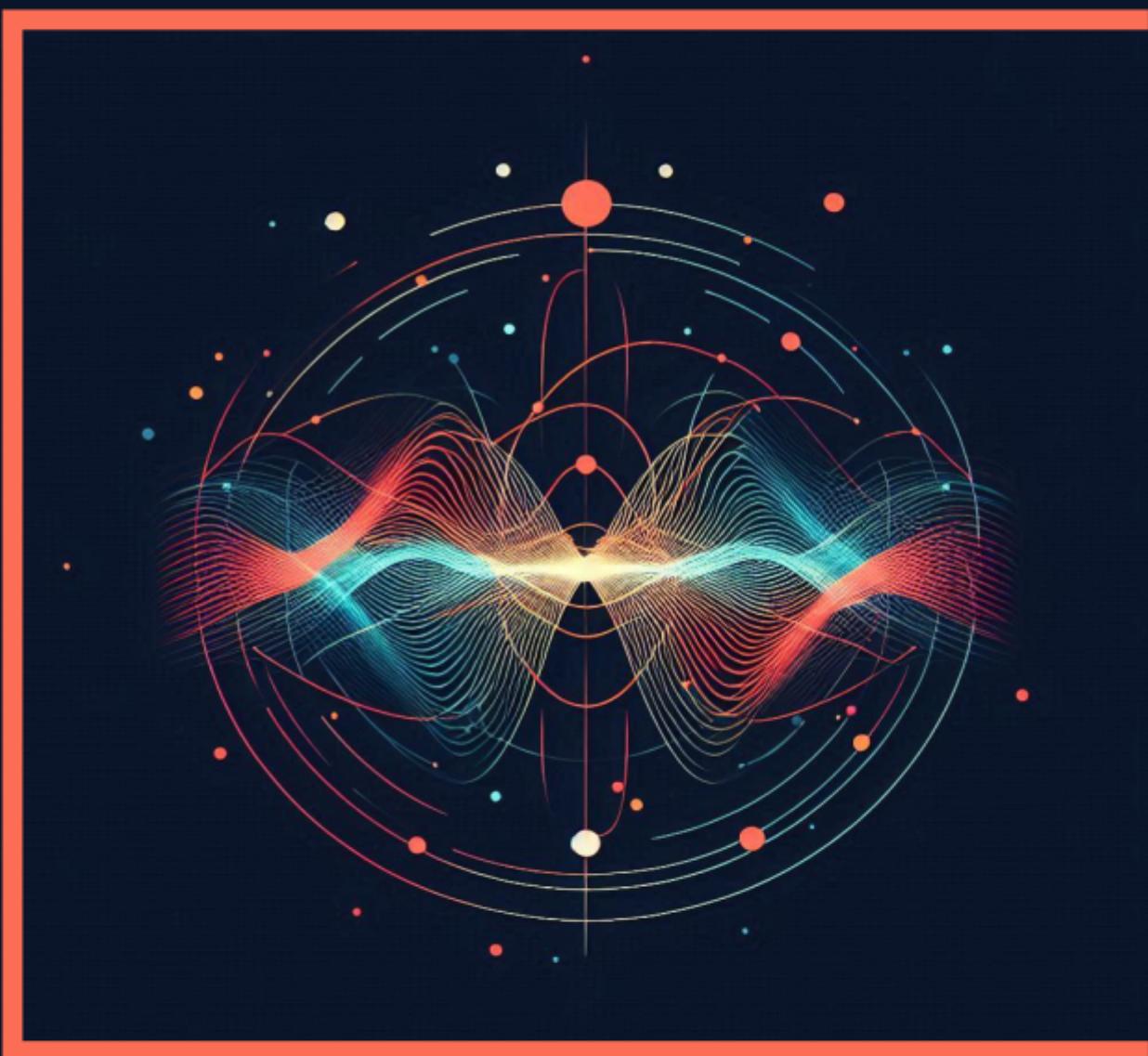


# Elettromagnetismo & Onde



Di Lernia Giulio



---

## Indice

---

<b>1 Elettrostatica</b>	<b>9</b>
1.1 Proprietà elementari dell’interazione elettrica di due cariche . . . . .	9
1.2 Legge di Coulomb (Elettrostatica) . . . . .	10
1.3 Principio di Sovrapposizione . . . . .	11
1.3.1 Distribuzioni di carica per corpi continui . . . . .	12
1.3.2 Configurazioni Notevoli di carica . . . . .	13
1.3.3 Distribuzione lineare di carica . . . . .	13
1.4 Energia di un Sistema di Cariche . . . . .	14
1.5 Campo Elettrico . . . . .	16
1.5.1 Rappresentazione del Campo Elettrico . . . . .	17
1.6 Flusso di un Campo Vettoriale . . . . .	21
1.7 Legge di Gauss . . . . .	23
1.7.1 Distribuzione di Carica a Simmetria Sferica . . . . .	26
1.7.2 Distribuzione di carica a Simmetria Cilindrica (Filo ”infinito”) . .	27
1.7.3 Distribuzione di Carica di Superficie e Discontinuità . . . . .	28
1.7.4 Coppia di Piani . . . . .	30
1.8 Potenziale Elettrostatico. Gradiente . . . . .	30
1.8.1 Tensione. Differenza di Potenziale Elettrostatico . . . . .	30
1.8.2 Il Gradiente . . . . .	33
1.8.3 Potenziale per una distribuzione di cariche . . . . .	36
1.8.4 Energia Potenziale Elettrostatica . . . . .	37
1.8.5 Esempi ed Esercizi . . . . .	38
1.9 Divergenza di un Campo Vettoriale . . . . .	42
1.9.1 Espressione della Divergenza in coordinate cartesiane . . . . .	44

## INDICE

---

1.9.2	Proprietà dell' operatore gradiente . . . . .	47
1.9.3	Esempi ed Esercizi . . . . .	47
1.10	Rotore di un campo vettoriale . . . . .	48
1.10.1	Espressione del rotore in coordinate cartesiane . . . . .	50
1.10.2	Proprietà del rotore . . . . .	52
1.10.3	Campi conservativi e irrotazionalità . . . . .	53
1.11	Equazioni dell'elettrostatica . . . . .	54
1.11.1	Operatore Laplaciano . . . . .	54
1.11.2	Equazione di Poisson . . . . .	54
1.11.3	Equazione di Laplace . . . . .	55
1.12	Coordinate curvilinee ortogonali . . . . .	56
1.12.1	Gradiente . . . . .	58
1.12.2	Rotore e Divergenza . . . . .	59
1.12.3	Laplaciano . . . . .	60
1.12.4	Esempi ed Esercizi . . . . .	60
1.13	Conduttori e Isolanti . . . . .	62
1.13.1	Induzione Totale . . . . .	65
1.13.2	Problema generale dell'elettrostatica: Il teorema di unicità . . . . .	68
1.13.3	Campo all'interno di un conduttore cavo . . . . .	71
1.13.4	Metodo delle cariche immagine . . . . .	71
1.14	Energia del campo elettrostatico . . . . .	75
1.15	Dipolo elettrico . . . . .	78
1.16	Esempi ed esercizi . . . . .	80
1.16.1	Carica puntiforme in prossimità di una sfera conduttrice (Esame 23/06/2020)	80
1.16.2	Esercizio 2 . . . . .	83
<b>2</b>	<b>Magnetostatica</b>	<b>85</b>
2.1	Correnti stazionarie . . . . .	85
2.1.1	Derivzione dell'equazione di continuità . . . . .	86
2.2	Legge di Ampère . . . . .	90
2.2.1	Principio di sovrapposizione per il campo magnetico . . . . .	91
2.2.2	Filo infinito percorso da una corrente . . . . .	91
2.2.3	Correnti di superficie e discontinuità . . . . .	93

---

## INDICE

2.2.4	Flusso del campo magnetico . . . . .	95
2.2.5	Solenoide . . . . .	96
2.3	Potenziale vettore . . . . .	98
2.3.1	Monopoli Magnetici . . . . .	99
2.3.2	Trasformazioni di Gauge . . . . .	100
2.3.3	Legge di Biot-Savart . . . . .	101
2.4	Dipoli magnetici . . . . .	104
2.4.1	Corrente in una spira circolare . . . . .	104
2.4.2	Distribuzione generiche di corrente . . . . .	105
2.5	Esempi di campi magnetici . . . . .	107
2.5.1	Campo magnetico di una spira circolare . . . . .	107
2.5.2	Campo magnetico di un solenoide toroidale . . . . .	107
2.6	Forza magnetica . . . . .	108
2.6.1	Forza tra due fili . . . . .	110
2.7	Cariche in movimento in un campo magnetico uniforme . . . . .	111
2.7.1	Moto Cicloidale . . . . .	112
2.7.2	Azioni meccaniche su spira quadrata . . . . .	115
2.7.3	Effetto Hall . . . . .	116
2.8	Energia Magnetica . . . . .	118
2.8.1	Pressione Magnetostatica . . . . .	118
2.8.2	Densità di energia magnetica . . . . .	119
2.9	Principi della magnetostatica . . . . .	120
2.10	Esempi ed esercizi . . . . .	121
2.10.1	Esempio 1: Lavoro apparente della forza magnetica . . . . .	121
<b>3</b>	<b>Circuiti Elettrici</b>	<b>123</b>
3.1	Condensatori . . . . .	123
3.1.1	Condensatore a piani paralleli . . . . .	123
3.1.2	Conduttori con condensatore interno . . . . .	125
3.1.3	Sistemi di conduttori / condensatore a pištrati . . . . .	125
3.2	Conduttori Ohmnici . . . . .	125
3.2.1	Legge di Ohm . . . . .	125
3.3	Componenti di un circuito elettrico . . . . .	125

## INDICE

---

3.3.1	Resistenze in serie e parallelo . . . . .	125
3.3.2	Condensatori in serie e parallelo . . . . .	125
3.3.3	Riduzione di un circuito . . . . .	125
3.3.4	Legge di Kirchoff . . . . .	125
3.4	Carica e Scarica di un condensatore . . . . .	125
3.5	Forza elettromotrice . . . . .	125
<b>4</b>	<b>Magnetismo e Relatività</b>	<b>127</b>
<b>5</b>	<b>Elettrodinamica</b>	<b>129</b>
5.1	Leggi d'induzione . . . . .	129
5.1.1	Esempio . . . . .	130
5.2	Legge di Faraday . . . . .	131
5.2.1	Esempio legge di Lenz . . . . .	132
5.2.2	Esempio: Batteria (Corrente Stazionaria) . . . . .	133
5.2.3	Generatori Elettrici . . . . .	134
5.2.4	Moto di un filo in un campo magnetico stazionario . . . . .	135
5.2.5	Lavoro della forza esterna . . . . .	135
5.2.6	Caso Generale . . . . .	137
5.2.7	Esempio: Generatore di Corrente Alternata . . . . .	138
5.2.8	Esempio: Dinamo di Faraday . . . . .	139
5.2.9	Sorgenti magnetiche in moto (Secondo Esperimento di Faraday) . . . . .	140
5.2.10	Campo Magnetico Variabile (Terzo Esperimento di Faraday) . . . . .	142
5.2.11	Legge di induzione di Faraday per Campi Magnetici Stazionari . . . . .	143
5.2.12	Esempio: Variazione del Campo Magnetico . . . . .	143
5.2.13	Esempio: Circuito e Campo magnetico variabili . . . . .	144
5.2.14	Forma Locale della Legge di Faraday . . . . .	144
5.2.15	Campo Elettrico Indotto . . . . .	145
5.2.16	Esempio 1 . . . . .	146
5.2.17	Esempio 2 . . . . .	147
5.2.18	Esempio 3 . . . . .	147
5.3	Verso le Equazioni di Maxwell . . . . .	148
5.3.1	Corrente di Spostamento . . . . .	150

---

## INDICE

5.3.2	Esempio: Corrente Radiale . . . . .	152
5.3.3	Scarica del Condensatore . . . . .	153
5.3.4	Limite Quasi-Statico . . . . .	154
5.4	Induzione Elettromagnetica . . . . .	157
5.4.1	Mutua Induttanza . . . . .	158
5.4.2	Autoinduttanza . . . . .	161
5.5	Induttanza come Elemento Circuitale (Circuito RL) . . . . .	163
5.5.1	Scarica di un Induttore . . . . .	164
5.5.2	Combinazione di Induttori . . . . .	165
5.5.3	Trasformatore . . . . .	167
5.6	Energia Magnetica . . . . .	169
5.6.1	Esempio: Energia Immagazzinata in un Solenoide Toroidale . . . . .	170
5.6.2	Energia Magnetica di N induttori . . . . .	170
5.6.3	Esempio: Piani Superconduttori . . . . .	172
5.6.4	Dimostrazione dell'Equivalenza Delle Due Espressioni dell'Energia Magnetica . . . . .	174
5.7	Oscillazioni Elettriche . . . . .	175
5.7.1	Circuito RLC in Serie . . . . .	175
5.7.2	Circuito RLC Forzato . . . . .	180
5.7.3	Esempio: Cavo Coassiale . . . . .	183
<b>7</b>	<b>Campi Elettrici nei Mezzi Materiali</b>	<b>185</b>
7.1	Dielettrici . . . . .	185
7.1.1	Polarizzazione . . . . .	185
7.1.2	Costante Dielettrica Relativa . . . . .	186
7.2	Sviluppo in Multipoli del Potenziale Elettrostatico . . . . .	190
7.2.1	Potenziale di Dipolo . . . . .	192
7.3	Azione Meccanica di un Campo Elettrico su un Dipolo . . . . .	194
7.3.1	Campo Elettrico Uniforme . . . . .	194
7.3.2	Dipolo Non Rigido Soggetto ad un Campo Elettrico Non Uniforme .	197
7.4	Polarizzazione dei Mezzi . . . . .	198
7.4.1	Mezzi Polari . . . . .	198
7.4.2	Polarizzazione Atomica: Dipoli Indotti . . . . .	200

## **INDICE**

---

7.5	Relazione Generale tra il Campo di Polarizzazione e il Vettore di Polarizzazione	206
7.6	Legge di Gauss (per i Dielettrici) . . . . .	208
7.6.1	Relazione Costitutiva . . . . .	209
7.6.2	Equazione di Maxwell per L'elettrostatica . . . . .	210
7.6.3	Relazione di continuità per <b>E</b> e <b>D</b> . . . . .	210
7.6.4	Problemi di Elettrostatica con i Dielettrici . . . . .	212
7.6.5	Caso Notevole: Campo di una Sfera Dielettrica con <b>P</b> uniforme . . .	215
7.6.6	Altre strategie di risoluzione per problemi con i Dielettrici . . . . .	218
7.7	Energia nei Dielettrici . . . . .	219
<b>8</b>	<b>Campi Magnetici nei Mezzi Materiali</b>	<b>221</b>
<b>9</b>	<b>Campi Elettromagnetici Variabili nei Mezzi Materiali</b>	<b>223</b>
<b>10</b>	<b>Ottica Fisica, Geometrica e Ondulatoria</b>	<b>225</b>
<b>A</b>	<b>Formulario</b>	<b>227</b>
A.1	Operatore Nabla in coordinate sferiche e cilindriche . . . . .	227
A.2	Relazioni Notevoli . . . . .	228

# CAPITOLO 1

---

## Elettrostatica

---

### 1.1 Proprietà elementari dell'interazione elettrica di due cariche

L'interazione tra corpi "elettrizzati" ha diverse proprietà irriducibili. Una di queste è lo stato di carica di un corpo che è definito da due condizioni:

- Carica Positiva (Protoni)
- Carica Negativa (Elettroni)

che permettono di descrivere una forza d'interazione repulsiva o attrattiva.

Sperimentalmente si osserva che tutti i corpi (o particelle) possiedono carica e che dati due corpi con lo stesso segno di carica si sperimenta una forza repulsiva e per segni opposti attrattiva. Una delle proprietà più importanti è la *conservazione della carica*.

La carica totale di un sistema isolato (ovvero che non scambia carica con l'ambiente), è definita dalla somma algebrica delle cariche positive e di quelle negative ed è costante.

$$Q = \sum q^+ + \sum q^- = \text{cost}$$

La carica non sono è conservata per tutti gli osservatori inerziali, ma è anche un invariante relativistico, ovvero la carica totale  $Q$  non dipende dall'osservatore.

Un'altra proprietà importante è che la carica è *quantizzata*, tale proprietà ci dice che in un corpo carico, la carica totale è un multiplo intero della carica di un elettrone o di un positrone. Al momento non esiste una spiegazione al motivo per cui la carica sia quantizzata

## CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

---

e assuma valori continui.

La materia contiene un numero enorme di protoni ed elettroni  $\geq 6 \times 10^{23}/mol$ . Una piccola differenza di carica renderebbe la materia non neutra, e dunque elettricamente instabile, dunque la materia in natura possiede carica neutra.

### 1.2 Legge di Coulomb (Elettrostatica)

L'interazione tra due cariche puntiformi e stazionarie, ovvero fisse l'una rispetto all'altra e nel riferimento del laboratorio, è descritta dalla legge di forza

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mu}_{r_{12}} \quad \text{dove} \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (1.1)$$

che esprime la forza esercitata dalla prima carica sulla seconda.

La dipendenza dal prodotto delle cariche fa sì che a seconda del loro segno si abbia il verso dell'interazione.

- Per una coppia di cariche (+,-) si ha che  $\mathbf{F}$  è attrattiva.
- Per una coppia (+,+) o (-,-) si ha che  $\mathbf{F}$  è repulsiva.

Il valore della costante  $k$ , e della carica, dipende dalla scelta del sistema di misura. Nel sistema internazionale la carica è misurata in Coulomb (C) e la costante  $k$  è posta nella forma

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,81 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C} \quad \text{e} \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

il termine  $\epsilon_0$  prende il nome di *costante dielettrica nel vuoto* e il suo valore dipende dalle proprietà del mezzo rispetto a cui avviene l'interazione elettrostatica, in questo caso stiamo considerando il vuoto.

Utilizziamo l'unità di misura dell'Ampere (A) che rappresenta l'intensità di corrente posta tra due fili paralleli posti a un metro di distanza e che generano una forza di  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N$ . La carica elementare di un elettrone è pari a

$$e = -1.6 \times 10^{-19} C$$

che coincide con quella di un protone, ma con segno opposto.

L'interazione di Coulomb coinvolge oggetti che possiedono massa, ma l'interazione gravitazionale tra le cariche elementari è trascurabile.

### Esempio

Se consideriamo l'interazione tra due protoni distanti 1 metro e ricordando che la costante gravitazionale è  $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg s^2}$  e la massa di un protone è pari a  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} Kg$  si ha che il rapporto tra forza gravitazionale e di Coulomb è

$$\frac{F_G}{F_{el}} = \frac{G m_p^2}{k p^2} \approx 10^{-36}$$

*Osservazione.* Tra le cariche elementari si esercita anche una forza magnetica, associata al momento magnetico elementare della particella ( proprietà quantistica associata allo SPIN). Su distanze atomiche, ovvero di un  $\text{\AA} = 10^{-10}m$ , l'interazione magnetica elementare è  $\approx 10^4$  volte meno intensa dell'interazione elettrostatica e a livello macroscopico è totalmente trascurabile (l'intensità diminuisce come  $\frac{1}{r^3}$ ).

## 1.3 Principio di Sovrapposizione

Consideriamo un sistema costituito da tre cariche  $q_1, q_2$  e  $q_3$ , possiamo calcolare la forza di Coulomb esercitata su coppie distinte

$$\mathbf{F}_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{\mu}_{13}$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mu}_{12}$$

$$\mathbf{F}_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{\mu}_{23}$$

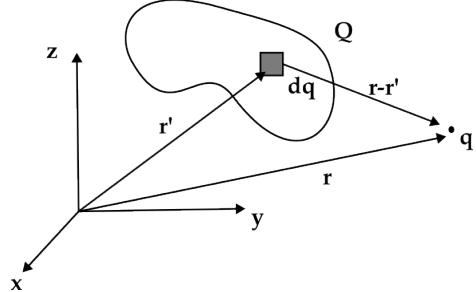
Se vogliamo calcolare la forza su una singola carica, per esempio  $q_3$ , si ha evidenza sperimentale che la forza complessiva su di essa è data da

$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{\mu}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{\mu}_{23}$$

ovvero è somma vettoriale delle forze elettrostatiche dovute a tutte le altre cariche nel sistema.

### 1.3.1 Distribuzioni di carica per corpi continui

I sistemi macroscopici sono costituiti da un numero elevato di cariche e tipicamente il suo bilancio è neutro, ovvero si ha un egual numero di elettroni e protoni. Quando l'equilibrio viene rotto vengono spostate molte cariche e dunque il problema tipico che viene affrontato è quello di determinare la forza esercitata da una distribuzione di carica generica. Per farlo ricorriamo al principio di sovrapposizione.



Se consideriamo una carica  $q$  interagente con una porzione di carica  $dq$  infinitesima di una distribuzione continua  $Q$ , abbiamo che la forma esercitata tra le due cariche è data da

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qdq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu}_{rr'}$$

la forza d'interazione complessiva sarà data dall'integrale rispetto alla carica totale della distribuzione della forza infinitesima

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{qdq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu}_{rr'}$$

posto  $dq' = \rho(\vec{r}')dV$  definiamo il termine  $\rho(\vec{r})$  come densità volumica di carica e possiamo riscrivere la forza di Coulomb rispetto al volume della distribuzione di carica

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r})dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu}_{rr'}$$

Se l'elemento di carica considerato dal corpo continuo è macroscopicamente piccolo, possiamo considerare le densità di carica funzioni continue rispetto la posizione, mentre se è microscopicamente grande le densità sono funzioni regolari della posizione. In sostanza nel

primo caso il volume infinitesimo  $dV$  considerato possiede un grande quantità di cariche e quindi è trascurabili la natura corpuscolare delle cariche e quindi possiamo trattarlo come un elemento continuo.

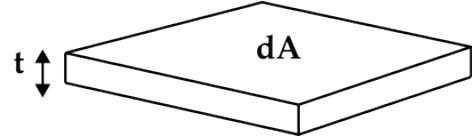
### 1.3.2 Configurazioni Notevoli di carica

Le distribuzioni carica non assumono solo forme tridimensionali, ma possono essere superficiali o lineari, per entrambi i casi si definiscono:

#### Distribuzione superficiale di carica

Consideriamo uno strato sottile (di spessore trascurabile) di area  $S$  di un materiale. Allora avremo che

$$dq = \rho dV = \rho(t)dA = (\rho t)dA = \sigma dA$$



dove

$$\sigma = \frac{dq}{dA}$$

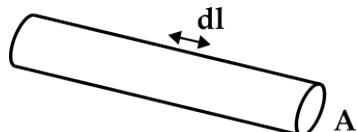
prende il nome di *densità di carica areica*. La corrispettiva forza esercita da una superficie di carica è data dall'integrale di superficie della forza di Coulomb per una carica sonda  $q$

$$\mathbf{F} = \int_S d\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r})dA}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} \mu_{rr'}$$

### 1.3.3 Distribuzione lineare di carica

Consideriamo un cavo la cui sezione ha superficie  $A$ , e prendiamone un tratto infinitesimo, allora la quantità di carica contenuta sarà data da

$$dq = \rho dV = \rho(Adl) = (\rho A)dl = \lambda dl$$



dove

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

prende il nome di *densità lineica di carica*. Se consideriamo una carica sonda  $q$  la forza esercitata dalla carica lineare su tale particella sarà espressa dalla legge di Coulomb formulata

nel seguente modo

$$\mathbf{F} = \int_L d\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}') dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{\mu}_{rr'}$$

## 1.4 Energia di un Sistema di Cariche

In linea di principio, tutta l'elettrostatica è compresa nella legge di Coulomb. Date le cariche e le loro posizioni possiamo ricavare tutte le forze elettriche agenti, o nel caso in cui queste siano in moto per azione di altre forze possiamo determinare la condizione di equilibrio elettrostatico.

Come fatto per la meccanica introduciamo il concetto di energia per l'elettromagnetismo, il che è assunto un aspetto molto importante dato che le forze elettriche sono di natura *conservativa*.

Consideriamo un sistema formato da due particelle che inizialmente si trovano ad una grande distanza e dotate di carica  $q_1$  e  $q_2$ . Se ora vogliamo avvicinarle tra loro ad una distanza  $\mathbf{r}_{12}$  quanto lavoro dobbiamo compiere?

Per rispondere a questa domanda utilizziamo la generica definizione di lavoro, ovvero che il lavoro compiuto in un sistema è dato dall'integrale di linea della forza agente sulle cariche.

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

dove nel caso di cariche la forza agente è per spostare una carica verso l'altra ha la stessa intensità di quella di Coulomb, ma con verso opposto.

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}_{12}} \frac{q_1 q_2}{\mathbf{r}^2} d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad (1.2)$$

Di conseguenza abbiamo che il lavoro compiuto sul sistema è:

- $W > 0$  per cariche dello stesso segno.
- $W < 0$  per cariche di segno opposto.

Dato che la forza è conservativa si ha che il lavoro compiuto non dipende dal percorso scelto per avvicinare le due cariche, ma solo dalla posizione iniziale e finale.

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

Supponiamo di introdurre una terza carica  $q_3$  all'interno del sistema e di portarla da un punto molto lontano al punto  $P_3$  che si trova a distanza  $r_{31}$  per la prima carica e  $r_{21}$  per la seconda carica. Il lavoro richiesto per compiere tale operazione è

$$W_3 = - \int_{\infty}^{P_3} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r}$$

Grazie al principio di sovrapposizione abbiamo che la forza totale agente sulla carica  $q_3$  è data da

$$W_3 = - \int (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}) \cdot d\mathbf{r} = - \int \mathbf{F}_{31} \cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}_{32} \cdot d\mathbf{r}$$

ovvero il lavoro che si compie per portare  $q_3$  in  $P_3$  è la somma del lavoro necessario quando è presente solo  $q_1$  e di quello necessario quando è presente solo  $q_2$ . Dal risultato ottenuto in (1.2) si ha che

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \right)$$

Il lavoro totale compiuto per realizzare la distribuzione di tre cariche, che indicheremo con  $U$ , è

$$U = W + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \right) \quad (1.3)$$

Notare che l'espressione è simmetrica rispetto a  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  e dunque è indipendente da quale carica si considera d'introdurre per ultima. Dunque  $U$  non dipende dall'ordine delle cariche con cui si assembla il sistema e non dipende dal percorso che si sceglie per farlo, l'energia totale del sistema dipende unicamente dalla posizione iniziale e finale, come ci si aspetterebbe da un sistema le cui forze agenti sono conservative.

Possiamo definire  $U$  come *energia potenziale elettrica* del sistema. Quando si definisce un energia potenziale in un sistema vi è una certa arbitrarietà nella scelta nella sua definizione, in questo caso si è scelto come zero di  $U$  la configurazione in cui le tre cariche si trovano ad una distanza così grande tra loro che non vi è interazione tra di esse.

È semplice la generalizzazione del risultato (1.3) ad un sistema costituito da  $N$  particelle, è sufficiente considerare il lavoro della forza su coppie distinte e sommarlo.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} \frac{q_j q_k}{r_{jk}} \quad (1.4)$$

## CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

---

Il fattore  $1/2$  serve ad eliminare i conteggi doppi del lavoro dato che le coppie con ordine  $(j,k)$  e  $(k,j)$  restituiscono il medesimo risultato e dunque si sommano.

*Osservazione.*

- Se  $q_1$  e  $q_2$  sono concordi in segno:  $U(r) > 0$  le cariche (se non vincolate) si allontanano e l'energia potenziale diminuisce a favore dell'energia cinetica.
- Se  $q_1$  e  $q_2$  sono discordi in segno:  $U(r) < 0$  le cariche si avvicinano e l'energia potenziale aumenta a sfavore dell'energia cinetica.

Un sistema le cui cariche a coppie hanno  $U(r) < 0$  è legato e occorre compiere del lavoro per separare le cariche. L'energia potenziale per un sistema di questo tipo viene denominata *energia di legame*.

### Esempio - Separazione di una molecola di sale

Consideriamo la molecola di sale data da  $Na^+Cl^-$  costituita da un atomo di sodio ( $Na$ ) e di cloro ( $Cl$ ) poste ad una distanza  $d \approx 3\text{\AA}$ . Quando l'atomo di sodio e cloro vengono separate a una distanza  $r$  molto grande il sistema è ben descritto da due cariche puntiformi con carica  $|q| = e$ . L'energia potenziale (o di legame in questo caso) del sistema è data da

$$U(d) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \approx -7.7 \times 10^{-19} J$$

Se consideriamo un sistema di particelle che può essere messo in agitazione termica l'energia termica è approssimativamente di  $\frac{5}{2}kT = 10^{-20}J$  per una temperatura  $T = 300 K$ . L'energia fornita termicamente è di quasi due volte inferiore all'energia necessaria per separare il sodio dal cloro.

## 1.5 Campo Elettrico

Supponiamo di avere una distribuzione di cariche  $q_1, q_2, \dots, q_n$  fisse rispetto ad un osservatore e di volerne studiare l'interazione con una carica  $q_0$ . Trascurando la forza d'interazione tra le cariche e considerando solo la forza di Coulomb complessiva sulla nostra carica sonda  $q_0$  si ha che

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q_j}{r_{0j}^2} \hat{\mu}_{0j}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

dove  $\mathbf{r}_{0j}$  è la posizione delle cariche rispetto alla posizione di  $q_0$ . La risultante delle forze risulta essere proporzionale alla carica della particella sonda, se dividiamo per questa quantità la forza totale, otteniamo una grandezza vettoriale che dipende unicamente dalla struttura del sistema iniziale di cariche  $q_1, \dots, q_n$  e dalla posizione della carica  $q_0$ . Il vettore così definito prende il nome di *campo elettrico* associato alle cariche  $q_1, \dots, q_n$  e viene definito nel seguente modo

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\mathbf{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{0j}^2} \hat{\mu}_j \quad (1.5)$$

Definito un campo elettrico per qualsiasi carica  $q$ , la forza dovuta alla distribuzione di cariche (che abbiamo supposto stazionarie) è esprimibile tramite

$$\mathbf{F}_q = q\mathbf{E}$$

Il campo elettrico associa a ogni punto in un sistema una proprietà locale, se conosce il valore di  $\mathbf{E}$  in una piccola regione, senza bisogno di ulteriori informazioni, conosciamo cosa accadrà a qualsiasi carica posta in quella zona, senza necessariamente conoscere come siano distribuite le cariche sorgente.

### 1.5.1 Rappresentazione del Campo Elettrico

Per visualizzare un campo elettrico è necessario associate un vettore, cioè, intensità, verso e direzione in ogni punto dello spazio. Iniziatutto si consideri il fatto che per una carica puntiforme la simmetria del campo è sferica e la sua direzione è data dal segno della carica. Data la simmetria del campo, visto che darne una rappresentazione tridimensionale diventa complicato, possiamo sfruttare tale proprietà per darne una raffigurazione bi-dimensionale, che non ne rende inefficacie la descrizione fisica.

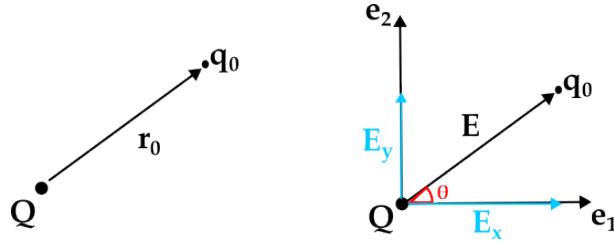
Consideriamo il campo generato da una carica  $Q$  positiva (e negativa), e iportizziamo di testarlo con una carica  $q_0$ , in questo caso avremo che il campo percepito dalla carica sonda è lungo la congiungente e quindi è espresso come

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^2} \hat{\mu}_{r_0}$$

## CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

---

vogliamo riscrivere il campo rispetto alla base di vettori  $\{e_1, e_2\}$  che definiscono un sistema ortonormale.



prendendo la posizione di  $Q$  come origine del sistema riscriviamo la lunghezza radiale in coordinate cartesiane  $r_0^2 = x^2 + y^2$ . Le proiezioni del campo rispetto agli elementi della base sono date da

$$\begin{cases} E_x = E \cos \theta \\ E_y = E \sin \theta \end{cases}$$

utilizzando le relazioni fondamentali della trigonometria dove  $\cos \theta = \frac{x}{x^2+y^2}$  e  $\sin \theta = \frac{y}{x^2+y^2}$  le componenti del campo vettoriale si riscrivono come

$$\begin{cases} E_x(x, y) = E \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ E_y(x, y) = E \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Conoscendo il valore delle componenti in ogni punto del piano, possiamo definirne direzione, verso e intensità del campo vettoriale. Dalle figure si nota come l'intensità del campo

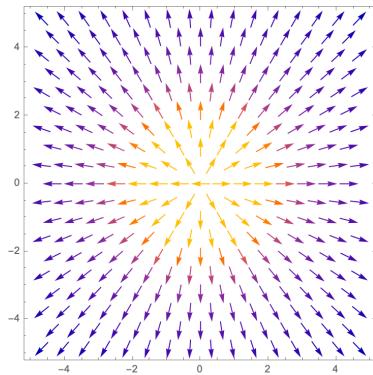


Figura 1.1: Campo Elettrostatico per una sorgente di carica positiva

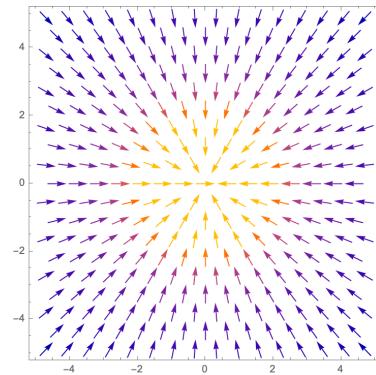


Figura 1.2: Campo Elettrostatico per una sorgente di carica negativa

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

decresca come  $\frac{1}{r^2}$  e dunque risultando più intenso in prossimità della sorgente.

```
1 Mathematica Snippet
2
3 Q = 1.6*10^(-19)
4 d = 8.854187822*10^(-12)
5
6 Ex[q_, x_, y_, x0_, y0_] :=
7 q/(4*Pi*d)*((x - x0)/((x - x0)^2 + (y - y0)^2)^(1.5))
8
9 Ey[q_, x_, y_, x0_, y0_] :=
10 q/(4*Pi*d)*((y - y0)/((x - x0)^2 + (y - y0)^2)^(1.5))
11
12 {VectorPlot[{Ex[Q, x, y, 0, 0], Ey[Q, x, y, 0, 0]}, {x, -5,
13 5}, {y, -5, 5}],
14 VectorPlot[{Ex[-Q, x, y, 0, 0], Ey[-Q, x, y, 0, 0]}, {x, -5,
15 5}, {y, -5, 5}]}
```

Dato che il campo elettrico gode del principio di sovrapposizione si ha che per configurazioni di più cariche si applica lo stesso metodo, sommando le componenti dei campi elettrici generati dalle singole cariche in tutti i punti dello spazio.

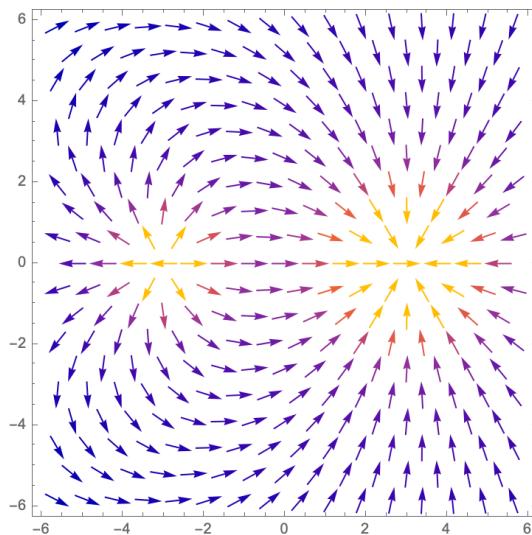


Figura 1.3: Campo generato da una carica  $Q$  in  $(-3,0)$  e una carica  $-3Q$  posta in  $(3,0)$

## CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

---

```

1 Mathematica Snippet
2
3 Exx[q1_, q2_, x_, y_, x0_, y0_, x1_, y1_] =
4   Ex[q1, x, y, x0, y0] + Ex[q2, x, y, x1, y1]
5
6 Eyy[q1_, q2_, x_, y_, x0_, y0_, x1_, y1_] =
7   Ey[q1, x, y, x0, y0] + Ey[q2, x, y, x1, y1]
8
9 VectorPlot[
10 {Exx[Q, -3*Q, x, y, -3, 0, 3, 0], Eyy[Q, -3*Q, x, y, -3, 0, 3, 0]}, 
11 {x, -6, 6}, {y, -6, 6}
12 ]

```

Un altro modo per rappresentare un campo, e in questo caso un campo elettrico, è utilizzando le linee di flusso (forza). Queste si ottengono risolvendo il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = E_x(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = E_y(x, y) \end{cases}$$

dove il campo elettrico risulta essere tangente alle soluzioni  $(x(t), y(t))$  di questo sistema.  $(x, y)$  descrivono curve regolari e continue, tranne che nei punti di singolarità o nei punti dove il campo è nullo. Graficamente l'informazione d'intensità di un campo viene recuperata dal fatto che le linee di forza si addensano in prossimità delle cariche sorgente dove il campo è intenso e diventano rarefatte allontanandosi.

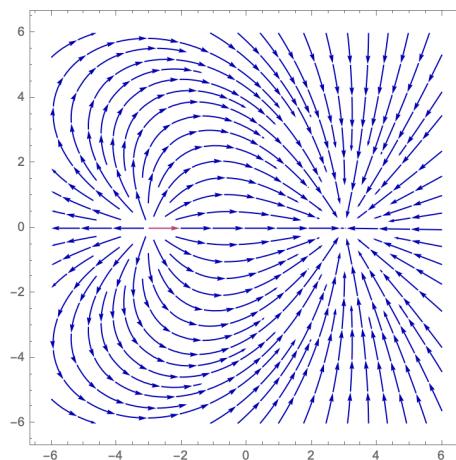


Figura 1.4: Linee di Forza associate per una carica  $Q$  in  $(-3,0)$  e  $-3Q$  in  $(3,0)$

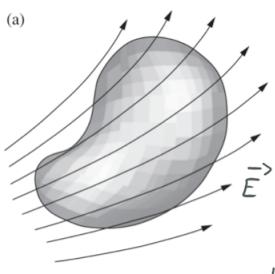
```

1 Mathematica Snippet
2
3 Exx[q1_, q2_, x_, y_, x0_, y0_, x1_, y1_] =
4   Ex[q1, x, y, x0, y0] + Ex[q2, x, y, x1, y1]
5 Eyy[q1_, q2_, x_, y_, x0_, y0_, x1_, y1_] =
6   Ey[q1, x, y, x0, y0] + Ey[q2, x, y, x1, y1]
7
8 StreamPlot[
9 {Exx[Q, -3*Q, x, y, -3, 0, 3, 0],
10 Eyy[Q, -3*Q, x, y, -3, 0, 3, 0]}, 
11 {x, -6, 6}, {y, -6, 6}]
12 ]

```

## 1.6 Flusso di un Campo Vettoriale

La relazione tra campo elettrico e sorgenti può essere espressa in forma semplice e utile tramite la nozione di *flusso* del campo elettrico attraverso una superficie.

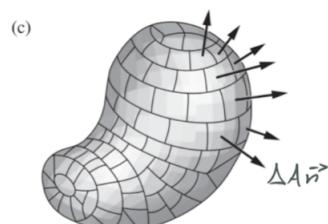


Si immagini di avere una superficie chiusa come in figura in una regione di spazio in cui è presente un campo elettrico  $\mathbf{E}(x, y, z)$  generato da una distribuzione di cariche.

Procediamo con l'affettare tale superficie in piccoli elementi di area  $\Delta A_j$  e al centro di ciascuno di essi applichiamo un vettore ortogonale alla superficie la cui intensità è data dall'area dell'elemento. Definendo  $\Delta \mathbf{A}_j = \Delta A_j \hat{n}$  dove  $\hat{n}$  è un versore ortogonale alla superficie considerata e con direzione uscente.

Se l'area della porzione di superficie è sufficientemente piccola, in quella regione di spazio possiamo considerare il campo elettrico  $\mathbf{E}(x, y, z)$  costante.

Definiamo il flusso del campo elettrico rispetto all'area  $\Delta A_j$  come la sua proiezione lungo la direzione del



## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

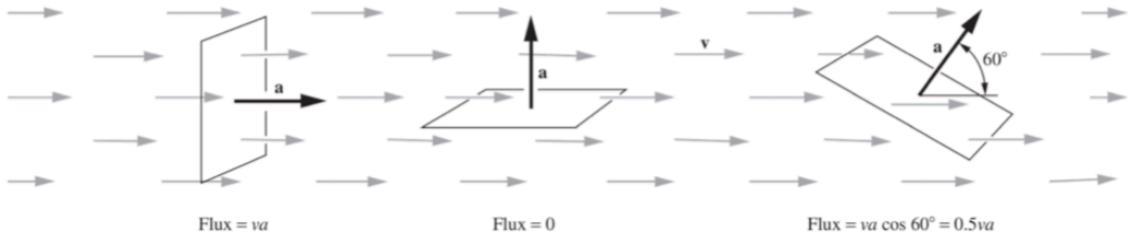
vettore d'area.

$$\phi_j = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A}_j \quad (1.6)$$

Tale definizione prende ispirazione della fluido dinamica dove tale grandezza definisce la rapidità con cui fluisce il campo elettrico alla superficie orientata. Infatti se consideriamo un fluido con velocità  $\mathbf{v}$  in regime stazionario si ha che la portata è data da

$$d\phi = \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{A} = \frac{dV}{dt}$$

Il prodotto scalare recupera ci definisce la proiezione del campo lungo la direzione ortogonale alla superficie, ovvero la superficie efficace attraverso cui fluisce il campo.



La definizione di flusso è applicabile a qualsiasi funzione vettoriale, indipendentemente dalla variabile fisica che rappresenta.

Il flusso complessivo attraverso la superficie è ottenuto sommando i singoli contributi

$$\phi(\mathbf{E}) = \sum_j \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A}_j \quad (\text{Caso Discreto})$$

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{Limite Continuo})$$

*Osservazione.*

Notare che, il flusso è una funzione che preso un vettore gli associa uno scalare

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

e inoltre restituisce informazioni sull'insieme del sistema e non locali.

## 1.7 Legge di Gauss

Consideriamo una regione chiusa dello spazio  $V \subset \mathbb{R}^3$  e consideriamo  $S = \partial V$  la superficie di  $V$ . Ipotizziamo che sia presente una distribuzione di carica continua (o discreta) all'interno della regione  $V$ , avremo che il flusso del campo elettrico generato attraverso la superficie  $S$  è dato da

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (\text{Distribuzioni Continue})$$

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i \quad (\text{Distribuzioni Discrete})$$

Tale relazione prende il nome di *legge di Gauss*. I termini di destra coincidono la quantità di carica complessiva contenuta all'interno della regione  $V$ , infatti possiamo definire

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

Con questa legge noto il campo vettoriale (quindi intensità e geometria) è possibile risalire alla carica complessiva delle sorgenti.

Notare che la forma della *superficie Gaussiana*  $S$  non influenza il risultato della Legge di Gauss fin tanto che la carica resta all'interno del volume della regione di spazio  $V$ . In sostanza l'integrale del flusso non dipende dalla geometria della superficie, ma dipende dalla sua topologia.

*Dimostrazione.* Dimostriamo la non dipendenza della legge di Gauss dalla forma della superficie.

I) Consideriamo il campo elettrico dato da una carica puntiforme

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mu}_r$$

e che la carica sia racchiusa all'interno di una sfera di raggio  $R$ , il flusso attraverso di essa è dato da

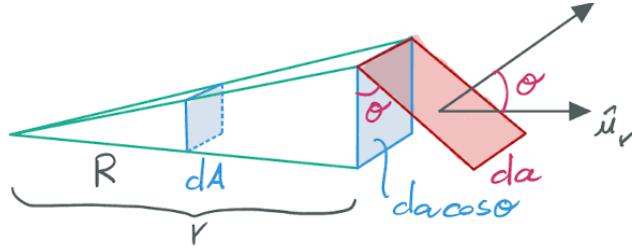
$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(R^2) \int_S dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

II) Ora poniamo la regione di spazio sferica in un volume generico  $V$  chiuso che la contiene, proiettiamo l'elemento di volume  $dA$  della superficie sferica su quella generica  $V$ , ottenendo un angolo solido

$$\Omega = \frac{dA}{R^2} = \frac{da \cos \theta}{r^2}$$



dunque l'area infinitesima della superficie esterna  $V$  è data da

$$da = dA \frac{r^2}{R^2 \cos \theta}$$

il campo ha simmetria sferica dunque ha direzione radiale  $\hat{\mu}_r$  di conseguenza il flusso attraverso la superficie "da" è dato da

$$\phi(\mathbf{E})_{da} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = E(r) da \cos \theta = E(R) dA = \phi(\mathbf{E})_{dA}$$

sommendo i contributi infinitesimi si ha che

$$\phi(\mathbf{E})_V = \phi(\mathbf{E})_S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

□

La legge di Gauss è verificata per una qualsiasi distribuzione di carica, se ipotizziamo di avere  $q_1, \dots, q_n$  cariche in una regione chiusa di spazio  $V$  si ha che per il principio di sovrapposizione il campo elettrico totale è dato da

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

dunque il flusso è esprimibile come

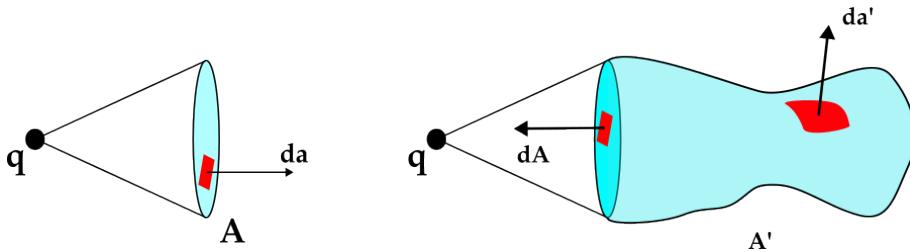
$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \sum_i \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{a} = \sum_i \phi_i(\mathbf{E}) = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

*Proprietà 1.7.1.* Se  $\mathbf{F} \not\sim \frac{1}{r^2}$  la legge di Gauss non è valida (La legge di Gauss vale anche per la forza gravitazionale)

Si ha che  $\phi(\mathbf{E})_V = 0$  per un campo vettoriale  $\mathbf{E}$  in una regione di spazio chiusa  $V$ , se non ci sono cariche interne oppure se il flusso di cariche esterne alla superficie è nullo.

*Osservazione.* Dire che  $\phi(\mathbf{E}) = 0$  non vuol dire necessariamente che  $\mathbf{E} = 0$ .

*Proprietà 1.7.2.* Dato il flusso di un campo vettoriale  $\mathbf{E}$  questo è il medesimo per tutte le superfici aperte che sottendono lo stesso angolo solido (e sono dalla stessa parte rispetto alla sorgente del campo elettrico). In sostanza è sempre possibile calcolare il flusso attraverso una superficie equivalente che semplifica il calcolo.



*Dimostrazione.* Consideriamo la superficie chiusa  $S = A + A'$ , questa non contiene la sorgente di campo "q" e di conseguenza il flusso  $\phi_S(\mathbf{E}) = 0$ . Se riscriviamo il flusso come

$$\phi_S(\mathbf{E}) = \int_{S=A+A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} - \int_{A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

dunque si ha che  $\phi_A(\mathbf{E}) = \phi_{A'}(\mathbf{E})$ . Il segno negativo compare perchè per una superficie chiusa il vettore d'area ha sempre verso uscente rispetto alla superficie)

□

### 1.7.1 Distribuzione di Carica a Simmetria Sferica

Consideriamo una distribuzione di carica sferica  $\rho$  e di raggio  $R$ , all'esterno di essa possiamo approssimare il suo campo a quello di una carica puntiforme, ma come è fatto al suo interno? dipende dalla sua distribuzione. Se consideriamo una distribuzione uniforme la carica complessiva è data da

$$Q = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$$

Consideriamo la superficie sferica  $S_1$  come in figura, con centro nell'origine, e raggio  $r_1 < R$ , la carica contenuta all'interno sarà data da

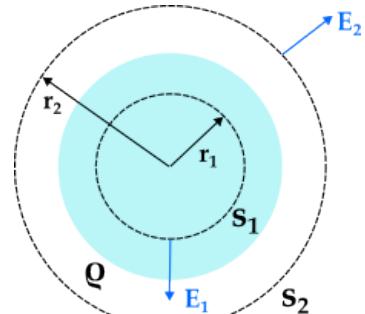
$$Q_{int} = \int_V dV \rho = \int_0^{r_1} dr r^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \sin \varphi = \frac{4\pi}{3} \rho r_1^3$$

Applicando la legge di Gauss abbiamo che

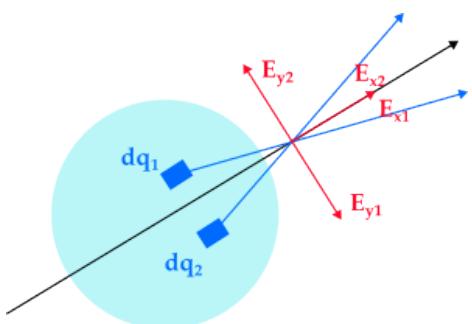
$$\phi(\mathbf{E}) = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{3} \rho r_1^3$$

e dunque il campo elettrico sulla superficie  $S_1$  è data da

$$\mathbf{E}(r_1) = \frac{\rho r_1}{3\epsilon_0} \hat{\mu}_r \quad r_1 \leq R$$



L'informazione sulla direzione radiale del campo  $\hat{\mu}_r$  è facilmente recuperabile osservando la simmetria del problema. Consideriamo un sistema di riferimento che divida in due parti simmetriche la sfera, se consideriamo due porzioni di carica  $dq_1$  e  $dq_2$  su di essa e li facciamo interagire con una carica sonda  $q_0$ , posta in un punto che rende equidistanti le cariche, avremo che il campo  $\mathbf{E}$  ha direzione lungo la congiungente  $\hat{\mu}_{r0}$  decomponendo rispetto al sistema di riferimento le componenti angolari si eliminato, avendo segni opposti e pari intesità



$$E_{y2} + E_{y1} = 0$$

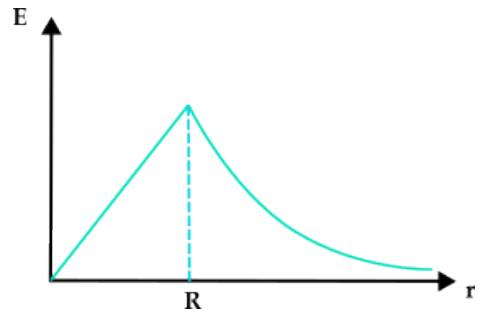
e restano solo quelle della componente radiale che si sommano

$$\sum_i E_{xi} = R_x$$

dunque possiamo concludere che il campo abbia direzione radiale.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti per la variazione d'intensità del campo in funzione della posizione radiale, nel seguente modo

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mu}_r & r > R \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{\mu}_r & r \leq R \end{cases} \quad (1.7)$$



Osserviamo che il campo elettrico è continuo in  $r = R$ , ma la derivata prima  $\frac{dE}{dr}$  no, come si osserva dal grafico.

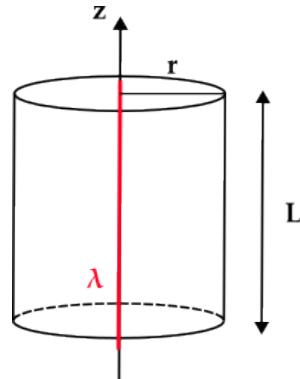
### 1.7.2 Distribuzione di carica a Simmetria Cilindrica (Filo "infinito")

Consideriamo una distribuzione di carica lineica  $\lambda$  con estensione infinita lungo la direzione z. Attorno ad essa definiamo una superficie Gaussiana cilindrica di raggio  $r$  e lunghezza  $L$ . La quantità di carica racchiusa sarà data da

$$Q = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

Per ragioni di simmetria il campo elettrico ha simmetria radiale  $\hat{\mu}_r$ . Questo vuol dire che le due basi del cilindro non contribuiscono all'integrale di flusso dato che  $\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$ . Dunque applicando la legge di Gauss si ha che

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(r)2\pi L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$



e quindi il campo elettrico è dato da

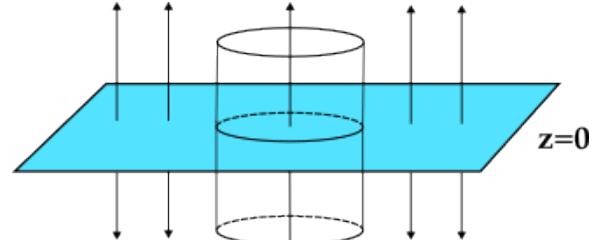
$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{\mu}_r \quad (1.8)$$

Si osserva che per una distribuzione di carica lineare  $\mathbf{E} \sim \frac{1}{r}$  a differenza di quella di una carica puntiforme il cui campo decresce come  $\frac{1}{r^2}$ . Quindi l'intensità del campo diminuisce molto più lentamente.

Il campo ottenuto è una buona approssimazione per  $r \ll L$ , dove  $L$  è la lunghezza del filo. In generale, per un filo finito si ha che la componente angolare del campo  $E_\varphi = 0$  come nel caso infinito, ma la componente  $E_z \neq 0$ . Il sistema è simmetrico per riflessione solo rispetto al punto medio del filo. A distanza infinita il campo risulta essere sferico (possiamo approssimare il filo ad una carica puntiforme) mentre in sua prossimità ha simmetria cilindrica e direzione radiale.

### 1.7.3 Distribuzione di Carica di Superficie e Discontinuità

Consideriamo un piano infinito, con posizione  $z = 0$ , su cui è presente una distribuzione di carica superficiale  $\sigma$ . Prendiamo una superficie Gaussiana cilindrica, con asse perpendicolare al piano come in figura. La direzione del campo elettrico è lungo la perpendicolare al piano  $\hat{\mathbf{z}}$ .



$$\mathbf{E}(z) = E(z)\hat{\mathbf{z}}$$

Inoltre il campo elettrico per  $z > 0$  deve avere direzione opposta a quella del campo per  $z < 0$ , e dunque  $E(z) = -E(-z)$ .

L'integrale di superficie è nullo lungo la superficie laterale del cilindro e gli unici contributi sono dati dalle sue basi, che ipotizziamo avere area  $A$ . Utilizzando la legge di Gauss si ha che

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(z)A - E(-z)A = 2E(z)A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

In modulo il campo elettrico di una distribuzione di carica per un piano infito è dato da

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.9)$$

Il campo elettrico è indipendente dalla distanza della carica sonda dal piano. Questo è dovuto dal fatto che il piano è infinito. e dunque più ci si allontana, più superficie diventa visibile.

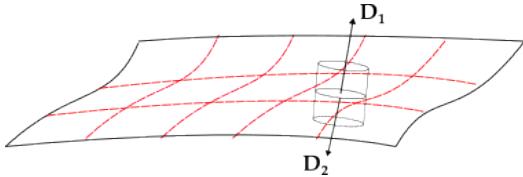


Figura 1.5: La componente normale del campo elettrico è discontinua.

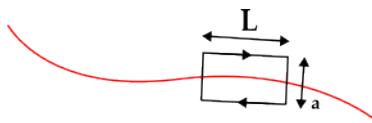


Figura 1.6: La componente tangenziale del campo elettrico è continua

Un altro importante fatto è che il campo elettrico non è continuo rispetto alle due facce del piano per una distribuzione di carica costante. Si ha che

$$E(z \rightarrow 0^+) - E(z \rightarrow 0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Tale risultato non dipende dal fatto che il piano sia finito, infatti può essere tranquillamente esteso a qualsiasi superficie con distribuzione di carica  $\sigma$ . Inoltre non è necessario che  $\sigma$  sia costante e che il campo  $\mathbf{E}$  sia parallelo alla normale  $\hat{\mathbf{n}}$  per ogni punto della superficie. Infatti per una superficie generica, in qualsiasi suo punto possiamo definire un cilindro Gaussiano e ripetere i calcoli per una superficie planare. Se denotiamo con  $\mathbf{E}_{\pm}$  il campo elettrico per entrambe le parti della superficie si ha che

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_+ - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.10)$$

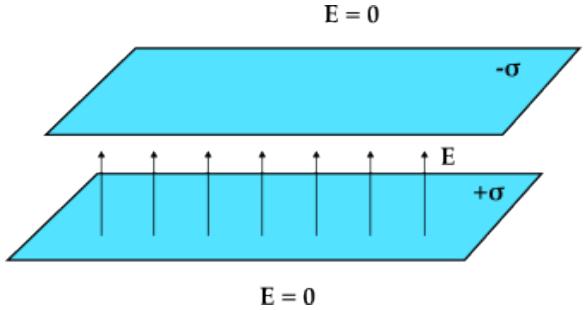
e dunque il campo elettrico risulta essere discontinuo rispetto alla perpendicolare per qualsiasi superficie. In contrasto si ha che il campo tangente alla superficie è continuo. Per verificarlo basta considerare la circuitazione C con lato L parallela alla superficie e altezza "a" rispetto la perpendicolare.

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = LE(z') - LE(z'') = 0$$

dato che  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = 0$  e questo dimostra la continuità delle componenti parallele.

### 1.7.4 Coppia di Piani

Si consideri una coppia di piani infiniti rispettivamente a  $z = 0$  e  $z = a$ , che possiedono una distribuzione di carica superficiale  $\pm\sigma$  come in figura. Per calcolare il campo elettrico è sufficiente applicare il principio di sovrapposizione, considerando il campo generato dai singoli piani. Dato che un campo è dato dall'espressione (1.9), tenendo conto di segni e direzione si ha che



$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad 0 < z < a \quad (1.11)$$

e  $\mathbf{E} = 0$  per  $z \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ .

## 1.8 Potenziale Elettrostatico. Gradiente

### 1.8.1 Tensione. Differenza di Potenziale Elettrostatico

Quando su una carica  $q_0$  agisce una forza  $\mathbf{F}$  di qualsiasi natura, non necessariamente elettrostatica, ma per esempio dovuta a processi chimici o meccanici, possiamo sempre definire un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , che prende il nome di *campo elettromotore* ed è definito come

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \Rightarrow \mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$$

Notare che l'espressione ottenuta è uguale a quella discussa per la forza di Coulomb, ma in questo caso la si sta generalizzando a tutti i tipi di forze che possono agire su una carica. Il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  lungo un cammino  $d\mathbf{s}$  è dato dal suo integrale linea

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

definiamo tensione elettrica tra due punti A e B lungo un percorso C il lavoro per unità di carica

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q_0} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

In generale per un circuito chiuso C il lavoro è non nullo

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \mathcal{E}$$

L'integrale

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

prende il nome di *forza elettromotrice*. Dipende dal percorso e dalla natura del campo  $\mathbf{E}$ , ma non dalla carica  $q_0$ . Se il lavoro lungo un percorso chiuso C risulta essere nullo si ha la forza è di natura conservativa. Non dipende effettivamente dal percorso, ma solo dalla posizione di partenza e di arrivo.

Nel caso di un campo  $\mathbf{E}$  originato da una distribuzione di carica nello spazio, si ha che la forza esercitata su una carica sonda  $q_0$  è quella di Coulomb ed è di natura conservativa, ovvero il suo integrale di linea su un circuito chiuso è nullo. Se forze di questo tipo il loro lavoro è dato dal teorema fondamentale del calcolo integrale in cui si considera la differenza delle primitive valutate ai due capi del percorso.

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = F(B) - F(A)$$

Nel caso della forza di Coulomb tale grandezza prende il nome di *differenza di potenziale elettrostatico*. Dato che la carica sonda compie lavoro contro il campo elettrico si adotta la convenzione di segno

$$V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.12)$$

Si osserva che il potenziale è definito a meno di una costante additiva. Ovvero sceglio un punto fisso arbitrario come riferimento per la misura. Il valore complessivo esercitato dalla forza lungo il percorso sarà dato da

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B) = -q_0 \Delta V \quad (1.13)$$

## CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

---

L'energia potenziale associata al potenziale elettrostatico è data

$$W_{AB} = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B)$$

Unendo l'espressione precedente alla (1.13) possiamo concludere che

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V \Rightarrow U_e(A) = q_0 V_A$$

Una carica  $q_0$  posta in un campo elettrostatico possiede un'energia potenziale proporzionale al potenziale (definita anch'essa a meno di una costante).

In un campo elettrostatico la forza elettromotrice è sempre uguale a zero e quindi è nullo il lavoro compiuto dalla forza elettrica per ogni spostamento che riporti la carica alla posizione iniziale

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow W = q_0 \mathcal{E} = 0$$

La grandezza di riferimento per misurare la differenza di potenziale è il *Volt* =  $\frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}}$ .

### Potenziale Elettrico di una distribuzione di carica Sferica

Consideriamo una distribuzione di carica sferica di raggio  $R$  e densità volumica  $\rho$ . Prendiamo come punto di riferimento per il calcolo del potenziale un punto  $P_0 = +\infty$ . Abbiamo che il campo elettrostatico della sfera è dato da

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mu}_r & r > R \\ \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \hat{\mu}_r & r \leq R \end{cases}$$

dunque avremo che per i punti esterni alla sfera

$$V_{ext}(r) = - \int_{+\infty}^r \mathbf{E} \cdot ds = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad r > R$$

e per i punti interni si ha che

$$V_{int}(r) = V_{ext}(R) - \int_R^r dr \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (r^2 - R^2) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$

si che per  $r = R$  allora  $V_{int}(R) = V_{ext}(R)$ .

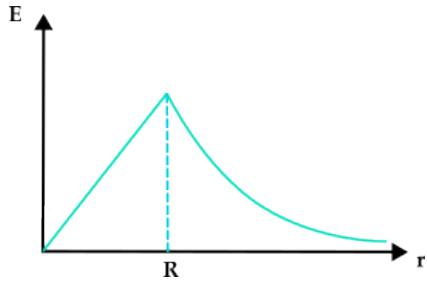


Figura 1.7: Intensità del campo elettrico

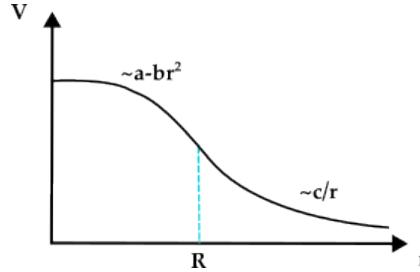


Figura 1.8: Potenziale Elettrostatico

Notare che quando si fissa un punto di riferimento come  $P_0 = +\infty$  tutti i cammini partono tutti da questo punto e dunque termini precedentemente calcolati per distanze più brevi compaiono in quelle più lunghe, come nel caso della misurazione del potenziale all'interno della sfera.

### 1.8.2 Il Gradiente

Consideriamo un generico campo scalare (funzione scalare)  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Date le coordinate cartesiane  $x_i$  per  $i = 1, \dots, n$ , il gradiente di  $\phi$  è dato da

$$\nabla \phi = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right]$$

Differenziare un campo scalare ci porta ad avere un campo vettoriale. La possibilità di poter definire il gradiente di una funzione scalare ci permette di definire il differenziale di  $\phi$ , ovvero

$$d\phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i = \nabla \phi \cdot d\mathbf{s}$$

che definisce la variazione di  $\phi$  rispetto ad uno spostamento  $d\mathbf{s} = [dx_1, \dots, dx_n]^T$ . Tramite il gradiente di  $\phi$  possiamo identificare la direzione e verso di massima crescita

$$df = ||\nabla \phi|| ||d\mathbf{s}|| \cos \theta$$

e dunque  $df$  è massimo quando  $\nabla \phi$  è parallelo allo spostamento  $d\mathbf{s}$ .

Nella sezione precedente abbiamo definito il potenziale elettrostatico che è una funzione

## CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

---

scalare, se consideriamo una sua variazione infinitesima avremo che

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \iff dV = \nabla V \cdot ds$$

e quindi si ha che  $\mathbf{E} = -\nabla V$ , ovvero il campo elettrico è proporzionale e contrario al potenziale. Se moltiplichiamo tutto per una carica  $q_0$  si ha che

$$\mathbf{F}_e = -\nabla U_e$$

che è il risultato che ci aspettiamo di ottenere per una forza di natura conservativa.

Si noti che fino a questo punto si è data una definizione del gradiente dipendente dalle coordinate cartesiane, ma esso può essere espresso rispetto ad altri sistemi di coordinate.

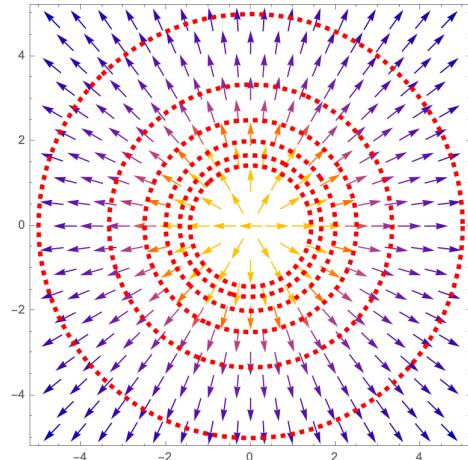
Una conseguenza importante per le forze conservative è che dato un potenziale  $V(x,y,z)$ , essendo una funzione scalare è possibile definirne le curve di livello, ed essendo  $\mathbf{E} = -\nabla V$  si avrà che il campo elettrico in tutti i punti dello spazio in cui è definito è ortogonale a tali curve.

### Esempio - Carica Puntiforme

Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane e prendendo  $P_0 = +\infty$  come riferimento di misura si ha che il potenziale per una carica puntiforme posta nell'origine del sistema è dato da

$$V(x, y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

calcolando le sue curve di livello avremo in figura che il campo elettrico  $\mathbf{E}$  è ortogonale ad esse come in figura (circonferenze tratteggiate in rosso).



```

1 Mathematica Snippets
2
3 V[x_, y_, q_] := (1/Sqrt[x^2 + y^2])
4 E1x[q_, x_, y_, x0_, y0_] := ((x - x0)/((x - x0)^2 + (y - y0)^2)^(1.5))
5 E1y[q_, x_, y_, x0_, y0_] := ((y - y0)/((x - x0)^2 + (y - y0)^2)^(1.5))
6
7 Show[VectorPlot[{E1x[Q, x, y, 0, 0], E1y[Q, x, y, 0, 0]}, {x, -5,
8     5}, {y, -5, 5}],
9 ContourPlot[V[x, y, Q], {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
10 ContourStyle -> Directive[Red, Dashed, Thickness[0.01]],
11 ContourShading -> None]]

```

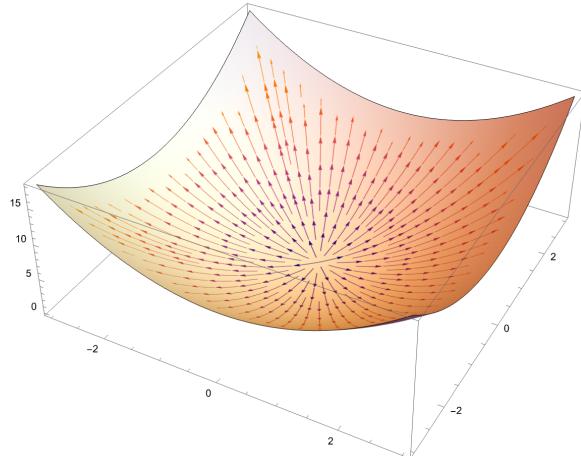
### Esempio - Oscillatore Armonico

Consideriamo una particella sottoposta ad una forza elastica vincolata a muoversi in una sola direzione. Ipotizziamo che non sia presenti attriti, dunque l'energia del sistema sarà data dalla funzione

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

rispettivamente il gradiente sarà un vettore della forma

$$\nabla E = \begin{bmatrix} kx \\ my \end{bmatrix}$$



e sarà tangente alla superficie data da  $E(x,y)$ , come in figura.

```

1 Mathematica Snippets
2
3 Plot3D[(x^2 + y^2), {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
4 PlotStyle ->
5 Texture[StreamPlot[
6     Evaluate[D[(x^2 + y^2), {{x, y}}]], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
7     Frame -> None, ImageSize -> Large]], Mesh -> None,
8 ImageSize -> Large, PlotPoints -> 35]

```

### 1.8.3 Potenziale per una distribuzione di cariche

I risultati ottenuti nel paragrafo sul potenziale elettrostatico sono facilmente estendibili al caso in cui un campo elettrostatico è dato dalla distribuzione di più cariche puntiformi  $q_1, \dots, q_n$ , per farlo è sufficiente utilizzare il principio di sovrapposizione.

Se consideriamo una carica sonda  $q_0$  il lavoro compiuto per spostare la carica all'interno dell'campo elettrostatico generato dalla distribuzione di cariche è dato da

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

dato che il campo complessivo è dato da  $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$  dove  $\mathbf{E}_i$  è il campo generato dalle singole cariche, dunque il potenziale assume la forma

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \int_A^B \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{\mu}_i \cdot d\mathbf{s}$$

e quindi la differenza di potenziale è data da

$$V(A) - V(B) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{A,i}^2} - \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{B,i}^2}$$

Posto  $V(B) = 0$  per  $B = \infty$  si ha che

$$V(r) = \int_P^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \quad (1.14)$$

Tale risultato indica che il potenziale elettrostatico generato da un sistema di cariche puntiformi è uguale alla somma dei potenziali generati singolarmente dalle cariche. Possiamo estendere il risultato per distribuzioni di carica continue

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C ds \frac{\lambda(r)}{|r - r'|} \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Sigma \frac{\sigma(r)}{|r - r'|} \\ V(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV \frac{\rho(r)}{|r - r'|} \end{aligned} \quad (1.15)$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

Il potenziale elettrostatico risulta essere una funzione del punto, continua e derivabile, che può essere calcolabile una volta conosciuta la distribuzione delle cariche sorgente, indipendentemente dalla presenza di  $q_0$ . Infatti ci si rivolge ad esso anche come campo scalare. A differenza del campo vettoriale ciò che è significativo non è il valore che un potenziale assume in un punto, ma la sua variazione rispetto ad un riferimento fissato.

### 1.8.4 Energia Potenziale Elettrostatica

L'energia potenziale  $U(\mathbf{r})$  di una particella  $q_0$  immersa nel campo elettrostatico  $\mathbf{E}$ , è data dal lavoro compiuto per spostarla da infinito ad un certo punto P dello spazio

$$U(\mathbf{r}) = -q_0 \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = q_0 \int_{\infty}^P \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = q_0 \phi(\mathbf{r})$$

dove assumiamo che  $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$  per  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ .

Consideriamo una distribuzione di carica formata dal cariche  $q_i$  con posizioni  $r_i$  nello spazio . Il potenziale elettrostatico immagazzinato in questa configurazione coincide con il lavoro necessario ad assemblare la configurazione della distribuzione di carica discreta (questo è dovuto al fatto che se dovessimo rilasciare le cariche la loro energia cinetica sarebbe coincidente con il potenziale latente del sistema). Dunque quanto lavoro è necessario per assemblare la configurazione della distribuzione di carica ?

Fissiamo la prima carica nello spazio in  $\mathbf{r}_1$ . Il lavoro  $W_1 = 0$  dato che non è presente campo elettrostatico, poichè una carica non esercita forza su se stessa. Per spostare una seconda carica è necessario un lavoro di

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Notare che se le due cariche hanno lo stesso segno  $q_1 q_2 > 0$  e dunque  $W_2 > 0$ , e dunque bisogna immettere lavoro nel sistema affinchè queste si avvicinino. Se  $q_1 q_2 < 0$  allora  $W_2 < 0$  e quindi le particelle si avvicinano per mutua attrazione.

Se ora avviciniamo una terza carica questa si dovrà spostare all'interno del campo elettrico

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

generato dalle cariche  $q_1$  e  $q_2$  e dunque il lavoro necessario è

$$W_3 = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \right]$$

e così via aggiungendo altre particelle. Il lavoro complessivo per assemblare la distribuzione di carica è data dall'energia potenziale immagazzinata nel sistema.

$$U = \sum_{i=1}^N W_i = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (1.16)$$

Se vogliamo misurare il potenziale nel punto  $\mathbf{r}_i$  dovuto alle cariche  $q_j$ ,  $j \neq i$  si ha che

$$\phi(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

e dunque possiamo riscrivere l'energia potenziale come

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\mathbf{r}_i) \quad (1.17)$$

che rappresenta l'energia potenziale per una distribuzione discreta di cariche. Possiamo generalizzare tale risultato alle distribuzioni continue  $\rho(\mathbf{r})$  definite una regione chiusa dello spazio. L'energia associata a una distribuzione continua è data da

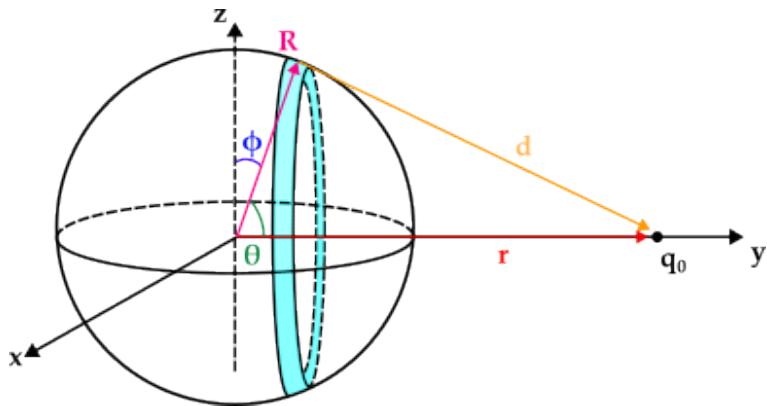
$$U = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (1.18)$$

Ritorneremo successivamente su questa equazione quando introdurremo l'operatore di divergenza per un campo vettoriale.

### 1.8.5 Esempi ed Esercizi

#### Potenziale di una distribuzione di carica superficiale a simmetria sferica

Data una densità di carica areica  $\sigma$  costante distribuita su una sfera di raggio  $R$ , vogliamo determinare il potenziale  $\phi(r)$  ad una generica distanza  $r$  da essa.



Utilizzando il teorema di Carnot abbiamo che la distanza  $d$  data dalla diagonale in figura può essere espressa come

$$d = [R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta]^{1/2} = ||\mathbf{R} - \mathbf{r}||$$

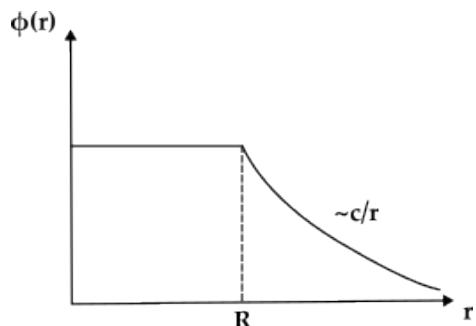
applicando l'espressione del potenziale per una distribuzione di carica continua si ha che

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A d\Sigma \frac{\sigma}{d} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \frac{\sigma R^2 \sin\theta}{d} = \frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{d} = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr} \left[ (R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr} \left[ (R^2 + r^2 + 2rR)^{1/2} - (R^2 + r^2 - 2rR)^{1/2} \right] = \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 Rr} [(R+r) - |R-r|] \end{aligned}$$

Per  $Q = 4\pi R^2 \sigma$  (Carica di un anello) il potenziale è dato da

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & r < R \end{cases}$$

Il potenziale interno è costante e pari al potenziale della superficie.

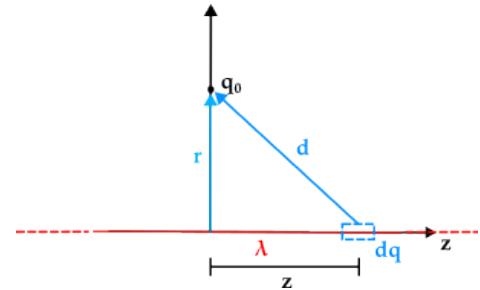


**Potenziale per una distribuzione di carica lineica infinita**

Calcoliamo il potenziale elettrostatico per un filo di estensione infinita e carica  $\lambda$  parallelo alla direzione  $\hat{z}$ . Utilizzando la definizione di potenziale per una distribuzione di carica infinita

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{[z^2 + r^2]^{1/2}}$$

nel calcolo si ha un problema in quanto



$$\phi(r) \simeq \int_r^{\infty} \frac{1}{r}$$

e dunque il potenziale è divergente ad infinito. Per evitare questo problema calcoliamo l'integrale su un intervallo chiuso  $[-L, L]$ , con  $L \gg r$ .

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L dz \frac{\lambda}{[r^2 + z^2]^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(1 + r^2/L^2)^{1/2} + 1}{(1 + r^2/L^2)^{1/2} - 1} \right]$$

dato che  $L \gg r$  possiamo sviluppare con Taylor rispetto a  $\frac{r^2}{L^2}$

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{4L^2 + r^2}{r^2} \right] \simeq \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{2L}{r} \right]^2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{2L}{r} \right] = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{1}{r} \right) + \ln(2L) \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{1}{r} \right) + \text{cost} \end{aligned}$$

in questo modo riusciamo a mettere a zero il potenziale per  $r \rightarrow \infty$ . Utilizzando la relazione tra campo elettrostatico e gradiente del potenziale abbiamo che

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{\mu}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mu}_r$$

ottenendo il campo per una distribuzione di carica lineare e con estensione infinita.

### Potenziale per una distribuzione di carica sulla superficie di un disco

Data una distribuzione di carica superficiale  $\sigma$  per un disco di raggio  $R$ , vogliamo determinare il potenziale elettrostatico in funzione della posizione. Avremo che presa una distribuzione di carica infinitesima circolare con  $dQ = 2\sigma\pi r dr$ , l'espressione per una distribuzione di carica continua del potenziale è data da

$$\begin{aligned}\phi(0, y, 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi\sigma r dr}{[r^2 + y^2]^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R dr \frac{r}{[r^2 + y^2]^{1/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{r^2 + y^2} \right]_0^R = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + y^2} - |y| \right]\end{aligned}$$

Dato che è presente un modulo all'interno dell'espressione del potenziale si ha che, questo assume valori diversi lungo  $y$  per  $y > 0$  o  $y < 0$ .

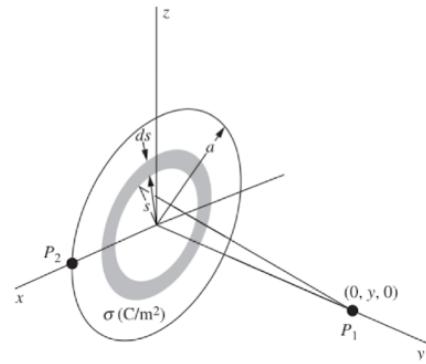
$$\phi(y) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + y^2} - y \right] & y > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{R^2 + y^2} + y \right] & y < 0 \end{cases}$$

Il potenziale è continuo in  $y = 0$  a differenza del campo elettrostatico che presenta un punto di discontinuità a cuspide.

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{d\phi}{dy} \Big|_{y=0} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & y > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & y < 0 \end{cases}$$

*Osservazione.*

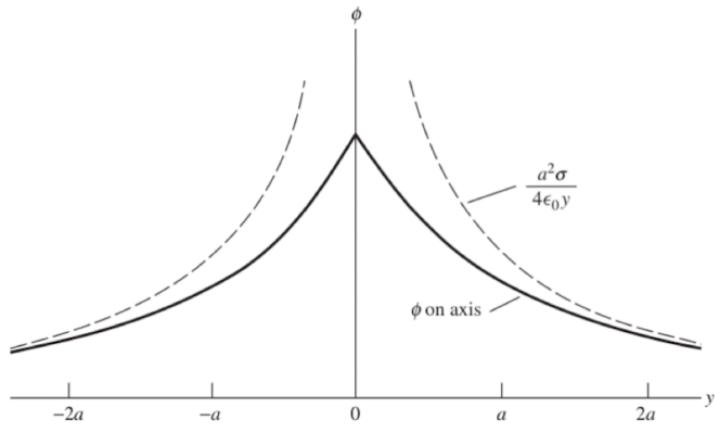
- Per  $y \rightarrow 0^\pm$  si ha che il potenziale del disco coincide con quello di un piano infinito.



- Nel limite in cui  $y \gg R$ , il comportamento del potenziale è uguale a quello di una carica puntiforme.

$$\phi(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} y \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{y^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \underset{\text{Taylor}}{\simeq} \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \frac{1}{y}$$

e dunque il campo scalare ha una discontinuità in  $y = 0$ .



## 1.9 Divergenza di un Campo Vettoriale

La divergenza di un campo vettoriale ci permette di esprimere la legge di Gauss in forma differenziale, legando le proprietà locali del campo elettrostatico alla distribuzione di carica. In sostanza consideriamo la variazione infinitesima del campo elettrostatico in un intorno di un punto dello spazio.

Presi una regione di spazio  $V$  chiusa e al cui interno è contenuta della carica, abbiamo visto che questa fluisce attraverso la superficie data dal bordo  $S = \partial V$  di  $S$ . Il flusso è dato dall'equazione

$$\phi(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

Se immaginiamo di affettare la regione di spazio, otteniamo diverse sezioni  $V_i$  attraverso cui parte del flusso passa attraverso, di conseguenza possiamo riscrivere il flusso totale come

$$\phi(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i$$

ovvero la somma dei contributi delle singole regioni attraverso cui il campo passa attraverso. Per  $N \rightarrow \infty$ , ovvero aumentando i sezionamenti si ha che i rispettivi volumi  $V \rightarrow 0$  e dunque ogni singolo contributo descrive un flusso locale.

Il problema con questa definizione è che  $\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i$  dipende dalla scelta del volume  $V_i$  e dunque dalla scelta della superficie  $S_i$  e dunque non si ha una buona misura del campo locale.

Per esempio se prendiamo un volume  $V_i$  se lo raddoppiamo o lo dimezziamo il risultato della misura del flusso aumenta e diminuisce (per  $\mathbf{F}$  costante) e questo non ci permette di avere una buona stima di come sia cambiato il campo nelle regioni. Se  $\mathbf{F}$  non è costante il problema è che riducendo il volume a 0 anche il flusso diventa nullo.

Per dare una buona definizione locale di flusso consideriamo il suo valore medio rispetto al volume  $V_i$

$$\langle \phi(\mathbf{F}) \rangle = \frac{1}{V} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i$$

Tale equazione ci permette di definire la divergenza del campo  $\mathbf{F}$  nel seguente modo

$$\text{div}\mathbf{F} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i \quad (1.19)$$

La divergenza di un vettore è una grandezza scalare che misura il flusso (locale) uscente da una superficie normalizzata al volume da essa racchiuso. Tale definizione ci rende la misura della divergenza del campo indipendente dalla geometria dei volumi.

Uno dei risultati più importanti della teoria dei campi vettoriali è *il teorema di divergenza*

di Gauss, la cui espressione possiamo ottenere, considerando

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ V_i \rightarrow 0}} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_i \right] = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV \quad (1.20)$$

*Osservazione.*

- Il teorema di Gauss è una proprietà matematica che vale per qualsiasi campo vettoriale.
- Il vettore  $\mathbf{E}$  soddisfa una legge fisica (la legge di Gauss) che collega il flusso alla distribuzione di carica.

Se consideriamo il campo elettrostatico  $\mathbf{E}$  generato da una distribuzione di carica continua  $\rho$  per la legge di Gauss abbiamo che

$$\phi(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

per il flusso del campo possiamo applicare il teorema di divergenza di Gauss, in questo modo abbiamo che

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Dato che tale uguaglianza è soddisfatta per ogni volume e superficie, l'uguaglianza deve essere soddisfatta anche dai termini integrandi, definendo in questo modo *la forma differenziale della legge di Gauss*.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.21)$$

Il ragionamento logico con cui si è ottenuta la divergenza di un campo fa sì che la definizione (1.20) non dipenda da un sistema di coordinate e quindi vale per tutti. Da un punto di vista applicativo però risulta essere poco utile e quindi abbiamo bisogno di darne una seconda definizione più funzionale.

### 1.9.1 Espressione della Divergenza in coordinate cartesiane

Prendiamo un punto  $\mathbf{x}_0$  dello spazio e consideriamolo come centro di un volume infinitesimo  $dV = dx dy dz$ , data la presenza di un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  vogliamo determinare la divergenza

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

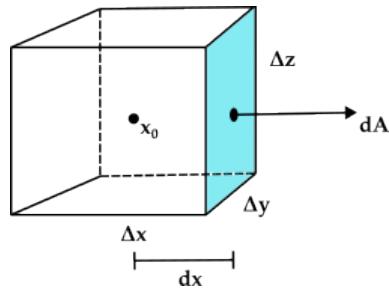
localmente in coordinate cartesiane. Partendo dalla definizione di divergenza ed esplicitando il prodotto scalare dell'integrandi si avrà che

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \left[ \int_S F_x dy dz + \int_S F_y dx dz + \int_S F_z dx dy \right]$$

utilizzando il teorema della media integrale per una delle facciate del cubo si ha per esempio che

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}(dy dz) \simeq F_x(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) \Delta y \Delta z$$

in cui consideriamo la componente 'x' del campo valutata in un generico punto.



Possiamo reiterare lo stesso ragionamento per la faccia opposta, cambiando segno

$$-\int_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}(dy dz) \simeq -F_x(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z) \Delta y \Delta z$$

se vogliamo ottenere il contributo complessivo dato dall'addendo  $\int_S F_x dy dz$  dobbiamo considerare la superficie  $S = S_1 + S_2$  e quindi si ha che

$$\int_S F_x dy dz \simeq F_x(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) \Delta y \Delta z - F_x(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z) \Delta y \Delta z$$

normalizzando rispetto al volume otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{V} \int_S F_x dy dz \simeq \frac{F_x(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) - F_x(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z)}{\Delta x}$$

e prendendo il limite per  $V \rightarrow 0$  possiamo concludere che

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S F_x dy dz \simeq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S F_x dy dz \simeq \frac{F_x(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) - F_x(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial F_x}{\partial x}$$

## CAPITOLO 1. ELETROSTATICA

---

Ripetendo i medesimi ragionamenti per gli addendi possiamo concludere che

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (1.22)$$

esprimendo la divergenza rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane.

Possiamo esprimere la divergenza utilizzando l'operatore gradiente

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

che rappresenta sia un operatore che un vettore. Lo definiamo operatore perchè agisce sugli spazi di funzione. Se facciamo agire l'operatore sul campo vettore  $\mathbf{F}$  definito da una mappa

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

definiamo l'azione di  $\nabla$  su  $\mathbf{F}$  come il loro prodotto vettoriale

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (1.23)$$

in questo manteniamo la proprietà in cui la divergenza di un campo vettoriale deve restituire un campo scalare.

Da un punto di vista fisico il segno della divergenza ci dice che se  $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$  localmente si ha un flusso netto uscente dal volume infinitesimo, viceversa per  $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$  il flusso netto è localmente entrante nel volume.

La forma della divergenza espressa rispetto all'operatore gradiente, ci permette di riscrivere la forma differenziale della legge di Gauss come

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(1.24)

questa espressione definisce una delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo e prende il nome di *prima equazione di Maxwell per l'elettrostatica*.

### 1.9.2 Proprietà dell' operatore gradiente

L'operatore gradiente è un operatore differenziale lineare, ovvero valgono le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha\phi + \psi) &= \alpha\nabla\phi + \nabla\psi \\ \nabla \cdot (\alpha\mathbf{F} + \mathbf{G}) &= \alpha\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}\end{aligned}\tag{1.25}$$

per ogni campo scalare  $\phi$  e  $\psi$ , campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  e costante  $\alpha$ .

Inoltre vale la proprietà di Leibniz, che è una generalizzazione della regola del prodotto, ovvero

$$\begin{aligned}\nabla(\phi\psi) &= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \\ \nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) &= (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{F})\end{aligned}\tag{1.26}$$

per  $\phi, \psi$  campi scalari e  $\mathbf{F}$  campo vettoriale.

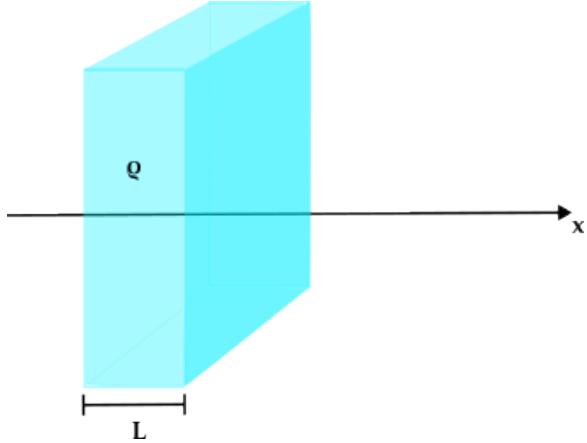
### 1.9.3 Esempi ed Esercizi

#### Campo elettrostatico di una lastra infinita

Calcoliamo il campo elettrostatico per una lastra di superficie infinita e spesso  $L$ , data una densità di carica di volume  $\rho$  uniforme.

Come fatto per gli esercizi precedenti per ragioni di simmetria sappiamo che il campo  $E_z = E_y = 0$ .

Questa volta però utilizziamo la forma differenziale dell'equazione di Gauss per calcolare il campo.



$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff \frac{\partial E_x(x)}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

risolvendo l'equazione differenziale per quadrature si ha che

$$E_x(x) = \frac{\rho}{\epsilon_0}x + A$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

dove il termine A è la costante d'integrazione per un integrale indefinito.

*Osservazione.* Si noti che se consideriamo  $\mathbf{E}(x) = \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + A\right)\hat{\mu}_x$  e se applichiamo l'operatore gradiente al campo si ha che

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0}x\hat{\mu}_x \right) + \nabla \cdot (A\hat{\mu}_x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dunque il termine  $\nabla \cdot (A\hat{\mu}_x) = 0$ . In genere un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  è caratterizzato dalla divergenza a meno di un vettore a divergenza nulla. Che possiamo parafrasare pensato al fatto che esista una parte del campo che non contribuisce al flusso netto attraverso una superficie.

Ritornando alla risoluzione del problema, abbiamo bisogno di definire delle condizioni al contorno che ci determinino il valore della costante A, per farlo osserviamo che se poniamo una carica esploratrice  $q_0$  in  $\mathbf{x} = 0$  (che coincide con il centro della lastra) avremo che la forza esercitata sulla carica è nulla per simmetria e dunque anche  $\mathbf{E} = 0$ . Risolvendo

$$0 = E_x(x = 0) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot 0 + A \Rightarrow A = 0$$

In generale  $A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ , ovvero è dato da una distribuzione superficiale di carica. Esternamente alla distribuzione di carica si ha che  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  e quindi  $E_x = C$  è costante in tutte le regioni  $|x| > \frac{L}{2}$ . Per determinare il valore di C osserviamo che per  $x = \pm\frac{L}{2}$  si ha che  $E_x = \pm\frac{\rho L}{2\varepsilon_0} = C$  dato che il campo è una funzione continua. In conclusione troviamo che

$$E_x(x) = \begin{cases} \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} & x > \frac{L}{2} \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}x & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} & x < -\frac{L}{2} \end{cases}$$

### 1.10 Rotore di un campo vettoriale

Analogamente a quanto fatto per la divergenza, costruiamo una grandezza locale legata ad un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  che traduca in termini locali la legge della circuitazione di  $\mathbf{F}$ .

Presa una regione di spazio definita da un volume V chiuso, consideriamo la sua superficie  $S = \partial V$  che viene attraversata da un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e ipotizziamo di definire su S un

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

cammino chiuso  $C$  su cui vogliamo calcolare l'integrale di linea

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma_C$$

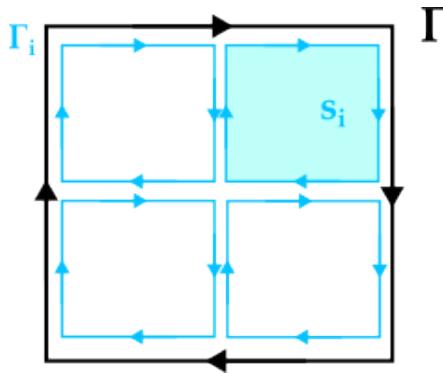
Se spezziamo il cammino in due sotto cammini  $C_1$  e  $C_2$  possiamo riscrivere l'integrale precedente come

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

reiterando il procedimento di suddivisione si ha che

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

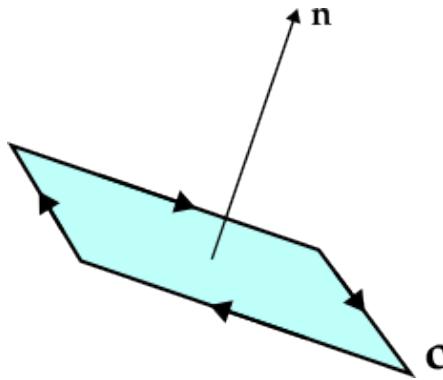
una condizione necessaria è che i contributi sulle linee esterne, siano percorsi in versi opposti in modo da elidersi.



La definizione  $\oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  ha dei problemi nella sua definizione di circuitazione, in quanto l'integrale di linea aumenta all'aumentare della dimensione del circuito nel caso in cui  $\mathbf{F}$  sia costante. Inoltre facendo tendere a zero la superficie  $S_i$  racchiusa dal cammino, nel limite puntiforme l'integrale si annulla. Per correggere questa dipendenza dalla geometria del cammino, normalizziamo il circuito rispetto alla superficie  $S_i$  che racchiude.

$$\frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

in questo modo si ottiene una buona definizione locale dell'integrale di linea. Tuttavia anche se si perde la dipendenza geometrica rimane la dipendenza dal senso di percorrenza del cammino. Dato che l'equazione non dipende da una cammino  $C_i$  che racchiude una superficie  $S_i$  in particolare il segno dell'equazione dipende da come si è scelto di suddividere il percorso, mano a mano che si rendono infinitesime le superfici, di conseguenza il passaggio al limite rifletterà questa proprietà. Per poter tener conto dell'informazione direzionale introduciamo il vettore  $\hat{\mathbf{n}}$  ortogonale alla superficie infinitesima.



In questo modo definiamo rotore di un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  la grandezza.

$$\text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.27)$$

Possiamo domandarci come l'informazione locale che ci viene data dal rotore di un campo si leghi all'integrale di linea del circuito di partenza  $C$  da cui siamo partiti. Per rispondere a questa domanda sommiamo tutti i contributi dati che concorrono a formare  $C = \sum_i C_i$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right] S_i = \int_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \phi(\text{rot} \mathbf{F})$$

il risultato

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (1.28)$$

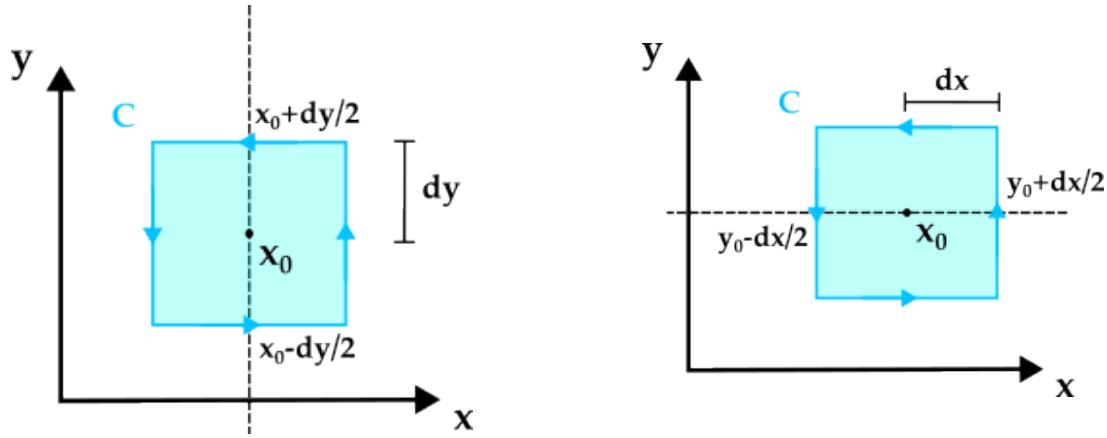
prende il nome di *teorema di Stokes*. Questo teorema ci dice che la circuitazione di un campo  $\mathbf{F}$  è uguale al flusso del rotore di  $\mathbf{F}$  attraverso una qualunque superficie aperta il cui bordo è definito dal circuito.

### 1.10.1 Espressione del rotore in coordinate cartesiane

L'espressione del rotore (1.27) risulta essere poco utile nell'applicazione non dipendendo esplicitamente da un sistema di coordinate. In questo paragrafo esprimiamo il rotore in funzione delle coordinate cartesiane, per farlo prendiamo un punto  $\mathbf{x}_0$  come centro del circuito della faccia giacente nel piano  $(x,y)$  di un cubo di volume  $dV$  infinitesimo. Possiamo riscrivere l'espressione (1.27) esplicitandone l'integrando di destra

$$\text{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \left[ \oint_C (F_y dy + F_z dz) + \oint_C (F_x dx + F_z dz) + \oint_C (F_x dz + F_y dy) \right]$$

Prendiamo in esame l'ultimo addendo dell'espressione, questo esprime l'integrale di linea di un cammino  $C$  giacente nel piano  $(x,y)$ .



Utilizzando il teorema della media integrale possiamo esprimere come

$$\int_{C_1} F_x dx \simeq F_x(x, y_0 - \frac{dy}{2}, z) \Delta x$$

per il cammino  $C_1$  inferiore parallelo ad  $x$ , mentre per il cammino  $C_2$  superiore e parallelo ad  $x$  si ha

$$-\int_{C_2} F_x dx \simeq F_x(x, y_0 + \frac{dy}{2}, z) \Delta x$$

di conseguenza possiamo riscrivere

$$\frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_1 + C_2} F_x dx \simeq -\frac{F_x(x, y_0 + \frac{dy}{2}, z) - F_x(x, y_0 - \frac{dy}{2}, z)}{\Delta y}$$

facendo il limite per  $S \rightarrow 0$  si ha che

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_1 + C_2} F_x dx \simeq \lim_{\Delta y \rightarrow 0} -\frac{F_x(x, y_0 + \frac{dy}{2}, z) - F_x(x, y_0 - \frac{dy}{2}, z)}{\Delta y} = -\frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Ripetendo lo stesso procedimento per la componente  $y$  del campo vettoriale si ha che

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{C_3 + C_4} F_y dy = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_y(x_0 + \frac{dx}{2}, y, z) - F_y(x_0 - \frac{dx}{2}, y, z)}{\Delta x} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

dunque possiamo concludere che la componente del rotore lungo  $\hat{z}$  è dunque ortogonale al circuito è data da

$$(\text{rot } \mathbf{F})_z = \oint_C (F_x dx + F_y dy) = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (1.29)$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

Ripetendo gli stessi procedimenti per le altre direzione del vettore rotore possiamo concludere che

$$\text{rot} \mathbf{F} = \left[ \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right] \hat{\mu}_x + \left[ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] \hat{\mu}_y + \left[ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right] \hat{\mu}_z$$

A differenza dell'operazione di gradiente e di divergenza che possono essere definiti su tutto  $\mathbb{R}^N$ , l'operazione di rotore è definita solo per spazi vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Possiamo definire l'operazione di rotore utilizzando l'operatore nabla come fatto per la divergenza. In questo avremo che il rotore di un campo  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è esprimibile come

$$\text{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

che definisce ancora un campo vettoriale. Inoltre il rotore può anche essere espresso come determinante

$$\nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix}$$

Riassumendo abbiamo che la divergenza di un campo vettoriale  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  misura il flusso netto del campo attraverso una superficie, mentre il rotore  $\nabla \times \mathbf{F}$  misura la sua rotazione. L'operazione di rotore è di fondamentale importanza per determinare se un campo vettoriale può essere un campo elettrostatico.

### 1.10.2 Proprietà del rotore

Il rotore è un operatore differenziale lineare e dunque soddisfa la condizione

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{F} + \mathbf{G}) = \alpha \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$$

per ogni campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  e costante  $\alpha$ . Inoltre gode della proprietà di Leibniz

$$\begin{aligned} \nabla \times (\phi \mathbf{F}) &= (\nabla \phi) \times \mathbf{F} + \phi(\nabla \times \mathbf{F}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) \end{aligned}$$

dove l'ordine in cui si posizione l'operatore  $\nabla$  è fondamentale affinchè le uguaglianze siano verificate.

---

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

Una proprietà importante è data dal fatto che se ipotizziamo di avere un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  conservativo che possiamo esprimere come il gradiente di un campo scalare  $\phi$  e ne calcoliamo il rotore, avremo che

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

a patto che  $\phi$  soddisfi l'identità di Schwartz, ovvero che sia una funzione le cui derivate parziali miste sono funzioni continue.

### 1.10.3 Campi conservativi e irrotazionalità

Sappiamo che un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  conservativo può essere espresso come

$$\mathbf{F} = \nabla \phi$$

per un campo scalare  $\phi$ . Inoltre un campo vettoriale si dice *irrotazionale* se  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Per un campo che possiede queste proprietà possiamo definire il seguente teorema.

*Teorema 1.10.1.* Per un campo definito ovunque in  $\mathbb{R}^3$ , essere conservativo è equivalente ad essere irrotazionale.

$$\nabla \times \mathbf{F} \iff \mathbf{F} = \nabla \phi$$

questo risultato è importante in quanto se lo leghiamo al teorema di Stokes dove

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

ci permette di concludere che

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

In conclusione nel caso dell'elettrostatica possiamo concludere che un campo vettoriale è un campo elettrostatico se e solo se soddisfa il teorema (1.10.1).

## 1.11 Equazioni dell'elettrostatica

### 1.11.1 Operatore Laplaciano

Il Laplaciano è un operatore differenziale del secondo ordine definito da

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Per esempio su uno spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  il Laplaciano in coordinate cartesiane ha forma

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'operatore Laplaciano è un operatore differenziale scalare, ovvero agisce su campi scalari  $\phi$  e restituisce un altro campo scalare  $\nabla^2\phi$ . Similmente, se agisce componente per componente su un campo vettoriale  $\mathbf{F}$ , restituisce un campo vettoriale  $\nabla^2\mathbf{F}$ . Se utilizziamo la formula del triplo prodotto scalare si ha

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

da cui possiamo ottenere un'espressione alternativa del Laplaciano

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$$

### 1.11.2 Equazione di Poisson

Consideriamo il campo elettrostatico  $\mathbf{E}$  abbiamo visto che localmente la legge di Gauss, per una distribuzione di carica  $\rho$ , può essere espressa rispetto all'operatore gradiente,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Legge di Gauss in forma differenziale})$$

essendo il campo  $\mathbf{E}$  conservativo può essere rappresentato come gradiente del potenziale  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , per quanto introdotto con l'operatore Laplaciano, l'espressione della prima equazione di Maxwell assume l'espressione

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.30}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

tale equazione di secondo grado alle derivate parziali, prende il nome di *equazione di Poisson*. Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  possiamo esplicitarla come

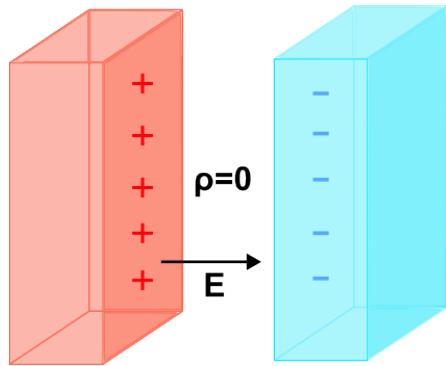
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.31)$$

La soluzio di questa equazione differenziale è a noi già nota, dato che per una distribuzione volumica  $\rho$ , il potenziale è dato dall'equivalenza

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Dal punto di vista fisico è chiaro che trovare il potenziale elettrostatico tramite la soluzione analitica dell'equazione di Poisson è equivalente a calcolare il potenziale per integrazione diretta partendo dal campo  $\mathbf{E}$ . In entrambi i gli approcci le espressioni sono state ricavate come conseguenza diretta della legge di Coulomb e del principio di sovrapposizione.

### 1.11.3 Equazione di Laplace



Consideriamo un sottocaso dell'equazione di Poisson valide nelle regioni in cui non è presente una distribuzione di carica  $\rho = 0$ . L'equazione di Poisson (1.30) assume la forma

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.32)$$

che prende il nome di *equazione di Laplace*. Questa eqauzione ha soluzione banale per  $\phi = 0$ , ma soluzioni non banali se si devono soddisfare delle condizioni al contorno; come per esempio in figura.

Il problema generale dell'elettrostatica consiste proprio nel trovare il potenziale elettrico a partire da una distribuzione  $\rho$ , e la sua risoluzione può essere molte volte ricondotto al cercare una soluzione per l'equazione di Laplace.

## 1.12 Coordinate curvilinee ortogonali

Fino a questo punto si sono utilizzate le coordinate cartesiane per descrivere gli operatori gradienti, rotazione e divergenza, in questa sezione definiamo degli strumenti matematici che ci permettono di generalizzare questi oggetti per diversi sistemi di coordinate.

In generale, possiamo descrivere un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  usando le coordinate  $u, v, w$  in modo tale che  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, w)$ . Se immaginiamo una variazione infinitesima questa viene descritta dal differenziale del punto

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} dw$$

dove ciascuna componente definisce un vettore per le linee di superficie fissate le altre due variabili. Le coordinate  $(u, v, w)$  vengono definite *ortogonal* e *curvilinee* se i vettori tangenti rispettivi sono ortogonali tra loro.

Per delle coordinate curvilinee possiamo sempre definire vettori ortonormali tangentì alle rispettive linee di superficie normalizzandoli.

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = h_u \mathbf{e}_u \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = h_v \mathbf{e}_v \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} = h_w \mathbf{e}_w$$

dove si sono introdotti i fattori di scala  $h_u, h_v, h_w > 0$  e i versori  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$  e  $\mathbf{e}_w$  formano un base ortonormale per cui  $\mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_w$ . Possiamo riscrivere il differenziale tenendo conto dei fattori di scala, e dunque

$$d\mathbf{x} = h_u \mathbf{e}_u du + h_v \mathbf{e}_v dv + h_w \mathbf{e}_w dw \tag{1.33}$$

### Coordinate cartesiane

Per le coordinate cartesiane un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  è descritto rispetto alle coordinate ortonormali  $(x, y, z)$ . Se prendiamo il differenziale del punto avremo che l'equazione (1.33) diventa

$$d\mathbf{x} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z$$

e dunque i fattori di scala sono pari a  $h_x = h_y = h_z = 1$ .

### Coordinate Cilindriche

Un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  nello spazio è descritto dalle coordinate cilindriche rispetto alle variabili  $(R \cos \theta, R \sin \theta, z)$  dove  $R > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ . L'inversa della trasformazione di coordinate è data da

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

applicando la matrice Jacobiana associata agli elementi della base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  determinano la base  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  rispetto al nuovo sistema di coordinate cilindriche

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= \hat{\mathbf{R}} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\theta &= \hat{\boldsymbol{\theta}} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_z &= \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

dove

$$h_R = h_z = 1 \quad \text{e} \quad h_\theta = R$$

### Coordinate Polari

Per un punto nello spazio definiamo le coordinate sferiche come

$$\mathbf{x} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

con  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ . L'inversa è data da

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad , \quad \tan \phi = \frac{y}{x}$$

Ripetendo quanto fatto per le coordinate cilindriche, la base rispetto alle coordinate sferiche è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \\ \mathbf{e}_\theta &= \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

I fattori di scala sono invece dati da

$$h_r = 1 \quad , \quad h_\theta = r \quad , \quad h_\phi = r \sin \theta$$

Ora che abbiamo definito come cambiano i fattori di scala per diversi sistemi di coordinate, determiniamo la rappresentazione degli operatori visti nelle sezioni precedenti.

### 1.12.1 Gradiente

L'operatore gradiente è uno dei più semplici da determinare in quanto il differenziale si lega al gradiente di un campo scalare mediante nel seguente modo

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{x}$$

Per un sistema di coordinate generico questa espressione assume la forma esplicita

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw = \nabla f \cdot (h_u \mathbf{e}_u du + h_v \mathbf{e}_v dv + h_w \mathbf{e}_w dw)$$

Usando l'ortonormalità degli elementi della base vettoriale, e comparando i termini di destra con quelli di sinistra possiamo riscrivere il gradiente come

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}_w \quad (1.34)$$

Utilizzando i fattori di scala determinati precedentemente abbiamo che il gradiente in coordinate cilindriche per una funzione  $f(r, \theta, z)$  è

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

In coordinate polari, il gradiente di una funzione  $f(r, \theta, \phi)$  è

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

### 1.12.2 Rotore e Divergenza

Per costruire gli operatori differenziali di divergenza e rotazione rispetto a delle coordinate generalizzate, definiamo prima l'operatore nabla per delle coordinate generiche

$$\nabla = \frac{1}{h_u} \mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{h_v} \mathbf{e}_v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{h_w} \mathbf{e}_w \frac{\partial}{\partial w} \quad (1.35)$$

Dato un campo vettoriale  $\mathbf{F}(u, v, w)$  definito rispetto a delle generiche coordinate ortogonali e curvilinee, la divergenza è data da

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right) \quad (1.36)$$

e la rotazione è data dal determinante

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \mathbf{e}_u & h_v \mathbf{e}_v & h_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix} \quad (1.37)$$

In coordinate cilindriche abbiamo che divergenza e rotore assumono l'espressione

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left( \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

mentre per le coordinate sferiche

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial (\sin \theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{\theta}} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

I risultati (1.35) e (1.36) sono dovuti al fatto che il campo vettoriale deve essere espresso rispetto alla base generalizzata e dunque deve tenere conto dei fattori di scala.

### 1.12.3 Laplaciano

Utilizzando l'espressione (1.34) e (1.36), possiamo esprimere il Laplaciano di un campo scalare per un generico sistema di coordinate come

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right] \quad (1.38)$$

In coordinate cilindriche avremo

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

mentre in coordinate polari assume la forma

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

### 1.12.4 Esempi ed Esercizi

#### Distribuzioni di carica a simmetria cilindrica

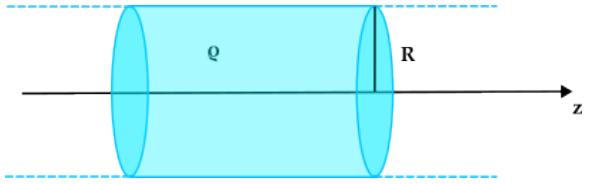
Consideriamo una distribuzione di carica  $\rho$  per un cilindro di raggio  $R$  e lunghezza infinita. Vogliamo calcolarne il campo utilizzando la prima legge di Maxwell.

Per ragioni di simmetria si ha che il campo ha direzione radiale  $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mu}_r$  e dunque la forma differenziale della legge di Gauss assume la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

risolvendo per quadrature si ha che

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \hat{\mu}_r + \frac{B}{r} \hat{\mu}_r$$



Per determinare il valore della costante d'integrazione  $B$ , possiamo osservare che se misuriamo la forza su una carica  $q_0$  nel centro della distribuzione per  $r = 0$  si ha che per ragioni

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

di simmetria la forza esercitata è  $\mathbf{F} = 0$ . Dunque  $B = 0$ .

Dato che all'esterno della distribuzione non è presente carica, si ha che

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$$

e dunque

$$\mathbf{E}_{ext} = \frac{B}{r}$$

utilizzando le condizioni al contorno per la regione cilindrica si ha che

$$\mathbf{E}_{ext}(r = R) = \mathbf{E}_{int}(r = R) \iff \frac{\rho R}{2\epsilon_0} = \frac{B}{R}$$

e quindi possiamo concludere che

$$B = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

Il campo complessivamente è dato da

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & r \leq R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} & r \geq R \end{cases}$$

possiamo osservare che il campo esternamente alla distribuzione di carica è equivalente a

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{r}$$

che è quello di un filo infinito con densità di carica lineare  $\lambda$ .

### Equazione di Poisson per una carica puntiforme

Consideriamo una densità di carica come una distribuzione

$$\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} > 0 \\ \neq 0 & \mathbf{r} = 0 \end{cases}$$

dove vale la relazione  $\int_V \rho dV = q$ , per ogni volume che contiene l'origine in cui è posta la carica puntiforme  $q$ . Verifichiamo l'equazione di Poisson in due modi:

1. In modo esplicito risolvendo l'equazione differenziale  $\nabla^2\phi = 0$  per  $\mathbf{r} > 0$

2. In forma integrale per  $\mathbf{r} \rightarrow 0$  usando il teorema della divergenza

$$\int_V \nabla^2 \phi dV = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta(\mathbf{r}) dV = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

1) Siccome il problema è a simmetria sferica, consideriamo il Laplaciano in coordinate sferiche e dunque otteniamo l'equazione differenziale

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right) = 0$$

2)

$$\int_V \nabla^2 \phi dV = \int_V \nabla \cdot (\nabla \phi) dV = \int_S \nabla \phi \cdot d\mathbf{A}$$

dato che  $\nabla^2 \phi = 0$  per  $\mathbf{r} \neq 0$ , l'unico punto per cui l'integrale è non nullo è  $\mathbf{r} = 0$ . Presa una superficie qualsiasi che racchiude la carica nell'origine abbiamo che

$$\int_S \nabla \phi \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \hat{\mu}_r \cdot d\mathbf{A} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} (4\pi r^2) = -\frac{q}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \delta(\mathbf{r}) dV$$

e dunque possiamo concludere che

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dato che abbiamo dimostrato che  $\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$  è la soluzione dell'equazione di Poisson per una carica puntiforme e l'equazione di Poisson è lineare, possiamo concludere che la soluzione generale segue dal principio di sovrapposizione.

### 1.13 Conduttori e Isolanti

Un conduttore è una regione di spazio che contiene cariche che sono libere di muoversi. Per esempio i metalli sono tendenzialmente dei buoni conduttori. Come interagiscono questi materiali in presenza di cariche statiche ? a riguardo possiamo trarre le seguenti conclusioni

- All'interno di un conduttore il campo elettrostatico  $\mathbf{E} = 0$  è nullo
- Dato che  $\mathbf{E} = 0$  all'interno di un conduttore, il potenziale elettrostatico  $\phi$  deve essere costante attraverso di esso.

---

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

- Siccome  $\mathbf{E} = 0$  e vale la prima legge di Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ , si deve vere che  $\rho = 0$ . Di conseguenza all'interno del conduttore non può essere presente nessuna carica.
- I conduttori possono avere carica neutra, ovvero possiedono carica positiva e negativa che si bilanciano tra loro. Se un conduttore non è neutro, e quindi ha un eccesso di carica in uno dei due segni, questa è distribuita sulla sua superficie.
- Poichè  $\phi$  è costante internamente al conduttore si ha che la superficie che lo racchiude è equipotenziale e dunque il campo elettrostatico  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  è perpendicolare ad essa.
- Se è presente della carica di superficie  $\sigma$  in qualsiasi parte del conduttore, la discussione della discontinuità del campo insieme al fatto che  $\mathbf{E} = 0$  all'interno, ci dice che il campo elettrico all'esterno del conduttore è

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

I problemi che interessano i conduttori hanno una natura diversa da quelli affrontati fin'ora. Il motivo è che non conosciamo la distribuzione di carica del conduttore in partenza, dunque non possiamo utilizzare gli strumenti precedentemente definiti. Quello che osserviamo sperimentalmente è frutto di un interazione con una sorgente di campo  $\mathbf{E}$  esterna che fa sì che le cariche interne al conduttore si riorganizzino in modo tale che il campo elettrico interno si annulli con quello esterno

$$\mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}^*_{int} = 0$$

In generale questo vuol dire che anche conduttori neutri finiscono con una distribuzione di carica di superficie, negativa in alcuni punti e positiva in altri, in modo tale che il campo totale interno sia  $\mathbf{E} = 0$ .

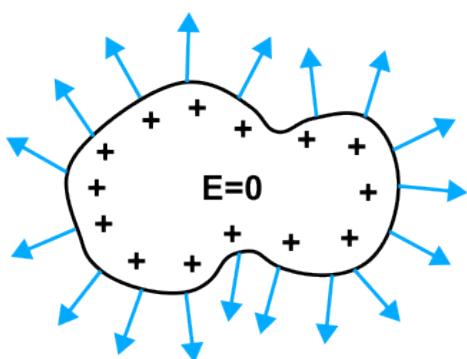


Figura 1.9: Conduttore carico isolante

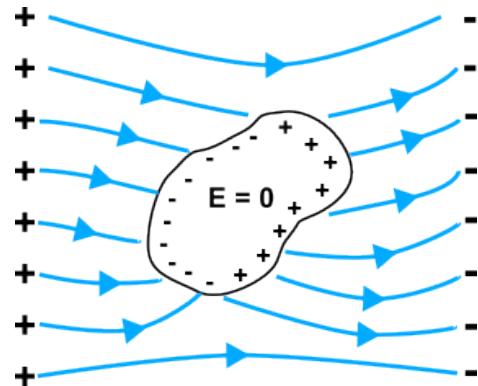


Figura 1.10: Conduttore neutro

Esistono anche dei materiali che prendono il nome di *isolanti*, questi si elettrizzano facilmente e mantengono indefinitamente il proprio stato di carica. La distinzione tra conduttore ed isolante dipende dal contesto, ovvero dalla scala di tempo del fenomeno rispetto alla scala di tempo del movimento delle cariche. I fattori di risposta dipendono tipicamente dalla temperatura.

### Energia potenziale di una sfera carica di raggio R

Per una sfera piena si ha che l'energia potenziale configurazionale è data da

$$U_c = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

mentre per una sfera piena

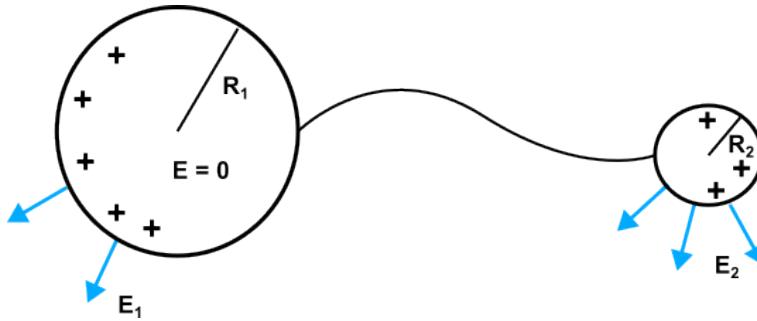
$$U_p = \frac{6}{5} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Dunque in un conduttore a simmetria sferica, la ridistribuzione delle cariche in eccesso sulla superficie esterna è una configurazione energeticamente favorevole, dato che  $U_p > U_c$ . In una sfera la carica di distribuisce in modo uniforme sulla superficie esterna ( si può dimostrare che rappresenta la configurazione di minima energia potenziale).

Se il conduttore non è sferico la carica si addensa nelle regioni con raggio di curvatura minore, si ha un "effetto punta".

**Esempio - Effetto Punta**

Prendiamo un sistema formato da due sfere conduttrici di raggio  $R_1 < R_2$  e collegate da un filo. Come si distribuisce la carica sulle rispettive superfici ?



La carica complessiva del sistema è data da  $Q = Q_1 + Q_2$  dato che le due sfere sono collegate tra loro da un filo e quindi possiamo assumerlo come un sistema unico. Essendo sfere conduttrici internamente il campo  $\mathbf{E} = 0$ . Esternamente abbiamo quello di una carica puntiforme e di conseguenza il potenziale è dato da

$$\phi_1 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0}$$

Dato che le due sfere conduttrici sono collegate tra loro si trovano allo stesso potenziale e dunque

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 \tag{1.39}$$

Il risultato (1.39) ci dice che la densità superficiale è proporzionale al reciproco del raggio di curvatura, di conseguenza avremo che la carica si addensa maggiormente sulla superficie della sfera con raggio minore. Possiamo estendere tale risultato a superfici generiche e quindi concludere che, la carica ha densità maggiore laddove il raggio di curvatura è il minore possibile.

### 1.13.1 Induzione Totale

Consideriamo un sistema isolato in cui è presente una sfera conduttrice, in cui è presente una cavità contenente una carica puntiforme  $q$ . Dato che all'interno del conduttore  $\mathbf{E}_{int} = 0$  se

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

consideriamo una superficie Gaussiana che racchiude la cavità per la legge di Gauss si ha che

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V dV \rho = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

e quindi

$$Q = q + Q_{int} = 0 \Rightarrow Q_{int} = -q$$

Dunque si induce una carica sulla superficie interna della cavità di segno opposto rispetto alla sorgente al suo interno. Se prendiamo una superficie Gaussiana  $S_2$  esterna che racchiude il conduttore avremo per la legge di Gauss che

$$\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

e dunque sulla superficie esterna avremo una carica

$$Q_{ext} = q = -Q_{int}$$

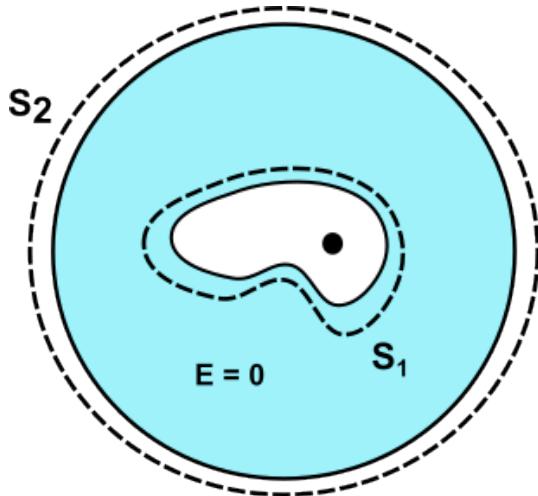
Per quanto discusso possiamo concludere che per un generico conduttore, la forma del campo elettrico esterno non dipende dalla posizione della carica sorgente posta al suo interno, ma dalla geometria del conduttore stesso. Complessivamente avremo che il campo, per il principio di sovrapposizione è dato dai contributi

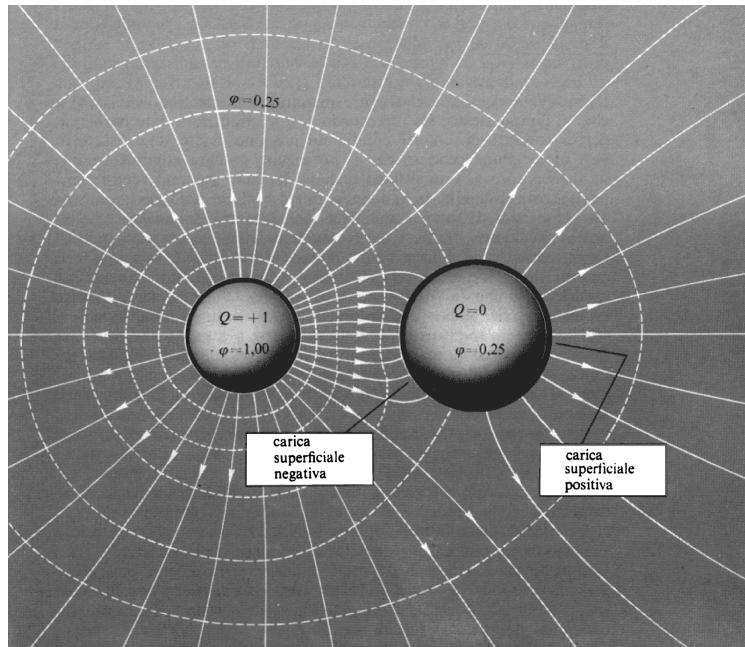
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{ind}^{int} + \mathbf{E}_{ext}^{ind} = \mathbf{E}_{ext}^{ind}$$

dove

$$\mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{ind}^{int} = 0$$

dato che la carica sulla superficie esterna è distribuita uniformemente. Tale risultato è valido per qualsiasi raggio R. Se il conduttore non è omogeneo i risultati sulla carica indotta sono ancora validi solo che il campo esterno non sarà più a simmetria sferica perchè la distribuzione di carica non è più uniforme.



**Esempio - Induzione con una carica esterna**


Consideriamo una distribuzione di carica a simmetria sferica e un conduttore con la medesima simmetria. Avremo che sul conduttore non possono esserci linee di campo che iniziamo e terminano sulla sua superficie. Per la sorgente di carica le linee di campo sono a simmetria radiale in lontananza. La carica indotta sul conduttore si divide in

$$Q_{ind} = \begin{cases} Q > 0 & \text{per la superficie interna} \\ Q < 0 & \text{per la superficie esterna} \end{cases}$$

Non tutte le linee di campo si possono chiudere sul conduttore, alcune proseguono verso infinito di conseguenza la carica indotta sul conduttore in generale è minore di della carica della sorgente.

$$|Q_{ind}| < |Q|$$

Solo quando il conduttore racchiude la carica sorgente possiamo parlare d'induzione totale.

### 1.13.2 Problema generale dell'elettrostatica: Il teorema di unicità

Il problema dell'elettrostatica si riduce alla determinazione del campo elettrico a partire da una configurazione di cariche statiche. In linea di principio la soluzione dell'equazione di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

è data da

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{u}_{rr'}$$

che possiamo ricondurre alla soluzione dell'equazione di Laplace dato che  $\phi = -\nabla \cdot \mathbf{E}$  e quindi

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Tuttavia per i problemi che coinvolgono i conduttori la densità di carica  $\rho$  non è necessariamente nota a priori, per i seguenti motivi:

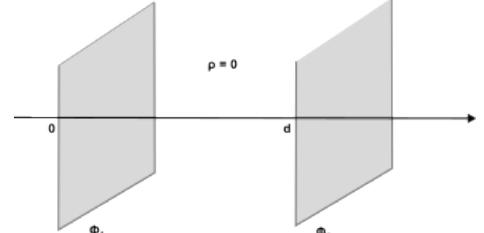
1. La carica si ridistribuisce e in generale per un conduttore conosciamo solo la carica totale di un conduttore, ma non esattamente come è distribuita.
2. Sperimentalmente siamo in grado di determinare solo il potenziale del conduttore.

In questi casi è conveniente riformulare il problema , usando le relazioni espresse nelle equazioni di Laplace e Poisson in regioni in cui non è presente della carica libera e rispetto a cui si possono formulare delle condizioni al contorno.

#### Esempio

Prendiamo due piani conduttori infiniti posti in parallelo, nel volume compreso tra i due piani abbiamo carica nulla dunque l'equazione di Laplace è

$$\nabla^2 \phi = 0$$



con condizioni al contorno  $\phi(0) = \phi_1$  e  $\phi(d) = \phi_2$ ,

dove  $\phi_2 > \phi_1$ . Dato che il campo ha direzione solo lungo l'asse ortogonale ai piani, che

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

consideriamo  $x$ , l'equazione di Laplace diventa

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

che ha come soluzione

$$\phi(x) = ax + b$$

Per determinare le costanti  $a, b \in \mathbb{R}$ , applichiamo le condizioni al contorno,

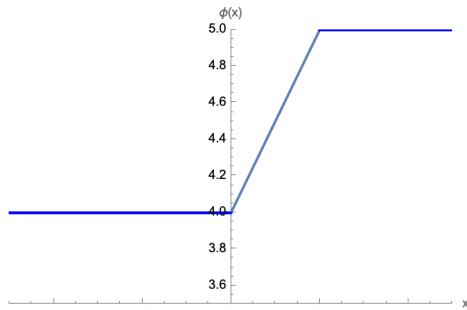
$$\phi(0) = b = \phi_1 \quad ; \quad \phi(d) = ad + \phi_1 = \phi_2 \Rightarrow a = \frac{\phi_2 - \phi_1}{d}$$

quindi il potenziale si comporta nel seguente modo

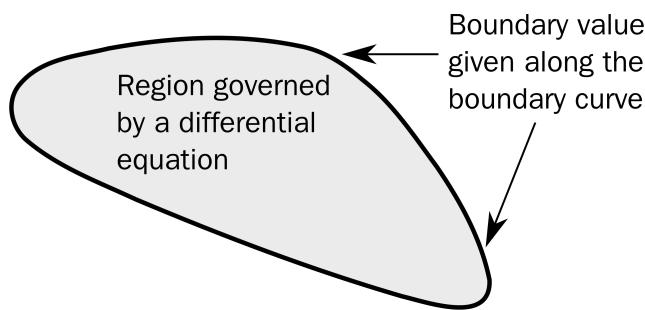
$$\phi(x) = \frac{\phi_2 - \phi_1}{d}x + \phi_1 \quad x \in [0, d]$$

Utilizzando il risultato per cui  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  abbiamo che il campo elettrico ha la seguente forma

$$\mathbf{E} = -\frac{(\phi_2 - \phi_1)}{d}\hat{u}_x$$



I problemi risolti con la metodologia dell'esempio prendono il nome di *problemi confinati*, sono una particolare categoria per cui è sempre possibile determinare una soluzione per integrazione. Questo è dovuto al fatto che si ha uno spazio chiuso, al cui interno sono presenti regioni di spazio connesse, che contengono della carica e permettono di definire delle condizioni al contorno per l'equazione di Laplace.



## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

In generale questa tipologia di problemi può essere risolta utilizzando il metodo di separazione delle variabili.

In generale le soluzioni di questa categoria di problemi, deve soddisfare le seguenti proposizioni:

*Proprietà 1.13.1.* Il potenziale elettrostatico in un generico punto C è uguale al valore medio del potenziale elettrostatico dato da una sfera che ha C come suo centro.

$$\phi_C = \langle \phi_S \rangle$$

La seguente proprietà risulta essere verificata per tutte le funzioni per cui  $\nabla \times \nabla \phi = 0$

*Dimostrazione.* Definiamo

$$\phi_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \langle \phi_S \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i}$$

Ipotizziamo di volere spostare una carica q ad una distanza r da una carica q' della sfera S, dovremo compiere un lavoro  $W = q\phi'(r) = q'\phi_C(r)$ . Ora consideriamo il lavoro per spostare q ad una distanza r, dall'intera sfera, questo è dato da

$$W = \frac{1}{N} \sum_i \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i} = q\langle \phi_S \rangle$$

essendo il lavoro il medesimo avremo  $\phi_C = \langle \phi_S \rangle$ .

□

*Proprietà 1.13.2.* La funzione  $\phi$  non possiede valori di estremo nella regione per cui è definita l'equazione  $\nabla^2 \phi = 0$

*Dimostrazione.* Ipotizziamo per assurdo che esista un punto P nella regione in cui  $\nabla^2 \phi = 0$ , per cui  $\phi(P) = \phi_{max}$  la funzione del potenziale assume valore massimo. Preso un intorno sferico attorno a P, avremo che per tutti i punti appartenenti alla sfera S vale  $\phi_S < \phi(P)$ , di conseguenza abbiamo un punto di equilibrio del sistema. Il che è assurdo perché in una regione di spazio dove è definita l'equazione di Laplace non possono esserci configurazioni di equilibrio. (Non è vero in generale)

□

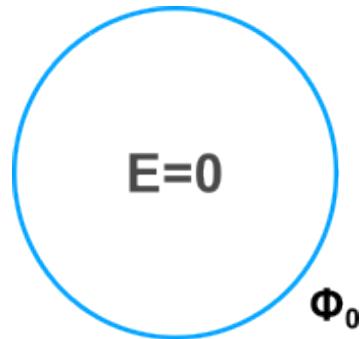
*Proprietà 1.13.3.* La soluzione dell'equazione di Laplace e Poisson è unica

*Dimostrazione.* Ipotizziamo che esistano due soluzioni  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dell'equazione  $\nabla^2\phi = 0$  e che siano date le seguenti condizioni al contorno  $\phi(\mathbf{x}_1) = \phi_1, \dots, \phi(\mathbf{x}_N) = \phi_N$ . Definiamo la funzione  $W(x) = \phi_2 - \phi_1$  e di conseguenza le condizioni al contorno diventano  $W(\mathbf{x}_i) = 0$  per  $i = 1, \dots, N$ . La funzione  $W(x)$  è soluzione dell'equazione di Laplace  $\nabla^2 W = 0$ , dato che le condizioni al contorno sono tutte nulle, e dalla proprietà precedente  $W$  non può avere punti di massimo e minimo nella regione in cui è definita, si deve avere che  $W(x) = 0$  ovunque e quindi  $\phi_1 = \phi_2$ .

□

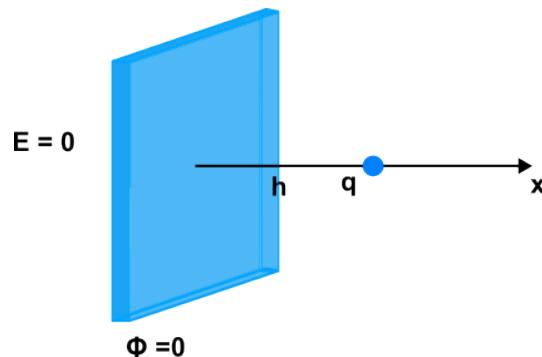
### 1.13.3 Campo all'interno di un conduttore cavo

Consideriamo un conduttore chiuso e cavo (come per esempio un guscio sferico), la sua superficie equipotenziale  $\phi_0$  costituisce una condizione al contorno rispetto allo spazio interno in cui si ha l'equazione di Laplace  $\nabla^2\phi = 0$ . La condizione al contorno fa sì che la soluzione è data da  $\phi = k \in \mathbb{R}$ , di conseguenza  $\mathbf{E} = -\nabla\phi = 0$ .



### 1.13.4 Metodo delle cariche immagine

Prendiamo un piano conduttore infinito e poniamo a potenziale nullo  $\phi = 0$ , e poniamo ad una distanza  $h$  una carica puntiforme  $q$ . Vogliamo descrivere il comportamento del sistema nel suo complesso.



## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

Abbiamo un informazione importante data dal fatto che il piano conduttore è messo a terra ovvero ha potenziale nullo. Una configurazione simile in cui si ha una regione dello spazio in cui il potenziale è nullo, la si ottiene quando si pongono due cariche puntiformi,  $Q$  e  $-Q$  equidistanti tra loro, come in figura (1.11)

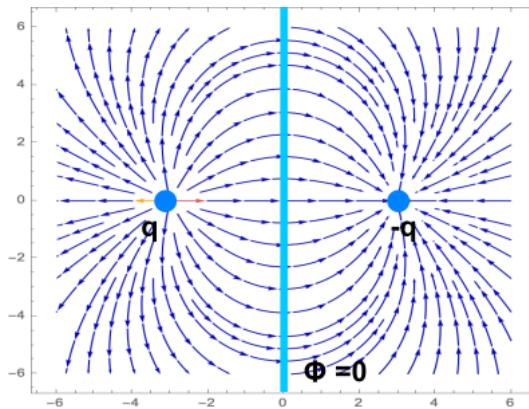


Figura 1.11

Il comportamento del campo magnetico è dato dalle linee di campo a sinistra del piano divisore in figura (1.11), ovvero si chiudono sulla superficie, nel caso del problema di partenza, non è presente campo  $\mathbf{E} = 0$  in quella parte di spazio divisa dal piano in cui è presente la carica  $-q$ . Vista l'analogia tra i due problemi, poniamo una carica  $-q$  in modo simmetricamente opposto ed equidistanziato a  $q$ , figura 1.12.

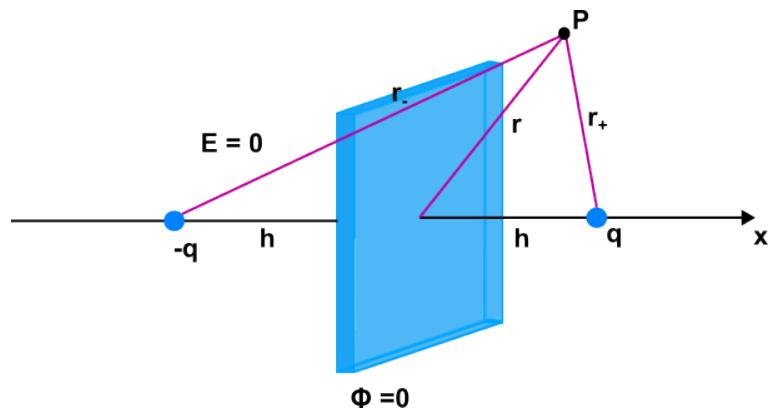


Figura 1.12

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

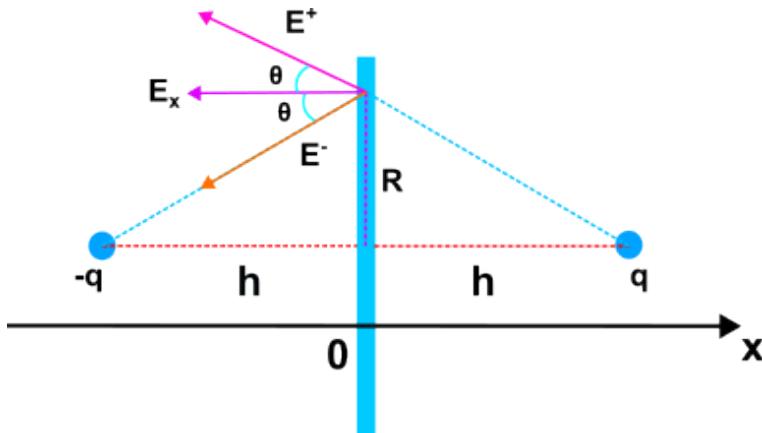
---

Il potenziale associato è come quello di un dipolo elettrico (nelle prossime sezioni)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (1.40)$$

Per tutti i punti in cui  $r_+ = r_-$  il potenziale è nullo, e coincidono con i punti appartenenti al piano conduttore. Una configurazione di questo tipo ci riconduce al problema di Poisson, dove da una parte è presente una distribuzione di carica e il potenziale sul piano costituisce le condizioni al contorno. Dato che l'equazione ha un'unica soluzione, questa coincide con l'equazione (1.40).

Per determinare il valore del campo elettrico sul piano, consideriamo il seguente diagramma delle forze in figura.



Le componenti del campo lungo l'asse  $\hat{z}$  del campo elettrico si annullano. Il campo elettrico lungo  $\hat{x}$  è dato da

$$\mathbf{E}^\pm = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 + h^2} \cos\theta \hat{u}_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \hat{u}_x$$

il campo totale è dato da

$$\mathbf{E} = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}} \hat{u}_z$$

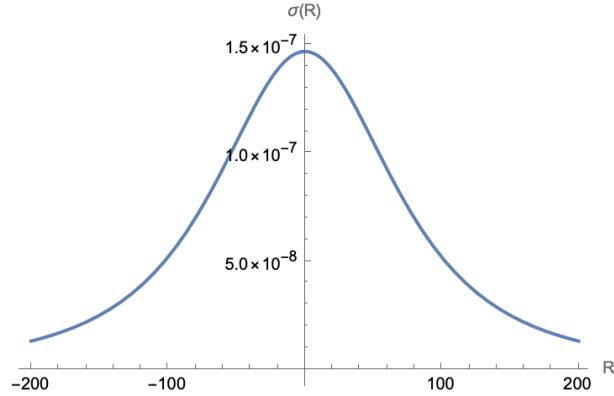
Dalla legge di Gauss Sappiamo che la distribuzione di carica superficiale  $\sigma$  sul piano è data da

$$\sigma(R) = -\frac{2q}{4\pi} \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

Studiando la funzione della distribuzione di carica, si avrà una maggiore concentrazione nel centro del piano per  $R=0$ .



La carica indotta sul piano è data da

$$Q_{ind} = \int_S \sigma(R) dA$$

dato che la densità di carica dipende dal raggio conviene integrare in coordinate polari sul piano, ovvero  $dA = R dR d\theta$ , per  $\theta \in [0, 2\pi]$ . L'integrale della carica indotta diventa

$$Q_{ind} = -\frac{q}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{h2\pi R}{[R^2 + h^2]^{3/2}} dR = -\frac{qh}{2} \left[ -2(R^2 + h^2)^{-1/2} \right]_0^{+\infty} = -q$$

Quindi si ha *induzione totale*, ovvero le linee di campo che escono da  $q^+$  si chiudono tutte sul piano.

Abbiamo determinato come si distribuiscono le cariche negative sul piano, ma che cosa succede alle cariche positive?

Mediamente queste non si spostano e sono trascurabili, se consideriamo un disco sul piano, la densità di carica positiva è data da

$$\sigma^+ = \frac{q}{2\pi R^2}$$

se confrontiamo la densità di carica negativa con quella positiva, abbiamo che

$$\frac{\sigma^+}{\sigma^-(0)} = \frac{h^2}{R^2}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

se prendiamo  $R \gg h$ , avremo che la carica positiva risulta essere trascurabile.

Se vogliamo determinare la forza che esercita il piano conduttore sulla carica  $q$ , questa è equivalente alla forza tra due cariche di segno opposto, ovvero

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2h)^2} \hat{u}_x = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(2h)^2} \hat{u}_x$$

Per determinare l'energia potenziale della configurazione piano-carica, consideriamo l'energia che dovremmo immettere nel sistema per spostare la carica  $q$  ad una distanza  $h$  dal piano, questa è data da

$$U_{piano-q} = W = q\Delta V = -q \int_h^{+\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4x^2} dx = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4h} = \frac{U_{qq'}}{2}$$

dove l'energia  $U_{qq'}$  è l'energia d'interazione tra carica immagine  $q' = -q$  e  $q$ . Questa coincide con il lavoro necessario a spostare la carica  $q$  ad una distanza  $2h$  da  $q'$ .

$$U_{qq'} = -q \int_{2h}^{+\infty} \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2} dx = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2h}$$

Il risultato per cui  $U_{piano-q} = U_{qq'}/2$  possiamo interpretarlo con il fatto che nella regione di spazio in cui è presente la carica immagine il campo elettrostatico è nullo, quindi stiamo considerando metà del campo dato dall'interazione tra  $q$  e  $-q$  e quindi anche metà dell'energia.

Se allontaniamo la carica sonda  $q$  dal piano, la distribuzione di carica negativa formatasi dall'interazione si sparpaglia nel conduttore per mantenere una configurazione in cui il potenziale sul piano è nullo. Il lavoro sulle cariche che si spostano all'interno di un conduttore è nullo, perchè dato  $\phi = k \in \mathbb{R}$ , allora  $W_{cond} = 0$ . Possiamo pensare che le cariche si muovano in direzione ortogonale rispetto al campo elettrostatico.

### 1.14 Energia del campo elettrostatico

Nelle sezioni precedenti abbiamo calcolato l'energia potenziale associata ad una configurazione di cariche. Possiamo vedere una distribuzione di carica continua come un aggregato di tante cariche, che interagiscono tra di loro esercitando una forza di natura Coulombiana e una di coesione, che permette di mantenere la configurazione. Dato che le cariche sono

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

statiche, avremo che

$$\mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad q\mathbf{E} + \mathbf{F}_{altro} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{altro} = -q\mathbf{E}$$

di conseguenze le forze di coesione avranno pari intensità e direzione, ma verso opposto; inoltre la loro origine è di natura elettrica e legata alle cariche atomiche.

Vogliamo dare una definizione alternativa all'energia potenziale elettrostatica calcolando l'energia necessaria ad assemblare la configurazione di carica.

In un certo qual modo pensare di portare delle cariche da infinito tutte insieme e di darle una forma sferica, è equivalente ad esercitare contemporaneamente una pressione su tutta una superficie sferica riducendone uniformemente il raggio. Quindi consideriamo di avere una sfera cava di raggio  $R$  e densità di carica superficiale  $\sigma$ , il campo generale coincide con quello di una carica puntiforme

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 4\pi R^2}{r} \hat{u}_r & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

e quindi sulla superficie esterna si ha

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_r$$

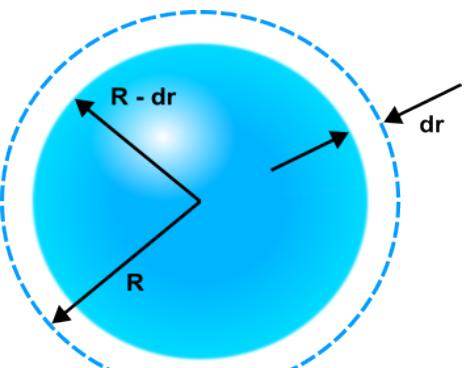
Le cariche per un area infinitesima  $da$  sulla superficie della sfera, esercitano tra di loro una forza di Coulomb

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E}$$

Per comprimere la sfera di un tratto  $dr$ , modificandone il raggio bisogna compiere un lavoro sul sistema

$$dU = -dW = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

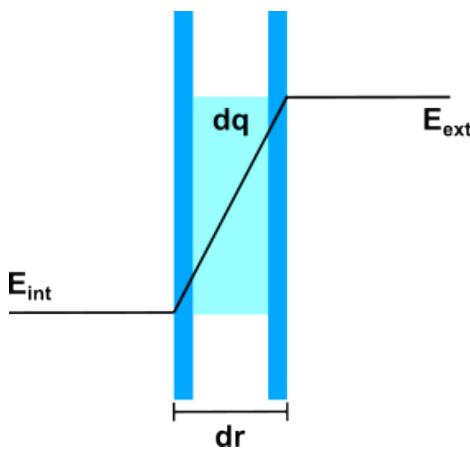
Le cariche presenti sulla superficie per la sfera con raggio  $R$ , si ritroveranno dopo la compressione ad una distanza mediamente inferiore, generando un campo elettrico là dove prima non era presente. Per esprimere questo fatto si può usare la seguente figura:



## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

mera  $dU$  in funzione del campo elettrico dovuto alla distribuzione delle cariche, abbiamo bisogna di determinare l'espressione della forza  $\mathbf{F}$  d'interazione delle cariche sulla superficie di raggio ridotto.



Per calcolarla consideriamo uno strato di spesso molto piccolo  $dr$ , equivalente alla quantità di quanto si è ridotto il raggio della sfera. Al suo interno è presente una densità di carica volumica  $\rho$  uniforme e sufficiente affinché si abbia che  $\sigma = \rho dr$  per qualsiasi  $dr$  scelto. Si dimostra facilmente usando la legge di Gauss che l'intensità del campo elettrico è zero sulla superficie interna dello strato e cresce linearmente fino a raggiungere il valore  $4\pi\sigma$  sulla superficie esterna. Il valore medio del campo elettrico nello strato, e di conseguenza la forza media agente su una carica

unitaria interna allo strato, è

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}(E_{int} + E_{ext}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

dato che  $E_{int} = 0$ . La forza agente complessivamente per ogni porzione di superficie  $dA$  e larghezza  $dr$ , sarà data dalla relazione

$$F = \int_0^r dF = \int_0^r dq E = \int_0^r dr \rho E da$$

dove  $dq = \rho \cdot da \cdot dr$ . Sappiamo che  $d\sigma = \rho dr$  utilizzando la legge di Gaussabbiamo deduciamo che  $d\sigma = \varepsilon_0 dE$ , di conseguenza possiamo riscrivere l'integrale precedente rispetto al campo elettrico

$$P = \frac{F}{da} = \varepsilon_0 \int_{E_{int}}^{E_{ext}} dE E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E_{ext}^2 - E_{int}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E_{ext} + E_{int}) \Delta E$$

dove  $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$  e quindi possiamo concludere che la *pressione elettrostatica* è data da

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

La direzione della forza è verso l'esterno della superficie, indipendentemente dal segno della

carica dato che è quadratica nell'espressione.

Dalla pressione possiamo determinare la densità di energia elettrostatica immagazzinata all'interno del volume  $dV = 4\pi R^2 dr$ , dato che

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} 4\pi R^2 dr$$

che possiamo riscrivere come

$$dU = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (4\pi R^2 dr) \Rightarrow u_e = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Ora che abbiamo determinare la quantità di energia presente per unità di volume nello spazio, possiamo calcolare l'energia, integrando sul volume, e quindi definiamo

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_V d\nu E^2 \quad (1.41)$$

## 1.15 Dipolo elettrico

Un *dipolo* consiste in un sistema di due cariche  $Q$  e  $-Q$  poste a una distanza  $d$ . La prima carica è posizionata in  $d/2$  e la seconda in  $-d/2$ . Il potenziale non è altro che la somma dei potenziali di ciascuna carica

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Prendiamo un punto  $P$  nello spazio affinché la sua distanza radiale  $r$  sia molto più grande della distanza tra le due cariche. Riscriviamo le congiungenti tra le cariche e  $P$  rispetto ad  $r$  nel seguente modo

$$r_1 = r + \frac{d}{2} \cos\theta \quad \text{e} \quad r_2 = r - \frac{d}{2} \cos\theta$$

l'espressione del potenziale diventa

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r + d/2 \cos\theta} - \frac{1}{r - d/2 \cos\theta} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d \cos\theta}{r^2 - d^2/4 \cos\theta} \simeq \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

dato che siamo sotto l'ipotesi in cui  $r \gg d$  si è sviluppato in potenziale con Taylor arrestandosi al primo ordine. Alcune osservazioni:

1. Nel potenziale compare il termine  $p = Qd$  che prende il nome di *momento di dipolo*.

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

2. Un dipolo ideale è dato da  $d \rightarrow 0$  e  $q \rightarrow \infty$  con il momento di dipolo che assume un particolare valore finito. A differenza del potenziale di una carica puntiforme quello del dipolo è proporzionale a  $1/r^2$  decrescendo molto più velocemente; questo è dovuto al fatto che il potenziale delle due cariche opposte tende a cancellarsi quando  $r >> d$ . L'unico contributo restante è quello dovuto alla distanza tra due cariche leggermente differenti.
3. Il potenziale è proporzionale al  $\cos\theta$ , questo ci dice che in direzione  $\perp$  al dipolo il potenziale è  $\phi(r, \pm\pi/2) = 0$ , mentre per una direzione parallela il potenziale è massimo.

Utilizzando le coordinate sferiche per l'operatore gradiente determinato il campo elettrostatico generato dalla configurazione di carica

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{u}_\theta\right] = \frac{Qd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2\cos\theta\hat{u}_r + \sin\theta\hat{u}_\theta]$$

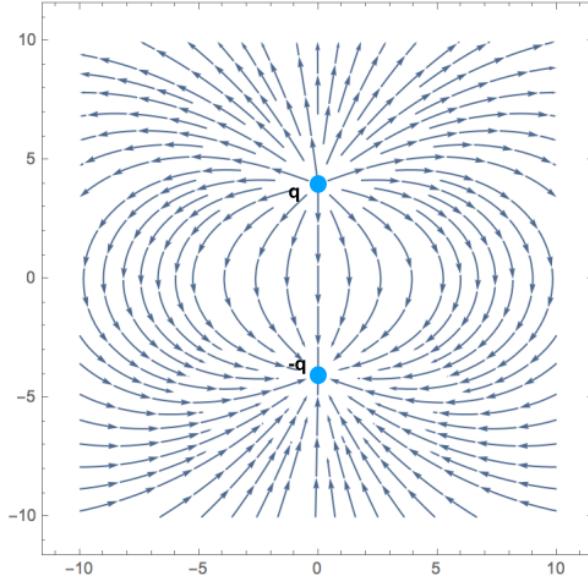
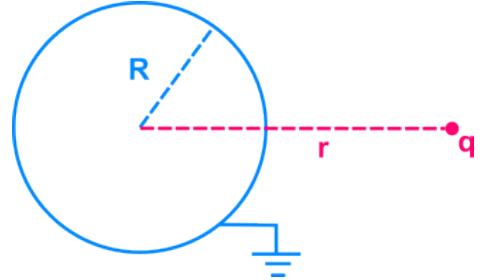


Figura 1.13: Campo elettrico generato da un dipolo

## 1.16 Esempi ed esercizi

### 1.16.1 Carica puntiforme in prossimità di una sfera conduttrice (Esame 23/06/2020)

Si consideri un sistema dove si ha una carica puntiforme  $q$  ad una distanza  $a$  da un conduttore sferico con massa a terra di raggio  $r$ . Vogliamo calcolare il lavoro necessario ad allontanare la carica da  $a$ , verso infinito.



*Dimostrazione.* Per risolvere il problema possiamo usare il metodo della carica immagine, ovvero andiamo a collocare una carica immaginaria  $Q$  all'interno del conduttore, affinchè il potenziale  $\phi$  sulla superficie della sfera sia nullo. Di conseguenza abbiamo bisogno di determinare per quali valori  $Q$  e in quale posizione  $x$  tale condizione è verificata.

Ipotizziamo si posizionare le due cariche  $Q$  e  $q$  in due generici punti  $(b, 0, 0)$  dove  $b < r$  e  $(a, 0, 0)$  per  $a > r$ . Il potenziale complessivo del sistema a due cariche è dato da

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Imponendo la condizione  $\phi = 0$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} &= - \frac{Q}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2}} \iff \frac{Q^2}{q^2} = \frac{(x-b)^2 + y^2 + z^2}{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \\ \Rightarrow \frac{Q^2}{q^2} &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2bx + b^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + a^2} = \frac{r^2 - 2bx + b^2}{r^2 - 2ax + a^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{Q^2}{q^2} r^2 + \frac{Q^2}{q^2} a^2 - 2 \frac{Q^2}{q^2} ax &= r^2 - 2bx + b^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

$$\Rightarrow r^2 \left( \frac{Q^2}{q^2} - 1 \right) = -\frac{Q^2}{q^2} a^2 + b^2 + 2x \left( \frac{Q^2}{q^2} a - b \right) \quad (1.42)$$

l'equazione (1.42) assume un'espressione semplificata se poniamo l'ultimo addendo nullo, ovvero  $b = (Q^2/q^2)a$ , e quindi possiamo riscrivere l'equazione nel seguente modo:

$$r^2 \left( \frac{b}{a} - 1 \right) = -ab + b^2 = ab \left( \frac{b}{a} - 1 \right) \Rightarrow r^2 = ab$$

troviamo dunque che la posizione della carica  $Q$  affinché  $\phi(x, y, z) = 0$  è data da

$$\boxed{b = \frac{r^2}{a}}$$

ci manca ora da determinare la carica immagine  $Q$  all'interno del conduttore sferico affinché  $\phi(R) = 0$ . Per farlo riscriviamo l'espressione del potenziale complessivo con il risultato trovato,

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x-r^2/a)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

e imponiamo che per  $\phi(r, 0, 0) = 0$  e quindi abbiamo l'equazione

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q}{|r-a|} + \frac{Q}{|r-\frac{r^2}{a}|} \right] = 0$$

dato che  $a > R$  si ha che  $|r-a| = -(r-a)$ . L'equazione diventa

$$Q = \frac{q}{r-a} \left( r - \frac{r^2}{a} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = -\frac{r}{a}q}$$

dunque per un potenziale del seguente tipo

$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{r}{a} \frac{1}{\sqrt{(x-r^2/a)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

abbiamo che è soddisfatta la condizione che  $\phi(r) = 0$ .

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

Infine possiamo rispondere alla domanda dell'esercizio dove il lavoro per muovere una carica puntiforme da  $a$  ad  $\infty$  è dato da

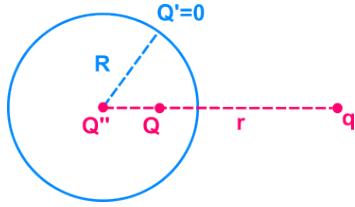
$$W = q\phi(a) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2 - r^2}$$

siccome all'interno della sfera conduttrice non c'è campo, per il sistema originale dobbiamo considerare metà dell'energia trovata e quindi

$$W' = \frac{1}{2}W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^2 - r^2}$$

□

Che cosa succede se consideriamo la sfera conduttrice scarica e la rimuoviamo dalla messa a terra ?



Avremo che sulla superficie della sfera si crea una distribuzione uniforme di carica  $Q'' = -Q$  tale per cui la carica netta su di essa è  $Q' = Q + Q'' = 0$  e quindi il conduttore sferico è neutro. Questo equivale a porre una seconda carica immagine  $Q''$  al centro della sfera.

Applicando il principio di sovrapposizione per il potenziale di ciascuna carica e considerando l'origine del sistema di riferimento con il centro della sfera, avremo che

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{(x-R^2/r)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{R}{r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

Per determinare il lavoro necessario a spostare la carica da  $r$  a  $+\infty$  calcoliamo

$$W = q\phi(r, 0, 0) = \frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2 - R^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

l'energia trovata è quella della configurazione delle cariche, per determinare quella associata alla sfera conduttrice neutra, dobbiamo ricordare che internamente il campo è nullo e dunque il lavoro necessario è la metà di W.

$$W' = W/2 = \frac{q^2 R}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2 - R^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

**1.16.2 Esercizio 2**

## CAPITOLO 1. ELETTROSTATICA

---

# CAPITOLO 2

---

## Magnetostatica

---

### 2.1 Correnti stazionarie

Le cariche generano campi elettrici. Le correnti di cariche generano campi magnetici. Restringiamo lo studio al caso in cui la densità di carica è  $\rho = 0$ , in modo tale che  $\mathbf{E} = 0$  e quindi possiamo concentrarci solo sul campo magnetico.

Dato che per ipotesi  $\rho = 0$ , non può esserci carica netta, questo vuol dire che cariche positivi e negativi si bilanciano tra loro in ogni punto dello spazio. Inoltre, dato che le cariche possono muoversi è presente una corrente anche se non c'è un trasporto netto di carica.

Sembrerà strano, ma è esattamente quello che succede all'interno di un normalissimo filo. Questo è dovuto al fatto che ci sono delle cariche positive libere nel metallo per via del reticolo di ioni, ma dato che si muovono tutti insieme riusciamo ad avere in ogni singolo punto una densità di carica nulla. L'*equazione di continuità*, che descrive la conservazione della carica è data da,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.1)$$

e dato che la densità di carica è costante, diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Matematicamente vuol dire che se abbiamo un flusso di corrente in una certa regione di spazio, un eguale corrente deve fluire in senso opposto affinché non ci sia un addensamento

di carica. Notare che questo è consistente con la proprietà che per ogni campo vettoriale si ha che  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ .

### 2.1.1 Derivazione dell'equazione di continuità

Per caratterizzare il trasporto di carica si introducono alcune grandezze fisiche. Una delle prime è l'*intensità di corrente*:

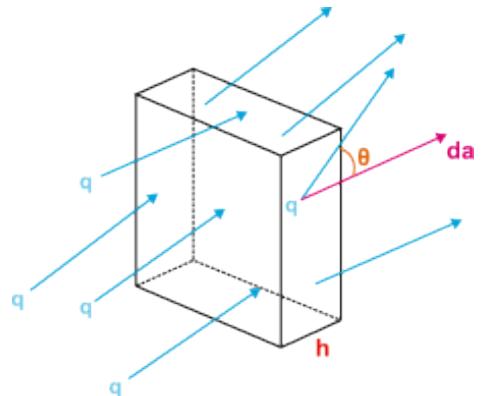
$$I = \frac{dq}{dt}$$

che descrive la quantità di carica netta che attraversa ala sezione di un mezzo in unità di tempo. La unità di misura in cui viene espressa è data dall'Ampere che esprimiamo come

$$[A] = \frac{[\text{Coulomb}]}{[\text{Secondi}]}$$

La definizione può essere generalizzata al trasporto di carica nello spazio, riconducendola ad una grandezza vettoriale e al concetto di flusso attraverso una superficie.

La seconda grandezza che andiamo ad introdurre è la *densità di corrente*, questa è legata ad un volume generico costituito da un materiale al cui interno le cariche siano libere di muoversi in una direzione generica. Ipotizziamo di avere nel mezzo dei portatori di carica tutti identici tra loro, identificati dalle seguenti grandezze comuni:



1.  $n_q \rightarrow$  densità di portatori di carica per unità di volume ;
2.  $q \rightarrow$  carica dei portatori;
3.  $\mathbf{v} \rightarrow$  velocità di spostamento delle cariche;
4.  $\mathbf{da} \rightarrow$  elemento infinitesimo di superficie del volume.

Dato il parallelepipedo in figura solo le cariche al suo interno di base  $da$  e altezza  $h = v\Delta t \cos \theta$  attraversano la superficie in un intervallo di tempo  $\Delta t$ .

---

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

Di conseguenza la variazione di carica attraverso la superficie **da** è data dalla relazione

$$\Delta Q = n q da h = n q v \Delta t \cos \theta da = n q \mathbf{v} \cdot \mathbf{da} \Delta t$$

La corrente attraverso **da** è associata al flusso della grandezza  $n_q \mathbf{v}$ , da cui possiamo definire

$$dI = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q \mathbf{v} \cdot \mathbf{da}$$

Nel caso più generico all'interno del volume possono esistere diversi portatori di carica  $q_i$ , con velocità differenti  $\mathbf{v}_i$ , dunque per ciascuna specie di particella possiamo definire

$$dI_i = (n_i q_i \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{da}$$

e di conseguenza la corrente infinitesima complessiva è

$$dI = \sum_i dI_i = \left( \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \mathbf{da}$$

dove definiamo la grandezza vettoriale

$$\mathbf{J} = \sum_i n_i q_i \mathbf{v}_i$$

*densità di corrente*, che è identificata dalle unità di misura

$$[\mathbf{J}] = [I L^{-2}] = \frac{\text{Ampere}}{m^2}$$

Non è necessario che tutte le cariche dello stesso tipo abbiano la medesima velocità  $\mathbf{v}_i$ . In un conduttore tipico,  $\mathbf{v}_i$  è definita da una distribuzione (come nel caso del moto termico è descritto da una Maxwelliana).

Supponiamo di considerare solo una certa specie di cariche  $q_i$ , e che ce ne siano  $n_i$  per unità di volume con velocità  $v_k^i$ . La densità sul volume complessivo sarà data da

$$N_q = \sum_{i=1}^N n_i$$

La densità di corrente rispetto al specie in esame sarà data da

$$\mathbf{J} = \sum_k q n_i \mathbf{v}_k^i = N_q \frac{1}{N_q} \sum_k q n_i \mathbf{v}_k^i = N_q q \langle \mathbf{v}_k^i \rangle$$

e dunque la definizione generale di densità di corrente è data da

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i n_i \langle \mathbf{v}_k^i \rangle = \sum_i \rho_i \langle \mathbf{v}_i \rangle$$

dove  $\langle v_i \rangle$  rappresenta la velocità media dei portatori di cari di i-esimo tipo.

La definizione di  $\mathbf{J}$  generalizza quella di intensità di corrente  $I$ . La relazione tra le due segue in modo intuitivo dalle relazioni definite in precedenza

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

$I$  risulta dunque essere il flusso di  $\mathbf{J}$  attraverso la superficie  $\mathbf{A}$ , il cui segno dipende dal prodotto vettoriale di  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{A}$ .

Per una superficie chiusa il verso del vettore di superficie  $\mathbf{A}$  è diretto verso l'esterno. Se c'è flusso netto di carica in uscita dalla superficie, la carica contenuta nel volume diminuisce tale risultato è esprimibile come

$$I = - \left| \frac{\partial Q}{\partial t} \right| \iff \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V d\nu \rho \quad (2.2)$$

Tale risultato viene interpretato, dicendo che è presente una sorgente carica (o un pozzo) che si accende o spegne, oppure varia nel tempo.

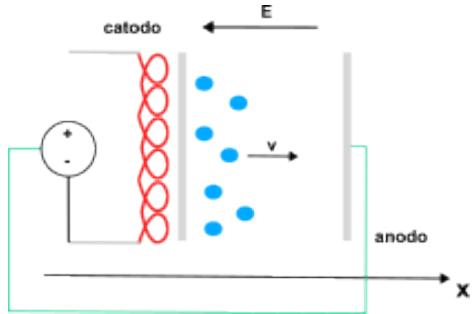
Utilizzando il teorema di Gauss, possiamo riscrivere l'equazione (2.2) ottenendo l'equazione di continuità (2.1) espressa nel paragrafo precedente. In particolare nel caso fenomeni stazionari, ovvero quando la carica è indipendente dal tempo, otteniamo

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \iff \text{div} \mathbf{J} = 0$$

Notare anche che se la carica è indipendente dal tempo, questo non vuol dire che sia uniformemente distribuita nello spazio  $\rho(\mathbf{x})$ .

**Esempio: Corrente Catodica**

Consideriamo un apparato sperimentale costituito da un tubo sottovuoto al cui interno è presente una lastra di metallo riscaldata da una serpentina metallica e in sua opposizione un ulteriore lastra metallica. Il primo elemento prende il nome *catodo*, mentre il secondo *anodo*. Se generiamo una caduta di tensione tra le due lastre facendo passare al loro interno una corrente elettrica, avremo che tra le due piastre si forma un campo elettrico  $\mathbf{E}$ .



Gli elettroni presenti sul catodo, eccitati dal calore della serpentina, verranno attratti verso l'anodo creando un flusso di corrente per via della forza esercitata su di essi dal campo elettrico generato.

$$\mathbf{F} = -e(-E\hat{u}_n) = eE\hat{u}_n$$

dove  $u_n$  è il versore ortogonale al piano. L'accelerazione esercitata sugli elettroni sarà data

$$\mathbf{a} = \frac{eE}{m}\hat{u}_n$$

La legge oraria che descrive il modo degli elettroni è dunque data da

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$$

e la rispettiva velocità

$$v = \sqrt{2ax}$$

Definita  $\mathbf{A}$  l'area della superficie delle lastre metalliche di anodo e catodo, avremo che la densità di corrente è data da

$$\mathbf{J} = nev\hat{u}_n$$

equindi la corrente è pari a

$$I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} = \rho\langle v \rangle A$$

che è costante nel tempo, ovvero stazionaria. Possiamo dunque desumere che  $\rho(x)v(x) =$

*cost* e quindi

$$\rho(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Le cariche subiranno un addensamento maggiore in prossimità del catodo.

## 2.2 Legge di Ampère

Introduciamo la prima equazione della magnetostatica,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.3)$$

conosciuta anche come *legge di Ampère* nella sua forma locale. Per dare una definizione più generale della legge di ampère definiamo la sua forma integrale. Presa una superficie aperta  $S$  con contorno  $C = \partial S$ , integrando (2.3) rispetto a tale superficie passiamo dalla forma differenziale all'integrale di linea su  $C$ , utilizzando il teorema di Stokes

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Dove consideriamo il vettore  $\mathbf{S}$  con una direzione ortogonale alla superficie  $S$  e con verso uscente. L'integrale di linea lungo il contorno è calcolato considerando la regola della mano destra, nel senso che se orientiamo il pollice della mano destra nella direzione  $\hat{\mathbf{n}}$ , allora l'indice indica il senso di percorrenza attorno a  $C$  dell'integrale di linea.

L'integrale della densità corrente rispetto alla superficie  $S$  è equivalente alla corrente  $I$  che passa attraverso  $S$ , e quindi la legge di ampère in forma integrale è data da

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I \quad (2.4)$$

Da un punto di vista applicativo, in generale la legge (2.4) non è sufficiente da sola a determinare la forma del campo magnetico, ma è necessario utilizzare delle informazioni in più. Ci sono però alcuni casi in cui utilizzando osservazioni sulla simmetria del problema è sufficiente nella determinazione di  $\mathbf{B}$ .

Infine si osserva che si è ricavata la legge (2.3) ipotizzando che le correnti siano stazionarie. La condizione  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  è garantita dalle proprietà del rotore dove  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

per qualsiasi vettore  $\mathbf{F}$ .

### 2.2.1 Principio di sovrapposizione per il campo magnetico

Per una corrente passante attraverso un circuito chiuso, sappiamo per la legge di ampère che

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

immaginiamo ora che il cammino  $C$  sia attraversato da più correnti  $I_k$ , ciascun filo genererà un campo magnetico

$$\mathbf{B}_k = \frac{\mu_0 I_k}{2\pi r_k} \hat{u}_\theta$$

per il principio di sovrapposizione il campo magnetico positivo, è dato da  $\mathbf{B} = \sum_k \mathbf{B}_k$ . La legge di Ampère assume l'espressione

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \sum_k \oint_C \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k I_k = \mu_0 I_c$$

dove  $I_c = \sum_k I_k$  e prende il nome di *corrente concatenata*. Se immaginiamo di avere un numero infinito di fili portatori di corrente, avremo che  $dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$  e dunque

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int dI = \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.5)$$

Tale risultato è equivalente a considerare l'integrale sulla densità di corrente di tutta la superficie  $A$  delimitata da  $C$ . Quanto discusso vale solo per correnti stazionarie come nel caso di un solo filo dato che deve valere

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

La relazione (2.5) possiamo interpretarla nel seguente modo:

*La circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo un cammino chiuso  $C$  è equivalente al flusso di  $\mathbf{J}$  attraverso qualsiasi superficie  $A$  delimitata dalla curva chiusa  $C$ .*

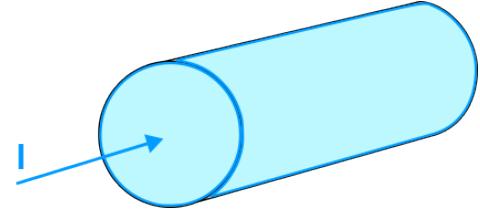
### 2.2.2 Filo infinito percorso da una corrente

Consideriamo un filo di lunghezza infinita in cui scorre una corrente  $I$ . Che orientiamo lunga le direzione  $\hat{z}$ .

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

La simmetria del problema suggerisce di usare delle coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$ , dove  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$  è il raggio del filo misurato dal suo centro. Consideriamo una superficie aperta  $S$  giacente nel piano  $(x, y)$ , con centro coincidente con quello del filo. Affinchè l'integrale di linea definito in (2.4) non sia nullo, è necessario che il campo magnetico abbia delle componenti lungo la circonferenza del disco. Per dimostrarlo ci basta considerare la forma locale della legge di Ampère



$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

dato che la corrente scorre lungo l'asse  $\hat{\mathbf{z}}$  avremo che

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \mu_0 J_z \iff \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) = \mu_0 J_z$$

Per simmetria del problema osserviamo che lungo  $\theta$  la componente radiale del campo magnetico è costante e quindi

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \begin{cases} \mu_0 J_z & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione differenziale ordinaria per quadrature abbiamo che

$$B_\theta = \begin{cases} \frac{\mu_0 J_z r}{2} + \frac{k_1}{r} & r \leq R \\ \frac{k_2}{r} & r > R \end{cases}$$

Per determinare le costanti d'integrazione, osserviamo che se posizioniamo una carica lungo l'asse  $z$  passante per il centro del filo, per simmetria  $B_\theta(0) = 0$  e quindi  $k_1 = 0$ . Mentre per  $k_2$  imponiamo la continuità del campo sulla superficie del filo, ovvero

$$B(R^-) = B(R^+) \iff \frac{k_2}{R} = \frac{\mu_0 J_z R}{2} \Rightarrow k_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

per  $J = \frac{I}{\pi R^2}$ . Possiamo dunque concludere che il campo magnetico del filo è dato da

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & r \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

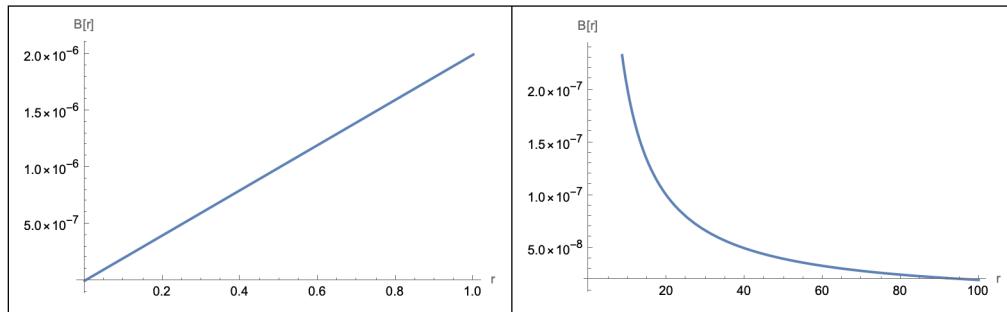
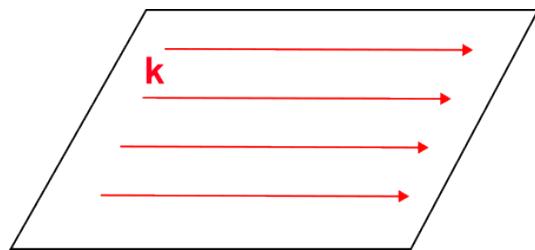


Figura 2.1: Campo magnetico di un filo di raggio  $R=1$

### 2.2.3 Correnti di superficie e discontinuità

Consideriamo un piano giacente nel piano  $(x,y)$ , ovvero  $z = 0$ , sul quale è presente un densità di corrente che definiamo  $\mathbf{K}$ . Dove con  $\mathbf{K}$  si intende una densità di corrente definita rispetto alle unità d'area. Intuitivamente possiamo pensare ad un piano attraversato da corrente come infinite fili allineati in parallelo.

Consideriamo la corrente con direzione lungo  $x$ :  $\mathbf{K} = K \hat{x}$ .



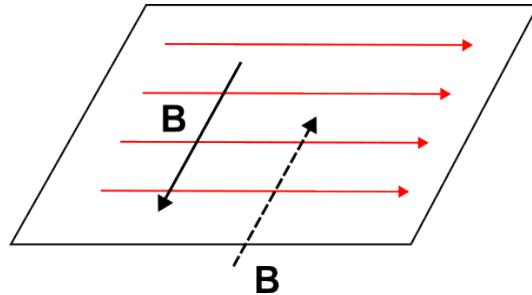
Affinchè  $\mathbf{J} \neq 0$ , abbiamo bisogno che l'integrale di linea del campo sia lungo il bordo di una superficie attraverso cui passa la corrente  $\mathbf{K}$ . Se vediamo il piano come un numero infinito

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

di fili in parallelo, per simmetria del problema, il campo magnetico può esistere solo lungo la direzione  $y$ .

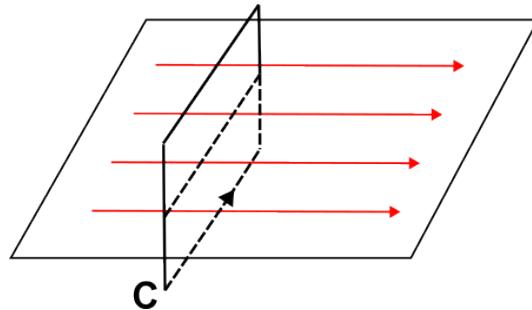
Dove  $\mathbf{B}$  ha verso lungo  $-\hat{\mathbf{y}}$  quando  $z > 0$  e lungo  $\hat{\mathbf{y}}$  per  $z < 0$ .



Definiamo

$$\mathbf{B} = -B(z)\hat{\mathbf{y}}$$

dove  $B(z) = -B(-z)$ . Utilizzando la legge di Ampère su una superficie aperta come in figura.



con lunghezza  $L$ , lungo la direzione  $y$  rispetto  $\pm z$ . Abbiamo che

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = LB(z) - LB(-z) = 2LB(z) = \mu_0 K L$$

dunque il campo magnetico misurato attorno ad piano attraversato da una corrente di superficie è costante e misura:

$$B(z) = \frac{\mu_0 K}{2} \quad z > 0$$

Il risultato ottenuto è simile a quanto discusso per una distribuzione di carica planare infinita. Analogamente alla discussione elettrostatica, dove la componente del campo elet-

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

trostatico è discontinua in direzione ortogonale al piano, per il campo magnetico si ha il medesimo risultato, ma per la componente con direzione tangenziale alla superficie . Infatti

$$B(z \rightarrow 0^+) - B(z \rightarrow 0^-) = \mu_0 K$$

tale risultato è valido per qualsiasi corrente di superficie  $\mathbf{K}$ . Invece risulta che la componente  $\mathbf{B}_\perp$  è continua.

### 2.2.4 Flusso del campo magnetico

Per il campo magnetico vale il seguente risultato:

Il flusso di  $\mathbf{B}$  attraverso una qualunque superficie chiusa è nullo.

che analiticamente esprimiamo nel secondo modo:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

La relazione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  vale per qualunque distribuzione di sorgenti. Per esempio se consideriamo un elemento come somma di fili, avremo che per il principio di sovrapposizione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \left( \sum_n \mathbf{B}_n \right) = \sum_n \nabla \cdot \mathbf{B}_n = 0$$

ottenendo in questo modo un sistema di equazioni differenziali omogenee. Le linee del campo magnetico sono sempre chiuse ( si dice che: "il campo magnetico è solenoidale"). Inoltre non esistono sorgenti di monopolo magnetico, il campo magnetico elementare ha sempre forma dipolare (pensate ad una calamita).

*Teorema 2.2.1* (Teorema di unicità). Il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

costituito dalle equazioni di Maxwell, definisce univocamente il campo  $\mathbf{B}$  soluzione, per sorgenti finite, ovvero  $B \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ .

*Dimostrazione.* Siano  $B_1$  e  $B_2$  due soluzioni del sistema di equazioni (2.5), definiamo

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$$

che è un campo conservativo, dato che

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{B}_1 - \nabla \times \mathbf{B}_2 = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \mathbf{J} = 0$$

Essendo il campo  $\mathbf{D}$  irrotazionale, possiamo legarlo ad una funzione scalare  $\varphi$  tale per cui  $\mathbf{D} = \nabla \varphi$ .

La funzione  $\varphi$  soddisfa l'equazione di Laplace

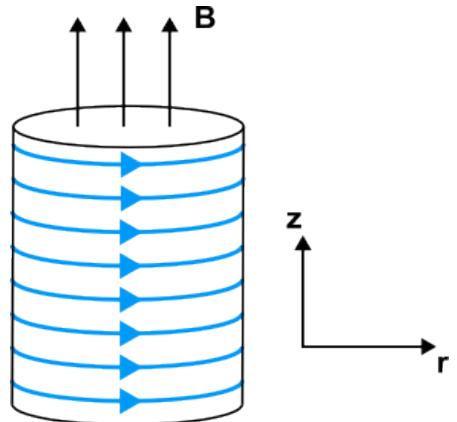
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Inoltre sotto l'ipotesi di sorgenti finite avremo che  $\varphi(r)|_{r \rightarrow \infty} = \varphi_0$  costante, dato che  $\mathbf{D} \rightarrow 0$  per  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ . In conclusione dato che  $\varphi_0$  è costante ovunque, si ha che  $\mathbf{D} = 0$  e dunque  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ , dimostrando così l'unicità della soluzione

□

### 2.2.5 Solenoide

Un solenoide è una superficie cilindrica costituita da spire attraversate da una corrente (in genere non è necessario per un solenoide che le spire ti attorciglino ottenendo una forma cilindrica, esistono anche solenoidi toroidali). Per semplicità assumiamo che il cilindro sia infinitamente lungo, in modo da trascurare gli effetti al bordo.



Per un discorso di simmetria della geometria considerata, descriviamo il sistema utilizzando le coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$ , con l'asse  $\hat{\mathbf{z}}$  che attraversa il centro del cilindro. Per simmetria, il campo  $\mathbf{B}$  punta lungo l'asse  $\hat{\mathbf{z}}$ , per dimostrarlo basta studiare il campo magnetico di

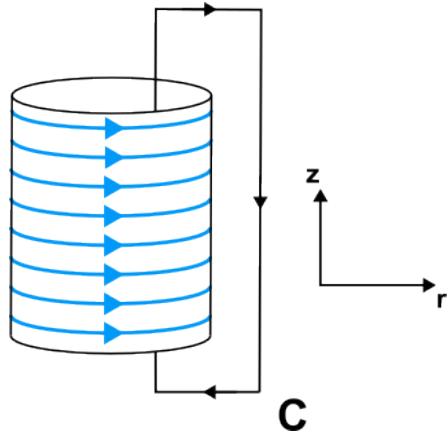
## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

una singola spira e applicare il principio di sovrapposizione. L'intensità del campo è legata alla distanza radiale  $\mathbf{B} = B(r)\hat{\mathbf{z}}$ . Ogni campo di questo tipo soddisfa la legge di Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Per determinare il valore del campo magnetico consideriamo la forma differenziale della legge di ampère. Ovunque eccetto la superficie del solenoide abbiamo  $\mathbf{J} = 0$  e

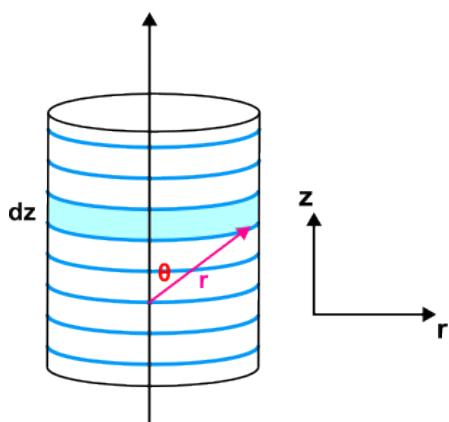
$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \frac{dB}{dr} = 0 \Rightarrow B(r) = \text{costante}$$

Al di fuori del solenoide per il teorema di unicità sappiamo che deve valere  $B(r) \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$  e  $B(r)$  è costante. Per determinare il campo magnetico all'interno del solenoide utilizziamo la forma integrale della legge di Ampère e consideriamo una superficie S aperte, il cui contorno è dato da una curva chiusa C come in figura. Abbiamo che



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B_z(0)L \quad (2.7)$$

Per determinare il valore di  $B_z(0)$  consideriamo un porzione infinitesima  $dz$  del cilindro percorso dalle spire e quindi attraversato da una corrente  $dI$ . Definiamo la grandezza  $n = N/L$  che definisce il numero di spire per unità di lunghezza. La corrente attraversata dalla porzione  $dz$  sarà data da



$$dI = nidz$$

Data la forma cilindrica, la porzione  $dz$  geometricamente coincide con quella di un anello di altezza  $dz$ , dunque possiamo calcolare il suo campo magnetico per un punto lungo l'asse  $\hat{\mathbf{z}}$  fissato a distanza  $\mathbf{r}$  dal suo bordo.

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{b^2}{r^3} dI = \frac{\mu_0}{2} n i \frac{b^2}{r^2} \frac{dz}{r} = \frac{\mu_0}{2} dz \sin \theta = dB_z$$

integrandi i contributi infinitesimi abbiamo che

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} ni \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{2} ni [\cos \theta_1 - \cos \theta_2]$$

Preso  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \pi$  abbiamo che

$$B_z(0) = \mu_0 ni$$

dunque il campo all'interno del solenoide recuperando l'equazione (2.6) è

$$B_z(0)L = \mu_0 niL$$

coincide proprio con  $B_z(0)$ . Inoltre passando dal bordo interno a quello esterno di ha una discontinuità del campo  $\Delta_{//} = \mu_0 ni$ . Notare che definita  $K = IN$ , quando trovato è consistente con l'equazione generale trovata per la discontinuità del campo magnetico dovuto a una corrente di superficie.

### 2.3 Potenziale vettore

Per le distribuzioni corrente viste fino a questo momento, le argomentazioni sulla simmetria sono sufficienti per determinare un campo magnetico che soddisfi la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Per discutere di correnti più generiche, questo non è più sufficiente. Per farlo partiamo dalla seguente osservazione: sappiamo che per un vettore generico  $\mathbf{A}$ , vale la proprietà

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

dunque se troviamo un vettore  $\mathbf{A}$  rispetto a cui il campo  $\mathbf{B}$  può essere scritto come suo rotore

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

in automatico abbiamo soddisfatto l'equazione di Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Il vettore  $\mathbf{A}$  che soddisfa questo tipo di relazione prende il nome di *potenziale vettore*. Sostituendo nella

legge di ampère in forma differenziale, questa diventa

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.8)$$

Risolvendo questa equazione per  $\mathbf{A}$  determiniamo anche il campo  $\mathbf{B}$ .

### 2.3.1 Monopoli Magnetici

Nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato analiticamente l'equazione di Maxwell  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , ma non ci siamo mai soffermati nel discuterne il significato fisico. La sua interpretazione è molto semplice, infatti ci dice che nei punti considerati non è presente carica magnetica. Se esistesse una sorgente puntiforme di carica magnetica  $g$ , per un campo magnetico  $\mathbf{B}$  e che decresce quadraticamente rispetto alla distanza radiale, avremmo

$$\mathbf{B} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{u}_r$$

Un oggetto di questo tipo viene di solito chiamato *monopolio magnetico*. Le equazioni di Maxwell della magnetostatica ci dicono che oggetti di questo tipo non esistono, inoltre in natura non sono trovate evidenze sperimentali che ne dimostrino l'esistenza.

Ma siamo davvero sicuri che i monopoli magnetici non esistono? Per esempio se adattassimo le equazioni di Maxwell, permettendo la presenza di carica magnetica, scrivendo

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$$

per  $\rho_m$  distribuzione di carica magnetica, avremmo che non possiamo più usare il vettore potenziale  $\mathbf{A}$ , ma è davvero una così grande perdita?

I problemi insorgono quando iniziamo a considerare la meccanica quantistica, dove siamo obbligati ad utilizzare il potenziale vettore  $\mathbf{A}$ . Non sono l'intera trattazione dell'elettromagnetismo in meccanica quantistica è basato sull'uso di  $\mathbf{A}$ , ma ci sono addirittura esperimenti che rilevano certe proprietà di  $\mathbf{A}$  e che vengono persi quando calcoliamo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , come nel caso dell'effetto Aharonov-Bohm (argomento trattato nel corso di struttura della materia al terzo anno).

Possiamo riassumere quanto discusso osservando che buona parte della teoria e della realtà sperimentale sia consistente nell'asserire la non esistenza dei monopoli magnetici... e invece no! ci sono buone argomentazioni che lasciano pensare all'esistenza di questi oggetti esotici. Dirac ha dimostrato che è possibile introdurre un vettore potenziale  $\mathbf{A}$  che permette di avere carica magnetica, ma solo se questa carica  $g$ , ma solo se la quantità di carica è legata a quella di un elettrone  $e$ , mediante la relazione

$$ge = 2\pi\hbar n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Questa equazione prende il nome di *condizione di quantizzazione di Dirac*.

### 2.3.2 Trasformazioni di Gauge

La scelta di  $\mathbf{A}$  nell'equazione (2.7) è tutt'altro che univoca: ci sono diversi potenziali vettore che descrivono il medesimo campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Questo è dovuto al fatto che il rotore del gradiente è automaticamente nullo. Questo vuol dire che possiamo aggiungere ad  $\mathbf{A}$  un qualsiasi vettore potenziale della forma  $\nabla\chi$  per una certa funzione  $\chi$  e il campo magnetico resta sempre lo stesso,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \Rightarrow \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$$

Una trasformazione di questo tipo su  $\mathbf{A}$  prende il nome di *trasformazione di gauge*. Scegliendo in modo intelligente  $\chi$ , riusciamo a semplificare i conti per determinare il campo magnetico.

*Teorema 2.3.1 (Coulomb gauge).* È sempre possibile trovare una trasformazione di gauge  $\chi$  tale che  $\mathbf{A}'$  soddisfi  $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ . Si fa riferimento a una scelta di questo tipo come *Coulomb gauge*.

*Dimostrazione.* Supponiamo di conoscere a priori un potenziale vettore  $\mathbf{A}$  tale per cui  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , ma quando calcoliamo la divergenza otteniamo un'espressione  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \psi(\mathbf{x})$ . Se invece scegliamo  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$ , avremo che la sua divergenza è data da

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\chi = \psi(\mathbf{x}) + \nabla^2\chi$$

---

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

Dunque se vogliamo avere  $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$ , basta che prendiamo una trasformazione di gauge  $\chi$  per cui

$$\nabla_\chi^2 = -\psi(\mathbf{x})$$

ma questa non è altro che l'equazione di Poisson. Per quanto discusso nel capitolo di elettrostatica sappiamo sempre che questa equazione ammette sempre soluzione.  $\square$

### 2.3.3 Legge di Biot-Savart

Utilizziamo ora il potenziale vettore per determinare il campo magnetico  $\mathbf{B}$  generato da una distribuzione di corrente generica. Assumiamo che stiamo usando con un gauge di Coulomb e che sia soddisfatta la condizione  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  per il potenziale vettore  $\mathbf{A}$ . La legge di ampère definita in (2.7) diventa molto più semplice da risolvere

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.9)$$

che è equivalente a risolvere il sistema di equazioni di Poisson

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Considerando la risoluzione delle singole equazioni rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane, la soluzione delle equazioni è identica a quella ottenuta nella discussione elettrostatica. Ottenendo

$$A_i(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \mathbf{x}' \frac{J_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (i = 1, 2, 3)$$

che in notazione vettoriale diventa

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.10)$$

Vogliamo ora verificare che (2.9) sia una soluzione univoca dell'equazione di Ampère definita in (2.7), questo è vero se il risultato  $\mathbf{A}$  soddisfa la condizione di gauge di Coulomb data da  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Dunque andando a calcolare la divergenza di  $\mathbf{A}$  abbiamo che

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 \mathbf{x}' \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)$$

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

dove gli indici di  $\nabla$  coincidono con quelli di  $\mathbf{J}$ , ma l'operatore  $\nabla$  agisce su  $\mathbf{x}$  non su  $\mathbf{x}'$ . Preso atto di questa considerazione, possiamo scrivere l'equazione nel seguente modo

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A}(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right)\end{aligned}$$

Dove  $\nabla'$  differenzia rispetto a  $\mathbf{x}'$ . Per ottenere tale risultato, si è usato il fatto che se si differenzia  $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  rispetto ad  $\mathbf{x}$ , si ottiene il medesimo risultato a differenza di un segno meno differenziando rispetto a  $\mathbf{x}'$ . Dato che  $\nabla'$  è all'interno dell'integrale e  $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$  dovremmo derivare per parti. Ottenendo

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3x' \left[ \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) - \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}') \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right]$$

Il secondo termine scompare perché per ipotesi stiamo considerando correnti stazionarie per cui  $\nabla' \cdot \mathbf{J} = 0$ . Il primo termine risulta essere nullo se consideriamo regioni di spazio in cui  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0$ , assumendo che questo sia al caso possiamo concludere che

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

e quindi l'univocità della soluzione per l'equazione (2.7).

### Campo magnetico

Dalla soluzione (2.9) possiamo determinare il campo magnetico per  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , ricordando che  $\nabla$  agisce su  $\mathbf{x}$  e non su  $\mathbf{x}'$ . Consideriamo un tratto  $dl$  infinitesimo di un generico filo a cui possiamo associare un contributo infinitesimo al potenziale vettore

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} d\hat{l}$$

---

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

Il contributo infinitesimo al campo magnetico è dato da

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{dA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{d\hat{l}}{r} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \times d\hat{l} + \frac{1}{r} \nabla \times d\hat{l} \right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{u}_r \times d\hat{l}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\hat{l} \times \hat{u}_r}{r^2} \end{aligned}$$

dove secondo addendo della somma risulta essere nullo perché  $d\hat{l}$  è costante. Ora che abbiamo legato il campo magnetico alla corrente, possiamo definire

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\hat{l} \times \hat{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\hat{l} \times \hat{u}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (2.11)$$

tale risultato prende il nome di *legge di Biot-Savart*. Per ottenere l'espressione rispetto l'intensità di corrente abbiamo riscritto la densità di corrente in un volume come

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') dV = JA d\hat{l} = Id\hat{l}$$

dove A è la sezione del filo e la direzione  $d\hat{l}$  è tangente a C, che coincide con la curva formata dal filo.

### Esempio: Filo infinito rivisitato

Dato un sistema in cui è presente un filo infinito attraversato da una corrente, vogliamo verificare che sia verificata la legge di Biot-Savart. Passando in coordinate cilindriche, consideriamo un punto lungo sull'asse  $\hat{\mathbf{z}}$  passante per il centro del filo e definiamo  $r^2 = x^2 + y^2$  come coordinata radiale. L'elemento di filo è parametrizzato come  $d\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{z}} dz$  e per un punto  $\mathbf{x}$  distante dal filo, il vettore  $d\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  è tangente alla circonferenza di raggio  $r$  attraverso cui passa la corrente con intensità I,

$$d\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = rdz \hat{u}_\varphi$$

dunque avremo

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} dz \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{u}_\varphi$$

ritrovando lo stesso risultato per la legge di Ampère.

## 2.4 Dipoli magnetici

Abbiamo visto che le equazioni di Maxwell non permettono l'esistenza di monopoli magnetici e che il l'intensità del campo magnetico  $B \sim 1/r^2$ . In generale come decade il campo magnetico dovuto a distribuzioni di corrente localizzate in una regione di spazio? Nei prossimi paragrafi vedremo che se si è sufficientemente lontani dalla corrente, il campo appare come quello generato da un dipolo magnetico.

### 2.4.1 Corrente in una spira circolare

Consideriamo una spira circolare C con raggio R attraversata da una corrente con intensità I. Per calcolare il campo magnetico lontano dalla spira, utilizziamo l'espressione originale che abbiamo ottenuto per il potenziale vettore  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

In termini della corrente il vettore potenziale diventa

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Siccome stiamo calcolando il campo in un punto  $\mathbf{r}$  molto lontano dalla corrente, avremo che l'argomento dell'integrale può essere espanso con Taylor

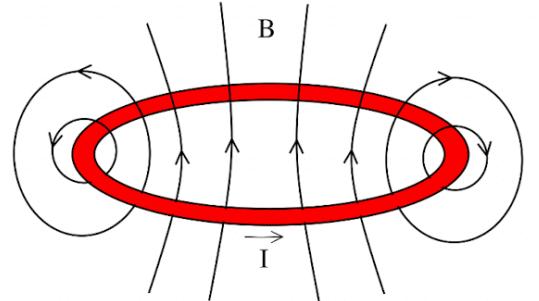
$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots$$

e quindi abbiamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\mathbf{r}' \left( \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \right)$$

Il primo termine dell'espansione è nullo perché stiamo integrando lungo un circuito chiuso. Per il secondo termine, lo riscriviamo in una forma più maneggevole, introducendo il vettore costante  $\mathbf{g}$

$$\oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')$$



---

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

Osservare che rispetto all'integrale sia  $\mathbf{g}$  che  $\mathbf{r}$  sono vettori costanti. Utilizzando il teorema di Stokes abbiamo che

$$\oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \int_S d\mathbf{S} \cdot \nabla \times (\mathbf{g}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')) = \int_S dS_i \varepsilon_{ijk} \partial'_j (g_k r_l r'_l) = \mathbf{g} \cdot \int_S d\mathbf{S} \times \mathbf{r}$$

Tale identità è verificata per ogni vettore costante  $\mathbf{g}$ , il che vuol dire che deve valere anche per ogni uguaglianza tra vettori e quindi

$$\oint_C d\mathbf{r}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \mathcal{S} \times \mathbf{r}$$

dove  $\mathcal{S}$  è vettore d'area della superficie  $S$  delimitata dalla curva  $C$ , dove

$$\mathcal{S} = \int_S d\mathbf{S}$$

Se il circuito  $C$  è contenuto in un piano, come nel nostro caso, allora il vettore  $\mathcal{S}$  è ortogonale alla superficie e verso uscente.

Sostituendo nell'espressione del vettore potenziale avremo che

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{S} \times I\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

dove il termine

$$\mathbf{m} = I\mathcal{S} \tag{2.12}$$

prende il nome di *momento di dipolo magnetico*. Per calcolare il campo magnetico ricordiamo che  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , e svolgendo i dovuti calcoli algebrici abbiamo che

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \right)$$

che coincide con l'espressione del campo di un dipolo elettrico. In conclusione, per grandi distanze il campo magnetico  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  risultano essere identici avendo la forma di dipolo.

### 2.4.2 Distribuzione generiche di corrente

Consideriamo un circuito generico  $C$  chiuso e attraversato da una corrente d'intensità  $I$ , giacente nel piano  $(x,y)$ . Immaginiamo di suddividere il generico circuito in spire quadrate chiu-

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

se di lato  $b$ , in questo modo il campo magnetico complessivo può essere visto come la somma dei contributi dati dal campo delle singole spire.

Le correnti di ogni singola spira si cancellano con quelle adiacenti, in questo modo si ha che il contributo è dato solo da quella corrente che percorre il circuito C, lasciando così inalterato il sistema iniziale.

Il potenziale vettore è dato da

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} IN b^2 \frac{\sin \alpha}{r^2} \hat{u}_x$$

dove il termine  $a = Nb^2$  è l'area complessiva del circuito, data dal contributo dell'area di N spire quadrate. Posto il momento di dipolo magnetico  $\mathbf{m} = Ia\hat{u}_z$  avremo che il potenziale vettore è dato da

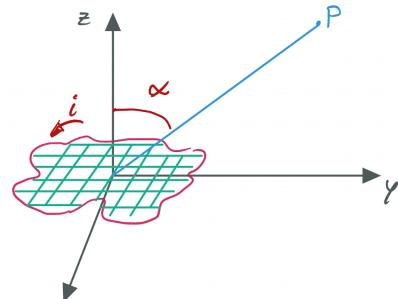
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Notare che i calcoli svolti sono approssimativi, in quanto se C è una curva generica, le spire in prossimità del bordo non avranno dei lati formati da linee rette e dunque non saranno quadrate, e quindi la loro area non è  $b^2$ , ma un qualcosa di più piccolo. Dunque a seconda di come si sceglie di contare il numero di spire il termine  $\mathbf{m}$  avrà un valore diverso, dandone così una definizione non univoca. Il modo migliore per definire  $\mathbf{m}$  è dato dai passaggi usati nel paragrafo precedente.

Sappiamo che il campo  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , dove  $\mathbf{A}$  è ortogonale al piano ( $\hat{u}_r, \hat{u}_z$ ), dunque  $\mathbf{A} = (0, 0, A_\phi)$ , dove  $A_\phi = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^2}$ . Dato che il campo è definito come rotore del potenziale vettore questo non può avere coordinate lungo  $\hat{z}$  e quindi  $\mathbf{B} = (B_r, B_\theta, 0)$  e quindi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta)$$

Il campo di dipolo magnetico ha la stessa struttura del campo generato da un dipolo elettrico. Notare che per  $r \gg b$  localmente i campi dono diversi e questo è dovuto alla diversa natura delle sorgenti.



## 2.5 Esempi di campi magnetici

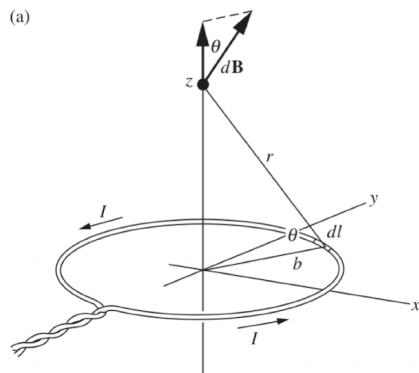
### 2.5.1 Campo magnetico di una spira circolare

Dato l'asse  $\hat{z}$  passante per il centro della spira circolare di raggio  $b$  e giacente nel piano  $(x,y)$ , determiniamo il campo magnetico in un punto lungo  $\hat{z}$ . Per la simmetria dell'anello rimane solo un contributo assiale del campo magnetico per un tratto infinitesimo della spira e utilizzando la legge di Biot-Savart definiamo

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|dl \times \hat{u}_r|}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{r^3} dl$$

Procedendo per integrazione

$$B_z(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{r^3} \oint_C dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{b}{r^3} \int_0^{2\pi} bd\theta = \frac{\mu_0 I b^2}{2} \frac{1}{r^3}$$



### Linee di campo

Consideriamo il campo magnetico  $\mathbf{B}$  in coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$  e consideriamo un cammino  $C$ , interno alla spira circolare, applicando la legge di Ampère, abbiamo

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_\theta \int_0^{2\pi} r d\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad B_\theta = 0$$

Se immaginiamo d'invertire il senso di percorrenza della corrente, ovvero ruotando la spira di  $180^\circ$ , otteniamo la medesima configurazione di partenza, solo che il verso del campo magnetico  $B_r$  è opposto. Per una medesima sorgente, il campo non può essere diverso e quindi l'unico caso possibile è che  $B_r = 0$ . Quindi il campo ha direzione solo lungo l'asse  $\hat{u}_z$

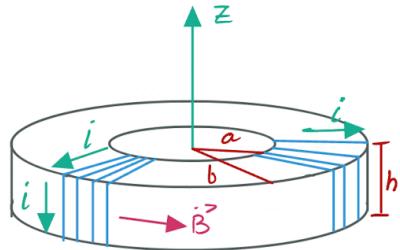
### 2.5.2 Campo magnetico di un solenoide toroidale

Dato un solenoide toroidale con angolo minore  $a$  e angolo maggiore  $b$  attraversato da una corrente  $I$ , abbiamo che il campo magnetico ha solo componente angolare

$$\mathbf{B} = B_\theta \hat{u}_\theta$$

questo è dovuto al fatto che prese due spire diametralmente opposte, cambia il senso di percorrenza della corrente viaggiando in modo opposto e quindi i campi lungo  $u_z$  e  $u_r$  sono opposti e di eguale intensità elidendosi in ogni punto per la simmetria dell'oggetto. Per determinare la forma esplicita del campo, definiamo un circuito di Ampère che racchiuda il toroide,  $d\mathbf{l} = rd\theta \hat{u}_\theta$ ,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B_\theta r d\theta = B_\theta 2\pi = \begin{cases} 0 & r < a \text{ o } r > b \\ \mu_0 N I & \text{altrimenti} \end{cases}$$



dove  $N$  è il numero di avvolgimenti del filo conduttore attorno al toroide. Quindi possiamo concludere che

$$B_\theta(r) = \begin{cases} 0 & r \notin [a, b] \\ \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} & r \in [a, b] \end{cases}$$

## 2.6 Forza magnetica

Abbiamo visto che una corrente produce un campo magnetico, ma una corrente altro non è che cariche in movimento. Per una carica  $q$  in movimento con velocità  $\mathbf{v}$ , questa sarà soggetta ad una forza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

che prende il nome di *forza di Lorentz*. Questo vuol dire che se posizioniamo una corrente in prossimità della prima, queste eserciteranno una forza l'una sull'altra.

Dalla forma della forza di Lorentz deduciamo che questa è ortogonale al piano formato dai vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$ , e quindi ai suoi singoli vettori. Possiamo desumere che l'accelerazione a cui è soggetta la carica sia di natura centripeta

$$\mathbf{a} = \frac{qvB}{m}$$

Consideriamo una quantità di carica  $dq$  passante all'interno di un filo la forza esercitata

---

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

sulle cariche in movimento è data da

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{dq}{dt} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

che risulta essere consistenza con il risultato empirico ottenuto da Laplace. Dato che le cariche sono vincolate nel filo, e queste subiscono una forza che cerca di portare al di fuori, questo reagisce con una reazione vincolare, esercitando una forza uguale e contraria.

Per velocità ordinare, quindi non relativistiche la forza magnetica è molto meno intensa di quella elettrostatica.

### Esempio

Consideriamo una distribuzione di carica lineica positiva, il campo generato dalla distribuzione delle cariche è dato da

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

la forza a cui è soggetta una carica esploratrice è data da

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{u}_r$$

Ora invece prendiamo un filo al cui interno scorre della carica  $q$ , il campo magnetico sarà dato da

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{\lambda v}{2\pi r} \hat{u}_\theta$$

e la forza magnetica a cui sono sottoposte le cariche è data dalla Forza di Lorentz

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qvB\hat{u}_r$$

Mettendo a confronto il modulo delle forze abbiamo che

$$\frac{\mathbf{F}_B}{\mathbf{F}_E} = \frac{qvB}{qE} = \mu_0\epsilon_0 v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 0$$

dove abbiamo posto  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ . Dunque a velocità ordinarie la forza di Coulomb è molto più grande di quella magnetica.

### 2.6.1 Forza tra due fili

Abbiamo visto come la forza magnetica porti a deviare le cariche all'interno di un filo e che mantengono la loro direzione di flusso per via della reazione vincolare esercitata dalla struttura. Che cosa succede se facciamo interagire due fili attraversati da corrente?

Prendiamo due fili in parallelo a distanza  $d$  e rispettivamente attraversati da una corrente  $I_1$  e  $I_2$ . La corrente nel primo filo genera un campo magnetico, di conseguenza se le cariche nel secondo filo si muovono con una velocità  $\mathbf{v}$ , saranno soggette ad una forza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\mathbf{v} \times \left( \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \right) \hat{u}_y$$

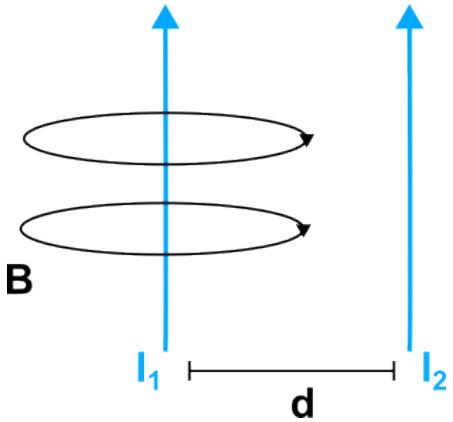
dove  $\hat{u}_y$  è la direzione del campo magnetico a cui le cariche del secondo filo sono sottoposte. Vogliamo scrivere la velocità  $\mathbf{v}$  in termini della corrente  $\mathbf{I}_2$  del secondo filo. Se abbiamo una densità di particelle  $n$  di cui ciascuna trasporta una carica  $q$ , la densità di corrente sarà data da

$$\mathbf{J}_2 = nq\mathbf{v}$$

Per un filo di sezione  $A$ , la corrente è data da  $I_2 = J_2 A$ . Per il nostro sistema avremo che  $\mathbf{J}_2 = J_2 \hat{u}_z$ . Calcoliamo la forza esercitata sul filo per unità di lunghezza,  $\mathbf{f}$ . Dato che il numero di cariche per unità di lunghezza è dato da  $nA$  e  $\mathbf{F}$  è la forza applicata su ogni carica, abbiamo che

$$\mathbf{f} = nA\mathbf{F} = \left( \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \right) \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = - \left( \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (2.13)$$

Se le due correnti hanno la stessa direzione,  $I_1 I_2 > 0$ , e quindi la forza tra i due fili è attrattiva. Per correnti di segno opposto  $I_1 I_2 < 0$  la forza è repulsiva.



## 2.7 Cariche in movimento in un campo magnetico uniforme

Se una particella di massa  $m$  si muove lungo una circonferenza di raggio  $R$  con velocità costante  $v$ , su di essa agisce una forza radiale di intensità  $F = mv^2/r$ , che punto sempre verso il centro ed è perpendicolare alla velocità della particella.

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come la forza  $\mathbf{F}_B$  punti sempre in direzione perpendicolare alla velocità  $\mathbf{v}$  della particella carica e del campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Siccome, la forza magnetica  $\mathbf{F}_B$  non compie lavoro, l'unica cosa che può alterare è la direzione di  $\mathbf{v}$  e non la sua intensità.

In questa sezione cerchiamo di dare una risposta alla domanda: come evolve la dinamica di una particella carica con velocità  $\mathbf{v}$  che interagisce con un campo magnetico uniforme  $\mathbf{B}$ ?

Ipotizziamo che la particella abbia una carica positiva  $+q$  e che la direzione del campo  $\mathbf{B}$  sia entrante nella pagina, inoltre  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$  quando si immette nel campo. Sulla particella agirà la forza di Lorentz

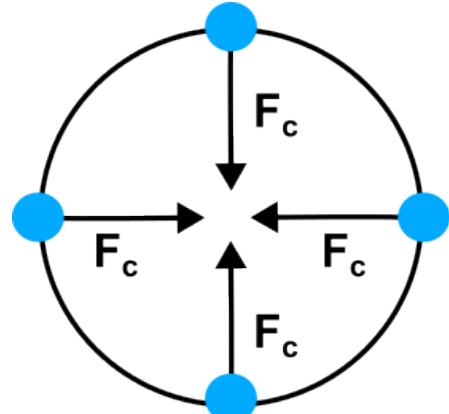
$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qvB \hat{\mathbf{u}}_r \quad (2.14)$$

troviamo quindi che sulla carica agisce una forza di natura radiale e quindi  $\mathbf{F}_B$  è una forza di natura centripeta, che porta  $q$  a muoversi in senso antiorario lungo un cammino circolare. Data l'identità

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

possiamo determinare il raggio della circonferenza percorsa dalla particella, ottenendo

$$r = \frac{mv}{qB}$$



Il periodo  $T$  con cui la carica compie una rivoluzione completa è dato da

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

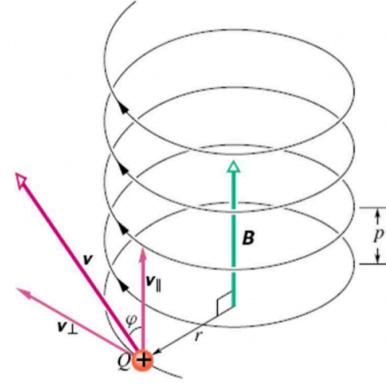
Similmente, la velocità angolare (o frequenza ciclotronica)  $\omega$  della particella si deriva calcolando

$$\omega = 2\pi f = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

Se la velocità iniziale della particella carica possiede anche una componente parallela al campo magnetico  $\mathbf{B}$ , anzichè avere un moto circolare, la traiettoria risultante sarà elicoidale

In particolare la posizione della particella sarà descritta dalle equazioni

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = R \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) = R \sin(\omega t + \varphi) \\ z(t) = v_{||} t + z_0 \end{cases}$$

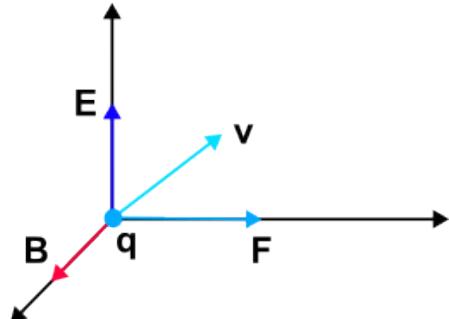


Il passo dell'elica è dato da  $p = v_{||} T$  dove  $T$  coincide con il periodo con cui viene completato un giro nella proiezione sul piano.

### 2.7.1 Moto Cicloidale

Prendiamo un sistema in cui è presente sia un campo elettrico  $\mathbf{E}$  che un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Se il campo elettrico possiede solo una componente parallela al campo magnetico che ha direzione lungo  $\hat{\mathbf{z}}$ , il moto risulta essere circolare uniforme nel piano  $(x, y)$ , mentre il moto lungo  $\hat{\mathbf{z}}$  diventa

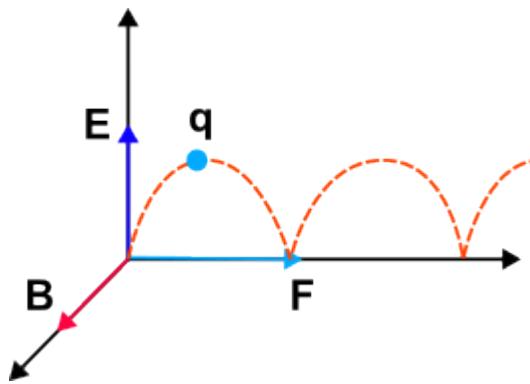
$$z(t) = \frac{1}{2} qEt^2 + v_{||}t + z_0$$



Se il campo  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  abbiamo un moto cicloidale. Consideriamo una carica inizialmente ferma, che subisce un'accelerazione per via della Forza di Coulomb lungo la sua componente  $\hat{\mathbf{z}}$ , su di essa agirà anche la forza di Lorentz che la porterà a deviare lungo  $\hat{\mathbf{x}}$ .

All'aumentare della velocità la forza di Lorentz cresce in intensità, fino a quando  $\mathbf{F}_B > \mathbf{F}_E$  e la particella decelera fino a quando la forza di Coulomb non diventa più grande di

quella di Lorentz e la particella torna a salire.



La direzione dello spostamento della particella è data da

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|E||B|} = \hat{u}_y$$

### Legge Oraria

Per come è stato formulato il problema, abbiamo che  $\mathbf{F}_E = qE\hat{u}_z$ , e quindi dato che giace nel piano  $(y, z)$ , la velocità con cui si muove la particella è data da

$$\mathbf{v} = v_y\hat{u}_y + v_z\hat{u}_z$$

e quindi possiamo riscrivere la forza di Lorentz come

$$\mathbf{F}_B = -qv_yB\hat{u}_z + qv_zB\hat{u}_y$$

Possiamo riassumere le forze agenti sugli assi interessati nel seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} m\ddot{y} = qB\dot{z} \\ m\ddot{z} = qE - qB\dot{y} \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} \\ \ddot{z} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}\dot{y} \end{cases}$$

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

che possiamo infine esprimere rispetto all frequenza ciclotronica  $\omega = qB/m$

$$\begin{cases} \ddot{y} = \omega \dot{z} \\ \ddot{z} = \omega \left( \frac{E}{B} - \dot{y} \right) \end{cases}$$

Il moto ottenuto è accoppiato, per disaccoppiarlo consideriamo  $\ddot{y} = \omega \ddot{z}$  e sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \frac{E}{B}$$

che ha come soluzione omogenea

$$\dot{y}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

e soluzione particolare

$$\dot{y}_p(t) = \frac{E}{B}$$

avremo quindi un sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) + \frac{E}{B} \\ \dot{z}(t) = b \cos(\omega t) - a \sin(\omega t) \end{cases}$$

imponendo le condizioni iniziali in cui  $\dot{z}(0) = \dot{y}(0) = 0$ , abbiamo che

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = a + \frac{E}{B} = 0 \\ \dot{z}(0) = b = 0 \end{cases}$$

e dunque la soluzione per un tempo  $t > 0$  è data da

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{E}{B} (1 - \cos \omega t) \\ \dot{z}(t) = \frac{E}{B} \sin(\omega t) \end{cases}$$

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

risolvendo per quadrature determiniamo le leggi orarie rispetto agli assi

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin(\omega t)) + y_0 \\ z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos(\omega t) + z_0 \end{cases}$$

imponendo le condizioni iniziali  $y(0) = 0$  e  $z(0) = 0$ , avremo che  $z_0 = \frac{E}{B}$  e  $y_0 = 0$

$$\begin{cases} y(t) = \frac{E}{\omega B}(\omega t - \sin(\omega t)) = R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ z(t) = -\frac{E}{\omega B} \cos(\omega t) + \frac{E}{B} = R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} (y(t) - R\omega t)^2 = R^2 \sin^2(\omega t) \\ (z(t) - R)^2 = R^2 \cos^2(\omega t) \end{cases}$$

Sommando le soluzioni abbiamo l'equazione

$$(y(t) - R\omega t)^2 + (z(t) - R)^2 = R^2$$

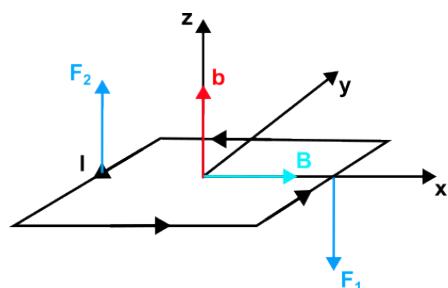
che definisce una circonferenza con centro  $(R\omega t, R)$  e raggio R.

Stiamo descrivendo un punto su un cerchio che si sposta con velocità  $\omega R$ . Se cambio sistema di riferimento passando a quello solidale con la circonferenza il campo elettrico risulta essere nullo, e quindi si è in un sistema in cui è presente solo il campo magnetico.

### 2.7.2 Azioni meccaniche su spira quadrata

Dato un sistema formato da una spira quadrata di lato  $b$  al cui interno scorre una corrente I in senso antiorario. Dato un campo magnetico uniforme

$$\mathbf{B} = B_x \hat{u}_x$$



## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

---

avremo che sui due lati della spira di esercita una forza

$$\mathbf{F}_2 = ibB_x\hat{u}_z \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_1 = -ibB_x\hat{u}_z$$

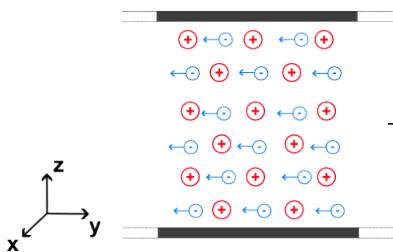
Dato che per ipotesi il campo magnetico è uniforme  $\mathbf{R}_z = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ . Le forze agenti generano un momento torcente sulla spira dato da

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \Delta\mathbf{r} \times \mathbf{F} = b\hat{u}_x \times ibB_x\hat{u}_z = ib^2B_x\hat{u}_\perp = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Per un campo magnetico uniforme non si ha una risultante delle forze che contribuisce allo spostamento del sistema, ma solo il momento torcente che porta ad orientare il momento magnetico della spira nella direzione campo.

### 2.7.3 Effetto Hall

Quando una corrente circola in un conduttore in presenza di un campo magnetico, le cariche libere in moto risentono della forza di Lorentz, sperimentalmente quello che si osserva è l'azione della forza sul conduttore nel suo insieme.

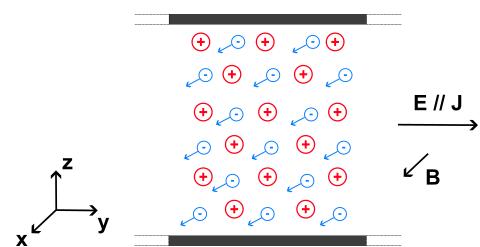


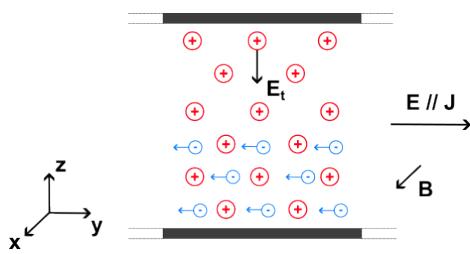
In una barra metallica percorsa da una corrente stazionaria, gli elettroni guidati dal campo elettrico  $\mathbf{E}$ , si muovo con verso concorde lungo l'asse  $\hat{u}_y$  con velocità media  $\langle v \rangle$ . Il reticolo cristallino del metallo costituito da ioni costituisce la struttura d'interazione tra le cariche e il metallo.

La densità di corrente  $\mathbf{J} = nq\langle v \rangle$  si lega al campo elettrico mediante il coefficiente di conducibilità del metallo

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$$

Ipotizziamo ora di applicare al sistema un campo magnetico  $\mathbf{B} = B\hat{u}_x$  che risulta essere ortogonale alla velocità media delle cariche; tale interazione produce una deviazione verso il basso degli elettroni in moto.





Data la struttura rigida del reticolo cristallino queste tenderanno ad accumularsi sul fondo creando un eccesso di carica negativa, di conseguenza nella parte superiore avremo un eccesso di carica positiva dovuta dagli ioni del reticolo. Questa configurazione delle distribuzioni di carica porta ad avere all'interno del conduttore un campo elettrico trasversale con orientazione vero il basso per gli ioni e verso l'altro per gli elettroni.

La presenza di questo nuovo campo elettrico fa sì che gli elettroni si riallineino con direzione concorde e verso opposto al campo iniziale  $\mathbf{E}$ . Questo si traduce nel fatto che sugli elettroni si genera una forza di Coulomb eguale e contraria che bilancia quella di Lorentz e quindi la risultante delle forze  $\mathbf{R}_e = 0$ .

In compenso si ha la comparsa di una forza elettrostatica agente sugli ioni del reticolo cristallino del metallo, con direzione verso il basso. In sostanza di è trasferita la forza di Lorentz alla barra metallica dato che

$$\mathbf{F}_{Et} = \mathbf{F}_L$$

In caso di vincoli la barra preme contro il supporto generando una forza vincolare, mentre in assenza questa viene spinta verso il basso. L'effetto descritto prende il nome di *effetto Hall*.

Questo effetto rileva delle informazioni sul portatore di carica, infatti se la corrente nel metallo fosse stata dovuta a cariche positive in moto verso destra, si sarebbe manifestato un campo trasversale  $\mathbf{E}_t$  con segno opposto. Per misurare sperimentalmente tale risultato è sufficiente porre due misuratori di potenziale al capo superiore ed inferiore del filo in modo da misurare il campo  $E_t$ . A seconda del segno che assume il potenziale, questo ci fornisce informazioni sul segno delle cariche.

Quantitativamente il campo  $E_t$  è dato dall'uguaglianza

$$qE_t = q\langle v \rangle b \quad \Rightarrow \quad E_t = \langle v \rangle B$$

dato che  $J = n\langle v \rangle q$  otteniamo che  $\langle v \rangle = \frac{J}{nq}$ , quindi possiamo riscrivere il campo trasversale

come

$$E_t = \frac{1}{nq}B \iff |\mathbf{E}_t| = \frac{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}|}{nq}$$

dove il coefficiente  $1/nq$  prende il nome di *coefficiente di Hall* della sostanza.

La misura dell'effetto Hall nei metalli ha stabilito che i portatori sono negativi.

### Esempio

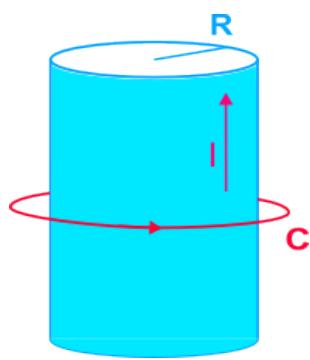
Nel calcolo del campo magnetico del filo infinito attraversato da una corrente stazionaria abbiamo ottenuto che all'interno del filo il campo cresce in modo lineare rispetto alla distanza radiale. Abbiamo potuto assumere che la corrente fosse uniforme nel conduttore perché l'effetto Hall è trascurabile.

## 2.8 Energia Magnetica

### 2.8.1 Pressione Magnetostatica

Dato un cilindro conduttore cavo raggio  $R$  percorso da una corrente  $I$ . Si ha che la densità di carica di superficie è data da

$$K = \frac{I}{2\pi R}$$



Il campo magnetico generato è dato dalla legge di ampère per un circuito  $C$  come in figura e quindi

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_\theta 2\pi r = \mu_0 I$$

per  $r > R$ . Quindi

$$B_\theta(r) = \begin{cases} \mu_0 K & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

Avremo quindi una discontinuità di campo  $\Delta B = \mu_0 K$ .

Il campo magnetico esercita una forza  $\mathbf{F}_B$  sulla corrente di strato, per determinarne l'espressione per unità di superficie possiamo applicare la formula di Laplace andando a considerare una porzione quadrata della superficie di lato  $L$ , e quindi area  $L^2$ .

La forza di Lorentz dovuta all'interazione della corrente  $i$  che scorre nella patch, con il campo magnetico di tutte le sorgenti (interne ed esterne alla pezza) è data da

$$\mathbf{F}_B = -iL\langle B \rangle \hat{u}_r$$

dove il campo magnetico medio è dato da

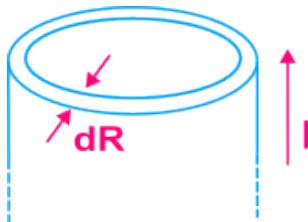
$$\langle B \rangle = \frac{B_{ext} + B_{int}}{2}$$

Definiamo pressione magnetostatica la grandezza

$$P = \frac{F_B}{L^2} = -\frac{KL^2}{L^2} \frac{B_{ext} + B_{int}}{2} = -\frac{1}{2\mu_0} (B_{ext} - B_{int})(B_{ext} + B_{int}) = -\frac{1}{2\mu_0} (B_{ext}^2 - B_{int}^2)$$

Nel nostro caso specifico dato che  $B_{int} = 0$  abbiamo che la pressione è data da  $P = -\frac{1}{2\mu_0} B_{ext}^2$ . Notare che la pressione magnetica è omogenea alla densità di energia.

### 2.8.2 Densità di energia magnetica



Supponiamo che la pressione comprima il cilindro di un tratto  $dR$  e che la corrente  $I$  che attraversa il cilindro sia costante. Nel volume  $dV = 2\pi R dR h$  comparirà un campo magnetico dove prima non era presente di intensità  $B = \mu_0 K$ .

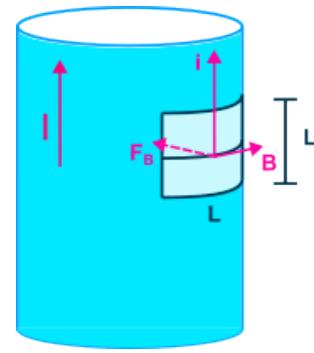
La pressione compie un lavoro apparente dato da

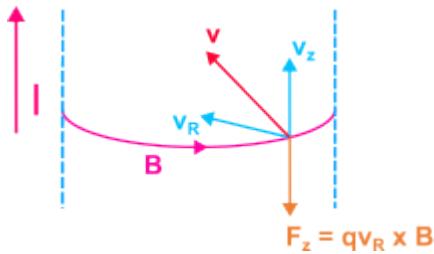
$$pdV = \frac{1}{2\mu_0} B_{ext}^2 2\pi r dR h$$

il termine

$$\mu_B = \frac{1}{2\mu_0} B_{ext}^2$$

prende il nome di *densità di energia magnetostatica*. Il lavoro è apparente perché non è compiuto dalla forza di Lorentz  $\mathbf{F}_B$ , ma da un agente esterno (come per esempio delle batterie) che sostiene la corrente  $I$  contro  $\mathbf{F}_B$ .





Consideriamo la velocità degli elettroni all'interno del cilindro durante lo spostamento  $dR$ , e sotto l'azione del campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Le componenti saranno date da:

1.  $v_z$  rappresenta la velocità di deriva associata alla corrente  $I$ ;
2.  $v_R$  rappresenta la velocità radiale lungo  $\mu_R$ .

La forza di Lorentz  $\mathbf{F}_B$  avrà una componente assiale in verso opposto alla velocità di deriva,

$$\mathbf{F}_{Bz} = q\mathbf{v}_R \times \mathbf{B} = -qv_R B \hat{u}_z$$

associata allo spostamento  $dR$ . Per mantenere costante la corrente  $I$  si dovrà avere una lavoro contro la forza  $\mathbf{F}_B$  pari a

$$dW = -\mathbf{F}_{Bz} \cdot d\mathbf{z} = -\mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{r} \iff (qv_R B)(v_z dt) = qv_z B(v_R dt) \iff F_{Br} dR = P A dR$$

Il lavoro erogato dalla forza esterna risulta essere uguale al lavoro apparente della pressione magnetostatica. A tale lavoro si associa la variazione di energia magnetica associata al campo  $\mathbf{B}$ .

*Osservazione.* Questo risultato è al confine della magnetostatica. Nel cambio di configurazione del cilindro, le correnti non sono stazionarie.

## 2.9 Principi della magnetostatica

Fino a questo punto ci siamo concentrati nel dare una definizione matematica delle fenomenologie legate al magnetismo, ma non abbiamo discusso delle unità di misura utilizzate. Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  viene misurato in Tesla, come l'omonimo ingegnere elettrico Nicola Tesla. Questo è descritto come

$$[T] = \frac{[NS]}{[CL]}$$

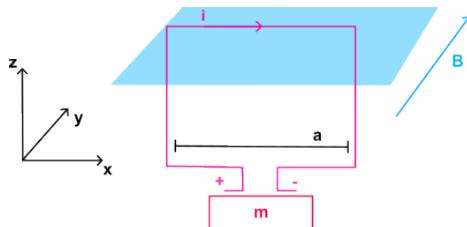
Il campo magnetico, ma come anche quello elettrico dipendono dal sistema di riferimento considerato. I due campi sono accoppiati tra loro, infatti la manifestazione di un fenomeno che sia elettrico o magnetico dipende dal sistema di riferimento considerato. Per esempio se

ci mettiamo solidali con un sistema in cui scorre della corrente, le cariche risulteranno ferme e di conseguenza si avrà solo un campo elettrico, ma non magnetico. Il viceversa avviene se consideriamo il sistema di laboratorio, in cui osserviamo la carica muoversi.

Esistono però delle eccezioni, ovvero delle sorgenti di campo **E**, date da delle cariche elementari, oppure dipoli magnetici elementari per il campo **B**, rispetto ai quali la loro esistenza è indipendente dal sistema di riferimento considerato.

## 2.10 Esempi ed esercizi

### 2.10.1 Esempio 1: Lavoro apparente della forza magnetica



Consideriamo un apparecchio costituito da una spira rettangolare attraversata da una corrente stazionaria  $i$  sostenuta da una batteria di massa  $m$ . Parte della spira viene attraversata da un campo magnetico  $\mathbf{B} = B\hat{u}_y$  uniforme e con direzione entrante verso il foglio. La larghezza della spira è  $a$ . Determinare la condizione di equilibrio e il lavoro compiuto per lo spostamento verticale della batteria, supponendo che  $i > mg/aB$ .

*Soluzione*

La forza di Lorentz agente sull'estremità superiore del filo è data da

$$\mathbf{F}_B = id\mathbf{l} \times \mathbf{B} = iaB\hat{u}_z$$

Le cariche sono sottoposte alla forza peso e quindi si ha una condizione di equilibrio quando

$$F_B = F_{mg} \quad \Rightarrow \quad iaB = mg \quad \Rightarrow \quad i = \frac{mg}{aB}$$

Per  $i > mg/aB$  lo spostamento verticale  $\Delta\mathbf{s} = \Delta z\hat{u}_z$ . Il lavoro apparente dovuto alla forza di Lorentz è dato da

$$W = \mathbf{F}_B \cdot \Delta\mathbf{s} = iaB\Delta z$$

## CAPITOLO 2. MAGNETOSTATICA

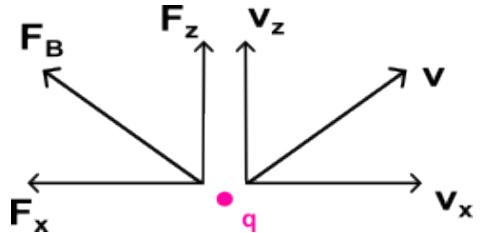
---

Durante lo spostamento verticale, il moto delle cariche è sovrapposizione di due moti.

$$\begin{cases} \Delta x = v_x \Delta t \\ \Delta z = v_z \Delta t \end{cases} \Rightarrow v_x \Delta z = v_z \Delta x$$

Lungo la direzione  $\hat{u}_x$  abbiamo la velocità delle cariche dovuta alla corrente stazionaria. Analogamente la forza di Lorentz non è più ortogonale alle cariche e quindi ha due componenti

$$\begin{cases} F_x = -\Delta q v_z B \\ F_z = \Delta q v_x B = i a B \end{cases}$$



la grandezza  $\Delta q$  è la carica trasportata per una distanza  $a$  nel tempo  $\Delta t$ .

$\mathbf{F}_B$  ha una componente lungo  $x$ , in verso opposto alla corrente, di conseguenza la batteria compie lavoro contro  $F_x$  per mantenere la corrente stazionarie e quindi compiendo un lavoro

$$W_{batt} = -\mathbf{F}_x \cdot \Delta \mathbf{x} = \Delta q v_z B \Delta x = \Delta q v_x B \Delta z = i a B \Delta z$$

La batteria compie il lavoro apparente della forza di Lorentz. Per l'appunto è apparente in quanto la  $\mathbf{F}_B$  è ortogonale allo spostamento e quindi non compie lavoro.

# CAPITOLO 3

## Circuiti Elettrici

### 3.1 Condensatori

In generale un condensatore è una coppia di conduttori che hanno carica  $Q$  e  $-Q$  rispettivamente. Un esempio è dato da due piani conduttori in parallelo.

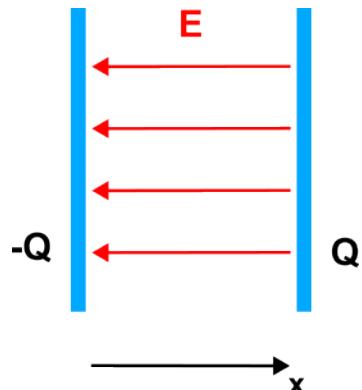
#### 3.1.1 Condensatore a piani paralleli

Consideriamo due piani conduttori posti in parallelo come in figura, e assumiamo che la distanza  $d$  tra i piani sia molto più piccola di  $\sqrt{A}$  dove  $A$  è l'area delle superfici planari. Imporre una condizione del genere ci permette di considerare gli effetti che si generano al bordo dei piatti e quindi possiamo assumere che il campo elettrico che generato nella regione tra i due piani coincide con quello che si avrebbe se le superfici avessero una estensione infinita. Il campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{x}$$

dove  $\sigma = Q/A$  e il campo ha direzione opposta a quella dell'asse  $x$ . Definiamo *capacitanza* la grandezza

$$C = \frac{Q}{V} \tag{3.1}$$



### CAPITOLO 3. CIRCUITI ELETTRICI

---

dove  $V$  rappresenta il *voltaggio* o la *differenza di potenziale*, tra i due piani paralleli. Dato che  $\mathbf{E} = -\frac{d\phi}{dx}$ , avremo che

$$\phi(x) = -Ex + c \quad \Rightarrow \quad V = \phi(0) - \phi(d) = Ed = \frac{Qd}{A\varepsilon_0}$$

e quindi possiamo concludere che la capacità per due piatti paralleli di area  $A$  e posti ad una distanza  $d$ , sono

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

La capacità di un condensatore dipende dalla sua geometria e non dalla carica  $Q$ . I condensatori in generale vengono usati per immagazzinare energia elettrica. L'energia accumulabile da un condensatore è data dalla relazione

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{A\varepsilon_0}{2} \int_0^d dx \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

L'unità di misura per la capacità è data dal *Farad* che è dato da

$$[F] = \frac{[\text{Coulomb}]}{[\text{Volt}]}$$

3.1.2 Conduttori con condensatore interno

3.1.3 Sistemi di conduttori / condensatore a pištrati

## 3.2 Conduttori Ohmnici

3.2.1 Legge di Ohm

## 3.3 Componenti di un circuito elettrico

3.3.1 Resistenze in serie e parallelo

3.3.2 Condensatori in serie e parallelo

3.3.3 Riduzione di un circuito

3.3.4 Legge di Kirchoff

## 3.4 Carica e Scarica di un condensatore

## 3.5 Forza elettromotrice

CAPITOLO 3. CIRCUITI ELETTRICI

---

## CAPITOLO 4

---

Magnetismo e Relatività

---

CAPITOLO 4. MAGNETISMO E RELATIVITÀ

---

# CAPITOLO 5

---

## Elettrodinamica

---

### 5.1 Leggi d'induzione

Lo studio delle trasformazioni del campo elettrostatico e del campo magnetico stazionari in sistema in moto relativo ha evidenziato che  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono in un qualche modo legati tra loro.

In fenomeni variabili (dipendenti dal tempo)  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono mutuamente accoppiati. Alcune relazioni che descrivono i campi stazionari sono incomplete e vanno estese. Se consideriamo una carica puntiforme in moto nel sistema di riferimento del laboratorio, allora le seguenti leggi dedotte per le cariche statiche non sono più valide:

$$\mathbf{E} \text{ non è conservativo} \iff \nabla \times \mathbf{E} \neq 0$$

$$\mathbf{B} \text{ non soddisfa la legge di Ampère} \iff \nabla \times \mathbf{B} \neq \mu_0 \mathbf{J}$$

Iniziamo l'analisi dei fenomeni non stazionari dalle osservazione sperimentali di Faraday che sistemanano la prima relazione  $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ . Data una carica statica all'interno di un conduttore questa induce una carica indotta nei conduttori, ma che cosa succede se una corrente di carica atteaversa un conduttore? sperimentalmente si osserva una corrente indotta al suo interno per flussi vairabili nel tempo. Ma a questo punto diventa legittimo domandarsi come mai le cariche all'interno del conduttore si mettano in moto, ovvero quali siano le forze (apparenti) responsabili?

Inoltre Faraday compie altri esperimenti che restituiscono il medesimo risultato:

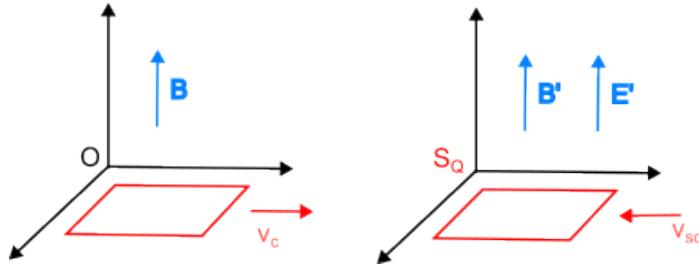
1. conduttore deformato o in movimento immerso in un campo elettromagnetico  $\mathbf{B}$

stazionario;

2. le sorgenti del campo magnetico  $\mathbf{B}$  sono in moto rispetto al conduttore;
3. conduttore in presenza di campo magnetico variabile della sorgente

### 5.1.1 Esempio

Consideriamo un conduttore dato da una spira quadrata nel piano  $(x,y)$ . Definiamo un sistema di riferimento solidale con la spira  $S_Q$  e un sistema  $O$  in cui si trova l'osservatore. La spira si muove con una velocità  $\mathbf{v}_c$  rispetto ad  $O$ .



Nella prima immagine partendo da sinistra abbiamo che

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v}_c \times \mathbf{B} \neq 0 \quad (5.1)$$

mentre il campo elettrico è  $E = 0$ . Da questo risultato possiamo dedurre che la corrente indotta che si osserva all'interno della spira deve essere conseguenza di una forza di natura magnetica.

Se consideriamo la seconda immagine in cui  $S_Q$  è il sistema fissato, osserveremo il sistema  $O$  muoversi con velocità  $\mathbf{v}_c$  in senso opposto. Rispetto al sistema  $S_Q$  le cariche sono stazionarie di conseguenza  $F_{B'} = 0$  e quindi la corrente che si osserva all'interno della spira non può essere conseguenza di un effetto magnetico. Inoltre è presente un campo elettrico  $E'$ .

Nel seguente paragrafo delineiamo i principi che legano il campo magnetico variabile alle forze che permettono di osservare della corrente all'interno di un conduttore.

## 5.2 Legge di Faraday

Una delle equazioni di Maxwell mette in relazione campi magnetici ed elettrici

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

Tale equazione ci dice che se il campo magnetico è variabile nel tempo, allora crea un campo elettrico. La creazione di un campo elettrico fa sì che le cariche vengano accelerate, ovvero creino una corrente all'interno di un filo. Il processo di creazione di una corrente mediante un campo magnetico variabile prende il nome di *induzione*.

Consideriamo un filo come un conduttore, avvolto attorno ad una curva stazionaria  $C$ . Un filo chiuso prende il nome di circuito. Se integriamo l'equazione (5.1) rispetto alla superficie  $S$  racchiusa dal circuito chiuso  $C$ , abbiamo che

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

utilizzando il teorema di Stokes possiamo riscrivere l'equazione come

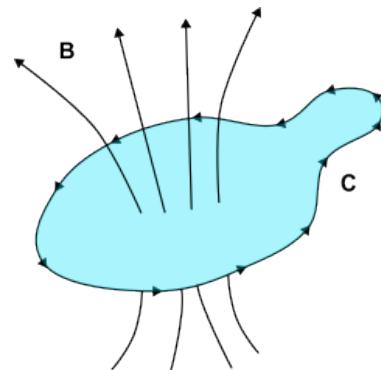
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Per ottenere l'ultima relazione abbiamo assunto che né  $C$  e né  $S$  possano cambiare nel tempo. L'integrale di linea attorno a  $C$  del campo elettrico prende il nome di *forza elettromotrice*,  $\mathcal{E}$ , che di solito viene abbreviata con *fem*.

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

La forza elettromotrice non è realmente una forza come possiamo vedere dalla sua espressione, in realtà è la componente tangenziale della forza per unità di carica, integrata lungo un filo. Un altro modo di vederla è dato dal lavoro necessario a spostare una carica unitaria lungo la curva  $C$ . Se la *fem* è non nulla allora è presente della carica accelerata all'interno del filo che genera quindi una corrente.

L'integrale del campo magnetico passante attraverso la superficie  $S$  prende il nome di



flusso magnetico  $\Phi$  attraverso la superficie  $S$ ,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Di conseguenza possiamo riscrivere l'equazione di Maxwell (5.1) come

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.3)$$

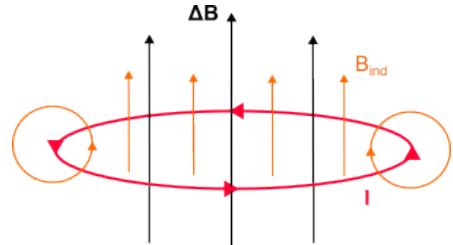
In questa forma l'equazione prende il nome di *legge di Faraday*.

La legge di Faraday ci dice che se cambiamo il flusso del campo magnetico attraverso una superficie  $S$  delimitata da un circuito, allora osserveremo un flusso di corrente all'interno del filo. Esistono diversi modi per modificare il campo magnetico, per esempio spostando una barra magnetica in vicinanza ad un circuito, passandola attraverso la superficie  $S$  delimitata dal filo conduttore. Un altro modo è dato muovendo un secondo filo  $C''$  attraverso da una corrente, oppure tenendolo fisso e variando l'intensità di corrente al suo interno accendendolo e spegnendolo. Tutti questi metodi inducono una corrente in  $C$ .

Esiste anche un secondo effetto, dovuto al fatto che dato un campo magnetico variabile e avendo una corrente indotta all'interno del circuito  $C$ , avremo che a sua volta la carica in moto genera un suo campo magnetico. Il campo magnetico indotto è orientato sempre in opposizione al cambiamento. Questo fenomeno prende il nome di *legge di Lenz* e giustifica il segno negativo nella legge di Faraday (5.2).

### 5.2.1 Esempio legge di Lenz

Possiamo dimostrare la legge di Lenz con un semplice esempio. Consideriamo un caso in cui il cammino  $C$  è una circonferenza giacente in un piano, e ipotizziamo che sia immersa in campo magnetico  $B$  uniforme che al passare del tempo questo diventa più piccolo e dunque  $\dot{\Phi} < 0$ . Per la legge di Faraday abbiamo che  $\mathcal{E} > 0$  e la corrente scorre in senso antiorario lungo



C. La corrente indotta genere una campo  $\mathbf{B}$  che incrementa il campo all'interno della spira opponendosi alla sua decrescita.

### 5.2.2 Esempio: Batteria (Corrente Stazionaria)

Quando osserviamo della corrente all'interno di un circuito ci sono solo due forze responsabili del trasporto delle cariche: la sorgente,  $\mathbf{F}_s$ , che solitamente è confinata in una porzione del circuito (come una batteria) e una forza di natura elettrostatica, che serve a trasportare l'effetto della sorgente sul resto del circuito:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{E} \quad (5.4)$$

Nel caso di una batteria  $\mathbf{F}_s$  è data dal potenziale chimico al suo interno. Il lavoro compiuto complessivamente sul circuito è dato come sempre dall'integrale di linea della forza agente su di esso quindi

$$\mathcal{E} \equiv \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{s}$$

e quindi come definito il precedente all'interno del circuito abbiamo una forza elettromotrice responsabile de flusso delle cariche al suo interno.

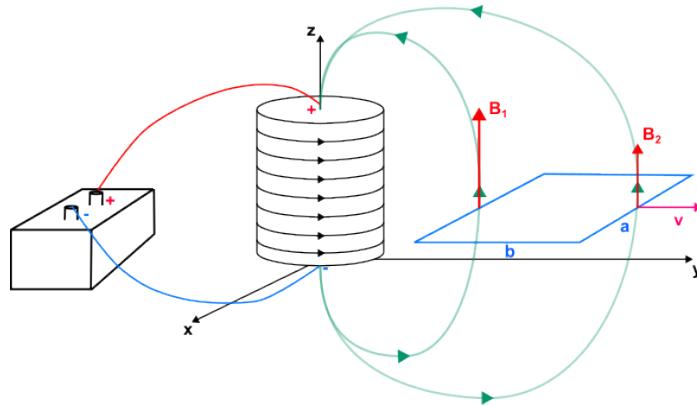
Se consideriamo un modello semplificato della batteria, in cui ne trascuriamo la resistenza, abbiamo che la forza sulle cariche è  $E = -\mathbf{F}_s$ , dunque la *fem* possiamo vederla legata alla tensione ai campi della batteria.

$$\mathcal{E} = \int_C \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V$$

Lo scopo di una batteria è quello di manterne un differenza di potenziale all'interno di un circuito pari alla forza elettromotrice. Notare che all'interno di una batteria  $\mathbf{F}_s$  la corrente ha flusso in direzione opposta al campo elettrico  $\mathbf{E}$ .

### 5.2.3 Generatori Elettrici

Ipotizziamo di avere un sistema in cui abbiamo una sorgente (generatore) che genera un campo magnetico  $\mathbf{B}$  stazionario, ma non uniforme nello spazio. Nel sistema è presente una spira rettangolare in moto con velocità  $\mathbf{v}$  costante.



Siccome il campo magnetico  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$  dipende dalla posizione la forza a cui sono soggette le cariche nella spira dipende dalla distanza dalla sorgente. Calcolando la forza di Lorenz per unità di carica  $\mathbf{F}_B = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , ad un istante di tempo  $t$ :

$$\oint \mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{s} = v(B_1 - B_2)a \neq 0$$

dove  $a$  è la lunghezza di un tratto della spira. Lungo  $b$  la forza  $\mathbf{F}_B$  è ortogonale al tratto di spira (vedere figura) di conseguenza non contribuisce all'intergrale, e quindi si un contributo solo lungo  $a$  dove  $\mathbf{F}_B$  è parallelo alla direzione.

La forza complessiva che agisce su una carica del circuito è data da

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E}$$

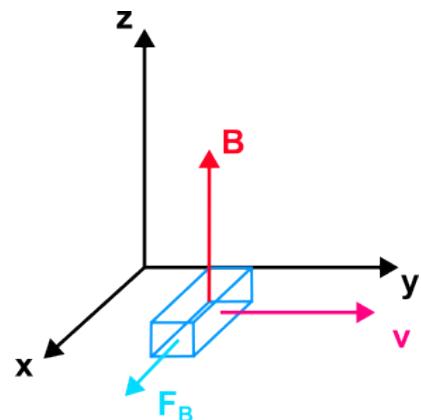
di conseguenza il lavoro compiuto dal generatore è dato da

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

dove si è trascurato il contributo del campo elettrico  $\mathbf{E}$  essendo conservativo. Il lavoro compiuto dal generatore è proprio la forza elettromotrice che permette lo spostamento delle cariche e coincide con la forza di Lorentz per unità di carica.

### 5.2.4 Moto di un filo in un campo magnetico stazionario

Come abbiamo visto un modo per indurre una corrente all'interno un conduttore è quello di mantere la sorgente fissata e il conduttore in moto. Se prendiamo come conduttore una barra di lunghezza  $a$  (o segmento di circuito), le cariche libere si muovono sotto l'azione di  $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . sulle cariche si raggiunge uno stato di equilibrio statico quando il campo  $\mathbf{E}$  interno al conduttore, generato dalla distribuzione di carica, ottenuta dopo il riarrangiamento indotto da  $\mathbf{F}_B$ , bilancia la forza di Lorentz.



$$\mathbf{F}_B + \mathbf{F}_E = 0 \iff \mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

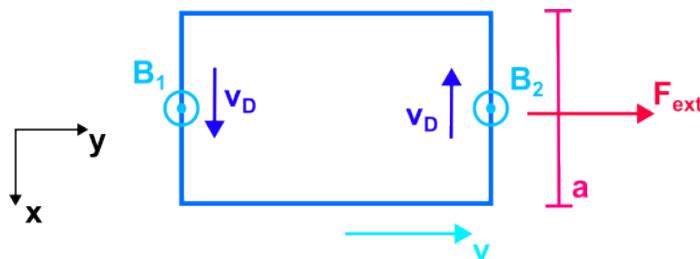
Ai capi della barra compare una differenza di potenziale

$$\Delta V = - \int_0^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^a (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

Se il circuito è chiuso, se  $\mathbf{B}$  non è uniforme, abbiamo che  $\Delta V_1 \neq \Delta V_2$  nei due segmenti distanti tra loro, di conseguenza compare una *fem*, dovuta alla forza di Lorentz.

### 5.2.5 Lavoro della forza esterna

Prendiamo un sistema in cui è presente un campo magnetico  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  non uniforme e al suo interno è immersa una spira rettangolare di lato minore  $a$  (il lato maggiore non ci interessa per la dinamica del problema). Ipotizziamo che la spira sia tirata da una forza esterna  $\mathbf{F}_{ext}$  concorde con gli assi del sistema di riferimento.



## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

All'interno della spira è presente una corrente di cariche che si spostano con velocità  $\mathbf{v}_D$  che è la velocità di deriva e una componente di velocità  $\mathbf{v}$  data dalla forza esterna agente. La velocità di una singola carica è quindi data da

$$\mathbf{v}_q = v_D \hat{\mu}_{\mathbf{x}} + v \hat{\mu}_{\mathbf{y}}$$

La forza sulle cariche presenti nei due segmenti verticali alla direzione di spostamento che contribuiscono al lavoro è data da

$$\mathbf{F}_1 = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 = \underbrace{-q\mathbf{v}_D B_1 \hat{\mu}_{\mathbf{y}}}_{\text{opposta a } \mathbf{F}_{\text{ext}}} + qv B_1 \hat{\mu}_x$$

il secondo addendo determina il moto delle cariche nel filo. Affinchè la spira si sposti con moto rettilineo uniforme lungo  $\hat{\mu}_y$  abbiamo bisogno che la risultante delle forze sulla spira (e quindi sulle cariche) sia  $\mathbf{R} = 0$  il che equivale a

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -qv_D(B_1 - B_2)\hat{\mu}_y$$

per uno spostamento  $\Delta y$  il lavoro compiuto dalla forza esterna è dato da

$$W_{\text{ext}} = qv_D(B_1 - B_2)\Delta y$$

Le cariche in un tempo  $\Delta t$  si muovono lungo gli assi percorrendo le distanze

$$a = v_D \Delta t \quad \text{e} \quad \Delta y = v \Delta t$$

sostituendo per i tempi otteniamo la relazione  $v_D \Delta y = av$  e quindi possiamo scrivere la forza esterna come

$$W_{\text{ext}} = qv(B_1 - B_2)a$$

In questo modo si dimostra che la forza responsabile della corrente nel circuito è la forza esterna che alimenta la forza elettromotrice.

### 5.2.6 Caso Generale

Esiste un modo semplice per dimostrare la relazione tra forza elettromotrice e variazione di flusso di un campo magnetico che cambia nel tempo. Ipotizziamo di avere un generico circuito  $C(t)$  che può essere mosso rigidamente e attraversato da un campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Al tempo  $t + \delta t$  il circuito è stato traslato in una nuova posizione, questo porta ad avere un cambio del flusso del campo  $\mathbf{B}$  di conseguenza possiamo scrivere

$$d\phi = \phi(t + \delta t) - \phi(t) = \int_{S(t+\delta t)} \mathbf{B}(t + \delta t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S}$$

notare che siccome il movimento del circuito è rigido la superficie rimane la medesima durante lo spostamento.

Sviluppando con Taylor il campo magnetico abbiamo che

$$d\phi = \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{S} + \left[ \int_{S(t+\delta t)} - \int_{S(t)} \right] \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (5.5)$$

Il termine  $\int_{S(t+\delta t)} - \int_{S(t)}$  rappresenta una superficie chiusa formata dal volume compreso nella regione di traslazione rigida del cammino, il contorno di tale regione lo definiamo  $S_C$ . Dato che il campo magnetico è irrotazionale  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  l'integrale di  $\mathbf{B}(t)$  su una qualsiasi superficie chiusa risulta essere nullo. Per questo motivo complessivamente dobbiamo avere

$$\left[ \int_{S(t+\delta t)} - \int_{S(t)} \right] \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_C} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

e quindi

$$\left[ \int_{S(t+\delta t)} - \int_{S(t)} \right] \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} = - \int_{S_C} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S}$$

Un elemento di superficie di  $S_C$  è dato da

$$d\mathbf{S} = (\mathbf{dr} \times \mathbf{v}) \delta t$$

dove  $d\mathbf{r}$  è un tratto del circuito  $C(t)$  e  $v \delta t$  il tratto di cui si è stato traslato in un tempo  $\delta t$ .

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Di conseguenza l'equazione (5.5) può essere riscritta nel seguente modo

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.6)$$

dove abbiamo usato la proprietà per i prodotti misti per riscrivere  $(d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{B} = d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Dall'equazione di Maxwell sappiamo che

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

abbiamo che (5.6) diventa

$$\frac{d\phi}{dt} = - \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}$$

Il termine di destra include la forza tangenziale al filo data sia dal campo elettrico che dallo spostamento del filo in presenza di un campo magnetico. Tale relazione che tiene conto di entrambi i contributi definisce la forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \int_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \quad (5.7)$$

e quindi ritroviamo la legge del flusso definita ad inizio capitolo  $\mathcal{E} = -d\phi/dt$ .

La forza elettromotrice è omogenea alla differenza di potenziale, in elettrodinamica (o nei circuiti con correnti non stazionarie) questa viene definita differenza di tensione  $\Delta V$  in quanto il campo elettrico  $\mathbf{E}$  non è conservativo e non ammette potenziale. Come conseguenza la tensione elettrica dipende dal percorso.

### 5.2.7 Esempio: Generatore di Corrente Alternata

Dato un circuito chiuso C chiuso in cui è presente una resistenza R, questo viene messo in rotazione rispetto all'asse orizzontale passante per esso con velocità angolare costante  $\omega$ , inoltre inizialmente il cammino forma un angolo  $\theta_0$  rispetto al versore  $\hat{\mu}_z$ . All'interno del sistema è presente un campo magnetico  $\mathbf{B} = B\hat{\mu}_z$  stazionario in cui la spira è immersa. Determinare la corrente che scorre all'interno del circuito.

*Dimostrazione.*

$$\phi_S(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot S\hat{\mathbf{n}} = BS \cos(\omega t + \theta_0)$$

Usando la legge di Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = \omega BS \sin(\omega t + \theta_0)$$

Dato che la forza elettromotrice coincide con la differenza di tensione alle estremità del circuito e per ipotesi il materiale di cui è composto è ohmico possiamo usare la legge  $V = RI$  e quindi

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

□

### 5.2.8 Esempio: Dinamo di Faraday

Un disco di metallo di raggio  $R$  ruota con velocità angolare  $\omega$  rispetto all'asse verticale passante per il centro. Il mezzo conduttore si trova immerso in un campo magnetico  $\mathbf{B}$  con direzione e orientamento parallelo all'asse di rotazione del disco. Si costruisce un circuito collegando ad un capo dell'asse una resistenza e al disco un contatto che ne permetta la rotazione. Determinare la corrente nel conduttore.

*Dimostrazione.* In questo caso non è possibile utilizzare la definizione della forza elettromotrice rispetto al flusso del campo magnetico, siccome questo risulta essere nullo attraverso la superficie del conduttore, inoltre non è possibile dedurre quale sia il percorso della corrente al suo interno. In questi casi è meglio utilizzare la definizione di forza elettromotrice come lavoro della forza di spostamento delle cariche lungo un cammino.

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{l}$$

Dato che le cariche si muovono in modo uniforme, abbiamo che la risultante delle forze su di esse è nulla  $\mathbf{R} = 0$  e quindi  $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_B$  dove  $\mathbf{F}_B$  è la forza di Lorentz. La velocità delle cariche è data da  $\mathbf{v}_q = \omega t \hat{u}_\theta$  e quindi

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{v}_q \times \mathbf{B} = \omega r B \hat{\mu}_r$$

e quindi

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_B \cdot d\mathbf{l} = \int_0^R \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B R^2$$

□

### 5.2.9 Sorgenti magnetiche in moto (Secondo Esperimento di Faraday)

Consideriamo un sistema di riferimento  $O$  solidale con la sorgente di campo magnetico e un sistema di riferimento  $O'$  solidale con una spira chiusa che si sposta lungo una direzione con velocità  $\mathbf{v}$ . Per la relatività classica il sistema  $O$  risulta essere in moto relativo rispetto alla spira, e in entrambi i sistemi si deve osservare lo stesso fenomeno, ovvero della corrente indotta all'interno del circuito dovuta alla forza elettromotrice  $\mathcal{E}$  o  $\mathcal{E}'$  a seconda del riferimento.

L'interpretazione della natura della forza elettromotrice però risulta essere differente, infatti in  $O'$  non ci sono forze magnetiche poiché rispetto ad essa le cariche risultano essere ferme. Dalla definizione di forza elettromotrice data da (5.7) sappiamo che in generale

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

se calcoliamo la forma elettromotrice rispetto al riferimento della spira  $O'$

$$\mathcal{E}' = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r}$$

quindi in virtù di quanto osservato sperimentalmente deve esistere un campo elettrico  $\mathbf{E}'$  rispetto a cui la circuitazione non è nulla (si ha un caso non elettrostatico).

Per semplicità consideriamo solo lo spostamento di un segmento del circuito (sbarra conduttrice).

Nel riferimento  $O'$  solidale con la sbarra in moto relativo a  $O$ , con velocità  $v_{OO'} = v$ , per determinare il campo elettrico  $\mathbf{E}'$  utilizziamo le seguenti leggi di trasformazione di campo

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_{||} = \mathbf{E}_{||} \\ \mathbf{B}'_{||} = \mathbf{B}_{||} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}}{c^2} \right) \end{cases} \quad (5.8)$$

Dato che in  $O$   $\mathbf{E} = 0$  e  $\mathbf{B}_{||} = 0$ , in  $O'$  si ha che :

$$\begin{cases} \mathbf{B}' = \gamma \mathbf{B}_{\perp} \\ \mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) = \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \end{cases} \quad (5.9)$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

In  $O'$  le cariche libere nel conduttore si dispongono in modo da annullare il campo elettrico all'interno del conduttore

$$\mathbf{E}'_{cond} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}_{ind} = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_{ind} = -\mathbf{E}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}'$$

in questo modo si ha la condizione elettrostatica in cui  $\mathbf{v}_q = 0$ .

Nel sistema di riferimento  $O$  si giunge a un risultato analogo dove affinchè le cariche si muovano di moto uniforme

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

internamente al conduttore. I due osservatori interpretano diversamente i fenomeni e vedono campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  differenti, ma osservano il medesimo risultato sperimentale, questo è dovuto al fatto che la distribuzione di carica è la medesima.

### Calcolo della Forza Elettromotrice nel sistema $O'$

Ora che abbiamo determinato l'espressione del campo elettrico nel sistema di riferimento  $O'$  possiamo procedere a calcolarne esplicitamente la forza elettromotrice indotta sulla spira quadrata considerata inizialmente.

Ipotizziamo che il campo magnetico in cui è immersa la spira sia non uniforme, di conseguenza il campo elettrico indotto  $\mathbf{E}'$  avrà verso e intensità differente rispetto al tratto della spira considerato. Lungo il lato maggiore del circuito il campo è ortogonale allo spostamento di conseguenza non contribuisce all'integrale di linea con cui calcoliamo la forza elettromotrice

$$\mathcal{E}' = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = E'_1 a + E'_2 (-a) = v(B'_1 - B'_2)a$$

Il calcolo del flusso, geometrico, è identico nei due sistemi di riferimento infatti

$$\frac{d\phi'}{dt'} = -va(B'_1 - B'_2) = -\mathcal{E}' \Rightarrow \mathcal{E}' = -\frac{d\phi'}{dt'}$$

La relazione del flusso del campo magnetico con la forza elettromotrice è invariante in forma, nonostante i due osservatori ne abbiano un'interpretazione fisica differente.

1. Nel sistema di riferimento  $O$  è la forza magnetica e quindi  $\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_B \cdot d\mathbf{l}$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

2. Nel sistema di riferimento  $O'$  è il campo elettrico indotto  $\mathcal{E}' = \oint \mathbf{f}'_{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l}$

*Un campo magnetico variabile sull'area del circuito induce un campo elettrico non conservativo responsabile della forza elettromotrice.*

Faraday ottiene questa relazione per via empirica.

*Osservazione.* Nell'esempio considerato il campo  $\mathbf{B}$  è stazionario e in moto relativo, ma è variabile nel riferimento del laboratorio (solidale con la spira), eccetto nel caso in cui  $\mathbf{B}$  è uniforme

### 5.2.10 Campo Magnetico Variabile (Terzo Esperimento di Faraday)

Abbiamo visto come per un circuito in moto rispetto alle sorgenti e viceversa la forza elettromotrice ha origini differenti rispetto all'osservatore, ma la legge di Faraday rimane comunque un invariante relativistico in forma. Nel paragrafo precedente per l'osservatore del laboratorio solidale con la spira per giustificare la fisica del fenomeno abbiamo introdotto un campo elettrico indotto, la giustificazione della sua introduzione è chiara solo in relatività speciale.

Faraday compie un terzo esperimento in cui osserva una corrente all'interno di un conduttore, ovvero mantiene sorgenti e circuito statici e varia il campo magnetico  $\mathbf{B}$ . Sperimentalmente osserva che a medesime variazioni di  $\mathbf{B}$  sulla spira indotte:

1. spostando le sorgenti
2. modificando l'intensità del campo.

corrispondono medesime correnti indotte. Questo ci permette di dedurre che

*La forza elettromotrice indotta localmente dipende solo dalle variazioni locali del flusso e non dalla natura delle sorgenti.*

Per quanto ragionevole questo è un risultato sperimentale che non può essere dedotto per via analitica, a differenza del secondo esperimento la cui natura del campo elettrico indotto può essere giustificato dalla relatività speciale.

### 5.2.11 Legge di induzione di Faraday per Campi Magnetici Stazionari

Per ogni linea chiusa C, stazionaria nelle coordinate, se  $\mathbf{B}$  è il campo misurato al tempo t, vale la relazione

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

dove

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \\ \mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{cases} \quad (5.10)$$

Lo specificare la stazionarietà nelle coordinate significa che la Legge di Faraday descrive a rigore soli il secondo e terzo esperimento di Faraday. Nel caso di un circuito variabile immerso in un campo  $\mathbf{B}$  stazionario la fem è dovuta a  $\mathbf{f}_B$ , e non vale l'espressione della forza elettromotrice in (5.10). In questo caso si ricorre alla regola universale del flusso in (5.7).

### 5.2.12 Esempio: Variazione del Campo Magnetico

Consideriamo un sistema costituito da una solenoide di raggio b, densità di spire  $n$  e attraversato da una corrente  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$  intorno al quale è posta una spira di raggio a e resistenza  $R$ . Determinare la forza elettromotrice indotta nel circuito.

*Dimostrazione.* Il campo magnetico generato dal solenoide attraversato dalla corrente è dato da

$$\mathbf{B}(t) = \mu_0 n I(t) \hat{\mathbf{u}}_z \quad r < b$$

utilizzando la legge di Faraday che lega *fem* e variazione del flusso del campo magnetico abbiamo che

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(B(t)\pi b^2) = -\pi b^2 \frac{dB}{dt} = \pi b^2 \omega \mu_0 n \omega I_0 \sin(\omega t)$$

□

### 5.2.13 Esempio: Circuito e Campo magnetico variabili

Consideriamo un sistema in cui sia il campo magnetico che il circuito cambiano nel tempo avremo che la variazione di flusso è data da

$$\begin{aligned} d\phi &= \int_{S(t+dt)} \mathbf{B}(t+dt) \cdot d\mathbf{A} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{A} = \\ &= \int_{S(t+dt)} \left[ \mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{A} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{A} = \\ &= \left[ \int_{S(t+dt)} - \int_{S(t)} \right] \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{A} + \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt \cdot d\mathbf{A} = \\ \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} &= -\mathbf{B}(t) \frac{dS}{dt} - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \end{aligned}$$

Il primo termine è legato alla forza elettromotrice data dalla forza magnetica mentre il secondo da quella data dal campo elettrico.

Il campo elettrico della legge di Faraday per il secondo e terzo esperimento indotto da un campo magnetico  $\mathbf{B}(t)$  variabile, esiste anche in assenza di un circuito materiale:

1. La linea chiusa C formata da un circuito può essere immateriale;
2. Se lungo C è disposto un conduttore o delle cariche libere, il campo  $\mathbf{E}$  si manifesta con una corrente indotta.

### 5.2.14 Forma Locale della Legge di Faraday

Ad inizio capitolo si è dimostrata la legge di Faraday assumendo già l'espressione in forma locale, ma come la si ottiene ?

Abbiamo visto come nel caso del secondo e terzo esperimento di Faraday possiamo condensare la relazione tra campo elettrico e campo magnetico variabile

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Per esprimere la relazione in forma locale, prendiamo una linea chiusa molto piccola e utilizziamo il teorema di Stokes

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

ottenendo la *legge di Faraday in forma locale*. Dato che  $\mathbf{C}$  è molto piccolo anche la superficie  $S$  sarà molto piccola e di conseguenza possiamo assumere che  $\mathbf{B}$  e  $\nabla \times \mathbf{E}$  siano costanti su di essa.

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{S} = -\frac{d}{dt}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})$$

Dato che  $\mathbf{S}$  è indipendente dal tempo vale l'identità

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

che prende il nome di *forma differenziale della legge di Faraday*.

La forma differenziale della legge di Faraday, include il limite stazionario e il caso del primo esperimento di Faraday. Se il campo magnetico  $\mathbf{B}$  non dipende dal tempo, il campo elettrico è conservativo, ossia  $\nabla \times \mathbf{E}$ . Dunque la forma differenziale della legge di Faraday è universale.

### 5.2.15 Campo Elettrico Indotto

La legge di Faraday generalizza la condizione dell'elettrostatica  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  definendo una relazione locale tra il campo magnetico  $\mathbf{B}$  e il campo elettrico  $\mathbf{E}$  a meno di un campo elettrostatico  $\mathbf{E}_0$ , infatti se consideriamo

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0$$

allora possiamo definire un campo  $\mathbf{E}_2$  tale che

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{dove} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_0$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Il campo elettrico complessivo è definito dalle relazioni in forma differenziale

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Legge di Gauss} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{Legge di Faraday} \end{cases}$$

Se il campo è puramente indotto ( $\rho = 0$ ), le equazioni che definiscono il campo sono matematicamente identiche alle equazioni della magnetostatica.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \end{cases}$$

e dunque si hanno le stesse soluzioni

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\nu \quad \text{Biot-Savart}$$

### Simmetrie e Legge di Faraday

Se i campi presentano delle simmetrie risulta comodo utilizzare la forma integrale della legge di Faraday e ricorrere alle stesse strategie sviluppate con la legge di Ampère :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \oint_C d\mathbf{l} = -\frac{d\phi}{dt}$$

per un campo  $\mathbf{E}$  costante sulla linea C ad un tempo fissato.

#### 5.2.16 Esempio 1

Consideriamo un campo magnetico  $\mathbf{B}(t) = B_0(t)\hat{\mathbf{u}}_z$  variabile nel tempo, uniforme nello spazio e a simmetria cilindrica. Questo induce un campo elettrico  $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{u}}_\theta$  nel piano, ortogonale a  $\hat{\mathbf{u}}_z$ , e uniforme lungo il circuito. Dalla forma integrale della legge di Faraday

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_\theta(r, t)2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t}\pi r^2$$

il campo elettrico è dunque dato da

$$E(r, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} r \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

crescente linearmente con r.

*Osservazione.*

1. Se lungo r c'è una spira conduttrice allora la corrente indotta è data da  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ .
2. Il campo  $\mathbf{E}(t)$  trovato è solo la componente associata a  $\mathbf{B}$  variabile, al netto di eventuali campi elettrostatici sovrapposti.

### 5.2.17 Esempio 2

Consideriamo il campo magnetico prodotto da un solenoide di raggio b attraversato da della corrente d'intensità  $I(t)$ , variabile nel tempo, questo è dato da

$$\mathbf{B}(t) = \begin{cases} \mu_0 n I(t) & r \leq b \\ 0 & r > b \end{cases}$$

Il problema è a simmetria cilindrica di conseguenza il campo elettrico indotto ed esterno al solenoide è della forma  $\mathbf{E} = E(r, t)\hat{\mathbf{u}}_\theta$ . Utilizzando la legge di Faraday integrale

$$E(r)2\pi r = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = -\mu_0 n \frac{\partial I}{\partial t} \pi b^2 \Rightarrow E(r, t) = -\frac{\mu_0 n}{2} \frac{\partial I}{\partial t} \frac{b^2}{r}$$

*Osservazione.* Il campo  $\mathbf{E}$  indotto esiste solo quando  $\mathbf{B}$  è variabile, ossia quando le correnti non sono stazionarie. Eppure abbiamo comunque calcolato  $\mathbf{B}(t)$  della spira usando le nozioni matematiche della magnetostatica.

I risultati ottenuti in questo modo sono tecnicamente errati, ma nella pratica restano comunque delle ottime approssimazioni quando i fenomeni sono spazialmente confinati e lentamente variabili. Ovvero si ha un'approssimazione quasi statica per  $\Delta x \ll c\Delta t$ .

### 5.2.18 Esempio 3

Consideriamo un filo infinito attraversato da una corrente variabile  $I(t)$ , il campo magnetico generato è

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

Il campo elettrico  $\mathbf{E}$  indotto è ortogonale al campo magnetico  $\mathbf{B}$ , siccome si ha simmetria cilindrica  $\mathbf{E} = E(r, t)\hat{\mathbf{u}}_z$ .

Utilizzando la legge di Faraday in forma integrale

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

preso C generico cammino rettangolare con lato maggiore di lunghezza  $l$ , segue che

$$[E(r_0) - E(r)]l = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'} dr'$$

e quindi il campo elettrico ha espressione

$$\mathbf{E}(r) = \left( \frac{\mu_0 l}{2\pi} \frac{dI}{dt} \log(r) + K \right) \hat{\mathbf{u}}_z$$

Per  $r \rightarrow \infty$  il campo elettrico diverge. Il risultato ottenuto è corretto solo in prossimità del filo. L'informazione elettromagnetica viaggia alla velocità della luce e a grandi distanze  $\mathbf{B}(t)$  non dipende dalla corrente al tempo t, ma dalla corrente ad un tempo precedente.

Se la corrente varia significativamente in un tempo caratteristico  $\Delta t$ , allora l'approssimazione quasistatica è valida solo per  $\Delta x \ll c\Delta t$ .

### 5.3 Verso le Equazioni di Maxwell

Abbiamo visto nei capitoli precedenti e in questo come in generale le cariche siano soggette alla legge di forza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

dalla definizione di campo elettrico  $\mathbf{E}$  e di campo magnetico  $\mathbf{B}$  abbiamo derivato quattro leggi che legano tra loro diverse grandezze legate alla carica di un corpo:

1.  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$  (Legge di Gauss):

Tale legge dipendendo dalla carica contenuta in un volume di spazio che è un invariante relativistico risulta essere sempre verificata anche per cariche in moto.

2.  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ :

Il campo magnetico è solenoidale e quindi il suo flusso attraverso una superficie chiusa è sempre nullo. Questo ci dice che non esistono cariche magnetiche elementari (monopolio).

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

3.  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  (Legge di Faraday):

La circuitazione del campo elettrico è pari alle variazioni nell'unità di tempo di quello magnetico concatenato con il circuito. Tale legge è sempre verificata nel limite di campi quasistazionari.

4.  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  (Legge di Ampére)

Infine giungiamo alla legge di Ampère, questa esprime la circuitazione del campo  $\mathbf{B}$  in relazione alla corrente concatenata dal circuito moltiplicata per un fattore

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 I \quad (5.11)$$

siccome il campo magnetico è solenoidale possiamo esprimere a meno di un potenziale vettore  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  a patto che  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  (gauge di Coulomb). La forma locale assume l'espressione

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

la cui soluzione ci è nota dai capitoli precedenti

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(r')}{|r - r'|} dr'$$

Nella forma integrale in (5.11) idealmente la superficie S può essere qualsiasi, basta che ha come contorno il circuito C per mantenere consistenza con il teorema di Stokes. Questa relazione è verificata e compatibile con l'equazione di continuità (conservazione della carica elettrica) solo per fenomeni stazionari, ossia

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

solo se  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Dall'altronde vale anche la relazione  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ . Questo significa che un flusso che entra all'interno di un certo volume deve anche uscire, non possono esserci addensamenti di carica. Sappiamo che in generale questo non è sempre vero. Possiamo pensare di immagazzinare della carica in una piccola regione di spazio per poi lasciarla disperdere (scarica di un condensatore). Dato che la carica viene rilasciata dalla regione in cui era confinata, la corrente sviluppata non soddisfa la condizione di stazionarietà  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , violando in questo modo la legge di Ampére.

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

La legge di Ampére richiede una generalizzazione per fenomeni non stazionari.

*Osservazione.* La legge di Faraday non presenta queste difficoltà, poichè  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  e quindi

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

Nonostante non vi fosse nessuna evidenza sperimentale nell'ottocento che campi elettrici  $\mathbf{E}$  variabili inducessero campi magnetici, Maxwell notò l'asimetria tra le legge di Faraday e quella di Ampére e si pose il problema concettuale di una generalizzazione delle equazioni del campo elettromagnetico.

### 5.3.1 Corrente di Spostamento

Un esperimento per dimostrare la necessità di una correzione della legge di Amperé è quello della scarica e carica di un condensatore. L'idea è quella di avere una configurazione in cui la corrente all'interno di un circuito cambia nel tempo. Per farlo consideriamo un circuito RC formato da una resistenza  $R$ , un condensatore  $C$  e un interruttore. Quando chiudiamo il circuito la carica immagazzinata nel condensatore fluisce nel circuito scaldando la resistenza.

Qual è il problema? Proviamo a calcolare il campo magnetico creato dalla corrente in un certo punto del circuito usando la legge di Ampére. Prendiamo una curva  $\Gamma$  chiusa che racchiude il filo, con una superficie interna  $S$ . La legge di Ampére in forma integrale lega il campo magnetico  $\mathbf{B}$  alla corrente  $I$  che scorre nel circuito

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

In questo caso la corrente  $I(t)$  cambia nel tempo. Supponiamo di considerare una superficie  $S'$  che ha sempre come contorno  $\Gamma$  e si estende nella regione in cui è presente il condensatore. Attraverso  $S'$  non passa corrente, di conseguenza se utilizziamo la legge di Ampére, possiamo concludere che non ci sia campo magnetico

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Questo porta ad avere una contraddizione con quanto determinato usando la superficie S. Il problema è che la legge di Ampére come accennato prima risulta essere verificata solo per correnti stazionarie che non cambiano nel tempo.

Per correggere questa limitazione della legge di Ampére introduciamo un termine che prende il nome di *corrente di spostamento* all'interno della sua equazione

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.12)$$

in questo modo soddisfiamo la condizione di stazionarità  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ :

$$\mu_0 \left( \nabla \cdot \mathbf{J} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$$

In modo simmetrico alla legge di Faraday, Maxwell propone che la circuitazione di  $\mathbf{B}$  dipende anche dalla variazione del flusso di  $\mathbf{E}$  concatenata con il circuito. Utilizzando la forma locale della legge di Gauss possiamo riscrivere (5.12) come:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.13)$$

che corrisponde all'equazione di continuità che ci dice che l'elettricità è localmente conservata. È solo con l'aggiunta della corrente di spostamento che l'equazione di Maxwell diventa consistente con la conservazione della carica.

La legge (5.12) come tutte le altre ammette una forma integrale

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.14)$$

Riassumendo la legge di Ampére-Maxwell soddisfa contemporaneamente:

1. L'equazione di continuità sia nel caso stazionario che non stazionario.
2. La legge di Ampére è ampiamente verificata su base sperimentale nel limite stazionario.

La corrente di spostamento

$$\mathbf{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.15)$$

ha le dimensioni di una densità di corrente. Il suo nome non indica una corrente che esiste fisicamente, ovvero nell'esempio del condensatore non si ha un reale transito di cariche tra le armature.

### 5.3.2 Esempio: Corrente Radiale

Consideriamo un conduttore sferico con una cavità al suo centro in cui è posta una carica  $Q$ . Nella corona sferica scorre una densità di corrente  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ . Verificare la legge di Ampére-Maxwell.

*Dimostrazione.* La corrente che scorre sulla superficie del conduttore è data da

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

Per simmetria il campo magnetico  $\mathbf{B}$  generato dal flusso di corrente deve essere radiale. Dato che per una superficie chiusa per il campo magnetico deve valere la condizione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  e quindi

$$\oint_S \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{A} = B(r)4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = 0$$

dunque  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ . Dalla relazione di Ampére classica abbiamo che

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

ma  $\mathbf{J} = I/4\pi r^2 \neq 0$  il che è assurdo. Di conseguenza abbiamo bisogno d'introdurre il termine della corrente di scostamento nella nostra equazione. Abbiamo che

$$\mathbf{J} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \frac{1}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$$

Il campo elettrico è

$$\mathbf{E}(t) = \frac{Q(t)}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$$

e quindi la corrente di scostamento è

$$\mathbf{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\partial Q}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}_r = -\mathbf{J}$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Se  $Q$  è positiva,  $\partial Q/\partial t$  è negativa (la carica diminuisce), e quindi  $\mathbf{J} > 0$ . Se  $Q$  è negativa,  $\partial Q/\partial t$  è positivo (la carica diminuisce in modulo, ma cambia in segno) e quindi  $\mathbf{J} < 0$ .

Utilizzando la corrente di spostamento l'equazione di Ampère-Maxwell abbiamo che  $\mathbf{B} = 0$  è consistente.

□

### 5.3.3 Scarica del Condensatore

Ritornando all'esempio usato per introdurre l'equazione di Ampère-Maxwell, abbiamo visto che senza considerare la corrente di spostamento il campo magnetico  $\mathbf{B} = 0$  quando la superficie  $S'$  attraversa il volume tra i due piatti del condensatore. La necessità della corrente di spostamento ci dice che manca qualcosa alla descrizione del problema perché l'accumulo di carica nei piatti del condensatore induce una dipendenza dal tempo del campo elettrico presente tra i piatti.

Nelle condizioni in cui le cariche sono statiche il campo elettrico assume l'espressione

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \hat{\mathbf{u}}_n$$

dove  $A$  è l'area della superficie di ciascun piatto e  $Q$  la carica depositata su di essi. Si ignorando gli effetti di bordo, il che è accettabile se la distanza tra le armature è molto più piccola della loro dimensione.

La corrente di spostamento indotta dal campo elettrico variabile

$$\mathbf{J}_d = \frac{1}{A} \frac{dQ}{dt}$$

risulta essere parallela al campo  $\mathbf{E}$  e discorde in verso (nella scarica il campo diminuisce e quindi  $\mathbf{E}_{fin} < \mathbf{E}_{in}$ ), ma concorde con  $\mathbf{J}$  nel filo. Ripetendo i calcoli per ottenere  $\mathbf{B}$  rispetto alla superficie  $S'$ , dobbiamo considerare un termine in più

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left( \underbrace{\int_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}}_{=0} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

che possiamo riscrivere come

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \left( \frac{1}{\varepsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} \right) A = \mu_0 I$$

per  $\pi r^2 < S'$ . Per  $r > b$  dove  $b$  è il raggio delle armature, il campo magnetico non ha discontinuità e  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ . Per  $r < b$  si ha  $S' = \pi r^2 < \pi b^2 = A$  e il campo magnetico è

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \left( \frac{1}{\varepsilon_0 A} \frac{dQ}{dt} \right) \pi r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2} r$$

Il campo magnetico ha una discontinuità passando attraverso le armature per  $r < b$ , questo è dovuto al fatto che la corrente  $I(t)$  e i piatti si stanno scaricando. Nei piatti fluisce una corrente superficiale

$$\Delta B_{||} = \mu_0 K \Rightarrow K = \frac{1}{\mu_0} (B_{ext} - B_{in}) = \frac{I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)$$

In modo esplicito la corrente superficiale attraverso una circonferenza di raggio  $r$  è:

$$K = \frac{I}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r} \frac{dQ_r}{dt}$$

dove  $Q_r = Q_0 \left( 1 - \frac{r^2}{b^2} \right)$  è la frazione di carica nella corona esterna di raggio  $r$ , per una distribuzione di carica uniforme. Svolgendo i conti ritroviamo quanto dedotto in precedenza dalla discontinuità del campo magnetico.

### 5.3.4 Limite Quasi-Statico

La correzione dell'equazione di Ampére da parte di Maxwell risulta trascurabile per campi lentamente variabili (quasi statici). Questa diventa significativa quando i tempi di variazione sono direttamente confrontabili con il tempo che la radiazione elettromagnetica impiega ad attraversare l'apparato.

#### Esempio: Condensatore con Corrente Variabile

Consideriamo un condensatore posto in un circuito in cui scorre una corrente  $I(t)$ , il campo elettrico presente tra le due armature è dato da

---

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

$$\mathbf{E} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 \pi b^2} \hat{\mathbf{u}}_z$$

Il campo magnetico  $\mathbf{B}$  indotto, prendendo un cammino  $C$  con raggio  $r < b$  tra le due armature è

$$\mathbf{B}(r, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi b^2} r \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

Siccome il campo magnetico risultante è variabile per la legge di Faraday, esiste un campo elettrico  $\mathbf{E}_{ind}$  indotto che modifica il campo  $\mathbf{E}(t)$  tra i due piatti

$$\nabla \times \mathbf{E}_{ind} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Per valutare la variazione del campo elettrico  $\Delta E/E$  rispetto al campo elettrico del condensatore e dato che il campo magnetico ha direzione azimutale, consideriamo un circuito C con lato maggiore  $b$  raggio delle armature e lato minore dato dalla distanza  $d$  tra i due piatti. Da cui calcoliamo circuitazione del campo elettrico indotto

$$\oint_C \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} = [E(b) - E(0)]d = \Delta E_{ind}d$$

analogamente deriviamo il flusso del campo magnetico attraverso la superficie racchiusa da C

$$\phi(\mathbf{B}) = \int_0^d dx \int_0^b \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2} r dr = \frac{\mu_0 d}{4\pi} I$$

Passando dalle leggi di Faraday in forma integrale abbiamo che la differenza di campo elettrico massima è data

$$\Delta E_{max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dI}{dt}$$

la variazione relativa, rispetto al campo tra le due piastre è

$$\frac{\Delta E_{max}}{E} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dI}{dt} \right) \left( \frac{\varepsilon_0 \pi b^2}{Q} \right) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{4} b^2 \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{dt^2}$$

posta la velocità della luce come  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  possiamo considerare due casi per calcolare esplicitamente la variazione relativa del campo:

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

1. scarica/carica del condensatore, dove  $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$  e quindi

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1}{4} \left( \frac{b}{c\tau} \right)^2$$

2. corrente alternata, dove  $Q = Q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$  e di conseguenza

$$\frac{\Delta E}{E} = \pi^2 \left( \frac{b}{c\tau} \right)^2$$

Affinchè  $\Delta E/E \approx 1$  deve valere che  $\left(\frac{b}{c\tau}\right)^2 \sim 1$ . Tale condizione nel limite quasi stazionario è soddisfatta.

### Esempio: Solenoide

Consideriamo un sistema in cui è presente un solenoide con una densità di spire  $n$  attraversato da una corrente alternata  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ . Il campo magnetico dipendente dal tempo generato è dato da  $\mathbf{B}(t) = \mu_0 n I(t) \hat{\mathbf{u}}_z$ . Determinare:

1.  $E(t)$  in funzione di  $r$ ;
2.  $\Delta B(t)$  dovuto a  $E(t)$ ;
3. Mostrare che  $\Delta B/B \ll 1$  per fenomeni quasi statici.

*Dimostrazione.* 1) Campo elettrico e magnetico variabile sono legati tra loro dalla legge di Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

siccome il campo magnetico ha direzione assiale, il campo elettrico indotto deve avere direzione azimutale, ed è costante per  $r$  fissato. Per la simmetria del problema prendiamo un cammino circolare di raggio  $r$  che circonda il solenoide. Passando alla forma integrale della legge di Faraday

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Siccome  $B(t)$  è uniforme abbiamo che

$$E(r) 2\pi r = - \frac{d}{dt} (B \pi r^2) \Rightarrow E(r) = - \frac{1}{2} \mu_0 n r \frac{dI}{dt}$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

2) Prendendo un cammino rettangolare C interno al solenoide con altezza  $h$  e ampiezza  $r$ , utilizzando la legge di Maxwell, calcoliamo

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = [B(r) - B(0)]h = \Delta B h$$

e

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^h dz \int_0^r \frac{1}{2} \mu_0 n r \left( \frac{dI}{dt} \right) dr = \mu_0 n h \frac{r^2}{4} \frac{dI}{dt}$$

mettendo insieme

$$\Delta B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_S(E)}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \left( \mu_0 n \frac{r^2}{4} \right) \frac{d^2 I}{dt^2}$$

3) La variazione relativa è data da

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{m \mu_0 \varepsilon_0}{4} \frac{r^2}{I} \frac{d^2 I}{dt^2}$$

Analogamente al caso del condensatore il termine

$$\frac{1}{I} \frac{d^2 I}{dt^2} = \begin{cases} \omega^2 = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 & \text{corrente alternata} \\ \frac{1}{\tau^2} & \text{scarica / carica di un condensatore} \end{cases}$$

e le rispettive variazioni relative sono date da

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{1}{4} \left( \frac{r}{c\tau} \right) \quad \text{o} \quad \frac{\Delta B}{B} = \pi^2 \left( \frac{r}{c\tau} \right)^2$$

affinché si abbia il limite quasi stazionario  $r/c\tau \sim 1$ , ovvero  $c\tau \sim 1$ . Se consideriamo numericamente  $c = 3 \times 10^8$  e  $r = 3 - 30 \text{ cm}$ , abbiamo che  $\tau \sim 10^{-9} - 10^{-10}$  si ottiene una correzione dell' 1% per  $1/\tau = 10^7/10^8 \text{ Hz}$ .

Tutti i risultati "statici" restano validi fino a frequenze relativamente elevate.

□

## 5.4 Induzione Elettromagnetica

In questa sezione ricaviamo alcune proprietà della legge di Faraday che ne semplificano l'applicazione nell'analisi di configurazioni con circuiti, in cui il campo  $\mathbf{E}$  indotto, si manifesta

sul circuito come una forza elettromotrice:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

### 5.4.1 Mutua Induttanza

Dati due circuiti  $C_1$  e  $C_2$  in posizioni relative fisse, si fa scorrere una corrente variabile  $I_1$  nel primo. Il flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}_1$  indotto, attraversa la superficie  $S_2$  racchiusa in dal circuito  $C_2$ . Il flusso di  $\mathbf{B}_1$

$$\phi_{21}(\mathbf{B}_1) = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A}$$

è proporzionale a  $I_1$  e dipende dalla geometria del circuito. Per vedere la proporzionalità a  $I_1$  è sufficiente applicare la legge di Biot-Savart:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{u}}_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

come conseguenza si ha il flusso di  $\mathbf{B}_1$  attraverso  $C_2$  è a sua volta proporzionale alla corrente  $I_1$ :

$$\phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left( \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) \cdot d\mathbf{A} = M_{21} I_1$$

dove il termine  $M_{21}$  racchiude la geometria del problema.

Se  $I_1(t)$  cambia abbastanza lentamente, ossia con un tempo molto più grande di quello che i campi impiegano a propagarsi su  $C_1$ ,  $C_2$  e da  $C_1$  a  $C_2$ , la forza elettromotrice indotta su  $C_2$  è data da:

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (5.16)$$

La costante  $M_{21}$  prende il nome di *mutua induttanza* ed è l'equivalente magnetico dei coefficienti di induzione (di potenziale) in elettrostatica. Tale costante mette in relazione la forza elettromotrice in un circuito con la variazione di corrente in un altro circuito.

La sua unità di misura nel sistema internazionale è *l'henry*

$$[M] = \frac{[Volt][Rempo]}{[Ampere]} = \text{henry}$$

---

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

### Esempio: Anelli Concatenati e Complanari

Consideriamo due anelli innestati l'uno dentro l'altro in modo che siano complanari dove il primo ha un raggio  $R_2 \ll R_1$  del secondo. Il campo  $\mathbf{B}_1$  relativo al circuito più grande e dovuto ad una corrente  $I_1$ , è uniforme sulla superficie di racchiusa dall'anello  $C_2$ .

Al centro della spira circolare il campo magnetico vale

$$\mathbf{B}_1(0, 0, 0) = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$$

e il corrispettivo flusso

$$\phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} \simeq B_1(0, 0, 0) \pi R_2^2 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} I_1$$

Di conseguenza il termine di mutua induttanza è dato da

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

e quindi la forza elettromotrice indotta è pari a

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{d\phi_{21}}{dt} = -\frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1} \frac{dI_1}{dt}$$

Dalla regola di Lenz sappiamo che se la corrente  $I_2$  indotta in  $C_2$  genera un campo  $\mathbf{B}_2$ , il flusso di quest'ultimo deve contrastare la variazione di flusso di  $\mathbf{B}_1$  e quindi  $\Delta\mathbf{B}_2$  è opposto in verso a  $\Delta\mathbf{B}_1$ . Se  $I_1$  aumenta in senso orario allora  $I_2$  aumenta in senso antiorario.

### Bobine

Aumentando gli avvolgimenti, si può aumentare la mutua induttanza. Se consideriamo  $N_1$  avvolgimenti sottili su  $C_1$  allora  $\mathbf{B}_1^{tot} = \sum_{i=1}^{N_1} \mathbf{B}_i = N_1 \mathbf{B}_1$ . Mentre per  $N_2$  avvolgimenti su  $C_2$  si ha  $\phi_{21}^{tot}(\mathbf{B}_1^{tot}) = N_2 \phi_{21}(\mathbf{B}_1)$  e quindi

$$\phi_{21} = \left( \frac{\mu_0 I}{2R_1} N_1 \right) (N_2 \pi R_2^2)$$

il coefficiente di mutua induttanza è dunque dato da

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I} = \frac{\mu_0 \pi}{2} N_1 N_2 \frac{R_2^2}{R_1}$$

### Caso Generale

In situazioni in cui la geometria del problema non è ben definita (o in tutti i casi reali non idealizzati) la mutua induttanza può essere caratterizzata per via sperimentale

$$M_{21} \equiv -\frac{\mathcal{E}_{21}}{dI/dt} \quad (5.17)$$

### Teorema di Reciprocità della Mutua Induttanza

Per ogni coppia di circuiti  $C_1$  e  $C_2$  fissati relativamente tra loro e in cui è possibile far scorrere una corrente, i rispettive coefficienti di mutua induttanza sono

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} \quad \text{e} \quad M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_2}$$

e vale l'uguaglianza

$$M_{21} = M_{12} \quad (5.18)$$

Tale relazione vale per una qualsiasi coppia di circuiti e non richiede simmetrie geometriche.

*Dimostrazione.* Utilizziamo il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  per il calcolo del flusso di  $\mathbf{B}$  abbiamo

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

In questo modo possiamo calcolare il flusso tramite l'integrale di linea di  $\mathbf{A}$ .

Il potenziale  $\mathbf{A}_{21}$ , dovuto alla corrente  $I_1$  nel circuito  $C_1$ , sull'elemento  $d\mathbf{l}_2$  è dato da:

$$\mathbf{A}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{r_{21}}$$

Il flusso di  $\mathbf{B}_1$  concatenato al circuito  $C_1$  è:

$$\begin{aligned} \phi_{21} &= \oint_{C_2} \mathbf{A}_{21} \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_2} \left[ \oint_{C_1} \frac{1}{r_{21}} d\mathbf{l}_1 \right] \cdot d\mathbf{l}_2 = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{21}} \end{aligned}$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

In modo analogo scambiando i ruoli di  $C_1$  e  $C_2$  definiamo

$$\phi_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{l}_1}{r_{12}}$$

Gli integrali contengono la geometria del sistema:

1.  $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_{21}| = r_{21}$ ;
2.  $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1$ ;
3. l'ordine di integrazione significa che si sommano gli stessi termini con ordine differente.

Possiamo concludere che

$$M_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{\phi_{12}}{I_2} = M_{12}$$

□

### Esempio: Bobine Concentriche e Complanari

Consideriamo una bobina  $C_1$  di raggio  $R_1$  con  $N_1$  avvolgimenti e resistenza  $R$ , al suo interno è presente una seconda bobina con  $N_2$  avvolgimenti e raggio  $R_2 \ll R_1$ . Quest'ultima è collegata a una batteria che fa scorrere una corrente  $I_2$  al suo interno.

La corrente indotta in  $C_1$  è data da

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_{12}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi_{12}}{dt} = -\frac{1}{R} M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

Il coefficiente di mutua induttanza  $M_{12}$  non è calcolabile in modo immediato perché  $\mathbf{B}_2$  dovuto alla corrente  $I_2$ , non è uniforme sulla superficie  $S_1$  delimitata da  $C_1$ . Però abbiamo visto nell'esempio precedente che è possibile calcolare  $M_{21}$  e usando il teorema di reciproca induttanza otteniamo  $M_{12}$ .

#### 5.4.2 Autoinduttanza

Una corrente  $I$  fluisce all'interno di un circuito  $C$ , se questa è variabile di conseguenza anche il campo  $\mathbf{B}$  cambia e quindi anche il suo flusso attraverso la superficie  $S$  racchiusa da  $C$ :

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_S \left( \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \right) \cdot d\mathbf{a}$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Il flusso è proporzionale alla corrente per fattori che dipendono dalla geometria del problema.  
Si definisce *autoinduttanza* (o *induttanza*) la grandezza

$$L = \frac{\phi}{I} \quad (5.19)$$

Poichè la legge di Faraday vale qualunque origine abbia la variazione di flusso, abbiamo una forza elettromotrice autoindotta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

che si oppone alla variazione di flusso in , ossia oppone resistenza all'instaurarsi della corrente I. Dalla relazione (5.19) possiamo legare induttanza e forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (5.20)$$

*Osservazione.* La forza elettromotrice e il campo **B** sono legati da una relazione locale  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ , che non dipende dalla natura delle sorgenti.

### Esempio: Induttanza per una Bobina Circolare

Data una bobina toroidale di altezza  $h$  con raggio interno  $a$ , raggio esterno  $b$  dotata di N avvolgimenti, calcolare la sua autoinduttanza.

*Dimostrazione.* Dalla legge di Ampére in coordinate cilindriche, calcoliamo il campo magnetico:

$$\mathbf{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_\theta & r \in [a, b], z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il flusso concatenato da una spira è dato da

$$\phi_A(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} h \log \left( \frac{b}{a} \right)$$

e quindi il flusso totale concatenato dal solenoide è dato da

$$\phi_{tot}(\mathbf{B}) = N\phi_A(\mathbf{B})$$

□

In generale se la geometria del problema non è nota,  $L$  è misurabile.

## 5.5 Induttanza come Elemento Circuitale (Circuito RL)

Dato un circuito formato da una batteria (forza elettromotrice), una resistenza  $R$ , un'induttanza  $L$  e un interruttore che permette di chiudere il circuito. Sperimentalmente possiamo riprodurre il circuito pensandolo come ad una batteria collegata da una bobina formata da un filo conduttore con resistenza  $R$ .

Al fluire di una corrente  $I$ , utilizzando la legge delle maglie (seconda legge di Kirchoff), dobbiamo avere che la somma algebrica delle tensioni lungo una maglia chiusa deve essere nulla, e quindi

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_L = RI \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_0 = L \frac{dI}{dt} + RI \quad (5.21)$$

dove con  $\mathcal{E}_0$  indichiamo la forza elettromotrice fornita dalla batteria (tensione), mentre  $\mathcal{E}_L$  è la *fem* indotta in un'induttanza ideale. Anche in questo caso possiamo identificare  $\mathcal{E}_L$  come la differenza di potenziale ai capi di  $L$ .  $\mathcal{E}_L$  è negativa perché si oppone al passaggio di corrente all'interno dell'induttanza. Per correnti stazionarie ( $\mathcal{E}_L = 0$ ) e il circuito è puramente resistivo.

Se consideriamo correnti variabili  $I(t)$  all'interno del circuito, dove al tempo  $t < 0$  l'interruttore è aperto e la corrente vale  $I(0) = 0$ , per  $t \geq 0$  l'interruttore è chiuso e quindi  $I = I(t)$ . Nell'ultimo caso l'equazione (5.21) è un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo grado:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0$$

la sua soluzione è

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (5.22)$$

imponendo la condizione iniziale  $I(0) = 0$  si ha che la costante  $A = -\mathcal{E}_0/R$  e quindi (5.22) diventa

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (5.23)$$

definiamo  $\tau = \frac{L}{R}$ , che determina la velocità di transizione in cui la corrente si stabilizza intorno al valore stazionario  $\mathcal{E}_0/R$  e la tensione sull'induttore diventa zero. Il tempo di transizione è dovuto al fatto che la carica non è istantanea, la bobina si oppone all'instaurarsi della corrente e  $\mathcal{E}_L$  si oppone alla variazione di flusso (legge di Lenz).

Il tempo di stabilizzazione (transiente) dipende da  $L$ , maggiore è il suo valore e più lento è il transitorio. Se  $\mathcal{E}_0 = 0$  allora  $I(t) = 0$ , non possono esserci correnti autoindotte senza l'immissione di lavoro esterno, perchè  $\mathcal{E}_L$  si oppone alle variazioni di flusso.

### 5.5.1 Scarica di un Induttore

Si ha un circuito RL la cui condizione iniziale sulla corrente è data da  $I(t) = \mathcal{E}_0/R$ , al tempo  $t = 0$  l'interruttore posto all'interno del circuito esclude la batteria e chiude l'induttanza  $L$  su  $R$  con un filo (corto-circuito).

*Osservazione.* Aprire un induttore senza cortocircuitare i capi non è prudente (se  $L$  è grande). L'induttore si oppone cambi di flusso di  $\mathbf{B}$  e vuole mantenere la corrente, di conseguenza si ha una scarica elettrica.

L'equazione per la corrente al tempo  $t \geq 0$  è:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0$$

la cui soluzione è data da

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

dove la costante  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$  è fissata dalla condizione iniziale e quindi

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (5.24)$$

il transiente della scarica ha le stesse costanti di tempo della carica. Per un tempo  $t \gg \tau$  si raggiunge il regime stazionario in cui  $I=0$ . Non sono presenti correnti autoindotte senza immissione di lavoro esterno. L'induttanza è un componente passivo (come resistenze e condensatori), non richiede lavoro meccanico o chimico/termico come un generatore.

### 5.5.2 Combinazione di Induttori

Dato un circuito con più induttori attraversati da una corrente  $I$ , definiamo la forza elettromotrice della prima componente come

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

e definiamo la loro mutua induttanza come

$$\mathcal{E}_j = -M_{1j} \frac{dI_j}{dt}$$

La forza elettromotrice è una grandezza additiva per il principio di sovrapposizione

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_{S_i} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_N) \cdot d\mathbf{a} = \\ &= -\frac{d}{dt}(\phi_1 + \dots + \phi_N) = -L_i \frac{dI_i}{dt} - \sum_{i \neq j} M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \end{aligned} \quad (5.25)$$

dunque la tensione ai capi dell'induttore  $i$ -esimo è

$$V_i = L_i \frac{dI_i}{dt} + \sum_{i \neq j} M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \quad (5.26)$$

#### Induttori in Serie

Preso un circuito ideale (in cui  $R = 0$ ) formato da due induttanze in successione e attraversato da una corrente  $I$  generata da una batteria  $\mathcal{E}$ . La tensione sui singoli induttori è differente, di conseguenza la tensione totale è data da

$$V = V_1 + V_2 = (L_1 + L_2) \frac{dI}{dt} + 2M \frac{dI}{dt} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}$$

e quindi possiamo ricondurre il circuito ad un induttanza equivalente data da

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (5.27)$$

Se  $M_{ij} \ll L_i$  possiamo considerare solo  $L = \sum_i L_i$ .

### Induttori in Parallello

Consideriamo un circuito ideale ( $R = 0$ ) in cui sono presenti due induttori in parallelo, attraversati da una corrente  $I$  data da un generatore  $\mathcal{E}$ . La tensione sulle singole induttanze è la medesima

$$\mathcal{E} = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

$$\mathcal{E} = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

La corrente si biforca nei due rami:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}$$

Isoliamo rispetto a  $dI_1/dt$  e  $dI_2/dt$  le due equazioni di partenza

$$\mathcal{E} = (L_1 - M) \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI_1}{dt} = \frac{1}{L_1 - M} \mathcal{E} - \frac{M}{L_1 - M} \frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E} = (L_2 - M) \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{1}{L_2 - M} \mathcal{E} - \frac{M}{L_2 - M} \frac{dI}{dt}$$

sostituendo nell'equazione della corrente

$$\frac{dI}{dt} \left( 1 + \frac{M}{L_1 - M} + \frac{M}{L_2 - M} \right) = \left( \frac{1}{L_1 - M} + \frac{1}{L_2 - M} \right) \mathcal{E}$$

facendo denominatore comune e riorganizzando i termini, si trova:

$$\mathcal{E} = \left( \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \right) \frac{dI}{dt}$$

Dunque l'induttanza equivalente è:

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \tag{5.28}$$

Nel limite in cui  $M \rightarrow 0$  e le induttanze risultano essere trascurabili abbiamo che

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

dunque in generale

$$L = \sum_i \frac{1}{L_i} \quad (5.29)$$

### 5.5.3 Trasformatore

Un trasformatore è costituito da due bobine solenoidali lineari, con stessa sezione  $S$  e lunghezza  $l$ , date da  $N_1$  e  $N_2$  avvolgimenti nel circuito primario e secondario. Ipotizzando che il campo magnetico nei solenoidi sia uniforme e che il campo disperso (ossia il campo all'esterno del solenoide) sia nullo.

Per un trasformatore ideale il flusso passa attraverso tutti gli avvolgimenti delle bobine, facendo passare della corrente alternata nel primo circuito otteniamo una forza elettromotrice  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1(t)$ , mentre nel secondo compare una forza elettromotrice indotta  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2(t)$ .

Si può regolare la tensione in uscita tramite il rapporto del numero di avvolgimenti:

$$V_2 = \frac{d\phi_2}{dt}(\mathbf{B}) = N_2 \frac{d\phi_{anello}(\mathbf{B})}{dt} = \frac{N_2}{N_1} \frac{N_1 d\phi_{anello}(\mathbf{B})}{dt} = \frac{N_2}{N_1} \frac{d\phi_1(\mathbf{B})}{dt} = \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1$$

Per  $N_2 > N_1$ , la tensione in uscita è maggiore della tensione in ingresso.

La conservazione dell'energia non è violata, perchè la potenza di uscita sul secondo circuito  $C_2$  e di ingresso sul primo  $C_1$  sono identiche (nel limite ideale):

$$\langle P_{in} \rangle = \langle \mathcal{E}_1 I_1 \rangle = \langle \mathcal{E}_2 I_2 \rangle = \langle P_{out} \rangle$$

*Dimostrazione.* Ciascun solenoide gode delle seguenti proprietà:

1. auto-induttanza:

$$L_i = \mu_0 \frac{S}{l} N_i^2$$

2. mutua induttanza tra solenoide:

$$M_{ij} = \mu_0 \frac{S}{l} N_i N_j$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Nell'ipotesi di solenoide ideale, il campo è assiale e uniforme sulla sua sezione  $\mathbf{S} = S\hat{\mathbf{u}}_z$ .

$$\mathbf{B}_l = \mu_0 \frac{N_i}{l} I \hat{\mathbf{u}}_z$$

Il flusso totale è  $N_i$  volte il flusso attraverso una singola spira:

$$L_i = \frac{\phi_i(\mathbf{B}_i)}{I} = N_i \frac{\phi_{i,spira}(\mathbf{B}_i)}{I} = \mu_0 \frac{N_i^2}{l} \hat{\mathbf{u}}_z \cdot S \hat{\mathbf{u}}_z = \mu_0 \frac{S}{l} N_i^2$$

$$M_{ij} = \frac{\phi_i(\mathbf{B}_j)}{I} = N_i \frac{\phi_{i,spira}(\mathbf{B}_j)}{I} = \mu_0 \frac{N_i N_j}{l} \hat{\mathbf{u}}_z \cdot S \hat{\mathbf{u}}_z = \mu_0 \frac{S}{l} N_i N_j$$

ne consegue che  $M_{ij} = \sqrt{L_i L_j}$

Le equazioni del circuito sono date dalle leggi di Kirchoff su due maglie accoppiate, ma indipendenti:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} = -RI_2 \end{cases}$$

risolvendo per esplicitare  $I_1$  e  $I_2$ :

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{M} \left( RI_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} \right) \\ \mathcal{E}_1 = -\frac{L_1}{M} RI_2 - \frac{L_1 L_2}{M} \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$

siccome  $M^2 = L_1 L_2$  dal risultato trovato, abbiamo che

$$\begin{cases} I_2 = -\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \mathcal{E}_1 \\ I_1 = \frac{1}{R} \frac{L_2}{L_1} \mathcal{E}_1 + \frac{1}{L_1} \int \mathcal{E}_1 dt \end{cases}$$

Siccome per ipotesi il circuito è alimentato con della corrente alternata  $\mathcal{E}_1 = V_0 \cos(\omega t)$ , abbiamo che la potenza media in ingresso è

$$\langle P_{in} \rangle = \langle \mathcal{E}_1 I_1 \rangle = \frac{1}{R} \frac{L_2}{L_1} \langle \mathcal{E}_1^2 \rangle + \frac{1}{L_1} \langle \mathcal{E}_1 \int \mathcal{E}_1 dt \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{R} \frac{L_2}{L_1} V_0^2 = \langle R I_2^2 \rangle = \langle P_{out} \rangle$$

dove il termine  $\frac{1}{L_1} \langle \mathcal{E}_1 \int \mathcal{E}_1 dt \rangle \sim \langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0$ .

□

**Corollario:**  $I_2/I_1 = \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$  se  $\mathcal{E}_2 \gg \mathcal{E}_1$  e  $I_2 \ll I_1$ .

## 5.6 Energia Magnetica

La definizione dell'induttanza è utile per ricavare l'energia immagazzinata nel campo magnetico. Dato un circuito C attraversato da una corrente I. La forza elettromotrice indotta è

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

La forza elettromotrice come definita in precedenza può essere pensata come il lavoro necessario a muovere un'unità di carica lungo il circuito. Data una corrente I, in un tempo  $dt$ , viene spostata una quantità di carica  $Idt$  all'interno del circuito e il lavoro svolto è

$$dW = \mathcal{E} Idt = -LI \frac{dI}{dt} dt \Rightarrow \frac{dW}{dt} = -LI \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{dI^2}{dt}$$

Il lavoro necessario a far fluire la corrente nel circuito è uguale e contrario. Integrando rispetto al tempo, per un circuito C con induttanza L si ha un lavoro totale

$$U = W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I \phi \quad (5.30)$$

Analogamente a quanto discusso per l'energia del campo elettrico identifichiamo l'energia immagazzinata nel sistema con U. Possiamo scrivere (5.30) esplicitamente rispetto al campo magnetico

$$U = \frac{1}{2} I \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato il risultato in cui la densità di corrente  $\mathbf{J}$  è localizzata lungo la curva C per riscrivere l'integrale in uno rispetto allo spazio. Utilizzando l'equazione di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$  possiamo riscrivere l'energia come

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2\mu_0} \int_V d^3x [\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})]$$

dove l'ultimo termine è dovuto alle proprietà dell'operatore gradiente. Assumendo che  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{A}$  decrescano in modo sufficientemente veloce ad infinito, possiamo considerare il primo addendo nullo e quindi otteniamo una seconda espressione dell'energia equivalente alla prima

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V d^3x \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (5.31)$$

### 5.6.1 Esempio: Energia Immagazzinata in un Solenoide Toroidale

Il campo magnetico prodotto dal toroide con raggio minore  $a$ , raggio maggiore  $b$  e altezza  $h$  attraversato da una corrente  $I$  è dato da

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi r} NI & r \in [a, b] \quad \text{e} \quad z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per calcolare l'energia immagazzinata possiamo applicare la legge (5.31) vista la geometria nota del problema e il suo volume. Un elemento di volume del solenoide toroidale è dato da

$$d\nu = 2\pi r dr h$$

dunque

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \left( \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \right)^2 h 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} N^2 h I^2 \int_a^b \frac{1}{r} dr = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \log \left( \frac{b}{a} \right) \right]^2 I^2 = \frac{1}{2} L I^2 \end{aligned}$$

### 5.6.2 Energia Magnetica di $N$ induttori

Per una sistema costituito da una coppia di induttori attraversati da due correnti distinte  $I_1$  e  $I_2$ , le rispettive forze elettromotrice sono

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \\ \mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

In un intervallo di tempo  $dt$  nei rispettivi induttori scorre una quantità di carica  $dq_1 = I_1 dt$  e  $dq_2 = I_2 dt$ . Il lavoro compiuto contro la forza elettromotrice negli induttori è

$$dW_1 = -\mathcal{E}_1 I_1 dt = L_1 I_1 dI_1 + MI_1 dI_2$$

$$dW_2 = -\mathcal{E}_2 I_2 dt = L_2 I_2 dI_2 + MI_2 dI_1$$

che possiamo riscrivere singolarmente come

$$dW = d \left( \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2 \right)$$

estendendo tale relazione ad un sistema a N induttori ed integrandola

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_i L_i I_i^2 + \sum_i \sum_{j>i} M_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_i L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_i \sum_{i \neq j} M_{ij} I_i I_j \quad (5.32)$$

dove il primo addendo è il termine dovuto all'autoinduzione e il secondo alla mutua induzione. Possiamo esprimere l'equazione (5.32) rispetto al flusso del campo magnetico **B**

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_i I_i \left( L_i I_i + \sum_{i \neq j} M_{ij} I_j \right) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \phi_i \quad (5.33)$$

In questa formulazione l'energia immagazzinata rende agevole il calcolo del flusso di **B**.

### Esempio : Sistema a Due Induttori

Dato un sistema formato da due circuiti  $C_1$  e  $C_2$  con resistenza trascurabile e induttanze  $L_1$  e  $L_2$ , calcolare il lavoro necessario per portare la corrente in  $C_1$  da  $I = 0$  a  $I = I_1$  e in modo analogo per  $C_2$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo il problema in modo separato facendo scorrere della corrente prima in un circuito e poi nell'altro. Nel caso di  $C_1$ , manteniamo  $I_2 = 0$  quindi

$$W_1 = - \int_0^{I_1} dq \mathcal{E}_1 = \int_0^{I_1} idt \cdot L_1 \frac{di}{dt} = L_1 \int_0^{I_1} idi = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

su l'induttanza  $L_2$  non viene compiuto lavoro anche se

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \neq 0$$

ovvero non è presente il termine di autoinduzione dato che  $I_2 = 0$  per ipotesi iniziale.

Facciamo scorrere della corrente  $I_2$  nel circuito  $C_2$ , mantenendo costante la corrente in  $C_1$ . Il lavoro compiuto per permettere lo scorrere della carica nel circuito  $C_2$  è dato da

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

Viene compiuto del lavoro anche su  $L_1$  dato che  $I_1 \neq 0$  (costante) e

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt} \neq 0$$

il lavoro sulle cariche del primo circuito per via degli effetti del secondo è dato da

$$W_{12} = - \int_0^{I_2} \mathcal{E}_{12} dq_1 = \int_0^{I_2} M \frac{di_2}{dt} I_1 dt = MI_1 \int_0^{I_2} di = MI_1 I_2$$

Il lavoro totale esterno contro le *fem* indotte è dato da

$$U_M = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2$$

che coincide con il risultato generale ottenuto in (5.33).

□

### 5.6.3 Esempio: Piani Superconduttori

Dato un sistema di due piani in paralleli superconduttori ( $R = 0$ ) di lato maggiore  $l$  e minore  $b$ , la cui distanza di separazione è  $x \ll b, l$ . I piani sono attraversati da una corrente di strato  $K = I/b$ , e attraversa entrambi i piani mediante un filo conduttore lungo  $x$ . Trovare la variazione di energia del sistema e la forza esercitata sui piatti per variare la distanza di  $dx > 0$ .

*Dimostrazione.* Possiamo affrontare il problema dividendolo in due ipotesi  $I$  è costante in quanto collegato ad un generatore o il flusso  $\phi$  costante prendendo il sistema isolato.

---

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

In entrambi i casi il campo magnetico del circuito è

$$B = \mu_0 K$$

e il flusso suo concatenato

$$\phi(\mathbf{B}) = B \cdot lx = \mu_0 \frac{I}{b} lx \quad \Rightarrow \quad L = \mu_0 \frac{lx}{b}$$

Nel primo caso in cui il generatore è collegato ad un generatore esterno e si ha  $I$  costante la variazione di energia è data da

$$dU = \frac{1}{2} dLI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{l}{b} I^2 dx > 0$$

L'energia magnetica cresce dato che aumenta il volume entro cui c'è il campo  $\mathbf{B}$ , mentre la sua intensità rimane costante.

La forza esercitata sui piatti per distanziarli di un tratto  $dx$  è legata all'energia magnetica del sistema

$$\mathbf{F} - \frac{dU}{dx} \hat{u}_x = -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{l}{b} I^2 \hat{u}_x$$

La forza ha verso negativo in quanto si oppone all'allontanamento delle armature, ossia l'energia del sistema aumenta a scapito di quella del generatore che fornisce del lavoro esterno.

Nella seconda ipotesi abbiamo un sistema isolato in cui non è presente un generatore che mantengano la corrente costante e il flusso  $\phi$  è costante. La variazione di energia del sistema è

$$dU = d \left( \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L^2} dL = -\frac{1}{2} \phi^2 \frac{b}{\mu_0 l} \frac{dx}{x^2} < 0$$

In questo caso l'energia immagazzinata diminuisce. La forza necessaria a separare le due lastre è positiva dato che le due armature si respingono senza lavoro esterno.

$$\mathbf{F} = -\frac{dU}{dx} > 0$$

□

### 5.6.4 Dimostrazione dell'Equivalenza Delle Due Espressioni dell'Energia Magnetica

Abbiamo visto come l'energia magnetica può essere espressa sia rispetto al campo magnetico del sistema , e al suo flusso attraverso la superficie racchiusa da un circuito chiuso, ma come si legano queste due grandezze tra loro?

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \iff U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V d\nu B^2$$

*Dimostrazione.* Per dimostrarlo partiamo dalla seconda espressione per un campo  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 d\nu &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\nu = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) d\nu + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) d\nu = \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \oint_S (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot \mu_0 \vec{J} d\nu = \end{aligned}$$

Dato che il prodotto vettoriale tra  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  è una forma locale possiamo considerare S come una superficie sferica di raggio r, estendendo l'intorno per una raggio infinito e ipotizzando che i campi  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  decadano rapidamente all'allontanarsi dal punto, possiamo trascurare il primo addendo dell'ultima sommatoria. Rimanendo

$$\frac{1}{2} \oint_C \mathbf{A} \cdot I d\mathbf{l} = \frac{1}{2} I \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} I \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} I \phi = \frac{1}{2} LI^2$$

e in modo più completo tenendo conto dei termini di autoinduzione

$$U = \frac{1}{2}LI^2 + \left( \frac{1}{2}I \sum_j M_j L_j \right)$$

□

## 5.7 Oscillazioni Elettriche

### 5.7.1 Circuito RLC in Serie

Consideriamo un circuito formato da una condensatore C o da una induttanza L. Se il condensatore risulta essere carico e viene collegato a resistore si ha una corrente dall'armatura positiva a quella negativa che scarica il condensatore. Data  $V_C$  la tensione ai capi del condensatore, avente valore massimo  $V_0$  nell'istante iniziale, quando viene chiuso il circuito; in ogni istante successivo la tensione ai capi del condensatore è uguale a quella ai capi del resistore e valgono le equazioni

$$V_C = \frac{q}{C} = RI \quad \text{e} \quad I = -\frac{dq}{dt}$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{RC} \quad \iff \quad \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = 0$$

la cui soluzione è data da

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}$$

dove  $\tau = RC$ . L'energia elettrica  $CV_0^2/2$  viene dissipata per effetto Joule all'interno del resistore.

Analogamente se al posto del condensatore abbiamo un induttore attraversato da una corrente costante  $I_0$ , l'equazione del circuito è

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt} = Ri \quad \iff \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$$

la cui soluzione è

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

con  $\tau = L/R$ . L'energia magnetica  $LI_0^2/2$  è dissipata nel resistore. In entrambi i casi le equazioni del circuito sono del tipo

$$\frac{dI}{dt} + kI = 0$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

ovvero equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti costanti, la cui soluzione generale è data da

$$I(t) = Ae^{-kt}$$

e determinata dalle condizioni iniziali del sistema. La diminuzione della corrente all'interno del circuito è dovuta all'elemento dissipativo  $R$  che assorbe la potenza  $RI^2$ .

Se invece dei processi di scarica si prendono in considerazione quelli di carica, inserendo nel circuito un generatore che produce una *fem* costante. Nel caso del circuito RC la corrente rimane la medesima della scarica mentre per un circuito RL si ha

$$I(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$$

tendente al valore costante di regime. Il lavoro necessario per mantenere queste correnti è fornito dal generatore, che inoltre eroga le energie immagazzinate nel condensatore o nell'induttore.

Prendiamo in esame un condensatore carico al tempo  $t = 0$  connesso ad un induttore e ad un resistore in serie; il circuito così creato si chiama *RLC in serie*. Alla chiusura del circuito in questo passa una corrente e nell'induttore compare una *fem* di autoinduzione  $-LdI/dt$ ; la tensione ai capi del resistore non è più uguale a quella ai capi del condensatore. Utilizzando la Legge di Kirchoff al tempo  $t > 0$

$$V_C + V_R + V_L = 0 \iff \frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

ponendo  $I = CdV/dt$  otteniamo

$$\frac{dV^2}{dt} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{V}{LC} = 0$$

definendo

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

detti rispettivamente coefficiente di smorzamento e pulsazione propria. L'equazione differenziale assume l'espressione

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2\gamma \frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0 \tag{5.34}$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

che equivale all'equazione dell'oscillatore armonico smorzato da una forza di attrito proporzionale alla velocità.

La soluzione più generale dell'equazione è data da

$$V(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

ovvero

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

La corrente ha un andamento rispetto al tempo differente a seconda della relazione tra  $\gamma$  e  $\omega_0$ . Si possono avere tre casi possibili:

1. Oscillatore sottosmorzato  $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$
2. Oscillatore criticamente smorzato  $\gamma = \omega_0$
3. Oscillatore sovrasmorzato  $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$

Nel primo caso la soluzione manifesta un comportamento solo se le due soluzioni sono complesse. Negli altri due casi, si hanno soluzioni reali e il termine dissipativo arresta il moto prima si completi un'oscillazione.

### 1) Oscillatore Sottosmorzato

Nel caso sottosmorzato le soluzioni dell'equazione caratteristica sono numeri complessi

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv -\gamma \pm i\omega_s$$

dove il termine  $\omega_s \rightarrow \omega_0$  per sistemi in cui la resistenza  $R \rightarrow 0$ . Le soluzioni dell'equazione differenziale sono a loro volta complesse

$$V(t) = e^{-\gamma t} [A_+ e^{i\omega_s t} + A_- e^{-i\omega_s t}]$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Dato che

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)$$

riscrivendo la soluzione come

$$V(t) = e^{-\gamma t} [(A_+ + A_-) \cos(\omega_s t) + i(A_+ - A_-) \sin(\omega_s t)]$$

la soluzione è reale solo se

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(A_+ + A_-) = 0 \\ \operatorname{Re}(A_+ - A_-) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_- = A_+^*$$

Ponendo  $A_{\pm} = Ae^{\pm i\varphi}$ , si trova:

$$V(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_s t + \varphi)$$

dato che  $I = CdV/dt$  la legge della corrente è data da

$$I(t) = -Ae^{-\gamma t} [\gamma \cos(\omega_s t + \varphi) + \omega_s \sin(\omega_s t + \varphi)] = -A\omega_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t + \varphi + \alpha)$$

La corrente è sfasata di  $\pi/2 + \alpha$ . Nell'oscillatore ideale  $\alpha \rightarrow 0$  per  $\gamma \rightarrow 0$ .

### Energia

In modo analogo al caso meccanico si ha un continuo scambio di energia tra il condensatore e l'induttore

$$U_E = \frac{1}{2} CV_C^2(t) \quad \text{energia potenziale elettrica}$$

$$U_M = \frac{1}{2} LI_L^2 \quad \text{energia magnetica (cinetica)}$$

ossia l'energia elettrica  $U_E$  e magnetica  $U_M$  sono sfate di  $90^\circ$  (ed hanno un massimo ogni  $180^\circ$ ). L'energia media su un periodo è data da

---

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

$$\langle \cos^2(\omega_s t - \alpha) \rangle = \langle \sin^2(\omega_s t) \rangle = 1/2$$

$$\langle U_M \rangle = \frac{1}{4} L \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} = \frac{1}{4} C A^2 e^{-2\gamma t} = \langle U_E \rangle$$

si ha metà energia elettrica e metà energia magnetica e quindi

$$\langle U_E + U_M \rangle = \frac{1}{2} C V_0^2 e^{-2\gamma t} = U(0) e^{-2\gamma t}$$

### Potenza dissipata sulla resistenza

$$\begin{aligned} -\frac{dU}{dt} &= -\frac{d}{dt} (U_E + U_M) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C V_c^2 + \frac{1}{2} L I^2 \right) \\ &= - \left[ V_c \left( C \frac{dV_c}{dt} \right) + I L \frac{dI}{dt} \right] = - [V_c I + V_L I] = \\ &= - (V_c + V_L) I = V_R I = R I^2 \end{aligned}$$

La potenza dissipata su un periodo è data da

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle &= R \langle I^2 \rangle = R C^2 \omega_0^2 V_0^2 e^{-2\gamma t} \langle \sin^2(\omega_s t) \rangle \\ &= \frac{R}{2L} C V_0^2 e^{-2\gamma t} = \gamma C V_0^2 e^{-2\gamma t} \end{aligned}$$

L'energia totale dissipata è data da

$$\Delta U = \gamma C V_0^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} dt = \frac{1}{2} C V_0^2$$

### 2) Oscillatore Sovrasmorzato

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

e la soluzione generale è

$$V(t) = V_0 e^{-\alpha_1 t} + V_0 e^{-\alpha_2 t}$$

smorzamento esponenziale senza oscillazioni.

### 3) Oscillatore Criticamente Smorzato

La soluzione dell'equazione caratteristica è data da due radici coincidenti

$$\alpha_{1,2} = -\gamma$$

e quindi la soluzione dell'equazione differenziale è data da

$$V(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

#### Fattore di Qualità di un Oscillatore

Il fattore di qualità  $Q$  di un oscillatore misura il numero di cicli (in radianti) dopo cui l'energia dell'oscillatore si riduce di un fattore  $1/e$ :

$$Q = \omega_s t_Q \quad \text{tale che} \quad U(t_Q) = \frac{1}{2}U_0$$

Poichè l'energia diminuisce di un fattore  $e^{-2\gamma t}$ :

$$t_Q = \frac{1}{2\gamma} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_s}{2\gamma} = \frac{\omega_s L}{R}$$

Il fattore di qualità  $Q$  è grande quando la resistenza  $R$  è piccola, si ha il caso dell'oscillatore ideale quando  $R \rightarrow 0$  e  $Q \rightarrow \infty$ . Quando  $R$  è grande,  $Q$  è piccolo e si ha un cattivo oscillatore, poichè  $R$  è legato a gamma e dunque se  $\gamma > \omega_0$  si ha smorzamento senza oscillazione.

#### 5.7.2 Circuito RLC Forzato

Per mantenere un'oscillazione elettrica permanente in un circuito RLC occorre fornire con continuità la potenza che viene dissipata nel resistore. Allo scopo si connette al circuito un generatore di forza elettromotrice variabile. L'equazione del circuito analogamente a quanto

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

fatto per RLC non alimentato è data da

$$\frac{q}{c} + L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}(t)$$

Deriviamo rispetto al tempo ponendo  $i = dq/dt$  e otteniamo

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \mathcal{E}'(t) \quad (5.35)$$

La soluzione più generale di questa equazione è data dalla somma della soluzione dell'equazione omogenea associata sommata alla soluzione particolare. La soluzione dell'omogenea coincide con quanto determinato nel paragrafo precedente e si estingue con un transiente  $e^{-\gamma t}$ , lasciando solo la soluzione stazionaria.

Usiamo come ansatz per la soluzione particolare il termine  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$  e come forzante del sistema una *fem*  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , sostituendola nell'equazione (5.35) si ha

$$\begin{aligned} -\omega^2 I_0 \cos(\omega t) - \frac{R}{L} \omega I_0 \sin(\omega t) + \frac{I_0}{LC} \cos(\omega t) &= -\frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} (\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi)) \\ \Rightarrow -\frac{R}{L} \omega I_0 \sin(\omega t) + I_0 \left( \frac{1}{LC} - \omega^2 \right) \cos(\omega t) &= -\frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} \cos(\varphi) \sin(\omega t) - \frac{\omega \mathcal{E}_0}{L} \sin(\varphi) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

L'egualanza deve essere valida in qualsiasi istante e quindi devono essere uguali i coefficienti di  $\sin(\omega t)$  a primo e a secondo membro; lo stesso deve valere per i coefficienti di  $\cos(\omega t)$  e imponendo queste due identità si ottiene:

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (5.36)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad (5.37)$$

Applicando la *fem*  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$  si ha nel circuito una corrente  $I = I_0 \cos(\omega t)$ , con la stessa pulsazione della *fem* applicata e ampiezza dipendente da  $\mathcal{E}_0$ ,  $\omega$  e i parametri del circuito, ma non dalle condizioni iniziali; ad una sollecitazione sinusoidale il circuito risponde in modo sinusoidale. La *fem* è però sfasata di un angolo  $\varphi$  rispetto alla corrente, e anch'esso dipende da  $\omega$  e i parametri del circuito.

### Condizione di Risonanza

La corrente nel circuito RLC è massima quando la pulsazione della *fem* applicata è uguale alla pulsazione propria del circuito; in tali condizioni lo sfasamento tra corrente e *fem* è nullo. Il fenomeno è detto *risonanza*: esso diventa sempre più accentuato al diminuire della resistenza del circuito.

In condizione di risonanza

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.38)$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t) = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad (5.39)$$

Il circuito si comporta come se fosse puramente resistivo.

Si definisce larghezza della risonanza la differenza tra i valori  $\omega_2$  e  $\omega_1$ , dove  $\omega_2 > \omega_0$  e  $\omega_1 < \omega_0$ , in corrispondenza dei quali la corrente massima assume il valore  $\mathcal{E}_0/\sqrt{2}R$ , ridotta di un fattore  $\sqrt{2}$  rispetto al valore di risonanza. Imponendo

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}R} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

l'eguaglianza è soddisfatta per valori di  $\omega$  tali che  $R^2 = (\omega L - 1/\omega C)^2$ . Da questa si ricava

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

Le soluzioni col segno meno davanti alla radice vanno scartate perché danno pulsazioni negative.  $\omega_1$  e  $\omega_2$  non sono equidistanti da  $\omega_0$ , la curva di risonanza non è simmetrica. La *larghezza di risonanza* (FHWM) risulta dunque

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (5.40)$$

dove  $Q$  è il fattore di qualità. Il fattore  $Q$  è legato alla FHWM del picco di potenza e caratterizza quanto è selettiva la risposta in frequenza.

Un circuito RLC con un alto fattore di merito è molto selettivo nella risposta: in esso circola una corrente notevole soltanto quando la pulsazione esterna coincide con quella della

fem.

### 5.7.3 Esempio: Cavo Coassiale

Una cavo coassiale è una linea di trasmissione per la propagazione di impulsi elettrici. Possiamo vederlo come due conduttori cilindrici con raggio  $R_{ext} > R_{int}$ , con basi concentriche, attraversati da una corrente eguale e contraria su entrambe le armature. Il cilindro più esterno è posto a massa.

Un cavo ideale ( $R = 0$ ) ha una capacitanza tra conduttore centrale ed esterno e un autoinduttanza attraverso la sezione assiale. Per un cavo lungo ( $l \gg c\tau$ ), l'approssimazione quasi-statica non va bene.

Possiamo rappresentare il cavo come una successione indefinita di circuiti RLC, con induttori  $L_x$  e condensatori  $C_x$ , di lunghezza  $dx \ll c\tau$ , identici tra loro. L'induttanza è data da  $L_x dx$  e la capacità da  $C_x dx$ .

Una catena di circuiti RLC è equivalente a un sistema meccanico con un numero infinito di molle. Per analogia ci aspettiamo che la corrente si propaghi nel cavo come un'onda.

Su ogni elemento finito si ha che tensione  $V = V(x,t)$  e corrente  $I = I(x,t)$ , nell'approssimazione infinitesima per una porzione di cavo di lunghezza  $dx$  la caduta di tensione sull'induttanza  $Ldx$  è

$$dV = (L_x dx) \frac{dI}{dt}$$

mentre la corrente che va verso la massa su  $Cdx$  è

$$dI = (C_x dx) \frac{dV}{dt}$$

La dinamica della tensione (o della corrente) è facilmente derivabile risolvendo le equazioni differenziali con il metodo di separazione delle variabili:

$$\begin{cases} dV = (L_x dx) \frac{dI}{dt} \\ dI = (C_x dx) \frac{dV}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{L_x} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{C_x} \frac{\partial I}{\partial x} \end{cases} \quad (5.41)$$

## CAPITOLO 5. ELETTRODINAMICA

---

Deriviamo la seconda equazione rispetto al tempo sostituendo rispetto alla prima

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{C_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{L_x} \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

ottenendo l'equazione differenziale omogenea al secondo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{1}{L_x C_x} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (5.42)$$

che prende il nome di *equazione delle onde di D'Alambert* per una dimensione. La sua soluzione è data da

$$V(x, t) = V(x \pm vt)$$

dove la velocità di propagazione è data da

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_x C_x}} \quad (5.43)$$

calcolando esplicitamente la capacità del condensatore cilindrico

$$C_x = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(R_{ext}/R_{int})}$$

e l'autoinduttanza

$$L_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \left( \frac{R_{ext}}{R_{int}} \right)$$

sostituendo in (5.43) si ha che

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

ovvero la velocità di propagazione è pari a quella della velocità della luce. In un cavo reale anzichè nel vuoto  $v < c$ .

# CAPITOLO 7

## Campi Elettrici nei Mezzi Materiali

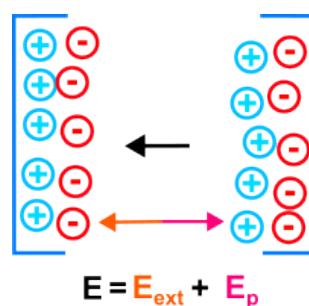
### 7.1 Dielettrici

Nei capitoli precedenti si è introdotta la distinzione tra materiali *conduttori* e *isolanti*. Nella prima categoria definiamo tutte quelle sostanza che hanno un grande numero di elettroni liberi di muoversi all'interno della materia (per esempio i metalli); nel dettaglio vuol dire che ci sono elettroni che non sono legati a nessun nucleo (nei metalli il reticolo che definisce la struttura della materia è formato da ioni).

Gli isolanti, vengono anche detti *dielettrici* e a differenza dei precedenti la maggior parte delle cariche hanno dei legami intensi con i nuclei del reticolo, di conseguenza l'unica cosa che possono fare è oscillare in modo limitato attorno all'atomo o molecola in presenza di campi elettrici esterni. Queste variazioni microscopiche causano effetti meno significativi rispetto ai conduttori dove si ha una completa riconfigurazione della distribuzione di carica, ma il sommarsi di questi scostamenti genera degli effetti apprezzabili all'interno del materiale.

#### 7.1.1 Polarizzazione

In presenza di un campo elettrico  $\mathbf{E}_{ext}$  esterno i dielettrici hanno una ridistribuzione parziale delle cariche, tale fenomeno prende il nome di *polarizzazione*. All'interno del materiale si instaura un campo elettrico di polarizzazione  $\mathbf{E}_p$  con direzione opposta al campo elettrico a cui è sottoposto.



$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_p$$

Il campo complessivo che si sviluppa all'intero dell'isolante ha la stessa direzione del campo esterno a cui è sottoposto.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_p \quad (7.1)$$

portando a una lieve riconfigurazione delle cariche.

All'interno del dielettrico è quindi presente un campo elettrico interno  $\mathbf{E}_{int}$ . Siccome le cariche non sono libere di muoversi essendo soggette a forze  $\mathbf{F}_{mezzo}$  di natura atomica, all'interno del materiale si mantiene una condizione statica e di conseguenza la forza di Coulomb generata dal campo interno deve bilanciarsi:

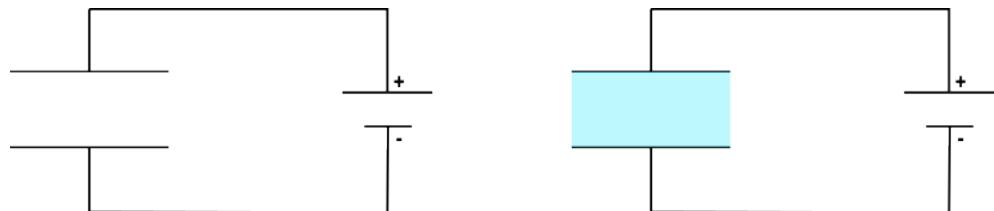
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{mezzo} + q\mathbf{E}_{int} = 0 \quad (7.2)$$

Le forze d'interazione atomica sono di complessa determinazione e dipendono dalla configurazione atomica del materiale. Dato che il campo interno è dato dall'espressione (7.1), si ha che noto il campo esterno per determinarne la sua espressione bisogna conoscere il campo di polarizzazione  $\mathbf{E}_p$ , ma il modo in cui si polarizzano le cariche e quindi  $\mathbf{E}_p$  dipende da  $\mathbf{E}_{int}$  e siccome (7.2) non è di facile risoluzione, abbiamo un problema circolare che non ci permette di determinare il valore del campo interno. Per calcolarlo è necessario passare da un'altra strada.

In generale il mezzo è mediamente neutro e il campo di polarizzazione è nullo in assenza di un campo di stimolo, dovuto a sorgenti esterne.

### 7.1.2 Costante Dielettrica Relativa

Prima di dare una definizione matematica della polarizzazione, introduciamo una grandezza che caratterizza i materiali dielettrici, ottenuta dalle osservazioni sperimentali di Faraday.



Definiamo sperimentalmente un circuito formato da una sorgente di carica (batteria ideale) con una differenza di potenziale  $\Delta\varphi$  e un condensatore planare. Sappiamo dai

## CAPITOLO 7. CAMPI ELETTRICI NEI MEZZI MATERIALI

capitoli precedenti che la capacità di un condensatore si lega alla carica e al potenziale nella relazione

$$C = Q\Delta\varphi$$

Una volta misurata la capacità del primo circuito si procede a realizzarne un secondo identico, in questo caso però il condensatore viene riempito da un materiale dielettrico in tutto il volume compreso tra le armature. Affinchè la differenza di potenziale  $\Delta\varphi$  resti la stessa deve cambiare la quantità di carica che si distribuisce sulle superfici limite del condensatore, la identifichiamo con  $Q'$ .

Di conseguenza si ha che  $Q' > Q$  e di conseguenza di misura una capacità  $C' = Q'\Delta\varphi$  che risulta essere  $C' > C$ . Mettendo a confronto le due capacità facendone il confronto troviamo che

$$\frac{C'}{C} = \frac{Q'}{Q}$$

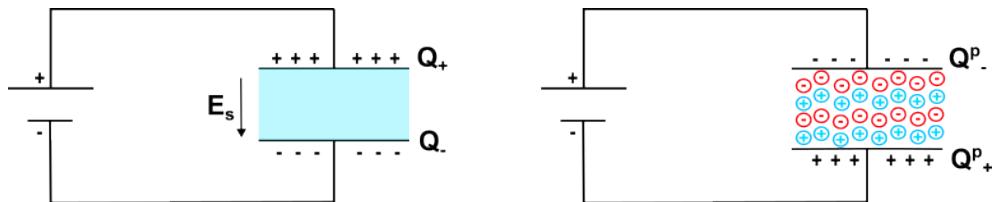
tale rapporto ci dice che il modo in cui cambia la capacità del mezzo non dipende nè da  $\Delta\varphi$  e nemmeno dalla geometria del condensatore, ma si ha una dipendenza solo dal mezzo dielettrico utilizzato.

Questo risultato ottenute per via empirica ci permette di introdurre una grandezza caratteristica dei dielettrici (come si discuterà più avanti, esistono diversi tipi di dielettrici e questa grandezza è caratteristica solo di quelli che risultano essere lineari e omogenei, ovvero il cui comportamento delle cariche è indipendente dalla direzione)

$$\epsilon_r = \frac{C'}{C} \quad (7.3)$$

che prende il nome di **costante dielettrica relativa**.

### Interpretazione Fisica del Fenomeno



## CAPITOLO 7. CAMPI ELETTRICI NEI MEZZI MATERIALI

---

La differenza di potenziale ai capi del condensatore crea un campo elettrico di stimolo

$$\mathbf{E}_s = \frac{Q'}{\varepsilon_0 A} \hat{u}_n$$

che sposta le cariche positive leggermente verso il basso e quelle negative verso l'alto (come nella seconda figura). Se prendiamo un elemento infinitesimo di volume del materiale tra le armature si ha che la distribuzione di carica resta neutra, ma se ci spostiamo verso le piastre del condensatore le cariche non si bilanciano e si ha una polarizzazione  $\pm Q_p$ . Questo eccesso di carica polarizzata sulle armature genera un campo di polarizzazione  $\mathbf{E}_p$  con la stessa direzione di  $\mathbf{E}_s$ , ma verso opposto.

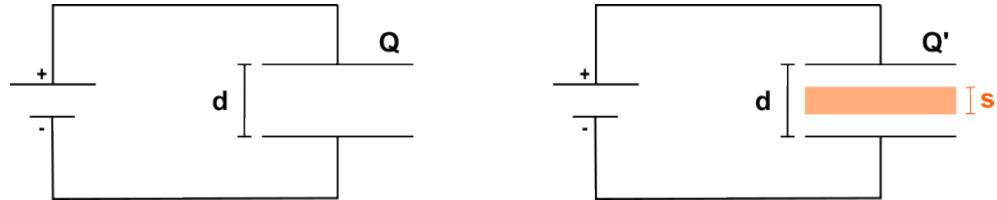
Per quanto definito nel paragrafo precedente il campo elettrico che osserviamo in laboratorio è dato da

$$\mathbf{E} = \frac{Q'}{\varepsilon_0 A} \hat{u}_n + \mathbf{E}_p$$

dove

$$\mathbf{E}_p \sim -\frac{Q_p}{\varepsilon_0 A} \hat{u}_n$$

### Analogia con un conduttore inserito tra le armature



Se prendiamo l'integrale

$$\Delta\varphi = \int_0^d \mathbf{E} \cdot ds$$

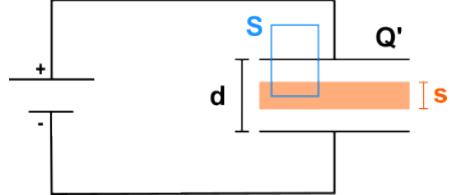
per una configurazione in cui tra le due armature è presente il vuoto si deve avere che  $\Delta\varphi = Qd/\varepsilon_0 A$ , mentre in quella in cui è presente il dielettrico  $\Delta\varphi = Q'd/\varepsilon_0 A + E_p d$ ; affinchè le due cadute di tensione siano le medesime abbiamo bisogno che  $\mathbf{E}_p < 0$  e  $Q' > Q$ . Quindi la carica nel mezzo si deve spostare affinchè si abbia un eccesso sulle superfici.

Questo risultato è analogo a quello che si è ottenuto nel capitolo sull'elettrostatica; se ipotizziamo di inserire tra le armature del condensatore un conduttore di spessore  $s < d$  e

vogliamo mantenere una differenza di potenziale  $\Delta\varphi$  costante, osserveremo una riorganizzazione delle cariche sulle piastre con carica  $Q'$ .

Tale conseguenza è facilmente dimostrabile considerando un circuito  $S$ , che abbraccia sia la parte interna del conduttore che quella esterna al condensatore (come in figura), e calcolandone il flusso del campo elettrico attraverso.

$$\phi_S(\mathbf{E}) = 0$$



e quindi possiamo concludere che internamente non è presente carica  $Q_{int} = 0$ . Dato che internamente non è possibile avere della carica questa deve per forza essere distribuita sulle superfici limite del conduttore e del condensatore, infatti sul conduttore si ha che  $Q_{ind} = -Q'$ . Nelle regioni interne al condensatore in cui non è presente il conduttore si misura in modulo un campo elettrostatico

$$E_1 = E_2 = \frac{Q'}{\varepsilon_0 A} \frac{d-s}{2}$$

e quindi una differenza di potenziale

$$\Delta\varphi = \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q'}{\varepsilon_0 A} (d-s)$$

Confrontando la carica  $Q'$  con quella  $Q$  nel caso in cui tra le armature sia presente il vuoto si ha che

$$Q' = Q \frac{d}{d-s} > Q$$

Da questa dimostrazione, possiamo vedere come l'esperimento con un conduttore sia un caso limite per di un dielettrico in cui la carica di polarizzazione indotta coincide con la carica esterna. Se espandiamo il conduttore in tutto lo spazio del condensatore (come con il dielettrico),  $s \rightarrow d$ , abbiamo che la carica  $Q' \rightarrow \infty$  e usando la definizione di costante dielettrica relativa si ha che  $\mathcal{E}_r \rightarrow \infty$ .

Un ulteriore informazione che possiamo ottenere da questa analogia è la distinzione tra che cosa è un conduttore e che cosa è un dielettrico (isolante), definiamo dunque:

1. *conduttore*, tutti quei mezzi per cui  $\mathcal{E}_r \rightarrow \infty$  e per cui si ha induzione totale  $Q_{ind} = -Q'$ ;

2. *dielettrico*, tutti quei mezzi per cui  $1 < \mathcal{E} < \infty$  e si ha una polarizzazione delle cariche dove  $|Q_p| < |Q'|$

Dato che  $Q' > Q$  si ha che  $Q'/Q > 1$  e quindi possiamo concludere che  $\mathcal{E}_r > 1$  ha un limite inferiore. La variabilità della costante dielettrica dipende dalle proprietà microscopiche atomiche e molecolari di cui è composto il mezzo.

La descrizione macroscopica che abbiamo dato del fenomeno è comune a tutti i materiali ed è sempre riconducibile all'interpretazione in termini di polarizzazione, ovvero

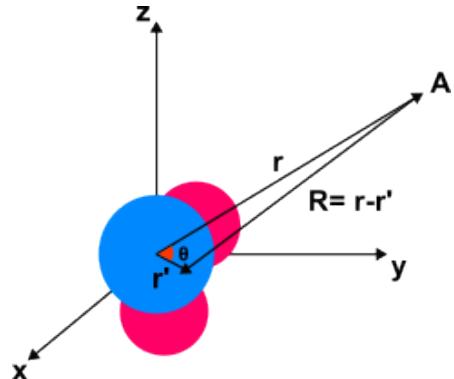
1. le cariche non sono libere (non possono essere rimosse toccando un mezzo polarizzato con un conduttore, al contrario di questi ultimi);
2. il mezzo ha una distribuzione di carica positiva e negativi con "baricentri" differenti, anche se rimane globalmente neutro.

*Osservazione.* Nei prossimi capitoli vedremo come per campi variabili che cambiano rapidamente lo spostamento delle cariche di polarizzazione può non essere necessariamente in fase con il campo elettrico.

## 7.2 Sviluppo in Multipoli del Potenziale Elettrostatico

Diamo una descrizione generale del campo elettrico dovuto ad una distribuzione di carica  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ . Consideriamo un volume infinitesimo  $d\nu$  identificato dal vettore posizione  $\mathbf{r}'$  e calcoliamo il potenziale in un punto A nello spazio esterno alla distribuzione, posto a una distanza  $\mathbf{r}$  dal sistema di riferimento.

Possiamo esprimere  $\mathbf{R}$ , il vettore che identifica la posizione del volume rispetto al punto A, in funzione di  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . Per farlo usiamo la legge dei coseni considerando un angolo  $\theta$  compreso tra  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ :



$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} \quad (7.4)$$

L'espressione del potenziale nel punto A è data da

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} d\nu'$$

e sostituendo (7.4) al suo interno si ha

$$\varphi_A = \int_V \rho d\nu' [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta]^{-1/2} \quad (7.5)$$

Siamo interessati al caso in cui  $r \gg r'$ , un caso concreto è quando vogliamo misurare il campo macroscopico a grande distanza, dovuto alla distribuzione di carica di atomi o molecole.

Riscriviamo (7.4) raccogliendo rispetto a  $r^2$

$$R = r \left[ 1 + \left( \frac{r'^2}{r^2} \right) - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta \right]^{1/2}$$

per le condizioni definite possiamo pensare ad R come a una funzione

$$R = [1 + \varepsilon]^{1/2} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

e quindi possiamo sviluppare con Taylor al secondo ordine rispetto alla variabile  $\varepsilon = \left( \frac{r'^2}{r^2} \right) - 2 \frac{r'}{r} \cos\theta$

$$\frac{1}{R} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \dots \right) = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos\theta + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \frac{3\cos\theta - 1}{2} + \mathcal{O} \left( \frac{r'}{r} \right)^3 \right]$$

Dato che  $r$  non dipende dalla variabile d'integrazione, sostituendo lo sviluppo in (7.5) troviamo

$$\begin{aligned} \varphi_A &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') d\nu' + \frac{1}{r^2} \int_V r' \cos\theta \rho(\mathbf{r}') d\nu' + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{k_0}{r} + \frac{k_1}{r^2} + \frac{k_2}{r^3} + \dots \right] \end{aligned} \quad (7.6)$$

dove con  $k_0, k_1, k_2, ecc\dots$ , abbiamo indicato gli integrali corrispondenti alla potenza di  $r$ . Per proseguire con lo sviluppo prendiamo quanto segue come postulato senza verificarlo:

*Il potenziale in un punto lontano  $r \gg r'$  qualiasi è determinato dal primo termine non nullo dello sviluppo di multipolo.*

Il primo termine dello sviluppo prende il nome di **momento di monopolio**:

$$K_0 = \int_V \rho(\mathbf{r}') d\nu' = Q_0 \quad (7.7)$$

dove  $Q_0$  è la carica netta delle distribuzioni, ovvero corrisponde al potenziale di una carica puntiforme. Se abbiamo la stessa quantità di cariche positive e negative, come nel caso delle molecole neutre,  $K_0$  sarà nullo.

*Osservazione.* Dal postulato definito, possiamo assumere che per distanze grandi il termine  $K_0$  prevarrà su tutti gli altri termine dello sviluppo e quindi il campo elettrico sarà quello di una carica puntiforme.

Il secondo termine è chiamato **momento di dipolo elettrico**:

$$K_1 = \int_V r' \cos \theta \rho(\mathbf{r}') d\nu' \quad (7.8)$$

poichè  $r' \cos \theta = z'$ , questo termine misura lo spostamento relativo delle cariche verso A. Se  $K_0 = 0$ , il termine  $K_1$  è dominante e questo avviene nel caso di un materiale dielettrico neutro e polarizzato.

### 7.2.1 Potenziale di Dipolo

Siccome siamo interessati ai materiali dielettrici possiamo tranquillamente porre  $K_0 = 0$  e concentrarci sullo studio di  $K_1$ . Osserviamo che il termine  $r' \cos \theta$  è la proiezione di  $r'$  lungo la direzione del vettore  $\mathbf{r}$  e possiamo riscriverlo come

$$\mathbf{r}' \cos \theta = \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{u}}_r$$

sostituendo in  $K_1$  si ha che il potenziale arrestato al primo ordine nello sviluppo di multipolo diventa

$$\varphi_A = \frac{\hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) d\nu' \quad (7.9)$$

Il secondo termine del prodotto scalare coincide con un vettore le cui dimensioni sono quelle di una carica per una lunghezza. Questo vettore viene indicato con il termine  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}) d\nu' \quad (7.10)$$

e usando questa espressione possiamo riscrivere l'equazione (7.9) come:

$$\varphi_A(\mathbf{r}) = \frac{\hat{u}_r \cdot \mathbf{p}}{r^2} \quad (7.11)$$

Il termine di dipolo di una distribuzione di carica è completamente determinato da  $\mathbf{p}$ . Di conseguenza il potenziale e il campo elettrico sono equivalenti a quello di una coppia di cariche uguali ed opposte, separate da una distanza  $\delta$ .

### Esempio

Consideriamo due cariche puntiformi  $q^\pm = \pm q$  rispettivamente individuate da un raggio vettore  $\mathbf{r}_\pm$  uscente dall'origine di un sistema di riferimento; la distanza tra di esse è data da  $\mathbf{k} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ . Utilizzando la funzione  $\delta$  di Dirac (che ricordiamo non essere realmente una funzione, ma una distribuzione), definiamo la distribuzione di carica nel seguente modo

$$\rho_\pm(\mathbf{r}) = \pm q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\pm)$$

esprimendo la nostra assenza d'informazione sul modo in cui è fatta la distribuzione di carica di un punto. Il momento di dipolo associato è dato da

$$\mathbf{p} = \int_V q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_+) d\mathbf{r} - \int_V q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_-) d\mathbf{r} = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$$

Per calcolare il dipolo di una distribuzione neutra è sufficiente conoscere la carica positiva e negativa totale e la separazione tra il centro di carica delle distribuzioni e quindi studiare il campo di una distribuzione neutra usando la relazione (7.11) e il fatto che  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ .

Usando le coordinate sferiche troviamo che

$$\begin{cases} \mathbf{E}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \hat{u}_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{u}_r \\ \mathbf{E}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \hat{u}_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{u}_\theta \end{cases}$$

Il campo elettrico lontano dal dipolo ( $r \gg \delta$ ) decresce come  $\mathbf{E} \sim 1/r^3$ .

*Osservazione.*

1. Il campo di un dielettrico polarizzato è dato dalla sovrapposizione di campi di dipolo
2. Nella nostra descrizione di dipolo magnetico per un mezzo dielettrico abbiamo dato una descrizione macroscopica del fenomeno, ci rimane da descrivere come il comportamento dei dipoli elementari determini la polarizzazione del mezzo che si osserva macroscopicamente.

### 7.3 Azione Meccanica di un Campo Elettrico su un Dipolo

#### 7.3.1 Campo Elettrico Uniforme

Supponiamo che  $+q$  e  $-q$  siano due cariche tenute insieme meccanicamente in modo tale che la loro distanza  $\delta$  resti costante (un esempio sono le molecole polari), sfruttiamo l'equivalenza  $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\delta}$  per descrivere l'interazione del dipolo con un campo elettrostatico  $\mathbf{E}$  uniforme.

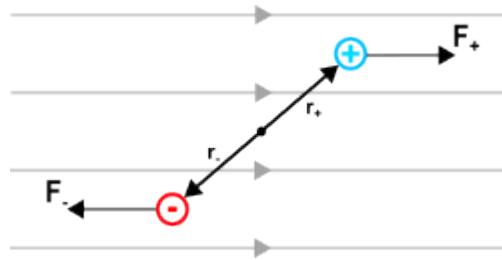
*Osservazione.* Ad una distribuzione di carica ridotta ad una coppia di cariche  $\pm q$  separate da una distanza  $\boldsymbol{\delta}$  corrisponde un solo momento di dipolo  $\mathbf{p}$ ; ad un dipolo  $\mathbf{p}$  corrisponde un numero infinito di rappresentazioni  $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\delta}$ . Ogni risultato può dipendere solo dal prodotto  $q\boldsymbol{\delta}$  e non da  $q$  e  $\boldsymbol{\delta}$  separatamente.



Su ciascuna carica del dipolo agisce una forza di Coulomb  $\mathbf{F}_{\pm} = \pm q\mathbf{E}$ , con stessa direzione, ma verso opposto. Dando un'descrizione della fisica dal centro di massa del dipolo si ha che la risultante delle forze agenti è nulla

$$\mathbf{F}_{cm} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = 0$$

Anche se questa risulta essere uguale a zero è presente un momento della forza che agisce sul sistema e lo mette in rotazione. Posti come bracci delle rispettive forze i vettori posizione  $\mathbf{r}_+$  e  $\mathbf{r}_-$  con origine nel centro di massa (come in figura) si ha che il momento torcente totale è dato dall'equazione :



$$\tau = \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- = (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \times q\mathbf{E} = q\delta \times \mathbf{E}$$

e quindi possiamo riassumere  $\tau$  come:

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (7.12)$$

il cui valore è indipendente dalla scelta del polo.

Il momento della forza esercitato sul dipolo rigido risulta essere nullo quando questi si allineano nella direzione campo elettrico, dando luogo al fenomeno della *polarizzazione*.

*Osservazione.* Notare che in generale il campo  $\mathbf{E}$  considerato per definire (7.12) è il campo risultante dalla somme di tutte le cariche presenti nel sistema: distribuzione esterna e altri dipoli

### Energia Potenziale

L'orientamento del dipolo in cui il momento  $\mathbf{p}$  è parallelo al campo elettrico  $\mathbf{E}$  corrisponde alla configurazione in cui l'energia è al livello più basso; se vogliamo cambiarne la disposizione dobbiamo compiere del lavoro contro il campo elettrico. Ipotizziamo di voler ruotare il dipolo di un angolo  $\theta_0$ , considerando il contributo dato dal lavoro rispetto alla carica positiva si ha

$$\Delta U_{\pm} = - \int_0^{\Delta s} \mathbf{F}_{\pm} \cdot d\mathbf{s} = qE \frac{\delta}{2} (1 - \cos \theta)$$

dove  $\Delta s = \delta/2(1 - \cos \theta)$ . Il lavoro complessivo tenendo conto anche della carica negativa è infinite dato da

$$\Delta U = \Delta U_+ + \Delta U_- = 2\Delta U_+ = q\delta E(1 - \cos \theta) = pE(1 - \cos \theta)$$

In modo del tutto analogo, possiamo ricavare il lavoro rispetto al momento della forza agente sul dipolo:

$$\Delta U = - \int_0^{\theta_0} \tau d\theta = - \int_0^{\theta_0} pE \sin \theta d\theta = pE(1 - \cos \theta_0)$$

Poichè l'energia potenziale è definita a meno di una costante, possiamo esprimere la come

$$U = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (7.13)$$

dove questa assume valore minimo quando  $\mathbf{p}$  è parallela a  $\mathbf{E}$  e massimo quando  $\mathbf{p}$  è antiparallela al campo elettrico.

*Osservazione.* Per un dipolo rigido non si ha bisogno di altri contributi all'energia potenziale definita in (7.13), per vederlo possiamo vedere i termini

$$U_{\pm} = \mp \int_{\infty}^{r_{\pm}} q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -dW_{\pm}$$

al lavoro necessario per portare le cariche  $\pm q$  da  $\infty$  ad una distanza  $r_{\pm}$  dal centro di massa del dipolo. Inoltre dobbiamo tenere conto dell'energia d'interazione tra le cariche portate ad una distanza relativa  $\delta$ :

$$U_{+-} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\delta}$$

Complessivamente la configurazione ha un energia potenziale

$$U = - \int_{\infty}^{r_{+}} q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\infty}^{r_{-}} q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\delta}$$

Il termine  $U_{+-}$  è l'energia di configurazione del dipolo (auto-energia), questa dipende da  $q$  e  $\delta$  separatamente, esiste anche se campo elettrico  $\mathbf{E}$  esterno è nullo ed infine per un dipolo rigido questa risulta essere costante; proprio per quest'ultima proprietà possiamo considerarlo come un termine trascurabile e quindi scrivere l'energia come in (7.13).

Se il dipolo risulta avere una distanza non tra le cariche variabile si ha che  $\mathbf{p} \sim \mathbf{E}$  e

l'energia potenziale è data da

$$U = -\frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (7.14)$$

### 7.3.2 Dipolo Non Rigido Soggetto ad un Campo Elettrico Non Uniforme

Se il campo elettrico  $\mathbf{E}$  non è uniforme, come per esempio quello di una carica puntiforme, dato un dipolo privo di vincoli di rigidità, si ha che le cariche costituenti vengono tirate dall'intensità del campo e all'interno dell'espressione dell'energia potenziale compare un termine d'interazione tra le cariche.

Per dimostrarlo osserviamo che la forza totale agente sul dipolo è non nulla rispetto al caso in cui il campo  $\mathbf{E}$  era uniforme

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)] = q\Delta\mathbf{E}$$

dove  $\Delta\mathbf{E}$  è la variazione del campo elettrico sulla distanza  $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$ . Per ciascuna coordinata cartesiana, la variazione può essere espressa tramite il differenziale:

$$\Delta E_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_x}{\partial z} \Delta z = \nabla E_x \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\Delta E_y = \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_y}{\partial z} \Delta z = \nabla E_y \cdot \boldsymbol{\delta}$$

$$\Delta E_z = \frac{\partial E_z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_z}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta z = \nabla E_z \cdot \boldsymbol{\delta}$$

e di conseguenza ciascuna componente della forza è esprimibile come

$$\begin{cases} \mathbf{F}_x = \mathbf{p} \cdot \nabla E_x \\ \mathbf{F}_y = \mathbf{p} \cdot \nabla E_y \iff \mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \\ \mathbf{F}_z = \mathbf{p} \cdot \nabla E_z \end{cases} \quad (7.15)$$

La forma compatta espressa a destra è una scrittura simbolica che raggruppa tre relazioni scalari per le componenti.

### Esempio

Consideriamo un dipolo che interagisce con una carica puntiforme di un qualsiasi segno; poichè i dipoli tendono ad allinearsi al campo elettrico, il momento di dipolo e il gradiente di  $\nabla E$  sono discordi in verso e di conseguenza si ha che la forza tra un dipolo e una carica puntiforme è sempre attrattiva a prescindere dal segno.

## 7.4 Polarizzazione dei Mezzi

L’interazione delle cariche legate di un mezzo con un campo elettrico  $\mathbf{E}$  ne determinano la sua polarizzazione. A livello atomico o molecolare compare un dipolo  $\langle \mathbf{p} \rangle$  proporzionale al campo stesso.

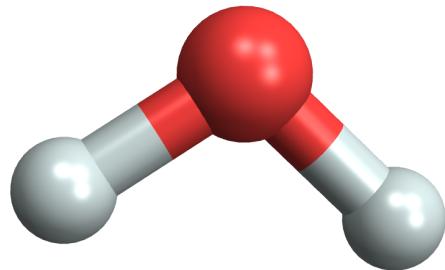
Sperimentalmente possiamo osservare due tipologie di mezzi:

1. polari: avviene per orientamento delle molecole, che per natura hanno dei baricentri di carica non allineati e sono dotate di un momento di dipolo elettrico elementare;
2. apolari: sono la maggior parte dei mezzi e la polarizzazione avviene per deformazione atomica.

### 7.4.1 Mezzi Polari

Un esempio di mezzo polare è dato dall’acqua le cui molecole  $\mathbf{H}_2\mathbf{O}$  presentano un’asimmetria di carica, generando un momento di dipolo permanente (rigido) dell’ordine di  $\mathbf{p}_0 \sim 6.1 \times 10^{-30}$ .

In assenza di un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , all’interno della materia le molecole (e quindi il momento di dipolo) hanno un’orientazione casuale e quindi il valore medio del momento in volume è  $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$ . Nel caso in cui compaia un campo elettrico  $\mathbf{E}_{ext}$  di stimolo all’esterno del mezzo, si ha un loro allineamento parziale contrastato dall’agitazione termica, che per un dato volume porta ad avere un momento di dipolo medio  $\langle \mathbf{p} \rangle$  proporzionale al campo elettrico complessivo  $\mathbf{E}$ .



Per esempio se consideriamo un campo elettrico  $\mathbf{E} = 10^6 \frac{V}{m}$ , il lavoro necessario ad orientare le cariche da ortogonali a parallele è dato da

$$\Delta U_{max} = 2p_0 E \simeq 10^{-23} J \simeq 10^{-4} eV \simeq 0,1 meV$$

L'agitazione termina per un volume d'acqua a temperatura ambiente è data da  $k_B T \sim 25 meV$ . Dunque si ha che il lavoro necessario ad orientare le cariche è 1/100 dell'energia termica nel sistema, questo vuol dire che i dipoli subiscono una variazione minima, ma che statisticamente per la loro molitudine diventa significativa. Infatti il momento di dipolo medio ortogonale è  $\langle \mathbf{p}_\perp \rangle = 0$ , mentre quello parallelo al campo è  $\langle \mathbf{p} \rangle = p_0 \langle \cos \theta \rangle \neq 0$ , ottenendo così un allineamento parziale.

Se in un volume consideriamo  $n_0$  molecole e di queste  $n_i$  hanno un certo momento di dipolo  $p_i$  con angolo  $\theta_i$ , il momento di dipolo medio è dato da

$$\langle p \rangle = \frac{1}{n_0} \sum_i n_i p_i = \frac{1}{n_0} \sum_i n_i p_0 \cos \theta_i$$

che nel limite al continuo assume l'espressione

$$\langle p \rangle = \frac{1}{n_0} \int n(\theta) p_0 \cos \theta d\Omega \quad (7.16)$$

Utilizzando la teoria cinetica dei gas (meccanica statica classica), la distribuzione di probabilità di trovare una molecola tra energia  $U$  e  $U + dU$  è data dalla distribuzione di Boltzmann:

$$n = n_0 e^{-U/k_B T}$$

Dati che l'energia per singolo dipolo  $U_i \ll kT$  dell'energia termica, possiamo esprimere il fattore di Boltzmann in serie di Taylor al primo ordine

$$e^{-U/k_B T} \sim 1 + \frac{p_0 E \cos \theta}{k_B T}$$

L'equazione (7.16) esprimendo l'angolo solido  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  e sostituendo al suo interno lo sviluppo, risulta essere proporzionale a

$$\langle p \rangle \propto \frac{p_0^2}{k_B T} E$$

questo ci dice che la polarizzazione media è proporzionale al campo elettrico (mezzo lineare)

*Osservazione.* Se il campo elettrico è molto intenso ( $\gg 10^9 \text{ V/m}$ ) e si è a bassa temperatura affinché  $k_b T \leq U$ , l'orientamento dei dipoli può diventare completo. In questo limite il comportamento non è lineare e  $\langle p \rangle$  raggiunge un valore di saturazione.

#### 7.4.2 Polarizzazione Atomica: Dipoli Indotti

La polarizzazione per deformazione è presente in tutti i mezzi (anche polari) ed è associata al fatto che ogni atomo è rappresentabile come una distribuzione di cariche negative (elettroni) al cui centro è presente della carica positiva (nucleo).



Introducendo un campo elettrico esterno  $\mathbf{E}$  la carica positiva si sposta di un tratto  $\Delta z$  rispetto al centro della distribuzione di carica negativa, in questo modo. viene a formarsi un momento di dipolo elettrico

$$p = Q\Delta z$$

Il protone raggiunge una condizione di equilibrio quando la risultante delle forze diventa nulla

$$\mathbf{F}_p = q^+ \mathbf{E} + q^+ \mathbf{E}_{el} = 0$$

dove  $\mathbf{E}_{el}$  è il campo interno dovuta alla distribuzione di carica dell'elettrone, che in prima approssimazione possiamo assumere sferica. Il modulo del campo elettrico dato dalla nube elettronica è calcolabile usando la legge di Gauss:

$$E_{el}(\Delta z) 4\pi(\Delta z)^2 = \frac{4}{3}\pi(\Delta z)^3 \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{el}(\Delta z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a^3}$$

dove  $a$  è il raggio atomico e  $a = 1 \text{ \AA}$ . Infine dalla condizione di equilibrio deduciamo che campo elettrico di stimolo e campo interno coincidono in modulo e quindi la polarizzazione si lega al campo esterno come

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E} \quad (7.17)$$

Questo modello primitivo fornisce una stima corretta dell'ordine di grandezza della polarizzabilità atomica:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \quad (7.18)$$

dove il fattore  $\alpha$  prende il nome di **polarizzabilità**.

Le polarizzazioni atomiche sono deboli, ma misurabili; questo è dovuto al fatto che i momenti di dipolo sono tutti paralleli e in macro regioni sono presenti grandi quantità di atomi o molecole.

Fino a questo punto abbiamo dato una descrizione della polarizzazione di un singolo atomo e quindi non del mezzo intero che ne è costituito; per fornire una descrizione macroscopica del fenomeno, partendo dai risultati microscopici, introduciamo una grandezza vettoriale di polarizzazione

$$\mathbf{P} = \mathcal{N} \mathbf{p} \quad (7.19)$$

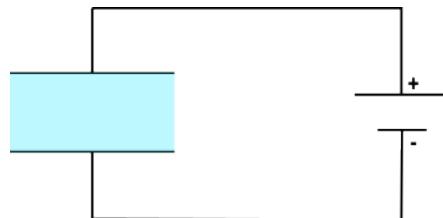
dove il termine  $\mathcal{N}$  rappresenta la densità di dipoli per unità di volume, mentre  $\mathbf{p}$  è il momento di dipolo elementare.  $\mathbf{P}$  prende il nome di **vettore di polarizzazione** e rappresenta il momento di dipolo per unità di volume. Dimensionalmente coincide con la densità di carica superficiale:

$$[P] = \frac{C}{m^2}$$

Ad ogni volume elementare  $d\tau$  del mezzo possiamo associare un momento di dipolo

$$\mathbf{p}_\tau = \mathbf{P} d\tau$$

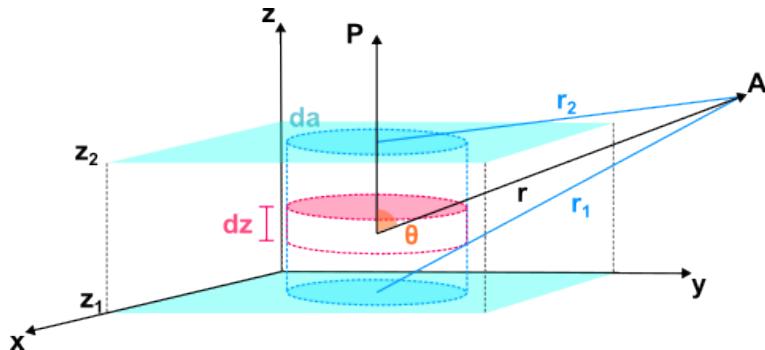
Usando questa informazione immaginiamo di assemblare una lastra uniforme di materiale dielettrico polarizzato e di volerne calcolare il campo elettrico  $\mathbf{E}$  che osserviamo nel sistema del laboratorio se la collegiamo ad un alimentatore. Dai paragrafi precedenti sappiamo che il campo elettrico complessivo è dato



da

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_p$$

dove  $\mathbf{E}_s$  è il campo elettrico di stimolo ottenuto nel caso in cui tra le piastre del condensatore è presente il vuoto. Dato che  $\mathbf{E}_s$  è uniforme e  $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$  anche la polarizzazione è uniforme nel mezzo. Per calcolare il campo  $\mathbf{E}_p$  in un punto  $A$  esterno al dielettrico, definiamo un cilindro tra le due armature la cui area della base è  $da$  e ne isoliamo un volume con altezza  $dz$ .



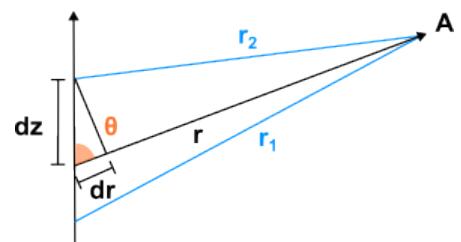
Siccome conosciamo l'espressione del potenziale elettrico nel punto  $A$  in funzione di un dipolo elettrico elementare, possiamo calcolare

$$d\varphi_A = \frac{\mathbf{p}_r \cdot \hat{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P da dz \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7.20)$$

Integrando rispetto alla variabile  $z$  l'equazione (7.20) diventa

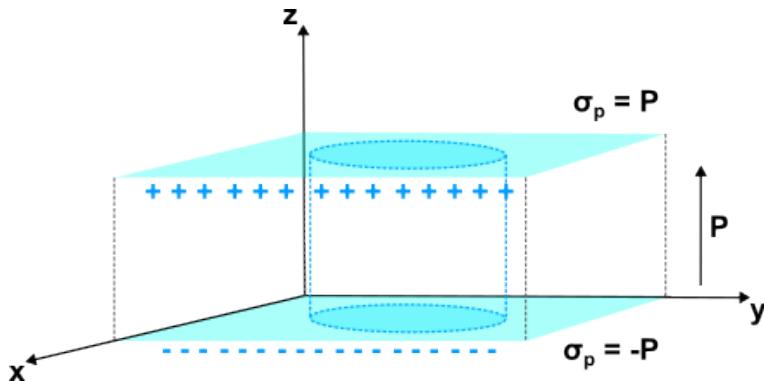
$$d\varphi_A = \frac{P da}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz \cos \theta}{r^2}$$

usando la relazione  $dz = -dr \cos \theta$  esprimiamo l'integrale rispetto alla coordinata radiale  $r$ :



$$d\varphi_A = -\frac{P da}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{P da}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (7.21)$$

Il termine  $Q_P^\pm = \pm P da$  è equivalente alla carica di polarizzazione sulla superficie superiore o inferiore della colonna. Estendendo all'intera superficie, il potenziale è equivalente a quello generato da una distribuzione superficiale doppia di carica con densità  $\sigma_P = \pm P$ .



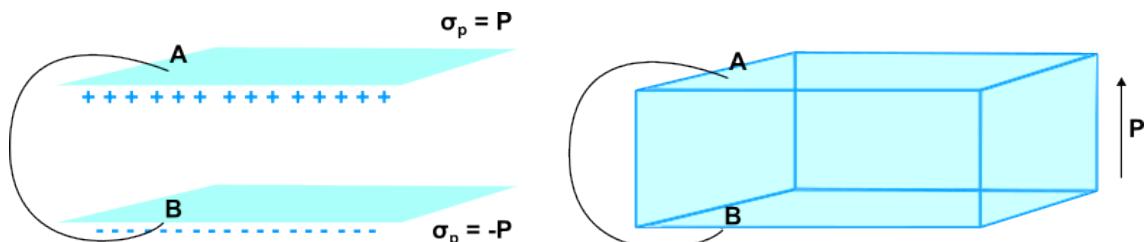
All'interno di ciascuna colonna i dipoli elementari  $\mathbf{p} = \mathbf{P}d\tau$  hanno cariche uguali e contrarie sulle superfici opposte del cilindro. Internamente la carica nel mezzo è neutro e rimane solo il contributo al campo sulla superficie esterna. Di conseguenza abbiamo un campo elettrico all'interno del materiale, che possiamo assumere essere dipendente da una distribuzione di carica superficiale di polarizzazione e utilizzare gli strumenti dell'elettrostatica per calcolarlo. Utilizzando la legge di Gauss per una configurazione di carica data da due armature parallele, tra cui è presente il vuoto, abbiamo che il campo interno è dato da

$$\mathbf{E}_{void} = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} \hat{u}_n$$

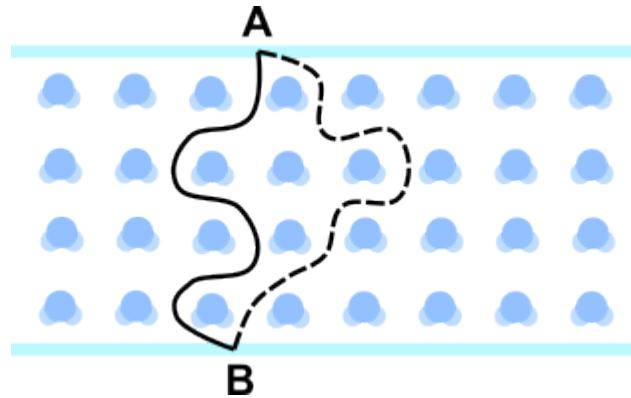
e quindi il potenziale associato alle due piastra poste a distanza  $d$  è pari a

$$\Delta\varphi_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}_{void} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} d = \frac{P}{\varepsilon_0} d \quad (7.22)$$

Potremmo domandarci se l'equazione (7.22) sia corretta, ovvero che non esista un cammino particolare che unisca i punti A e B delle rispettive armature, per cui si misuri una differenza di potenziale differente. Se consideriamo un cammino esterno come in figura tra i punti A e B



siccome il campo elettrico esterno è il medesimo anche la differenza di potenziale è la medesima. Diverso è il discorso per il campo elettrico all'interno, dato che la lastra è composta da milioni di atomi con campi diretti in modo del tutto casuale; siccome però il campo elettrico è una grandezza conservativa  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , presi due punti A e B con un cammino passante all'interno del materiale, si deve avere lo stesso valore di  $\Delta\varphi_{AB}$  qualsiasi questo sia.



Sia che si scelga un percorso interno o esterno, la differenza di potenziale misurata è sempre la stessa data da (7.22), di conseguenza per un mezzo polarizzato la differenza di potenziale all'interno del mezzo è

$$\Delta\varphi_{AB} = \int_A^B \mathbf{E}_p \cdot d\mathbf{s} = \frac{P}{\varepsilon_0}d$$

Localmente il campo elettrico non è uniforme dato che cambia in base alla distanza a cui ci si trova dal campo prodotto da atomi e/o molecole, ma se consideriamo il campo medio su un volume, questo è pari a

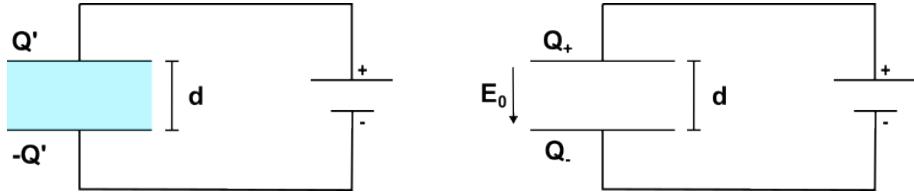
$$\langle \mathbf{E}_p \rangle = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{E}_p \cdot d\tau = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad (7.23)$$

Il campo complessivo sarà dato dalla relazione

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_p = \frac{\Delta\varphi}{d} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

Siccome  $\mathbf{P}$  dipende da  $\Delta\varphi$  e per conoscere  $\Delta\varphi$  devo prima aver calcolato  $\mathbf{P}$ , il problema è circolare. Per calcolare il vettore di polarizzazione  $\mathbf{P}$  abbiamo due strategie, una è quella di conoscere densità del materiale e valore dei dipoli elementari per ricostruirlo e la seconda è la sua misurazione per via macroscopica. Nel secondo caso per determinarlo confrontiamo

la configurazione rispetto al vuoto con quella in cui è presente un mezzo dielettrico, come nel caso delle osservazioni empiriche di Faraday.



Possiamo porre  $\mathbf{P}$  in relazione a  $\mathbf{E}$  tramite la relazione fenomenologica  $Q = \varepsilon_r Q_0$  dove  $Q_0$  è la carica che corrisponde ad un condensatore con la stessa geometria del dielettrico, ma nel vuoto e a partì di potenziale  $\varphi_{12}$ .

Nel configurazione con il dielettrico e senza il campo è dato da

$$E = \frac{\Delta\varphi_{12}}{d} = \frac{Q'}{\varepsilon_0 A} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad \text{e} \quad E_0 = \frac{\Delta\varphi_{12}}{d} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A}$$

il cui primo elemento lo possiamo riscrivere come

$$E = \frac{\varepsilon_r Q_0}{\varepsilon_0 A} - \frac{P}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0}$$

dato che  $E = E_0$  possiamo ricavare il vettore potenziale in funzione del campo  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E} = \varepsilon_0\chi_E\mathbf{E} \quad (7.24)$$

dove il termine  $\chi_E = \varepsilon_r - 1$  prende il nome di **suscettività elettrica** di un mezzo. Il vettore macroscopico di polarizzazione è legato al campo elettrico da un fattore empirico  $\varepsilon_r$  che è possibile misurare in un sistema a due piatti paralleli e che caratterizza il mezzo.

Mettendo in relazione le due espressioni che abbiamo dato di  $\mathbf{P}$  troviamo un secondo modo con cui esprimere  $\chi_E$ :

$$\mathcal{N}\mathbf{p} = \mathcal{N}\alpha\mathbf{E} = \varepsilon_0\chi_E\mathbf{E}$$

e segue che

$$\chi_E = \frac{\alpha\mathcal{N}}{\varepsilon_0} \quad (7.25)$$

collegando così grandezze microscopiche con quelle macroscopiche.

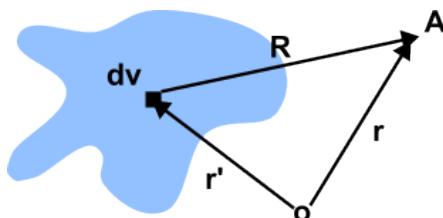
*Osservazione.*

1. Il campo  $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/\epsilon_0$  è specifico della geometria che si è considerata, vale per alcune geometrie notevoli, ma non per tutte.
2.  $\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_E\mathbf{E}$  vale per mezzi isotropi e lineari; in casi più generali  $\chi_E = \chi_E(\mathbf{E})$  e possono esserci anche fenomeni di anisotropia.

## 7.5 Relazione Generale tra il Campo di Polarizzazione e il Vettore di Polarizzazione

Consideriamo un dielettrico con una polarizzazione qualsiasi e una qualsiasi geometria.

Per un volume infinitesimo  $d\nu$  il potenziale nel punto A per un dipolo è:



$$d\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p} \cdot \hat{u}_R}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{u}_R}{R^2} d\nu$$

Integrando sul volume del dielettrico

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{u}_R}{R^2} d\nu \quad (7.26)$$

*Osservazione.*

1. l'espressione è vero anche per A all'interno del volume del dielettrico, intesa come media su un volume microscopicamente grande e macroscopicamente piccolo;
2. lo sviluppo in multipoli richiede che  $r \gg r'$ : condizione che risulta essere macroscopicamente vera dappertutto, eccetto nel volume  $d\nu$  per il dipolo  $d\mathbf{p} = \mathbf{P}d\nu$ , ma queste non è rilevante in quanto un dipolo non interagisce con se stesso.

L'espressione (7.26) è completa, ma il significato è più chiaro se rendiamo leggibile il legame con le cariche di polarizzazione, a tal fine usiamo l'identità

$$\nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\hat{u}_R}{R^2}$$

e la proprietà della divergenza di un vettore per uno scalare:

$$\nabla' \left( \frac{\mathbf{P}}{R} \right) = \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) + \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R}$$

Sostituendo in (7.26) l'espressione diventa

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{u}_R}{R^2} d\nu = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) d\nu = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{R} \right) d\nu - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} d\nu \end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di Gauss (o della divergenza) il primo termine può essere tradotto in un integrale di superficie:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}}{R} d\nu \quad (7.27)$$

Il primo termine è identificabile come il potenziale di una distribuzione superficiale di carica con densità

$$\sigma_p \equiv \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (7.28)$$

mentre il secondo termine è il potenziale di una distribuzione volumica di carica con densità:

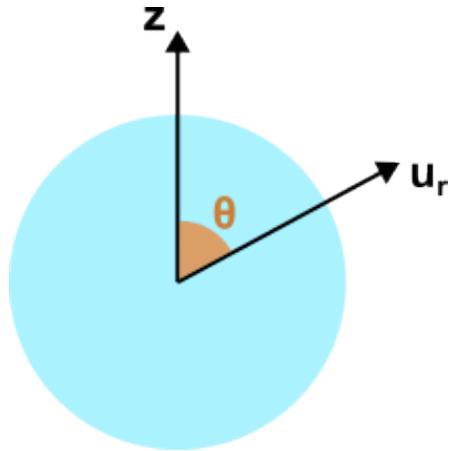
$$\rho_p \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (7.29)$$

con queste definizioni l'equazione (7.27) diventa:

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p da}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p d\nu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7.30)$$

### Esempio 1

Una lastra di dielettrico con polarizzazione uniforme, abbiamo visto che può essere come due armature in parallelo sui cui è presente una densità di carica superficiale  $\sigma_P = \pm P$ , sulla superficie laterale  $\sigma_P = 0$  poiché  $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{a}$ . Inoltre la densità di volume è  $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$  dato che la polarizzazione è uniforme.

**Esempio 2 : Sfera uniformemente polarizzata**


Per dielettrico di forma sferica e uniformemente polarizzato abbiamo che la densità di carica sulla superficie non è uniforme, infatti

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{u}}_r = P \cos \theta$$

In generale  $\sigma_P$  è uniforme se  $\mathbf{P}$  risponde alla geometria del sistema. Inoltre  $\rho_p = 0$ , in configurazioni simmetriche in cui  $\rho = 0$  nel mezzo.

Possiamo delineare le seguenti casistiche per quando la densità di volume di un dielettrico è nulla:

$$\rho_p = \nabla \cdot \mathbf{P} = 0 \iff \mathbf{P} \propto \begin{cases} \text{uniforme in coordinate cartesiane} \\ \frac{\hat{\mathbf{u}}_r}{r} \text{ in coordinate cilindriche} \\ \frac{\hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} \text{ coordinate sferiche} \end{cases}$$

In un dielettrico la carica legata è nulla (dielettrico neutro) e la carica in ogni porzione di volume è il flusso di  $-\mathbf{P}$ :

$$Q_p^V = \int_V \rho_p d\nu = - \int_V \nabla' \cdot \mathbf{P} d\nu = - \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = - \int_S \sigma_p da = -Q_p^S$$

## 7.6 Legge di Gauss (per i Dielettrici)

Il flusso del campo elettrico  $\mathbf{E}$  dipende dalla carica totale netta racchiusa da una superficie. Nel caso dei dielettrici possiamo utilizzare la legge di Gauss aggiungendo un termine in più che tiene conto delle cariche di polarizzazione:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (\rho + \rho_p) d\nu$$

e in forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p)$$

Siccome  $\rho_p$  non è nota a priori, ma dipende da  $\mathbf{E}$ , conviene riformulare l'espressione rispetto alla polarizzazione usando la relazione  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  in questo modo:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

Definiamo la grandezza vettoriale:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (7.31)$$

che prende il nome di **vettore di induzione elettrica** (o campo elettrico ausiliario). Per un mezzo dielettrico la legge di Gauss può essere riformulata assume la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (7.32)$$

La divergenza di  $\mathbf{D}$  dipende solo dalle cariche libere presenti nel mezzo ( che possiamo vedere come le sorgenti del campo di stimolo).

### 7.6.1 Relazione Costitutiva

La legge di Gauss (7.32) non è sufficiente per il risolvere il problema dell'elettrostatica in forma completa. Per ricavare  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\sigma_p$  e  $\rho_p$ , è necessario conoscere la relazione empirica:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

detta **relazione costitutiva**.

In mezzi omogenei e lineari, abbiamo tradotto la relazione empirica come

$$\varepsilon_r = \frac{C'}{C}$$

nella relazione tra vettore di polarizzazione e campo elettrico:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_E \mathbf{E} \quad \text{dove} \quad \chi_E = \varepsilon_r - 1$$

Dunque (7.31) si traduce in

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{E}$$

dove  $\epsilon$  prende il nome di **costante dielettrica del mezzo**.

### 7.6.2 Equazione di Maxwell per L'elettrostatica

Tenendo conto di quanto definito per i mezzi dielettrici, abbiamo bisogno di aggiustare anche le equazioni di Maxwell affinché queste ne descrivano il comportamento, le prime due leggi assumono l'espressione

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & (I) \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad [-\partial \mathbf{B} / \partial t] & (II) \end{cases}$$

L'equazione di Faraday (II) non contiene sorgenti e non è modificata dalla presenza di carica di polarizzazione. In mezzi omogenei e lineari

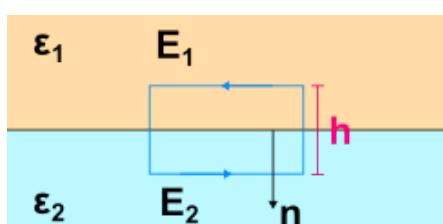
$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times (\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}) = \epsilon_0 \epsilon_r \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

In generale però  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$  può non essere lineare

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

può essere diverso da zero, dato che  $\mathbf{P}$  può non essere conservativo.

### 7.6.3 Relazione di continuità per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$



Consideriamo un mezzo costituito da due materiali dielettrici differenti con costante dielettrica del mezzo  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . All'interfaccia tra i due dielettrici in presenza di campo elettrico esiste della carica superficiale di polarizzazione anche in assenza di cariche libere. Ipotizzando che la carica libera nel mezzo  $\rho = 0$ , utilizziamo le equazioni di Maxwell per determinare

come i campi si legano tra loro sulla superficie interna ed esterna.

Siccome i campi elettrici sono conservativi deve valere che

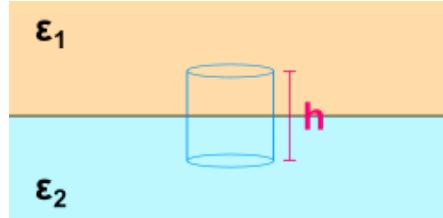
$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

facendo tendere  $h \rightarrow 0$  si ha che

$$E_1^{/\!/} = E_2^{/\!/}$$

e quindi la componente del campo elettrico sulla superficie non ha discontinuità.

Ricorrendo alla legge di Gauss  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ , e prendendo una superficie cilindrica che attraversa l'interfaccia del mezzo, si ha che per  $h \rightarrow 0$ :



$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = 0 \Rightarrow (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 0$$

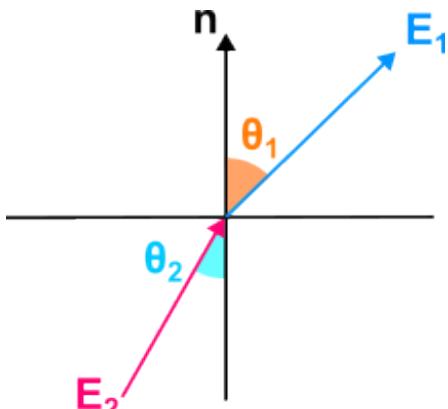
che equivale alla condizione

$$\varepsilon_1 E_{1,\perp} = \varepsilon_2 E_{2,\perp}$$

La componente ortogonale di  $\mathbf{D}$  non ha discontinuità, ma il campo elettrico con direzione ortogonale è discontinuo, infatti

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\Delta P}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E_{\perp} = \frac{\sigma_{p,1} - \sigma_{p,2}}{\varepsilon_0}$$

ed è dovuto alla presenza di una distribuzione di carica di polarizzazione  $\sigma_p \neq 0$  lungo la superficie condivisa dai due materiali. Riassumendo il campo elettrico nel mezzo si comporta come



$$\begin{cases} E_{1,\perp} = E_{2,\perp} \\ E_{1,\parallel} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{2,\parallel} \end{cases}$$

Possiamo riscrivere le due componenti del campo in coordinate polari, definendo l'angolo d'incidenza rispetto alla normale della superficie limite:

$$\begin{cases} E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \\ \varepsilon_1 E_1 \cos \theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

Da queste relazioni abbiamo che

$$\tan(\theta_1) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tan(\theta_2)$$

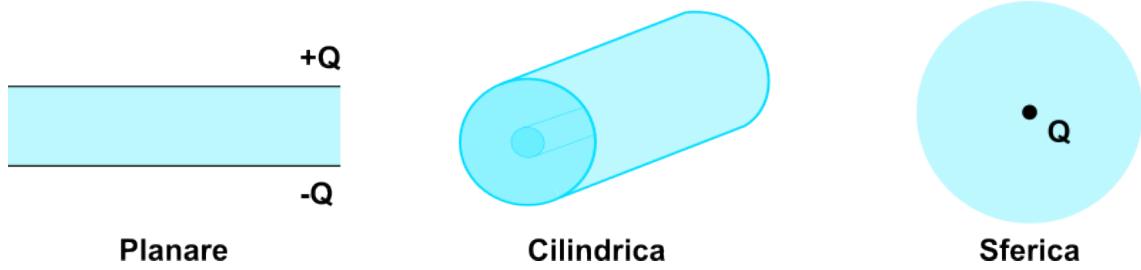
Se si hanno mezzi con costanti dielettriche differenti, i campi elettrici all'interno del mezzo cambiano direzione.

#### 7.6.4 Problemi di Elettrostatica con i Dielettrici

Possiamo determinare due categorie di problemi e un loro approccio risolutivo:

- 1) Mezzi continui e lineari con medesima simmetria (planare, cilindrica o sferica) delle sorgenti e dielettrico.

#### Esempi



In questi casi il problema è facilmente risolubile, usando la legge di Gauss per  $\mathbf{D}$  su una superficie opportuna (dove  $\mathbf{D}$  è costante), e una volta trovato  $\mathbf{D}$  il resto segue a cascata.

Le relazioni tra i campi sono indipendenti dalla specifica simmetria

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \\ \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{D} \end{cases}$$

Per queste geometrie vale che :

- I campi  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{P}$  sono sempre paralleli in un mezzo omogeneo e lineare;
- Tutti i campi coinvolti ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{E}_p$ ) e le distribuzioni  $\sigma_p$  e  $\rho_p$  seguono la simmetria del mezzo;

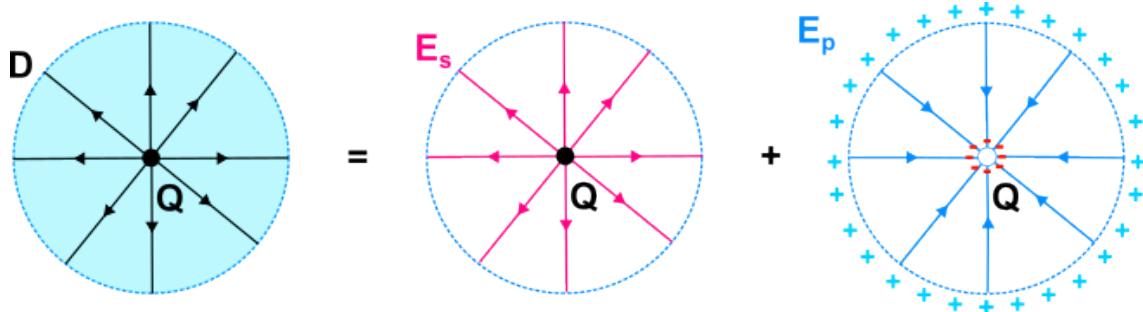
- La relazione tra  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{E}_s$  (campo di stimolo dovute alle sorgenti libere nel vuoto) e tra  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{E}_p$  (campo delle sorgenti di polarizzazione) sono indipendenti dalla geometria:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_s}{\epsilon_r} \\ \mathbf{E}_p = \mathbf{E} - \mathbf{E}_s = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \end{cases}$$

*Osservazione.* In generale quanto discusso non è vero per geometrie più complesse.

### Esempio

Consideriamo un dielettrico a simmetria sferica, lineare e omogeneo attorno a una carica  $Q$  posta nel suo centro. Per determinarne il campo elettrico prodotto, possiamo pensare di applicare la stessa strategia utilizzata da Faraday per determinare empiricamente  $\epsilon_r$ . Decomponiamo la configurazione prescindendo la simmetria in una in cui è presente solo la sorgente di cariche libere e una in cui è presente solo la sorgente di carica polarizzata.



Il problema per calcolare  $\mathbf{E}_s$  ha la stessa simmetria del problema per  $\mathbf{D}$ . Risolviamo per  $\mathbf{D}$  usando la legge di Gauss per una superficie a  $r$  fissato.

$$D(r)4\pi r^2 = Q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{u}_r$$

da cui calcoliamo il campo elettrico

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

## CAPITOLO 7. CAMPI ELETTRICI NEI MEZZI MATERIALI

---

Il campo di stimolo nel vuoto coincide con quello prodotto da una carica puntiforme

$$\mathbf{E}_s(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

e quindi possiamo riscrivere il campo elettrico totale come

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_s \quad \text{per } r < R$$

e quindi l'intensità del campo e della forza esercitata è ridotto di un fattore  $\epsilon_r$  all'interno del mezzo materiale. Questo genera una discontinuità del campo quando si passa da dentro al mezzo all'esterno dove si ipotizza esserci il vuoto.

$$\Delta E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right)$$

Vettore e campo di polarizzazione sono dunque dati da:

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_E \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{\hat{u}_r}{r^2} \\ \mathbf{E}_p = \mathbf{E} - \mathbf{E}_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Conoscendo il vettore  $\mathbf{P}$  possiamo ora calcolare la distribuzione di carica di polarizzazione:

$$\sigma_P = \pm \mathbf{P} \cdot \hat{n} = P(r)$$

per una superficie sferica, inoltre

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 P_r) = 0$$

La carica totale di polarizzazione sulla superficie del mezzo è data da

$$Q_p^s = \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{a} = \int_S \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{\hat{u}_r}{r^2} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{u}_r = \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) Q$$

Notare come nel caso limite in cui  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  (conduttore), si ha  $Q_p^s = Q$  ossia induzione totale.

Se la superficie limite del dielettrico non è sferica,  $\sigma_p$  non è uniforme, ma

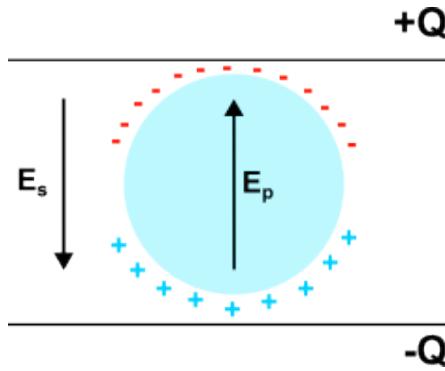
$$Q_p^s = \left( \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \right) Q$$

dato che  $Q_p^s = \phi_S(\mathbf{P})$  e  $P(r) \propto 1/r^2$ . Inoltre se la carica libera non è uniformemente distribuita nel dielettrico  $\rho = \rho(\mathbf{r})$  si ha che la distribuzione di carica polarizzata nel dielettrico  $\rho_p \neq 0$ .

2) Per configurazioni senza simmetrie, e/o che possiedono interfacce si ha che le cariche di polarizzazione non hanno in generale la simmetria del campo di stimolo  $\mathbf{E}_s$ , inoltre sia  $\mathbf{E}_p$  e  $\mathbf{E}_s$  non sono paralleli tra loro e il campo elettrico di polarizzazione  $\mathbf{E}_p$  non risponde alla simmetria delle sorgenti.

Per determinare gli opportuni campi si può ricorrere a condizioni al contorno e di raccordo all'interfaccia tra i mezzi per trovare  $\sigma_p$  e  $\rho_p$  e formulare il problema in termini di problema generale dell'elettrostatica.

### 7.6.5 Caso Notevole: Campo di una Sfera Dielettrica con P uniforme



In generale la polarizzazione che si forma in dielettrico è uniforme se il campo esterno (ovvero quello di stimolo) è uniforme, il che avviene solo per geometrie ellisoidali. Di cui un dielettrico a simmetria planare, cilindrica o sferica sono i casi limite.

Se anzichè avere una sfera di materiale dielettrico come in figura, avessimo un sfera conduttrice internamente il campo elettrico sarebbe nullo, ovvero il campo d'induzione è uguale ed opposto a quello esterno  $\mathbf{E}_s$ . Siccome questa configurazione è espribibile come caso limite per un dielettrico possiamo immaginarci per continuità che per un dielettrico isotropo e lineare si sviluppi al suo interno un campo di polarizzazione  $\mathbf{E}_p$  antiparallelo ad  $\mathbf{E}_s$ .

Il campo  $\mathbf{E}_p$  deve essere uniforme in quanto va a compensazione di un campo a sua volta

uniforme.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_p$$

La distribuzione di carica superficiale sul dielettrico sferico è

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \theta$$

mentre quella di volume è nulla. Siccome nel sistema non sono presenti cariche libere possiamo utilizzare l'equazione di Laplace  $\nabla^2 \varphi = 0$  più delle opportune condizioni al contorno per determinare il potenziale del campo elettrico. La soluzione è data da:

$$\varphi_A = \int_S \frac{P \cos \theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da$$

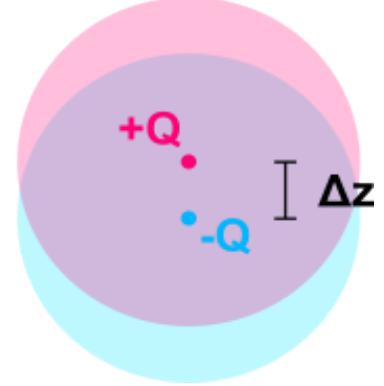
Un modo più comodo per risolvere il problema, è quello di pensare alla sfera polarizzata come alla sovrapposizione di due distribuzioni uniformi di segno opposto con separazione  $\Delta z$ .

In questo modo il campo esterno alla sfera coincide con quello di un dipolo elettrico elementare con momento  $\mathbf{p} = Q\Delta\mathbf{z}$  dove la carica

$$Q = \mathcal{N} \frac{4}{3} \pi R^3 \varphi (r > R)$$

e

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{u}_r}{r^2}$$



per legare il momento di dipolo elementare al vettore di polarizzazione aggiungiamo e sottraiamo dei termini

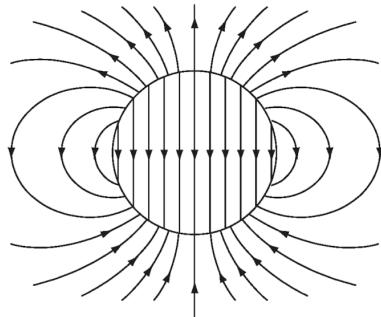
$$\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi R^2 (\mathcal{N}q\Delta\mathbf{z}) = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{P}$$

e sostituendo all'interno dell'espressione del potenziale elettrostatico esterno della sfera otteniamo

$$\varphi_p(r > R) = \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{u}_r}{r^2} = \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2}$$

In questo modo possiamo calcolare il campo elettrico all'esterno

$$\mathbf{E}(r > R) = -\nabla \varphi = \frac{R^3}{3\epsilon_0} \frac{P}{r^3} (2 \cos \theta \hat{u}_r + \sin \theta \hat{u}_\theta)$$



Il campo elettrico che troviamo esternamente alla sfera coincide con quello di un dipolo elettrico. Dai risultati precedenti conosciamo il potenziale sulla superficie della sfera

$$\varphi_p(r = R) = \frac{PR}{3\epsilon_0} \cos \theta = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$$

che utilizziamo come condizione al contorno per l'equazione di Laplace  $\nabla^2 \varphi = 0$ , siccome la soluzione del problema dell'elettrostatica esiste ed è unica, essendo  $\varphi_p(r = R)$  una soluzione, il potenziale interno alla sfera è dato da

$$\varphi(r < R) = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$$

e quindi il campo elettrico interno alla sfera è dato da

$$\mathbf{E}_p = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{u}_z = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (7.33)$$

Sulla superficie è presente una discontinuità del campo data da

$$\Delta E_r = \frac{2P \cos \theta}{3\epsilon_0} - \left( -\frac{P \cos \theta}{3\epsilon_0} \right) = \frac{P \cos \theta}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$$

dovuta alla distribuzione di carica di polarizzazione superficiale.

Ipotizziamo ora che il mezzo sia lineare allora possiamo usare la relazione

$$\mathbf{P} = \epsilon_r \chi_E \mathbf{E}$$

siccome i campi costituenti  $\mathbf{E}$  sono uniformi anch'esso lo è. Dall'equazione (7.33) possiamo definire il campo elettrico di polarizzazione rispetto a  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\chi_E}{3} \mathbf{E}$$

sostituendo nell'espressione  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_p$  dopo alcuni conti si mette in relazione  $\mathbf{E}_s$  con  $\mathbf{P}$  e si risolve rispetto ad  $\mathbf{E}$ , in questo modo il campo è

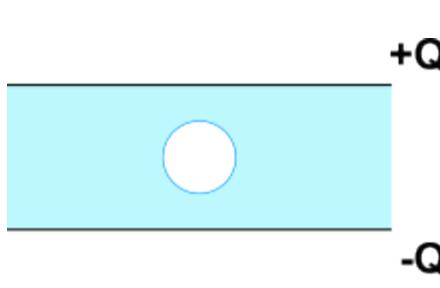
$$\mathbf{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_s$$

ovvero equiverso a  $\mathbf{E}_s$ , uniforme e  $E < E_s$  in modulo. Mentre il vettore di polarizzazione è uniforme come ipotizzato

$$\mathbf{P} = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_s$$

### 7.6.6 Altre strategie di risoluzione per problemi con i Dielettrici

#### 1) Princípio di Sovrapposizione



Supponiamo di avere un dielettrico planare con un buco sferico nel suo centro. Per risolvere un problema di questo tipo possiamo ricorrere al principio di sovrapposizione, considerandolo come la differenza tra un sistema planare riempito di dielettrico con costante dielettrica  $\epsilon$ , e un sistema dato da una sfera riempita di dielettrico con costante  $-\epsilon$ .

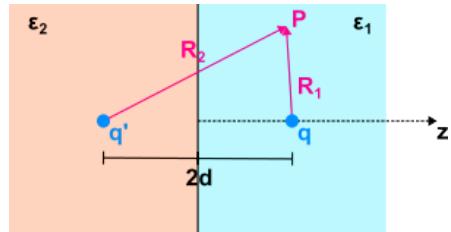
Concettualmente si possono usare le medesime strategie usate nel caso elettrostatico.

#### 2) Metodo delle cariche immagine nei dielettrici

Supponiamo di avere due mezzi dielettrici con costanti  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  e che nella prima regione è posta una carica  $q$  ad una distanza  $d$  dalla superficie di contatto tra i due materiali. Vogliamo determinare il campo elettrico in tutto il mezzo.

Per farlo posizioniamo una carica immagine  $q'$  simmetricamente alla prima nel secondo materiale.

Per il campo nel punto  $P$  devono valere le seguenti condizioni



$$\begin{cases} \epsilon_1 E_{1,z}(z=0) = \epsilon_2 E_{2,z}(z=0) \\ E_{1,x}(z=0) = E_{2,x}(z=0) \\ E_{1,y}(z=0) = E_{2,y}(z=0) \end{cases}$$

(per calcolarle, vedere il paragrafo in cui si parla di due materiali comunicanti). Per  $z > 0$

il potenziale è dato da

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right)$$

dove

$$R_1 = \sqrt{(z-d)^2 + (x^2 + y^2)} \quad \text{e} \quad R_2 = \sqrt{(z+d)^2 + (x^2 + y^2)}$$

In questo caso non possiamo risolvere il problema come fatto con il caso del conduttore, in cui la regione dove non è presente carica è trascurabile, perchè in questo caso si ha del materiale dielettrico e quindi il potenziale non dipende da  $q'$ .

La soluzione più semplice è data da

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{R_1}$$

per  $z < 0$ . Dove la carica  $q''$  è al posto della carica  $q$ , perchè se guardiamo il sistema dal lato di  $\epsilon_2$ , si osserva una sorgente in nella stessa posizione di  $q$ , ma la carica non è la medesima in quanto il dielettrico  $\epsilon_1$  modifica l'intensità del campo della sorgente puntiforme.

Posti  $\rho^2 = x^2 + y^2$  nelle espressioni del raggio, passiamo alla geometria cilindrica e utilizzando le condizioni sul campo elettrico abbiamo che

$$E_\rho(z=0^+) = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial\rho}|_{z=0} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial\rho}|_{z=0} = E(z=0^-)$$

sviluppando il calcolo di trovano le condizioni sulle cariche

$$\begin{cases} q'' = q - q' \\ \epsilon_1(q + q') = \epsilon_2 q'' \end{cases}$$

## 7.7 Energia nei Dielettrici

Per caricare un condensatore bisogna compiere un lavoro

$$W = \frac{1}{2} C_0 V^2$$

Se il condensatore è riempito con un materiale dielettrico, mantenendo la tensione  $V =$  costante abbiamo che la capacità viene incrementata di un fattore  $\epsilon_r$  rispetto a quella nel

vuoto  $C_0$ :

$$C = \varepsilon_r C_0$$

Per proporzionalità diretta anche il lavoro deve essere incrementato di un medesimo fattore. Il motivo di questo incremento è semplice, dato che con la polarizzazione del mezzo si sviluppa della carica di polarizzazione sulla superficie del mezzo, parte del lavoro fornito viene convertito per alimentare questo processo; dunque per mantenere il potenziale costante  $V$  la batteria deve fornire una maggiore quantità di carica libera.

Nel capitolo sull'elettrostatica abbiamo visto che l'energia immagazzinata da un qualsiasi campo elettrico è data da

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 d\nu$$

Nel caso in cui un condensatore è riempito di materiale dielettrico si ha che

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_V \mathbf{E}^2 d\nu$$

dato che  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , se il mezzo lineare  $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_E \mathbf{E}$  e quindi  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ , questo ci permette di esprimere l'energia come

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\nu \tag{7.34}$$

## CAPITOLO 8

---

### Campi Magnetici nei Mezzi Materiali

---

CAPITOLO 8. CAMPI MAGNETICI NEI MEZZI MATERIALI

---

# CAPITOLO 9

---

**Campi Elettromagnetici Variabili nei Mezzi Materiali**

---

CAPITOLO 9. CAMPI ELETTRONAGNETICI VARIABILI NEI  
MEZZI MATERIALI

---

# CAPITOLO 10

---

Ottica Fisica, Geometrica e Ondulatoria

---

CAPITOLO 10. OTTICA FISICA, GEOMETRICA E ONDULATORIA

# APPENDICE A

## Formulario

### A.1 Operatore Nabla in coordinate sferiche e cilindriche

Operatore	Coordinate cartesiane	Coordinate cilindriche	Coordinate Sferiche
Definizione delle coordinate		$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y = r \sin \theta \sin \phi & 0 \leq \phi < 2\pi \\ z = r \cos \theta & 0 \leq r < +\infty \end{cases}$
		$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos(z/r) \\ \phi = \arctan(y/x) \end{cases}$
Gradiente $\nabla f$	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} +$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix} \hat{\rho} +$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi} \end{pmatrix}$		
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Lunghezza Infinitesima	$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
Area Infinitesima	$d\mathbf{S} = dy dz \hat{\mathbf{x}} +$ $dx dz \hat{\mathbf{y}} +$ $dx dy \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} +$ $\rho d\phi dz \hat{\phi} +$ $\rho d\phi dz \hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} +$ $r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} +$ $r dr d\theta \hat{\phi}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$

## A.2 Relazioni Notevoli

1.  $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$  (Laplaciano)
2.  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = 0$
3.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
4.  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
5.  $\nabla^2 fg = f\nabla^2 g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\nabla^2 f$

Formula di Lagrange per il prodotto vettoriale:  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

1.  $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$
2.  $\nabla \times f\mathbf{A} = f\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla f$
3.  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$
4.  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
5.  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$