

# 1 Differentiation

**Definition 1** Sei  $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D(f)$  ein Punkt, um den ein offenes Intervall  $B_\epsilon(x)$  (für geeignetes  $\epsilon > 0$ ) komplett in  $D(f)$  enthalten ist ( $B_\epsilon(x) \subseteq D(f)$ ). Dann heißt  $f$  an der Stelle  $x_0$  **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0)$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Wir meinen mit  $f'(x_0)$  die **Ableitung** (seltener *Differentialquotient*) von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Ist  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem  $x \in D(f)$  differenzierbar, dann heißt  $f$  schlechthin **differenzierbar**. Etwas irreführend wird auch die Abbildung

$$f' : D(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

als Ableitung von  $f$  bezeichnet.

**Satz 1** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt ein  $c \in \mathbb{R}$  und  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{x - x_0} = 0$$

2. Es gibt ein  $\tilde{c} \in \mathbb{R}$  und  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = f(x_0) + \tilde{c}(x - x_0) + u(x)(x - x_0)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

3.  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar

Gelten die obigen Aussagen, so gilt

$$f''(x_0) = c = \tilde{c}$$

D.h. insbesondere  $c$  und  $\tilde{c}$  sind eindeutig bestimmt

## Bemerkung 1

- Der springende Punkt in 1 ist Gleichung 1. Ohne Gleichung 1 kann man sich ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}$  wählen und setzt

$$\phi(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)$$

- Vergisst man die Funktion  $\phi$ , versteht man mit der Geradengleichung

$$x \mapsto f(x_0) + c(x - x_0)$$

Das ist per Definition die Gleichung der Tangente an  $f$  in  $x_0$

Beweis:

1  $\leftrightarrow$  2 Man setze einfach  $u(x) = \frac{\phi(x)}{x-x_0}$  und  $\tilde{c} = c$   
(in  $x = x_0$  setze man  $u(x_0) = 0$ )

1  $\rightarrow$  2 ZZ  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} c + \frac{\phi(x)}{x - x_0} = c$$

3  $\rightarrow$  1 Wir setzten  $c = f'(x_0)$  und

$$\phi(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

offensichtlich gilt dann:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \phi(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{\phi(x)}{x - x_0} \right| &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

**Satz 2** Es sind äquivalent:  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x)$   
mit:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{|x - x_0|} = 0$
2.  $f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \phi(x) + u(x) \cdot (x - x_0)$   
mit:  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$
3. Der Grenzwert  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert

**Satz 3** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ . Dann ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

**Beweis:**

$$\text{ZZ ist: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\text{Äquivalent dazu: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

$$\text{Nun gilt: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{x - x_0}{x - x_0}} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

**Bemerkung 2**

- Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen falsch!  
Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind.  
(Beispiel: Weierhaus-Fkt:  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \cos(b_n \pi x)$  mit  $a_n \in (0, 1)$  und  $a_n b_n > 1$ )
- Jede nicht stetige Funktion ist nicht differenzierbar

**Satz 4** Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x \in I$  differenzierbar,  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann sind  $f + g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$  (sofern  $g(x) \neq 0$ ) in  $x$  differenzierbar.

Es gilt:

1.  $(f + g)' = f'(x) + g'(x)$  (Summenregel)
2.  $(f \cdot g)' = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  (Produktregel)
3.  $(\frac{f}{g})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$  (Quotientenregel)

**Beweis:**

$$\begin{aligned} 1. \quad (f + g)'(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) + g(y) - (f(x) + g(x))}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} = f'(x) + g'(x) \\ 2. \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(x)g(x)}{y - x} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y) \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} f(y) \lim_{y \rightarrow x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x} + g(x) \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ &\stackrel{\text{Satz 3}}{=} f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}}{y-x} &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{y-x} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{g(y)g(x)} \frac{f(y)g(x) - f(x)g(y)}{y-x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)g(x) - f(y)g(y) + f(y)g(y) - f(x)g(y)}{y-x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \lim_{y \rightarrow x} f(y) \cdot \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + g(y) \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left( \lim_{y \rightarrow x} f(y) \frac{g(x)-g(y)}{y-x} + \lim_{y \rightarrow x} g(y) \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right) \\
&= \frac{1}{g^2(x)} (f(x) \cdot (-g'(x)) + g(x)f'(x)) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

### Beispiel 1

- $f(x) = c \in \mathbb{R} (x \in \mathbb{R})$   
 $\rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{x \rightarrow y} \frac{c-c}{y-x} = 0$
- $f(x) = x (x \in \mathbb{R})$   
 $f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{y-x}{y-x} = 1$
- $f(x) = x^n, (x \in \mathbb{R})$  wobei  $n \in \mathbb{N}$   
 $f'(x) = nx^{n-1}$  per Induktion:  
 $n = 1$  Stichpunkt 2 ✓  
 $n \rightarrow n+1$ : Sei also  $f(x) = x^{n+1}$ . Das gibt mit der Produktregel:  
 $f'(x) = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot (x^n)' = 1 \cdot xn + x \cdot n \cdot x^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$

Damit sind alle Polynome differenzierbar und für  $p(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$  gilt (Summenregel):

$$p'(x) = \sum_{l=0}^n l \cdot a_l \cdot x^{l-1} = \sum_{l=1}^n l \cdot a_l x^{l-1}$$

- Seien  $P_1$  und  $P_2$  Polynome.  
Dann nennt man die Abbildung  
 $Q : \mathbb{R} \setminus \{x | P_2(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$  eine rationale Funktion.  
Mit obiger sehen wir: rationale Funktionen sind auf dem kompletten Definitionsbereich differenzierbar.
- Die Funktion  $| \cdot | \cdot x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$  ist nicht in 0 differenzierbar.

Denn:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \searrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} &= \lim_{y \searrow 0} \frac{y - 0}{y - 0} = 1 \\
\lim_{y \nearrow 0} \frac{|y| - |0|}{y - 0} &= \lim_{y \nearrow 0} \frac{-y - 0}{y - 0} = -1
\end{aligned}$$

**Satz 5 (Kettenregel)** Seien  $I_f$  und  $I_g$  Intervalle,  $x_0 \in I_f$  und  $f : I_f \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  differenzierbar und  $g : I_g \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $f(x_0)$  differenzierbar und  $f(I_f) \subseteq I_g$ . Dann gilt:

$$\frac{dg \circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dx}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

**Beweis:** Da  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, gilt für alle  $x \in I_f$ :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot (f'(x_0) + u(x))$$

( Wobei  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$  )

Analog gilt für alle  $y \in I_g$ :

$$g(y) - g(f(x_0)) = (y - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(y)),$$

wobei  $\lim_{y \rightarrow f(x_0)} v(y) = 0$

Damit haben wir für alle  $x \in I_f$ :

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (f(x) - f(x_0)) \cdot (g'(f(x_0)) + v(f(x))) = (x - x_0)(f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x)))$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + u(x))(g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f'(x_0) + u(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} (g'(f(x_0)) + v(f(x))) \\ &= (f'(x_0) + 0)(g'(f(x_0)) + 0) = f'(x_0)g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

**Definition 6** Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt  $f$  **stetig differenzierbar**. Wir definieren weiterhin induktiv die  $k$ -te Ableitung (für  $k \in \mathbb{N}$ ) durch:

$$f^{(0)} := f$$

$$f^{(k+1)} := f^{(k+1)'}$$

sofern die Ableitungen definiert sind.

Ist  $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  definiert, so heißt  $f$  **beliebig oft** bzw. **unendlich oft differenzierbar**.

**Bemerkung 3** Wir haben bereits gesehen: Polynome sind beliebig oft differenzierbar.

**Satz 7** Sei  $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine Potenzreihe vom Konvergenzradius  $R > 0$ . Dann ist  $p : x \mapsto p(x)$  auf ganz  $(x_0 - R, x_0 + R)$  differenzierbar mit  $p'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$ . Insbesondere ist  $p'$  auch wieder eine Potenzreihe (die man durch gliedweises differenzieren erhält) mit Konvergenzradius  $R$ .

**Bemerkung 4**

1. Damit erhalten wir:

$$\exp'(x) = \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \right)' = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{x^l}{(l+1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = \exp(x)$$

2. Damit sind Potenzreihen  $\infty$  oft differenzierbar

**Beweis** Wir zeigen zunächst die Aussage über den Konvergenzradius. Beachte, dass:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k \right) (x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

Ergo, für den Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ergibt sich nach Cauchy-Hadamard:

$$R_{\phi'} = \left( \limsup {}^{k+1}\sqrt{(k+1) a_{k+1}} \right)^{-1} = R \left( da \sqrt[k]{k} \rightarrow 1 \right)$$

Damit ist  $p'$  wohldefiniert.

Wir zeigen nun, dass  $p'$  tatsächlich die Ableitung von  $p$  darstellt. OBdA sei  $x_0 = 0$ .

Dann gilt für  $y \in (-R, R)$ :

$$p(x) - p(y) - p'(y)(x - y) = \sum_{k=\sigma}^{\infty} a_k (x^k - y^k) - (k+1) a_{k+1} y^k (x - y)$$

Wir setzen  $\Delta(x, y) = \sum_{n=\sigma}^{\infty} a_n \frac{x^n - y^n}{x - y} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^{n-1}$ .

Man sieht leicht (Teleskopsumme), dass

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k & n \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also folgt:

$$\Delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k - n y^{n-1} \right]$$

Für  $n = 1$  ist  $[...] = 0$  und für  $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
[...] &= \sum_{k=0}^{n-2} x^{n-1-k} y^k - (n-1)y^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-2} kx^{n-1-k} y^k - (n-1)y^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)x^{n-1-k} y^k - \sum_{k=0}^{n-1} kx^{n-1-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kx^{n-k} y^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} kx^{n-1-k} y^k \\
&= (x-y) \sum_{k=1}^{n-1} kx^{n-1-k} y^{k-1}
\end{aligned}$$

Sein nun  $|y| < r < R$  und  $|x| \leq r$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\Delta(x, y)| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| \sum_{k=1}^{n-1} k |x|^{n-1-k} |y|^{k-1} \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |x-y| r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k \leq |a_n| r^{n-2} n^2 |x-y|
\end{aligned}$$

Nach Cauchy-Hadamard hat diese Reihe  $q(z) = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 z^n$  den Konvergenzradius  $R$ , weshalb  $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} n^2 = \frac{1}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| n^2 r^n$  konvergiert. Damit folgt aber  $\lim_{x \rightarrow y} \Delta(x, y) = 0$

**Proposition 1** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton und differenzierbar in  $p \in (a, b)$  mit  $f'(p) \neq 0$ . Dann ist die Umkehrfunktion  $f^{-1} : f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $q = f(p)$  und es gilt:

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}$$

**Beweis** Da  $f$  streng monoton ist, ist  $f^{-1}$  stetig.

Insbesondere gilt  $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(q)$  für  $y \rightarrow q$ .

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow q} \frac{1}{y - q} (f^{-1}(y) - f^{-1}(q)) &= \lim_{y \rightarrow q} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))} \\
&= \left( \lim_{y \rightarrow q} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(q))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(q)} \right)^{-1} \\
&= (f'(f^{-1}(q)))^{-1} = \frac{1}{f'(f^{-1}(q))}
\end{aligned}$$

**Beispiel 2**

- k-te Wurzel  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{k}}$  ist differenzierbar mit  $g'(y) = \frac{1}{k}y^{\frac{1}{k}-1}$   
**Denn**  $g$  ist Umkehrfunktion zu  $f(x) = x^k$   
 Damit gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{k(\sqrt[k]{y})^{k-1}} = \frac{1}{k}y^{\frac{1}{k}-1}$$

- Logarithmus  $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \ln y$ . Es ist  $\ln'(y) = \frac{1}{y}$ , **denn:**

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}$$

**Bemerkung 5** Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $x > 0$  ist  $x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x))$

**Anwendung:** Die Funktion  $(\circ)^\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^\alpha$  hat die Ableitung  $((\circ)^\alpha)' : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$  **denn**

$$\begin{aligned} (x^\alpha)' &= \exp'(\alpha \ln(x)) = \exp(\alpha \ln x) \frac{\alpha}{x} \\ &= \alpha \exp(\alpha \ln x) \exp(-\ln x) = \alpha \exp((\alpha - 1) \ln x) \\ &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Es folgen die bekannten Rechenregeln  $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$  und  $x^\alpha \cdot y^\alpha = (xy)^\alpha$

## 2 Differenzierbare Funktionen auf Intervallen

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall

**Definition 7** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen,  $f$  hat in  $x_0 \in I$  ein **lokales Maximum** (**lokales Minimum**), falls ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\forall x \in B_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

Gilt

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

für alle  $x \in I$ , so sagen wir, dass  $x_0$  ein **globales Maximum** (**globales Minimum**) ist. Sind die entsprechenden Ungleichungen strikt, so reden wir von **strikten Maxima** (**strikte Minima**). Maximum und Minimum werden unter dem Begriff **Extremum** zusammengefasst.

**Satz 8** Seif  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Hat  $f$  ein lokales Maximum (lokales Minimum) in  $x_0 \in (a, b)$  und existiert  $f'(x_0)$ , so gilt  $f'(x_0) = 0$ .

**Beweis** Wir betrachten den Fall des Maximums. Es gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Wegen differenzierbarkeit in  $x_0$  folgt Gleichung 1 = Gleichung 2  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$



**Satz 9 (verallgemeinerter Mittelwertsatz)** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf ganz  $(a, b)$  differenzierbar. Dann existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit:

$$(g(b) - g(a)) f'(\xi) = (f(b) - f(a)) g'(\xi)$$

**Beweis:** Wir betrachten  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto (g(b) - g(a)) f(t) - (f(b) - f(a)) g(t)$$

Offensichtlich (nach Summenregel) ist  $h$  differenzierbar auf  $(a, b)$ . Es gilt:

$$h'(t) = (g(b) - g(a)) f'(t) - (f(b) - f(a)) g'(t)$$

Wir zeigen: es existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $h'(\xi) = 0$ . Damit folgt dann die Aussage.

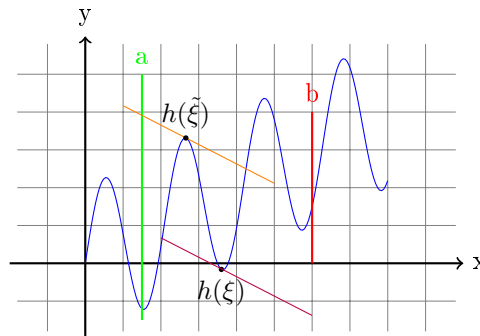
**Beachte:**

$$\begin{aligned} h(a) &= (g(b) - g(a)) f(a) - (f(b) - f(a)) g(a) \\ &= g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) \\ &= (g(b) - g(a)) f(b) - (f(b) - f(a)) g(b) \\ &= h(b) \end{aligned}$$

**Fall 1:**  $h = \text{const}$  Dann gilt trivialerweise  $h' = 0$  und wir sind fertig.

**Fall 2:**  $h \neq \text{const}$  Offensichtlich ist  $h$  stetig auf dem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ . Damit besitzt  $h$  ein globales Maximum und ein globales Minimum. Ohne Einschränkung existiert ein  $\tilde{\xi} \in (a, b)$  mit  $h(\tilde{\xi}) > h(a)$ , sonst betrachte  $-h$  statt  $h$ .

Also existiert ein  $\xi \in (a, b)$  mit  $h(\xi) \geq h(x)$  ( $x \in [a, b]$ ). Mit anderen Worten:  $\xi$  ist auch ein globales Maximum und daher auch ein lokales Maximum. Mit Satz 8 folgt:  $h'(\xi) = 0$



**Satz 10 (Mittelwertsatz(MWS))** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gibt es ein  $\xi \in (a, b)$  mit

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

**Bemerkung:** Es ist oft wichtig, dass  $f$  nur auf  $(a, b)$  differenzierbar sein muss.

**Beweis:** Das folgt aus Satz 9 mit  $g = \text{id}_{[a, b]}$ , d.h.  $g(x) = x$  ( $x \in [a, b]$ ).

**Satz 11** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gilt:

- a)  $f = \text{const} \Leftrightarrow f'(x) = 0 (x \in (a, b))$
- b)  $f$  ist monoton wachsend  $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 (x \in (a, b))$
- c)  $f$  ist streng monoton wachsend  $\Leftrightarrow f'(x) > 0 (x \in (a, b))$
- d)  $f$  ist monoton fallend  $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 (x \in (a, b))$
- e)  $f$  ist streng monoton fallend  $\Leftrightarrow f'(x) < 0 (x \in (a, b))$

**Beweis:** a) folgt aus b) und c).

Weiterhin folgt d) beziehungsweise e) aus b) beziehungsweise c).

Sei  $y > x \in [a, b]$ . Sei  $f|_{[x, y]}$  die Einschränkung von  $f$  auf  $[x, y]$ , das heißt:

$$f|_{[x, y]} : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto f(z)$$

Offensichtlich erfüllt  $f|_{[x, y]}$  die Bedingungen des MWS.

Es existiert ein  $\xi \in (x, y)$  mit  $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi)$

**Fall b)**  $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(\xi) \geq 0$

$$\hookrightarrow f(y) \geq f(x)$$

**Fall c)**  $f(y) - f(x) > 0$

$$\hookrightarrow f(y) > f(x)$$

**Beweis der Richtung  $\Leftarrow$  in Teil b):** Ist  $f'(x) \geq 0$  so gilt

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \nearrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

Da  $f$  monoton wachsend ist, gilt für  $y > x$ :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Folglich gilt:

$$\lim_{y \searrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Äquivalent für  $\lim_{y \nearrow x}$

**Korollar 1** Seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar auf  $(a, b)$  mit  $f'(x) = g'(x)$  für  $x \in (a, b)$ . Dann gilt  $f - g = \text{const}$

**Beweis:** Es gilt:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Damit folgt die Aussage mit Satz 11.

**Satz 12** Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar ( $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall). Gibt es  $\xi \in I$  mit  $f'(\xi) = 0$  und  $f''(\xi) < 0$  ( $f''(\xi) > 0$ ), so nimmt  $f$  an der Stelle  $\xi$  ein striktes lokales Maximum (Minimum) an.

**Beweis:** Wir betrachten nur den Fall  $f''(\xi) < 0$ . Für den Fall  $f''(\xi) > 0$  betrachte man  $-f$ .

Per Definition haben wir also:

$$f''(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} < 0$$

$$r := \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}$$

D.h. es existiert für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit

$$\left| \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} - r \right| < \epsilon$$

Für  $\epsilon := \frac{r}{2}$  gilt daher:

$$\left| \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} - r \right| < \left| \frac{r}{2} \right|$$

für ein entsprechend gewähltes  $\delta > 0$ . Insbesondere gilt also:

$$\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} < 0$$

für alle  $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ .

D.h. für  $x < \xi$  gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) < 0$$

und für  $x > \xi$  gilt:

$$f'(\xi) - f'(x) > 0$$

Ergo:  $f'$  ist streng monoton fallend auf  $(\xi - \delta, \xi]$  und streng monoton wachsend auf  $[\xi, \xi + \delta)$

Da  $f'(\xi) = 0$  folgt, dass  $f'(x) > 0$  für  $x \in (\xi - \delta, \xi]$  und  $f'(x) < 0$  für  $x \in [\xi, \xi + \delta)$ .

Mit Satz 11 folgt:

$f|_{(\xi - \delta, \xi]}$  ist streng monoton wachsend und  
 $f|_{[\xi, \xi + \delta)}$  ist streng monoton fallend.

**Satz 13 (Regel von l'Hospital)** Seien  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  differenzierbar und  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Weiter gelte:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Wobei  $-\infty \leq A \leq \infty$  sei und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  sowie  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ .

Dann gilt:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ . Die analoge Aussage gilt auch für  $x \rightarrow b$ .

**Bemerkung:**

- Wir verwenden hier den erweiterten Grenzwertbegriff, d.h.  $\pm\infty$  sind als Grenzwerte zulässig.

- Zwei wesentliche Voraussetzungen:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  existiert!
2. ebenso ist essentiell, dass  $f, g \rightarrow \frac{\circ}{\pm\infty}$

- Gegebenenfalls lässt sich l'Hospital iterieren:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0$$

- Man kann l'Hospital auch verwenden um Ausdrücke der Form  $0 \cdot \infty$  zu behandeln, indem wir diese in die Form

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\frac{1}{\infty}}$$

bzw.

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$$

umrechnen.

**Beweis:** Wir beschränken uns auf den Fall  $x \rightarrow a$  ( $x \rightarrow b$  läuft analog) und zeigen zunächst folgende Aussage:

**Behauptung:** Sei  $A \in [-\infty, \infty)$ .

Dann existiert für jedes  $q > A$  ein  $c > a$  mit  $\frac{f(x)}{g(x)} < q$  ( $x \in (a, c)$ ).

**Beweis der Behauptung:**

Da  $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} A$  existiert ein  $c' > a$  mit:  $\frac{f'(x)}{g'(x)} < r$  für ein beliebiges  $r \in (A, q)$  und  $x \in (a, c')$ .

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad (1)$$

für ein geeignetes  $t$  zwischen  $x$  und  $y$ .

Für  $a < x < y < c'$  gilt daher:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r \quad (2)$$

Fall 1:  $f, g \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ . Nach Gleichung (2) gilt für  $x \rightarrow a$

$$\frac{-f(y)}{-g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} < r < q (y \in (a, c'))$$

Fall 2:  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$  Multipliziere (1) mit  $\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$ .

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \\ \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \end{aligned}$$

Für  $x \rightarrow a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq r < q$$

Es muss also ein  $c > a$  existieren mit:  $\frac{f(x)}{g(x)} < r$  ( $x \in (a, c)$ )

Analog kann man zeigen:

**Behauptung'** : Sei  $A \in (-\infty, \infty]$ . Dann existiert für jedes  $p < A$  ein  $d > a$ , so dass  $p < \frac{f(x)}{g(x)}$  ( $x \in (a, d)$ )

Für  $A = +\infty$  folgt die Aussage aus der letzten Behauptung, für  $A = -\infty$  aus der ersten Behauptung.

Für  $A \in \mathbb{R}$  argumentieren wir wie folgt:

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Nach der ersten Behauptung existiert  $c > a$ , so dass  $\frac{f(x)}{g(x)} < A + \epsilon$  ( $x \in (a, c)$ ). Nach der zweiten Behauptung existiert  $d > a$  mit:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A - \epsilon \quad (x \in (a, d))$$

Für  $x \in (a, \min\{c, d\})$  gilt daher

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B_\epsilon(A)$$

**Beispiel 3**  $f(x) = 1, g(x) = x + 7$

Dann gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{7}$

aber:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{1} = 0$

#### Beispiel 4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0 \text{ für } \alpha > 0\end{aligned}$$

**Definition 8** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen, dass  $f$  in  $a$  (*rechtsseitig*) *differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Analog sagen wir, dass  $f$  in  $b$  (*linksseitig*) *differenzierbar* ist, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existiert. Wir sagen,  $f$  ist auf  $[a, b]$  *differenzierbar*, wenn  $f$  in  $(a, b)$  differenzierbar und in  $a$  rechtsseitig sowie in  $b$  linksseitig differenzierbar ist. Entsprechend verallgemeinern sich die Begriffe  $n$ -Mal (stetig) differenzierbar etc...

**Definition 9** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -Mal differenzierbar. Dann heißt

$$\begin{aligned}P_{n,\alpha} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{l=0}^n \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^l\end{aligned}$$

das  $n$ -te Taylorpolynom, wobei  $\alpha \in I$  sei, von  $f$  an der Stelle  $\alpha$ .

**Bemerkung:** Offensichtlich gilt:  $f(\alpha) = P_{n,\alpha}(\alpha)$ . Weiter gilt:

$$f'(\alpha) = P_{n,\alpha}'(\alpha) = \left( \sum_{l=0}^n l \cdot \frac{f^{(l)}(\alpha)}{l!} (x - \alpha)^{l-1} \right)$$

und analog:

$$\begin{aligned}f^{(l)}(\alpha) &= P_{n,\alpha}^{(l)}(\alpha) = P_{n,\alpha}^{(l)}(\alpha) \\ (l &= 1, \dots, n)\end{aligned}$$

**Satz 14 (Satz von Taylor ( mit Lagrange-Restglied))** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f$   $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar (auf  $[a, b]$ ) und  $n$ -mal differenzierbar auf  $(a, b)$ . Seien  $\alpha \neq \beta$  in  $[a, b]$  gegeben. Dann existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ , so dass gilt:

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n$$

**Beweis:** Wähle  $M \in \mathbb{R}$  mit

$$f(\beta) = P_{n-1,\alpha}(\beta) + M(\beta - \alpha)^n$$

Man beachte, dass die  $n$ -te Ableitung der rechten Seite gegeben ist durch

$$P_{n-1,\alpha}^{(n)}(t) + n! \cdot M \text{ für } t \in [a, b]$$

Daher ist zu zeigen: Es existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  mit:

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot M$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - P_{n-1,\alpha}(t) - M(t - \alpha)^n \text{ für } t \in [a, b] \\ h(\beta) &= f(\beta) - P_{n-1,\alpha}(\beta) - M(\beta - \alpha)^n = 0 \\ h(\alpha) &= f(\alpha) - P_{n-1,\alpha}(\alpha) - M(\alpha - \alpha)^n = 0 \text{ siehe obige Bemerkung} \\ h'(\alpha) &= f'(\alpha) - P_{n-1,\alpha}'(\alpha) - n \cdot M(\alpha - \alpha)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Man sieht analog:

$$h^{(l)}(\alpha) = 0 \text{ für } l = 1, \dots, n-1$$

Damit existiert aufgrund des Mittelwertsatzes ein  $x_1$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $h'(x_1) = 0$ . Analog gibt es zwischen  $\alpha$  und  $x_1$  ein  $x_2$  mit  $h''(x_2) = 0$ . Man findet also  $x_1, \dots, x_{n-1}$  mit  $h^{(l)}(x_l) = 0$  ( $l = 1, \dots, n-1$ ). Insbesondere existiert ein  $x$  zwischen  $\alpha$  und  $x_{n-1}$  (also zwischen  $\alpha$  und  $\beta$ ) mit  $h^{(n)}(x) = 0$ . Damit gilt

$$0 = h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_{n-1,\alpha}^{(n)}(x) - M \cdot n! \cdot (x - \alpha)^0$$

und daher  $f^{(n)}(x) = M \cdot n!$

**Bemerkung:** Die obige Darstellung des Restgliedes ist die sogenannte Lagrange'sche Darstellung

**Beispiel 5** Sei  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Offensichtlich:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$P_{1,0}(t) = 1 + \frac{1}{2}t$$

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}t^2$$

für ein  $x$  zwischen 0 und  $t$ .

Für  $t > 0$  ergibt sich damit:

$$|\sqrt{1+t} - P_{1,0}(t)| < \frac{t^2}{8}$$

**Korollar 2** Ist  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -Mal differenzierbar und  $g^{(n)} = 0$ , so ist  $g$  ein Polynom höchstens  $(n-1)$ -ten Grades

**Korollar 3** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und  $\alpha \in I$  mit  $f^{(l)}(\alpha) = 0$  für alle  $l = 1, \dots, n-1$  und  $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$ .

Dann gilt:

- ist  $n$  ungerade, so ist  $\alpha$  keine Extremstelle
- ist  $n$  gerade, so ist  $\alpha$  eine Extremstelle. Genauso gilt: Ist  $f^{(n)}(\alpha) < 0$ , so ist  $\alpha$  eine Maximalstelle. Ist  $f^{(n)}(\alpha) > 0$ , so ist  $\alpha$  Minimalstelle.

**Beweis:** Wir betrachten nur den Fall  $n$  gerade und  $f^{(n)}(\alpha) > 0$ .

Nach dem Satz von Taylor gilt für alle  $x \in I$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,\alpha}(x) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-\alpha)^{n+1} \\ &= f(\alpha) + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-\alpha)^{n+1} \\ &= f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \left( f^{(n)}(\alpha) + \left( \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)} (x-\alpha) \right) \right) \end{aligned}$$

für ein  $t$  zwischen  $x$  und  $\alpha$ . Für  $x$  hinreichend nah an  $\alpha$  erhalten wir

$$f^{(n)}(\alpha) + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1} (x-\alpha)$$

Ergo:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \cdot r(x)$$

Da ist also  $f(x) > f(\alpha)$  für  $x$  hinreichend nah an  $\alpha$ .

Sprich:  $\alpha$  ist strikte lokale Minimalstelle