5.2. Lineare DGLs 1. Ordnung

Bemerkung: Bisher haben wir DGLs stets in der Form

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

notiert. Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir im Folgenden etwas verkürzt schreiben:

$$x' = f(t, x)$$

und damit genau die obige DGL meinen.

Definition 1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nennen wir die DGL

$$x' = a(t)\, x + b(t) \qquad (*)$$

eine <u>lineare DGL 1. Ordnung</u>.

Ist $b = 0$, so nennen wir $(*)$ <u>homogen</u>, sonst <u>inhomogen</u>.

Satz 2

Wir beobachten die DGL $(*)$ mit den Bezeichnungen von oben und $b = 0$.

Für $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt:
Es gibt genau eine Lösung von $(*)$ $y: I \to \mathbb{R}$ mit $y(t_0) = x_0$ und zwar:

$$y(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$$

Beweis: Offensichtlich gilt:

$y(t_0) = x_0$.

Weiter haben wir:

$$y'(t) = \underbrace{x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)}_{y(t)} \cdot a(t)$$

Ergo: y ist in der Tat eine Lösung von $(*)$ mit $y(t_0) = x_0$.

Eindeutigkeit: Wir betrachten die Funktion $\tilde{y}: I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$

Dann gilt offensichtlich $\tilde{y}'(t) = -a(t)\cdot\tilde{y}(t)$. Sei $z: I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung von $(*)$ mit $z(t_0) = x_0$. Dann gilt:

$$(z\cdot\tilde{y})'(t) = \underbrace{z'(t)}_{a(t)\,z(t)} \cdot \tilde{y}(t) + z(t)\cdot\underbrace{\tilde{y}'(t)}_{-a(t)\,\tilde{y}(t)}$$

$$= a(t)\,z(t)\,\tilde{y}(t) - z(t)\,a(t)\,\tilde{y}(t)$$

$$= 0$$

Ergo: $z\cdot\tilde{y} = \text{const.} = c$

Ergo: $z(t) = c\cdot\tilde{y}^{-1}(t) = c\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)$. Da $x_0 = z(t_0)$ $= c\cdot\exp\left(\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,ds\right) = c$, folgt die Behauptung. //

Beispiel Wir betrachten die DGL

$$x' = -\frac{x}{t}, \text{ d.h. } a(t) = -\frac{1}{t}$$

Zum ~~Anf~~ Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$y(t) = x_0\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{1}{s}\,ds\right) = x_0\cdot\exp\left(-\ln\Big|_{t_0}^{t}\right)$$

$$= x_0\cdot\exp(\ln t_0 - \ln t) = x_0\cdot\frac{t_0}{t}$$

Satz 3: (Variation der Konstanten)

Wir betrachten die DGL $(*)$ mit den obigen Bezeichnungen und Annahmen an a und b (diesmal mit $b \neq 0$). Dann gibt es für jedes $t_0 \in I$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $y: I \to \mathbb{R}$ von $(*)$ mit $y(t_0) = x_0$ und zwar

$$y(t) = y_0(t)\cdot\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} y_0(s)^{-1}\, b(s)\,ds\right),$$

wobei: $y_0(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) \quad (t \in I)$

Bemerkung: Zur Bezeichnung "Variation der Konstanten":

Die obige Lösung sieht so aus wie die Lösung in Satz 2, nur dass der Vorfaktor nicht mehr konstant ist, sondern von t abhängt, also "variiert".

Beweis:

Es gilt: $y(t_0) = y_0(t_0) \cdot x_0 = x_0$ sowie $y'(t) = \underbrace{y_0'(t)}_{a(t) \cdot y_0(t)} \cdot$

$$\left(x_0 + \int_{t}^{t} y_0(s)^{-1} b(s)\, ds\right) + \cancel{y_0(t)} \cdot \cancel{y_0(t)^{-1}} \cdot b(t)$$

$$= a(t) \cdot y_0(t) \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} y(s)^{-1} b(s)\, ds\right) + b(t)$$

$$= a(t)\, y(t) + b(t)$$

für alle $t \in I$.

Damit ist $y: I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$ mit $y(t_0) = x_0$

Eindeutigkeit: Sei $z: I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung von $(*)$ mit $y(t_0) = x_0$. Dann gilt für $h: I \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = z(t) - y(t)$

$$h'(t) = z'(t) - y'(t) = a(t)\, z(t) + \cancel{b(t)} - (a(t) y(t) - \cancel{b(t)})$$

$$= a(t)\,(z(t) - y(t)) = a(t) \cdot h(t)$$

Ergo: $h: I \to \mathbb{R}$ ist Lösung von $(**)$ mit $b = 0$ mit

Anfangswert $h(t_0) = z(t_0) - y(t_0) = 0$

Nach Satz 2 gilt $h(t) = 0 \cdot \exp(\ldots) = 0$.

Damit gilt: $z(t) - y(t)$ d.h. $z(t) = y(t)$ $\quad (t \in I)$ //

Beispiel: Wir betrachten $x' = -\frac{x}{t} + t^3$ mit

$x(1) = x_0$ Dann gilt:

$$y(t) = \frac{1}{t} \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} s \cdot s^3\, ds\right) = \frac{1}{t}\left(x_0 + \frac{s^5}{5}\Big|_1^t\right)$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \left(x_0 + \frac{t^5}{5} - \frac{1}{5}\right)$$

5.3. Lineare DGLs n-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Es wird im folgenden nützlich sein auch komplexwertige Funktionen ableiten zu können.

Definition 1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{C}$ eine Funktion.
Wir sagen, f ist stetig in $x_0 \in I$, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig in x_0 sind.

Wir sagen: I ist stetig, wenn f in jedem x_0 stetig ist.
Wir sagen f ist in x_0 differenzierbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ in x_0 diffbar sind. Wir sagen, dass f diffbar ist, falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ diffbar ist.

Bemerkung:

Aus der entsprechenden Aussage für reellwertige Funktionen sieht man sofort:

Ist f diffbar in x_0 in I, so ist f dort auch stetig.

Satz 2

Seien $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diffbar in $x_0 \in I$. Dann gilt:

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

c) Falls $g(x) \neq 0$, so gilt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis:

Möglichkeit 1: genauso wie für reellwertige Funktionen

Möglichkeit 2: mit Hilfe der Aussagen für reellwertige Funktionen

(bsp. $(f+g)' = (\mathrm{Re} f + \mathrm{Re} g + i(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g))'$
$$= \mathrm{Re} f' + \mathrm{Re} g' + i(\mathrm{Im} f' + \mathrm{Im} g')$$
$$= f' + g'\text{)}$$

Satz 3

Ist $f: I \to \mathbb{C}$ und $g: J \to \mathbb{R}$ und $g(J) \subseteq I$, ist g in $x_0 \in J$ sowie f in $g(x_0)$ $(\in I)$ diffbar, so ist $f \cdot g$ in x_0 diffbar und es gilt:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Beweis:

$$f \circ g(x) = \mathrm{Re} f \cdot g(x) + i \mathrm{Im}\, f \circ g(x)$$

Also folgt mit der Kettenregel für reellwertige Funktionen:

$$(f \circ g)'(x_0) = (\mathrm{Re} f)'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) + i(\mathrm{Im} f)'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$
$$= ((\mathrm{Re} f)'(g(x_0)) + i(\mathrm{Im} f)'(g(x_0)))$$
$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Beispiel:

- $(e^{ix})' = (\cos x + i \sin x)'$
$$= \cos' x + i \sin' x$$
$$= -\sin x + i \cos x$$
$$= i(i \sin x + \cos x)$$
$$= ie^{ix}$$
- $(e^{if(x)})' = if'(x) \cdot e^{if(x)}$ (Mit Satz 3)

Bemerkung:

Der Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung gilt, damit auch für jede Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{C}$, d.h.:

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-intbar und es gibt $F: [a,b] \to \mathbb{C}$ und $F'(x) = f(x)$ $\quad (x \in [a,b])$, so gilt:

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

Beweis folgt sofort aus der reellen Version

Definition 4

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a_k: I \to \mathbb{R}$ $(k = 0, \dots, n-1)$ sowie $b: I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt:

$$(*) \quad x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = b(x)$$

eine lineare DGL n-ter Ordnung. Ist $b = 0$, so nennen wir $(*)$ homogen, sonst inhomogen.

Wir nennen

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, x' + a_0(t)\, x = 0$$

auch den homogenen Teil von $(*)$. Wir sagen, dass $y: J \to \mathbb{R}$ mit $J \in I$ ist eine Lösung von $\left\{ \begin{matrix} (*) \\ (*)_h \end{matrix} \right\}$, falls

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)\, y(t) = \left\{ \begin{matrix} b(t) \\ 0 \end{matrix} \right.$$

Satz 5

Wir betrachten die DGL $(*)$ sowie $(*)_h$ mit den gleichen Bezeichnungen wie oben.

a) Sei L_h die Menge aller Lösungen $y: I \to \mathbb{R}$ von $(*)_h$. Dann ist L_h ein n-dim. VR. über $\mathbb{R}$.

b) Sei L_i die Menge aller Lösungen von $(*)$ $z: I \to \mathbb{R}$.

Dann gilt für ein beliebiges $z_0 \in L_i$: $L_i = z_0 + L_h$

$= \{ y: I \to \mathbb{R} \mid y = z_0 + f \text{ für ein } f \in L_h \}$

Einschub: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Dann bezeichnet $\mathbb{K}^I = \{ f : I \to \mathbb{K} \}$ die Menge aller Abbildungen von I nach $\mathbb{K}$. Auf $\mathbb{K}^I$ definieren wir:

$$+ : \mathbb{K}^I \times \mathbb{K}^I \to \mathbb{K}^I$$

$$(f, g) \mapsto f + g,$$

wobei: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ sei $(x \in I)$.

sowie: $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^I \to \mathbb{K}^I$

$$(\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f,$$

wobei: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \qquad (x \in I)$

Man kann leicht zeigen, dass $(\mathbb{K}^I, \cdot, +)$ ein $\mathbb{K}$-VR ist.

Neutrales Element bzgl. $+$:

$0_{\mathbb{K}} : I \to \mathbb{K}, \; x \mapsto 0.$

Satz:

Sei V ein VR und $U \overset{\neq \emptyset}{\subseteq} V$. Dann gilt:

U ist ein VR $\Leftrightarrow$ - $\forall x, y \in U : x + y \in U$

- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \; \forall x \in U : \lambda x \in U$

Beweis: Lineare Algebra

Beispiele:

Sei $C^n(I, \mathbb{K}) = \{ f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist } n\text{-mal stetig diffbar} \}$

bzw. $D^n(I, \mathbb{K}) = \{ f : I \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist } n\text{-mal diffbar} \}$

Aufgrund der Summenregel der Differential-Rechnung sieht man mit obigem Satz sofort ein: $D^n(I, \mathbb{K}), C^n(I, \mathbb{K})$ sind VR.

Ist nun V ein VR, so sagen wir $x_1, \ldots, x_n \in V$ sind linear unabhängig, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Im konkreten Beispiele $\mathbb{K}^I$ heißt das:

Die Funktion $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{K}$ sind linear unabhängig, wenn für alle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ein $x \in I$ existiert mit $\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) \neq 0$

Eine linear unabhängige Menge von Elementen $x_1, \dots, x_n \in V$ heißt <u>Basis</u> von V, falls für alle $x \in V$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ existieren mit $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$.

Wir sagen V hat <u>Dimension n</u>, wenn es eine n-elementige Basis von V gibt.

<u>Beweis:</u>

a) Die Existenz von Lösungen, d.h. $L_n \neq \emptyset$, sowie die Dimensionalität von L_n folgen mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöff, den wir nicht behandeln werden.

<u>Wir zeigen:</u> L_n ist ein VR

Seien dazu $y_1, y_2 \in L_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(t)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + a_0(t)(y_1 + y_2) =$$

$$\{ y_1^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) y_1 + y_2^{(n)} + a_{n-1}(t) y_2^{(n-1)} + \dots + a_0(t) y_2$$

$$= 0$$

<u>Analog gilt:</u>

$$(\lambda y_1)^{(n)} + a_{n-1}(t)(\lambda y_1)^{(n-1)} + \dots + a_0(t)(\lambda y_1) =$$

$$\lambda (y_1^{(n)} + a_{n-1}(t) y_1^{(n-1)} + \dots + a_0 y_1) = 0$$

b) Sei z eine beliebige Lösung von $(*)$. Dann gilt für jede Lösung y von $(*)$

$$(z-y)^{(n)} + a_{n-1}(t)(z-y)^{(n-1)} + \dots + a_0(t)(z-y) =$$

$$z^{(n)} + a_{n-1}(t) z^{(n-1)} + \dots + a_0(t) z - (y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) y) = 0$$

Ergo: $(z-y) \in L_n$

$\Rightarrow \quad y - z \in L_h \qquad | + z$

$\quad y \in L_h + z$ //

Definition 6

Man nennt eine Basis des VR L_h auch ein **Fundamentalsystem** von $(*)_h$

Definition 7

Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $b: I \to \mathbb{C}$ stetig. Wir nennen:

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = \begin{cases} b(t) & (*) \\ 0 & (*)_h \end{cases}$$

eine **lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.**

Wir sagen $y: I \to \mathbb{C}$ ist eine Lösung von $(*)$ bzw. $(*)_h$, falls

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

Bemerkung:

- Wir werden zunächst, um Rechenarbeit zu sparen, komplexwertige Lösungen zulassen und später aus den reellwertigen konstruieren.

Lineare DGL's mit konstanten Koeffizienten lassen sich vereinfacht mit "Differentialpolynomen" betrachten. Sei $\mathbb{C}[t]$ die Menge aller Polynome der Form

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Ersetzt man in P formal die Unbekannte t durch $\frac{d}{dt}$, so erhält man einen **Differentialoperator**

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_0 + a_1 \frac{d}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n}{dt^n}$$

D.h. $P(\frac{d}{dt})$ ist Abbildung zu verstehen, die jedes n-mal diffbare $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine Funktion wie folgt zuweist.

$$P\left(\frac{d}{dt}\right): D^n(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$$

$$f \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} f$$

Der Nutzen dieser Sichtweise: jede lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, lässt sich einfach als

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)x = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

schreiben, wobei $P\in\mathbb{C}[t]$ ein Polynom entsprechender Ordnung mit führenden Koeffizienten $=1$ ist.

<u>Beispiel</u> Die DGL

$$x''' - 2x'' + x' - 2x = 0$$

lässt sich mit $P(t) = t^3 - 2t^2 + t - 2$ schreiben als

$P(\frac{d}{dt})x = 0.$

<u>Proposition 8:</u>

Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[t]$ und $P = P_1 + P_2$, $Q = P_1 \cdot P_2$.
Dann gilt für jede ausreichend oft diffbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

a) $P\left(\frac{d}{dt}\right)f = P_1\left(\frac{d}{dt}\right)f + P_2\left(\frac{d}{dt}\right)f$

b) $Q\left(\frac{d}{dt}\right)f = \left(P_1\left(\frac{d}{dt}\right)f\right)\cdot\left(P_2\left(\frac{d}{dt}\right)f\right)$

<u>Beweis:</u> Wir machen Teil a, Teil b läuft analog.
Sei $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$ und $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ n-mal diffbar. Dann gilt mit $P_1(t) = \sum_{l=0}^{n_1} a_l t^l$, $P_2(t) = \sum_{k=0}^{n_2} b_k t^k$

$$P_1\left(\frac{d}{dt}\right)f + P_2\left(\frac{d}{dt}\right)f = \sum_{l=0}^{n_1} a_l \frac{d^l}{dt^l} f + \sum_{k=0}^{n_2} b_k \frac{d^k}{dt^k} f$$

$$= \sum_{k=0}^{n_2} a_k \frac{d^k}{dt^k} f + b_k \frac{d^k}{dt^k} f + \sum_{l=b_2+1}^{n_1} a_l \frac{d^l}{dt^l} f$$

O.E. sei $n_1 \geq n_2$

$$= \sum_{k=0}^{n_2} (a_k + b_k) \frac{d^k}{dt^k} f + \sum_{k=b_2+1}^{n_1} a_k \frac{d^k}{dt^k} f$$

Bemerkung: Die obige Proposition sagt, dass wir mit Differentialpolynomen genauso rechnen können wie mit "normalen" Polynomen.

Proposition 9:
Sei $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt: $P(\frac{d}{dt})e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$

Beweis: Beachte: $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ und analog $\frac{d^i}{dt^i} = e^{\lambda t}$

$$= P\left(\frac{d}{dt}\right)e^{\lambda t} = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i} e^{\lambda t} = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i e^{\lambda t}$$
$$= P(\lambda) \cdot e^{\lambda t} \quad //$$

Satz 10:
Sei $P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in \mathbb{C}[t]$. Angenommen P hat n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann sind die Funktionen $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t}$ $(k = 1, \dots, n)$ linear unabhängige Lösungen von $P(\frac{d}{dt})x = 0$.

Beweis: Tatsächlich gilt für alle $k = 1, \dots, n$, dass
$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi_k = \underbrace{P(\lambda_k)}_{=0} \cdot e^{\lambda_k t} = 0$$
Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit der Funktion $\varphi_1, \dots \varphi_n$ für $k = 1, \dots, n$ mittels vollständiger Induktion.

$k = 1$: $\alpha_1 e^{\lambda_1 t} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$k \to k+1$: Angenommen $\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_k \varphi_k + \alpha_{k+1} \varphi_{k+1} = 0$

z. z. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$

Wir wenden $(\lambda_{k+1} - \frac{d}{dt})$ auf obige Gleichung an.

Also: $(\lambda_{k+1} - \frac{d}{dt}) \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (\lambda_{k+1} - \frac{d}{dt}) \varphi_i(t)$
$$\overset{\text{Prop. 9}}{=} \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_i)}_{\neq 0} \varphi_i(t) = 0$$

Da laut Induktionsvoraussetzung $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ linear unabhängig sind, muss gelten $\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1) = \alpha_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2) = \dots =$

$$\alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) = 0$$

Da $(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \neq 0 \quad (i \neq k)$, folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

Da $\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} \neq 0$, muss auch $\alpha_{k+1} = 0$ gelten und die lineare Unabhängigkeit folgt. //

Beispiele:

- Die DGL $P(\frac{d}{dt})f = 0$ mit

$P(t) = t^3 - 2t^2 + t - 2 = (t-i)(t+i)(t-2)$

hat die linear unabhängige Lösungen

$\varphi_1(t) = e^{it}, \varphi_2(t) = e^{-it}, \varphi_3(t) = e^{2t}$

Angenommen sämtliche Koeffizienten der DGL sind reell. Wie erhalten wir aus Satz 10 ein reellwertiges Fundamentalsystem? Also sei $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \overline{\lambda_k}, \lambda_k \in \mathbb{C}$

$$\eta_1, \dots, \eta_l \in \mathbb{R}$$

Dann betrachten wir für $i = 1, \dots, k$ $\varphi_{1,1} = \frac{1}{2}(\cancel{\varphi_1(t)}\, e^{\lambda_1 t} + e^{\overline{\lambda_1} t})$
$= \frac{1}{2} e^{(\mathrm{Re}\,\lambda)t} \cdot \cos(\mathrm{Im}\,\lambda t)$

$\varphi_{i,2}(t) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda_i t} - e^{\overline{\lambda_i} t}) \cdot \sin(\mathrm{Im}\,\lambda_i t)$ und für $i = 1, \dots, l$

$\psi_i = e^{\eta_i t}$

Da $\varphi_{i,1} + i\varphi_{i,2} = e^{\lambda_i t}$

und $\varphi_{i,1} - i\varphi_{i,2} = e^{\overline{\lambda_i} t}$

sind $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \dots, \varphi_{k,1}, \varphi_{k,2}, \psi_1, \dots, \psi_l$ ein Fundamentalsystem von $P(\frac{d}{dt})\lambda = 0$