УДК: 311.16

Условная оптимизация портфеля ценных бумаг

Карпюк И. А., к. пед. н., доцент
Куляшова Н. М., к. ф-м. н. доцент
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
e-mail.ru: kafivt@mail.ru
Российская Федерация, Саранск

Аннотация. В статье обсуждаются методы стохастического анализа для формирования оптимального портфеля ценных бумаг. Рассмотрен пример формирования портфеля с минимальным риском и ожидаемой доходностью.

Ключевые слова: стохастический анализ; условная оптимизация; портфель ценных бумаг; риск; ожидаемая доходность.

CONDITIONAL OPTIMISATION OF THE SECURITIES PORTFOLIO

Karpyuk I. A., Ph.D. (Pedagogy), Associate Professor
Kulyashova N. M., Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor
National Research Mordovia State University
e-mail.ru: kafivt@mail.ru
Russia, Saransk

Abstract: The article discusses the methods of stochastic analysis for the formation of the optimal portfolio of securities. An example of formation of a portfolio with a minimum risk and expected profitability is considered.

Keywords: stochastic analysis; conditional optimization; portfolio of securities; risk; expected profitability.

Для принятия решений в социально-экономической, производственной, бытовой сфере часто используется теория риска и полезности. О важности и практической распространенности данной задачи можно судить по большому количеству публикаций, освещающих различные экономические приложения данной теории к различным экономическим явлениям [1]. Например, рассматривается управление рисками образовательного процесса, методы страхования знаний для повышения качества обучения с использованием индивидуального страхования знаний обучаемых на основе функции полезности, векторная оценка рисковых ситуаций и процессов, методика их сравнения и преобразования.

В экономических исследованиях при решении проблем управления и прогнозирования производственных процессов, в проектировании и перспективном планировании и т. д. эффективно используются и методы стохастического анализа [2, с. 188]. В частности, если ожидаемая доходность и риски активов неизвестны, то необходимо вероятностными методами предварительно рассчитать эти характеристики, составив законы распределения доходностей активов и их многомерный совместный закон распределения [3].

Анализ рисков можно проводить в следующей последовательности:

– выявление факторов, влияющих на конкретный вид риска и их анализ;

– оценка конкретного вида риска с финансовых позиций, определяющая либо экономическую целесообразность проекта, либо его финансовую состоятельность;

– определение допустимого уровня риска;

– рассмотрение отдельных операций, обеспечивающих выбранный уровень риска;

– разработка мероприятий по возможному снижению риска.

Мерой риска некоторого коммерческого или финансового решения, как правило, считают среднее квадратическое отклонение или дисперсию показателя эффективности этого решения.

Выбор такой меры риска объясняется тем, что риск обусловлен неопределенностью исхода решения: чем меньше разброс, т. е. дисперсия результата решения, тем решение более предсказуемо, т. е. тем меньше риск. Если дисперсия результата операции равна нулю, то риск полностью отсутствует: например, в условиях стабильной экономики операции с ценными бумагами считаются практически безрисковыми.

Рассмотрим миниатюрный рынок ценных бумаг [4], состоящий из двух активов. С вероятностью 0,5 доходность активов соответственно равна 0,2 и 0 и с такой же вероятностью – 0 и 0,3. Найдем ожидаемую доходность и риск портфеля $X=(0{,}5;0{,}5)$. Среди портфелей, которые состоят из двух рискованных активов A и B и безрискового актива F(0; 0,01) найдем портфель, имеющий минимальный риск при ожидаемой доходности 12%, если коэффициент корреляции доходностей активов A и B равен 0,5.

Составим распределения доходностей R_A и R_B активов A и B.

R_A	0,2	0
p	0,5	0,5

R_B	0	0,3
p	0,5	0,5

Ожидаемая доходность и риск активов:

$$m_A = M(R_A) = 0{,}2\cdot 0{,}5 + 0\cdot 0{,}5 = 0{,}1,\ m_B = M(R_B) = 0\cdot 0{,}5 + 0{,}3\cdot 0{,}5 = 0{,}15.$$

$$\sigma_A = \sqrt{\sigma^2(R_A)} = \sqrt{0{,}2^2\cdot 0{,}5 + 0^2\cdot 0{,}5 - 0{,}1^2} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1,$$

$$\sigma_B = \sqrt{\sigma^2(R_B)} = \sqrt{0^2\cdot 0{,}5 + 0{,}3^2\cdot 0{,}5 - 0{,}15^2} = \sqrt{0{,}0225} = 0{,}15.$$

Таким образом, портфель состоит из двух рискованных активов A(0,1; 0,1) и B(0,15; 0,15). Найдем ожидаемую доходность и риск портфеля $X=0{,}5(A+B)$:

$$m_X = M(X) = 0{,}5(m_A + m_B) = 0{,}5(0{,}1+0{,}15) = 0{,}125.$$

$$\sigma_X = \sqrt{x_1^2\sigma_A^2 + x_2^2\sigma_B^2 + 2x_1 x_2\sigma_A\sigma_B r_{AB}}\ .$$

Для вычисления совместной доходности активов А и В составим их двумерное распределение:

R_B \ R_A		0	0,2
		0,5	0,5
0	0,5	0 / 0,25	0 / 0,25
0,3	0,5	0 / 0,25	0,06 / 0,25

$\Rightarrow$

R_{AB}	0	0,06
p	0,75	0,25

Тогда $m_{AB} = 0{,}015$, $\sigma_A \sigma_B r_{AB} = 0$, $\sigma_X = \sqrt{0{,}5^2 \cdot 0{,}01 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}0225} \approx 0{,}09$.

Для определения портфеля, имеющего минимальный риск, составим математическую модель. Пусть $X = (x_0, x_1, x_2)$ – портфель ценных бумаг. Минимизируем функцию риска

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} r_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j = 0{,}01 x_1^2 + 0{,}0225 x_2^2 + 0{,}015 x_1 x_2 \to \min$$

при ограничениях $\begin{cases} 0{,}01x_0 + 0{,}1x_1 + 0{,}15x_2 = 0{,}12, \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

Решив задачу методом Лагранжа с применением средств компьютерной математики [3], получим оптимальный портфель X = (0,01; 0,57; 0,42) обеспечивающий ожидаемую доходность 12%.

На формирование портфеля, кроме математических выводов оказывает влияние отношение к риску лица, принимающего решение. Поэтому может быть рассмотрена ситуация не только минимизации риска, но и максимизации функции полезности инвестора.

Список литературы

1. Ганичева А. В. Математические модели и методы оценки событий, ситуаций и процессов [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А. В. Ганичева. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 188 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/91891. – [Дата обращения 10.05.2018].
2. Куляшова Н. М., Карпюк И. А. Применение математической теории в экономической практике. – Вестник Мордовского госуниверситета, 2014. – Т. 24 – № 4. С. 185-191.
3. Куляшова Н. М., Карпюк И. А. Нелинейная оптимизация в портфельном анализе // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – Т. 17. – С. 277–281. – URL: http://e-koncept.ru/2016/46233.htm. – [Дата обращения 10.05.2018].
4. Лукасевич И. Я. Инвестиции: Учебник / И. Я. Лукасевич – М. : ИНФРА-М, 2017. – 413 с.