Laborator 2: Ecuaţii diferenţiale. Probleme Cauchy

1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiilor:

   (a) $y' = 2x\left(1 + y^2\right)$

   (b) $\left(x^2 - 1\right) y' + 2xy^2 = 0$

   (c) $2x^2 y' = x^2 + y^2$

   (d) $y' = -\dfrac{x+y}{y}$

   (e) $y'' + y = \sin x + \cos x$

   (f) $y'' - y = e^{2x}$

   (g) $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$

2. Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy şi reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare:

   (a) $y' = 1 + y^2$, $y\left(0\right) = 1$

   (b) $y' = \frac{1}{1-x^2} y + 1 + x$, $y\left(2\right) = 0$

   (c) $y' - 2y = -x^2$, $y\left(0\right) = \frac{1}{4}$

   (d) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$;

   (e) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

   (f) $y'' + 4y = 4\left(\sin 2x + \cos 2x\right)$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$;

3. Se consideră următoarea ecuaţie diferenţială

$$y'\left(x\right) + \frac{k}{x} y\left(x\right) = x^3,$$

   cu $k \in \mathbb{R}$.

   (a) Determinaţi soluţia generală.

   (b) Pentru $k = 1$ reprezentaţi grafic câteva soluţii.

   (c) Pentru $k = 1$ determinaţi soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'\left(x\right) + \frac{k}{x} y\left(x\right) = x^3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

   şi reprezentaţi-o grafic.

   (d) Utilizând comanda `animate` vizualizaţi dependenţa soluţiei problemei Cauchy de la punctul (c) faţă de parametrul k.

4. Determinaţi parametrii a şi b ştiind că soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + ax + b \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

trece prin punctele de coordonate $(1, -5 + 4e)$ şi $(2, -7 + 4e^2)$. Reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare.

5. Determinaţi soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

şi valoarea lui a astfel încât $y(x) \to 0$ pentru $x \to +\infty$.