Indice

CAPITOLO 3

Corpo Rigido

3.1 Rotazioni attorno ad un polo fisso

CAPITOLO 5

Meccanica Hamiltoniana

5.1 Introduzione

La formulazione delle leggi della meccanica mediante la funzione Lagrangiana, descrive l'evoluzione di un sistema meccanico utilizzando le coordinate di posizione e velocitá generalizzate che incorporano l'informazione della forza esercitata dai vincoli senza doverne conoscere esplicitamente la forma. Però non è l'unico modo in cui è possibile descrivere lo stato dinamico di un sistema. Infatti si puó studiare un sistema rispetto alle coordinate di posizione e quantità di moto generalizzate. La trattazione di problemi utilizzando tale sistema di coordinate costituisce le basi dell'ottica, meccanica quantistica e meccanica statistica. Per passare da un sistema di coordinate indipendenti ad un altro si usa la **trasformazione di Legendre** che permette di definire una nuova grandezza che descrive l'energia totale del sistema, definita **Hamiltoniana**. Quanto discusso in questo capitolo presupone che si considerino vincoli olonomi e potenziali dipendenti dalla posizione e/o velocitá.

5.2 Formalismo Hamiltoniano

Abbiamo visto che introducendo la funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t)$ che descrive una curva nello spazio delle coordinate generalizzate. La minimizzazione del suo funzionale d'azione ci permette di definire le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{i} = 1, ..., n \tag{5.1}$$

La grandezza

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{i} = 1, ..., n \tag{5.2}$$

è definita **quantità di moto generalizzata** coniugata a q_i (e coincide con la quantità di moto nelle coordinate cartesiane). Riscrivendo le equazioni di E-L con questa notazione si ha che la (5.1) diventa:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{5.3}$$

Lo scopo di riscrivere le equazioni in questo modo è di eliminare le velocità generalizzate $\dot{q}_i$ in favore delle coordinate p_i. Il passaggio a p_i ha un ruolo chiave perchè quando $p_i = 0$ si hanno delle coordinate cicliche, che come vedremo nei paragrafi successivi permettono di risolvere facilmente le equazioni differenziali che definiscono la dinamica del moto nello spazio delle fasi.

Richiamo

La quantità $\{q_i\}$ definisce un punto nello *spazio delle configurazioni* C di dimensione n. La sua evoluzione nel tempo definisce una curva in C. L'evoluzione dinamica del sistema è descritta dalle coordinate $\{q_i, p_i\}$ definite nello *spazio delle fasi* di dimensione 2n. In tale spazio una cammino non incrocia mai con un altro e l'evoluzione è dunque governata da un *flusso* che avviene nello spazio delle fasi.

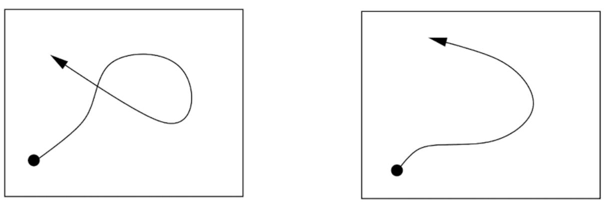

Figura 5.1: Moto nello spazio delle configurazioni (sinistra) e nello spazio delle fasi (destra)

5.2.1 Equazioni di Hamilton

Vogliamo determinare una funzione definita sullo spazio delle fasi che descriva in modo univoco l'evoluzione rispetto a q_i e p_i. Questo vuol dire che deve essere in funzione di q_i e p_i e debba contenere la stessa informazione data dalla Lagrangiana $\mathcal{L}(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t)$. Per farlo utilizziamo una trasformazione di coordinate definita trasformazione di Legendre. Definiamo la funzione **Hamiltoniana** come la trasformata di Legendre della Lagrangiana rispetto alle variabili $\dot{q}_i$.

$$H\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) \tag{5.4}$$

Dove l'ipotesi fondamentale è data dal fatto che dalla relazione (5.2) sia possibile determinare $\dot{q}_i(q_i, p_i, t)$, ovvero si richiede che la trasformazione di coordinate sia invertibile rispetto alle $\dot{q}_i$.
La variazione di H è data da:

$$dH = \left(dp_i \dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt\right) \tag{5.5}$$

$$= dp_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Il differenziale di sinistra può essere riscritto come

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{5.6}$$

l'uguaglianza ottenuta ci permetter di definire un sistema di equazione di 2n equazioni differenziali del primo ordine che prendono il nome di **equazioni di Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \tag{5.7}$$

Rispetto alle equazioni di E-L che definivano un sistema di N equazioni differenziali del secondo ordine abbiamo costruito un sistema di 2N equazioni differenziali del primo ordine.

Si nota che la funzione di Hamilton coincide con l'energia del sistema $\mathrm{E}(q, \dot{q}, t)$ data dall'**integrale di Jacobi** per la Lagrangiana di un sistema.

5.2.2 Esempi

1) Particella in un potenziale

Consideriamo una particella che si muove in un potenziale centrale in uno spazio a 3 dimensioni. La Lagrangiana sarà data da

$$L = \frac{1}{2}|\dot{\underline{x}}|^2 - U(\underline{x})$$

Le equazioni di E-L associate sono:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{dU(\underline{x})}{dx_1} \\ \vdots \\ \ddot{x}_n = -\dfrac{dU(\underline{x})}{dx_n} \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -\frac{dU(\underline{x})}{dx_i} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = y_n \\ \dot{y}_n = -\frac{dU(\underline{x})}{dx_n} \end{cases} \tag{5.8}$$

Usando la relazione (5.2) e (5.4) otteniamo

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \qquad H = p\dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}(x, p))$$

dunque la Hamiltoniana associata al sistema è data da

$$H = p^2 - \frac{p^2}{2} + U(x) = \frac{p^2}{2} + U(x)$$

usando le equazioni in (5.7) definiamo le equazioni di Hamilton del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_i = p_i \\ \dot{p}_i = -U'(\underline{x}) \end{cases} \qquad i = 1, ..., n$$

posto $y_i = p_i$ nelle equazioni in (5.8) si ha che le equazioni di Hamilton e di E-L sono equivalenti tra loro.

2) Invertibilità delle velocità generalizzate

La Lagrangiana di un sistema è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g(q)\dot{q}^2 - U(q)$$

dove g(q) è una funzione delle coordinate generalizzate e la quantità di moto generalizzata è esprimibile come

$$p = g(q)\dot{q} \quad \text{dove} \quad g(q) > 0$$

di conseguenza la trasformazione di coordinate è invertibile, infatti

$$\dot{q}(q, p) = \frac{p}{g(q)}$$

e la Hamiltoniana associata al sistema può essere riscritta come

$$H = \frac{p^2}{2g(q)} + U(q)$$

dove le rispettive equazioni di Hamilton sono date da

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{p}{g(q)} \\ \frac{d}{dt}p = \frac{1}{2}\frac{g'(q)}{g^2(q)}p^2 - \frac{\partial}{\partial q}U \end{cases}$$

Teorema 5.2.1 (Equivalenza Eq. E-L ed Hamilton). Le equazioni di Eulero-Lagrange sono equivalenti alle equazioni di Hamilton.

Dimostrazione. Partiamo da un Hamiltoniana definita rispetto ad un Lagrangiana indipendente dal tempo $\frac{\partial \mathcal{L}}{dt} = 0$ e consideriamo uno spazio delle configurazioni C in una sola dimensione. La variazione della funzione di Hamilton sarà descritta dal differenziale

$$dH(q, p, t) = \frac{\partial H}{\partial q}dq + \frac{\partial H}{\partial p}dp$$

ricordando che $\dot{q}(q,p,t)$ si ha che l'equazione precedente è equivalente a

$$d(p\dot{q}-\mathcal{L}(q,\dot{q},t)) = pd\dot{q}+dp\dot{q}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}dq-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}d\dot{q} =$$

$$= pd\dot{q}+dp\dot{q}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}dq-pd\dot{q} = \dot{q}dp-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}dq$$

dalle equazioni di E-L abbiamo che $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$ dunque l'uguaglianza precedente può essere riscritta come

$$= \dot{q}dp-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right]dq = \dot{q}dp+(-\dot{p})dq$$

in conclusione otteniamo

$$\begin{cases}\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\end{cases}$$

□

Dimostrazione. Si consideri dim[C] > 1 procediamo come nel caso in una dimensione definendo il differenziale dell'Hamiltoniana

$$dH = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_j}dq_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}dp_j+\frac{\partial H}{\partial t}$$

le j-sime equazioni possono essere riscritte come

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \sum_{i}^{n}p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-p_i\right]}_{=0}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{i}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial p_i}{\partial p_j}+\sum_{i}^{n}p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_j}-\sum_{i}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_j} = \dot{q}_j+\underbrace{\sum_{i}^{n}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial p_j}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-p_i\right]}_{=0}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}-\sum_{i}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial t}+\sum_{i}^{n}p_i\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}-p_i\right]}_{=0}$$

di conseguenza si ottiene un sistema di 2N equazioni differenziali al primo ordine. □

5.2.3 Leggi di conservazione

Lemma 5.2.2. Se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ allora H è una costante del moto

Lemma 5.2.3. Se una coordinata trascurabile q non compare nella Lagrangiana allora per costruzione non apparte nemmeno nella Hamiltoniana. I momenti coniugati p_q associati a q sono conservati.

5.2.4 Momenti coniugati rispetto alla trasformazione di Legendre

Teorema 5.2.4. Se la Lagrangiana di un sistema è rappresentabile come

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} G_{\alpha,\beta} \cdot \dot{q}_\alpha \, \dot{q}_\beta - U = \frac{1}{2} \langle \underline{\dot{q}}, G\underline{\dot{q}} \rangle - \ U \tag{5.9}$$

dove G(q) è una matrice simmetrica ed invertibile associata all'energia cinetica del sistema ⇒ si ha che il vettore dei momenti coniugati e le velocità generalizzate possono essere scritte come

$$\underline{p} = G(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{q}} \quad \text{e} \quad \dot{q} = G^{-1}(p) \cdot \underline{p} \tag{5.10}$$

Esempio

La trasformata di Legendre definita da una Lagrangiana della forma come in (5.9) é data da

$$\begin{aligned} p\dot{q} = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, G_{\dot{q}} \rangle + U = & \\ &= \left\langle p, G^{-1}p \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle G^{-1}p, GG^{-1}p \right\rangle + U = \\ &= \left\langle p, G^{-1}p \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle p, G^{-1}p \right\rangle + U \end{aligned}$$

dunque la Hamiltoniana associata è data da

$$H = \frac{1}{2} \left\langle p, G^{-1}p \right\rangle + U$$

Osservazione. Data una matrice simmetrica invertibile, l'inversa è ancora una matrice simmetrica e $(G^{-1})^T = (G^T)^{-1}$.

5.2.5 Il principio di minima azione

Consideriamo un punto $(q, \dot{q}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ elemento dello spazio delle fasi, abbiamo che l'evoluzione della posizione del punto q nel tempo

$$q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R} \quad \text{t.c} \quad q(t_0) = q_0 \quad \text{e} \quad q(t_1) = q_1 \tag{5.11}$$

definisce un cammino nello spazio delle configurazioni. Il numero di cammini che uniscono due punti nello spazio è infinito, dunque non è univoco, ci domandiamo quale sia il reale cammino che congiunge le due posizioni. Per rispondere a tale domanda introduzione una grandezza che è data dal funzionale d'azione.

$$\begin{aligned} S : \mathcal{C}_{0,1} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto S[q] \end{aligned} \tag{5.12}$$

definita sullo spazio dei cammini, che è uno spazio affine modellato su uno spazio vettoriale di dimensione infinita. Dove

$$S\left[q(t)\right] = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}\left(q(t), \dot{q}(t)\right) dt \tag{5.13}$$

e $\mathcal{L}$ definisce la Lagrangiana del sistema associata. L'azione ha una proprietà significativa rispetto ai cammini di un sistema, ovvero il cammino effettivamente percorso dal sistema coincide con il suo estremo inferiore.

Lemma 5.2.5. Sia g(t) una funzione continua e derivabile in $[t_0, t_1]$ tale che $\forall\, h(t)$ continua in $[t_0, t_1]$ se

$$\int_{t_0}^{t_1} h \cdot g \; dt = 0 \Rightarrow g = 0$$

Dimostrazione. Sia $g(t) \neq 0$ allora esiste $\tau \in [t_0, t_1]$ tale che $g(\tau) > A$ dove $A > 0$ per continuità della funzione deve esiste un intorno dove g è al di sopra di A. Consideriamo un cammino h per cui il $g \cdot h > 0 \;\; \forall\, t$, in particolare in un intervallo di misura non nullo. Allora avremo che

$$\int_{\alpha}^{\beta} g \cdot h \, dt \neq 0$$

poichè l'integrale di una funzione positiva su un insieme di misura non nulla è non nullo. Di conseguenza l'unico caso possibile è che g = 0.

□

Teorema 5.2.6 (**Principio di minima azione**). Se $q(t_0) = q_0$ e $q(t_1) = q_1$ per $t \in [t_0, t_1]$ allora esiste un cammino q(t) tra i due punti che rende stazionario (minimo) il funzionale d'azione.

Dimostrazione. Sia $q \in \mathcal{C}_{0,1}$ e h una variazione, allora $q+\varepsilon h \in \mathcal{C}_{0,1}$ calcoliamo il rapporto incrementale del funzionale d'azione rispetto alla direzione di variazione

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S[q+\varepsilon h] - S[q]}{\varepsilon} = \langle \delta S, h \rangle$$

tale grandezza prende il nome di **differenziale d'azione** calcolato rispetto h, possiamo riscrivere tale equazione come

$$\langle \delta S, h \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{t_0}^{t_1} dt \mathcal{L}(q+\varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{t_0}^{t_1} dt \, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \varepsilon h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \varepsilon \dot{h} + 0(\varepsilon) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \right] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} h dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{h} dt}_{\text{integrando per parti}} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \, h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \, h \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \Big(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \Big) h dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} h \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt$$

Se q(t) è soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange allora $\langle \delta S, h \rangle = 0$. Viceversa se il differenziale d'azione è nullo per una variazione h, applicando il Lemma 5.2.5 abbiamo che l'unico caso possibile è che

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

e dunque q(t) soddisfa le equazioni di E-L

□

Teorema 5.2.7 (**Non univocitá del differenziale d'azione**).

Dimostrazione. □

5.2.6 Formulazione variazionale delle equazioni di Hamilton

Si è definita l'azione come

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) dt$$

poichè Hamiltoniana e Lagrangiana sono legate dalla trasformata di Legendre possiamo invertire tale relazione per riscrivere il funzionale d'azione come

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \left(p_i \dot{q}_i - H\right) dt \tag{5.14}$$

Applicando il teorema 5.2.8 andiamo ricercare i punti che rendono stazionaria l'azione

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i + \left[-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} dt + \left[p_i \delta q_i\right]_{t_0}^{t_1}\end{aligned}$$

dove il termine $p_i \delta \dot{q}_i$ è stato integrato per parti, ovvero

$$\int_{t_0}^{t_1} p_i \delta \dot{q}_i \, dt = p_i \delta q_i|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i \delta q \, dt$$

di conseguenza abbiamo che il differenziale d'azione S è nullo quando

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

dobbiamo imporre alle condizioni al contorno che l'ultimo addendo dell'equazione sia nulla ovvero

$$\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$$

Notare che imponendo tale condizione δp_i sono libere di variare a piacimento, non rendendo simmetrico il formalismo. Volendo potremmo imporre la condizione anche sulle δp_i, ma così facendo restringeremmo ancora di più i cammini possibili.

5.3 Parentesi di Poisson

Definizione 5.3.1. Siano f(q,p) e g(q,p) due funzione definite sullo spazio delle fasi si definisce **parentesi di Poisson**

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \tag{5.15}$$

Le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà:

- Antisimmetria: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- Bilinearità: $\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}$ per ogni $\alpha, beta \in \mathbb{R}$
- Regola di Leibniz: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ che deriva dalla chain rule della differenziazione.
- Identità di Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Lemma 5.3.1. Si consideri il punto $(q_1, ..., q_n, p_1, .., p_n) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R}$ nello spazio delle fasi e la Hamiltoniana H che definisce le eq. del moto

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

data una grandezza fisica $F(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ definita sullo spazio delle fasi, la sua derivata totale(overo l'evoluzione temporale di posizioni e momenti) può essere scritta come

$$\frac{dF}{dt} = \Big\{F, H\Big\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{5.16}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big[\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\Big] + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}
\end{aligned}$$

□

Con l'uso delle parentesi di Poisson dotiamo le variabili dinamiche che descrivono l'evoluzione di un sistema nella meccanica Hamiltoniana di una struttura algebrica. Utilizzando tale notazione le equazioni di Hamilton assumono una forma simmetrica tra le posizioni e i momenti coniugati.

$$\begin{cases} \dot{q_j} = \{q_j, H\} \\ \dot{p_j} = \{p_j, H\} \end{cases} \qquad j = 1, ...N \tag{5.17}$$

Definizione 5.3.2. Si definisce costante del moto una funzione I definita sullo spazio delle fasi tale per cui

$$\Big\{I, H\Big\} = 0 \tag{5.18}$$

so dice che I ed H **commutano rispetto Poisson**.

Esempio

Si ipotizzi che q_i sia una coordinata ignorabile (per esempio non compare in H) allora

$$\Big\{p_i, H\Big\} = 0$$

essa esprime la relazione tra coordinate ignorabili e le quantità conservabili nel linguaggio delle parentesi di Poisson.

Osservazione. Se I e J sono costanti del moto allora $\{\{I,J\},H\}+\{I,\{J,H\}\}+\{\{I,H\},J\}=0$ e dunque anche $\{I,J\}$ è una costante del moto. Si dice che le costanti del moto formano un algebra chiusa rispetto alle parentesi di Poisson.

5.4 Trasformazioni Canoniche

Le equazioni di Hamilton possono essere riscritte in un modo che risultino più simmetriche. Definiamo il vettore $\vec{x}=(q_1,...,q_n,p_1,....,p_n)^T$ di dimensione 2N e la matrice J di grandezza $2N\times 2N$,

$$\mathcal{J}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{0} & I_n \\ -I_n & \underline{0} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

dove I_n è la matrice identica di dimensione $n\times n$. Nella notazione compatta ogni entrata è una matrice $n\times n$. La matrice $\mathcal{J}$ è definita come la **matrice simplettica**. In questa notazione le equazioni di Hamilton possono essere riscritte come

$$\dot{\underline{x}}=\mathcal{J}\cdot\nabla_{\underline{x}}H \tag{5.20}$$

In meccanica Lagrangiana si è visto come è possibile effettuare un cambio di coordinate da $q_i\to Q(q_i)$ senza cambiare la forma delle equazioni. Nella formulazione Hamiltoniana vogliamo estendere il concetto di trasformazione di coordinate per le posizioni q_i e i momenti p_i in un nuovo sistema P_i e Q_i per mezzo di un insieme di equazioni invertibili

$$\begin{aligned} Q_i&=Q_i(q,p,t)\\ P_i&=P_i(q,p,t) \end{aligned} \tag{5.21}$$

dove le nuove coordinate sono funzione sia delle vecchie coordinate che anche dei momenti coniugati. Come nel caso Lagrangiano ci domandiamo quale classe di trasformazioni ci permetta di lasciare invariate le equazioni di Hamilton. Consideriamo una trasformazione

$$x_i \mapsto y_i(x)$$

applicando la relazione (5.20) si ha che

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \mathcal{J}_{jk} \frac{\partial H}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}$$

in modo compatto può essere riscritto come

$$\dot{y} = (J \mathcal{J} J^T) \nabla_y H$$

dove J è la matrice Jacobiana associata alla trasformazione di coordinate. Le equazioni di Hamilton sono invarianti in forma rispetto allo Jacobiano di una trasformazione se J soddisfa le condizioni

$$J \mathcal{J} J^T = \mathcal{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \mathcal{J}_{jk} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} = \mathcal{J}_{il} \tag{5.22}$$

Se lo Jacobiano J soddisfa l'equazione (5.22) viene definito **simplettico**. Un cambio di coordinate in cui Jacobiano risulta essere simplettico viene definito **trasformazione canonica**.
Nei paragrafi successivi vedremo che esiste un metodo efficace per costruire trasformazioni canoniche usando le funzioni generatrici.

Teorema 5.4.1. Le parentesi di Poisson sono invariati sotto l'azione delle trasformazioni canoniche. Viceversa ogni trasformazione che preserva la struttura delle parentesi di Poisson, affinchè

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \tag{5.23}$$

è canonica

Dimostrazione. □

5.4.1 Funzioni generatrici per la trasformazioni canoniche

Nel capitolo di meccanica Lagrangiana si è visto come due descrizioni diverse tra loro dello stesso sistema fisico sono equivalenti se le rispettive Lagrangiane che lo descrivono differiscono tra loro per una derivata totale del tipo $\frac{dF(q,t)}{dt}$.

Teorema 5.4.2 (**Equivalenza equazioni E-L**). Siano $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$ la Lagrangiana del sistema rispetto a delle coordinate Q e $L(q, \dot{q}, t)$la Lagrangiana rispetto ad un sistema in coordinate q, allora descrivono il medesimo sistema fisico se

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = \lambda L(q, \dot{q}, t) - \frac{dF(q, Q, t)}{dt} \tag{5.24}$$

Osservazione. Il segno meno all'interno dell'equazione (5.24) è per convenzione. Inoltre solo per $\lambda = 1$ si rappresenta una trasformazione canonica.

Dimostrazione. Utilizziamo la definizione di Azione integrando l'equazione (5.24)

$$S[q, Q] = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + F\left(q\left(t_1\right), Q\left(t_1\right), t_1\right) - F\left(q\left(t_2\right), Q\left(t_2\right), t_2\right)$$

Riscriviamo il funzionale d'azione come

$$\tilde{S} - S = \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{L} - L)\, dt = F\left(q\left(t_1\right), Q\left(t_1\right), t_1\right) - F\left(q\left(t_2\right), Q\left(t_2\right), t_2\right)$$

Consideriamo un incremento infinitesimo ε nella direzione $\underline{h}$ avremo che la variazione del funzionale $\tilde{S} - S$ è pari a

$$\delta(\tilde{S} - S) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\tilde{S} - S)[q + \varepsilon h] - (\tilde{S} - S)[q] =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(q(t_1) + \epsilon h) - F(q(t_2) + \varepsilon h) - F\left(q\left(t_1\right), t_1\right) + F\left(q\left(t_2\right), t_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \delta\tilde{S} = \delta S$$

Dunque le equazioni di E-L definite dalle due Lagrangiane sono le medesime.

□

Osservazione. Anche se le due funzioni Lagrangiane sono diverse da loro descrivono il medesimo sistema dato che definiscono le stesse equazioni di Eulero-Lagrange.

La funzione F può essere usata partendo da una Lagrangiana per generarne una nuova, che fornisce una descrizione equivalente a quella di partenza del sistema fisico.
Poichè la Hamiltoniana è esprimibile come trasformata di Legendre della Lagrangiana quanto espresso rispetto alle equazioni di E-L è estendibile alle equazioni di Hamilton.

$$K = \dot{Q}P - \dot{q}p + H + \frac{dF(q, Q, t)}{dt} \tag{5.25}$$

con la comparsa di termini in più e condizioni al contorno. Definendo la 1-forma differenziale

$$dF = pdq - PdQ + (K - H)dt \tag{5.26}$$

5.4.2 Cambi di coordinate

Consideriamo di avere un sistema nelle coordinate (Q,P) e di voler passare alle coordinate (p,q) per farlo definiamo una funzione

$$\begin{cases} Q = Q(q, p) \\ P = P(q, p) \end{cases}$$

Affinchè la trasformazione sia un cambio di coordinate deve essere invertibile, ovvero $detJ \neq 0$ dove J è la matrice Jacobiana.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

La matrice Jacobiana associata al cambio di coordinate è di fondamentale importanza in quanto le condizioni sulle sue componenti definiscono condizione necessaria e sufficiente affichè una funzione F sia una funzione generatrice di una trasformazione canonica, ovvero che le parentesi di Poisson siano preservate.

5.4.3 Jacobiano e condizione di canonicità

Definiamo il passaggio di coordinate

$$\begin{cases} p = p(q, Q) \\ P = P(q, Q) \end{cases}$$

verifichiamo che le parentesi di Poisson siano preservate

$$\{Q, P\} = \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_q \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_p - \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_p \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q \tag{5.28}$$

possiamo riscrivere alcuni addendi nel seguente modo

$$\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)_q = \left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_q \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q \tag{5.29}$$

e

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_p = \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_Q + \left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_q \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_p$$

sostituendo all'interno dell'espressione (5.28) della parentesi di Poisson possiamo riscriverla come

$$\{Q,P\} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q \left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_q = 1 \tag{5.30}$$

Il passaggio

$$\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_Q = -\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_q$$

si è ottenuta come condizione di canonicità dall'espressione (5.20) e l'inveritibilità del cambio di coordinate.
Osservando la struttura della (5.28) e della (5.29) si ha che posto

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = 0 \tag{5.31}$$

elemento della matrice Jacobiana la parentesi di Poisson non viene preservata e dunque non si ottiene una trasformazione di coordinate che preserva la matrice simplettica. Resta da determinare come tali informazioni si leghino alla scelta della funzione generatrice.

5.4.4 Funzione generatrice di I specie

Definiamo funzione generatrice del primo tipo una funzione F_1(q,Q,t) associata ad un cambio di coordinate

$$\begin{cases} p = p(q,Q) \\ P = P(q,Q) \end{cases}$$

consideriamo la il differenziale totale associato alla funzione

$$\frac{dF(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{dt} = \left[\frac{\partial F_1(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial F_1(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \dot{\mathbf{Q}}\right] + \frac{\partial F_1(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{\partial t} \tag{5.32}$$

sostituendo nella relazione (5.26)

$$\left[\mathbf{p} - \frac{\partial F_1(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{\partial \mathbf{q}}\right] \cdot \dot{\mathbf{q}} - H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) =$$

$$= \left[\mathbf{P} + \frac{\partial F_1(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{\partial \mathbf{Q}}\right] \cdot \dot{\mathbf{Q}} - K(\mathbf{Q},\mathbf{P},t) + \frac{\partial F_1(\mathbf{q},\mathbf{Q},t)}{\partial t}$$

affinchè la Hamiltoniana nelle nuove coordinate descriva il medesimo sistema fisico e la trasformazione sia canonica si deve avere che

$$K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial} \tag{5.33}$$

di conseguenza si deve avere che

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{P} = -\frac{\partial F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{Q}} \\ K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{cases} \tag{5.34}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione sia canonica è

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0 \tag{5.35}$$

Inoltre si estende quanto discusso alla funzione $F_1(q, Q, t)$ affinchè sia una funzione generatrice, prendendo l'equazione (5.30) e sostituendo rispetto a (5.34)

$$\{Q, P\} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)_Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_q \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} = 1 \tag{5.36}$$

Affinchè le parentesi di Poisson siano preservate è necessario che

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} \neq 0 \tag{5.37}$$

Osservazione. Dunque dimostrare che la componente J_{12} è della matrice Jacobiana è non nulla, per quanto discusso nella sezione precedente equivale a dimostrare che F_1 è una funzione generatrice del primo tipo.

5.4.5 Funzione generatrice del II tipo

Procedendo come per le funzioni del primo tipo, definiamo una funzione $F = F_2(q, P, t) - QP$ associata alla trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} p = p(q, P) \\ Q = Q(q, P) \end{cases} \tag{5.38}$$

il differenziale della funzione è dato da

$$dF_2 = pdq + QdP + (K - H)dt \tag{5.39}$$

e

$$dF_2(q, P, t) = \frac{\partial F_2}{\partial q}dq + \frac{\partial F_2}{\partial P}dP + \frac{\partial F_2}{\partial t}dt \tag{5.40}$$

di conseguenza le coordinate canoniche (5.38) possono essere riscritte come

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \\ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{cases} \tag{5.41}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione canonica ammetta funzione generatrice di seconda specie è

$$\frac{\partial P}{\partial p} \neq 0 \tag{5.42}$$

che per quanto discusso in precedenza equivale a porre una condizione su $F_2(q, P, t)$ del tipo

$$\frac{\partial F_2(q, P, t)^2}{\partial q \partial P} \neq 0 \tag{5.43}$$

5.4.6 Funzione generatrice del III tipo

Definiamo una funzione del terzo tipo $F = F_3(p, Q, t) + qp$ associata ad una trasformazione canonica

$$\begin{cases} q = q(p, Q) \\ P = p(p, Q) \end{cases} \tag{5.44}$$

il differenziale della funzione F è dato da

$$dF_3 = -qdp - PdQ + (K - H)dt \tag{5.45}$$

e

$$dF_3 = \frac{\partial F_3}{\partial p}dp + \frac{\partial F_3}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F_3}{\partial t}dt \tag{5.46}$$

le coordinate della trasformazione canonica associata assumono la forma

$$\begin{cases} q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \\ P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} \\ K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{cases} \tag{5.47}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le parentesi di Poisson siano preservate è

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \neq 0 \tag{5.48}$$

che equivale a imporre una condizione sulla funzione F_3

$$\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p \partial Q} \neq 0 \tag{5.49}$$

5.4.7 Funzione generatrice del IV tipo

Definiamo funzione generatrice del quarto tipo una funzione $F = F_4(p, P, t) + qp - QP$ associata alla trasformazione canonica

$$\begin{cases} q = q(p, P) \\ Q = Q(p, P) \end{cases} \tag{5.50}$$

studiando il differenziale della funzione generatrice otteniamo

$$dF_4 = \frac{\partial F_4}{\partial p}dp + \frac{\partial F_4}{\partial P}dP + \frac{\partial F_4}{\partial t}dt \tag{5.51}$$

e

$$dF_4 = -qdp + QdP + (K - H)dt \tag{5.52}$$

e di conseguenza la trasformazione (5.50) è uguale a

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p} Q = \frac{\partial F_4}{\partial P} K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{5.53}$$

Affinchè la trasformazione preservi le parentesi di Poisson deve valere la seguente condizione sugli elementi della matrice Jacobiana associata

$$\frac{\partial P}{\partial q} \neq 0 \tag{5.54}$$

ed estesa alla funzione generatrice F_4 diventa

$$\frac{\partial F_4}{\partial p \partial P} \neq 0 \tag{5.55}$$

Funzione generatrice	Trasformazione
$F_1(q, Q, t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$
$F_2(q, P, t) - QP$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$
$F_3(p, Q, t) + qp$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$
$F_4(p, P, t) + qp - QP$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$

Osservazione. Quanto discusso per due variabili è generalmente estendibile a più dimensioni.

5.5 Trasformazioni di Contatto

Si consideri un sistema Hamiltoniano con in coordinate $(\vec{q}, \vec{p})$ definiamo la trasformazione con più di un grado di libertà

$$\begin{cases} Q_k = Q_k\left(q_1, \ldots, q_d\right) \\ P_k = \sum_{j=1}^{d} A_{kj}\left(q_1, \ldots q_d\right) p_j \end{cases} \tag{5.56}$$

allora valgono i seguenti risultati:

1. La trasformazione è canonica se e soltanto se

$$J_{(q,Q)} = (A^{-1})^T \tag{5.57}$$

2. La funzione generatrice è del secondo tipo e ha la forma

$$F_2(q,P) = \sum_{j=1}^{d} Q_j(\vec{q})P_j \tag{5.58}$$

trasformazioni di questo tipo in cui P_k è esprimibile come combinazione lineare delle $\vec{p}$ è e le Q_k dipendono solo da $\vec{q}$ vengono chiamate **trasformazioni di contatto**.

Dimostrazione. La matrice Jacobiana associata alla trasformazione di coordinate è della forma

$$J = \left[\begin{array}{c|c} J_{(q,Q)} & \underline{0} \\ \hline \star & A(\vec{q}) \end{array}\right] \tag{5.59}$$

affinchè la trasformazione sia una trasformazione di coordinate è necessario che sia invertibile ovvero $detJ \neq 0$, il determinane della matrice Jacobiania è dato da

$$detJ = det(J_{(q,Q)})det(A(\vec{q})) \neq 0 \tag{5.60}$$

ciò implica che $det(A(\vec{q})) \neq 0$, tale risultato coincide con la condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione ammetta una funzione generatrice del secondo tipo (inoltre $A(\vec{q})$ è invertibile). Dati tali risultati possiamo riscrivere la trasformazione (5.56) come

$$\begin{cases} Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \\ p_k = \sum_{j=1}^{d} A^{-1}_{kj}(\vec{Q})P_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \end{cases} \tag{5.61}$$

integrando il primo membro otteniamo la forma di F_2

$$F_2^k = \int Q_k dP_k = Q_k P_k + G(\vec{q},\vec{P}) \tag{5.62}$$

risolvendo le prime d equazioni avremo che

$$F_2 = \sum_{j=1}^{d} Q_j P_j + \phi(\vec{q}) \tag{5.63}$$

sostituendo rispetto al secondo membro della (5.62) abbiamo che

$$\sum_{j=1}^{d} A^{-1}_{kj}(\vec{Q}) P_j = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} P_j + \frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q_k} \tag{5.64}$$

per avere che $\phi(\vec{q})$ sia una soluzione comune a tutte le equazioni è necessario che sia una funzione costante e dunque $\frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q_k} = 0$, di conseguenza la (5.64) diventa

$$\sum_{j=1}^{d} A^{-1}_{kj}(\vec{Q}) P_j = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} P_j \tag{5.65}$$

da (5.65) abbiamo che

$$A^{-1}_{kj}(\vec{Q}) = \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \tag{5.66}$$

ovvero gli elementi della matrice inversa di A coincidono con gli elementi della matrice Jacobiana trasposta, la (5.65) può essere riscritta in modo compatto come

$$A^{-1} \cdot \vec{P} = J^T_{(q,Q)} \cdot \vec{P} \tag{5.67}$$

di conseguenza poichè l'operazione di trasposizione gode della proprietà d'idempotenza si ha

$$J_{(q,Q)} = (A^{-1})^T \tag{5.68}$$

Inoltre dato che $\frac{\partial \phi(\vec{q})}{\partial q_k} = 0$ la (5.63) diventa

$$F_2 = \sum_{j=1}^{d} Q_j P_j \tag{5.69}$$

□

5.6 Hamiltoniane esplicitamente dipendenti dal tempo ed estensione dello spazio delle fasi

Consideriamo un sistema dinamico descritto da una funzione Hamiltoniana esplicitamente dipendente dal tempo

$$H = H(q,p,t) \quad \Big(\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0\Big) \tag{5.70}$$

le rispettive equazioni di Hamilton saranno date da

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \\ \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \end{cases} \qquad j = 1, ...n \tag{5.71}$$

le grandezze fisiche associate saranno definite sullo **spazio delle fasi** ovvero saranno funzioni esplicitamente dipendenti dal tempo e della forma

$$G(q,p,t) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \tag{5.72}$$

dalla relazione (5.16) sappiamo che la derivata totale di una funzione G è data da

$$\frac{dG}{dt} = \Big\{G, H\Big\} + \frac{\partial G}{\partial t} \tag{5.73}$$

che descrive l'evoluzione di G(q,p,t). È possibile definire uno **spazio delle fasi esteso** $\mathcal{I} \times \mathbb{R}^2_+$ introducendo due parametri (E,s) che ci permettono di riscrivere le equazioni di Hamilton esplicitamente dipendenti dal tempo in un nuovo sistema rispetto al quale sono indipendenti dalla variabile temporale. Per le nuove variabili introdotte (E,s) deve valere che

$$\{E,s\} = 1 \quad \{E,q_j\} = \{E,p_j\} = 0 \tag{5.74}$$

$$\{s,q_j\} = \{s,p_j\} = 0 \tag{5.75}$$

Dai risultati precedenti si possono definire i due seguenti teoremi:

Teorema 5.6.1. Data un Hamiltoniana H(q,p,t) esplicitamente dipendente dal tempo, dati due parametri (E,s) si può estendere la Hamiltoniana H sullo spazio delle fasi esteso definendola come

$$\mathcal{H}(q,p,E,s) = H(q,p,s) - E \tag{5.76}$$

Allora la nuova Hamiltoniana ottenuta e le rispettive equazioni di Hamilton non dipendono più esplicitamente dal tempo.

Dimostrazione. Data $\mathcal{H}$(q,p,E,s) = H(q,p,s) - E le rispettive equazioni di Hamilton si scrivono come

$$\begin{cases} \dot{q_j} = \frac{\partial H(q,p,s)}{\partial p_j} \\ \dot{p_j} = -\frac{\partial H(q,p,s}{\partial q_j} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\partial H(q,p,s)}{\partial s} \\ \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial H(q,p,s)}{\partial E} \end{cases} \qquad j = 1,...n \tag{5.77}$$

le equazioni di Hamilto date dal sistema (5.77) rispetto alla Hamiltonina $\mathcal{H}$ non dipendono esplicitamente dal tempo. Inoltre $\frac{ds}{dt} = -1$ che integrando si ottiene $s \equiv t$, usando tale risultato abbiamo che le equazioni di Hamilton nello spazio esteso diventano

$$\begin{cases} \dot{q_j} = \frac{\partial H(q,p,s)}{\partial p_j} \\ \dot{p_j} = -\frac{\partial H(q,p,s)}{\partial q_j} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{dH(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} \end{cases} \tag{5.78}$$

in questo modo si riottiene il sistema di equazioni esplicitamente dipendente dal tempo.

□

Teorema 5.6.2. Consideriamo una grandezza fisica

$$G(q,p,t) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

definita sullo spazio delle fasi, se introduciamo dei parametri (E,s) tale grandezza è definibile sullo spazio delle fasi esteso come

$$\mathcal{G}(q,p,s) : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} \tag{5.79}$$

eliminando la dipendenza esplicita dal tempo, allora l'evoluto dinamico di tale quantità rispetto ai nuovi parametri sarà dato da

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = \{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} \tag{5.80}$$

Dimostrazione. Sviluppiamo la parentesi di Poisson

$$\{\mathcal{G}, \mathcal{H}\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial E}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} \tag{5.81}$$

dalla dimostrazione del teorema precedente sappiamo che $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} = 1$ e dunque $s \equiv t$ inoltre $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial E} = 0$ □