

**Бифуркационный анализ и компьютерное моделирование нелинейной динамической системы взаимосвязанных экономических процессов**

*Батищева Г.А., д.э.н., профессор  
Журавлева М.И., к.ф.-м.н., доцент  
Кузнецов М.В., студент Института Магистратуры  
ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический  
университет (РИНХ)»  
e-mail: gbati@mail.ru  
Россия, Ростов-на-Дону*

**Аннотация**

В статье исследуется модель динамической системы «Посредническая деятельность», предложенной В.П. Миловановым, и дан полный бифуркационный анализ этой динамической системы. С помощью теоретического анализа и численного эксперимента в пакете MatLab и Simulink получены фазовые портреты системы для некоторых конкретных параметров для случая узлов.

**Ключевые слова**

Динамическая система, состояние равновесия, бифуркация, пространство параметров, траектория, фазовый портрет.

Интеллектуальные информационные технологии и компьютерные технологии - это технологии, помогающие человеку ускорить анализ политической, экономической, социальной и технической ситуации (состояния) и последующий синтез управленческих решений. Наличие математической модели соответствующего процесса позволяет привлечь для углубленного анализа и синтеза методы современной нелинейной динамики и теории управления [6, 7]. В рамках теории динамических систем на этапе анализа исследователя интересуют закономерности взаимосвязи экономических процессов. Полный анализ системы – это её бифуркационный анализ [3, 5].

Методы математического аппарата современной нелинейной динамики применим к системе «Посредническая деятельность» [1, 2].

$$\begin{cases} \dot{x}_t = a_1 - a_2 x y + a_3 x y^2 \\ \dot{y}_t = b_1 - b_2 x y \end{cases} \quad (1)$$

В этой системе:

$x(t)$  – количество денег, находящееся в распоряжении предпринимателя;

$y(t)$  – количество товара типа  $y$ , обращающегося на рынке;

$a_1$  – доход предпринимателя, не связанный с реализацией товара типа  $y$ ;  $a_3xy^2$  – доход, который имеет предприниматель, покупая товар типа  $y$  на рынке и организуя снабженческую сеть для его перепродажи;  $a_2xy$  (убыль денег),  $b_2xy$  (убыль товара) – конкурентные и обменные члены, показывают, сколько денег типа  $x$  и товара типа  $y$  убывает с рынка в результате купли-продажи;  $b_1$  – величина постоянного притока товара  $y$  на рынок в единицу времени. Все параметры  $a_i, b_j$  ( $i = \overline{1,3}; j = \overline{1,2}$ ) предполагаются постоянными и положительными.

В общем виде математическая модель динамической системы двух взаимосвязанных объектов имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = F_2(x, y) \end{cases}$$

Положение равновесия в этом случае находится из условия:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

а матрица Якоби имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

где  $S = (x_0, y_0)$  – положение равновесия.

Для системы (1) введем обозначения:

$$F_1(x, y) = a_1 - a_2xy + a_3xy^2$$

$$F_2(x, y) = b_1 - b_2xy$$

Состояние равновесия для (1) равно:

$$S = \left( \frac{a_3b_1^2}{b_2(a_2b_1 - a_1b_2)}, \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_3b_1} \right), \text{ если } a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$$

Обозначим  $\tau = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_3b_1}$ , тогда  $S = \left( \frac{b_1}{b_2\tau}, \tau \right)$ .

Исследование характера состояния равновесия проведем с помощью теоремы Ляпунова [4].

Матрица Якоби для системы (1) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -a_2y + a_3y^2 & -a_2x + 2a_3xy \\ -b_2y & -b_2y \end{pmatrix},$$

для которой

$\sigma = -\left(\frac{a_1b_2}{b_1}\tau + \frac{b_1}{\tau}\right)$  – след матрицы Якоби, а  $\Delta = a_3b_1\tau$  – определитель этой матрицы для положения равновесия S.

Нетрудно видеть, что если  $a_2b_1 - a_1b_2 < 0$ , то S находится в третьей четверти фазовой плоскости и является седлом. Экономического смысла не имеет.

Для случая  $a_2b_1 - a_1b_2 > 0$  S находится в первой четверти фазовой плоскости и возможны 2 варианта: или S устойчивый узел, или S устойчивый фокус.

Если  $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ , то конечное состояние равновесия системы отсутствует.

Рассмотрим численные эксперименты для случая узлов. Для численного анализа экономической модели и построения фазовых портретов и траекторий был применен пакет MatLab с графическим приложением Simulink.

Создадим при помощи графического приложения Simulink структурную модель «Посредническая деятельность» (блок-диаграмму в виде направленного графа) (рис.1).

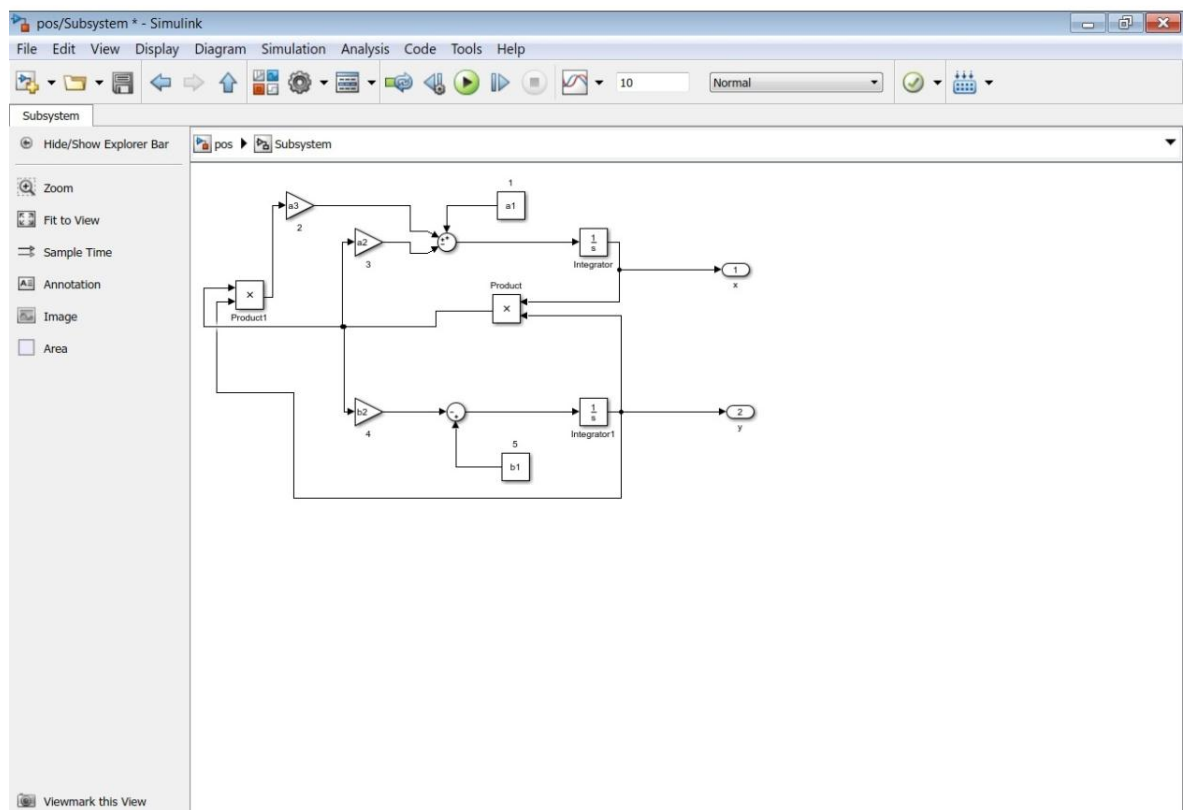


Рис.1. Структурная модель «Посредническая деятельность»  
(Построено авторами по результатам исследования)

Выберем произвольным образом параметры  $a_1=3$ ,  $a_2=5$ ,  $a_3=3$ ,  $b_1=4$ ,  $b_2=4$ . Положение равновесия имеет вид  $S=(3/2, 2/3)$ , а собственные числа матрицы Якоби:  $\lambda_1 = -3,5336$ ,  $\lambda_2 = -0,1887$ . По теореме Ляпунова это положение равновесия является устойчивым узлом [4].

При выбранных параметрах построим фазовый портрет с начальными условиями от 0 до 5 с шагом 0.3 (рис. 3).

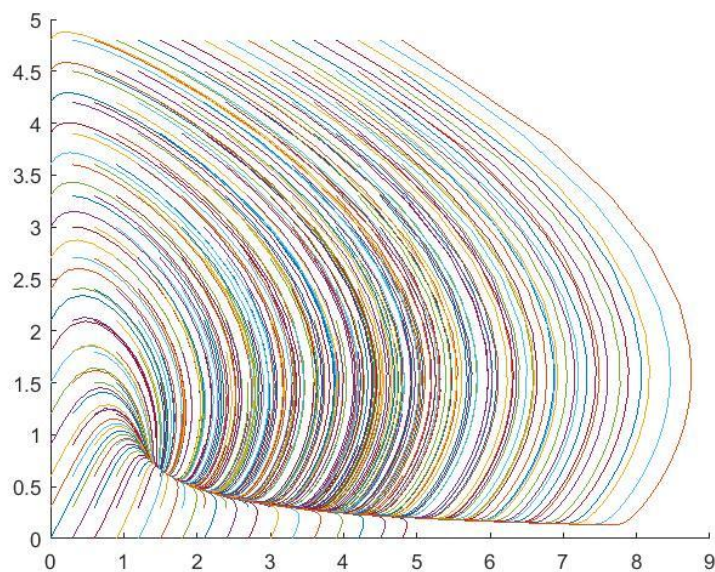


Рис. 3. Фазовый портрет с шагом  
(Построено авторами по результатам исследования)

Изменим параметр  $a_2$  на массив  $a_2 = [6, 5.7, 5.4, 5.1, 5, 4.8, 4.6, 4, 3.5]$ ,  $a_1=3$ ,  $a_3=3$ ,  $b_1=4$ ,  $b_2=4$  с начальными условиями  $x(0)=0$ ,  $y(0)=0$  (рис. 4).

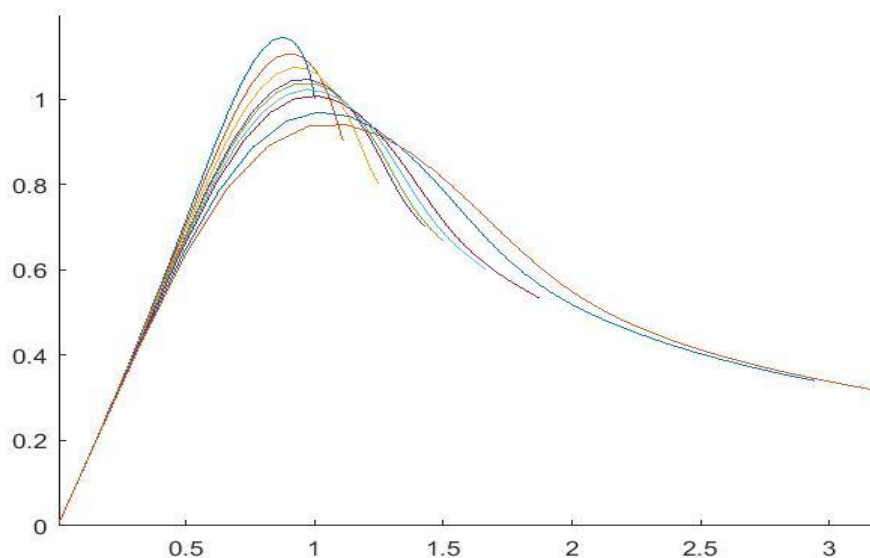


Рис. 4. Фазовый портрет с одним параметром, состоящего из массива  
(Построено авторами по результатам исследования)

Рассмотренная динамическая система «Посредническая деятельность» не имеет решения в явном виде, однако для экономиста важны следующие ответы: как с течением времени будут изменяться величины  $x(t)$  – количество денег,  $y(t)$  – количество товара типа  $Y$ , если известны их значения в произвольно фиксированный момент времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bratishchev Alexander V., Batishcheva Galina A., Zhuravleva Maria I. Bifurcation analysis and synergetic management of the dynamic system “Intermediary activity”/ Advances in Intelligent Systems and Computing. Volume 896, 2019, Pages 659-667. 13th International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, ICAFS 2018; Warsaw, Poland; 27-28 August 2018.
2. Братищев А.В., Батищева Г.А., Журавлева М. И. Бифуркационный анализ и синергетическое управление динамической системой «посредническая деятельность» / Интеллектуальные ресурсы – региональному развитию. 2018. Т.4 № 1. – С. 209-2013.
3. Братищев А. В., Журавлева М. И. Бифуркационный анализ и синергетическое управление системой « валовой продукт – трудовой ресурс» // Вестник Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), 2015, Выпуск № 2, (50), Стр. 147-155.
4. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович.- М.: Мир, 1990. - 483 с.
5. Колесников А. А. Синергетические методы управления я сложными системами. Теория системного анализа.– Москва: КомКнига, 2006, 240с.
6. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. – Ижевск: Издательство «Удмуртский университет», 2000, 200 с.
7. Милованов В.П. Неравновесные социально-экономические системы: синергетика и самоорганизация / В.П. Милованов.- М.: УРСС, 2001.- 264 с.