CURS 5

Modele matematice date prin ecuații dif. de ord. 1

1) Dezintegrarea radioactivă

Legea lui Rutherford: viteza de dezintegrare a unei subst. radioactive este direct prop. cu cant. de subst. la momentul respectiv.

$x(t)$ – cant. de subst. radioactivă la mom. t, $t>0$

x_0 – cant. de subst. radioactivă la momentul inițial $t_0=0$.

$\Rightarrow \boxed{x(0)=x_0}$

$t \to x(t)$

$t+\Delta t \to x(t+\Delta t)$

$\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \to$ viteza medie cu care se modif. cant. de subst. în interv. de timp Δt.

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} x'(t)$$

viteza instantanee la mom. t.

$x'(t)$ prop. cu $x(t)$

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$ $k > 0$ – const. de dezintegrare.

$x' = -kx \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -k \cdot x \rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -k \cdot dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x = -kt + \ln c$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = c \cdot e^{-kt}, c \in \mathbb{R}}$ sol. gen. a ec.

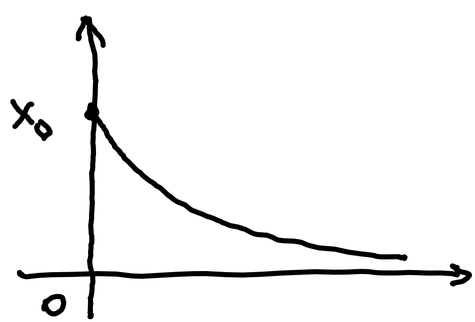
$x(0) = x_0 \Rightarrow c = x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ soluția modelului

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}}$$

$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*$

Concluzie: în timp subst. radioactivă dispare.



Timp de înjumătățire: intervalul de timp necesar unei subst. radioactive să-și înjumătățească cantitatea.

$T_{1/2}$ – timp înjumătățire

$t = 0 \rightarrow x_0$

$t = T_{1/2} \rightarrow \frac{x_0}{2} \Rightarrow x(T_{1/2}) = \frac{x_0}{2}$

$$\cancel{x_0} \cdot e^{-kT_{1/2}} = \frac{\cancel{x_0}}{2}$$

$$e^{-kT_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$-kT_{1/2} = \ln \frac{1}{2}$$

$$-kT_{1/2} = -\ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}} \qquad \boxed{k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}}$$

soluția modelului în termenii timpului înjumătățire :

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-kt} = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} = x_0 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}}$$

2) <u>Datarea prin C^{14}</u> (Willard Libby 1949 , 1960 – Premiul Nobel).

C^{14} – izotop radioactiv al izotop. stabil C^{12}

$T_{1/2} \simeq 5730$ ani

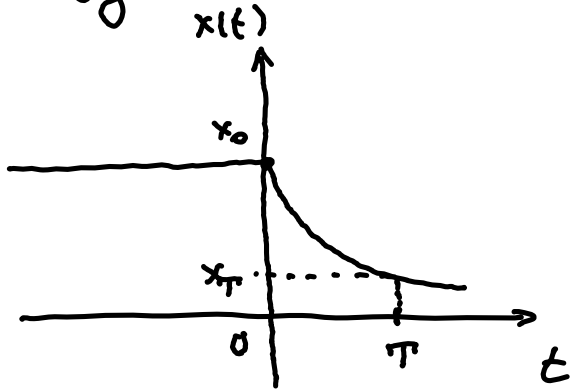
– organismele vii , pe lângă izotopul stabil C^{12} conțin o cantitate mică de C^{14} generat de radiații cosmice și este asimilat de organismele vii prin hrană .

– datorită proceselor biochimice din organisme raportul C^{14}/C^{12} are o valoare constantă pe durata vieții acestora .

- dacă organismul moare, aceste procese biochimice încetează și în consecință cant C^{14} începe să scadă datorită fenomenului de dezintegrare.

$x(t)$ – cant. C^{14}/C^{12} la momentul t

se consideră momentul $t_0=0$ momentul decesului organismului



x_0 – cant C^{14}/C^{12} la $t_0=0$.

$$\begin{cases} x' = -kx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} \text{ ani}^{-1}$$

- la momentul T, momentul descoperirii rămășitelor acelui organism, se măsoară cant C^{14}/C^{12} și se obține x_T

$x(T) = x_T \qquad T = ?$

$$x_0 \cdot e^{-kT} = x_T \Rightarrow e^{-kT} = \frac{x_T}{x_0} \Rightarrow -kT = \ln \frac{x_T}{x_0}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{1}{k} \ln \frac{x_T}{x_0} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{k} \ln \frac{x_0}{x_T}}$$

3). Problema "răcirii" corpurilor

Legea Newton: viteza de "răcire" a unui corp este proporțională cu diferența dintre temp. corpului la momentul respectiv și temp. mediului înconjurător.

$T(t)$ — temp. corpului la mom. $t > 0$.

T_0 — temp. corpului la mom. inițial $t_0 = 0$.

$$\boxed{T(0) = T_0}$$

viteza de "răcire" $\longrightarrow T'(t)$

$T'(t)$ prop. cu $T(t) - T_m$

T_m – temp. mediului înconjurător.

T_m – constantă în timp.

$$\begin{cases} T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_m), \quad \underline{\underline{k>0}} \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$k > 0$?

dacă $T(t) < T_m$ $\Rightarrow$ corpul se încălzește $\Rightarrow$

$\Rightarrow T(t)$ cresc. $\Rightarrow T' > 0$

$$\underbrace{T'}_{>0} = -k \, (\underbrace{T - T_m}_{<0}) \Rightarrow -k < 0 \Rightarrow \underline{k > 0}.$$

dacă $T(t) > T_m$ $\Rightarrow$ corpul se răcește $\Rightarrow T(t)$ descresc.

$\Rightarrow T' < 0$

$$\underbrace{T'}_{<0} = -k \, (\underbrace{T - T_m}_{>0}) \Rightarrow -k < 0 \Rightarrow \underline{k > 0}$$

$$T' = -k \cdot (T - T_m) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m)$$

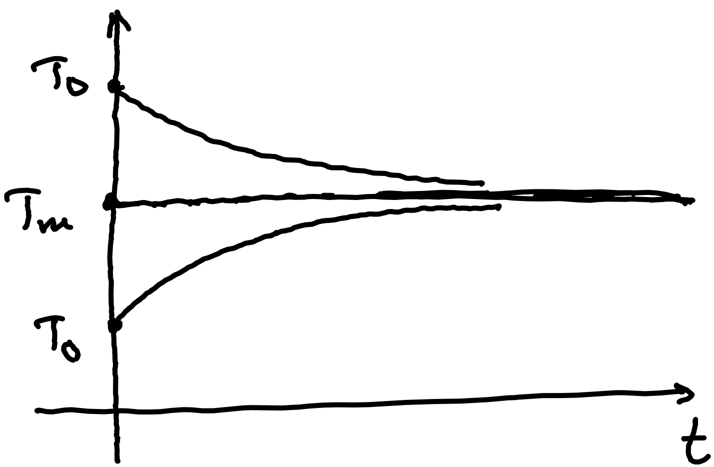
$$\Rightarrow \int \frac{dT}{T - T_m} = \int -k\,dt \Rightarrow \ln(T - T_m) = -k \cdot t + \ln c$$

$$\Rightarrow T - T_m = c \cdot e^{-kt} \Rightarrow \boxed{T(t) = c \cdot e^{-kt} + T_m,\ c \in \mathbb{R}}$$

sol. gen.

$$T(0) = T_0 \Rightarrow c + T_m = T_0 \Rightarrow c = T_0 - T_m$$

$\Rightarrow$ soluția modelului: $\boxed{T(t) = (T_0 - T_m) \cdot e^{-kt} + T_m}$



1. $T_0 = T_m \Rightarrow T(t) \equiv T_m$

2. $T_0 \neq T_m \Rightarrow$

$\rightarrow \lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = T_m$

4) Mișcarea pe verticală în câmp gravitațional

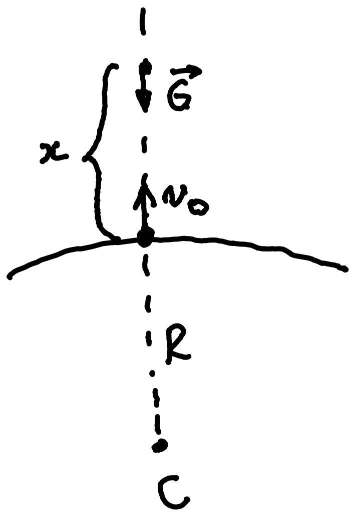
Problemă. Un corp de masă m este proiectat vertical de la suprafața pământului cu o viteză inițială v_0. Presupunând că nu există frecare cu aerul, dar luând în considerare variațiile câmpului gravitațional în raport cu distanța, să se det. expresia vitezei în funcție de distanța x de la corp la supr. pământului.

x — distanța de la corp la supr. pământului

$v(x) = ?$

v_0 — viteza inițială

$$\boxed{v(0) = v_0}$$



R – raza pământului

$G(x)$ – forța gravitațională la înălțimea x

$G(x)$ – forța gravit. este invers prop. cu pătratul distanței de la corp la centrul pământului

$$\boxed{G(x) = -\frac{k}{(x+R)^2}}$$

la supr. pământului $g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$

$x = 0 \quad G(0) = -mg$.

$$\Rightarrow -mg = -\frac{k}{R^2} \Rightarrow k = mgR^2$$

$$\Rightarrow \boxed{G(x) = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}}$$

$$\boxed{m.a = F} \qquad F = G$$

$$x = x(t)$$

$$v(t) = x'(t)$$

$$\underline{a(t) = v'(t)} = x''(t)$$

$$\boxed{v = v(x)}$$

$$v = v(x) = v(x(t))$$

$$v'(t) = v'(x(t)) \cdot x'(t) =$$

$$= \underline{v'(x) \cdot v(x)}.$$

$$\Rightarrow m.a = F \rightarrow m \cdot v'(x) . v(x) = G(x)$$

$$\cancel{m} \cdot v'(x) \cdot v(x) = -\frac{\cancel{m} g R^2}{(x+R)^2}$$

$$\begin{cases} v'(x) . v(x) = -\dfrac{gR^2}{(x+R)^2} & \text{ec. dif. cu var. sep.} \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$v \cdot v' = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \rightarrow v \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}$$

$$\Rightarrow v \cdot dv = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \cdot dx \quad \Big| \cdot 2$$

$$\Rightarrow \int 2v \cdot dv = \int -\frac{2gR^2}{(x+R)^2} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{2gR^2}{x+R} + C, \ C \in \mathbb{R}}$$ sol. gen. în formă implicită

$v(0) = v_0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow v = v_0$

$$v_0^2 = \frac{2gR^{\cancel{2}}}{\cancel{R}} + C \rightarrow C = v_0^2 - 2gR$$

$\Rightarrow$ sol. modelului: $v^2(x) = \dfrac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR.$

$$\boxed{v(x) = \pm\sqrt{\frac{2gR^2}{x+R} + v_0^2 - 2gR}}$$

„+" — corpul urcă

„−" – corpul coboară

Altitudinea maximă

- știind valoarea vit. inițială v_0 să se det. altitudinea maximă h la care ajunge corpul.

la altitudinea maximă corpul se oprește

$$\Rightarrow v(h) = 0$$

$$\sqrt{\frac{2gR^2}{h+R} + v_0^2 - 2gR} = 0 \Rightarrow \frac{2gR^2}{h+R} + v_0^2 - 2gR = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2gR^2}{h+R} = 2gR - v_0^2 \Rightarrow \frac{1}{h+R} = \frac{2gR - v_0^2}{2gR^2}$$

$$\Rightarrow h+R = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2} \Rightarrow h = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2} - R$$

$$\Rightarrow h = \frac{\cancel{2gR^2} - \cancel{2gR^2} + Rv_0^2}{2gR - v_0^2}$$

$$\boxed{h(v_0) = \frac{v_0^2 \cdot R}{2gR - v_0^2}}$$

Viteza de evadare din câmpul gravitațional

Care este viteza inițială cu care trebuie proiectat corpul pt. ca acesta să părăsească câmpul gravit. al pământului?

v_e – viteza de evadare

corpul nu se mai întoarce la supr. pământului

$\Rightarrow h \to +\infty$.

$$v_e = \lim_{h \to \infty} v_0(h)$$

$v_0(h)$ – viteza inițială pt ca acest corp să atingă înălțimea max. h.

$$v(h) = 0 \Rightarrow \frac{2gR^2}{h+R} + v_0^2 - 2gR = 0$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \overset{h+R}{\cancel{2gR}} - \frac{2gR^2}{h+R} \Rightarrow v_0^2 = \frac{2gR \cdot h + \cancel{2gR^2} - \cancel{2gR^2}}{h+R}$$

$$\Rightarrow v_0(h) = \sqrt{\frac{2gRh}{h+R}}$$

$$\Rightarrow v_e = \lim_{h\to+\infty} v_0(h) = \lim_{h\to\infty} \sqrt{\frac{2gR\cdot h}{h+R}} = \sqrt{2gR}$$

$$g = 9.81\ \frac{m}{s^2}\ ,\ R = 6\,371\ km \Rightarrow \boxed{v_e \simeq 11.1\ \frac{km}{s}.}$$