.h. $g(x) = x$ $(x \in [a, b])$. ■

Satz 2.4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:

a) $f = const \Leftrightarrow f'(x) = 0$ $(x \in (a, b))$

b) f ist monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (x \in (a, b))$

c) f ist streng monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) > 0 (x \in (a, b))$

d) f ist monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 (x \in (a, b))$

e) f ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) < 0 (x \in (a, b))$

Beweis. a) folgt aus b) und c).
Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).
Sei $y > x \in [a, b]$. Sei $f|_{[x,y]}$ die *Einschränkung* von f auf $[x, y]$, das heißt:

$$f|_{[x,y]} : [x, y] \to \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

[1] Basti: Das ist wichtig, um sicher zu stellen, dass das globale Maximum nicht in a oder b angenommen wird. $\bar{\xi}$ ist erst einmal ein beliebiger Punkt und noch nicht zwingend das globale Maximum.

[2] Basti: Das ξ ohne Dach ist jetzt unser glob. Maximum, was nach der Argumentation zuvor o.E. nicht mehr in a oder b angenommen wird.

Offensichtlich erfüllt $f|_{[x,y]}$ die Bedingungen des MWS.
Es existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi)$
Fall b) $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0$
$\hookrightarrow f(y) \geq f(x)$
Fall c) $f(y) - f(x) > 0$
$\hookrightarrow f(y) > f(x)$
Beweis der Richtung $\Leftarrow$ in Teil b): Ist $f'(x) \geq 0$ so gilt

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da f monoton wachsend ist, gilt für $y > x$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für $\lim\limits_{y \nearrow x}$. ■

Korollar 2.1. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $f'(x) = g'(x)$ für $x \in (a, b)$. Dann gilt $f - g = const$

Beweis. Es gilt:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 2.4. ■

Satz 2.5. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall).
Gibt es $\xi \in I$ mit $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$ ($f''(\xi) > 0$), so nimmt f an der Stelle ξ ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $f''(\xi) < 0$. Für den Fall $f''(\xi) > 0$ betrachte man $-f$. Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$$r := \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$$

Das heißt es existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit:

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für $\epsilon := \frac{r}{2}$ gilt daher:

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right| \quad \text{für ein entsprechend gewähltes } \delta > 0$$

Insbesondere gilt also:

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.
Das heißt für $x < \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für $x > \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo: f' ist streng monoton fallend auf $(\xi - \delta, \xi]$ und streng monoton wachsend auf $[\xi, \xi + \delta)$
Da $f'(\xi) = 0$ folgt, dass $f'(x) > 0$ für $x \in (\xi - \delta, \xi]$ und $f'(x) < 0$ für $x \in [\xi, \xi + \delta)$.
Mit Satz 2.4 folgt:
$f|_{(\xi-\delta,\xi]}$ ist streng monoton wachsend und
$f|_{[\xi,\xi+\delta)}$ ist streng monoton fallend. ∎

Satz 2.6 (Regel von l'Hospital)**.** Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter gelte:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei $-\infty \leq A \leq \infty$ sei und $\lim_{x \to a} f(x) = 0$,
sowie $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ bzw. $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
Dann gilt: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Die analoge Aussage gilt auch für $x \to b$.

Bemerkung.

- *Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h.* $\pm\infty$ *sind als Grenzwerte zulässig.*
- *Zwei wesentliche Voraussetzungen:*
  1. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert!*
  2. *ebenso ist essentiell, dass* $f, g \to \frac{\circ}{\pm\infty}$
- *Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{exp(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{exp(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{exp(x)} = 0$$

- *Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form* $0 \cdot \infty$ *zu behandeln, indem wir diese in die Form*

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}} \text{ beziehungsweise}$$
$$\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

  umrechnen.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $x \to a$ ($x \to b$ läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:
Behauptung: Sei $A \in [-\infty, \infty)$.
Dann existiert für jedes $q > A$ ein $c > a$ mit

$$\forall x \in (a, c) : \frac{f(x)}{g(x)} < q\,.$$

Beweis der Behauptung:
Da $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \searrow a} A$ existiert ein $c' > a$ mit: $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ für ein beliebiges $r \in (A, q)$[3] und $x \in (a, c')$.
Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{4}$$

für ein geeignetes $t \in (x, y)$.
Für $a < x < y < c'$ gilt daher:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \tag{5}$$

Fall 1: $f, g \xrightarrow{x \to a} 0$. Nach Gleichung (5) gilt für $x \to a$

$$\forall y \in (a, c') : \frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q$$

Hier stand „$< r$“, aber nach dem Grenzwert sollte es $\leq r$ sein

Fall 2: $g(x) \xrightarrow{x \to a} \pm\infty$ Multipliziere (4) mit $\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$.
Dann erhalten wir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)$$
$$\to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Für $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein $c > a$ existieren sodass:
$\forall x \in (a, c) : \frac{f(x)}{g(x)} <$
Analog kann man zeigen:
Behauptung' : Sei $A \in (-\infty, \infty]$. Dann existiert für jedes $p < A$ ein $d > a$, so dass $p < \frac{f(x)}{g(x)}$ $(x \in (a, d))$
Für $A = +\infty$ folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für $A = -\infty$ aus

[3] Anmerkung von Basti: das r hat den gleichen Zweck wie q, man muss es nur aus „technischen Gründen“ einführen, da weiter unten durch Grenzwertbildung ein $\leq$ statt $<$ entsteht. Man kann r auch speziell wählen, falls einem das lieber ist: z.B. wäre $r = \frac{(A+q)}{2}$ eine geeignete Wahl.

der ersten Behauptung.
Für $A \in \mathbb{R}$ argumentieren wir wie folgt:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert $c > a$, so dass $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon$ $(x \in (a, c))$. Nach der zweiten Behauptung existiert $d > a$ mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \ (x \in (a, d))$$

Für $x \in (a, \min\{c, d\})$ gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

■

Beispiel 2.1. $f(x) = 1, g(x) = x + 7$
Dann gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$
aber: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

Beispiel 2.2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} &= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \textit{ für } \alpha > 0\end{aligned}$$

Definition 2.2. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in a (rechtsseitig) differenzierbar ist, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass f in b (linksseitig) differenzierbar ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existiert. Wir sagen, f ist auf $[a, b]$ differenzierbar, wenn f in (a, b) differenzierbar und in a rechtsseitig sowie in b linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe $n - Mal$ (stetig) differenzierbar etc...

Definition 2.3. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ $n-Mal$ differenzierbar. Dann heißt*

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha} :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto & \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!}(x - \alpha)^l \end{aligned}$$

das $n - te$ Taylorpolynom, wobei $\alpha \in I$ sei, von f an der Stelle α.

Bemerkung. *Offensichtlich gilt:* $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$ *(für jedes* $n \in \mathbb{N}$*). Weiter gilt:*

$$f'(\alpha) = P'_{n,\alpha}(\alpha) = \left(\sum_{l=0}^{n} l \cdot \frac{f^l(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^{l-1} \right)$$

und analog:

$$f^{(l)}(\alpha) = P^{(l)}_{n,\alpha} = P^{(l)}_{n,\alpha}(\alpha)$$
$$(l = 1, ..., n)$$

Satz 2.7 (Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied))**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und f $(n-1)$-mal stetig differenzierbar (auf $[a, b]$) und n-mal differenzierbar auf (a, b).[4] Seien $\alpha \neq \beta$ in $[a, b]$ gegeben. Dann existiert ein x zwischen α und β, so dass gilt:

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n$$

Beweis. Wähle $M \in \mathbb{R}$ mit

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta - \alpha)^n$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein x zwischen α und β mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

[5] Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h(t) =& f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t - \alpha)^n \textit{ für } t \in [a, b] \\ h(\beta) =& f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta - \alpha)^n = 0 \\ h(\alpha) =& f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - M(\alpha - \alpha)^n = 0 \qquad \text{(siehe obige Bemerekung)} \\ h'(\alpha) =& f'(\alpha) - P'_{n-1,\alpha}(\alpha) - n \cdot M(\alpha - \alpha)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \textit{ für } l = 1, ..., n - 1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein x_1 zwischen α und β mit $h'(x_1) = 0$. Analog gibt es zwischen α und x_1 ein x_2 mit $h''(x_2) = 0$. Man findet also $x_1, ..., x_{n-1}$ mit $h^{(l)}(x_l) = 0$ $(l = 1, ..., n - 1)$.[6] Insbesondere existiert ein x zwischen α und x_{n-1} (also zwischen α und β) mit $h^{(n)}(x) = 0$. Damit gilt

das sollte von 1 bis n gelten

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P^{(n)'}_{n-1,\alpha}(x) - M \cdot n! \cdot (x - \alpha)^0$$

und daher $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$ ∎

Bemerkung. *Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte Lagrange'sche Darstellung*

[4] Anmerkung von Basti: f ist wegen der zweiten Aussage sowieso stetig diffbar auf (a, b), aber die erste Aussage fordert zusätzlich die Stetigkeit in a und b

[5] Anmerkung von Basti: $P^{(n)}_{n-1,\alpha} \equiv 0$ da n-te Ableitung eines Polynoms $n-1$-ten Grades

[6] Veranschaulichung siehe Abbildung 1

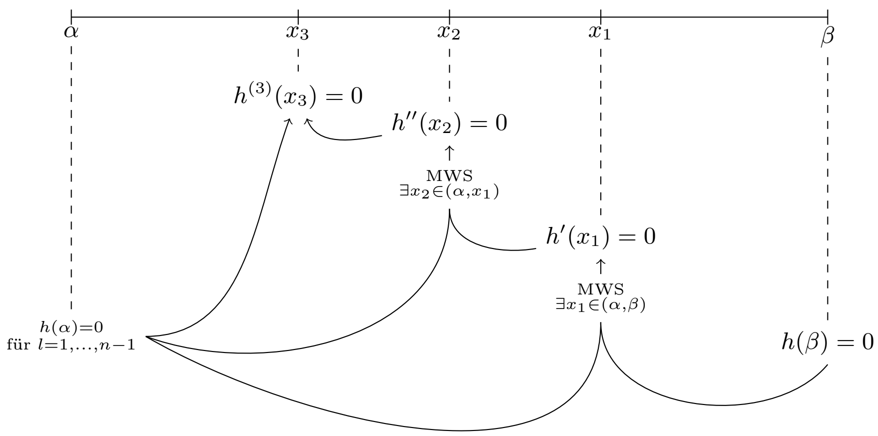


Abbildung 1: Basti: Versuch einer Veranschaulichung des Beweises vom Satz von Taylor.

Beispiel 2.3. Sei $f(x) = \sqrt{1+x}$. Offensichtlich:

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ f''(x) =& -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}t^2$$

für ein x zwischen 0 und t.
Für $t > 0$ ergibt sich damit:

$$\left|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)\right| < \frac{t^2}{8}$$

Korollar 2.2. Ist $g : I \to \mathbb{R}$ $n - Mal$ differenzierbar und $g^{(n)} = 0$, so ist g ein Polynom höchstens $(n-1) - ten$ Gerades

Korollar 2.3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n + 1) - mal$ stetig differenzierbar und $\alpha \in I$ mit $f^{(l)}(\alpha) = 0$ für alle $l = 1, ..., n - 1$ und $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$.
Dann gilt:

- ist n ungerade, so ist α keine Extremstelle
- ist n gerade, so ist α eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist $f^{(n)}(\alpha) < 0$, so ist α eine Maximalstelle. Ist $f^{(n)}(\alpha) > 0$, so ist α Minimalstelle.

Beweis.

- Wir betrachten nur den Fall n gerade und $f^{(n)}(\alpha) > 0$.
  Nach dem Satz von Taylor gilt für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) =& P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\left(f^{(n)}(\alpha) + (\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)}(x-\alpha)\right) \end{aligned}$$

  für ein t zwischen x und α. Für x hinreichend nah an α erhalten wir:

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1}(x-\alpha)$$

  Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

  Da ist also $f(x) > f(\alpha)$ für x hinreichend nah an α.
  Sprich: α *ist strikte lokale Minimalstelle*

■

Definition 2.4. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylor-reihe am Entwicklungspunkt $\alpha \in I$.*

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Bemerkung.

- *im Allgemeinen konvergiert $T_{f,\alpha}(x)$ für $x \neq \alpha$ nicht*
- *Der Satz von Taylor behandelt* nicht *die Taylor-reihe*
- *Selbst wenn $T_{f,\alpha}(x)$ konvergiert, muss $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$ nicht gelten*
- *Sei $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$ Dann gilt :*

$$P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \to 0$$

Satz 2.8. Sei $f(x) = \sum_{n_0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$ und $R > 0$ der zugehörige Konvergenzradius von f.
Dann ist f auf $(\alpha - R, \alpha + R)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

das heißt, die Taylor-reihe $T_{f,\alpha}$ stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.

Beweis. Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x-\alpha)^{n-1} \\ &\vdots \\ f^{(l)} &= l! \cdot a_l + \sum_{n=l-1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-l) a_n (x-\alpha)^{n-l} \end{aligned}$$

für $l \in \mathbb{N}$:

$$(x-\alpha) = 0 \text{ für } x = \alpha$$

Also: $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$ ■

3 Riemann-Integral

Ziel: Wir wollen auf „natürliche“ Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der $x-$Achse zu bestimmen (Abbildung 2).

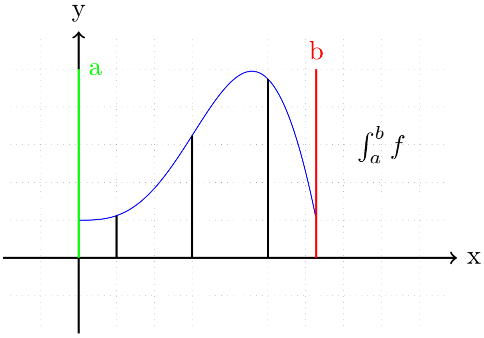


Abbildung 2: Vorgehen

Dabei heißt auf *natürliche Weise* insbesondere:

- gilt $f(x) = c = const$ für alle $x \in D(f) = [a, b]$, so soll gelten (Abbildung 3)

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = c \cdot (b - a)$$

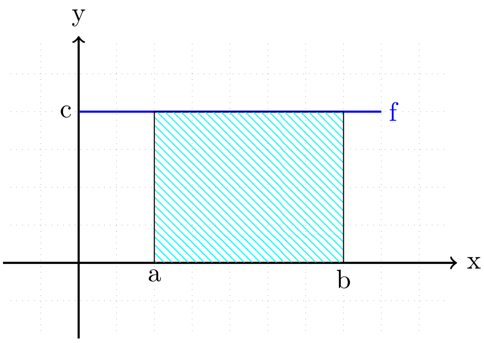


Abbildung 3: Konstante Funktion

- gilt $f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a, b])$ so fordern wir (Abbildung 4)

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x$$

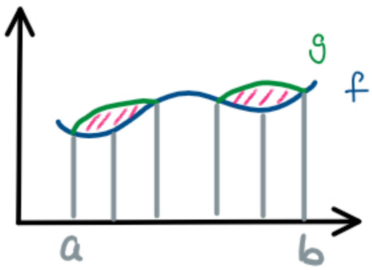


Abbildung 4: Flächeninhalt zweier Funktionen

- für $c \in [a, b]$ soll gelten (Abbildung 5)

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^c f \, \mathrm{d}x + \int_c^b f \, \mathrm{d}x$$

Vorgehen: Man unterteile $[a, b]$ in „viele“ Teilintervalle, auf denen f nahezu konstant ist.

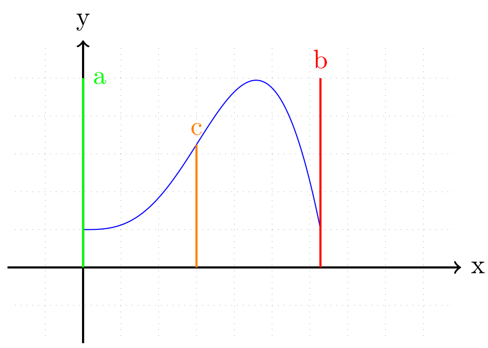


Abbildung 5: Integral aufteilen

Definition 3.1. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine* Partition P *(Abbildung 6) von $[a, b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$.*
Wir schreiben $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Definition 3.2. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$.*
Wir schreiben:

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$m_i(p) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

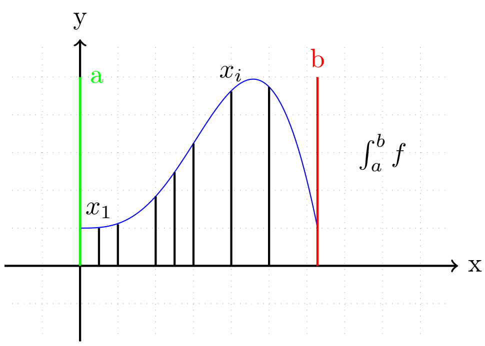


Abbildung 6: Partition

Weiter definieren wir:

$$S(P,f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$
$$s(P,f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

Wir setzen:

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \inf S(P,f)$$
$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \sup s(P,f)$$

wobei Infimum und Supremum über alle Partitionen von $[a,b]$ *genommen werden. Wir nennen*

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \ \textit{das} \text{ obere } \textit{und}$$
$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \ \textit{das} \text{ untere}$$

Riemann-integral *von* f *über* $[a,b]$
Gilt:

$$\int_a^{\bar{b}} f \,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

so sagen wir f *ist* Riemann-integrierbar *(*integrierbar*) und nennen*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

das Riemann-integral *von* f *über* $[a,b]$.
Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ *bezeichnen wir mit* $\mathcal{R}$ *beziehungsweise* $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

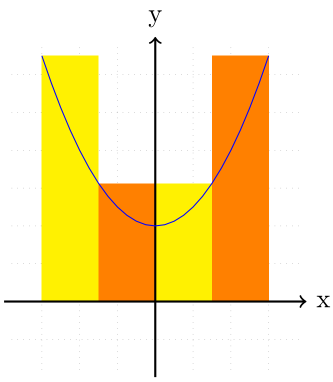


Abbildung 7: oberes Riemann-Integral

Bemerkung.

- *Da f beschränkt ist, gibt es $m \leq M$ in $\mathbb{R}$ mit:*
$$m \leq f(x) \leq M \;\; (x \in [a, b])$$
Damit gilt für jede jede Partition P:
$$m \cdot (b - a) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq M \cdot (b - a)$$
Ergo: $\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$, $\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$ *sind wohldefiniert.*
- *im gesamten Kapitel 3 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen*

Definition 3.3. *Seien P_1, P_2 zwei Partitionen eines Intervalls. Dann heißt P_1* Verfeinerung *von P_2, wenn gilt: $P_2 \subseteq P_1$*
Weiterhin nennen wir $P_1 \cup P_2$ die gemeinsame *Verfeinerung von P_1 und P_2.*

Satz 3.1. Ist P' eine Verfeinerung der Partition P von $[a, b]$, dann gilt:
$$\begin{aligned} S(P, f) \geq & S(P', f) \\ s(P, f) \leq & s(P', f) \end{aligned}$$
(wobei f wie in Definition 3.2 sei).

Beweis. Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass P' sich von P in nur einem Element x' unterscheidet.
Das heißt: $P' = P \cup \{x'\}$
Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x' \in [x_{i-1}, x_i]$
(wobei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\}$ sei).
Wir definieren:
$$W_1 := \sup_{[x_{i-1}, x']} f(x)$$
$$W_2 := \sup_{[x', x_i]} f(x)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}S(P,f)-S(P',f)=&M_i\Delta x_i - W_1\cdot(x'-x_{i-1}) - W_2\cdot(x_i-x')\\=&(M_i-W_1)\cdot(x'-x_{i-1})+(M_i-W_2)\cdot(x_i-x')\geq 0\end{aligned}$$

Enthält P' k Punkte, die nicht in P enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt k-mal durch. ■

Satz 3.2. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Seien P_1, P_2 zwei Partitionierungen von $[a,b]$ und P' die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:

$$s(P_1,f)\leq s(P',f)\leq S(P',f)\leq S(P_2,f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1,f)\leq S(P_2,f)$$

für alle Partitionierungen P_1, P_2.
Sprich: $S(P_2,f)$ ist stets obere Schranke von $s(P,f)$ für alle Partitionen P von $[a,b]$. Ergo:

$$\sup s(P,f)\leq S(P_2,f)$$

Damit ist also $\sup s(P,f)$ untere Schranke von $S(P,f)$ (P beliebige Partition).
Ergo: $\sup s(P,f)\leq \inf S(P,f)$
Wir haben also gezeigt:

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \sup s(P,f)\leq \inf S(P,f) = \inf \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$$

■

Satz 3.3. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon>0$ eine Partition P_ϵ existiert mit:

$$S(P_2,f)-s(P_2,f)<\epsilon$$

Beweis. Per Definition gilt

$$s(P_\epsilon,f)\leq \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 3.2}{\leq} \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon,f)$$

Damit erhalten wir:

$$\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon,f)-s(P_\epsilon,f)<\epsilon$$

Das heißt, da ϵ beliebig, dass:

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Ergo: $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Per Definition gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein P'_ϵ mit:

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x - s(P'_\epsilon, f) < \frac{\epsilon}{2} \tag{6}$$

Analog existiert ein P''_ϵ mit

$$S(P''_\epsilon, f) - \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x) < \frac{\epsilon}{2} \tag{7}$$

Wir setzten P_ϵ gleich der gemeinsamen Vereinigung von P'_ϵ und P''_ϵ. Man beachte: Wegen Satz 3.1 gelten Gleichung 6 und Gleichung 7, wenn wir P'_ϵ, beziehungsweise P''_ϵ, durch P_ϵ ersetzen. Da $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt außerdem:

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Addition von Gleichung 6 und Gleichung 7 liefert:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

■

Satz 3.4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P_\epsilon = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$ mit $S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$.

1. Ist P eine Verfeinerung von P_ϵ, so gilt $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$
2. Sind s_i, t_i beliebige Punkte in $[x_{i-1}, x_i]$, so gilt:
$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i < \epsilon$$
3. Ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, so gilt
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| < \epsilon$$

Beweis.

1. Das folgt aus Satz 3.1
2. $$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

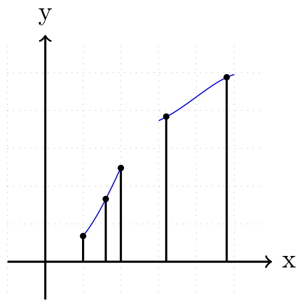


Abbildung 8: Monotone Funktion

3. Da $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, gilt $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$
   Damit folgt die Aussage aus

$$s(P_\epsilon, f) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f)$$

   und $s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon, f)$

■

Wir wollen im Folgenden wichtige Vertreter Riemann-integrierbarer Funktionen kennenlernen.

Satz 3.5. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Beweis. Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt sind, ist f offensichtlich beschränkt. Weiterhin ist f als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass folgende Implikation gilt:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wir wählen eine Partition $P_\epsilon = \{x_0, \ldots, x_n\}$, so dass $\Delta x_i < \delta$. Dann gilt:

$$M_i - m_i < \epsilon \text{ und daher}$$

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \epsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon \cdot (b - a)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die Aussage mit Satz 3.3. ■

Satz 3.6. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Beweis. Da f monoton ist, gilt für alle $x \in [a, b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
Das heißt f ist beschränkt. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Partition $P_n = \{x_0, \ldots, x_k\}$ mit $\Delta x_i < \frac{1}{n}$. Dann gilt:

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend (der andere Fall läuft analog). Dann gilt:

$$\begin{aligned} M_i =& f(x_i) \text{ und} \\ m_i =& f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} S(P_n, f) - s(P_n, f) =& \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ \leq& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle n_ϵ so dass gilt:

$$\frac{1}{n_\epsilon}(f(b) - f(a)) < \epsilon$$

Dann gilt mit $P_\epsilon := P_{n_\epsilon}$ die Aussage nach Satz 3.3 ■

Satz 3.7. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen Dann gilt $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

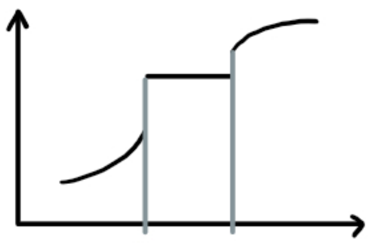


Abbildung 9: Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $E = \{P_1, \ldots, P_n\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\{a, b\} \cap E = \emptyset$ (der andere Fall läuft analog). Sei

$$M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Wir wählen $u_j, v_j \in [a, b]$, $j = (1, \ldots, n)$, so dass

$$\begin{aligned} P_s \in& [u_j, v_j] \text{ und} \\ 2M(u_j - v_j) <& \frac{\epsilon}{2n} \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} I_1^\epsilon =& [a, u_1], \\ I_l^\epsilon =& [v_{l-1}, u_l] \ (l = 2, \ldots, n) \\ I_n^\epsilon =& [v_n, b] \end{aligned}$$

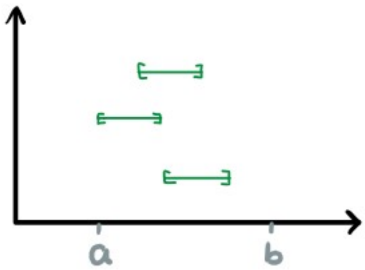


Abbildung 10: Treppenfunktion

Per Voraussetzung ist $f_{|I_j^\epsilon}(j = 1, \dots, n+1)$ stetig.
Daher existiert nach Satz 3.5 eine Partition P_j^ϵ, so dass:

$$S(P_j^\epsilon, f_{I_j\epsilon}) - s(P_j^\epsilon, f_{I_j^\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2(n+1)}$$

Wir setzen $P^\epsilon = \cup_{l=1}^n P_l^\epsilon \cup U_{l=1}^n \{u_l, v_l\}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P^\epsilon, f) - s(P^\epsilon, f) &= \sum_{l=1}^{n+1} S(P_l^\epsilon, f_{|I_l^\epsilon}) - s(P_l^\epsilon, f_{|I_l^\epsilon}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n} \left(\sup_{x \in [u_l, v_l]} f(x) - \inf_{x \in [u_l, v_l]} f(x)(v_l - u_l) \right) \\ &\leq \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2(n+1)} + \sum_{l=1}^{n} 2M \cdot (v_l - u_l) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

∎

Definition 3.4. *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* Treppenfunktion *(Abbildung 10), wenn es eine Partition $Z = \{y_0, \dots, y_m\}$ von $[a, b]$ gibt und für alle $i \in \{0, \dots, m\}$ für $c_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass:*

$$f(x) = c_i \ (x \in (y_{i-1}, y_i))$$

gilt. Nach Satz 3.7 ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar.
Zur Berechnung des Intervalls bedienen wir uns der Notation von Satz 10 und verwenden Satz 3.4c.

falsche Referenz -> hardgecodet

Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass f in a und b stetig ist. Das heißt die Menge der Unstetigkeitsstellen ist gegeben durch $E = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$.
Für $x \in I_l^\epsilon$ gilt dann $f(x) = c_l$ für alle $l = 1, \dots, m$. Dann gilt nach Satz 3.4c:

$$\left| \int_a^b f \, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_l^\epsilon| + \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i) \cdot (v_i - u_i) \right| < \epsilon$$

Für $\lim\limits_{\epsilon \to 0}$ *gilt:* $\begin{cases} |I_1^1| \to y_{1-a} \\ |I_l^2| \to y_2 - y_{l-1} \quad (l = 2, ..., m) \\ |I_{m+1}^\epsilon| \to b - y_m \end{cases}$

Das heißt

$$\sum_{i=1}^{m+1} c_i|I_\epsilon^l \to c_i(y_i - a)\sum_{i=2}^{m} c_i \cdot (y_i - y_{i-1}) + c_m(b - y_m) \tag{8}$$

Außerdem gilt $v_i - u_j \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0$ *gilt* $\int_a^b f \, \mathrm{d}x =$ *Gleichung* 8

Korollar 3.1. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, beziehungsweise monoton, beziehungsweise besitzt f höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen und ist beschränkt, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Bemerkung. *Mit Hilfe des Lebesguesches Integrabilitätskriterium kann man sogar zeigen, dass beschränkte Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar sind.*

Beispiel 3.1.

$$\int_0^a x \, \mathrm{d}x$$

Da $id : [0,a] \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert das Integral.
Sei $P_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$ eine Partition von $[a,b]$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} S(P_n, x) =& \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ =& \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\ =& \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ =& \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(P_n, x) =& \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ =& \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ =& \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Da id integrierbar ist, gilt:

$$\int_0^a x \, \mathrm{d}x \in [s(P_n, x), S(P_n, x)] = \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n}\right] n \in \mathbb{N}$$

Das heißt:

$$\int_0^a x \, \mathrm{d}x \cap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n}\right]$$

Also: $\int_0^a x \, \mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$

Beispiel 3.2. Sei $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ die *Dirichlet-Funktion*, d.h

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für jede Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, dass

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) = 1 \text{ und} \\ m_i &= \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) = 0 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$S(P,f) - s(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

Ergo: D ist nicht Riemann-integrierbar

Satz 3.8. Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $m \leq f(x) \leq M$ $(x \in [a,b])$.
Sei ferner $\Phi : [m,M] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\Phi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da Φ auf dem abgeschlossenen Intervall $[m,M]$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ (Ohne Einschränkung sei $\delta < \epsilon$) mit :

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

Da f integrierbar ist, gibt es eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit

$$S(P,f) - s(P,f) < \delta^2$$

Wie üblich bezeichnen wir

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) \text{ und} \\ m_i &= \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) \text{ und weiterhin} \\ M_i^+ &= \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} \Phi \circ f \text{ sowie} \\ m_i^* &= \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} \Phi \circ f(x) \end{aligned}$$

Seien

$$\begin{aligned} A =& \{i = 1, \ldots, n | M_i - m < \delta\} \\ B =& \{i = 1, \ldots, n\} \setminus A \end{aligned}$$

Aufgrund der Wahl von δ gilt für alle $i \in A : M_I^+ - m_i^* < \epsilon$ Weiter gilt:

$$\delta \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i = \sum_{i \in B} \delta \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \delta^2$$

Ergo: $\sum_{i\in B} \Delta x_i \leq \delta$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned}
S(P,\Phi\circ f) - s(P,\Phi\circ f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^+ - m_i^*)\cdot \Delta x_i \\
&= \sum_{i\in A} (M_i^+ - m_i^*)\cdot \Delta x_i + \sum_{i\in B} (M_i^+ - m_i)\Delta x_i \\
&\leq \epsilon \sum_{i\in A} \Delta x_i + 2 \sup_{x\in[m,M]} |\Phi\circ f| \cdot \sum_{i\in B} \Delta x_i \\
&\leq \epsilon \left(|b-a| + 2 \sup_{x\in[m,M]} |\Phi\circ f(x)| \right)
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung mit 3.3. ■

Satz 3.9. Seien $f_1, f_2, f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ Dann gilt:

1. $$\int_a^b f_1 + f_2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

   und für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$\int_a^b cf \,\mathrm{d}x = c \int_a^b f \,\mathrm{d}x$$

2. Insbesondere gilt also

   $$\begin{aligned} f_1 + f_2 \in \mathcal{R}_{[a,b]} &\text{ und} \\ cf \in \mathcal{R}_{[a,b]} & \end{aligned}$$

3. Gilt $f_1(x) \leq f_2(x)$ $(x \in [a,b])$ so folgt

   $$\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

4. Ist $c \in (a,b)$, und $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ so gilt

   $$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x$$

5. Gilt $M \geq f(x)$ $(x \in [a,b])$ so gilt

   $$M \cdot (b-a) \geq \int_a^b f \,\mathrm{d}x$$

Beweis.

1. Da $f_i \in \mathcal{R}_{[a,b]}(i = 1, 2)$ gibt es Partitionen P_i von $[a, b]$ mit

$$S(P_i, f) - s(P_i, f) \leq \epsilon \text{ für ein festes } \epsilon > 0$$

Dann gilt für die gemeinsame Verfeinerung $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, \dots x_n\}$ nach Satz 3.1 , dass

$$S(P, f_i) - s(P, f_i) \leq \epsilon \ (i = 1, 2)$$

2. Es gilt

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_1(x) + f_2(x) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_1(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_2(x)$$

Analog gilt:

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_1(x) + f_2(x) \geq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_1(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_2(x)$$

Damit folgt:

$$s(P, f_1) + s(P, f_2) \leq s(P, f_1 + f_2) \leq S(P, f_1 + f_2) \leq S(P, f_1) + S(P, f_2)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} S(P, f_1 + f_2) - s(P, f_1 + f_2) \\ &\leq S(P, f_1) - s(P, f_1) + S(P, f_2) - s(P, f_2) \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ nach Satz 3.3.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned} s(P, f_1 + f_2), S(P, f_1 + f_2) \in &[s(P, f_1) - s(P, f_2), S(P, f_1) + S(P, f_2)] \\ \subseteq &\left[\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}x + 2\epsilon\right] \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, gilt:

$$\int_a^b f_1 + f_2 \, \mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}x$$

Die Aussage bezüglich $c \cdot f$ zeigt man analog.

3. Sei $f_2(x) \geq f_1(x)$ $(x \in [a, b])$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_2(x) - f_1(x) &\geq 0 \text{ und daher} \\ s(P, f_2 - f_1) &\geq 0 \end{aligned}$$

für jede Partition P von $[a, b]$ Wegen 1 ist $f_2 - f_1 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und es gilt:

$$\int_a^b f_2 \, \mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}x + \int_a^b f_2 - f_1 \, \mathrm{d}x \geq \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}x$$

4. Für 3. betrachtet man zu beliebiger Partition P von $[a,b]$ die Partition $P' = \{c\} \cup P$
5. Folgt aus 2. mit $f_1 = f$ und $f_2 = M$ soweit

$$\int_a^b M \,\mathrm{d}x = M \cdot (b-a)$$

■

Bemerkung.

- *Eigenschaft 1 sagt, dass $\mathcal{R}_{[a,b]}$ ein bezüglich der Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist*
- *Eigenschaft 1 sagt weiterhin, dass die Abbildung*

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x : \mathcal{R}_{[a,b]} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

  ein lineares Funktional ist
- *Eigenschaft 2 sagt, dass dieses Funktional positiv ist (also nicht-negative Funktionen einen nicht negativen Wert zuordnet)*
- *Eigenschaft 4 impliziert eine gewisse Stetigkeit*

Satz 3.10. Für $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt:

- $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
- $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $\int_a^b |f| \,\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right|$

Beweis. Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^2$.
Dann ist Φ stetig und damit $\Phi \circ (f+g)$ beziehungsweise $\Phi \circ (f-g)$ aufgrund von Satz 3.9 und Satz 3.8 Riemann-integrierbar über $[a,b]$. Beachte:

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

Nach Satz 3.8 gilt wieder $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Sei nun $c \in \{-1, 1\}$ so gewählt, dass

$$c \int_a^b f \,\mathrm{d}x \geq 0$$

Offensichtlich gilt

$$|f(x)| = |cf(x)| \geq cf(x) \quad (x \in [a,b])$$

Damit gilt mit Satz 3.9

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right| = c \int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b cf \,\mathrm{d}x \overset{\textit{Satz } 3.9}{\leq} \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x$$

■

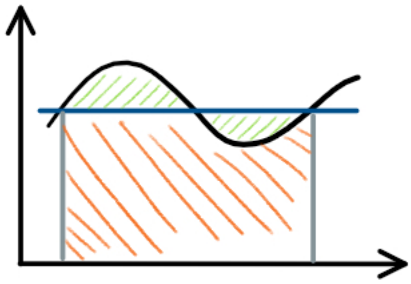


Abbildung 11: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 3.11 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 0$ $(x \in [a, b])$.
(Abbildung 11)
Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g \,\mathrm{d}x$$

Bemerkung: Für $g = 1$ gilt dann:

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Beweis. Man setze: $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y) \cdot \int_a^b g \,\mathrm{d}x$. h ist stetig und es gilt:

$$\begin{aligned}
\inf_{y\in[a,b]} h(y) &= \inf_{y\in[a,b]} \int_a^b f(y)g(x) \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b \int_{y\in[a,b]} f(y)g(x) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{Satz\ 3.9}{\leq} \int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 3.9}{\leq} \int_a^b \sup_{y\in[a,b]} f(y)g(x) \,\mathrm{d}x = \sup_{y\in[a,b]} h(y)
\end{aligned}$$

Das heißt wir haben eine stetige Funktion h mit:

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x \in [\inf_{y\in[a,b]} h(y), \sup_{y\in[a,b]} h(y)]$$

■

Bemerkung. *Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.*

4 Differentiation und Integration

Bemerkung. *Bisher hatten wir stets* $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ *mit* $a \leq b$ *betrachtet. Für* $a \geq b$ *setze man*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x := -\int_b^a f\,\mathrm{d}x$$

Satz 4.1. Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Für $a \leq x \leq b$ setze man

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dann gilt

1. F ist stetig auf $[a,b]$
2. Ist f stetig in $x_0 \in [a,b]$, so ist F in x_0 differenzierbar und es gilt: $F'(x_0) = f(x_0)$

Beweis.

1. Da $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, ist f insbesondere beschränkt. Das heißt es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit

   $$\forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$$

   Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta := \frac{\epsilon}{M}$. Für $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ erhalten wir:

   $$\begin{aligned}
   |F(x) - F(y)| =& \left| \int_a^x f\,\mathrm{d}t - \int_a^y f\,\mathrm{d}t \right| \\
   =& \left| \left(\int_a^y f\,\mathrm{d}t + \int_y^x f\,\mathrm{d}t \right) - \int_a^y f\,\mathrm{d}t \right| && \text{(Satz 3.9-4)} \\
   =& \left| \int_y^x f\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_y^x |f|\,\mathrm{d}t && \text{(Satz 3.10)} \\
   \leq& M \cdot \int_y^x 1\,\mathrm{d}t = M(x-y) < \epsilon
   \end{aligned}$$

   Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Aussage

2. Sei $h \in \mathbb{R}$, so dass $x_0 + h \in [a,b]$. Dann gibt es ein ξ_h zwischen x_0 und $x_0 + h$ mit:

   $$\begin{aligned}
   \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} =& \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \\
   =& \frac{h}{1} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t \\
   =& \frac{1}{h} f(\xi_h) \cdot \int_{x_0}^{x_0+h} \mathrm{d}t && \text{(Satz 3.11)} \\
   =& \frac{1}{h} f(\xi_h) \cdot h
   \end{aligned}$$

Damit gilt (wegen der Stetigkeit von f in x_0):

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi_h)=f(x_0)$$

■

Satz 4.2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** Ist $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ und gibt es $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit $F'=f$. Dann gilt

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

Bemerkung.

- *Eine Funktion F mit $F'=f$ nennt man eine* Stammfunktion *von f*
- *Man schreibt gerne $F(x)|_a^b := F(b)-F(a)$*

Beweis. Sei $\epsilon>0$ gegeben. Man wähle eine Partition $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ des Intervalls $[a,b]$ mit

$$S(P,f)-s(P,f)<\epsilon$$

Weiter existiert aufgrund des Mittelwertsatzes der
Differential-Rechnung (Satz 2.3) für alle $i=1,\dots,n$ ein $xi\in[xi_{i-1},x_i]$ mit

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Nach Satz 3.4 gilt

$$\begin{aligned}\epsilon >&\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right|\\ =&\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^n F(x_i)-F(x_{i-1})\right|\\ =&\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}x-(F(b)-F(a))\right|\end{aligned}$$

Da $\epsilon>0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

Bemerkung.

- *Sei $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ Dann bezeichnet man die Funktion*

  $$\int_a^{\circ} f\,\mathrm{d}x:[a,b]\to\mathbb{R}$$
  $$t\mapsto\int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

  als unbestimmtes Integral *von f.*

  ich bin mir hier nicht sicher ob das nicht t $\mapsto \int_a^x f\,\mathrm{d}t$ sein müsste

- *Satz 4.2 sagt also das jede Stammfunktion ein unbestimmtes Integral von f ist*

Proposition 4.1. *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Eine Funktion $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Stammfunktion von f, wenn $F - G =$ konst.*

Beweis. $\Leftarrow$
Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $F + c$

$$(F + c)' = F' = f$$

$\Rightarrow$
Das war eine Folgerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 2.3). ■

Bemerkung. *Oftmals wird ignoriert, dass sobald es eine Stammfunktion F von f gibt, es automatisch unendlich viele gibt. So schreibt man beispielsweise*

$$\int f \, \mathrm{d}x = F$$

oder spricht von „der" Stammfunktion. Die obige Gleichung ist insofern problematisch, da die rechte Seite (und damit per Definition auch die linke Seite) nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Oftmals ist daher der etwas laxe Umgang mit den Begriffen unkritisch.

Satz 4.3 (Partielle Integration)**.** Seien $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$F' = f \text{ und } G' = g$$

wobei $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Dann gilt:

$$\int_a^b F \cdot g \, \mathrm{d}x = FG|_a^b - \int_a^b f \cdot G \, \mathrm{d}x$$

Beweis.

$$\frac{\mathrm{d}}{dt} F(t) \cdot G(t) = F(t)G(t) + F(t)G'(t) = f(t)G(t) + F(t)g(t) \tag{9}$$

Da $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und F, G differenzierbar (und daher auch in $\mathcal{R}_{[a,b]}$), ist die rechte Seite in $\mathcal{R}_{[a,b]}$.
Mit Satz 4.2 haben wir:

$$\int_a^b f(t)G(t) + F(t)g(t) \, \mathrm{d}t = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

Weiter aufgrund der Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} \int_a^b fG + Fg \, \mathrm{d}t = \int_a^b fG \, \mathrm{d}t &+ \int_a^b Fg \, \mathrm{d}t \\ &- \int_a^b fG \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

liefert die Behauptung. ■

hier ist im Code was komisch. . . so ein „ref"

Beweis.

$$\left(FG|_a^x - \int_a^x f \cdot G \,\mathrm{d}t\right)' = \left(F(x) \cdot G(x) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^x fG \,\mathrm{d}t\right)'$$
$$= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - f(x)G(x))$$
$$= f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x)$$

Ergo: die rechte Seite ist eine Stammfunktion des Integranden der linken Seite. Damit folgt die Aussage aus Satz 4.2. ■

Beispiel 4.1.

$$\begin{aligned}
\int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b cos(x) \cdot cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= cos(x) \cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b sin^2\,\mathrm{d}x \\
&= cos(x) \cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b 1 - cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= cos(x) \cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b 1\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x \;\Big|\; + \int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow 2\int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= cos(x) \cdot sin(x)|_a^b + x|_a^b \;\Big|\; \cdot \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot (cos(x) \cdot sin(x) + x)|_a^b \\
\text{Ergo: } \int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(cos(x)sin(x)|_a^b + (b-a))
\end{aligned}$$

$$\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ wobei } 0 \notin [a,b]$$

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln(x)|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= x \cdot \ln(x)|_a^b - \int_a^b 1\,\mathrm{d}x \\
&= x \cdot \ln(x)|_a^b - x|_a^b \\
&= x \cdot \ln(x)|_a^b - (b-a)
\end{aligned}$$

Satz 4.4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\phi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $t \in [c, d]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} F(\phi(t)) =& F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
=& f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\
\text{Ergo: } \int_{\phi(c)}^{\phi d} =& \int F(\phi(d)) - F(\phi(c)) \\
=& \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

■

Bemerkung.

- *Die Substitutionsregel lässt sich wie folgt nachrechnen*

$$\phi'(t)\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}} dt$$

Dann lässt sich die Substitutionsregel

$$\int_c^d f(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 4.2.

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = r \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,\mathrm{d}x$$

Wir wählen $\phi(t) = r \cdot sin(t)$ für $t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann gilt mit der Substitutionsregel (man beachte dass $\phi(\frac{-\pi}{2}) = -r$ und $\phi(\frac{\pi}{2}) = r$):

$$\begin{aligned}
r \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,\mathrm{d}x =& r \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\phi^2(t)}{r^2}} \cdot \phi'(t)\,\mathrm{d}t \\
=& r \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^2(t)} \cdot cos(t) \cdot r\,\mathrm{d}t \\
=& r^2 \cdot \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
=& \frac{r^2}{2} \cdot \pi
\end{aligned}$$

Beispiel 4.3.

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} \text{ wobei } -1, 1 \notin [a, b]$$

Vorgehen Partialbruchzerlegung: Man zerlegt den Nennen in seine Linearfaktoren und bestimmt Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{\alpha}{1 + x} + \frac{\beta}{1 - x}$$

Man beachte, dass $(1-x)(1+x) = 1-x^2$
Wir multiplizieren die Gleichung mit $(1+x)(1-x)$ und erhalten:

$$1 = \alpha(1-x) + \beta(1+x) = \alpha + \beta(\beta - \alpha)x(x \in [a,b])$$

Also: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ Damit gilt:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right)$$

Nun gilt für $\phi(t) = 1-t$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \int_{1-a}^{1-b} \frac{-1\,\mathrm{d}t}{1\phi(t)} = -\int_{-a}^{1-b} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(t)|_a^b$$

Weiter gilt mit $\phi(t) = t-1$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_{1+a}^{1+b} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(t)|_{1+a}^{1+b}$$

Ergo:

$$\frac{1}{2}(\ln(1+b) - \ln(1-b) - (\ln(1+a) - \ln(1-a)) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_a^b$$

4.1 Erweiterungen des Integralbegriffs

4.1.1 Uneigentliche Integrale

Ziel: Die Erweiterung des Integralbegriffs auf Integranden, die möglicherweise nicht beschränkt sind, beziehungsweise auf Integrationsintervalle, die nicht beschränkt sind.

1. Eine Intervallgrenze ist unendlich.

Definition 4.1. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b] \subsetneq [a,\infty)$ Riemann-integrierbar.*
Wir sagen f ist auf $[a,\infty)$ uneigentlich integrierbar *beziehungsweise $\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x$ existiert, sofern der folgende Grenzwert existiert:*

$$\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

Analog definiert man $\int_{-\infty}^b f\,\mathrm{d}x$ für $f : (-\infty,b) \to \mathbb{R}$.

Beispiel 4.4.

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{1}{s-1} \text{für s} > 1$$

Denn: für $b > 1$ gilt:

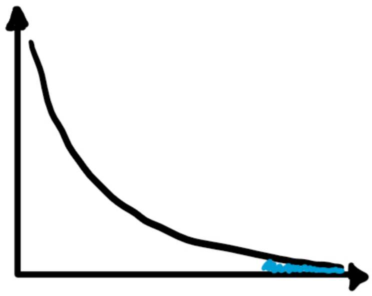


Abbildung 12: Skizze der Funktion $\frac{1}{x^2}$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{dx}}{x^s}\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^{-s}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_a^b$$
$$= \frac{\left(b^{-s+1} - a^{-s+1}\right)}{-s+1} \overset{a=1}{=} \frac{1}{s-1}\left(1 - b^{-s+1}\right) \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{s-1}$$

Hingegen ist $\frac{1}{x^s}$ nicht unendlich integrierbar über $[1,\infty)$, falls $s \leq 1$.
Für $s = 1$ folgt das wie folgt:

$$\int_1^b \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln(x)|_1^b = \ln b \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

2. Der Integrand ist an einer Intervallgrenze kritisch (also beispielsweise unbeschränkt).

Definition 4.2. *Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ für jedes $\epsilon \in (0, b-a)$ über $[a+\epsilon, b]$ Riemann-integrierbar. Dann sagen wir, dass f über $(a,b]$* uneigentlich integrierbar *ist beziehungsweise dass $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ existiert, sofern folgender Grenzwert existiert:*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f\,\mathrm{d}x$$

Analog bestimmt man $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$, falls b kritisch ist.

Beispiel 4.5.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{x^s} \text{ existiert für } s < 1$$

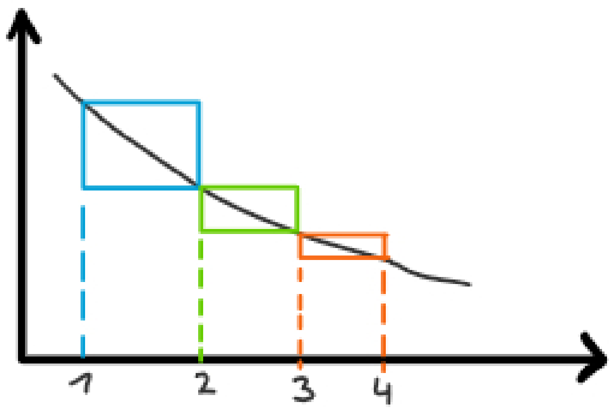
für $\epsilon > 0$ gilt:

$$\int_\epsilon^1 \frac{\mathrm{dx}}{x^s} = \int_\epsilon^1 x^{-s}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}(1-\epsilon^{1-s}) \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1-s}$$

3. Beide Integrationsgrenzen sind kritisch

Definition 4.3. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ für alle $\alpha \in (a,b)$ und $\beta \in (\alpha, b)$ Riemann-integrierbar über $[\alpha,\beta]$. Dann definiert*

Abbildung 13: Monoton fallende positive Funktion



man das uneigentliche Integral *von f über $[a,b]$ und sagt $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ existiert, sofern folgender Grenzwert existiert:*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^c f\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0}\int_c^{b-\delta} f\,\mathrm{d}x \text{ wobei } c\in(a,b) \text{ sei}$$

Bemerkung.

- *Die obige Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl der Zwischenstelle c*
- *Ist $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ so stimmt das Riemann-Integral von f über $[a,b]$ mit dem uneigentlichen Integral überein.*

Satz 4.5. Sei $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ eine monoton fallende positive Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f\,\mathrm{d}x \text{ existiert}$$

Beweis. $\Rightarrow$ Wir setzen $g(x)=f(\lfloor x\rfloor)$
Dann gilt:

- $g(x)\geq f(x)$ $(x\in[1,\infty])$
- $g\in\mathcal{R}_{[1,b]}$ für alle $b>a$

$$\int_1^b f\,\mathrm{d}x \leq \int_1^b g\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{\lceil b\rceil} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

$\Leftarrow$ Sei $h(x)=f(\lceil x\rceil)$ Dann gilt:

- $h\in\mathcal{R}_{[1,b]}$ für $b>a$

- $h(x) \leq f(x)$ $(x \in [1, \infty))$

Damit gilt:

$$\sum_{n=1}^{\lceil b \rceil} f(n) = f(1) + \int_1^{\lceil b \rceil} h(x)\,\mathrm{d}x \leq f(1) + \int_1^{\lceil b \rceil} f\,\mathrm{d}x < \infty$$

■

Anwendung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für jedes $s > 1$

Bemerkung (Gauß-Klammer)**.**

- *für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x und $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer gleich x*
- Die *Gamma-Funktion*

$$\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} exp(-t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Gamma(n) = \int_0^1 (-\log x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

Die Γ-Funktion ist wohldefiniert. Da

$$t^{x-1} exp(-t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

existiert ein $t_0 \in (0, \infty)$ mit:

$$t^{x-1} exp(-t) < \frac{1}{t^2} \ (t \geq t_0)$$

Damit gilt:

- $\int_{t_0}^{\infty} t^{x-1} exp(-t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} < \infty$
- $\int_0^{t_0} t^{x-1} exp(-t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{t_0} t^{x-1}\,\mathrm{d}t < \infty$ (siehe Beispiel 4.5)

Satz 4.6 (Funktionsgleichung der Γ-Funktion)**.** Für $x > 0$ gilt:

$$\Gamma(x + 1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Bemerkung.

- $\Gamma(1) = 1$ *(einfach nachrechnen)*
- $\Gamma(2) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$

und so weiter. Wir sehen:

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0, R > \epsilon$ Dann gilt:

$$\int_{\epsilon}^{R} t^{x-1} exp(-t)\,\mathrm{d}t = -t^{x-1} \cdot exp(-t)\Big|_{\epsilon}^{R} + \int_{\epsilon}^{R} (x-1) t^{x-2} exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

Für $x > 1$ gilt daher $\Gamma(x) =(x - 1)\Gamma(x - 1)$

■

4.1.2 Integrale über komplexwertige Funktionen

Definition 4.4. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dann heißt f auf $[a, b]$* Riemann-integrierbar*, falls $Re(f)$ und $Im(f)$ (Realteil beziehungsweise Imaginärteil von f) Riemann-integrierbar sind über $[a, b]$. In diesem Falle definieren wir:*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b Re(f) \,\mathrm{d}x + i \int_a^b Im(f) \,\mathrm{d}x$$

Satz 4.7. Seien $f, f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar über $[a, b]$, dann gilt:

a) Für $c \in \mathbb{C}$ ist $c \cdot f$ Riemann-integrierbar über $[a, b]$ sowie $f_1 + f_2$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1 + f_2 \,\mathrm{d}x &= \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x \\ \int_a^b c \cdot f \,\mathrm{d}x &= c \cdot \int_a^b f \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

b) Ist $c \in (a, b)$, so ist f über $[a, c]$ und über $[c, b]$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x$$

c) $f_1 \cdot f_2$ ist integrierbar über $[a, b]$

d) $\overline{f}$ ist integrierbar über $[a, b]$

e) $|f|$ ist integrierbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x$$

Beweis. a)-d) folgen sofort aus den Eigenschaften des Integrals über reellwertige Funktion

e) $|f| = \sqrt{f \cdot \overline{f}}$ ist integrierbar, auf Grund von c), d) und Satz 3.9.
Wähle $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass:

$$exp(i\varphi) \cdot \int_a^b f \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R} \text{ Dann gilt: } |\exp(i\varphi)| = 1$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| &= \left| exp(i\varphi) \cdot \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| \int_a^b exp(i\varphi) \cdot f \,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b Re(exp(i\varphi)f) \,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_a^b |Re(exp(i\varphi)f)| \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |exp(i\varphi)f| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

■

Bemerkung. $|exp(i\varphi)| > 0$

5 Differentialgleichungen

Differenzialgleichungen sind eine spezielle Form von Funktionalgleichungen. Funktionalgleichungen sind Gleichungen, in denen nach einer Funktion gesucht wird.

Beispiel 5.1 (Welche Funktion erfüllt $f^2 = f$?)**.** Beispielsweise $f(x) = 0$ oder $f(x) = 1$.

Oftmals ist die Lösung einer Funktionalgleichung in dieser Allgemeinheit gar nicht von Interesse und man schränkt den Lösungsraum in einer naheliegenden Weise ein. Man könnte beispielsweise für obige Gleichung fordern, dass f stetig sein soll. Aber selbst dann sind wir von einer eindeutigen Lösung entfernt.
(Man betrachte beispielsweise

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = 1; \\ f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_0(x) = 0; \\ f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}, f_2(x) = 0; \\ \vdots \end{aligned}$$

).
Uns sind bereits Funktionalgleichungen begegnet. Beispielsweise

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$$
$$\text{Mögliche Lösung: } \Phi(x) = a^x \text{ für a} > 0$$

Eine spezielle Form von Funktionalgleichungen die insbesondere in den Natur-, Ingenieurs-, oder Wirtschaftswissenschaften eine zentrale Rolle spielt, sind sogenannte *Differenzialgleichungen (DGLs)*, das heißt Funktionalgleichungen, die neben der Funktion selbst auch deren Ableitung beinhalten.

Beispiel 5.2. Sämtliche physikalische Grundgesetze beinhalten Differentialgleichungen.
Das 2. Newton'sche Gesetz: Das besagt, dass wenn ein Teilchen zur Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$ an einem Ort x_0 mit einer Geschwindigkeit v_0 ist, dass das Teilchen zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x(t)$ ist, wobei die Funktion $t \mapsto x(t)$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x(t)}}{\mathrm{dt}^2} = \frac{F(x(t))}{m}$$

Hierbei ist $F(\cdot)$ die im jeweiligen Ort wirkende Kraft und
$x(t_0) = x_0, \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}(x_0) = v_0$.
<u>Konkretes Beispiel:</u> Ein Massepunkt zwischen zwei Federn
<u>Physik:</u>$F(x) = -k \cdot x$ (k Federkonstante)
Das heißt wir haben die folgende Differenzialgleichung zu lösen:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x(t)}}{\mathrm{dt}^2} = \frac{-k}{m} \cdot x$$

Mögliche Lösung:

$$x(t) = \alpha \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \beta \cos\left(\frac{k}{m}t\right)$$

Überprüfung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x(t)}}{\mathrm{dt}^2} =&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\alpha\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)-\beta\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)\right)\\ =&-\alpha\cdot\frac{k}{m}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)-\beta\cdot\frac{k}{m}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)\\ =&-\frac{k}{m}\cdot x(t)\end{aligned}$$

Wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Durch Festlegen der Anfangsposition und Geschwindigkeit, können wir α, β festlegen und erhalten eine eindeutig bestimmte (ohne Beweis) Lösung des Anfangswertproblems (das heißt eine Lösung der Differentialgleichung die die Anfangsbedingung erfüllt).

Bemerkung.

- *Offensichtlich besitzt die Differentialgleichung alleine noch keine eindeutige Lösung. Für die Eindeutigkeit benötigen wir zusätzliche Informationen, zum Beispiel in Form von Anfangsbedingungen.*
- *Auch wenn man nicht jede Differentialgleichung analytisch lösen kann, kann man Lösungen raten und durch Einsetzen verifizieren.*

Beispiel 5.3. Die logistische Differentialgleichung (Anwendung in der Ökologie [Populationsentwicklung] beziehungsweise in der Ökonometrie [Wachstum eines Marktes])
Sei $N(t)$ die Populationsgröße einer Bakterienkultur zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. Wir erwarten, dass die Änderungsrate $\frac{\mathrm{dN(t)}}{\mathrm{dt}}$ einerseits proportional zur aktuellen Populationsgröße $N(t)$ ist, andererseits aber natürlichen Grenzen (*Carying capacity*) unterliegt.

$$\frac{\mathrm{dN(t)}}{\mathrm{dt}} = A\cdot N(t)\cdot(B-N(t)) \text{ wobei A, B } > 0$$

Allgemeine Lösung:

$$N(t) = \frac{1}{\alpha\cdot\exp(-ABt)+1} \ (t \geq 0)$$

wobei $\alpha > -1$.

Definition 5.1. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : G \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nennen wir*

$$\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dx}} = f(t, x(t)) \tag{10}$$

eine (explizite gewöhnliche) Differentialgleichung 1. Ordnung. *Wir sagen: $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung von Gleichung 10, wenn y differenzierbar ist und es gilt:*

i) $\{(t, y(t))|t \in (a, b)\} \subseteq G$

ii) $\frac{\mathrm{dy(t)}}{\mathrm{dt}} = f(t, y(t)) \ (t \in (a, b))$

Bemerkung.

- *Punkt 1 ist nötig, um Punkt 2 überhaupt formulieren zu können.*
- *Gleichung 10 heißt Differentialgleichung erster Ordnung, da nur die erste Ableitung der gesuchten Funktion vorkommt. Allgemein kann man auch n-te Ableitungen zulassen und entsprechende Differentialgleichungen n-ter Ordnung betrachten (siehe Newton), was wir aber mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht schematisch machen können.*
- *Im konkreten Fall der logistischen Differentialgleichung können wir setzen:*

  $$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t,x) &\mapsto A \cdot x \cdot (B-x) \end{aligned}$$

  Wir sehen: f ist unabhängig von t. Eine solche Differentialgleichung nennen wir autonom*.*

5.1 Trennung der Variablen

Die Trennung der Variablen ist ein Verfahren, welches für Differentialgleichungen der folgenden Form geeignet ist:
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f: I \to \mathbb{R}, g: J \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \neq 0$ $(x \in J)$. Dann heißt

$$\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} = f(t) \cdot g(x(t)) \tag{11}$$

eine Differentialgleichung mit *getrennten Variablen*

das konnte keiner lesen

Satz 5.1. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und f, g wie oben. Sei $(t_0, x_0) \in I \times J$. Wir definieren:

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s\,, G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)}$$

Sei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $t_0 \in I'$ und $F(I') \subseteq G(J)$. Dann gibt es genau eine Funktion $y: I' \to \mathbb{R}$, die Gleichung 11 löst und $y(t_0) = x_0$ erfüllt und y genügt der Gleichung:

$$G(y(t)) = F(t)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jede Funktion $y: I' \to \mathbb{R}$ die Gleichung 11 erfüllt, auch die Gleichung $G(y(t)) = F(t)$ erfüllt.

$$\begin{aligned} G(y,t) &= \int_{y(t_0)=x_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} \\ &\underset{\textit{regel}}{\overset{\text{Sub.-}}{=}} \int_{t_0}^{t} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\,\mathrm{d}r = \int_{t_0}^{t} \frac{f(r)g(y(r))}{g(y,r)}\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{t_0}^{t} f(r)\,\mathrm{d}r = F(t) \end{aligned}$$

Nun zur Eindeutigkeit:
Da $g \neq 0$, ist G streng monoton wachsend (falls g > 0) oder streng monoton

fallend, falls $g < 0$. Da G differenzierbar ist (Satz 4.1) und invertierbar (wegen der Monotonie) existiert also eine differenzierbare Umkehrfunktion G^{-1}. Damit haben wir, dass für jede Lösung $y : I' \to \mathbb{R}$ von Gleichung 11 mit $y(t_0) = x_0$ gilt: ref prüfen

$$y(t) = G^{-1}(F(t)) \; (t \in I')$$

Bleibt die Existenz nachzuweisen:
Wir setzen einfach $G^{-1}(F(\cdot))$ in Gleichung 11 ein. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} G^{-1} F(t)) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} G^{-1} \right) (F(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} F(t) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} G^{-1} \right) \cdot (F(t)) \cdot f(t) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) (G^{-1}(F(*)))} \cdot f(t) \\
&= g \left(G^{-1}(F(t)) \right) f(t)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung. *Satz 5.1 lässt sich wie folgt merken:*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} &= f(t) \cdot g(x(t)) | : g(x(t)) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{g(x(t))} \frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} &= f(t) | \cdot \text{„dt“} \\
\frac{dx}{g(x)} &= f(t) \mathrm{dt}
\end{aligned}$$

und integriere anschließend von $x_0 \to x$ beziehungsweise $t_0 \to t$

5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bemerkung. *Bisher haben wir Differentialgleichungen stets in der Form*

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

notiert. Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir im Folgenden etwas verkürzt schreiben:

$$x' = f(t, x)$$

und damit genau die obige Differentialgleichung meinen.

Definition 5.2. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nennen wir die Differentialgleichung*

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \tag{12}$$

eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. *Ist $b = 0$ so nennen wir Gleichung 12* homogen*, sonst* inhomogen.

Satz 5.2. Wir betrachten die Differentialgleichung 12 mit den Bezeichnungen von oben und $b = 0$.
Für $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt:
Es gibt genau eine Lösung von Gleichung 12, $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(t_0) = x_0$ und zwar:

$$y(t) = x_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Beweis. Offensichtlich gilt: $y(t_0) = x_0$. Weiter haben wir:

$$y'(t) = x_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(x)\,\mathrm{d}s\right) \cdot a(t)$$

Ergo: y ist in der Tat eine Lösung von Gleichung 12 mit $y(t_0) = x_0$.
Eindeutigkeit: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned}\tilde{y} : I \to& \mathbb{R}\\ t \mapsto& \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(x)\,\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich:

$$\tilde{y}'(t) = -a(t) \cdot \tilde{y}(t).$$

Sei $z : I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung von Gleichung 12 mit $z(t_0) = x_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(z \cdot \tilde{y})'(t) =& z'(t) \cdot \tilde{y}(t) + z(t) \cdot \tilde{y}'(t)\\ =& a(t) \cdot z(t) \cdot \tilde{y}(t) - z(t) \cdot a(t) \cdot \tilde{y}(t)\\ =& 0\end{aligned}$$

Ergo: $z \cdot \tilde{y} = konst. = c$
Ergo:

$$z(t) = c \cdot \frac{1}{\tilde{y}(t)} = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Da

$$x_0 = z(t_0) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,\mathrm{d}s\right) = c$$

folgt die Behauptung. ■

Beispiel 5.4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = \frac{-x}{t}, \text{ d.h. } a(t) = -\frac{1}{t}$$

Zum Anfangspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung gegeben durch:

$$\begin{aligned}y(t) =& x_0 \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right)\\ =& x_0 \cdot \exp\left(-\ln|_{t_0}^{t}\right)\\ =& x_0 \cdot \exp\left(\ln(t_0) - \ln(t)\right) = x_0 \cdot \frac{t_0}{t}\end{aligned}$$

Satz 5.3 (Variation der Konstante)**.** Wir betrachten die Differentialgleichung 12 mit den obigen Bezeichnungen und Annahmen an a und b (diesmal mit $b \neq 0$). Dann gibt es für jedes $t_0 \in I$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung. $y \to I \to \mathbb{R}$ von Gleichung 12 mit $y(t_0) = x_0$ und zwar:

$$y(t) = y_0(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} y_0(s)^{-1} b(s) \, \mathrm{d}s \right),$$

wobei:

$$y_0(t) = \exp \left(\int_{t_0}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s \right) \ (t \in I)$$

Bemerkung. *Zur Bezeichnung „Variation der Konstante“: die obige Lösung sieht so aus wie die Lösung in Satz 5.2 nur, dass der Vorfaktor nicht mehr konstant ist, sondern von t abhängt, also „variiert“.*

Beweis. Es gilt:

$$y(t_0) = y_0(t_0) \cdot x_0 = x_0$$

sowie

$$\begin{aligned} y'(t) =& y_0'(t) \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} y_0(s)^{-1} \cdot b(s) \, \mathrm{d}s \right) + y_0(t) \cdot y_0(t)^{-1} \cdot b(t) \\ =& a(t) \cdot y_0(t) \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{y(s)} b(s) \, \mathrm{d}s \right) + b(t) \\ =& a(t) y(t) + b(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Damit ist: $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von Gleichung 12 mit $y(t_0) = x_0$. Eindeutigkeit: Sei $z : I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung von Gleichung 12 mit $z(t_0) = x_0$. Dann gilt für $h : I \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = z(t) - y(t)$

$$\begin{aligned} h'(t) =& z'(t) - y'(t) = a(t)z(t) + b(t) - (a(t)y(t) + b(t)) \\ =& a(t)(z(t) - y(t)) = a(t) \cdot h(t) \end{aligned}$$

Ergo: $h : I \to \mathbb{R}$ ist Lösung von Gleichung 12 mit $b = 0$ mit Anfangswert $h(t_0) = z(t_0) - y(t_0) = 0$. Nach Satz 5.2 gilt:

$$h(t) = 0 \cdot \exp(\ldots) = 0.$$

Damit gilt: $z(t) - y(t)$ das heißt:

$$z(t) = y(t) \ (t \in I).$$

■

Beispiel 5.5. Wir betrachten: $x' = -\frac{x}{t} + t^3$ mit $x(1) = x_0$. Dann gilt:

$$y(t) = \frac{1}{t} \cdot \left(x_0 + \int_{1}^{t} s \cdot s^2 \, \mathrm{d}s \right) = \frac{1}{t} \left(x_0 + \left. \frac{s^5}{5} \right|_{1}^{t} \right) = \frac{1}{t} \left(x_0 + \frac{t^5}{5} - \frac{1}{5} \right)$$

5.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Es wird im Folgenden nützlich sein auch komplexwertige Funktionen ableiten zu können.

Definition 5.3. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen, f ist* stetig *in $x_0 \in I$, wenn $Re(f)$ und $Im(f)$ stetig in x_0 sind. Wir sagen $f : I \to \mathbb{C}$ ist* stetig*, wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist. Wir sagen f ist in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn $Re(f)$ und $Im(f)$ in x_0 differenzierbar sind. Wir sagen, dass f differenzierbar ist, falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist.*
In diesem Falle ist die Ableitung von f gegeben durch:

$$f'(x) = Re(f')(x) + i \cdot Im(f')(x)$$

Bemerkung. *Aus der entsprechenden Aussage für reellwertige Funktionen sieht man sofort:*
Ist f differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f dort auch stetig.

Satz 5.4. Seien $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann gilt:

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- Falls $g(x) \neq 0$, so gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis. Möglichkeit 1: genauso wie für reellwertige Funktionen.
Möglichkeit 2: mit Hilfe der Aussagen für reellwertige Funktionen. *Beispiel:* $(f+g)' = (Re(f) + Re(g) + i \cdot (Im(f) + Im(g))' = Re(f') + Re(g') + i \cdot (Im(f') + Im(g') = f' + g'$ ∎

Satz 5.5. Ist $f : I \to \mathbb{C}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ und $g(J) \subseteq I$. Ist g in $x_0 \in J$ sowie f in $g(x_0)(\in I)$ differenzierbar, so ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Beweis. $f \circ g(x) = Re(f \circ g)(x) + i \cdot Im(f \circ g)(x)$ Also folgt mit der Kettenregel für reellwertige Funktionen:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) =& Re(f')(g(x_0)) \cdot g'(x_0) + i(Im(f')g(x_0))g'(x_0) \\ =& (Re(f')(g(x_0)) + i(Im(f')g(x_0)) \cdot g'(x_0) \\ =& f'(g(x_0) \cdot g'(x_0)\end{aligned}$$

∎

Beispiel 5.6.

$$\begin{aligned}\exp(ix)' =& (\cos(x) + i\sin(x))' = \cos'(x) + i\sin'(x) \\ =& -\sin(x) + i\cos(x) = i(i\sin(x) + \cos(x)) = i\exp(ix) \\ \exp(if(x))' =& if'(x)\exp(if(x)) \text{ Mit Satz 5.5}\end{aligned}$$

Bemerkung. *Der Hauptsatz der Differential und Ingegralrechnung gilt damit auch für Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, das heißt:*
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar und gibt es

$$\begin{aligned} F : [a, b] \to& \mathbb{C} \text{ mit} \\ F'(x) =& f(x) \ (x \in [a, b]) \end{aligned}$$

so gilt:

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Beweis. folgt sofort aus der reellen Version. ■

Definition 5.4. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a_k : I \to \mathbb{R}$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ sowie $b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt:*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \tag{13}$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. *Ist $b = 0$ so nennen wir wir Gleichung 13* homogen, *sonst* inhomogen. *Wir nennen*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0x = 0 \tag{14}$$

auch den homogenen Teil *von Gleichung13. Wir sagen: $y : J \to \mathbb{R}$ mit $J \subseteq I$ ist eine* Lösung *von* $\begin{cases} \textit{Gleichung } 13 \\ \textit{Gleichung } 14 \end{cases}$*, falls:*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

Satz 5.6. Wir betrachten die Differentialgleichung 13, sowie 14 mit den gleichen Bezeichnungen wie oben.

- Sei L_h die Menge aller Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ von 14. Dann ist L_h ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$
- Sei L_i die Menge aller Lösungen $z : I \to \mathbb{R}$ von 13 . Dann gilt für ein beliebiges $z_0 \in L_i$:

$$L_i = z_0 + L_h = \{y : I \to \mathbb{R} | y = z_0 + f \text{für ein } f \in L_h\}.$$

Bemerkung. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann bedeutet $\mathbb{K}^I = \{f : I \to \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen von I nach K. Auf $\mathbb{K}^I$ definieren wir:*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^I \times \mathbb{K}^I \to& \mathbb{K}^I \\ (f, g) \mapsto& f + g \end{aligned}$$

wobei $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sei $(x \in I)$, sowie:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^I \to \mathbb{K}^I (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$$

wobei $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ $(x \in I)$. *Man kann leicht zeigen, dass* $(\mathbb{K}^I, \cdot, +)$ *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum ist. Neutrales Element bezüglich +:*

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{K}^I} : I \to & \mathbb{K} \\ x \mapsto & 0 \end{aligned}$$

Satz. *Sei* V *ein Vektorraum und* $\emptyset \neq U \subseteq V$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} U \text{ (U ist ein VR) } \Leftrightarrow & \forall \lambda, \mu \in U : x + y \in U \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in U : \lambda \cdot x \in U & \end{aligned}$$

Beweis. Lineare Algebra ■

Beispiel 5.7. Sei $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) = \{f : I \to \mathbb{K} | f \text{ ist n-mal stetig differenzierbar}\}$ beziehungsweise $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) = \{f : I \to \mathbb{K} | f \text{ ist n-mal differenzierbar}\}$.
Aufgrund der Summenregel der Differenzial-Rechnung sieht man mit obigen Satz sofort:

$$\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \text{ sind Vektorräume.}$$

Ist nun V ein Vektorraum, so sagen wir $x_1, \ldots, x_n \in V$ sind *linear unabhängig*, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \ldots = \alpha_n = 0$$

Im konkreten Beispiel $\mathbb{K}^I$ heißt das:

Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{K}$ sind linear unabhängig, wenn für alle $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ein $x \in I$ existiert mit:

$$\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) \neq 0$$

Eine linear unabhängige Menge von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in V$ heißt *Basis* von V, falls für alle $x \in V$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ existiert mit:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

Wir sagen V hat *Dimension n*, wenn es eine n-elementige Basis von V gibt.

Beweis. 1. Die Existenz von Lösungen, das heißt $L_h \neq \emptyset$, sowie die Dimensionalität von L_h folgen mit Hilfe des Satzes von Picard- Lindelöff, den wir nicht behandeln werden.
Wir zeigen: L_h ist ein Vektorraum.
Seien dazu $y_1, y_2 \in L_h$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(\lambda)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)(y_1 + y_2) \\ = & y_1^{(n)} + a_{n-1}(t) y_1^{(n-1)} + \ldots \\ & + a_0(t) y_1 + y_2^{(n)} + a_{(n-1)}(t) y_2^{(n-1)} + \ldots + a_0(t) y_2 = 0 \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} & (\lambda y_1)^{(n)} + a_{n-1}(t)(\lambda y_1)^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)(\lambda y_1) \\ = & \lambda(y_1^{(n)} + a_{n-1}(t) y_1^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_1) = 0 \end{aligned}$$

2. Sei z eine beliebige Lösung von 14. Dann gilt für jede Lösung y von 14:

$$\begin{aligned}
&(z-y)^{(n)} + a_{n-1}(t)(z-y)^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)(z-y) \\
=&z^{(n)} + a_{n-1}(t)z^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)z \\
&- \left(y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)y\right) \\
=&0
\end{aligned}$$

Ergo:

$$(z-y) \in L_h \Rightarrow y - z \in L_h | + z \Leftrightarrow y \in L_h + z$$

■

Definition 5.5. *Man nennt eine Basis des Vektorraums L_h auch ein* Fundamentalsystem *von 14*

Definition 5.6. *Seien $a_0, \ldots a_{n-1} \in \mathbb{C}, I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $b : I \to \mathbb{C}$ stetig. Wir nennen:*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = \begin{cases} b(t), & (15a) \\ 0, & (15b) \end{cases}$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. *Wir sagen: $y : I \to \mathbb{C}$ ist eine Lösung von Gleichung 15a beziehungsweise 15b, falls:*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

Bemerkung. *Wir werden zunächst, um Rechenarbeit zu sparen, komplexwertige Lösungen zulassen und später aus diesen reelwertige konstruieren.*
Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich vereinfacht mit „Differentialpolynomen“ beschreiben. Sei $\mathbb{C}[t]$ die Menge aller Polynome der Form:

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

Wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Ersetzt man in P formal die Unbekannte t durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$, so erhält man einen Differentialoperator.

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) = a_0 + a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} + \ldots + a_n \frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{dt^n}}$$

Das heißt $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)$ ist als Abbildung zu verstehen, die jedem n- und differenzierbaren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion wie folgt zuweist:

das n klingt falsch

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) : \mathcal{D}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\to \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\
f &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} t
\end{aligned}$$

Der Witz an dieser Sichtweise : Jede lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, lässt sich einfach als

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)x = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

schreiben, wobei $P \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom entsprechender Ordnung mit führendem Koeffizienten gleich 1 ist.

Beispiel 5.8. Die Differentialgleichung

$$x^{(3)} - 2x'' + x' - 2x = 0$$

lässt sich mit:

$$P(t) = t^3 - 2t^2 + t - 2$$

schreiben als:

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)x = 0$$

Proposition 5.1. *Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[t]$ und $P = P_1 + P_2, Q = P_1 \cdot P_2$. Dann gilt für jede ausreichend oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*

1. $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)f = P_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)f + P_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)f$
2. $Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) = P_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) \cdot P_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)$

Beweis. Wir machen Teil 1, Teil 2 läuft analog. Sei $n = max\{\mathrm{deg}P_1, \mathrm{deg}P_2\}$ das Maximum der Polynomgrade und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ n-mal differenzierbar. Dann gilt mit:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \sum_{l=0}^{n_1} a_l \frac{\mathrm{d^l}}{\mathrm{dt^l}} f + \sum_{k=0}^{n_2} b_k \frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dt^k}} f \\ &\overset{n_1 \leq n_2}{\underset{\text{o. E.}}{=\!=}} \sum_{k=0}^{n_2} a_k \frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dt^k}} f + b_k \frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dt^k}} f + \sum_{l=0}^{n_1} a_l \frac{\mathrm{d^l}}{\mathrm{dt^l}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n_2} (a_k + b_k) \frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dt^k}} f + \sum_{k=n_2+1}^{n_1} a_k \frac{\mathrm{d^k}}{\mathrm{dt^k}} f \\ &= P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) f \end{aligned}$$

∎

Bemerkung. *Die obige Proposition sagt, dass wir mit Diffentialpolynomen genauso rechnen können wie mit „monotonen" Polynomen.*

Proposition 5.2. *Sei $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\exp(\lambda t) = P(\lambda) \cdot \exp(\lambda t)$$

Beweis. Betrachte:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\exp(\lambda t) =& \lambda \cdot \exp(\lambda t) \text{ und analog}\\ \frac{\mathrm{d^l}}{\mathrm{dt^l}}\exp(\lambda t) =& \lambda^l \cdot \exp(\lambda t)\end{aligned}$$

Damit gilt für $P(t) = \sum_{l=0}^{n} a_l t$:

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\exp(\lambda t) &= \sum_{l=0}^{n} a_l \frac{\mathrm{d^l}}{\mathrm{dt^l}}\exp(\lambda t)\\ &= \sum_{l=0}^{n} a_l \lambda^l \exp(\lambda t) = P(\lambda)\exp(\lambda t)\end{aligned}$$

■

Satz 5.7. Sei

$$P(t) = \sum_{l=0}^{n} a_l t^l \in \mathbb{C}[t]$$

Angenommen P hat n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann sind die Funktionen

$$\begin{aligned}\varphi_k :& \mathbb{R} \to \mathbb{C},\\ \varphi_k(t) =& \exp(\lambda_k t) \ (k = 1, \ldots, n)\end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen von $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) x = 0$.

Beweis. Tatsächlich gilt für alle $k = 1, \ldots, n$ dass:

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\varphi_k = P(\lambda_k) \cdot \exp(\lambda_k t) = 0$$

Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$
für $k = 1, \ldots, n$ mittels vollständiger Induktion.
$k = 1:$

$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 t) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$k \to k+1$ Angenommen

$$\alpha_i \varphi_i + \ldots + \varphi_{k+1}\alpha_{k+1} = 0$$

Zu zeigen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$$

Wir wenden

$$\left(\lambda_{k+1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)$$

auf obige Gleichung an. Also:

$$\begin{aligned}\left(\lambda_{k+1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\sum_{i=0}^{k+1}\alpha_i\varphi_i(t) =& \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\left(\lambda_{k+1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\varphi_i(t)\\ \overset{5.1}{=}&\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\varphi_i(t)\\ =&\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\varphi_i(t)=0\end{aligned}$$

Da laut Induktionsvoraussetzung $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ linear unabhängig sind, muss gelten:

$$\alpha_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)-\alpha_2(\lambda_{k+1}-\lambda_1)=\ldots=\alpha_k(\lambda_l+1-\lambda_k)=0$$

Da $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\neq 0$ $(i\neq k)$, folgt

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$$

Da $\varphi_k(t)=\exp(\lambda_k t)\neq 0$, muss auch λ_{k+1} gelten und die lineare Unabhängigkeit folgt. ■

Beispiel 5.9. Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)f =& 0 \text{ mit}\\ P(t) =& t^3-2t^2+t-2=(t-i)(t+i)(t-2)\end{aligned}$$

hat die linear Unabhängige Lösung

$$\varphi_1(t)=\exp(it),\varphi_2(t)=\exp(-it),\varphi_3=\exp(2t)$$

Angenommen sämtliche Koeffizienten der Differentialgleichung sind reell. Wie erhalten wir aus Satz 5.7 ein reellwertiges Fundamentalsystem?
Also sei $P(t)\in\mathbb{R}[t]$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen.

$$\begin{aligned}\lambda_1,\overline{\lambda_1},\ldots,\lambda_k,\overline{\lambda_k}&\in\mathbb{C}\\ \eta_1,\ldots,\eta_l&\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Dann betrachten wir für $i=1,\ldots,k$

$$\begin{aligned}\Psi_{i,1} =& \frac{1}{2}\left(\exp(\lambda_i\cdot t)+\exp\left(\overline{\lambda_i}\cdot t\right)\right)\\ =& \frac{1}{2}exp(Re(\lambda)\cdot t)\cdot\cos(Im(\lambda)\cdot t)\\ \Psi_{i,2} =& \frac{1}{2i}\left(\exp(\lambda_i\cdot t)-\exp\left(\overline{\lambda_i}\cdot t\right)\right)\\ =& \exp(Re(\lambda)\cdot t)\cdot\sin(Im(\lambda_i)\cdot t)\end{aligned}$$

Und für $i=1,\ldots,l$:

$$\Psi_i=\exp(\eta\cdot t)$$

Da

$$\Psi_{i,l} + i\Psi_{i,2} = \exp(\lambda \cdot t)$$

und

$$\Psi_{i,1} - i\Psi_{i,2} = \exp\left(\overline{\lambda_i} t\right)$$

sind $\Psi_{1,1}, \Psi_{1,2}, \ldots, \Psi_{k,1}, \Psi_{k,2}, \Psi_1, \ldots, \Psi_i$ ein (reelles) Fundamentalsystem von $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) f = 0$.

Wir werden uns bei der Behandlung inhomogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf spezielle Inhomogenitäten der Form

$$b(t) = q(t) \cdot \exp(\mu t) \quad (\mu \in \mathbb{C})$$

beschränken, wobei $q \in \mathbb{C}[t]$

Definition 5.7. *Wir sagen die Differentialgleichung* $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) x = q(t) \exp(\mu t)$ *ist in* Resonanz, *falls* $P(\mu) = 0$.

Satz 5.8. Sei $P(t) = \sum_{l=0}^{n} a_l t^l \in \mathbb{C}[t]$ mit $a_n = 1$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $P(\mu) \neq 0$. Sei weiter $q \in \mathbb{C}[t]$. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) x = q(t) \exp(\mu t)$$

eine spezielle Lösung der Gestalt

$$y(t) = r(t) \exp(\mu t) \,,$$

wobei $r \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(r) = \deg(q)$ (also beide Polynome den gleichen Grad haben).

Bemerkung. *Mit Satz 5.8 und Satz 5.1 kennen wir also den kompletten Lösungsraum, das heißt, die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung, sobald wir das Polynom r kennen.*

ref prüfen eigentliche nr war 10

ref prüfen

Beweis. Beachte:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} t^m \exp(\mu t) &= \left(m t^{m-1} + \mu t^m\right) \cdot \exp(\mu t) \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} t^m \exp(\mu t) &= \left(m(m-1) t^{m-2} + 2m\mu t^{m-1} + \mu^2 t^m\right) \exp(\mu t) \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{dt}^l} t^m \exp(\mu t) &= \left(\mu^l t^m + s_l(t)\right) \exp(\mu t) \qquad (16)
\end{aligned}$$

■

Beispiel 5.10.

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dt}^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} + 2\right) x(t) = 2\sin(t)$$

Wir betrachten

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) y_1(t) = i\exp(-it) \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) y_2(t) = i\exp(it) \tag{19}$$

Mit Satz 5.8(beziehungsweise dessen Beweis), sehen wir, dass ref prüfen

$$y_1(t) = \frac{i}{P(-i)}\exp(-it) \text{ und } y_2(t) = \frac{i}{P(i)}\exp(it)$$

Lösungen von Gleichung 18 und Gleichung 19 sind. Mit

$$\begin{aligned} P(-i) =& (-i)^3 - 2(-i)^2 - 2(-i) + 2 \\ =& i + 2 + 2i + 2 = 4 + 3i \\ \text{und } P(i) =& \overline{P(-i)} = 4 - 3i \text{ ergibt sich} \\ P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)(y_1(t) - y_2(t)) =& -i\exp(it) + i\exp(-it) \\ =& -i(\exp(it) - \exp(-it)) = 2\sin t \end{aligned}$$

Eine spezielle reellwertige Lösung ist damit gegeben durch:

$$y(t) = \frac{8}{25}\sin(t) + \frac{6}{25}cos(t)$$

Beispiel 5.11.

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dt}^3}x(t) - x(t) = t = t\exp(0\cdot t) \\ &\text{Mit } P(t) = t^3 - t \text{ gilt } P(0) \neq 0 \end{aligned}$$

Nach Satz 5.8 (mit $\mu = 0$ und $q(t) = t$) existiert eine spezielle Lösung der Form $y(t) = a + bt$. Eingesetzt in die Differentialgleichung liefert das:

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dt}^3}(a + bt) - (a + bt) = -a - bt = t$$

Das heißt $a = 0$ und $b = -1$. Damit ist $y(t) = -t$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)x = t$.

6 Folgen und Reihen von Funktionen

Im Folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $D \subseteq K$ eine nicht leere Menge, dann bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^D$ die Menge aller Funktionen von D nach $\mathbb{K}$.

Eine *Folge* von Funktionen in $\mathbb{K}^D$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{K}^D$, wobei wir das Bild von $n \in \mathbb{N}$ mit f_n bezeichnen.

Definition 6.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$. Wir sagen, (f_n)* ***konvergiert Punktweise*** *gegen $f : D \to \mathbb{K}$, falls für alle $x \in D$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Analog sagen wir $\sum_{n\geq 1} f_n$ ***konvergiert punktweise*** *gegen $f : D \to \mathbb{K}$, falls:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \ (x \in D)$$

Bemerkung. *In obiger Definition wird insbesondere voraus gesetzt, dass die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

- *Der Grenzwert f einer punktweise konvergenten Funktionenfolge ist stets eindeutig, da für jedes $x \in D$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ eindeutig ist*

Fundamentales Problem im Kontext der Konvergenz von Funktionenfolgen: „Hat Grenzwert f die „gleichen“ Eigenschaften wie die Folgenglieder f_n?“
Im Spezialfall: Ist der punktweise Grenzwert f einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen automatisch stetig?
Kurz gesagt: Sei f der punktweise Grenzwert von f_n, gilt dann

$$\lim_{x\to y}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to y} f_n(x) = f(y)?$$

Die Antwort ist: ***Nein!****.*

Beispiel 6.1. Sei

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ f_n(x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1-\frac{1}{n}) \\ nx-(n-1) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Behauptung: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Dann sei $x \in [0,1]$. Dann existiert ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $1 - \frac{1}{n_x} > x$ und entsprechend $1 - y_n > x$ für alle $n \geq n_x$. Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Andererseits gilt $f_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Ergo: $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.
Fazit: Um aus der Stetigkeit der Folgenglieder auf die Stetigkeit des Grenzwerts schließen zu können, braucht es eine Verschärfung des Konvergenzbegriffs. Ähnlich sieht es mit anderen Eigenschaften, wie Differenzierbarkeit beziehungsweise Integrierbarkeit aus.

Definition 6.2 (Gleichmäßige Konvergenz)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen*
$f_n : D \to \mathbb{K}$*. Wir sagen (f_n)* konvergiert gleichmäßig (glm.) *gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$, wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ \forall n \geq n_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Analog sagen wir $\sum_{k\geq 1} f_k$ konvergiert gleichmäßig *gegen $f : D \to \mathbb{K}$ wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ \forall n \geq n_\epsilon : \left| \sum_{l=1}^{n} f_l(x) - f(x) \right| < \epsilon$$

Bemerkung. *Offensichtlich impliziert gleichmäßige Konvergenz stets punktweise Konvergenz*

Satz 6.1. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in D$ sowie $\epsilon > 0$ gegeben.[7]
Wähle $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|f_{n_\epsilon}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in D$.[8]
Da f_{n_ϵ} stetig ist, gibt es für x_0 ein $\delta > 0$, so dass für $y \in D$ mit $|y - x_0| < \delta$ gilt: $|f_{n_\epsilon}(y) - f_{n_\epsilon}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.
Dann gilt für alle $y \in D$ mit $|y - x_0| < \delta$: [9]

$$|f(x_0) - f(y)| \leq |f(x_0) - f_{n_\epsilon}(x_0)| + |f_{n_\epsilon}(x_0) - f_{n_\epsilon}(y)| + |f_{n_\epsilon}(y) - f(y)| < \epsilon$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Bemerkung.

- *Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f, so nennen wir f auch den* gleichmäßigen Limes / Grenzwert *von (f_n). Analog reden wir vom* Punktweisen Limes / Grenzwert.
- *Der letzte Satz sagt, dass wir bei gleichmäßiger Konvergenz gewisse Grenzwerte vertauschen können, das heißt:*

  $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to y} f_n(x) = \lim_{x\to y} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1*

ref prüfen

[7] Wir prüfen Stetigkeit punktweise, also in beliebigem x_0
[8] Das n_ε Existiert, da die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren.
[9] wegen doppelter Anwendung der Dreiecksungleichung

- *Ist* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$ *um den Punkt* x_0*. Setzen wir*

$$f_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$$

so ist f *per Definition der punktweise Limes von* (f_N)*. Tatsächlich konvergieren die Funktionen* $f_N|_{B_r(x_0)}$ *für beliebiges* $r \in (0,R)$ *gleichmäßig gegen* $f|_{B_r(x_0)}$ *Denn:*

$$\begin{aligned}\forall x \in B_{r(x_0)} : |f(x) - f_N(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n\right| \\ &= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|(x-x_0)^n \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\end{aligned}$$

wobei die absolute Konvergenz von Potenzreichen innerhalb des Konvergenzradius ausgenutzt wurde.
Sei $\epsilon > 0$ *gegeben. Dann existiert also* N_ϵ*, so dass für alle* $N \geq N_\epsilon$ *gilt:*

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon.$$

Ergo: Wir haben gezeigt, dass für $N \geq N_\epsilon$ *gilt:*

$$\forall x \in B_r(x_0) : |f(x) - f_N(x)| < \epsilon$$

Das zeigt insbesondere mit Satz 6.1, dass Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius stetig sind.

hier ist $B_r(x_0)$ noch nicht definiert.

Satz 6.2. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$. Dann gilt:

(f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_\epsilon\ \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \tag{20}$$

Beweis. $\Rightarrow$ Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f_n gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{K}$ konvergiert, gibt es n_ϵ, so dass für alle $n \geq n_\epsilon$ gilt:

$$\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Dann gilt für $n, m \geq n_\epsilon$:

$$\forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Das heißt Gleichung 20 ist erfüllt.
$\Leftarrow$ Da für alle $x \in D(f_n(x))$ nach Gleichung 20 eine Cauchy-Folge ist, konvergiert $(f_n(x))$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} f : D \to& \mathbb{K} \\ x \mapsto& \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert nach 20 ein n_ϵ, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \tag{21}$$

solange $n, m \geq n_\epsilon$. Damit gilt für alle $n \geq n_\epsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)\right| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Mit Gleichung 21 folgt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \ (x \in D)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die gleichmäßige Konvergenz und damit die Behauptung.
$\blacksquare$

Satz 6.3. Sei (f_n) eine Funktionenfolge von auf $[a, b]$-integrierbaren Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Wir betrachten im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt stets aus der separaten Betrachtung von Real- und Imaginärteil.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert per Voraussetzung ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\forall x \in D : \forall n \geq n_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Es gilt also:

$$f_{n_\epsilon} - \epsilon \leq f(x) \leq f_{n_\epsilon} + \epsilon \ (x \in [a, b])$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_{n_\epsilon} + \epsilon \,\mathrm{d}x &= \int_a^b f_{n_\epsilon} \,\mathrm{d}x + \epsilon \cdot (b - a) \\ &\leq \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x + \epsilon \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Ergo:

$$\left|\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x - \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x\right| \leq 2 \cdot \epsilon(b - a)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt $\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x$, das heißt $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Weiter gilt:

$$\left| \int_a^b f - f_n \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \, \mathrm{d}x \leq \epsilon \cdot (a - b)$$

Für $n \to \infty$ folgt die Behauptung. ■

Korollar 6.1. Ist $f_n \in \mathcal{R}_{[a,b]} n \in \mathbb{N}_0$ und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}x$$

Bemerkung. *Wir können also gliedweise integrieren.*

Satz 6.4. Seien $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$). Weiter gelte, dass (f_n) punktweise gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert und (f_n') gleichmäßig gegen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = g(x) \ (x \in [a, b])$$

Beweis. Da f_n' gleichmäßig gegen g konvergiert ist g stetig (Satz 6.1). Daher gilt nach Satz 4.1 dass $G(x) = \int_a^b g \, \mathrm{d}t$ differenzierbar ist und als Ableitung g besitzt. Weiterhin gilt mit Satz 6.3:

$$\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n' \, \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n' \, \mathrm{d}t = G(x)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt außerdem:

$$\int_a^x f_n' \, \mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a)$$

Ergo:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' \, \mathrm{d}t + \lim_{n\to\infty} f_n(a) = G(x) + f(a)$$

Damit ist f differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} G(x) = g(x)$$

■

Bemerkung. *Das zeigt insbesondere, dass wir Potenzreihen gliedweise differenzieren können.*

6.1 Fourier-Reihen

Fourier-Reihen sind spezielle Reihen, die insbesondere für die Approximation periodischer Funktionen geeignet sind.

Definition 6.3. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt* p-periodisch*, beziehungsweise* periodisch mit Periode p*, wobei $p > 0$ sei, wenn gilt:*

$$f(x+p) = f(x)$$

Beispiel 6.2. $\sin, \cos$ sind 2π-periodisch.

Bemerkung.

- *Selbstverständlich gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$: $f(x + np) = f(x)$.*
- *Wir werden uns im Folgenden aus Notationsgründen auf 1-periodische Funktionen beschränken.*
  Beachte: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ p-periodisch, so ist

  $$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} \to& \mathbb{C} \\ \hat{f} =& f(px+1) \end{aligned}$$

  1-periodisch:

  $$\begin{aligned} \tilde{f}(x+1) =& f(px+1) \\ =& f(px+p) = f(px) = \hat{f} \end{aligned}$$

  Das heißt: Jede p-periodische Funktion lässt sich einfach in eine 1-periodische Funktion überführen und umgekehrt.
  ***Achtung**: In der Literatur beschränkt man sich auch gerne auf 2π- periodische Funktionen.*

Definition 6.4. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodisch und Riemann-integrierbar über $[0,1]$. Dann heißen die Zahlen*

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 f(x) \cdot \exp(-2\pi \cdot i \cdot n \cdot x)\,\mathrm{d}x$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ die Fourier-Koeffizienten *von f. Weiter heißt die Reihe*

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot \exp\left(2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot x\right),$$

das heißt die Folge der Partialsummen,

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \exp\left(2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot x\right)$$

mit $N \in \mathbb{N}$ Fourier-Reihe *von f.*

Satz nicht eindeutig von Weiter heißt die Reihe ... Fourier-Reihe von f

Bemerkung.

- *Die Fourier-Reihe lässt sich zunächst für jede 1-periodische, integrierbare Funktion definieren. Ähnlich wie bei Taylorreihen ist aber a priori nicht klar, ob die Fourier-Reihe konvergiert, in welchem Sinne sie konvergiert und wenn sie konvergiert, ob sie gegen die original Funktion f konvergiert. Man kann zeigen: Die Fourier-Reihe konvergiert immer gegen f im sogenannten „quadratischen Mittel“, ein Begriff den wir hier nicht behandeln werden.*

Bemerkung.

- *Ist f eine p-periodische Funktion, so ist die Fourier-Reihe F von f definiert als $\tilde{F}(\frac{x}{p})$, wobei $\tilde{F}$ die Fourier-Reihe der (1-periodischen) Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit $\tilde{f}(x) = f(px)$ ist.*
  Das heißt:
  $$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) \exp\left(2\pi i k \frac{x}{p}\right)$$
  wobei
  $$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_0^1 \tilde{f}(x) \cdot \exp(-2\pi i k x) \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(p \cdot x) \exp(-2\pi i k x) \\ &\overset{t=px}{=\!=} \frac{1}{p} \int_0^p f(t) \exp\left(\frac{-2\pi}{p} i k t\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$
- *Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodisch, so gilt:*
  $$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_0^1 f(x) \exp(-2\pi i k x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \overline{\exp(2\pi i k x)} \, \mathrm{d}x \\ &= \overline{\int_0^1 f(x) \exp(2\pi i k x) \, \mathrm{d}x} = \overline{\hat{f}(-k)} \end{aligned}$$
  Das heißt:
  $$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(2\pi i k x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(2\pi i k x) + \hat{f}(-k) \exp(-2\pi i k x) \\ &\overset{f \text{ ist reell}}{=\!=} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) \exp(2\pi i k x) + \overline{\hat{f}(k) \exp(2\pi i k x)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot Re(\hat{f}(k) \cdot \exp(2\pi i k x)) \end{aligned} \tag{22}$$
  Spezialfall: $f(x) = f(-x)$, das heißt: f ist gerade. Dann gilt:

Hier sollte ein Fehler in der VL sein. $\hat{f}(0)$ gibt es nicht doppelt.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_0^1 f(x)\exp(-\pi ikx)\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal[-t+1=x]{-x+1=t}(-1)\cdot\int_1^0 f(-t+1)\exp(-2\pi ik(-t+1))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(-t+1)\exp(2\pi ikt - 2\pi ik)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f(t)\exp(2\pi ikt)\,\mathrm{d}t \\
&= \hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}
\end{aligned}$$

Ergo: $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k) \in \mathbb{R}$
Mit Gleichung 22 folgt:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\hat{f}(k)\cos 2\pi kx$$

Analog kann man zeigen: Gilt $f(-x) = -f(x)$ *(das heißt* f *ist ungerade), dann lässt sich* $F(x)$ *schreiben als*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(2\pi kx)$$

Proposition 6.1. *Sei* $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cdot \exp(2\pi ikx)$ *wobei* $\gamma_k \in \mathbb{K}$ *und die trigonometrische Reihe auf der rechten Seite gleichmäßig konvergiert. Dann gilt:*

$$f \text{ ist 1-periodisch und Riemann-integrierbar über } [0,1] \text{ und } \hat{f}(k) = \gamma_k$$

Beweis. Sei $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \exp(2\pi ikx)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f_n(x+1) &= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \exp(2\pi ik(x+1)) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \exp(2\pi ikx)\cdot\exp(2\pi ik) \\
&= f_n(x)
\end{aligned}$$

Das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f_n 1-periodisch. Damit gilt:

$$f(x+1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Das heißt f ist 1-periodisch. Mit Satz 6.4 aus dem vorherigen Abschnitt folgt ref prüfen

$f \in \mathcal{R}_{[0,1]}$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_0^1 f(x)\exp(-2\pi ikx)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma_k \exp(2\pi ilx))\exp(-2\pi ikx)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^1 \gamma_l \exp(2\pi ilx)\cdot(-2\pi ikx)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l \cdot \int_0^1 \exp(2\pi i(l-k)x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq k \\ 1 & \text{für } l = k \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Satz 6.5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 1-periodische Funktion, die stückweise stetig differenzierbar ist, das heißt es existiert eine Partition

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

von $[0, 1]$, so dass

$$f|_{[t_{i-1},t_i]} \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

stetig differenzierbar ist.
Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f.

- Ohne Beweis -

7 Grundbegriffe in metrischen und normierten Räumen

Ziel des Kapitels: Vereinheitlichung und Verallgemeinerung bekannter Konvergenz- und Abstandsbegriffe

Definition 7.1. *Sei X eine Menge. Eine* Metrik *auf X ist eine Abbildung auf $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit:*

M_1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M_2 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle $x, y, z \in X$* *(Dreiecksungleichung)*

M_3 $d(x, y) = d(y, x)$ *für $x, y \in X$* *(Symmetrie)*

Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum. *Oftmals sagt man einfach X ist metrischer Raum, sofern die entsprechende Metrik aus dem Kontext hervorgeht.*

Beispiel 7.1.

1. Auf $\mathbb{K}$ definiert $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik.

2. Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir die l_1-Metrik durch:

$$d_1((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

d_1 ist eine Metrik, denn M_1 und M_3 sind trivial. M_2 folgt mit:
Seien $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| = d(x, z) + d(z, y)$$

3. Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir für $p \in \mathbb{N}$ die l_p- Metrik:

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

M_1 und M_3 sind offensichtlich. Die Dreiecksungleichung macht in diesem Falle durchaus Arbeit. Stichwort: Minkowski-Ungleichung.

4. Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir die l_∞-Metrik:

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \ldots, n\}$$

M_1 und M_3 sind wieder einfach zu sehen. M_2 folgt aus:
Seien $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) &= \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \ldots, n\} \\ &\leq \max\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i| \mid i = 1, \ldots, n\} \\ &\leq \max\{|x_i - z_i| \mid i = 1, \ldots, n\} + \max\{|z_i - y_i| \mid i = 1, \ldots, n\} \\ &= d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y) \end{aligned}$$

Bemerkung. *Man kann zeigen, dass* $d_\infty(x,y) = \lim\limits_{p\to\infty} d_p(x,y)$

Beispiel 7.2.

5. Sei X eine beliebige nicht leere Menge. Dann definiert

$$d_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die sogenannte *diskrete Metrik* auf X. Die Eigenschaften M_1 und M_3 sind wieder einfach zu sehen.
Zu M_2: Ohne Einschränkung: Sei $x \neq y$ und $z \in X$ beliebig. Ist $z = x$ bzw. $z = y$, so gilt:

$$1 = d_D(x,y) \leq d_D(x,z) + d_D(z,y) = 1$$

Ist $z \notin \{x,y\}$, so gilt:

$$1 = d_D(x,y) \leq d_D(x,z) + d_d(z,y) = 2$$

6. Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$$

Wir definieren:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

(das verallgemeinert Beispiel 4)

7. X-beliebige Menge auf $B(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$ definieren wir:

$$d_\infty = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

M_1 und M_3 sind weiter einfach. M_3 folgt aus:

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{y\in X} |h(y) - g(y)| \\ &= d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g) \text{ für alle } f,g,h \in B(X) \end{aligned}$$

8. $X = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$- die Menge aller stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{K}$. Auch auf $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ definieren wir $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

9. X-Personen auf Facebook. Mögliches Abstandsmaß: Kürzeste Verbindung zwischen Person A und Person B eindeutig über Freundschaftsrelation.

10. Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, so ist auch $(Y, d|_{Y\times Y})$ ein metrischer Raum, den wir üblicherweise einfach mit (Y,d) bezeichnen.

Bemerkung.

- *Mit Ausnahme von Beispiel 5, 9, 10 gehören die obigen Beispiele zur Klasse sogenannter normierter Räume beziehungsweise Skalarprodukträume, auf denen noch mehr Struktur vorliegt als „nur“ eine Metrik.*

Definition 7.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt* konvergent gegen $x \in X$, *wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\epsilon : d(x_n, x) < \epsilon$$

Wir schreiben: $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ beziehungsweise $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und nennen x den Grenzwert (GW) *von (x_n).*

Bemerkung.

- *Man vergleiche die obige Definition mit der Definition konvergenter Zahlenfolgen*
- *Man mache sich klar, dass gilt:*

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Longrightarrow d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Lemma 7.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und (x_n) eine konvergente Folge in X. Dann ist der Grenzwert von (x_n) eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien x, y Grenzwerte der Folge (x_n). Dann gilt:

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y, y_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Da $d(x, x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $d(y, x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt:

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) \leq \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) + d(x_n, y) = 0$$

Mit M_1, aus der Definition der Metrik, folgt $x = y$. ■

Beispiel 7.3. Was heißt Konvergenz einer Folge (f_n) gegen f in $B(X)$ bezüglich der Metrik d_∞?
Per Definition gilt:

$$\begin{aligned}
& f_n \xrightarrow[n\to\infty]{d_\infty} f \\
\Longleftrightarrow & \forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\epsilon : d_\infty(f_n, f) \leq \epsilon \\
\Longleftrightarrow & \forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\epsilon : \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \\
\Longleftrightarrow & \forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\epsilon \; \forall x \in X : \left| f_(x) - f(x) \right| \leq \epsilon \\
\Longleftrightarrow & f_n \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f
\end{aligned}$$

Im Folgenden lernen wir eine wichtige Teilklasse von metrischen Räumen kennen, sogenannte normierten Räume, insbesondere die, die eine Vektorraum-Struktur besitzen.

Definition 7.3. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$$

heißt Norm (auf V)*, wenn für beliebige $v, w \in V$ sowie $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:*

N_1 $\|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0$

N_2 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

N_3 $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Definition 7.4 (Induzierte Metrik)**.** *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist:*

gleichzeitig auch Proposition

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|} : V \times V \to& [0, \infty) \\ (v, w) \mapsto& \|v - w\| \end{aligned}$$

eine Metrik auf V. Wir nennen $d_{\|\cdot\|}$ die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik.

Beweis. Wir haben nur die Punkte M_1, M_2, M_3 von Definition 7.1 nachzuprüfen.

1. $d_{\|\cdot\|}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Seien $x, y, z \in V$, dann gilt:

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(x, y) =& \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ \leq& \|x - z\| + \|z - x\| \\ =& d_{\|\cdot\|}(x, z) + d_{\|\cdot\|}(z, y) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(x, y) =& \|x - y\| = \|-1 \cdot (y - x)\| \\ =& |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d_{\|\cdot\|}(y, x) \end{aligned}$$

■

Beispiel 7.4.

- Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir für $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : V \to& [0, \infty) \\ x \mapsto& \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

  die sogenannte l_p-Norm. Man sieht sofort: die von $\|\cdot\|_p$ induzierte Metrik ist genau die l_p-Metrik

- Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir für $p \in \mathbb{N}$ die l_∞ Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V \to& [0, \infty) \\ x \mapsto& \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, \end{aligned}$$

welche die l_∞-Metrik induziert.

- Auf $B(X)$, sowie $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ ist $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ eine Norm, die sogenannte Supremumsnorm.

Proposition 7.1 (Umgekehrte Dreiecksungleichung)**.** *Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt:*

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \ (x, y, z \in X)$$

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann gilt:

$$|\|y\| - \|z\|| \leq \|y - z\| \ (y, z \in V)$$

Beweis. Wegen M2 gilt:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \text{ und außerdem} \tag{23}$$
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \tag{24}$$

Ziehen wir $d(x, z)$ von 23 und $d(x, y)$ von 24 ab, so folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d(y, z) \geq& d(x, y) - d(x, z) \\ d(y, z) \geq& d(x, z) - d(x, y) \end{aligned}$$

Da für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\lambda| = \max\{-\lambda, \lambda\}$$

erhalten wir

$$d(y, z) \geq |d(x, y) - d(x, z)|.$$

Das zeigt den ersten Teil der Aussage. Zum zweiten Teil:
Da für alle $x \in V$ gilt: $d_{\|\cdot\|}(x, 0) = \|x\|$, folgt die Behauptung indem wir d durch $d_{\|\cdot\|}$ ersetzen und $x = 0$ einsetzen. ■

Anstatt per Hand nachzuweisen, dass die l_p-Normen in der Tat Normen sind, wollen wir den wohl wichtigsten Fall ($p = 2$) genauer betrachten. Es zeigt sich, dass der l_2-Norm noch mehr zugrunde liegt, als einfach nur eine Norm, nämlich ein Skalarprodukt.

Definition 7.5. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung*

$$< \cdot, \cdot >: V \times V \to \mathbb{K}$$

heißt Skalarprodukt*, wenn gilt:*

S_1 $< x, y > = \overline{< y, x >}$ *„(Anti-)Symmetrie“*

S_2 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \forall x, y, z \in V$:

$$< \alpha x + \beta y, z > = \alpha < x, z > + \beta < y, z >$$
$$\text{und} \ < z, \alpha x + \beta y > = \overline{\alpha} < z, x > + \overline{\beta} < z, y >$$

„Sesquilinearität“

S_3 $\forall x \in V : < x, x > = 0$, *genau dann, wenn* $x = 0$ *„positive Definitheit“*

Ist $< \cdot, \cdot >$ *ein Skalarprodukt (SKP), so heißt das Paar*
$(V, < \cdot, \cdot >)$ Skalarprodukt-Raum *beziehungsweise* Prähilbertraum.

Lemma 7.2 (Cauchy-Scharz-Ungleichung)**.** Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein Skalarprodukt-Raum. Dann gilt

$$|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}$$

Beweis. Seien $\lambda \in \mathbb{K}, x, y \in V$ gegeben. Dann gilt:

$$\left\langle \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}} - \frac{y}{\sqrt{< y, y >}}, \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}} - \frac{y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle \geq 0$$

Aufgrund von S_2 gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}} - \frac{y}{\sqrt{< y, y >}}, \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}} - \frac{y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle \\
=&\left\langle \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}}, \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}} \right\rangle + \left\langle \frac{y}{\sqrt{< y, y >}}, \frac{y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle \\
&+ \left\langle \frac{-y}{\sqrt{< y, y >}}, \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}} \right\rangle + \left\langle \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}}, \frac{-y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle \\
=&\lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot \frac{< x, x >}{< x, x >} + \frac{< y, y >}{< y, y >} + 2 \cdot Re \left\langle \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}}, \frac{-y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle
\end{aligned}$$

Für λ mit $|\lambda| = \lambda \cdot \overline{\lambda} = 1$, so dass

$$\lambda \left\langle \frac{x}{\sqrt{< x, x >}}, \frac{-y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle = - \left| \left\langle \frac{x}{\sqrt{< x, x >}}, \frac{-y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle \right|, \text{ folgt}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}} - \frac{y}{\sqrt{< y, y >}}, \frac{\lambda x}{\sqrt{< x, x >}} - - \frac{y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle \\
=&2 - 2 \cdot \left| \left\langle \frac{x}{\sqrt{< x, x >}}, \frac{y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle \right| \geq 0
\end{aligned}$$

Das heißt:

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \frac{x}{\sqrt{< x, x >}}, \frac{y}{\sqrt{< y, y >}} \right\rangle \right| \leq& 1 \left| \frac{\sqrt{< x, x >}}{< y, y >} \right. \\
|< x, y >| \leq& \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}
\end{aligned}$$

■

Proposition 7.2. *Sei V ein **Skalarprodukt**-Raum. Dann ist*

ist auch Definition

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>} &: V \to [0,\infty) \\ x &\mapsto \sqrt{< x, x >}\end{aligned}$$

eine Norm auf V, die wir die von $< \cdot, \cdot >$ induzierte Norm nennen.

Bemerkung. *Damit liefert die Cauchy-Schwarz-Ungleichung wie folgt:*

$$|< x, y >| \leq \|x\|_{<\cdot,\cdot>} \cdot \|y\|_{<\cdot,\cdot>}$$

Beweis. N_1 folgt sofort aus S_3 und N_3 folgt sofort aus S_2. Nun zu N_2:
Seien $x, y \in V$ gegeben, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2_{<\cdot,\cdot>} &= < x+y, x+y > = < x, x > + < y, y > + < x, y > + < y, x > \\ &\leq \|x\|^2_{<\cdot,\cdot>} + \|y\|^2_{<\cdot,\cdot>} + 2 \cdot \|x\|_{<\cdot,\cdot>} \cdot \|y\|_{<\cdot,\cdot>} \\ &= (\|x\|_{<\cdot,\cdot>} + \|y\|_{<\cdot,\cdot>})^2\end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert die Behauptung. ■

Beispiel 7.5.

- $V = \mathbb{K}^n$. Sei für $x, y \in V$ $< x, y > = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \overline{y_i}$. Dann ist $< \cdot, \cdot >$ offensichtlich ein Skalarprodukt auf V. Weiterhin induziert $< \cdot, \cdot >$ die Norm $\|\cdot\|_2$ und damit die l_2-Metrik..

- Wir betrachten den Raum

$$l_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | (x_n) \text{ ist Zahlenfolge in } \mathbb{K} \text{ mit } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

  Auf l_2 definieren wir $< \cdot, \cdot >$ durch:

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \overline{y_i}$$

  Tatsächlich ist $< \cdot, \cdot >$ wohldefiniert, da gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot \overline{y_i}| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + |y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + |y_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$$

  Damit konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \overline{y_i}$ absolut und daher schlechthin: Zu den Eigenschaften S_1, S_2, S_3: S_1 und S_3 sind klar und S_2 folgt aus den Grenzwertsätzen.

  hier sollte ein Fehler sein. Die Abschätzung $|x_i| \leq |x_i|^2$ geht im Allgemeinen nicht. Was aber geht ist $|x_i||y_i| \leq \frac{1}{2}|x_i|^2|y_i|^2$

  ich finde die Wortwahl mies

- Sei $V = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen von $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Dann definiert

$$< f, g > = \int_a^b f g \, \mathrm{d}x$$

  ein Skalarprodukt auf V. (*Siehe Übung*)

Wir haben diverse Metriken gesehen, die teils von Normen induziert werden, die wiederum teils von Skalarprodukten abstammten. Eine naheliegende Frage ist:

Inwiefern liefern verschiedene Metriken / Normen / Skalarprodukte
verschiedene Konvergenzbegriffe ?

Definition 7.6. *Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und m_1, m_2 Metriken auf X. Wir sagen m_1 und m_2* erzeugen die gleiche Topologie*, wenn für alle Folgen (x_n) in X und für alle $x \in X$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ bezüglich Metrik } m_1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ bezüglich Metrik } m_2$$

Das heißt:

$$m_1(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_2(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Wir sagen m_1 und m_2 sind ***äquivalent****, wenn $c, C > 0$ existieren mit:*

$$\forall x, y \in X \quad cm_1(x,y) \leq m_2(x,y) \leq Cm_1(x,y)$$

Analog sagen wir zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum X sind ***äquivalent****, wenn $c, C > 0$ existieren mit:*

$$c \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \ \forall x \in X$$

Bemerkung. *Man kann sich klarmachen, dass die obigen Begriffe Äquivalenzrelation auf der Menge aller Metriken / Normen auf X definieren.*

Proposition 7.3. *Äquivalente Normen erzeugen äquivalente Metriken. Und äquivalente Metriken erzeugen die gleichen Topologien.*

Beweis. Seien $x, y \in X$ und $c, C > 0$, so dass $c\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$, wobei $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf dem Vektorraum X seien. Dann gilt:

$$cd_{\|\cdot\|_1}(x,y) = c\|x-y\|_1 \leq \|x-y\|_2 = d_{\|\cdot\|_2}(x,y) \leq C\|x-y\|_1 = Cd_{\|\cdot\|_1}(x,y)$$

Das zeigt den ersten Teil.
Zum zweiten Teil: Sei $X \neq \emptyset$ und d_1, d_2 äquivalente Metriken auf X mit $c, C > 0 : c \cdot d_1 \leq d_2 \leq C \cdot d_1$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Cd_1(x_n, x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_2(x_n, x) = 0$$

Die andere Richtung läuft analog. ∎

Definition 7.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$ sowie $\epsilon > 0$. Dann heißt $B_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x,y) < \epsilon\}$ der* offene ϵ-Ball */ die* offene ϵ-Kugel *um x.*

Beispiel 7.6.

- $X = \mathbb{R}^2, d = d_2$ Kreis mit Radius 1 ohne Rand
- $X = \mathbb{R}^2, d = d_\infty$ Quadrat um (1,1) mit Seitenlänge 1

Lemma 7.3. Sei (X, d) metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X. Dann sind äquivalent:

- $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$
- $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\epsilon : x_n \in B_\epsilon(x)$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
& x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \\
\Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\epsilon : d(x_n, x) < \epsilon \\
\Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\epsilon : x_n \in B_\epsilon(x)
\end{aligned}
$$

■

Proposition 7.4. *Sei X eine Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf X. Dann sind äquivalent:*

1. *d_1 erzeugt die gleiche Topologie wie d_2*
2. $\forall x \in X \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$

$$
\begin{aligned}
B_\delta^{d_1}(x) \subseteq & B_\epsilon^{d_2}(x) \; \textit{und} \\
B_\delta^{d_2}(x) \subseteq & B_\epsilon^{d_1}(x)
\end{aligned}
$$

Beispiel 7.7. $X = \mathbb{R}^2, x = (0,0)$, $d_1 = d_\infty, d_2 = d_2$ (das heißt die l_2-Metrik)

Das ist ja grauenvolle Nomenklatur...

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Angenommen die Aussage ist falsch. Das heißt angenommen:

$$
\begin{aligned}
\exists x \; \exists \epsilon > & 0 \; \forall \delta > 0 : \\
B_\delta^{d_1}(x) \nsubseteq & B_\epsilon^{d_2}(x) \text{ oder} \\
B_\delta^{d_2}(x) \nsubseteq & B_\epsilon^{d_1}(x)
\end{aligned}
$$

Ohne Einschränkung gilt, dass ein x existiert, sowie $\epsilon > 0$, sodass für alle $\delta > 0$ $B_\delta^{d_1}(x) \nsubseteq B_\epsilon^{d_2}(x)$. Das heißt insbesondere:

$$
\begin{aligned}
\exists x \in X \; \exists \epsilon > & 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : \\
B_{\frac{1}{n}}^{d_1} \nsubseteq & B_\epsilon^{d_2}(x)
\end{aligned}
$$

Wir wählen nun für $n \in \mathbb{N} x_n \in B_{\frac{1}{n}}^{d_1}(x)$ $B_\epsilon^{d_2}(x)$ Damit konvergiert $x_n \to x$ bezüglich d_1 aber $x_n \nrightarrow x$ bezüglich d_2.
$2 \Rightarrow 1$ Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x$ bezüglich d_1. Zu zeigen: $x_n \to x$ bezüglich d_2. Das heißt zu zeigen ist:

$$
\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\epsilon : x_n \in B_\epsilon^{d_2}(x) \text{ wegen Lemma 13}
$$

Wähle n_ϵ so, dass $x_n \in B_\delta^{d_1}(x)$ für alle $n \geq n_\epsilon$ gilt, wobei δ wie in Punkt 2 gewählt sei. Dann gilt:

$$
\forall \epsilon > 0 \; \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ Lemma 7.3 } \forall n \geq n_\epsilon : x_n \in B_\delta^{d_1}(x) \subseteq B_\epsilon^{d_2}(x)
$$

■

Bemerkung.

- *Erzeugen zwei Metriken d_1, d_2 auf X die gleiche Topologie, so haben nach dem obigen die metrischen Räume $(X, d_1), (X, d_2)$ die „gleiche lokale Struktur“*
- *Auf $\mathbb{K}$ gilt: alle Normen sind äquivalent!*

Definition 7.8. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) heißt* Cauchy-Folge*, wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_\epsilon : d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

Proposition 7.5. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und (x_n) in x konvergent. Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei also $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert also ein n_ϵ, so dass für alle $n \geq n_\epsilon$ gilt: $d(x_n, x) < \epsilon$. Seien $n, m \geq n_\epsilon$. Dann gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\epsilon$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Bemerkung. *Die Umkehrung dieser Aussage ist im allgemeinen falsch!*

Definition 7.9. *Ein metrischer Raum (X, d) heißt* vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in (X, d) einen Grenzwert besitzt.*

Beispiel 7.8.

- $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständig
- $(\mathbb{K}^n, d_2)$ sind vollständig, denn: Sei $(x^l)_{l\in\mathbb{N}} = ((x_1^l, \ldots, x_n^l))_{l\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$. Dann gilt für $j = 1, \ldots, n$:

$$\left|x_j^l - x_j^{l'}\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j^l - x_j^{l'}|} = d_2(x^l, x^{l'}) \to 0$$

Das heißt $(x_j^l)_{l\in\mathbb{N}}$ ist für alle $j = 1, \ldots, n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ und daher (siehe erstes Beispiel) konvergent. Das heißt für alle $j = 1, \ldots, n$ können wir definieren:

$$x_j = \lim_{l\to\infty} x_j^l$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt dann:

$$d_2(x, x_l) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_j - x_j^l\right|^2} \xrightarrow{l\to\infty} 0$$

- Man mache sich klar: Sind d_1, d_2 äquivalente Metriken auf X, so ist (X, d_1) genau dann vollständig, wenn (X, d_2) vollständig ist. Es gibt aber Fälle von Metriken d_1, d_2 auf einer Menge X, so dass d_1 und d_2 die gleiche Topologie erzeugen, aber (X, d_1) vollständig ist, während (X, d_2) nicht vollständig ist.

- Die letzten beiden Beispiele zeigen: $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ist vollständig für jede Norm auf $\mathbb{K}^n$

- l_2 ist vollständig (ohne Beweis)

- $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ versehen mit d_∞ ist vollständig (siehe Kapitel über gleichmäßige Konvergenz und beachte dass $f_n \to f$ bezüglich d_∞ genau dann gilt, wenn $f_n \to f$ gleichmäßig konvergiert). ref?

- $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig

- $(0, 1]$ ist nicht vollständig

- $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $< f, g >= \int_a^b fg \, \mathrm{d}x$ ist nicht vollständig.

8 Topologie metrischer Räume

Eng verwandt mit dem Begriff der offenen Kugel um einen Punkt sind die folgenden Konzepte:

Definition 8.1. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann heißt $V \subseteq X$ eine* Umgebung *von x, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $B_r(x) \subseteq V$ gilt.*

Beispiel 8.1. Selbstverständlich ist jede offene Kugel $B_\epsilon(x)$ eine Umgebung von x.

Definition 8.2. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann heißt $U \subseteq V$* offen, *wenn U für jedes $x \in U$ eine Umgebung ist. Das heißt $U \subseteq X$ ist offen, wenn für alle $x \in U$ ein $r_x > 0$ existiert, mit $B_{r_x}(x) \subseteq U$. $A \subseteq X$ heißt* abgeschlossen, *wenn $X \setminus \ A$ offen ist.*

Bemerkung.

- *Es gibt Mengen die weder offen, noch abgeschlossen sind – z.B.* $(0,1]$
- *Es gibt auch Mengen, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind:* $\mathbb{R}, \emptyset$

Lemma 8.1. Jede offene Kugel in einem metrischen Raum (X,d) ist offen.

Beweis. Sei eine offene Kugel $B_\epsilon(x)$ gegeben und $y \in B_\epsilon(x)$. Dann gilt:

$$d(x,y) = r < \epsilon$$

Wähle $\delta > 0$ mit $r + \delta < \epsilon$. Dann gilt für alle $z \in B_\delta(y)$:

$$d(z,x) \leq d(x,y) + d(y,x) < r + \delta < \epsilon$$

Das heißt, $z \in B_\epsilon(x)$. ■

Der Begriff der offenen Menge beziehungsweise der Umgebung eines Punktes erlaubt die folgende alternative Charakterisierung von konvergenten Folgen.

Lemma 8.2. Sei (X,d) metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X. Dann sind äquivalent:

(i) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

(ii) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon : x_n \in B_\epsilon(x)$

(iii) Für jede Umgebung U von x existiert ein $n_U \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $x_n \in U \quad (n \geq n_U)$

(iv) Für jede offene Menge $V \subseteq X$ mit $x \in V$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $x_n \in V \quad n \geq n_V)$

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist genau Lemma 7.3 des vorherigen Kapitels.
(ii) $\rightarrow$ (iv) Da V offen ist, existiert per Definition ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon \subseteq V$. Dann gilt für alle $n \geq n_\epsilon : x_n \in B_\epsilon(x) \subseteq V$.
(iii) $\rightarrow$ (iii) Per Definition (von Umgebungen) gibt es eine offene Menge $V \subseteq U$ mit $x \in V$. Dann gilt für alle $n \geq n_V : x_n \in V \subseteq U$.
(iii) $\rightarrow$ (ii) Das folgt aus der Tatsache, dass $B_\epsilon(x)$ Umgebung von x ist. ■

Proposition 8.1. *Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt*

(T_1) $\emptyset, X$ sind offen

(T_2) Sind $V_1, \ldots, V_n$ offen, so ist auch $\bigcap_{i=1}^n V_i$ offen

(T_3) Sei I eine beliebige Indexmenge und $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Menge. Sei $M \subseteq \mathcal{P}(x)$ so, dass für alle $U \in M$ gilt: U ist offen. Dann gilt:

$$\bigcup_{U \in M} U \text{ ist offen}$$

Beweis. (T_1) & (T_3) sind einfach.
(T_2) Sei $x \in \cap_{i=1}^n V_i$. Dann gilt also $x \in V_i \quad (i = 1, \ldots, n)$. Da die V_i offen sind, existiert jeweils ein $\epsilon_i > 0$ mit $B_{\epsilon_i}(x) \subseteq V_i$. Sei $\epsilon = \min_{i=1,\ldots,n} \epsilon_i$. Dann gilt: $B_\epsilon(x) \subseteq V_i (i = 1, \ldots, n)$. Ergo:

$$B_\epsilon(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n V_i$$

Da x beliebig gewählt war, ist $\cap_{i=1}^n V_i$ offen. ■

Korollar 8.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und I eine beliebige Indexmenge und $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen. Dann ist $\cap_{i \in I} B_i$ abgeschlossen.

Beweis. Es ist zu zeigen:

$$\left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)^C = X \cap \bigcap_{i \in I} B_i$$

ist offen. Mit den de Morgan'schen Regeln folgt:

$$\left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)^C = \bigcup_{i \in I} {B_i}^C$$

ist offen, da B_i^C offen ist und wegen Proposition 8.1 (T_3). ■

Bemerkung.

- *Ist X eine Menge und $M \subseteq X$, so heißt $M^C := X \setminus M$ das* Komplement *von M (in X).*

Korollar 8.2. Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen sowie $U \subseteq X$ offen. Dann ist $U \setminus A$ offen und $A \setminus U$ abgeschlossen.

Beweis. $U \setminus A = U \cap A^C$ ist offen, da A^C offen ist und wegen (T_2) $A \setminus U = A \cap U^C$ ist abgeschlossen, da U^C abgeschlossen ist und Korollar 8.1 gilt. ■

Definition 8.3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt*

- $$int\, M := \overset{\circ}{M} := M^\circ := \bigcup_{\substack{u \subseteq M \\ U ist\ offen}} U$$

  das ***Innere von M***

- $\partial M := \bar{M} := \cap_{A \supseteq M, A \text{ ist abgeschlossen}}$ *den* ***Abschluss*** *von* M

- $\partial M := \bar{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ *den* ***Rand*** *von* M

Bemerkung.

- *Damit ist* $\overset{\circ}{M}$ *die größte offene Menge die komplett in* M *enthalten ist.*

- *Analog ist* $\overline{M}$ *die kleinste abgeschlossene Menge, die* M*, enthält.*

Proposition 8.2. *Sei* (X, d) *metrischer Raum. Eine Teilmenge* $A \subseteq X$ *ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder (in* X *konvergente) Folge* (x_n) *in* A *selbst wieder in* A *liegt.*

Beweis. Sei zunächst A abgeschlossen und (x_n) eine Folge in A, die gegen $x \in X$ konvergiert. Angenommen x liegt nicht in A. Da A abgeschlossen ist, ist A^C offen. Nach Punkt (iv) Lemma 8.2 gibt es also ein n_{A^C}, so dass $x_1 \in A^C$ für alle $n \geq n_{A^C}$ im Widerspruch zur Annahme, dass (x_n) eine Folge in A ist. Das zeigt die erste Richtung.

Für die andere Richtung sei $A \subseteq X$ eine Menge mit der Eigenschaft, dass jede (in x konvergente) Folge in A ihren Grenzwert in A hat. Wir zeigen: A^C ist offen. Sei aber $x \in A^C$. Angenommen für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$B_{\frac{1}{n}}(x) \not\subseteq A^C$$

das heißt, für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Das heißt (x_n) ist eine Folge in A, die nach Lemma 8.2 Punkt (ii) gegen x konvergiert. Da $x \in A^C$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Definition 8.4. *Sei* X *metrischer Raum und* $Y \subseteq X$*. Dann heißt* $z \in X$

- ***Häufungspunkt (HP)*** *von* Y*, falls in jeder Umgebung* U *von* z *ein Element* $y \in Y \setminus \{z\}$ *liegt*

- ***Isolierter Punkt*** *von* Y*, falls* $z \in Y$ *und* z *kein Häufungspunkt von* $Y \setminus \{z\}$ *ist.*

- ***Innerer Punkt*** *von* Y*, wenn* $z \in Y$

Damit schreibt sich Proposition 8.2 wie folgt:

Proposition 8.3. *Sei* (X, d) *metrischer Raum. Eine Teilmenge* $A \subseteq X$ *ist abgeschlossen, wenn sie jeden ihrer Häufungspunkte enthält.*

Ist das nicht ein genau dann wenn?

9 Grenzwerte & Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Wir wollen, ganz analog zu Fall reell- beziehungsweise komplexwertiger Funktionen, Begriffe wie den Grenzwert und Stetigkeit untersuchen.

Definition 9.1. *Seien X, Y metrische Räume und $f : D \subseteq X \to Y$ sowie $p \in X$ ein Häufungspunkt von D.*
Wir sagen f hat an der Stelle p den ***Grenzwert*** *(GW) $q \in Y$, wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (B_\delta(p) \cap D) \setminus \{p\} : \quad d(f(x), q) < \epsilon$$

In diesem Falle schreiben wir wie üblich:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \text{ beziehungsweise } f(x) \xrightarrow{x \to p} q$$

Bemerkung.

- *Achtung! Hier stehen (implizit) zwei unter Umständen komplett verschiedene Metriken (eine auf X und eine auf Y).*
- *p muss <u>nicht</u> in D liegen, selbst wenn $p \in D$, ist $f(p)$ für die Existenz eines Grenzwerts komplett unerheblich.*
- *Wie im reellen folgt (direkt aus der Dreiecksungleichung) die Eindeutigkeit des Grenzwerts.*

Satz 9.1. Seien X, Y metrische Räume, $f : D \subseteq X \to Y$ eine Abbildung und $p \in X$ ein Häufungspunkt von D. Dann sind äquivalent:

1. $$\lim_{x \to p} f(x) = q$$

2. Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \neq p \quad (n \in \mathbb{N})$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = p$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = q$$

Beweis. Ganz analog zum reell- beziehungsweise komplexwertigen Fall. ■

Definition 9.2. *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann heißt f* stetig an der Stelle *$p \in X$, wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(p) : d(f(x), f(p)) < \epsilon$$

Ist f stetig in jedem $p \in X$, so heißt f stetig.

Bemerkung.

- *Hier muss p selbstverständlich im Definitionsbereich von f liegen.*
- *In isolierten Punkten ist f stets steig.*

- *Erinnerung: Für $A \subseteq X$ sei $F(A) = \{f(x) | x \in A\}$*
  Damit schreibt sich die Definition von Stetigkeit in $p \in X$ wie folgt:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad f(B_\delta(p)) \subseteq B_\epsilon(f(p))$$

- *Stetig heißt: „Punkte nahe p werden in Punkte nahe $f(p)$ abgebildet“*

Satz 9.2. Sei X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ sowie $p \in X$ ein Häufungspunkt von X. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig in p
2. $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$

Beweis. Ganz analog zum Beweis der entsprechenden reell- beziehungsweise komplexwertige Aussage. ∎

Proposition 9.1. *Seien X, Y, Z metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig in $p \in X$ sowie $g : Y \to Z$ stetig in $f(p) \in Y$. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig in p*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da g stetig in $f(p)$ ist, gibt es $\delta' > 0$, so dass

$$g(B_{\delta'}(f(p)) \subseteq B_\epsilon(g \circ f(p))$$

Analog existiert $\delta > 0$ mit $f(B_\delta(p)) \subseteq B_{\delta'}(f(p))$. Dann gilt:

$$g \circ f(B_\delta(p)) \subseteq g(B_{\delta'}(f(p)) \subseteq B_\epsilon(g \circ f(p))$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ∎

Proposition 9.2. *Sei X ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{K}$ stetig in $p \in X$. Dann sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und – falls $g(x) \neq 0 \quad (x \in X)$ – $\frac{f}{g}$ stetig in p.*

Beweis. Wir betrachten den Fall der Addition, die anderen Fälle laufen ganz analog.
Ohne Einschränkung sei p Häufungspunkt von X. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to p} f(x) + g(x) &= \lim_{n \to \infty} f(x_n) + g(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) + \lim_{n \to \infty} g(x_n) \\ &= \lim_{x \to p} f(x) + \lim_{x \to p} g(x) = f(p) + g(p) = (f + g)(p)\end{aligned}$$

wobei (x_n) eine beliebige Folge in X mit $(x_n) \neq p \quad (n \in \mathbb{N})$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = p$ sei. Wir haben also gezeigt:

$$\lim_{x \to p} (f + g)(x) = (f + g)(p)$$

Mist Satz 9.2 folgt die Behauptung. ∎

Einschub. *Wir haben in den Übungen bereits Metriken auf den Produkt metrischer Räume $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ bereits kennen gelernt, das heißt Metriken* *auf den Raum $Y = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ Eine natürliche Metrik auf Y ist gegeben durch:*

$$d_+(Y, Y') = d_+((X_1, \ldots, X_n), (X_1', \ldots, X_n')) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, x_i')$$

Eine weitere natürliche Metrik auf Y ist gegeben durch:

$$d_{\max}(Y, Y') = d_{\max}((X_1, \ldots, X_n), (X_1', \ldots, X_n')) = \max_{i=1,\ldots,n} d_i(x_i, x_i')$$

Es zeigt sich, dass d_+ und d_{max} äquivalent sind, denn:

$$d_{\max}(Y, Y') \leq d_+(Y, Y') \leq n \cdot d_{\max}(Y, Y')$$

Fazit: Bei der Behandlung des Produkts $(X_1, \ldots, X_n)$ ist es unerheblich, für welche der beiden Metriken wir uns entscheiden.

Proposition 9.3. *Seien $X_1, \ldots, X_n, Y$ metrische Räume und*

$$f : Y \to X_1 \times \ldots \times X_n$$

mit $y \mapsto (f_1(Y), \ldots, f_n(Y))$, wobei $f_i : Y \to X_i, \quad (i = 1, \ldots, n)$ sei.
Dann ist f genau dann stetig in $p \in Y$ wenn f_i für $i = 1, \ldots, n$ stetig in p ist.

Beweis. „f stetig $\Rightarrow f_i$ stetig“: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$d(f(x), f(p)) < \epsilon$$

sobald $x \in U_\delta(p)$. Damit gilt:

$$D(f_i(x), f_i(p)) \leq d_{\max}(f(x), f(p)) < \epsilon$$

für alle $x \in B_\delta(p)$. Also ist f_i stetig.
„f_i ist stetig in $p \Rightarrow f$ ist stetig“: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert für $i = 1, \ldots, n$ ein $\delta_i > 0$ mit:

$$d(f_i(x), f_i(p)) < \epsilon$$

sobald $d(x, p) < \delta_i$. Dann gilt für alle x mit $d(x, p) < \delta$, wobei $\delta := \min_{i=1,\ldots,n} \delta_i$:

$$d_{\max}(f(x), f(p)) = \max_{i=1\ldots,n} d(f_i(x), f(p)) \leq \epsilon$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Proposition 9.4 (Stetigkeit von Norm und Metrik)**.** *Sei (X, d) metrischer Raum. Dann ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Seien $(x_1, x_2) \in X \times X$ sowie $\epsilon > 0$ gegeben. Wir zeigen: d ist stetig in (x_1, x_2). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|d(x_1, x_2) + d(x_1', x_2')| =& |d(x_1, x_2) - d(x_1, x_2') + d(x_1, x_2') - d(x_1', x_2')| \\
\leq& |d(x_1, x_2) - d(x_1, x_2')| + |d(x_1, x_2') - d(x_1', x_2')| \\
\leq& d(x_2, x_2') + d(x_1, x_1') = d_+((x_1, x_2), (x_1', x_2'))
\end{aligned}$$

Ergo: Ist $d_+((x_1, x_2), (x_1', x_2')) < \delta$ (für $\delta = \epsilon$), dann ist $|d(\ldots) - d(\ldots)| < \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. Für den zweiten Teil folgt die Behauptung aus:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Das heißt $\|B_\delta(x)\| \subseteq B_\delta(\|x\|)$. ∎

Ein weiteres wichtiges Beispiel stetiger Funktionen:

Beispiel. *Wir definieren die* Koordinaten-Funktion

$$\begin{aligned} \phi_j : \mathbb{K}^d &\to \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_d) &\mapsto x_j \end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots d$. Offensichtlich gilt:

$$|\phi_j(x) - \phi_j(y)| \leq \|x - y\|_1$$

womit ϕ_j stetig ist. Durch wiederholte Anwendung von Proposition 9.2 erhalten wir dann, dass jedes Monom, *das heißt jede Abbildung der Form*

$$\mathbb{K}^d \ni X \mapsto X_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot X_d^{n_d}$$

mit $n_1, \ldots, n_d \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ stetig ist. Dasselbe gilt für Vielfache und Summen von Monomen. Ergo: Polynome, *das heißt Abbildung*

$$\begin{aligned} P : \mathbb{K}^d &\to \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_d) &\mapsto \sum c_{n_1, \ldots, n_d} \cdot x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{n_d} \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $c_{n_1, \ldots, n_d} \in \mathbb{K}$ und die Summe endlich ist, sind stetig. Analog sind rationale Funktionen, das heißt Abbildungen:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{K}^d \setminus Q^{-1}(\{0\}) &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

wobei P, Q Polynome sind, stetig.

10 Kompaktheit

Definition 10.1. *Ist* (x_n) *eine Folge in einem metrischen Raum* (X, d) *und* $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *eine strikt monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, (das heißt* $n_1 < n_2 < \ldots$*), dann heißt* $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *eine* Teilfolge (TF) *von* (x_n)*.*

Proposition 10.1. *Sei* (x_n) *eine Folge in einem metrischen Raum* (X, d)*, so sind äquivalent:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
2. *Jede Teilfolge* (x_{n_j}) *von* (x_n) *konvergiert gegen* x

Beweis. Die Aussage folgt aus der entsprechenden Aussage für reelle Zahlenfolgen, wenn man folgende Äquivalenzen berücksichtigt:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} = x \\
\xLeftrightarrow{Def.Grenzwert}\ &\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \\
\xLeftrightarrow[\text{für Zahlenfolgen}]{\text{entsprechende Aussage}}\ &\lim_{j\to\infty} d(x_{n_j}, x) = 0 \text{ für jede Teilfolge } (x_{n_j}) \\
\Longleftrightarrow\ &\lim_{j\to\infty} x_j = x
\end{aligned}
$$

■

Definition 10.2. *Sei* X *ein metrischer Raum und* $E \subseteq X$*. Dann heißt* E kompakt*, wenn jede Folge in* E *eine in* E *konvergente Teilfolge besitzt.*

Beispiel 10.1. Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt: Jede Folge in $[a, b]$ ist beschränkt und besitzt daher nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert dieser konvergenten Folge liegt in $[a, b]$, da $[a, b]$ abgeschlossen ist.

Satz 10.1. Sei X metrischer Raum und $E \subseteq X$ kompakt. Dann ist E abgeschlossen.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in E, die gegen $x \in X$ konvergiert. Nach Proposition 8.2ist zu zeigen: $x \in E$.
Wegen der Kompaktheit von E gibt es eine Teilfolge x_{n_j} von (x_n) mit
$x_{n_j} \xRightarrow{j\to\infty} x' \in E$. Wegen Proposition 10.1 muss gelten: $x = x'$ und daher $x \in E$. ■

Satz 10.2. Sei X metrischer Raum und $E \subseteq X$ kompakt sowie $A \subseteq E$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in A. Dann ist (x_n) insbesondere Folge in E. Da E kompakt ist, besitzt (x_n) eine in E konvergente Teilfolge (x_{n_j}). Sei $A := \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j}$.
Zu zeigen: $x \in A$. Das folgt sofort aus Proposition 8.2 und der Abgeschlossenheit von A. ■

Korollar 10.1. Sei X metrischer Raum. $A \subseteq X$ abgeschlossen sowie $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist $A \cap K$ kompakt.

Beweis. K ist abgeschlossen (Satz 10.1), so dass $A \cap K$ abgeschlossen ist (als Schnitt abgeschlossener Mengen). Damit folgt die Aussage aus Satz 10.2. ∎

Definition 10.3. *Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt A* beschränkt, *wenn es $x \in X$ gibt und ein $R > 0$ existiert, so dass $A \subseteq B_R(x)$.*

Bemerkung. *Die Δ-Ungleichung liefert sofort, dass, sobald für $x \in X$ ein $R_x > 0$ existiert, so dass $A \subseteq B_{R_x}(x)$, diese Eigenschaft für alle $x \in X$ gilt.*

Proposition 10.2. *Sei X metrischer Raum und $E \subseteq X$ kompakt. Dann ist E beschränkt.*

Beweis. Angenommen E ist nicht beschränkt. Wähle $x_1 \in X$ fest. Wir definieren (x_n) rekursiv: $x_{n-1} \in X$ mit $d(x_{n+1}, x_l) > 1$ $(l = 1, \dots, n)$. Dann gilt für die Folge (x_n):

$$d(x_n, x_m) > 1 \ (n \neq m)$$

Dann gilt aber auch für jede Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n):

$$d(x_{n_j}, x_{n_{j\prime}}) > 1 \ (j \neq j\prime)$$

Das heißt keine Teilfolge ist eine Cauchy-Folge. Da jede konvergente Folge auch Cauchy-Folge ist, gibt es also keine konvergente Teilfolge. Das heißt E ist nicht kompakt. ∎

Theorem 10.1 (Satz von Heine-Borel)**.** *Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. $\Rightarrow$ gilt auf Grund von Satz 10.1. und Proposition 10.2.
$\Leftarrow$ Da K beschränkt ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $K \subseteq [-N, N]^d$. kompakt ist.
Das heißt, wir müssen folgende Behauptung beweisen:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $[-N, N]^d$ ist kompakt.

Beweis. Sei $(x_n) = (x_n^1, \dots, x_n^d)$ eine Folge in $[-N, N]^d$. Da (x_n^1) Folge in $[-N, N]$ ist (also insbesondere beschränkt ist, liefert Bolzano-Weierstraß die Existenz einer (in $[-N, N]$) konvergente Teilfolge $(\tilde{x}_n^1) = (x_{n_j}^1)$. Wir betrachten nun die Folge $(x_{n_j}^2)$ in $[-N, N]$. Wegen Bolzano-Weierstraß besitzt diese eine konvergente Teilfolge $(\tilde{x}_n^2)$.
Durch d-fache Wiederholung dieses Schrittes erhalten wir eine strikt wachsende Folge $n_1 < n_2 < \dots$ natürliche Zahlen, so dass

$$(x_{n_j}^k) \text{ für alle } k = 1, \dots, d \text{ konvergiert}$$

Wir setzen für $k = 1, \dots, n$

$$x^k := \lim_{j \to \infty} x_{n_j}^k \text{ Dann gilt}$$

$$d_{\max}((x_{n_j}), (x^1, \dots, x^d)) = \max_{k=1,\dots,d} d(x_{n_j}k, x^k) \xrightarrow{j \to \infty} 0$$

∎

∎

Definition 10.4. *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann heißt f* gleichmäßig stetig*, wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : \; d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$$

Satz 10.3. Seien X, Y metrische Räume und X kompakt sowie $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert für $n \in \mathbb{N}$ ein Paar $x_n, y_n \in X$ sowie $\epsilon > 0$ mit: $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Da X kompakt ist, gibt es eine strikt wachsende Folge natürlicher Zahlen (n_j), so dass x_{n_j}, y_{n_j} konvergent sind mit: $x := \lim\limits_{j \to \infty} x_{n_j}$ und $y := \lim\limits_{j \to \infty} y_{n_j}$. Dann gilt:

$$0 \leq d(x, y) = \lim_{j \to \infty} d(x, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, y)$$

Ergo: $d(x, y) = 0$, das heißt $x = y$. Gleichzeitig gilt, aufgrund der Stetigkeit

$$\lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = f(x) \text{ und } \lim_{j \to \infty} f(y_{n_j}) = f(y)$$

Aber: $d(f(x_{n_j}), f(y_{n_j})) \geq \epsilon$ $(j \in \mathbb{N})$. $\exists \epsilon > 0 \; \exists x_n, y_n$ mit

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \text{ und } d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$$

Dann existiert Teilfolge $(x_{n_j}), (y_{n_j})$ von $(x_n), (y_n)$ mit:

$$\begin{aligned} \lim_{j \to \infty} x_{n_j} &= x \\ \lim_{j \to \infty} y_{n_j} &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(x, y) \leq d(x, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, y) \\ &\leq d(x, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, y_{n_j}) + d(y_n, y) < \frac{1}{n_j} \\ &\Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Da f stetig ist, existiert

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) \\ f(y) &= \lim_{j \to \infty} f(y_{n_j}) \end{aligned}$$

Es gilt

$$(f(x_{n_j}), f(y_{n_j}) \xrightarrow{j \to \infty} (f(x), f(y))$$

Da $d : X \times X \to: [0, \infty)$ stetig ist, gilt:

$$d(f(x), f(y)) = \lim_{j \to \infty} d(f(x_{n_j}), f(y_{n_j}) \geq \epsilon \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Widerspruch zur Tatsache das $x = y$. ■

Satz 10.4. Sei K ein kompakter metrischer Raum, X metrischer Raum. $f : K \to X$ stetig. Dann ist $f(K) = \{f(k) | k \in K\}$ kompakt.

Beweis. Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$. Zu zeigen: Es existiert eine konvergente Teilfolge (y_{n_j}) mit Grenzwert in $f(K)$. Sei k_n so, dass $f(k_n) = y_n$ $y \in \mathbb{N}$. Da (k_n) Folge in kompakten metrischen Raum K ist, existiert eine konvergente Teilfolge (k_{n_j}) mit Grenzwert $k \in K$. Es gilt:

$$y_{n_j} = f(k_{n_j}) \xrightarrow{j \to \infty} f(k)$$

da f stetig ist. Da $f(k) \in f(K)$ liegt, folgt die Behauptung. ∎

Korollar 10.2. Sei K ein kompakter metrischer Raum und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt in K sein Maximum sowie Minimum an.

Beweis. Nach Satz 10.4 ist $f(K)$ kompakt und daher beschränkt und abgeschlossen. Aufgrund der Beschränktheit existiert ein Supremum M und ein Infimum m der Funktionswerte von f.
Wir zeigen: M wird angenommen (der Fall m läuft analog).
Da M Supremum von $f(K)$ ist, existiert eine Folge (y_n) mit $y_n \to M$. Da $f(K)$ abgeschlossen ist, muss $M \in f(K)$ gelten. Damit existiert also ein $k \in K$ mit $f(k) = M$. ∎

11 Der Banach'sche Fixpunktsatz

Definition 11.1. *Seien X, Y metrischer Räume, eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt* Lipschitz-stetig*, wenn ein $L > 0$ existiert mit:*

$$\forall x_1, x_1 \in X : d(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$$

in diesem Fall nennen wir L eine Lipschitz-Konstante *von f. Wir sagen eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine* Kontraktion*, wenn es für f eine Lipschitz-Konstante L gibt, mit $L < 1$.*

Der nächste Satz ist der zentrale Fixpunktsatz der Analysis und damit einer der wichtigsten Sätze der Analysis schlechthin.

Theorem 11.1 (Banach'scher-Fixpunktsatz)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion. Dann gilt:*

- *Es existiert ein eindeutiger Fixpunkt $p \in X$ von f, das heißt ein Punkt p wird mit $f(p) = p$*
- *Für beliebige $x \in X$ konvergiert die Folge*

$$(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_{\geq 0}} \text{ gegen } p$$

Beweis. Wir zeigen zunächst:
Ist $p \in X$ ein Fixpunkt, so ist p der einzige Fixpunkt von f. Denn: Angenommen es existiert ein weiterer Fixpunkt $p' \neq p$. Dann gilt:

$$0 < d(p, p') = d(f(p), f(p')) \leq Ld(p, p') < d(p, p') \text{ Widerspruch}$$

Das heißt, p muss der einzige Fixpunkt sein.
Nun zur Existenz eines Fixpunkts.
Sei $x \in X$ beliebig und $x_n := f^n(x)$ $(n \in \mathbb{N}_{\geq 0})$. Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_{m+1}) = d(f^m(x_0), f^m(x_1)) &\leq Ld(f^{m-1}(x_0), f^{m-1}(x_1)) \\ &\leq L^2 d(f^{m-2}(x_0), f^{m-2}(x_1)) \leq L^m d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Wobei $0 < L < 1$ eine Lipschitz-Konstante von f sei. Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ und ohne Einschränkung $n \geq m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \leq \dots \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-m-1} d(x_{m-j-1}, x_{m+j}) \leq \sum_{j=0}^{n-m-1} L^{m+j} \cdot d(x_0, x_1) \\ &= L^m d(x_0, x_1) \cdot d(x_0, x_1) \cdot \sum_{j=0}^{n-m-1} L^j \\ &\leq L^m d(x_0, x_1) \cdot d(x_0, x_1) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} L^j \\ &= L^m d(x_0, x_1) \cdot d(x_0, x_1) \frac{1}{1-L} \xrightarrow{m \to \infty} 0 \end{aligned}$$

Ergo: (x_n) ist Cauchy-Folge.[10] Da (X,d) vollständig ist, existiert ein $x' \in X$, sodass x_n gegen $x' \in X$ konvergiert. Wir zeigen jetzt: $f(x) = x$. Damit folgt dann die Behauptung. Es gilt :

In der Summe sollte $d(x_{m+(j+1)}, x_{m+j})$ stehen

Hier stand erst das gleiche x wie oben, aber das ist natürlich quatsch. Steht das bei anderen auch so in den Mitschriften?

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(\lim_{n\to\infty} x_n) \\
&\xlongequal[\text{Lipschitz-stetig}]{\text{f ist stetig}} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(f^n(x_0)) \\
&= \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = X
\end{aligned}
$$

■

[10] Basti: das sollte man sich klar machen!