1 Differentiation

Definition 1 Sei $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D(f)$ ein Punkt, um den ein offenes Intervall $B_\epsilon(x)$ (für geeignetes $\epsilon > 0$) komplett in $D(f)$ enthalten ist ($B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$). Dann heißt f an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
Wir meinen mit $f'(x_0)$ die **Ableitung** (seltener *Differentialquotient*) von f an der Stelle x_0.
Ist $f : D(f) \to \mathbb{R}$ in jedem $x \in D(f)$ differenzierbar, dann heißt f schlechthin **differenzierbar**. Etwas irreführend wird auch die Abbildung

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von f bezeichnet.

Satz 1 *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$, so dass*

   $$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$$

2. *Es gibt ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ und $u : I \to \mathbb{R}$, so dass*

   $$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$$

3. *f ist in x_0 differenzierbar*

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

D.h. insbesondere c und $\tilde{c}$ sind eindeutig bestimmt

Bemerkung 1

- Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ wählen und setzt

  $$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- Vergisst man die Funktion ϕ, versteht man mit der Geradengleichung

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an f in x_0

Beweis:

$1 \leftrightarrow 2$ Man setzte einfach $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$ und $\tilde{c} = c$
(in $x = x_0$ setze man $u(x_0) = 0$)

$1 \rightarrow 2$ ZZ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c\end{aligned}$$

$3 \rightarrow 1$ Wir setzten $c = f'(x_0)$ und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \left|\frac{\phi(x)}{x - x_0}\right| &= \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}\right| \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f(x_0) = 0\end{aligned}$$

Satz 2 *Es sind äquivalent:* $f: I \to \mathbb{R}$

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$
   mit: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi(x)}{|x-x_0|} = 0$

2. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$
   mit: $\lim\limits_{n\to\infty} u(x) = 0$

3. *Der Grenzwert* $f'(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existiert*

Satz 3 *Sei* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f: I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in I$*. Dann ist* f *in* x_0 *stetig.*
Beweis:

ZZ ist: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Äquivalent dazu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$

Nun gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\frac{x-x_0}{x-x_0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

Bemerkung 2

- Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!
  Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind.
  (*Beispiel:* Weierhaus-Fkt: $\sum_{n\in\mathbb{N}} cos(b_n \pi x)$ mit $a_n \in (0,1)$ und $a_n b_n > 1$)

- Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar

Satz 4 *Seien* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *in* $x \in I$ *differenzierbar,* $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall. Dann sind* $f + g$*,* $f \cdot g$ *und* $\frac{f}{g}$ *(sofern* $g(x) \neq 0$*) in* x *differenzierbar.*
Es gilt:

1. $(f + g)' = f'(x) + g'(x)$ *(Summenregel)*

2. $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ *(Produktregel)*

3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ *(Quotientenregel)*

Beweis:

1. $$(f+g)'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y)+g(y)-(f(x)+g(x))}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$$
   $$= \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} + \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} = f'(x) + g'(x)$$

2. $$\lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y)-f(x)g(x)}{y-x} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(x)g(x)}{y-x}$$
   $$= \lim_{y\to x} f(y)\frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x)\frac{f(x)-f(x)}{y-x}$$
   $$= \lim_{y\to x} f(y) \lim_{y\to x} \frac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x) \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
   $$\overset{Satz\ 3}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

3. $\lim\limits_{y\to x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y-x} = \lim\limits_{y\to x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)}\frac{g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(y)}{g(y)}}{y-x} = \lim\limits_{y\to x} \frac{1}{g(y)g(x)} \frac{f(y)g(x)-f(x)g(y)}{y-x}$

$= \frac{1}{g^2(x)} \lim\limits_{y\to x} \frac{f(y)g(x)-f(y)g(y)+f(y)g(y)-f(x)g(y)}{y-x}$

$= \frac{1}{g^2(x)} \lim\limits_{y\to x} f(y) \cdot \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + g(y)\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

$= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left(\lim\limits_{y\to x} f(y)\frac{g(x)-g(y)}{y-x} + \lim\limits_{y\to x} g(y)\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right)$

$= \frac{1}{g^2(x)}(f(x)\cdot(-g(x)) + g(x)f'(x)) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Beispiel 1

- $f(x) = c \in \mathbb{R}(x \in \mathbb{R})$
  $\rightarrow f'(x) = \lim\limits_{x\to y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim\limits_{x\to y} \frac{c-c}{y-x} = 0$

- $f(x) = x(x \in \mathbb{R})$
  $f'(x) = \lim\limits_{x\to y} \frac{y-x}{y-x} = 1$

- $f(x) = x^n, (x \in \mathbb{R})$ wobei $n \in \mathbb{N}$
  $f'(x) = nx^{n-1}$ per Induktion:
  $n = 1$ Stichpunkt 2 ✓
  $n \to n+1$: Sei also $f(x) = x^{n+1}$. Das gibt mit der Produktregel:
  $f'(x) = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot (x^n)' = 1 \cdot xn + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für $p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$ gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^{n} l \cdot a_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^{n} l \cdot a_l x^{l-1}$$

- Seien P_1 und P_2 Polynome.
  Dann nennt man die Abbildung
  $Q : \mathbb{R} \setminus \{x | P_2(x) = 0\} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ eine rationale Funktion.
  Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

- Die Funktion $|\circ| \cdot x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \textit{für } x \geq 0 \\ -x & \textit{sonst} \end{cases}$ ist nicht in 0 differenzierbar.
  Denn:
  $$\lim_{y\searrow 0} \frac{|y|-|0|}{y-0} = \lim_{y\searrow 0} \frac{y-0}{y-0} = 1$$
  $$\lim_{y\nearrow 0} \frac{|y|-|0|}{y-0} = \lim_{y\nearrow 0} \frac{-y-0}{y-0} = -1$$

Satz 5 (Kettenregel) *Seien I_f und I_g Intervalle, $x_0 \in I_f$ und $f : I_f \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $g : I_g \to \mathbb{R}$ sei in $f(x_0)$ differenzierbar und $f(I_f) \subseteq I_g$. Dann gilt:*

$$\frac{dg \circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

Beweis: *Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt für alle $x \in I_f$:*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x))$$

(*Wobei* $\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$)
Analog gilt für alle $y \in I_g$*:*

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei $\lim_{y\to f(x_0)} v(y) = 0$
Damit haben wir für alle $x \in I_f$*:*

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) =& (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x)) \\ =& (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x)) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x)) + v(f(x)) \\ &= \lim_{x\to x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x\to x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0)g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

Definition 6 Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f **stetig differenzierbar**. Wir definieren weiterhin induktiv die k-te Ableitung (für $k \in \mathbb{N}$) durch:

$$\begin{aligned} f^{(0)} :=& f \\ f^{(k+1)} :=& f^{(k+1)'} \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.
Ist $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert, so heißt f **beliebig oft** bzw. **unendlich oft differenzierbar**.

Bemerkung 3 Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

Satz 7 *Sei* $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, a_k \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ *eine Potenzreihe vom Konvergenzradius* $R > 0$. *Dann ist* $p : x \mapsto p(x)$ *auf ganz* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *differenzierbar mit* $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$.
Insbesondere ist p' *auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius* R.

Bemerkung 4

1. Damit erhalten wir:

$$exp'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = exp(x)$$

2. Damit sind Potenzreihen ∞ oft differenzierbar

Beweis Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k \right) (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left(\limsup \sqrt[k+1]{(k+1) a_{k+1}} \right)^{-1} = R \left(da \sqrt[k]{k} \to 1 \right)$$

Damit ist p' wohldefiniert.
Wir zeigen nun, dass p' tatsächlich die Ableitung von p darstellt. OBdA sei $x_0 = 0$.
Dann gilt für $y \in (-R, R)$:

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x - y) = \sum_{k=\sigma}^{\infty} a_k \left(x^k - y^k \right) - (k+1) a_{k+1} y^k (x - y)$$

Wir setzen $\Delta(x, y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x - y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$.
Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right]$$

Für $n = 1$ ist $[...] = 0$ und für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
[...] =& \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1) y^{n-1} \\
=& \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} k x^{n-1-k} y^k . (n-1) y^{k-1} \\
=& \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\
=& \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\
=& (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^{k-1}
\end{aligned}$$

Sein nun $|y| < r < R$ und $|x| \leq r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Delta(x,y)| \leq & \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1} \\
\leq & \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k \leq |a_n| r^{n-2} n^2 |x-y|
\end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$ den Konvergenzradius R, weshalb $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$ konvergiert. Damit folgt aber $\lim\limits_{x \to y} \Delta(x,y) = 0$

Proposition 1 *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in $p \in (a,b)$ mit $f'(p) \neq 0$ Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $q = f(p)$ und es gilt:*

$$\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Beweis *Da f streng monoton ist, ist f^{-1} stetig.*
Insbesondere gilt $f^{-1}(y) \to f^{-1}(q)$ für $y \to q$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to q} \frac{1}{y-q} \left(f^{-1}(y) - f^{-1}(q)\right) &= \lim_{y \to q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \\
&= \left(\lim_{y \to q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)} \right)^{-1} \\
&= \left(f'(f^{-1}(q))\right)^{-1} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(q)\right)}
\end{aligned}$$

Beispiel 2

- k-te Wurtel $g : (0,\infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$ ist differenzierbar mit $g'(y) = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$
  Denn g ist Umkerhfunktion zu $f(x) = x^k$
  Damit gilt:
  $$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$$
- Logarithmus $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$. Es ist $\ln'(y) = \frac{1}{y}$, **denn:**
  $$\ln'(y) = \frac{1}{exp'(\ln y)} = \frac{1}{exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Bemerkung 5 Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist $x^\alpha := exp(\alpha \ln(x))$
Anwendung: Die Funktion $(\circ)^\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$ hat die Ableitung $((\circ)^\alpha)' : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ **denn**

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' =& exp'(\alpha \ln(x)) = exp(\alpha \ln x)\frac{\alpha}{x} \\ =& \alpha exp(\alpha \ln x) exp(-\ln x) = \alpha exp((\alpha - 1)\ln x)) \\ =& \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ und $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

Definition 7 Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Wir sagen, f hat in $x_0 \in I$ ein **lokales Maximum (lokales Minimum)**, falls ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0) (f(x) \geq f(x_0))$$

Gilt

$$f(x) \leq f(x_0) (f(x) \geq f(x_0))$$

für alle $x \in I$, so sagen wir, dass x_0 ein **globales Maximum (globales Minimum)** ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von **strikten Maxima (strikte Minima)**. Maximum und Minimum werden unter dem Begriff **Extremum** zusammengefasst.

Satz 8 *Seif $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Hat f ein lokales Maximum (lokales Minimum) in $x_0 \in (a,b)$ und existiert $f'(x_0)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.*
Beweis *Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:*

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Wegen differenzierbarkeit in x_0 folgt Gleichung $1 =$ Gleichung $2 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Satz 9 (verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf ganz (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit:*

$$(g(b) - g(a))\, f'(\xi) = (f(b) - f(a))\, g'(\xi)$$

Beweis: *Wir betrachten $h : [a,b] \to \mathbb{R}$*

$$t \mapsto (g(b) - g(a))\, f(t) - (f(b) - f(a))\, g(t)$$

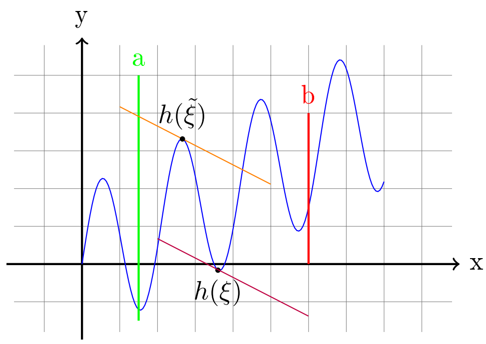
Offensichtlich (nach Summenregel) ist h differenzierbar auf (a,b). Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a))\, f'(t) - (f(b) - f(a))\, g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit folgt dann die Aussage.
Beachte:

$$\begin{aligned} h(a) =& (g(b) - g(a))\, f(a) - (f(b) - f(a))\, g(a) \\ =& g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ =& (g(b) - g(a))\, f(b) - (f(b) - f(a))\, g(b) \\ =& h(b) \end{aligned}$$

Fall 1: *$h = const$ Dann gilt trivialerweise $h' = 0$ und wir sind fertig.*
Fall 2: *$h \neq const$ Offensichtlich ist h stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Damit besitzt h ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein $\tilde{\xi} \in (a,b)$ mit $h(\tilde{\xi}) > h(a)$, sonst betrachte $-h$ statt h.*
Also existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $h(\xi) \geq h(x)$ $(x \in [a,b])$. Mit anderen Worten: ξ ist auch ein globales Maximum und und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 8 folgt: $h'(\xi) = 0$



Satz 10 (Mittelwertsatz(MWS)) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt ex ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

Bemerkung: *Es ist oft wichtig, dass f nur auf (a,b) differenzierbar sein muss.*
Beweis: *Das folgt aus Satz 9 mit $g = id_{[a,b]}$, d.h. $g(x) = x$ $(x \in [a,b])$.*

Satz 11 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann gilt:*

a) $f = const \Leftrightarrow f'(x) = 0 (x \in (a,b))$

b) f *ist monoton wachsend* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (x \in (a,b))$

c) f *ist streng monoton wachsend* $\Leftrightarrow f'(x) > 0 (x \in (a,b))$

d) f *ist monoton fallend* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 (x \in (a,b))$

e) f *ist streng monoton fallend* $\Leftrightarrow f'(x) < 0 (x \in (a,b))$

Beweis: *a) folgt aus b) und c).*
Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).
Sei $y > x \in [a,b]$. Sei $f|_{[x,y]}$ die Einschränkung von f auf $[x,y]$, das heißt:

$$f|_{[x,y]} : [x,y] \to \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt $f|_{[x,y]}$ die Bedingungen des MWS.
Es existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit $f(y) - f(x) = (y-x) \cdot f'(\xi)$
Fall b) $f(y) - f(x) = (y-x) \cdot f'(\xi) \geq 0$
↳ $f(y) \geq f(x)$
Fall c) $f(y) - f(x) > 0$
↳ $f(y) > f(x)$
Beweis der Richtung $\Leftarrow$ in Teil b): *Ist $f'(x) \geq 0$ so gilt*

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da f monoton wachsend ist, gilt für $y > x$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für $\lim\limits_{y \nearrow x}$

Korollar 1 *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b) mit $f'(x) = g'(x)$ für $x \in (a,b)$. Dann gilt $f - g = const$*
Beweis: *Es gilt:*

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 11.

Satz 12 *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall). Gibt es $\xi \in I$ mit $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$ ($f''(\xi) > 0$), so nimmt f an der Stelle ξ ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.*

Beweis: *Wir betrachten nur den Fall* $f''(\xi) < 0$. *Für den Fall* $f''(\xi) > 0$ *betrachte man* $-f$.
Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$r := \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$
D.h. es existiert für jedes $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *mit*

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für $\epsilon := \frac{r}{2}$ *gilt daher:*

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right|$$

für ein entsprechend gewähltes $\delta > 0$. *Insbesondere gilt also:*

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.
D.h. für $x < \xi$ *gilt:*

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für $x > \xi$ *gilt:*

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo: f' *ist streng monoton fallend auf* $(\xi - \delta, \xi]$ *und streng monoton wachsend auf* $[\xi, \xi + \delta)$
Da $f'(\xi) = 0$ *folgt, dass* $f'(x) > 0$ *für* $x \in (\xi - \delta, \xi]$ *und* $f'(x) < 0$ *für* $x \in [\xi, \xi + \delta)$.
Mit Satz 11 folgt:
$f|_{(\xi - \delta, \xi]}$ *ist streng monoton wachsend und*
$f|_{[\xi, \xi + \delta)}$ *ist streng monoton fallend.*

Satz 13 (Regel von l'Hospital) *Seien* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *mit*

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$. *Weiter gelte:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei $-\infty \leq A \leq \infty$ *sei und* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$,
sowie $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *bzw.* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
Dann gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. *Die analoge Aussage gilt auch für* $x \to b$.
Bemerkung:

- *Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h.* $\pm\infty$ *sind als Grenzwerte zulässig.*
- *Zwei wesentliche Voraussetzungen:*
  1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert!*
  2. *ebenso ist essentiell, dass* $f, g \to \frac{\circ}{\pm\infty}$
- *Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{exp(x)} = 0$$

- *Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form* $0 \cdot \infty$ *zu behandeln, indem wir diese in die Form*

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}}$$

  bzw.

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

  umrechnen.

Beweis: *Wir beschränken uns auf den Fall* $x \to a$ ($x \to b$ *läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:*
Behauptung: *Sei* $A \in [-\infty, \infty)$.
Dann existiert für jedes $q > A$ *ein* $c > a$ *mit* $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ $(x \in (a, c))$.
Beweis der Behauptung:
Da $\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x\searrow a}{\to} A$ *existiert ein* $c' > a$ *mit:* $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ *für ein beliebiges* $r \in (A, q)$ *und* $x \in (a, c')$.
Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{1}$$

für ein geeignetes t *zwischen* x *und* y.
Für $a < x < y < c'$ *gilt daher:*

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \tag{2}$$

Fall 1: $f, g \overset{x\to a}{\to} 0$. *Nach Gleichung* (2) *gilt für* $x \to a$

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q (y \in (a, c'))$$

Fall 2: $g(x) \overset{x\to a}{\to} \pm\infty$ *Multipliziere* (1) *mit* $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$.
Dann erhalten wir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)$$
$$\to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Für $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein $c > a$ existieren mit: $\frac{f(x)}{g(x)} < r \ (x \in (a, c))$
Analog kann man zeigen:
Behauptung' : *Sei $A \in (-\infty, \infty]$. Dann existiert für jedes $p < A$ ein $d > a$, so dass $p < \frac{f(x)}{g(x)} \ (x \in (a, d))$*
Für $A = +\infty$ folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für $A = -\infty$ aus der ersten Behauptung.
Für $A \in \mathbb{R}$ argumentieren wir wie folgt:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert $c > a$, so dass $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon \ (x \in (a, c))$. Nach der zweiten Behauptung existiert $d > a$ mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \ (x \in (a, d))$$

Für $x \in (a, \min\{c, d\})$ gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

Beispiel 3 $f(x) = 1, g(x) = x + 7$
Dann gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$
aber: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

Beispiel 4

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \text{ \emph{für} } \alpha > 0$$

Definition 8 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in a *(rechtsseitig) differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass f in b *(linksseitig) differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

existiert. Wir sagen, f ist auf $[a,b]$ *differenzierbar*, wenn f in (a,b) differenzierbar und in a rechtsseitig sowie in b linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe $n-Mal$ (stetig) differenzierbar etc...

Definition 9 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ $n-Mal$ differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned} P_{n,\alpha} :&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto& \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!}(x-\alpha)^l \end{aligned}$$

das $n-te$ Taylorpolynom, wobei $\alpha \in I$ sei, von f an der Stelle α.
Bemerkung: Offensichtlich gilt: $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$. Weiter gilt:

$$f'(\alpha) = P'_{n,\alpha}(\alpha) = \left(\sum_{l=0}^{n} l \cdot \frac{f^l(\alpha)}{l!} \left(x-\alpha\right)^{l-1}\right) \right)$$

und analog:

ich vermute, die Summe sollte bei 0 beginnen

$$f^{(l)}(\alpha) = P^{(l)}_{n,\alpha} = P^{(l)}_{n,\alpha}(\alpha)$$
$$(l = 1, ..., n)$$

Satz 14 (Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied)) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und f $(n-1)-mal$ stetig differenzierbar (auf $[a,b]$) und $n-mal$ differenzierbar auf (a,b). Seien $\alpha \neq \beta$ in $[a,b]$ gegeben. Dann existiert ein x zwischen α und β, so dass gilt:*

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

Beweis: *Wähle $M \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta-\alpha)^n$$

Man beachte, dass die $n-te$ Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch

$$P^{(n)}_{n-1,\alpha}(t) + n! \cdot M(\text{ für } t \in [a,b])$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein x zwischen α und β mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}
h(t) =& f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t-\alpha)^n \text{ für } t \in [a,b] \\
h(\beta) =& f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta-\alpha)^n = 0 \\
h(\alpha) =& f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) \cdot M(\alpha-\alpha)^n = 0 \text{ siehe obige Bemerekung} \\
h'(\alpha) =& f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - n \cdot M(\alpha-\alpha)^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ für } l = 1, ..., n-1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein x_1 zwischen α und β mit $h'(x_1) = 0$. Analog gibt es zwischen α und x_1 ein x_2 mit $h''(x_2) = 0$. Man findet also $x_1, ..., x_{n-1}$ mit $h^{(l)}(x_l) = 0$ $(l = 1, ..., n-1)$. Insbesondere existiert ein x zwischen α und x_{n-1} (also zwischen α und β) mit $h^{(n)}(x) = 0$. Damit gilt

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}(x) - M \cdot n! \cdot (x-\alpha)^0$$

und daher $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$
Bemerkung: *Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte Lagrange'sche Darstellung*

Beispiel 5 Sei $f(x) = \sqrt{1+x}$. Offensichtlich:

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} \\
f''(x) =& -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}t^2$$

für ein x zwischen 0 und t.
Für $t > 0$ ergibt sich damit:

$$\left|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)\right| < \frac{t^2}{8}$$

Korollar 2 *Ist $g : I \to \mathbb{R}$ $n-Mal$ differenzierbar und $g^{(n)} = 0$, so ist g ein Polynom höchstens $(n-1)-ten$ Gerades*

Korollar 3 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$mal stetig differenzierbar und $\alpha \in I$ mit $f^{(l)}(\alpha) = 0$ für alle $l = 1, ..., n-1$ und $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$.*
Dann gilt:

- *ist n ungerade, so ist α keine Extremstelle*
- *ist n gerade, so ist α eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist $f^{(n)}(\alpha) < 0$, so ist α eine Maximalstelle. Ist $f^{(n)}(\alpha) > 0$, so ist α Minimalstelle.*
  Beweis: *Wir betrachten nur den Fall n gerade und $f^{(n)}(\alpha) > 0$.*
  Nach dem Satz von Taylor gilt für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) =& P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\left(f^{(n)}(\alpha) + (\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)}(x-\alpha)\right) \end{aligned}$$

für ein t zwischen x und α. Für x hinreichend nah an α erhalten wir

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1}(x-\alpha)$$

Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

Da ist also $f(x) > f(\alpha)$ für x hinreichend nah an α.
Sprich: α ist strikte lokale Minimalstelle

Definition 10 Ist $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylorreihe am Entwicklungspunkt $\alpha \in I$.

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Bemerkung:

- im Allgemeinen konvergiert $T_{f,\alpha}(x)$ für $x \neq \alpha$ nicht
- Der Satz von Taylor behandelt nicht die Taylorreihe
- Selbst wenn $T_{f,\alpha}(x)$ konvergiert, muss $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$ nicht gelten
- Sei $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$ Dann gilt :

$$P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \to 0$$

Satz 15 *Sei $f(x) = \sum_{n_0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$ und $R > 0$ der zugehörige Konvergenzradius von f.*
Dann ist f auf $(\alpha - R, \alpha + R)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

das heißt, die Taylorreihe $T_{f,\alpha}$ stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.
Beweis: *Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x-\alpha)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$f^{(l)} = l! \cdot a_l + \sum_{n=l-1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-l)a_n(x-\alpha)^{n-l}$$

für $l \in \mathbb{N}$
$(x-\alpha) = 0$ für $x = \alpha$
Also: $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$

3 Riemann-Integral

__Ziel:__ Wir wollen auf „natürliche“Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt, die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der $x-$Achse zu bestimmen (Abbildung 1).

eigentlich wäre " emphßogar besser als Anführungsstriche

Dabei heißt auf „natürliche Weise“ insbesondere:

- gilt $f(x) = c = const$ für alle $x \in D(f) = [a, b]$, so soll gelten (Abbildung 2)

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$$

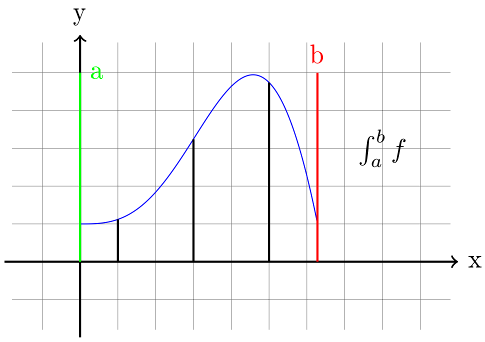


Abbildung 1: Vorgehen

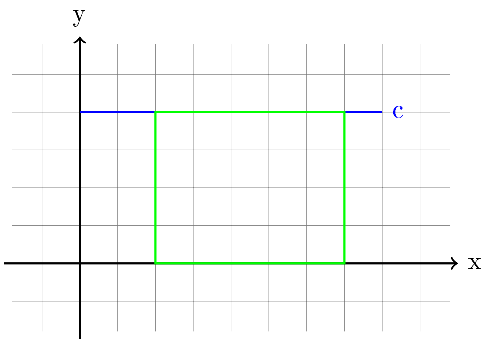


Abbildung 2: Konstante Funktion

- gilt $f(x) \le g(x)$ $(x \in [a,b])$ so fordern wir
$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x \le \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$
- für $c \in [a,b]$ soll gelten (Abbildung 3)
$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^c f \, \mathrm{d}x + \int_c^b f \, \mathrm{d}x$$
Vorgehen: Man unterteile $[a,b]$ in „viele“ Teilintervalle, auf denen f nahezu konstant ist.

Definition 11 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Partition P (Abbildung 4) von $[a,b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$.
Wir schreiben $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

das geht besser auch mit Stichwortverzeichnis. Baue ich später ein.

Definition 12 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$.
Wir schreiben:
$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$m_i(p) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

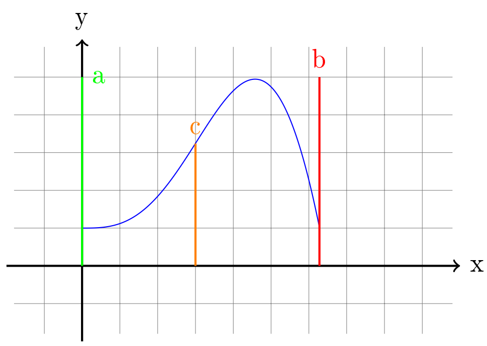


Abbildung 3: Integral aufteilen

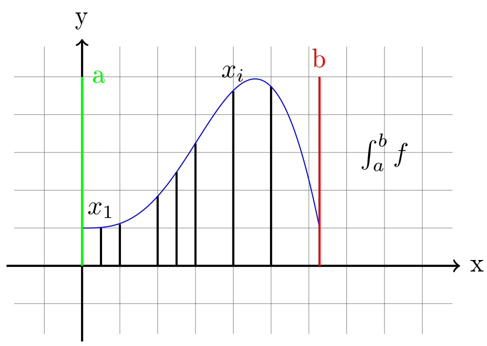


Abbildung 4: Partition

Weiter definieren wir:

$$S(P, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

$$s(P, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

Wir setzen:

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \inf S(P, f)$$

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \sup s(P, f)$$

wobei Infimum und Supremum über alle Partitionen von $[a, b]$ genommen werden. Wir nennen

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \;\; \text{das } \underline{\text{obere}} \text{ und}$$

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \;\; \text{das } \underline{\text{untere}}$$

Riemannintegral von f über $[a,b]$
Gilt

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

sagen wir f ist Riemann-integrierbar (integrierbar) und nennen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

das Riemannintegral von f über $[a,b]$.
Die Menge der Riemanintegrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}$ beziehungsweise $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

Bemerkungen

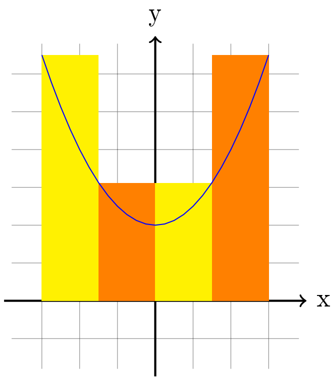


Abbildung 5: oberes Riemann-Integral

- Da f beschränkt ist, gibt es $m \leq M$ in $\mathbb{R}$ mit:

  $$m \leq f(x) \leq M \ (x \in [a,b])$$

  Damit gilt für jede jede Partition P:

  $$m \cdot (b-a) \leq s(P,f) \leq S(P,f) \leq M \cdot (b-a)$$

  Ergo: $\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$, $\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$ sind wohldefiniert.

- im gesamten Kapitel 3 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen

Definition 13 Seien P_1, P_2 zwei Partitionen eines Intervalls. Dann heißt P_1 Verfeinerung von P_2, wenn gilt: $P_2 \subseteq P_1$
Weiterhin nennen wir $P_1 \cup P_2$ die gemeinsame Verfeinerung von P_1 und P_2

Satz 16 *Ist P' eine Verfeinerung der Partition P von $[a,b]$, dann gilt:*

$$\begin{aligned} S(P,f) \geq& S(P',f) \\ s(P,f) \leq& s(P',f) \end{aligned}$$

(wobei f wie in Definition 12 sei)
Beweis: *Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass P' sich von P in nur einem Element x' unterscheidet. Das heißt: $P' = P \cup \{x'\}$*
Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x' \in [x_{i-1}, x_i]$
(wobei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ sei).
Wir definieren:

$$\begin{aligned} W_1 :=& \sup_{[x_{i-1}, x']} f(x) \\ W_2 :=& sup_{[x', x_i]} f(x) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P,f) - S(P',f) =& M_i \Delta x_i - W_1 \cdot (x' - x_{i-1}) - W_2 \cdot (x_i - x') \\ =& (M_i - W_1) \cdot (x' - x_{i-1}) + (M_i - W_2) \cdot (x_i - x') \geq 0 \end{aligned}$$

Enthält von P' k Punkte, die nicht in P enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt k-mal durch.

Satz 17 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x$$

Beweis: *Seien P_1, P_2 zwei Partitionierungen von $[a,b]$ und P' die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:*

$$s(P_1, f) \leq s(P', f) \leq S(P', f) \leq S(P_2, f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$$

für alle Partitionierungen P_1, P_2.
Sprich: $S(P_2, f)$ ist stets obere Schranke von $s(P,f)$ für alle Partitionen P von $[a,b]$. Ergo:

$$\sup s(P,f) \leq S(P_2, f)$$

Damit ist also $\sup s(P,f)$ untere Schranke von $S(P,f)$ (P beliebige Partition).
Ergo: $\sup s(P,f) \leq \inf S(P,f)$
Wir haben also gezeigt:

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x = \sup s(P,f) \leq \inf S(P,f) = \inf \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x$$

Satz 18 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Partition P_ϵ existiert mit:*

$$S(P_2, f) - s(P_2, f) < \epsilon$$

Beweis: *Per Definition gilt*

$$s(P_\epsilon, f) \le \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 17}{\le} \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \le S(P_\epsilon, f)$$

Damit erhalten wir:

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \le S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Das heißt, da ϵ beliebig, dass

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Ergo: $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Per Definition gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein P'_ϵ mit

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x - s(P'_\epsilon, f) < \frac{\epsilon}{2} \tag{3}$$

Analog existiert ein P''_ϵ mit

$$S(P''_\epsilon, f) - \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x) < \frac{\epsilon}{2} \tag{4}$$

Wir setzten P_ϵ gleich der gemeinsamen Vereinigung von P'_ϵ und P''_ϵ. Man beachte: Wegen Satz 16 gelten Gleichung 3 und Gleichung 4, wenn wir P'_ϵ beziehungsweise P''_ϵ durch P_ϵ ersetzen. Da $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt außerdem

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Addition von Gleichung 3 und Gleichung 4 liefert:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Satz 19 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P_\epsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$ mit $S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$.*

1. *Ist P eine Verfeinerung von P_ϵ, so gilt $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$*
2. *Sind s_i, t_i beliebige Punkte in $[x_{i-1}, x_i]$, so gilt*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i < \epsilon$$

3. *Ist* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *und* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$*, so gilt*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f \,\mathrm{d}x\right| < \epsilon$$

Beweis:

1. *Das folgt aus Satz 16*

2. $$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

3. *Da* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$*, gilt* $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$
   Damit folgt die Aussage aus

   $$s(P_\epsilon, f) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f)$$

   und $s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon, f)$

Wir wollen im Folgenden wichtige Vertreter Riemann-integrierbarer Funktionen kennenlernen.

Satz 20 *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig, so ist* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Beweis: *Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt sind, ist* f *offensichtlich beschränkt. Weiterhin ist* f *als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ *gleichmäßig stetig.*
Sei $\epsilon > 0$ *gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von* f *existiert ein* $\delta > 0$*, so dass folgende Implikation gilt:*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wir wählen eine Partition $P_\epsilon = \{x_0, \ldots, x_n\}$*, so dass* $\Delta x_i < \delta$*. Dann gilt:*

$$M_i - m_i < \epsilon \text{ und daher}$$

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \epsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon \cdot (b - a)$$

Da $\epsilon > 0$ *beliebig, folgt die Aussage mit Satz 18.*

Satz 21 *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monoton, so ist* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Beweis: *Da* f *monoton ist, gilt für alle* $x \in [a, b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$*.*
Das heißt f *ist beschränkt. Zu* $n \in \mathbb{N}$ *wählen wir eine Partition* $P_n = \{x_0, \ldots, x_k\}$ *mit* $\Delta x_i < \frac{1}{n}$*. Dann gilt:*

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend (der andere Fall läuft analog). Dann gilt

$$\begin{aligned} M_i =& f(x_i) \text{ und} \\ m_i =& f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} S(P_n, f) - s(P_n, f) =& \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ \leq& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle n_ϵ so dass gilt:

$$\frac{1}{n_\epsilon}(f(b) - f(a)) < \epsilon$$

Dann gilt mit $P_\epsilon := P_{n_\epsilon}$ die Aussage nach Satz 18

Satz 22 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Dann gilt $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*
Beweis: *Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $E = \{P_1, \ldots, P_n\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\{a, b\} \cap E = \emptyset$ (der andere Fall läuft analog). Sei*

$$M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Wir wählen $u_j, v_j \in [a, b]$, $j = (1, \ldots, n)$, so dass

$$\begin{aligned} P_s \in [u_j, v_j] \text{ und} \\ 2M(u_j - v_j) < \frac{\epsilon}{2n} \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} I_1^\epsilon =& [a, u_1], \\ I_l^\epsilon =& [v_{l-1}, u_l] \ (l = 2, \ldots, n) \\ I_n^\epsilon =& [v_n, b] \end{aligned}$$

Per Vorraussetzung ist $f_{|I_j^\epsilon}(j = 1, \ldots, n + 1)$ stetig.
Daher existiert nach Satz 20 eine Partition P_j^ϵ, so dass

$$S(P_j^\epsilon, f_{I_j \epsilon}) - s(P_j^\epsilon, f_{I_j^\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2(n + 1)}$$

Wir setzen $P^\epsilon = \cup_{l=1}^{n} P_l^\epsilon \cup U_{l=1}^{n} \{u_l, v_l\}$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P^\epsilon, f) - s(P^\epsilon, f) =& \sum_{l=1}^{n+1} S(P_l^\epsilon, f_{|I_l^\epsilon}) - s(P_l^\epsilon, f_{|I_l^\epsilon}) \\ &+ \sum_{l=1}^{n} \left(\sup_{x \in [u_l, v_l]} f(x) - \inf_{x \in [u_l, v_l]} f(x)(v_l - u_l) \right) \\ \leq& \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2(n + 1)} + \sum_{l=1}^{n} 2M \cdot (v_l - u_l) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Definition 14 Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Partition $Z = \{y_0, \dots, y_m\}$ von $[a,b]$ und für alle $i \in \{0, \dots, m\}$ für $c_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f(x) = c_i \ (x \in (y_{i-1}, y_i))$$

Nach Satz 22 ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar.
Zur Berechnung des Intervalls bedienen wir uns der Notation von Satz 10 und verwenden Satz 19c.
Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass f in a und b stetig ist. Das heißt die Menge der Unstetigkeitsstellen ist gegeben durch $E = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$.
Für $x \in I_l^\epsilon$ gilt dann $f(x) = c_l$ für alle $l = 1, \dots, m$. Dann gilt nach Satz 19c:

$$\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_l^\epsilon| + \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i) \cdot (v_i - u_i) \right| < \epsilon$$

Für $\lim\limits_{\epsilon \to 0}$ gilt: $\begin{cases} |I_1^1| \to y_{1-a} \\ |I_l^2| \to y_2 - y_{l-1} \quad (l = 2, ..., m) \\ |I_{m+1}^\epsilon| \to b - y_m \end{cases}$

Das heißt

$$\sum_{i=1}^{m+1} c_i |I_\epsilon^l \to c_i(y_i - a) \sum_{i=2}^{m} c_i \cdot (y_i - y_{i-1}) + c_m(b - y_m) \tag{5}$$

Außerdem gilt $v_i - u_j \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0$ gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \mathit{Gleichung}\ 5$

Korollar 4 *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, beziehungsweise monoton, beziehungsweise besitzt f höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen und ist beschränkt, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*

Bemerkung 6 Mit Hilfe des Lebesguesches Integrabilitätskriterium kann man sogar zeigen, dass beschränkte Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar sind.

Beispiel 6

$$\int_0^a x \,\mathrm{d}x$$

Da $id : [0,a] \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert das Integral.
Sei $P_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$ eine Partition von $[a,b]$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} S(P_n, x) =& \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ =& \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\ =& \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ =& \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(P_n, x) =& \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ =& \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ =& \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Da id integrierbar ist, gilt:

$$\int_0^a x \,\mathrm{d}x \in [s(P_n, x), S(P_n, x)] = \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n}\right] n \in \mathbb{N}$$

Das heißt:

$$\int_0^a x \,\mathrm{d}x \cap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n}\right]$$

Also: $\int_0^a x \,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$

Beispiel 7 Sei $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ die *Dirichlet-Funktion*, d.h

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für jede Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, dass

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) = 1 \text{ und}$$
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) = 0$$

Damit gilt:

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

Ergo: D ist nicht Riemann-integrierbar

Satz 23 *Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $m \leq f(x) \leq M$ $(x \in [a,b])$. Sei ferner $\Phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\Phi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$*
Beweis: *Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da Φ auf dem abgeschlossenen Intervall $[m, M]$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ (Ohne Eisnchränkung sei $\delta < \epsilon$) mit :*

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

Da f integrierbar ist, gibt es eine Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit

$$S(P, f) - s(P, f) < \delta^2$$

Wie üblich bezeichnen wir

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) \textit{ und}$$
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) \textit{ und weiterhin}$$
$$M_i^+ = \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} \Phi \circ f \textit{ sowie}$$
$$m_i^* = \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} \Phi \circ f(x)$$

Seien

$$A = \{i = 1, \dots, n | M_i - m < \delta\}$$
$$B = \{i = 1, \dots, n\} \setminus A$$

Aufgrund der Wahl von δ gilt für alle $i \in A : M_I^+ - m_i^* < \epsilon$ Weiter gilt:

$$\delta \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i = \sum_{i \in B} \delta \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \delta^2$$

Ergo: $\sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \delta$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned} S(P, \Phi \circ f) - s(P, \Phi \circ f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i \\ &= \sum_{i \in A} (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i^+ - m_i) \Delta x_i \\ &\leq \epsilon \sum_{i \in A} \Delta x_i + 2 \sup_{x \in [m,M]} |\Phi \circ f| \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i \\ &\leq \epsilon \left(|b - a| + 2 \sup_{x \in [m,M]} |\Phi \circ f(x)| \right) \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung mit 18.

Satz 24 *Seien $f_1, f_2, f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ Dann gilt:*

1. $$\int_a^b f_1 + f_2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

   und für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$\int_a^b cf \,\mathrm{d}x = c \int_a^b f \,\mathrm{d}x$$

   Insbesondere gilt also

   $$\begin{aligned} f_1 + f_2 \in \mathcal{R}_{[a,b]} &\mathit{und} \\ cf \in \mathcal{R}_{[a,b]} & \end{aligned}$$

2. *Gilt $f_1(x) \leq f_2(x)$ $(x \in [a,b])$ so folgt*

   $$\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

3. *Ist $c \in (a,b)$, und $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ so gilt*

   $$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x$$

4. *Gilt $M \geq f(x)$ $(x \in [a,b])$ so gilt*

   $$M \cdot (b-a) \geq \int_a^b f \,\mathrm{d}x$$

Beweis:

1. *Da $f_i \in \mathcal{R}_{[a,b]} (i = 1,2)$ gibt es Partitionen P_i von $[a,b]$ mit*

   $$S(P_i, f) - s(P_i, f) \leq \epsilon \text{ für ein festes } \epsilon > 0$$

   Dann gilt für die gemeinsame Verfeinerung $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, \ldots x_n\}$ nach Satz 16 , dass

   $$S(P, f_i) - s(P, f_i) \leq \epsilon \ (i = 1,2)$$

2. *Es gilt*

   $$\sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_1(x) + f_2(x) \leq \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_1(x) + \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_2(x)$$

   Analog gilt:

   $$\inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_1(x) + f_2(x) \geq \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_1(x) + \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f_2(x)$$

Damit folgt:

$$s(P,f_1)+s(P,f_2)\leq s(P,f_1+f_2)\leq S(P,f_1+f_2)\leq S(P,f_1)+S(P,f_2)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}&S(P,f_1+f_2)-s(P,f_1+f_2)\\&\qquad\leq S(P,f_1)-s(P,f_1)+S(P,f_2)-s(P,f_2)\leq 2\epsilon\end{aligned}$$

Da $\epsilon>0$ beliebig gewählt war, gilt $f_1+f_2\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ nach Satz 18.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned}s(P,f_1+f_2),S(P,f_1+f_2)\in&[s(P,f_1)-s(P,f_2),S(P,f_1)+S(P,f_2)]\\\subseteq&\left[\int_a^b f_1\,\mathrm{d}x+\int_a^b f_2\,\mathrm{d}x+2\epsilon\right]\end{aligned}$$

Da $\epsilon>0$ beliebig gewählt wurde, gilt:

$$\int_a^b f_1+f_2\,\mathrm{d}x=\int_a^b f_1\,\mathrm{d}x+\int_a^b f_2\,\mathrm{d}x$$

Die Aussage bezüglich $c\cdot f$ zeigt man analog.

3. *Sei $f_2(x)\geq f_1(x)$ $(x\in[a,b])$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}f_2(x)-f_1(x)\geq&0 \text{ und daher}\\s(P,f_2-f_1)\geq&0\end{aligned}$$

für jede Partition P von $[a,b]$ Wegen 1 ist $f_2-f_1\in\mathcal{R}_{[a,b]}$ und es gilt:

$$\int_a^b f_2\,\mathrm{d}x=\int_a^b f_1\,\mathrm{d}x+\int_a^b f_2-f_1\,\mathrm{d}x\geq\int_a^b f_1\,\mathrm{d}x$$

4. *Für 3. betrachtet man zu beliebiger Partition P von $[a,b]$ die Partition $P'=\{c\}\cup P$*

5. *Folgt aus 2. mit $f_1=f$ und $f_2=M$ soweit*

$$\int_a^b M\,\mathrm{d}x=M\cdot(b-a)$$

Bemerkung 7

- Eigenschaft 1 sagt, dass $\mathcal{R}_{[a,b]}$ ein bezüglich der Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist
- Eigenschaft 1 sagt weiterhin, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x:\mathcal{R}_{[a,b]}\to&\mathbb{R}\\f\mapsto&\int_a^b f\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ein lineares Funktionsglied ist

- Eigenschaft 2 sagt, dass dieses Funktional positiv ist (also nicht-negative Funktionen einen nicht negativen Wert zuordnet)
- Eigenschaft 4 impliziert eine gewisse stetigkeit

Satz 25 *Für $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt:*

- $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
- $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *und* $\int_a^b |f| \,\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right|$

Beweis: *Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^2$.*
Dann ist Φ stetig und damit $\Phi \circ (f+g)$ bzw $\Phi \circ (f-g)$ aufgrund von Satz 24 und Satz 23 Riemann-integrierbar über $[a,b]$. Beachte:

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

Nach Satz 23 gilt wieder $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Sei nun $c \in \{-1, 1\}$ so gewählt, dass

$$c \int_a^b f \,\mathrm{d}x \geq 0$$

Offensichtlich gilt

$$absf(x) = |cf(x)| \geq cf(x) \ (x \in [a,b])$$

Damit gilt mit Satz 24

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right| = c\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b cf \,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 24}{\leq} \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x$$

Satz 26 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$.*
Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g \,\mathrm{d}x$$

Bemerkung: *Für $g = 1$ gilt dann:*

$$int_a^b f \,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Beweis: *Man setze: $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y) \cdot \int_a^b g \,\mathrm{d}x$. h ist stetig und es gilt:*

$$\begin{aligned}
\inf_{y\in[a,b]} h(y) &= \inf_{y\in[a,b]} \int_a^b f(y)g(x) \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b \int_{y\in[a,b]} f(y)g(x) \,\mathrm{d}x \\
&\overset{Satz\ 24}{\leq} \int_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 24}{\leq} \int_a^b \sup_{y\in[a,b]} f(y)g(x) \,\mathrm{d}x = \sup_{y\in[a,b]} h(y)
\end{aligned}$$

D.h wir haben eine stetige Funktion h mit

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x \in [\inf_{y\in[a,b]} h(y), \sup_{y\in[a,b]} h(y)]$$