c) $h(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

$\mathbb{D}(g) = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$

$x - 1 \geq 0$

$x \geq 1$

$x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

$x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

C) c) stetig und unstetig, total spannend!

$\pi, -\pi \rightarrow$ über die Definition ~~des~~ Differenzquotienten

auf $(-\infty, -\pi)$ gilt:

$|\pi - x^2| \cdot \sin^2(x) > (x^2 - \pi^2) \cdot \sin^2(x)$ ✓ → offene Intervalle gehen immer

genauso für $(-\pi, \pi)$ und (π, ∞)

Auch wieder spannend: $x_0 = \pi$ bzw. $x_0 = -\pi$

$$\lim_{x \nearrow \pi} \frac{|\pi^2 - x^2| \cdot \sin^2(x) - 0}{x - \pi}$$

$$= \lim_{x \nearrow \pi} \frac{-1 \cancel{(\pi - x)} \cdot (x + \pi) \cdot \sin^2(x)}{x - \pi}$$

$$= \lim_{x \nearrow \pi} -(x + \pi) \cdot \sin^2(x)$$

$= 0$ linksseitige Ableitung

$\lim_{x \searrow \pi} = 0$ rechtsseitige Ableitung

Vorlesung

Satz: (verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf ganz (a, b) diffbar.

Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit:

$$(g(b) - g(a))\, f'(\xi) = (f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi)$$

Beweis:

Wir betrachten $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto (g(b) - g(a)) \cdot f(t) - (f(b) - f(a)) \cdot g(t).$$

Offensichtlich ist h diffbar auf (a, b)

Es gilt:

$$h'(t) = (g(b)-g(a))\cdot f'(t) - (f(b)-f(a))\cdot g'(t).$$

Wir zeigen es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit folgt dann die ~~Aussage~~.

Beachte:

$$h(a) = (g(b)-g(a))\cdot f(a) - (f(b)-f(a))\cdot g(a)$$
$$= g(b)\cdot f(a) - f(b)\cdot g(a)$$
$$= (g(b)-g(a))\cdot f(b) - (f(b)-f(a))\cdot g(b)$$
$$= h(b)$$

Fall I: $h = \text{const}.$

Dann gilt trivialerweise $h' = 0$ und wir sind fertig

Fall II: h ist nicht konstant. Offensichtlich ist h stetig auf $[a,b]$.

Damit ~~bleibt~~ besitzt h ein globales Maximum und ein globales Minimum.

OBdA existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $h(\xi) > h(a)$ (sonst betrachten $-h$ statt h)

Also existiert ein $\xi \in (a,b)$ und $h(\xi) \geq h(x)$ $(x \in [a,b])$.
Mit anderen Worten: ξ ist ein globales Maximum und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 2 folgt: $h'(\xi) = 0$

Satz: (Mittelwertsatz (MWS))

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b). Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(b) - f(a) = (b-a)\cdot f'(\xi)$

Bemerkung:

Es ist oftmals wichtig, dass f nur auf (a,b) diffbar sein muss.

Beweis:

Das folgt aus Satz 3 mit $g = id_{[a,b]}$, d.h. $g(x) = x$ $(x \in [a,b])$.

Satz: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b). Dann gilt:

a) $f = const. \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad (x \in (a,b))$

b) f ist monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad (x \in (a,b))$

b') f ist streng monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \quad (x \in (a,b))$

c) f ist monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \quad (x \in (a,b))$

c') f' ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \quad (x \in (a,b))$

Beweis: a) folgt aus b) & c). Weiterhin folgt c) bzw. c') aus b) bzw. b').

Sei $y > x \in [a,b]$. Sei $f|_{[x,y]}$ die Einschränkung von f auf $[x,y]$, d.h.:

$$f|_{[x,y]} : [x,y] \to \mathbb{R}$$
$$z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt $f|_{[x,y]}$ die Bedingungen des MWS.

Damit gilt: Es existiert ein $\xi \in (x,y)$ mit $f(y) - f(x) = (y-x) \cdot f'(\xi)$

Fall b: $f(y) - f(x) = (y-x) \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \geq 0$

$\hookrightarrow f(y) \geq f(x)$

Fall b': $f(y) - f(x) > 0$

$\hookrightarrow f(y) > f(x)$

→ Satz von Rolle

6. Korollar Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b) mit $f'(x) = g'(x)$ für $x \in (a,b)$. Dann gilt $f - g = const.$

Beweis: Es gilt:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 5

Satz: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall). Gibt es $\xi \in I$ mit $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$ ($f''(\xi) > 0$), so ~~nimmt~~ nimmt f an der Stelle ξ ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall $f''(\xi) < 0$. Für den Fall $f''(\xi) > 0$ betrachte man $-f$.

Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} =: r < 0$$

D.h. es existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \varepsilon$

Für $\varepsilon = \frac{r}{2}$ gilt daher $\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{-(x - \xi)} - r \right| < \frac{r}{2}$ für ein entsprechend gewählter $\delta > 0$. Insbesondere gilt also

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{-(x - \xi)} < 0$$

für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$. D.h. für $x < \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$ und für $x > \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo: f' ist streng monoton wachsend auf $(\xi - \delta, \xi]$ und streng monoton fallend auf $[\xi, \xi + \delta)$

Mit Satz 5 folgt

$f|_{(\xi - \delta, \xi]}$ ist streng monoton wachsend

$f|_{[\xi, \xi + \delta)}$ ist streng monoton fallend

Nachtrag zum Beweis von Satz 5:

Beweis der Richtung $\Leftarrow$ in Teil (b)

Ist $f'(x) \geq 0$, so gilt

$$\underbrace{\lim_{y \searrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}}_{\geq 0} = \underbrace{\lim_{y \nearrow x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}}_{\geq 0} \geq 0$$

Da f monoton wachsend ist, gilt für $y > x$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$$

Folglich gilt: $\lim_{y \searrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$

Analog für $\lim_{y \nearrow x}$

Satz: (Regel von l'Hospital)

Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ diffbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Weiter gelte:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

wobei $-\infty \leq A \leq \infty$ sei und

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

bzw. $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

Dann gilt: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Die analoge Aussage gilt auch für $x \to b$.

Bemerkung:

- Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h. $\pm\infty$ sind als GW zulässig.
- Zwei wesentliche Voraussetzungen:
  1) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert!
  2) ebenso ist essentiell, dass $f, g \to 0 / \pm\infty$

     Bsp.: $f(x) = 1$ & $g(x) = x + 7$

Dann gilt: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$ aber $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$