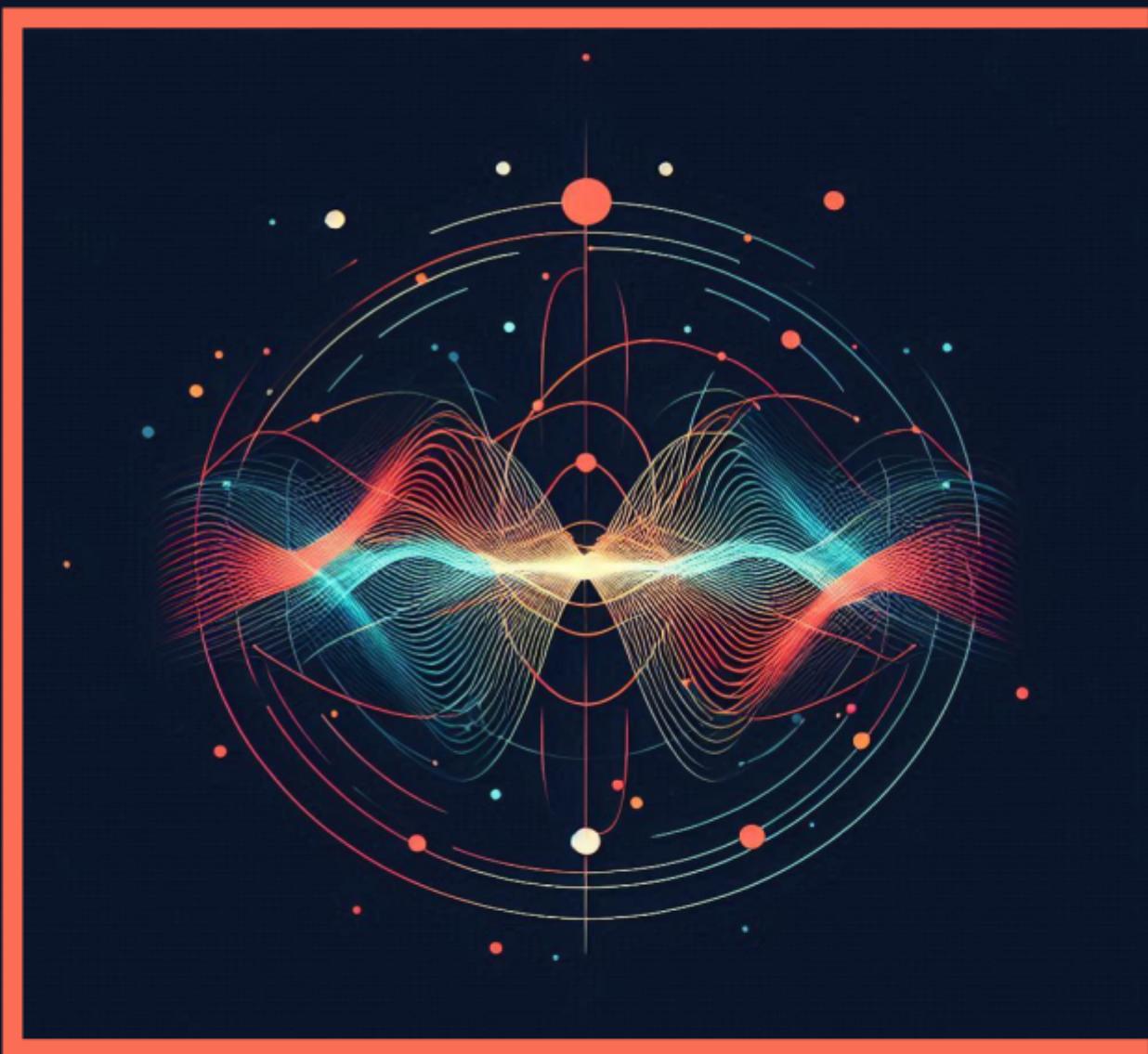


Elettromagnetismo & Onde



Di Lernia Giulio

Indice

0 Introduzione	7
1 Elettrostatica	9
1.1 Proprietà elementari dell’interazione elettrica di due cariche	9
1.2 Legge di Coulomb (Elettrostatica)	10
1.3 Principio di Sovrapposizione	11
1.3.1 Distribuzioni di carica per corpi continui	12
1.3.2 Configurazioni Notevoli di carica	13
1.3.3 Distribuzione lineare di carica	13
1.4 Energia di un Sistema di Cariche	14
1.5 Campo Elettrico	16
1.5.1 Rappresentazione del Campo Elettrico	17
1.6 Flusso di un Campo Vettoriale	21
1.7 Legge di Gauss	23
1.7.1 Distribuzione di Carica a Simmetria Sferica	26
1.7.2 Distribuzione di carica a Simmetria Cilindrica (Filo ”infinito”) . . .	27
1.7.3 Distribuzione di Carica di Superficie e Discontinuità	28
1.7.4 Coppia di Piani	30
1.8 Potenziale Elettrostatico. Gradiente	30
1.8.1 Tensione. Differenza di Potenziale Elettrostatico	30
1.8.2 Il Gradiente	33
1.8.3 Potenziale per una distribuzione di cariche	36
1.8.4 Energia Potenziale Elettrostatica	37
1.8.5 Esempi ed Esercizi	38
1.9 Divergenza di un Campo Vettoriale	42

INDICE

1.9.1	Espressione della Divergenza in coordinate cartesiane	44
1.9.2	Proprietà dell' operatore gradiente	47
1.9.3	Esempi ed Esercizi	47
1.10	Rotore di un campo vettoriale	48
1.10.1	Espressione del rotore in coordinate cartesiane	50
1.10.2	Proprietà del rotore	52
1.10.3	Campi conservativi e irrotazionalità	53
1.11	Equazioni dell'elettrostatica	54
1.11.1	Operatore Laplaciano	54
1.11.2	Equazione di Poisson	54
1.11.3	Equazione di Laplace	55
1.12	Coordinate curvilinee ortogonali	56
1.12.1	Gradiente	58
1.12.2	Rotore e Divergenza	59
1.12.3	Laplaciano	60
1.12.4	Esempi ed Esercizi	60
1.13	Conduttori e Isolanti	62
1.13.1	Induzione Totale	65
1.13.2	Problema generale dell'elettrostatica: Il teorema di unicità	68
1.13.3	Campo all'interno di un conduttore cavo	71
1.13.4	Metodo delle cariche immagine	71
1.14	Energia del campo elettrostatico	75
1.15	Dipolo elettrico	78
1.16	Esempi ed esercizi	80
1.16.1	Carica puntiforme in prossimità di una sfera conduttrice (Esame 23/06/2020)	80
1.16.2	Esercizio 2	83
2	Magnetostatica	85
2.1	Correnti stazionarie	85
2.1.1	Derivzione dell'equazione di continuità	86
2.2	Legge di Ampère	90
2.2.1	Principio di sovrapposizione per il campo magnetico	91
2.2.2	Filo infinito percorso da una corrente	91

INDICE

2.2.3	Correnti di superficie e discontinuità	93
2.2.4	Flusso del campo magnetico	95
2.2.5	Solenoide	96
2.3	Potenziale vettore	98
2.3.1	Monopoli Magnetici	99
2.3.2	Trasformazioni di Gauge	100
2.3.3	Legge di Biot-Savart	101
2.4	Dipoli magnetici	104
2.4.1	Corrente in una spira circolare	104
2.4.2	Distribuzione generiche di corrente	105
2.5	Esempi di campi magnetici	107
2.5.1	Campo magnetico di una spira circolare	107
2.5.2	Campo magnetico di un solenoide toroidale	107
2.6	Forza magnetica	108
2.6.1	Forza tra due fili	110
2.7	Cariche in movimento in un campo magnetico uniforme	111
2.7.1	Moto Cicloidale	112
2.7.2	Azioni meccaniche su spira quadrata	115
2.7.3	Effetto Hall	116
2.8	Energia Magnetica	118
2.8.1	Pressione Magnetostatica	118
2.8.2	Densità di energia magnetica	119
2.9	Principi della magnetostatica	120
2.10	Esempi ed esercizi	121
2.10.1	Esempio 1: Lavoro apparente della forza magnetica	121
3	Circuiti Elettrici	123
3.1	Condensatori	123
3.1.1	Condensatore a piani paralleli	123
3.1.2	Conduttori con condensatore interno	125
3.1.3	Sistemi di conduttori / condensatore a pištrati	125
3.2	Conduttori Ohmnici	125
3.2.1	Legge di Ohm	125

INDICE

3.3 Componenti di un circuito elettrico	125
3.3.1 Resistenze in serie e parallelo	125
3.3.2 Condensatori in serie e parallelo	125
3.3.3 Riduzione di un circuito	125
3.3.4 Legge di Kirchoff	125
3.4 Carica e Scarica di un condensatore	125
3.5 Forza elettromotrice	125
5 Elettrodinamica	127
5.1 Leggi d'induzione	127
5.1.1 Esempio	128
5.2 Legge di Faraday	129
5.2.1 Esempio legge di Lenz	130
5.2.2 Esempio: Batteria (Corrente Stazionaria)	131
5.2.3 Generatori Elettrici	132
5.2.4 Moto di un filo in un campo magnetico stazionario	133
5.2.5 Lavoro della forza esterna	133
A Formule Notevoli	135
A.1 Operatore Nabla in coordinate sferiche e cilindriche	135
A.2 Relazioni Notevoli	136

CAPITOLO 0

Introduzione

CAPITOLO 0. INTRODUZIONE

CAPITOLO 1

Elettrostatica

1.1 Proprietà elementari dell'interazione elettrica di due cariche

L'interazione tra corpi "elettrizzati" ha diverse proprietà irriducibili. Una di queste è lo stato di carica di un corpo che è definito da due condizioni:

- Carica Positiva (Protoni)
- Carica Negativa (Elettroni)

che permettono di descrivere una forza d'interazione repulsiva o attrattiva.

Sperimentalmente si osserva che tutti i corpi (o particelle) possiedono carica e che dati due corpi con lo stesso segno di carica si sperimenta una forza repulsiva e per segni opposti attrattiva. Una delle proprietà più importanti è la *conservazione della carica*.

La carica totale di un sistema isolato (ovvero che non scambia carica con l'ambiente), è definita dalla somma algebrica delle cariche positive e di quelle negative ed è costante.

$$Q = \sum q^+ + \sum q^- = \text{cost}$$

La carica non sono è conservata per tutti gli osservatori inerziali, ma è anche un invariante relativistico, ovvero la carica totale Q non dipende dall'osservatore.

Un'altra proprietà importante è che la carica è *quantizzata*, tale proprietà ci dice che in un corpo carico, la carica totale è un multiplo intero della carica di un elettrone o di un positrone. Al momento non esiste una spiegazione al motivo per cui la carica sia quantizzata

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

e assuma valori continui.

La materia contiene un numero enorme di protoni ed elettroni $\geq 6 \times 10^{23}/mol$. Una piccola differenza di carica renderebbe la materia non neutra, e dunque elettricamente instabile, dunque la materia in natura possiede carica neutra.

1.2 Legge di Coulomb (Elettrostatica)

L'interazione tra due cariche puntiformi e stazionarie, ovvero fisse l'una rispetto all'altra e nel riferimento del laboratorio, è descritta dalla legge di forza

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mu}_{r_{12}} \quad \text{dove} \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.1)$$

che esprime la forza esercitata dalla prima carica sulla seconda.

La dipendenza dal prodotto delle cariche fa sì che a seconda del loro segno si abbia il verso dell'interazione.

- Per una coppia di cariche (+,-) si ha che \mathbf{F} è attrattiva.
- Per una coppia (+,+) o (-,-) si ha che \mathbf{F} è repulsiva.

Il valore della costante k , e della carica, dipende dalla scelta del sistema di misura. Nel sistema internazionale la carica è misurata in Coulomb (C) e la costante k è posta nella forma

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,81 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C} \quad \text{e} \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

il termine ϵ_0 prende il nome di *costante dielettrica nel vuoto* e il suo valore dipende dalle proprietà del mezzo rispetto a cui avviene l'interazione elettrostatica, in questo caso stiamo considerando il vuoto.

Utilizziamo l'unità di misura dell'Ampere (A) che rappresenta l'intensità di corrente posta tra due fili paralleli posti a un metro di distanza e che generano una forza di $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N$. La carica elementare di un elettrone è pari a

$$e = -1.6 \times 10^{-19} C$$

che coincide con quella di un protone, ma con segno opposto.

L'interazione di Coulomb coinvolge oggetti che possiedono massa, ma l'interazione gravitazionale tra le cariche elementari è trascurabile.

Esempio

Se consideriamo l'interazione tra due protoni distanti 1 metro e ricordando che la costante gravitazionale è $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg s^2}$ e la massa di un protone è pari a $m_p = 1.67 \times 10^{-27} Kg$ si ha che il rapporto tra forza gravitazionale e di Coulomb è

$$\frac{F_G}{F_{el}} = \frac{G m_p^2}{k p^2} \approx 10^{-36}$$

Osservazione. Tra le cariche elementari si esercita anche una forza magnetica, associata al momento magnetico elementare della particella (proprietà quantistica associata allo SPIN). Su distanze atomiche, ovvero di un $\text{\AA} = 10^{-10}m$, l'interazione magnetica elementare è $\approx 10^4$ volte meno intensa dell'interazione elettrostatica e a livello macroscopico è totalmente trascurabile (l'intensità diminuisce come $\frac{1}{r^3}$).

1.3 Principio di Sovrapposizione

Consideriamo un sistema costituito da tre cariche q_1, q_2 e q_3 , possiamo calcolare la forza di Coulomb esercitata su coppie distinte

$$\mathbf{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{\mu}_{13}$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mu}_{12}$$

$$\mathbf{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{\mu}_{23}$$

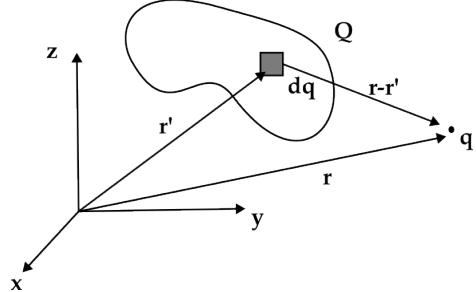
Se vogliamo calcolare la forza su una singola carica, per esempio q_3 , si ha evidenza sperimentale che la forza complessiva su di essa è data da

$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{\mu}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{\mu}_{23}$$

ovvero è somma vettoriale delle forze elettrostatiche dovute a tutte le altre cariche nel sistema.

1.3.1 Distribuzioni di carica per corpi continui

I sistemi macroscopici sono costituiti da un numero elevato di cariche e tipicamente il suo bilancio è neutro, ovvero si ha un egual numero di elettroni e protoni. Quando l'equilibrio viene rotto vengono spostate molte cariche e dunque il problema tipico che viene affrontato è quello di determinare la forza esercitata da una distribuzione di carica generica. Per farlo ricorriamo al principio di sovrapposizione.



Se consideriamo una carica q interagente con una porzione di carica dq infinitesima di una distribuzione continua Q , abbiamo che la forma esercitata tra le due cariche è data da

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu}_{rr'}$$

la forza d'interazione complessiva sarà data dall'integrale rispetto alla carica totale della distribuzione della forza infinitesima

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{qdq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu}_{rr'}$$

posto $dq' = \rho(\vec{r}')dV$ definiamo il termine $\rho(\vec{r})$ come densità volumica di carica e possiamo riscrivere la forza di Coulomb rispetto al volume della distribuzione di carica

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r})dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu}_{rr'}$$

Se l'elemento di carica considerato dal corpo continuo è macroscopicamente piccolo, possiamo considerare le densità di carica funzioni continue rispetto la posizione, mentre se è microscopicamente grande le densità sono funzioni regolari della posizione. In sostanza nel

primo caso il volume infinitesimo dV considerato possiede un grande quantità di cariche e quindi è trascurabili la natura corpuscolare delle cariche e quindi possiamo trattarlo come un elemento continuo.

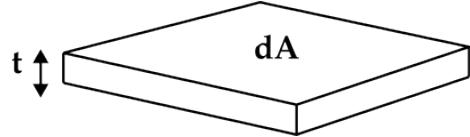
1.3.2 Configurazioni Notevoli di carica

Le distribuzioni carica non assumono solo forme tridimensionali, ma possono essere superficiali o lineari, per entrambi i casi si definiscono:

Distribuzione superficiale di carica

Consideriamo uno strato sottile (di spessore trascurabile) di area S di un materiale. Allora avremo che

$$dq = \rho dV = \rho(tdA) = (\rho t)dA = \sigma dA$$



dove

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

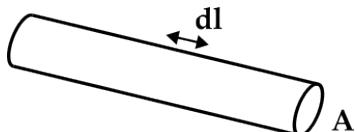
prende il nome di *densità di carica areica*. La corrispettiva forza esercita da una superficie di carica è data dall'integrale di superficie della forza di Coulomb per una carica sonda q

$$\mathbf{F} = \int_S d\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r})dA}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \mu_{rr'}$$

1.3.3 Distribuzione lineare di carica

Consideriamo un cavo la cui sezione ha superficie A , e prendiamone un tratto infinitesimo, allora la quantità di carica contenuta sarà data da

$$dq = \rho dV = \rho(Adl) = (\rho A)dl = \lambda dl$$



dove

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

prende il nome di *densità lineica di carica*. Se consideriamo una carica sonda q la forza esercitata dalla carica lineare su tale particella sarà espressa dalla legge di Coulomb formulata

nel seguente modo

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu}_{rr'}$$

1.4 Energia di un Sistema di Cariche

In linea di principio, tutta l'elettrostatica è compresa nella legge di Coulomb. Date le cariche e le loro posizioni possiamo ricavare tutte le forze elettriche agenti, o nel caso in cui queste siano in moto per azione di altre forze possiamo determinare la condizione di equilibrio elettrostatico.

Come fatto per la meccanica introduciamo il concetto di energia per l'elettromagnetismo, il che è assume un aspetto molto importante dato che le forze elettriche sono di natura *conservativa*.

Consideriamo un sistema formato da due particelle che inizialmente si trovano ad una grande distanza e dotate di carica q_1 e q_2 . Se ora vogliamo avvicinarle tra loro ad una distanza \mathbf{r}_{12} quanto lavoro dobbiamo compiere?

Per rispondere a questa domanda utilizziamo la generica definizione di lavoro, ovvero che il lavoro compiuto in un sistema è dato dall'integrale di linea della forza agente sulle cariche.

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

dove nel caso di cariche la forza agente è per spostare una carica verso l'altra ha la stessa intensità di quella di Coulomb, ma con verso opposto.

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{12}} \frac{q_1 q_2}{\mathbf{r}^2} d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (1.2)$$

Di conseguenza abbiamo che il lavoro compiuto sul sistema è:

- $W > 0$ per cariche dello stesso segno.
- $W < 0$ per cariche di segno opposto.

Dato che la forza è conservativa si ha che il lavoro compiuto non dipende dal percorso scelto per avvicinare le due cariche, ma solo dalla posizione iniziale e finale.

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

Supponiamo di introdurre una terza carica q_3 all'interno del sistema e di portarla da un punto molto lontano al punto P_3 che si trova a distanza r_{31} per la prima carica e r_{21} per la seconda carica. Il lavoro richiesto per compiere tale operazione è

$$W_3 = - \int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r}$$

Grazie al principio di sovrapposizione abbiamo che la forza totale agente sulla carica q_3 è data da

$$W_3 = - \int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{r} = - \int \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{r}$$

ovvero il lavoro che si compie per portare q_3 in P_3 è la somma del lavoro necessario quando è presente solo q_1 e di quello necessario quando è presente solo q_2 . Dal risultato ottenuto in (1.2) si ha che

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \right)$$

Il lavoro totale compiuto per realizzare la distribuzione di tre cariche, che indicheremo con U , è

$$U = W + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \right) \quad (1.3)$$

Notare che l'espressione è simmetrica rispetto a q_1 , q_2 e q_3 e dunque è indipendente da quale carica si considera d'introdurre per ultima. Dunque U non dipende dall'ordine delle cariche con cui si assembla il sistema e non dipende dal percorso che si sceglie per farlo, l'energia totale del sistema dipende unicamente dalla posizione iniziale e finale, come ci si aspetterebbe da un sistema le cui forze agenti sono conservative.

Possiamo definire U come *energia potenziale elettrica* del sistema. Quando si definisce un energia potenziale in un sistema vi è una certa arbitrarietà nella scelta nella sua definizione, in questo caso si è scelto come zero di U la configurazione in cui le tre cariche si trovano ad una distanza così grande tra loro che non vi è interazione tra di esse.

È semplice la generalizzazione del risultato (1.3) ad un sistema costituito da N particelle, è sufficiente considerare il lavoro della forza su coppie distinte e sommarlo.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \quad (1.4)$$

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

Il fattore $1/2$ serve ad eliminare i conteggi doppi del lavoro dato che le coppie con ordine (j,k) e (k,j) restituiscono il medesimo risultato e dunque si sommano.

Osservazione.

- Se q_1 e q_2 sono concordi in segno: $U(r) > 0$ le cariche (se non vincolate) si allontanano e l'energia potenziale diminuisce a favore dell'energia cinetica.
- Se q_1 e q_2 sono discordi in segno: $U(r) < 0$ le cariche si avvicinano e l'energia potenziale aumenta a sfavore dell'energia cinetica.

Un sistema le cui cariche a coppie hanno $U(r) < 0$ è legato e occorre compiere del lavoro per separare le cariche. L'energia potenziale per un sistema di questo tipo viene denominata *energia di legame*.

Esempio - Separazione di una molecola di sale

Consideriamo la molecola di sale data da Na^+Cl^- costituita da un atomo di sodio (Na) e di cloro (Cl) poste ad una distanza $d \approx 3\text{\AA}$. Quando l'atomo di sodio e cloro vengono separate a una distanza r molto grande il sistema è ben descritto da due cariche puntiformi con carica $|q| = e$. L'energia potenziale (o di legame in questo caso) del sistema è data da

$$U(d) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \approx -7.7 \times 10^{-19} J$$

Se consideriamo un sistema di particelle che può essere messo in agitazione termica l'energia termica è approssimativamente di $\frac{5}{2}kT = 10^{-20}J$ per una temperatura $T = 300 K$. L'energia fornita termicamente è di quasi due volte inferiore all'energia necessaria per separare il sodio dal cloro.

1.5 Campo Elettrico

Supponiamo di avere una distribuzione di cariche q_1, q_2, \dots, q_n fisse rispetto ad un osservatore e di volerne studiare l'interazione con una carica q_0 . Trascurando la forza d'interazione tra le cariche e considerando solo la forza di Coulomb complessiva sulla nostra carica sonda q_0 si ha che

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_j}{r_{0j}^2} \hat{\mu}_{0j}$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

dove \mathbf{r}_{0j} è la posizione delle cariche rispetto alla posizione di q_0 . La risultante delle forze risulta essere proporzionale alla carica della particella sonda, se dividiamo per questa quantità la forza totale, otteniamo una grandezza vettoriale che dipende unicamente dalla struttura del sistema iniziale di cariche q_1, \dots, q_n e dalla posizione della carica q_0 . Il vettore così definito prende il nome di *campo elettrico* associato alle cariche q_1, \dots, q_n e viene definito nel seguente modo

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\mathbf{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{0j}^2} \hat{\mu}_j \quad (1.5)$$

Definito un campo elettrico per qualsiasi carica q , la forza dovuta alla distribuzione di cariche (che abbiamo supposto stazionarie) è esprimibile tramite

$$\mathbf{F}_q = q\mathbf{E}$$

Il campo elettrico associa a ogni punto in un sistema una proprietà locale, se conosca il valore di \mathbf{E} in una piccola regione, senza bisogno di ulteriori informazioni, conosciamo cosa accadrà a qualsiasi carica posta in quella zona, senza necessariamente conoscere come siano distribuite le cariche sorgente.

1.5.1 Rappresentazione del Campo Elettrico

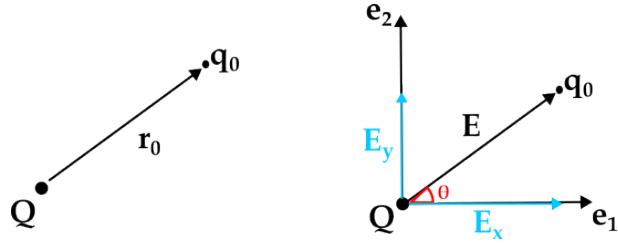
Per visualizzare un campo elettrico è necessario associate un vettore, cioè, intensità, verso e direzione in ogni punto dello spazio. Inazittuto si consideri il fatto che per una carica puntiforme la simmetria del campo è sferica e la sua direzione è data dal segno della carica. Data la simmetria del campo, visto che darne una rappresentazione tridimensionale diventa complicato, possiamo sfruttare tale proprietà per darne una raffigurazione bi-dimensionale, che non ne rende inefficacie la descrizione fisica.

Consideriamo il campo generato da una carica Q positiva (e negativa), e iportizziamo di testarlo con una carica q_0 , in questo vaso avremo che il campo percepito dalla carica sonda è lungo la congiungente e quindi è espresso come

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^2} \hat{\mu}_{r_0}$$

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

vogliamo riscrivere il campo rispetto alla base di vettori $\{e_1, e_2\}$ che definiscono un sistema ortonormale.



prendendo la posizione di Q come origine del sistema riscriviamo la lunghezza radiale in coordinate cartesiane $r_0^2 = x^2 + y^2$. Le proiezioni del campo rispetto agli elementi della base sono date da

$$\begin{cases} E_x = E \cos \theta \\ E_y = E \sin \theta \end{cases}$$

utilizzando le relazioni fondamentali della trigonometria dove $\cos \theta = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $\sin \theta = \frac{y}{x^2+y^2}$ le componenti del campo vettoriale si riscrivono come

$$\begin{cases} E_x(x, y) = E \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ E_y(x, y) = E \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Conoscendo il valore delle componenti in ogni punto del piano, possiamo definirne direzione, verso e intensità del campo vettoriale. Dalle figure si nota come l'intensità del campo

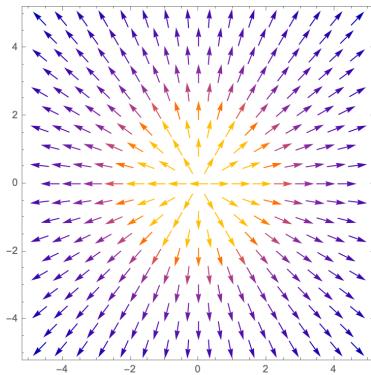


Figura 1.1: Campo Elettrostatico per una sorgente di carica positiva

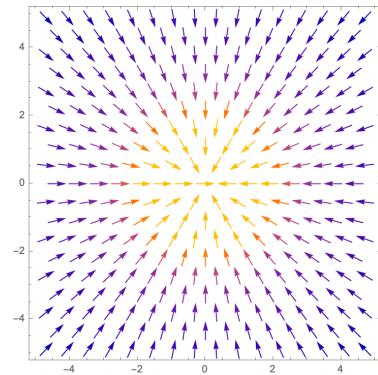


Figura 1.2: Campo Elettrostatico per una sorgente di carica negativa

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

decresca come $\frac{1}{r^2}$ e dunque risultando più intenso in prossimità della sorgente.

```

1 Mathematica Snippet
2
3 Q = 1.6*10^(-19)
4 d = 8.854187822*10^(-12)
5
6 Ex[q_, x_, y_, x0_, y0_] :=
7 q/(4*Pi*d)*((x - x0)/((x - x0)^2 + (y - y0)^2)^(1.5))
8
9 Ey[q_, x_, y_, x0_, y0_] :=
10 q/(4*Pi*d)*((y - y0)/((x - x0)^2 + (y - y0)^2)^(1.5))
11
12 {VectorPlot[{Ex[Q, x, y, 0, 0], Ey[Q, x, y, 0, 0]}, {x, -5,
13 5}, {y, -5, 5}],
14 VectorPlot[{Ex[-Q, x, y, 0, 0], Ey[-Q, x, y, 0, 0]}, {x, -5,
15 5}, {y, -5, 5}]}
16

```

Dato che il campo elettrico gode del principio di sovrapposizione si ha che per configurazioni di più cariche si applica lo stesso metodo, sommando le componenti dei campi elettrici generati dalle singole cariche in tutti i punti dello spazio.

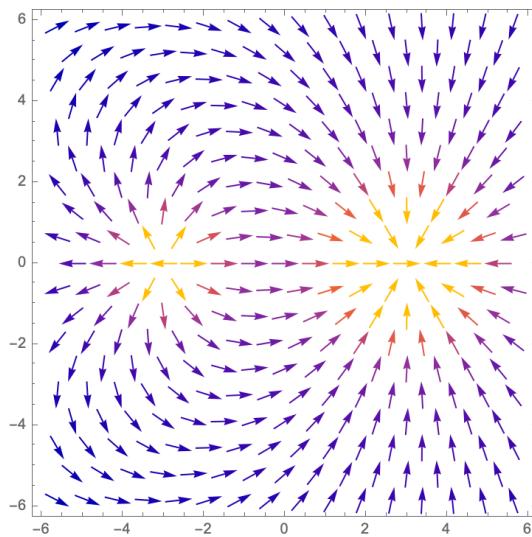


Figura 1.3: Campo generato da una carica Q in $(-3,0)$ e una carica $-3Q$ posta in $(3,0)$

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

```

1 Mathematica Snippet
2
3 Exx[q1_, q2_, x_, y_, x0_, y0_, x1_, y1_] =
4   Ex[q1, x, y, x0, y0] + Ex[q2, x, y, x1, y1]
5
6 Eyy[q1_, q2_, x_, y_, x0_, y0_, x1_, y1_] =
7   Ey[q1, x, y, x0, y0] + Ey[q2, x, y, x1, y1]
8
9 VectorPlot[
10 {Exx[Q, -3*Q, x, y, -3, 0, 3, 0], Eyy[Q, -3*Q, x, y, -3, 0, 3, 0]}, 
11 {x, -6, 6}, {y, -6, 6}
12 ]

```

Un altro modo per rappresentare un campo, e in questo caso un campo elettrico, è utilizzando le linee di flusso (forza). Queste si ottengono risolvendo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = E_x(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = E_y(x, y) \end{cases}$$

dove il campo elettrico risulta essere tangente alle soluzioni $(x(t), y(t))$ di questo sistema. (x, y) descrivono curve regolari e continue, tranne che nei punti di singolarità o nei punti dove il campo è nullo. Graficamente l'informazione d'intensità di un campo viene recuperata dal fatto che le linee di forza si addensano in prossimità delle cariche sorgente dove il campo è intenso e diventano rarefatte allontanandosi.

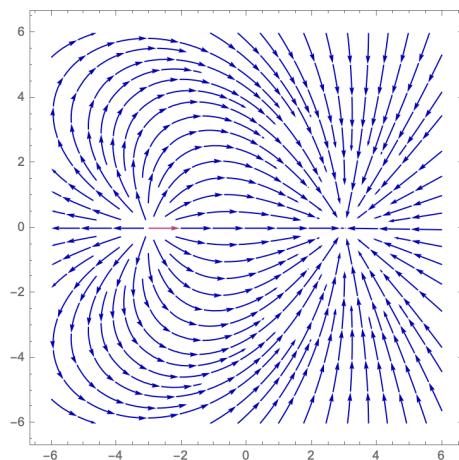


Figura 1.4: Linee di Forza associate per una carica Q in $(-3,0)$ e $-3Q$ in $(3,0)$

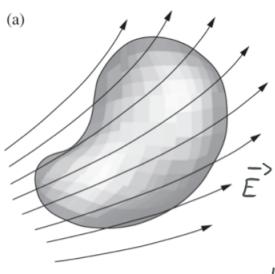
```

1 Mathematica Snippet
2
3 Exx[q1_, q2_, x_, y_, x0_, y0_, x1_, y1_] =
4   Ex[q1, x, y, x0, y0] + Ex[q2, x, y, x1, y1]
5 Eyy[q1_, q2_, x_, y_, x0_, y0_, x1_, y1_] =
6   Ey[q1, x, y, x0, y0] + Ey[q2, x, y, x1, y1]
7
8 StreamPlot[
9 {Exx[Q, -3*Q, x, y, -3, 0, 3, 0],
10 Eyy[Q, -3*Q, x, y, -3, 0, 3, 0}],
11 {x, -6, 6}, {y, -6, 6}
12 ]

```

1.6 Flusso di un Campo Vettoriale

La relazione tra campo elettrico e sorgenti può essere espressa in forma semplice e utile tramite la nozione di *flusso* del campo elettrico attraverso una superficie.

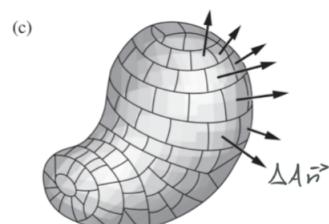


Si immagini di avere una superficie chiusa come in figura in una regione di spazio in cui è presente un campo elettrico $\mathbf{E}(x, y, z)$ generato da una distribuzione di cariche.

Procediamo con l'affettare tale superficie in piccoli elementi di area ΔA_j e al centro di ciascuno di essi applichiamo un vettore ortogonale alla superficie la cui intensità è data dall'area dell'elemento. Definendo $\Delta \mathbf{A}_j = \Delta A_j \hat{n}$ dove \hat{n} è un versore ortogonale alla superficie considerata e con direzione uscente.

Se l'area della porzione di superficie è sufficientemente piccola, in quella regione di spazio possiamo considerare il campo elettrico $\mathbf{E}(x, y, z)$ costante.

Definiamo il flusso del campo elettrico rispetto all'area ΔA_j come la sua proiezione lungo la direzione del



CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

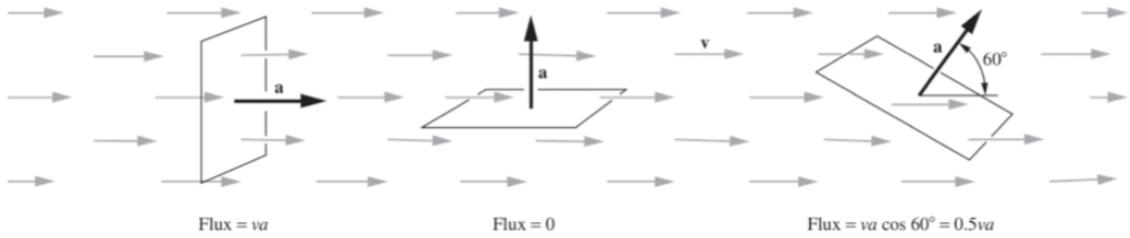
vettore d'area.

$$\phi_j = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A}_j \quad (1.6)$$

Tale definizione prende ispirazione della fluido dinamica dove tale grandezza definisce la rapidità con cui fluisce il campo elettrico alla superficie orientata. Infatti se consideriamo un fluido con velocità \mathbf{v} in regime stazionario si ha che la portata è data da

$$d\phi = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{A} = \frac{dV}{dt}$$

Il prodotto scalare recupera ci definisce la proiezione del campo lungo la direzione ortogonale alla superficie, ovvero la superficie efficace attraverso cui fluisce il campo.



La definizione di flusso è applicabile a qualsiasi funzione vettoriale, indipendentemente dalla variabile fisica che rappresenta.

Il flusso complessivo attraverso la superficie è ottenuto sommando i singoli contributi

$$\phi(\mathbf{E}) = \sum_j \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A}_j \quad (\text{Caso Discreto})$$

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{Limite Continuo})$$

Osservazione.

Notare che, il flusso è una funzione che preso un vettore gli associa uno scalare

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

e inoltre restituisce informazioni sull'insieme del sistema e non locali.

1.7 Legge di Gauss

Consideriamo una regione chiusa dello spazio $V \subset \mathbb{R}^3$ e consideriamo $S = \partial V$ la superficie di V . Ipotizziamo che sia presente una distribuzione di carica continua (o discreta) all'interno della regione V , avremo che il flusso del campo elettrico generato attraverso la superficie S è dato da

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (\text{Distribuzioni Continue})$$

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (\text{Distribuzioni Discrete})$$

Tale relazione prende il nome di *legge di Gauss*. I termini di destra coincidono la quantità di carica complessiva contenuta all'interno della regione V , infatti possiamo definire

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

Con questa legge noto il campo vettoriale (quindi intensità e geometria) è possibile risalire alla carica complessiva delle sorgenti.

Notare che la forma della *superficie Gaussiana* S non influenza il risultato della Legge di Gauss fin tanto che la carica resta all'interno del volume della regione di spazio V . In sostanza l'integrale del flusso non dipende dalla geometria della superficie, ma dipende dalla sua topologia.

Dimostrazione. Dimostriamo la non dipendenza della legge di Gauss dalla forma della superficie.

I) Consideriamo il campo elettrico dato da una carica puntiforme

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mu}_r$$

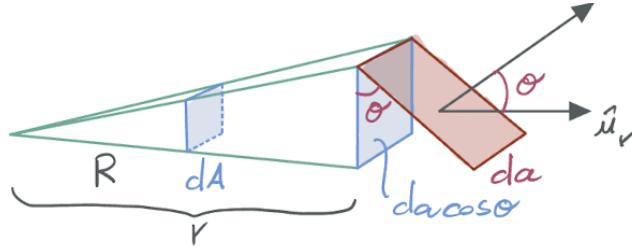
e che la carica sia racchiusa all'interno di una sfera di raggio R , il flusso attraverso di essa è dato da

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(R^2) \int_S dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

II) Ora poniamo la regione di spazio sferica in un volume generico V chiuso che la contiene, proiettiamo l'elemento di volume dA della superficie sferica su quella generica V , ottenendo un angolo solido

$$\Omega = \frac{dA}{R^2} = \frac{da \cos \theta}{r^2}$$



dunque l'area infinitesima della superficie esterna V è data da

$$da = dA \frac{r^2}{R^2 \cos \theta}$$

il campo ha simmetria sferica dunque ha direzione radiale $\hat{\mu}_r$ di conseguenza il flusso attraverso la superficie "da" è dato da

$$\phi(\mathbf{E})_{da} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = E(r) da \cos \theta = E(R) dA = \phi(\mathbf{E})_{dA}$$

sommendo i contributi infinitesimi si ha che

$$\phi(\mathbf{E})_V = \phi(\mathbf{E})_S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

□

La legge di Gauss è verificata per una qualsiasi distribuzione di carica, se ipotizziamo di avere q_1, \dots, q_n cariche in una regione chiusa di spazio V si ha che per il principio di sovrapposizione il campo elettrico totale è dato da

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

dunque il flusso è esprimibile come

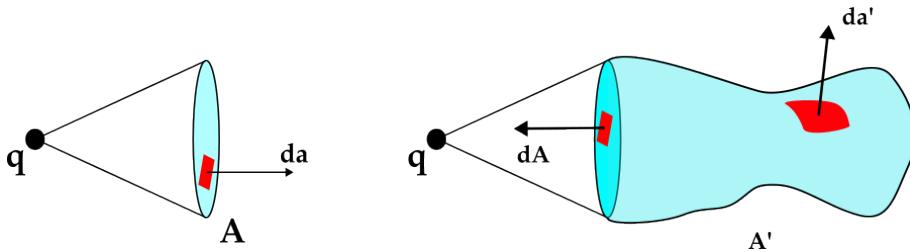
$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \sum_i \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} = \sum_i \phi_i(\mathbf{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

Proprietà 1.7.1. Se $\mathbf{F} \not\sim \frac{1}{r^2}$ la legge di Gauss non è valida (La legge di Gauss vale anche per la forza gravitazionale)

Si ha che $\phi(\mathbf{E})_V = 0$ per un campo vettoriale \mathbf{E} in una regione di spazio chiusa V , se non ci sono cariche interne oppure se il flusso di cariche esterne alla superficie è nullo.

Osservazione. Dire che $\phi(\mathbf{E}) = 0$ non vuol dire necessariamente che $\mathbf{E} = 0$.

Proprietà 1.7.2. Dato il flusso di un campo vettoriale \mathbf{E} questo è il medesimo per tutte le superfici aperte che sottendono lo stesso angolo solido (e sono dalla stessa parte rispetto alla sorgente del campo elettrico). In sostanza è sempre possibile calcolare il flusso attraverso una superficie equivalente che semplifica il calcolo.



Dimostrazione. Consideriamo la superficie chiusa $S = A + A'$, questa non contiene la sorgente di campo "q" e di conseguenza il flusso $\phi_S(\mathbf{E}) = 0$. Se riscriviamo il flusso come

$$\phi_S(\mathbf{E}) = \int_{S=A+A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} - \int_{A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

dunque si ha che $\phi_A(\mathbf{E}) = \phi_{A'}(\mathbf{E})$. Il segno negativo compare perchè per una superficie chiusa il vettore d'area ha sempre verso uscente rispetto alla superficie)

□

1.7.1 Distribuzione di Carica a Simmetria Sferica

Consideriamo una distribuzione di carica sferica ρ e di raggio R , all'esterno di essa possiamo approssimare il suo campo a quello di una carica puntiforme, ma come è fatto al suo interno? dipende dalla sua distribuzione. Se consideriamo una distribuzione uniforme la carica complessiva è data da

$$Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

Consideriamo la superficie sferica S_1 come in figura, con centro nell'origine, e raggio $r_1 < R$, la carica contenuta all'interno sarà data da

$$Q_{int} = \int_V dV \rho = \int_0^{r_1} dr r^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi = \frac{4\pi}{3} \rho r_1^3$$

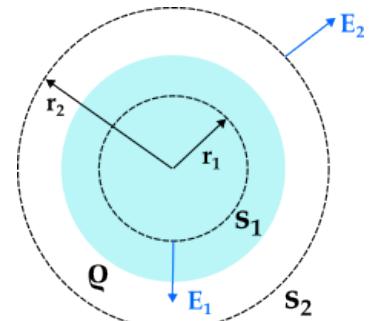
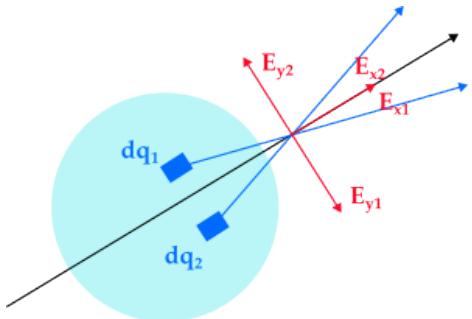
Applicando la legge di Gauss abbiamo che

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{3} \rho r_1^3$$

e dunque il campo elettrico sulla superficie S_1 è data da

$$\mathbf{E}(r_1) = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0} \hat{\mu}_r \quad r_1 \leq R$$

L'informazione sulla direzione radiale del campo $\hat{\mu}_r$ è facilmente recuperabile osservando la simmetria del problema. Consideriamo un sistema di riferimento che divida in due parti simmetriche la sfera, se consideriamo due porzioni di carica dq_1 e dq_2 su di essa e li facciamo interagire con una carica sonda q_0 posta in un punto che rende equidistanti le cariche, avremo che il campo \mathbf{E} ha direzione lungo la congiungente $\hat{\mu}_{r0}$ decomponendo rispetto al sistema di riferimento le componenti angolari si eliminato, avendo segni opposti e pari intesità



$$E_{y2} + E_{y1} = 0$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

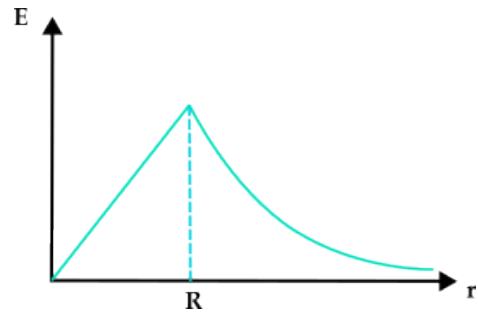
e restano solo quelle della componente radiale che si sommano

$$\sum_i E_{xi} = R_x$$

dunque possiamo concludere che il campo abbia direzione radiale.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti per la variazione d'intensità del campo in funzione della posizione radiale, nel seguente modo

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mu}_r & r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{\mu}_r & r \leq R \end{cases} \quad (1.7)$$



Osserviamo che il campo elettrico è continuo in $r = R$, ma la derivata prima $\frac{dE}{dr}$ no, come si osserva dal grafico.

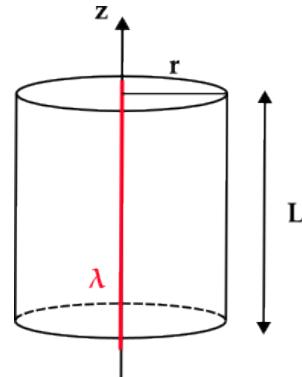
1.7.2 Distribuzione di carica a Simmetria Cilindrica (Filo "infinito")

Consideriamo una distribuzione di carica lineica λ con estensione infinita lungo la direzione z . Attorno ad essa definiamo una superficie Gaussiana cilindrica di raggio r e lunghezza L . La quantità di carica racchiusa sarà data da

$$Q = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Per ragioni di simmetria il campo elettrico ha simmetria radiale $\hat{\mu}_r$. Questo vuol dire che le due basi del cilindro non contribuiscono all'integrale di flusso dato che $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$. Dunque applicando la legge di Gauss si ha che

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(r)2\pi L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$



e quindi il campo elettrico è dato da

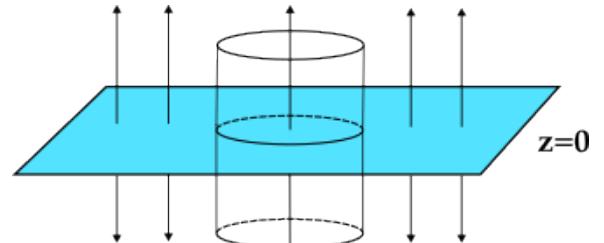
$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{\mu}_r \quad (1.8)$$

Si osserva che per una distribuzione di carica lineare $\mathbf{E} \sim \frac{1}{r}$ a differenza di quella di una carica puntiforme il cui campo decresce come $\frac{1}{r^2}$. Quindi l'intensità del campo diminuisce molto più lentamente.

Il campo ottenuto è una buona approssimazione per $r \ll L$, dove L è la lunghezza del filo. In generale, per un filo finito si ha che la componente angolare del campo $E_\varphi = 0$ come nel caso infinito, ma la componente $E_z \neq 0$. Il sistema è simmetrico per riflessione solo rispetto al punto medio del filo. A distanza infinita il campo risulta essere sferico (possiamo approssimare il filo ad una carica puntiforme) mentre in sua prossimità ha simmetria cilindrica e direzione radiale.

1.7.3 Distribuzione di Carica di Superficie e Discontinuità

Consideriamo un piano infinito, con posizione $z = 0$, su cui è presente una distribuzione di carica superficiale σ . Prendiamo una superficie Gaussiana cilindrica, con asse perpendicolare al piano come in figura. La direzione del campo elettrico è lungo la perpendicolare al piano $\hat{\mathbf{z}}$.



$$\mathbf{E}(z) = E(z)\hat{\mathbf{z}}$$

Inoltre il campo elettrico per $z > 0$ deve avere direzione opposta a quella del campo per $z < 0$, e dunque $E(z) = -E(-z)$.

L'integrale di superficie è nullo lungo la superficie laterale del cilindro e gli unici contributi sono dati dalle sue basi, che ipotizziamo avere area A . Utilizzando la legge di Gauss si ha che

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(z)A - E(-z)A = 2E(z)A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

In modulo il campo elettrico di una distribuzione di carica per un piano infito è dato da

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.9)$$

Il campo elettrico è indipendente dalla distanza della carica sonda dal piano. Questo è dovuto dal fatto che il piano è infinito. e dunque più ci si allontana, più superficie diventa visibile.

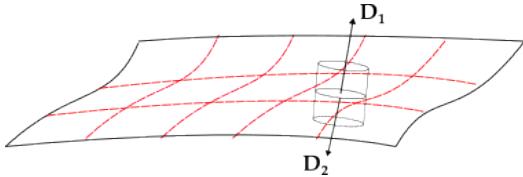


Figura 1.5: La componente normale del campo elettrico è discontinua.

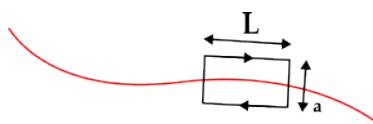


Figura 1.6: La componente tangenziale del campo elettrico è continua

Un altro importante fatto è che il campo elettrico non è continuo rispetto alle due facce del piano per una distribuzione di carica costante. Si ha che

$$E(z \rightarrow 0^+) - E(z \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Tale risultato non dipende dal fatto che il piano sia finito, infatti può essere tranquillamente esteso a qualsiasi superficie con distribuzione di carica σ . Inoltre non è necessario che σ sia costante e che il campo \mathbf{E} sia parallelo alla normale $\hat{\mathbf{n}}$ per ogni punto della superficie. Infatti per una superficie generica, in qualsiasi suo punto possiamo definire un cilindro Gaussiano e ripetere i calcoli per una superficie planare. Se denotiamo con \mathbf{E}_\pm il campo elettrico per entrambe le parti della superficie si ha che

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_+ - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$

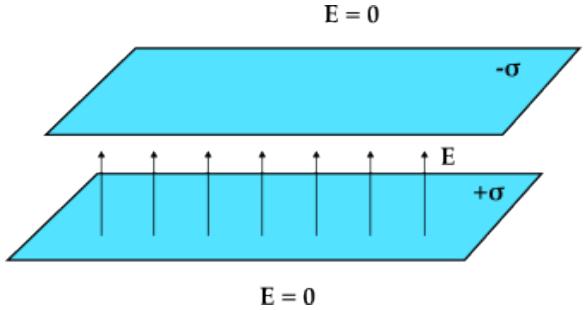
e dunque il campo elettrico risulta essere discontinuo rispetto alla perpendicolare per qualsiasi superficie. In contrasto si ha che il campo tangente alla superficie è continuo. Per verificarlo basta considerare la circuitazione C con lato L parallela alla superficie e altezza "a" rispetto la perpendicolare.

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = LE(z') - LE(z'') = 0$$

dato che $\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = 0$ e questo dimostra la continuità delle componenti parallele.

1.7.4 Coppia di Piani

Si consideri una coppia di piani infiniti rispettivamente a $z = 0$ e $z = a$, che possiedono una distribuzione di carica superficiale $\pm\sigma$ come in figura. Per calcolare il campo elettrico è sufficiente applicare il principio di sovrapposizione, considerando il campo generato dai singoli piani. Dato che un campo è dato dall'espressione (1.9), tenendo conto di segni e direzione si ha che



$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad 0 < z < a \quad (1.11)$$

e $\mathbf{E} = 0$ per $z \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$.

1.8 Potenziale Elettrostatico. Gradiente

1.8.1 Tensione. Differenza di Potenziale Elettrostatico

Quando su una carica q_0 agisce una forza \mathbf{F} di qualsiasi natura, non necessariamente elettrostatica, ma per esempio dovuta a processi chimici o meccanici, possiamo sempre definire un campo elettrico \mathbf{E} , che prende il nome di *campo elettromotore* ed è definito come

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \Rightarrow \mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$$

Notare che l'espressione ottenuta è uguale a quella discussa per la forza di Coulomb, ma in questo caso la si sta generalizzando a tutti i tipi di forze che possono agire su una carica. Il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} lungo un cammino $d\mathbf{s}$ è dato dal suo integrale linea

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

definiamo tensione elettrica tra due punti A e B lungo un percorso C il lavoro per unità di carica

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q_0} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

In generale per un circuito chiuso C il lavoro è non nullo

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \mathcal{E}$$

L'integrale

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

prende il nome di *forza elettromotrice*. Dipende dal percorso e dalla natura del campo \mathbf{E} , ma non dalla carica q_0 . Se il lavoro lungo un percorso chiuso C risulta essere nullo si ha la forza è di natura conservativa. Non dipende effettivamente dal percorso, ma solo dalla posizione di partenza e di arrivo.

Nel caso di un campo \mathbf{E} originato da una distribuzione di carica nello spazio, si ha che la forza esercitata su una carica sonda q_0 è quella di Coulomb ed è di natura conservativa, ovvero il suo integrale di linea su un circuito chiuso è nullo. Se forze di questo tipo il loro lavoro è dato dal teorema fondamentale del calcolo integrale in cui si considera la differenza delle primitive valutate ai due capi del percorso.

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = F(B) - F(A)$$

Nel caso della forza di Coulomb tale grandezza prende il nome di *differenza di potenziale elettrostatico*. Dato che la carica sonda compie lavoro contro il campo elettrico si adotta la convenzione di segno

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.12)$$

Si osserva che il potenziale è definito a meno di una costante additiva. Ovvero sceglio un punto fisso arbitrario come riferimento per la misura. Il valore complessivo esercitato dalla forza lungo il percorso sarà dato da

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B) = -q_0 \Delta V \quad (1.13)$$

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

L'energia potenziale associata al potenziale elettrostatico è data

$$W_{AB} = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B)$$

Unendo l'espressione precedente alla (1.13) possiamo concludere che

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V \Rightarrow U_e(A) = q_0 V_A$$

Una carica q_0 posta in un campo elettrostatico possiede un'energia potenziale proporzionale al potenziale (definita anch'essa a meno di una costante).

In un campo elettrostatico la forza elettromotrice è sempre uguale a zero e quindi è nullo il lavoro compiuto dalla forza elettrica per ogni spostamento che riporti la carica alla posizione iniziale

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow W = q_0 \mathcal{E} = 0$$

La grandezza di riferimento per misurare la differenza di potenziale è il *Volt* = $\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$.

Potenziale Elettrico di una distribuzione di carica Sferica

Consideriamo una distribuzione di carica sferica di raggio R e densità volumica ρ . Prendiamo come punto di riferimento per il calcolo del potenziale un punto $P_0 = +\infty$. Abbiamo che il campo elettrostatico della sfera è dato da

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mu}_r & r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{\mu}_r & r \leq R \end{cases}$$

dunque avremo che per i punti esterni alla sfera

$$V_{ext}(r) = - \int_{+\infty}^r \mathbf{E} \cdot ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > R$$

e per i punti interni si ha che

$$V_{int}(r) = V_{ext}(R) - \int_R^r dr \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$$

si che per $r = R$ allora $V_{int}(R) = V_{ext}(R)$.

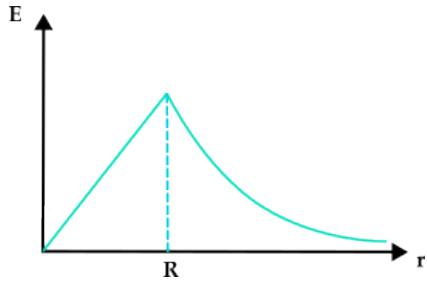


Figura 1.7: Intensità del campo elettrico

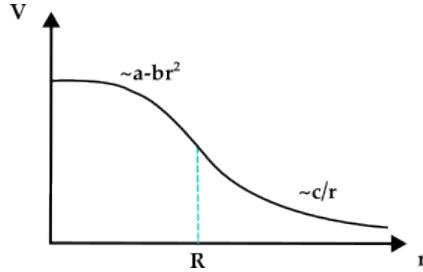


Figura 1.8: Potenziale Elettrostatico

Notare che quando si fissa un punto di riferimento come $P_0 = +\infty$ tutti i cammini partono tutti da questo punto e dunque termini precedentemente calcolati per distanze più brevi compaiono in quelle più lunghe, come nel caso della misurazione del potenziale all'interno della sfera.

1.8.2 Il Gradiente

Consideriamo un generico campo scalare (funzione scalare) $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Date le coordinate cartesiane x_i per $i = 1, \dots, n$, il gradiente di ϕ è dato da

$$\nabla \phi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right]$$

Differenziare un campo scalare ci porta ad avere un campo vettoriale. La possibilità di poter definire il gradiente di una funzione scalare ci permette di definire il differenziale di ϕ , ovvero

$$d\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i = \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}$$

che definisce la variazione di ϕ rispetto ad uno spostamento $d\mathbf{s} = [dx_1, \dots, dx_n]^T$. Tramite il gradiente di ϕ possiamo identificare la direzione e verso di massima crescita

$$df = ||\nabla \phi|| ||d\mathbf{s}|| \cos \theta$$

e dunque df è massimo quando $\nabla \phi$ è parallelo allo spostamento $d\mathbf{s}$.

Nella sezione precedente abbiamo definito il potenziale elettrostatico che è una funzione

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

scalare, se consideriamo una sua variazione infinitesima avremo che

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \iff dV = \nabla V \cdot ds$$

e quindi si ha che $\mathbf{E} = -\nabla V$, ovvero il campo elettrico è proporzionale e contrario al potenziale. Se moltiplichiamo tutto per una carica q_0 si ha che

$$\mathbf{F}_e = -\nabla U_e$$

che è il risultato che ci aspettiamo di ottenere per una forza di natura conservativa.

Si noti che fino a questo punto si è data una definizione del gradiente dipendente dalle coordinate cartesiane, ma esso può essere espresso rispetto ad altri sistemi di coordinate.

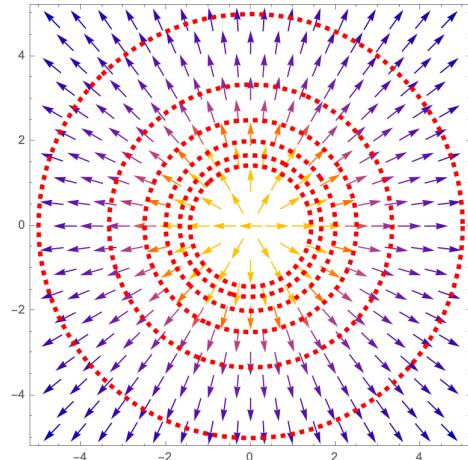
Una conseguenza importante per le forze conservative è che dato un potenziale $V(x,y,z)$, essendo una funzione scalare è possibile definirne le curve di livello, ed essendo $\mathbf{E} = -\nabla V$ si avrà che il campo elettrico in tutti i punti dello spazio in cui è definito è ortogonale a tali curve.

Esempio - Carica Puntiforme

Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane e prendendo $P_0 = +\infty$ come riferimento di misura si ha che il potenziale per una carica puntiforme posta nell'origine del sistema è dato da

$$V(x, y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

calcolando le sue curve di livello avremo in figura che il campo elettrico \mathbf{E} è ortogonale ad esse come in figura (circonferenze tratteggiate in rosso).



```

1 Mathematica Snippets
2
3 V[x_, y_, q_] := (1/Sqrt[x^2 + y^2])
4 E1x[q_, x_, y_, x0_, y0_] := ((x - x0)/((x - x0)^2 + (y - y0)^2)^(1.5))
5 E1y[q_, x_, y_, x0_, y0_] := ((y - y0)/((x - x0)^2 + (y - y0)^2)^(1.5))
6
7 Show[VectorPlot[{E1x[Q, x, y, 0, 0], E1y[Q, x, y, 0, 0]}, {x, -5,
8     5}, {y, -5, 5}],
9 ContourPlot[V[x, y, Q], {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
10 ContourStyle -> Directive[Red, Dashed, Thickness[0.01]],
11 ContourShading -> None]]

```

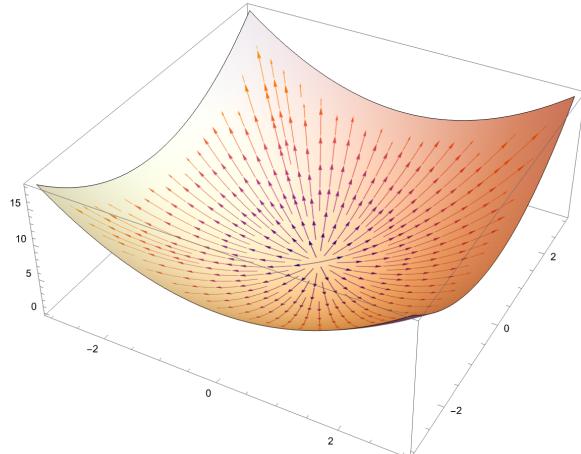
Esempio - Oscillatore Armonico

Consideriamo una particella sottoposta ad una forza elastica vincolata a muoversi in una sola direzione. Ipotizziamo che non sia presenti attriti, dunque l'energia del sistema sarà data dalla funzione

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

rispettivamente il gradiente sarà un vettore della forma

$$\nabla E = \begin{bmatrix} kx \\ my \end{bmatrix}$$



e sarà tangente alla superficie data da $E(x,y)$, come in figura.

```

1 Mathematica Snippets
2
3 Plot3D[(x^2 + y^2), {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
4 PlotStyle ->
5 Texture[StreamPlot[
6     Evaluate[D[(x^2 + y^2), {{x, y}}]], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
7     Frame -> None, ImageSize -> Large]], Mesh -> None,
8 ImageSize -> Large, PlotPoints -> 35]

```

1.8.3 Potenziale per una distribuzione di cariche

I risultati ottenuti nel paragrafo sul potenziale elettrostatico sono facilmente estendibili al caso in cui un campo elettrostatico è dato dalla distribuzione di più cariche puntiformi q_1, \dots, q_n , per farlo è sufficiente utilizzare il principio di sovrapposizione.

Se consideriamo una carica sonda q_0 il lavoro compiuto per spostare la carica all'interno dell'campo elettrostatico generato dalla distribuzione di cariche è dato da

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

dato che il campo complessivo è dato da $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$ dove \mathbf{E}_i è il campo generato dalle singole cariche, dunque il potenziale assume la forma

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \hat{\mu}_i \cdot d\mathbf{s}$$

e quindi la differenza di potenziale è data da

$$V(A) - V(B) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{A,i}^2} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{B,i}^2}$$

Posto $V(B) = 0$ per $B = \infty$ si ha che

$$V(r) = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \quad (1.14)$$

Tale risultato indica che il potenziale elettrostatico generato da un sistema di cariche puntiformi è uguale alla somma dei potenziali generati singolarmente dalle cariche. Possiamo estendere il risultato per distribuzioni di carica continue

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_C ds \frac{\lambda(r)}{|r - r'|} \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S d\Sigma \frac{\sigma(r)}{|r - r'|} \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V dV \frac{\rho(r)}{|r - r'|} \end{aligned} \quad (1.15)$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

Il potenziale elettrostatico risulta essere una funzione del punto, continua e derivabile, che può essere calcolabile una volta conosciuta la distribuzione delle cariche sorgente, indipendentemente dalla presenza di q_0 . Infatti ci si rivolge ad esso anche come campo scalare. A differenza del campo vettoriale ciò che è significativo non è il valore che un potenziale assume in un punto, ma la sua variazione rispetto ad un riferimento fissato.

1.8.4 Energia Potenziale Elettrostatica

L'energia potenziale $U(\mathbf{r})$ di una particella q_0 immersa nel campo elettrostatico \mathbf{E} , è data dal lavoro compiuto per spostarla da infinito ad un certo punto P dello spazio

$$U(\mathbf{r}) = -q_0 \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q_0 \int_{\infty}^P \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = q_0 \phi(\mathbf{r})$$

dove assumiamo che $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ per $\mathbf{r} \rightarrow \infty$.

Consideriamo una distribuzione di carica formata dal cariche q_i con posizioni r_i nello spazio. Il potenziale elettrostatico immagazzinato in questa configurazione coincide con il lavoro necessario ad assemblare la configurazione della distribuzione di carica discreta (questo è dovuto al fatto che se dovessimo rilasciare le cariche la loro energia cinetica sarebbe coincidente con il potenziale latente del sistema). Dunque quanto lavoro è necessario per assemblare la configurazione della distribuzione di carica ?

Fissiamo la prima carica nello spazio in \mathbf{r}_1 . Il lavoro $W_1 = 0$ dato che non è presente campo elettrostatico, poichè una carica non esercita forza su se stessa. Per spostare una seconda carica è necessario un lavoro di

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Notare che se le due cariche hanno lo stesso segno $q_1 q_2 > 0$ e dunque $W_2 > 0$, e dunque bisogna immettere lavoro nel sistema affinchè queste si avvicinino. Se $q_1 q_2 < 0$ allora $W_2 < 0$ e quindi le particelle si avvicinano per mutua attrazione.

Se ora avviciniamo una terza carica questa si dovrà spostare all'interno del campo elettrico

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

generato dalle cariche q_1 e q_2 e dunque il lavoro necessario è

$$W_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \right]$$

e così via aggiungendo altre particelle. Il lavoro complessivo per assemblare la distribuzione di carica è data dall'energia potenziale immagazzinata nel sistema.

$$U = \sum_{i=1}^N W_i = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (1.16)$$

Se vogliamo misurare il potenziale nel punto \mathbf{r}_i dovuto alle cariche q_j , $j \neq i$ si ha che

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

e dunque possiamo riscrivere l'energia potenziale come

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\mathbf{r}_i) \quad (1.17)$$

che rappresenta l'energia potenziale per una distribuzione discreta di cariche. Possiamo generalizzare tale risultato alle distribuzioni continue $\rho(\mathbf{r})$ definite una regione chiusa dello spazio. L'energia associata a una distribuzione continua è data da

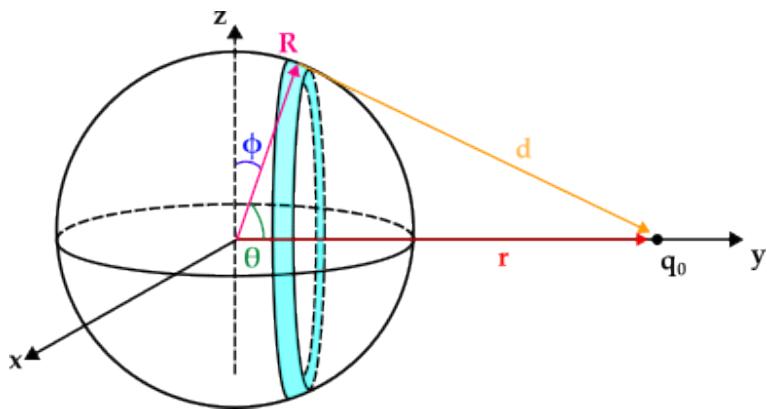
$$U = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (1.18)$$

Ritorneremo successivamente su questa equazione quando introdurremo l'operatore di divergenza per un campo vettoriale.

1.8.5 Esempi ed Esercizi

Potenziale di una distribuzione di carica superficiale a simmetria sferica

Data una densità di carica areica σ costante distribuita su una sfera di raggio R , vogliamo determinare il potenziale $\phi(r)$ ad una generica distanza r da essa.



Utilizzando il teorema di Carnot abbiamo che la distanza d data dalla diagonale in figura può essere espressa come

$$d = [R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta]^{1/2} = ||\mathbf{R} - \mathbf{r}||$$

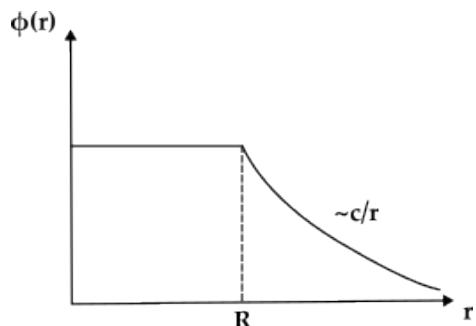
applicando l'espressione del potenziale per una distribuzione di carica continua si ha che

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A d\Sigma \frac{\sigma}{d} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{\sigma R^2 \sin\theta}{d} = \frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{d} = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr} \left[(R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr} \left[(R^2 + r^2 + 2rR)^{1/2} - (R^2 + r^2 - 2rR)^{1/2} \right] = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr} [(R+r) - |R-r|] \end{aligned}$$

Per $Q = 4\pi R^2 \sigma$ (Carica di un anello) il potenziale è dato da

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} & r < R \end{cases}$$

Il potenziale interno è costante e pari al potenziale della superficie.

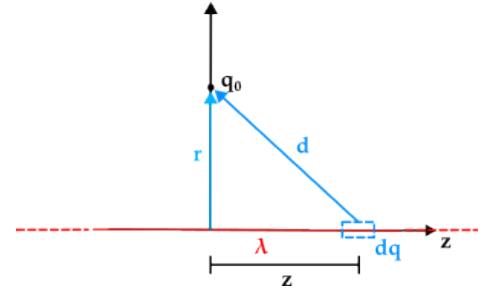


Potenziale per una distribuzione di carica lineica infinita

Calcoliamo il potenziale elettrostatico per un filo di estensione infinita e carica λ parallelo alla direzione \hat{z} . Utilizzando la definizione di potenziale per una distribuzione di carica infinita

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{[z^2 + r^2]^{1/2}}$$

nel calcolo si ha un problema in quanto



$$\phi(r) \simeq \int_r^{\infty} \frac{1}{r}$$

e dunque il potenziale è divergente ad infinito. Per evitare questo problema calcoliamo l'integrale su un intervallo chiuso $[-L, L]$, con $L \gg r$.

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L dz \frac{\lambda}{[r^2 + z^2]^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(1 + r^2/L^2)^{1/2} + 1}{(1 + r^2/L^2)^{1/2} - 1} \right]$$

dato che $L \gg r$ possiamo sviluppare con Taylor rispetto a $\frac{r^2}{L^2}$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{4L^2 + r^2}{r^2} \right] \simeq \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{2L}{r} \right]^2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{2L}{r} \right] = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(\frac{1}{r} \right) + \ln(2L) \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \text{cost} \end{aligned}$$

in questo modo riusciamo a mettere a zero il potenziale per $r \rightarrow \infty$. Utilizzando la relazione tra campo elettrostatico e gradiente del potenziale abbiamo che

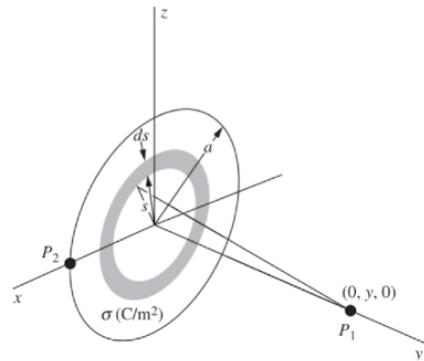
$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mu}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{\mu}_r$$

ottenendo il campo per una distribuzione di carica lineare e con estensione infinita.

Potenziale per una distribuzione di carica sulla superficie di un disco

Data una distribuzione di carica superficiale σ per un disco di raggio R , vogliamo determinare il potenziale elettrostatico in funzione della posizione. Avremo che presa una distribuzione di carica infinitesima circolare con $dQ = 2\sigma\pi r dr$, l'espressione per una distribuzione di carica continua del potenziale è data da

$$\begin{aligned}\phi(0, y, 0) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi\sigma r dr}{[r^2 + y^2]^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon} \int_0^R dr \frac{r}{[r^2 + y^2]^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \left[\sqrt{r^2 + y^2} \right]_0^R = \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + y^2} - |y| \right]\end{aligned}$$



Dato che è presente un modulo all'interno dell'espressione del potenziale si ha che, questo assume valori diversi lungo y per $y > 0$ o $y < 0$.

$$\phi(y) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + y^2} - y \right] & y > 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + y^2} + y \right] & y < 0 \end{cases}$$

Il potenziale è continuo in $y = 0$ a differenza del campo elettrostatico che presenta un punto di discontinuità a cuspide.

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dy} \Big|_{y=0} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & y > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & y < 0 \end{cases}$$

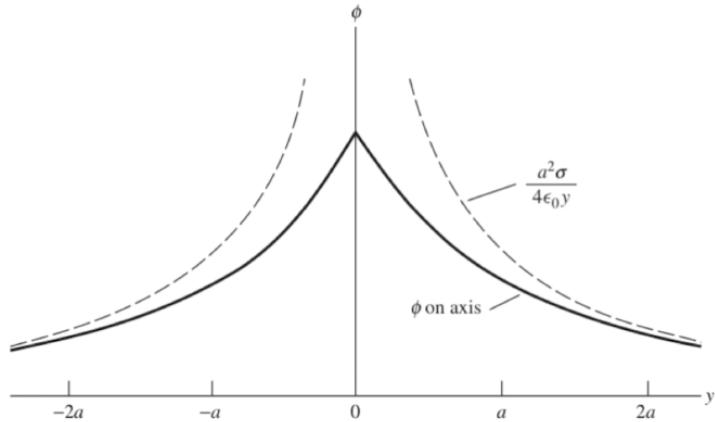
Osservazione.

- Per $y \rightarrow 0^\pm$ si ha che il potenziale del disco coincide con quello di un piano infinito.

- Nel limite in cui $y \gg R$, il comportamento del potenziale è uguale a quello di una carica puntiforme.

$$\phi(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} y \left[\left(1 + \frac{R^2}{y^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \underset{\text{Taylor}}{\simeq} \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{1}{y}$$

e dunque il campo scalare ha una discontinuità in $y = 0$.



1.9 Divergenza di un Campo Vettoriale

La divergenza di un campo vettoriale ci permette di esprimere la legge di Gauss in forma differenziale, legando le proprietà locali del campo elettrostatico alla distribuzione di carica. In sostanza consideriamo la variazione infinitesima del campo elettrostatico in un intorno di un punto dello spazio.

Presi una regione di spazio V chiusa e al cui interno è contenuta della carica, abbiamo visto che questa fluisce attraverso la superficie data dal bordo $S = \partial V$ di S . Il flusso è dato dall'equazione

$$\phi(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

Se immaginiamo di affettare la regione di spazio, otteniamo diverse sezioni V_i attraverso cui parte del flusso passa attraverso, di conseguenza possiamo riscrivere il flusso totale come

$$\phi(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i$$

ovvero la somma dei contributi delle singole regioni attraverso cui il campo passa attraverso. Per $N \rightarrow \infty$, ovvero aumentando i sezionamenti si ha che i rispettivi volumi $V \rightarrow 0$ e dunque ogni singolo contributo descrive un flusso locale.

Il problema con questa definizione è che $\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i$ dipende dalla scelta del volume V_i e dunque dalla scelta della superficie S_i e dunque non si ha una buona misura del campo locale.

Per esempio se prendiamo un volume V_i se lo raddoppiamo o lo dimezziamo il risultato della misura del flusso aumenta e diminuisce (per \mathbf{F} costante) e questo non ci permette di avere una buona stima di come sia cambiato il campo nelle regioni. Se \mathbf{F} non è costante il problema è che riducendo il volume a 0 anche il flusso diventa nullo.

Per dare una buona definizione locale di flusso consideriamo il suo valore medio rispetto al volume V_i

$$\langle \phi(\mathbf{F}) \rangle = \frac{1}{V} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i$$

Tale equazione ci permette di definire la divergenza del campo \mathbf{F} nel seguente modo

$$\text{div}\mathbf{F} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i \quad (1.19)$$

La divergenza di un vettore è una grandezza scalare che misura il flusso (locale) uscente da una superficie normalizzata al volume da essa racchiuso. Tale definizione ci rende la misura della divergenza del campo indipendente dalla geometria dei volumi.

Uno dei risultati più importanti della teoria dei campi vettoriali è *il teorema di divergenza*

di Gauss, la cui espressione possiamo ottenere, considerando

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ V_i \rightarrow 0}} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i \right] = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV \quad (1.20)$$

Osservazione.

- Il teorema di Gauss è una proprietà matematica che vale per qualsiasi campo vettoriale.
- Il vettore \mathbf{E} soddisfa una legge fisica (la legge di Gauss) che collega il flusso alla distribuzione di carica.

Se consideriamo il campo elettrostatico \mathbf{E} generato da una distribuzione di carica continua ρ per la legge di Gauss abbiamo che

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

per il flusso del campo possiamo applicare il teorema di divergenza di Gauss, in questo modo abbiamo che

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Dato che tale uguaglianza è soddisfatta per ogni volume e superficie, l'uguaglianza deve essere soddisfatta anche dai termini integrandi, definendo in questo modo *la forma differenziale della legge di Gauss*.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.21)$$

Il ragionamento logico con cui si è ottenuta la divergenza di un campo fa sì che la definizione (1.20) non dipenda da un sistema di coordinate e quindi vale per tutti. Da un punto di vista applicativo però risulta essere poco utile e quindi abbiamo bisogno di darne una seconda definizione più funzionale.

1.9.1 Espressione della Divergenza in coordinate cartesiane

Prendiamo un punto \mathbf{x}_0 dello spazio e consideriamolo come centro di un volume infinitesimo $dV = dx dy dz$, data la presenza di un campo vettoriale \mathbf{F} vogliamo determinare la divergenza

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

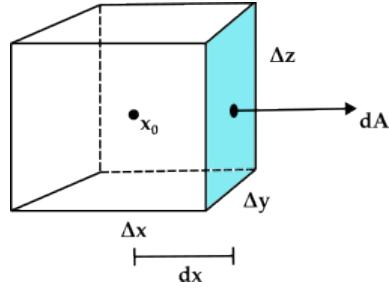
localmente in coordinate cartesiane. Partendo dalla definizione di divergenza ed esplicitando il prodotto scalare dell'integrandi si avrà che

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \left[\int_S F_x dy dz + \int_S F_y dx dz + \int_S F_z dx dy \right]$$

utilizzando il teorema della media integrale per una delle facciate del cubo si ha per esempio che

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}(dy dz) \simeq F_x(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) \Delta y \Delta z$$

in cui consideriamo la componente 'x' del campo valutata in un generico punto.



Possiamo reiterare lo stesso ragionamento per la faccia opposta, cambiando segno

$$-\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}(dy dz) \simeq -F_x(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z) \Delta y \Delta z$$

se vogliamo ottenere il contributo complessivo dato dall'addendo $\int_S F_x dy dz$ dobbiamo considerare la superficie $S = S_1 + S_2$ e quindi si ha che

$$\int_S F_x dy dz \simeq F_x(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) \Delta y \Delta z - F_x(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z) \Delta y \Delta z$$

normalizzando rispetto al volume otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{V} \int_S F_x dy dz \simeq \frac{F_x(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) - F_x(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z)}{\Delta x}$$

e prendendo il limite per $V \rightarrow 0$ possiamo concludere che

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S F_x dy dz \simeq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S F_x dy dz \simeq \frac{F_x(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) - F_x(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial F_x}{\partial x}$$

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

Ripetendo i medesimi ragionamenti per gli addendi possiamo concludere che

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.22)$$

esprimendo la divergenza rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane.

Possiamo esprimere la divergenza utilizzando l'operatore gradiente

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

che rappresenta sia un operatore che un vettore. Lo definiamo operatore perchè agisce sugli spazi di funzione. Se facciamo agire l'operatore sul campo vettore \mathbf{F} definito da una mappa

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

definiamo l'azione di ∇ su \mathbf{F} come il loro prodotto vettoriale

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (1.23)$$

in questo manteniamo la proprietà in cui la divergenza di un campo vettoriale deve restituire un campo scalare.

Da un punto di vista fisico il segno della divergenza ci dice che se $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$ localmente si ha un flusso netto uscente dal volume infinitesimo, viceversa per $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$ il flusso netto è localmente entrante nel volume.

La forma della divergenza espressa rispetto all'operatore gradiente, ci permette di riscrivere la forma differenziale della legge di Gauss come

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(1.24)

questa espressione definisce una delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo e prende il nome di *prima equazione di Maxwell per l'elettrostatica*.

1.9.2 Proprietà dell' operatore gradiente

L'operatore gradiente è un operatore differenziale lineare, ovvero valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha\phi + \psi) &= \alpha\nabla\phi + \nabla\psi \\ \nabla \cdot (\alpha\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \alpha\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}\end{aligned}\tag{1.25}$$

per ogni campo scalare ϕ e ψ , campo vettoriale \mathbf{F} e \mathbf{G} e costante α .

Inoltre vale la proprietà di Leibniz, che è una generalizzazione della regola del prodotto, ovvero

$$\begin{aligned}\nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \\ \nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) &= (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})\end{aligned}\tag{1.26}$$

per ϕ, ψ campi scalari e \mathbf{F} campo vettoriale.

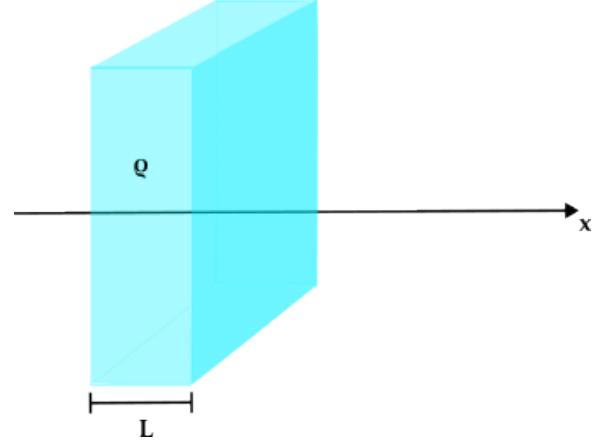
1.9.3 Esempi ed Esercizi

Campo elettrostatico di una lastra infinita

Calcoliamo il campo elettrostatico per una lastra di superficie infinita e spesso L , data una densità di carica di volume ρ uniforme.

Come fatto per gli esercizi precedenti per ragioni di simmetria sappiamo che il campo $E_z = E_y = 0$.

Questa volta però utilizziamo la forma differenziale dell'equazione di Gauss per calcolare il campo.



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

risolvendo l'equazione differenziale per quadrature si ha che

$$E_x(x) = \frac{\rho}{\epsilon_0}x + A$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

dove il termine A è la costante d'integrazione per un integrale indefinito.

Osservazione. Si noti che se consideriamo $\mathbf{E}(x) = \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + A\right)\hat{\mu}_x$ e se applichiamo l'operatore gradiente al campo si ha che

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}x\hat{\mu}_x \right) + \nabla \cdot (A\hat{\mu}_x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dunque il termine $\nabla \cdot (A\hat{\mu}_x) = 0$. In genere un campo vettoriale \mathbf{F} è caratterizzato dalla divergenza a meno di un vettore a divergenza nulla. Che possiamo parafrasare pensato al fatto che esista una parte del campo che non contribuisce al flusso netto attraverso una superficie.

Ritornando alla risoluzione del problema, abbiamo bisogno di definire delle condizioni al contorno che ci determinino il valore della costante A, per farlo osserviamo che se poniamo una carica esploratrice q_0 in $\mathbf{x} = 0$ (che coincide con il centro della lastra) avremo che la forza esercitata sulla carica è nulla per simmetria e dunque anche $\mathbf{E} = 0$. Risolvendo

$$0 = E_x(x = 0) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot 0 + A \Rightarrow A = 0$$

In generale $A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, ovvero è dato da una distribuzione superficiale di carica. Esternamente alla distribuzione di carica si ha che $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e quindi $E_x = C$ è costante in tutte le regioni $|x| > \frac{L}{2}$. Per determinare il valore di C osserviamo che per $x = \pm \frac{L}{2}$ si ha che $E_x = \pm \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} = C$ dato che il campo è una funzione continua. In conclusione troviamo che

$$E_x(x) = \begin{cases} \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} & x > \frac{L}{2} \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}x & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} & x < -\frac{L}{2} \end{cases}$$

1.10 Rotore di un campo vettoriale

Analogamente a quanto fatto per la divergenza, costruiamo una grandezza locale legata ad un campo vettoriale \mathbf{F} che traduca in termini locali la legge della circuitazione di \mathbf{F} .

Presa una regione di spazio definita da un volume V chiuso, consideriamo la sua superficie $S = \partial V$ che viene attraversata da un campo vettoriale \mathbf{F} e ipotizziamo di definire su S un

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

cammino chiuso C su cui vogliamo calcolare l'integrale di linea

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma_C$$

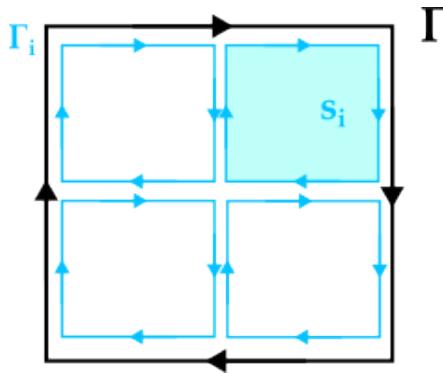
Se spezziamo il cammino in due sotto cammini C_1 e C_2 possiamo riscrivere l'integrale precedente come

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

reiterando il procedimento di suddivisione si ha che

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

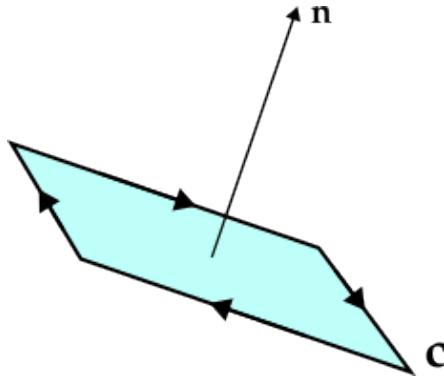
una condizione necessaria è che i contributi sulle linee esterne, siano percorsi in versi opposti in modo da elidersi.



La definizione $\oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ha dei problemi nella sua definizione di circuitazione, in quanto l'integrale di linea aumenta all'aumentare della dimensione del circuito nel caso in cui \mathbf{F} sia costante. Inoltre facendo tendere a zero la superficie S_i racchiusa dal cammino, nel limite puntiforme l'integrale si annulla. Per correggere questa dipendenza dalla geometria del cammino, normalizziamo il circuito rispetto alla superficie S_i che racchiude.

$$\frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

in questo modo si ottiene una buona definizione locale dell'integrale di linea. Tuttavia anche se si perde la dipendenza geometrica rimane la dipendenza dal senso di percorrenza del cammino. Dato che l'equazione non dipende da una cammino C_i che racchiude una superficie S_i in particolare il segno dell'equazione dipende da come si è scelto di suddividere il percorso, mano a mano che si rendono infinitesime le superfici, di conseguenza il passaggio al limite rifletterà questa proprietà. Per poter tener conto dell'informazione direzionale introduciamo il vettore $\hat{\mathbf{n}}$ ortogonale alla superficie infinitesima.



In questo modo definiamo rotore di un campo vettoriale \mathbf{F} la grandezza.

$$\text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.27)$$

Possiamo domandarci come l'informazione locale che ci viene data dal rotore di un campo si leghi all'integrale di linea del circuito di partenza C da cui siamo partiti. Per rispondere a questa domanda sommiamo tutti i contributi dati che concorrono a formare $C = \sum_i C_i$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right] S_i = \int_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \phi(\text{rot} \mathbf{F})$$

il risultato

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (1.28)$$

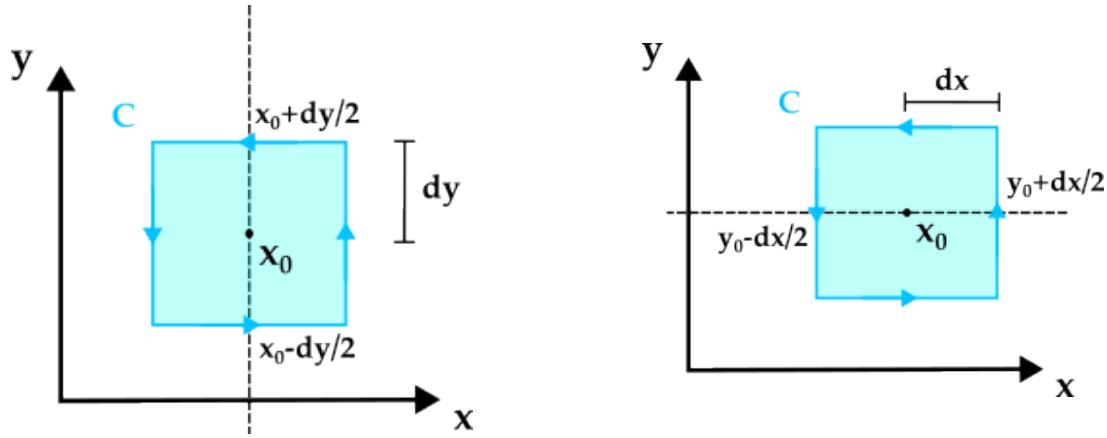
prende il nome di *teorema di Stokes*. Questo teorema ci dice che la circuitazione di un campo \mathbf{F} è uguale al flusso del rotore di \mathbf{F} attraverso una qualunque superficie aperta il cui bordo è definito dal circuito.

1.10.1 Espressione del rotore in coordinate cartesiane

L'espressione del rotore (1.27) risulta essere poco utile nell'applicazione non dipendendo esplicitamente da un sistema di coordinate. In questo paragrafo esprimiamo il rotore in funzione delle coordinate cartesiane, per farlo prendiamo un punto \mathbf{x}_0 come centro del circuito della faccia giacente nel piano (x,y) di un cubo di volume dV infinitesimo. Possiamo riscrivere l'espressione (1.27) esplicitandone l'integrando di destra

$$\text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \left[\oint_C (F_y dy + F_z dz) + \oint_C (F_x dx + F_z dz) + \oint_C (F_x dz + F_y dy) \right]$$

Prendiamo in esame l'ultimo addendo dell'espressione, questo esprime l'integrale di linea di un cammino C giacente nel piano (x,y) .



Utilizzando il teorema della media integrale possiamo esprimere come

$$\int_{C_1} F_x dx \simeq F_x(x, y_0 - \frac{dy}{2}, z) \Delta x$$

per il cammino C_1 inferiore parallelo ad x , mentre per il cammino C_2 superiore e parallelo ad x si ha

$$-\int_{C_2} F_x dx \simeq F_x(x, y_0 + \frac{dy}{2}, z) \Delta x$$

di conseguenza possiamo riscrivere

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_1 + C_2} F_x dx \simeq -\frac{F_x(x, y_0 + \frac{dy}{2}, z) - F_x(x, y_0 - \frac{dy}{2}, z)}{\Delta y}$$

facendo il limite per $S \rightarrow 0$ si ha che

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_1 + C_2} F_x dx \simeq \lim_{\Delta y \rightarrow 0} -\frac{F_x(x, y_0 + \frac{dy}{2}, z) - F_x(x, y_0 - \frac{dy}{2}, z)}{\Delta y} = -\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Ripetendo lo stesso procedimento per la componente y del campo vettoriale si ha che

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_3 + C_4} F_y dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_y(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) - F_y(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

dunque possiamo concludere che la componente del rotore lungo \hat{z} è dunque ortogonale al circuito è data da

$$(\text{rot } \mathbf{F})_z = \oint_C (F_x dx + F_y dy) = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (1.29)$$

Ripetendo gli stessi procedimenti per le altre direzione del vettore rotore possiamo concludere che

$$\text{rot} \mathbf{F} = \left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \hat{\mu}_x + \left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \hat{\mu}_y + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \hat{\mu}_z$$

A differenza dell'operazione di gradiente e di divergenza che possono essere definiti su tutto \mathbb{R}^N , l'operazione di rotore è definita solo per spazi vettoriale in \mathbb{R}^3 . Possiamo definire l'operazione di rotore utilizzando l'operatore nabla come fatto per la divergenza. In questo avremo che il rotore di un campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è esprimibile come

$$\text{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

che definisce ancora un campo vettoriale. Inoltre il rotore può anche essere espresso come determinante

$$\nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$

Riassumendo abbiamo che la divergenza di un campo vettoriale $\nabla \cdot \mathbf{F}$ misura il flusso netto del campo attraverso una superficie, mentre il rotore $\nabla \times \mathbf{F}$ misura la sua rotazione. L'operazione di rotore è di fondamentale importanza per determinare se un campo vettoriale può essere un campo elettrostatico.

1.10.2 Proprietà del rotore

Il rotore è un operatore differenziale lineare e dunque soddisfa la condizione

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{F} + \mathbf{G}) = \alpha \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$$

per ogni campo vettoriale \mathbf{F} e \mathbf{G} e costante α . Inoltre gode della proprietà di Leibniz

$$\begin{aligned} \nabla \times (\phi \mathbf{F}) &= (\nabla \phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \end{aligned}$$

dove l'ordine in cui si posizione l'operatore ∇ è fondamentale affinchè le uguaglianze siano verificate.

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

Una proprietà importante è data dal fatto che se ipotizziamo di avere un campo vettoriale \mathbf{F} conservativo che possiamo esprimere come il gradiente di un campo scalare ϕ e ne calcoliamo il rotore, avremo che

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

a patto che ϕ soddisfi l'identità di Schwartz, ovvero che sia una funzione le cui derivate parziali miste sono funzioni continue.

1.10.3 Campi conservativi e irrotazionalità

Sappiamo che un campo vettoriale \mathbf{F} conservativo può essere espresso come

$$\mathbf{F} = \nabla \phi$$

per un campo scalare ϕ . Inoltre un campo vettoriale si dice *irrotazionale* se $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Per un campo che possiede queste proprietà possiamo definire il seguente teorema.

Teorema 1.10.1. Per un campo definito ovunque in \mathbb{R}^3 , essere conservativo è equivalente ad essere irrotazionale.

$$\nabla \times \mathbf{F} \iff \mathbf{F} = \nabla \phi$$

questo risultato è importante in quanto se lo leghiamo al teorema di Stokes dove

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

ci permette di concludere che

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

In conclusione nel caso dell'elettrostatica possiamo concludere che un campo vettoriale è un campo elettrostatico se e solo se soddisfa il teorema (1.10.1).

1.11 Equazioni dell'elettrostatica

1.11.1 Operatore Laplaciano

Il Laplaciano è un operatore differenziale del secondo ordine definito da

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Per esempio su uno spazio vettoriale \mathbb{R}^3 il Laplaciano in coordinate cartesiane ha forma

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'operatore Laplaciano è un operatore differenziale scalare, ovvero agisce su campi scalari ϕ e restituisce un altro campo scalare $\nabla^2\phi$. Similmente, se agisce componente per componente su un campo vettoriale \mathbf{F} , restituisce un campo vettoriale $\nabla^2\mathbf{F}$. Se utilizziamo la formula del triplo prodotto scalare si ha

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

da cui possiamo ottenere un'espressione alternativa del Laplaciano

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$$

1.11.2 Equazione di Poisson

Consideriamo il campo elettrostatico \mathbf{E} abbiamo visto che localmente la legge di Gauss, per una distribuzione di carica ρ , può essere espressa rispetto all'operatore gradiente,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Legge di Gauss in forma differenziale})$$

essendo il campo \mathbf{E} conservativo può essere rappresentato come gradiente del potenziale $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, per quanto introdotto con l'operatore Laplaciano, l'espressione della prima equazione di Maxwell assume l'espressione

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.30}$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

tale equazione di secondo grado alle derivate parziali, prende il nome di *equazione di Poisson*. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 possiamo esplicitarla come

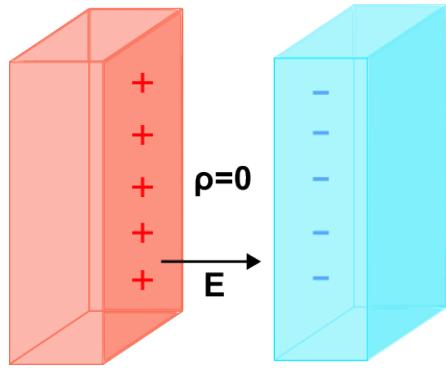
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.31)$$

La soluzione di questa equazione differenziale è a noi già nota, dato che per una distribuzione volumica ρ , il potenziale è dato dall'equivalenza

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Dal punto di vista fisico è chiaro che trovare il potenziale elettrostatico tramite la soluzione analitica dell'equazione di Poisson è equivalente a calcolare il potenziale per integrazione diretta partendo dal campo \mathbf{E} . In entrambi i gli approcci le espressioni sono state ricavate come conseguenza diretta della legge di Coulomb e del principio di sovrapposizione.

1.11.3 Equazione di Laplace



Consideriamo un sottocaso dell'equazione di Poisson valide nelle regioni in cui non è presente una distribuzione di carica $\rho = 0$. L'equazione di Poisson (1.30) assume la forma

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.32)$$

che prende il nome di *equazione di Laplace*. Questa equazione ha soluzione banale per $\phi = 0$, ma soluzioni non banali se si devono soddisfare delle condizioni al contorno; come per esempio in figura.

Il problema generale dell'elettrostatica consiste proprio nel trovare il potenziale elettrico a partire da una distribuzione ρ , e la sua risoluzione può essere molte volte ricondotto al cercare una soluzione per l'equazione di Laplace.

1.12 Coordinate curvilinee ortogonali

Fino a questo punto si sono utilizzate le coordinate cartesiane per descrivere gli operatori gradienti, rotazione e divergenza, in questa sezione definiamo degli strumenti matematici che ci permettono di generalizzare questi oggetti per diversi sistemi di coordinate.

In generale, possiamo descrivere un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ usando le coordinate u, v, w in modo tale che $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, w)$. Se immaginiamo una variazione infinitesima questa viene descritta dal differenziale del punto

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} dw$$

dove ciascuna componente definisce un vettore per le linee di superficie fissate le altre due variabili. Le coordinate (u, v, w) vengono definite *ortogonalì e curvilinee* se i vettori tangenti rispettivi sono ortogonali tra loro.

Per delle coordinate curvilinee possiamo sempre definire vettori ortonormali tangentì alle rispettive linee di superficie normalizzandoli.

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = h_u \mathbf{e}_u \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = h_v \mathbf{e}_v \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = h_w \mathbf{e}_w$$

dove si sono introdotti i fattori di scala $h_u, h_v, h_w > 0$ e i versori $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$ e \mathbf{e}_w formano un base ortonormale per cui $\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_w$. Possiamo riscrivere il differenziale tenendo conto dei fattori di scala, e dunque

$$d\mathbf{x} = h_u \mathbf{e}_u du + h_v \mathbf{e}_v dv + h_w \mathbf{e}_w dw \tag{1.33}$$

Coordinate cartesiane

Per le coordinate cartesiane un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ è descritto rispetto alle coordinate ortonormali (x, y, z) . Se prendiamo il differenziale del punto avremo che l'equazione (1.33) diventa

$$d\mathbf{x} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z$$

e dunque i fattori di scala sono pari a $h_x = h_y = h_z = 1$.

Coordinate Cilindriche

Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ nello spazio è descritto dalle coordinate cilindriche rispetto alle variabili $(R \cos \theta, R \sin \theta, z)$ dove $R > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. L'inversa della trasformazione di coordinate è data da

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

applicando la matrice Jacobiana associata agli elementi della base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ determinano la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ rispetto al nuovo sistema di coordinate cilindriche

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= \hat{\mathbf{R}} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\theta &= \hat{\boldsymbol{\theta}} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_z &= \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

dove

$$h_R = h_z = 1 \quad \text{e} \quad h_\theta = R$$

Coordinate Polari

Per un punto nello spazio definiamo le coordinate sferiche come

$$\mathbf{x} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

con $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. L'inversa è data da

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad , \quad \tan \phi = \frac{y}{x}$$

Ripetendo quanto fatto per le coordinate cilindriche, la base rispetto alle coordinate sferiche è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \mathbf{e}_\theta &= \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

I fattori di scala sono invece dati da

$$h_r = 1 \quad , \quad h_\theta = r \quad , \quad h_\phi = r \sin \theta$$

Ora che abbiamo definito come cambiano i fattori di scala per diversi sistemi di coordinate, determiniamo la rappresentazione degli operatori visti nelle sezioni precedenti.

1.12.1 Gradiente

L'operatore gradiente è uno dei più semplici da determinare in quanto il differenziale si lega al gradiente di un campo scalare mediante nel seguente modo

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x}$$

Per un sistema di coordinate generico questa espressione assume la forma esplicita

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw = \nabla f \cdot (h_u \mathbf{e}_u du + h_v \mathbf{e}_v dv + h_w \mathbf{e}_w dw)$$

Usando l'ortonormalità degli elementi della base vettoriale, e comparando i termini di destra con quelli di sinistra possiamo riscrivere il gradiente come

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}_w \quad (1.34)$$

Utilizzando i fattori di scala determinati precedentemente abbiamo che il gradiente in coordinate cilindriche per una funzione $f(r, \theta, z)$ è

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

In coordinate polari, il gradiente di una funzione $f(r, \theta, \phi)$ è

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

1.12.2 Rotore e Divergenza

Per costruire gli operatori differenziali di divergenza e rotazione rispetto a delle coordinate generalizzate, definiamo prima l'operatore nabla per delle coordinate generiche

$$\nabla = \frac{1}{h_u} \mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{h_v} \mathbf{e}_v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{h_w} \mathbf{e}_w \frac{\partial}{\partial w} \quad (1.35)$$

Dato un campo vettoriale $\mathbf{F}(u, v, w)$ definito rispetto a delle generiche coordinate ortogonali e curvilinee, la divergenza è data da

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right) \quad (1.36)$$

e la rotazione è data dal determinante

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix} \quad (1.37)$$

In coordinate cilindriche abbiamo che divergenza e rotore assumono l'espressione

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

mentre per le coordinate sferiche

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

I risultati (1.35) e (1.36) sono dovuti al fatto che il campo vettoriale deve essere espresso rispetto alla base generalizzata e dunque deve tenere conto dei fattori di scala.

1.12.3 Laplaciano

Utilizzando l'espressione (1.34) e (1.36), possiamo esprimere il Laplaciano di un campo scalare per un generico sistema di coordinate come

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right] \quad (1.38)$$

In coordinate cilindriche avremo

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

mentre in coordinate polari assume la forma

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

1.12.4 Esempi ed Esercizi

Distribuzioni di carica a simmetria cilindrica

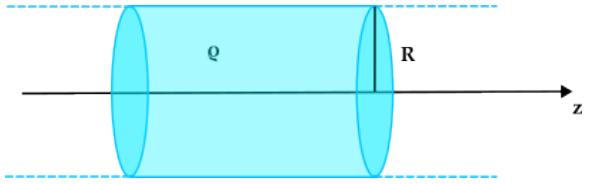
Consideriamo una distribuzione di carica ρ per un cilindro di raggio R e lunghezza infinita. Vogliamo calcolarne il campo utilizzando la prima legge di Maxwell.

Per ragioni di simmetria si ha che il campo ha direzione radiale $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mu}_r$ e dunque la forma differenziale della legge di Gauss assume la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

risolvendo per quadrature si ha che

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \hat{\mu}_r + \frac{B}{r} \hat{\mu}_r$$



Per determinare il valore della costante d'integrazione B , possiamo osservare che se misuriamo la forza su una carica q_0 nel centro della distribuzione per $r = 0$ si ha che per ragioni

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

di simmetria la forza esercitata è $\mathbf{F} = 0$. Dunque $B = 0$.

Dato che all'esterno della distribuzione non è presente carica, si ha che

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$$

e dunque

$$\mathbf{E}_{ext} = \frac{B}{r}$$

utilizzando le condizioni al contorno per la regione cilindrica si ha che

$$\mathbf{E}_{ext}(r = R) = \mathbf{E}_{int}(r = R) \iff \frac{\rho R}{2\epsilon_0} = \frac{B}{R}$$

e quindi possiamo concludere che

$$B = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Il campo complessivamente è dato da

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & r \leq R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases}$$

possiamo osservare che il campo esternamente alla distribuzione di carica è equivalente a

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{r}$$

che è quello di un filo infinito con densità di carica lineare λ .

Equazione di Poisson per una carica puntiforme

Consideriamo una densità di carica come una distribuzione

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} > 0 \\ \neq 0 & \mathbf{r} = 0 \end{cases}$$

dove vale la relazione $\int_V \rho dV = q$, per ogni volume che contiene l'origine in cui è posta la carica puntiforme q . Verifichiamo l'equazione di Poisson in due modi:

1. In modo esplicito risolvendo l'equazione differenziale $\nabla^2\phi = 0$ per $\mathbf{r} > 0$

2. In forma integrale per $\mathbf{r} \rightarrow 0$ usando il teorema della divergenza

$$\int_V \nabla^2 \phi dV = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta(\mathbf{r}) dV = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

1) Siccome il problema è a simmetria sferica, consideriamo il Laplaciano in coordinate sferiche e dunque otteniamo l'equazione differenziale

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = 0$$

2)

$$\int_V \nabla^2 \phi dV = \int_V \nabla \cdot (\nabla \phi) dV = \int_S \nabla \phi \cdot d\mathbf{A}$$

dato che $\nabla^2 \phi = 0$ per $\mathbf{r} \neq 0$, l'unico punto per cui l'integrale è non nullo è $\mathbf{r} = 0$. Presa una superficie qualsiasi che racchiude la carica nell'origine abbiamo che

$$\int_S \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \hat{\mu}_r \cdot d\mathbf{A} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} (4\pi r^2) = -\frac{q}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta(\mathbf{r}) dV$$

e dunque possiamo concludere che

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dato che abbiamo dimostrato che $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ è la soluzione dell'equazione di Poisson per una carica puntiforme e l'equazione di Poisson è lineare, possiamo concludere che la soluzione generale segue dal principio di sovrapposizione.

1.13 Conduttori e Isolanti

Un conduttore è una regione di spazio che contiene cariche che sono libere di muoversi. Per esempio i metalli sono tendenzialmente dei buoni conduttori. Come interagiscono questi materiali in presenza di cariche statiche ? a riguardo possiamo trarre le seguenti conclusioni

- All'interno di un conduttore il campo elettrostatico $\mathbf{E} = 0$ è nullo
- Dato che $\mathbf{E} = 0$ all'interno di un conduttore, il potenziale elettrostatico ϕ deve essere costante attraverso di esso.

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

- Siccome $\mathbf{E} = 0$ e vale la prima legge di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, si deve vere che $\rho = 0$. Di conseguenza all'interno del conduttore non può essere presente nessuna carica.
- I conduttori possono avere carica neutra, ovvero possiedono carica positiva e negativa che si bilanciano tra loro. Se un conduttore non è neutro, e quindi ha un eccesso di carica in uno dei due segni, questa è distribuita sulla sua superficie.
- Poichè ϕ è costante internamente al conduttore si ha che la superficie che lo racchiude è equipotenziale e dunque il campo elettrostatico $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ è perpendicolare ad essa.
- Se è presente della carica di superficie σ in qualsiasi parte del conduttore, la discussione della discontinuità del campo insieme al fatto che $\mathbf{E} = 0$ all'interno, ci dice che il campo elettrico all'esterno del conduttore è

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

I problemi che interessano i conduttori hanno una natura diversa da quelli affrontati fin'ora. Il motivo è che non conosciamo la distribuzione di carica del conduttore in partenza, dunque non possiamo utilizzare gli strumenti precedentemente definiti. Quello che osserviamo sperimentalmente è frutto di un interazione con una sorgente di campo \mathbf{E} esterna che fa sì che le cariche interne al conduttore si riorganizzino in modo tale che il campo elettrico interno si annulli con quello esterno

$$\mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}^*_{int} = 0$$

In generale questo vuol dire che anche conduttori neutri finiscono con una distribuzione di carica di superficie, negativa in alcuni punti e positiva in altri, in modo tale che il campo totale interno sia $\mathbf{E} = 0$.

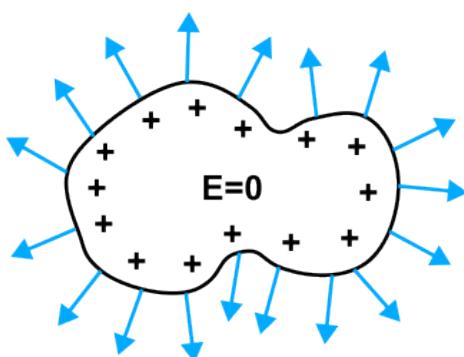


Figura 1.9: Conduttore carico isolante

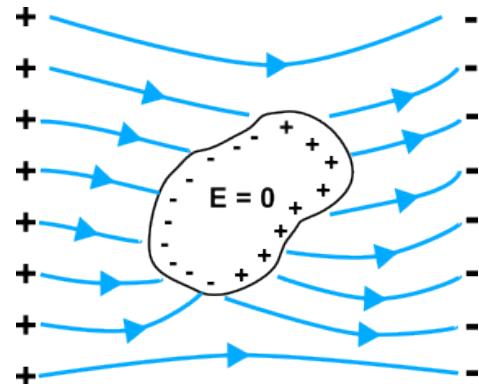


Figura 1.10: Conduttore neutro

Esistono anche dei materiali che prendono il nome di *isolanti*, questi si elettrizzano facilmente e mantengono indefinitamente il proprio stato di carica. La distinzione tra conduttore ed isolante dipende dal contesto, ovvero dalla scala di tempo del fenomeno rispetto alla scala di tempo del movimento delle cariche. I fattori di risposta dipendono tipicamente dalla temperatura.

Energia potenziale di una sfera carica di raggio R

Per una sfera piena si ha che l'energia potenziale configurazionale è data da

$$U_c = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

mentre per una sfera piena

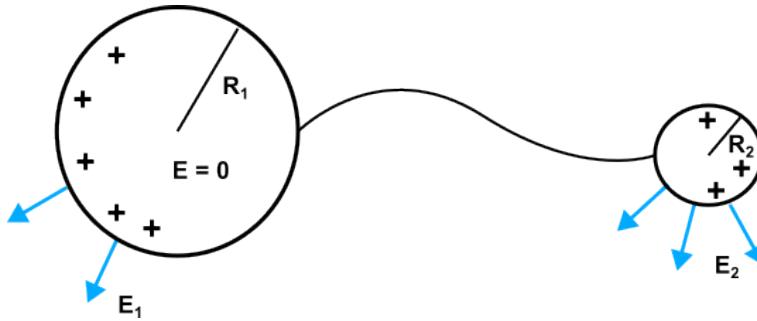
$$U_p = \frac{6}{5} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Dunque in un conduttore a simmetria sferica, la ridistribuzione delle cariche in eccesso sulla superficie esterna è una configurazione energeticamente favorevole, dato che $U_p > U_c$. In una sfera la carica di distribuisce in modo uniforme sulla superficie esterna (si può dimostrare che rappresenta la configurazione di minima energia potenziale).

Se il conduttore non è sferico la carica si addensa nelle regioni con raggio di curvatura minore, si ha un "effetto punta".

Esempio - Effetto Punta

Prendiamo un sistema formato da due sfere conduttrici di raggio $R_1 < R_2$ e collegate da un filo. Come si distribuisce la carica sulle rispettive superfici ?



La carica complessiva del sistema è data da $Q = Q_1 + Q_2$ dato che le due sfere sono collegate tra loro da un filo e quindi possiamo assumerlo come un sistema unico. Essendo sfere conduttrici internamente il campo $\mathbf{E} = 0$. Esternamente abbiamo quello di una carica puntiforme e di conseguenza il potenziale è dato da

$$\phi_1 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

Dato che le due sfere conduttrici sono collegate tra loro si trovano allo stesso potenziale e dunque

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \tag{1.39}$$

Il risultato (1.39) ci dice che la densità superficiale è proporzionale al reciproco del raggio di curvatura, di conseguenza avremo che la carica si addensa maggiormente sulla superficie della sfera con raggio minore. Possiamo estendere tale risultato a superfici generiche e quindi concludere che, la carica ha densità maggiore laddove il raggio di curvatura è il minore possibile.

1.13.1 Induzione Totale

Consideriamo un sistema isolato in cui è presente una sfera conduttrice, in cui è presente una cavità contenente una carica puntiforme q . Dato che all'interno del conduttore $\mathbf{E}_{int} = 0$ se

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

consideriamo una superficie Gaussiana che racchiude la cavità per la legge di Gauss si ha che

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV \rho = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

e quindi

$$Q = q + Q_{int} = 0 \Rightarrow Q_{int} = -q$$

Dunque si induce una carica sulla superficie interna della cavità di segno opposto rispetto alla sorgente al suo interno. Se prendiamo una superficie Gaussiana S_2 esterna che racchiude il conduttore avremo per la legge di Gauss che

$$\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

e dunque sulla superficie esterna avremo una carica

$$Q_{ext} = q = -Q_{int}$$

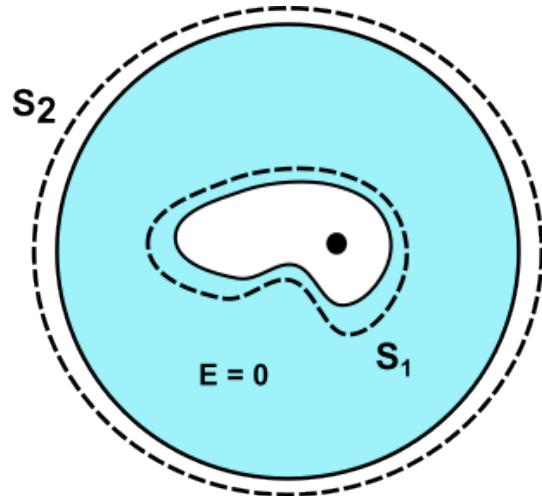
Per quanto discusso possiamo concludere che per un generico conduttore, la forma del campo elettrico esterno non dipende dalla posizione della carica sorgente posta al suo interno, ma dalla geometria del conduttore stesso. Complessivamente avremo che il campo, per il principio di sovrapposizione è dato dai contributi

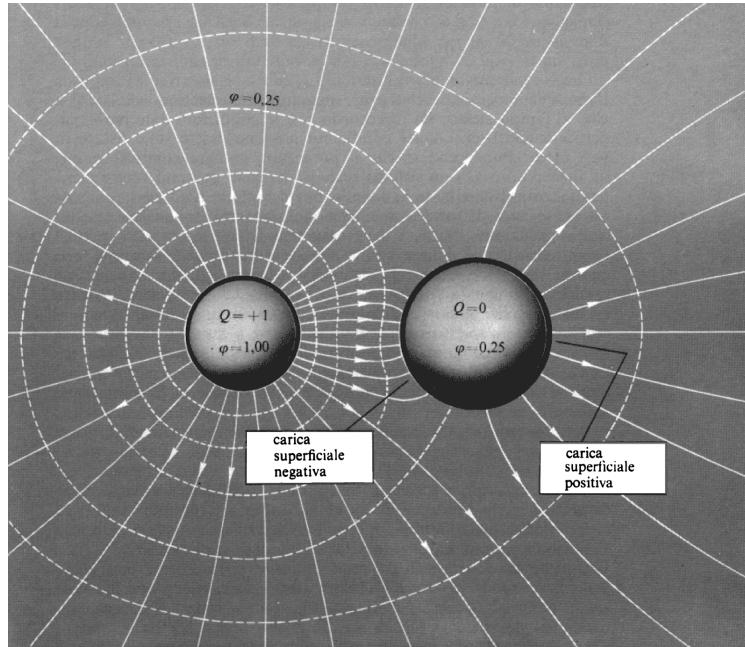
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{ind}^{int} + \mathbf{E}_{ext}^{ind} = \mathbf{E}_{ext}^{ind}$$

dove

$$\mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{ind}^{int} = 0$$

dato che la carica sulla superficie esterna è distribuita uniformemente. Tale risultato è valido per qualsiasi raggio R. Se il conduttore non è omogeneo i risultati sulla carica indotta sono ancora validi solo che il campo esterno non sarà più a simmetria sferica perchè la distribuzione di carica non è più uniforme.



Esempio - Induzione con una carica esterna


Consideriamo una distribuzione di carica a simmetria sferica e un conduttore con la medesima simmetria. Avremo che sul conduttore non possono esserci linee di campo che iniziano e terminano sulla sua superficie. Per la sorgente di carica le linee di campo sono a simmetria radiale in lontananza. La carica indotta sul conduttore si divide in

$$Q_{ind} = \begin{cases} Q > 0 & \text{per la superficie interna} \\ Q < 0 & \text{per la superficie esterna} \end{cases}$$

Non tutte le linee di campo si possono chiudere sul conduttore, alcune proseguono verso infinito di conseguenza la carica indotta sul conduttore in generale è minore di della carica della sorgente.

$$|Q_{ind}| < |Q|$$

Solo quando il conduttore racchiude la carica sorgente possiamo parlare d'induzione totale.

1.13.2 Problema generale dell'elettrostatica: Il teorema di unicità

Il problema dell'elettrostatica si riduce alla determinazione del campo elettrico a partire da una configurazione di cariche statiche. In linea di principio la soluzione dell'equazione di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

è data da

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{u}_{rr'}$$

che possiamo ricondurre alla soluzione dell'equazione di Laplace dato che $\phi = -\nabla \cdot \mathbf{E}$ e quindi

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Tuttavia per i problemi che coinvolgono i conduttori la densità di carica ρ non è necessariamente nota a priori, per i seguenti motivi:

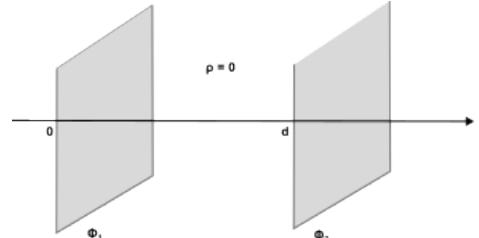
1. La carica si ridistribuisce e in generale per un conduttore conosciamo solo la carica totale di un conduttore, ma non esattamente come è distribuita.
2. Sperimentalmente siamo in grado di determinare solo il potenziale del conduttore.

In questi casi è conveniente riformulare il problema , usando le relazioni espresse nelle equazioni di Laplace e Poisson in regioni in cui non è presente della carica libera e rispetto a cui si possono formulare delle condizioni al contorno.

Esempio

Prendiamo due piani conduttori infiniti posti in parallelo, nel volume compreso tra i due piani abbiamo carica nulla dunque l'equazione di Laplace è

$$\nabla^2 \phi = 0$$



con condizioni al contorno $\phi(0) = \phi_1$ e $\phi(d) = \phi_2$,

dove $\phi_2 > \phi_1$. Dato che il campo ha direzione solo lungo l'asse ortogonale ai piani, che

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

consideriamo x , l'equazione di Laplace diventa

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

che ha come soluzione

$$\phi(x) = ax + b$$

Per determinare le costanti $a, b \in \mathbb{R}$, applichiamo le condizioni al contorno,

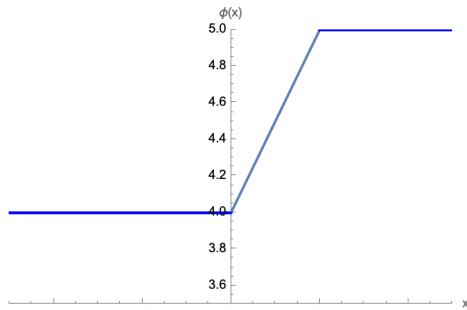
$$\phi(0) = b = \phi_1 \quad ; \quad \phi(d) = ad + \phi_1 = \phi_2 \Rightarrow a = \frac{\phi_2 - \phi_1}{d}$$

quindi il potenziale si comporta nel seguente modo

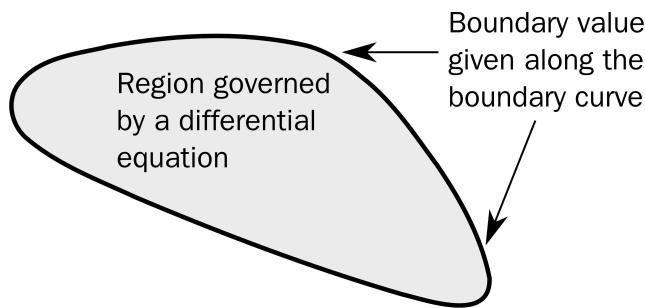
$$\phi(x) = \frac{\phi_2 - \phi_1}{d}x + \phi_1 \quad x \in [0, d]$$

Utilizzando il risultato per cui $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ abbiamo che il campo elettrico ha la seguente forma

$$\mathbf{E} = -\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{d}\hat{u}_x$$



I problemi risolti con la metodologia dell'esempio prendono il nome di *problemi confinati*, sono una particolare categoria per cui è sempre possibile determinare una soluzione per integrazione. Questo è dovuto al fatto che si ha uno spazio chiuso, al cui interno sono presenti regioni di spazio connesse, che contengono della carica e permettono di definire delle condizioni al contorno per l'equazione di Laplace.



CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

In generale questa tipologia di problemi può essere risolta utilizzando il metodo di separazione delle variabili.

In generale le soluzioni di questa categoria di problemi, deve soddisfare le seguenti proposizioni:

Proprietà 1.13.1. Il potenziale elettrostatico in un generico punto C è uguale al valore medio del potenziale elettrostatico dato da una sfera che ha C come suo centro.

$$\phi_C = \langle \phi_S \rangle$$

La seguente proprietà risulta essere verificata per tutte le funzioni per cui $\nabla \times \nabla \phi = 0$

Dimostrazione. Definiamo

$$\phi_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \langle \phi_S \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

Ipotizziamo di volere spostare una carica q ad una distanza r da una carica q' della sfera S, dovremo compiere un lavoro $W = q\phi'(r) = q'\phi_C(r)$. Ora consideriamo il lavoro per spostare q ad una distanza r, dall'intera sfera, questo è dato da

$$W = \frac{1}{N} \sum_i \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} = q\langle \phi_S \rangle$$

essendo il lavoro il medesimo avremo $\phi_C = \langle \phi_S \rangle$.

□

Proprietà 1.13.2. La funzione ϕ non possiede valori di estremo nella regione per cui è definita l'equazione $\nabla^2 \phi = 0$

Dimostrazione. Ipotizziamo per assurdo che esista un punto P nella regione in cui $\nabla^2 \phi = 0$, per cui $\phi(P) = \phi_{max}$ la funzione del potenziale assume valore massimo. Preso un intorno sferico attorno a P, avremo che per tutti i punti appartenenti alla sfera S vale $\phi_S < \phi(P)$, di conseguenza abbiamo un punto di equilibrio del sistema. Il che è assurdo perché in una regione di spazio dove è definita l'equazione di Laplace non possono esserci configurazioni di equilibrio. (Non è vero in generale)

□

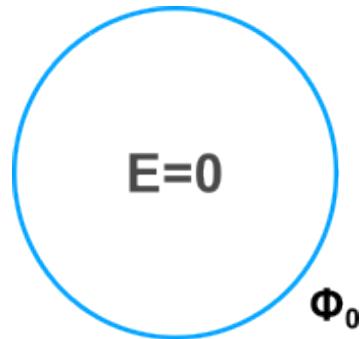
Proprietà 1.13.3. La soluzione dell'equazione di Laplace e Poisson è unica

Dimostrazione. Ipotizziamo che esistano due soluzioni ϕ_1 e ϕ_2 dell'equazione $\nabla^2\phi = 0$ e che siano date le seguenti condizioni al contorno $\phi(\mathbf{x}_1) = \phi_1, \dots, \phi(\mathbf{x}_N) = \phi_N$. Definiamo la funzione $W(x) = \phi_2 - \phi_1$ e di conseguenza le condizioni al contorno diventano $W(\mathbf{x}_i) = 0$ per $i = 1, \dots, N$. La funzione $W(x)$ è soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2 W = 0$, dato che le condizioni al contorno sono tutte nulle, e dalla proprietà precedente W non può avere punti di massimo e minimo nella regione in cui è definita, si deve avere che $W(x) = 0$ ovunque e quindi $\phi_1 = \phi_2$.

□

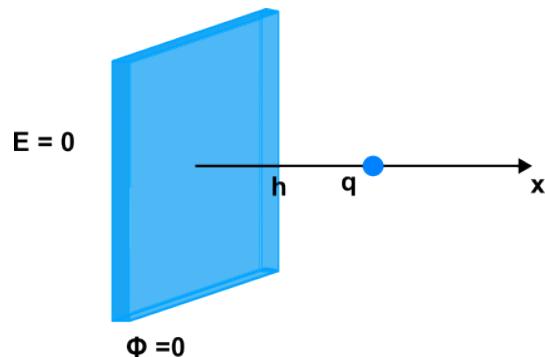
1.13.3 Campo all'interno di un conduttore cavo

Consideriamo un conduttore chiuso e cavo (come per esempio un guscio sferico), la sua superficie equipotenziale ϕ_0 costituisce una condizione al contorno rispetto allo spazio interno in cui si ha l'equazione di Laplace $\nabla^2\phi = 0$. La condizione al contorno fa sì che la soluzione è data da $\phi = k \in \mathbb{R}$, di conseguenza $\mathbf{E} = -\nabla\phi = 0$.



1.13.4 Metodo delle cariche immagine

Prendiamo un piano conduttore infinito e poniamo a potenziale nullo $\phi = 0$, e poniamo ad una distanza h una carica puntiforme q . Vogliamo descrivere il comportamento del sistema nel suo complesso.



CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

Abbiamo un'informazione importante data dal fatto che il piano conduttore è messo a terra ovvero ha potenziale nullo. Una configurazione simile in cui si ha una regione dello spazio in cui il potenziale è nullo, la si ottiene quando si pongono due cariche puntiformi, Q e $-Q$ equidistanti tra loro, come in figura (1.11)

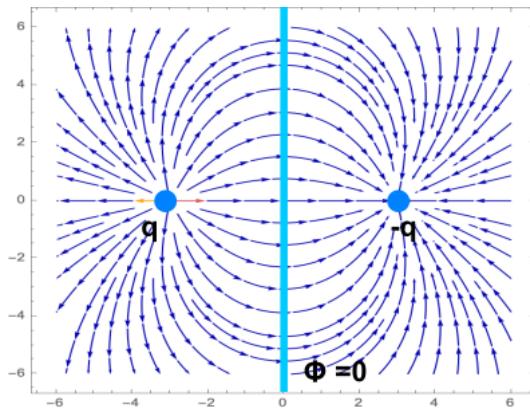


Figura 1.11

Il comportamento del campo magnetico è dato dalle linee di campo a sinistra del piano divisore in figura (1.11), ovvero si chiudono sulla superficie, nel caso del problema di partenza, non è presente campo $\mathbf{E} = 0$ in quella parte di spazio divisa dal piano in cui è presente la carica $-q$. Vista l'analogia tra i due problemi, poniamo una carica $-q$ in modo simmetricamente opposto ed equidistanziato a q , figura 1.12.

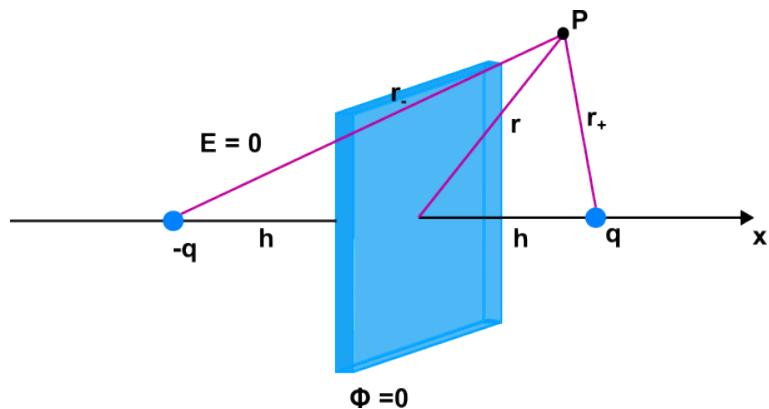


Figura 1.12

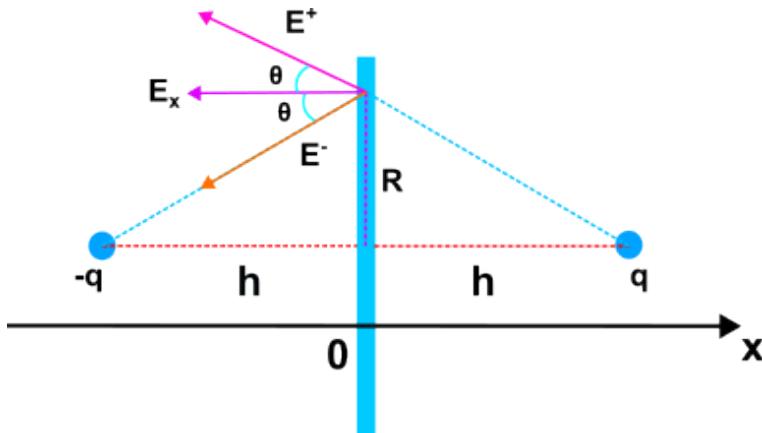
CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

Il potenziale associato è come quello di un dipolo elettrico (nelle prossime sezioni)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (1.40)$$

Per tutti i punti in cui $r_+ = r_-$ il potenziale è nullo, e coincidono con i punti appartenenti al piano conduttore. Una configurazione di questo tipo ci riconduce al problema di Poisson, dove da una parte è presente una distribuzione di carica e il potenziale sul piano costituisce le condizioni al contorno. Dato che l'equazione ha un'unica soluzione, questa coincide con l'equazione (1.40).

Per determinare il valore del campo elettrico sul piano, consideriamo il seguente diagramma delle forze in figura.



Le componenti del campo lungo l'asse \hat{z} del campo elettrico si annullano. Il campo elettrico lungo \hat{x} è dato da

$$\mathbf{E}^\pm = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 + h^2} \cos\theta \hat{u}_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

il campo totale è dato da

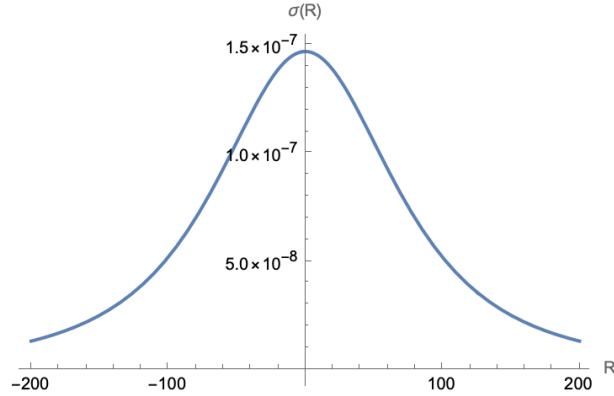
$$\mathbf{E} = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}} \hat{u}_z$$

Dalla legge di Gauss Sappiamo che la distribuzione di carica superficiale σ sul piano è data da

$$\sigma(R) = -\frac{2q}{4\pi} \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

Studiando la funzione della distribuzione di carica, si avrà una maggiore concentrazione nel centro del piano per $R=0$.



La carica indotta sul piano è data da

$$Q_{ind} = \int_S \sigma(R) dA$$

dato che la densità di carica dipende dal raggio conviene integrare in coordinate polari sul piano, ovvero $dA = R dR d\theta$, per $\theta \in [0, 2\pi]$. L'integrale della carica indotta diventa

$$Q_{ind} = -\frac{q}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{h2\pi R}{[R^2 + h^2]^{3/2}} dR = -\frac{qh}{2} \left[-2(R^2 + h^2)^{-1/2} \right]_0^{+\infty} = -q$$

Quindi si ha *induzione totale*, ovvero le linee di campo che escono da q^+ si chiudono tutte sul piano.

Abbiamo determinato come si distribuiscono le cariche negative sul piano, ma che cosa succede alle cariche positive?

Mediamente queste non si spostano e sono trascurabili, se consideriamo un disco sul piano, la densità di carica positiva è data da

$$\sigma^+ = \frac{q}{2\pi R^2}$$

se confrontiamo la densità di carica negativa con quella positiva, abbiamo che

$$\frac{\sigma^+}{\sigma^-(0)} = \frac{h^2}{R^2}$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

se prendiamo $R \gg h$, avremo che la carica positiva risulta essere trascurabile.

Se vogliamo determinare la forza che esercita il piano conduttore sulla carica q , questa è equivalente alla forza tra due cariche di segno opposto, ovvero

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2h)^2} \hat{u}_x = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2h)^2} \hat{u}_x$$

Per determinare l'energia potenziale della configurazione piano-carica, consideriamo l'energia che dovremmo immettere nel sistema per spostare la carica q ad una distanza h dal piano, questa è data da

$$U_{piano-q} = W = q\Delta V = -q \int_h^{+\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4x^2} dx = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4h} = \frac{U_{qq'}}{2}$$

dove l'energia $U_{qq'}$ è l'energia d'interazione tra carica immagine $q' = -q$ e q . Questa coincide con il lavoro necessario a spostare la carica q ad una distanza $2h$ da q' .

$$U_{qq'} = -q \int_{2h}^{+\infty} \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2} dx = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2h}$$

Il risultato per cui $U_{piano-q} = U_{qq'}/2$ possiamo interpretarlo con il fatto che nella regione di spazio in cui è presente la carica immagine il campo elettrostatico è nullo, quindi stiamo considerando metà del campo dato dall'interazione tra q e $-q$ e quindi anche metà dell'energia.

Se allontaniamo la carica sonda q dal piano, la distribuzione di carica negativa formatasi dall'interazione si sparpaglia nel conduttore per mantenere una configurazione in cui il potenziale sul piano è nullo. Il lavoro sulle cariche che si spostano all'interno di un conduttore è nullo , perchè dato $\phi = k \in \mathbb{R}$, allora $W_{cond} = 0$. Possiamo pensare che le cariche si muovano in direzione ortogonale rispetto al campo elettrostatico.

1.14 Energia del campo elettrostatico

Nelle sezioni precedenti abbiamo calcolato l'energia potenziale associata ad una configurazione di cariche. Possiamo vedere una distribuzione di carica continua come un aggregato di tante cariche, che interagiscono tra di loro esercitando una forza di natura Coulombiana e una di coesione, che permette di mantenere la configurazione. Dato che le cariche sono

CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

statiche, avremo che

$$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow q\mathbf{E} + \mathbf{F}_{altro} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{altro} = -q\mathbf{E}$$

di conseguenze le forze di coesione avranno pari intensità e direzione, ma verso opposto; inoltre la loro origine è di natura elettrica e legata alle cariche atomiche.

Vogliamo dare una definizione alternativa all'energia potenziale elettrostatica calcolando l'energia necessaria ad assemblare la configurazione di carica.

In un certo qual modo pensare di portare delle cariche da infinito tutte insieme e di darle una forma sferica, è equivalente ad esercitare contemporaneamente una pressione su tutta una superficie sferica riducendone uniformemente il raggio. Quindi consideriamo di avere una sfera cava di raggio R e densità di carica superficiale σ , il campo generale coincide con quello di una carica puntiforme

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 4\pi R^2}{r} \hat{u}_r & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

e quindi sulla superficie esterna si ha

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_r$$

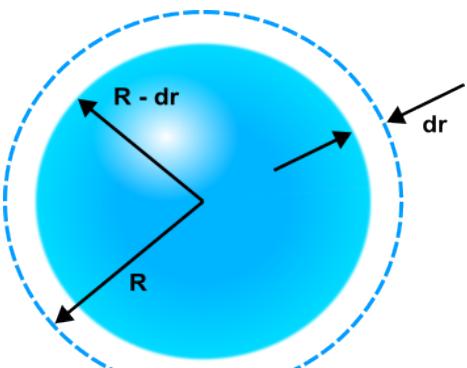
Le cariche per un area infinitesima da sulla superficie della sfera, esercitano tra di loro una forza di Coulomb

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E}$$

Per comprimere la sfera di un tratto dr , modificandone il raggio bisogna compiere un lavoro sul sistema

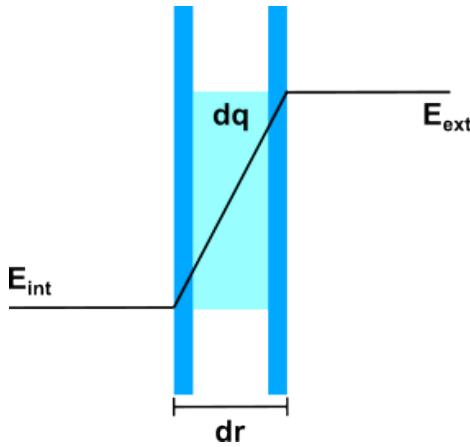
$$dU = -dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Le cariche presenti sulla superficie per la sfera con raggio R , si ritroveranno dopo la compressione ad una distanza mediamente inferiore, generando un campo elettrico là dove prima non era presente. Per esprimere questo fatto si può usare la seguente figura:



CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

mera dU in funzione del campo elettrico dovuto alla distribuzione delle cariche, abbiamo bisogna di determinare l'espressione della forza \mathbf{F} d'interazione delle cariche sulla superficie di raggio ridotto.



Per calcolarla consideriamo uno strato di spesso molto piccolo dr , equivalente alla quantità di quanto si è ridotto il raggio della sfera. Al suo interno è presente una densità di carica volumica ρ uniforme e sufficiente affinché si abbia che $\sigma = \rho dr$ per qualsiasi dr scelto. Si dimostra facilmente usando la legge di Gauss che l'intensità del campo elettrico è zero sulla superficie interna dello strato e cresce linearmente fino a raggiungere il valore $4\pi\sigma$ sulla superficie esterna. Il valore medio del campo elettrico nello strato, e di conseguenza la forza media agente su una carica

unitaria interna allo strato, è

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}(E_{int} + E_{ext}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

dato che $E_{int} = 0$. La forza agente complessivamente per ogni porzione di superficie dA e larghezza dr , sarà data dalla relazione

$$F = \int_o^r dF = \int_0^r dq E = \int_0^r dr \rho E da$$

dove $dq = \rho \cdot da \cdot dr$. Sappiamo che $d\sigma = \rho dr$ utilizzando la legge di Gaussabbiamo deduciamo che $d\sigma = \varepsilon_0 dE$, di conseguenza possiamo riscrivere l'integrale precedente rispetto al campo elettrico

$$P = \frac{F}{da} = \varepsilon_0 \int_{E_{int}}^{E_{ext}} dE E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E_{ext}^2 - E_{int}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E_{ext} + E_{int}) \Delta E$$

dove $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$ e quindi possiamo concludere che la *pressione elettrostatica* è data da

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

La direzione della forza è verso l'esterno della superficie, indipendentemente dal segno della

carica dato che è quadratica nell'espressione.

Dalla pressione possiamo determinare la densità di energia elettrostatica immagazzinata all'interno del volume $dV = 4\pi R^2 dr$, dato che

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} 4\pi R^2 dr$$

che possiamo riscrivere come

$$dU = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (4\pi R^2 dr) \Rightarrow u_e = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Ora che abbiamo determinare la quantità di energia presente per unità di volume nello spazio, possiamo calcolare l'energia, integrando sul volume, e quindi definiamo

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V d\nu E^2 \quad (1.41)$$

1.15 Dipolo elettrico

Un *dipolo* consiste in un sistema di due cariche Q e $-Q$ poste a una distanza d . La prima carica è posizionata in $d/2$ e la seconda in $-d/2$. Il potenziale non è altro che la somma dei potenziali di ciascuna carica

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Prendiamo un punto P nello spazio affinché la sua distanza radiale r sia molto più grande della distanza tra le due cariche. Riscriviamo le congiungenti tra le cariche e P rispetto ad r nel seguente modo

$$r_1 = r + \frac{d}{2} \cos\theta \quad \text{e} \quad r_2 = r - \frac{d}{2} \cos\theta$$

l'espressione del potenziale diventa

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r + d/2 \cos\theta} - \frac{1}{r - d/2 \cos\theta} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d \cos\theta}{r^2 - d^2/4 \cos\theta} \simeq \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

dato che siamo sotto l'ipotesi in cui $r \gg d$ si è sviluppato in potenziale con Taylor arrestandosi al primo ordine. Alcune osservazioni:

1. Nel potenziale compare il termine $p = Qd$ che prende il nome di *momento di dipolo*.

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

2. Un dipolo ideale è dato da $d \rightarrow 0$ e $q \rightarrow \infty$ con il momento di dipolo che assume un particolare valore finito. A differenza del potenziale di una carica puntiforme quello del dipolo è proporzionale a $1/r^2$ decrescendo molto più velocemente; questo è dovuto al fatto che il potenziale delle due cariche opposte tende a cancellarsi quando $r >> d$. L'unico contributo restante è quello dovuto alla distanza tra due cariche leggermente differenti.
3. Il potenziale è proporzionale al $\cos \theta$, questo ci dice che in direzione \perp al dipolo il potenziale è $\phi(r, \pm\pi/2) = 0$, mentre per una direzione parallela il potenziale è massimo.

Utilizzando le coordinate sferiche per l'operatore gradiente determinato il campo elettrostatico generato dalla configurazione di carica

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{u}_\theta\right] = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2\cos\theta\hat{u}_r + \sin\theta\hat{u}_\theta]$$

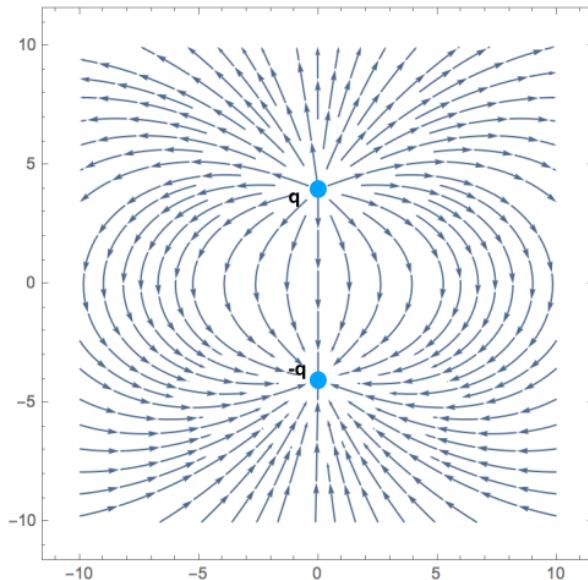
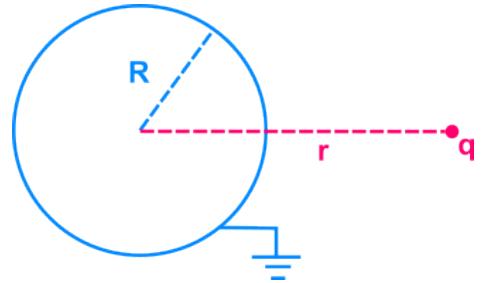


Figura 1.13: Campo elettrico generato da un dipolo

1.16 Esempi ed esercizi

1.16.1 Carica puntiforme in prossimità di una sfera conduttrice (Esame 23/06/2020)

Si consideri un sistema dove si ha una carica puntiforme q ad una distanza a da un conduttore sferico con massa a terra di raggio r . Vogliamo calcolare il lavoro necessario ad allontanare la carica da a , verso infinito.



Dimostrazione. Per risolvere il problema possiamo usare il metodo della carica immagine, ovvero andiamo a collocare una carica immaginaria Q all'interno del conduttore, affinchè il potenziale ϕ sulla superficie della sfera sia nullo. Di conseguenza abbiamo bisogno di determinare per quali valori Q e in quale posizione x tale condizione è verificata.

Ipotizziamo si posizionare le due cariche Q e q in due generici punti $(b, 0, 0)$ dove $b < r$ e $(a, 0, 0)$ per $a > r$. Il potenziale complessivo del sistema a due cariche è dato da

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Imponendo la condizione $\phi = 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} &= - \frac{Q}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} \iff \frac{Q^2}{q^2} = \frac{(x-b)^2 + y^2 + z^2}{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \\ \Rightarrow \frac{Q^2}{q^2} &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2bx + b^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + a^2} = \frac{r^2 - 2bx + b^2}{r^2 - 2ax + a^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{Q^2}{q^2} r^2 + \frac{Q^2}{q^2} a^2 - 2 \frac{Q^2}{q^2} ax &= r^2 - 2bx + b^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

$$\Rightarrow r^2 \left(\frac{Q^2}{q^2} - 1 \right) = -\frac{Q^2}{q^2} a^2 + b^2 + 2x \left(\frac{Q^2}{q^2} a - b \right) \quad (1.42)$$

l'equazione (1.42) assume un'espressione semplificata se poniamo l'ultimo addendo nullo, ovvero $b = (Q^2/q^2)a$, e quindi possiamo riscrivere l'equazione nel seguente modo:

$$r^2 \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = -ab + b^2 = ab \left(\frac{b}{a} - 1 \right) \Rightarrow r^2 = ab$$

troviamo dunque che la posizione della carica Q affinché $\phi(x, y, z) = 0$ è data da

$$b = \boxed{\frac{r^2}{a}}$$

ci manca ora da determinare la carica immagine Q all'interno del conduttore sferico affinché $\phi(R) = 0$. Per farlo riscriviamo l'espressione del potenziale complessivo con il risultato trovato,

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x-r^2/a)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

e imponiamo che per $\phi(r, 0, 0) = 0$ e quindi abbiamo l'equazione

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{|r-a|} + \frac{Q}{|r-\frac{r^2}{a}|} \right] = 0$$

dato che $a > R$ si ha che $|r-a| = -(r-a)$. L'equazione diventa

$$Q = \frac{q}{r-a} \left(r - \frac{r^2}{a} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = -\frac{r}{a}q}$$

dunque per un potenziale del seguente tipo

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{r}{a} \frac{1}{\sqrt{(x-r^2/a)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

abbiamo che è soddisfatta la condizione che $\phi(r) = 0$.

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

Infine possiamo rispondere alla domanda dell'esercizio dove il lavoro per muovere una carica puntiforme da a ad ∞ è dato da

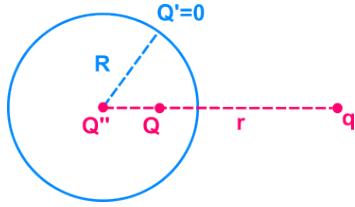
$$W = q\phi(a) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2 - r^2}$$

siccome all'interno della sfera conduttrice non c'è campo, per il sistema originale dobbiamo considerare metà dell'energia trovata e quindi

$$W' = \frac{1}{2}W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2 - r^2}$$

□

Che cosa succede se consideriamo la sfera conduttrice scarica e la rimuoviamo dalla messa a terra ?



Avremo che sulla superficie della sfera si crea una distribuzione uniforme di carica $Q'' = -Q$ tale per cui la carica netta su di essa è $Q' = Q + Q'' = 0$ e quindi il conduttore sferico è neutro. Questo equivale a porre una seconda carica immagine Q'' al centro della sfera.

Applicando il principio di sovrapposizione per il potenziale di ciascuna carica e considerando l'origine del sistema di riferimento con il centro della sfera, avremo che

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{(x-R^2/r)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Per determinare il lavoro necessario a spostare la carica da r a $+\infty$ calcoliamo

$$W = q\phi(r, 0, 0) = \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2 - R^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

l'energia trovata è quella della configurazione delle cariche, per determinare quella associata alla sfera conduttrice neutra, dobbiamo ricordare che internamente il campo è nullo e dunque il lavoro necessario è la metà di W .

$$W' = W/2 = \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2 - R^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

1.16.2 Esercizio 2

CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

CAPITOLO 2

Magnetostatica

2.1 Correnti stazionarie

Le cariche generano campi elettrici. Le correnti di cariche generano campi magnetici. Restringiamo lo studio al caso in cui la densità di carica è $\rho = 0$, in modo tale che $\mathbf{E} = 0$ e quindi possiamo concentrarci solo sul campo magnetico.

Dato che per ipotesi $\rho = 0$, non può esserci carica netta, questo vuol dire che cariche positivi e negative si bilanciano tra loro in ogni punto dello spazio. Inoltre, dato che le cariche possono muoversi è presente una corrente anche se non c'è un trasporto netto di carica.

Sembrerà strano, ma è esattamente quello che succede all'interno di un normalissimo filo. Questo è dovuto al fatto che ci sono delle cariche positive libere nel metallo per via del reticolo di ioni, ma dato che si muovono tutti insieme riusciamo ad avere in ogni singolo punto una densità di carica nulla. L'*equazione di continuità*, che descrive la conservazione della carica è data da,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.1)$$

e dato che la densità di carica è costante, diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Matematicamente vuol dire che se abbiamo un flusso di corrente in una certa regione di spazio, un eguale corrente deve fluire in senso opposto affinché non ci sia un addensamento

di carica. Notare che questo è consistente con la proprietà che per ogni campo vettoriale si ha che $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$.

2.1.1 Derivazione dell'equazione di continuità

Per caratterizzare il trasporto di carica si introducono alcune grandezze fisiche. Una delle prime è l'*intensità di corrente*:

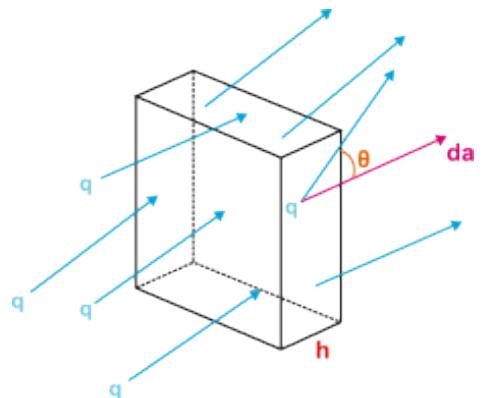
$$I = \frac{dq}{dt}$$

che descrive la quantità di carica netta che attraversa ala sezione di un mezzo in unità di tempo. La unità di misura in cui viene espressa è data dall'Ampere che esprimiamo come

$$[A] = \frac{[\text{Coulomb}]}{[\text{Secondi}]}$$

La definizione può essere generalizzata al trasporto di carica nello spazio, riconducendola ad una grandezza vettoriale e al concetto di flusso attraverso una superficie.

La seconda grandezza che andiamo ad introdurre è la *densità di corrente*, questa è legata ad un volume generico costituito da un materiale al cui interno le cariche siano libere di muoversi in una direzione generica. Ipotizziamo di avere nel mezzo dei portatori di carica tutti identici tra loro, identificati dalle seguenti grandezze comuni:



1. $n_q \rightarrow$ densità di portatori di carica per unità di volume ;
2. $q \rightarrow$ carica dei portatori;
3. $\mathbf{v} \rightarrow$ velocità di spostamento delle cariche;
4. $\mathbf{da} \rightarrow$ elemento infinitesimo di superficie del volume.

Dato il parallelepipedo in figura solo le cariche al suo interno di base da e altezza $h = v\Delta t \cos \theta$ attraversano la superficie in un intervallo di tempo Δt .

CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

Di conseguenza la variazione di carica attraverso la superficie **da** è data dalla relazione

$$\Delta Q = n q da h = n q v \Delta t \cos \theta da = n q \mathbf{v} \cdot \mathbf{da} \Delta t$$

La corrente attraverso **da** è associata al flusso della grandezza $n_q \mathbf{v}$, da cui possiamo definire

$$dI = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q \mathbf{v} \cdot \mathbf{da}$$

Nel caso più generico all'interno del volume possono esistere diversi portatori di carica q_i , con velocità differenti \mathbf{v}_i , dunque per ciascuna specie di particella possiamo definire

$$dI_i = (n_i q_i \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{da}$$

e di conseguenza la corrente infinitesima complessiva è

$$dI = \sum_i dI_i = \left(\sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \mathbf{da}$$

dove definiamo la grandezza vettoriale

$$\mathbf{J} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i$$

densità di corrente, che è identificata dalle unità di misura

$$[\mathbf{J}] = [I L^{-2}] = \frac{\text{Ampere}}{m^2}$$

Non è necessario che tutte le cariche dello stesso tipo abbiano la medesima velocità \mathbf{v}_i . In un conduttore tipico, \mathbf{v}_i è definita da una distribuzione (come nel caso del moto termico è descritto da una Maxwelliana).

Supponiamo di considerare solo una certa specie di cariche q_i , e che ce ne siano n_i per unità di volume con velocità v_k^i . La densità sul volume complessivo sarà data da

$$N_q = \sum_{i=1}^N n_i$$

La densità di corrente rispetto al specie in esame sarà data da

$$\mathbf{J} = \sum_k q n_i \mathbf{v}_k^i = N_q \frac{1}{N_q} \sum_k q n_i \mathbf{v}_k^i = N_q q \langle \mathbf{v}_k^i \rangle$$

e dunque la definizione generale di densità di corrente è data da

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i n_i \langle \mathbf{v}_k^i \rangle = \sum_i \rho_i \langle \mathbf{v}_i \rangle$$

dove $\langle v_i \rangle$ rappresenta la velocità media dei portatori di cari di i-esimo tipo.

La definizione di \mathbf{J} generalizza quella di intensità di corrente I . La relazione tra le due segue in modo intuitivo dalle relazioni definite in precedenza

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

I risulta dunque essere il flusso di \mathbf{J} attraverso la superficie \mathbf{A} , il cui segno dipende dal prodotto vettoriale di \mathbf{J} e \mathbf{A} .

Per una superficie chiusa il verso del vettore di superficie \mathbf{A} è diretto verso l'esterno. Se c'è flusso netto di carica in uscita dalla superficie, la carica contenuta nel volume diminuisce tale risultato è esprimibile come

$$I = - \left| \frac{\partial Q}{\partial t} \right| \iff \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V d\nu \rho \quad (2.2)$$

Tale risultato viene interpretato, dicendo che è presente una sorgente carica (o un pozzo) che si accende o spegne, oppure varia nel tempo.

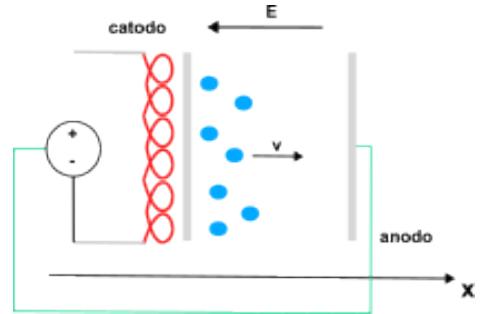
Utilizzando il teorema di Gauss, possiamo riscrivere l'equazione (2.2) ottenendo l'equazione di continuità (2.1) espressa nel paragrafo precedente. In particolare nel caso fenomeni stazionari, ovvero quando la carica è indipendente dal tempo, otteniamo

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \iff \text{div} \mathbf{J} = 0$$

Notare anche che se la carica è indipendente dal tempo, questo non vuol dire che sia uniformemente distribuita nello spazio $\rho(\mathbf{x})$.

Esempio: Corrente Catodica

Consideriamo un apparato sperimentale costituito da un tubo sottovuoto al cui interno è presente una lastra di metallo riscaldata da una serpentina metallica e in sua opposizione un ulteriore lastra metallica. Il primo elemento prende il nome *catodo*, mentre il secondo *anodo*. Se generiamo una caduta di tensione tra le due lastre facendo passare al loro interno una corrente elettrica, avremo che tra le due piastre si forma un campo elettrico \mathbf{E} .



Gli elettroni presenti sul catodo, eccitati dal calore della serpentina, verranno attratti verso l'anodo creando un flusso di corrente per via della forza esercitata su di essi dal campo elettrico generato.

$$\mathbf{F} = -e(-E\hat{u}_n) = eE\hat{u}_n$$

dove u_n è il versore ortogonale al piano. L'accelerazione esercitata sugli elettroni sarà data

$$\mathbf{a} = \frac{eE}{m}\hat{u}_n$$

La legge oraria che descrive il modo degli elettroni è dunque data da

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$$

e la rispettiva velocità

$$v = \sqrt{2ax}$$

Definita \mathbf{A} l'area della superficie delle lastre metalliche di anodo e catodo, avremo che la densità di corrente è data da

$$\mathbf{J} = nev\hat{u}_n$$

equindi la corrente è pari a

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \rho\langle v \rangle A$$

che è costante nel tempo, ovvero stazionaria. Possiamo dunque desumere che $\rho(x)v(x) =$

cost e quindi

$$\rho(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Le cariche subiranno un addensamento maggiore in prossimità del catodo.

2.2 Legge di Ampère

Introduciamo la prima equazione della magnetostatica,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.3)$$

conosciuta anche come *legge di Ampère* nella sua forma locale. Per dare una definizione più generale della legge di ampère definiamo la sua forma integrale. Presa una superficie aperta S con contorno $C = \partial S$, integrando (2.3) rispetto a tale superficie passiamo dalla forma differenziale all'integrale di linea su C , utilizzando il teorema di Stokes

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Dove consideriamo il vettore \mathbf{S} con una direzione ortogonale alla superficie S e con verso uscente. L'integrale di linea lungo il contorno è calcolato considerando la regola della mano destra, nel senso che se orientiamo il pollice della mano destra nella direzione $\hat{\mathbf{n}}$, allora l'indice indica il senso di percorrenza attorno a C dell'integrale di linea.

L'integrale della densità corrente rispetto alla superficie S è equivalente alla corrente I che passa attraverso S , e quindi la legge di ampère in forma integrale è data da

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \quad (2.4)$$

Da un punto di vista applicativo, in generale la legge (2.4) non è sufficiente da sola a determinare la forma del campo magnetico, ma è necessario utilizzare delle informazioni in più. Ci sono però alcuni casi in cui utilizzando osservazioni sulla simmetria del problema è sufficiente nella determinazione di \mathbf{B} .

Infine si osserva che si è ricavata la legge (2.3) ipotizzando che le correnti siano stazionarie. La condizione $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ è garantita dalle proprietà del rotore dove $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

per qualsiasi vettore \mathbf{F} .

2.2.1 Principio di sovrapposizione per il campo magnetico

Per una corrente passante attraverso un circuito chiuso, sappiamo per la legge di ampère che

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

immaginiamo ora che il cammino C sia attraversato da più correnti I_k , ciascun filo genererà un campo magnetico

$$\mathbf{B}_k = \frac{\mu_0 I_k}{2\pi r_k} \hat{u}_\theta$$

per il principio di sovrapposizione il campo magnetico positivo, è dato da $\mathbf{B} = \sum_k \mathbf{B}_k$. La legge di Ampère assume l'espressione

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \oint_C \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k I_k = \mu_0 I_c$$

dove $I_c = \sum_k I_k$ e prende il nome di *corrente concatenata*. Se immaginiamo di avere un numero infinito di fili portatori di corrente, avremo che $dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$ e dunque

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int dI = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.5)$$

Tale risultato è equivalente a considerare l'integrale sulla desità di corrente di tutta la superficie A delimitata da C . Quanto discusso vale solo per correnti stazionarie come nel caso di un solo filo dato che deve valere

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

La relazione (2.5) possiamo interpretarla nel seguente modo:

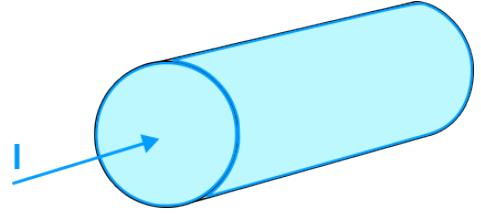
La circuitazione di \mathbf{B} lungo un cammino chiuso C è equivalente al flusso di \mathbf{J} attraverso qualsiasi superficie A delimitata dalla curva chiusa C .

2.2.2 Filo infinito percorso da una corrente

Consideriamo un filo di lunghezza infinita in cui scorre una corrente I . Che orientiamo lunga le direzione \hat{z} .

CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

La simmetria del problema suggerisce di usare delle coordinate cilindriche (r, φ, z) , dove $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ è il raggio del filo misurato dal suo centro. Consideriamo una superficie aperta S giacente nel piano (x, y) , con centro coincidente con quello del filo. Affinchè l'integrale di linea definito in (2.4) non sia nullo, è necessario che il campo magnetico abbia delle componenti lungo la circonferenza del disco. Per dimostrarlo ci basta considerare la forma locale della legge di Ampère



$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

dato che la corrente scorre lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ avremo che

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \mu_0 J_z \iff \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) = \mu_0 J_z$$

Per simmetria del problema osserviamo che lungo θ la componente radiale del campo magnetico è costante e quindi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \begin{cases} \mu_0 J_z & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione differenziale ordinaria per quadrature abbiamo che

$$B_\theta = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_z r}{2} + \frac{k_1}{r} & r \leq R \\ \frac{k_2}{r} & r > R \end{cases}$$

Per determinare le costanti d'integrazione, osserviamo che se posizioniamo una carica lungo l'asse z passante per il centro del filo, per simmetria $B_\theta(0) = 0$ e quindi $k_1 = 0$. Mentre per k_2 imponiamo la continuità del campo sulla superficie del filo, ovvero

$$B(R^-) = B(R^+) \iff \frac{k_2}{R} = \frac{\mu_0 J_z R}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

per $J = \frac{I}{\pi R^2}$. Possiamo dunque concludere che il campo magnetico del filo è dato da

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

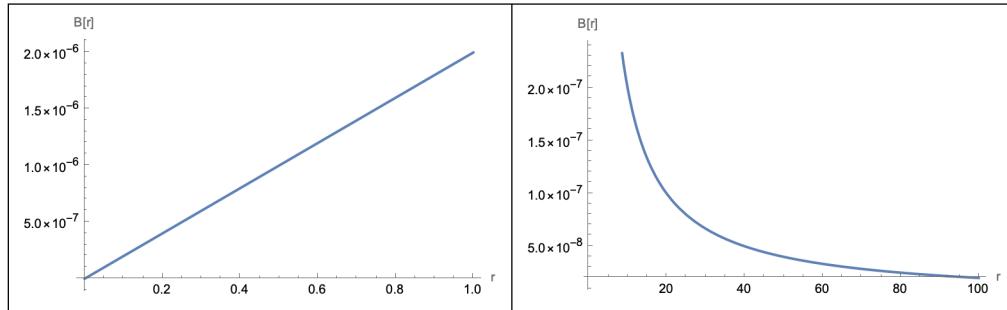
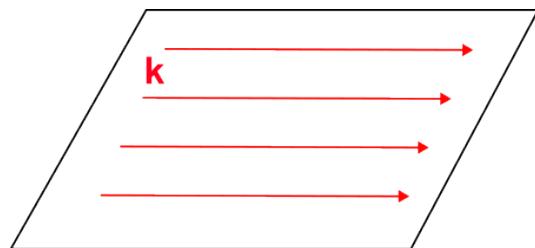


Figura 2.1: Campo magnetico di un filo di raggio $R=1$

2.2.3 Correnti di superficie e discontinuità

Consideriamo un piano giacente nel piano (x,y) , ovvero $z = 0$, sul quale è presente un densità di corrente che definiamo \mathbf{K} . Dove con \mathbf{K} si intende una densità di corrente definita rispetto alle unità d'area. Intuitivamente possiamo pensare ad un piano attraversato da corrente come infinite fili allineati in parallelo.

Consideriamo la corrente con direzione lungo x : $\mathbf{K} = K \hat{x}$.

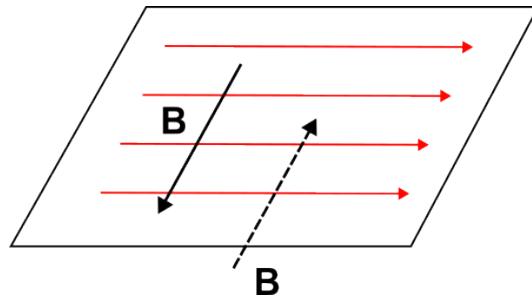


Affinchè $\mathbf{J} \neq 0$, abbiamo bisogno che l'integrale di linea del campo sia lungo il bordo di una superficie attraverso cui passa la corrente \mathbf{K} . Se vediamo il piano come un numero infinito

CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

di fili in parallelo, per simmetria del problema, il campo magnetico può esistere solo lungo la direzione y .

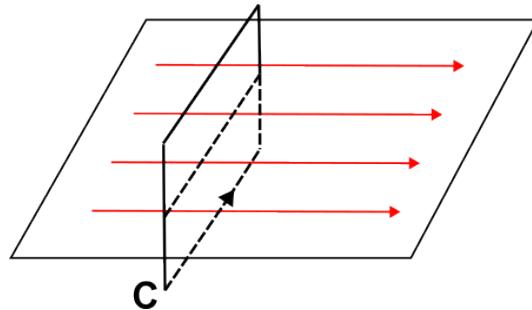
Dove \mathbf{B} ha verso lungo $-\hat{\mathbf{y}}$ quando $z > 0$ e lungo $\hat{\mathbf{y}}$ per $z < 0$.



Definiamo

$$\mathbf{B} = -B(z)\hat{\mathbf{y}}$$

dove $B(z) = -B(-z)$. Utilizzando la legge di Ampère su una superficie aperta come in figura.



con lunghezza L , lungo la direzione y rispetto $\pm z$. Abbiamo che

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = LB(z) - LB(-z) = 2LB(z) = \mu_0 K L$$

dunque il campo magnetico misurato attorno ad piano attraversato da una corrente di superficie è costante e misura:

$$B(z) = \frac{\mu_0 K}{2} \quad z > 0$$

Il risultato ottenuto è simile a quanto discusso per una distribuzione di carica planare infinita. Analogamente alla discussione elettrostatica, dove la componente del campo elet-

trostatico è discontinua in direzione ortogonale al piano, per il campo magnetico si ha il medesimo risultato, ma per la componente con direzione tangenziale alla superficie . Infatti

$$B(z \rightarrow 0^+) - B(z \rightarrow 0^-) = \mu_0 K$$

tale risultato è valido per qualsiasi corrente di superficie \mathbf{K} . Invece risulta che la componente \mathbf{B}_\perp è continua.

2.2.4 Flusso del campo magnetico

Per il campo magnetico vale il seguente risultato:

Il flusso di \mathbf{B} attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo.

che analiticamente esprimiamo nel secondo modo:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

La relazione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ vale per qualunque distribuzione di sorgenti. Per esempio se consideriamo un elemento come somma di fili, avremo che per il principio di sovrapposizione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \left(\sum_n \mathbf{B}_n \right) = \sum_n \nabla \cdot \mathbf{B}_n = 0$$

ottenendo in questo modo un sistema di equazioni differenziali omogenee. Le linee del campo magnetico sono sempre chiuse (si dice che: "il campo magnetico è solenoidale"). Inoltre non esistono sorgenti di monopolo magnetico, il campo magnetico elementare ha sempre forma dipolare (pensate ad una calamita).

Teorema 2.2.1 (Teorema di unicità). Il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

costituito dalle equazioni di Maxwell, definisce univocamente il campo \mathbf{B} soluzione, per sorgenti finite, ovvero $B \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Siano B_1 e B_2 due soluzioni del sistema di equazioni (2.5), definiamo

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$$

che è un campo conservativo, dato che

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{B}_1 - \nabla \times \mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

Essendo il campo \mathbf{D} irrotazionale, possiamo legarlo ad una funzione scalare φ tale per cui $\mathbf{D} = \nabla \varphi$.

La funzione φ soddisfa l'equazione di Laplace

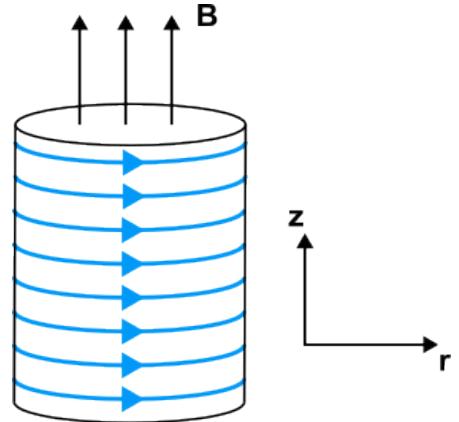
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Inoltre sotto l'ipotesi di sorgenti finite avremo che $\varphi(r)|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0$ costante, dato che $\mathbf{D} \rightarrow 0$ per $\mathbf{r} \rightarrow \infty$. In conclusione dato che φ_0 è costante ovunque, si ha che $\mathbf{D} = 0$ e dunque $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$, dimostrando così l'unicità della soluzione

□

2.2.5 Solenoide

Un solenoide è una superficie cilindrica costituita da spire attraversate da una corrente (in genere non è necessario per un solenoide che le spire ti attorciglino ottenendo una forma cilindrica, esistono anche solenoidi toroidali). Per semplicità assumiamo che il cilindro sia infinitamente lungo, in modo da trascurare gli effetti al bordo.



Per un discorso di simmetria della geometria considerata, descriviamo il sistema utilizzando le coordinate cilindriche (r, φ, z) , con l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ che attraversa il centro del cilindro. Per simmetria, il campo \mathbf{B} punta lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$, per dimostrarlo basta studiare il campo magnetico di

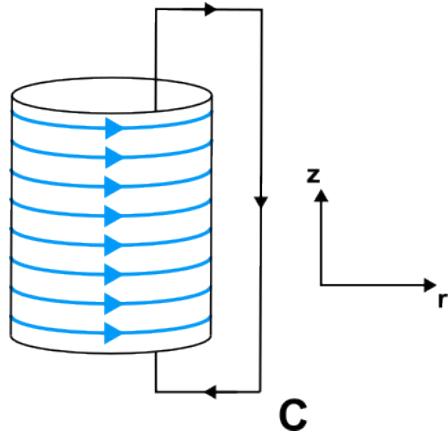
CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

una singola spira e applicare il principio di sovrapposizione. L'intensità del campo è legata alla distanza radiale $\mathbf{B} = B(r)\hat{\mathbf{z}}$. Ogni campo di questo tipo soddisfa la legge di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Per determinare il valore del campo magnetico consideriamo la forma differenziale della legge di ampère. Ovunque eccetto la superficie del solenoide abbiamo $\mathbf{J} = 0$ e

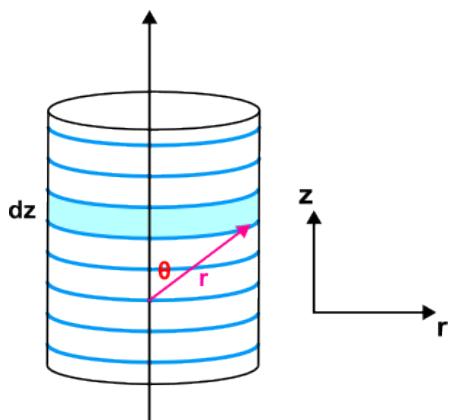
$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \frac{dB}{dr} = 0 \Rightarrow B(r) = \text{costante}$$

Al di fuori del solenoide per il teorema di unicità sappiamo che deve valere $B(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$ e $B(r)$ è costante. Per determinare il campo magnetico all'interno del solenoide utilizziamo la forma integrale della legge di Ampère e consideriamo una superficie S aperte, il cui contorno è dato da una curva chiusa C come in figura. Abbiamo che



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B_z(0)L \quad (2.7)$$

Per determinare il valore di $B_z(0)$ consideriamo un porzione infinitesima dz del cilindro percorso dalle spire e quindi attraversato da una corrente dI . Definiamo la grandezza $n = N/L$ che definisce il numero di spire per unità di lunghezza. La corrente attraversata dalla porzione dz sarà data da



$$dI = nidz$$

Data la forma cilindrica, la porzione dz geometricamente coincide con quella di un anello di altezza dz , dunque possiamo calcolare il suo campo magnetico per un punto lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ fissato a distanza \mathbf{r} dal suo bordo.

$$dB = \frac{\mu_0 b^2}{2 r^3} dI = \frac{\mu_0}{2} n i \frac{b^2}{r^2} \frac{dz}{r} = \frac{\mu_0}{2} dz \sin \theta = dB_z$$

integrandi i contributi infinitesimi abbiamo che

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} ni \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{2} ni [\cos \theta_1 - \cos \theta_2]$$

Preso $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$ abbiamo che

$$B_z(0) = \mu_0 ni$$

dunque il campo all'interno del solenoide recuperando l'equazione (2.6) è

$$B_z(0)L = \mu_0 niL$$

coincide proprio con $B_z(0)$. Inoltre passando dal bordo interno a quello esterno di ha una discontinuità del campo $\Delta_{//} = \mu_0 ni$. Notare che definita $K = IN$, quando trovato è consistente con l'equazione generale trovata per la discontinuità del campo magnetico dovuto a una corrente di superficie.

2.3 Potenziale vettore

Per le distribuzioni corrente viste fino a questo momento, le argomentazioni sulla simmetria sono sufficienti per determinare un campo magnetico che soddisfi la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Per discutere di correnti più generiche, questo non è più sufficiente. Per farlo partiamo dalla seguente osservazione: sappiamo che per un vettore generico \mathbf{A} , vale la proprietà

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

dunque se troviamo un vettore \mathbf{A} rispetto a cui il campo \mathbf{B} può essere scritto come suo rotore

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

in automatico abbiamo soddisfatto l'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Il vettore \mathbf{A} che soddisfa questo tipo di relazione prende il nome di *potenziale vettore*. Sostituendo nella

legge di ampère in forma differenziale, questa diventa

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.8)$$

Risolvendo questa equazione per \mathbf{A} determiniamo anche il campo \mathbf{B} .

2.3.1 Monopoli Magnetici

Nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato analiticamente l'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, ma non ci siamo mai soffermati nel discuterne il significato fisico. La sua interpretazione è molto semplice, infatti ci dice che nei punti considerati non è presente carica magnetica. Se esistesse una sorgente puntiforme di carica magnetica g , per un campo magnetico \mathbf{B} e che decresce quadraticamente rispetto alla distanza radiale, avremmo

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{u}_r$$

Un oggetto di questo tipo viene di solito chiamato *monopolio magnetico*. Le equazioni di Maxwell della magnetostatica ci dicono che oggetti di questo tipo non esistono, inoltre in natura non sono trovate evidenze sperimentali che ne dimostrino l'esistenza.

Ma siamo davvero sicuri che i monopoli magnetici non esistono? Per esempio se adattassimo le equazioni di Maxwell, permettendo la presenza di carica magnetica, scrivendo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$$

per ρ_m distribuzione di carica magnetica, avremmo che non possiamo più usare il vettore potenziale \mathbf{A} , ma è davvero una così grande perdita?

I problemi insorgono quando iniziamo a considerare la meccanica quantistica, dove siamo obbligati ad utilizzare il potenziale vettore \mathbf{A} . Non sono l'intera trattazione dell'elettromagnetismo in meccanica quantistica è basato sull'uso di \mathbf{A} , ma ci sono addirittura esperimenti che rilevano certe proprietà di \mathbf{A} e che vengono persi quando calcoliamo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, come nel caso dell'effetto Aharonov-Bohm (argomento trattato nel corso di struttura della materia al terzo anno).

Possiamo riassumere quanto discusso osservando che buona parte della teoria e della realtà sperimentale sia consistente nell'asserire la non esistenza dei monopoli magnetici... e invece no! ci sono buone argomentazioni che lasciano pensare all'esistenza di questi oggetti esotici. Dirac ha dimostrato che è possibile introdurre un vettore potenziale \mathbf{A} che permette di avere carica magnetica, ma solo se questa carica g , ma solo se la quantità di carica è legata a quella di un elettrone e , mediante la relazione

$$ge = 2\pi\hbar n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Questa equazione prende il nome di *condizione di quantizzazione di Dirac*.

2.3.2 Trasformazioni di Gauge

La scelta di \mathbf{A} nell'equazione (2.7) è tutt'altro che univoca: ci sono diversi potenziali vettore che descrivono il medesimo campo magnetico \mathbf{B} . Questo è dovuto al fatto che il rotore del gradiente è automaticamente nullo. Questo vuol dire che possiamo aggiungere ad \mathbf{A} un qualsiasi vettore potenziale della forma $\nabla\chi$ per una certa funzione χ e il campo magnetico resta sempre lo stesso,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \Rightarrow \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$$

Una trasformazione di questo tipo su \mathbf{A} prende il nome di *trasformazione di gauge*. Scegliendo in modo intelligente χ , riusciamo a semplificare i conti per determinare il campo magnetico.

Teorema 2.3.1 (Coulomb gauge). È sempre possibile trovare una trasformazione di gauge χ tale che \mathbf{A}' soddisfi $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Si fa riferimento a una scelta di questo tipo come *Coulomb gauge*.

Dimostrazione. Supponiamo di conoscere a priori un potenziale vettore \mathbf{A} tale per cui $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, ma quando calcoliamo la divergenza otteniamo un'espressione $\nabla \cdot \mathbf{A} = \psi(\mathbf{x})$. Se invece scegliamo $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$, avremo che la sua divergenza è data da

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\chi = \psi(\mathbf{x}) + \nabla^2\chi$$

CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

Dunque se vogliamo avere $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$, basta che prendiamo una trasformazione di gauge χ per cui

$$\nabla_\chi^2 = -\psi(\mathbf{x})$$

ma questa non è altro che l'equazione di Poisson. Per quanto discusso nel capitolo di elettrostatica sappiamo sempre che questa equazione ammette sempre soluzione. \square

2.3.3 Legge di Biot-Savart

Utilizziamo ora il potenziale vettore per determinare il campo magnetico \mathbf{B} generato da una distribuzione di corrente generica. Assumiamo che stiamo usando con un gauge di Coulomb e che sia soddisfatta la condizione $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ per il potenziale vettore \mathbf{A} . La legge di ampère definita in (2.7) diventa molto più semplice da risolvere

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.9)$$

che è equivalente a risolvere il sistema di equazioni di Poisson

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Considerando la risoluzione delle singole equazioni rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane, la soluzione delle equazioni è identica a quella ottenuta nella discussione elettrostatica. Ottenendo

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \mathbf{x}' \frac{J_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (i = 1, 2, 3)$$

che in notazione vettoriale diventa

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.10)$$

Vogliamo ora verificare che (2.9) sia una soluzione univoca dell'equazione di Ampère definita in (2.7), questo è vero se il risultato \mathbf{A} soddisfa la condizione di gauge di Coulomb data da $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Dunque andando a calcolare la divergenza di \mathbf{A} abbiamo che

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \mathbf{x}' \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

dove gli indici di ∇ coincidono con quelli di \mathbf{J} , ma l'operatore ∇ agisce su \mathbf{x} non su \mathbf{x}' . Preso atto di questa considerazione, possiamo scrivere l'equazione nel seguente modo

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)\end{aligned}$$

Dove ∇' differenzia rispetto a \mathbf{x}' . Per ottenere tale risultato, si è usato il fatto che se si differenzia $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ rispetto ad \mathbf{x} , si ottiene il medesimo risultato a differenza di un segno meno differenziando rispetto a \mathbf{x}' . Dato che ∇' è all'interno dell'integrale e $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ dovremmo derivare per parti. Ottenendo

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \left[\nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) - \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right]$$

Il secondo termine scompare perché per ipotesi stiamo considerando correnti stazionarie per cui $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$. Il primo termine risulta essere nullo se consideriamo regioni di spazio in cui $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0$, assumendo che questo sia al caso possiamo concludere che

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

e quindi l'univocità della soluzione per l'equazione (2.7).

Campo magnetico

Dalla soluzione (2.9) possiamo determinare il campo magnetico per $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, ricordando che ∇ agisce su \mathbf{x} e non su \mathbf{x}' . Consideriamo un tratto dl infinitesimo di un generico filo a cui possiamo associare un contributo infinitesimo al potenziale vettore

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} d\hat{l}$$

Il contributo infinitesimo al campo magnetico è dato da

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{dA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \times \left(\frac{d\hat{l}}{r} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\hat{l} + \frac{1}{r} \nabla \times d\hat{l} \right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{u}_r \times d\hat{l}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\hat{l} \times \hat{u}_r}{r^2} \end{aligned}$$

dove secondo addendo della somma risulta essere nullo perchè $d\hat{l}$ è costante. Ora che abbiamo legato il campo magnetico alla corrente, possiamo definire

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\hat{l} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\hat{l} \times \hat{u}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (2.11)$$

tale risultato prende il nome di *legge di Biot-Savart*. Per ottenere l'espressione rispetto l'intensità di corrente abbiamo riscritto la densità di corrente in un volume come

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV = JA d\hat{l} = Id\hat{l}$$

dove A è la sezione del filo e la direzione $d\hat{l}$ è tangente a C, che coincide con la curva formata dal filo.

Esempio: Filo infinito rivisitato

Dato un sistema in cui è presente un filo infinito attraversato da una corrente, vogliamo verificare che sia verificata la legge di Biot-Savart. Passando in coordinate cilindriche, consideriamo un punto lungo sull'asse $\hat{\mathbf{z}}$ passante per il centro del filo e definiamo $r^2 = x^2 + y^2$ come coordinata radiale. L'elemento di filo è parametrizzato come $d\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}} dz$ e per un punto \mathbf{x} distante dal filo, il vettore $d\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ è tangente alla circonferenza di raggio r attraverso cui passa la corrente con intensità I,

$$d\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = rdz \hat{u}_\varphi$$

dunque avremo

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} dz \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\varphi$$

ritrovando lo stesso risultato per la legge di Ampère.

2.4 Dipoli magnetici

Abbiamo visto che le equazioni di Maxwell non permettono l'esistenza di monopoli magnetici e che il l'intensità del campo magnetico $B \sim 1/r^2$. In generale come decade il campo magnetico dovuto a distribuzioni di corrente localizzate in una regione di spazio? Nei prossimi paragrafi vedremo che se si è sufficientemente lontani dalla corrente, il campo appare come quello generato da un dipolo magnetico.

2.4.1 Corrente in una spira circolare

Consideriamo una spira circolare C con raggio R attraversata da una corrente con intensità I . Per calcolare il campo magnetico lontano dalla spira, utilizziamo l'espressione originale che abbiamo ottenuto per il potenziale vettore \mathbf{A} .

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

In termini della corrente il vettore potenziale diventa

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Siccome stiamo calcolando il campo in un punto \mathbf{r} molto lontano dalla corrente, avremo che l'argomento dell'integrale può essere espanso con Taylor

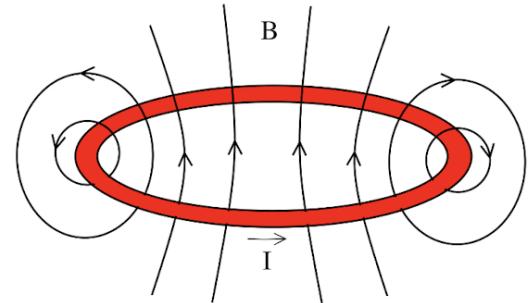
$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

e quindi abbiamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\mathbf{r}' \left(\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \right)$$

Il primo termine dell'espansione è nullo perché stiamo integrando lungo un circuito chiuso. Per il secondo termine, lo riscriviamo in una forma più maneggevole, introducendo il vettore costante \mathbf{g}

$$\oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')$$



CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

Osservare che rispetto all'integrale sia \mathbf{g} che \mathbf{r} sono vettori costanti. Utilizzando il teorema di Stokes abbiamo che

$$\oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times (\mathbf{g}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')) = \int_S dS_i \varepsilon_{ijk} \partial'_j (g_k r_l r'_l) = \mathbf{g} \cdot \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{r}$$

Tale identità è verificata per ogni vettore costante \mathbf{g} , il che vuol dire che deve valere anche per ogni uguaglianza tra vettori e quindi

$$\oint_C d\mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \mathcal{S} \times \mathbf{r}$$

dove \mathcal{S} è vettore d'area della superficie S delimitata dalla curva C , dove

$$\mathcal{S} = \int_S d\mathbf{S}$$

Se il circuito C è contenuto in un piano, come nel nostro caso, allora il vettore \mathcal{S} è ortogonale alla superficie e verso uscente.

Sostituendo nell'espressione del vettore potenziale avremo che

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{S} \times I\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

dove il termine

$$\mathbf{m} = I\mathcal{S} \tag{2.12}$$

prende il nome di *momento di dipolo magnetico*. Per calcolare il campo magnetico ricordiamo che $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, e svolgendo i dovuti calcoli algebrici abbiamo che

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \right)$$

che coincide con l'espressione del campo di un dipolo elettrico. In conclusione, per grandi distanze il campo magnetico \mathbf{B} e \mathbf{E} risultano essere identici avendo la forma di dipolo.

2.4.2 Distribuzione generiche di corrente

Consideriamo un circuito generico C chiuso e attraversato da una corrente d'intensità I , giacente nel piano (x,y) . Immaginiamo di suddividere il generico circuito in spire quadrate chiu-

se di lato b , in questo modo il campo magnetico complessivo può essere visto come la somma dei contributi dati dal campo delle singole spire.

Le correnti di ogni singola spira si cancellano con quelle adiacenti, in questo modo si ha che il contributo è dato solo da quella corrente che percorre il circuito C, lasciando così inalterato il sistema iniziale.

Il potenziale vettore è dato da

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} IN b^2 \frac{\sin \alpha}{r^2} \hat{u}_x$$

dove il termine $a = Nb^2$ è l'area complessiva del circuito, data dal contributo dell'area di N spire quadrate. Posto il momento di dipolo magnetico $\mathbf{m} = Ia\hat{u}_z$ avremo che il potenziale vettore è dato da

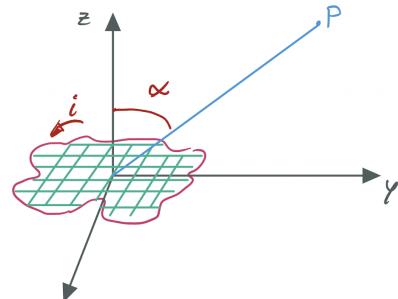
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Notare che i calcoli svolti sono approssimativi, in quanto se C è una curva generica, le spire in prossimità del bordo non avranno dei lati formati da linee rette e dunque non saranno quadrate, e quindi la loro area non è b^2 , ma un qualcosa di più piccolo. Dunque a seconda di come si sceglie di contare il numero di spire il termine \mathbf{m} avrà un valore diverso, dandone così una definizione non univoca. Il modo migliore per definire \mathbf{m} è dato dai passaggi usati nel paragrafo precedente.

Sappiamo che il campo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dove \mathbf{A} è ortogonale al piano (\hat{u}_r, \hat{u}_z), dunque $\mathbf{A} = (0, 0, A_\phi)$, dove $A_\phi = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2}$. Dato che il campo è definito come rotore del potenziale vettore questo non può avere coordinate lungo \hat{z} e quindi $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, 0)$ e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta)$$

Il campo di dipolo magnetico ha la stessa struttura del campo generato da un dipolo elettrico. Notare che per $r \gg b$ localmente i campi dono diversi e questo è dovuto alla diversa natura delle sorgenti.



2.5 Esempi di campi magnetici

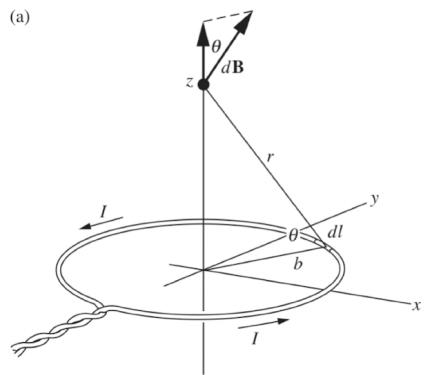
2.5.1 Campo magnetico di una spira circolare

Dato l'asse \hat{z} passante per il centro della spira circolare di raggio b e giacente nel piano (x,y) , determiniamo il campo magnetico in un punto lungo \hat{z} . Per la simmetria dell'anello rimane solo un contributo assiale del campo magnetico per un tratto infinitesimo della spira e utilizzando la legge di Biot-Savart definiamo

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|dl \times \hat{u}_r|}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{r^3} dl$$

Procedendo per integrazione

$$B_z(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{r^3} \oint_C dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{r^3} \int_0^{2\pi} bd\theta = \frac{\mu_0 I b^2}{2} \frac{1}{r^3}$$



Linee di campo

Consideriamo il campo magnetico \mathbf{B} in coordinate cilindriche (r, θ, z) e consideriamo un cammino C , interno alla spira circolare, applicando la legge di Ampère, abbiamo

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\theta \int_0^{2\pi} r d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad B_\theta = 0$$

Se immaginiamo d'invertire il senso di percorrenza della corrente, ovvero ruotando la spira di 180° , otteniamo la medesima configurazione di partenza, solo che il verso del campo magnetico B_r è opposto. Per una medesima sorgente, il campo non può essere diverso e quindi l'unico caso possibile è che $B_r = 0$. Quindi il campo ha direzione solo lungo l'asse \hat{u}_z

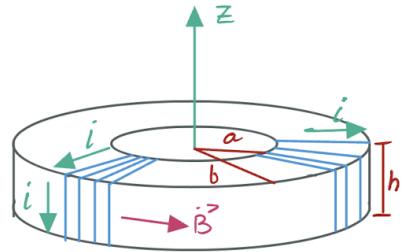
2.5.2 Campo magnetico di un solenoide toroidale

Dato un solenoide toroidale con angolo minore a e angolo maggiore b attraversato da una corrente I , abbiamo che il campo magnetico ha solo componente angolare

$$\mathbf{B} = B_\theta \hat{u}_\theta$$

questo è dovuto al fatto che prese due spire diametralmente opposte, cambia il senso di percorrenza della corrente viaggiando in modo opposto e quindi i campi lungo u_z e u_r sono opposti e di eguale intensità elidendosi in ogni punto per la simmetria dell'oggetto. Per determinare la forma esplicita del campo, definiamo un circuito di Ampère che racchiuda il toroide, $d\mathbf{l} = rd\theta \hat{u}_\theta$,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_\theta r d\theta = B_\theta 2\pi = \begin{cases} 0 & r < a \text{ o } r > b \\ \mu_0 I N & \text{altrimenti} \end{cases}$$



dove N è il numero di avvolgimenti del filo conduttore attorno al toroide. Quindi possiamo concludere che

$$B_\theta(r) = \begin{cases} 0 & r \notin [a, b] \\ \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} & r \in [a, b] \end{cases}$$

2.6 Forza magnetica

Abbiamo visto che una corrente produce un campo magnetico, ma una corrente altro non è che cariche in movimento. Per una carica q in movimento con velocità \mathbf{v} , questa sarà soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

che prende il nome di *forza di Lorentz*. Questo vuol dire che se posizioniamo una corrente in prossimità della prima, queste eserciteranno una forza l'una sull'altra.

Dalla forma della forza di Lorentz deduciamo che questa è ortogonale al piano formato dai vettori \mathbf{v} e \mathbf{B} , e quindi ai suoi singoli vettori. Possiamo desumere che l'accelerazione a cui è soggetta la carica sia di natura centripeta

$$\mathbf{a} = \frac{qvB}{m}$$

Consideriamo una quantità di carica dq passante all'interno di un filo la forza esercitata

CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

sulle cariche in movimento è data da

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

che risulta essere consistenza con il risultato empirico ottenuto da Laplace. Dato che le cariche sono vincolate nel filo, e queste subiscono una forza che cerca di portare al di fuori, questo reagisce con una reazione vincolare, esercitando una forza uguale e contraria.

Per velocità ordinare, quindi non relativistiche la forza magnetica è molto meno intensa di quella elettrostatica.

Esempio

Consideriamo una distribuzione di carica lineica positiva, il campo generato dalla distribuzione delle cariche è dato da

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

la forza a cui è soggetta una carica esploratrice è data da

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

Ora invece prendiamo un filo al cui interno scorre della carica q , il campo magnetico sarà dato da

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{\lambda v}{2\pi r} \hat{u}_\theta$$

e la forza magnetica a cui sono sottoposte le cariche è data dalla Forza di Lorentz

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qvB\hat{u}_r$$

Mettendo a confronto il modulo delle forze abbiamo che

$$\frac{\mathbf{F}_B}{\mathbf{F}_E} = \frac{qvB}{qE} = \mu_0\epsilon_0 v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 0$$

dove abbiamo posto $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Dunque a velocità ordinarie la forza di Coulomb è molto più grande di quella magnetica.

2.6.1 Forza tra due fili

Abbiamo visto come la forza magnetica porti a deviare le cariche all'interno di un filo e che mantengono la loro direzione di flusso per via della reazione vincolare esercitata dalla struttura. Che cosa succede se facciamo interagire due fili attraversati da corrente?

Prendiamo due fili in parallelo a distanza d e rispettivamente attraversati da una corrente I_1 e I_2 . La corrente nel primo filo genera un campo magnetico, di conseguenza se le cariche nel secondo filo si muovono con una velocità \mathbf{v} , saranno soggette ad una forza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\mathbf{v} \times \left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \right) \hat{u}_y$$

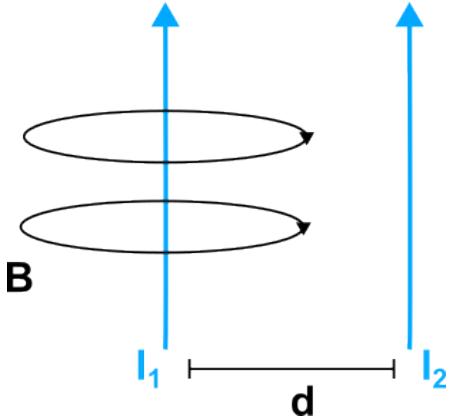
dove \hat{u}_y è la direzione del campo magnetico a cui le cariche del secondo filo sono sottoposte. Vogliamo scrivere la velocità \mathbf{v} in termini della corrente \mathbf{I}_2 del secondo filo. Se abbiamo una densità di particelle n di cui ciascuna trasporta una carica q , la densità di corrente sarà data da

$$\mathbf{J}_2 = nq\mathbf{v}$$

Per un filo di sezione A , la corrente è data da $I_2 = J_2 A$. Per il nostro sistema avremo che $\mathbf{J}_2 = J_2 \hat{u}_z$. Calcoliamo la forza esercitata sul filo per unità di lunghezza, \mathbf{f} . Dato che il numero di cariche per unità di lunghezza è dato da nA e \mathbf{F} è la forza applicata su ogni carica, abbiamo che

$$\mathbf{f} = nA\mathbf{F} = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \right) \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = - \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

Se le due correnti hanno la stessa direzione, $I_1 I_2 > 0$, e quindi la forza tra i due fili è attrattiva. Per correnti di segno opposto $I_1 I_2 < 0$ la forza è repulsiva.



2.7 Cariche in movimento in un campo magnetico uniforme

Se una particella di massa m si muove lungo una circonferenza di raggio R con velocità costante v , su di essa agisce una forza radiale di intensità $F = mv^2/r$, che punto sempre verso il centro ed è perpendicolare alla velocità della particella.

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come la forza \mathbf{F}_B punti sempre in direzione perpendicolare alla velocità \mathbf{v} della particella carica e del campo magnetico \mathbf{B} . Siccome, la forza magnetica \mathbf{F}_B non compie lavoro, l'unica cosa che può alterare è la direzione di \mathbf{v} e non la sua intensità.

In questa sezione cerchiamo di dare una risposta alla domanda: come evolve la dinamica di una particella carica con velocità \mathbf{v} che interagisce con un campo magnetico uniforme \mathbf{B} ?

Ipotizziamo che la particella abbia una carica positiva $+q$ e che la direzione del campo \mathbf{B} sia entrante nella pagina, inoltre $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ quando si immette nel campo. Sulla particella agirà la forza di Lorentz

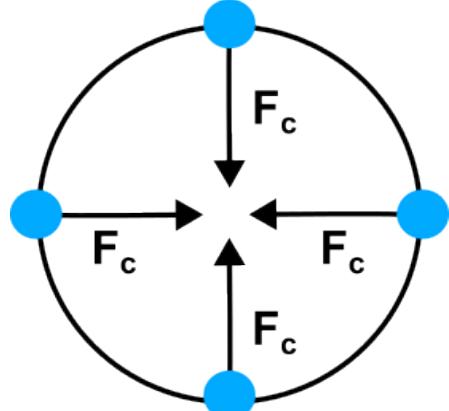
$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qvB \hat{\mathbf{u}}_r \quad (2.14)$$

troviamo quindi che sulla carica agisce una forza di natura radiale e quindi \mathbf{F}_B è una forza di natura centripeta, che porta q a muoversi in senso antiorario lungo un cammino circolare. Data l'identità

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

possiamo determinare il raggio della circonferenza percorsa dalla particella, ottenendo

$$r = \frac{mv}{qB}$$



Il periodo T con cui la carica compie una rivoluzione completa è dato da

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

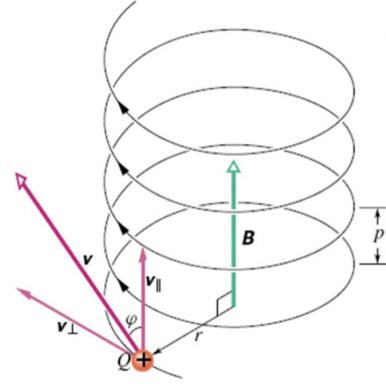
Similmente, la velocità angolare (o frequenza ciclotronica) ω della particella si deriva calcolando

$$\omega = 2\pi f = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

Se la velocità iniziale della particella carica possiede anche una componente parallela al campo magnetico \mathbf{B} , anzichè avere un moto circolare, la traiettoria risultante sarà elicoidale

In particolare la posizione della particella sarà descritta dalle equazioni

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) = R \sin(\omega t + \varphi) \\ z(t) = v_{||} t + z_0 \end{cases}$$

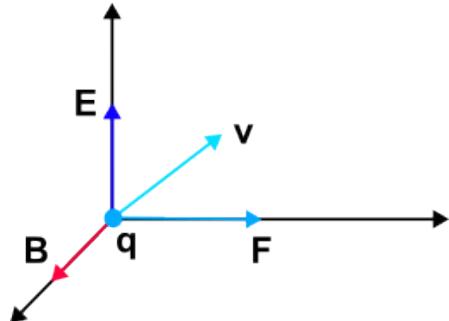


Il passo dell'elica è dato da $p = v_{||} T$ dove T coincide con il periodo con cui viene completato un giro nella proiezione sul piano.

2.7.1 Moto Cicloidale

Prendiamo un sistema in cui è presente sia un campo elettrico \mathbf{E} che un campo magnetico \mathbf{B} . Se il campo elettrico possiede solo una componente parallela al campo magnetico che ha direzione lungo $\hat{\mathbf{z}}$, il moto risulta essere circolare uniforme nel piano (x, y) , mentre il moto lungo $\hat{\mathbf{z}}$ diventa

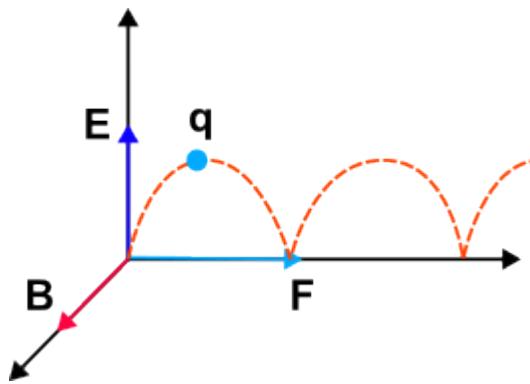
$$z(t) = \frac{1}{2} qEt^2 + v_{||}t + z_0$$



Se il campo $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ abbiamo un moto cicloidale. Consideriamo una carica inizialmente ferma, che subisce un'accelerazione per via della Forza di Coulomb lungo la sua componente $\hat{\mathbf{z}}$, su di essa agirà anche la forza di Lorentz che la porterà a deviare lungo $\hat{\mathbf{x}}$.

All'aumentare della velocità la forza di Lorentz cresce in intensità, fino a quando $\mathbf{F}_B > \mathbf{F}_E$ e la particella decelera fino a quando la forza di Coulomb non diventa più grande di

quella di Lorentz e la particella torna a salire.



La direzione dello spostamento della particella è data da

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|E||B|} = \hat{u}_y$$

Legge Oraria

Per come è stato formulato il problema, abbiamo che $\mathbf{F}_E = qE\hat{u}_z$, e quindi dato che giace nel piano (y, z) , la velocità con cui si muove la particella è data da

$$\mathbf{v} = v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z$$

e quindi possiamo riscrivere la forza di Lorentz come

$$\mathbf{F}_B = -qv_yB\hat{u}_z + qv_zB\hat{u}_y$$

Possiamo riassumere le forze agenti sugli assi interessati nel seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ m\ddot{z} = qE - qB\dot{y} \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} \\ \ddot{z} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}\dot{y} \end{cases}$$

che possiamo infine esprimere rispetto all frequenza ciclotronica $\omega = qB/m$

$$\begin{cases} \ddot{y} = \omega \dot{z} \\ \ddot{z} = \omega \left(\frac{E}{B} - \dot{y} \right) \end{cases}$$

Il moto ottenuto è accoppiato, per disaccoppiarlo consideriamo $\ddot{y} = \omega \dot{z}$ e sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \frac{E}{B}$$

che ha come soluzione omogenea

$$\dot{y}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

e soluzione particolare

$$\dot{y}_p(t) = \frac{E}{B}$$

avremo quindi un sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{E}{B} \\ \dot{z}(t) = b \cos(\omega t) - a \sin(\omega t) \end{cases}$$

imponendo le condizioni iniziali in cui $\dot{z}(0) = \dot{y}(0) = 0$, abbiamo che

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = a + \frac{E}{B} = 0 \\ \dot{z}(0) = b = 0 \end{cases}$$

e dunque la soluzione per un tempo $t > 0$ è data da

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t) \\ \dot{z}(t) = \frac{E}{B} \sin(\omega t) \end{cases}$$

CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

risolvendo per quadrature determiniamo le leggi orarie rispetto agli assi

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin(\omega t)) + y_0 \\ z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos(\omega t) + z_0 \end{cases}$$

imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$, avremo che $z_0 = \frac{E}{B}$ e $y_0 = 0$

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin(\omega t)) = R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos(\omega t) + \frac{E}{B} = R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} (y(t) - R\omega t)^2 = R^2 \sin^2(\omega t) \\ (z(t) - R)^2 = R^2 \cos^2(\omega t) \end{cases}$$

Sommando le soluzioni abbiamo l'equazione

$$(y(t) - R\omega t)^2 + (z(t) - R)^2 = R^2$$

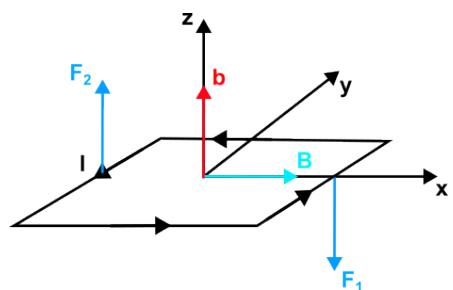
che definisce una circonferenza con centro $(R\omega t, R)$ e raggio R.

Stiamo descrivendo un punto su un cerchio che si sposta con velocità ωR . Se cambio sistema di riferimento passando a quello solidale con la circonferenza il campo elettrico risulta essere nullo, e quindi si è in un sistema in cui è presente solo il campo magnetico.

2.7.2 Azioni meccaniche su spira quadrata

Dato un sistema formato da una spira quadrata di lato b al cui interno scorre una corrente I in senso antiorario. Dato un campo magnetico uniforme

$$\mathbf{B} = B_x \hat{u}_x$$



CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

avremo che sui due lati della spira di esercita una forza

$$\mathbf{F}_2 = ibB_x\hat{u}_z \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_1 = -ibB_x\hat{u}_z$$

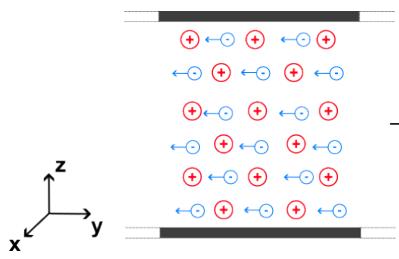
Dato che per ipotesi il campo magnetico è uniforme $\mathbf{R}_z = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$. Le forze agenti generano un momento torcente sulla spira dato da

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \Delta\mathbf{r} \times \mathbf{F} = b\hat{u}_x \times ibB_x\hat{u}_z = ib^2B_x\hat{u}_\perp = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Per un campo magnetico uniforme non si ha una risultante delle forze che contribuisce allo spostamento del sistema, ma solo il momento torcente che porta ad orientare il momento magnetico della spira nella direzione campo.

2.7.3 Effetto Hall

Quando una corrente circola in un conduttore in presenza di un campo magnetico, le cariche libere in moto risentono della forza di Lorentz, sperimentalmente quello che si osserva è l'azione della forza sul conduttore nel suo insieme.

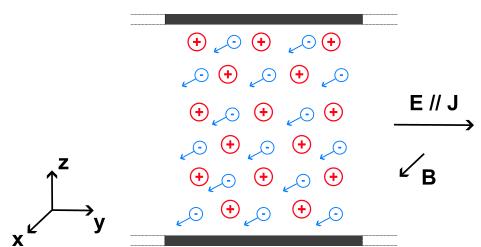


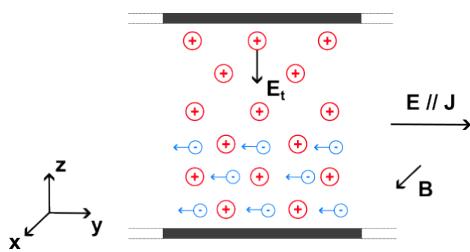
In una barra metallica percorsa da una corrente stazionaria, gli elettroni guidati dal campo elettrico \mathbf{E} , si muovo con verso concorde lungo l'asse \hat{u}_y con velocità media $\langle v \rangle$. Il reticolo cristallino del metallo costituito da ioni costituisce la struttura d'interazione tra le cariche e il metallo.

La densità di corrente $\mathbf{J} = nq\langle v \rangle$ si lega al campo elettrico mediante il coefficiente di conducibilità del metallo

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

Ipotizziamo ora di applicare al sistema un campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{u}_x$ che risulta essere ortogonale alla velocità media delle cariche; tale interazione produce una deviazione verso il basso degli elettroni in moto.





Data la struttura rigida del reticolo cristallino queste tenderanno ad accumularsi sul fondo creando un eccesso di carica negativa, di conseguenza nella parte superiore avremo un eccesso di carica positiva dovuta dagli ioni del reticolo. Questa configurazione delle distribuzioni di carica porta ad avere all'interno del conduttore un campo elettrico trasversale con orientazione vero il basso per gli ioni e verso l'altro per gli elettroni.

La presenza di questo nuovo campo elettrico fa sì che gli elettroni si riallineino con direzione concorde e verso opposto al campo iniziale \mathbf{E} . Questo si traduce nel fatto che sugli elettroni si genera una forza di Coulomb eguale e contraria che bilancia quella di Lorentz e quindi la risultante delle forze $\mathbf{R}_e = 0$.

In compenso si ha la comparsa di una forza elettrostatica agente sugli ioni del reticolo cristallino del metallo, con direzione verso il basso. In sostanza di è trasferita la forza di Lorentz alla barra metallica dato che

$$\mathbf{F}_{E_t} = \mathbf{F}_L$$

In caso di vincoli la barra preme contro il supporto generando una forza vincolare, mentre in assenza questa viene spinta verso il basso. L'effetto descritto prende il nome di *effetto Hall*.

Questo effetto rileva delle informazioni sul portatore di carica, infatti se la corrente nel metallo fosse stata dovuta a cariche positive in moto verso destra, si sarebbe manifestato un campo trasversale \mathbf{E}_t con segno opposto. Per misurare sperimentalmente tale risultato è sufficiente porre due misuratori di potenziale al capo superiore ed inferiore del filo in modo da misurare il campo E_t . A seconda del segno che assume il potenziale, questo ci fornisce informazioni sul segno delle cariche.

Quantitativamente il campo E_t è dato dall'uguaglianza

$$qE_t = q\langle v \rangle b \quad \Rightarrow \quad E_t = \langle v \rangle B$$

dato che $J = n\langle v \rangle q$ otteniamo che $\langle v \rangle = \frac{J}{nq}$, quindi possiamo riscrivere il campo trasversale

come

$$E_t = \frac{1}{nq}B \iff |\mathbf{E}_t| = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{nq}$$

dove il coefficiente $1/nq$ prende il nome di *coefficiente di Hall* della sostanza.

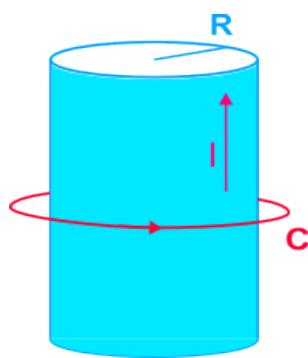
La misura dell'effetto Hall nei metalli ha stabilito che i portatori sono negativi.

Esempio

Nel calcolo del campo magnetico del filo infinito attraversato da una corrente stazionaria abbiamo ottenuto che all'interno del filo il campo cresce in modo lineare rispetto alla distanza radiale. Abbiamo potuto assumere che la corrente fosse uniforme nel conduttore perché l'effetto Hall è trascurabile.

2.8 Energia Magnetica

2.8.1 Pressione Magnetostatica



Dato un cilindro conduttore cavo raggio R percorso da una corrente I . Si ha che la densità di carica di superficie è data da

$$K = \frac{I}{2\pi R}$$

Il campo magnetico generato è dato dalla legge di ampère per un circuito C come in figura e quindi

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_\theta 2\pi r = \mu_0 I$$

per $r > R$. Quindi

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \mu_0 K & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

Avremo quindi una discontinuità di campo $\Delta B = \mu_0 K$.

Il campo magnetico esercita una forza \mathbf{F}_B sulla corrente di strato, per determinarne l'espressione per unità di superficie possiamo applicare la formula di Laplace andando a considerare una porzione quadrata della superficie di lato L , e quindi area L^2 .

La forza di Lorentz dovuta all'interazione della corrente i che scorre nella patch, con il campo magnetico di tutte le sorgenti (interne ed esterne alla pezza) è data da

$$\mathbf{F}_B = -iL\langle B \rangle \hat{u}_r$$

dove il campo magnetico medio è dato da

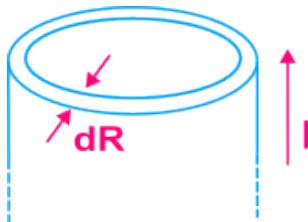
$$\langle B \rangle = \frac{B_{ext} + B_{int}}{2}$$

Definiamo pressione magnetostatica la grandezza

$$P = \frac{F_B}{L^2} = -\frac{KL^2}{L^2} \frac{B_{ext} + B_{int}}{2} = -\frac{1}{2\mu_0} (B_{ext} - B_{int})(B_{ext} + B_{int}) = -\frac{1}{2\mu_0} (B_{ext}^2 - B_{int}^2)$$

Nel nostro caso specifico dato che $B_{int} = 0$ abbiamo che la pressione è data da $P = -\frac{1}{2\mu_0} B_{ext}^2$. Notare che la pressione magnetica è omogenea alla densità di energia.

2.8.2 Densità di energia magnetica



Supponiamo che la pressione comprima il cilindro di un tratto dR e che la corrente I che attraversa il cilindro sia costante. Nel volume $dV = 2\pi R dR h$ comparirà un campo magnetico dove prima non era presente di intensità $B = \mu_0 K$.

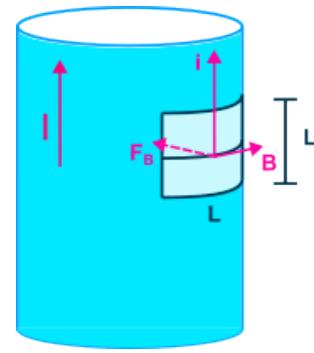
La pressione compie un lavoro apparente dato da

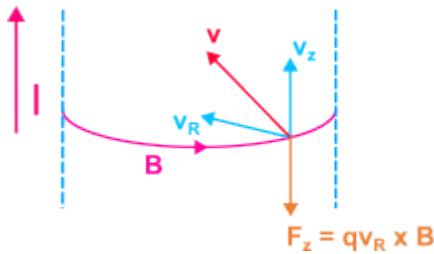
$$pdV = \frac{1}{2\mu_0} B_{ext}^2 2\pi r dR h$$

il termine

$$\mu_B = \frac{1}{2\mu_0} B_{ext}^2$$

prende il nome di *densità di energia magnetostatica*. Il lavoro è apparente perché non è compiuto dalla forza di Lorentz \mathbf{F}_B , ma da un agente esterno (come per esempio delle batterie) che sostiene la corrente I contro \mathbf{F}_B .





Consideriamo la velocità degli elettroni all'interno del cilindro durante lo spostamento dR , e sotto l'azione del campo magnetico \mathbf{B} . Le componenti saranno date da:

1. v_z rappresenta la velocità di deriva associata alla corrente I ;
2. v_R rappresenta la velocità radiale lungo μ_R .

La forza di Lorentz \mathbf{F}_B avrà una componente assiale in verso opposto alla velocità di deriva,

$$\mathbf{F}_{Bz} = q\mathbf{v}_R \times \mathbf{B} = -qv_R B \hat{u}_z$$

associata allo spostamento dR . Per mantenere costante la corrente I si dovrà avere una lavoro contro la forza \mathbf{F}_B pari a

$$dW = -\mathbf{F}_{Bz} \cdot d\mathbf{z} = -\mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{r} \iff (qv_R B)(v_z dt) = qv_z B(v_R dt) \iff F_{Br} dR = PAdR$$

Il lavoro erogato dalla forza esterna risulta essere uguale al lavoro apparente della pressione magnetostatica. A tale lavoro si associa la variazione di energia magnetica associata al campo \mathbf{B} .

Osservazione. Questo risultato è al confine della magnetostatica. Nel cambio di configurazione del cilindro, le correnti non sono stazionarie.

2.9 Principi della magnetostatica

Fino a questo punto ci siamo concentrati nel dare una definizione matematica delle fenomenologie legate al magnetismo, ma non abbiamo discusso delle unità di misura utilizzate. Il campo magnetico \mathbf{B} viene misurato in Tesla, come l'omonimo ingegnere elettrico Nicola Tesla. Questo è descritto come

$$[T] = \frac{[NS]}{[CL]}$$

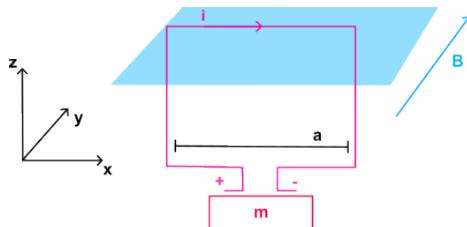
Il campo magnetico, ma come anche quello elettrico dipendono dal sistema di riferimento considerato. I due campi sono accoppiati tra loro, infatti la manifestazione di un fenomeno che sia elettrico o magnetico dipende dal sistema di riferimento considerato. Per esempio se

ci mettiamo solidali con un sistema in cui scorre della corrente, le cariche risulteranno ferme e di conseguenza si avrà solo un campo elettrico, ma non magnetico. Il viceversa avviene se consideriamo il sistema di laboratorio, in cui osserviamo la carica muoversi.

Esistono però delle eccezioni, ovvero delle sorgenti di campo **E**, date da delle cariche elementari, oppure dipoli magnetici elementari per il campo **B**, rispetto ai quali la loro esistenza è indipendente dal sistema di riferimento considerato.

2.10 Esempi ed esercizi

2.10.1 Esempio 1: Lavoro apparente della forza magnetica



Consideriamo un apparecchio costituito da una spira rettangolare attraversata da una corrente stazionaria i sostenuta da una batteria di massa m . Parte della spira viene attraversata da un campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{u}_y$ uniforme e con direzione entrante verso il foglio. La larghezza della spira è a . Determinare la condizione di equilibrio e il lavoro compiuto per lo spostamento verticale della batteria, supponendo che $i > mg/aB$.

Soluzione

La forza di Lorentz agente sull'estremità superiore del filo è data da

$$\mathbf{F}_B = id\mathbf{l} \times \mathbf{B} = iaB\hat{u}_z$$

Le cariche sono sottoposte alla forza peso e quindi si ha una condizione di equilibrio quando

$$F_B = F_{mg} \quad \Rightarrow \quad iaB = mg \quad \Rightarrow \quad i = \frac{mg}{aB}$$

Per $i > mg/aB$ lo spostamento verticale $\Delta\mathbf{s} = \Delta z\hat{u}_z$. Il lavoro apparente dovuto alla forza di Lorentz è dato da

$$W = \mathbf{F}_B \cdot \Delta\mathbf{s} = iaB\Delta z$$

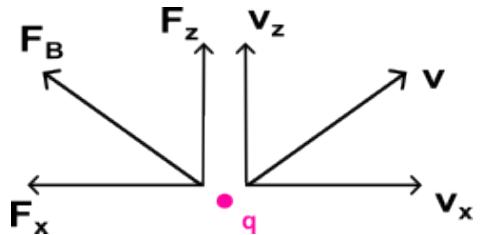
CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

Durante lo spostamento verticale, il moto delle cariche è sovrapposizione di due moti.

$$\begin{cases} \Delta x = v_x \Delta t \\ \Delta z = v_z \Delta t \end{cases} \Rightarrow v_x \Delta z = v_z \Delta x$$

Lungo la direzione \hat{u}_x abbiamo la velocità delle cariche dovuta alla corrente stazionaria. Analogamente la forza di Lorentz non è più ortogonale alle cariche e quindi ha due componenti

$$\begin{cases} F_x = -\Delta q v_z B \\ F_z = \Delta q v_x B = i a B \end{cases}$$



la grandezza Δq è la carica trasportata per una distanza a nel tempo Δt .

\mathbf{F}_B ha una componente lungo x , in verso opposto alla corrente, di conseguenza la batteria compie lavoro contro F_x per mantenere la corrente stazionarie e quindi compiendo un lavoro

$$W_{batt} = -\mathbf{F}_x \cdot \Delta \mathbf{x} = \Delta q v_z B \Delta x = \Delta q v_x B \Delta z = i a B \Delta z$$

La batteria compie il lavoro apparente della forza di Lorentz. Per l'appunto è apparente in quanto la \mathbf{F}_B è ortogonale allo spostamento e quindi non compie lavoro.

CAPITOLO 3

Circuiti Elettrici

3.1 Condensatori

In generale un condensatore è una coppia di conduttori che hanno carica Q e $-Q$ rispettivamente. Un esempio è dato da due piani conduttori in parallelo.

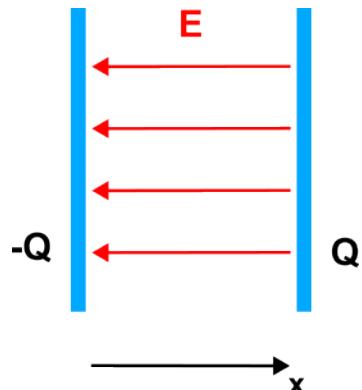
3.1.1 Condensatore a piani paralleli

Consideriamo due piani conduttori posti in parallelo come in figura, e assumiamo che la distanza d tra i piani sia molto più piccola di \sqrt{A} dove A è l'area delle superfici planari. Imporre una condizione del genere ci permette di considerare gli effetti che si generano al bordo dei piatti e quindi possiamo assumere che il campo elettrico che generato nella regione tra i due piani coincida con quello che si avrebbe se le superfici avessero una estensione infinita. Il campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x}$$

dove $\sigma = Q/A$ e il campo ha direzione opposta a quella dell'asse x . Definiamo *capacitanza* la grandezza

$$C = \frac{Q}{V} \tag{3.1}$$



CAPITOLO 3. CIRCUITI ELETTRICI

dove V rappresenta il *voltaggio* o la *differenza di potenziale*, tra i due piani paralleli. Dato che $\mathbf{E} = -\frac{d\phi}{dx}$, avremo che

$$\phi(x) = -Ex + c \quad \Rightarrow \quad V = \phi(0) - \phi(d) = Ed = \frac{Qd}{A\varepsilon_0}$$

e quindi possiamo concludere che la capacità per due piatti paralleli di area A e posti ad una distanza d , sono

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

La capacità di un condensatore dipende dalla sua geometria e non dalla carica Q . I condensatori in generale vengono usati per immagazzinare energia elettrica. L'energia accumulabile da un condensatore è data dalla relazione

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{A\varepsilon_0}{2} \int_0^d dx \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

L'unità di misura per la capacità è data dal *Farad* che è dato da

$$[F] = \frac{[Coulomb]}{[Volt]}$$

3.1.2 Conduttori con condensatore interno

3.1.3 Sistemi di conduttori / condensatore a pištrati

3.2 Conduttori Ohmnici

3.2.1 Legge di Ohm

3.3 Componenti di un circuito elettrico

3.3.1 Resistenze in serie e parallelo

3.3.2 Condensatori in serie e parallelo

3.3.3 Riduzione di un circuito

3.3.4 Legge di Kirchoff

3.4 Carica e Scarica di un condensatore

3.5 Forza elettromotrice

CAPITOLO 3. CIRCUITI ELETTRICI

CAPITOLO 5

Elettrodinamica

5.1 Leggi d'induzione

Lo studio delle trasformazioni del campo elettrostatico e del campo magnetico stazionari in sistema in moto relativo ha evidenziato che \mathbf{E} e \mathbf{B} sono in un qualche modo legati tra loro.

In fenomeni variabili (dipendenti dal tempo) \mathbf{E} e \mathbf{B} sono mutuamente accoppiati. Alcune relazioni che descrivono i campi stazionari sono incomplete e vanno estese. Se consideriamo una carica puntiforme in moto nel sistema di riferimento del laboratorio, allora le seguenti leggi dedotte per le cariche statiche non sono più valide:

$$\mathbf{E} \text{ non è conservativo} \iff \nabla \times \mathbf{E} \neq 0$$

$$\mathbf{B} \text{ non soddisfa la legge di Ampère} \iff \nabla \times \mathbf{B} \neq \mu_0 \mathbf{J}$$

Iniziamo l'analisi dei fenomeni non stazionari dalle osservazione sperimentali di Faraday che sistemanano la prima relazione $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$. Data una carica statica all'interno di un conduttore questa induce una carica indotta nei conduttori, ma che cosa succede se una corrente di carica atteaversa un conduttore? sperimentalmente si osserva una corrente indotta al suo interno per flussi vairabili nel tempo. Ma a questo punto diventa legittimo domandarsi come mai le cariche all'interno del conduttore si mettano in moto, ovvero quali siano le forze (apparenti) responsabili?

Inoltre Faraday compie altri esperimenti che restituiscono il medesimo risultato:

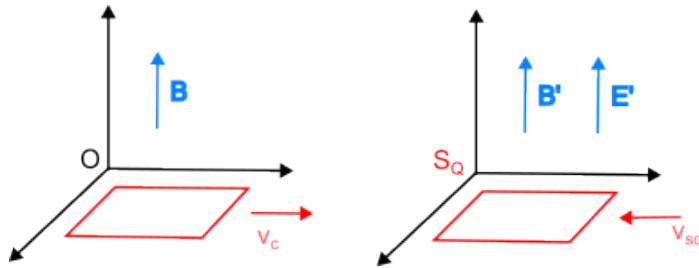
1. conduttore deformato o in movimento immerso in un campo elettromagnetico \mathbf{B}

stazionario;

2. le sorgenti del campo magnetico \mathbf{B} sono in moto rispetto al conduttore;
3. conduttore in presenza di campo magnetico variabile della sorgente

5.1.1 Esempio

Consideriamo un conduttore dato da una spira quadrata nel piano (x,y). Definiamo un sistema di riferimento solidale con la spira S_Q e un sistema O in cui si trova l'osservatore. La spira si muove con una velocità \mathbf{v}_c rispetto ad O.



Nella prima immagine partendo da sinistra abbiamo che

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v}_c \times \mathbf{B} \neq 0 \quad (5.1)$$

mentre il campo elettrico è $E = 0$. Da questo risultato possiamo dedurre che la corrente indotta che si osserva all'interno della spira deve essere conseguenza di una forza di natura magnetica.

Se consideriamo la seconda immagine in cui S_Q è il sistema fissato, osserveremo il sistema O muoversi con velocità \mathbf{v}_c in senso opposto. Rispetto al sistema S_Q le cariche sono stazionarie di conseguenza $F_{B'} = 0$ e quindi la corrente che si osserva all'interno della spira non può essere conseguenza di un effetto magnetico. Inoltre è presente un campo elettrico E' .

Nel seguente paragrafo delineiamo i principi che legano il campo magnetico variabile alle forze che permettono di osservare della corrente all'interno di un conduttore.

5.2 Legge di Faraday

Una delle equazioni di Maxwell mette in relazione campi magnetici ed elettrici

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

Tale equazione ci dice che se il campo magnetico è variabile nel tempo, allora crea un campo elettrico. La creazione di un campo elettrico fa sì che le cariche vengano accelerate, ovvero creino una corrente all'interno di un filo. Il processo di creazione di una corrente mediante un campo magnetico variabile prende il nome di *induzione*.

Consideriamo un filo come un conduttore, avvolto attorno ad una curva stazionaria C . Un filo chiuso prende il nome di circuito. Se integriamo l'equazione (5.1) rispetto alla superficie S racchiusa dal circuito chiuso C , abbiamo che

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

utilizzando il teorema di Stokes possiamo riscrivere l'equazione come

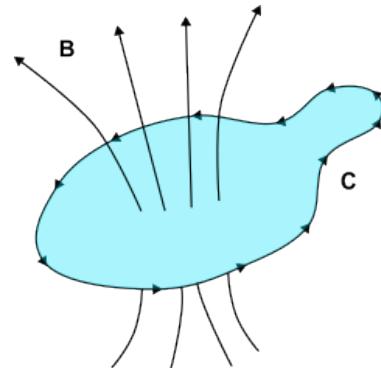
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Per ottenere l'ultima relazione abbiamo assunto che né C né S possano cambiare nel tempo. L'integrale di linea attorno a C del campo elettrico prende il nome di *forza elettromotrice*, \mathcal{E} , che di solito viene abbreviata con *fem*.

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

La forza elettromotrice non è realmente una forza come possiamo vedere dalla sua espressione, in realtà è la componente tangenziale della forza per unità di carica, integrata lungo un filo. Un altro modo di vederla è dato dal lavoro necessario a spostare una carica unitaria lungo la curva C . Se la *fem* è non nulla allora è presente della carica accelerata all'interno del filo che genera quindi una corrente.

L'integrale del campo magnetico passante attraverso la superficie S prende il nome di



flusso magnetico Φ attraverso la superficie S ,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Di conseguenza possiamo riscrivere l'equazione di Maxwell (5.1) come

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.3)$$

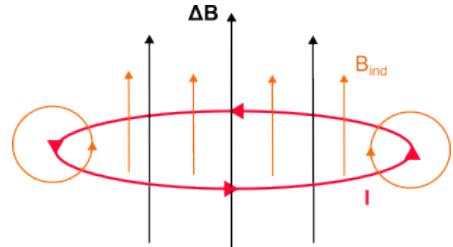
In questa forma l'equazione prende il nome di *legge di Faraday*.

La legge di Faraday ci dice che se cambiamo il flusso del campo magnetico attraverso una superficie S delimitata da un circuito, allora osserveremo un flusso di corrente all'interno del filo. Esistono diversi modi per modificare il campo magnetico, per esempio spostando una barra magnetica in vicinanza ad un circuito, passandola attraverso la superficie S delimitata dal filo conduttore. Un altro modo è dato muovendo un secondo filo C'' attraverso da una corrente, oppure tenendolo fisso e variando l'intensità di corrente al suo interno accendendolo e spegnendolo. Tutti questi metodi inducono una corrente in C .

Esiste anche un secondo effetto, dovuto al fatto che dato un campo magnetico variabile e avendo una corrente indotta all'interno del circuito C , avremo che a sua volta la carica in moto genera un suo campo magnetico. Il campo magnetico indotto è orientato sempre in opposizione al cambiamento. Questo fenomeno prende il nome di *legge di Lenz* e giustifica il segno negativo nella legge di Faraday (5.2).

5.2.1 Esempio legge di Lenz

Possiamo dimostrare la legge di Lenz con un semplice esempio. Consideriamo un caso in cui il cammino C è una circonferenza giacente in un piano, e ipotizziamo che sia immersa in campo magnetico B uniforme che al passare del tempo questo diventa più piccolo e dunque $\dot{\Phi} < 0$. Per la legge di Faraday abbiamo che $\mathcal{E} > 0$ e la corrente scorre in senso antiorario lungo



C. La corrente indotta genere una campo \mathbf{B} che incrementa il campo all'interno della spira opponendosi alla sua decrescita.

5.2.2 Esempio: Batteria (Corrente Stazionaria)

Quando osserviamo della corrente all'interno di un circuito ci sono solo due forze responsabili del trasporto delle cariche: la sorgente, \mathbf{F}_s , che solitamente è confinata in una porzione del circuito (come una batteria) e una forza di natura elettrostatica, che serve a trasportare l'effetto della sorgente sul resto del circuito:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{E} \quad (5.4)$$

Nel caso di una batteria \mathbf{F}_s è data dal potenziale chimico al suo interno. Il lavoro compiuto complessivamente sul circuito è dato come sempre dall'integrale di linea della forza agente su di esso quindi

$$\mathcal{E} \equiv \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{s}$$

e quindi come definito il precedente all'interno del circuito abbiamo una forza elettromotrice responsabile de flusso delle cariche al suo interno.

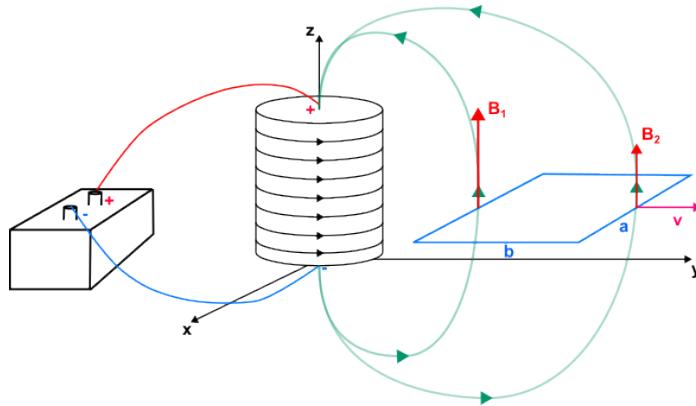
Se consideriamo un modello semplificato della batteria, in cui ne trascuriamo la resistenza, abbiamo che la forza sulle cariche è $E = -\mathbf{F}_s$, dunque la *fem* possiamo vederla legata alla tensione ai campi della batteria.

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V$$

Lo scopo di una batteria è quello di manterne un differenza di potenziale all'interno di un circuito pari alla forza elettromotrice. Notare che all'interno di una batteria \mathbf{F}_s la corrente ha flusso in direzione opposta al campo elettrico \mathbf{E} .

5.2.3 Generatori Elettrici

Ipotizziamo di avere un sistema in cui abbiamo una sorgente (generatore) che genera un campo magnetico \mathbf{B} stazionario, ma non uniforme nello spazio. Nel sistema è presente una spira rettangolare in moto con velocità \mathbf{v} costante.



Siccome il campo magnetico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ dipende dalla posizione la forza a cui sono soggette le cariche nella spira dipende dalla distanza dalla sorgente. Calcolando la forza di Lorenz per unità di carica $\mathbf{F}_B = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, ad un istante di tempo t :

$$\oint \mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{s} = v(B_1 - B_2)a \neq 0$$

dove a è la lunghezza di un tratto della spira. Lungo b la forza \mathbf{F}_B è ortogonale al tratto di spira (vedere figura) di conseguenza non contribuisce all'intergrale, e quindi si un contributo solo lungo a dove \mathbf{F}_B è parallelo alla direzione.

La forza complessiva che agisce su una carica del circuito è data da

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$$

di conseguenza il lavoro compiuto dal generatore è dato da

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

dove si è trascurato il contributo del campo elettrico \mathbf{E} essendo conservativo. Il lavoro compiuto dal generatore è proprio la forza elettromotrice che permette lo spostamento delle cariche e coincide con la forza di Lorentz per unità di carica.

5.2.4 Moto di un filo in un campo magnetico stazionario

Come abbiamo visto un modo per indurre una corrente all'interno un conduttore è quello di mantere la sorgente fissata e il conduttore in moto. Se prendiamo come conduttore una barra di lunghezza a (o segmento di circuito), le cariche libere si muovono sotto l'azione di $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. sulle cariche si raggiunge uno stato di equilibrio statico quando il campo \mathbf{E} interno al conduttore, generato dalla distribuzione di carica, ottenuta dopo il riarrangiamento indotto da \mathbf{F}_B , bilancia la forza di Lorentz.

$$\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_E = 0 \iff \mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Ai capi della barra compare una differenza di potenziale

$$\Delta V = - \int_0^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

Se il circuito è chiuso, se \mathbf{B} non è uniforme, abbiamo che $\Delta V_1 \neq \Delta V_2$ nei due segmenti distanti tra loro, di conseguenza compare una *fem*, dovuta alla forza di Lorentz.

5.2.5 Lavoro della forza esterna

Prendiamo un sistema in cui è presente un campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ non uniforme e al suo interno è immersa una spira rettangolare di lato minore a (il lato maggiore non ci interessa per la dinamica del problema). Ipotizziamo che la spira sia tirata da una forza esterna \mathbf{F}_{ext} concorde con gli assi del sistema di riferimento. All'interno della spira è presente una corrente di cariche che si spostano con velocità \mathbf{v}_D che è la velocità di deriva e una componente di velocità \mathbf{v} data dalla forza esterna agente. La velocità di una singola carica è quindi data da

$$\mathbf{v}_q = v_D \hat{\mu}_x + v \hat{\mu}_y$$

La forza sulle cariche presenti nei due segmenti verticali alla direzione di spostamento che contribuiscono al lavoro è data da

$$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 = \underbrace{-q\mathbf{v}_D B_1 \hat{\mu}_y}_{\text{opposta a } \mathbf{F}_{ext}} + qv B_1 \hat{\mu}_x$$

il secondo addendo determina il moto delle cariche nel filo.

CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

APPENDICE A

Formule Notevoli

A.1 Operatore Nabla in coordinate sferiche e cilindriche

Operatore	Coordinate cartesiane	Coordinate cilindriche	Coordinate Sferiche
Definizione delle coordinate		$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y = r \sin \theta \sin \phi & 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = r \cos \theta & 0 \leq r < +\infty \end{cases}$
		$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos(z/r) \\ \phi = \arctan(y/x) \end{cases}$
Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \\ & \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \\ & \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \\ & \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \\ & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\theta} + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{aligned}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Lunghezza Infinitesima	$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
Area Infinitesima	$d\mathbf{S} = dy dz \hat{\mathbf{x}} +$ $dx dz \hat{\mathbf{y}} +$ $dx dy \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} +$ $\rho d\phi dz \hat{\phi} +$ $\rho d\phi dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} +$ $r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} +$ $r dr d\theta \hat{\phi}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$

A.2 Relazioni Notevoli

1. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$ (Laplaciano)
2. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = 0$
3. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
4. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
5. $\nabla^2 fg = f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2 f$

Formula di Lagrange per il prodotto vettoriale: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

1. $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$
2. $\nabla \times f\mathbf{A} = f\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla f$
3. $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$
4. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
5. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$