CHAPTER 1

# La probabilità e la distribuzione di probabilità

## 1.1 Assiomi di Kolgomorov

Come si definisce la probabilitá secondo Kolgomorov?

Consideriamo degli eventi $E_1, E_2 \subset \Omega$ spazio campione, vogliamo costruire definiamo probabilitá una un funzione $P : \Omega \to [0, 1]$ che soddisfa le seguenti proprietá:

- $P(\Omega) = 1$
- $\forall A \subset \Omega$ si ha che $P(A) \geq 0$
- $\forall A, B \subset \Omega$, si ha che $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Se gli eventi sono indipendenti $A \cap B = \varnothing$, si ha che $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

### 1.1.1 Definizione di probabilitá frequentista

Come si definisce operativamente la probabilitá secondo la formulazione frequentista?

La probabilitá di un evento A é definita come il rapporto tra il numero di casi favorevoli (in cui avviene l'evento A) e il numero di casi possibili ( la popolazione). Consideriamo di avere **N** eventi, e di contare il numero di volte in cui l'evento A, indicandolo come $\mathbf{n(A)}$. Definiamo la probabilitá di un evento come:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{n(A)}{N} \tag{1.1}$$

dove il limite é inteso in senso probabilistico ovvero al crescere del numero degli eventi.

**Probabilitá condizionata**

Che cos'é la probabilitá condizionata ?

Consideriamo una coppia di eventi $A, B \subset \Omega$ definiamo **probabilitá condizionata** la probabilitá che si verifichi l'evento A al verificarsi previamente dell'evento B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1.2}$$

si dimostra che la probabilitá condizionata soddisfa gli assiomi di Kolgomorov.
Nel caso di due eventi indipendenti, ovvero che il verificarsi di B non influenza la probabilitá che si verifichi A

$$P(A|B) = P(A|\Omega) = P(A)$$

per due eventi indipendenti possiamo riscrivere la probabilitá condizionata come:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1.3}$$

### 1.1.2 Teorema di Bayes

Che cosa afferma il teorema di Bayes ?

Consideriamo due eventi $A, B \subset \Omega$ la probabilitá nel caso di due eventi non indipendenti possiamo riscrivere la probabilitá condizionata come:

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

dunque l'equazione (1.2) puó essere riscritta come :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \tag{1.4}$$

tale espressione definisce il **teorema di Bayes**. La probabilitá $P(A|B)$ viene detta " a posteriori " poiché permette di calcolare la probabilitá di ,sapendo che si é verificato (o si verificherá con certezza assoluta) B.
La probabilitá P(A) si dice invece "a priori" poiché non condizionata da alcun altro evento o da alcuna conoscenza che potremmo avere sul suo verificarsi.

## 1.2 Variabili aleatorie

Che cos'é una variabile aleatoria ?

Una **variabile aleatoria** é una funzione definita sullo spazio campione a cui viene associato un sottoinsieme misurabile.

$$X : \Omega \rightarrow E \tag{1.5}$$

dove $\Omega$ é lo spazio di tutti gli esiti possibili, mentre E é l'insieme degli esiti al verificarsi di un determinato evento.

Nel caso in cui $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ si ha che x viene definita **variabile casuale discreta**.
Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, x viene definita **variabile aleatoria continua**, in questo caso la probabilitá viene misurata su intervalli $P(a < x < b)$ e non piú sui singoli eventi come nel caso di quella discreta.

**Esempio:**

- Il conteggio del numero di volte in cui compare un certo valore di una misura é una variabile aleatoria discreta.
- La temperatura é una variabile aleatoria continua.

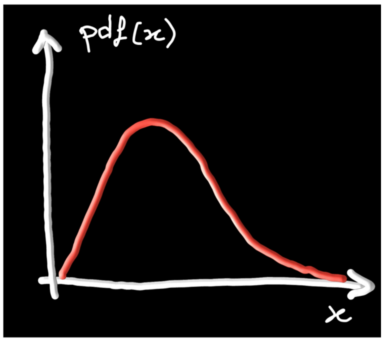
## 1.3 Probability Distribution Function (P.d.f)

Che cosa é una pdf e quali sono le sue proprietá ?

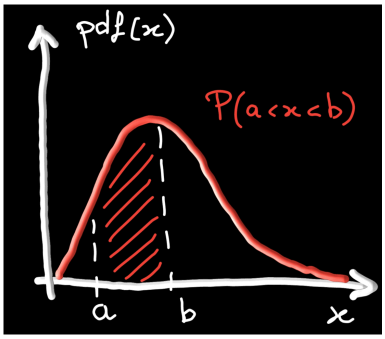
Si definisce densitá di probabilitá (p.d.f) una funzione che soddisfa le seguenti proprietá:

1. $pdf(x) : \Omega \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$
2. $P(x < \hat{x} < x + dx) = pdf(x) \cdot dx$
3. $P(a < x < b) = \int_a^b pdf(x) \cdot dx \leq 1$
4. P(x) = 0, la probabilitá in una singola misura é nulla.

per la definizione di porbabilitá nei punti 2) e 3) valgono gli assiomi di Kolgomorov.




(a) pdf(x)




(b) $P(a < x < b)$

### 1.3.1 Cumulative distribution function (C.d.f)

Che cosé una c.d.f.?

Si definisce distribuzione cumulativa la primitiva dell'integrale della pdf di una variabile aleatoria continua **x**:

$$cdf(x) = \int_a^x pdf(x)dx \tag{1.6}$$

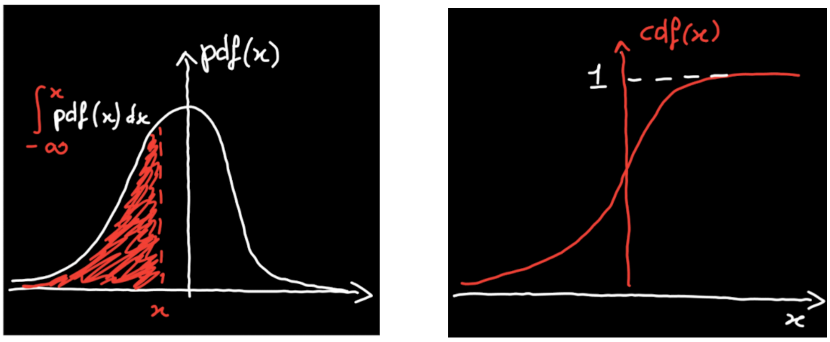
ovvero si ha che:

$$\frac{d}{dx}cdf(x) = pdf(x) \tag{1.7}$$

di conseguenza la cdf(x) descrive l'evolversi della probabilitá di una variabile casuale.

**Corollario**

Esiste una forma analitica della cdf(x) di una r.v. $\iff$ la pdf ammette primitiva.

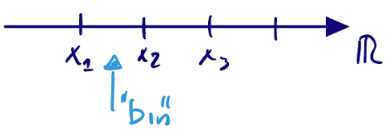


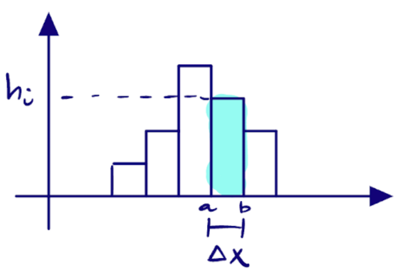

(a) $\int pdf(x)$ (b) cdf(x)

### 1.3.2 Istogrammi

Che cos'é un istogramma ?

Consideriamo una variabile aleatoria x, di cui conosciamo $\{x_i\}_i^N$ valori distinti, utilizziamo tali grandezze come estremi per definire degli intervalli $\omega_k = [x_i, x_{i+1})$ disgiunti tra loro $\omega_k \cap \omega_m = \varnothing$ per $k \neq m$, sull'asse reale. Tali intervalli vengono definiti **bin**.



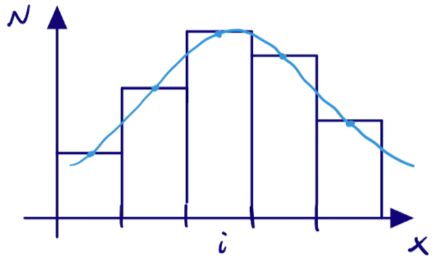




Ripetendo le misure contiamo il numero di volte $n_l$ che un valore compare e cade all'interno di un'intervallo $\omega_k$.

In questo modo posizionando sull'asse delle ordinate il numero di conteggi $n_l(x)$ si costruisce un istogramma.

Come si puó utilizzare un istogramma per rappresentare una pdf ?

All'aumentare del numero di elementi $N \rightarrow \infty$ e diminuendo l'ampiezza dei bin $\Delta x \rightarrow 0$, ci si riconduce alla nozione di probabilitá (1.1), in questo modo si passa a una pdf(x) continua. Al crescere del numero di eventi e il numero di eventi cambia e di conseguenza cambia la frequenza relativa.




$$\frac{f_{k+1} - f_k}{\Delta x} = \frac{df}{dx} \Rightarrow df = \frac{(f_{k+1} - f_k)}{\Delta x} dx \tag{1.8}$$

di conseguenza $p \rightarrow \frac{d}{dx} f(x) dx$.

### 1.3.3 Proprietà di una probability distribution function

Che cosa sono i momenti di una pdf?

Conoscere l'espressione analitica di una pdf è spesso poco significativo (soprattutto se la sua espressione non lascia intuire la forma della curva) in altri casi è impossibile definirla. Di conseguenza per studiare il comportamento di una pdf facciamo affidamento ad alcune grandezze che ne descrivono il comportamento, queste prendono il nome di **momenti**.

Tali momenti possiamo classificarli come:

- $E[x^m] = \int x^m \cdot pdf(x)dx$ prendono il nome di **momenti centrali di ordine m**.
- $E[(x - \mu)^m] = \int (x - \mu)^m \cdot pdf(x)dx$ prendono il nome di **momenti centrali**

il momento centrale di ordine 1 vale $E[(x-\mu)] = 0$.

### 1.3.4 Valore di aspettazione di una probability distribution function

Che cosa è il valore di aspettazione di una quantità rispetto ad una pdf ?

Data $x \in \Omega$ variabile aleatoria e $u(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il valore di aspettazione di u(x) è definito come:

$$E[u(x)] = \int u(x) \cdot pdf(x)dx \tag{1.9}$$

dove E[ ] è un operatore lineare:

- $E[x+y] = E[x] + E[y]$
- $E[\alpha x] = \alpha E[x] \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$

### 1.3.5 Momenti principali di una pdf per la popolazione e per un campione

Che cosa sono e che cosa rappresentano la media, la varianza, l'assimetria e la curtosi di un campione ? e di una popolazione?

Sia $x \in \Omega$ una variabile aleatoria continua definiamo valore di aspettazione **media della popolazione** la grandezza:

$$\mu \equiv E[x] = \int x \cdot pdf(x)dx \tag{1.10}$$

Essa rappresenta il centro della distribuzione di probabilità .
Per un campione di N misure **la media** viene definita come:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.11}$$

Si definisce **varianza della popolazione**:

$$\sigma^2 \equiv V[x] = E[(x-\mu)^2] = \int (x-\mu)^2 \cdot pdf(x)dx \tag{1.12}$$

la sua radice prende il nome di **deviazione standard**e definisce l'ampiezza della pdf. La varianza può essere riscritta come:

$$V[x] = E[x^2] + E[x]^2 = E[x^2] + \mu^2 \tag{1.13}$$

Per un campione di N misure **la varianza** è data da:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x-\mu)^2 \tag{1.14}$$

mentre **la deviazione standard** é di un campione é data da:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x-\mu)^2} \tag{1.15}$$

Tra i momenti centrali sono anche presenti la **skewness** per un campione di N misure:

$$\gamma_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(x-\mu)^3}{\sigma^3} \tag{1.16}$$

e per la popolazione:

$$\gamma_1 = \frac{E[(x-\mu)^3]}{\sigma^3} \tag{1.17}$$

tale grandezza definisce la simmetria di una distribuzione di probabilitá rispetto al valore centrale dato dal valore di aspettazione $\mu$ per una popolazione. Se una distribuzione é simmetrica $\gamma_1 = 0$.

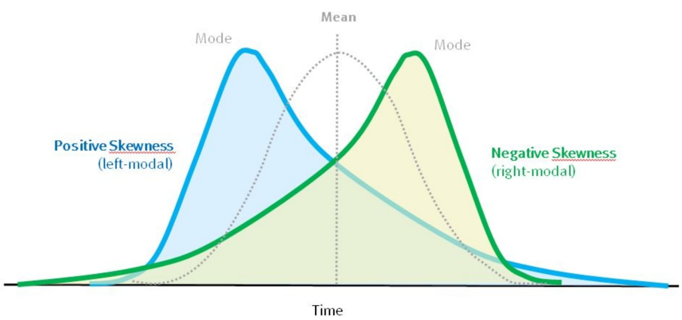



Figure 1.1: Simmetria di una distribuzione di probabilità

Si definisce indice di **kurtosi** di un campione di N elementi:

$$\gamma_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4} - 3 \tag{1.18}$$

mentre per la popolazione è data da:

$$\gamma_2 = \frac{E[(x-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3 \tag{1.19}$$

tale stima fornisce informazioni sul peso delle code della distribuzione, nel senso che per code significative la distribuzione risulterà più schiacciata nell'intorno del valore $\mu$, mentre per code meno incidenti sarà piú piccata.

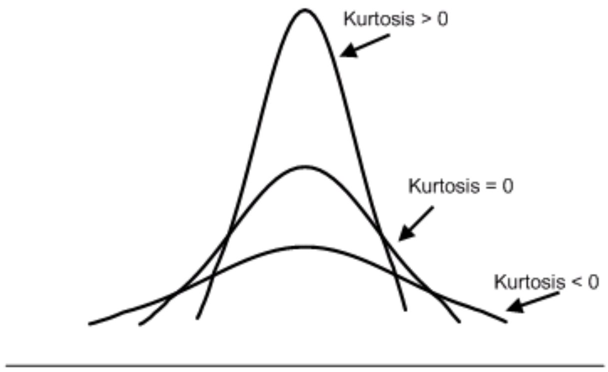
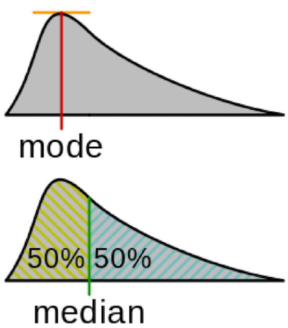



Figure 1.2: Kurtosi di una distribuzione di probabilità

### Stime di tendenza centrale

Che cosa sono moda, media e mediana di un campione? e di una popolazione ?




Definiamo **moda** di una popolazione il valore che definisce il massimo della pdf.

Mentre si definisce **mediana** il valore che divide in due parti uguali la pdf. Nel caso dei campioni le grandezza diventano rispettivamente il valore che compare con maggior frequenza e la misura che divide in due parti eguali il campione.

Per media e mediana di una distribuzione sono unici mentre per una distribuzione può avere più mode, in questi casi si parla di distribuzione **multimodale**.

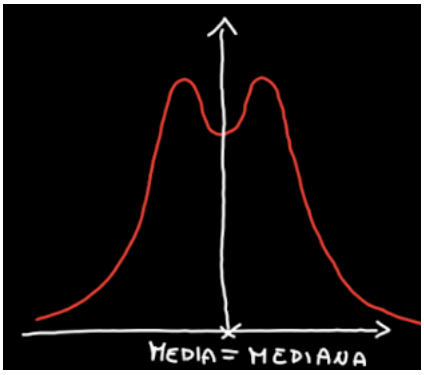



Figure 1.3: Distribuzione multimodale

## 1.4 Trasformazioni di distribuzioni di probabilità

Sia x una variabile aleatori continua che segue una pdf(x) e ipotizziamo di voler costruire una nuova variabile aleatori y legandola ad x mediante una funzione f(x), come definiamo la pdf(y) ?

Sappiamo che la probabilità che una misura cada in un intervallo [a,b) è data da

$$P(a < x < b) = \int_a^b pdf(x)dx$$

Se effettuiamo un cambio di variabii y=f(x) vogliamo inanzitutto che la trasformazione sia biunivoca dunque f(x) deve essere monotona e continua. In questo modo applicando il teorema per il cambio di coordinate sotto segno d'integrale si ha che:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dx = f'(x)^{-1}dy \tag{1.20}$$

di conseguenza:

$$P(a < x < b) = \int_a^b pdf(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} pdf(y)|f'(x)^{-1}|dy$$

per comodità si è posto un modulo affinchè la funzione sia sempre positiva. In conclusione si ha che:

$$pdf(y) = pdf(x)|\frac{d}{dy}f^{-1}(y)| \tag{1.21}$$

Nel caso in cui abbia più di una dimensione è necessario che la funzione sia differenziabile e monotona e il modulo della derivata prima della funzione di cambio delle variabili viene sostituita dal modulo del determinante dell'inversa della matrice Jacobiana.

$$pdf(\mathbf{y}) = pdf(\mathbf{x}) \cdot |detJ| \tag{1.22}$$

Come si osserva dalle equazioni (1.21) e (1.22) la nuova pdf(y) aumenta o diminuisce di un fattore rispetto alla pdf(x). Comunque sia la probabilità in un intervallo resta invariata.

Resta da discutere come cambiano i momenti della distribuzione, per farlo suddividiamo i risultati in due casi:

### Caso in cui il cambio di variabile è lineare y = ax+b

Il valore di aspettazione per una pdf(y) dove y = ax+b diventa:

$$E[y] = \int y \cdot pdf(y)dy = \int (ax+b) \cdot pdf(x)dx = y(\mu_x) \tag{1.23}$$

analogamente la varianza sarà data da:

$$V[y] = E[y^2] - E[y]^2 = a^2 \cdot V[x] \tag{1.24}$$

**Caso in cui il cambio di variabile é non lineare y = f(x)**

il valore di aspettazione e la varianza di una pdf(y) per y = f(x) non lineare si stima approssimando con il polinomio di Taylor la funzione y(x) in un'intorno di $\mu_x$ al secondo ordine:

$$y(x) \approx y(\mu_x) + \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\mu_x} (x - \mu_x) + \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\bigg|_{x=\mu_x} (x - \mu_x)^2$$

di conseguenza il valore di aspettazione è:

$$E[y] = \int y \cdot pdf(y)dy = y(\mu_x) + \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\mu_x} \int (x - \mu_x) \cdot pdf(x)dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\bigg|_{x=\mu_x} \int (x - \mu_x)^2 \cdot pdf(x)dx =$$

$$= \boxed{y(\mu_x) + \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\bigg|_{x=\mu_x} \cdot \sigma_x^2} \tag{1.25}$$

Mentre la varianza viene si ottiene dalla relazione:

$$V[y] = E[y^2] - E[y]^2 = \boxed{\left(\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\mu_x}\right)^2 \cdot \sigma_x^2} \tag{1.26}$$

L'espressione (1.26) è alla base della formula di propagazione degli errori.

## 1.5 Assenza di memoria per una distribuzione di probabilità

Gli eventi Poissoniani sono indipendenti l'uno dall'altro e la loro probabilità di decadimento è costante, dunque definita q(t) la probabilità che non si verifichi un evento in un intervallo di tempo [0,t] si ha che:

$$q(t + \delta t) = q(t)q(\Delta t) \tag{1.27}$$

la (1.27) definisce l'assenza di memoria di una distribuzione. Si può dimostrare che una distribuzione ha assenza di memoria $\iff$ è esponenziale.