Laborator 5: Modele matematice date prin ecuaţii diferenţiale de ordinul II

Exerciţiul 1 *Se consideră ecuaţia diferenţială ce descrie mişcarea oscilatorului armonic (fără frecare):*

$$x'' + \omega_0^2\, x = 0$$

(a) *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei;*

(b) *Determinaţi soluţia ecuaţiei ce satisface condiţiile* $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.

(c) *Un resort de care se suspendă un corp este alungit în poziţia de echilibru cu 39.24 cm. Dacă din poziţia de echilibru resortul este întins cu încă 15 cm după care este eliberat se cere să se determine ecuaţia mişcării, amplitudinea, faza, perioada mişcării (*$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$*) şi să se reprezinte grafic soluţia corespunzătoare.*

Exerciţiul 2 *Se consideră ecuaţia diferenţială ce descrie mişcarea oscilatorului armonic cu frecare*

$$x'' + \lambda x' + \omega_0^2 x = 0$$

(a) *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul* $\lambda^2 > 4\omega_0^2$ *(cazul supra-amortizarii);*

(b) *Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare datelor* $\lambda = 25$, $\omega_0 = 10$ *şi condiţiile iniţiale* $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$;

(c) *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul* $\lambda^2 = 4\omega_0^2$ *(cazul amortizarii critice);*

(d) *Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare datelor* $\lambda = 20$, $\omega_0 = 10$ *şi condiţiile iniţiale* $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$;

(e) *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul* $\lambda^2 < 4\omega_0^2$ *(cazul amortizarii slabe);*

(f) *Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare datelor* $\lambda = 5$, $\omega_0 = 10$ *şi condiţiile iniţiale* $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$.

Exerciţiul 3 *Se consideră ecuaţia diferenţială ce descrie mişcarea oscilatorului armonic (fără frecare) asupra căruia acţinează o forţă periodică de forma* $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$:

$$x'' + \omega_0^2\, x = F_0 \cos(\omega t)$$

(a) *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul* $\omega_0 \neq \omega$ *(cazul de nerezonanţă);*

(b) *Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia ecuaţiei ce satisface* $x(0) = 0$ *şi* $x'(0) = 0$ *pentru* $\omega_0 = 5$, $\omega = 5.5$ *şi* $F_0 = 2$ *(soluţie pulsatorie);*

(c) *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul* $\omega_0 = \omega$ *(cazul de rezonanţă);*

(d) Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia ecuaţiei ce satisface $x(0) = 0$ *şi* $x'(0) = 0$ *pentru* $\omega_0 = \omega = 5$ *şi* $F_0 = 2$*;*

(e) Notăm cu $x(\cdot, \omega)$ *soluţia ecuaţiei ce satisface condiţiile* $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$*. Arătaţi că*

$$\lim_{\omega \to \omega_0} x(t, \omega) = x(t, \omega_0).$$