Skript zur Vorlesung Analysis 2 für Lehramtsstudenten für das Gymnasium

25. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Differentiation **3**

2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen **10**

3 Riemann-Integral **19**

4 Differentiation und Integration **34**
4.1 Erweiterungen des Integralbegriffs 39
4.1.1 Uneigentliche Integrale 39
4.1.2 Integrale über komplexwertige Funktionen 42

5 Differentialgleichungen **44**
5.1 Trennung der Variablen 46
5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung 47
5.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) 50

6 Folgen und Reihen von Funktionen **59**
6.1 Fourier-Reihen 63

7 Grundbegriffe in metrischen und normierten Räumen **68**

1 Differentiation

Definition 1.1. *Sei $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D(f)$ ein Punkt, um den ein offenes Intervall $B_\epsilon(x)$ (für geeignetes $\epsilon > 0$) komplett in $D(f)$ enthalten ist ($B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$). Dann heißt f an der Stelle x_0* differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
Wir meinen mit $f'(x_0)$ die Ableitung *(seltener* Differentialquotient*) von f an der Stelle x_0.*
Ist $f : D(f) \to \mathbb{R}$ in jedem $x \in D(f)$ differenzierbar, dann heißt f schlechthin differenzierbar. *Etwas irreführend wird auch die Abbildung*

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von f bezeichnet.

Satz 1.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und $\phi : I \to \mathbb{R}$, so dass

   $$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0 \tag{1}$$

2. Es gibt ein $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ und $u : I \to \mathbb{R}$, so dass

   $$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

   und

   $$\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$$

3. f ist in x_0 differenzierbar

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

Das heißt insbesondere c und $\tilde{c}$ sind eindeutig bestimmt

Bemerkung.

- *Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ wählen und setzt*

  $$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- *Vergisst man die Funktion ϕ, versteht man mit der Geradengleichung*

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an f in x_0

Hier ist der Satz unvollständig

Beweis.

$1 \leftrightarrow 2$ Man setzte einfach $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$ und $\tilde{c} = c$
(in $x = x_0$ setze man $u(x_0) = 0$)

$1 \to 2$ ZZ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c\end{aligned}$$

$3 \to 1$ Wir setzten $c = f'(x_0)$ und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \left| \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right| &= \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f(x_0) = 0\end{aligned}$$

■

Satz 1.2. Es sind äquivalent: $f : I \to \mathbb{R}$

1. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$
   mit: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\phi(x)}{|x-x_0|} = 0$
2. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$
   mit: $\lim\limits_{n \to \infty} u(x) = 0$
3. Der Grenzwert $f'(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert

Satz 1.3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis. *ZZ* ist: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Äquivalent dazu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$.

Nun gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\frac{x-x_0}{x-x_0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$ ■

Bemerkung.

- *Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!*
  Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar sind.
  (Beispiel: Weierhaus-Fkt: $\sum_{n\in\mathbb{N}} cos(b_n\pi x)$ mit $a_n \in (0,1)$ und $a_n b_n > 1$)

- *Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar*

Satz 1.4. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x \in I$ differenzierbar, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (sofern $g(x) \neq 0$) in x differenzierbar.
Es gilt:

1. $(f+g)' = f'(x) + g'(x)$ (Summenregel)
2. $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Produktregel)
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Quotientenregel)

Beweis.

1. $$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{y\to x} \tfrac{f(y)+g(y)-(f(x)+g(x))}{y-x} = \lim_{y\to x} \tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} + \tfrac{g(y)-g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} \tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} + \lim_{y\to x} \tfrac{g(y)-g(x)}{y-x} = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\lim_{y\to x} \tfrac{f(y)g(y)-f(x)g(x)}{y-x} &= \lim_{y\to x} \tfrac{f(y)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(x)g(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} f(y)\tfrac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x)\tfrac{f(x)-f(x)}{y-x} \\ &= \lim_{y\to x} f(y) \lim_{y\to x} \tfrac{g(y)-g(x)}{y-x} + g(x) \lim_{y\to x} \tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &\overset{Satz\ 1.3}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\lim_{y\to x} \tfrac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y-x} &= \lim_{y\to x} \tfrac{\frac{f(y)}{g(y)}\frac{g(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(y)}{g(y)}}{y-x} = \lim_{y\to x} \tfrac{1}{g(y)g(x)} \tfrac{f(y)g(x)-f(x)g(y)}{y-x} \\ &= \tfrac{1}{g^2(x)} \lim_{y\to x} \tfrac{f(y)g(x)-f(y)g(y)+f(y)g(y)-f(x)g(y)}{y-x} \\ &= \tfrac{1}{g^2(x)} \lim_{y\to x} f(y) \cdot \tfrac{g(x)-g(y)}{y-x} + g(y)\tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ &= \tfrac{1}{g^2(x)} \cdot \left(\lim_{y\to x} f(y)\tfrac{g(x)-g(y)}{y-x} + \lim_{y\to x} g(y)\tfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \right) \\ &= \tfrac{1}{g^2(x)}(f(x)\cdot(-g(x)) + g(x)f'(x)) = \tfrac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

■

Beispiel 1.1.

- $f(x) = c \in \mathbb{R}(x \in \mathbb{R})$
  $\to f'(x) = \lim_{x\to y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{x\to y} \frac{c-c}{y-x} = 0$

- $f(x) = x(x \in \mathbb{R})$
  $f'(x) = \lim_{x\to y} \frac{y-x}{y-x} = 1$

- $f(x) = x^n, (x \in \mathbb{R})$ wobei $n \in \mathbb{N}$
  $f'(x) = nx^{n-1}$ per Induktion:
  $n = 1$ Stichpunkt 2 ✓
  $n \to n+1$: Sei also $f(x) = x^{n+1}$. Das gibt mit der Produktregel:
  $f'(x) = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot (x^n)' = 1 \cdot xn + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für $p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$ gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^{n} l \cdot a_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^{n} l \cdot a_l x^{l-1}$$

- Seien P_1 und P_2 Polynome.
  Dann nennt man die Abbildung
  $Q : \mathbb{R} \setminus \{x | P_2(x) = 0\} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ eine rationale Funktion.
  Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.

- Die Funktion $|\circ| \cdot x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \textit{für } x \geq 0 \\ -x & \textit{sonst} \end{cases}$ ist nicht in 0 differenzierbar.
  Denn:

$$\lim_{y \searrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} = \lim_{y \searrow 0} \frac{y - 0}{y - 0} = 1$$
$$\lim_{y \nearrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{-y - 0}{y - 0} = -1$$

Satz 1.5 (Kettenregel)**.** Seien I_f und I_g Intervalle, $x_0 \in I_f$ und $f : I_f \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und $g : I_g \to \mathbb{R}$ sei in $f(x_0)$ differenzierbar und $f(I_f) \subseteq I_g$. Dann gilt:

$$\frac{dg \circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

Beweis. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt für alle $x \in I_f$:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x))$$

(Wobei $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$)
Analog gilt für alle $y \in I_g$:

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei $\lim_{y \to f(x_0)} v(y) = 0$
Damit haben wir für alle $x \in I_f$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(x_0)) =& (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x)) \\ =& (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x)) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x)) + v(f(x)) \\ &= \lim_{x \to x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x \to x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0) g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Definition 1.6. *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f* stetig differenzierbar. *Wir definieren weiterhin induktiv die k-te Ableitung (für $k \in \mathbb{N}$) durch:*

$$\begin{aligned} f^{(0)} :=& f \\ f^{(k+1)} :=& f^{(k+1)'} \end{aligned}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.
Ist $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert, so heißt f beliebig oft *beziehungsweise* unendlich oft differenzierbar.

Bemerkung. *Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.*

Satz 1.7. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, a_k \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe vom Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $p : x \mapsto p(x)$ auf ganz $(x_0 - R, x_0 + R)$ differenzierbar mit $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$.
Insbesondere ist p' auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius R.

Bemerkung.

1. *Damit erhalten wir:*

$$exp'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = exp(x)$$

2. *Damit sind Potenzreihen ∞ oft differenzierbar*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k \right) (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left(\limsup \sqrt[k+1]{(k+1) a_{k+1}} \right)^{-1} = R \left(da \sqrt[k]{k} \to 1 \right)$$

Damit ist p' wohldefiniert.
Wir zeigen nun, dass p' tatsächlich die Ableitung von p darstellt. ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_0 = 0$.
Dann gilt für $y \in (-R, R)$:

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x - y) = \sum_{k=\sigma}^{\infty} a_k \left(x^k - y^k \right) - (k+1) a_{k+1} y^k (x - y)$$

Wir setzen $\Delta(x,y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n-y^n}{x-y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$.
Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass:

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right] \tag{2}$$

Für $n = 1$ ist $[...] = 0$ und für $n \geq 2$:

Hier nicht ... sondern Gleichungsnummer ?

$$\begin{aligned} [...] =& \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1) y^{n-1} \qquad (3) \\ =& \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} k x^{n-1-k} y^k . (n-1) y^{k-1} \\ =& \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\ =& \sum_{k=0}^{n-1} k x^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^k \\ =& (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} k x^{n-1-k} y^{k-1} \end{aligned}$$

Sein nun $|y| < r < R$ und $|x| \leq r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\Delta(x,y)| \leq& \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1} \\ \leq& \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| r^{n-2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k \leq |a_n| r^{n-2} n^2 |x-y| \end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$ den Konvergenzradius R, weshalb

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$$

konvergiert. Damit folgt aber $\lim_{x \to y} \Delta(x,y) = 0$ ■

Proposition 1.1. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in $p \in (a,b)$ mit $f'(p) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $q = f(p)$ und es gilt:*

$$\left(f^{-1}\right)'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

Beweis. Da f streng monoton ist, ist f^{-1} stetig.
Insbesondere gilt $f^{-1}(y) \to f^{-1}(q)$ für $y \to q$.
Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to q} \frac{1}{y-q}\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(q)\right) &= \lim_{y\to q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \\
&= \left(\lim_{y\to q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}\right)^{-1} \\
&= \left(f'(f^{-1}(q))\right)^{-1} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(q)\right)}
\end{aligned}$$

■

Beispiel 1.2.

- k-te Wurtel $g : (0,\infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$ ist differenzierbar mit $g'(y) = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$
  Denn g ist Umkehrfunktion zu $f(x) = x^k$
  Damit gilt:
  $$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1}$$
- Logarithmus $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$. Es ist $\ln'(y) = \frac{1}{y}$, **denn:**
  $$\ln'(y) = \frac{1}{exp'(\ln y)} = \frac{1}{exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

Bemerkung. *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist $x^\alpha := exp(\alpha \ln(x))$*
Anwendung: *Die Funktion $(\circ)^\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$ hat die Ableitung $((\circ)^\alpha)' : (0,\infty) \to (0,\infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$* ***denn***

$$\begin{aligned}
(x^\alpha)' &= exp'(\alpha \ln(x)) = exp(\alpha \ln x)\frac{\alpha}{x} \\
&= \alpha exp(\alpha \ln x) exp(-\ln x) = \alpha exp((\alpha-1)\ln x)) \\
&= \alpha x^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ und $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall

Definition 2.1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Wir sagen, f hat in $x_0 \in I$ ein* lokales Maximum (lokales Minimum)*, falls ein $\delta > 0$ gibt, so dass*

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)(f(x) \geq f(x_0)) \text{ gilt.}$$

Gilt:

$$f(x) \leq f(x_0)(f(x) \geq f(x_0))$$

für alle $x \in I$, so sagen wir, dass x_0 ein globales Maximum (globales Minimum) *ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von* strikten Maxima (strikte Minima)*. Maximum und Minimum werden unter dem Begriff* Extremum *zusammengefasst.*

Satz 2.1. Seif $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Hat f ein lokales Maximum (lokales Minimum) in $x_0 \in (a,b)$ und existiert $f'(x_0)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und:

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Wegen differenzierbarkeit in x_0 folgt:

$$\textit{Gleichung } 1 = \textit{Gleichung } 2 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

■

Satz 2.2 (verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf ganz (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit:

$$(g(b) - g(a))\, f'(\xi) = (f(b) - f(a))\, g'(\xi)$$

Beweis. Wir betrachten $h : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$t \mapsto (g(b) - g(a))\, f(t) - (f(b) - f(a))\, g(t)$$

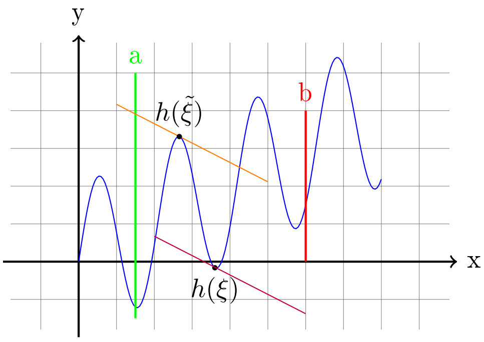
Offensichtlich *(nach Summenregel)* ist h differenzierbar auf (a,b). Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a))\, f'(t) - (f(b) - f(a))\, g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$. Damit folgt dann die Aussage.
Beachte:

$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a))\, f(a) - (f(b) - f(a))\, g(a) \\ &= g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ &= (g(b) - g(a))\, f(b) - (f(b) - f(a))\, g(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

Fall 1:$h = const$ Dann gilt trivialerweise $h' = 0$ und wir sind fertig.
Fall 2:$h \neq const$ Offensichtlich ist h stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Damit besitzt h ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein $\tilde{\xi} \in (a, b)$ mit $h(\tilde{\xi}) > h(a)$, sonst betrachte $-h$ statt h.
Also existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $h(\xi) \geq h(x)$ $(x \in [a, b])$. Mit anderen Worten: ξ ist auch ein globales Maximum und und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 2.1 folgt: $h'(\xi) = 0$ ■



Satz 2.3 (Mittelwertsatz(MWS))**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

Bemerkung. *Es ist oft wichtig, dass f nur auf (a, b) differenzierbar sein muss.*

Beweis. Das folgt aus Satz 2.2 mit $g = id_{[a,b]}$, d.h. $g(x) = x$ $(x \in [a, b])$. ■

Satz 2.4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Dann gilt:

a) $f = const \Leftrightarrow f'(x) = 0$ $(x \in (a, b))$

b) f ist monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0(x \in (a, b))$

c) f ist streng monoton wachsend $\Leftrightarrow f'(x) > 0(x \in (a, b))$

d) f ist monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0(x \in (a, b))$

e) f ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow f'(x) < 0(x \in (a, b))$

Beweis. a) folgt aus b) und c).
Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).
Sei $y > x \in [a, b]$. Sei $f|_{[x,y]}$ die *Einschränkung* von f auf $[x, y]$, das heißt:

$$f|_{[x,y]} : [x, y] \to \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt $f|_{[x,y]}$ die Bedingungen des MWS.
Es existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi)$
Fall b) $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0$
↳ $f(y) \geq f(x)$
Fall c) $f(y) - f(x) > 0$

$\Lsh f(y) > f(x)$
Beweis der Richtung $\Leftarrow$ in Teil b): Ist $f'(x) \geq 0$ so gilt

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da f monoton wachsend ist, gilt für $y > x$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für $\lim\limits_{y \nearrow x}$. ■

Korollar 2.1. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) mit $f'(x) = g'(x)$ für $x \in (a, b)$. Dann gilt $f - g = const$

Beweis. Es gilt:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 2.4. ■

Satz 2.5. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall). Gibt es $\xi \in I$ mit $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$ ($f''(\xi) > 0$), so nimmt f an der Stelle ξ ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $f''(\xi) < 0$. Für den Fall $f''(\xi) > 0$ betrachte man $-f$.
Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$r := \lim\limits_{x \to \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$
Das heißt es existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit:

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für $\epsilon := \frac{r}{2}$ gilt daher:

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right| \quad \text{für ein entsprechend gewähltes } \delta > 0$$

Insbesondere gilt also:

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$.
Das heißt für $x < \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für $x > \xi$ gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo: f' ist streng monoton fallend auf $(\xi - \delta, \xi]$ und streng monoton wachsend auf $[\xi, \xi + \delta)$
Da $f'(\xi) = 0$ folgt, dass $f'(x) > 0$ für $x \in (\xi - \delta, \xi]$ und $f'(x) < 0$ für $x \in [\xi, \xi + \delta)$.
Mit Satz 2.4 folgt:
$f|_{(\xi-\delta,\xi]}$ ist streng monoton wachsend und
$f|_{[\xi,\xi+\delta)}$ ist streng monoton fallend. ■

Satz 2.6 (Regel von l'Hospital)**.** Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiter gelte:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei $-\infty \leq A \leq \infty$ sei und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$,
sowie $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ bzw. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.
Dann gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$. Die analoge Aussage gilt auch für $x \to b$.

Bemerkung.

- *Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h. $\pm\infty$ sind als Grenzwerte zulässig.*
- *Zwei wesentliche Voraussetzungen:*
  1. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert!*
  2. *ebenso ist essentiell, dass $f, g \to \frac{\circ}{\pm\infty}$*
- *Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{exp(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{exp(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{exp(x)} = 0$$

- *Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$ zu behandeln, indem wir diese in die Form*

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}} \text{ beziehungsweise}$$
$$\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

umrechnen.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $x \to a$ ($x \to b$ läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:
Behauptung: Sei $A \in [-\infty, \infty)$.
Dann existiert für jedes $q > A$ ein $c > a$ mit $\frac{f(x)}{g(x)} < q$ $(x \in (a,c))$.
Beweis der Behauptung:
Da $\frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{x \searrow a}{\longrightarrow} A$ existiert ein $c' > a$ mit: $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$ für ein beliebiges $r \in (A, q)$ und $x \in (a, c')$.
Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{4}$$

für ein geeignetes t zwischen x und y.
Für $a < x < y < c'$ gilt daher:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \tag{5}$$

Fall 1: $f, g \overset{x \to a}{\longrightarrow} 0$. Nach Gleichung (5) gilt für $x \to a$

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q \ (y \in (a, c'))$$

Fall 2: $g(x) \overset{x \to a}{\to} \pm\infty$ Multipliziere (4) mit $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$.
Dann erhalten wir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)$$
$$\to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Für $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein $c > a$ existieren mit: $\frac{f(x)}{g(x)} < r$ $(x \in (a,c))$
Analog kann man zeigen:
Behauptung' : Sei $A \in (-\infty, \infty]$. Dann existiert für jedes $p < A$ ein $d > a$, so dass $p < \frac{f(x)}{g(x)}$ $(x \in (a, d))$
Für $A = +\infty$ folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für $A = -\infty$ aus der ersten Behauptung.
Für $A \in \mathbb{R}$ argumentieren wir wie folgt:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert $c > a$, so dass $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon$ $(x \in (a,c))$. Nach der zweiten Behauptung existiert $d > a$ mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \ (x \in (a,d))$$

Für $x \in (a, \min\{c, d\})$ gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

$\blacksquare$

Beispiel 2.1. $f(x) = 1, g(x) = x + 7$
Dann gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$
aber: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

Beispiel 2.2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) &= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \textit{ für } \alpha > 0\end{aligned}$$

Definition 2.2. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass f in a (rechtsseitig) differenzierbar ist, falls der Grenzwert*

$$\lim_{x\searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass f in b (linksseitig) differenzierbar ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existiert. Wir sagen, f ist auf $[a, b]$ differenzierbar, wenn f in (a, b) differenzierbar und in a rechtsseitig sowie in b linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe $n - Mal$ (stetig) differenzierbar etc...

Definition 2.3. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ $n-Mal$ differenzierbar. Dann heißt*

$$\begin{aligned}P_{n,\alpha} :&\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto &\sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!}(x - \alpha)^l\end{aligned}$$

das $n-te$ Taylorpolynom, wobei $\alpha \in I$ sei, von f an der Stelle α.

Bemerkung. *Offensichtlich gilt: $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$. Weiter gilt:*

$$f'(\alpha) = P'_{n,\alpha}(\alpha) = \left(\sum_{l=0}^{n} l \cdot \frac{f^l(\alpha)}{l!}\,(x - \alpha)^{l-1})\right)$$

und analog:

ich vermute, die Summe sollte bei 0 beginnen

$$\begin{aligned}f^{(l)}(\alpha) = P^{(l)}_{n,\alpha} = P^{(l)}_{n,\alpha}(\alpha) \\ (l = 1, ..., n)\end{aligned}$$

Satz 2.7 (Satz von Taylor (mit Lagrange-Restglied))**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und f $(n-1)-mal$ stetig differenzierbar (auf $[a, b]$) und $n-mal$ differenzierbar auf (a, b). Seien $\alpha \neq \beta$ in $[a, b]$ gegeben. Dann existiert ein x zwischen α und β, so dass gilt:

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n$$

Beweis. Wähle $M \in \mathbb{R}$ mit

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta - \alpha)^n$$

Man beachte, dass die $n - te$ Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch:

$$P^{(n)}_{n-1,\alpha}(t) + n! \cdot M(\textit{ für } t \in [a, b])$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein x zwischen α und β mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h(t) =& f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t-\alpha)^n \textit{ für } t \in [a, b] \\ h(\beta) =& f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta - \alpha)^n = 0 \\ h(\alpha) =& f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) \cdot M(\alpha - \alpha)^n = 0 \textit{ siehe obige Bemerekung} \\ h'(\alpha) =& f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - n \cdot M(\alpha - \alpha)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \textit{ für } l = 1, ..., n-1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein x_1 zwischen α und β mit $h'(x_1) = 0$. Analog gibt es zwischen α und x_1 ein x_2 mit $h''(x_2) = 0$. Man findet also $x_1, ..., x_{n-1}$ mit $h^{(l)}(x_l) = 0$ $(l = 1, ..., n-1)$. Insbesondere existiert ein x zwischen α und x_{n-1} (also zwischen α und β) mit $h^{(n)}(x) = 0$. Damit gilt

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}(x) - M \cdot n! \cdot (x - \alpha)^0$$

und daher $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$ ∎

Bemerkung. *Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte Lagrange'sche Darstellung*

Beispiel 2.3. Sei $f(x) = \sqrt{1+x}$. Offensichtlich:

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ f''(x) =& -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2} t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2} t^2 = -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} t^2$$

für ein x zwischen 0 und t.
Für $t > 0$ ergibt sich damit:

$$\left|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)\right| < \frac{t^2}{8}$$

Korollar 2.2. Ist $g : I \to \mathbb{R}$ $n - Mal$ differenzierbar und $g^{(n)} = 0$, so ist g ein Polynom höchstens $(n-1) - ten$ Gerades

Korollar 2.3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n+1) - mal$ stetig differenzierbar und $\alpha \in I$ mit $f^{(l)}(\alpha) = 0$ für alle $l = 1, ..., n-1$ und $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$.
Dann gilt:

- ist n ungerade, so ist α keine Extremstelle
- ist n gerade, so ist α eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist $f^{(n)}(\alpha) < 0$, so ist α eine Maximalstelle. Ist $f^{(n)}(\alpha) > 0$, so ist α Minimalstelle.

Beweis.

- Wir betrachten nur den Fall n gerade und $f^{(n)}(\alpha) > 0$.
  Nach dem Satz von Taylor gilt für alle $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) =& P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1} \\ =& f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\left(f^{(n)}(\alpha) + (\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)}(x-\alpha)\right) \end{aligned}$$

  für ein t zwischen x und α. Für x hinreichend nah an α erhalten wir:

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1}(x-\alpha)$$

  Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

  Da ist also $f(x) > f(\alpha)$ für x hinreichend nah an α.
  Sprich: α *ist strikte lokale Minimalstelle*

∎

Definition 2.4. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so definieren wir die Taylorreihe am Entwicklungspunkt $\alpha \in I$.*

$$T_{f,\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

Bemerkung.

- *im Allgemeinen konvergiert $T_{f,\alpha}(x)$ für $x \neq \alpha$ nicht*
- *Der Satz von Taylor behandelt* nicht *die Taylorreihe*
- *Selbst wenn $T_{f,\alpha}(x)$ konvergiert, muss $T_{f,\alpha}(x) = f(x)$ nicht gelten*
- *Sei $R_n(x) = P_{n,\alpha}(x) - f(x)$ Dann gilt :*

$$P_{n,\alpha}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \Leftrightarrow R_n(x) \to 0$$

Satz 2.8. Sei $f(x) = \sum_{n_0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$ und $R > 0$ der zugehörige Konvergenzradius von f.
Dann ist f auf $(\alpha - R, \alpha + R)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$$

das heißt, die Taylorreihe $T_{f,\alpha}$ stimmt mit der definierten Potenzreihe überein.

Beweis. Wir wissen bereits, dass Potenzreihen gliedweise differenziert werden. Daher gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) = & \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x-\alpha)^{n-1} \\ & \vdots \\ f^{(l)} = & l! \cdot a_l + \sum_{n=l-1}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-l) a_n (x-\alpha)^{n-l} \end{aligned}$$

für $l \in \mathbb{N}$:

$$x - \alpha) = 0 \text{ für } x = \alpha$$

Also: $f^{(l)}(\alpha) = l! \cdot a_l$ ■

3 Riemann-Integral

Ziel: Wir wollen auf „natürliche“ Weise einen Flächeninhaltsbegriff definieren, der uns erlaubt die Fläche zwischen den Graphen einer Funktion und der $x-$Achse zu bestimmen (Abbildung 1).

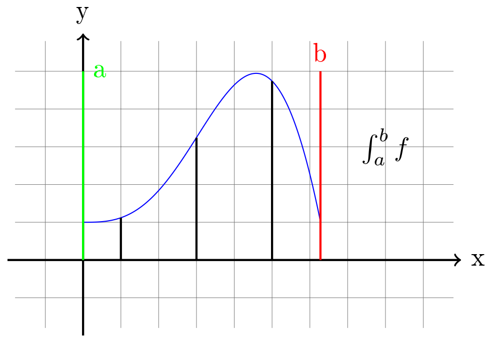


Abbildung 1: Vorgehen

Dabei heißt auf *natürliche Weise* insbesondere:

- gilt $f(x) = c = const$ für alle $x \in D(f) = [a, b]$, so soll gelten (Abbildung 2)

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = c \cdot (b - a)$$

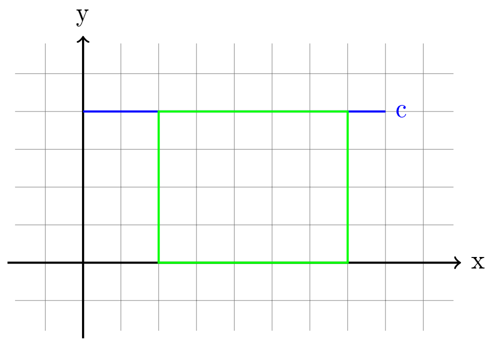


Abbildung 2: Konstante Funktion

- gilt $f(x) \leq g(x)$ $(x \in [a, b])$ so fordern wir (Abbildung 3)

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x$$

- für $c \in [a, b]$ soll gelten (Abbildung 4)

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x$$

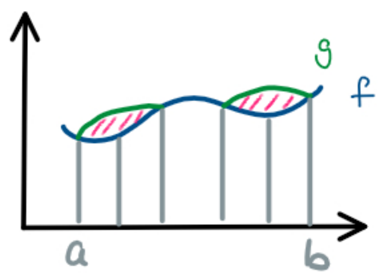


Abbildung 3: Flächeninhalt zweier Funktionen

Vorgehen: Man unterteile $[a, b]$ in „viele“ Teilintervalle, auf denen f nahezu konstant ist.

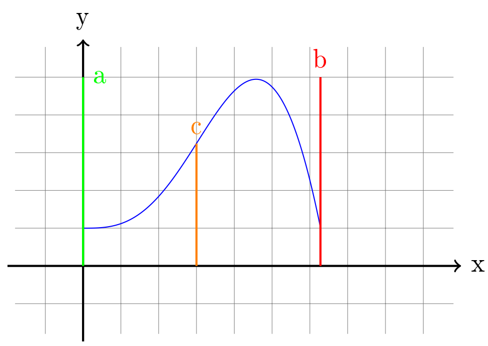


Abbildung 4: Integral aufteilen

Definition 3.1. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine* Partition *P (Abbildung 5) von $[a, b]$ ist eine endliche Menge von Punkten $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$.*
Wir schreiben $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

das geht besser auch mit Stichwortverzeichnis. Baue ich später ein.

Definition 3.2. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$.*
Wir schreiben:

$$M_i(P) := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$
$$m_i(p) := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Weiter definieren wir:

$$S(P, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$
$$s(P, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

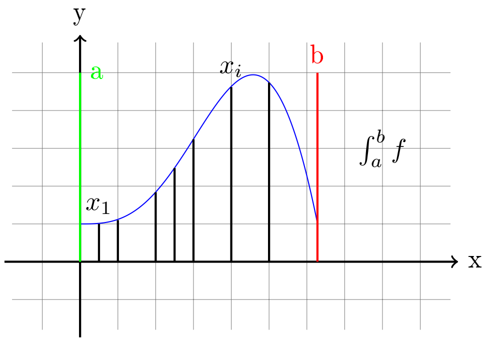


Abbildung 5: Partition

Wir setzen:

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \inf S(P, f)$$
$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \sup s(P, f)$$

wobei Infimum und Supremum über alle Partitionen von $[a, b]$ *genommen werden. Wir nennen*

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \ \ \textit{das}\ \text{obere}\ \textit{und}$$
$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \ \ \textit{das}\ \text{untere}$$

Riemannintegral *von* f *über* $[a, b]$
Gilt:

$$\int_a^{\bar{b}} f \,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

so sagen wir f *ist* Riemann-integrierbar *(*integrierbar*) und nennen*

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

das Riemannintegral *von* f *über* $[a, b]$.
Die Menge der Riemanintegrierbaren Funktionen auf $[a, b]$ *bezeichnen wir mit* $\mathcal{R}$ *beziehungsweise* $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

Bemerkung.

- *Da* f *beschränkt ist, gibt es* $m \leq M$ *in* $\mathbb{R}$ *mit:*

$$m \leq f(x) \leq M \ \ (x \in [a, b])$$

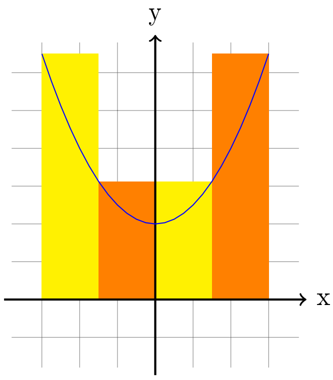


Abbildung 6: oberes Riemann-Integral

Damit gilt für jede jede Partition P:

$$m \cdot (b-a) \leq s(P,f) \leq S(P,f) \leq M \cdot (b-a)$$

Ergo: $\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x \,, \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}x$ *sind wohldefiniert.*

- *im gesamten Kapitel 3 werden wir Funktionen stets als beschränkt annehmen*

Definition 3.3. *Seien P_1, P_2 zwei Partitionen eines Intervalls. Dann heißt P_1* Verfeinerung *von P_2, wenn gilt: $P_2 \subseteq P_1$*
Weiterhin nennen wir $P_1 \cup P_2$ die gemeinsame *Verfeinerung von P_1 und P_2.*

Satz 3.1. Ist P' eine Verfeinerung der Partition P von $[a,b]$, dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P,f) \geq& S(P',f) \\ s(P,f) \leq& s(P',f) \end{aligned}$$

(wobei f wie in Definition 3.2 sei).

Beweis. Wir zeigen nur die obere Ungleichung, die andere folgt analog. Wir nehmen zunächst an, dass P' sich von P in nur einem Element x' unterscheidet.
Das heißt: $P' = P \cup \{x'\}$
Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x' \in [x_{i-1}, x_i]$
(wobei $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\}$ sei).
Wir definieren:

$$\begin{aligned} W_1 :=& \sup_{[x_{i-1},x']} f(x) \\ W_2 :=& sup_{[x',x_i]} f(x) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} S(P,f) - S(P',f) =& M_i \Delta x_i - W_1 \cdot (x' - x_{i-1}) - W_2 \cdot (x_i - x') \\ =& (M_i - W_1) \cdot (x' - x_{i-1}) + (M_i - W_2) \cdot (x_i - x') \geq 0 \end{aligned}$$

Enthält von P' k Punkte, die nicht in P enthalten sind, so führen wir obiges Verfahren insgesamt k-mal durch. ■

Satz 3.2. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \geq \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Seien P_1, P_2 zwei Partitionierungen von $[a,b]$ und P' die gemeinsame Verfeinerung. Dann gilt:

$$s(P_1, f) \leq s(P', f) \leq S(P', f) \leq S(P_2, f)$$

Mit anderen Worten:

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$$

für alle Partitionierungen P_1, P_2.
Sprich: $S(P_2, f)$ ist stets obere Schranke von $s(P, f)$ für alle Partitionen P von $[a,b]$. Ergo:

$$\sup s(P, f) \leq S(P_2, f)$$

Damit ist also $\sup s(P, f)$ untere Schranke von $S(P, f)$ (P beliebige Partition).
Ergo: $\sup s(P, f) \leq \inf S(P, f)$
Wir haben also gezeigt:

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \sup s(P, f) \leq \inf S(P, f) = \inf \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

■

Satz 3.3. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Partition P_ϵ existiert mit:

$$S(P_2, f) - s(P_2, f) < \epsilon$$

Beweis. Per Definition gilt

$$s(P_\epsilon, f) \leq \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 3.2}{\leq} \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon, f)$$

Damit erhalten wir:

$$\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

Das heißt, da ϵ beliebig, dass:

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Ergo: $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
Per Definition gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein P'_ϵ mit:

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x - s(P'_\epsilon, f) < \frac{\epsilon}{2} \tag{6}$$

Analog existiert ein P''_ϵ mit

$$S(P''_\epsilon, f) - \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x) < \frac{\epsilon}{2} \tag{7}$$

Wir setzten P_ϵ gleich der gemeinsamen Vereinigung von P'_ϵ und P''_ϵ. Man beachte: Wegen Satz 3.1 gelten Gleichung 6 und Gleichung 7, wenn wir P'_ϵ, beziehungsweise P''_ϵ, durch P_ϵ ersetzen. Da $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt außerdem:

$$\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$$

Addition von Gleichung 6 und Gleichung 7 liefert:

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

■

Satz 3.4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P_\epsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$ mit $S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$.

1. Ist P eine Verfeinerung von P_ϵ, so gilt $S(P, f) - s(P, f) < \epsilon$
2. Sind s_i, t_i beliebige Punkte in $[x_{i-1}, x_i]$, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i < \epsilon$$

3. Ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, so gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| < \epsilon$$

Beweis.

1. Das folgt aus Satz 3.1
2.

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon$$

3. Da $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, gilt $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$
   Damit folgt die Aussage aus

$$s(P_\epsilon, f) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = S(P_\epsilon, f)$$

   und $s(P_\epsilon, f) \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq S(P_\epsilon, f)$

■

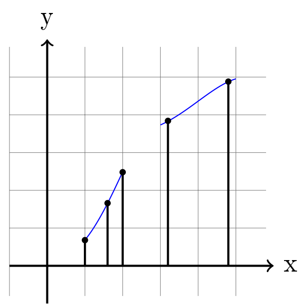


Abbildung 7: Monotone Funktion

Wir wollen im Folgenden wichtige Vertreter Riemann-integrierbarer Funktionen kennenlernen.

Satz 3.5. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Beweis. Da stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt sind, ist f offensichtlich beschränkt. Weiterhin ist f als stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig stetig.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass folgende Implikation gilt:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wir wählen eine Partition $P_\epsilon = \{x_0, \dots, x_n\}$, so dass $\Delta x_i < \delta$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} M_i - m_i <& \epsilon \text{ und daher} \\ S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) =& \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq \epsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \epsilon \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die Aussage mit Satz 3.3. ∎

Satz 3.6. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Beweis. Da f monoton ist, gilt für alle $x \in [a, b] : f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
Das heißt f ist beschränkt. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Partition $P_n = \{x_0, \dots, x_k\}$ mit $\Delta x_i < \frac{1}{n}$. Dann gilt:

$$S(P_n, f) - s(P_n, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

Ohne Einschränkung sei f monoton wachsend (der andere Fall läuft analog). Dann gilt:

$$\begin{aligned} M_i =& f(x_i) \text{ und} \\ m_i =& f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned}S(P_n, f) - s(P_n, f) =& \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \Delta x_i \\ \leq& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{1}{n}(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle n_ϵ so dass gilt:

$$\frac{1}{n_\epsilon}(f(b) - f(a)) < \epsilon$$

Dann gilt mit $P_\epsilon := P_{n_\epsilon}$ die Aussage nach Satz 3.3 ∎

Satz 3.7. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen Dann gilt $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

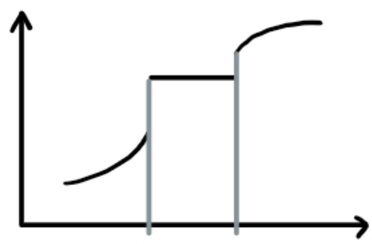


Abbildung 8: Funktion mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $E = \{P_1, \dots, P_n\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $\{a, b\} \cap E = \emptyset$ (der andere Fall läuft analog). Sei

$$M := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Wir wählen $u_j, v_j \in [a, b]$, $j = (1, \dots, n)$, so dass

$$\begin{aligned}P_s \in [u_j, v_j] \text{ und}\\ 2M(u_j - v_j) < \frac{\epsilon}{2n}\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}I_1^\epsilon =& [a, u_1],\\ I_l^\epsilon =& [v_{l-1}, u_l] \ (l = 2, \dots, n)\\ I_n^\epsilon =& [v_n, b]\end{aligned}$$

Per Vorraussetzung ist $f_{|I_j^\epsilon}(j = 1, \dots, n + 1)$ stetig.
Daher existiert nach Satz 3.5 eine Partition P_j^ϵ, so dass:

$$S(P_j^\epsilon, f_{I_j\epsilon}) - s(P_j^\epsilon, f_{I_j^\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2(n+1)}$$

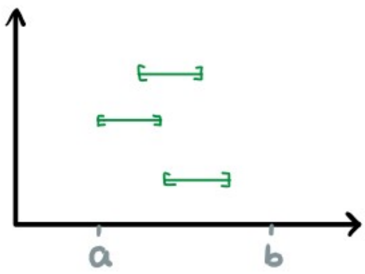


Abbildung 9: Treppenfunktion

Wir setzen $P^\epsilon = \cup_{l=1}^n P_l^\epsilon \cup U_{l=1}^n \{u_l, v_l\}$.
Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
S(P^\epsilon, f) - s(P^\epsilon, f) &= \sum_{l=1}^{n+1} S(P_l^\epsilon, f_{|I_l^\epsilon}) - s(P_l^\epsilon, f_{|I_l^\epsilon}) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{n} \left(\sup_{x \in [u_l, v_l]} f(x) - \inf_{x \in [u_l, v_l]} f(x)(v_l - u_l) \right) \\
&\leq \sum_{l=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2(n+1)} + \sum_{l=1}^{n} 2M \cdot (v_l - u_l) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

■

Definition 3.4. *Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt* Treppenfunktion *(Abbildung 9), wenn es eine Partition $Z = \{y_0, \ldots, y_m\}$ von $[a, b]$ gibt und für alle $i \in \{0, \ldots, m\}$ für $c_i \in \mathbb{R}$ gibt, so dass* Satzbau?

$$f(x) = c_i \ (x \in (y_{i-1}, y_i))$$

gilt. Nach Satz 3.7 ist jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar.
Zur Berechnung des Intervalls bedienen wir uns der Notation von Satz 10 und verwenden Satz 3.4c. falsche Referenz -> hardgecodet
Zur Vereinfachung nehmen wir wieder an, dass f in a und b stetig ist. Das heißt die Menge der Unstetigkeitsstellen ist gegeben durch $E = \{y_1, \ldots, y_{m-1}\}$.
Für $x \in I_l^\epsilon$ gilt dann $f(x) = c_l$ für alle $l = 1, \ldots, m$. Dann gilt nach Satz 3.4c:

$$\left| \int_a^b f \, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m+1} c_i \cdot |I_l^\epsilon| + \sum_{i=1}^{m-1} f(y_i) \cdot (v_i - u_i) \right| < \epsilon$$

Für $\lim_{\epsilon \to 0}$ gilt: $\begin{cases} |I_1^1| \to y_{1-a} & \\ |I_l^2| \to y_2 - y_{l-1} & (l = 2, ..., m) \\ |I_{m+1}^\epsilon| \to b - y_m & \end{cases}$

Das heißt

$$\sum_{i=1}^{m+1} c_i |I_\epsilon^l \to c_i(y_i - a) \sum_{i=2}^{m} c_i \cdot (y_i - y_{i-1}) + c_m(b - y_m) \tag{8}$$

Außerdem gilt $v_i - u_j \overset{\epsilon \to 0}{\to} 0$ *gilt* $\int_a^b f \, \mathrm{d}x =$ *Gleichung* 8

Korollar 3.1. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, beziehungsweise monoton, beziehungsweise besitzt f höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen und ist beschränkt, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Bemerkung. *Mit Hilfe des Lebesguesches Integrabilitätskriterium kann man sogar zeigen, dass beschränkte Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar sind.*

Beispiel 3.1.

$$\int_0^a x \, \mathrm{d}x$$

Da $id : [0, a] \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert das Integral.
Sei $P_n = \{0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \ldots, \frac{(n-1)a}{n}, a\}$ eine Partition von $[a, b]$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} S(P_n, x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{a^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(P_n, x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{n} \cdot \frac{a}{n} \\ &= \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Da id integrierbar ist, gilt:

$$\int_0^a x \, \mathrm{d}x \in [s(P_n, x), S(P_n, x)] = \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n}\right] n \in \mathbb{N}$$

Das heißt:

$$\int_0^a x \, \mathrm{d}x \cap_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{1}{n}, \frac{a^2}{2} + \frac{1}{n}\right]$$

Also: $\int_0^a x \, \mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$

Beispiel 3.2. Sei $D : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die *Dirichlet-Funktion*, d.h

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt für jede Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, dass

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) = 1 \text{ und} \\ m_i &= \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) = 0 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$S(P, f) - s(P, f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1$$

Ergo: D ist nicht Riemann-integrierbar

Satz 3.8. Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $m \leq f(x) \leq M$ $(x \in [a, b])$. Sei ferner $\Phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\Phi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da Φ auf dem abgeschlossenen Intervall $[m, M]$ stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ (Ohne Eisnchränkung sei $\delta < \epsilon$) mit :

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \epsilon$$

Da f integrierbar ist, gibt es eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit

$$S(P, f) - s(P, f) < \delta^2$$

Wie üblich bezeichnen wir

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) \text{ und} \\ m_i &= \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} f(x) \text{ und weiterhin} \\ M_i^+ &= \sup_{x \in [x_{i-1} - x_i]} \Phi \circ f \text{ sowie} \\ m_i^* &= \inf_{x \in [x_{i-1} - x_i]} \Phi \circ f(x) \end{aligned}$$

Seien

$$\begin{aligned} A =& \{i = 1, \ldots, n | M_i - m < \delta\} \\ B =& \{i = 1, \ldots, n\} \setminus A \end{aligned}$$

Aufgrund der Wahl von δ gilt für alle $i \in A : M_I^+ - m_i^* < \epsilon$ Weiter gilt:

$$\delta \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i = \sum_{i \in B} \delta \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq \delta^2$$

Ergo: $\sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \delta$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
S(P, \Phi \circ f) - s(P, \Phi \circ f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i \\
&= \sum_{i \in A} (M_i^+ - m_i^*) \cdot \Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i^+ - m_i) \Delta x_i \\
&\leq \epsilon \sum_{i \in A} \Delta x_i + 2 \sup_{x \in [m,M]} |\Phi \circ f| \cdot \sum_{i \in B} \Delta x_i \\
&\leq \epsilon \left(|b-a| + 2 \sup_{x \in [m,M]} |\Phi \circ f(x)| \right)
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die Behauptung mit 3.3. ■

Satz 3.9. Seien $f_1, f_2, f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ Dann gilt:

1. $$\int_a^b f_1 + f_2 \, \mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \, \mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}x$$

   und für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

   $$\int_a^b cf \, \mathrm{d}x = c \int_a^b f \, \mathrm{d}x$$

2. Insbesondere gilt also

   $$\begin{aligned} f_1 + f_2 &\in \mathcal{R}_{[a,b]} \text{ und} \\ cf &\in \mathcal{R}_{[a,b]} \end{aligned}$$

3. Gilt $f_1(x) \leq f_2(x)$ $(x \in [a,b])$ so folgt

   $$\int_a^b f_1 \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2 \, \mathrm{d}x$$

4. Ist $c \in (a,b)$, und $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ so gilt

   $$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \int_a^c f \, \mathrm{d}x + \int_c^b f \, \mathrm{d}x$$

5. Gilt $M \geq f(x)$ $(x \in [a,b])$ so gilt

   $$M \cdot (b-a) \geq \int_a^b f \, \mathrm{d}x$$

Beweis.

1. Da $f_i \in \mathcal{R}_{[a,b]} (i = 1,2)$ gibt es Partitionen P_i von $[a,b]$ mit

   $$S(P_i, f) - s(P_i, f) \leq \epsilon \text{ für ein festes } \epsilon > 0$$

   Dann gilt für die gemeinsame Verfeinerung $P = P_1 \cup P_2 = \{x_0, \ldots x_n\}$ nach Satz 3.1 , dass

   $$S(P, f_i) - s(P, f_i) \leq \epsilon \ (i = 1,2)$$

2. Es gilt

$$\sup_{x\in[x_{i-1}-x_i]} f_1(x)+f_2(x) \le \sup_{x\in[x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + \sup_{x\in[x_{i-1}-x_i]} f_2(x)$$

Analog gilt:

$$\inf_{x\in[x_{i-1}-x_i]} f_1(x)+f_2(x) \ge \inf_{x\in[x_{i-1}-x_i]} f_1(x) + \inf_{x\in[x_{i-1}-x_i]} f_2(x)$$

Damit folgt:

$$s(P,f_1)+s(P,f_2) \le s(P,f_1+f_2) \le S(P,f_1+f_2) \le S(P,f_1)+S(P,f_2)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} S(P,f_1+f_2)-s(P,f_1+f_2) \\ &\le S(P,f_1)-s(P,f_1)+S(P,f_2)-s(P,f_2) \\ &\le 2\epsilon \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt $f_1+f_2 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ nach Satz 3.3.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned} s(P,f_1+f_2), S(P,f_1+f_2) \in & [s(P,f_1)-s(P,f_2), S(P,f_1)+S(P,f_2)] \\ \subseteq & \left[\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x + 2\epsilon\right] \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, gilt:

$$\int_a^b f_1+f_2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x$$

Die Aussage bezüglich $c \cdot f$ zeigt man analog.

3. Sei $f_2(x) \ge f_1(x)$ $(x \in [a,b])$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_2(x)-f_1(x) &\ge 0 \text{ und daher} \\ s(P,f_2-f_1) &\ge 0 \end{aligned}$$

für jede Partition P von $[a,b]$ Wegen 1 ist $f_2-f_1 \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und es gilt:

$$\int_a^b f_2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2-f_1 \,\mathrm{d}x \ge \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}x$$

4. Für 3. betrachtet man zu beliebiger Partition P von $[a,b]$ die Partition $P' = \{c\} \cup P$

5. Folgt aus 2. mit $f_1 = f$ und $f_2 = M$ soweit

$$\int_a^b M \,\mathrm{d}x = M \cdot (b-a)$$

■

Bemerkung.

- *Eigenschaft 1 sagt, dass $\mathcal{R}_{[a,b]}$ ein bezüglich der Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren ein Vektorraum ist*
- *Eigenschaft 1 sagt weiterhin, dass die Abbildung*

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x : \mathcal{R}_{[a,b]} &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

  ein lineares Funktional ist
- *Eigenschaft 2 sagt, dass dieses Funktional positiv ist (also nicht-negative Funktionen einen nicht negativen Wert zuordnet)*
- *Eigenschaft 4 impliziert eine gewisse stetigkeit*

Satz 3.10. Für $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt:

- $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$
- $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und $\int_a^b |f| \,\mathrm{d}x \geq \left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right|$

Beweis. Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto t^2$.
Dann ist Φ stetig und damit $\Phi \circ (f+g)$ bzw $\Phi \circ (f-g)$ aufgrund von Satz 3.9 und Satz 3.8 Riemann-integrierbar über $[a,b]$. Beachte:

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$$

Nach Satz 3.8 gilt wieder $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Sei nun $c \in \{-1, 1\}$ so gewählt, dass

$$c \int_a^b f \,\mathrm{d}x \geq 0$$

Offensichtlich gilt

$$|f(x)| = |cf(x)| \geq cf(x) \quad (x \in [a,b])$$

Damit gilt mit Satz 3.9

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right| = c\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^b cf \,\mathrm{d}x \overset{Satz\ 3.9}{\leq} \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x$$

■

Satz 3.11 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$.
(Abbildung 10)

Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g \,\mathrm{d}x$$

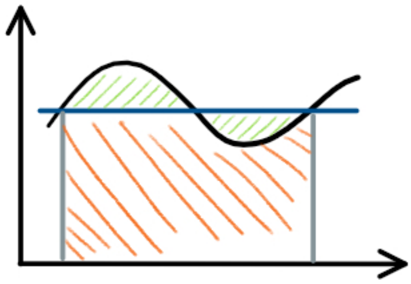


Abbildung 10: Mittelwertsatz der Integralrechnung

Bemerkung: Für $g = 1$ gilt dann:

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Beweis. Man setze: $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y) \cdot \int_a^b g \, \mathrm{d}x$. h ist stetig und es gilt:

$$\begin{aligned}
\inf_{y \in [a,b]} h(y) &= \inf_{y \in [a,b]} \int_a^b f(y) g(x) \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b \int_{y \in [a,b]} f(y) g(x) \, \mathrm{d}x \\
&\overset{Satz\ 3.9}{\leq} \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x \overset{Satz\ 3.9}{\leq} \int_a^b \sup_{y \in [a,b]} f(y) g(x) \, \mathrm{d}x = \sup_{y \in [a,b]} h(y)
\end{aligned}$$

Das heißt wir haben eine stetige Funktion h mit:

$$\int_a^b fg \, \mathrm{d}x \in [\inf_{y \in [a,b]} h(y), \sup_{y \in [a,b]} h(y)]$$

∎

Bemerkung. *Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.*

4 Differentiation und Integration

Bemerkung. *Bisher hatten wir stets $\int_a^b f \,\mathrm{d}x$ mit $a \leq b$ betrachtet. Für $a \geq b$ setze man*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x := -\int_b^a f \,\mathrm{d}x$$

Satz 4.1. Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Für $a \leq x \leq b$ setze man

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dann gilt

1. F ist stetig auf $[a,b]$
2. Ist f stetig in $x_0 \in [a,b]$, so ist F in x_0 differenzierbar und es gilt: $F'(x_0) = f(x_0)$

Beweis.

1. Da $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, ist f insbesondere beschränkt. Das heißt es existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit

   $$|f(x)| \leq M \ (x \in [a,b])$$

   Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta := \frac{\epsilon}{M}$. Für $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ erhalten wir:

   $$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| =& \left|\int_a^x f\,\mathrm{d}t - \int_a^y f\,\mathrm{d}t\right| \\ =& \left|\int_a^x f\,\mathrm{d}t + \int_y^x f\,\mathrm{d}t - \int_a^y f\,\mathrm{d}t\right| \\ =& \left|\int_y^x f\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_y^x |f|\,\mathrm{d}t \\ \leq& M \cdot \int_y^x 1\,\mathrm{d}t = M(x-y) \leq \epsilon\end{aligned}$$

   Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Aussage

Sei $h \in \mathbb{R}$, so dass $x_0 + h \in [a,b]$. Dann gibt es ein ξ_h zwischen x_0 und $x_0 + h$ mit:

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} =& \frac{\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \\ =& \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{h} \\ =& f(\xi_h) \cdot \frac{\int_{x_0}^h \mathrm{d}t}{h} \\ =& f(\xi_h) \cdot \frac{h}{h} \text{ Damit gilt:} \\ \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} =& \lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x_0)\end{aligned}$$

■

Satz 4.2. Ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und es gilt $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F' = f$. Dann gilt

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Bemerkung.

- *Eine Funktion F mit $F' = f$ nennt man eine* Stammfunktion *von f*
- *Man schreibt gerne $F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Man wähle eine Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ mit

$$S(P,f) - s(P,f) < \epsilon$$

Weiter existiert aufgrund des Mittelwertsatzes der Differential-Rechnung (Satz 2.3) $\xi \in [x_{i-1}, x_i]$ mit

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Nach Satz 3.4 gilt

$$\begin{aligned} \epsilon > & \left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \\ = & \left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \right| \\ = & \left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x - (F(b) - F(a)) \right| \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

Bemerkung.

- *Sei $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ Dann bezeichnet man die Funktion*

$$\begin{aligned} \int_a^{\circ} f \,\mathrm{d}x : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_a^b f \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

  als unbestimmtes Integral *von f.*

- *Satz 4.2 sagt also das jede Stammfunktion ein unbestimmtes Integral von f ist*

ich bin mir hier nicht sicher ob das nicht $t \mapsto \int_a^x f \,\mathrm{d}t$ sein müsste

Proposition 4.1. *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Eine Funktion $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ genau dann Stammfunktion von f, wenn $F - G = konst.$*

Beweis. $\Leftarrow$
Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $F + c$

$$(F + c)' = F' = f$$

$\Rightarrow$
Das war eine Folgerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 2.3). ■

Bemerkung. *Oftmals wird ignoriert, dass sobald es eine Stammfunktion F von f gibt, es automatisch unendlich viele gibt. So schreibt man beispielsweise*

$$\int f \,\mathrm{d}x = F$$

oder spricht von „der" Stammfunktion. Die obige Gleichung ist insofern problematisch, da die rechte Seite (und damit per Definition auch die linke Seite) nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Oftmals ist daher der etwas laxe Umgang mit den Begriffen unkritisch.

Satz 4.3 (Partielle Integration)**.** Seien $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$F' = f \text{ und } G' = g$$

wobei $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Dann gilt:

$$\int_a^b F \cdot g \,\mathrm{d}x = FG|_a^b - \int_a^b f \cdot G \,\mathrm{d}x$$

Beweis.

$$\frac{\mathrm{d}}{dt} F(t) \cdot G(t) = F(t)G(t) + F(t)G'(t) = f(t)G(t) + F(t)g(t) \tag{9}$$

Da $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und F, G differenzierbar (und daher auch in $\mathcal{R}_{[a,b]}$), ist die rechte Seite in $\mathcal{R}_{[a,b]}$.
Mit Satz 4.2 haben wir:

$$\int_a^b f(t)G(t) + F(t)g(t) \,\mathrm{d}t = F(b)G(b) - F(a)G(a)$$

Weiter aufgrund der Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned} \int_a^b fG + Fg \,\mathrm{d}t = \int_a^b fG \,\mathrm{d}t + \int_a^b Fg \,\mathrm{d}t \\ 9 - \int_a^b fG \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

liefert die Behauptung. ∎

Beweis.

$$\begin{aligned} \left(FG|_a^x - \int_a^x f \cdot G \,\mathrm{d}t\right)' &= \left(F(x) \cdot G(x) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^x fG \,\mathrm{d}t\right)' \\ &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - f(x)G(x)) \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) \end{aligned}$$

Ergo: die rechte Seite ist eine Stammfunktion des Integranden der linken Seite. Damit folgt die Aussage aus Satz 4.2. ∎

Beispiel 4.1.

$$\begin{aligned}
\int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x \quad &= \int_a^b cos(x)\cdot cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= cos(x)\cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b sin^2\,\mathrm{d}x \\
&= cos(x)\cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b 1 - cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= cos(x)\cdot sin(x)|_a^b + \int_a^b 1\,\mathrm{d}x - \int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x \,\bigg|+\int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow 2\int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x \quad &= cos(x)\cdot sin(x)|_a^b + x|_a^b \,\bigg|\cdot\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x \quad &= \frac{1}{2}\cdot\,(cos(x)\cdot sin(x)+x)|_a^b \\
\text{Ergo: } \int_a^b cos^2(x)\,\mathrm{d}x \quad &= \frac{1}{2}(cos(x)sin(x)|_a^b + (b-a))
\end{aligned}$$

$$\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ wobei } 0\notin[a,b]$$

$$\begin{aligned}
\int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x =& x\cdot\ln(x)|_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
=& \; x\cdot\ln(x)|_a^b - \int_a^b 1\,\mathrm{d}x \\
=& \; x\cdot\ln(x)|_a^b - x|_a^b \\
=& \; x\cdot\ln(x)|_a^b - (b-a)
\end{aligned}$$

Satz 4.4. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $\phi:[c,d]\to[a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $t\in[c,d]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}F(\phi(t)) =& F'(\phi(t))\cdot\phi'(t) \\
=& f(\phi(t))\cdot\phi'(t) \\
\text{Ergo: } \int_{\phi(c)}^{\phi d} =& \int F(\phi(d)) - F(\phi(c)) \\
=& \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

■

Bemerkung.

- *Die Substitutionsregel lässt sich wie folgt nachrechnen*

$$\phi'(t)\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}} dt$$

Dann lässt sich die Substitutions-Regel

$$\int_c^d f(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 4.2.

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = r\int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,\mathrm{d}x$$

Wir wählen $\phi(t) = r \cdot sin(t)$ für $t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann gilt mit der Substitutionsregel (man beachte dass $\phi(\frac{-\pi}{2}) = -r$ und $\phi(\frac{\pi}{2}) = r$):

$$\begin{aligned} r \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,\mathrm{d}x =& r \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{\phi^2(t)}{r^2}} \cdot \phi'(t)\,\mathrm{d}t \\ =& r \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^2(t)} \cdot cos(t) \cdot r\,\mathrm{d}t \\ =& r^2 \cdot \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ =& \frac{r^2}{2} \cdot \pi \end{aligned}$$

Beispiel 4.3.

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} \text{ wobei } -1, 1 \notin [a, b]$$

Vorgehen Partialbruchzerlegung: Man zerlegt den Nennen in seine Linearfaktoren und bestimmt Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{\alpha}{1 + x} + \frac{\beta}{1 - x}$$

Man beachte, dass $(1 - x)(1 + x) = 1 - x^2$
Wir multiplizieren die Gleichung mit $(1 + x)(1 - x)$ und erhalten:

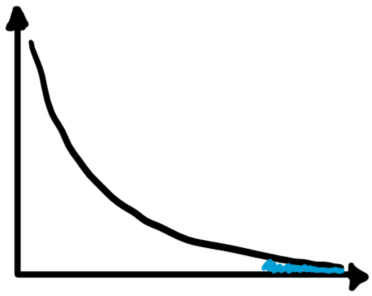
$$1 = \alpha(1 - x) + \beta(1 + x) = \alpha + \beta(\beta - \alpha)x(x \in [a, b])$$

Also: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ Damit gilt:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1 - x} + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1 + x}\right)$$

Nun gilt für $\phi(t) = 1 - t$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1 - x} = \int_{1-a}^{1-b} \frac{-1\,\mathrm{d}t}{1\phi(t)} = -\int_{-a}^{1-b} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(t)|_a^b$$



Weiter gilt mit $\phi(t) = t - 1$:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int_{1+a}^{1+b} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(t)|_{1+a}^{1+b}$$

Ergo:

$$\frac{1}{2}(\ln(1+b) - \ln(1-b) - (\ln(1+a) - \ln(1-a)) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_a^b$$

4.1 Erweiterungen des Integralbegriffs

4.1.1 Uneigentliche Integrale

Ziel: Die Erweiterung des Integralbegriffs auf Integranden, die möglicherweise nicht beschränkt sind, beziehungsweise auf Integrationsintervalle, die nicht beschränkt sind.

1. Eine Intervallgrenze ist unendlich.

Definition 4.1. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b] \subsetneq [a,\infty)$ Riemann-integrierbar.*
Wir sagen f ist auf $[a,\infty)$ uneigentlich integrierbar *beziehungsweise $\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x$ existiert, sofern der folgende Grenzwert existiert:*

$$\int_a^\infty f\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

Analog definiert man $\int_{-\infty}^b f\,\mathrm{d}x$ für $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$.

Beispiel 4.4.

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \frac{1}{s-1} \text{für s} > 1$$

Denn: für $b > 1$ gilt:

Caption fehlt

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\mathrm{dx}}{x^s}\,\mathrm{d}x = \int_a^b x^{-s}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-s+1}}{-s+1}\bigg|_a^b\\ = \frac{\left(b^{-s+1} - a^{-s+1}\right)}{-s+1} \overset{a=1}{=} \frac{1}{s-1}\left(1 - b^{-s+1}\right) \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

Hingegen ist $\frac{1}{x^s}$ nicht unendlich integrierbar über $[1, \infty)$, falls $s \leq 1$.
Für $s = 1$ folgt das wie folgt:

$$\int_1^b \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln(x)|_1^b = \ln b \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

2. Der Integrand ist an einer Invervallgrenze kritisch (also beispielsweise unbeschränkt).

Definition 4.2. *Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ für jedes $\epsilon \in (0, b-a)$ über $[a+\epsilon, b]$ Riemann-integrierbar. Dann sagen wir, dass f über $(a, b]$* uneigentlich integrierbar *ist beziehungsweise dass $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ existiert, sofern folgender Grenzwert existiert:*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f\,\mathrm{d}x$$

Analog bestimmt man $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$, falls b kritisch ist.

Beispiel 4.5.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{x^s} \text{ existiert für } s < 1$$

für $\epsilon > 0$ gilt:

$$\int_\epsilon^1 \frac{\mathrm{dx}}{x^s} = \int_\epsilon^1 x^{-s}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-s}(1-\epsilon^{1-s}) \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1-s}$$

3. Beide Integrationsgerenzen sind kritisch

Definition 4.3. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ für alle $\alpha \in (a, b)$ und $\beta \in (\alpha, b)$ Riemann-integrierbar über $[\alpha, \beta]$. Dann definiert man das* uneigentliche Integral *von f über $[a, b]$ und sagt $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ existiert, sofern folgender Grenzwert existiert:*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^c f\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0} \int_c^{b-\delta} f\,\mathrm{d}x \textit{ wobei } c \in (a, b) \textit{ sei}$$

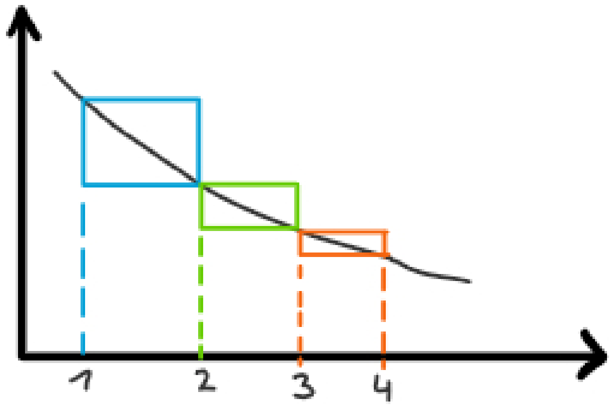
Bemerkung.

- *Die obige Definition ist unabhängig von der konkreten Wahl der Zwischenstelle c*
- *Ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ so stimmt das Riemann-Integral von f über $[a, b]$ mit dem uneigentlichen Integral überein.*

Satz 4.5. Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende positive Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^\infty f\,\mathrm{d}x \text{ existiert}$$

Abbildung 11: Monoton fallende positive Funktion



Beweis. $\Rightarrow$ Wir setzen $g(x) = f(\lfloor x \rfloor)$
Dann gilt:

- $g(x) \geq f(x)$ $(x \in [1, \infty])$
- $g \in \mathcal{R}_{[1,b]}$ für alle $b > a$

$$\int_1^b f \,\mathrm{d}x \leq \int_1^b g \,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{\lceil b \rceil} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$$

$\Leftarrow$ Sei $h(x) = f(\lceil x \rceil)$ Dann gilt:

- $h \in \mathcal{R}_{[1,b]}$ für $b > a$
- $h(x) \leq f(x)$ $(x \in [1, \infty))$

Damit gilt:

$$\sum_{n=1}^{\lceil b \rceil} f(n) = f(1) + \int_1^{\lceil b \rceil} h(x) \,\mathrm{d}x \leq f(1) + \int_1^{\lceil b \rceil} f \,\mathrm{d}x < \infty$$

■

Anwendung: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für jedes $s > 1$

Bemerkung (Gauß-Klammer)**.**

- *für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x und $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer gleich x*
- Die *Gamma-Funktion*

$$\begin{aligned} \Gamma : (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} exp(-t) \,\mathrm{d}t \\ \Gamma(n) &= \int_0^1 (-\log x)^{n-1} \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Die Γ-Funktion ist wohldefiniert. Da

$$t^{x-1}exp(-t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

existiert ein $t_0 \in (0,\infty)$ mit:

$$t^{x-1}exp(-t) < \frac{1}{t^2} \ (t \geq t_0)$$

Damit gilt:

- $\int_{t_0}^{\infty} t^{x-1}exp(-t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{t_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} < \infty$
- $\int_{0}^{t_0} t^{x-1}exp(-t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{0}^{t_0} t^{x-1}\,\mathrm{d}t < \infty$ (siehe Beispiel 4.5)

Satz 4.6 (Funktionsgleichung der Γ-Funktion)**.** Für $x > 0$ gilt:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

Bemerkung.

- $\Gamma(1) = 1$ *(einfach nachrechnen)*
- $\Gamma(2) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$

  und so weiter. Wir sehen:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0, R > \epsilon$ Dann gilt:

$$\int_{\epsilon}^{R} t^{x-1}exp(-t)\,\mathrm{d}t = -t^{x-1} \cdot exp(-t)\big|_{\epsilon}^{R} + \int_{\epsilon}^{R} (x-1)t^{x-2}exp(-t)\,\mathrm{d}t$$

Für $x > 1$ gilt daher $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$

■

Bemerkung statt x -1 -> x+1 ?

4.1.2 Integrale über komplexwertige Funktionen

Definition 4.4. *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Dann heißt f auf $[a,b]$* Riemann-integrierbar*, falls $Re(f)$ und $Im(f)$ (Realteil beziehungsweise Imaginärteil von f) Riemann-integrierbar sind über $[a,b]$. In diesem Falle definieren wir:*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \int_a^b Re(f)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b Im(f)\,\mathrm{d}x$$

Satz 4.7. Seien $f, f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar über $[a,b]$, dann gilt:

a) Für $c \in \mathbb{C}$ ist $c \cdot f$ Riemann-integrierbar über $[a,b]$ sowie $f_1 + f_2$ und es gilt:

$$\int_a^b f_1 + f_2\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b c \cdot f\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f\,\mathrm{d}x$$

b) Ist $c \in (a,b)$, so ist f über $[a,c]$ und über $[c,b]$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \int_a^c f \,\mathrm{d}x + \int_c^b f \,\mathrm{d}x$$

c) $f_1 \cdot f_2$ ist integrierbar über $[a,b]$

d) $\overline{f}$ ist integrierbar über $[a,b]$

e) $|f|$ ist integrierbar und es gilt:

$$\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x$$

Punkt f fehlt oben ?

Beweis. a)-d) folgen sofort aus den Eigenschaften des Integrals über reellwertige Funktion

e) $|f| = \sqrt{f \cdot \overline{f}}$ ist integrierbar, auf Grund von c), d) und Satz 3.9

f) Wähle $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass:

$exp(i\varphi) \cdot \int_a^b f \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| &= \left| exp(i\varphi) \cdot \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_a^b exp(i\varphi) \cdot f \,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_a^b Re(exp(i\varphi) f) \,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_a^b |Re(exp(i\varphi) f| \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |exp(i\varphi) f| \,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

∎

Bemerkung. $|exp(i\varphi)| > 0$

5 Differentialgleichungen

Differenzialgleichungen sind eine spezielle Form von Funktionalgleichungen. Funktionalgleichungen sind Gleichungen, in denen nach einer Funktion gesucht wird.

Beispiel 5.1 (Welche Funktion erfüllt $f^2 = f$?)**.** Beispielsweise $f(x) = 0$ oder $f(x) = 1$.

Oftmals ist die Lösung einer Funktionalgleichung in dieser Allgemeinheit gar nicht von Interesse und man schränkt den Lösungsraum in einer naheliegenden Weise ein. Man könnte beispielsweise für obige Gleichung fordern, dass f stetig sein soll. Aber selbst dann sind wir von einer eindeutigen Lösung entfernt.
(Man betrachte beispielsweise

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = 1; \\ f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_0(x) = 0; \\ f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}, f_2(x) = 0; \\ \vdots \end{aligned}$$

).
Uns sind bereits Funktionalgleichungen begegnet. Beispielsweise

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$$
$$\text{Mögliche Lösung: } \Phi(x) = a^x \text{ für a} > 0$$

Eine spezielle Form von Funktionalgleichungen die insbesondere in den Natur-, Ingenieurs-, oder Wirtschaftswissenschaften eine zentrale Rolle spielt, sind sogenannte *Differenzialgleichungen (DGLs)*, das heißt Funktionalgleichungen, die neben der Funktion selbst auch deren Ableitung beinhalten.

Beispiel 5.2. Sämtliche physikalische Grundgesetze beinhalten Differentialgleichungen.
Das 2. Newton'sche Gesetz: Das besagt, dass wenn ein Teilchen zur Zeit $t_0 \in \mathbb{R}$ an einem Ort x_0 mit einer Geschwindigkeit v_0 ist, dass das Teilchen zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x(t)$ ist, wobei die Funktion $t \mapsto x(t)$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x(t)}}{\mathrm{dt}^2} = \frac{F(x(t))}{m}$$

Hierbei ist $F(\cdot)$ die im jeweiligen Ort wirkende Kraft und
$x(t_0) = x_0, \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}(x_0) = v_0$.
<u>Konkretes Beispiel:</u> Ein Massepunkt zwischen zwei Federn
<u>Physik:</u>$F(x) = -k \cdot x$ (k Federkonstante)
Das heißt wir haben die folgende Differenzialgleichung zu lösen:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x(t)}}{\mathrm{dt}^2} = \frac{-k}{m} \cdot x$$

Mögliche Lösung:

$$x(t) = \alpha \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \beta \cos\left(\frac{k}{m} t\right)$$

Überprüfung:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x(t)}}{\mathrm{dt}^2} =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\alpha \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) - \beta \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right) \\
=& -\alpha \cdot \frac{k}{m} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) - \beta \cdot \frac{k}{m} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \\
=& -\frac{k}{m} \cdot x(t)
\end{aligned}$$

Wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Durch Festlegen der Anfangsposition und Geschwindigkeit, können wir α, β festlegen und erhalten eine eindeutig bestimmte (ohne Beweis) Lösung des Anfangswertproblems (das heißt Lösung der Differentialgleichung und Erfüllen der Anfangsbedingung).

Der Satz kling doof formuliert

Bemerkung.

- *Offensichtlich besitzt die Differentialgleichung alleine noch keine eindeutige Lösung. Für die Eindeutigkeit benötigen wir zusätzliche Informationen, zum Beispiel in Form von Anfangsbedingungen.*
- *Auch wenn man nicht jede Differentialgleichung analytisch lösen kann, kann man Lösungen raten und durch Einsetzen verifizieren.*

Beispiel 5.3. Die logistische Differentialgleichung (Anwendung in der Ökologie [Populationsentwicklung] beziehungsweise in der Ökonometrie [Wachstum eines Marktes])
Sei $N(t)$ die Populationsgröße einer Bakterienkultur zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. Wir erwarten, dass die Änderungsrate $\frac{\mathrm{dN(t)}}{\mathrm{dt}}$ einerseits proportional zur aktuellen Populationsgröße $N(t)$ ist, andererseits aber natürlichen Grenzen (*CaryING capacity*) unterliegt.

$$\frac{\mathrm{dN(t)}}{\mathrm{dt}} = A \cdot N(t) \cdot (B - N(t)) \text{ wobei A, B } > 0$$

Allgemeine Lösung:

$$N(t) = \frac{1}{\alpha \cdot \exp(-ABt) + 1} \ (t \geq 0)$$

wobei $\alpha > -1$.

Definition 5.1. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : G \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nennen wir*

$$\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dx}} = f(t, x(t)) \tag{10}$$

eine (explizite gewöhnliche) Differentialgleichung 1. Ordnung. *Wir sagen: $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist eine Lösung von Gleichung 10, wenn y differenzierbar ist und es gilt:*

i) $\{(t, y(t)) | t \in (a, b)\} \subseteq G$

ii) $\frac{\mathrm{dy(t)}}{\mathrm{dt}} = f(t, y(t)) \ (t \in (a, b))$

Bemerkung.

- *Punkt 1 ist nötig, um Punkt 2 überhaupt formulieren zu können.*
- *Gleichung 10 heißt Differentialgleichung erster Ordnung, da nur die erste Ableitung der gesuchten Funktion vorkommt. Allgemein kann man auch n-te Ableitungen zulassen und entsprechende Differentialgleichungen n-ter Ordnung betrachten (siehe Newton), was wir aber mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln nicht schematisch machen können.*
- *Im konkreten Fall der logistischen Differentialgleichung können wir setzen:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto A \cdot x \cdot (B - x) \end{aligned}$$

  Wir sehen: f ist unabhängig von t. Eine solche Differentialgleichung nennen wir autonom*.*

5.1 Trennung der Variablen

Die Trennung der Variablen ist ein Verfahren, welches für Differentialgleichungen der folgenden Form geeignet ist:
Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) \neq 0$ $(x \in J)$. Dann heißt

$$\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} = f(t) \cdot g(x(t)) \tag{11}$$

eine Differentialgleichung mit *getrennten Variablen*

das konnte keiner lesen

Satz 5.1. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ und f, g wie oben. Sei $(t_0, x_0) \in I \times J$. Wir definieren:

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s\,, G(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)}$$

Sei $I' \subseteq I$ ein Intervall mit $t_0 \in I'$ und $F(I') \subseteq G(J)$. Dann gibt es genau eine Funktion $y : I' \to \mathbb{R}$, die Gleichung 11 löst und $y(t_0) = x_0$ erfüllt und y genügt der Gleichung:

$$G(y(t)) = F(t)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jede Funktion $y : I' \to \mathbb{R}$ die Gleichung 11 erfüllt, auch die Gleichung $G(y(t)) = F(t)$ erfüllt.

$$\begin{aligned} G(y, t) &= \int_{y(t_0)=x_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} \\ &\overset{\text{Sub.-}}{\underset{\textit{regel}}{=}} \int_{t_0}^{t} \frac{y'(r)}{g(y(r))}\,\mathrm{d}r = \int_{t_0}^{t} \frac{f(r)g(y(r))}{g(y, r)}\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{t_0}^{t} f(r)\,\mathrm{d}r = F(t) \end{aligned}$$

Nun zur Eindeutigkeit:
Da $g \neq 0$, ist G streng monoton wachsend (falls g > 0) oder streng monoton

fallend, falls $g < 0$. Da G differenzierbar ist (Satz 4.1) und invertierbar (wegen der Monotonie) existiert also eine differenzierbare Umkehrfunktion G^{-1}. Damit haben wir, dass für jede Lösung $y : I' \to \mathbb{R}$ von Gleichung 11 mit $y(t_0) = x_0$ gilt: ref prüfen

$$y(t) = G^{-1}(F(t))\ (t \in I')$$

Bleibt die Existenz nachzuweisen:
Wir setzen einfach $G^{-1}(F(\cdot))$ in Gleichung 11 ein. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} G^{-1} F(t)) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} G^{-1}\right)(F(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} F(t) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} G^{-1}\right) \cdot (F(t)) \cdot f(t) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)(G^{-1}(F(*)))} \cdot f(t) \\
&= g\left(G^{-1}(F(t))\right) f(t)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung. *Satz 5.1 lässt sich wie folgt merken:*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} &= f(t) \cdot g(x(t)) | : g(x(t)) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{g(x(t))} \frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} &= f(t) | \cdot \text{„dt“} \\
\frac{dx}{g(x)} &= f(t)\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

und integriere anschließend von $x_0 \to x$ beziehungsweise $t_0 \to t$

5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bemerkung. *Bisher haben wir Differentialgleichungen stets in der Form*

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

notiert. Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir im Folgenden etwas verkürzt schreiben:

$$x' = f(t, x)$$

und damit genau die obige Differentialgleichung meinen.

Definition 5.2. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nennen wir die Differentialgleichung*

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \tag{12}$$

eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. Ist $b = 0$ so nennen wir Gleichung 12* homogen*, sonst* inhomogen*.*

Satz 5.2. Wir betrachten die Differentialgleichung 12 mit den Bezeichnungen von oben und $b = 0$.
Für $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt:
Es gibt genau eine Lösung von Gleichung 12, $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(t_0) = x_0$ und zwar:

$$y(t) = x_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Beweis. Offensichtlich gilt: $y(t_0) = x_0$. Weiter haben wir:

$$y'(t) = x_0 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(x)\,\mathrm{d}s\right) \cdot a(t)$$

Ergo: y ist in der Tat eine Lösung von Gleichung 12 mit $y(t_0) = x_0$.
Eindeutigkeit: Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{y} : I \to& \mathbb{R} \\ t \mapsto& \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(x)\,\mathrm{d}s\right) \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich:

$$\tilde{y}'(t) = -a(t) \cdot \tilde{y}(t).$$

Sei $z : I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung von Gleichung 12 mit $z(t_0) = x_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (z \cdot \tilde{y})'(t) =& z'(t) \cdot \tilde{y}(t) + z(t) \cdot \tilde{y}'(t) \\ =& a(t) \cdot z(t) \cdot \tilde{y}(t) - z(t) \cdot a(t) \cdot \tilde{y}(t) \\ =& 0 \end{aligned}$$

Ergo: $z \cdot \tilde{y} = konst. = c$
Ergo:

$$z(t) = c \cdot \frac{1}{\tilde{y}(t)} = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Da

$$x_0 = z(t_0) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,\mathrm{d}s\right) = c$$

folgt die Behauptung. ■

Beispiel 5.4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = \frac{-x}{t}, \text{ d.h. } a(t) = -\frac{1}{t}$$

Zum Anfangspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung gegeben durch:

$$\begin{aligned} y(t) =& x_0 \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\right) \\ =& x_0 \cdot \exp\left(-\ln|_{t_0}^{t}\right) \\ =& x_0 \cdot \exp\left(\ln(t_0) - \ln(t)\right) = x_0 \cdot \frac{t_0}{t} \end{aligned}$$

Satz 5.3 (Variation der Konstante)**.** Wir betrachten die Differentialgleichung 12 mit den obigen Bezeichnungen und Annahmen an a und b (diesmal mit $b \neq 0$). Dann gibt es für jedes $t_0 \in I$ und alle $x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung. $y \to I \to \mathbb{R}$ von Gleichung 12 mit $y(t_0) = x_0$ und zwar:

$$y(t) = y_0(t) \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} y_0(s)^{-1} b(s) \, \mathrm{d}s \right),$$

wobei:

$$y_0(t) = \exp \left(\int_{t_0}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s \right) \quad (t \in I)$$

Bemerkung. *Zur Bezeichnung „Variation der Konstante“: die obige Lösung sieht so aus wie die Lösung in Satz 5.2 nur, dass der Vorfaktor nicht mehr konstant ist, sondern von t abhängt, also „variiert“.*

Beweis. Es gilt:

$$y(t_0) = y_0(t_0) \cdot x_0 = x_0$$

sowie

$$\begin{aligned} y'(t) =& y_0'(t) \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} y_0(s)^{-1} \cdot b(s) \, \mathrm{d}s \right) + y_0(t) \cdot y_0(t)^{-1} \cdot b(t) \\ =& a(t) \cdot y_0(t) \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{y(s)} b(s) \, \mathrm{d}s \right) + b(t) \\ =& a(t) y(t) + b(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Damit ist: $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von Gleichung 12 mit $y(t_0) = x_0$. Eindeutigkeit: Sei $z : I \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung von Gleichung 12 mit $z(t_0) = x_0$. Dann gilt für $h : I \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = z(t) - y(t)$

$$\begin{aligned} h'(t) =& z'(t) - y'(t) = a(t)z(t) + b(t) - (a(t)y(t) + b(t)) \\ =& a(t)(z(t) - y(t)) = a(t) \cdot h(t) \end{aligned}$$

Ergo: $h : I \to \mathbb{R}$ ist Lösung von Gleichung 12 mit $b = 0$ mit Anfangswert $h(t_0) = z(t_0) - y(t_0) = 0$. Nach Satz 5.2 gilt:

$$h(t) = 0 \cdot \exp(\ldots) = 0.$$

Damit gilt: $z(t) - y(t)$ das heißt:

$$z(t) = y(t) \ (t \in I).$$

■

Beispiel 5.5. Wir betrachten: $x' = -\frac{x}{t} + t^3$ mit $x(1) = x_0$. Dann gilt:

$$y(t) = \frac{1}{t} \cdot \left(x_0 + \int_1^t s \cdot s^2 \, \mathrm{d}s \right) = \frac{1}{t} \left(x_0 + \left. \frac{s^5}{5} \right|_1^t \right) = \frac{1}{t} \left(x_0 + \frac{t^5}{5} - \frac{1}{5} \right)$$

5.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Es wird im Folgenden nützlich sein auch komplexwertige Funktionen ableiten zu können.

Definition 5.3. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir sagen, f ist* stetig *in $x_0 \in I$, wenn $Re(f)$ und $Im(f)$ stetig in x_0 sind. Wir sagen $f : I \to \mathbb{C}$ ist* stetig, *wenn f in jedem $x_0 \in I$ stetig ist. Wir sagen f ist in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn $Re(f)$ und $Im(f)$ in x_0 differenzierbar sind. Wir sagen, dass f differenzierbar ist, falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist.*
In diesem Falle ist die Ableitung von f gegeben durch $f'(x) = Re(f')(x) + i \cdot Im(f')(x)$

Bemerkung. *Aus der entsprechenden Aussage für reellwertige Funktionen sieht man sofort:*
Ist f differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f dort auch stetig.

Satz 5.4. Seien $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann gilt:

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- Falls $g(x) \neq 0$, so gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Beweis. Möglichkeit 1: genauso wie für reellwertige Funktionen.
Möglichkeit 2: mit Hilfe der Aussagen für reellwertige Funktionen. *Beispiel:* $(f + g)' = (Re(f) + Re(g) + i \cdot (Im(f) + Im(g))' = Re(f') + Re(g') + i \cdot (Im(f') + Im(g') = f' + g'$ ∎

Satz 5.5. Ist $f : I \to \mathbb{C}$ und $g : J \to \mathbb{R}$ und $g(J) \subseteq I$. Ist g in $x_0 \in J$ sowie f in $g(x_0)(\in I)$ differenzierbar, so ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Beweis. $f \circ g(x) = Re(f \circ g)(x) + i \cdot Im(f \circ g)(x)$ Also folgt mit der Kettenregel für reellwertige Funktionen:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x_0) =& Re(f')(g(x_0)) \cdot g'(x_0) + i(Im(f')g(x_0))g'(x_0)\\ =&(Re(f')(g(x_0)) + i(Im(f')g(x_0)) \cdot g'(x_0)\\ =&f'(g(x_0) \cdot g'(x_0)\end{aligned}$$

∎

Beispiel 5.6.

$$\begin{aligned}\exp(ix)' =&(\cos(x) + i\sin(x))' = \cos'(x) + i\sin'(x)\\ =&-\sin(x) + i\cos(x) = i(i\sin(x) + \cos(x)) = i\exp(ix)\\ \exp(if(x))' =&if'(x)\exp(if(x)) \text{ Mit Satz 5.5}\end{aligned}$$

Bemerkung. *Der Hauptsatz der Differential und Ingegralrechnung gilt damit auch für Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, das heißt:*
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar und gibt es

$$\begin{aligned} F : [a, b] \to& \mathbb{C} \text{ mit} \\ F'(x) =& f(x) \ (x \in [a, b]) \end{aligned}$$

so gilt:

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Beweis. folgt sofort aus der reellen Version. ■

Definition 5.4. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a_k : I \to \mathbb{R}$ $(k = 0, \dots, n-1)$ sowie $b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann heißt:*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t) \tag{13}$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung. *Ist $b = 0$ so nennen wir wir Gleichung 13* homogen, *sonst* inhomogen. *Wir nennen*

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0x = 0 \tag{14}$$

auch den homogenen Teil *von Gleichung13. Wir sagen: $y : J \to \mathbb{R}$ mit $J \subseteq I$ ist eine* Lösung *von* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Gleichung } 13 \\ \textit{Gleichung } 14 \end{array} \right.$*, falls:*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

Satz 5.6. Wir betrachten die Differentialgleichung 13, sowie 14 mit den gleichen Bezeichnungen wie oben.

- Sei L_h die Menge aller Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ von 14. Dann ist L_h ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$
- Sei L_i die Menge aller Lösungen $z : I \to \mathbb{R}$ von 13 . Dann gilt für ein beliebiges $z_0 \in L_i$:

$$L_i = z_0 + L_h = \{y : I \to \mathbb{R} | y = z_0 + f \text{für ein } f \in L_h\}\,.$$

Kennzeichnung als Einschub - Anfang

Bemerkung. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann bedeutet $\mathbb{K}^I = \{f : I \to \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen von I nach K. Auf $\mathbb{K}^I$ definieren wir:*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^I \times \mathbb{K}^I \to& \mathbb{K}^I \\ (f, g) \mapsto& f + g \end{aligned}$$

wobei $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sei $(x \in I)$, sowie:

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^I \to \mathbb{K}^I (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f$$

wobei $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ $(x \in I)$. Man kann leicht zeigen, dass $(\mathbb{K}^I, \cdot, +)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist. Neutrales Element bezüglich +:

$$\begin{aligned} O_{\mathbb{K}^I} : I &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Satz 5.7. Sei V ein Vektorraum und $\emptyset \neq U \subseteq V$. Dann gilt:

ohne Nummer

$$\begin{aligned} U \text{ U ist ein VR } \Leftrightarrow & \forall \lambda, \mu \in U : x + y \in U \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in U : \lambda \cdot x \in U & \end{aligned}$$

Beweis. Lineare Algebra ■

Beispiel 5.7. Sei $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) = \{f : I \to \mathbb{K} | f \text{ ist n-mal stetig differenzierbar}\}$ beziehungsweise $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) = \{f : I \to \mathbb{K} | f \text{ ist n-mal differenzierbar}\}$.
Aufgrund der Summenregel der Differenzial-Rechnung sieht man mit obigen Satz sofort:

$$\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) \text{ sind Vektorräume.}$$

Ist nun V ein Vektorraum, so sagen wir $x_1, \ldots, x_n \in V$ sind *linear unabhängig*, falls gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \ldots = \alpha_n = 0$$

Im konkreten Beispiel $\mathbb{K}^I$ heißt das:

Die Funktionen $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{K}$ sind linear unabhängig, wenn für alle $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ein $x \in I$ existiert mit:

$$\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) \neq 0$$

Eine linear unabhängige Menge von Elementen $x_1, \ldots, x_n \in V$ heißt *Basis* von V, falls für alle $x \in V$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ existiert mit:

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

Wir sagen V hat *Dimension n*, wenn es eine n-elementige Basis von V gibt.

Beweis. 1. Die Existenz von Lösungen, das heißt $L_h \neq \emptyset$, sowie die Dimensionalität von L_h folgen mit Hilfe des Satzes von Picard- Lindelöff, den wir nicht behandeln werden.
Wir zeigen: L_h ist ein Vektorraum.
Seien dazu $y_1, y_2 \in L_h$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &(y_1 + y_2)^{(n)} + a_{n-1}(\lambda)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)(y_1 + y_2) \\ =& y_1^{(n)} + a_{n-1}(t) y_1^{(n-1)} + \ldots \\ &+ a_0(t) y_1 + y_2^{(n)} + a_{(n-1)}(t) y_2^{(n-1)} + \ldots + a_0(t) y_2 = 0 \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} &(\lambda y_1)^{(n)} + a_{n-1}(t)(\lambda y_1)^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)(\lambda y_1) \\ =& \lambda (y_1^{(n)} + a_{n-1}(t) y_1^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_1) = 0 \end{aligned}$$

2. Sei z eine beliebige Lösung von 14. Dann gilt für jede Lösung y von 14:

$$\begin{aligned}&(z-y)^{(n)}+a_{n-1}(t)(z-y)^{(n-1)}+\ldots+a_0(t)(z-y)\\=&z^{(n)}+a_{n-1}(t)z^{(n-1)}+\ldots+a_0(t)z\\&-\left(y^{(n)}+a_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_0(t)y\right)\\=&0\end{aligned}$$

Ergo:

$$(z-y)\in L_h \Rightarrow y-z\in L_h|+z \Leftrightarrow y\in L_h+z$$

■

Definition 5.5. *Man nennt eine Basis des Vektorraums L_h auch ein* Fundamentalsystem *von 14*

Kennzeichnung Einschub - Ende

Definition 5.6. *Seien $a_0,\ldots a_{n-1}\in\mathbb{C}, I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall und $b: I\to\mathbb{C}$ stetig. Wir nennen:*

$$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_0x=\begin{cases}b(t), & (15a)\\ 0, & (15b)\end{cases}$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. *Wir sagen: $y: I\to\mathbb{C}$ ist eine Lösung von Gleichung 15a beziehungsweise 15b, falls:*

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0y=\begin{cases}b(t)\\0\end{cases}$$

Bemerkung. *Wir werden zunächst, um Rechenarbeit zu sparen, komplexwertige Lösungen zulassen und später aus diesen reelwertige konstruieren.*
Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lassen sich vereinfacht mit „Differentialpolynomen" beschreiben. Sei $\mathbb{C}[t]$ die Menge aller Polynome der Form:

$$P(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$$

Wobei $n\in\mathbb{N}_0$ und $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$. Ersetzt man in P formal die Unbekannte t durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}$, so erhält man einen Differentialoperator.

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)=a_0+a_1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}+\ldots+a_n\frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{dt^n}}$$

Das heißt $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)$ ist als Abbildung zu verstehen, die jedem n- und differenzierbaren$f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine Funktion wie folgt zuweist:

das n klingt falsch

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right): \mathcal{D}^n(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to&\mathbb{C}^{\mathbb{R}}\\ f\mapsto&\sum_{i=0}^{n}a_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}t\end{aligned}$$

Der Witz an dieser Sichtweise : Jede lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, lässt sich einfach als

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)x = \begin{cases} b(t) \\ 0 \end{cases}$$

schreiben, wobei $P \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom entsprechender Ordnung mit führendem Koeffizienten gleich 1 ist.

Beispiel 5.8. Die Differentialgleichung

$$x^{(3)} - 2x'' + x' - 2x = 0$$

lässt sich mit:

$$P(t) = t^3 - 2t^2 + t - 2$$

schreiben als:

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)x = 0$$

Proposition 5.1. *Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[t]$ und $P = P_1 + P_2, Q = P_1 \cdot P_2$. Dann gilt für jede ausreichend oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*

1. $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)f = P_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)f + P_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)f$
2. $Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) = P_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) \cdot P_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)$

Beweis. Wir machen Teil 1, Teil 2 läuft analog. Sei $n = max\{\deg P_1, \deg P_2\}$ das Maximum der Polynomgrade und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ n-mal differenzierbar. Dann gilt mit:

$$\begin{aligned}
P_1(t) &= \sum_{l=0}^{n_1} a_l \frac{\mathrm{d}^\mathrm{l}}{\mathrm{dt}^\mathrm{l}} f + \sum_{k=0}^{n_2} b_k \frac{\mathrm{d}^\mathrm{k}}{\mathrm{dt}^\mathrm{k}} f \\
&\overset{n_1 \leq n_2}{\underset{\text{o. E.}}{=\!=}} \sum_{k=0}^{n_2} a_k \frac{\mathrm{d}^\mathrm{k}}{\mathrm{dt}^\mathrm{k}} f + b_k \frac{\mathrm{d}^\mathrm{k}}{\mathrm{dt}^\mathrm{k}} f + \sum_{l=0}^{n_1} a_l \frac{\mathrm{d}^\mathrm{l}}{\mathrm{dt}^\mathrm{l}} f \\
&= \sum_{k=0}^{n_2} (a_k + b_k) \frac{\mathrm{d}^\mathrm{k}}{\mathrm{dt}^\mathrm{k}} f + \sum_{k=n_2+1}^{n_1} a_k \frac{\mathrm{d}^\mathrm{k}}{\mathrm{dt}^\mathrm{k}} f \\
&= P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) f
\end{aligned}$$

■

Bemerkung. *Die obige Proposition sagt, dass wir mit Diffentialpolynomen genauso rechnen können wie mit „monotonen“ Polynomen.*

Proposition 5.2. *Sei $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\exp(\lambda t) = P(\lambda) \cdot \exp(\lambda t)$$

Beweis. Betrachte:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\exp(\lambda t) =& \lambda \cdot \exp(\lambda t) \text{ und analog}\\ \frac{\mathrm{d^l}}{\mathrm{dt^l}}\exp(\lambda t) =& \lambda^l \cdot \exp(\lambda t)\end{aligned}$$

Damit gilt für $P(t) = \sum_{l=0}^{n} a_l t$:

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\exp(\lambda t) &= \sum_{l=0}^{n} a_l \frac{\mathrm{d^l}}{\mathrm{dt^l}}\exp(\lambda t)\\ &= \sum_{l=0}^{n} a_l \lambda^l \exp(\lambda t) = P(\lambda)\exp(\lambda t)\end{aligned}$$

∎

Satz 5.8. Sei

$$P(t) = \sum_{l=0}^{n} a_l t^l \in \mathbb{C}[t]$$

Angenommen P hat n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dann sind die Funktionen

$$\begin{aligned}\varphi_k :\mathbb{R} \to& \mathbb{C},\\ \varphi_k(t) =& \exp(\lambda_k t) \ (k = 1, \ldots, n)\end{aligned}$$

linear unabhängige Lösungen von $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)x = 0$.

Beweis. Tatsächlich gilt für alle $k = 1, \ldots, n$ dass:

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\varphi_k = P(\lambda_k)\cdot\exp(\lambda_k t) = 0$$

Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$
für $k = 1, \ldots, n$ mittels vollständiger Induktion.
$k = 1$:

$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 t) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$k \to k+1$ Angenommen

$$\alpha_i\varphi_i + \ldots + \varphi_{k+1}\alpha_{k+1} = 0$$

Zu zeigen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0$$

Wir wenden

$$(\lambda_{k+1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}})$$

auf obige Gleichung an. Also:

$$\begin{aligned}\left(\lambda_{k+1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\sum_{i=0}^{k+1}\alpha_i\varphi_i(t) &= \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\left(\lambda_{k+1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)\varphi_i(t)\\ &\overset{5.1}{=}\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\varphi_i(t)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\varphi_i(t) = 0\end{aligned}$$

Da laut Induktionsvoraussetzung $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ linear unabhängig sind, muss gelten:

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1) - \alpha_2(\lambda_{k+1} - \lambda_1) = \ldots = \alpha_k(\lambda_l + 1 - \lambda_k) = 0$$

Da $(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \neq 0$ $(i \neq k)$, folgt

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$$

Da $\varphi_k(t) = \exp(\lambda_k t) \neq 0$, muss auch λ_{k+1} gelten und die lineare Unabhängigkeit folgt. ■

Beispiel 5.9. Die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)f =&0 \text{ mit}\\ P(t) =&t^3 - 2t^2 + t - 2 = (t-i)(t+i)(t-2)\end{aligned}$$

hat die linear Unabhängige Lösung

$$\varphi_1(t) = \exp(it), \varphi_2(t) = \exp(-it), \varphi_3 = \exp(2t)$$

Angenommen sämtliche Koeffizienten der Differentialgleichung sind reell. Wie erhalten wir aus Satz 5.8 ein reellwertiges Fundamentalsystem?
Also sei $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ mit paarweise verschiedenen Nullstellen.

$$\begin{aligned}\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda_k} &\in \mathbb{C}\\ \eta_1, \ldots, \eta_l &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dann betrachten wir für $i = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned}\Psi_{i,1} =&\frac{1}{2}\left(\exp(\lambda_i \cdot t) + \exp\left(\overline{\lambda_i} \cdot t\right)\right)\\ =&\frac{1}{2}exp(Re(\lambda) \cdot t) \cdot \cos(Im(\lambda) \cdot t)\\ \Psi_{i,2} =&\frac{1}{2i}\left(\exp(\lambda_i \cdot t) - \exp\left(\overline{\lambda_i} \cdot t\right)\right)\\ =&\exp(Re(\lambda) \cdot t) \cdot \sin(Im(\lambda_i) \cdot t)\end{aligned}$$

Und für $i = 1, \ldots, l$:

$$\Psi_i = \exp(\eta \cdot t)$$

Da

$$\Psi_{i,l} + i\Psi_{i,2} = \exp(\lambda \cdot t)$$

und

$$\Psi_{i,1} - i\Psi_{i,2} = \exp\left(\overline{\lambda_i} t\right)$$

sind $\Psi_{1,1}, \Psi_{1,2}, \ldots, \Psi_{k,1}, \Psi_{k,2}, \Psi_1, \ldots, \Psi_i$ ein (reelles) Fundamentalsystem von $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) f = 0$.

Wir werden uns bei der Behandlung inhomogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf spezielle Inhomogenitäten der Form

$$b(t) = q(t) \cdot \exp(\mu t) \quad (\mu \in \mathbb{C})$$

beschränken, wobei $q \in \mathbb{C}[t]$

Definition 5.7. *Wir sagen die Differentialgleichung* $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) x = q(t)\exp(\mu t)$ *ist in* Resonanz, *falls* $P(\mu) = 0$.

Satz 5.9. Sei $P(t) = \sum_{l=0}^{n} a_l t^l \in \mathbb{C}[t]$ mit $a_n = 1$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $P(\mu) \neq 0$. Sei weiter $q \in \mathbb{C}[t]$. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) x = q(t)\exp(\mu t)$$

eine spezielle Lösung der Gestalt

$$y(t) = r(t)\exp(\mu t)\,,$$

wobei $r \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(r) = \deg(q)$ (also beide Polynome den gleichen Grad haben).

Bemerkung. *Mit Satz 5.9 und Satz 5.1 kennen wir also den kompletten Lösungsraum, das heißt, die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung, sobald wir das Polynom r kennen.*

ref prüfen eigentliche nr war 10

ref prüfen

Beweis. Beachte:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} t^m \exp(\mu t) &= \left(m t^{m-1} + \mu t^m\right) \cdot \exp(\mu t)\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} t^m \exp(\mu t) &= \left(m(m-1)t^{m-2} + 2m\mu t^{m-1} + \mu^2 t^m\right)\exp(\mu t)\\
&\vdots\\
\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{dt}^l} t^m \exp(\mu t) &= \left(\mu^l t^m + s_l(t)\right)\exp(\mu t) \qquad (16)
\end{aligned}$$

■

Beispiel 5.10.

$$\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dt}^3} - 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2} - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} + 2\right) x(t) = 2\sin(t)$$

Wir betrachten

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) y_1(t) = i\exp(-it) \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right) y_2(t) = i\exp(it) \tag{19}$$

Mit Satz 5.9(beziehungsweise dessen Beweis), sehen wir, dass ref prüfen

$$y_1(t) = \frac{i}{P(-i)}\exp(-it) \text{ und } y_2(t) = \frac{i}{P(i)}\exp(it)$$

Lösungen von Gleichung 18 und Gleichung 19 sind. Mit

$$\begin{aligned} P(-i) =& (-i)^3 - 2(-i)^2 - 2(-i) + 2 \\ =& i + 2 + 2i + 2 = 4 + 3i \\ \text{und } P(i) =& \overline{P(-i)} = 4 - 3i \text{ ergibt sich} \\ P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)(y_1(t) - y_2(t)) =& -i\exp(it) + i\exp(-it) \\ =& -i(\exp(it) - \exp(-it)) = 2\sin t \end{aligned}$$

Eine spezielle reellwertige Lösung ist damit gegeben durch:

$$y(t) = \frac{8}{25}\sin(t) + \frac{6}{25}cos(t)$$

Beispiel 5.11.

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dt}^3}x(t) - x(t) = t = t\exp(0\cdot t) \\ &\text{Mit } P(t) = t^3 - t \text{ gilt } P(0) \neq 0 \end{aligned}$$

Nach Satz 5.9 (mit $\mu = 0$ und $q(t) = t$) existiert eine spezielle Lösung der Form $y(t) = a + bt$. Eingesetzt in die Differentialgleichung liefert das:

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{dt}^3}(a + bt) - (a + bt) = -a - bt = t$$

Das heißt $a = 0$ und $b = -1$. Damit ist $y(t) = -t$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)x = t$.

6 Folgen und Reihen von Funktionen

Im Folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $D \subseteq K$ eine nicht leere Menge, dann bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^D$ die Menge aller Funktionen von D nach $\mathbb{K}$.
Eine *Folge* von Funktionen in $\mathbb{K}^D$ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{K}^D$, wobei wir das Bild von $n \in \mathbb{N}$ mit f_n bezeichnen.

Definition 6.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$. Wir sagen, (f_n)* konvergiert Punktweise *gegen $f : D \to \mathbb{K}$, falls für alle $x \in D$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Analog sagen wir $\sum_{n\geq 1} f_n$ konvergiert punktweise *gegen $f : D \to \mathbb{K}$, falls:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \ (x \in D)$$

Bemerkung. *In obiger Definition wird insbesondere voraus gesetzt, dass die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

- *Der Grenzwert f einer punktweise konvergenten Funktionenfolge ist stets eindeutig, da für jedes $x \in D$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ eindeutig ist*

Fundamentales Problem im Kontext der Konvergenz von Funktionenfolgen: „Hat Grenzwert f die „gleichen“ Eigenschaften wie die Folgenglieder f_n?“
Im Spezialfall: Ist der punktweise Grenzwert f einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen automatisch stetig?
Kurz gesagt: Sei f der punktweise Grenzwert von f_n, gilt dann

$$\lim_{x\to y}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to y} f_n(x) = f(y)?$$

Die Antwort ist: ***Nein!****.*

Beispiel 6.1. Sei

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ f_n(x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1-\frac{1}{n}) \\ nx - (n-1) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Behauptung: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Dann sei $x \in [0,1]$. Dann existiert ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $1 - \frac{1}{n_x} > x$ und entsprechend $1 - y_n > x$ für alle $n \geq n_x$. Das heißt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Andererseits gilt $f_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Ergo: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.
Fazit: Um aus der Stetigkeit der Folgenglieder auf die Stetigkeit des Grenzwerts schließen zu können, braucht es eine Verschärfung des Konvergenzbegriffs. Ähnlich sieht es mit anderen Eigenschaften, wie Differenzierbarkeit beziehungsweise Integrierbarkeit aus.

Definition 6.2 (Gleichmäßige Konvergenz)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen*
$f_n : D \to \mathbb{K}$. Wir sagen (f_n) konvergiert gleichmäßig (glm.) *gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$, wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\ \forall n \geq n_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Analog sagen wir $\sum_{k\geq 1} f_k$ konvergiert gleichmäßig *gegen $f : D \to \mathbb{K}$ wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\ \forall n \geq n_\epsilon : \left|\sum_{l=1}^{n} f_l(x) - f(x)\right| < \epsilon$$

Bemerkung. *Offensichtlich impliziert gleichmäßige Konvergenz stets punktweise Konvergenz*

Satz 6.1. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_{n_\epsilon} - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \in D$. Da f_{n_ϵ} stetig ist, gibt es für jedes $x_0 \in D$ ein $\delta > 0$, so dass für $y \in D$ mit $|y - x_0| < \delta$ gilt: $|f_{n_\epsilon}(y) - f_{n_\epsilon}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ Dann gilt für alle $y \in D$ mit $|y - x_0| < \delta$:

$$|f(x_0) - f(y)| \leq |f_i(x_i) - f_{n_\epsilon}(x_0| + |f_{n_\epsilon}(x_0) - f_{n_\epsilon}(y)| + |f_{n_\epsilon}(y) - f(y)| \leq \epsilon$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ■

Bemerkung.

- *Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f, so nennen wir f auch den* gleichmäßigen Limes / Grenzwert *von (f_n). Analog reden wir vom* Punktweisen Limes / Grenzwert.

- *Der letzte Satz sagt, dass wir bei gleichmäßiger Konvergenz gewisse Grenzwerte vertauschen können, das heißt:*

  $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to y} f_n(x) = \lim\limits_{x\to y}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1*

  ref prüfen

- *Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ um den Punkt x_0. Setzen wir*

  $$f_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(x - x_0)^n$$

so ist f per Definition der punktweise Limes von (f_N). Tatsächlich konvergieren die Funktionen $f_N|_{B_r(x_0)}$ für beliebiges $r \in (0, R)$ gleichmäßig gegen $f|_{B_r(x_0)}$ Denn:

$$\begin{aligned}
\forall x \in B_{r(x_0)} : |f(x) - f_N(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n \right| \\
&= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right| \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| (x - x_0)^n \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty
\end{aligned}$$

wobei die absolute Konvergenz von Potenzreichen innerhalb des Konvergenzradius ausgenutzt wurde.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert also N_ϵ, so dass für alle $N \geq N_\epsilon$ gilt:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon.$$

Ergo: Wir haben gezeigt, dass für $N \geq N_\epsilon$ gilt:

$$|f(x) - f_N(x)| < \epsilon \ (x \in B_{r(x_0)})$$

*Das zeigt insbesondere mit Satz **??**, dass Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius stetig sind.* ref prüfen

Satz 6.2. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$. Dann gilt:

(f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ \forall n, m \geq n_\epsilon \ \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \tag{20}$$

Beweis. $\Rightarrow$ Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f_n gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{K}$ konvergiert, gibt es n_ϵ, so dass für alle $n \geq n_\epsilon$ gilt:

$$\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Dann gilt für $n, m \geq n_\epsilon$:

$$\forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Das heißt Gleichung 20 ist erfüllt.
$\Leftarrow$ Da für alle $x \in D(f_n(x))$ nach Gleichung 20 eine Cauchy-Folge ist, konvergiert $(f_n(x))$. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
f : D &\to \mathbb{K} \\
x &\mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(x)
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert nach 20 ein n_ϵ, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \tag{21}$$

solange $n, m \geq n_\epsilon$. Damit gilt für alle $n \geq n_\epsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x) \right| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)|$$

Mit Gleichung 21 folgt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \ (x \in D)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt die gleichmäßige Konvergenz und damit die Behauptung. ■

Satz 6.3. Sei (f_n) eine Funktionenfolge von auf $[a,b]$-integrierbaren Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Wir betrachten im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt stets aus der separaten Betrachtung von Real- und Imaginärteil.
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert per Voraussetzung ein $n_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\forall x \in D : \forall n \geq n_\epsilon : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Es gilt also:

$$f_{n_\epsilon} - \epsilon \leq f(x) \leq f_{n_\epsilon} + \epsilon \ (x \in [a,b])$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_{n_\epsilon} + \epsilon \,\mathrm{d}x &= \int_a^b f_{n_\epsilon} \,\mathrm{d}x + \epsilon \cdot (b-a) \\
&\leq \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x + \epsilon \cdot (b-a)
\end{aligned}$$

Ergo:

$$\left| \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x - \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x \right| \leq 2 \cdot \epsilon(b-a)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, folgt $\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}x$, das heißt $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Weiter gilt:

$$\left| \int_a^b f - f_n \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \,\mathrm{d}x \leq \epsilon \cdot (a-b)$$

Für $n \to \infty$ folgt die Behauptung. ■

Korollar 6.1. Ist $f_n \in \mathcal{R}_{[a,b]} n \in \mathbb{N}_0$ und konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, so ist $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ und

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}x$$

Bemerkung. *Wir können also gliedweise integrieren.*

Satz 6.4. Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$). Weiter gelte, dass (f_n) punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert und (f_n') gleichmäßig gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = g(x) \ (x \in [a,b])$$

Beweis. Da f_n' gleichmäßig gegen g konvergiert ist g stetig (Satz 6.1). Daher gilt nach Satz 4.1 dass $G(x) = \int_a^b g \,\mathrm{d}t$ differenzierbar ist und als Ableitung g besitzt. Weiterhin gilt mit Satz 6.3:

$$\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n' \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n' \,\mathrm{d}t = G(x)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt außerdem:

$$\int_a^x f_n' \,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a)$$

Ergo:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' \,\mathrm{d}t + \lim_{n\to\infty} f_n(a) = G(x) + f(a)$$

Damit ist f differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} G(x) = g(x)$$

■

Bemerkung. *Das zeigt insbesondere, dass wir Potenzreihen gliedweise differenzieren können.*

6.1 Fourier-Reihen

Fourier-Reihen sind spezielle Reihen, die insbesondere für die Approximation periodischer Funktionen geeignet sind.

Definition 6.3. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt* p-periodisch*, beziehungsweise* periodisch mit Periode p*, wobei $p > 0$ sei, wenn gilt:*

$$f(x+p) = f(x)$$

Beispiel 6.2. $\sin, \cos$ sind 2π-periodisch.

Bemerkung.

- *Selbstverständlich gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$: $f(x + np) = f(x)$.*
- *Wir werden uns im Folgenden aus Notationsgründen auf 1-periodische Funktionen beschränken.*
  Beachte: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ p-periodisch, so ist

  $$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \hat{f} &= f(px + 1) \end{aligned}$$

  1-periodisch:

  $$\begin{aligned} \tilde{f}(x + 1) &= f(px + 1) \\ &= f(px + p) = f(px) = \hat{f} \end{aligned}$$

  Das heißt: Jede p-periodische Funktion lässt sich einfach in eine 1-periodische Funktion überführen und umgekehrt.
  ***Achtung**: In der Literatur beschränkt man sich auch gerne auf 2π- periodische Funktionen.*

Definition 6.4. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-periodisch und Riemann-integrierbar über* $[0, 1]$. *Dann heißen die Zahlen*

$$\hat{f}(n) := \int_0^1 f(x) \cdot \exp(-2\pi \cdot i \cdot n \cdot x) \, \mathrm{d}x$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ die Fourier-Koeffizienten *von f. Weiter heißt die Reihe*

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot \exp(2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot x),$$

das heißt die Folge der Partialsummen,

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \exp(2 \cdot \pi \cdot i \cdot n \cdot x)$$

mit $N \in \mathbb{N}$ Fourier-Reihe *von f.*

Satz nicht eindeutig von Weiter heißt die Reihe ... Fourier-Reihe von f

Bemerkung.

- *Die Fourier-Reihe lässt sich zunächst für jede 1-periodische, integrierbare Funktion definieren. Ähnlich wie bei Taylorreihen ist aber a priori nicht klar, ob die Fourier-Reihe konvergiert, in welchem Sinne sie konvergiert und wenn sie konvergiert, ob sie gegen die original Funktion f konvergiert. Man kann zeigen: Die Fourier-Reihe konvergiert immer gegen f im sogenannten „quadratischen Mittel", ein Begriff den wir hier nicht behandeln werden.*

Konsultation zur Prüfung : Freitag 20.07.2018, ab $9^{\underline{00}}$ Uhr, SR 384 CZ 3

Bemerkung.

- *Ist f eine p-periodische Funktion, so ist die Fourier-Reihe F von f definiert als $\tilde{F}(\frac{x}{p})$, wobei $\tilde{F}$ die Fourier-Reihe der (1-periodischen) Funktion $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ mit $\tilde{f}(x) = f(px)$ ist.*
  Das heißt:
$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) \exp\left(2\pi i k \frac{x}{p}\right)$$
  wobei
$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_0^1 \tilde{f}(x) \cdot \exp(-2\pi i k x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(p\cdot x)\exp(-2\pi i k x) \\ &\overset{t=px}{=\!=} \frac{1}{p}\int_0^p f(t)\exp\left(\frac{-2\pi}{p} i k t\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- *Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 1-periodisch, so gilt:*
$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_0^1 f(x)\exp(-2\pi i k x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\overline{\exp(2\pi i k x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \overline{\int_0^1 f(x)\exp(2\pi i k x)\,\mathrm{d}x} = \overline{\hat{f}(-k)}\end{aligned}$$
  Das heißt:
$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\exp(2\pi i k x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\exp(2\pi i k x) + \hat{f}(-k)\exp(-2\pi i k x) \\ &\underset{\text{reell}}{\overset{f \text{ ist}}{=\!=}} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)\exp(2\pi i k x) + \overline{\hat{f}(k)\exp(2\pi i k x)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2\cdot Re(\hat{f}(k)\cdot\exp(2\pi i k x)) \qquad (22)\end{aligned}$$
  <u>*Spezialfall: $f(x) = f(-x)$, das heißt: f ist gerade. Dann gilt:*</u>

  Hier sollte ein Fehler in der VL sein. $\hat{f}(0)$ gibt es nicht doppelt.
$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_0^1 f(x)\exp(-\pi i k x)\,\mathrm{d}x \\ &\underset{-t+1=x}{\overset{-x+1=t}{=\!=}} (-1)\cdot\int_1^0 f(-t+1)\exp(-2\pi i k(-t+1))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(-t+1)\exp(2\pi i k t - 2\pi i k)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\exp(2\pi i k t)\,\mathrm{d}t \\ &= \hat{f}(-k) \qquad = \overline{\hat{f}(k)}\end{aligned}$$

Ergo: $\hat{f}(k) = \hat{f}(-k) \in \mathbb{R}$
Mit Gleichung 22 folgt:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\hat{f}(k)\cos 2\pi kx$$

Analog kann man zeigen: Gilt $f(-x) = -f(x)$ *(das heißt* f *ist ungerade), dann lässt sich* $F(x)$ *schreiben als*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(2\pi kx)$$

Proposition 6.1. *Sei* $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cdot \exp(2\pi ikx)$ *wobei* $\gamma_k \in \mathbb{K}$ *und die trigonometrische Reihe auf der rechten Seite gleichmäßig konvergiert. Dann gilt:*

$$f \text{ ist 1-periodisch und Riemann-integrierbar über } [0,1] \text{ und } \hat{f}(k) = \gamma_k$$

Beweis. Sei $f_n = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \exp(2\pi ikx)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_n(x+1) &= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \exp(2\pi ik(x+1)) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k \exp(2\pi ikx) \cdot \exp(2\pi ik) \\ &= f_n(x) \end{aligned}$$

Das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f_n 1-periodisch. Damit gilt:

$$f(x+1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+1) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Das heißt f ist 1-periodisch. Mit Satz 6.4 aus dem vorherigen Abschnitt folgt ref prüfen
$f \in \mathcal{R}_{[0,1]}$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_0^1 f(x)\exp(-2\pi ikx)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} (\gamma_k \exp(2\pi ilx))\exp(-2\pi ikx)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^1 \gamma_l \exp(2\pi ilx) \cdot (-2\pi ikx)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \gamma_l \cdot \int_0^1 \exp(2\pi i(l-k)x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } l \neq k \\ 1 & \text{für } l = k \end{cases} \end{aligned}$$

∎

Satz 6.5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 1-periodische Funktion, die stückweise stetig differenzierbar ist, das heißt es existiert eine Partition

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

von $[0,1]$, so dass

$$f|_{[t_{i-1},t_i]} \text{ für alle } i = 1,\ldots,n$$

stetig differenzierbar ist.
Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gleichmäßig gegen f.

- Ohne Beweis -

7 Grundbegriffe in metrischen und normierten Räumen

Ziel des Kapitels: Vereinheitlichung und Verallgemeinerung bekannter Konvergenz- und Abstandsbegriffe

Definition 7.1. *Sei X eine Menge. Eine* Metrik *auf X ist eine Abbildung auf $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit:*

M_1 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M_2 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in X$ *(Dreiecksungleichung)*

M_3 $d(x, y) = d(y, x)$ *für* $x, y \in X$ *(Symmetrie)*

Das Paar (X, d) heißt metrischer Raum. *Oftmals sagt man einfach X ist metrischer Raum, sofern die entsprechende Metrik aus dem Kontext hervorgeht.*

Beispiel 7.1.

1. Auf $\mathbb{K}$ definiert $d(x, y) = |x - y|$ eine Metrik.

2. Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir die l_1-Metrik durch:

$$d_1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

   d_1 ist eine Metrik, denn M_1 und M_3 sind trivial. M_2 folgt mit:
   Seien $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + |z_i - y_i| = d(x, z) + d(z, y)$$

3. Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir für $p \in \mathbb{N}$ die l_p- Metrik:

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

   M_1 und M_3 sind offensichtlich. Die Dreiecksungleichung macht in diesem Falle durchaus Arbeit. Stichwort: Minkowski-Ungleichung.

4. Auf $\mathbb{K}^n$ definieren wir die l_∞-Metrik:

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\}$$

   M_1 und M_3 sind wieder einfach zu sehen. M_2 folgt aus:
   Seien $x, y, z \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) &= \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\} \\ &\leq \max\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\} \\ &\leq \max\{|x_i - z_i| \mid i = 1, \dots, n\} + \max\{|z_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\} \\ &= d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y) \end{aligned}$$

Bemerkung. *Man kann zeigen, dass* $d_\infty(x,y) = \lim\limits_{p\to\infty} d_p(x,y)$

Beispiel 7.2.

5. Sei X eine beliebige nicht leere Menge. Dann definiert

$$d_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die sogenannte *diskrete Metrik* auf X. Die Eigenschaften M_1 und M_3 sind wieder einfach zu sehen.
Zu M_2: Ohne Einschränkung: Sei $x \neq y$ und $z \in X$ beliebig. Ist $z = x$ bzw. $z = y$, so gilt:

$$1 = d_D(x,y) \leq d_D(x,z) + d_D(z,y) = 1$$

Ist $z \notin \{x,y\}$, so gilt:

$$1 = d_D(x,y) \leq d_D(x,z) + d_d(z,y) = 2$$

6. Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und

$$B(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$$

Wir definieren:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

(das verallgemeinert Beispiel 4)

7. X-beliebige Menge auf $B(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$ definieren wir:

$$d_\infty = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

M_1 und M_3 sind weiter einfach. M_3 folgt aus:

$$\begin{aligned} d_\infty(f,g) &= \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{y\in X} |h(y) - g(y)| \\ &= d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g) \text{ für alle } f,g,h \in B(X) \end{aligned}$$

8. $X = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$- die Menge aller stetigen Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{K}$. Auch auf $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ definieren wir $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

9. X-Personen auf Facebook. Mögliches Abstandsmaß: Kürzeste Verbindung zwischen Person A und Person B eindeutig über Freundschaftsrelation.

10. Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$, so ist auch $(Y, d|_{Y\times Y})$ ein metrischer Raum, den wir üblicherweise einfach mit (Y,d) bezeichnen.

Bemerkung.

- *Mit Ausnahme von Beispiel 5, 9, 10 gehören die obigen Beispiele zur Klasse sogenannter normierter Räume beziehungsweise Skalarprodukträume, auf denen noch mehr Struktur vorliegt als „nur“ eine Metrik.*

Definition 7.2. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) in X heißt* konvergent gegen $x \in X$, *wenn gilt:*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon : d(x_n, x) < \epsilon$$

Wir schreiben: $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *beziehungsweise* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *und nennen x den* Grenzwert (GW) *von (x_n).*

Bemerkung.

- *Man vergleiche die obige Definition mit der Definition konvergenter Zahlenfolgen*
- *Man mache sich klar, dass gilt:*

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Longrightarrow d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Lemma 7.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und (x_n) eine konvergente Folge in X. Dann ist der Grenzwert von (x_n) eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien x, y Grenzwerte der Folge (x_n). Dann gilt:

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y, y_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Da $d(x, x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $d(y, x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt:

$$d(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) \leq \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) + d(x_n, y) = 0$$

Mit **??**, aus der Definition der Metrik, folgt $x = y$. ∎

Beispiel 7.3. Was heißt Konvergenz einer Folge (f_n) gegen f in $B(X)$ bezüglich der Metrik d_∞?
Per Definition gilt:

$$\begin{aligned}
& f_n \xrightarrow[n\to\infty]{d_\infty} f \\
\Longleftrightarrow & \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon : d_\infty(f_n, f) \leq \epsilon \\
\Longleftrightarrow & \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon : \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \\
\Longleftrightarrow & \forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\epsilon\ \forall x \in X : \big|f_(x) - f(x)\big| \leq \epsilon \\
\Longleftrightarrow & f_n \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f
\end{aligned}$$

Im Folgenden lernen wir eine wichtige Teilklasse von metrischen Räumen kennen, sogenannte normierten Räume, insbesondere die, die eine Vektorraum-Struktur besitzen.

Definition 7.3. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$$

heißt Norm (auf V)*, wenn für beliebige $v, w \in V$ sowie $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:*

N_1 $\|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0$

N_2 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

N_3 $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

Das Paar $(v, \|\cdot\|)$ heißt normierter Raum.

Definition 7.4 (Induzierte Metrik)**.** *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist:*

gleichzeitig auch Proposition

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|} : V \times V \to & [0, \infty) \\ (v, w) \mapsto & \|v - w\| \end{aligned}$$

eine Metrik auf V. Wir nennen $d_{\|\cdot\|}$ die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik.

Beweis. Wir haben nur die Punkte M_1, M_2, M_3 von Definition 7.1 nachzuprüfen.

1. $d_{\|\cdot\|}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. Seien $x, y, z \in V$, dann gilt:

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(x, y) = & \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ \leq & \|x - z\| + \|z - x\| \\ = & d_{\|\cdot\|}(x, z) + d_{\|\cdot\|}(z, y) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(x, y) = & \|x - y\| = \|-1 \cdot (y - x)\| \\ = & |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d_{\|\cdot\|}(y, x) \end{aligned}$$

■

Beispiel 7.4.

- Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir für $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : V \to & [0, \infty) \\ x \mapsto & \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

  die sogenannte l_p-Norm. Man sieht sofort: die von $\|\cdot\|_p$ induzierte Metrik ist genau die l_p-Metrik

- Auf $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir für $p \in \mathbb{N}$ die l_∞ Norm

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V \to& [0,\infty) \\ x \mapsto& \max_{i=1,\dots,n} |x_i| \,, \end{aligned}$$

  welche die l_∞-Metrik induziert.

- Auf $B(X)$, sowie $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ ist $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ eine Norm, die sogenannte Supremumsnorm.

Proposition 7.1 (Umgekehrte Dreiecksungleichung)**.** *Sei (X,d) metrischer Raum. Dann gilt:*

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z) \ (x,y,z \in X)$$

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann gilt:

$$|\|y\| - \|z\|| \leq \|y - z\| \ (y,z \in V)$$

Beweis. Wegen M2 gilt:

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \text{ und außerdem} \tag{23}$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{24}$$

Ziehen wir $d(x,z)$ von 23 und $d(x,y)$ von 24 ab, so folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d(y,z) \geq& d(x,y) - d(x,z) \\ d(y,z) \geq& d(x,z) - d(x,y) \end{aligned}$$

Da für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\lambda| = \max\{-\lambda, \lambda\}$$

erhalten wir

$$d(y,z) \geq |d(x,y) - d(x,z)| \,.$$

Das zeigt den ersten Teil der Aussage. Zum zweiten Teil:
Da für alle $x \in V$ gilt: $d_{\|\cdot\|}(x,0) = \|x\|$, folgt die Behauptung indem wir d durch $d_{\|\cdot\|}$ ersetzen und $x = 0$ einsetzen. ■