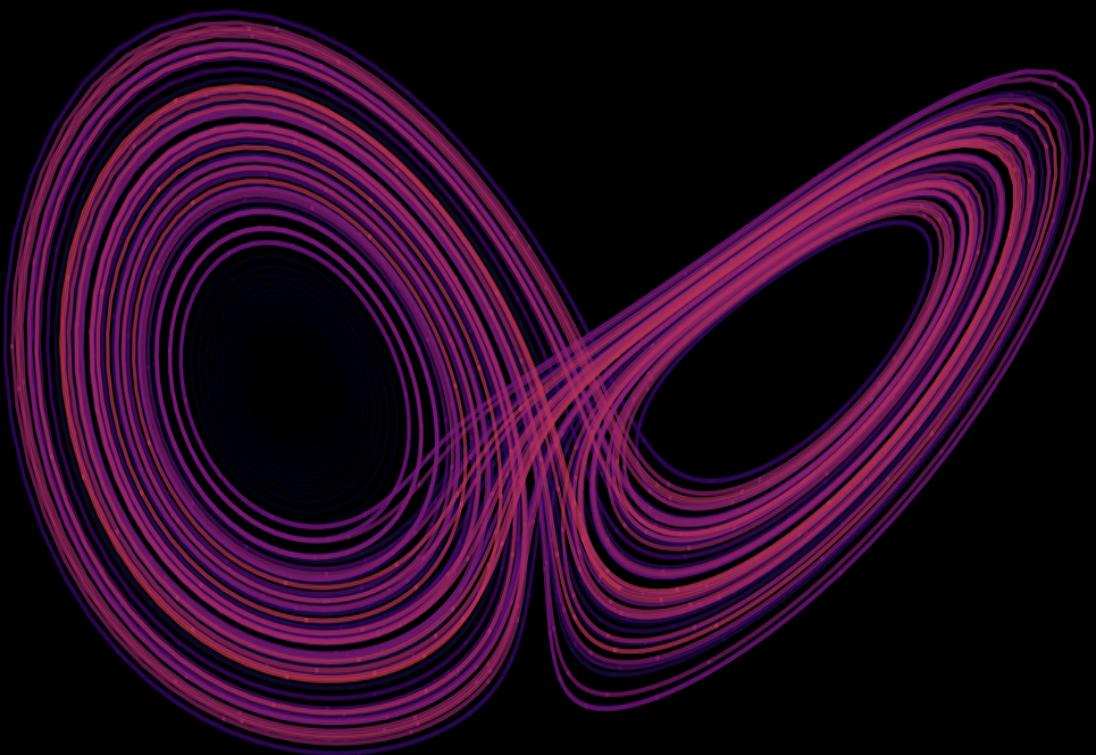


Introduzione alla Meccanica Classica



Corso di Laurea Triennale in Fisica

Indice

1 Leggi del Moto di Newton	9
1.1 Meccanica Newtoniana - Particella singola	9
1.1.1 Momento Angolare e Momento della Forza	10
1.1.2 Leggi di Conservazione	10
1.1.3 Energia	10
1.2 Meccanica Newtoniana - Sistemi di Particelle	11
1.2.1 Momenti per un sistema di particelle	13
1.2.2 Energia per un sistema di particelle	13
2 Sistemi Dinamici	15
2.1 Equazioni Differenziali Ordinarie	15
2.1.1 Risoluzione di una EDO per quadrature	17
2.1.2 EDO del primo ordine a variabili separabili	19
2.2 Oscillatori Armonici	19
2.2.1 Oscillatore Armonico Semplice	19
2.2.2 Oscillatore Armonico Smorzato	20
2.2.3 Oscillatore armonico forzato	21
2.3 Sistemi Newtoniani conservativi nel piano	23
2.3.1 Sistema Dinamico nel piano	24
2.3.2 Piano delle Fasi ad una dimensione	26
2.4 Studio Qualitativo di un Sistema Dinamico Newtoniano Conservativo	27
2.4.1 Rette Separatrici	31
2.4.2 Piccole Oscillazioni	32
2.4.3 Tempo di Percorrenza di una Traiettoria	32
2.4.4 Approssimazione di un periodo	35

INDICE

2.4.5	Diagramma di Biforcazione e dipendenza dei punti di equilibrio da un parametro	36
2.5	Stabilità Dei Sistemi Dinamici	38
2.5.1	Stabilità per Sistemi Lineari nel piano	39
2.5.2	Diagramma di Biforcazione generalizzato	44
2.5.3	Linearizzazione di un Sistema Dinamico Nel Piano . .	46
2.5.4	Metodi di Lyapunov per la stabilità dei sistemi dinamici nel piano	47
2.6	Equazioni di Lotka-Volterra	49
2.6.1	Analisi del sistema dinamico	50
2.6.2	Leggi di Lotka-Volterra	52
3	Il Formalismo Lagrangiano	55
3.1	Introduzione	55
3.2	Vincoli Posizionali	58
3.2.1	Gradi di Libertà	58
3.2.2	Cambi di Coordinate	59
3.2.3	Velocità generalizzate (o virtuali)	60
3.3	Equazioni di Eulero-Lagrange come equazioni di bilancio energetico	63
3.4	L'energia del sistema come costante del moto sotto l'ipotesi di vincolo liscio (Integrale di Jacobi)	66
3.5	Vincoli Anolonomi	66
3.6	Vincoli dipendenti dal tempo e velocità virtuali	69
3.7	Equazioni di E-L dalle equazioni di Newton	71
3.8	Lagrangiana ridotta	73
3.9	Punti di equilibrio di un sistema per 1 g.d.l.	74
3.9.1	Stabilità dei punti di equilibrio per 1 g.d.l.	75
3.9.2	Linearizzazione del sistema attorno a un punto di equilibrio stabile per 1 g.d.l.	75
3.10	Punti di equilibrio di un sistema per N g.d.l.	77
3.10.1	Matrice dell'energia cinetica	77
3.10.2	Linearizzazione del sistema attorno ad un punto di equilibrio stabile per N g.d.l.	78

INDICE

3.10.3	Frequenze proprie e modi normali di oscillazione	80
3.10.4	Stabilità delle soluzioni stazionarie per un sistema Lagrangiano	81
3.10.5	Il principio di minima azione	83
3.11	Equazioni di E-L nel formalismo variazionale	84
3.12	Teorema di Noether e Simmetrie	86
3.13	Applicazioni	90
3.13.1	Pendolo Sferico	90
3.13.2	Potenziali generalizzati	94
3.13.3	Particella carica in un campo elettromagnetico	95
4	Il Moto del Corpo Rigido	99
4.1	Introduzione	99
4.2	Cinematica	100
4.2.1	Olonomia del vincolo di rigidità	100
4.2.2	Spazio delle configurazioni	100
4.2.3	Velocità Angolare	102
4.2.4	Energia Cinetica	103
4.2.5	Tensore d'inerzia	106
4.2.6	Energia cinetica generalizzata	110
4.3	Momento Angolare	111
4.4	Equazioni di Eulero Per Il Corpo Rigido Libero	112
4.4.1	Ellissoide di Poinsot	114
4.5	Angoli di Eulero	115
4.5.1	Velocità Angolare	118
4.6	Trottola di Lagrange	118
4.6.1	Studio dell'energia del sistema	119
4.6.2	Studio qualitativo del moto	121
5	La Meccanica Hamiltoniana	123
5.1	Introduzione	123
5.2	Formalismo Hamiltoniano	123
5.2.1	Equazioni di Hamilton	125
5.2.2	Esempi	126

INDICE

5.2.3	Leggi di conservazione	129
5.2.4	Momenti coniugati rispetto alla trasformazione di Legendre	129
5.2.5	Formulazione variazionale delle equazioni di Hamilton	130
5.3	Parentesi di Poisson	131
5.4	Trasformazioni Canoniche	133
5.4.1	Funzioni generatrici per la trasformazioni canoniche	136
5.4.2	Cambi di coordinate	138
5.4.3	Jacobiano e condizione di canonicità	138
5.4.4	Funzione generatrice di I specie	140
5.4.5	Funzione generatrice del II tipo	141
5.4.6	Funzione generatrice del III tipo	142
5.4.7	Funzione generatrice del IV tipo	143
5.5	Trasformazioni di Contatto	144
5.6	Hamiltoniane esplicitamente dipendenti dal tempo ed estensione dello spazio delle fasi	146
5.7	Risoluzione di un problema di Cauchy con l'utilizzo delle trasformazioni canoniche e le equazioni di Hamilton	149
5.8	Trasformazioni Canoniche Infinitesime	152
5.8.1	Condizione di canonicità per le trasformazioni infinitesime	152
5.8.2	Famiglia di trasformazioni canoniche ad un parametro	154
5.8.3	Hamiltoniana di una trasformazione infinitesima	154
5.9	Teorema di Noether per la meccanica Hamiltoniana	155
5.10	Teoria di Hamilton-Jacobi	156
5.10.1	Equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione principale di Hamilton	157
5.10.2	Significato fisico della funzione principale di Hamilton	159
5.10.3	Funzione caratteristica di Hamilton	159
5.11	Separazione delle variabili per l'equazione di Hamilton-Jacobi	162
5.11.1	Separazione delle variabili per un potenziale centrale nel piano	163
5.12	Problema ristretto dei tre corpi	165
5.12.1	Problema dei due corpi	165

INDICE

5.12.2 Problema dei tre corpi ristretto	166
---	-----

INDICE

CAPITOLO 1

Leggi del Moto di Newton

1.1 Meccanica Newtoniana - Particella singola

Una particella (o punto materiale) è un costrutto che in fisica viene usato per descrivere la dinamica di un oggetto da un punto di vista macroscopico trascurandone la forma e tenendo in considerazione solo massa m . Nonostante questa semplificazione non permetta di descrivere il comportamento dei corpi estesi è sufficiente per delineare un comportamento macroscopico del corpo considerato.

Il moto di una particella di massa m e posizione \mathbf{r} è governato dalla *seconda legge di Newton* $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ o in modo più preciso

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.1)$$

dove \mathbf{F} è una forza che in generale dipende sia da posizione che velocità (come per esempio le forze d'attrito viscoso) e \mathbf{p} è la quantità di moto (o momento). L'equazione (1.1) è una forma più generale della seconda legge di Newton in quanto tiene anche conto del fatto che $m(t)$ in alcuni tipi di problemi. Inoltre definisce un EDO del primo ordine, e dunque date le condizioni iniziali di $\mathbf{r}(t)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t)$ per $t=t_0$ possiamo risolvere l'equazione per quadrature determinando $\mathbf{r}(t)$ per ogni tempo t .

Uno dei problemi della descrizione della dinamica fornita dalle leggi di Newton è data dal fatto che l'equazione (1.1) dipende dal sistema di riferi-

mento rispetto a cui è definita e assume tale forma solo se il sistema è inerziale. Un sistema di riferimento viene definito inerziale se questo si muove di moto uniforme rispetto ad un sistema fisso in cui è presente l'osservatore.

1.1.1 Momento Angolare e Momento della Forza

Definiamo il *momento angolare* \mathbf{L} e *momento della forza* $\boldsymbol{\tau}$ di una particella le grandezze

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad , \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (1.2)$$

notare che a differenza della quantità di moto, sia \mathbf{L} che $\boldsymbol{\tau}$ dipendono da dove si è scelta l'origine del sistema di riferimento. Il momento angolare ricopre lo stesso ruolo della quantità di moto per sistemi in rotazione e infatti si lega al momento della forza mediante la relazione

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (1.3)$$

definendo la seconda legge di Newton rispetto ai sistemi in rotazione.

1.1.2 Leggi di Conservazione

Dalle equazioni (1.1) e (1.3) discendono due importanti leggi di conservazione

- Se $\mathbf{F} = 0$ allora \mathbf{p} è costante durante il moto.
- Se $\boldsymbol{\tau} = 0$ allora \mathbf{L} è costante durante il moto.

Si noti che $\boldsymbol{\tau} = 0$ non implica necessariamente che $\mathbf{F} = 0$, ma si potrebbe anche avere che la forza è ortogonale al braccio delle forza \mathbf{r} . Tale risultato è la definizione di *forza centrale*. Per quanto queste leggi conservazione risultino essere triviali, si vedrà come nella formulazione Lagrangiana tali risultati risultino come proprietà di simmetria dello spazio.

1.1.3 Energia

Definiamo *energia cinetica* T la quantità

$$T = \frac{1}{2}m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (1.4)$$

CAPITOLO 1. LEGGI DEL MOTO DI NEWTON

La variazione di energia cinetica del tempo è esprimibile come

$$\frac{dT}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (1.5)$$

Se la particella di muove dalla posizione \mathbf{r}_1 al tempo t_1 alla posizione \mathbf{r}_2 al tempo t_2 si ha che la variazione dell'energia cinetica è data da

$$T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.6)$$

che coincide con l'integrale della Forza lungo un cammino e prende anche il nome di *lavoro* compiuto dalla forza \mathbf{F} . Definiamo una *forza conservativa* se dipende solo dalla posizione \mathbf{r} e il lavoro svolto è indipendente dal percorso. Per un percorso chiuso si ha che il lavoro svolto dalla forza è nullo.

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (1.7)$$

dove la seconda equazioni esprime il fatto che il campo è *irrotazionale*. Se una forza è conservativa possiamo esprimerla come

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

dove $V(\mathbf{r})$ rappresenta l'energia *potenziale*. Quando si ha una forza di questo tipo si ha necessariamente la conservazione dell'energia totale del sistema.

$$T(t_2) - T(t_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla V \cdot d\mathbf{r} = -V(t_2) + V(t_1) \quad (1.9)$$

che riscriviamo come

$$T(t_1) + V(t_1) = T(t_2) + V(t_2) \equiv E \quad (1.10)$$

di conseguenza la quantità $E = T + V$ è una costante del moto.

1.2 Meccanica Newtoniana - Sistemi di Particelle

In un sistema composto da particelle dobbiamo tenere conto della forza d'interazione tra di esse, dunque possiamo decomporre la forza agente su un

i-esimo punto materiale in forza esterna e forza interna

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \quad (1.11)$$

dove \mathbf{F}_{ij} è la forza agente tra la i-esima e j-esima particella, mentre $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$ è la forza esterna agenete sulla i-esima particella. La forza totale agente sul sistema costituito da N particelle sarà data da

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{F}_i &= \sum_{i,j \text{ with } j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \\ &= \sum_{i < j} (\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) + \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Poichè dall'interazione di una i-esima particella con una j-esima e. viceversa sono identiche ma con verso opposto, in un sistema il suo stato dinamico è descritto solo dall'azione delle forze esterne

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (1.13)$$

È comodo definire un punto privilegiato rispetto al quale in alcune categorie di problemi risulta essere più semplice la descrizione dello stato di moto, tale punto prende il nome di *centro di massa* \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M} \quad \text{dove} \quad M = \sum_i m_i \quad (1.14)$$

utilizzando tale grandezza possiamo riscrivere la legge di Newton per un sistema di punti materiali come

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = M \ddot{\mathbf{R}} \quad (1.15)$$

tale formula ci dice che per un sistema di particelle il centro di massa agisce come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in tale punto e di conseguenza per determinare l'evoluzione dinamica è ininfluente la forma dell'oggetto.

1.2.1 Momenti per un sistema di particelle

Il momento totale è definito da $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ e utilizzando le formule precedenti si deriva che $\mathbf{F}^{ext} = \dot{\mathbf{P}}$. E dunque abbiamo che il momento di un sistema di punti materiali è una costante del moto se $\mathbf{F}^{ext} = 0$.

Analogamente possiamo definire *il momento angolare totale* come $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$. L'evoluzione dinamica di tale grandezza è data da

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}} &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i \\ &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^{ext} \right) \\ &= \sum_{i,j \text{ with } i \neq j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}\end{aligned}\tag{1.16}$$

dove l'ultimo termine coincide con la forza torcente totale dovuta a una forza esterna

$$\boldsymbol{\tau}^{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}\tag{1.17}$$

Vogliamo ricostruire la medesima relazione tra derivata totale del momento angolare e momento della forza ottenuta per un solo punto materiale, per farlo abbiamo bisogno che il primo termine si annulli, iniziamo con il riscriverlo come

$$\sum_{i < j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}\tag{1.18}$$

tale addendo dell'equazione (1.16) si annulla solo se la forza d'interazione tra le particelle è parallela alla direzione della loro congiungente. Se tale condizione è verificata possiamo dire che il momento angolare è conservato se $\boldsymbol{\tau}^{ext} = 0$ e dunque \mathbf{L} è una costante del moto.

1.2.2 Energia per un sistema di particelle

L'energia cinetica totale di un sistema di particelle è data da $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$.

Il vettore di posizione possiamo decomporlo come

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{r}}_i\tag{1.19}$$

dove $\tilde{\mathbf{r}}_i$ è la distanza del punto materiale dal centro di massa. Di conseguenza possiamo scrivere l'energia cinetica totale come

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (1.20)$$

tale formula ci dice che l'energia cinetica del sistema è costituita da due contributi, uno è l'energia cinetica del centro di massa e l'altra parte è *l'energia interna* che descrive come il sistema si muove rispetto al centro di massa. Per una singola particella la variazione dell'energia cinetica totale è data da

$$T(t_2) - T(t_1) = \sum_i \int \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_i + \sum_{i \neq j} \int \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_i \quad (1.21)$$

Affinchè si abbia la conservazione dell'energia è necessario che le forze siano conservative. In questo caso abbiamo bisogno che

- Le forze esterne sono conservative $\mathbf{F}_i^{\text{ext}} = -\nabla_i V_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$
- Le forze interne sono conservative $\mathbf{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$

Affinchè il principio di azione e reazione $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ sia preservato e le forze siano parallele a $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, abbiamo bisogno che $V_{ij} = V_{ji}$ dove

$$V_{ij}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = V_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (1.22)$$

ovvero V_{ij} dipende solo dalla distanza tra l'i-esimo punto e il j-esimo. Inoltre abbiamo bisogno che il potenziale di una forza esterna $V_i(\mathbf{r}_i)$ dipenda solo dalla posizione della particella i-esima e non dalla posizione degli altri punti. Dunque *l'energia potenziale totale* è data da

$$V = \sum_i V_i + \sum_{i < j} V_{ij} \quad (1.23)$$

e l'energia $E = T + V$ risulta essere una quantità conservata e dunque una costante del moto.

CAPITOLO 2

Sistemi Dinamici

2.1 Equazioni Differenziali Ordinarie

Un'equazione differenziale ordinaria è una funzione F che mette in relazione $\mathbf{x}(t)$ dipendente dal tempo alle sue derivate successive.

$$F(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)) = 0 \quad (2.1)$$

Definizione 2.1.1. Definiamo una EDO (equazione differenziale ordinaria) di ordine n -simo in base al grado massimo di derivazione che compare nell'equazione.

Definizione 2.1.2. Se la relazione 2.1 è esplicitabile rispetto alla derivata di ordine massimo, allora la EDO ottenuta si dice che è in **forma normale**

$$\mathbf{x}^n = f(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \dots, \mathbf{x}^{n-1}(t)) \quad (2.2)$$

Risolvere un'equazione differenziale vuol dire determinare $\mathbf{x}(t)$ tale per cui la relazione 2.1 sia soddisfatta. Al procedimento di risoluzione dell'equazione si dà il nome di **integrazione**.

Teorema 2.1.1. Data un'equazione differenziale del secondo ordine esprimibile in forma normale

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

essa è sempre esprimibile come sistema di equazioni differenziali del primo

ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y, t) \end{cases}$$

Osservazione. In realtà questo teorema è valido per EDO di qualsiasi ordine n , ma ai fini del capitolo non compariranno equazioni di ordine superiore al secondo.

Teorema 2.1.2 (Teorema di esistenza e unicità). Si consideri il seguente sistema che prende il nome di problema di Cauchy, costituito da EDO al primo ordine e condizioni iniziali $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Se F soddisfa le seguenti condizioni in intorno U di \mathbf{x}_0 :

- continuità rispetto $t \in I$.
- più della continuità rispetto \mathbf{x} e $\dot{\mathbf{x}}$.

allora il problema di Cauchy ammette una e una sola definizione definita in un aperto $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Esempio

Prendiamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ ha un punto di discontinuità in $x = 0$, infatti si ha un punto di cuspide. Di conseguenza in un intorno $(-\delta, \delta)$ di $t_0 = 0$ si hanno due soluzioni coincidenti nel punto $x = 0$.

Osservazione. Il numero di condizioni iniziali necessarie è dato dal prodotto del numero delle variabili indipendenti e dimensione dello spazio vettoriale. Per esempio se prendiamo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, abbiamo $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, e le variabili indipendenti sono $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$, complessivamente avremo bisogno di $3 \times 2 = 6$ condizioni iniziali.

2.1.1 Risoluzione di una EDO per quadrature

Con risoluzione di un'equazione differenziale per quadrature, si intende la determinazione di una soluzione utilizzando il calcolo integrale. Possiamo definire due tipi di EDO al primo ordine risolubili con questa tecnica:

- EDO esplicitamente dipendenti dal tempo $\dot{x} = f(t)$
- EDO autonome, ovvero $\dot{x} = f(x)$

EDO dipendenti esplicitamente dal tempo

Se $x(t)$ è una soluzione dell'equazione

$$\dot{x} = f(t) \quad (2.3)$$

in un punto (t_0, x_0) si ha che la pendenza della retta tangente a tale punto è data a $f(t_0)$. Senza l'utilizzo di operazioni algebriche possiamo studiare il comportamento della funzione $f(t)$ e delineare un comportamento della soluzione.

Nel caso della funzione $f(t)$, abbiamo che fissato un valore \bar{t} tutte le funzioni della forma $x(\bar{t}) + k \forall k \in \mathbb{R}$ sono soluzione dell'equazione differenziale 2.3. Di conseguenza possiamo definire per una soluzione le seguenti proprietà:

- traslando una soluzione verticalmente si ottengono le altre.
- fissato un valore t_0 arbitrario, la famiglia delle soluzioni viene parametrizzata da x_0 .

L'ultima proprietà discende dal fatto che determinare una soluzione dell'equazione 2.3 coincide nel determinare una primitiva della funzione $f(t)$, ovvero

$$\int_{x_0}^x d\xi = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

che equivale a

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

e prende il nome di soluzione per quadrature.

EDO autonome

Consideriamo un sistema autonomo descritto dall'equazione

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.4)$$

dove il secondo membro non dipende esplicitamente dal tempo, ma ne dipende solo implicitamente. Qualitativamente si osserva che le rette tangenti sono invarianti per traslazione lungo la direzione orizzontale. Anche in questo caso vogliamo determinare $x(t)$ che sia soluzione di 2.4. Osserviamo che se $x(t)$ è soluzione anche $x_1(t - t') \forall t' \in \mathbb{R}$ lo è.

Esempio

Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dove $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ è una equazione differenziale autonoma. Osserviamo che la derivata prima di $f(x)$ possiede un punto di cuspide in $x=0$. Risolvendo il l'equazione per quadrature otteniamo

$$\int \frac{dx}{3x^{\frac{2}{3}}} = \int dt \Rightarrow x(t) = (t + c)^3$$

per determinare la costante c d'integrazione imponiamo le condizioni iniziali

$$x(0) = c^3 \Rightarrow c = x_0^{\frac{1}{3}}$$

e dunque

$$x(t) = (t + x_0^{\frac{1}{3}})^3$$

Tale soluzione è unica se $x_0 \neq 0$. Infatti nel caso in cui $x_0 = 0$ si ha che $x(t) = t^3$ è soluzione del problema di Cauchy, ma anche $x(t) = 0$ è soluzione $\forall t \in \mathbb{R}$. Quindi non si ha più l'unicità della soluzione dato che per $t=0$ le due soluzioni coincidono.

2.1.2 EDO del primo ordine a variabili separabili

Presa una EDO del primo ordine della forma

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.5)$$

la cui funzione è esprimibile come $f(x, t) = g(x)h(t)$, dove $g(x)$ e $h(t)$ sono $\neq 0$ in un intorno aperto di un tempo t_0 si avrà che l'equazione differenziale 2.5 è risolubile per separazione riscrivendola come

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

e la cui soluzione è data dalle primitive $G(x)$ e $H(t)$

$$G(x) = H(t) + c$$

dove c è una costante e viene definita dalla condizioni iniziali del problema.

2.2 Oscillatori Armonici

2.2.1 Oscillatore Armonico Semplificato

Dato un sistema isolato, costituito da un punto materiale di massa m su cui agisce una forza elastica di costante k vincolata a muoversi lungo una sola direzione, abbiamo che l'equazione dinamica è descritta da

$$F = \pm kx$$

che equivale ad un'equazione differenziale del secondo ordine della forma

$$\ddot{x} \pm \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.7)$$

posto $\frac{k}{m} = \omega^2$ possiamo determinare il polinomio caratteristico associato all'equazione rispetto agli autovalori λ

$$P(\lambda) = \lambda^2 \pm \omega^2 = 0 \quad (2.8)$$

Nel caso negativo

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \omega \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\omega$$

la soluzione dell'equazione è data dalla combinazione lineare

$$x(t) = K_1 e^{\omega t} + K_2 e^{-\omega t} \equiv K_1 \operatorname{Cosh}(\omega t) + K_2 \operatorname{Sinh}(\omega t) \quad (2.9)$$

dove per $\omega > 0$ e valori generici di K_1 e K_2 diversi da zero si ha che $|x(t)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \pm\infty$.

Ne caso positivo

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i\omega \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i\omega$$

e la soluzione della forma

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \equiv K \cos(\omega t + \phi) \quad (2.10)$$

per $K = \sqrt{A^2 + B^2}$, $A = \cos \phi$ e $B = \sin \phi$

2.2.2 Oscillatore Armonico Smorzato

Si ipotizzi di avere un sistema isolato come nella trattazione precedente, ma oltre alla forza elastica, agisce anche una forza di attrito viscoso. L'equazione che fornisce una descrizione della dinamica secondo la fisica Newtoniana è data dalla relazione

$$F = -kx - \eta \dot{x}$$

che equivale all'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (2.11)$$

dove $2\gamma = \frac{\eta}{m}$. Il polinomio caratteristico associato coincide con un'equazione di secondo grado

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

che ammette soluzione in λ

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

dove $|\gamma| < |\omega|$ e $i\Omega = \gamma^2 - \omega^2 \geq 0$. La soluzione di 2.11 è della forma

$$x(t) = e^{-\gamma t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \equiv K e^{-\gamma t} \cos(\Omega t + \phi) \quad (2.12)$$

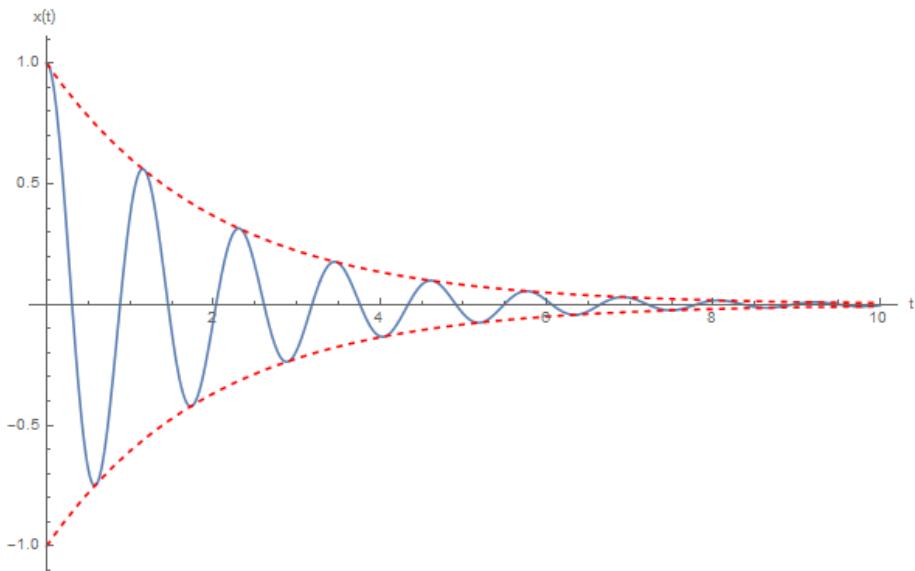


Figura 2.1: Soluzione dell'oscillatore armonico smorzato

2.2.3 Oscillatore armonico forzato

Si immagini di avere un sistema isolato, in cui agiscono una forza elastica di costante k e un forza periodica $F = A \cos(bt)$. L'equazione dinamica descritta dalle leggi di Newton è data da

$$F = -kx + A \cos(bt) \quad (2.13)$$

e l'equazione differenziale associata è della forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A \cos(bt) \quad (2.14)$$

CAPITOLO 2. SISTEMI DINAMICI

ovvero una EDO del secondo ordine non omogenea. Per un'equazione lineare una soluzione è data dalla somma di una soluzione x_O qualsiasi dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare x_P .

$$x(t) = x_O + x_P$$

L'equazione omogenea coincide con quella dell'oscillatore armonico semplice di conseguenza

$$x_O = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)$$

Per determinare la soluzione particolare usiamo un approccio euristico, ovvero partendo da un guess della soluzione

$$x_P = \mu \cos(bt)$$

Sostituendo nell'equazione 2.14 si determina il valore di μ

$$\mu(\omega^2 - b^2) \cos(bt) = A \cos(bt) \Rightarrow A = \mu(\omega^2 - b^2) \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{A}{(\omega^2 - b^2)}}$$

Se la frequenza b della forzante non coincide con quella propria del sistema ω , ovvero $b \neq \omega$, μ è finito. La soluzione del sistema è

$$x(t) = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t) + \frac{A}{(\omega^2 - b^2)} \cos(bt) \quad (2.15)$$

Quando il rapporto tra b e ω non è un multiplo razionale di π , $\dot{x}(t)$ non è periodica, ma solo limitata.

Se ipotizziamo che all'interno del sistema sia presente anche una forza di attrito viscoso, il procedimento risolutivo è analogo per la determinazione della soluzione particolare. Cambia solo la soluzione dell'equazione omogenea in cui compare un termine $e^{-\gamma t}$.

Quando si ha un sistema di questo tipo, dopo un transiente il sistema si mette sulla frequenza della forzante e per tempi sufficientemente lunghi la soluzione è asintotica alla soluzione particolare.

Che cosa succede se frequenza propria del sistema e frequenza della forzante coincidono ?

L'equazione differenziale coincide con quella espressa in 2.14 solo che il termine $b = \omega$. Per risolvere l'equazione

$$\ddot{x} + \omega^2 x = A \cos(\omega t) \quad (2.16)$$

si usa il metodo delle *variazione delle costanti arbitrarie*, ovvero si considera un ansatz della forma $x_P = H(t) \sin(\omega t)$ e lo si sostituisce nell'equazione 2.16.

$$\ddot{k} \sin(\omega t) - 2k\omega \cos(\omega t) = A \cos(\omega t) \quad (2.17)$$

Ottenendo un'equazione differenziale del secondo ordine rispetto a $k(t)$. Che possiamo risolvere come

$$\begin{cases} \ddot{k} = 0 \\ \dot{k} = \frac{A}{2\omega} \end{cases} \Rightarrow k(t) = \frac{A}{2\omega} t + c$$

dove la seconda equazione è stata risolta per quadrature. In conclusione la soluzione è data da

$$x(t) = \frac{At}{2\omega} \cos(\omega t) \quad (2.18)$$

Quando si inserisce una forzante con la stessa frequenza propria del sistema, le oscillazioni aumentano d'ampiezza.

2.3 Sistemi Newtoniani conservativi nel piano

Nella sezione precedente si sono introdotte alcuni metodi risolutivi per alcune categorie di equazioni differenziali, ma non sempre è possibile ottenere una soluzione esplicita. Per questo motivo si procede con un'analisi qualitativa del comportamento del sistema e delle sue soluzioni.

2.3.1 Sistema Dinamico nel piano

Consideriamo un punto materiale, il cui moto avviene nel piano. La sua posizione in ogni istante di tempo $t \in \mathbb{R}$ sarà descritta dal vettore posizione

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)] \quad (2.19)$$

che rappresenta una parametrizzazione di una curva C nel piano (x,y)

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

La derivata prima del vettore posizione $\dot{\mathbf{r}}(t)$ è data da

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{bmatrix} \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \\ \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \end{bmatrix}$$

e rappresenta geometricamente il vettore tangente alla curva C.

Definizione 2.3.1. Diremo che la funzione $\mathbf{r}(t)$ è una parametrizzazione regolare (o liscia) della curva C se la sua derivata prima $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.3.2. Dato un campo vettoriale $\vec{V}(x, y) = f(x, y)\mathbf{u}_x + g(x, y)\mathbf{u}_y$ diremo che una curva $\mathbf{r}(t)$ è una *linea di flusso* di \vec{V} se

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, y) \\ \dot{y}(t) = g(x, y) \end{cases} \quad (2.20)$$

Per determinare le linee di flusso bisogna determinare $(x(t), y(t))$ soluzione del sistema di EDO del primo ordine.

Definizione 2.3.3. Chiameremo sistema dinamico a un grado di libertà un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\ddot{x} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

CAPITOLO 2. SISTEMI DINAMICI

che è equivalente al sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si chiama **energia cinetica** la forma quadratica

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$$

Si chiama **energia potenziale** la funzione

$$U(x) = - \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

Per la definizione che abbiamo dato dell'energia potenziale, abbiamo che U è la primitiva della funzione $f(\xi)$ di conseguenza $f(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$ e quindi il sistema 2.21 possiamo riscriverlo come

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU(x)}{dx} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

Si chiama **energia totale** la somma

$$E = T + U$$

in questo modo l'energia totale è una funzione $E(x, \dot{x})$.

Teorema 2.3.1 (Legge della conservazione dell'energia). L'energia totale di un punto materiale che si muove secondo l'equazione differenziale 2.21 si conserva: $E(x, \dot{x})$ non dipende da t .

Dimostrazione.

$$\frac{d(T+U)}{dt} = \dot{x}\ddot{x} + \frac{dU}{dx}\dot{x} = \dot{x}[\ddot{x} - f(x)] = 0$$

□

La conservazione dell'energia cinetica coincide nell'identificare delle curve si livello della funzione $E(x, \dot{x})$. Inoltre se tale teorema non è verificato un

sistema della forma 2.22 non ammette soluzioni.

Definizione 2.3.4. Definiamo **variabile dinamica** una funzione

$$W(x, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

per il sistema 2.20. Dove $[x(t), y(t)]$ per $t \in [a, b]$ sono funzioni del tempo. Tale funzione è una parametrizzazione delle curve di livello del sistema.

Definizione 2.3.5. Una variabile dinamica $W(x, y)$ è detta costante del moto del sistema 2.20 se per ogni soluzione $(x(t), y(t))$, del sistema per $t \in [a, b]$ si ha che $W(x, y) = \text{costante}$ per $t \in [a, b]$.

2.3.2 Piano delle Fasi ad una dimensione

Consideriamo un piano con coordinate x, y . Questo piano prende il nome di **piano delle fasi**. I punti del piano delle fasi si dicono **punti di fase**. La parte destra del sistema associato all'equazione 2.21 definisce un campo vettoriale e prende il nome di **campo vettoriale delle velocità di fase**. Abbiamo visto che la soluzione del sistema è data da $\mathbf{r}(t)$ che coincide con la parametrizzazione di una curva nel piano e nel piano delle fasi prende il nome di **curva di fase**. Che è data dalle rappresentazioni parametriche

$$x = \varphi(t) \quad y = \dot{\varphi}(t) \tag{2.23}$$

Il moto del sistema sarà descritto da un punto che si muove lungo una curva del piano. La velocità di fase data dal secondo termine in 2.23 è descritta dal punto stesso. L'insieme dei vettori delle velocità definisce un campo vettoriale nel piano delle fasi e definisce l'equazione differenziale del processo.

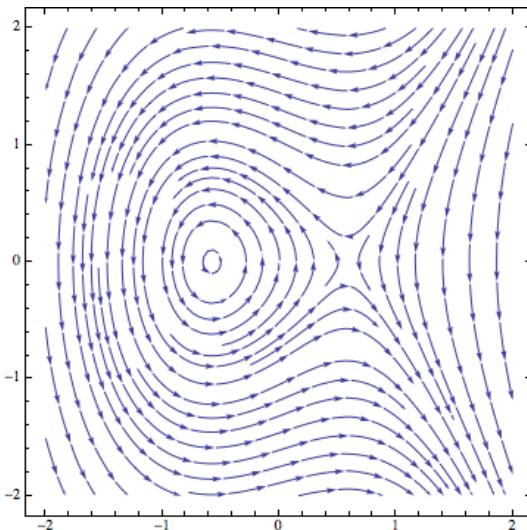


Figura 2.2: Esempio di piano delle fasi

2.4 Studio Qualitativo di un Sistema Dinamico Newtoniano Conservativo

Consideriamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dU(x)}{dx} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

e prendiamo come variabile dinamica la funzione

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$$

che è una costante del moto, ovvero per ogni tempo t la funzione è costante e definisce una curva di livello nel piano delle fasi. Se si vuole avere un'idea del grafico dell'energia è sufficiente osservare che per $y=0$, nel piano (x, z) si definisce il grafico di $U(x)$. Analogamente per \bar{x} fissato si ha l'equazione di una parabola $E(\bar{x}, y) = \frac{1}{2}y^2 + c$. Facendo scorrere il vertice della parabola lungo $U(x)$ otteniamo il grafico di $E(x, y)$.

CAPITOLO 2. SISTEMI DINAMICI

I livelli di energia che definiscono le curve di livello sono simmetrie rispetto l'asse delle ordinate.

Definizione 2.4.1. Sia \bar{x} tale che $U'(\bar{x}) = 0$, allora il punto di fase $(\bar{x}, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema dinamico 2.24. Tale punto è classificabile come:

- **Stabile** se $U''(\bar{x}) > 0$. Date delle condizioni iniziali vicine al punto di equilibrio la soluzione rimane in un suo intorno.
- **Instabile** se $U''(\bar{x}) < 0$. Prese delle condizioni iniziali vicine a \bar{x} la soluzione si allontana dal punto.

Soluzioni ammesse per l'energia fissata

Per un SDNC, fissata l'energia totale del sistema si ha che $E_0 = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$ e dunque le soluzioni sono date da $y = \pm\sqrt{2(E_0 - U(x))}$ studiando il dominio di definizione, affinchè esistano delle soluzioni reali è necessario che $U(x) \leq E_0$.

Esempio: Punto Materiale Libero

Preso un punto materiale in movimento non soggetto a forze esterne il SDNC è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

e l'energia totale del sistema è data da $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2$. Osserviamo che:

- Per $E_0 < 0$ non sono ammesse soluzioni.
- Per $E_0 = 0$ si hanno soluzioni stazionarie $(x, 0) \forall x \in \mathbb{R}$.
- Per $E_0 > 0$ si hanno moti compatibili la cui soluzione del sistema coincide con $y = \pm\sqrt{2E_0}$ ed $\forall x \in \mathbb{R}$. Il segno di y stabilisce il senso di percorrenza della particella.

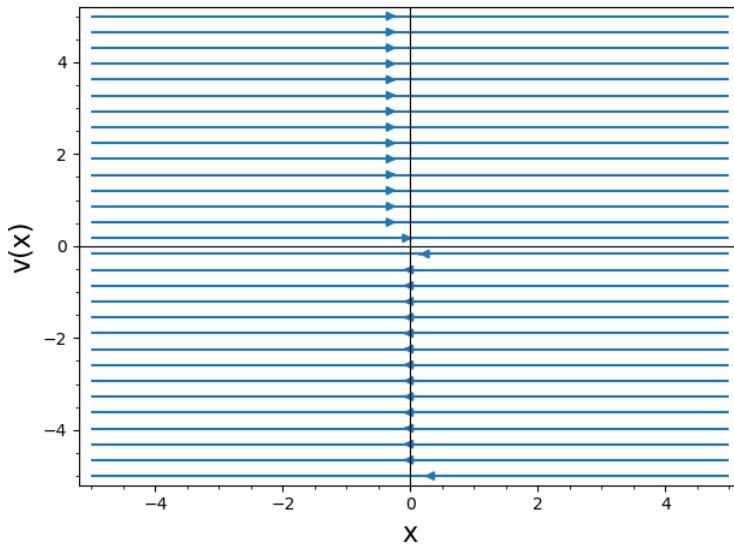


Figura 2.3: Piano delle fasi del sistema dinamico

Esempio : Caduta dei Gravi

Si consideri un punto materiale soggetto alla forza di attrazione gravitazione $F = mg$, il potenziale associato è dato da $U = gx$ per $m=1$. Il sistema dinamico associato è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -g \end{cases}$$

l'energia totale del sistema è data da $E = \frac{1}{2}y^2 + gx$.

I punti d'inversione del moto sono dati da $y = 0$, per un energia E_0 fissata si ha che $x = -\frac{E_0}{g}$. I punti d'inversione hanno tangente verticale, poichè data la soluzione

$$y = \pm \sqrt{2(E_0 + gx)}$$

si ha che

$$y' = \pm \frac{g}{2\sqrt{2(E_0 + gx)}}$$

che per $x = -\frac{E_0}{g}$ si ha $y' = \pm\infty$.

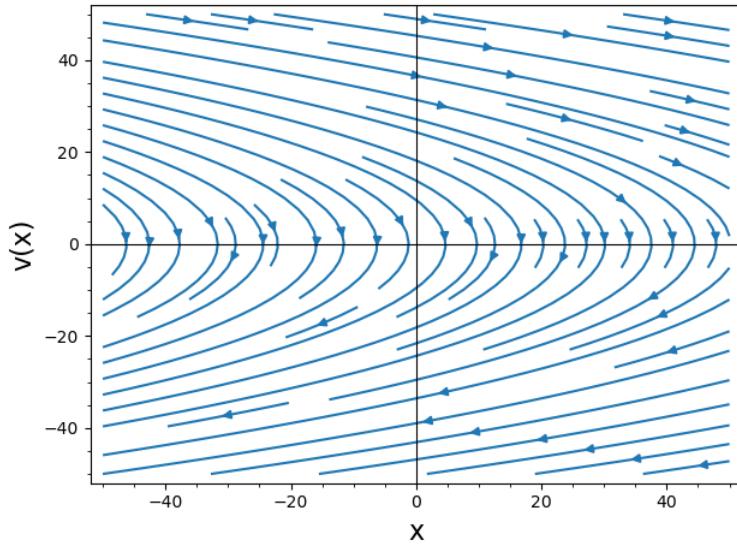


Figura 2.4: Piano delle fasi del sistema dinamico

Come si comportano le curve di fase $x(t)$ per $t \rightarrow \pm\infty$?

$$y = \pm\sqrt{2(E_0 + gx)} \approx \pm\sqrt{2}\sqrt{|x|} \rightarrow \pm\infty$$

Non sono presenti punti di equilibrio in quanto la derivata del potenziale non si annulla mai.

Esempio : Oscillatore Armonico

Data una particella soggetta ad una forza elastica $F = -kx$, il potenziale associato è dato da $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Il sistema dinamico è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -kx \end{cases}$$

L'energia totale $E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}kx^2$ è definita sempre positiva e dunque non esistono soluzioni per $E_0 < 0$. Il punto $(0,0)$ definisce un punto di equilibrio stabile nel piano delle fasi. Le curve di livello data da valori fissati dell'energia descrivono delle curve chiuse nel piano, schiacciate rispetto al punto di minimo. Nei punti d'inversione $y=0$ (dove la velocità si annulla)

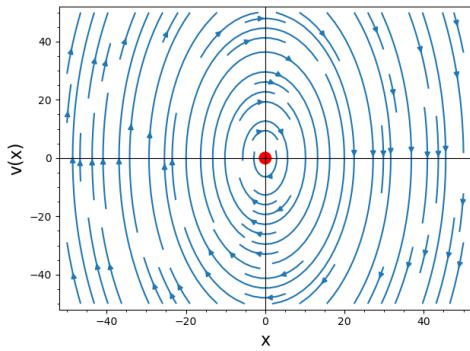


Figura 2.5: Piano delle fasi dell'oscillatore armonico

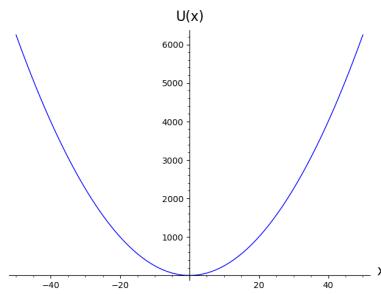


Figura 2.6: Potenziale elastico

il campo ha tangenza verticale, con segno negativo nel semipiano positivo e segno positivo in quello negativo.

2.4.1 Rette Separatrici

Si consideri un punto di equilibrio $(\underline{x}, 0)$ instabile, ovvero \bar{x} è un punto di massimo per l'energia potenziale $U(x)$. In tale punto la curva è composta da più traiettorie e viene definita separatrice l'equazione

$$y = \pm \sqrt{|U''(\underline{x})|}(x - \underline{x}) \quad (2.25)$$

Dimostrazione. Sviluppiamo con Taylor l'energia potenziale fino al secondo ordine in un intorno del punto di equilibrio

$$U(x) \approx U(\bar{x}) + U'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}U''(\bar{x})(x - \bar{x})^2$$

sostituendo nell'equazione dell'energia totale del sistema per un suo valore fissato E_0 si ha che

$$\left(y - \sqrt{|U''(\bar{x})|}(x - \bar{x}) \right) \left(y + \sqrt{|U''(\bar{x})|}(x - \bar{x}) \right) = 0$$

e dunque si ottiene 2.25.

□

2.4.2 Piccole Oscillazioni

Si consideri un punto di equilibrio stabile $(\bar{x}, 0)$, ovvero un punto di minimo per l'energia potenziale $U(x)$. Espandendo con Taylor in un intorno del punto abbiamo che

$$U(x) \approx U(\bar{x}) + \frac{1}{2}U''(\bar{x})(x - \bar{x})^2$$

dove $U(\bar{x}) = E_0$. A meno di una costante in un intorno del punto di equilibrio, il potenziale si comporta nello stesso modo di un oscillatore armonico. Quindi la funzione nell'intorno è approssimabile come una parabola e di conseguenza le orbite sono curve chiuse e periodiche. Il periodo è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{dove } \omega = \sqrt{U''(x)}$$

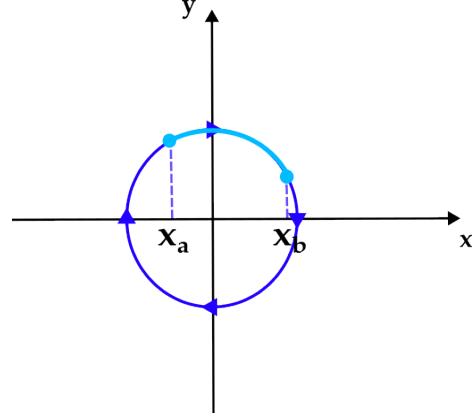
e quindi

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(x)}} \quad (2.26)$$

2.4.3 Tempo di Percorrenza di una Traiettoria

Supponiamo di voler determinare il tempo di percorrenza lungo un segmento di una traiettoria data da un'energia totale E_0 fissata, partendo da un punto nel piano delle fasi (x_a, v_a) e raggiungendo (x_b, v_b) . Sappiamo che una traiettoria è descritta dalla relazione

$$y = \sqrt{2(E_0 - U(x))}$$



che possiamo riscrivere come

$$\dot{x} = \sqrt{2(E_0 - U(x))}$$

e procedendo per integrazione otteniamo

$$\int_{t_a}^{t_b} dt = \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 - U(x))}} \quad (2.27)$$

Si osservi che l'integrale 2.27 non presenta problemi d'integrazione fin tanto che gli estremi rispetto alla posizione non coincidono con dei punti d'inversione, ovvero laddove $U(x) = E_0$.

Che cosa succede nei punti d'inversione ?

Consideriamo il limite per $x \rightarrow x_R$ dove x_R è il primo punto d'inversione percorrendo la curva chiusa in senso orario.

$$\lim_{x \rightarrow x_R} \Delta t = \lim_{x \rightarrow x_R} \int_{x_a}^x \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 - U(x))}} \quad (2.28)$$

sviluppando con Taylor in un intorno di x_R l'argomento della radice del denominatore

$$2(E_0 - U(x)) \approx 2[E_0 - U(x_R) - \underbrace{U'(x_R)(x - x_R)}_{<0}] = 2|U'(x_R)|(x - x_R)$$

l'equazione 2.28 diventa

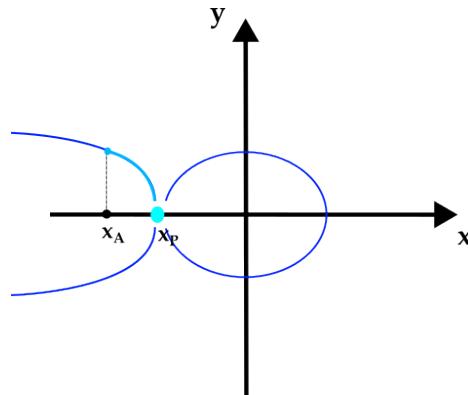
$$T(x \rightarrow x_R) \approx \lim_{x \rightarrow x_R} \int_{x_a}^x \frac{dx}{\sqrt{2|U'(x_R)|(x - x_R)}} \approx \lim_{x \rightarrow x_R} \int_{x_A}^x \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty$$

e quindi il tempo di percorrenza è finito. Per un orbita chiusa il tempo di percorrenza di tutto il cammino è

$$T = 2 \int_{x_L}^{x_R} \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 - U(x))}} \quad (2.29)$$

dove gli estremi d'integrazione x_L e x_R sono rispettivamente il punto d'inversione sinistro e destro. Come si è visto nelle sezioni precedenti esistono orbite che non sono cammini continui, ma hanno punti di separazione; possiamo ugualmente affermare che il tempo di percorrenza sia finito per questa classe di percorsi ?

Come cambia il tempo per una curva separatrice ?



Consideriamo un cammino come nella figura adiacente, in cui è presente un punto di separazione x_P . In questo caso si hanno quattro cammini separati e non un unico percorso come nel caso dell'orbita chiusa. Tali configurazioni nel caso dei sistemi dinamici conservativi emergono per i punti di massimo dell'energia potenziale, ovvero

$U''(x) < 0$. Per determinare il tempo di percorrenza della traiettoria da un punto di partenza x_A , procediamo a sviluppare con Taylor l'argomento della radice del denominatore dell'equazione 2.28 in un intorno di x_P . A differenza del caso precedente lo sviluppo si arresta al secondo ordine d'infinitesimo.

$$\begin{aligned} 2(E_0 - U(x)) \approx 2[E_0 - U(x_R) - \underbrace{U'(x_R)(x - x_R)}_{=0} - \frac{1}{2} \underbrace{U''(x_R)(x - x_R)^2}_{<0}] = \\ = |U''(x_R)|(x - x_R)^2 \end{aligned}$$

l'equazione 2.28 diventa

$$\begin{aligned} T \approx \lim_{x \rightarrow x_P} \int_{x_A}^x \frac{dx}{\sqrt{|U''(x)|}|x - x_P|} = \frac{1}{\sqrt{|U''(x)|}} \lim_{x \rightarrow x_P} \int_{x_A}^x \frac{dx}{|x - x_P|} = \\ = \frac{1}{\sqrt{|U''(x)|}} \lim_{x \rightarrow x_P} [\log(|x - x_P|)]_{x_A}^x = \lim_{x \rightarrow x_P} \log(|x - x_P|) + C \rightarrow \infty \end{aligned}$$

In conclusione una particella non raggiunge la posizione x_P in un tempo finito.

2.4.4 Approssimazione di un periodo

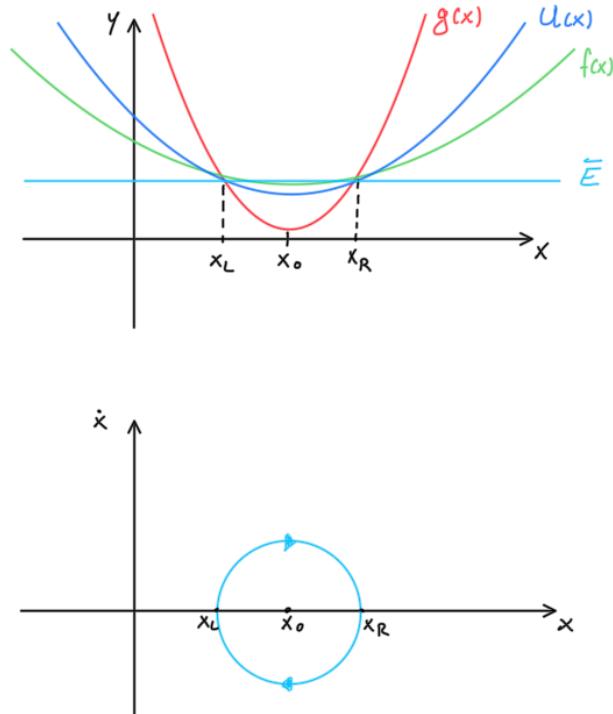


Figura 2.7: Approssimazione del periodo per un punto di minimo

Si consideri un sistema dinamico Newtoniano e conservativo. Sia x_0 il punto di minimo del potenziale $U(x)$ associato al sistema. Esistono casi di studio di un sistema in cui l'integrale 2.29 non è sempre risolvibile per un'energia \bar{E} fissata; in queste configurazioni per ottenere il valore del periodo lungo l'orbita si procede ad approssimarla scegliendo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ tali per cui valgano le seguenti proprietà:

- $f(x) > U(x) \quad \forall x \in (x_L, x_R)$
- $g(x) < U(x) \quad \forall x \in (x_L, x_R)$
- $g(x_L) = U(x_L) = f(x_L)$ e $g(x_R) = U(x_R) = f(x_R)$
- $f(x) \leq \bar{E} \quad \forall x \in [x_L, x_R]$ e dunque $g(x) \leq \bar{E}$

Poichè $g(x) \leq U(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [x_L, x_R]$ abbiamo che $-g(x) \geq -U(x) \geq -f(x)$ e dunque

$$2(\bar{E} - g(x)) \geq 2(\bar{E} - U(x)) \geq 2(\bar{E} - f(x))$$

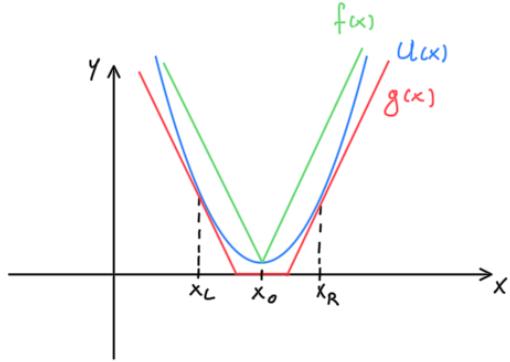
quindi possiamo stimare il periodo di una semi orbita chiusa come

$$\int_{x_L}^{x_R} \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 - g(x))}} \leq \int_{x_L}^{x_R} \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 - U(x))}} \leq \int_{x_L}^{x_R} \frac{dx}{\sqrt{2(E_0 - f(x))}}$$

Da un punto di vista operativo possiamo scegliere $f(x)$ e $g(x)$ come unione di spezzate che approssimano la funzione $U(x)$.

Se $U''(x) > 0$ come nei casi considerati nelle figure di questa sezione possiamo definire $f(x)$ considerando le rette secanti che passano per il punto di minimo x_0 del potenziale. Mentre per $g(x)$ si usano le rette tangenti in x_L e x_R punti d'inversione e la costante orizzontale $U(x_0)$.

Si procede in modo analogo nel caso in cui $U''(x) < 0$.



2.4.5 Diagramma di Biforcazione e dipendenza dei punti di equilibrio da un parametro

Data una famiglia di potenziali dipendenti da un parametro $U_\alpha(x)$, vogliamo stabilire se la stabilità di un punto di equilibrio appartenente a tale famiglia, cambia al variare del parametro α . Prendiamo in considerazione un potenziale della forma

$$U_\alpha(x) = (x^2 - \alpha)^2 \quad (2.30)$$

cerchiamo i punti critici del potenziale risolvendo l'equazione $U'_\alpha(x) = 0$

$$4x(x^2 - \alpha) = 0$$

trovando i punti $x_1 = 0$ e $x_{2,3} = \pm\sqrt{\alpha}$. Nel piano delle fasi otteniamo i seguenti punti di equilibrio:

- $(0,0)$ esiste per ogni valore di α
- $(\sqrt{\alpha}, 0)$ e $(-\sqrt{\alpha}, 0)$ per condizione di esistenza tali punti sono ammessi solo se $\alpha \geq 0$.

Studiando il segno della derivata seconda del potenziale determiniamo la natura dei punti critici e di conseguenza la loro stabilità nel piano delle fasi.

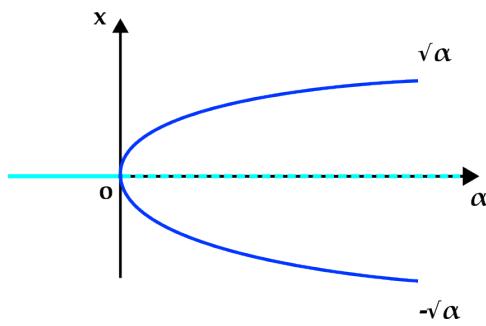
$$U''(x) = 0$$

ottenendo

- $U''(0) = -4\alpha$, dunque $(0,0)$ è di equilibrio stabile se $\alpha < 0$ e di equilibrio instabile per $\alpha > 0$
- $U''(\pm\sqrt{\alpha}) = 8\alpha$, quindi $(\pm\sqrt{\alpha}, 0)$ è stabile per $\alpha > 0$ dato che tali punti esistono solo per $\alpha \geq 0$.

Dato che i punti di equilibrio hanno $y = 0$ possiamo riassumere in grafico nel piano (α, x) le informazioni discusse nei punti precedenti. Tale grafico prende il nome di **diagramma di biforcazione**.

Per $x = \pm\sqrt{\alpha}$ si ha il grafico della radice quadrata rispetto ad α . Con il tratto continuo si indica l'intervallo di valori $(-\infty, 0)$ rispetto al quale il punto $(0,0)$ è di equilibrio stabile, mentre con quello tratteggiato l'intervallo di valori rispetto al quale è instabile.



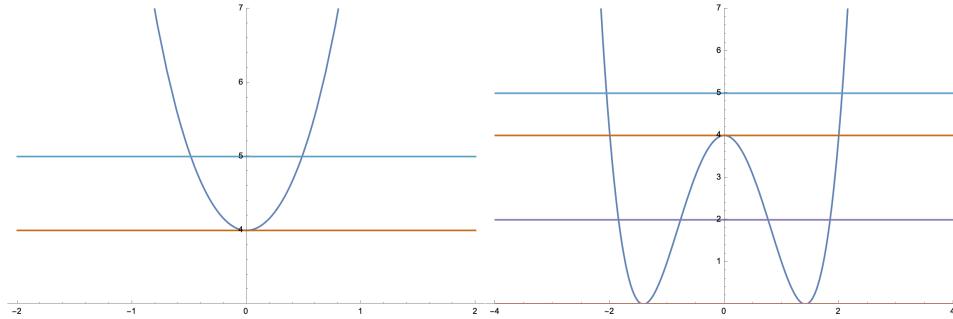

 Figura 2.8: Potenziale per $\alpha < 0$

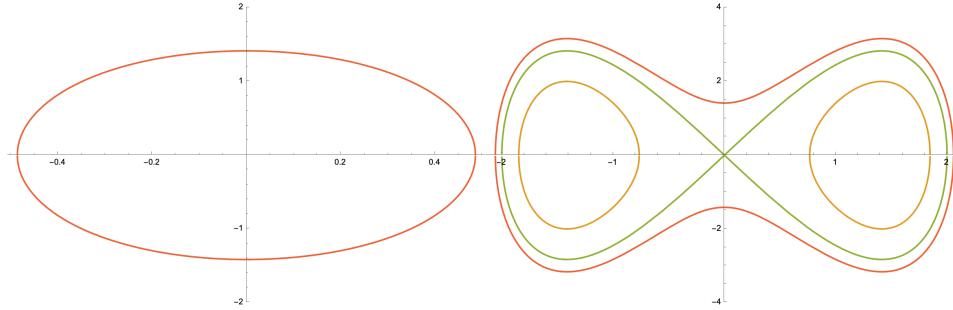
 Figura 2.9: Potenziale per $\alpha > 0$

 Figura 2.10: Piano fasi per $\alpha < 0$

 Figura 2.11: Piano fasi per $\alpha > 0$

Dai grafici in figura osserviamo come cambia il grafico nel piano delle fasi al variare di α . $(0,0)$ da punto di equilibrio stabile per $\alpha < 0$, diventa punto di equilibrio instabile per $\alpha > 0$ e si creano due buche di potenziale.

2.5 Stabilità Dei Sistemi Dinamici

Teorema 2.5.1 (Teorema della scatola di flusso (o teorema di rettificazione dei campi vettoriali)). Si consideri un sistema dinamico nel piano

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

e sia (\tilde{x}, \tilde{y}) un punto non di equilibrio del sistema. Allora esiste un intorno $B(\tilde{x}, \tilde{y})$ e un opportuno cambio di coordinate (rettificazione)

$$\begin{bmatrix} r(x, y) \\ s(x, y) \end{bmatrix} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tale per cui il sistema dinamico di partenza è rappresentabile come

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{s} = 1 \end{cases}$$

In sostanza il teorema ci dice che localmente possiamo sempre definire una trasformazione di coordinate tale per cui tutti i flussi sono laminari a patto che il punto non sia di equilibrio.

Esempio

Prendiamo il sistema dinamica dato da un oscillatore armonico con costante elastica $k = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

utilizzando la parametrizzazione

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

preso un punto (x,y) lontano dal punto di equilibrio $(0,0)$ si ha che vale il teorema di rettificazione infatti

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \dot{x} + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \dot{y} = 0$$

e analogamente si dimostra che $\dot{s} = 1$.

2.5.1 Stabilità per Sistemi Lineari nel piano

Definizione 2.5.1. Un punto di equilibrio $\tilde{\mathbf{x}}$ per il sistema dinamico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ è detto **stabile** secondo Lyapunov se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che l'evoluto temporale di un punto $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\tilde{\mathbf{x}})$ resta nell'insieme aperto $B_\varepsilon(\tilde{\mathbf{x}})$. Un punto di equilibrio che non è definito stabile secondo Lyapunov è definito **instabile**.

Un generico sistema lineare nel piano è una famiglia a quattro parametri

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv \\ \dot{v} = cu + dv \end{cases} \iff \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

dove u e v sono definite rispetto ad una base. Possiamo ricondurre il studio del sistema all'analisi della matrice associata. Gli autovalori possibili di A sono:

- $\alpha \in \mathbb{R}$ distinti.
- $\alpha \in \mathbb{C}$ coniugati tra loro.
- $\alpha \in \mathbb{R}$ coincidenti.

Supponiamo di avere α_1 e α_2 autovalori reali e distinti della matrice A , con autovettori rispettivi φ_1 e φ_2 . Riscriviamo il vettore $[u, v]^T$ rispetto alla base degli autovettori.

$$ue_1 + ve_2 = \xi\varphi_1 + \eta\varphi_2$$

di conseguenza anche le derivate temporali sono definite rispetto alla base degli autovettori di A . Come riscriviamo le componenti rispetto (ξ, η) ?

Dato che φ_1 e φ_2 sono autovettori si ha che

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \dot{\xi} = \alpha_1\xi \\ \dot{\eta} = \alpha_2\eta \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data da

$$\begin{cases} \xi = C_1 e^{\alpha_1 t} \\ \eta = C_2 e^{\alpha_2 t} \end{cases} \quad (2.32)$$

Per studiare in modo completo le orbite nel piano bisogna studiare tre casi possibili:

- autovalori con lo stesso segno.
- autovalori con segni opposti.
- uno dei due autovalori si annulla.

• **Autovalori con lo stesso segno:** Per studiare l'andamento delle orbite cerchiamo una funzione $\eta(\xi)$ che rappresenti le curve, almeno localmente. A tal fine partendo dalle soluzioni in 2.32 abbiamo

$$\begin{cases} \frac{\xi}{C_1} = e^{\alpha_1 t} \\ \frac{\eta}{C_2} = e^{\alpha_2 t} \end{cases}$$

elevando la prima equazione a $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

$$\left(\frac{\xi}{C_1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = (e^{\alpha_1 t})^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = e^{\alpha_2 t} = \frac{\eta}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta(\xi) = C_2 \left(\frac{\xi}{C_1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} \quad (2.33)$$

dove C_1 e C_2 sono dati dalle condizioni iniziali. Si osserva che base ed esponente del termine di destra sono positivi (Le orbite non possono attraversare gli assi). Il caso in figura 2.12 si verifica quando $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$,

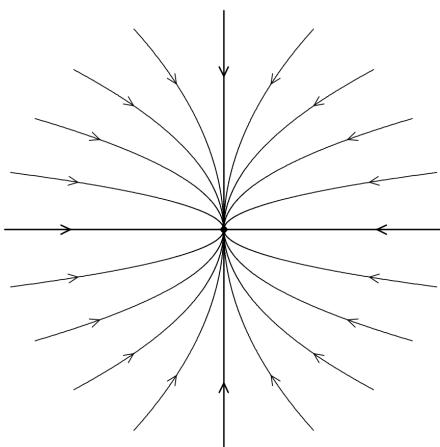


Figura 2.12: Nodo stabile

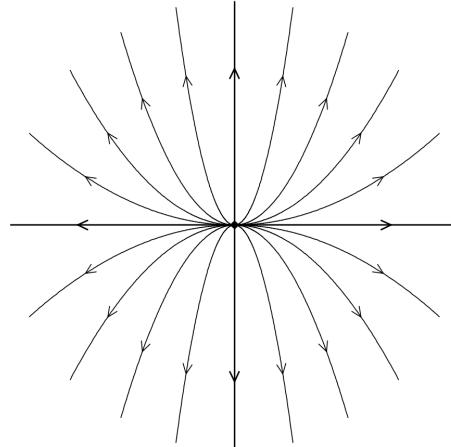


Figura 2.13: Nodo Instabile

mentre il caso nell'immagine 2.13 si verifica quando $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Si osserva che tutte le orbite entrano nell'origine avendo come tangente uno degli assi, con la sola eccezione dell'altro asse. Ciò perch'è l'autovalore maggiore in valore assoluto tende a schiacciare l'orbita più rapidamente dell'altro. Punti di equilibrio di questo tipo prendono il nome di **nodi** rispettivamente stabili o instabili.

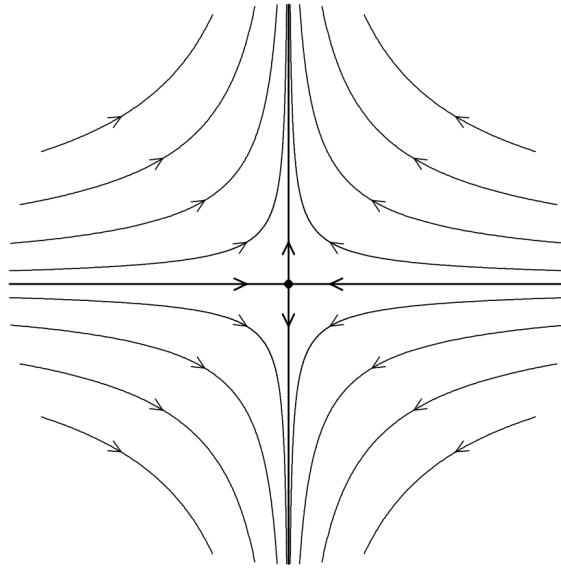


Figura 2.14: Punto di sella

• **Autovalori con segni opposti:** La relazione tra ξ ed η in 2.33 rimane verificata e si ottiene un punto di sella come in figura 2.14 se $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$. Si osserva che questa volta l'origine ha un comportamento singolare: ad eccezione delle orbite che giacciono sugli assi, tutte le altre provengono dall'infinito avendo come asintoto l'asse ξ (orizzontale) e tornano all'infinito avendo come asintoto l'asse η (verticale). E' interessante notare, guardando la figura, che punti molto vicini tra loro ma giacenti da lati opposti rispetto all'asse ξ vengono separati rapidamente dalla dinamica quando arrivano in vicinanza dell'origine, ed inviati all'infinito in direzioni opposte. Rovesciando la direzione del tempo (e quindi la direzione delle frecce nella figura) lo stesso accade a punti vicini all'asse η .

• **Autovalori di cui uno nullo:** Supponiamo $\alpha_2 = 0$ allora il sistema dinamico nel piano rispetto alla base degli autovettori è della forma

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \alpha_1 \xi \\ \dot{\eta} = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

dunque le soluzioni sono

$$\begin{cases} \xi = C_1 e^{\alpha_1 t} \\ \eta = C_2 \end{cases} \quad (2.35)$$

di conseguenza avremo che lungo l'asse η tutti i punti con $\xi = 0$ sono di equilibrio. Per $\alpha_1 > 0$ saranno di equilibrio instabile e per $\alpha_1 < 0$ di equilibrio stabile. Tutte le orbite sono semirette parallele all'asse ξ che incontrano l'asse η in un punto stazionario.

Consideriamo il caso in cui gli autovalori della matrice A sono valori complessi e coniugati tra loro. Ovvero $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. Siano ψ_1 e ψ_2 gli autovettori associati. Definiamo i vettori $w = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$ e $z = \frac{1}{2i}(\psi_1 - \psi_2)$ come base dello spazio. Rispetto alla nuova base la matrice A si definisce come

$$A\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) = (*) \quad (2.36)$$

posto

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

l'equazione 2.36 diventa

$$(*) = \alpha w - \beta z$$

analogamente

$$Az = \beta w + \alpha z$$

Per vettore $\xi w + \eta z$ rispetto alla base $\{w, z\}$ il sistema dinamico diventa

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Per determinare la forma delle soluzioni del sistema passiamo alle coordinate polari

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \end{cases}$$

avremo che le derivate totali delle nuove coordinate sono

$$\dot{\rho} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \dot{\xi} + \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \dot{\eta} = \alpha \rho$$

mentre $\dot{\theta} = \beta$. Dunque il sistema lineare 2.37 assume la forma

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha \rho \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases} \quad (2.38)$$

la cui soluzione è data da

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \theta_0 + \beta t \end{cases}$$

La soluzione ottenuta descrive orbite circolari con un raggio crescente o decrescente a seconda del segno di α con velocità angolare costante. Per

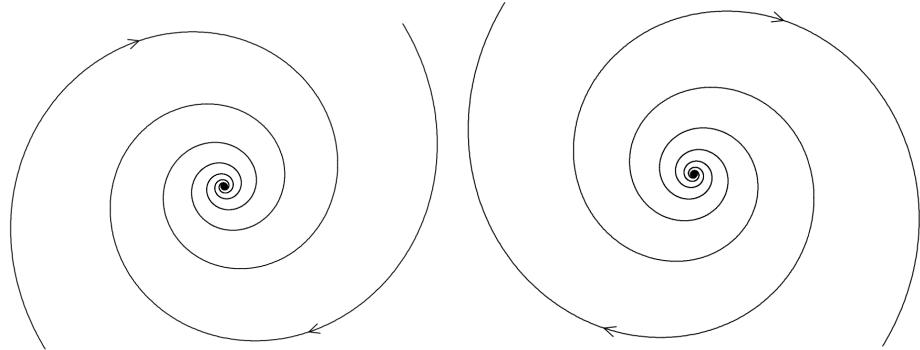


Figura 2.15: Fuoco instabile $\alpha > 0$ Figura 2.16: Fuoco stabile $\alpha < 0$

$\alpha = 0$ si ha un punto di centro, ed è un punto di equilibrio stabile. Notare che gli autovalori sono solo immaginari. Analogamente per $\alpha < 0$ il centro è di equilibrio stabile e nel caso opposto instabile.

2.5.2 Diagramma di Biforcazione generalizzato

Definiamo il polinomio caratteristico associato alla matrice A del sistema lineare nel piano come

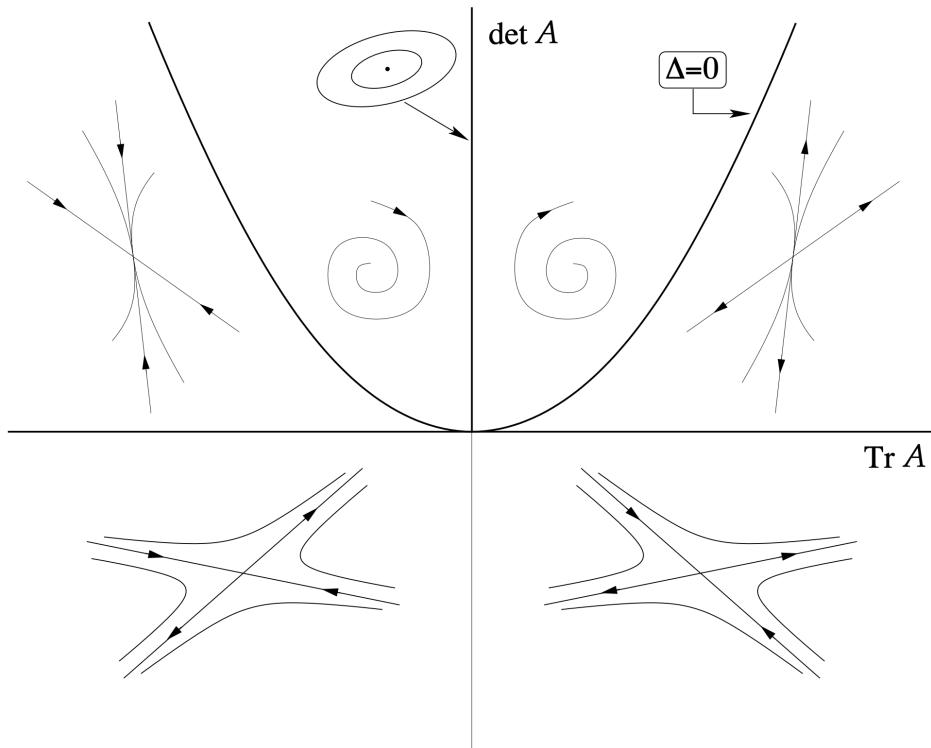
$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

il discriminante associato a polinomio

$$\Delta = \text{tr}(A)^2 - 4\det(A)$$

dove

- $\Delta = 0$ si hanno due soluzioni coincidenti.
- $\Delta > 0$ si hanno due soluzioni reali distinte.
- $\Delta < 0$ si hanno due soluzioni immaginarie.



il grafico di biforcazione riassume i risultati ottenuti in questo paragrafo in un solo grafico. Il piano risulta essere diviso in tre regioni. La prima dal $\text{tr}A = 0$, la seconda da $\Delta = 0$ e la terza da $\det(A) = 0$. In questo modo ogni regione corrisponde ad un comportamento qualitativo ben preciso.

2.5.3 Linearizzazione di un Sistema Dinamico Nel Piano

Dato un sistema dinamico non lineare vogliamo capire come si comportano le traiettorie in un intorno di un punto di equilibrio del sistema. Per farlo approssimiamo con Taylor arrestandoci al primo ordine d'infinitesimo in un intorno del punto di equilibrio.

$$\begin{cases} f(x, y) \approx f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}(x - \tilde{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}(y - \tilde{y}) \\ g(x, y) \approx g(\tilde{x}, \tilde{y}) + \frac{\partial g}{\partial x}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}(x - \tilde{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}(y - \tilde{y}) \end{cases}$$

dato che (\tilde{x}, \tilde{y}) è di equilibrio abbiamo che $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, dunque per un generico sistema dinamico come 2.20 abbiamo che

$$\begin{cases} \dot{x} \approx \frac{\partial f}{\partial x}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}(x - \tilde{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}(y - \tilde{y}) \\ \dot{y} \approx \frac{\partial g}{\partial x}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}(x - \tilde{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}(y - \tilde{y}) \end{cases}$$

per renderlo un sistema lineare effettuiamo una trasformazione di traslazione nel punto di equilibrio.

$$\begin{cases} u = x - \tilde{x} \\ v = y - \tilde{y} \end{cases}$$

Il linearizzato del sistema sarà dato da

$$\begin{cases} \dot{u} \approx \frac{\partial f}{\partial x}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}u + \frac{\partial f}{\partial y}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}v \\ \dot{v} \approx \frac{\partial g}{\partial x}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}u + \frac{\partial g}{\partial y}|_{(\tilde{x}, \tilde{y})}v \end{cases} \quad (2.39)$$

si osservi che la stabilità che deduciamo vale per il punto $(0, 0)$ rispetto le coordinate (u, v) . Non è detto che la stabilità del punto $(0, 0)$ sia la stessa del punto (\tilde{x}, \tilde{y}) .

2.5.4 Metodi di Lyapunov per la stabilità dei sistemi dinamici nel piano

Teorema 2.5.2 (Teorema di Hardmann-Grossmann (Primo metodo di Lyapunov)). Sia (\tilde{x}, \tilde{y}) un punto di equilibrio per il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

e sia $J(\tilde{x}, \tilde{y})$ la matrice Jacobiana valutata nel punto d'equilibrio. Siano $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ autovalori della matrice J . Se $\forall i = 1, 2 \ \alpha_i \neq 0$ e $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ allora il punto (\tilde{x}, \tilde{y}) è di equilibrio stabile. Viene definito instabile altrimenti.

Teorema 2.5.3 (Secondo Metodo Di Lyapunov). Sia (\tilde{x}, \tilde{y}) un punto di equilibrio per il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

e sia $W : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione almeno di classe \mathcal{C}^1 , tale per cui esiste un intorno U di (\tilde{x}, \tilde{y}) dove:

- $\forall (x, y) \in B = U \setminus \{(\tilde{x}, \tilde{y})\}$, si ha che $W(x, y) > W(\tilde{x}, \tilde{y})$ ((\tilde{x}, \tilde{y}) punto di minimo locale stretto).
- Si consideri una soluzione del sistema dinamico $(x(t), y(t)) \in B$ tale che $\frac{dW(x(t), y(t))}{dt} \leq 0$ (ogni volta che consideriamo delle soluzioni del SD passanti per U queste decrescono o restano uguali).

Allora possiamo concludere che il punto (\tilde{x}, \tilde{y}) è stabile per il sistema dinamico.

Metodo per la ricerca di una buona funzione di Lyapunov

Nel caso di sistemi dinamici conservativi nel piano possiamo prendere la funzione W uguale a quella dell'energia e se \tilde{x} coincide con il punto di minimo del potenziale allora il punto nel piano delle fasi $(\tilde{x}, 0)$ è un minimo dell'energia e $\frac{dW}{dt} = 0$ dato che è una costante del moto.

CAPITOLO 2. SISTEMI DINAMICI

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo prendere $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ e $W(0,0) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall (x, y) \in B_\delta(0, 0) \quad \Rightarrow \quad (x(t), y(t)) \in B_\varepsilon(0, 0)$
 è soluzione del sistema dinamico con condizioni iniziali (x_0, y_0) . Siccome la funzione di W ha un minimo locale in $(0,0)$ si ha che $\exists \bar{\delta}$ tale per cui $\forall (x, y) \in B_{\bar{\delta}}(0, 0) \setminus \{(0,0)\}$ si ha che $W(x, y) > W(0, 0) = 0$.

In particolare possiamo scegliere l'intorno $B_{\bar{\delta}}(x, y) \subset B_\varepsilon(0, 0)$. Dato che W è continua il minimo di W rispetto all'insieme $B_{\bar{\delta}}(x, y)$ si trova sul bordo. Tale minimo lo definiamo come

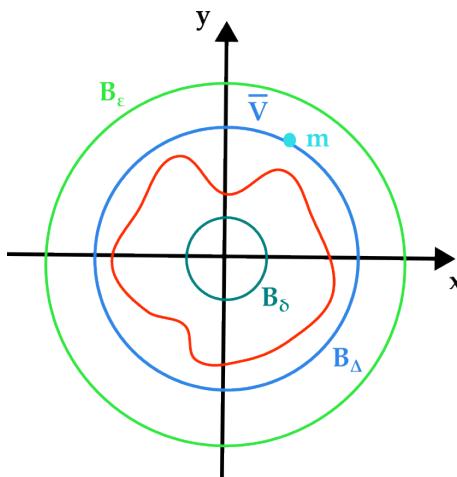
$$m = \min_{(x,y) \in \partial B_{\bar{\delta}}} W(x, y) > 0$$

Definiamo $V = \{(x, y) \in \Omega \mid W(x, y) < m\}$ e sia $\tilde{V} = V \cap B_{\bar{\delta}}$ una curva di livello. Preso $\delta < \dim \tilde{V}$ e le condizioni di partenza $(x_0, y_0) \in B_\delta(0, 0)$, l'evoluto temporale $(x(t), y(t))$ soluzione del sistema dinamico fa sì che

$$W(x(t), y(t)) \leq W(x_0, y_0) < m$$

□

Il teorema ci dice che l'iterato di un punto di B_δ non esce mai dal bordo della palla $B_{\bar{\delta}}(0, 0) \subset B_\varepsilon(0, 0)$.



2.6 Equazioni di Lotka-Volterra

Le equazioni di Lotka-Volterra descrivono un sistema ecologico di predatori e prede (preda-predatore), su cui si fanno le seguenti ipotesi:

1. la preda è l'unico cibo del predatore.
2. la velocità con cui i predatori si cibano delle prede è proporzionale al numero di incontri tra prede e predatori, e quindi al prodotto del numero di prede per il numero di predatori, con un minimo necessario per sostenere la popolazione di predatori.
3. la velocità con cui diminuisce la popolazione delle prede a causa dei predatori è proporzionale al numero d'incontri tra prede e predatori.
4. il cibo disponibile per le prede è costante in assenza di predatori e quindi la velocità con cui aumenta la popolazione di prede è proporzionale alla popolazione stessa.

Osservazione. Il punto 2) e 3) derivato dal ragionamento logico, in cui assumiamo di avere un insieme $A = \{x \text{ t.c. è una preda}\}$ e un insieme $B = \{y \text{ t.c. è un predatore}\}$, dove $A, B \subset \mathbb{N}$ e $A \cap B = \emptyset$. L'insieme prodotto $A \times B$ rappresenta tutte le coppie (preda,predatore) possibili (nel senso che una preda può incontrare uno qualsiasi dei predatori). La cardinalità dell'insieme $A \times B$ è data da $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ e restituisce il numero d'incontri possibili tra le prede e i predatori.

Descrivendo con x il numero di prede e con y il numero di predatori e le trattiamo come se fossero variabili continue , dove $x, y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. L'evoluzione del sistema considerato è allora descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = (\lambda_1 - \lambda_4 y)x \\ \dot{y} = (\lambda_3 x - \lambda_2)y \end{cases} \quad (2.40)$$

che prendo il nome di **equazioni di Lotka-Volterra**. Le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono costanti reali positive.

2.6.1 Analisi del sistema dinamico

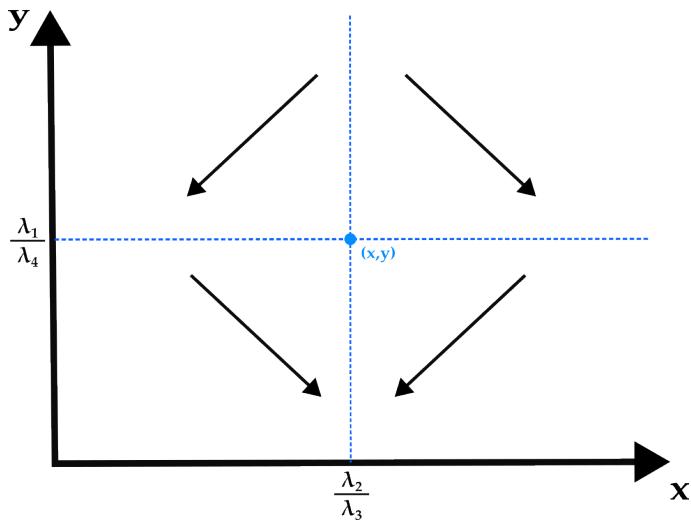
Calcoliamo i punti di equilibrio del sistema risolvendo il sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} \lambda_{1x} - \lambda_4 xy = 0 \\ -\lambda_2 y + \lambda_3 xy = 0 \end{cases}$$

i punti di equilibrio sono della forma

$$x = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad \text{e} \quad y = \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \quad (2.41)$$

tali coordinate rappresentano una condizione stazionaria del sistema, ovvero il numero di prede e predatori rimane costante nel tempo. Descriviamo il comportamento delle orbite soluzione del sistema al variare dei valori di x ed y.



Dividendo il piano in regioni osserviamo che il campo vettoriale descrive orbite chiuse. Inoltre per $y \rightarrow 0$ e $x \rightarrow 0$ il vettore tangente alle soluzioni dato dalle componenti del campo vettoriale si schiaccia lungo i rispettivi assi. Non esistono traiettorie che attraversano gli assi.

Per determinare la stabilità del punto di equilibrio, procediamo a costruire una funzione di Lyapunov $W(x,y)$. Per farlo si sostituisce il punto in 2.41 nell'equazione 2.40

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}(\lambda_2 - \lambda_3 x)}{x} = (\lambda_1 - \lambda_4 y)(\lambda_2 - \lambda_3 x) \\ \frac{\dot{y}(\lambda_1 - \lambda_4 y)}{y} = -(\lambda_2 - \lambda_3 x)(\lambda_1 - \lambda_4 y) \end{cases} \quad (2.42)$$

eguagliando le equazioni in 2.42, definiamo l'equazione omogenea

$$\frac{\dot{x}}{x} \lambda_2 - \lambda_3 \dot{x} + \lambda_1 \frac{\dot{y}}{y} - \lambda_4 \dot{y} = 0 \quad (2.43)$$

che possiamo riscrivere come

$$-\frac{d}{dt} [\log(x(t))\lambda_2 - \lambda_3 x(t) + \lambda_1 \log y(t) - \lambda_4 y(t)] = 0 \quad (2.44)$$

dove la funzione di Lyapunov è data da

$$W(x, y) = \log(x(t))\lambda_2 - \lambda_3 x(t) + \lambda_1 \log y(t) - \lambda_4 y(t) \quad (2.45)$$

che è una costante del moto. Il punto di equilibrio in 2.41 è di minimo stretto per la funzione $W(x,y)$ di conseguenza per il secondo metodo di Lyapunov risulta essere un punto di equilibrio stabile per il sistema di Lotka-Volterra. Il fatto che la funzione W sia una costante del moto rappresenta un condizione più forte di quella richiesta dal secondo metodo di Lyapunov, in cui era sufficiente che fosse decrescente. L'essere una costante del moto ci permette di determinare esplicitamente le soluzioni del sistema, dato che queste coincidono con le curve di livello di W .

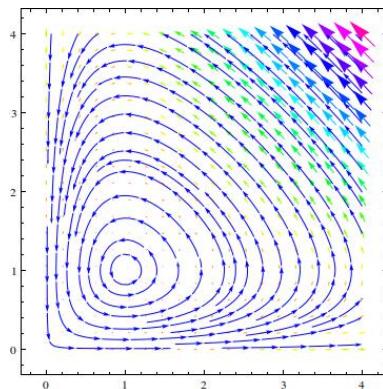


Figura 2.17: Soluzioni delle equazioni di Lotka-Volterra

2.6.2 Leggi di Lotka-Volterra

Teorema 2.6.1. Per il sistema dinamico preda e predatori definito dalle equazioni di Lotka-Volterra 2.40 valgono le seguenti leggi:

1. **Prima legge di Lotka-Volterra:** le popolazioni seguono un ciclo periodico per ogni dato iniziale che non sia l'equilibrio e in cui il numero di prede e il numero di predatori siano entrambi strettamente positivi.
2. **Seconda legge di Lotka-Volterra:** il numero medio (su un ciclo) si predatori e quello di prede non dipendono dal dato iniziale e coincidono i rispettivi valori di equilibrio.
3. **Terza legge di Lotka-Volterra:** se si introduce una perturbazione che elimina predatori e prede in maniera proporzionale al loro numero (per esempio la caccia dell'uomo) il numero medio di prede aumenta e il numero medio di predatori diminuisce.

Dimostrazione. Definiamo media temporale di una funzione $f(t)$ su un intervallo di tempo ΔT con $T_2 > T_1$ la grandezza

$$\frac{1}{\Delta T} \int_{T_1}^{T_2} f(\tau) d\tau = \bar{f}_{\Delta T} \quad (2.46)$$

Si T il periodo di una traiettoria periodica con dato iniziale $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$.

Possiamo riscrivere l'equazione 2.40 come

$$\begin{cases} \dot{x}/x = (\lambda_1 - \lambda_4 y) \\ \dot{y}/y = (\lambda_3 x - \lambda_2) \end{cases}$$

integrando da 0 a T , otteniamo le soluzioni del sistema per quadrature

$$\log x(t) - \log \bar{x} = \lambda_1 t - \lambda_4 \int_0^t ds y(s), \quad \log y(t) - \log \bar{y} = -\lambda_2 t + \lambda_3 \int_0^t ds x(s)$$

dove $(x(t), y(t)) = \varphi(t)$. Dalla definizione 2.46 definiamo il valore medio del numero di prede e predatori, rispettivamente come

$$\langle x \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T ds x(s), \quad \langle y \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T ds y(s),$$

CAPITOLO 2. SISTEMI DINAMICI

per $t = T$ si ha

$$\langle x \rangle = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \quad \langle y \rangle = \frac{\lambda_1}{\lambda_4}$$

che non dipende dalla particolare orbita considerata. Questo dimostra la seconda legge di Lotka-Volterra.

Infine si consideri il sistema perturbato

$$\begin{cases} \dot{x} = (\lambda_1 - \lambda_4 y)x - \varepsilon_1 x \\ \dot{y} = (\lambda_3 x - \lambda_2)y - \varepsilon_2 y \end{cases} \quad (2.47)$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Ragionando come per la dimostrazione della seconda legge si trova

$$\langle x \rangle = \frac{\lambda_2 + \varepsilon_2}{\lambda_3} > \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \quad \langle y \rangle = \frac{\lambda_1 - \varepsilon_1}{\lambda_4} < \frac{\lambda_1}{\lambda_4} \quad (2.48)$$

□

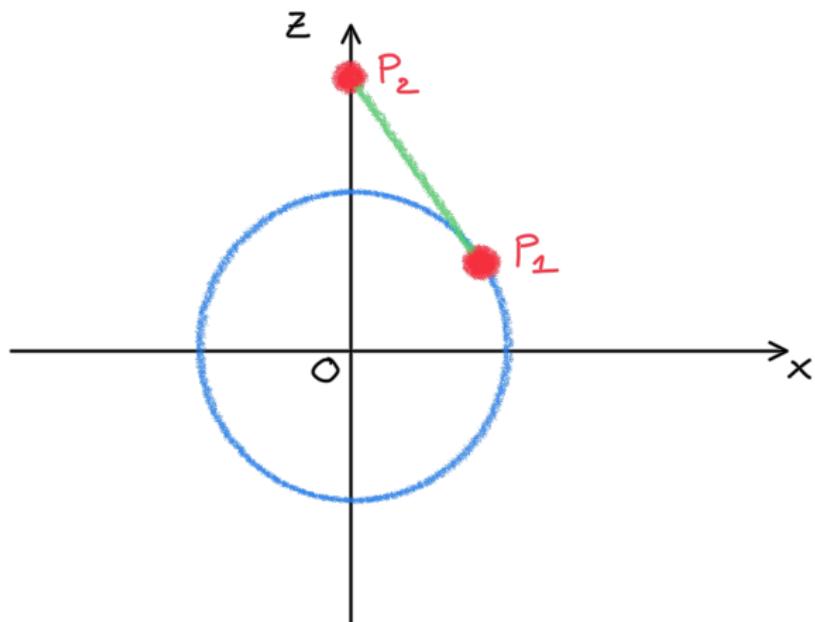
CAPITOLO 2. SISTEMI DINAMICI

CAPITOLO 3

Il Formalismo Lagrangiano

3.1 Introduzione

Consideriamo un sistema costituito da due punti materiali giacenti nel piano (x, z) , rispettivamente $P_1(x_1, z_1)$ e $P_2(x_2, z_2)$. La particella P_1 è vincolata a muoversi su una circonferenza di raggio R , mentre P_2 sull'asse delle ordinate, inoltre i due punti sono legati tra loro da un'asta inestensibile ed ideale di lunghezza d . Sul sistema agisce la forza di gravità.



I vincoli sui punti materiali sono rispettivamente rappresentabili dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ (x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - d^2 = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

se vogliamo descrivere la dinamica delle singole particelle utilizzando gli strumenti della meccanica Newtoniana otteniamo per ciascuna particella un sistema di due equazioni

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = \mathbf{F}_{x_1}^{tot} \\ m_1 \ddot{z}_1 = \mathbf{F}_{z_1}^{tot} \end{cases} \quad (3.2)$$

dove la forza totale agente sulla particella P_1 lungo uno degli assi può essere scritta come la somma di due grandezze

$$\mathbf{F}_{x_1}^{tot} = \mathbf{F}_1^{attive} + \boldsymbol{\phi}_1 \quad (3.3)$$

che rappresentano rispettivamente le forze che siamo in grado d'identificare e che agiscono sulla particella definendone lo stato di moto e le forze che prendono il nome di *reazione vincolare* e definiscono i vincoli che limitano lo stato di moto della particella lungo determinate traiettorie e sono forze che non sono conosciute a priori. Le reazioni vincolari possono essere determinate esplicitamente solo quando si sono risolte le equazioni del moto.

Esempio - Il Pendolo Semplice

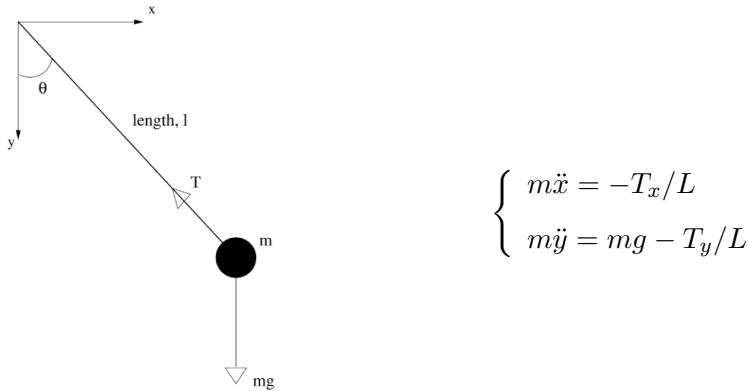
Consideriamo un pendolo semplice in un piano (x,y) costituito da un filo inestensibile ed ideale di lunghezza L fissato nell'origine O del sistema e alla cui estremità è presente un punto materiale P(x,y) di massa m . La particella è soggetta alla forza di gravità.

Il vincolo sulla particella P è rappresentato dall'espressione

$$x^2 + y^2 - L^2 = 0$$

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

Le equazioni del moto sono date dal sistema



dove \mathbf{T} rappresenta la tensione e la reazione vincolare del sistema che non conosciamo a priori, ma la sua determinazione dipende dalle soluzioni del sistema. Infatti parametrizzando il vincolo in coordinate polari

$$\left\{ \begin{array}{l} x = L\cos\theta \\ y = L\sin\theta \end{array} \right.$$

si ha che la soluzione delle equazioni del moto è data da

$$\ddot{\theta} = -(g/L)\sin\theta$$

e sostituendo nelle equazioni del sistema si ha che la reazione vincolare costituita dalla tensione è data da

$$T = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

Nel caso di sistemi molto complessi il calcolo delle reazioni vincolari non risulta essere agevole da un punto di vista computazionale. Ci chiediamo dunque se esista un modo per evitarne il calcolo, ma che tenga conto dell'informazione che fornisce. Per questo motivo ed altri s'introduce la meccanica Lagrangiana, che mediante lo studio delle equazioni di E-L permette di determinare le soluzione del moto incorporando le informazioni delle condizioni di vincolo.

3.2 Vincoli Posizionali

Gli esempi visti nell'introduzione ci suggeriscono che un vincolo è una condizione che limita i possibili valori che possono assumere le coordinate. Supponiamo di avere N punti materiali in uno spazio 3D e consideriamo la posizione di tutti i punti in unico vettore $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{3N})$.

Definizione 3.2.1. Definiamo vincolo una funzione f che lega tra di loro le coordinate dei punti.

I vincoli si dividono in due macro categorie:

- **Vincoli Olonomi:** la funzione $f(\mathbf{x}, t)$ di vincolo dipende solo dalla posizione \mathbf{x} .
- **Vincoli Anolonomi:** la funzione $f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ di vincolo dipende sia dalla posizione \mathbf{x} che dalla velocità $\dot{\mathbf{x}}$.

Definizione 3.2.2. Si definisce bilatero un vincolo olonomo f tale per cui

$$f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.4)$$

Definizione 3.2.3. Sia f una funzione di vincolo tale che

$$f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \geq 0 \quad (3.5)$$

allora f è un vincolo unilatero e anolonomo per la diseguaglianza in senso stretto.

Definizione 3.2.4. Per un vincolo f dipende dal tempo si aggiunge il suffisso mobile.

3.2.1 Gradi di Libertà

Consideriamo un sistema di N punti materiali i cui punti sono soggetti a k vincoli posizionali.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(\underline{x}) = 0 \\ f_2(\underline{x}) = 0 \\ \vdots \\ f_k(\underline{x}) = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

I vincoli ci permettono di legare tra di loro le coordinate dei punti, in modo da esplicitarle l'una rispetto all'altra, in questo modo si abbassa la dimensione del problema. Come si è visto nell'esempio del pendolo anche la parametrizzazione dei vincoli permette di ridurre le dimensioni del problema, in particolare in quel caso si è passati da 2 coordinate (x,y) ad una sola data dall'angolo θ .

Definizione 3.2.5. Dato un sistema di N particelle nello spazio servono $3N$ coordinate per descrivere il sistema, se queste sono legate tra loro da k relazioni di vincolo la dimensione del problema è riducibile $3N-k$ gradi di libertà.

Osservazione. Il sistema dei k vincoli olonomi in uno spazio \mathbb{R}^{3N} identifica un sottoinsieme(varietà differenziabile) che può essere parametrizzata da $3N-k$ variabili.

3.2.2 Cambi di Coordinate

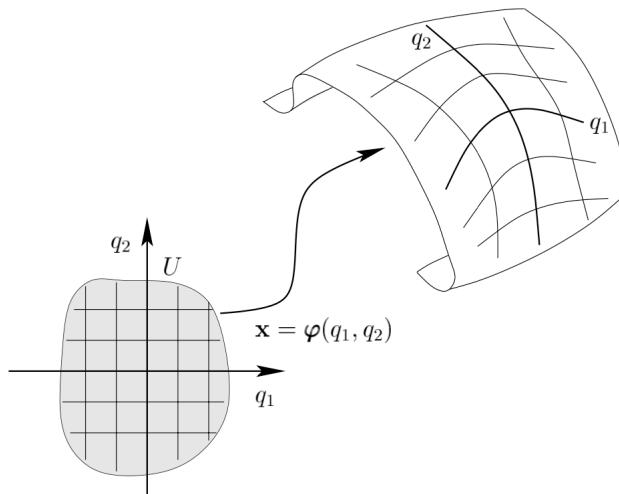
La parametrizzazione di un vincolo è una trasformazione di coordinate locale, per superfici generiche è necessario definire diverse parametrizzazioni che prendono il nome di carte e nei punti in cui si sovrappongono devono essere compatibili.

Definizione 3.2.6. Una trasformazione di coordinate è una funzione vettoriale regolare e biunivoca $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ dove $0 < m \leq n$ che definisce un sistema di n equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(q_1, \dots, q_m) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(q_1, \dots, q_m) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Il sistema di funzioni definito in (3.7) rappresenta un pezzo di superficie $M = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione m che giace in \mathbb{R}^n . Affinchè la trasformazioni di coordinate sia biettiva è necessario che il determinante della matrice Jacobiana associata sia non nullo.

Definizione 3.2.7. Se consideriamo le coordinate locali (q_1, \dots, q_m) e fissiamo tutte eccetto una otteniamo una curva nello spazio delle (x_1, \dots, x_n) poichè dipendono da una sola coordinata. Tale curva prende il nome di *linea coordinata*.



Definizione 3.2.8. Le coordinate (q_1, \dots, q_m) vengono definite *coordinate libere* poichè non esistono relazioni di vincolo tra di esse.

Variando ciascuna coordinata q_j si ottengono diverse linee coordinate che rappresentano le possibili traiettorie compatibili con il vincolo. Come sono fatte le velocità compatibili ?

3.2.3 Velocità generalizzate (o virtuali)

Consideriamo un punto della superficie M identificato dalle coordinate libere $(q_1, \dots, q_m) \in U$ e supponiamo di far variare solo la coordinata q_j e di tenere fisse le altre. Ipotizzando una variazione infinitesima h definiamo il rapporto incrementale

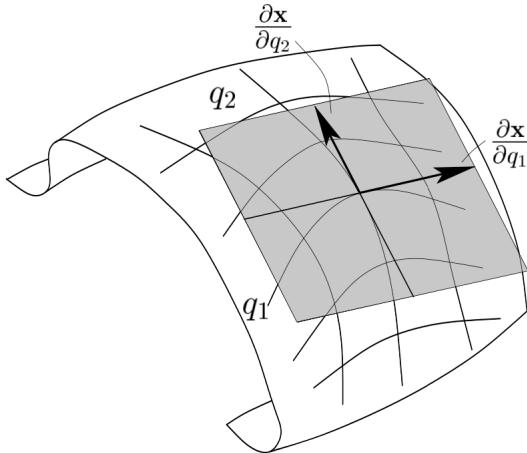
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(q_1, \dots, q_j + h, \dots, q_m) - \mathbf{x}(q_1, \dots, q_j, \dots, q_m)}{h} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \quad (3.8)$$

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

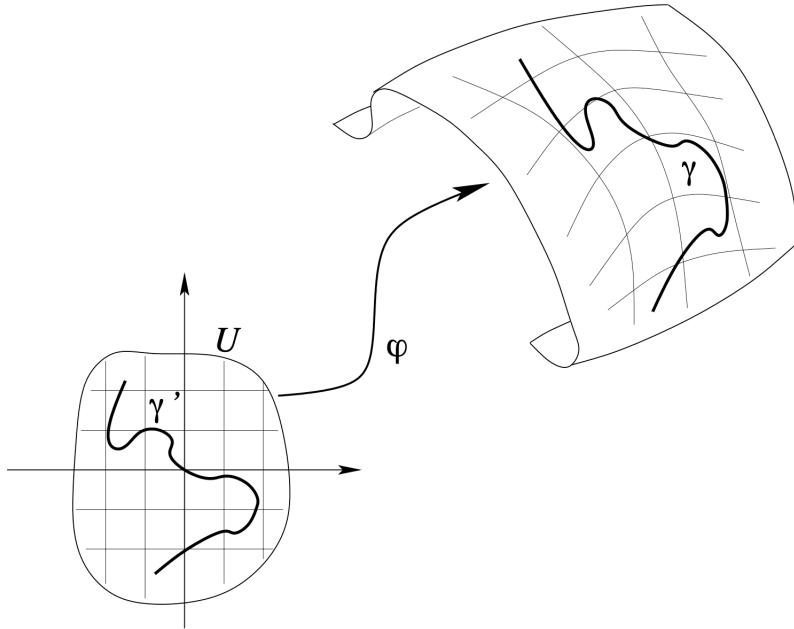
L'esistenza del limite è assicurata dalla ipotesi di regolarità delle funzioni, posta inizialmente. La quantità $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}$ è un vettore in \mathbb{R}^n applicato nel punto $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_m)$ e che per costruzione è tangente alla linea coordinata definita da q_j e dunque alla superficie M. Reiterando il procedimento si costruisce un insieme di m vettori

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_m} \right\} \quad (3.9)$$

tangenti alla superficie M. Il fatto che lo Jacobiano associato alla trasformazione di coordinate abbia rango massimo, fa sì che i vettori siano linearmente indipendenti, e quindi si intersechino trasversalmente nel punto $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_m)$. Le linee coordinate definite sulla superficie non sono in questo modo tangenti tra loro. L'insieme di vettori definiti in (3.9) costituisce una base locale per lo spazio vettoriale dato da un piano tangente alla superficie M di dimensione m passante per il punto $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_m)$. Tale spazio prende il nome di **spazio tangente** e si denota con $T_x M$. Ovviamente la base dipende dalla scelta delle coordinate locale q_1, \dots, q_m .



Consideriamo le coordinate generalizzate $q_1(t), \dots, q_m(t)$ come funzioni dipendenti dal tempo, per $t \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, scelto in modo che la sua immagine non esca dalla carta U. In questo modo otteniamo una tratta di curva in U, dove sono definite le coordinate generalizzate, che mediante la mappa $\mathbf{x} = \varphi(q_1, \dots, q_m)$ genera una curva sulla superficie.



La curva così ottenuta la indicheremo con $\mathbf{x}(t) : \mathcal{F} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$. Definiamo $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ il valore delle coordinate nell'istante di tempo $t_0 \in \mathcal{F}$ rispetto al quale calcoliamo il rapporto incrementale per uno spostamento infinitesimo h

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} \quad (3.10)$$

poichè \mathbf{x} dipende dalle coordinate generalizzate che dipendono dal tempo abbiamo che la relazione (3.10) è riscrivibile come

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j \Big|_{t=t_0} \quad (3.11)$$

dunque $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ è un vettore tangente alla superficie M nel punto \mathbf{x}_0 e le sue componenti rispetto alla base dello spazio tangente sono $\dot{q}_j(t_0)$. Le variabili $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m$ prendono il nome di **velocità generalizzate**.

Osservazione. Le velocità generalizzate in (3.11) definiscono un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

3.3 Equazioni di Eulero-Lagrange come equazioni di bilancio energetico

Consideriamo un punto materiale P definito in uno spazio 3D vincolato a muoversi lungo una curva, effettuiamo una parametrizzazione del vincolo e definiamo una trasformazione biunivoca e regolare delle coordinate di partenza

$$\mathbf{x}(q) = [x(q), y(q), z(q)] \quad (3.12)$$

le velocità compatibili con il vincolo saranno date dal vettore

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\frac{dx(q)}{dt} \dot{q}, \frac{dy(q)}{dt} \dot{q}, \frac{dz(q)}{dt} \dot{q} \right] \quad (3.13)$$

Assumiamo inoltre che l'evoluzione dinamica della particella sia dovuta all'azione di una forza attiva conservativa $\mathbf{F}^{attiva} = [F_x, F_y, F_z] = -\nabla U(x, y, z)$. La potenza delle forze attive $\pi^{attive} = \mathbf{F}^{attive} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ è riscrivibile rispetto alle coordinate di vincolo come

$$\pi^{attive} = \left[-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right] \cdot \left[\frac{dx(q)}{dq}, \frac{dy(q)}{dq}, \frac{dz(q)}{dq} \right] \dot{q} = \quad (3.14)$$

$$= - \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dq} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dq} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dq} \right] \dot{q} = - \frac{dU}{dq} \cdot \dot{q} \quad (3.15)$$

Definiamo l'energia cinetica del sistema rispetto alle coordinate generalizzate come

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \left[(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right] \dot{q}^2 = \frac{1}{2} G(q) \dot{q}^2 \quad (3.16)$$

dove $G(q)$ per sistemi a più di una dimensione prende il nome di matrice dell'energia cinetica. Si osservi che $G(q)$ dipende solo dalle coordinate generalizzate. È definita strettamente positiva $G(q) > 0$, ovvero non si annulla mai poiché se fosse uguale a 0, vorebbe dire che la matrice Jacobiana associata alla parametrizzazione del vincolo non ha rango massimo e dunque non si avrebbe una trasformazione di coordinate. La potenza totale è definita

come derivata totale rispetto al tempo dell'energia cinetica

$$\pi^{total} = \frac{dK(q, \dot{q})}{dt} = \underbrace{\frac{\partial K}{\partial q}}_A \dot{q} + \underbrace{\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}}_{\dot{B}} \underbrace{\frac{d\dot{q}}{dt}}_{\dot{B}} = \quad (3.17)$$

possiamo riscrivere il secondo addendo utilizzando la relazione

$$A\dot{B} = \frac{d(AB)}{dt} - \dot{A}B$$

e dunque la (3.17) diventa

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial K}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} = \\ &= \dot{q} \left[\frac{\partial k}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) \right] + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right)}_C = \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove il termine C per un sistema ad un grado di libertà è dato da

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \dot{q} = G(q) \dot{q}^2 = 2K(q, \dot{q}) \quad (3.19)$$

sostituendo in 3.18 si ha

$$= \dot{q} \left[\frac{\partial K}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) \right] + 2 \frac{d}{dt} K(q, \dot{q}) \quad (3.20)$$

di conseguenza la potenza totale rispetto alle coordinate e velocità generalizzate è data da

$$\frac{d}{dt} K(q, \dot{q}) = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} \right] \dot{q} \quad (3.21)$$

il termine di sinitra della 3.20 può essere riscritto come

$$\pi^{total} = \frac{dK(q, \dot{q})}{dt} = \mathbf{F}^{totali} \cdot \dot{\mathbf{x}} \quad (3.22)$$

come abbiamo visto nel capitolo della meccanica Newthonia le forze totali possono essere riscritte come il contributo di forze attive e forze vincolari $\mathbf{F}^{totali} = \mathbf{F}^{attive} + \phi_{vincolo}$. Per collegare l'equazione (3.21) all'equazione

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

(3.15) abbiamo bisogno di formulare l'ipotesi che i vincoli siano lisci.

Definizione 3.3.1. Si definisce una forza di vincolo ϕ liscia se la sua potenza è nulla lungo le posizioni e velocità compatibili con il vincolo.

$$\pi^{vincoli} = \phi_{vincoli} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (3.23)$$

Sotto tale ipotesi abbiamo che

$$-\frac{dU}{dq} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} \right] \quad (3.24)$$

poichè il potenziale U dipende solo dalle coordinate generali di posizione possiamo riscrivere l'equazione 3.23 come

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(K - U)}{\partial \dot{q}} \right] = \frac{\partial(K - U)}{\partial q} \quad (3.25)$$

La grandezza K-U prende il nome di funzione **Lagrangiana** del sistema

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (3.26)$$

riscrivendo l'equazione 3.24 rispetto alla Lagrangiana si ottiene **l'equazione di Eulero-Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}(q, \dot{q}) \right] = \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (3.27)$$

e definisce le equazioni del moto per le coordinate generalizzate.

Osservazione. L'equazione 3.23 può essere definita anche se le forze non sono di natura conservativa.

3.4 L'energia del sistema come costante del moto sotto l'ipotesi di vincolo liscio (Integrale di Jacobi)

Si consideri una Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ non dipendente esplicitamente dal tempo, ovvero $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$. Calcoliamo la derivata totale della Lagrangiana rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathcal{L}(q, \dot{q})] &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} = \\ &= \dot{q} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

scelta una soluzione $q(t)$ soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange l'addendo si sinistra è nullo. Dunque possiamo riscrivere la 3.27 come

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} - \mathcal{L} \right] = 0 \quad (3.29)$$

di conseguenza la grandezza $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} - \mathcal{L}$ è una costante del moto e prende il nome di **integrale di Jacobi**. Utilizzando la relazione 3.19 possiamo riscrivere la costante del moto come

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \mathcal{L} = 2K - \mathcal{L} = K + U = E \quad (3.30)$$

di conseguenza l'energia totale del sistema è una costante del moto.

3.5 Vincoli Anolonomi

Consideriamo un punto materiale vincolato a muoversi lungo una circonferenza di raggio R , in una configurazione di questo tipo velocità e posizione sono ortogonali tra loro.

$$2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0 \iff \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle = 0 \quad (3.31)$$

ogni volta che è possibile riscrivere un vincolo rispetto alle coordinate laplaciane questo prende il nome di vincolo Olonomo, esistono però condizioni

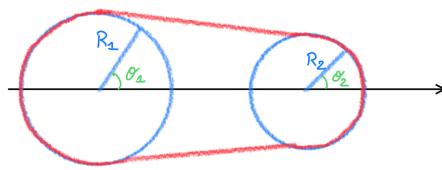
dove non è possibile scrivere i vincoli sulle velocità rispetto alle posizioni, tale tipologia di vincoli prendono il nome di **anolonomi**.

Esempio

Consideriamo un sistema dato da due ingranaggi di raggio R_1 e R_2 dove $R_2 > R_1$ collegati da una catena.

La configurazione della circonference di raggio R_1 e R_2 è identificata dai rispettivi angoli θ_1 e θ_2 . Essendo i due ingranaggi legati da una catena avremo che le rispettive velocità dei singoli ingranaggi devono coincidere dunque

$$R_1 \dot{\theta}_1 = R_2 \dot{\theta}_2$$



che equivale alla condizione di vincolo

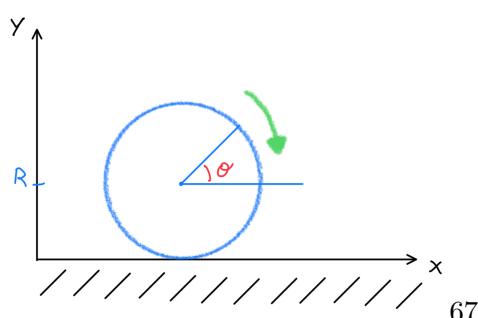
$$\frac{d}{dt}(R_1 \theta_1 - R_2 \theta_2) = 0$$

dalla relazione precedente sappiamo che per ogni tempo t gli angoli che possono essere assunti non sono qualsiasi ma devono soddisfare la condizione

$$R_1 \theta_1 - R_2 \theta_2 = C$$

di conseguenza il vincolo è olonomo poiché riconducibile alle posizioni.

Esempio



Si consideri un disco che rotola. Per descrivere la sua dinamica è necessario conoscere la posizione del centro di massa e dell'angolo di rotazione. La coordinata $y_c = R$ è costante lungo tutto il moto, ipotizziamo inoltre che il rotolamento avven-

ga senza strisciare. Di conseguenza la velocità lungo l'asse delle ascisse si lega alla velocità di rotazione nel seguente modo

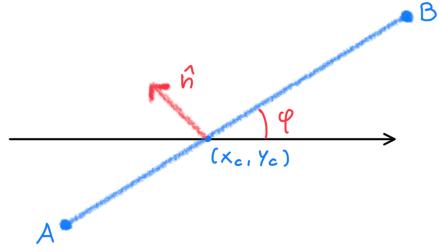
$$\dot{x}_c = -R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{x}_c = -R \frac{d\theta}{dt}$$

quindi ci si riconduce ad un vincolo olonomo dato da

$$x + R\theta = C$$

Esempio

Si consideri un problema a 3 g.d.l. dato dalle coordinate (x_c, y_c, φ) la velocità dell'asta deve avere direzione sempre lungo il segmento \overline{AB} . Tale condizione è esprimibile andando a considerare un versore $\hat{n} = (\sin\varphi, -\cos\varphi)$ ortogonale al segmento \overline{AB} tale che



$$\langle \dot{x}, \hat{n} \rangle = x_c \sin \varphi - y_c \cos \varphi = 0$$

Possiamo domandarci se sia possibile definire una funzione che dipende solo dalle coordinate il cui differenziale è dato da

$$df(x_c, y_c, \varphi) = \sin \varphi dx_c - \cos \varphi dy_c + 0 d\varphi$$

la risposta è negativa in quanto il rotore del campo è nullo

$$\nabla \times \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

di conseguenza non è una forma chiusa e quindi il vincolo risulta essere Anolonomo.

3.6 Vincoli dipendenti dal tempo e velocità virtuali

Ipotizziamo dia vere un vincolo dipendente esplicitamente dal tempo come per esempio un anello il cui raggio cambia nel tempo. Chiedere che la reazione vincolare compia lavoro nullo è sbagliato dato che questa cambia nel tempo; di conseguenza la condizione di vincolo liscio per scrivere le equazioni di E-L dall'energia deve essere modificata e per farlo introduciamo le **velocità virtuali**.

Definizione 3.6.1. Si definisce velocità virtuale la grandezza

$$\boldsymbol{v}_{virt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} \quad (3.32)$$

Ridefiniamo la condizione di vincolo liscio chiedendo che la potenza dei vincoli ϕ sia nulla lungo le velocità virtuali.

$$\pi^{totale} = \mathbf{F}^{totale} \cdot \boldsymbol{v}_{virtuali} = \mathbf{F}^{attive} \cdot \boldsymbol{v}_{virtuali} \quad (3.33)$$

Dimostriamo che le equazioni di E-L per una Lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ esplicitamente dipendente dal tempo coincidono con quelle di una Lagrangiana indipendente. Per farlo utilizziamo il procedimento usato nella sezione precedente

$$\pi^{attive} = \mathbf{F}^{attive} \cdot \boldsymbol{v}_{virtuali} \quad (3.34)$$

per semplicità consideriamo un grado di libertà e dei punti del l'equazione 3.33 è equivalente a scrivere

$$\left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q} \dot{q} \right) = \left(f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + f_z \cdot \frac{\partial z}{\partial q} \dot{q} \right) \quad (3.35)$$

ed ipotizziamo anche che le forze arrive siano conservative, ovvero

$$\mathbf{F}^{attive} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (3.36)$$

e quindi la 3.34 assume la forma

$$\left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q} \right) = - \left[\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} \right] = - \frac{\partial U}{\partial q} \quad (3.37)$$

Prima di riscrivere i termini di sinistra introduciamo due lemmi

Lemma 3.6.1.

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \quad (3.38)$$

Dimostrazione.

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{d}{dt} x(q, t) \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) = \frac{\partial x}{\partial q} \quad (3.39)$$

□

Lemma 3.6.2.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x}{\partial q} \right] = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \quad (3.40)$$

Dimostrazione.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial x}{\partial q} \right] = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \underbrace{\left[\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right]}_{\dot{x}} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \quad (3.41)$$

□

Uno degli addendi di sinistra può essere espresso come

$$\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q} = \left(\frac{d}{dt} (\dot{x}) \right) \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q} \right) - \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) \quad (3.42)$$

e applicando i lemmi precedenti la parte di sinistra dell'equazione 3.36 diventa

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}} \right) - m \left[\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q} \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \right] - \frac{\partial}{\partial q} \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \end{aligned} \quad (3.43)$$

e dunque le equazioni E-L sono date da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} K - \frac{\partial K}{\partial q} = - \frac{\partial U}{\partial q} \iff \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \mathcal{L}(q, \dot{q}) \right] = \frac{\partial}{\partial q} \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (3.44)$$

Osservazione. Nelle equazioni precedenti si è assunto che la massa del punto materiale fosse $m = 1$.

3.7 Equazioni di E-L dalle equazioni di Newton

Consideriamo N particelle nello spazio, definiamo la configurazione complessiva del sistema in unico vettore posizione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_{3N})$. Ipotizziamo di parametrizzare le x_j rispetto alle coordinate generalizzate (q_1, \dots, q_d) .

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(q_1, \dots, q_d, t) \\ x_2 = \varphi(q_1, \dots, q_d, t) \\ \vdots \\ x_{3N} = \varphi(q_1, \dots, q_d, t) \end{cases} \quad (3.45)$$

le velocità generalizzate per una singola componente assumono la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (3.46)$$

Costruiamo le velocità virtuali definendo le singole componenti del vettore $\mathbf{v}_{virtuali}$ come

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.47)$$

consideriamo N vincoli olonomi e lisci, e definiamo un unico vettore $\boldsymbol{\phi}$ tale che la potenza dei vincoli in ogni punto lungo le velocità virtuali è nulla. Si definisce in questo modo il principio di D'Alambert

$$\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}_k \cdot \mathbf{v}_k = 0 \quad (3.48)$$

La potenza totale del sistema è data da

$$\pi^{total} = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{attive} \cdot \mathbf{v}_k + \underbrace{\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\phi}_k \cdot \mathbf{v}_k}_{=0} \quad (3.49)$$

Come fatto per un solo grado di libertà assumiamo che \mathbf{F}^{attiva} sia una forza conservativa e dunque

$$\mathbf{F}^{attive} = -\nabla U(x_1, \dots, x_{3n}) \quad (3.50)$$

dunque possiamo riscrivere il termine di destra rimanente in 3.48 come

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^{attive} \cdot \mathbf{v}_k = - \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^d \frac{\partial U}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.51)$$

mentre il termine di destra diventa

$$\sum_{j=1}^d \left[\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial q_j}}_A \right] \dot{q}_j \quad (3.52)$$

il termine A può essere riscritto come

$$\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \dot{x}_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (3.53)$$

ottenuto dai due lemmi precedenti. Sostituendo in 3.51 otteniamo

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \right] - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \quad (3.54)$$

che rispettivamente rappresentano

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (3.55)$$

in conclusione

$$\sum_{j=1}^d \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = - \sum_{j=1}^d \frac{\partial U}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad \forall \dot{q}_j \quad (3.56)$$

e tale risultato equivale ad un sistema di d equazioni di Eulero Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \\ \forall j = 1, \dots, d \end{cases} \quad (3.57)$$

3.8 Lagrangiana ridotta

Definizione 3.8.1. Si consideri una Lagrangiana $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d, t)$ che non dipende esplicitamente dalla coordinate q_j , allora si dice che q_j è una **variabile ciclica**.

Dunque se q_j è una variabile ciclica si ha che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0$ di conseguenza dalle equazioni di E-L si ha che $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0$ e quindi $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ è una costante del moto, ed è esprimibile come

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = C(q_1, \dots, q_{d-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{d-1}) \quad (3.58)$$

dalle equazioni di E-L possiamo esplicitare \dot{q}_j rispetto le altre coordinate e velocità generalizzate

$$\dot{q}_j = f(q_1, \dots, q_{d-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{d-1}) \quad (3.59)$$

Abbiamo visto che per una Lagrangian indipendente dal tempo, l'energia cinetica è una costante del moto

$$E(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) = K(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) + U(q_1, \dots, q_d) \quad (3.60)$$

sostituiamo rispetto \dot{q}_j all'interno dell'equazione dell'energia. In questo modo i termini dell'energia coincidono con quella di una Lagrangiana con energia cinetica \tilde{K} e un potenziale efficace U_{eff} .

$$\mathcal{L} = \tilde{K} + U_{eff} \quad (3.61)$$

tale funzione prende il nome di **Lagrangiana ridotta** poichè i gradi di libertà ottenuti sono minori di quelli della Lagrangiana di partenza.

3.9 Punti di equilibrio di un sistema per 1 g.d.l.

Consideriamo inizialmente il caso per un solo grado di libertà, ed esprimiamo esplicitamente la dipendenza della Lagrangiana rispetto $G(q)$ funzione dell'energia cinetica

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}G(q)\dot{q}^2 - U(q) \quad (3.62)$$

i termini delle equazioni di E-L sono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = G'(q)\dot{q}^2 + G(q)\ddot{q} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \frac{dG}{dq}\dot{q}^2 - \frac{dU}{dq} \quad (3.63)$$

e quindi

$$\begin{aligned} G'\dot{q}^2 + G(q)\ddot{q} &= \frac{1}{2}G'(q)\dot{q}^2 - U' \\ G(q)\ddot{q} &= -\frac{1}{2}G'(q)\dot{q}^2 - U' \\ \ddot{q} &= -\frac{1}{2} \frac{G'(q)}{G(q)}\dot{q}^2 - \frac{U'}{G(q)} \end{aligned} \quad (3.64)$$

l'ultimo termine prende il nome di **forma normale dell'equazioni di Eulero Lagrange**. Riscrivendo l'equazione di E-L in forma normale otteniamo una EDO del secondo grado che può essere riscritta come sistema di EDO del primo ordine

$$\begin{cases} y = \dot{q} \\ \dot{y} = -\frac{1}{2} \frac{G'(q)}{G(q)}y^2 - \frac{U'(q)}{G(q)} \end{cases} \quad (3.65)$$

Dalla teoria dei sistemi dinamici al capitolo due sappiamo che le soluzioni sono stazionarie se sono del tipo $(\bar{q}, 0)$ e rispetto al nostro sistema dobbiamo dunque imporre che $U'(\bar{q}) = 0$. Dunque per trovare le soluzioni stazionarie del problema vincolato dobbiamo trovare i punti compatibili con vincolo tali per cui la derivata prima del potenziale del sistema si annulla.

Una domanda che possiamo porci è: **come determiniamo la stabilità dei punti ?**

3.9.1 Stabilità dei punti di equilibrio per 1 g.d.l.

Applichiamo il secondo teorema di Lyapunov, che ci dice che per un sistema dinamico l'energia è una buona funzione di Lyapunov essendo una costante del moto rispetto alle velocità e coordinate generalizzate.

Per determinare la stabilità del punto stazionario $(\bar{q}, 0)$, studiamo il segno della matrice Hessiana dell'energia del sistema.

$$H(\bar{q}, 0) = \begin{bmatrix} U''(\bar{q}) & 0 \\ 0 & G(\bar{q}) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Affinchè $(\bar{q}, 0)$ sia un punto di minimo per l'energia è necessario che $U''(\bar{q}) > 0$ in modo che la matrice Hessiana sia definita positiva. Per i teoremi di Lyapunov tale punto risulta essere di equilibrio stabile.

3.9.2 Linearizzazione del sistema attorno a un punto di equilibrio stabile per 1 g.d.l.

Dato un punto di equilibrio stabile $(\bar{q}, 0)$ per il sistema definito in 3.64, ipotizziamo si perturbare la soluzione do una quantità ε lungo una direzione h

$$\begin{cases} q(t) = \bar{q} + \varepsilon u(t) \\ y(t) = 0 + \varepsilon v(t) \end{cases} \quad (3.67)$$

Possiamo procedere in due modi per determinare come il sistema cambi rispetto ad una variazione infinitesima

- **I° metodo:** Sostituiamo la soluzione perturbata all'interno delle equazioni del sistema in 3.64

$$\begin{cases} \dot{q} = \varepsilon \dot{u} \\ \dot{\varphi} = \varepsilon \dot{v} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon \dot{u} = \varepsilon v \\ \varepsilon \dot{v} = -\frac{1}{2} \frac{G'(\bar{q} + \varepsilon u(t))}{G(\bar{q} + \varepsilon u(t))} \varepsilon^2 v^2 - \frac{U'(\bar{q} + \varepsilon u(t))}{G(\bar{q} + \varepsilon u(t))} \end{cases} \quad (3.68)$$

che possiamo riscrivere come

$$\varepsilon G(\bar{q} + \varepsilon u(t)) \dot{v} = -\frac{1}{2} G'(\bar{q} + \varepsilon u(t)) \varepsilon^2 v^2 - U'(\bar{q} + \varepsilon u(t)) \quad (3.69)$$

espandiamo l'equazione 3.68 con Taylor al secondo ordine in un'intorno del punto di equilibrio

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ G(\bar{q})\dot{v} = -U''(\bar{q})u \end{cases} \quad (3.70)$$

ottenendo l'equazione differenziale al secondo ordine \ddot{u} di un'oscillatore armonico

$$\ddot{u} = -\left(\frac{U''(\bar{q})}{G(\bar{q})}\right)u \quad (3.71)$$

- **II° metodo:** Sostituiamo la soluzione definita in 3.66 nella Lagrangiana e si sviluppa al secondo ordine usando Taylor in un intorno della soluzione

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}G(\bar{q} + \varepsilon u)\varepsilon^2\dot{u}^2 - U(\bar{q} + \varepsilon u) \quad (3.72)$$

in questo modo si ottiene la Lagrangiana linearizzata

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(u, \dot{u}) &\approx \frac{1}{2}G(\bar{q})\varepsilon^2\dot{u}^2 - U(\bar{q}) + U'(\bar{q})\varepsilon u + \frac{U''}{2}(\bar{q})\varepsilon^2u^2 = \\ &= \left[\frac{1}{2}G(\bar{q})\dot{u}^2 - \frac{U''}{2}(\bar{q})u^2\right]\varepsilon^2 - U(\bar{q}) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Le componenti dell'equazione di E-L associate alla Lagrangiana linearizzata saranno date da

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{u}}(u, \dot{u}) \right] = \varepsilon^2 G(\bar{q})\ddot{u} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial u}(u, \dot{u}) \right] = -\varepsilon^2 U''(\bar{q})u \quad (3.74)$$

e l'equazione

$$\ddot{u} = -\frac{U''(\bar{q})}{G(\bar{q})}u \quad (3.75)$$

che coincide con l'equazione differenziale di un oscillatore armonico.

Prende il nome di **piccola oscillazione** il termine

$$\omega^2 = \frac{U''(\bar{q})}{G(\bar{q})} \quad (3.76)$$

3.10 Punti di equilibrio di un sistema per N g.d.l.

Nella sezione precedente abbiamo visto che per sviluppare con Taylor in un intorno di un punto di equilibrio stabile ci restituisce l'equazione di un oscillatore armonico. Nel caso in più gradi di libertà iniziamo con lo studiare la struttura della matrice dell'energia cinetica.

3.10.1 Matrice dell'energia cinetica

Prendiamo un unico vettore per N punti materiali nello spazio $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{3N})$ con le rispettive masse $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{3N})$, e ipotizziamo che la parametrizzazione delle coordinate di posizione sia data da quelle coordinate, ma anche dal tempo $x_i = x_i(q_1, \dots, q_d, t)$, allora l'energia cinetica del sistema è data da

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 \quad (3.77)$$

dove il termine della velocità rispetto alle coordinate può essere definito in relazione delle coordinate generalizzate nel seguente modo

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (3.78)$$

il termine quadratico nell'equazione dell'energia cinetica assume la forma

$$\dot{x}_i^2 = \sum_{r,s=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \underbrace{\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2}_{=B} + 2 \frac{\partial x_i}{\partial t} \sum_{r=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \quad (3.79)$$

di conseguenza la forma dell'energia cinetica rispetto alle coordinate generalizzate è data da

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\sum_{r,s=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i B \quad (3.80)$$

dove il termine B compare solo se le coordinate spaziale hanno una dipendenza esplicita dal tempo. Nel caso in cui questo non sia vero si ha che

l'equazione 3.79 è data da

$$\begin{aligned} K(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\sum_{r,s=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^d \left[\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \right] \dot{q}_r \dot{q}_s \end{aligned} \quad (3.81)$$

che possiamo riscrivere in forma vettoriale come

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d] \cdot G(q_1, \dots, q_d) \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_d \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

dove $G(q_1, \dots, q_d)$ è prese il nome di **matrice dell'energia cinetica**. Tale matrice è una forma bilineare, simmetrica e definita positiva, ovvero per ogni scelta del vettore $\dot{\mathbf{q}} \neq 0$ si ha che $\sum_{r,s=1}^{3N} G_{r,s} \dot{q}_r \dot{q}_s > 0$.

3.10.2 Linearizzazione del sistema attorno ad un punto di equilibrio stabile per N g.d.l.

Rispetto all'espressione 3.80 possiamo scrivere la Lagrangiana del sistema come

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d) = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{3N} G_{rs}(q_1, \dots, q_d) \dot{q}_r \dot{q}_s - U(q_1, \dots, q_d) \quad (3.83)$$

dato \mathbf{q}^* tale per cui $\nabla U(\mathbf{q}^*) = 0$ che equivale a imporre che $\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, d$ e $H_U(\mathbf{q}^*)$ matrice Hessiana dell'energia potenziale definita positiva si ha che $(\mathbf{q}^*, 0)$ è un punto di equilibrio stabile secondo Lyapunov. Come fatto nel caso ad 1 g.d.l. procediamo a perturba la soluzione di un fattore ε lungo una certa direzione \mathbf{u} e studiare le proprietà del sistema perturbato. Rispettivamente avremo

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{u}(t) \quad \dot{\mathbf{q}} = \varepsilon \dot{\mathbf{u}}, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \varepsilon \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.84)$$

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

definiamo il sistema di equazioni di E-L come

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^d G_{\gamma\beta} \ddot{q}_\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^d \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - \frac{\partial U}{\partial q_\gamma} \\ \forall \gamma = 1, \dots, d \end{cases} \quad (3.85)$$

per lo studio delle equazioni possiamo procedere in due modi differenti che riconducono al medesimo risultato

- **I° metodo:** Si procede a sostituire la soluzione perturbata all'interno delle equazioni di E-L e sviluppare con Taylor fino al primo ordine in un suo intorno.

$$\sum_{\beta=1}^d G_{\gamma\beta} (\mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{u}) \varepsilon \ddot{u}_\beta = \sum_{\alpha,\beta}^d \Gamma_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{u}) \varepsilon^2 \dot{u}_\alpha \dot{u}_\beta - \frac{\partial U}{\partial q_\gamma} (\mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{u}) \quad (3.86)$$

procedendo con Taylor fissando γ si ottiene

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\beta=1}^d G_{\gamma\beta} (\mathbf{q}^*) \ddot{u}_\beta \right] \varepsilon &= - \left[\frac{\partial U(\mathbf{q}^*)}{\partial q_\gamma} + \frac{\partial^2 U(\mathbf{q}^*)}{\partial q_\gamma \partial q_1} \varepsilon u_1 + \dots + \frac{\partial^2 U(\mathbf{q}^*)}{\partial q_\gamma \partial q_d} \varepsilon u_d \right] \\ \left[\sum_{\beta=1}^d G_{\gamma\beta} (\mathbf{q}^*) \ddot{u}_\beta \right] \varepsilon &= - \frac{\partial U(\mathbf{q}^*)}{\partial q_\gamma} - \varepsilon \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial^2 U(\mathbf{q}^*)}{\partial q_\gamma \partial q_\alpha} u_\alpha = \\ \left[\sum_{\beta=1}^d G_{\gamma\beta} (\mathbf{q}^*) \ddot{u}_\beta \right] &= - \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial^2 U(\mathbf{q}^*)}{\partial q_\gamma \partial q_\alpha} u_\alpha \end{aligned} \quad (3.87)$$

dove i termini di destra e sinistra coincidono rispettivamente con

$$\left[\sum_{\beta=1}^d G_{\gamma\beta} (\mathbf{q}^*) \ddot{u}_\beta \right] = [G_0 \ddot{\mathbf{u}}]_\gamma \quad \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial^2 U(\mathbf{q}^*)}{\partial q_\gamma \partial q_\alpha} u_\alpha = [H_0 \mathbf{u}]_\gamma \quad (3.88)$$

dunque le equazioni del moto linearizzate coincidono con il sistema

$$G_0 \ddot{\mathbf{u}} = -H_0 \mathbf{u}$$

(3.89)

- **II° metodo:** Si sostituisce la soluzione perturbata all'interno della

Lagrangiana del sistema e si procede ad espandere al primo ordine con Taylor in un suo intorno.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{u}, \varepsilon \dot{\mathbf{u}}) &\approx \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{3N} G_{rs}(\mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{u}) \varepsilon^2 \dot{u}_r \dot{u}_s - U(\mathbf{q}^* + \varepsilon \mathbf{u}) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{3N} G_{rs}(\mathbf{q}^*) \varepsilon^2 \dot{u}_r \dot{u}_s - U(\mathbf{q}^*) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{r,s=1}^{3N} H_{rs}(\mathbf{q}^*) u_r u_s = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{r,s=1}^{3N} G_{rs}(\mathbf{q}^*) \dot{u}_r \dot{u}_s - \varepsilon^2 \sum_{r,s=1}^{3N} H_{rs}(\mathbf{q}^*) u_r u_s \right] \varepsilon^2 - U(\mathbf{q}^*)
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

calcolando le equazioni di E-L rispetto alla Lagrangiana linearizzata otteniamo gli stessi elementi in 3.87 e di conseguenza si ottiene l'equazione 3.88.

3.10.3 Frequenze proprie e modi normali di oscillazione

Data una Lagrangiana linearizzata in un intorno di un punto di equilibrio stabile dall'equazione 3.88 otteniamo un sistema di oscillatori armonici

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \ddot{u}_\gamma = -\frac{H_0^{s\gamma}}{G_0^{s\gamma}} u_\gamma \\
 \forall \gamma = 1, \dots, d
 \end{array}
 \right. \tag{3.91}$$

cerchiamo una soluzione del sistema della forma

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{w} \cos(\omega t + \phi) \tag{3.92}$$

ovvero tutti i gradi di libertà oscillano con la stessa pulsazione ed ampiezze \mathbf{w} diverse ed indipendenti dal tempo. Procediamo a sostituire il guess 3.91 all'interno dell'equazione 3.88 ottenendo la relazione

$$(\omega^2 G_0 - H_0) \mathbf{u} = 0 \iff (\omega^2 G_0 - H_0) \cos(\omega t + \phi) \mathbf{w} = 0 \tag{3.93}$$

affinchè tale relazione sia soddisfatta per ogni tempo t è necessario che $\mathbf{w} \in \text{Ker}[\omega^2 G_0 - H_0]$.

La grandezza ω prende il nome di **pulsazione propria**, mentre l'ampiezza

data dal vettore \mathbf{w} viene definita **modi normali di oscillazione**. La soluzione generale del sistema è data dalla sovrapposizione lineare di ciascun modo di oscillazione

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{q}^* + \sum_{i=1}^k \mathbf{w}_i \sin(\omega_i t + \phi_i) + \sum_{j=1}^k \mathbf{w}_j \cos(\omega_j t + \phi_j) \quad (3.94)$$

rispettivamente le pulsazioni proprie ω e i modi normali \mathbf{w} sono gli autovalori e autovettori della matrice M .

3.10.4 Stabilità delle soluzioni stazionarie per un sistema Lagrangiano

Le equazioni del moto rispetto alle coordinate generalizzate per una Lagrangiana linearizzata in un intorno di un punto di equilibrio sono

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} = -G_0^{-1}H_0\mathbf{u} \end{cases} \quad (3.95)$$

che possiamo esprimere in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \vdots \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -G_0^{-1}H_0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u \\ \vdots \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u \\ \vdots \\ y \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

il polinomio caratteristico associato alla matrice M è dato da $P(\omega) = \det(\omega I - M) = 0$ per calcolarlo riscriviamo la matrice $\omega I - M$ come

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -\frac{1}{\omega}G_0^{-1}H_0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \omega I & -I \\ \hline G_0^{-1}H_0 & \omega I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \omega I & -I \\ \hline 0 & \frac{1}{\omega}G_0^{-1}H_0 + \omega I \end{array} \right] \quad (3.97)$$

applicando il teorema di Binet abbiamo che il polinomio caratteristico è dato da

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \det(\omega I) \det \left(\omega I + \frac{1}{\omega}G_0^{-1}H_0 \right) = \\ &= \det(\omega^2 I + G_0^{-1}H_0) = \det(-G_0^{-1}(-\omega^2 G_0 - H_0)) \\ &= \det(-G_0^{-1}) \det(-\omega^2 G_0 - H_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

il fattore di destra ci dice che gli autovalori della matrice M coincido con le pulsazioni proprie del sistema linearizzato, ovvero $\lambda_i = -\omega_i^2$. Supponiamo che $\exists i$ tale che $\lambda_i < 0$ allora avremo che $\omega_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$ per il **I° teorema di Lyapunov**, il punto $(\mathbf{q}^*, 0)$ è di equilibrio instabile. Se invece tutte le soluzioni di $P(\lambda) = 0$ sono $\lambda_i > 0$ si ha che gli ω_i sono numeri immaginari puri il primo teorema di Lyapunov non è applicabile. Osserviamo che le λ_i soluzioni del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \det(\lambda G_0 - H_0) = 0$ il numero di autovalori positivi $\lambda_i > 0$ della matrice $\lambda G_0 - H_0$ coincide con il numero di autovalori positivi $\mu_i > 0$ della matrice H_0 e in egual modo per quelli negativi, di conseguenza in generale si ha che per una Hessiana definita positiva non si può applicare il I° teorema di Lyapunov.

Come facciamo a determinare la stabilità dei punti/o di equilibrio in questi casi ? per rispondere a tale domanda introduciamo il seguente teorema.

Teorema 3.10.1 (Teorema di Lagrange-Dirichlet). Dato un sistema ologono soggetto a forze conservative e con vincoli perfetti (bilaterali) indipendenti dal tempo, se l'energia potenziale ha un minimo relativo proprio quando il sistema assume una certa configurazione di equilibrio, allora in questo punto il sistema in equilibrio meccanico stabile, nel senso di Lyapunov.

Dimostrazione. Sappiamo dal **II° teorema di Lyapunov** che una buona funzione di Lyapunov è data dall'energia del sistema

$$E = \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, G(\mathbf{q})\mathbf{y} \rangle + U(\mathbf{q}) \quad (3.99)$$

allora determiniamo il suo punto di minimo

$$\nabla E = \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, \frac{\partial G}{\partial q} \mathbf{y} \rangle + \frac{\partial U}{\partial q}, G(\mathbf{q})\mathbf{y} \right) = (0, 0) \quad (3.100)$$

di conseguenza avremo che $\mathbf{y} = 0$ e deve esistere \mathbf{q}^* tale che $\frac{\partial U}{\partial q} = 0$, dunque $(\mathbf{q}^*, 0)$ è un punto stazionario per il sistema di equazioni differenziali e di conseguenza punto di equilibrio. Affinchè tale punto sia di minimo per l'energia dobbiamo verificare il segno della matrice Hessiana

$$H_E(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) = \left[\begin{array}{c|c} H_0(\mathbf{q}^*) & 0 \\ \hline 0 & G(\mathbf{q}^*) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} H_0 & 0 \\ \hline 0 & G_0 \end{array} \right] \quad (3.101)$$

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

poichè H_0 e G_0 sono definite positive si ha per il teorema di Binet che $H_E(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ è definita positiva, di conseguenza $(\mathbf{q}^*, \mathbf{0})$ è un punto di minimo per l'energia e quindi è un punto di equilibrio stabile.

□

Teorema 3.10.2. Sia G_0 una matrice simmetrica e definita positiva, e sia H_0 simmetrica allora:

1. \exists una base di \mathbb{R}^d fatta di autovettori di H_0 rispetto a G_0 .
2. dati due autovalori distinti $\lambda_i \neq \lambda_j$ si ha che $\langle \mathbf{w}_i, G_0 \mathbf{w}_j \rangle = 0$
3. Se H_0 è definita positiva allora $\lambda_i > 0 \quad \forall i$

3.10.5 Il principio di minima azione

Consideriamo un punto $(q, \dot{q}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ elemento dello spazio delle fasi, abbiamo che l'evoluzione della posizione del punto q nel tempo

$$q : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad q(t_0) = q_0 \quad \text{e} \quad q(t_1) = q_1 \quad (3.102)$$

definisce un cammino nello spazio delle configurazioni. Il numero di cammini che uniscono due punti nello spazio è infinito, dunque non è univoco, ci domandiamo quale sia il reale cammino che congiunge le due posizioni. Per rispondere a tale domanda introduzione una grandezza che è data dal funzionale d'azione.

$$S : \mathcal{C}_{0,1} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.103)$$

$$q \mapsto S[q]$$

definita sullo spazio dei cammini, che è uno spazio affine modellato su uno spazio vettoriale di dimensione infinita. Dove

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (3.104)$$

e \mathcal{L} definisce la Lagrangiana del sistema associata. L'azione ha una proprietà significativa rispetto ai cammini di un sistema, ovvero il cammino effettivamente percorso dal sistema coincide con il suo estremo inferiore.

Lemma 3.10.3. Sia $g(t)$ una funzione continua e derivabile in $[t_0, t_1]$ tale che $\forall h(t)$ continua in $[t_0, t_1]$ se

$$\int_{t_0}^{t_1} h \cdot g \, dt = 0 \Rightarrow g = 0$$

Dimostrazione. Sia $g(t) \neq 0$ allora esiste $\tau \in [t_0, t_1]$ tale che $g(\tau) > A$ dove $A > 0$ per continuità della funzione deve esistere un intorno dove g è al di sopra di A . Consideriamo un cammino h per cui il $g \cdot h > 0 \ \forall t$, in particolare in un intervallo di misura non nullo. Allora avremo che

$$\int_{\alpha}^{\beta} g \cdot h \, dt \neq 0$$

poichè l'integrale di una funzione positiva su un insieme di misura non nulla è non nullo. Di conseguenza l'unico caso possibile è che $g = 0$.

□

3.11 Equazioni di E-L nel formalismo variazionale

Teorema 3.11.1 (Formulazione variazionale delle equazioni di E-L). Se $q(t_0) = q_0$ e $q(t_1) = q_1$ per $t \in [t_0, t_1]$ allora esiste un cammino $q(t)$ tra i due punti che rende stazionario (minimo) il funzionale d'azione.

Dimostrazione. Sia $q \in \mathcal{C}_{0,1}$ e h una variazione, allora $q + \varepsilon h \in \mathcal{C}_{0,1}$ calcoliamo il rapporto incrementale del funzionale d'azione rispetto alla direzione di variazione

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S[q + \varepsilon h] - S[q]}{\varepsilon} = \langle \delta S, h \rangle$$

tale grandezza prende il nome di **differenziale d'azione** calcolato rispetto

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

h, possiamo riscrivere tale equazione come

$$\begin{aligned}
 \langle \delta S, h \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \right] = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \varepsilon h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \varepsilon \dot{h} + o(\varepsilon) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \right] = \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} h dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{h} dt}_{\text{integrando per parti}} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} h \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) h dt = \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} h \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt
 \end{aligned}$$

Se $q(t)$ è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange allora $\langle \delta S, h \rangle = 0$.

Viceversa se il differenziale d'azione è nullo per una variazione h , applicando il Lemma 5.2.5 abbiamo che l'unico caso possibile è che

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

e dunque $q(t)$ soddisfa le equazioni di E-L

□

Teorema 3.11.2 (Invarianza delle trasformazioni per trasformazioni di "gauge" della Lagrangiana). Date le Lagrangiane $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ e $\tilde{\mathcal{L}}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}$ allora le equazioni di Eulero-Lagrange delle rispettive Lagrangiane coincidono tra loro, ovvero

$$\langle \delta S, h \rangle = \langle \delta S', h \rangle \quad (3.105)$$

ovvero i minimi dei funzionali d'azione coincidono tra loro.

Dimostrazione. Riscriviamo l'equazione 3.105 come

$$\langle \delta(S - S'), h \rangle = 0$$

questo equivale a scrivere

$$\begin{aligned} S'(q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}, t) - S'(q, \dot{q}, t) - S(q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}, t) + S(q, \dot{q}, t) = \\ = (S' - S)(q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}, t) - (S' - S)(q, \dot{q}, t) \end{aligned}$$

dove

$$(S' - S)[q] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dF(q, t)}{dt} dt \quad \text{e} \quad (S' - S)[q + \varepsilon h] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} F(q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}, t) dt$$

applicando il teorema fondamentale del calcolo otteniamo

$$\begin{aligned} (S' - S)[q + \varepsilon h] &= F(q(t_1) + \varepsilon h(t_1), t_1) - F(q(t_0) + \varepsilon h(t_0), t_0) \\ -(S' - S)[q] &= -[F(q(t_1), t_1) - F(q(t_0), t_0)] \end{aligned}$$

poiché $h(t_1) = h(t_0) = 0$ si conclude che

$$(S' - S)[q + \varepsilon h] - (S' - S)[q] = 0$$

e quindi la relazione 3.105 è verificata. \square

Il teorema ci dice che anche se le azioni non coincidono, la loro variazione è la medesima. Si ipotizzi di avere una particella di massa m in un campo elettromagnetico, a seconda della scelta del potenziale vettore, la Lagrangiana è diversa, il teorema appena discusso ci dice che a prescindere dal potenziale vettore considerato le equazioni che descrivono il moto sono indipendenti da tale scelta.

3.12 Teorema di Noether e Simmetrie

Data una Lagrangiana $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_d, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d, t)$, supponiamo che esista almeno una coordinata generalizzata q_α che è una variabile ciclica del moto, allora il momento coniugato $p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha}$ è una costante del moto. Applichiamo una trasformazione delle coordinate traslando solo la componente q_α di un

fattore fissato s

$$\begin{array}{ll}
 q_1 \longmapsto q_1 = q'_1 & \dot{q}_1 \longmapsto \dot{q}_1 \\
 \vdots & \vdots \\
 q_{\bar{\alpha}} \longmapsto q_{\bar{\alpha}} + s_{\bar{\alpha}} = q'_{\alpha} & \dot{q}_{\alpha} \longmapsto \dot{q}_{\alpha} \\
 \vdots & \vdots \\
 q_d \longmapsto q_d = q'_d & \dot{q}_d \longmapsto \dot{q}_d
 \end{array} \tag{3.106}$$

rispetto ad una trasformazione di questo tipo la Lagrangiana del sistema rimane invariata.

Definizione 3.12.1. Chiamiamo gruppo a un parametro di diffeomorfismi definiti sullo spazio delle configurazioni l'insieme di trasformazioni differenziabili invertibili dello spazio delle configurazioni in sè che dipendano in maniera differenziabile da un parametro $s \in \mathbb{R}$. Indicheremo con \mathcal{G} tale gruppo e con T_s gli elementi appartenenti.

Definizione 3.12.2. Una trasformazione $T_s \in \mathcal{G}$ gode delle seguenti proprietà:

- $\forall s \in \mathbb{R}$ fissato, T_s è una mappa invertibile.
- $\forall q$ coordinata generalizzata è definibile un parametro s
- T_0 coincide con la mappa identità.
- $T_{s_1} \circ T_{s_2} = T_{s_2+s_1}$

Consideriamo un sistema lagrangiano. Assumiamo per semplicità che lo spazio delle configurazioni sia identificabile (almeno localmente) con \mathbb{R}^N mediante un'opportuna scelta di coordinate: in tal caso ogni elemento $g(\alpha) \in \mathcal{G}$ risulta essere una trasformazione di coordinate, differenziabile e invertibile (con inversa differenziabile), che indicheremo con

$$q_k \rightarrow Q_k(\mathbf{q}, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall k = 1, \dots, N \tag{3.107}$$

da \mathbb{R}^N in sè. In tal caso diremo che \mathcal{G} è un gruppo a un parametro di trasformazioni.

Definizione 3.12.3. Si definisce generatore infinitesimale del gruppo \mathcal{G} delle trasformazioni ad un parametro l'elemento

$$q'_\alpha = Q_\alpha(q_\alpha, s) = q_\alpha + s \frac{dQ}{ds}(\mathbf{q}, s) \Big|_{s=0} + o(s) \quad (3.108)$$

Esempio

Consideriamo una trasformazione di coordinate data da una rotazione nel piano (x, y) che nella notazione usata in questa sezione diventa

$$\begin{cases} x' = x \cos s - y \sin s \\ y' = x \sin s + y \cos s \end{cases}$$

dove $\mathbf{q}'_s = [x', y']$ il generatore infinitesimale della trasformazione sarà dato da $\mathbf{v} = \frac{dq'_s}{ds} = (-x \sin s - y \cos s, x \cos s - y \sin s)|_{s=0} = (-y, x)$ che definisce il campo vettoriale delle rotazioni nel piano. Le velocità restano invariate rispetto alla trasformazione in quanto s non dipende esplicitamente dal tempo.

Definizione 3.12.4. Sia \mathcal{G} un gruppo ad un parametro. Se la lagrangiana \mathcal{L} è lasciata invariata da \mathcal{G} ,

$$\mathcal{L}(Q_\alpha(\mathbf{q}, s), \dot{Q}_\alpha(\mathbf{q}, s)) = \mathcal{L}(q_\alpha, \dot{q}_\alpha) \quad \forall s \quad (3.109)$$

diremo che \mathcal{G} è un gruppo di simmetria per \mathcal{L} .

Teorema 3.12.1 (Teorema di Noether). Consideriamo la famiglia di trasformazioni ad un parametro

$$q_i(t) \rightarrow Q_i(s, t) \quad s \in \mathbf{R} \quad (3.110)$$

tali che $Q(0, t) = q(t)$. Allora tali trasformazioni vengono definire **simmetrie** continue di una Lagrangiana \mathcal{L} se

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{L}(Q_i(s, t), \dot{Q}_i(s, t), t) = 0 \quad (3.111)$$

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

per ciascuna di tali simmetrie esiste una quantità conservata

$$I := \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} Y_{\alpha} \quad (3.112)$$

dove Y_{α} è il generatore infinitesimo della trasformazione.

Dimostrazione.

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial s} \quad (3.113)$$

dunque

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial L}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial s} \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial Q_i}{\partial s} \right|_{s=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial s} \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i}{\partial s} \right) \right|_{s=0} \end{aligned} \quad (3.114)$$

di conseguenza la grandezza

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial Q_i}{\partial s} \quad (3.115)$$

per $s = 0$ è una costante del moto per tutti i tempi dove il termine $\frac{\partial Q_i}{\partial s} = Y_i$ generatore infinitesimo della trasformazione.

□

Il teorema di Noether ci dice che le costanti del moto sono associate alle simmetrie del problema e non alle coordinate, di conseguenza sono le simmetrie che ci suggeriscono quali coordinate scegliere affinchè alcune quantità siano conservative.

Esempio

Consideriamo un sistema isolato di N particelle descritto dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (3.116)$$

L è simmetrica rispetto il gruppo ad un parametro per traslazione: $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + s\mathbf{n}$ per ogni vettore \mathbf{n} e $s \in \mathbb{R}$. Questo significa che

$$L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, t) = L(\mathbf{r}_i + s\mathbf{n}, \dot{\mathbf{r}}_i, t) \quad (3.117)$$

e quindi lo spazio è omogeneo e le traslazioni del sistema per una quantità s lungo la direzione \mathbf{n} non modificano le equazioni del moto. Per il teorema di Noether deve esistere una grandezza associata che è costante del moto rispetto al sistema traslato. Questa è data da

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \mathbf{n} = \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} \quad (3.118)$$

che coincide con la quantità di moto totale lungo la direzione \mathbf{n} . Poichè tale relazione è verificata per qualsiasi \mathbf{n} siamo certi che $\sum_i p_i$ è conservata.

3.13 Applicazioni

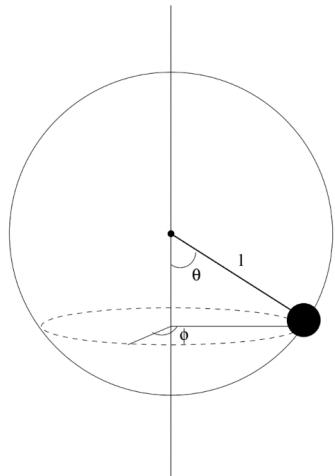
3.13.1 Pendolo Sferico

Il pendolo sferico può ruotare in tre dimensioni. Il sistema possiede due gradi di libertà dati dagli angoli $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi)$ ed è soggetto alla forza di gravità. Il vincolo del punto materiale è espresso dalla funzione

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

e le coordinate cartesiane vengono parametrizzate rispetto al vincolo venendo trasformate in coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = R \cos\phi \sin\theta \\ y = R \sin\phi \sin\theta \\ z = -R \cos\theta \end{cases}$$



CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

la Lagrangiana del sistema rispetto alle coordinare parametrizzate è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta$$

applicando il teorema di Noether rispetto alla trasformazione in coordinate sferiche si ha che la grandezza

$$L_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (3.119)$$

è una costante e dunque $\dot{\phi}$ è una variabile ciclica del problema. Tale grandezza coincide con il momento angolare lungo la direzione ϕ . Di conseguenza l'equazione del moto di E-L è data solo rispetto alla coordinata lagrangiana θ

$$mR^2 \ddot{\theta} = mR^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgR \sin \theta \quad (3.120)$$

di conseguenza possiamo andare a definire la Lagrangiana ridotta andando a sostituire

$$\dot{\phi} = \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \theta}$$

all'interno dell'equazione dell'energia del sistema ottenendo

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \underbrace{\frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2}_{\text{Termine Cinetico}} + \underbrace{\frac{L_0}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta}_{\text{Potenziale efficace}} \quad (3.121)$$

di conseguenza la Lagrangiana efficace (o ridotta) si definisce come

$$\mathcal{L}_{eff}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mR^2 \dot{\theta}^2 - \frac{L_0}{2mR^2 \sin^2 \theta} - mgR \cos \theta \quad (3.122)$$

e le equazioni del moto ridotte assumono la forma

$$mR^2 \ddot{\theta} = -\frac{L_0^2 \cos \theta}{mR^2 (\sin^3 \theta)} - mgR \sin \theta \quad (3.123)$$

Osservazione. Bisogna sostituire $\dot{\phi}$ nell'energia o nelle equazioni del moto. Se si sostituisce direttamente nella Lagrangiana si deriva un equazione simile alla 3.123, ma con un segno meno sbagliato. Questo è dovuto al fatto che le

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

equazioni di E-L sono derivate assumendo che θ e ϕ siano indipendenti tra loro.

Nello studio del moto possiamo formulare due ipotesi:

- $L_0 = 0$: in questo caso l'equazione del moto coincide con quella di un pendolo semplice

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta$$

- $L_0 \neq 0$: in questo caso abbiamo che

$$mR^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \theta}$$

che coincide con l'equazione 3.123. Di conseguenza per capire il comportamento del sistema studiamo qualitativamente il potenziale efficace.

Studio qualitativo del potenziale efficace per $L_0 \neq 0$

Riscriviamo il potenziale efficace come

$$U_{eff}(\theta) = \frac{L_0}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta = B \cos \theta + \frac{A}{2 \sin^2 \theta} \quad A, B > 0$$

e ne studiamo qualitativamente il comportamento, avremo che U_{eff} possiede due asintoti verticali in 0^+ e π^-

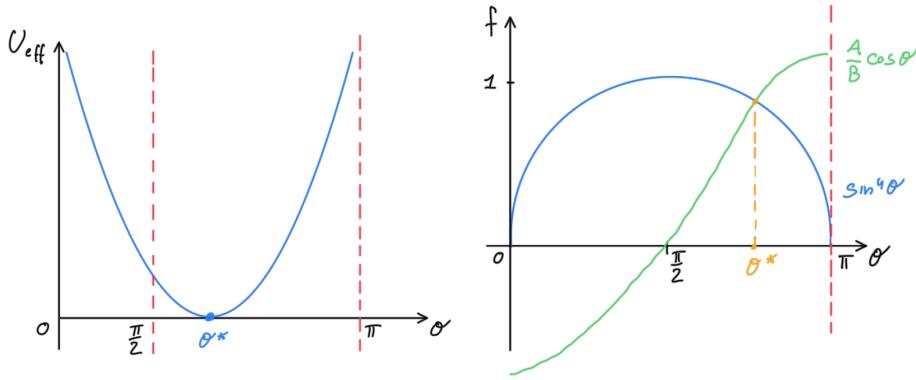
$$\lim_{\theta \rightarrow \theta^+, \pi^-} U_{eff} = +\infty$$

rispettivamente la derivata prima è data da

$$U'_{eff} = -B \sin^4 \theta - \frac{A \cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

poichè la funzione è continua e possiede due asintoti con lo stesso segno al limite ed è definita positiva tra essi, ci aspettiamo che sia convessa e dunque esiste un punto di minimo. Per determinarlo studiamo qualitativamente la soluzione di

$$\sin^4 \theta = \frac{A}{B} \cos \theta$$



dall'immagine soprastante si deduce che esista un punto di minimo $\theta^* \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Se l'energia del sistema coincide con $E = E_{min}$ ovvero $\theta(t) = \theta^* \quad \forall t$ dalle equazioni del moto di ha che

$$\dot{\phi} = \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \theta^*}$$

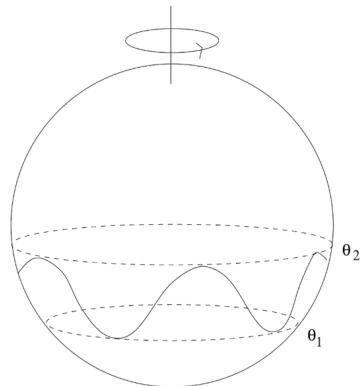
dunque essendo θ costante anche, si dall'equazione precedente abbiamo che il punto materiale si muove di moto circolare uniforme. Se l'energia $E > E_{min}$ si hanno delle traiettorie periodiche. Il cui periodo è dato da

$$T = 2 \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}(E - U_{eff})}} \quad (3.124)$$

Il modolo del pendolo è periodico rispetto la coordinata θ , ma non è necessariamente vero che lo sia anche rispetto ϕ . Di conseguenza possiamo domandarci se il moto complessivo del sistema sia periodico, ovvero se la particella parte da un punto dopo un determinato periodo di tempo ci ritorna?

Periodicità totale del moto

Preso un livello di energia $E > E_{min}$, abbiamo visto che l'angolo θ può assumere valori solo tra $[\theta_{min}, \theta_{max}]$. In mezzo a tali due punti esiste θ^* rispetto al quale il potenziale efficace U_{eff} è minimo e rappresenta un orbita stabile. Tale configurazione



viene assunta se si bilancia il momento angolare L_0 e l'energia E nel modo corretto.

Per studiare la periodicità del moto rispetto all'angolo ϕ esprimiamo

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{L_0}{2mR^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^{-1} \quad (3.125)$$

dove

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2(E - U_{eff})}{mR^2}$$

di conseguenza da 3.125 abbiamo

$$\Delta\phi = 2 \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta = 2 \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{L_0}{mR^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\left[\frac{2}{mR^2} (E - U_{eff}) \right]^{1/2}} d\theta \quad (3.126)$$

il moto totale del sistema è periodico quando

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\phi} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \quad (3.127)$$

3.13.2 Potenziali generalizzati

Fino a questo punto si è costruita la teoria Lagrangiana, considerando solo forze di natura conservativa che possono essere espresse rispetto al potenziale. Come sappiamo dalla meccanica Newtoniana esistono tipi di forze che non dipendono dalla posizione come per esempio l'attrito viscoso, ma dalla velocità. Di conseguenza è necessario costruire una formulazione Lagrangiana che ci permetta di trattare questi tipi di forze.

Nel caso in cui si ha un energia potenziale V non conservativa questa prende il nome di **potenziale generalizzato** se dipende dalle velocità

Lemma 3.13.1. Un potenziale generalizzato V è al più lineare rispetto alle \dot{q}_α

Dimostrazione. Sia $V_\alpha = V_\alpha(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$ e ammetta derivate parziali nulle

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\beta} \right) = 0$$

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

allora V è affine rispetto le \dot{q} , ovvero

$$V = \sum_{\alpha} A_{\alpha}(q, t) \dot{q}_{\alpha} - U(q, t)$$

il termine

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial V}{\partial q^{\alpha}} = \frac{d}{dt} A_{\alpha}(q, t) - \sum_{\beta} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}} \\ &= \sum_{\beta} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t} - \sum_{\beta} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}} \end{aligned}$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - \frac{\partial V}{\partial q^{\alpha}} = \sum_{\beta} \left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial A_{\beta}}{\partial q^{\alpha}} \right) \dot{q}^{\beta} + \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}} \quad (3.128)$$

dunque Q_{α} dipende linearmente dalle \dot{q} . \square

Lemma 3.13.2. La potenza delle forze è data da

$$\pi = \sum_{\alpha}^1 Q_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} = \sum \left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q^{\alpha}} \right) \dot{q}^{\alpha} \quad (3.129)$$

dove

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial A_{\beta}}{\partial q^{\alpha}} \right) \dot{q}^{\beta} \dot{q}^{\alpha} = 0 \quad (3.130)$$

3.13.3 Particella carica in un campo elettromagnetico

Si consideri una particella di carica q e massa m immersa in un campo elettromagnetico \mathbf{E} e \mathbf{B} , ricordiamo che tali grandezze possono essere riscritte rispetto a un potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ e un potenziale scalare $\phi(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

la carica q sarà soggetta alla somma della forza di Coulomb e di Lorentz

$$m \ddot{\mathbf{x}} = q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} \right]$$

che possiamo riscrivere come

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -q\nabla\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}(\dot{\mathbf{x}} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \quad (3.131)$$

Dimostriamo che dato un **potenziale generalizzato**

$$U = q\phi - \frac{q}{c}\langle \mathbf{A}, \dot{\mathbf{x}} \rangle \quad (3.132)$$

e definita la Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{q}{c}\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{A} \rangle - q\phi \quad (3.133)$$

le equazioni di E-L coincidono con l'espressione 3.128, infatti

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{\mathbf{x}} + \frac{q}{c}\mathbf{A} \right) + q\nabla\phi - \frac{q}{c}\nabla(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}) = 0 \quad (3.134)$$

il termine

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_i \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

osserviamo che il termine

$$B_c = \varepsilon_{cab} \frac{\partial A_b}{\partial x_a} \quad \iff \quad \varepsilon_{abc} B_c = \frac{\partial A_b}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial r_b}$$

dunque possiamo riscrivere le equazioni del moto di E-L come

$$m\ddot{r}_a = eE_a + e\epsilon_{abc}\dot{r}_b B_c \quad (3.135)$$

che in notazione vettoriale coincidono con 3.128.

Invarianza rispetto alla trasformazione di Gauge

Il potenziale scalare e vettore non sono unici. In quanto potremmo fare una trasformazione

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \quad (3.136)$$

e otterremo gli stessi campi \mathbf{E} e \mathbf{B} per qualsiasi funzione χ . Tali trasformazioni prendono il nome di trasformazioni di Gauge. Sotto tali trasformazioni

CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

la Lagrangiana non rimane invariata

$$L \rightarrow L + \frac{q}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{q}{c} \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla \chi = L + \frac{q}{c} \frac{d\chi}{dt} \quad (3.137)$$

ma rimangono preservate le equazioni del moto.

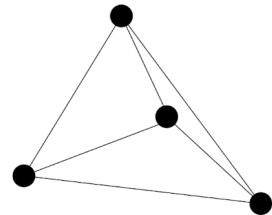
CAPITOLO 3. IL FORMALISMO LAGRANGIANO

CAPITOLO 4

Il Moto del Corpo Rigido

4.1 Introduzione

In questa trattazione consideriamo corpi estesi che non possiedono gradi di libertà internamente alla loro struttura. Corpi di questo tipo prendono il nome di **corpi rigidi**, e li modellizziamo considerandoli come una collezione di N punti materiali vincolati tra loro rigidamente. Ovvero la distanza tra di essi è costante.



$$|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = \text{costante} \quad \forall i, j = 1, \dots, N \quad (4.1)$$

Un corpo rigido nello spazio è descritto da sei gradi di libertà

3 Traslazione + 3 Rotazione

Il moto più comune che può assumere è dato da una roto-traslazione dei suoi punti. Nelle sezioni successive svilupperemo gli strumenti necessari a descrivere questo tipo di moto utilizzando gli strumenti della meccanica Lagrangiana.

4.2 Cinematica

4.2.1 Olonomia del vincolo di rigidità

Innanzitutto verifichiamo che un corpo rigido possa essere descritto con gli strumenti della meccanica Lagrangiana, ovvero verifichiamo che i vincoli di rigidità sui punti, e dunque le forze interne presenti nel sistema, rappresentino una condizione di vincolo liscio.

Abbiamo che

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)\| = \langle \dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \rangle = 0 \quad (4.2)$$

dunque le velocità relative sono ortogonali alla direzione congiungete tra le posizioni dei punti materiali per ogni tempo. La potenza del vincolo complessiva è data da

$$\pi_{tot} = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\phi}_j \cdot \dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\phi}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.3)$$

la relazione vincolare $\boldsymbol{\phi}_j$ rappresenta la forza esercitata dal punto j sul punto i, e quindi è diretta lungo la congiungente dei due punti. Analogamente vale il viceversa per $\boldsymbol{\phi}_i$. Entrambe hanno stesso modulo ma verso opposto.

$$\boldsymbol{\phi}_j = \alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\phi}_i = -\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (4.4)$$

dunque la 4.3 diventa

$$\begin{aligned} \pi_{tot} &= \alpha (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - \alpha (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}}_j = \\ &= \alpha (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

dunque possiamo concludere che i vincoli di rigidità di un corpo rigido sono dei vincoli lisci.

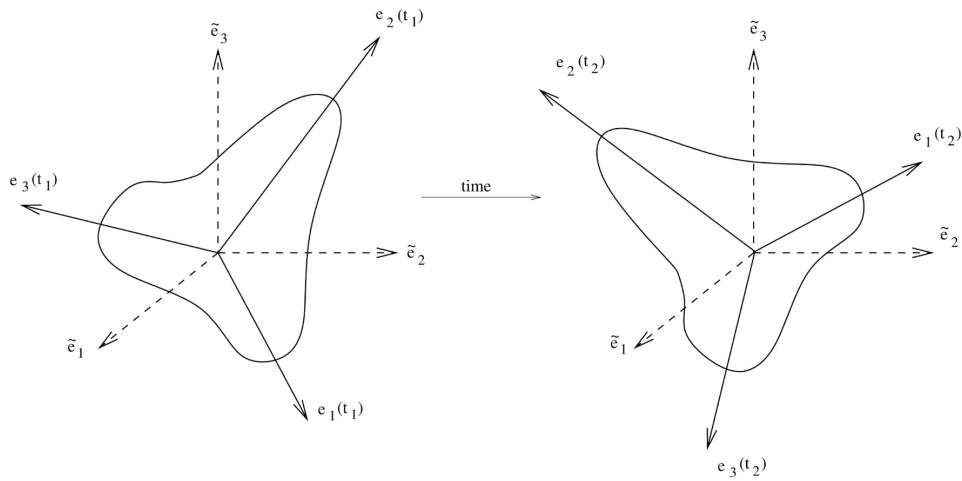
4.2.2 Spazio delle configurazioni

Consideriamo un corpo con un punto fissato P nello spazio e che sia libero di ruotare attorno ad esso. Per descrivere il moto abbiamo bisogno di definire un sistema di riferimento fisso (sistema del laboratorio) la cui base è data da

CAPITOLO 4. IL MOTO DEL CORPO RIGIDO

$\{\tilde{\mathbf{e}}_a\}$ è un sistema di riferimento mobile sovrapposto e solidale con il corpo descritto da una base $\{\mathbf{e}_a(t)\}$. Dove rispettivamente gli assi descritti dalle basi sono ortogonali tra loro

$$\tilde{\mathbf{e}}_a \cdot \tilde{\mathbf{e}}_b = \delta_{ab} \quad , \quad \mathbf{e}_a(t) \cdot \mathbf{e}_b(t) = \delta_{ab} \quad (4.6)$$



Per descrivere le rotazioni nello spazio utilizziamo la matrice $R \in SO(3)$, che gode della proprietà per cui la sua inversa, coincide con la trasposta, ovvero

$$R \cdot R^T = R^T \cdot R = I \Rightarrow R^T = R^{-1} \quad (4.7)$$

e possiede determinante non nullo, e quindi è una mappa invertibile. Prendiamo un punto \mathbf{x} appartenente al corpo rigido, questo può essere espresso rispetto alla base del SR del laboratorio come

$$\tilde{\mathbf{x}} = \sum_i \tilde{x}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$$

di conseguenza quando facciamo agire la matrice R sul vettore, questa in realtà trasforma la base rispetto alla quale espresso

$$\mathbf{x} = R\tilde{\mathbf{x}} = \sum_i \tilde{x}_i R\tilde{\mathbf{e}}_i = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad (4.8)$$

di conseguenza

$$\mathbf{e}_i = \sum_i R \tilde{\mathbf{e}}_i$$

dove le singole componenti sono esprimibili come

$$x_i = \sum_k R_{ik} \tilde{x}_k \quad e_j^i = \sum_k R_{ik} \tilde{e}_k$$

4.2.3 Velocità Angolare

Esprimiamo la velocità rispetto al sistema di Laboratorio come

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \sum_i \dot{\tilde{x}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (4.9)$$

mentre rispetto al sistema comovente si ha

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_i x_i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \quad (4.10)$$

per la singola componente della derivata $\frac{d\mathbf{e}_i}{dt}$ si ha che

$$\frac{d\mathbf{e}_j}{dt} = \sum_k \frac{dR_{jk}}{dt} \tilde{\mathbf{e}}_k = \sum_k \dot{R}_{jk} \tilde{\mathbf{e}}_k \quad (4.11)$$

poichè l'applicazione lineare R è invertibile si ha che la componente k-sima di un vettore della base del SR del laboratorio è esprimibile come

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \sum_m R_{km}^{-1} \mathbf{e}_m \quad (4.12)$$

di conseguenza la velocità rispetto al SR solidale al corpo rigido è data da

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{k,m=1} \underbrace{(R^T \dot{R})_{mk}}_A \underbrace{\tilde{x}_k \mathbf{e}_m}_B \quad (4.13)$$

dove la parte A esprime la dinamica rotazionale che è indipendente dalla scelta dal punto, mentre la parte B recupera tale informazione. Le matrici

$R(t)$ e $\dot{R}(t)$ per una rotazione attorno ad un polo fisso P sono definite come

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{R} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \dot{\theta} & -\cos \theta \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\theta} & -\sin \theta \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

di conseguenza il prodotto

$$R^\top \dot{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \theta \dot{\theta} & -\cos \theta \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\theta} & -\sin \theta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

che è una matrice anti-simmetrica. La velocità rispetto al SR mobile è data da

$$\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \dot{\theta}^2 (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2) = \dot{\theta}^2 (x_1^2 + x_2^2) = \dot{\theta} \|\mathbf{x}\|^2 \quad (4.16)$$

La lunghezza del vettore posizione del punto P è un invariante rispetto all'azione della matrice di rotazione. Quella che cambia è la velocità con cui viene descritto lo spostamento.

Se consideriamo un asse la cui direzione è ortogonale al piano di rotazione e passante per il punto P, abbiamo che data la velocità angolare rispetto ad esso è data dall'equazione

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_3 \quad (4.17)$$

e si lega all'espressione della velocità mediante l'operatore di prodotto vettoriale nel seguente modo

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_p = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 & \tilde{y}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1(-\dot{\theta} \tilde{x}_2) - \mathbf{e}_2(-\dot{\theta} \tilde{x}_1) = \dot{\mathbf{x}}_P \quad (4.18)$$

4.2.4 Energia Cinetica

Utilizzando il punto P appartenente al corpo rigido possiamo esprimere lo spostamento del laboratorio come

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{x}}_P \quad (4.19)$$

quindi l'energia cinetica è esprimibile come

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \left\| \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_p \right\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p (\dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{x}}_p) \cdot (\dot{\mathbf{x}}_0 + \dot{\mathbf{x}}_p) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \left(\|\dot{\mathbf{x}}_0\|^2 + 2 \langle \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_p \rangle + \|\dot{\mathbf{x}}_p\|^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^N m_p \right) \|\dot{\mathbf{x}}_0\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \|\dot{\mathbf{x}}_p\|^2 + \left\langle \dot{\mathbf{x}}_0, \sum_{p=1}^N m_p \dot{\mathbf{x}}_p \right\rangle
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Scegliendo l'origine O' del SR solidale con il corpo rigido, come suo centro di massa (CM), in questo modo $\sum_{p=1}^N m_p \dot{\mathbf{x}}_p = 0$ e l'energia cinetica espressa in 4.20 diventa

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \left(\sum_{p=1}^N m_p \right) \|\dot{\mathbf{x}}_0\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \|\dot{\mathbf{x}}_p\|^2 = \\
 &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} \dot{\theta}_p^2 \sum_{p=1}^N m_p \|\mathbf{x}_p\|^2
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

dove il termine

$$\sum_{p=1}^N m_p \|\mathbf{x}_p\|^2 = I_{e_3} \tag{4.22}$$

e prende il nome di **momento d'inerzia** lungo l'asse e_3 rispetto al centro di massa. In conclusione l'energia cinetica di un sistema i cui punti sono vincolati rigidamente a ruotare e traslare è dall'equazione

$$K = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$$

(4.23)

CAPITOLO 4. IL MOTO DEL CORPO RIGIDO

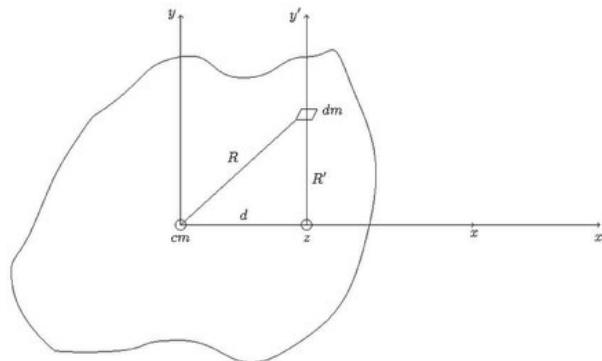
Nel caso in cui si stia considerando un corpo omogeneo (continuo) il momento d'inerzia viene espresso come

$$I_z = \int_S dx dy \rho(x, y) (x^2 + y^2) \quad (4.24)$$

dove $\rho(x, y)$ rappresenta la densità di superficie.

Teorema 4.2.1 (Teorema di Huygen-Steiner). Il momento d'inerzia rispetto ad un asse y' , parallelo ad un altro asse y passante per il centro di massa, si ottiene sommando il momento d'inerzia rispetto ad y al prodotto della massa M del corpo stesso rispetto alla distanza tra i due assi y ed y' .

$$I_z = I_{cm} + Md^2 \quad (4.25)$$



Dimostrazione. Si consideri un sistema di riferimento cartesiano (x, y) con l'origine nel centro di massa e un altro sistema di riferimento tralsato lungo l'asse x di una certa quantità, in modo tale che $y = y'$ e $x = x' - d$, dove d è la distanza tra l'asse passante per il centro di massa e quella parallelo di rotazione (rispetto al quale calcoliamo il momento).

Si consideri un elemento infinitesimo dm , il cui momento di inerzia rispetto al centro di massa è dato da $dI = R^2 dm$. Integrando lungo tutto il corpo

rispetto al centro di massa si ha che

$$I_{cm} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

analogamente il centro di massa rispetto all'asse traslato è dato da

$$I_z = \int_S (x'^2 + y'^2) dm$$

applicando le trasformazione nel sistema rispetto al SR precedente si ha

$$I_z = \int_S [(x + d)^2 + y^2] dm = \int_S [x^2 + y^2] dm + d^2 \int_S dm + 2d \int_S x dm$$

l'ultimo termine è nullo in quanto l'integrale di $x dm$ è l'ascissa del centro di massa nel SR del centro di massa stesso.

$$I_z = I_{cm} + Md^2$$

□

4.2.5 Tensore d'inerzia

Nella sezione sulle velocità angolari abbiamo visto che la velocità di un punto in rotazione può essere scritta come

$$\dot{\mathbf{x}} = \Omega \mathbf{x} \quad (4.26)$$

dove $\Omega = R^T \dot{R}$ che è una matrice anti-simmetrica e in generale ha forma

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

dove ogni elemento della matrice è esprimibile come $\Omega_{ik} = -\varepsilon^{lik} \omega_l$ con l, i, k distinti tra loro. Il simbolo ε^{lik} prende il nome di tensore di Levi-Civita. Possiamo scrivere la matrice Ω rispetto un'opportuna base $\{E_i\}$, nel seguente modo

$$\Omega = \Omega_1 \mathbf{E}_1 + \Omega_2 \mathbf{E}_2 + \Omega_3 \mathbf{E}_3 \quad (4.28)$$

CAPITOLO 4. IL MOTO DEL CORPO RIGIDO

dimostriamo che la relazione 4.25 può essere riscritta come

$$\dot{\mathbf{x}} = \Omega \mathbf{x} = \Omega \times \mathbf{x} \quad (4.29)$$

la componente lungo \mathbf{E}_1 di \mathbf{x} è data da

$$\mathbf{E}_1 \cdot \Omega \cdot \dot{\mathbf{x}} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}_1 = \Omega_3 x_2 + \Omega_2 x_3 \quad (4.30)$$

in modo analogo si definiscono le altre componenti lungo \mathbf{E}_2 ed \mathbf{E}_3 . Scriviamo l'energia cinetica del punto rispetto alla nuova notazione nel seguente modo

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{1}{2}m\|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \frac{1}{2}m\|\Omega \times \mathbf{x}\|^2 = \frac{1}{2}m\|\Omega\|^2\|\mathbf{x}\|^2 \sin^2(\widehat{\Omega \mathbf{x}}) = \\ &= \frac{1}{2}m \left[\|\Omega\|^2\|\mathbf{x}\|^2 - \|\Omega\|^2\|\mathbf{x}\|^2 \cos^2(\widehat{\Omega \mathbf{x}}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\|\Omega\|^2\|\mathbf{x}\|^2 - (\Omega \cdot \mathbf{x})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2}m \left[\sum_j \Omega_j^2 \|\mathbf{x}\|^2 + \sum_j \Omega_j y_j \sum_k \Omega_k y_k \right] = (*) \end{aligned} \quad (4.31)$$

il primo termine può essere esplicitato come

$$\sum_j \Omega_j^2 = \sum_{jk} \Omega_j \Omega_k \delta_{jk} \quad (4.32)$$

dove δ_{jk} è il delta di Kronecker. In questo modo la relazione 4.30 diventa

$$= \frac{1}{2}m \left[\sum_{jk} \Omega_j (\|\mathbf{x}\|^2 \delta_{jk} - y_j y_k) \Omega_k \right] \quad (4.33)$$

l'energia totale per un sistema di N particelle sarà data da

$$K = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha}^N m_{\alpha} \left[\sum_{jk} \Omega_j (\|\mathbf{x}_{\alpha}\|^2 \delta_{jk} - y_j^{\alpha} y_k^{\alpha}) \Omega_k \right] \right\} \quad (4.34)$$

il termine

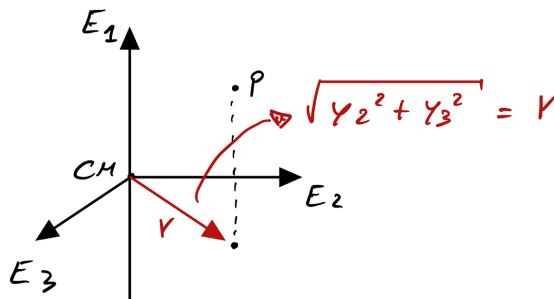
$$\left[\sum_{jk} \Omega_j (\|\boldsymbol{x}\|^2 \delta_{jk} - y_j y_k) \Omega_k \right] = I_{jk} \quad (4.35)$$

è il momento d'inerzia I_{jk} del **tensor d'inerzia** dove i termini y_α sono espressi rispetto SR del centro di massa. Per un corpo esteso la relazione 4.34 assume la forma

$$I_{jk} = \int_V dx_1 dx_2 dx_3 \rho(x_1, x_2, x_3) [\delta_{jk} \|\boldsymbol{x}\|^2 - y_j y_k] \quad (4.36)$$

Il tensore d'inerzia è una matrice simmetrica della forma

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} \int_V dV \rho [x_2^2 + x_3^2] & -\int_V dV \rho (x_1 x_2) & -\int_V dV \rho (x_1 x_3) \\ " & \int_V dV \rho [x_1^2 + x_3^2] & -\int_V dV \rho (x_2 x_3) \\ " & " & \int_V dV \rho [x_1^2 + x_2^2] \end{bmatrix} \quad (4.37)$$



Il primo termine del tensore è dato da I_{11} , avremo che è equivalente alla massa in un punto pesata rispetto il quadrato della distanza dall'asse di rotazione \mathbf{E}_1 .

Analogamente nelle altre direzioni.

Osservazione. Notare che non sono state fatte ipotesi sull'orientazione degli assi \mathbf{E}_i tantomeno che essi costituiscano una base ortonormale. Infatti nella forma generale del tensore d'inerzia compaiono altri termini oltre a quelli della diagonale. Essendo però la matrice simmetrica questa risulta essere diagonalizzabile.

Si prendano $\mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3$ in modo tale che la matrice d'inerzia sia diagonale, applicando una matrice $S \in SO(3)$ alla base di partenza in modo tale che $R' = SR$. In questo modo la base \mathbf{E}' è aggiustata rispetto alle simmetrie

del corpo rigido. Poichè S non dipende dal tempo la matrice Ω

$$\Omega' = R'^T \dot{R}' = R^T S^T S \dot{R} = R^T \dot{R} = \Omega$$

rimane invariata. In questo modo la matrice del tensore d'inerzia assume la forma

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

dove gli elementi lungo la diagonale prendono il nome di **momenti principali d'inerzia**.

Esempio: La Sbarra

Si consideri il tensore d'inerzia di una sbarra uniforme di lunghezza L e massa M rispetto al suo centro. La densità della sbarra è data da $\rho = \frac{M}{L}$. Per simmetria avremo che $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, 0)$ dove

$$I_1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho x^2 dx = \frac{1}{12} ML^2 \quad (4.39)$$

Esempio: Lamina Rettangolare

Consideriamo il tensore d'inerzia di una lamina rettangolare di lato minore B e lato maggiore A e di massa M . La densità della lamina è data da $\rho = \frac{M}{AB}$. Per simmetria si avrà la matrice di forma diagonale della forma

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \begin{bmatrix} \int_S \rho y^2 dz dy & 0 & 0 \\ 0 & \int_S \rho x^2 dx dz & 0 \\ 0 & 0 & \int_S \rho(x^2 + y^2) dx dy \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{12} Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} Mr^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esempio: Il Disco

Prendiamo un disco uniforme di raggio r e massa M . Per simmetria abbiamo che $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$. La densità del disco è data da $\rho = \frac{M}{\pi r^2}$. L'espressione dei momenti principali coincide con quella della lamina rettangolare e quindi la matrice del tensore d'inerzia è data da

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}Mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}Mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}Mr^2 \end{bmatrix}$$

Esempio: Sistema di dischi

Consideriamo un disco di densità ρ_1 e raggio $2R$ con all'interno altri due dischi che toccano in un punto A tra loro e di densità ρ_2 e raggio R , per calcolare il momento d'inerzia del sistema usando il teorema di Huygen-Steiner.

$$\begin{aligned} I &= I_{z,cm}(\rho_1, 2R) + 2I_{z,A}(\rho_2, R) = \\ &= \frac{M_1}{2}4R^4 + 2 \left(\frac{M_2}{2}R^2 + M_2R^2 \right) \end{aligned}$$

12

4.2.6 Energia cinetica generalizzata

Recuperando la relazione 4.20 usata nella sezione sull'energia cinetica

$$\frac{1}{2}M \|\dot{\mathbf{x}}_0\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N m_p \|\dot{\mathbf{x}}_p\|^2 + \left\langle \dot{\mathbf{x}}_0, \sum_{p=1}^N m_p \dot{\mathbf{x}}_p \right\rangle$$

siamo giunti alla espressione 4.23 poichè la quantità di moto era espressa rispetto al riferimento del centro di massa e dunque era nulla. In conseguenza abbiamo potuto scrivere l'energia cinetica del sistema come somma di due termini. In generale tale risultato non è sempre possibile averlo e di conseguenza l'energia cinetica non è sempre somma di due termini. Per ottenere l'equazione 4.23 è necessario che sia abbia almeno un punto fisso non necessariamente solidale con il corpo rigido, ma comovente.

4.3 Momento Angolare

Definiamo momento angolare di un punto materiale P, rispetto ad un polo O la grandezza

$$\mathbf{L}_O = \int \rho dV \left[\overline{OP} \times \dot{\overline{OP}} \right] = \int \rho dV [\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}] \quad (4.40)$$

essendo il moto rigido, ovvero la distanza \overline{OP} non dipende dal tempo possiamo definire $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$, e dunque 4.40 può essere riscritto come

$$\mathbf{L}_O = \int \rho dV [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})] = (*) \quad (4.41)$$

prima di riscrivere la 4.41 introduciamo un lemma utile a tale fine.

Lemma 4.3.1.

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \mathbf{z} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \cdot \mathbf{x} \quad (4.42)$$

Dimostrazione. Abbiamo che $\mathbf{z} \times \mathbf{x}$ è ortogonale al piano (x,z) di conseguenza il termine $\mathbf{x} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x})$ è ortogonale ad \mathbf{x} e quindi può essere scritto come

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{z}$$

di conseguenza possiamo definire due termini

$$1) \quad \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x})) = \alpha \|\mathbf{x}\|^2 + \beta (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) = 0$$

$$2) \quad \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x})) = \alpha (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \beta \|\mathbf{z}\|^2 = 0$$

dalla equazione 1) abbiamo un sistema

$$\begin{cases} \|\mathbf{z} \times \mathbf{x}\|^2 = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \beta \|\mathbf{z}\|^2 \\ \alpha \|\mathbf{x}\|^2 + \beta \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = 0 \end{cases}$$

poichè

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z} \times \mathbf{x}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{z}\|^2 \sin^2(\widehat{\mathbf{x}}\mathbf{z}) = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{z}\|^2 (1 - \cos^2(\widehat{\mathbf{x}}\mathbf{z})) = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{z}\|^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle^2 \end{aligned}$$

di conseguenza sostituendo nel sistema abbiamo determiniamo α e β come

$$\alpha = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \quad \beta = \|\mathbf{x}\|^2$$

□

Usando il lemma 4.3.1 terminiamo l'espressione del momento angolare in

4.41

$$\begin{aligned}
 (*) &= \int \rho dV [\|\mathbf{x}\|^2 \boldsymbol{\Omega} - \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega} \rangle \mathbf{x}] = \\
 &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{E}_j \int \rho dV \left[\sum_k \|\mathbf{x}\|^2 \delta_{jk} \Omega_k - y_k \Omega_k y_j \right] = \\
 &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{E}_j \int \rho dV \sum_k [\|\mathbf{x}\|^2 \delta_{jk} \Omega_k - y_k y_j] \Omega_k = \\
 &= \sum_{j=1}^3 \sum_k I_{jk} \Omega_k
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

in conclusione

$$\mathbf{L}_O = \hat{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \tag{4.44}$$

per $\boldsymbol{\Omega} = \sum_j \Omega_j \mathbf{E}_j$. Si osserva che per un moto libero il momento angolare costituisce una costante del moto.

Osservazione. Il tensore d'inerzia da un punto di vista energetico fornisce l'informazione sul contributo dell'energia cinetica data dal moto rigido interno. Dal punto di vista dell'analisi meccanica è l'applicazione lineare, che usata sulla velocità angolare restituisce il momento angolare.

4.4 Equazioni di Eulero Per Il Corpo Rigido Libero

In generale il moto di un corpo è descritto da una rotazione e una traslazione. Il polo rispetto a cui ruota il corpo può essere dato da un qualsiasi punto fisso, ma è utile utilizzare il centro di massa. Consideriamo un SR del laboratorio O e un sistema mobile O' solidale con il corpo rigido.

CAPITOLO 4. IL MOTO DEL CORPO RIGIDO

Ipotizzando che il corpo sia libero, ovvero non è soggetto a forze esterne, il suo momento angolare rispetto al centro di massa è conservato.

$$\frac{d\mathbf{L}_{cm}}{dt} = 0 \quad (4.45)$$

L'equazione 4.45 diventa

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i l_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_i (l_i \mathbf{e}_i + l_i \dot{\mathbf{e}}_i) = \sum_i l_i \mathbf{e}_i = 0 \Rightarrow \dot{l}_i = 0 \quad (4.46)$$

il movimento del corpo rigido attorno al suo centro di massa, non è specificato dal momento angolare di per sè, ma dalla velocità angolare. Infatti se esprimiamo il momento angolare usando l'equazione 4.44 abbiamo che le sue componenti

$$\frac{d}{dt} l_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_k I_{ik} \Omega_k \right) = \sum_k \dot{I}_{ik} \Omega_k + I_{ik} \dot{\Omega}_k = 0 \quad (4.47)$$

dove I_{ik} sono le componenti del tensore d'inerzia viste da riferimento fisso. Poichè l'equazione 4.47 corrisponde ad un sistema di tre equazioni e nove incognite, questo non ammette soluzione rispetto al SR del laboratorio. Per risolverlo dobbiamo passare al SR mobile. Dove rispettivamente valgono le operazioni di trasformazione sui vettori per una matrice $R \in SO(3)$ e dunque

$$\mathbf{E}_j = \sum_k R_{kj} \mathbf{e}_k \quad \mathbf{e}_k = \sum_l R_{kl} \mathbf{E}_l \quad (4.48)$$

e il momento angolare è rispetto ad O' è dato da

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_j L_j \mathbf{E}_j \right) = \sum_j \dot{L}_j \mathbf{E}_j + L_j \dot{\mathbf{E}}_j = 0 \quad (4.49)$$

utilizzando la definizione o del vettore \mathbf{E}_j in 4.48 abbiamo che

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_j &= \sum_k \dot{R}_{kj} \mathbf{e}_k + R_{kj} \dot{\mathbf{e}}_j = \sum_k = \sum_k \dot{R}_{kj} \sum_l R_{kl} \mathbf{E}_l = \\ &= \sum_l \sum_k \left(R_{lk}^T \dot{R}_{kj} \right) \mathbf{E}_l \end{aligned} \quad (4.50)$$

utilizzando il risultato a 4.50 l'equazione 4.49 assume la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_l \dot{L}_l \mathbf{E}_l + \sum_j \sum_l L_j \left(R^T \dot{R} \right)_{lj} \mathbf{E}_l = \\ &= \sum_l \left(\dot{L}_j + \sum_j \left(R^T \dot{R} \right)_{lj} \right) \mathbf{E}_j = \sum_l \left(\dot{L}_l + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L})_l \right) \mathbf{E}_l = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

in questo modo si ottiene un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{L}_1 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L})_1 = 0 \\ \dot{L}_2 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L})_2 = 0 \\ \dot{L}_3 + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L})_3 = 0 \end{array} \right. \quad (4.52)$$

che ammette soluzione. Poichè il tensore d'inerzia è simmetrico e quindi risulta essere sempre diagonalizzabile possiamo considerare per semplicità la sua forma diagonale e dunque

$$L_k = I_k \Omega_k \quad \text{e} \quad \dot{L}_k = \dot{I}_k \Omega_k + I_k \dot{\Omega}_k = I_k \dot{\Omega}_k \quad (4.53)$$

il sistema di equazioni 4.52 dunque può essere riscritto come

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Omega}_1 = \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \right) \Omega_2 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_2 = \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \right) \Omega_1 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_3 = \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \right) \Omega_1 \Omega_2 \end{array} \right. \quad (4.54)$$

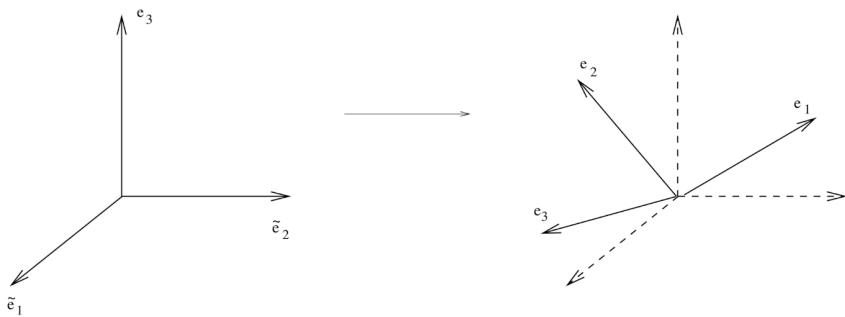
tali relazioni prendono il nome di **equazioni di Eulero** e dipendono dalla geometria del corpo rigido.

4.4.1 Ellissoide di Poinsot

L'ellissoide di Poinsot è un metodo geometrico che ci permette di visualizzare il moto di un corpo rigido libero, ipotizzando di avere quattro costanti, date dall'energia cinetica e le tre componenti del momento angolare espresse rispetto a sistema di riferimento del laboratorio.

4.5 Angoli di Eulero

Fino a questo punto siamo riusciti a formulare buona parte della dinamica di un corpo rigido usando le velocità angolari, e non abbiamo avuto la necessità di parametrizzare lo spazio delle configurazioni C. Per proseguire nella trattazione del corpo rigido abbiamo proprio bisogno di introdurre tale metodo.



una rotazione generica di un insieme di assi è come quella mostrata in figura. L'obiettivo è costruire un modo per parametrizzare tale rotazione. Un modo per farlo ci viene dato dagli studi di Eulero:

Teorema 4.5.1 (Teorema di Eulero). Una rotazione arbitraria può essere espressa come il prodotto di 3 rotazioni successive rispetto ai 3 assi differenti.

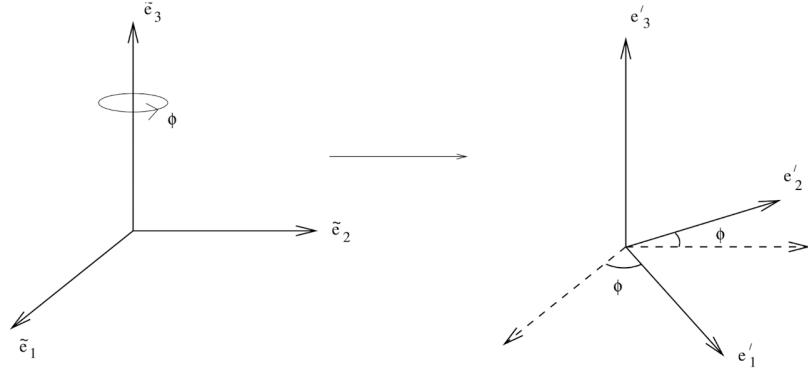
Dimostrazione. Sia $\{\tilde{e}_a\}$ la base del sistema di riferimento fisso; e sia $\{e_a\}$ la base del sistema mobile. Vogliamo determinare la rotazione R tale per cui $e_a = R_{ab}\tilde{e}_b$. Per ottenere tale risultato ci servono tre passi successivi

$$\{\tilde{e}_a\} \xrightarrow{R_3(\phi)} \{e'_a\} \xrightarrow{R_1(\theta)} \{e''_a\} \xrightarrow{R_3(\psi)} \{e_a\}$$

Nel dettaglio abbiamo

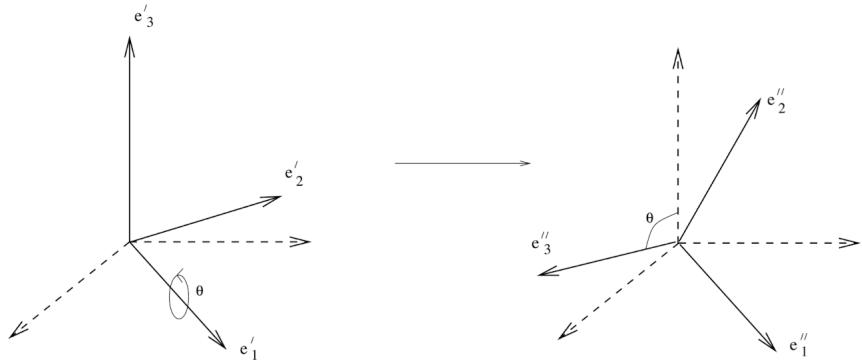
- **Passo 1:** Ruotare di un angolo ϕ l'asse \tilde{e}_3 . In questo modo $e'_a = R_3(\phi)\tilde{e}_b$ con

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


 Figura 4.1: Rotazione lungo l'asse \tilde{e}_3 rispetto al SR fisso

- **Passo 2:** Ruotare di un angolo θ rispetto all'asse e'_1 . Definiamo $e''_a = R_1(\theta)_{ab}e'_b$ rispetto alla matrice

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$


 Figura 4.2: Rotazione attorno all'asse e'_1

- **Passo 3:** Ruotare di un angolo ψ rispetto l'asse e''_3 e quindi $e_a =$

$R_3(\psi)_{ab} e''_b$ dove

$$R_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

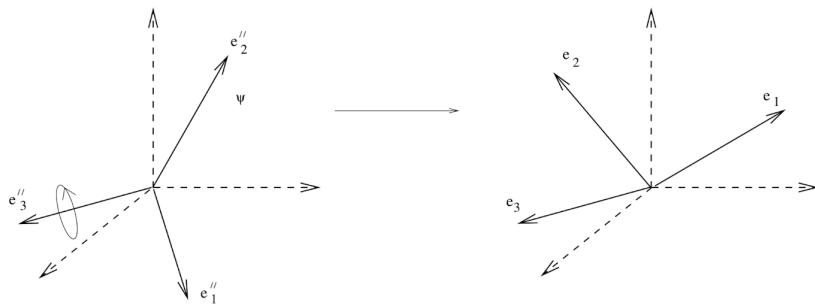


Figura 4.3: Rotazione attorno all'asse e''_3

complessivamente abbiamo una composizione di applicazioni lineari della forma

$$R_{ab}(\phi, \theta, \psi) = [R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi)]_{ab} \quad (4.55)$$

□

Gli angoli ϕ, θ, ψ prendono il nome di **angoli d'Eulero**. La matrice definita in 4.55 esplicitamente si scrive come

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \sin \psi \cos \phi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \cos \theta \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \psi \cos \phi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

4.5.1 Velocità Angolare

Per ottenere l'espressione delle velocità angolari istantanee in termini di angoli di Eulero è sufficiente sostituire l'espressione 4.55 all'interno dell'equazione 4.13. Siccome il procedimento è tedioso, è più rapida la sua deduzione partendo dal suo significato fisico. Consideriamo un corpo rigido che in un tempo infinitesimo dt compie una rotazione avremo che

$$(\psi, \theta, \phi) \rightarrow (\psi + d\psi, \theta + d\theta, \phi + d\phi) \quad (4.56)$$

Dalla definizione di angoli di Eulero, la velocità angolare dovrà essere della forma

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}\tilde{\mathbf{e}}_3 + \dot{\theta}\mathbf{e}'_1 + \dot{\psi}\mathbf{e}_3 \quad (4.57)$$

possiamo esprimere i primi due vettori come combinazione lineare della base del SR del laboratorio, infatti

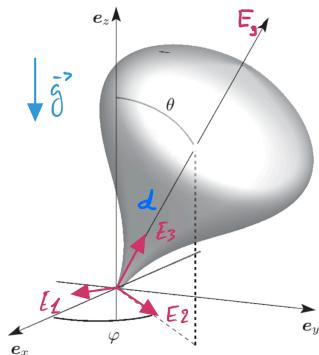
$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_3 &= \sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_1 &= \cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

rispetto ai quali possiamo esprimere $\boldsymbol{\Omega}$ in termini di angoli di Eulero rispetto al SR fisso

$$\boldsymbol{\Omega} = [\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi] \mathbf{e}_1 + [\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi] \mathbf{e}_2 + [\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta] \mathbf{e}_3$$

in modo analogo possiamo esprimere $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto al SR mobile.

4.6 Trottola di Lagrange



Consideriamo un corpo rigido simmetrico di massa M , fissato a ruotare rispetto ad un punto P , distante d dal centro di massa. Gli assi principali del SR solidale sono $\{\mathbf{E}_i\}$. Inoltre su di esso agisce la forza di gravità.

4.6.1 Studio dell'energia del sistema

Dato che agisce solo la forza di gravità e questa è una forza conservativa avremo che l'energia potenziale del sistema è data da

$$U(\theta) = Mg z_{cm} = M d \cos \theta \quad (4.59)$$

mentre l'energia cinetica è esprimibile come

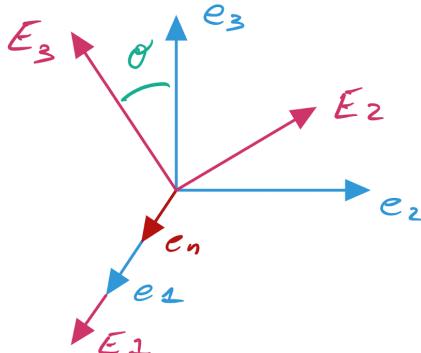
$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \hat{I} \boldsymbol{\Omega} \quad (4.60)$$

essendo il corpo rigido simmetrico rispetto un'asse abbiamo che la matrice del tensore d'inerzia è diagonale $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$.

L'angolo φ descrive la rotazione rispetto all'asse e_3 del SR fisso, se cambiano l'origine, la descrizione fisica del problema rimane invariata di conseguenza è una coordinata che non dà nessun contributo all'equazione dell'energia cinetica. Analogo ragionamento per ψ .

Per calcolare l'energia cinetica possiamo ipotizzare che φ e ψ siano nulle e di conseguenza e_3 giace nel piano formato dai vettori della base mobile $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ e quindi esprimibile come

$$\mathbf{e}_3 = \cos \theta \mathbf{E}_3 + \sin \theta \mathbf{E}_2 \quad (4.61)$$



Inoltre $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{E}_1$ di conseguenza la velocità angolare del sistema rispetto al SR mobile è data dalla seguente equazione

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} &= \dot{\varphi} (\cos \theta \mathbf{E}_3 + \sin \theta \mathbf{E}_2) + \dot{\theta} \mathbf{E}_1 + \dot{\psi} \mathbf{E}_3 = \\ &= \dot{\theta} \mathbf{E}_1 + \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{E}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \mathbf{E}_3 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Per la simmetria del corpo il momento d'inerzia $I_{11} = I_{22}$ in conclusione la Lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_{11}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta\right) + \frac{1}{2}I_{33}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\right)^2 - Mg d \cos \theta \quad (4.63)$$

Osservazione. Se $I_{33} = 0$, cambiando i parametri si ottiene la Lagrangiana del pendolo sferico.

Complessivamente abbiamo un problema a tre gradi di libertà con due costanti cicliche φ e ψ . Che come sappiamo coincidono con la conservazione del momento angolare dei rispettivi assi.

$$\begin{cases} L_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I_{11}\dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_{33}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\right) \cos \theta \\ L_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_{33}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\right) \end{cases} \quad (4.64)$$

dove L_z è rispetto l'asse e_3 mentre L_3 rispetto ad E_3 . Le equazioni E-L associate sono date da

$$\begin{cases} I_{11}\ddot{\theta} = I_{11} \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + I_{33}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta\right) \sin \theta + Mg d \sin \theta \\ \frac{d}{dt}L_z = \frac{d}{dt}L_3 = 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

mentre dalle grandezze conservative otteniamo le relazioni

$$\dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_{11} \sin^2 \theta} \quad \dot{\varphi} = \frac{L_3}{I_{33}} - \frac{\cos \theta (L_z - L_3 \cos \theta)}{I_{11} \sin^2 \theta} \quad (4.66)$$

a questo punto avendo due variabili cicliche possiamo definire la Lagrangiana ridotta, per farlo sostituiamo le relazioni in 4.66 all'interno dell'energia del sistema.

$$E_{eff} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + U_{eff}(\theta) \quad (4.67)$$

dove

$$U_{eff}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_{11} \sin^2 \theta} + Mg d \cos \theta \quad (4.68)$$

CAPITOLO 4. IL MOTO DEL CORPO RIGIDO

Da tale procedura si ottiene la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2} I_{11} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_{11} \sin^2 \theta} - Mg d \cos \theta \quad (4.69)$$

e rispettivamente le equazioni del moto sono date da

$$I_{11} \ddot{\theta} = - \frac{dU_{eff}(\theta)}{d\theta} \quad (4.70)$$

che possono essere ottenute direttamente sostituendo le equazioni in 4.66 nel sistema 4.65.

Il problema è stato ridotto allo studio di una sola variabile θ che costituisce la colatitudine del centro di rotazione, ovvero dell'asse passante per il centro di massa. Il moto avviene per valori fissati dell'energia dati dalle condizioni iniziali di velocità e posizione.

4.6.2 Studio qualitativo del moto

Per studiare il moto introduciamo una variabile di supporto

$$u = \cos \theta \quad \text{e} \quad \dot{u} = -\sin \theta \dot{\theta} \iff \dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\sin \theta} \quad \text{con} \quad u \in [-1, 1]$$

per riscrivere le equazioni in modo conciso introduciamo anche due costanti

$$\alpha = \frac{2E_{eff}}{I_{11}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2Mgd}{I_{11}} \quad (4.71)$$

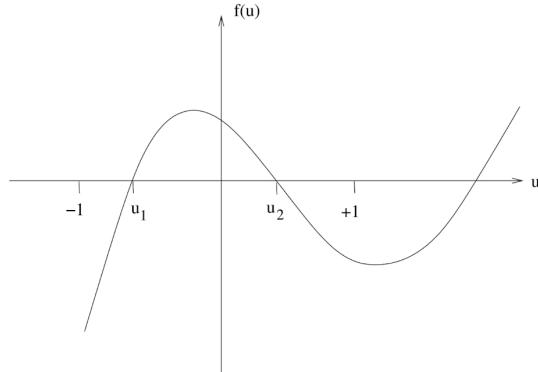
in questo modo le equazioni del moto 4.65 e le quantità conservative 4.66 diventano

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2 \equiv f(u) \quad (4.72)$$

$$\dot{\phi} = \frac{b - au}{1 - u^2} \quad (4.73)$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \frac{u(b - au)}{1 - u^2} \quad (4.74)$$

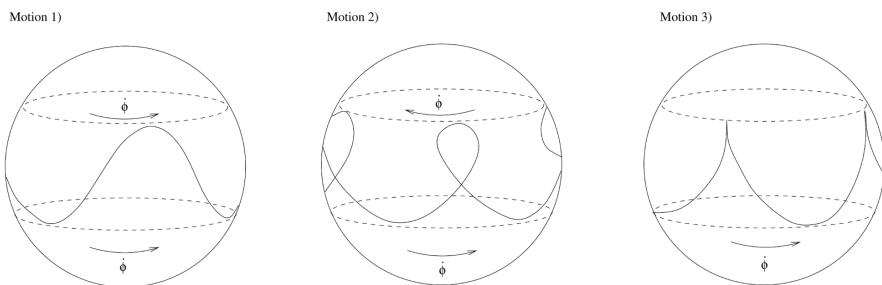
Notiamo che la funzione $f(u)$ definita in 4.72 è un polinomio cubico, e studiandone il comportamento otteniamo il grafico nella seguente figura.



Poichè $f(u) \equiv \dot{u}^2 \geq 0$ e $u \in [-1, 1]$, si ha che il moto del sistema è confinato tra le due radici della funzione $f(u)$. Se $f(u)$ non interseca l'asse delle ascisse tale configurazione non è fisicamente realizzabile, per tali punti $\dot{u} = 0$ e quindi θ è una costante del moto. Le configurazioni del moto possibili sono:

- Se $f(u) \geq 0$ e si ha intersezione con l'asse delle ascisse si hanno le due radici u_1 e u_2 , per i punti $u \in [u_1, u_2]$ si ha che il moto in θ è periodico in quanto confinato tra θ_{min} e θ_{max} . L'asse E_3 si muove tra i due estremi. Tale configurazione prende il nome di **moto di nutazione**. Inoltre $\dot{\varphi}$ cambia segno e la trottola cambia momentaneamente il moto.
- Se $\bar{u} \notin [u_1, u_2]$, $\dot{\varphi}$ ha segno costante e si ha sia una nutazione che una precessione nello stesso verso .
- Il caso limite è quando \bar{u} è al limite dell'area consentita dove $\dot{\varphi} = 0$ in $u = u_2$ e $\dot{\varphi} > 0$ in $u = u_1$.

I moti rispetto φ vengono definiti **moti di precessione**.



CAPITOLO 5

La Meccanica Hamiltoniana

5.1 Introduzione

La formulazione delle leggi della meccanica mediante la funzione Lagrangiana, descrive l'evoluzione di un sistema meccanico utilizzando le coordinate di posizione e velocità generalizzate che incorporano l'informazione della forza esercitata dai vincoli senza doverne conoscere esplicitamente la forma. Però non è l'unico modo in cui è possibile descrivere lo stato dinamico di un sistema. Infatti si può studiare un sistema rispetto alle coordinate di posizione e quantità di moto generalizzate. La trattazione di problemi utilizzando tale sistema di coordinate costituisce le basi dell'ottica, meccanica quantistica e meccanica statistica. Per passare da un sistema di coordinate indipendenti ad un altro si usa la **trasformazione di Legendre** che permette di definire una nuova grandezza che descrive l'energia totale del sistema, definita **Hamiltoniana**. Quanto discusso in questo capitolo presuppone che si considerino vincoli olonomi e potenziali dipendenti dalla posizione e/o velocità.

5.2 Formalismo Hamiltoniano

Abbiamo visto che introducendo la funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t)$ che descrive una curva nello spazio delle coordinate generalizzate. La minimizzazione del suo funzionale d'azione ci permette di definire le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

La grandezza

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

è definita **quantità di moto generalizzata** coniugata a q_i (e coincide con la quantità di moto nelle coordinate cartesiane). Riscrivendo le equazioni di E-L con questa notazione si ha che la (5.1) diventa:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (5.3)$$

Lo scopo di riscrivere le equazioni in questo modo è di eliminare le velocità generalizzate \dot{q}_i in favore delle coordinate p_i . Il passaggio a p_i ha un ruolo chiave perché quando $p_i = 0$ si hanno delle coordinate cicliche, che come vedremo nei paragrafi successivi permettono di risolvere facilmente le equazioni differenziali che definiscono la dinamica del moto nello spazio delle fasi.

Richiamo

La quantità $\{q_i\}$ definisce un punto nello *spazio delle configurazioni* C di dimensione n . La sua evoluzione nel tempo definisce una curva in C . L'evoluzione dinamica del sistema è descritta dalle coordinate $\{q_i, p_i\}$ definite nello *spazio delle fasi* di dimensione $2n$. In tale spazio una cammino non incrocia mai con un altro e l'evoluzione è dunque governata da un *flusso* che avviene nello spazio delle fasi.



Figura 5.1: Moto nello spazio delle configurazioni (sinistra) e nello spazio delle fasi (destra)

5.2.1 Equazioni di Hamilton

Vogliamo determinare una funzione definita sullo spazio delle fasi che descriva in modo univoco l'evoluzione rispetto a q_i e p_i . Questo vuol dire che deve essere in funzione di q_i e p_i e debba contenere la stessa informazione data dalla Lagrangiana $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$. Per farlo utilizziamo una trasformazione di coordinate definita trasformazione di Legendre. Definiamo la funzione **Hamiltoniana** come la trasformata di Legendre della Lagrangiana rispetto alle variabili \dot{q}_i .

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (5.4)$$

Dove l'ipotesi fondamentale è data dal fatto che dalla relazione (5.2) sia possibile determinare $\dot{q}_i(q_i, p_i, t)$, ovvero si richiede che la trasformazione di coordinate sia invertibile rispetto alle \dot{q}_i .

La variazione di H è data da:

$$\begin{aligned} dH &= (dp_i \dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) \\ &= dp_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (5.5)$$

Il differenziale di sinistra può essere riscritto come

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (5.6)$$

l'uguaglianza ottenuta ci permetterà di definire un sistema di equazioni di $2n$ equazioni differenziali del primo ordine che prendono il nome di **equazioni di Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \quad (5.7)$$

Rispetto alle equazioni di E-L che definivano un sistema di N equazioni differenziali del secondo ordine abbiamo costruito un sistema di $2N$ equazioni differenziali del primo ordine.

Si nota che la funzione di Hamilton coincide con l'energia del sistema $E(q, \dot{q}, t)$ data dall'**integrale di Jacobi** per la Lagrangiana di un sistema.

5.2.2 Esempi

1) Particella in un potenziale

Consideriamo una particella che si muove in un potenziale centrale in uno spazio a 3 dimensioni. La Lagrangiana sarà data da

$$L = \frac{1}{2}|\dot{\underline{x}}|^2 - U(\underline{x})$$

Le equazioni di E-L associate sono:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{dU(\underline{x})}{dx_1} \\ \vdots \\ \ddot{x}_n = -\frac{dU(\underline{x})}{dx_n} \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\frac{dU(\underline{x})}{dx_1} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = y_n \\ \dot{y}_n = -\frac{dU(\underline{x})}{dx_n} \end{cases} \quad (5.8)$$

Usando la relazione (5.2) e (5.4) otteniamo

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \quad H = p\dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}(x, p))$$

dunque la Hamiltoniana associata al sistema è data da

$$H = p^2 - \frac{p^2}{2} + U(x) = \frac{p^2}{2} + U(x)$$

usando le equazioni in (5.7) definiamo le equazioni di Hamilton del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_i = p_i \\ \dot{p}_i = -U'(x) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

posto $y_i = p_i$ nelle equazioni in (5.8) si ha che le equazioni di Hamilton e di E-L sono equivalenti tra loro.

2) Invertibilità delle velocità generalizzate

La Lagrangiana di un sistema è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

dove $g(q)$ è una funzione delle coordinate generalizzate e la quantità di moto generalizzata è esprimibile come

$$p = g(q)\dot{q} \quad \text{dove} \quad g(q) > 0$$

di conseguenza la trasformazione di coordinate è invertibile, infatti

$$\dot{q}(q, p) = \frac{p}{g(q)}$$

e la Hamiltoniana associata al sistema può essere riscritta come

$$H = \frac{p^2}{2g(q)} + U(q)$$

dove le rispettive equazioni di Hamilton sono date da

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{p}{g(q)} \\ \frac{d}{dt}p = \frac{1}{2}\frac{g'(q)}{g^2(q)}p^2 - \frac{\partial}{\partial q}U \end{cases}$$

Teorema 5.2.1 (Equivalenza Eq. E-L ed Hamilton). Le equazioni di Eulero-Lagrange sono equivalenti alle equazioni di Hamilton.

Dimostrazione. Partiamo da un Hamiltoniana definita rispetto ad un Lagrangiana indipendente dal tempo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ e consideriamo uno spazio delle configurazioni C in una sola dimensione. La variazione della funzione di Hamilton sarà descritta dal differenziale

$$dH(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp$$

ricordando che $\dot{q}(q, p, t)$ si ha che l'equazione precedente è equivalente a

$$\begin{aligned} d(p\dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)) &= pd\dot{q} + dp\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}d\dot{q} = \\ &= pd\dot{q} + dp\dot{q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq - pd\dot{q} = \dot{q}dp - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}dq \end{aligned}$$

dalle equazioni di E-L abbiamo che $\frac{d}{dt}[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$ dunque l'uguaglianza precedente può essere riscritta come

$$= \dot{q}dp - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right]dq = \dot{q}dp + (-\dot{p})dq$$

in conclusione otteniamo

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

□

Dimostrazione. Si consideri $\dim[C] > 1$ procediamo come nel caso in una dimensione definendo il differenziale dell'Hamiltoniana

$$dH = \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t}$$

le j-sime equazioni possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_j} &= \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j}}_{=0} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - p_i \right]}_{=0} \\ \frac{\partial H}{\partial p_j} &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial p_i}{\partial p_j} + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} - \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j}}_{=0} = \dot{q}_j + \underbrace{\sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_j} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - p_i \right]}_{=0} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - p_i \right]}_{=0} \end{aligned}$$

di conseguenza si ottiene un sistema di $2N$ equazioni differenziali al primo ordine. \square

5.2.3 Leggi di conservazione

Lemma 5.2.2. Se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ allora H è una costante del moto

Lemma 5.2.3. Se una coordinata trascurabile q non compare nella Lagrangiana allora per costruzione non appartiene nemmeno nella Hamiltoniana. I momenti coniugati p_q associati a q sono conservati.

5.2.4 Momenti coniugati rispetto alla trasformazione di Legendre

Teorema 5.2.4. Se la Lagrangiana di un sistema è rappresentabile come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} G_{\alpha, \beta} \cdot \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U = \frac{1}{2} \langle \underline{\dot{q}}, G \underline{\dot{q}} \rangle - U \quad (5.9)$$

dove $G(\underline{q})$ è una matrice simmetrica ed invertibile associata all'energia cinetica del sistema \Rightarrow si ha che il vettore dei momenti coniugati e le velocità generalizzate possono essere scritte come

$$\underline{p} = G(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{q}} \quad \text{e} \quad \dot{\underline{q}} = G^{-1}(\underline{p}) \cdot \underline{p} \quad (5.10)$$

Esempio

La trasformata di Legendre definita da una Lagrangiana della forma come in (5.9) è data da

$$\begin{aligned} p \dot{q} &= \frac{1}{2} \langle \dot{q}, G \dot{q} \rangle + U = \\ &= \langle p, G^{-1} p \rangle - \frac{1}{2} \langle G^{-1} p, G G^{-1} p \rangle + U = \\ &= \langle p, G^{-1} p \rangle - \frac{1}{2} \langle p, G^{-1} p \rangle + U \end{aligned}$$

dunque la Hamiltoniana associata è data da

$$H = \frac{1}{2} \langle p, G^{-1} p \rangle + U$$

Osservazione. Data una matrice simmetrica invertibile, l'inversa è ancora una matrice simmetrica e $(G^{-1})^T = (G^T)^{-1}$.

5.2.5 Formulazione variazionale delle equazioni di Hamilton

Si è definita l'azione come

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

poichè Hamiltoniana e Lagrangiana sono legate dalla trasformata di Legendre possiamo invertire tale relazione per riscrivere il funzionale d'azione come

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} (p_i \dot{q}_i - H) dt \quad (5.11)$$

Applicando il teorema 5.2.8 andiamo ricercare i punti che rendono stazionaria l'azione

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i + \left[-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} dt + [p_i \delta q_i]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

dove il termine $p_i \delta \dot{q}_i$ è stato integrato per parti, ovvero

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \delta \dot{q}_i dt = p_i \delta q_i|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q dt$$

di conseguenza abbiamo che il differenziale d'azione S è nullo quando

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

dobbiamo imporre alle condizioni al contorno che l'ultimo addendo dell'equazione sia nulla ovvero

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$$

Notare che imponendo tale condizione δp_i sono libere di variare a piacimento, non rendendo simmetrico il formalismo. Volendo potremmo imporre la

condizione anche sulle δp_i , ma così facendo restringeremmo ancora di più i cammini possibili.

5.3 Parentesi di Poisson

Definizione 5.3.1. Siano $f(q,p)$ e $g(q,p)$ due funzione definite sullo spazio delle fasi si definisce **parentesi di Poisson**

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \quad (5.12)$$

Le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà:

- Antisimmetria: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Bilinearità: $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Regola di Leibniz: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ che deriva dalla chain rule della differenziazione.
- Identità di Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Lemma 5.3.1. Si consideri il punto $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R}$ nello spazio delle fasi e la Hamiltoniana H che definisce le eq. del moto

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

data una grandezza fisica $F(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ definita sullo spazio delle fasi, la sua derivata totale(ovvero l'evoluzione temporale di posizioni e momenti) può essere scritta come

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.13)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

□

Con l'uso delle parentesi di Poisson dotiamo le variabili dinamiche che descrivono l'evoluzione di un sistema nella meccanica Hamiltoniana di una struttura algebrica. Utilizzando tale notazione le equazioni di Hamilton assumono una forma simmetrica tra le posizioni e i momenti coniugati.

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \{q_j, H\} \\ \dot{p}_j = \{p_j, H\} \end{cases} \quad j = 1, \dots, N \quad (5.14)$$

Definizione 5.3.2. Si definisce costante del moto una funzione I definita sullo spazio delle fasi tale per cui

$$\{I, H\} = 0 \quad (5.15)$$

so dice che I ed H **commutano rispetto Poisson**.

Esempio

Si ipotizzi che q_i sia una coordinata ignorabile (per esempio non compare in H) allora

$$\{p_i, H\} = 0$$

essa esprime la relazione tra coordinate ignorabili e le quantità conservabili nel linguaggio delle parentesi di Poisson.

Osservazione. Se I e J sono costanti del moto allora $\{\{I, J\}, H\} + \{I, \{J, H\}\} + \{\{I, H\}, J\} = 0$ e dunque anche $\{I, J\}$ è una costante del moto. Si dice che le costanti del moto formano un algebra chiusa rispetto alle parentesi di Poisson.

5.4 Trasformazioni Canoniche

Le equazioni di Hamilton possono essere riscritte in un modo che risultino più simmetriche. Definiamo il vettore $\vec{x} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)^T$ di dimensione $2N$ e la matrice J di grandezza $2N \times 2N$,

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & I_n \\ -I_n & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

dove I_n è la matrice identica di dimensione $n \times n$. Nella notazione compatta ogni entrata è una matrice $n \times n$. La matrice \mathcal{J} è definita come la **matrice simplettica**. In questa notazione le equazioni di Hamilton possono essere riscritte come

$$\dot{\underline{x}} = \mathcal{J} \cdot \nabla_{\underline{x}} H \quad (5.17)$$

In meccanica Lagrangiana si è visto come è possibile effettuare un cambio di coordinate da $q_i \rightarrow Q(q_i)$ senza cambiare la forma delle equazioni. Nella formulazione Hamiltoniana vogliamo estendere il concetto di trasformazione di coordinate per le posizioni q_i e i momenti p_i in un nuovo sistema P_i e Q_i per mezzo di un insieme di equazioni invertibili

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t) \end{aligned} \quad (5.18)$$

dove le nuove coordinate sono funzione sia delle vecchie coordinate che anche dei momenti coniugati. Come nel caso Lagrangiano ci domandiamo quale classe di trasformazioni ci permetta di lasciare invariate le equazioni di Hamilton. Consideriamo una trasformazione

$$x_i \mapsto y_i(x)$$

applicando la relazione (5.20) si ha che

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \mathcal{J}_{jk} \frac{\partial H}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}$$

in modo compatto può essere riscritto come

$$\dot{y} = (J \mathcal{J} J^T) \nabla_y H$$

dove J è la matrice Jacobiana associata alla trasformazione di coordinate. Le equazioni di Hamilton sono invarianti in forma rispetto allo Jacobiano di una trasformazione se J soddisfa le condizioni

$$J \mathcal{J} J^T = \mathcal{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \mathcal{J}_{jk} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} = \mathcal{J}_{il} \quad (5.19)$$

Se lo Jacobiano J soddisfa l'equazione (5.22) viene definito **simplettico**. Un cambio di coordinate in cui Jacobiano risulta essere simplettico viene definito **trasformazione canonica**.

Nei paragrafi successivi vedremo che esiste un metodo efficace per costruire trasformazioni canoniche usando le funzioni generatrici.

Teorema 5.4.1 (Teorema d'invarianza per le trasformazioni canoniche). Si consideri una trasformazione di coordinate

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \rightarrow (Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) \quad (5.20)$$

diciamo che una trasformazione è canonica se e soltanto se preserva le

parentesi fondamenti di Poisson

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad (5.21)$$

inoltre gli elementi della matrice simplettica sono rappresentabili come

$$\left[\begin{array}{c|c} \{q_i, q_j\} & \{q_i, p_j\} \\ \hline \{p_i, q_j\} & \{p_i, p_j\} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{n \times n} & \mathbb{I}_{n \times n} \\ \hline -\mathbb{I}_{n \times n} & \mathbb{O}_{n \times n} \end{array} \right] \quad (5.22)$$

Dimostrazione. Consideriamo le coordinate $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ e le riscriviamo in unico vettore $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{2n})$, dove $\{x_\alpha, x_\beta\} = \mathcal{J}_{\alpha\beta}$ per $\alpha, \beta = 1, \dots, 2n$ coincidono con le componenti della matrice simplettica. Applicando la trasformazione di coordinate (5.23) applichiamo lo stesso procedimento per le coordinate $(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$ definendo $\vec{\mathcal{X}} = (X_1, \dots, X_{2n})$ dove ogni elemento del vettore è dipendente dalle coordinate di partenza $X_\alpha(x_1, \dots, x_{2n})$. Fissato α poiché le componenti di $\vec{\mathcal{X}}$ non sono esplicitamente dal tempo possiamo scrivere la loro evoluzione temporale come

$$\frac{d}{dt} X_\alpha = \{X_\alpha, H\} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} \mathcal{J}_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial x_\beta} \quad (5.23)$$

La nuova Hamiltoniana $K(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)$ definita rispetto alle nuove coordinate della trasformazione descrive il medesimo sistema se

$$K(Q, P) = H(q, p) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.24)$$

Ipotizzando che F sia una funzione generatrice non dipendente esplicitamente dal tempo la relazione (5.27) diventa

$$K(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \quad (5.25)$$

dunque possiamo riscrivere le derivate parziali della Hamiltoniana H in (5.26) nel seguente modo

$$\frac{\partial H(\vec{x}(\vec{\mathcal{X}}))}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial K(\vec{\mathcal{X}}(\vec{x}))}{\partial x_\alpha} = \sum_{\eta=1}^{2n} \frac{\partial K}{\partial X_\eta} \frac{\partial X_\eta}{\partial x_\alpha} \quad (5.26)$$

sostituendo nell'equazione (5.26) si ha che

$$\frac{d}{dt}X_\alpha = \{X_\alpha, H\} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} \mathcal{J}_{\alpha\beta} \sum_{\eta=1}^{2n} \frac{\partial K}{\partial X_\eta} \frac{\partial X_\eta}{\partial x_\alpha} = \quad (5.27)$$

$$= \sum_{\eta=1}^{2n} \left[\sum_{\beta=1}^{2n} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} \mathbb{J}_{\beta\alpha} \frac{\partial X_\eta}{\partial x_\alpha} \right] \frac{\partial K}{\partial X_\eta} = \sum_{\eta=1}^{2n} \{X_\alpha, X_\eta\} \frac{\partial K}{\partial X_\eta} \quad (5.28)$$

Se $\{X_\alpha, X_\eta\} = \mathcal{J}_{\alpha\eta}$ la trasformazione preserva la forma delle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{Q}_j = \frac{\partial K}{\partial P_j} \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad (5.29)$$

e quindi la trasformazione è canonica. Viceversa ipotizziamo che la trasformazione sia canonica allora le componenti della matrice \mathcal{J} coincidono con le parentesi di Poisson e dunque

$$\frac{d}{dt}X_\alpha = \sum_{\eta} \mathcal{J}_{\alpha\eta} \frac{\partial K}{\partial X_\eta} \quad (5.30)$$

e dunque preserva la forma delle equazioni di Hamilton.

□

5.4.1 Funzioni generatrici per la trasformazioni canoniche

Nel capitolo di meccanica Lagrangiana si è visto come due descrizioni diverse tra loro dello stesso sistema fisico sono equivalenti se le rispettive Lagrangiane che lo descrivono differiscono tra loro per una derivata totale del tipo $\frac{dF(q,t)}{dt}$.

Teorema 5.4.2 (Equivalenza equazioni E-L). Siano $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$ la Lagrangiana del sistema rispetto a delle coordinate Q e $L(q, \dot{q}, t)$ la Lagrangiana rispetto ad un sistema in coordinate q , allora descrivono il medesimo sistema fisico se

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = \lambda L(q, \dot{q}, t) - \frac{dF(q, Q, t)}{dt} \quad (5.31)$$

CAPITOLO 5. LA MECCANICA HAMILTONIANA

Osservazione. Il segno meno all'interno dell'equazione (5.24) è per convenzione. Inoltre solo per $\lambda = 1$ si rappresenta una trasformazione canonica.

Dimostrazione. Utilizziamo la definizione di Azione integrando l'equazione (5.24)

$$S[q, Q] = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + F(q(t_1), Q(t_1), t_1) - F(q(t_2), Q(t_2), t_2)$$

Riscriviamo il funzionale d'azione come

$$\tilde{S} - S = \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{L} - L) dt = F(q(t_1), Q(t_1), t_1) - F(q(t_2), Q(t_2), t_2)$$

Consideriamo un incremento infinitesimo ε nella direzione \underline{h} avremo che la variazione del funzionale $\tilde{S} - S$ è pari a

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{S} - S) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tilde{S} - S)[q + \varepsilon h] - (\tilde{S} - S)[q] = \\ &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(q(t_1) + \varepsilon h) - F(q(t_2) + \varepsilon h) - F(q(t_1), t_1) + F(q(t_2), t_2) = 0 \\ \Rightarrow \delta\tilde{S} &= \delta S \end{aligned}$$

Dunque le equazioni di E-L definite dalle due Lagrangiane sono le medesime.

□

Osservazione. Anche se le due funzioni Lagrangiane sono diverse da loro descrivono il medesimo sistema dato che definiscono le stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

La funzione F può essere usata partendo da una Lagrangiana per generarne una nuova, che fornisce una descrizione equivalente a quella di partenza del sistema fisico.

Poichè la Hamiltoniana è esprimibile come trasformata di Legendre della Lagrangiana quanto espresso rispetto alle equazioni di E-L è estendibile alle

equazioni di Hamilton.

$$K = \dot{Q}P - qp + H + \frac{dF(q, Q, t)}{dt} \quad (5.32)$$

con la comparsa di termini in più e condizioni al contorno. Definendo la 1-forma differenziale

$$dF = pdq - PdQ + (K - H)dt \quad (5.33)$$

5.4.2 Cambi di coordinate

Consideriamo di avere un sistema nelle coordinate (Q, P) e di voler passare alle coordinate (p, q) per farlo definiamo una funzione

$$\begin{cases} Q = Q(q, p) \\ P = P(q, p) \end{cases}$$

Affinchè la trasformazione sia un cambio di coordinate deve essere invertibile, ovvero $\det J \neq 0$ dove J è la matrice Jacobiana.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

La matrice Jacobiana associata al cambio di coordinate è di fondamentale importanza in quanto le condizioni sulle sue componenti definiscono condizione necessaria e sufficiente affichè una funzione F sia una funzione generatrice di una trasformazione canonica, ovvero che le parentesi di Poisson siano preservate.

5.4.3 Jacobiano e condizione di canonicità

Definiamo il passaggio di coordinate

$$\begin{cases} p = p(q, Q) \\ P = P(q, Q) \end{cases}$$

verifichiamo che le parentesi di Poisson siano preservate

$$\{Q, P\} = \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)_q \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)_p - \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)_p \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_q \quad (5.35)$$

possiamo riscrivere alcuni addendi nel seguente modo

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)_q = \left(\frac{\partial P}{\partial Q} \right)_q \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_q \quad (5.36)$$

e

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)_p = \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)_Q + \left(\frac{\partial P}{\partial Q} \right)_q \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)_p$$

sostituendo all'interno dell'espressione (5.28) della parentesi di Poisson possiamo riscriverla come

$$\{Q, P\} = - \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_q \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)_Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_q \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_q = 1 \quad (5.37)$$

Il passaggio

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)_Q = - \left(\frac{\partial p}{\partial Q} \right)_q$$

si è ottenuta come condizione di canonicità dall'espressione (5.20) e l'invertibilità del cambio di coordinate.

Osservando la struttura della (5.28) e della (5.29) si ha che posto

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = 0 \quad (5.38)$$

elemento della matrice Jacobiana la parentesi di Poisson non viene preservata e dunque non si ottiene una trasformazione di coordinate che preserva la matrice simplettica. Resta da determinare come tali informazioni si leghino alla scelta della funzione generatrice.

5.4.4 Funzione generatrice di I specie

Definiamo funzione generatrice del primo tipo una funzione $F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)$ associata ad un cambio di coordinate

$$\begin{cases} p = p(q, Q) \\ P = P(q, Q) \end{cases}$$

consideriamo il differenziale totale associato alla funzione

$$\frac{dF(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{dt} = \left[\frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{Q}} \right] + \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t} \quad (5.39)$$

sostituendo nella relazione (5.26)

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{p} - \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right] \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \\ & = \left[\mathbf{P} + \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{Q}} \right] \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) + \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

affinchè la Hamiltoniana nelle nuove coordinate descriva il medesimo sistema fisico e la trasformazione sia canonica si deve avere che

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial t} \quad (5.40)$$

di conseguenza si deve avere che

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{P} = -\frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{Q}} \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \quad (5.41)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione sia canonica è

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0 \quad (5.42)$$

Inoltre si estende quanto discusso alla funzione $F_1(q, Q, t)$ affinchè sia una funzione generatrice, prendendo l'equazione (5.30) e sostituendo rispetto a (5.34)

$$\{Q, P\} = - \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_q \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)_Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_q \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} = 1 \quad (5.43)$$

Affinchè le parentesi di Poisson siano preservate è necessario che

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} \neq 0 \quad (5.44)$$

Osservazione. Dunque dimostrare che la componente J_{12} è della matrice Jacobiana è non nulla, per quanto discusso nella sezione precedente equivale a dimostrare che F_1 è una funzione generatrice del primo tipo.

5.4.5 Funzione generatrice del II tipo

Procedendo come per le funzioni del primo tipo, definiamo una funzione $F = F_2(q, P, t) - QP$ associata alla trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} p = p(q, P) \\ Q = Q(q, P) \end{cases} \quad (5.45)$$

il differenziale della funzione è dato da

$$dF_2 = pdq + QdP + (K - H)dt \quad (5.46)$$

e

$$dF_2(q, P, t) = \frac{\partial F_2}{\partial q} dq + \frac{\partial F_2}{\partial P} dP + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt \quad (5.47)$$

di conseguenza le coordinate canoniche (5.38) possono essere riscritte come

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases} \quad (5.48)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione canonica ammetta funzione generatrice di seconda specie è

$$\frac{\partial P}{\partial p} \neq 0 \quad (5.49)$$

che per quanto discusso in precedenza equivale a porre una condizione su $F_2(q, P, t)$ del tipo

$$\frac{\partial F_2(q, P, t)^2}{\partial q \partial P} \neq 0 \quad (5.50)$$

5.4.6 Funzione generatrice del III tipo

Definiamo una funzione del terzo tipo $F = F_3(p, Q, t) + qp$ associata ad una trasformazione canonica

$$\begin{cases} q = q(p, Q) \\ P = p(p, Q) \end{cases} \quad (5.51)$$

il differenziale della funzione F è dato da

$$dF_3 = -qdp - PdQ + (K - H)dt \quad (5.52)$$

e

$$dF_3 = \frac{\partial F_3}{\partial p} dp + \frac{\partial F_3}{\partial Q} dQ + \frac{\partial F_3}{\partial t} dt \quad (5.53)$$

le coordinate della trasformazione canonica associata assumono la forma

$$\begin{cases} q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \\ P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \\ K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases} \quad (5.54)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le parentesi di Poisson siano preservate è

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \neq 0 \quad (5.55)$$

che equivale a imporre una condizione sulla funzione F_3

$$\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p \partial Q} \neq 0 \quad (5.56)$$

5.4.7 Funzione generatrice del IV tipo

Definiamo funzione generatrice del quarto tipo una funzione $F = F_4(p, P, t) + qp - QP$ associata alla trasformazione canonica

$$\begin{cases} q = q(p, P) \\ Q = Q(p, P) \end{cases} \quad (5.57)$$

studiando il differenziale della funzione generatrice otteniamo

$$dF_4 = \frac{\partial F_4}{\partial p} dp + \frac{\partial F_4}{\partial P} dP + \frac{\partial F_4}{\partial t} dt \quad (5.58)$$

e

$$dF_4 = -qdp + QdP + (K - H)dt \quad (5.59)$$

e di conseguenza la trasformazione (5.50) è uguale a

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \quad (5.60)$$

Affinchè la trasformazione preservi le parentesi di Poisson deve valere la seguente condizione sugli elementi della matrice Jacobiana associata

$$\frac{\partial P}{\partial q} \neq 0 \quad (5.61)$$

ed estesa alla funzione generatrice F_4 diventa

$$\frac{\partial F_4}{\partial p \partial P} \neq 0 \quad (5.62)$$

Funzione generatrice	Trasformazione
$F_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$
$F_2(q, P, t) - QP$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$
$F_3(p, Q, t) + qp$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$
$F_4(p, P, t) + qp - QP$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

Osservazione. Quanto discusso per due variabili è generalmente estendibile a più dimensioni.

5.5 Trasformazioni di Contatto

Si consideri un sistema Hamiltoniano con in coordinate (\vec{q}, \vec{p}) definiamo la trasformazione con più di un grado di libertà

$$\begin{cases} Q_k = Q_k(q_1, \dots, q_d) \\ P_k = \sum_{j=1}^d A_{kj}(q_1, \dots, q_d) p_j \end{cases} \quad (5.63)$$

allora valgono i seguenti risultati:

1. La trasformazione è canonica se e soltanto se

$$J_{(q, Q)} = (A^{-1})^T \quad (5.64)$$

2. La funzione generatrice è del secondo tipo e ha la forma

$$F_2(q, P) = \sum_{j=1}^d Q_j(\vec{q}) P_j \quad (5.65)$$

trasformazioni di questo tipo in cui P_k è esprimibile come combinazione lineare delle \vec{p} e le Q_k dipendono solo da \vec{q} vengono chiamate **trasformazioni di contatto**.

Dimostrazione. La matrice Jacobiana associata alla trasformazione di coordinate è della forma

$$J = \left[\begin{array}{c|c} J_{(q,Q)} & \underline{0} \\ \hline \star & A(\vec{q}) \end{array} \right] \quad (5.66)$$

affinchè la trasformazione sia una trasformazione di coordinate è necessario che sia invertibile ovvero $\det J \neq 0$, il determinante della matrice Jacobiana è dato da

$$\det J = \det(J_{(q,Q)})\det(A(\vec{q})) \neq 0 \quad (5.67)$$

ciò implica che $\det(A(\vec{q})) \neq 0$, tale risultato coincide con la condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione ammetta una funzione generatrice del secondo tipo (inoltre $A(\vec{q})$ è invertibile). Dati tali risultati possiamo riscrivere la trasformazione (5.56) come

$$\begin{cases} Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \\ p_k = \sum_{j=1}^d A_{kj}^{-1}(\vec{Q})P_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \end{cases} \quad (5.68)$$

integrando il primo membro otteniamo la forma di F_2

$$F_2^k = \int Q_k dP_k = Q_k P_k + G(\vec{q}, \vec{P}) \quad (5.69)$$

risolvendo le prime d'equazioni avremo che

$$F_2 = \sum_{j=1}^d Q_j P_j + \phi(\vec{q}) \quad (5.70)$$

sostituendo rispetto al secondo membro della (5.62) abbiamo che

$$\sum_{j=1}^d A_{kj}^{-1}(\vec{Q})P_j = \sum_{j=1}^d \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} P_j + \frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q_k} \quad (5.71)$$

per avere che $\phi(\vec{q})$ sia una soluzione comune a tutte le equazioni è necessario che sia una funzione costante e dunque $\frac{\partial\phi(\vec{q})}{\partial q_k} = 0$, di conseguenza la (5.64) diventa

$$\sum_{j=1}^d A_{kj}^{-1}(\vec{Q}) P_j = \sum_{j=1}^d \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} P_j \quad (5.72)$$

da (5.65) abbiamo che

$$A_{kj}^{-1}(\vec{Q}) = \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \quad (5.73)$$

ovvero gli elementi della matrice inversa di A coincidono con gli elementi della matrice Jacobiana trasposta, la (5.65) può essere riscritta in modo compatto come

$$A^{-1} \cdot \vec{P} = J_{(q,Q)}^T \cdot \vec{P} \quad (5.74)$$

di conseguenza poichè l'operazione di trasposizione gode della proprietà d'idempotenza si ha

$$J_{(q,Q)} = (A^{-1})^T \quad (5.75)$$

Inoltre dato che $\frac{\partial\phi(\vec{q})}{\partial q_k} = 0$ la (5.63) diventa

$$F_2 = \sum_{j=1}^d Q_j P_j \quad (5.76)$$

□

5.6 Hamiltoniane esplicitamente dipendenti dal tempo ed estensione dello spazio delle fasi

Consideriamo un sistema dinamico descritto da una funzione Hamiltoniana esplicitamente dipendente dal tempo

$$H = H(q, p, t) \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \right) \quad (5.77)$$

CAPITOLO 5. LA MECCANICA HAMILTONIANA

le rispettive equazioni di Hamilton saranno date da

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, n \\ \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \quad (5.78)$$

le grandezze fisiche associate saranno definite sullo **spazio delle fasi** ovvero saranno funzioni esplicitamente dipendenti dal tempo e della forma

$$G(q, p, t) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.79)$$

dalla relazione (5.16) sappiamo che la derivata totale di una funzione G è data da

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} \quad (5.80)$$

che descrive l'evoluzione di $G(q, p, t)$. È possibile definire uno **spazio delle fasi esteso** $\mathcal{I} \times \mathbb{R}_+^2$ introducendo due parametri (E, s) che ci permettono di riscrivere le equazioni di Hamilton esplicitamente dipendenti dal tempo in un nuovo sistema rispetto al quale sono indipendenti dalla variabile temporale.

Per le nuove variabili introdotte (E, s) deve valere che

$$\{E, s\} = 1 \quad \{E, q_j\} = \{E, p_j\} = 0 \quad (5.81)$$

$$\{s, q_j\} = \{s, p_j\} = 0 \quad (5.82)$$

Dai risultati precedenti si possono definire i due seguenti teoremi:

Teorema 5.6.1. Data un Hamiltoniana $H(q, p, t)$ esplicitamente dipendente dal tempo, dati due parametri (E, s) si può estendere la Hamiltoniana H sullo spazio delle fasi esteso definendola come

$$\mathcal{H}(q, p, E, s) = H(q, p, s) - E \quad (5.83)$$

Allora la nuova Hamiltoniana ottenuta e le rispettive equazioni di Hamilton non dipendono più esplicitamente dal tempo.

Dimostrazione. Data $\mathcal{H}(q, p, E, s) = H(q, p, s) - E$ le rispettive equazioni di

Hamilton si scrivono come

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H(q,p,s)}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H(q,p,s)}{\partial q_j} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\partial H(q,p,s)}{\partial s} \\ \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H(q,p,s)}{\partial E} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad (5.84)$$

le equazioni di Hamilto date dal sistema (5.77) rispetto alla Hamiltonina \mathcal{H} non dipendono esplicitamente dal tempo. Inoltre $\frac{ds}{dt} = -1$ che integrando si ottiene $s \equiv t$, usando tale risultato abbiamo che le equazioni di Hamilton nello spazio esteso diventano

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H(q,p,s)}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H(q,p,s)}{\partial q_j} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{dH(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} \end{cases} \quad (5.85)$$

in questo modo si riottiene il sistema di equazioni esplicitamente dipendente dal tempo.

□

Teorema 5.6.2. Consideriamo una grandezza fisica

$$G(q, p, t) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

definita sullo spazio delle fasi, se introduciamo dei parametri (E, s) tale grandezza è definibile sullo spazio delle fasi esteso come

$$\mathcal{G}(q, p, s) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.86)$$

eliminando la dipendenza esplicita dal tempo, allora l'evoluto dinamico di tale quantità rispetto ai nuovi parametri sarà dato da

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} \quad (5.87)$$

Dimostrazione. Sviluppiamo la parentesi di Poisson

$$\{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial E} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} \quad (5.88)$$

dalla dimostrazione del teorema precedente sappiamo che $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} = -1$ e dunque $s \equiv t$ inoltre $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial E} = 0$, e per le relazioni del sistema (5.77) ci si riconduce all'espressione

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

□

5.7 Risoluzione di un problema di Cauchy con l'utilizzo delle trasformazioni canoniche e le equazioni di Hamilton

Consideriamo il seguente problema di Cauchy rispetto alle coordinate (q, p)

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{q^4} \\ \dot{p} = \frac{2p^2}{q^4} - q^2 \\ q(0) = 1 \\ p(0) = 0 \end{cases} \quad (5.89)$$

Determiniamo la Hamiltoniana $H(q, p)$ associata al problema di Cauchy, ovvero imponiamo che

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{q^4} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = \frac{2p^2}{q^4} - q^2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (5.90)$$

integrandola la prima equazione rispetto dp abbiamo

$$H = \frac{p^2}{2q^4} + G(q) \quad (5.91)$$

sostituendo in nella seconda relazione in (5.83)

$$\frac{2p^2}{q^4} - q^2 = \frac{2p^2}{q^4} - G'(q) \quad (5.92)$$

e dunque

$$G(q) = \int_0^q q^2 dq = \frac{q^3}{3} \quad (5.93)$$

ed in conclusione sostituendo in (5.84) la Hamiltoniana H è della forma

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{q^4} + \frac{q^3}{3} \quad (5.94)$$

Possiamo interpretare la relazione (5.87) come l'energia totale del sistema, data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$H(q, p) = T(q, p) + U(q) \quad (5.95)$$

La struttura di H ci suggerisce di applicare una trasformazione canonica di contatto, ovvero della forma

$$\begin{cases} Q = U(q) \\ P = P(q, p) \end{cases} \iff \begin{cases} Q = \frac{q^3}{3} \\ P = P(q, P) \end{cases} \quad (5.96)$$

Affinchè la trasformazione sia canonica è necessario che le parentesi di Poisson siano preservate

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} = q^2 \frac{\partial P}{\partial p} = 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{q^2}$$

integrando si ha

$$P(q, p) = \frac{p}{q^2} \quad (5.97)$$

dunque la trasformazione di contatto è data da

$$\begin{cases} Q = \frac{q^3}{3} \\ P = \frac{p}{q^2} \end{cases} \quad (5.98)$$

CAPITOLO 5. LA MECCANICA HAMILTONIANA

Determiniamo la nuova Hamiltonia $K(Q,P)$ rispetto alle nuove coordinate definendo la trasformazione canonica inversa e andando a sostituire nella Hamiltoniana $H(q,p)$ determinata nell'equazione (5.87)

$$\begin{cases} q = [3Q]^{1/3} \\ p = P[3Q]^{3/2} \end{cases} \quad (5.99)$$

dunque $K(Q,P)$ è uguale ad

$$K(Q, P) = \frac{1}{2} P^2 + Q \quad (5.100)$$

definiamo le equazioni di Hamilton rispetto alla Hamiltoniana K

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -1 \end{cases} \quad (5.101)$$

il problema di Cauchy nelle nuove coordinate è dato da

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -1 \\ Q(0) = \frac{1}{3} \\ P(0) = 0 \end{cases} \quad (5.102)$$

integrando le equazioni rispetto al tempo ed effettuando le opportune sostituzioni

$$\begin{cases} Q = Q(0) + \int_0^t P dt = \frac{1}{3} - \int_0^t t dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} t^2 \\ P = -t \end{cases} \quad (5.103)$$

sostituendo nella (5.92) otteniamo la soluzione rispetto al problema di Cauchy di partenza dato da (5.82)

$$\begin{cases} q = [1 - \frac{3}{2} t^2]^{1/3} \\ p = -t [1 - \frac{3}{2} t^2]^{2/3} \end{cases} \quad (5.104)$$

5.8 Trasformazioni Canoniche Infinitesime

Consideriamo la trasformazione identità delle coordinate, questa sarà data da una funzione generatrice

$$F(q, P) = qP \quad (5.105)$$

dove avremo

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = P \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P} = q \end{cases} \quad (5.106)$$

e quindi una mappa dove $q \rightarrow Q$ e $p \rightarrow P$.

Ipotizziamo di perturbare in modo infinitesimo e lineare la trasformazione di identità definendo

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon f(q, p) + o(\varepsilon) \\ P = p + \varepsilon g(q, p) + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.107)$$

trasformazioni di questo tipo prendono il nome di **trasformazioni infinitesime**.

5.8.1 Condizione di canonicità per le trasformazioni infinitesime

La domanda che ci poniamo è quale forma devono avere f e g affinché (5.100) sia una trasformazione canonica, ovvero lasci invariato il problema in forma; per rispondere a tale domanda verifichiamo la condizione di canonicità, ovvero che le parentesi di Poisson sia preservate.

Teorema 5.8.1. Data una trasformazione di coordinate $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ della forma

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon f(q, p) + o(\varepsilon) \\ P = p + \varepsilon g(q, p) + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.108)$$

CAPITOLO 5. LA MECCANICA HAMILTONIANA

tale trasformazione è canonica se e soltanto se le parentesi di Poisson sono preservate.

$$\{Q, P\} = 1 + o(\varepsilon) \quad \{P, Q\} = -1 + o(\varepsilon) \quad (5.109)$$

$$\{Q, Q\} = 0 + o(\varepsilon) \quad \{P, P\} = 0 + o(\varepsilon)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \{q + \varepsilon f(q, p) + o(\varepsilon), p + \varepsilon g(q, p) + o(\varepsilon)\} = \\ &= \{q, p\} + \varepsilon[\{q, g(q, p)\} + \{f(q, p), p\}] + 0(\varepsilon) \end{aligned}$$

dove $\{q, p\} = 1$ mentre il secondo addendo fornisce la condizione

$$\{q, g\} + \{f, p\} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \quad (5.110)$$

Se consideriamo un insieme semplicemente connesso nel piano delle fasi (q, p) , tale condizione coincide con l'esistenza di una funzione $F(q, p)$ tale che

$$\begin{cases} f = \frac{\partial F(q, p)}{\partial p} \\ g = -\frac{\partial F(q, p)}{\partial q} \end{cases} \quad (5.111)$$

che rende la trasformazione canonica e soddisfa dunque le condizioni poste in (5.102).

□

Dal risultato ottenuto dalla dimostrazione precedente possiamo definire una **trasformazione canonica infinitesima** come

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon \frac{\partial F(q, p)}{\partial p} + o(\varepsilon) \\ P = p - \varepsilon \frac{\partial F(q, p)}{\partial q} + o(\varepsilon) \end{cases} \quad (5.112)$$

5.8.2 Famiglia di trasformazioni canoniche ad un parametro

Se consideriamo la trasformazione (5.105) rispetto al parametro ε questa appartiene alle trasformazioni canoniche ad 1 parametro e la funzione F coincide con la Hamiltoniana del sistema

$$\begin{cases} \frac{dQ_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial p} \\ \frac{dP_\varepsilon}{d\varepsilon} = -\frac{\partial F}{\partial q} \end{cases} \quad (5.113)$$

Definizione 5.8.1. Un gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche è un gruppo di simmetria rispetto H se

$$H(Q_\varepsilon, P_\varepsilon) = H(q, p) \Rightarrow \frac{d}{d\varepsilon} [H(Q_\varepsilon, P_\varepsilon) - H(q, p)] = 0 \quad (5.114)$$

ovvero la Hamiltoniana resta invariata rispetto alla trasformazione.

Definizione 5.8.2. Una famiglia ad un parametro di trasformazioni canoniche è di simmetria per la Hamiltoniana H se e solo se $\{H, F\} = 0$.

Definizione 5.8.3. Consideriamo una famiglia di trasformazioni canoniche ad un parametro, parametrizzate da $s \in \mathbb{R}$ nello spazio delle configurazioni M allora valgono le seguenti proprietà:

1. $f(q, p, 0)$ è l'identità
2. $f^{-1}(q, p, s) = f(q, p, -s)$
3. $f(f(q, p, s_1), s_2) = f(q, p, s_1 + s_2)$
4. $\forall q, p$ fissati, f è definibile rispetto ad $s \in \mathbb{R}$ ed esiste $\frac{\partial f}{\partial s}|_{s=0}$

5.8.3 Hamiltoniana di una trasformazione infinitesima

Riscriviamo la Hamiltonina rispetto al nuovo sistema di coordinate definito dalla trasformazione canonica infinitesima (5.105)

$$\frac{dH}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H(x + \varepsilon f, p + \varepsilon g) - H}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \langle \nabla H, \varepsilon \underline{h} \rangle =$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial q} f + \frac{\partial H}{\partial p} g \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} \right) \equiv \{ H, F \}$$

tale risultato è significativo in quanto se applichiamo le proprietà delle parentesi di Poisson si ha che

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial J}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial J}{\partial p} \dot{p} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \equiv -\{ H, F \} \end{aligned}$$

che ci descrive il cambiamento di F rispetto a moto di una particella, di conseguenza se si ha una funzione tale per cui $\{ H, F \} = 0$, si ha che

1. Dalla relazione precedente la Hamiltoniana resta invariata rispetto alla trasformazione di coordinate.
2. F è una costante del moto
3. L'evoluzione dinamica della Hamiltoniana può essere riscritta come trasformazione canonica.

5.9 Teorema di Noether per la meccanica Hamiltoniana

Teorema 5.9.1 (Primo Teorema di Emmy Noether). Sia F la funzione generatrice di una trasformazione canonica infinitesima essa è una simmetria per il sistema descritto dalle equazioni di Hamilton se e soltanto se è una costante del moto.

Dimostrazione. Consideriamo una trasformazione canonica infinitesima del-

la forma

$$\begin{cases} Q = q + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p} + o(\varepsilon) \\ P = p - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q} + o(\varepsilon) \end{cases}$$

e sviluppiamo al primo ordine la Hamiltoniana definita rispetto alle nuove coordinate (Q, P)

$$\begin{aligned} H(Q, P) &= H\left(q + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p} + o(\varepsilon), p + \varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial q}\right) + o(\varepsilon)\right) = \\ &= H(q, p) + \varepsilon \left[\frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \right] + o(\varepsilon) = \\ &= H(q, p) + \varepsilon \{H, f\} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

La trasformazione canonica infinitesima definita è una simmetria per la Hamiltoniana se e soltanto se $\{H, f\} = 0$ e quindi f lascia invariata H . Poichè le parentesi di Poisson godono della proprietà di antisimmetria $\{f, H\} = 0$ si ha che H lascia invariata f e dunque si conclude che f è una costante del moto per la Hamiltoniana H .

□

5.10 Teoria di Hamilton-Jacobi

Si è visto che se la Hamiltoniana si conserva (ovvero non dipende esplicitamente dal tempo), allora le equazioni del Hamilton che rappresentano un sistema di equazioni differenziali si possono risolvere con una opportuna trasformazione che conduce ad un sistema di coordinate tutte cicliche e rispetto alle quali la soluzione del problema è immediata; altrimenti si può cercarcare una particolare trasformazione canonica che porti dal sistema di coordinate e momenti (q, p) all'istante t , in un sistema in cui le grandezze sono costanti. Per questi tipi di relazione la trasformazione che lega le coordinate

vecchie a quelle nuove è la soluzione del problema meccanico

$$\begin{aligned} q &= q(q_0, p_0, t) \\ p &= p(q_0, p_0, t) \end{aligned} \quad (5.115)$$

che legano le coordinate e i momenti in funzione dei valori iniziali e del tempo.

Scopo di questa sezione è determinare la forma di questa particolare trasformazione canonica.

5.10.1 Equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione principale di Hamilton

Definiamo con K la Hamiltoniana rispetto alla trasformazione delle coordinate vogliamo che questa sia costante nel tempo, tale condizione di traduce nell'imporre che K sia identicamente nulla in modo tale che le equazioni di Hamilton rispetto alla funzione K nel nuovo sistema di coordinate siano

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial P_i} = \dot{Q}_i = 0 \\ -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0 \end{cases} \quad (5.116)$$

Inoltre la nuova Hamiltoniana K deve descrivere il medesimo sistema fisico descritto dalla funzione H definita rispetto le coordinate di partenza e dunque in accordo ai principi variazionali deve valere la relazione

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (5.117)$$

imponendo che $K = 0$ l'equazione (5.110) si traduce nella condizione

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (5.118)$$

La forma più semplice che può assumere F è che sia funzione delle vecchie coordinate q_i , dei nuovi momenti P_i e del tempo. Una funzione di questo tipo coincide con una funzione generatrice di seconda specie $F_2(q, P)$ per

una trasformazione canonica

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

dalla relazione definita dal primo elemento $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ si può riscrivere l'equazione (5.111) come

$$H\left(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}; t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad (5.119)$$

tal equazione è nota con il nome di **equazione di Hamilton-Jacobi**, ed è, per la funzione generatrice, un'equazione differenziale alle derivate parziali nelle $(n+1)$ variabili q_1, \dots, q_n, t . La soluzione dell'equazione (5.112) viene indicata con S e prende il nome di **funzione principale di Hamilton**.

Osservazione. È noto che trovare la soluzione generale di una equazione alle derivate parziali come quella di H-J un problema di gran lunga più complicato che trovare la soluzione generale di un sistema di equazioni differenziali ordinarie (come le equazioni Hamiltoniane). Quindi può sembrare che l'idea di Jacobi sia solo formale e di poca utilità pratica; in realtà il fatto cruciale è che l'equazione di H-J può essere vista come una equazione alle derivate parziali per una funzione $S(q, P, t)$, dove i momenti generalizzati nelle nuove coordinate sono considerati costanti come richiesto in (5.109).

Esempio

Consideriamo la Hamiltoniana di un oscillatore armonico

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2$$

l'equazione di Hamilton-Jacobi associata, ipotizzando una soluzione della forma $S(q, P, t)$ si scrive come

$$\frac{1}{2m} \left[\frac{\partial S}{\partial q} \right]^2 + \frac{k}{2}q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Definizione 5.10.1. Se si ha un problema mono-dimensionale, ovvero si ha un solo parametro $\alpha = P$ si definisce **integrale completo** delle equazioni di Hamilton-Jacobi una famiglia ad un parametro di soluzioni $S(q, P = \alpha, t)$ tali per cui si ha che

$$\frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} \neq 0$$

ovvero si richiede che la trasformazione di coordinate preservi la matrice simplettica e dunque S sia una funzione generatrice di seconda specie.

Tale definizione si estende al caso in più imponendo la condizione

$$\det \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial P_k} \right] \neq 0$$

5.10.2 Significato fisico della funzione principale di Hamilton

Si consideri la derivata totale della funzione principale di Hamilton $S(q, P, t)$ questa è data da

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (5.120)$$

dove si è sfruttato il fatto che i momenti P_i sono costanti del tempo. Tale equazione sfruttando la relazione (5.112) può essere riscritta come

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \dot{q}_i - H = L \quad (5.121)$$

dunque la funzione principale di Hamilton differisce dall'integrale temporale indefinito della Lagrangiana per una costante

$$S = \int L dt + C \quad (5.122)$$

5.10.3 Funzione caratteristica di Hamilton

Se la Hamiltonina non dipende esplicitamente dal tempo, la funzione principale di Hamilton su può scrivere come

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t \quad (5.123)$$

dove $W(q, \alpha)$ prende il nome di **funzione caratteristica di Hamilton**. Il significato fisico di W si comprende dalla sua derivata totale rispetto al tempo

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (5.124)$$

sostituendo la (5.116) nella equazione (5.112) e confrontando il risultato con la (5.117) si ha che

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.125)$$

e quindi

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \dot{q}_i \quad (5.126)$$

integrando si ottiene

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} \int p_i dq_i \quad (5.127)$$

ovvero l'azione abbreviata.

L'equazione di Hamilton-Jacobi assume quella che viene definita una forma ristretta

$$H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = \alpha_1 \quad (5.128)$$

che non contiene più il tempo esplicitamente. Una delle costanti d'integrazione e precisamente α_1 deve essere uguale al valore costante di H . Si può dimostra che W genera a sua volta una trasformazione con proprietà diverse da quelle ottenute da S .

Si consideri una trasformazione canonica in cui i nuovi momenti siano tutti costanti del moto α_i e in particolare α_1 rappresenta la costante del moto H . Se indichiamo con $W(q, P)$ la funzione generatrice di questa trasformazione, allora le equazioni saranno

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \\ Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.129)$$

La condizione che permette di determinare W è l'imposizione che

$$H(q_i, p_i) = \alpha_1$$

che sostituendo nell'equazione di Hamilton si traduce nell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$H\left(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = \alpha_1 \quad (5.130)$$

Poichè W non dipende esplicitamente dal tempo l'Hamiltoniana nuova e quella rispetto alle vecchie coordinate coincidono e dunque $K = \alpha_1$. *la funzione caratteristica di Hamilton W genera una trasformazione canonica in cui tutte le nuove coordinate sono cicliche.* Poichè H è una costante del moto le equazioni di Hamilton coincidono con (5.109) rispetto a K e dunque una trasformazione di questo tipo risolve il problema meccanico. Le equazioni canoniche di P_i si limitano a sottolineare che i momenti coniugati alle coordinate cicliche sono costanti

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad P_i = \alpha_i \quad i = 1, \dots, n$$

e le equazioni del di \dot{Q}_i sono

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} = 1 & i = 1 \\ = 0 & i \neq 1 \end{cases} \quad (5.131)$$

che ha soluzione

$$Q_1 = t + \beta_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \quad (5.132)$$

$$Q_i = \beta_i \equiv \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad i \neq 1$$

La dipendenza di W dalle vecchie coordinate q_i si ricava risolvendo l'equazione differenziale alle derivate parziali (5.123).

Non è sempre necessario che α_1 e le costanti d'integrazione di W siano i nuovi momenti canonici costanti. A volte è più comodo scegliere come momenti trasformati un insieme di n funzioni indipendenti dalle α_i . Indichiamo

tali funzioni come γ_i . Le equazioni del moto per \dot{Q}_i diventano

$$\dot{Q}_i = -\frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = v_i \quad (5.133)$$

dove $v_i(\gamma_i)$. In questo caso tutte le nuove coordinate sono funzioni lineari del tempo

$$Q_i = v_i t + \beta_i \quad (5.134)$$

5.11 Separazione delle variabili per l'equazione di Hamilton-Jacobi

In certe condizioni è possibile separare le variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi e in tale caso la soluzione di riduce alle quadrature. Il metodo di Hamilton-Jacobi si rivela utile dal punto di vista del calcolo solo quando questa separazione è possibile. Una coordinata q_j si dice **separabile** nell'equazione di H-J se la funzione principale di Hamilton può essere divisa nella somma di due parti in cui una dipende solo dalla coordinata q_j e l'altra ne è indipendente. Per comodità di notazione ipotizziamo sia q_1 allora la funzione principale affichè sia separabile deve essere della forma

$$\begin{aligned} S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) &= S_1(q_1; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) + \\ &\quad + S'(q_2, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) \end{aligned} \quad (5.135)$$

Si dice che l'equazione di Hamilton-Jacobi è **completamente separabile** (o semplicemente separabile), se tutte le coordinate del problema sono separabili.

$$S = \sum_i S_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_\pi; t) \quad (5.136)$$

l'equazione di H-J si dividerà in n equazioni del tipo

$$H_i \left(q_j; \frac{\partial S_j}{\partial q_j}; \alpha_1, \dots, k_n; t \right) + \frac{\partial S_j}{\partial t} = 0 \quad (5.137)$$

Considerando quanto discuso nella sezione precedente, se la Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, per ogni S_i si ha

$$S_i(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_n t) = W(q_j; \alpha_1, \dots, \alpha_n; t) - \alpha_i t \quad (5.138)$$

e possiamo scrivere le n equazioni di H-J in forma ristretta

$$H_i\left(q_i; \frac{\partial W_i}{\partial q_i}; \alpha_1, \dots, \alpha_n\right) = \alpha_i \quad (5.139)$$

Le costanti α_i prendono il nome di **costanti di separazione**. Ciascuna coinvolge un solo q_i corrispettivo e una sola derivata parziale corrispondente rispetto W_i . In questo modo si è costruito un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, e tale categoria di EDO sono sempre risolvibili per quadrature.

5.11.1 Separazione delle variabili per un potenziale centrale nel piano

Si consideri un Hamiltoniana della forma

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right] + U(r) \quad (5.140)$$

Definiamo una funzione generatrice di seconda specie $S(r, \theta, P_1, P_2, t)$ soluzione dell'equazione di H-J, poichè la Hamiltoniana del sistema non dipende esplicitamente dal tempo possiamo separare la variabile del tempo da S e riscrivere la funzione rispetto alla funzione caratteristica W dipendente solo dalle coordinate generalizzate

$$S(r, \theta, P_1, P_2, t) = W(r, \theta) + G(t) \quad (5.141)$$

posto

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} \quad \text{e} \quad p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (5.142)$$

sostituendo in (5.133)

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] + U(r) = -\frac{dG}{dt} \quad (5.143)$$

dove

$$G(t) = -P_1 t = -\alpha_1 t \quad (5.144)$$

in questo (5.136) diventa l'equazione di H-J ristretta

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] + U(r) = \alpha_1 \quad (5.145)$$

Ipotizzando che la funzione caratteristica sia ulteriormente separabile abbiamo che

$$W(r, \theta) = W_1(r) + W_2(\theta) \quad (5.146)$$

in questo modo riscriviamo la (5.138) come

$$\begin{aligned} r^2 \left(\frac{dW_1}{dr} \right)^2 + \left(\frac{dW_2}{d\theta} \right)^2 + U(r)2mr^2 &= \alpha_1 2mr^2 \\ \left(\frac{d}{d\theta} W_2 \right)^2 &= \alpha_1 2mr^2 - U(r)2mr^2 - r^2 \left(\frac{d}{dr} W_1 \right)^2 \end{aligned} \quad (5.147)$$

le due grandezze si equivalgono solo se sono uguali ad una costante $\alpha_2 = P_2$ e quindi otteniamo un sistema di due EDO del primo ordine, risolvibili per quadrature.

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta} W_2 = P_2 \rightarrow W_2 = \alpha_2 \theta \\ \alpha_1 2mr^2 - U(r)2mr^2 - r^2 \left(\frac{d}{dr} W_1 \right)^2 = \alpha_2 \end{cases} \quad (5.148)$$

risolviamola seconda equazione per quadrature

$$W_1 = \int^r \left[2m (\alpha_1 - U(\tilde{r})) - \frac{\alpha_2}{2m\tilde{r}^2} \right]^{1/2} d\tilde{r} \quad (5.149)$$

in conclusione la funzione principale dell'equazione di H-J è

$$S = W(r, \theta) - P_1 t = W_1(r) + \alpha_2 \theta - \alpha_1 t \quad (5.150)$$

Verifichiamo la condizione di completezza affinchè S sia un integrale completo, ovvero data la trasformazione di coordinate

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} & Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} \\ P_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2} & Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} \end{array} \right. \quad (5.151)$$

La Jacobiana associata alla trasformazione sarà data da

$$\left[\begin{array}{c|c} & \\ & \\ \hline & \\ \frac{\partial S}{\partial P_1 \partial r} & \frac{\partial S}{\partial P_2 \partial r} \\ & \\ \frac{\partial S}{\partial P_1 \partial \theta} & \frac{\partial S}{\partial P_2 \partial \theta} \end{array} \right] \quad (5.152)$$

e si deve avere che il determinante della sotto matrice in (5.145) è diverso da zero.

5.12 Problema ristretto dei tre corpi

5.12.1 Problema dei due corpi

Consideriamo 2 punti materiali nello spazio di massa m_1 e m_2 , che esercitano una forza conservativa di tipo gravitazionale tra loro. Definiamo la distanza reciproca tra i due punti e la posizione del centro di massa(baricentro)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \frac{m_1 \vec{r}_2 + m_2 \vec{r}_1}{M} \quad \text{dove} \quad M = \sum_{i=1}^2 m_i \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{array} \right. \quad (5.153)$$

La Lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{r}}_2|^2 - \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (5.154)$$

possiamo riscrivere tale equazione come

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}|\underline{\dot{x}}|^2 + \boxed{\frac{1}{2}\mu|\dot{\underline{r}}|^2 - \frac{Gm_1m_2}{|\underline{r}|}} \quad \text{con } \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.155)$$

dove la componente del box dell'equazione (5.158) prende il nome di **problema ristretto**. La Lagrangiana in (5.156) è un problema a 6 g.d.l. e dunque se lo riscriviamo rispetto alle equazioni di E-L si hanno 12 equazioni per la descrizione dello stato dinamico. Per questo motivo studiamo il problema ristretto che ha 3 g.d.l. e 5 integrali primi e le seguenti costanti del moto

1. Energia
2. Momento Lineare totale
3. Momento angolare totale
4. Vettore di Runge-Lenz

Se si è in un piano e si ha un integrale primo, si ha che le traiettorie percorse da un punto materiale sono curve chiuse. Nello spazio le traiettorie sono superfici, e se si hanno 2 punti materiali il cammino seguito sarà dato dall'intersezione delle superfici e dunque curve nello spazio.

Per un potenziale Kepleriano le traiettorie descritte sono limitate alle coniche, ovvero ellissi, parabole ed iperboli. La terza legge di Keplero ci dice che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore e il quadrato del periodo dell'orbita è costante per tutti i corpi che appartengono alla traiettoria

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \quad (5.156)$$

5.12.2 Problema dei tre corpi ristretto

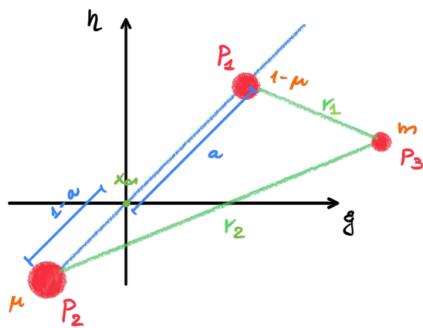
Il problema dei 3 corpi generico è più complesso in quanto si hanno meno costanti del moto ed insorgono moti caotici. Per questo motivo si studia il problema dei tre corpi ristretto, ovvero si assume che

$$\frac{m_3}{m_1} \ll 1 \quad \frac{m_3}{m_2} \ll 1 \quad \text{e} \quad m_2 < m_1 \quad (5.157)$$

Consideriamo un sistema Terra, Luna e satellite, in questo caso la presenza di un satellite (massa m_3) non altera l'interazione tra i due corpi principali dati dalla Terra e la Luna. Per semplificare ulteriormente il problema si suppone che i moto dei satelliti sia sul piano individuato dai corpi principali e che essi si muovano in orbite circolari. Prendiamo periodo del moto circolare dei pianeti $T = 2\pi$ ovvero $\omega = 1$. Poniamo

$$\mu = \frac{m_2}{M} \quad \text{e} \quad 1 - \mu$$

rispettivamente la massa del corpo P_2 e del corpo P_1 .

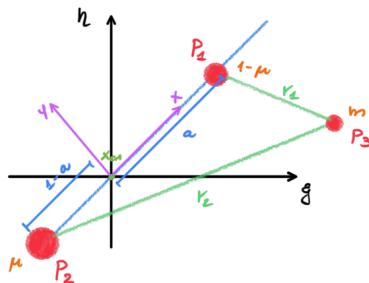


Definiamo un sistema di coordinate la cui origine coincide con la posizione del centro di massa dei corpi P_1 e P_2 di conseguenza in tutti gli istanti di tempo i due punti di trovano sulla retta congiungente, poiché si muovono relativamente al baricentro. Se osserviamo il sistema esternamente i due pianeti ruotano con $\omega = 1$ e dunque la loro posizione dipende esplicitamente dal tempo. La

Lagrangiana del sistema è data dal sistema

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left[(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \left(\frac{1-\mu}{|\vec{r}_1|} - \frac{\mu}{|\vec{r}_2|} \right) \right] \quad (5.158)$$

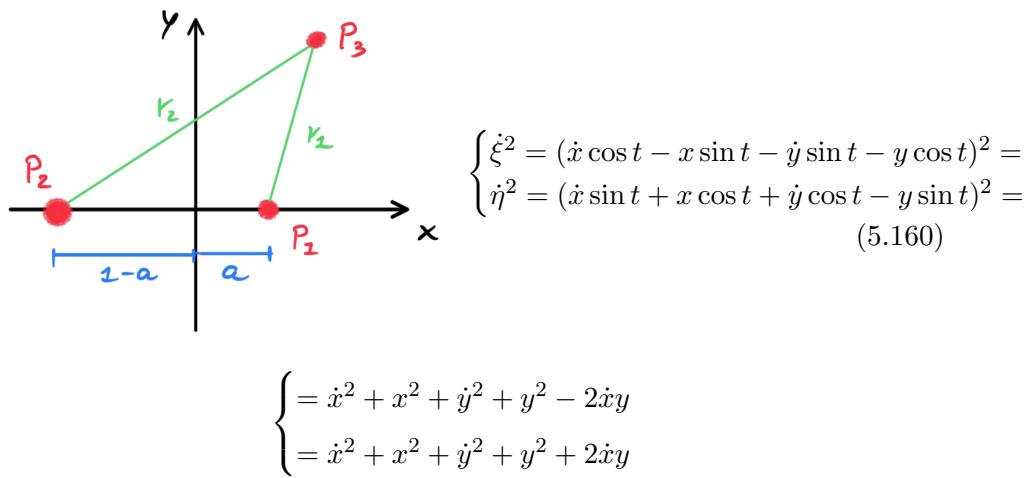
dove abbiamo ipotizzato il contributo al potenziale del corpo P_3 trascurabile e i punti P_1 e P_2 vincolati. Definiamo un sistema di riferimento $S(x,y)$ solidale con i due pianeti P_1 e P_2 . L'evoluzione dinamica di P_3 è data dall'applicazione della matrice di rotazione alle coordinate del punto rispetto al sistema comovente con i due



pianeti.

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} \xi = x \cos t - y \sin t \\ \eta = x \sin t + y \cos t \end{cases} \quad (5.159)$$

Nel nuovo sistema la distanza del punto P_3 dagli altri due corpi non dipende più dal tempo.



La Lagrangiana del sistema posto in rotazione è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2 + \frac{1}{2}(\dot{y} - x)^2 + \frac{(1 - \mu)}{[(x - a)^2 + y^2]^{1/2}} + \frac{\mu}{[(x + 1 - a)^2 + y^2]^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \underbrace{(\dot{xy} - \dot{yx})}_{\text{Forza di Coriolis}} + \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}_{\text{Forza centrifuga}} + U_g \end{aligned} \quad (5.161)$$

I termini in più che compaiono sono dovuti al fatto che il riferimento è non inerziale. Procediamo a definire la Hamiltoniana del sistema effettuando la trasformata di Legendre della Lagrangiana. Associamo ai momenti e le velocità generalizzate le seguenti grandezze

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y \quad \dot{x} = p_x + y \\ p_y &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x \quad \dot{y} = p_y - x \end{aligned} \quad (5.162)$$

CAPITOLO 5. LA MECCANICA HAMILTONIANA

e dunque la Hamiltoniana del sistema è data da

$$\begin{aligned} H(p_x, p_y, \dot{x}, \dot{y}) &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L} = \\ &= \frac{1}{2} p_x^2 + p_y^2 + y p_x - x p_y + \frac{1-\mu}{|r_1|} + \frac{\mu}{|r_2|} \end{aligned} \quad (5.163)$$

le equazioni di Hamilton rispetto alla Hamiltoniana H sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = p_x + y \\ \dot{y} = p_y - x \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(1-\mu+x)}{r_2^3} \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x - y \left[\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] \end{array} \right. \quad (5.164)$$

Si studiano i punti stazionari del sistema studiando gli zeri delle equazioni in (5.167).

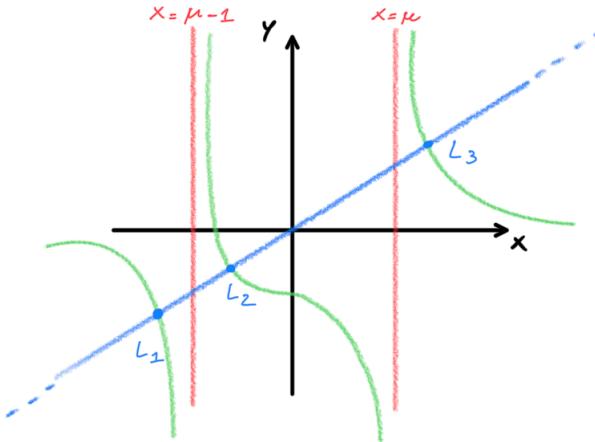
$$\left\{ \begin{array}{l} p_x + y = 0 \\ p_y - x = 0 \\ p_y - \frac{(1-\mu)(x-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(1-\mu+x)}{r_2^3} = 0 \\ -p_x - y \left[\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (5.165)$$

sostituendo nelle prime due equazioni rispetto ai momenti coniugati si ottiene il seguente punto di equilibrio.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = \frac{(1-\mu)}{(x-\mu)|x-\mu|} + \frac{\mu}{|x+1-\mu||x+1-\mu|} \end{array} \right. \quad (5.166)$$

i punti di equilibrio determinati sono lungo l'asse delle x, ovvero è definito sulla congiungente tra i pianeti P_1 e P_2 . Per determinare l'esistenza della

soluzioni ricorriamo al metodo grafico. Si hanno 3 punti d'intersezione dove:



- Nella posizione L₂ si ha che il corpo è attratto da entrambi gli altri due pianeti e dunque è in equilibrio.
- L₁ ed L₃ compaiono poichè il sistema è in rotazione. Anche se il corpo è attratto dal pianeti più vicino essendo il sistema di riferimento non inerziale si ha la forza apparente centrifuga.

I 3 punti di equilibrio dal punto di vista di Lyapunov sono instabili ed è applicabile il primo teorema. Gli altri punti di equilibrio dati dal sistema (5.168) sono dati da

$$\begin{cases} x \left[1 - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) \right] + \mu(1-\mu) \left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right] = 0 \\ \left[1 - \left(\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (5.167)$$

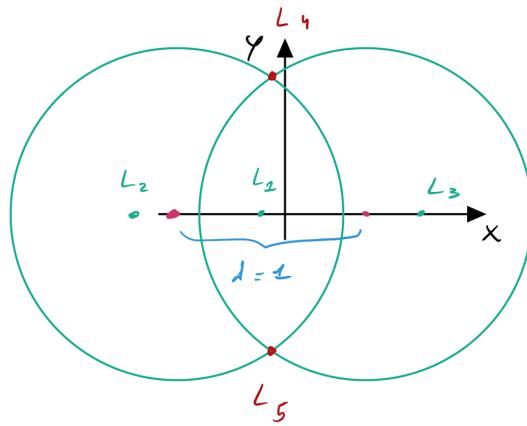
dunque si dalla prima equazione la condizione

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = r \\ \left[1 - \left(\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (5.168)$$

e risolvendo la seconda si ha che

$$1 - \frac{(1-\mu)}{r^3} - \frac{\mu}{r^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{r^3} = 0 \quad \Rightarrow r = 1$$

che definisce la distanza tra i due pianeti principali. In questo modo determiniamo altri due punti di equilibrio L4,L5.



Dal primo teorema di Lyapunov si ha i punti L1,L2 ed L3 sono punti di equilibrio instabile, mentre per L4 e L5 esiste un valore critico della massa ridotta $\mu^* = \frac{m_2}{M} \approx 0,039$ dove se $\mu > \mu^*$ i due punti sono di equilibrio stabile e instabili altrimenti. I punti L1,L2 ed L3 hanno un tipo d'instabilità simile a quella di un punto di massimo per un potenziale quartico. Infatti è possibile ottenere orbite quasi periodiche attorno al punto d'insabilità.