MEKANİK

DERS NOTLARI

Yar. Doç. Dr. Hüseyin BAYIROĞLU

İçindekiler

11
RİJİD CİSMİN KİNEMATİĞİ
107

12
KİNETİK
125

13
İŞ VE ENERJİ İLKESİ
144

EK A

EK B

STATİK

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Mekaniğin tanımı

Cisimlerin Kuvvetler etkisinde dengesini ve hareketlerini inceleyen bilim dalına mekanik denir.

Mekanik cisimlere maddesel nokta, rijid cisim, elastik cisim , plastik cisim ve akışkanlar (sıvı ve gazlar) olmak üzere yaklaşır.Mekanik eğer sadece maddesel nokta ve rijid cisim modelini inceliyorsa bu bilim dalına mekanik veya mühendislik mekaniği denir. Bunun dışında incelediği cisim modeline uygun isimler verilir. Örneğin elastomekanik veya elastisite, plastisite , hidromekanik ,aerodinamik, elektromekanik gibi.

Mekanik , Statik ve Dinamik olmak üzere iki bilim dalına ayrılır. Statik kuvvetler etkisinde cisimlerin denge koşullarını, Dinamik ise hareketlerini inceler.

1.2 Temel ilkeler ve görüşler

Mekaniğin temel aldığı ilkeler Newton yasalarıdır. Bu yasalar cisimlere maddesel nokta modeli ile yaklaşıldığında kullanışlıdır. Diğer cisim modellerine matematiksel modellerle genişletilmesi gerekir. Benzer şekilde mekanikte kuvvetler maddesel nokta modelinde vektörlerle gösterilebilmesine karşı rijid cisim modelinde vektör ve etki doğrusu kavramları beraber kullanılmalıdır.

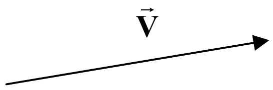
Mühendislik mekaniği vektörler yardımı ile oluşturulduğu için vektörleri bize gerektiği kadar ayrıntılı bir şekilde ele almamız gerekir.

BÖLÜM 2

VEKTÖRLERİN VE TEMEL İŞLEMLERİNİN TANIMI

2.1 Vektörlerin tanımı

Doğrultu , yön ve modülü ile tanımlanan büyüklüklere vektörler denir. Bir vektör Koyulaştırılmış harfler ile veya üzerine ok işareti çizilen harflerle belirtilir. Vektörler aşağıdaki gibi yönlendirilmiş doğru parçası ile gösterilebilir.



Bir referans sistemine göre çizilen bu doğru parçasının doğrultusu vektörün doğrultusunu , yönü vektörün yönünü ve uzunluğu vektörün modülünü gösterir.

Bir vektörün modülü $|\,\vec{\mathbf{V}}\,|$ ile gösterilir.

Sıfır vektör : modülü sıfır olup doğrultu ve yönü belirsiz olan vektörlere sıfır vektörü denir ve $\vec{0}$ ile gösterilir.

$-\vec{\mathbf{V}}$ vektörü : $\vec{\mathbf{V}}$ vektörü ile aynı doğrultu ve modülde fakat ters yöndeki vektöre $-\vec{\mathbf{V}}$ vektörü denir.

Birim vektör: Modülünün sayısal değeri 1 olan vektöre birim vektör denir.

2.2 Vektörel işlemlerin tanımı

Vektörler üzerine inşa edilen temel işlemler : Vektörün bir reel sayı ile çarpımı , vektörlerin toplanması , skaler ve vektörel çarpımı gibi işlemlerdir.

2.2.1 Vektörün bir sayı ile çarpımı

Çarpılan vektörle aynı doğrultuda bir vektördür. Eğer çarpım katsayısı pozitif ise yönde aynıdır. Modül ise çarpım katsayısı ile vektörün modülünün çarpımı kadardır.

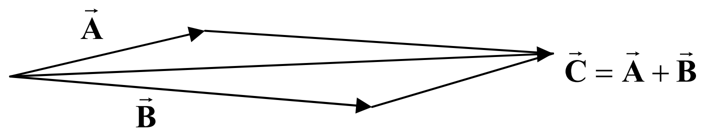
$$|\,\mathbf{k}\vec{\mathbf{V}}\,| = |\,k\,|\,|\vec{\mathbf{V}}\,|$$

Bir vektörün birim vektörü : Vektörü modülüne bölerek elde edilir.

Bir eksenin birim vektörü : Eksen doğrultusunda ve yönündeki herhangibir vektörü modülüne bölerek bulunur.

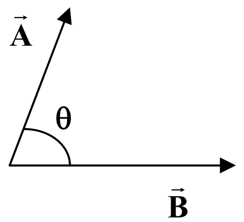
2.2.2 Vektörlerin toplamı

Başlangıçları aynı noktaya getirilen iki vektörün toplamı bu vektörler üzerine kurulan paralel kenarın köşegeni üzerindeki aşağıda gösterilen vektöre eşittir.



2.2.3 İki vektörün birbiri ile skaler çarpımı

İki vektör arasındaki açı: Başlangıçları aynı noktaya getirilen iki vektör arasındaki 180^0 den büyük olmayan açı iki vektör arasındaki açı olarak alınır .



Skaler Çarpım sonucunda skaler elde edilir .

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = |\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}| \mathbf{Cos}\,\theta$$

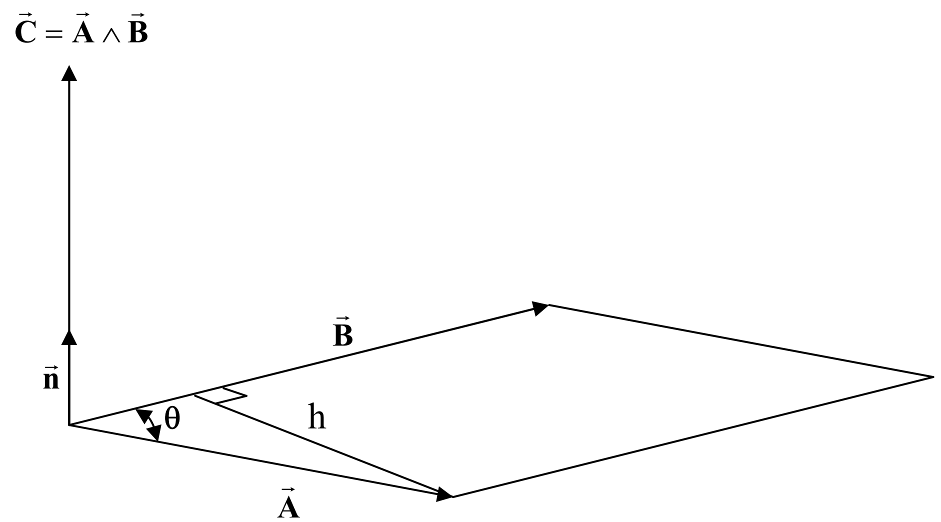
2.2.4 İki vektörün birbiri ile vektörel çarpımı

Vektörel çarpımın sonucu yine bir vektördür.

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}} = (|\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}|\mathbf{Sin}\,\theta)\ \vec{\mathbf{n}}$$

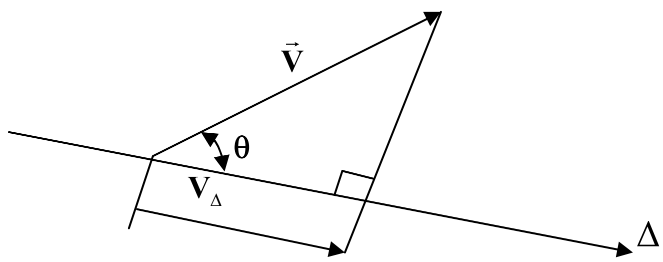
Burada Vektörel çarpım sonunda elde edilen vektör her iki vektöre dik doğrultuda ve $|\vec{\mathbf{A}}||\vec{\mathbf{B}}|\mathbf{Sin}\,\theta$ modülünde bir vektördür. Yönü ise sağ el kuralı ile bulunabilir.

Sağ el kuralı ile elde edilen yön , baş parmak dışındaki sağ el parmakları birinci vektörü ikinci vektöre doğru döndürme yönünde tutulursa baş parmağın gösterdiği yöndür.



$|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$ ifadesinde $|\vec{A}|\sin\theta = h$ olduğundan $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin birbiri ile vektörel çarpımının modülü bu vektörlerin başlangıçları aynı noktaya getirilirse üzerine kurulan paralelkenarın alanına eşit olduğu görülür.

2.2.5 Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümü



$$V_\Delta = |\vec{V}|\cos\theta$$

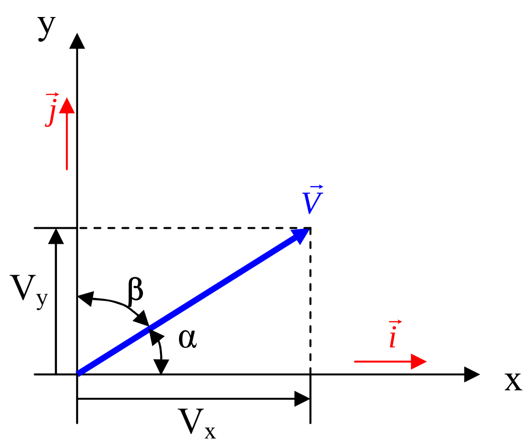
$$V_\Delta = \vec{V} \bullet \vec{U}_\Delta$$

burada $\vec{U}_\Delta$ Δ ekseninin birim vektörüdür.

BÖLÜM 3

VEKTÖRLERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

3.1 İki boyutlu vektörlerin kartezyen koordinatlarda gösterilişi



Düzlemde bir vektör

$$\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_x \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{V}_y \vec{\mathbf{j}}$$

şeklinde x ve y ekseni doğrultusundaki vektörlerin toplamı cinsinden yazılabilir. Bu vektörün modülü ise aşağıdaki gibi pisagor teoremi yardımı ile bulunur.

$$\left|\vec{\mathbf{V}}\right| = \sqrt{\mathbf{V}_x^2 + \mathbf{V}_y^2}$$

Bir vektörün doğrultusunda ve yönündeki birim vektör ise vektör modülüne bölünerek elde edilir.

$$\vec{\mathbf{U}}_{(\vec{\mathbf{V}})} = \frac{\vec{\mathbf{V}}}{\left|\vec{\mathbf{V}}\right|} \quad , \qquad \vec{\mathbf{U}}_{(\vec{\mathbf{V}})} = \frac{\mathbf{V}_x}{\left|\vec{\mathbf{V}}\right|}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{V}_y}{\left|\vec{\mathbf{V}}\right|}\vec{\mathbf{j}}$$

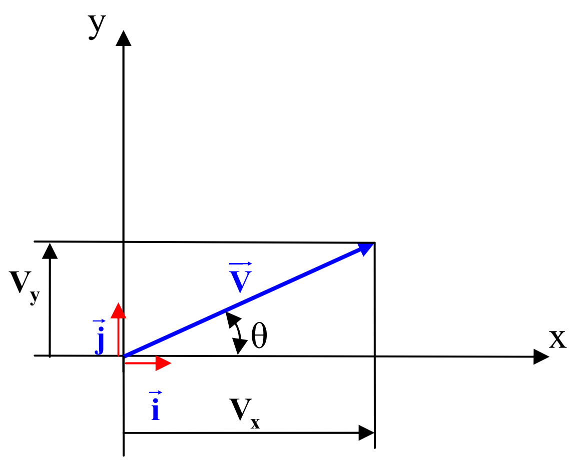
Aşağıdaki gibi birim vektörün katsayılarının vektörün eksenlerle yaptığı açıların kosinüslerine eşit olduğu gösterilebilir.

$$\mathbf{Cos}\,\alpha = \frac{\mathbf{V_x}}{|\vec{\mathbf{V}}|} = \mathbf{U_x} \quad , \qquad \mathbf{Cos}\,\beta = \frac{\mathbf{V_y}}{|\vec{\mathbf{V}}|} = \mathbf{U_y}$$

Problem 3.1.1

Bir düzlemdeki yatay doğrultu ile 30^0 derecelik açı yapan ve modülü 80 birim olan vektörü ve birim vektörünü kartezyen koordinat sisteminde yazınız.

Çözüm:



$$\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{V_x}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{V_y}\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$|\vec{\mathbf{V}}| = 80\,\mathbf{birim} \quad , \qquad \theta = 30^0$$

$$\mathbf{V_x} = |\vec{\mathbf{V}}|\,\mathbf{Cos}\theta \quad , \qquad \mathbf{V_y} = |\vec{\mathbf{V}}|\,\mathbf{Sin}\theta$$

$$\mathbf{V_x} = 80\,\mathbf{Cos}\,30^0 \quad , \quad \mathbf{V_x} = 69,28\,\mathbf{birim}$$

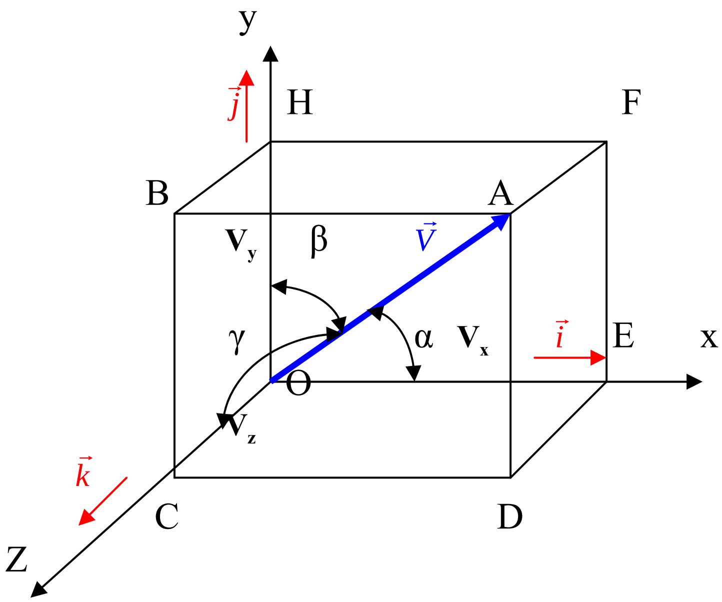
$$\mathbf{V_y} = 80\,\mathbf{Sin}30^0 \quad , \quad \mathbf{V_y} = 40\,\mathbf{birim}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{V}} = 69,28\,\vec{\mathbf{i}} + 40\,\vec{\mathbf{j}}}$$

$$\vec{\mathbf{U}}_{(\vec{V})} = \frac{\mathbf{V_x}}{|\vec{\mathbf{V}}|}\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\mathbf{V_y}}{|\vec{\mathbf{V}}|}\,\vec{\mathbf{j}} \quad , \qquad \vec{\mathbf{U}}_{(\vec{V})} = \frac{69,28}{80}\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{40}{80}\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{U}}_{(\vec{V})} = 0,866\,\vec{\mathbf{i}} + 0,5\,\vec{\mathbf{j}}}$$

3.2 Üç boyutlu vektörlerin kartezyen koordinatlarda gösterilişi



Üç boyutlu uzayda bir vektör kartezyen koordinat sisteminde

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

şeklinde x ve y ekseni doğrultusundaki vektörlerin toplamı cinsinden yazılabilir. Bu vektörün modülü ise aşağıdaki gibi pisagor teoremi yardımı ile bulunur.

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Bir vektörün doğrultusunda ve yönündeki birim vektör ise vektör modülüne bölünerek elde edilir.

$$\vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \quad , \qquad \vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{V_x}{\left|\vec{V}\right|}\vec{i} + \frac{V_y}{\left|\vec{V}\right|}\vec{j} + \frac{V_z}{\left|\vec{V}\right|}\vec{k}$$

Aşağıdaki gibi birim vektörün katsayılarının vektörün eksenlerle yaptığı açıların kosinüslerine eşit olduğu gösterilebilir.

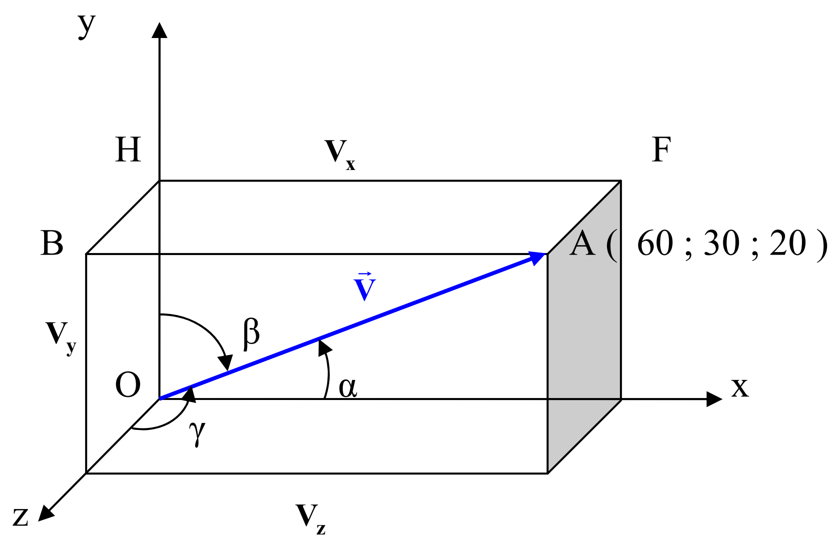
$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{V_x}{\left|\vec{V}\right|} = U_x \quad , \qquad \text{Cos}\,\beta = \frac{V_y}{\left|\vec{V}\right|} = U_y \quad , \qquad \text{Cos}\,\gamma = \frac{V_z}{\left|\vec{V}\right|} = U_z$$

Problem 3.2.1

Bir $\vec{V}$ vektörünün başlangıcı kartezyen koordinat sisteminin başlangıç noktasına yerleştirildiğinde uç noktası A (60,30,20) koordinatlarında ise bu vektörün

a) bu koordinat sistemindeki yazılışını
b) modülünü
c) birim vektörünü
d) koordinat eksenleri ile yaptığı açıları bulunuz.

Çözüm:



a)

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V} = 60\vec{i} + 30\vec{j} + 20\vec{k}}$$

b)

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad , \qquad \left|\vec{V}\right| = \sqrt{(60)^2 + (30)^2 + (20)^2}$$

$$\boxed{\left|\vec{V}\right| = 70}$$

c)

$$\vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \quad , \qquad \vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{60\vec{i} + 30\vec{j} + 20\vec{k}}{70}$$

$$\boxed{\vec{U}_{(\vec{V})} = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}}$$

d) $$\mathbf{Cos}\,\alpha = \frac{V_x}{\left|\vec{V}\right|} = U_x \quad , \qquad \mathbf{Cos}\,\beta = \frac{V_y}{\left|\vec{V}\right|} = U_y \quad , \qquad \mathbf{Cos}\,\gamma = \frac{V_z}{\left|\vec{V}\right|} = U_z$$

$$\mathbf{Cos}\,\alpha = \frac{6}{7} \quad , \qquad \mathbf{Cos}\,\beta = \frac{3}{7} \quad , \qquad \mathbf{Cos}\,\gamma = \frac{2}{7}$$

$$\boxed{\alpha = 31^0} \quad , \qquad \boxed{\beta = 64,62^0} \quad , \qquad \boxed{\gamma = 73,4^0}$$

3.3 Kartezyen koordinatlarda vektörel işlemler

3.3.1 Vektörün bir sayı ile çarpımı

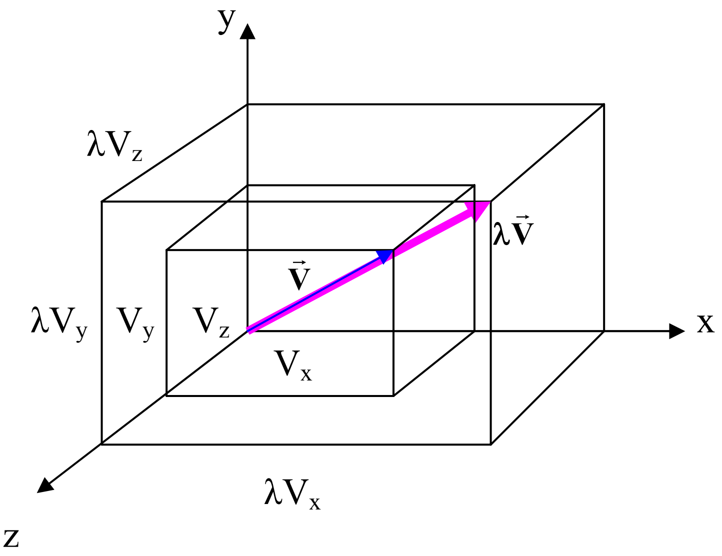
Kartezyen koordinat sisteminde bir vektör

$$\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_x \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{V}_y \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{V}_z \vec{\mathbf{k}}$$

şeklinde yazılırsa bu vektörün bir λ sayısı ile çarpımı aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi dikdörtgenler prizmasının bütün ölçüleri aynı λ sayısı ile çarpılarak elde edildiğinden

$$\lambda\vec{\mathbf{V}} = \lambda\mathbf{V}_x \vec{\mathbf{i}} + \lambda\mathbf{V}_y \vec{\mathbf{j}} + \lambda\mathbf{V}_z \vec{\mathbf{k}}$$

şeklinde yazılabilir.



Bir vektörün bir sayı ile çarpımı vektörün doğrultusunu değiştirmez. Eğer çarpım katsayısı pozitif ise yönü de değişmez.

Problem 3.3.1.1

Problem 3.2.1 de hesaplanan $\vec{\mathbf{V}} = 60\vec{\mathbf{i}} + 30\vec{\mathbf{j}} + 20\vec{\mathbf{k}}$ vektörünün λ=2,5 ile çarpımından elde edilen $\lambda\vec{\mathbf{V}}$ vektörünün

a) ifadesini
b) modülünü
c) birim vektörünü hesaplayınız.

Çözüm:

a) $\lambda\vec{\mathbf{V}} = \lambda\mathbf{V}_x \vec{\mathbf{i}} + \lambda\mathbf{V}_y \vec{\mathbf{j}} + \lambda\mathbf{V}_z \vec{\mathbf{k}}$

$$\lambda\vec{\mathbf{V}} = 2,5 * 60\vec{\mathbf{i}} + 2,5 * 30\vec{\mathbf{j}} + 2,5 * 20\vec{\mathbf{k}}$$

$$\lambda\vec{\mathbf{V}} = 150\vec{\mathbf{i}} + 75\vec{\mathbf{j}} + 50\vec{\mathbf{k}}$$

b) $\left|\lambda\vec{\mathbf{V}}\right| = \sqrt{(150)^2 + (75)^2 + (50)^2}$

$$\boxed{\left|\lambda\vec{V}\right| = 175} \quad , \quad \lambda * \left|\vec{V}\right| = 2{,}5 * 70 = 175 \quad \Rightarrow \quad \left|\lambda\vec{V}\right| = \lambda * \left|\vec{V}\right|$$

c)

$$\vec{U}_{(\lambda\vec{V})} = \frac{\lambda V_x}{\left|\lambda\vec{V}\right|}\vec{i} + \frac{\lambda V_y}{\left|\lambda\vec{V}\right|}\vec{j} + \frac{\lambda V_z}{\left|\lambda\vec{V}\right|}\vec{k}$$

$$\vec{U}_{(\lambda\vec{V})} = \frac{2{,}5*60}{2{,}5*70}\vec{i} + \frac{2{,}5*30}{2{,}5*70}\vec{j} + \frac{2{,}5*20}{2{,}5*70}\vec{k}$$

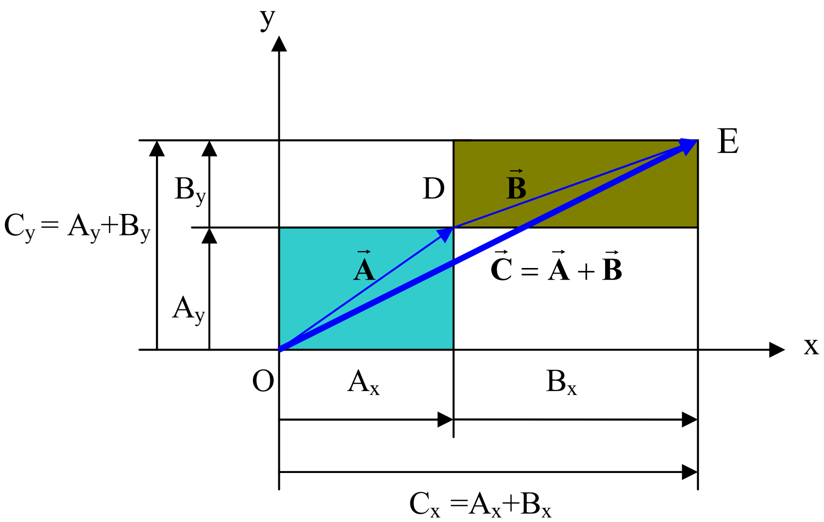
$$\boxed{\vec{U}_{(\lambda\vec{V})} = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}} \quad \Rightarrow \quad \vec{U}_{(\lambda\vec{V})} = \vec{U}_{(\vec{V})}$$

3.3.2 Vektörlerin toplamı

Şekilde gösterildiği gibi İki boyutlu uzayda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörünün toplamı olan $\vec{C}$ vektörünün koordinat eksenleri doğrultusundaki bileşenleri $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin aynı doğrultudaki bileşenleri toplanarak bulunur.

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} \quad , \qquad \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$$



Şekildeki ODE üçgeninden OE kenarının uzunluğu OD ve DE kenarlarının uzunlukları toplamından büyük olamıyacağı bilindiğinden

$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| \le \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|$ eşitsizliği yazılabilir.

Aynı işlemler üç boyutlu uzaya aşağıdaki gibi uygulanabilir.

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad , \qquad \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

Problem 3.3.2.1

$\vec{\mathbf{A}} = 6\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$ vektörü ile $\vec{\mathbf{B}} = 12\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ vektörünün

a) modüllerini
b) bu vektörlerin toplamını
c) toplam vektörün modülünü hesaplayınız.

Çözüm:

a)

$$\left|\vec{\mathbf{A}}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \quad , \quad \boxed{\left|\vec{\mathbf{A}}\right| = 7}$$

$$\left|\vec{\mathbf{B}}\right| = \sqrt{(12)^2 + (3)^2 + (4)^2} \quad , \quad \boxed{\left|\vec{\mathbf{B}}\right| = 13}$$

b) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (6+12)\vec{\mathbf{i}} + (3+3)\vec{\mathbf{j}} + (2+4)\vec{\mathbf{k}}$

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = 18\vec{\mathbf{i}} + 6\vec{\mathbf{j}} + 6\vec{\mathbf{k}}}$$

c) $\left|\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}\right| = \sqrt{(18)^2 + 6^2 + 6^2}$

$$\boxed{\left|\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}\right| = 19{,}9}$$

3.3.3 İki vektörün skaler çarpımı

Aşağıda gösterildiği gibi $\vec{\mathbf{A}}$ ve $\vec{\mathbf{B}}$ vektörünün skaler çarpımı bu vektörlerin aynı doğrultudaki bileşenleri çarpımı toplanarak bulunur ve sonuç skalerdir.

$$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_x\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{A}_y\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{A}_z\vec{\mathbf{k}} \quad , \quad \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_x\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{B}_y\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{B}_z\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{A}_x\mathbf{B}_x + \mathbf{A}_y\mathbf{B}_y + \mathbf{A}_z\mathbf{B}_z$$

Skaler çarpımın tanımından skaler çarpımın mutlak değeri vektörlerin modülleri çarpımından büyük olamaz.

Problem 3.3.3.1

$\vec{\mathbf{A}} = 6\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}}$ vektörü ile $\vec{\mathbf{B}} = 12\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ vektörünün

a) skaler çarpımını
b) modülleri çarpımını hesaplayınız.
c) aralarındaki açıyı hesaplayınız.

Çözüm:

a) $\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = 6*12 + 3*3 + 2*4$

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = 89}$$

b) $\left|\vec{\mathbf{A}}\right| = 7 \quad , \quad \left|\vec{\mathbf{B}}\right| = 13$

$$\left|\vec{\mathbf{A}}\right|\left|\vec{\mathbf{B}}\right| = 13*7 \quad , \quad \boxed{\left|\vec{\mathbf{A}}\right|\left|\vec{\mathbf{B}}\right| = 91}$$

c) skaler çarpımın tanımından

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \mathrm{Cos}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

$$\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{89}{91} \quad \Rightarrow \quad \theta = 12{,}04^0$$

3.3.4 İki vektörün vektörel çarpımı

Sağ kartezyen koordinat sisteminde koordinat eksenlerinin birim vektörlerinin vektörel çarpımı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad , \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \quad , \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

Sağ eksen sisteminde ifade edilen $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörünün vektörel çarpımı olan $\vec{C}$ vektörü aşağıda gösterilen determinantın açılımı yardımı ile hesaplanabilir.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad , \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \wedge (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = [(A_x \vec{i}) \wedge (B_x \vec{i})] + [(A_x \vec{i}) \wedge (B_y \vec{j})] + [(A_x \vec{i}) \wedge (B_z \vec{k})] +$$

$$+[(A_y \vec{j}) \wedge (B_x \vec{i})] + [(A_y \vec{j}) \wedge (B_y \vec{j})] + [(A_y \vec{j}) \wedge (B_z \vec{k})] +$$

$$+[(A_z \vec{k}) \wedge (B_x \vec{i})] + [(A_z \vec{k}) \wedge (B_y \vec{j})] + [(A_z \vec{k}) \wedge (B_z \vec{k})]$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Problem 3.3.3.1

$\vec{A} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ vektörü ile $\vec{B} = 12\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ vektörünün

a) $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ vektörel çarpımını

b) $\vec{C}$ vektörel çarpım vektörü ile $\vec{A}$ vektörü arasındaki açıyı

c) $\vec{C}$ vektörel çarpım vektörü ile $\vec{B}$ vektörü arasındaki açıyı hesaplayınız.

Çözüm:

a)

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad , \quad \vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ 12 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (3*4 - 2*3)\vec{i} + (2*12 - 6*4)\vec{j} + (6*3 - 3*12)\vec{k}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = 6\vec{i} - 18\vec{k}$$

b)

$$\vec{\mathbf{C}} \bullet \vec{\mathbf{A}} = (6\vec{\mathbf{i}} - 18\vec{\mathbf{k}}) \bullet (6\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}})$$

$\vec{\mathbf{C}} \bullet \vec{\mathbf{A}} = 6 * 6 - 18 * 2 = 0$ olduğundan

$\vec{\mathbf{C}}$ vektörü $\vec{\mathbf{A}}$ vektörüne diktir.

c)

$$\vec{\mathbf{C}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = (6\vec{\mathbf{i}} - 18\vec{\mathbf{k}}) \bullet (12\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}})$$

$\vec{\mathbf{C}} \bullet \vec{\mathbf{B}} = 6 * 12 - 18 * 4 = 0$ olduğundan

$\vec{\mathbf{C}}$ vektörü $\vec{\mathbf{B}}$ vektörüne diktir.

3.3.5 Üç vektörün karışık çarpımı

İki vektörün vektörel çarpımından elde edilen vektörün bir diğer vektörle skaler çarpımına bu üç vektörün karışık çarpımı denir.

$$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_x \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{A}_y \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{A}_z \vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_x \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{B}_y \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{B}_z \vec{\mathbf{k}}$$

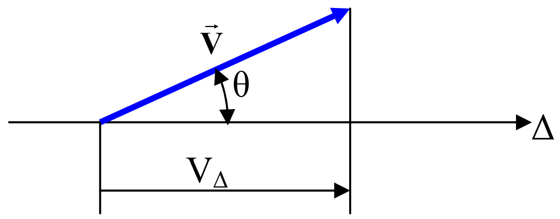
$$\vec{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_x \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{C}_y \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{C}_z \vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet (\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{C}}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{A}_y & \mathbf{A}_z \\ \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z \\ \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_y & \mathbf{C}_z \end{vmatrix}$$

Lineer cebirden bilindiği gibi bir Determinantta iki satırın yeri değişirse determinantın işareti değişir , satırların yeri iki veya ikinin katları sayısında değişirse determinantın değeri değişmez . Bu bilinen özellikten faydalanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\vec{\mathbf{A}} \bullet (\vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{B}} \bullet (\vec{\mathbf{C}} \wedge \vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{C}} \bullet (\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}})$$

3.3.6 Bir vektörün bir eksen üzerindeki izdüşümü



$$\mathbf{V}_\Delta = \vec{\mathbf{V}} \bullet \vec{\mathbf{U}}_\Delta$$

$$\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_x \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{V}_y \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{V}_z \vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{U}}_\Delta = \mathbf{U}_x \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{U}_y \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{U}_z \vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{V}_\Delta = \mathbf{V}_x \cdot \mathbf{U}_x + \mathbf{V}_y \cdot \mathbf{U}_y + \mathbf{V}_z \cdot \mathbf{U}_z$$

Problem 3.3.6.1

$\vec{\mathbf{V}} = 12\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ vektörünün kartezyen koordinat eksenleri ile pozitif bölgede eşit açılar yapan ve pozitif bölgeye doğru yönelmiş Δ eksenindeki izdüşümünü ve bu eksenle yaptığı açıyı hesaplayınız.

Çözüm :

$$\mathbf{V}_\Delta = \vec{\mathbf{V}} \bullet \vec{\mathbf{U}}_\Delta$$

İzdüşüm alınacak eksenin birim vektörü bu eksen yönündeki bir vektörü modülüne bölerek elde edilir.

$$\vec{\mathbf{U}}_\Delta = \frac{\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \quad , \quad \vec{\mathbf{U}}_\Delta = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{V}_\Delta = (12\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}) \bullet (\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{k}}) \quad , \quad \mathbf{V}_\Delta = 12 * \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 * \frac{1}{\sqrt{3}} + 4 * \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\mathbf{V}_\Delta = \frac{19}{\sqrt{3}}}$$

$$\mathbf{V}_\Delta = \vec{\mathbf{V}} \bullet \vec{\mathbf{U}}_\Delta = \left|\vec{\mathbf{V}}\right| \mathbf{Cos}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Cos}\,\theta = \frac{\mathbf{V}_\Delta}{\left|\vec{\mathbf{V}}\right|}$$

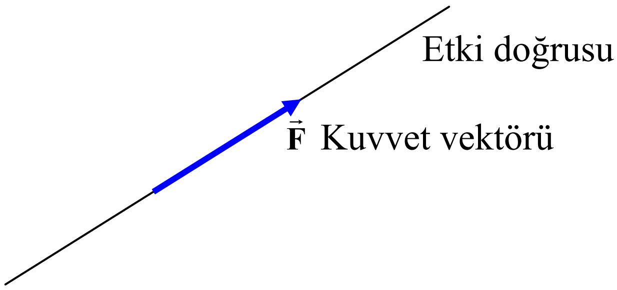
$$\mathbf{Cos}\,\theta = \frac{19}{\sqrt{3} * 13} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Cos}\,\theta = 0{,}844 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 32{,}45^0}$$

BÖLÜM 4

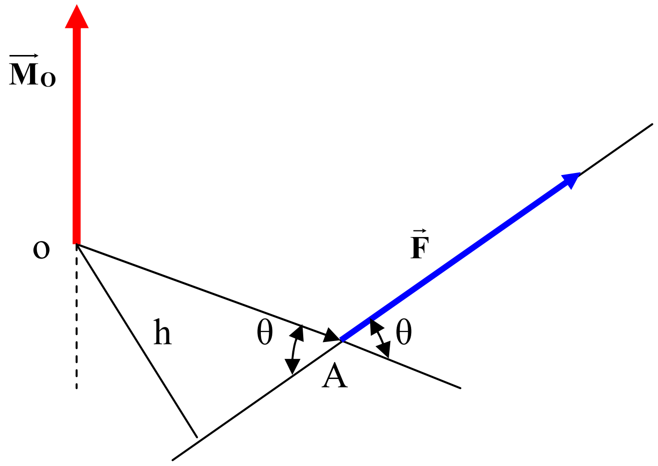
KUVVET SİSTEMLERİ

4.1 Kuvvetin tanımı ve vektörle gösterilişi

Bir cismin şeklini veya hızını değiştiren ve başka cisimler tarafından uygulanan fiziksel etkiye kuvvet denir.
Kuvvet doğrultu yön ve bir şiddet içerdiğinden vektörle gösterilebilir. Yalnız aynı vektörle gösterilmesine rağmen kuvvet cismin farklı yerlerine uygulandığında fiziksel etkisi farklı olur. Bundan dolayı kuvvet özellikle rijid cisim mekaniğinde vektör ve etki doğrusu ile birlikte düşünülmelidir.



4.2 Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti



$$\left|\vec{M}_O\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot h$$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

$$\left|\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}\right| = \left|\vec{F}\right| \left|\overrightarrow{OA}\right| \operatorname{Sin} \theta$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| \operatorname{Sin} \theta = h$$

Buradan $\left|\vec{M}_O\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot h$ olduğu görülür.

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = (A_y \cdot F_z - A_z \cdot F_y)\,\vec{i} + (A_z \cdot F_x - A_x \cdot F_z)\,\vec{j} + (A_x \cdot F_y - A_y F_x)\,\vec{k}$$

Problem 4.2.1

A(3,8,1) ve B(7,–4,4) noktalarından geçen 130 N. şiddetinde olan ve A dan B ye doğru yönelmiş $\vec{F}$ kuvvetinin O(0,0,0) noktasına göre momentini bulunuz.

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{F} = \left|\vec{F}\right| \vec{U}_{AB}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = (7\vec{\mathbf{i}} - 4\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}) - (3\vec{\mathbf{i}} + 8\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}) \quad , \quad \overrightarrow{\mathbf{AB}} = 4\vec{\mathbf{i}} - 12\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$$

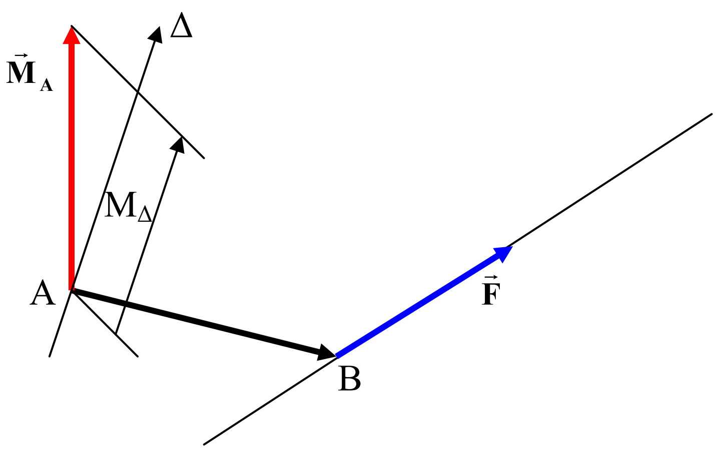
$$\vec{\mathbf{U}}_{\mathbf{AB}} = \frac{4\vec{\mathbf{i}} - 12\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} \quad , \quad \vec{\mathbf{U}}_{\mathbf{AB}} = \frac{4}{13}\vec{\mathbf{i}} - \frac{12}{13}\vec{\mathbf{j}} + \frac{3}{13}\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = 40\vec{\mathbf{i}} - 120\vec{\mathbf{j}} + 30\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = (3\vec{\mathbf{i}} + 8\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}) \wedge (40\vec{\mathbf{i}} - 120\vec{\mathbf{j}} + 30\vec{\mathbf{k}})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 3 & 8 & 1 \\ 40 & -120 & 30 \end{vmatrix} \quad , \quad \boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = 360\,\vec{\mathbf{i}} - 50\vec{\mathbf{j}} - 680\vec{\mathbf{k}}}$$

4.3 Bir kuvvetin bir eksene göre momenti



$$\mathbf{M}_{\Delta} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} \bullet \vec{\mathbf{U}}_{\Delta}$$

$$\mathbf{M}_{\Delta} = \vec{\mathbf{U}}_{\Delta} \bullet (\overrightarrow{\mathbf{AB}} \wedge \vec{\mathbf{F}})$$

$$\mathbf{M}_{\Delta} = \begin{vmatrix} \mathbf{U}_x & \mathbf{U}_y & \mathbf{U}_z \\ \mathbf{B}_x - \mathbf{A}_x & \mathbf{B}_y - \mathbf{A}_y & \mathbf{B}_z - \mathbf{A}_z \\ \mathbf{F}_x & \mathbf{F}_y & \mathbf{F}_z \end{vmatrix}$$

Problem 4.3.1

A(3,8,1) ve B(7,–4,4) noktalarından geçen ve 130 N. Şiddetinde olan $\vec{F}$ kuvvetinin O(0,0,0) ve C(2,6,3) noktalarından geçen Δ eksenine göre momentini bulunuz.(koordinatlar metre cinsindendir.)

$$\mathbf{M}_{\Delta} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} \bullet \vec{\mathbf{U}}_{\Delta}$$

Problem 4.2.1 den $\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = 360\vec{\mathbf{i}} - 50\vec{\mathbf{j}} - 680\vec{\mathbf{k}}$ dır.

$$\vec{\mathbf{U}}_{\Delta} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathbf{OC}}\right|} \quad , \quad \vec{\mathbf{U}}_{\Delta} = \frac{2\vec{\mathbf{i}} + 6\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}}$$

$$\vec{\mathbf{U}}_{\Delta} = \frac{2}{7}\vec{\mathbf{i}} + \frac{6}{7}\vec{\mathbf{j}} + \frac{3}{7}\vec{\mathbf{k}}$$

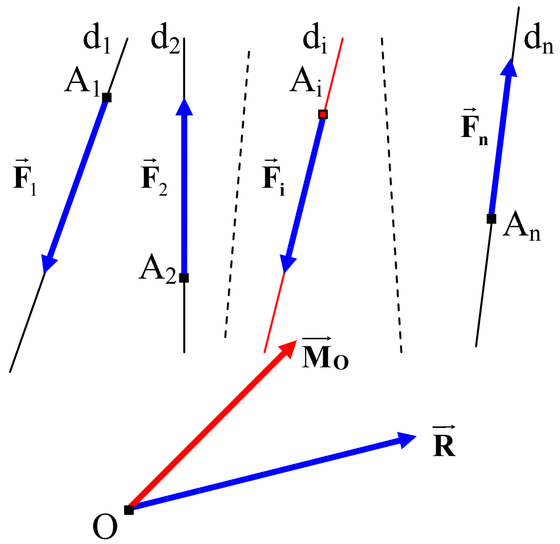
$$\mathbf{M}_{\Delta} = (360\vec{\mathbf{i}} - 50\vec{\mathbf{j}} - 680\vec{\mathbf{k}}) \bullet (\frac{2}{7}\vec{\mathbf{i}} + \frac{6}{7}\vec{\mathbf{j}} + \frac{3}{7}\vec{\mathbf{k}})$$

$$\mathbf{M}_{\Delta} = 360 * \frac{2}{7} - 50 * \frac{6}{7} - 680 * \frac{3}{7} \quad , \quad \mathbf{M}_{\Delta} = \frac{-1620}{7}$$

$$\mathbf{M}_{\Delta} = -231{,}43\,\mathbf{Nm.}$$

4.4 Bir kuvvet sisteminin bir noktaya göre momenti ve indirgeme elemanları (Bir kuvvet sisteminin statik eşdeğeri)

Bir veya birden fazla sayıda kuvvetten oluşan sisteme kuvvet sistemi denir.



Bu n sayıda kuvvetten oluşan kuvvet sisteminin bir uzayın o noktasına göre momentine bileşke moment denir ve bu bileşke moment her bir kuvvetin bu noktaya göre moment vektörlerinin toplamına eşittir.

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{OA}}_{i} \wedge \vec{\mathbf{F}}_{i}$$

Bu n sayıdaki kuvvetin vektörel toplamına geometrik toplam denir.

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_{i}$$

Elde edilen bileşke moment ve geometrik toplamın her ikisine birden bu vektör sisteminin indirgeme elemanları denir.

Bir kuvvet sisteminde bir noktadaki indirgeme elemanlarından faydalanarak başka noktalardaki indirgeme elemanlarının bulunuşu:

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{Q}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \overrightarrow{\mathbf{QA}_\mathbf{i}} \wedge \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{QA}_\mathbf{i}} = \overrightarrow{\mathbf{QO}} + \overrightarrow{\mathbf{OA}_\mathbf{i}}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{Q}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} (\overrightarrow{\mathbf{QO}} + \overrightarrow{\mathbf{OA}_\mathbf{i}}) \wedge \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{Q}} = \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} + \overrightarrow{\mathbf{QO}} \wedge \vec{\mathbf{R}}$$

Problem 4.4.1

Bir kuvvet sistemi $A_1(5,-3,8)$ noktasından geçen $\vec{\mathbf{F}}_1 = 10\vec{\mathbf{i}} + 8\vec{\mathbf{j}} - 14\vec{\mathbf{k}}$, $A_2(10,8,9)$) noktasından geçen $\vec{\mathbf{F}}_2 = 15\vec{\mathbf{i}} + 22\vec{\mathbf{j}} + 16\vec{\mathbf{k}}$, $A_3(2,10,7)$ noktasından geçen $\vec{\mathbf{F}}_3 = -6\vec{\mathbf{i}} + 18\vec{\mathbf{j}} - 9\vec{\mathbf{k}}$ ve $A_4(0,12,-4)$ noktasından geçen $\vec{\mathbf{F}}_4 = 3\vec{\mathbf{i}} - 20\vec{\mathbf{j}} - 8\vec{\mathbf{k}}$ kuvvetlerinden oluşmuştur. Bu kuvvet sisteminin

a) O(0,0,0) noktasındaki indirgeme elemanlarını

b) Q(10,12,–6) noktasındaki indirgeme elemanlarını bulunuz.

Çözüm:

a)

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{4} \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i} \quad , \quad \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \vec{\mathbf{F}}_3 + \vec{\mathbf{F}}_4$$

$$\vec{\mathbf{R}} = (10\vec{\mathbf{i}} + 8\vec{\mathbf{j}} - 14\vec{\mathbf{k}}) + (15\vec{\mathbf{i}} + 22\vec{\mathbf{j}} + 16\vec{\mathbf{k}}) + (-6\vec{\mathbf{i}} + 18\vec{\mathbf{j}} - 9\vec{\mathbf{k}}) + (3\vec{\mathbf{i}} - 20\vec{\mathbf{j}} - 8\vec{\mathbf{k}})$$

$$\vec{\mathbf{R}} = (10 + 15 - 6 + 3)\vec{\mathbf{i}} + (8 + 22 + 18 - 20)\vec{\mathbf{j}} + (-14 + 16 - 9 - 8)\vec{\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{R}} = 22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}}}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \sum_{\mathbf{i}=1}^{4} \overrightarrow{\mathbf{OA}_\mathbf{i}} \wedge \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{i} \quad , \quad \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}_1} \wedge \vec{\mathbf{F}}_1 + \overrightarrow{\mathbf{OA}_2} \wedge \vec{\mathbf{F}}_2 + \overrightarrow{\mathbf{OA}_3} \wedge \vec{\mathbf{F}}_3 + \overrightarrow{\mathbf{OA}_4} \wedge \vec{\mathbf{F}}_4$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}_1} \wedge \vec{\mathbf{F}}_1 = (5\vec{\mathbf{i}} - 3\vec{\mathbf{j}} + 8\vec{\mathbf{k}}) \wedge (10\vec{\mathbf{i}} + 8\vec{\mathbf{j}} - 14\vec{\mathbf{k}})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}_1} \wedge \vec{\mathbf{F}}_1 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 5 & -3 & 8 \\ 10 & 8 & -14 \end{vmatrix} = -22\vec{\mathbf{i}} + 150\vec{\mathbf{j}} + 70\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}_2} \wedge \vec{\mathbf{F}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 10 & 8 & 9 \\ 15 & 22 & 16 \end{vmatrix} = -70\vec{\mathbf{i}} - 25\vec{\mathbf{j}} + 100\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}_3 \wedge \vec{\mathbf{F}}_3 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 2 & 10 & 7 \\ -6 & 18 & -9 \end{vmatrix} = -216\vec{\mathbf{i}} - 24\vec{\mathbf{j}} + 96\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}_4 \wedge \vec{\mathbf{F}}_4 = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 12 & -4 \\ 3 & -20 & -8 \end{vmatrix} = -16\vec{\mathbf{i}} - 12\vec{\mathbf{j}} - 36\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O = (-22\vec{\mathbf{i}} + 150\vec{\mathbf{j}} + 70\vec{\mathbf{k}}) + (-70\vec{\mathbf{i}} - 25\vec{\mathbf{j}} + 100\vec{\mathbf{k}}) + (-216\vec{\mathbf{i}} - 24\vec{\mathbf{j}} + 96\vec{\mathbf{k}}) + (-16\vec{\mathbf{i}} - 12\vec{\mathbf{j}} - 36\vec{\mathbf{k}})$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O = (-22 - 70 - 216 - 16)\vec{\mathbf{i}} + (150 - 25 - 24 - 12)\vec{\mathbf{j}} + (70 + 100 + 96 - 36)\vec{\mathbf{k}}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}_O = -324\vec{\mathbf{i}} + 89\vec{\mathbf{j}} + 230\vec{\mathbf{k}}}$$

b)

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i \quad , \quad \boxed{\vec{\mathbf{R}} = 22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}}}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \vec{\mathbf{M}}_O + \overrightarrow{\mathbf{QO}} \wedge \vec{\mathbf{R}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{QO}} = -10\vec{\mathbf{i}} - 12\vec{\mathbf{j}} + 6\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{QO}} \wedge \vec{\mathbf{R}} = (-10\vec{\mathbf{i}} - 12\vec{\mathbf{j}} + 6\vec{\mathbf{k}}) \wedge (22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{QO}} \wedge \vec{\mathbf{R}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ -10 & -12 & 6 \\ 22 & 28 & -15 \end{vmatrix} = 12\vec{\mathbf{i}} - 18\vec{\mathbf{j}} - 16\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = (-324\vec{\mathbf{i}} + 89\vec{\mathbf{j}} + 230\vec{\mathbf{k}}) + (12\vec{\mathbf{i}} - 18\vec{\mathbf{j}} - 16\vec{\mathbf{k}})$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}_Q = -312\vec{\mathbf{i}} + 71\vec{\mathbf{j}} + 214\vec{\mathbf{k}}}$$

4.5 Bir kuvvet sisteminin değişmezleri

a) Bir kuvvet sisteminde kuvvetlerin geometrik toplamı olan $\vec{\mathbf{R}}$ noktadan noktaya değişmez.
b) Bir kuvvet sisteminde bileşke momentin geometrik toplam üzerindeki izdüşümü noktadan noktaya değişmez.

İspat:

$$\vec{\mathbf{M}}_Q \bullet \vec{\mathbf{U}}_R = (\vec{\mathbf{M}}_O + \overrightarrow{\mathbf{QO}} \wedge \vec{\mathbf{R}}) \bullet \vec{\mathbf{U}}_R$$

$(\overrightarrow{\mathbf{QO}} \wedge \vec{\mathbf{R}}) \bullet \vec{\mathbf{U}}_R = 0$ ($\vec{\mathbf{R}}$ ve $\vec{\mathbf{U}}_R$ aynı doğrultuda olduğundan)

$$\vec{\mathbf{M}}_Q \bullet \vec{\mathbf{U}}_R = \vec{\mathbf{M}}_O \bullet \vec{\mathbf{U}}_R$$

elde edilir.
Yukarıdaki denklemin her iki tarafı $|\vec{\mathbf{R}}|$ ile çarpılırsa

$$\vec{\mathbf{M}}_Q \bullet \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_O \bullet \vec{\mathbf{R}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten Bileşke moment ile geometrik toplamın skaler çarpımının noktadan noktaya değişmediği anlaşılır.

Problem 4.5.1

Problem 4.4.1 deki kuvvet sistemi için $\vec{\mathbf{M}}_Q \bullet \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_O \bullet \vec{\mathbf{R}}$ eşitliğini gerçekleyiniz.

Çözüm:

$$\vec{\mathbf{R}} = 22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_O} = -324\vec{\mathbf{i}} + 89\vec{\mathbf{j}} + 230\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_Q} = -312\vec{\mathbf{i}} + 71\vec{\mathbf{j}} + 214\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q \bullet \vec{\mathbf{R}} = (-312\vec{\mathbf{i}} + 71\vec{\mathbf{j}} + 214\vec{\mathbf{k}}) \bullet (22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}})$$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q \bullet \vec{\mathbf{R}} = -312 * 22 + 71 * 28 + 214 * (-15)$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}_Q \bullet \vec{\mathbf{R}} = -8086}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O \bullet \vec{\mathbf{R}} = (-324\vec{\mathbf{i}} + 89\vec{\mathbf{j}} + 230\vec{\mathbf{k}}) \bullet (22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}})$$

$$\vec{\mathbf{M}}_O \bullet \vec{\mathbf{R}} = -324 * 22 + 89 * 28 + 230 * (-15)$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}_O \bullet \vec{\mathbf{R}} = -8086} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\mathbf{M}}_Q \bullet \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_O \bullet \vec{\mathbf{R}} = -8086}$$

4.6 Dejenere kuvvet sistemleri

Bileşke momentle geometrik toplamın birbiri ile skaler çarpımının sıfır olduğu kuvvet sistemlerine dejenere kuvvet sistemleri denir.

$\vec{\mathbf{M}}_O \bullet \vec{\mathbf{R}} = 0$

Bu eşitlik ile aşağıdaki durumlarda karşılaşılır.

4.6.1) $\vec{\mathbf{M}}_O = \vec{0}$, $\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$ (sıfıra eşdeğer kuvvet sistemi)

4.6.2) $\vec{\mathbf{M}}_O \neq \vec{0}$, $\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$ (kuvvet çiftine eşdeğer kuvvet sitemi)

4.6.3) $\vec{\mathbf{M}}_O = \vec{0}$, $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{0}$ (bileşkeye eşdeğer kuvvet sistemi)

4.6.4) $\vec{\mathbf{M}}_O \neq \vec{0}$, $\vec{\mathbf{R}} \neq \vec{0}$ (bileşkesi olan vektör sistemi)

Düzlemsel , bir noktada kesişen ve paralel kuvvet sistemleri dejenere kuvvet sistemleridir.

4.6.1 Sıfıra eşdeğer kuvvet sistemi

$\vec{\mathbf{M}}_O = \vec{0}$ $\quad \vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$

Sıfıra eşdeğer kuvvet sisteminde

1) Kuvvet sistemi tek bir kuvvetten oluşmuşsa bu kuvvetin şiddeti sıfır olmalı.
2) Kuvvet sistemi iki kuvvetten oluşmuş ise bu kuvvetler aynı doğrultuda ters yönde ve eşit şiddette olmalıdır.
3) Kuvvet sistemi üç kuvvetten oluşmuş ve birbirine paralel değil ise bu kuvvet sisteminin geometrik toplamının sıfır olabilmesi için kuvvetlerin oluşturduğu poligon kapalı bir üçgen olmalıdır. Bu kuvvet sisteminde bileşke momentin sıfır olabilmesi için bu üç kuvvetin doğrultusu aynı yerde kesişmelidir.

4.6.2 Kuvvet çiftine eşdeğer kuvvet sitemi

$\vec{\mathbf{M}}_O \neq \vec{0}$, $\quad \vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$

Bir kuvvet sisteminde Geometrik toplam sıfır Bileşke moment sıfırdan farklı ise bu kuvvet sistemi tek bir momente eşdeğer olur. Bu moment vektörüne dik düzlemlerde alınan kuvvet çiftleri ile de bu kuvvet sistemi temsil edilebilir.
Bir kuvvet sistemi tek bir momente eşdeğer ise bu noktadan noktaya değişmez.

$\overrightarrow{\mathbf{M}_Q} = \overrightarrow{\mathbf{M}_O} + \overrightarrow{\mathbf{QO}} \wedge \vec{\mathbf{R}}$

ve $\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$ olduğundan

$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}_Q} = \overrightarrow{\mathbf{M}_O}}$

olur.

4.6.3 Bileşkeye eşdeğer kuvvet sistemi

$\vec{\mathbf{M}}_O = \vec{0}$, $\quad \vec{\mathbf{R}} \neq \vec{0}$

Eğer bir noktada bileşke moment sıfır ve geometrik toplam sıfırdan farklı ise bu geometrik toplam sanki sistem tek bir kuvvetten oluşmuş gibi bu sistemi temsil edebileceğinden bu geometrik toplama bu kuvvet sisteminin bileşkesi denir.

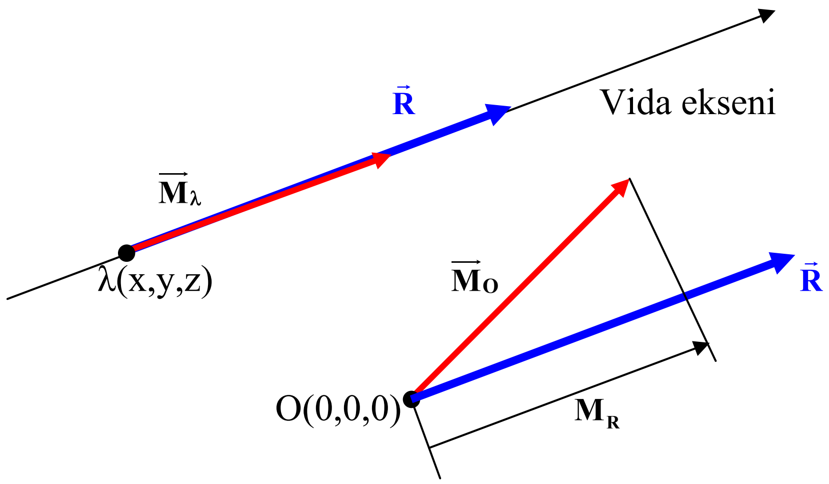
4.6.4 Bileşkesi olan kuvvet sistemi

$\vec{M}_O \neq \vec{0}$, $\vec{R} \neq \vec{0}$

Eğer dejenere vektör sisteminde Bileşke moment ve geometrik toplamın her ikisi de sıfırdan farklı ise bu iki vektör birbirine dik olmalıdır. Bu vektör sisteminin bileşkesi bulunabilir.

4.7 Merkezi eksen

Bileşke momentle geometrik toplamın aynı doğrultuda olduğu eksene merkezi eksen veya vida ekseni denir.



Merkezi eksen üzerindeki bir nokta λ(x,y,z) ve O(0,0,0) noktasındaki bileşke moment $\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$ ise

Bileşke momentin geometrik toplam üzerindeki izdüşümü değişmiyeceğinden

$\vec{M}_\lambda = M_R \cdot \vec{U}_R$

yazılabilir. $M_R = \vec{M}_O \bullet \vec{U}_R$

$M_R = M_x \cdot U_{Rx} + M_y U_{Ry} + M_z U_{Rz}$

$\vec{M}_\lambda = M_R \cdot U_{Rx}\ \vec{i} + M_R \cdot U_{Ry}\ \vec{j} + M_R \cdot U_{Rz}\ \vec{k}$

Bundan başka geçiş teoremi uygulanarak $\vec{M}_\lambda$ aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$\vec{M}_\lambda = \vec{M}_O + \overrightarrow{\lambda O} \wedge \vec{R}$

$\vec{M}_\lambda - \vec{M}_O = \vec{R} \wedge \overrightarrow{O\lambda}$

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{O\lambda} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ R_x & R_y & R_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$\vec{R} \wedge \overrightarrow{O\lambda} = (R_y \cdot z - R_z \cdot y)\ \vec{i} + (R_z \cdot x - R_x \cdot z)\ \vec{j} + (R_x \cdot y - R_y \cdot x)\ \vec{k}$

$R_y \cdot z - R_z \cdot y = M_R \cdot U_{Rx} - M_x$

$R_z \cdot x - R_x \cdot z = M_R \cdot U_{Ry} - M_y$

$R_x \cdot y - R_y \cdot x = M_R \cdot U_{Rz} - M_z$

Problem 4.7.1

Problem 4.4.1 verilen kuvvet sisteminin merkezi ekseninin denklemini bulunuz. merkezi eksenin yoz düzlemini kestiği noktanın koordinatlarını bulunuz.

$$\vec{\mathbf{R}} = 22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}} \quad , \qquad \overrightarrow{\mathbf{M}_O} = -324\vec{\mathbf{i}} + 89\vec{\mathbf{j}} + 230\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_\lambda} - \overrightarrow{\mathbf{M}_O} = \vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}\lambda}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_\lambda} = \mathbf{M_R} \cdot \vec{\mathbf{U}}_\mathbf{R}$$

$$\mathbf{M_R} = \overrightarrow{\mathbf{M}_O} \bullet \vec{\mathbf{U}}_\mathbf{R}$$

$$\vec{\mathbf{U}}_\mathbf{R} = \frac{\vec{\mathbf{R}}}{\left|\vec{\mathbf{R}}\right|}$$

$$\vec{\mathbf{U}}_\mathbf{R} = \frac{22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{(22)^2 + (28)^2 + (-15)^2}} \quad , \quad \vec{\mathbf{U}}_\mathbf{R} = \frac{22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}}}{\sqrt{1493}} \ ,$$

$$\vec{\mathbf{U}}_\mathbf{R} = 0,5694\vec{\mathbf{i}} + 0,7247\vec{\mathbf{j}} - 0,3882\vec{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{M_R} = (-324\vec{\mathbf{i}} + 89\vec{\mathbf{j}} + 230\vec{\mathbf{k}}) \bullet (0,5694\vec{\mathbf{i}} + 0,7247\vec{\mathbf{j}} - 0,3882\vec{\mathbf{k}})$$

$$\mathbf{M_R} = -209,273$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_\lambda} = -209,273 \cdot (0,5694\vec{\mathbf{i}} + 0,7247\vec{\mathbf{j}} - 0,3882\vec{\mathbf{k}})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_\lambda} = -119,16\vec{\mathbf{i}} - 151,66\vec{\mathbf{j}} + 81,24\vec{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_\lambda} - \overrightarrow{\mathbf{M}_O} = (-119,16\vec{\mathbf{i}} - 151,66\vec{\mathbf{j}} + 81,24\vec{\mathbf{k}}) - (-324\vec{\mathbf{i}} + 89\vec{\mathbf{j}} + 230\vec{\mathbf{k}})$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_\lambda} - \overrightarrow{\mathbf{M}_O} = 204,84\vec{\mathbf{i}} - 240,66\vec{\mathbf{j}} - 148,76\vec{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}\lambda} = (22\vec{\mathbf{i}} + 28\vec{\mathbf{j}} - 15\vec{\mathbf{k}}) \wedge (\mathbf{x}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\,\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\,\vec{\mathbf{k}})$$

$$\vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}\lambda} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 22 & 28 & -15 \\ \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{R}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{O}\lambda} = (28\mathbf{z} + 15\mathbf{y})\,\vec{\mathbf{i}} + (-15\mathbf{x} - 22\mathbf{z})\,\vec{\mathbf{j}} + (22\mathbf{y} - 28\mathbf{x})\vec{\mathbf{k}}$$

$$(28\mathbf{z} + 15\mathbf{y})\,\vec{\mathbf{i}} + (-15\mathbf{x} - 22\mathbf{z})\,\vec{\mathbf{j}} + (22\mathbf{y} - 28\mathbf{x})\vec{\mathbf{k}} = 204,84\vec{\mathbf{i}} - 240,66\vec{\mathbf{j}} - 148,76\vec{\mathbf{k}}$$

$$28\mathbf{z} + 15\mathbf{y} = 204,84$$

$$-15\mathbf{x} - 22\mathbf{z} = -240,66$$

$$22\mathbf{y} - 28\mathbf{x} = -148,76$$

Bu Lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 15 & 28 \\ -15 & 0 & -22 \\ -28 & 22 & 0 \end{vmatrix} = 15 * (-22) * (-28) + 28 * (-15) * 22 = 0$$

sıfır olduğundan bu denklem sistemi birbirinden bağımsız değildir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinde sıfırdan farklı 2x2 lik determinant bulunduğundan bu denklemlerden ikisi birbirinden bağımsızdır.

Bu denklemlerin herhangi ikisi birbirinden bağımsız olduğundan bunlardan herhangi ikisi verilen kuvvet sisteminin merkezi ekseninin denklemi olarak alınabilir.

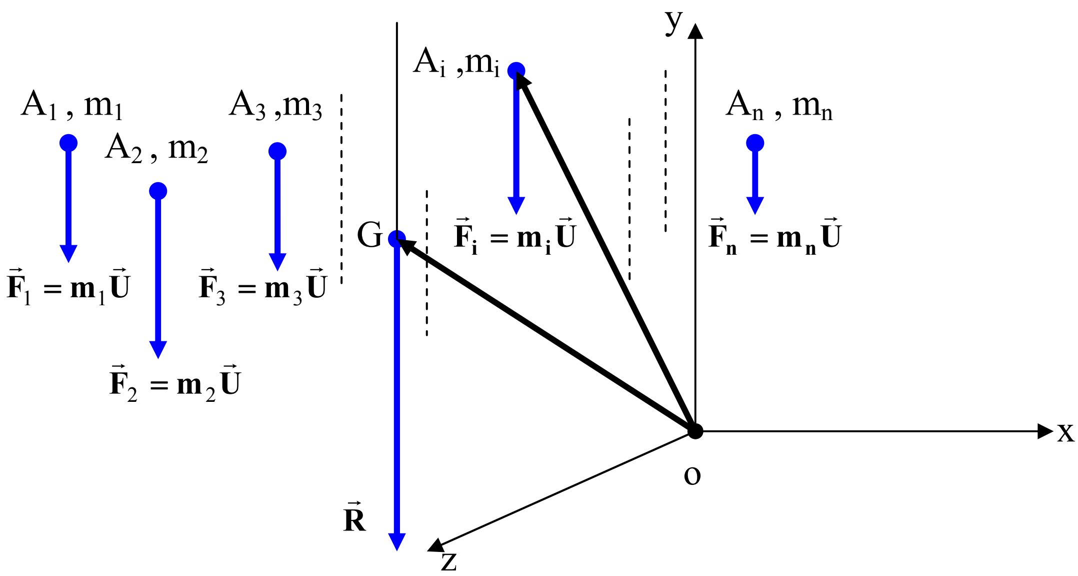
$$\boxed{\begin{array}{l} 22\,\mathbf{y} - 28\,\mathbf{x} = -148,76 \\ -15\,\mathbf{x} - 22\,\mathbf{z} = -240,66 \end{array}}$$

Merkezi eksen üzerinde $\mathbf{x} = 0$ da

$$22\,\mathbf{y} - 28\,\mathbf{x} = -148,76 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{y} = -6,762}$$

$$-15\,\mathbf{x} - 22\,\mathbf{z} = -240,66 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{z} = 10,94}$$

4.8 Paralel bağlı kuvvet sistemi ve merkezi



$$\overrightarrow{\mathbf{M}_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{OA}_i} \wedge \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_O} = \overrightarrow{\mathbf{OG}} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{F}}_i$$

$$\vec{\mathbf{F}}_i = \mathbf{m}_i \cdot \vec{\mathbf{U}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i \cdot \overrightarrow{\mathbf{OG}} - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i \cdot \overrightarrow{\mathbf{OA}_i}\right) \wedge \vec{\mathbf{U}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \xi\,\vec{i} + \eta\,\vec{j} + \zeta\,\vec{k}$$

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Problem 4.8.1

Paralel bağlı bir kuvvet sistemi $A_1(3,7,12)$ noktasındaki 8kg lık m_1 kütlesi , $A_2(6,2,-8)$ noktasındaki 10kg lık m_2 kütlesi ve $A_3(10,-4,-5)$ noktasındaki 3 kg lık m_3 kütlesinden oluşmuştur. Bu kuvvet sisteminin merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.(koordinatlar cm. cinsinden alınmıştır.)

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\xi = \frac{8*3 + 10*6 + 3*10}{8 + 10 + 3} \quad , \quad \boxed{\xi = 5{,}43\,\mathbf{cm.}}$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\eta = \frac{8*7 + 10*2 + 3*(-4)}{8 + 10 + 3} \quad , \quad \boxed{\eta = 3{,}05\,\mathbf{cm.}}$$

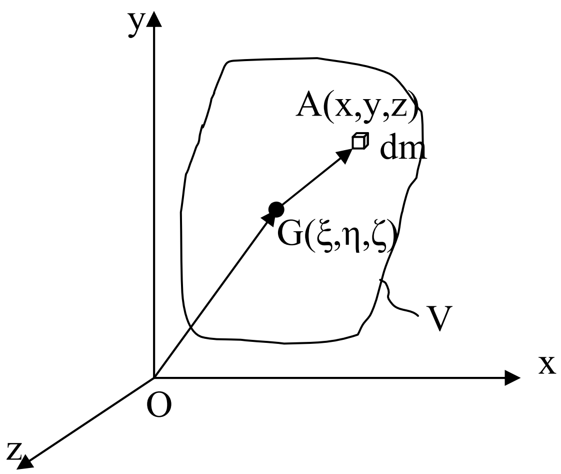
$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\zeta = \frac{8*12 + 10*(-8) + 3*(-5)}{8 + 10 + 3} \quad , \quad \boxed{\zeta = 0{,}048\,\mathbf{cm.}}$$

BÖLÜM 5

KÜTLE MERKEZİ

5.1 Bir sürekli cismin kütle merkezi



$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\int_V \overrightarrow{\mathbf{OA}}\,\mathbf{dm}}{\int_V \mathbf{dm}}$$

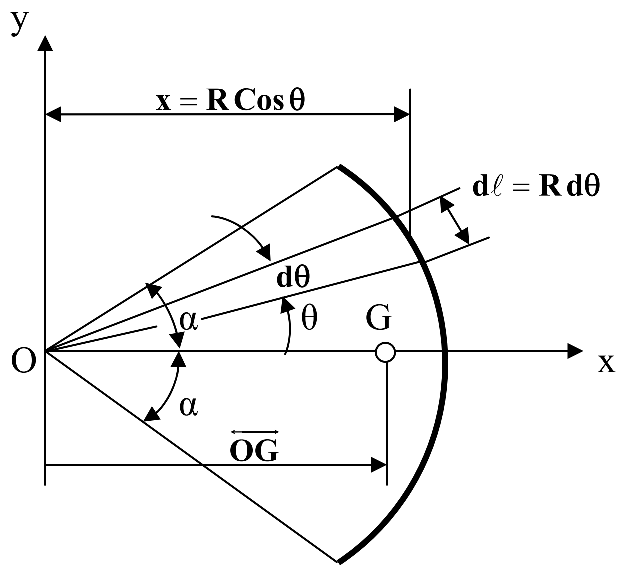
$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \xi\,\vec{\mathbf{i}} + \eta\,\vec{\mathbf{j}} + \zeta\,\vec{\mathbf{k}}$$

$$\xi = \frac{\int_V \mathbf{x\,dm}}{\int_V \mathbf{dm}} \quad , \quad \eta = \frac{\int_V \mathbf{y\,dm}}{\int_V \mathbf{dm}} \quad , \quad \zeta = \frac{\int_V \mathbf{z\,dm}}{\int_V \mathbf{dm}}$$

Problem 5.1.1

R yarıçaplı 2α tepe açılı çember parçası şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



$$dm = \rho\, d\ell$$
$$dm = \rho\, R\, d\theta$$

x ekseni simetri ekseni olduğu için
$\eta = 0$ dır.

$$\xi = \frac{\int_{\ell} x\, dm}{\int_{\ell} dm} \quad , \quad \xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x\, dm}{\int_{-\alpha}^{\alpha} dm}$$

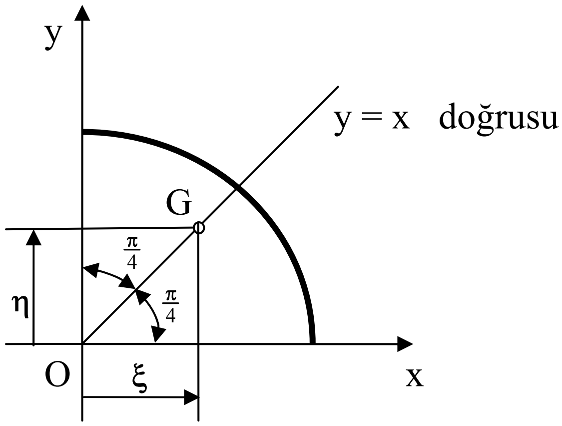
$$\xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho R \cos\theta \; R\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho R\, d\theta} \quad , \quad \xi = \frac{\rho R^2 [\sin\alpha - (\sin\alpha)]}{\rho R[\alpha - (-\alpha)]}$$

$$\xi = \frac{2\rho R^2 \sin\alpha}{2\rho R\alpha} \quad , \quad \boxed{\xi = \overleftrightarrow{OG} = \frac{R \sin\alpha}{\alpha}}$$

Problem 5.1.2

Şekilde gösterilen dörtte bir çember parçası şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :



Şekildeki dörtte bir çember parçası için y = x doğrusu simetri ekseni olduğundan

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\overleftrightarrow{\mathbf{OG}}$$

Problem 5.1.1 den $\overleftrightarrow{\mathbf{OG}} = \dfrac{\mathbf{RSin}\,\alpha}{\alpha}$ $\qquad \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

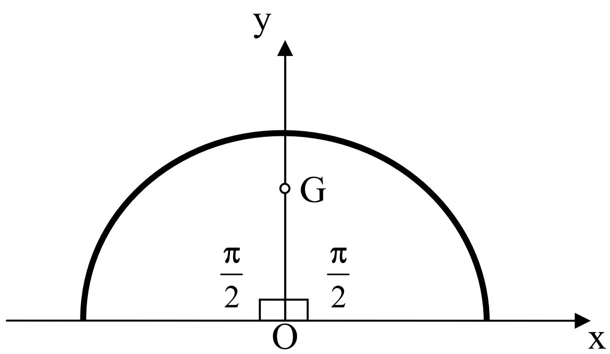
$$\overleftrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{\mathbf{RSin}\,(\frac{\pi}{4})}{\pi/4} \quad , \qquad \overleftrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{2\sqrt{2}\mathbf{R}}{\pi}$$

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}\mathbf{R}}{\pi}\right) \quad , \qquad \xi = \eta = \frac{2\mathbf{R}}{\pi}$$

Problem 5.1.3

Şekilde gösterilen yarım çember şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :



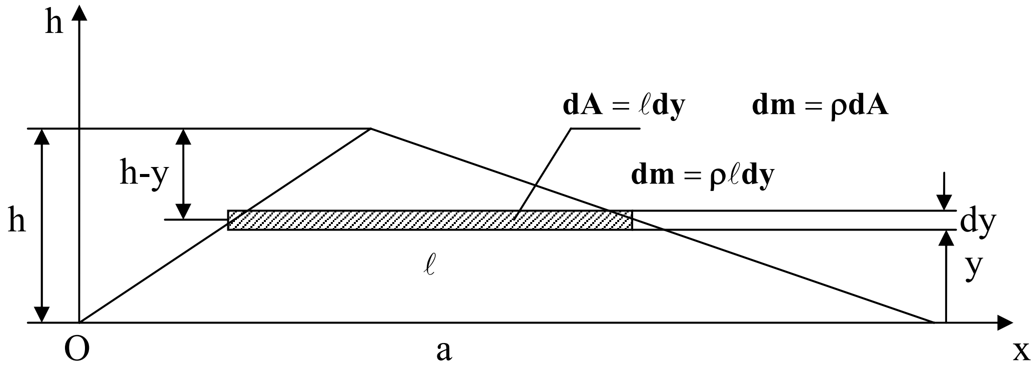
y Ekseni simetri ekseni olduğu için $\xi = 0$ dır.

Problem 5.1.1 den $\eta = \overleftrightarrow{\mathbf{OG}} = \dfrac{\mathbf{RSin}\,\alpha}{\alpha}$

$$\eta = \frac{\mathbf{RSin}\dfrac{\pi}{2}}{\pi/2} \quad , \quad \boxed{\eta = \frac{2\mathbf{R}}{\pi}}$$

Problem 5.1.4

Yüksekliği h olan üçgen şeklindeki homojen levhanın kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.



$$\eta = \frac{\int_A \mathbf{y\,dm}}{\int_A \mathbf{dm}} \quad , \quad \eta = \frac{\int_0^h \mathbf{y\rho\ell dy}}{\int_0^h \mathbf{\rho\ell dy}} \quad , \quad \eta = \frac{\rho\int_0^h \mathbf{y\ell dy}}{\rho\int_0^h \mathbf{\ell dy}}$$

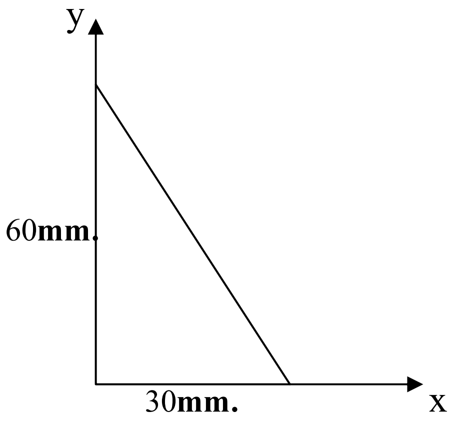
$$\frac{\ell}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{h-y}}{\mathbf{h}} \quad , \quad \ell = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{h}}(\mathbf{h-y})$$

$$\eta = \frac{\rho\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{h}}\int_0^h (\mathbf{hy-y^2})\mathbf{dy}}{\rho\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{h}}\int_0^h (\mathbf{h-y})\mathbf{dy}} \quad , \quad \eta = \frac{\rho\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{h}}\left(\dfrac{\mathbf{h}^3}{2} - \dfrac{\mathbf{h}^3}{3}\right)}{\rho\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{h}}\left(\mathbf{h}^2 - \dfrac{\mathbf{h}^2}{2}\right)} \quad , \quad \eta = \frac{\rho\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{h}}\dfrac{\mathbf{h}^3}{6}}{\rho\dfrac{\mathbf{a}}{\mathbf{h}}\dfrac{\mathbf{h}^2}{2}} \quad , \quad \eta = \frac{\rho\mathbf{a}\dfrac{\mathbf{h}^2}{6}}{\rho\mathbf{a}\dfrac{\mathbf{h}}{2}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{\mathbf{h}}{3}}$$

Problem 5.1.5

Şekilde ölçüleri verilen dik üçgen şeklindeki homojen levhanın kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.



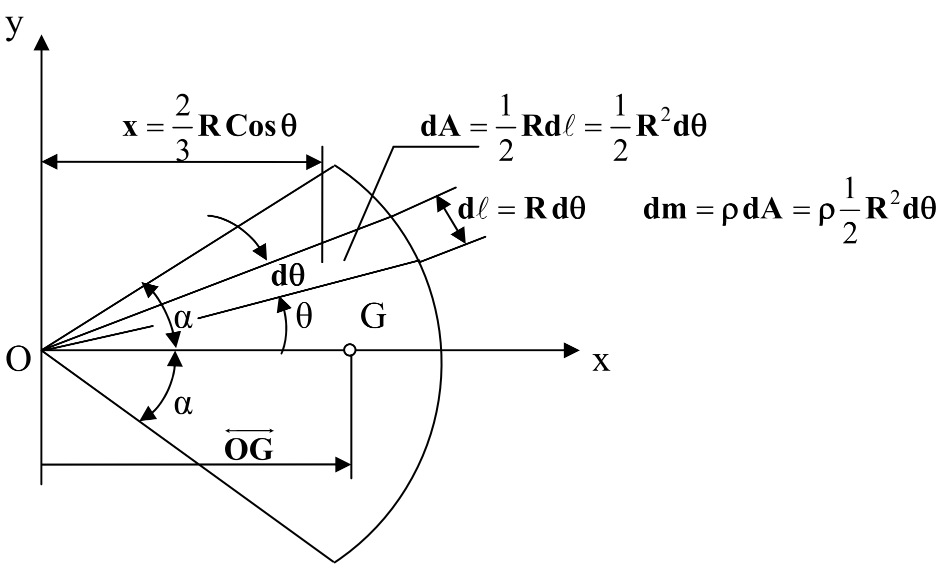
Problem 5.1.4 den $\xi = \frac{30}{3}$, $\eta = \frac{60}{3}$

$\boxed{\xi = 10\textbf{mm.}}$, $\boxed{\eta = 20\textbf{mm.}}$

Problem 5.1.6

R yarıçaplı 2α tepe açılı daire dilimi şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm:



x ekseni simetri ekseni olduğu için

$\eta = 0$ dır.

$$\xi = \frac{\int_A x\,dm}{\int_A dm} \quad , \quad \xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} x\,dm}{\int_{-\alpha}^{\alpha} dm}$$

$$\xi = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R\,Cos\,\theta\,(\rho \frac{1}{2} R^2 d\theta)}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \rho \frac{1}{2} R^2 d\theta} \quad , \quad \xi = \frac{\frac{1}{3}\rho R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} Cos\,\theta\,d\theta}{\frac{1}{2}\rho R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

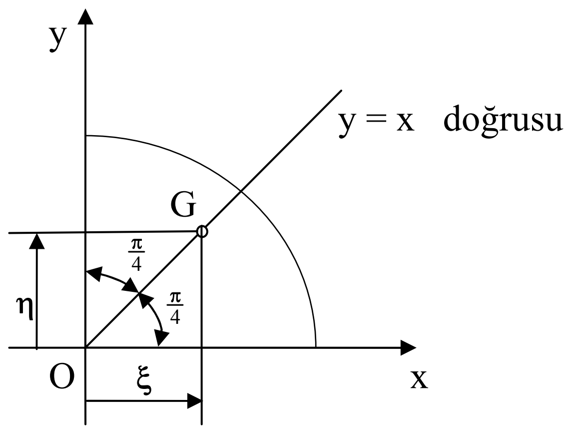
$$\xi = \frac{\frac{1}{3}\rho R^3 [Sin\,\alpha - (-Sin\,\alpha)]}{\frac{1}{2}\rho R^2 [\alpha - (-\alpha)]} \quad , \quad \xi = \frac{\frac{2}{3}\rho R^3 Sin\,\alpha}{\rho R^2 \alpha}$$

$$\boxed{\xi = \overleftrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\frac{R\,Sin\,\alpha}{\alpha}}$$

Problem 5.1.7

Şekilde gösterilen dörtte bir daire dilimi şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :



Şekildeki dörtte bir daire dilimi için y = x doğrusu simetri ekseni olduğundan

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\overleftrightarrow{OG}$$

Problem 5.1.4 den $\overleftrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\frac{R Sin\,\alpha}{\alpha}$ $\qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$

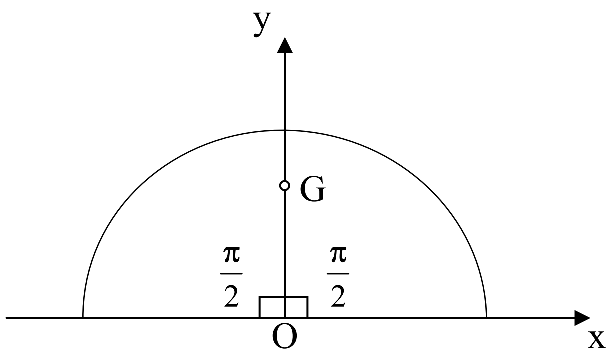
$$\overleftrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\frac{R Sin(\frac{\pi}{4})}{\pi/4} \quad , \quad \overleftrightarrow{OG} = \frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}$$

$$\xi = \eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}) \quad , \quad \boxed{\xi = \eta = \frac{4R}{3\pi}}$$

Problem 5.1.8

Şekilde gösterilen yarım daire dilimi şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :



y Ekseni simetri ekseni olduğu için $\xi = 0$ dır.

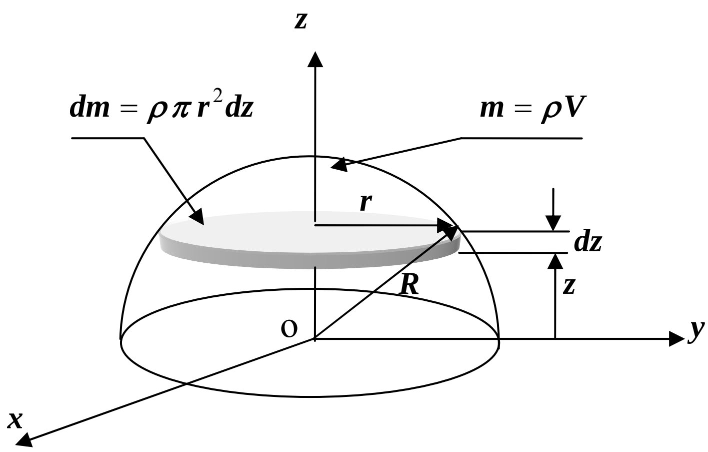
Problem 5.1.4 den $\eta = \overleftrightarrow{\mathbf{OG}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\mathbf{RSin}\,\alpha}{\alpha}$

$$\eta = \frac{2\mathbf{RSin}\frac{\pi}{2}}{3\pi/2} \quad , \quad \boxed{\eta = \frac{4\mathbf{R}}{3\pi}}$$

Problem 5.1.9

Şekilde gösterilen R taban yarıçaplı yarım küre şeklindeki homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını gösteriniz.

Çözüm:



yoz düzlemi simetri düzlemi olduğu için $\xi = 0$ dır.

xoz düzlemi simetri düzlemi olduğu için $\eta = 0$ dır.

$$\zeta = \frac{\int_V z\,dm}{\int_V dm} \quad , \quad \zeta = \frac{\int_0^R z\rho\pi r^2 dz}{\int_0^R \rho\pi r^2 dz} \quad , \quad \zeta = \frac{\rho\pi\int_0^R z r^2 dz}{\rho\pi\int_0^R r^2 dz}$$

$$r^2 = R^2 - z^2 \quad , \quad \zeta = \frac{\rho\pi\int_0^R (zR^2 - z^3)dz}{\rho\pi\int_0^R (R^2 - z^2)dz} \quad , \quad \zeta = \frac{\rho\pi(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4})}{\rho\pi(R^3 - \frac{R^3}{3})}$$

$$\zeta = \frac{\rho\pi(\frac{R^4}{4})}{\rho\pi(\frac{2}{3}R^3)} \quad , \quad \boxed{\zeta = \frac{3}{8}R}$$

5.2 Bileşik cismin kütle merkezi

Bir bileşik cismin kütle merkezi bu cismi oluşturan cisimlerin kütle merkezleri bulunduktan sonra daha önceden çıkarılan paralel bağlı vektör sisteminin merkezine ait olan formüllerle hesaplanır.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$\overrightarrow{OG} = \xi\,\vec{i} + \eta\,\vec{j} + \zeta\,\vec{k}$$

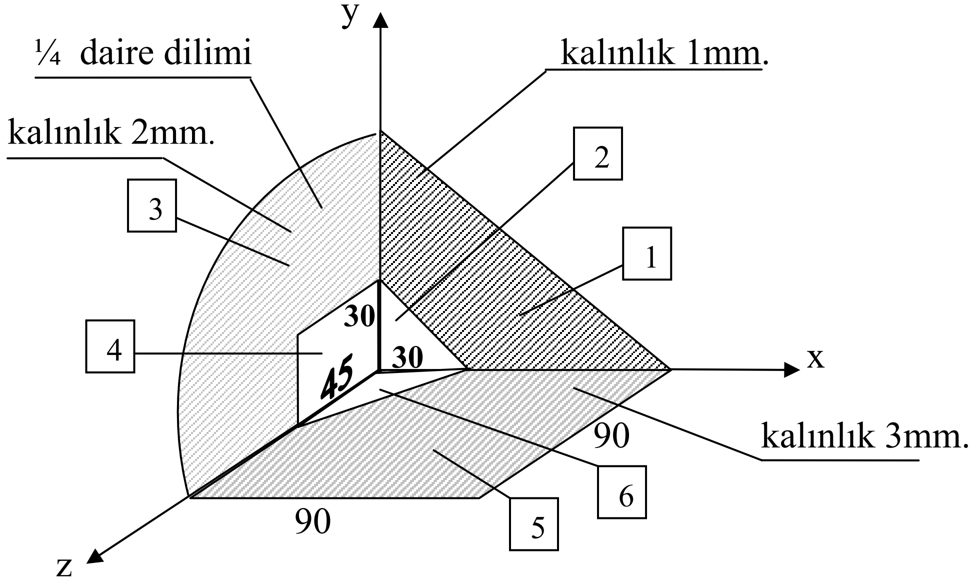
$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Eğer bileşik cismi oluşturan cisimlerin yoğunluğu aynı ise yukarıdaki denklemlerde $m_i = \rho V_i$ yazılabilir ve ρ lar toplam dışına alınıp kısaltılabileceğinden dolayı aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \quad , \quad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} \quad , \quad \zeta = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

Problem 5.2.1

Homojen fakat farklı kalınlıklardaki levhalardan şekildeki taralı alan gibi oluşturulmuş cismin kütle merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.



(Ölçüler mm. cinsindendir.)

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{y}_3 = \frac{4\mathbf{R}}{3\pi}\ ,\quad \mathbf{y}_3 = \frac{4*90}{3\pi} = \frac{120}{\pi}\quad ,\quad \mathbf{A}_3 = \frac{\pi\mathbf{R}^2}{4}\quad ,\quad A_3 = 2025\pi$$

	x	Y	z	A	M=ρA	mx	my	mz
1	30	30	0	4050	4050	121500	121500	0
2	10	10	0	-450	-450	-4500	-4500	0
3	0	120/π	120/π	2025π	4050π	0	486000	486000
4	0	15	22,5	-1350	-2700	0	-40500	-60750
5	45	0	45	8100	24300	1093500	0	1093500
6	10	0	15	-675	-2025	-20250	0	-30375
			∑	16036,7	35898,45	1149750	562500	1488375

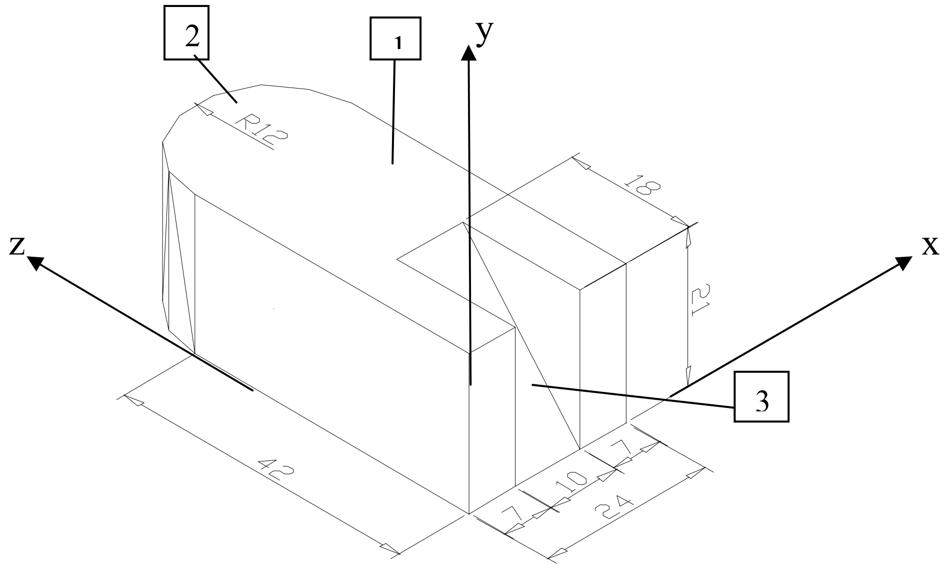
$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{6} \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^{6} \mathbf{m}_i}\ ,\qquad \xi = \frac{\mathbf{1149750}}{\mathbf{35898{,}45}}\ ,\qquad \boxed{\xi = 32{,}03\,\mathbf{mm.}}$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{6} \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{y}_i}{\sum_{i=1}^{6} \mathbf{m}_i}\ ,\qquad \eta = \frac{\mathbf{562500}}{\mathbf{35898{,}45}}\ ,\qquad \boxed{\eta = \mathbf{15{,}67mm.}}$$

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{6} \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{z}_i}{\sum_{i=1}^{6} \mathbf{m}_i}\ ,\qquad \zeta = \frac{\mathbf{1488375}}{\mathbf{35898{,}45}}\ ,\qquad \boxed{\zeta = \mathbf{41{,}46\,mm.}}$$

Problem 5.2.2

Şekilde gösterilen içi dolu homojen cismin kütle merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.



(Ölçüler cm. cinsindendir.)

$$\mathbf{z}_2 = 42 + \frac{4\mathbf{R}}{3\pi} \;, \quad \mathbf{z}_2 = 42 + \frac{16}{\pi} = 47{,}093\mathbf{cm.} \;, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{\pi\mathbf{R}^2}{4} 21 \;,$$

$$\mathbf{V}_2 = 756\pi = 2375{,}04\mathbf{cm}^3$$

	x	y	z	V	Vx	Vy	Vz
1	12	10,5	21	21168	254016	222264	444528
2	12	10,5	47,093	2375,04	28500,5	24938	111848
3	12	14	6	-1890	-22680	-26460	-11340
			$\sum$	21653,04	259836,5	220742	545036

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}_i} \;, \quad \xi = \frac{259836{,}5}{21653{,}04} \;, \quad \boxed{\xi = 12\mathbf{cm.}}$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{y}_i}{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}_i} \;, \quad \eta = \frac{220742}{21653{,}04} \;, \quad \boxed{\eta = 10{,}2\mathbf{cm.}}$$

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{z}_i}{\sum_{i=1}^{3} \mathbf{V}_i} \;, \quad \zeta = \frac{545036}{21653{,}04} \;, \quad \boxed{\zeta = 25{,}17\mathbf{cm.}}$$

BÖLÜM 6

STATİK

6.1 Giriş

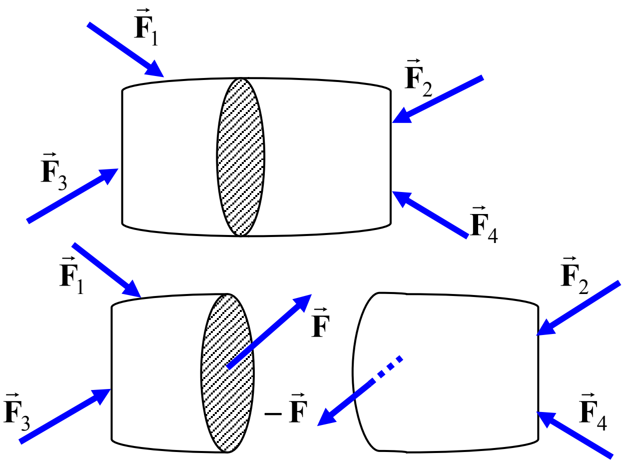
Statik kuvvetler etkisinde cisimlerin denge koşullarını inceleyen bilim dalıdır. Bu tanımlamada adı geçen kuvvet , cisim ve denge terimlerini açıklayalım.

Kuvvet: Ele alınan Cisme başka cisimler tarafından uygulanan ve cismin hareket veya denge durumları ile şeklini değiştiren etkiye kuvvet denir. Kuvvetler etkinin cinsine göre : Temas etkisi (yüzey kuvvetleri) ve uzaktan etki (hacim kuvvetleri) olmak üzere ikiye ayrılır.

Dengesi incelenen cisimle temasta olan mafsal,mesnet,kablo,çubuk gibi diğer cisimlerden gelen kuvvetler yüzey kuvvetleridir.

Uzaktan etki kuvvetlerine örnek, ağırlık kuvvetleri, magnetik ve elektriksel alanlardan gelen kuvvetler verilebilir.

Kuvvetler cisme etki bölgesine göre: İç kuvvet dış kuvvet şeklinde ikiye ayrılır.



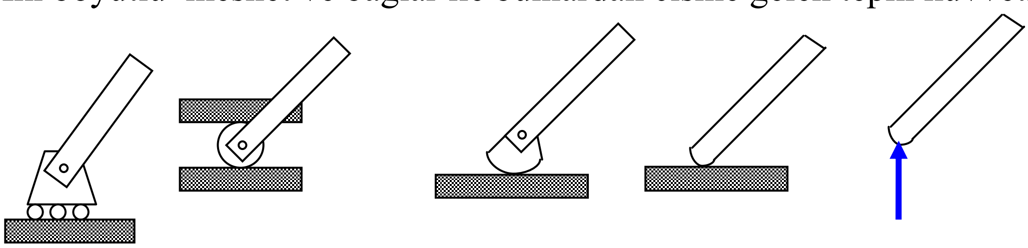
Şekilde gösterilen $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ kuvvetleri dış kuvvetler, $\vec{F}$ ve $-\vec{F}$ kuvvetleri ise iç kuvvetlerdir. İç kuvvetler şekilde gösterildiği gibi cismin içinde varolduğu düşünülen bir kesitte oluşur.Bu hayali kesitle cisim iki parçaya ayrılır. Oluşan bu iki ayrı kesitteki iç kuvvetlerin etki tepki ilkesine göre şiddet ve doğrultuları aynı yönleri zıttır.

Kuvvetler cisme mesnetler ve diğer cisimlerden uygulanma durumuna göre : Bilinen kuvvetler (aktif kuvvetler) ve mesnet veya bağlardan geleceği düşünülen tepki kuvvetleri (reaktif kuvvetler) olmak üzere ikiye ayrılır.

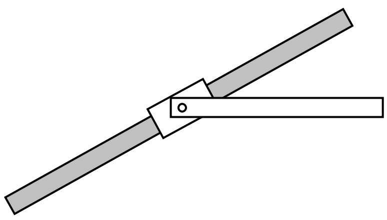
Aktif kuvvetler: Ağırlık kuvvetleri veya cismin zorlanma koşullarına göre bilinen dış kuvvetlerdir.

Tepki kuvvetleri : mesnet,mafsal, kablo, çubuk gibi diğer cisimlerin uyguladıkları kuvvetlerdir. Bu tepki kuvvetlerinin tam zıttı dengesi incelenen cisim tarafından diğer cisimlere aynı şekilde etkir.
Sürtünmesiz temaslarda tepki kuvveti temas yüzeyine diktir.

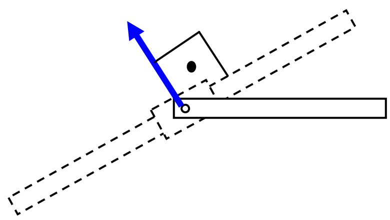
İki boyutlu mesnet ve bağlar ile bunlardan cisme gelen tepki kuvvetleri:



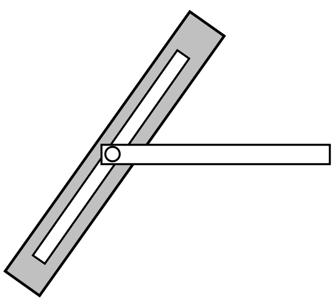
Yuvarlanan elemanlar kavisli yüzey sürtünmesiz yüzey kayma yüzeyine dik tepki kuvveti



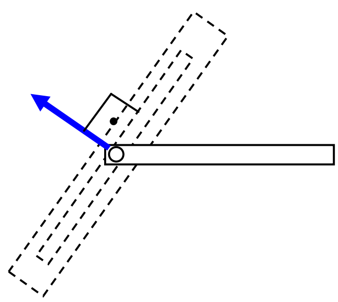
Çubuk doğrultusunda hareket edebilen bilezik ve buna mafsallı diğer çubuk



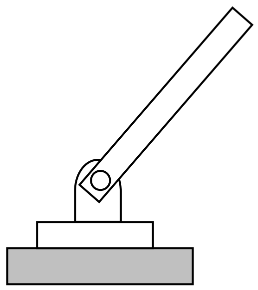
tepki kuvveti hareket doğrultusuna dik

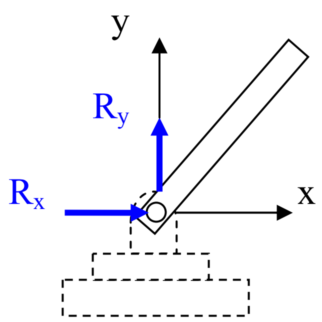


Kanal doğrultusunda hareket



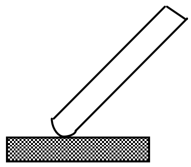
kanal doğrultusuna dik tepki kuvveti

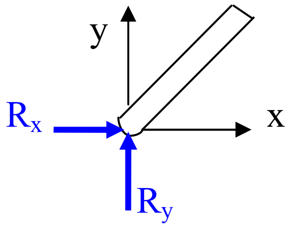




Sabit silindirik mafsallı

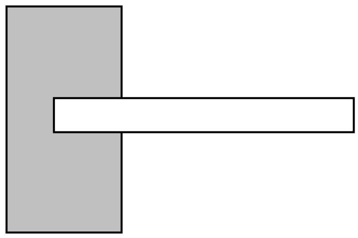
Tepki kuvvetinin doğrultusu bilinmiyor.

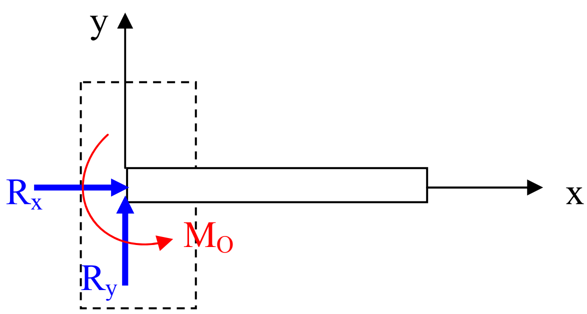




Pürüzlü yüzey

Yüzey tepkisinin doğrultusu bilinmiyor

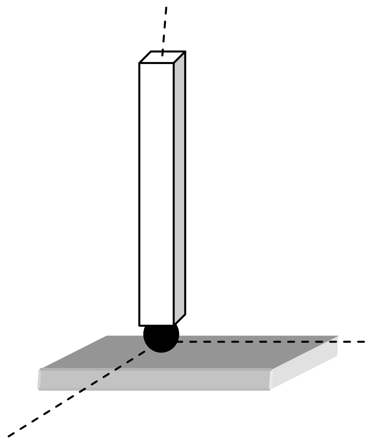




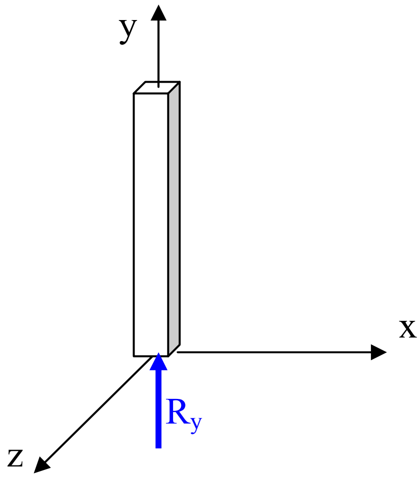
Ankastre mesnet

Bilinmeyen kuvvet ve şiddeti bilinmeyen moment

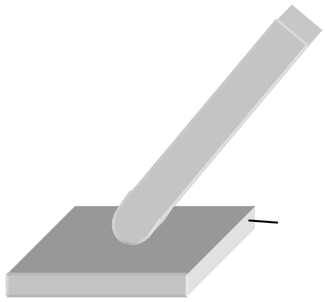
Üç boyutlu mesnet ve bağlar ile bunlardan cisme gelen tepki kuvvetleri:



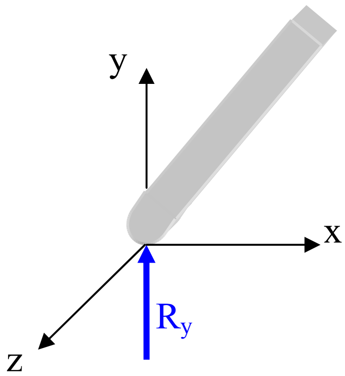
tek noktadan küreye temas



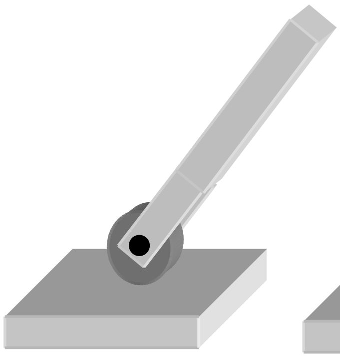
temas yüzeyine dik tepki kuvveti



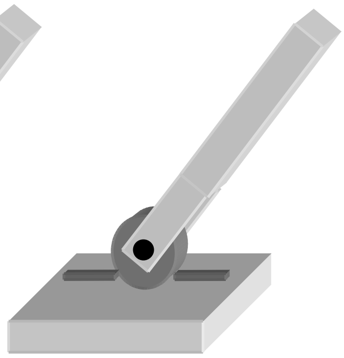
Sürtünmesiz temas



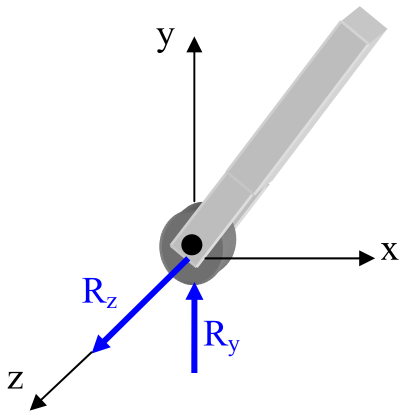
temas yüzeyine dik tepki kuvveti



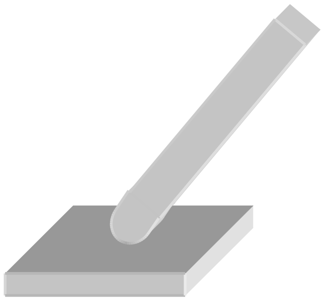
Pürüzlü yüzeyde
Yuvarlanan tekerlek



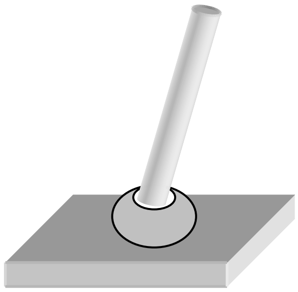
ray üzerinde
yuvarlanan tekerlek



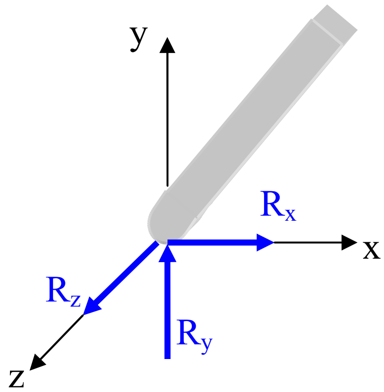
iki doğrultuda bilinmiyen
tepki kuvveti



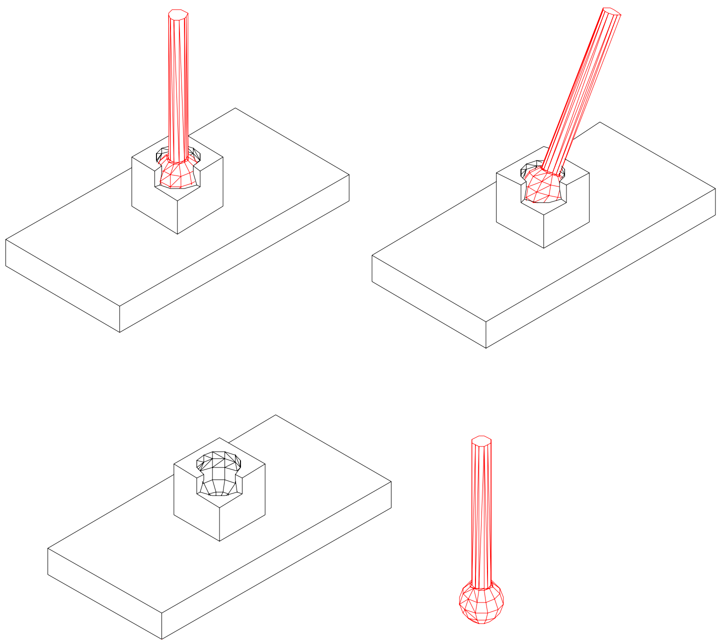
Pürüzlü yüzey



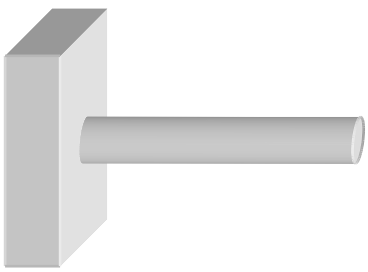
küresel mafsal



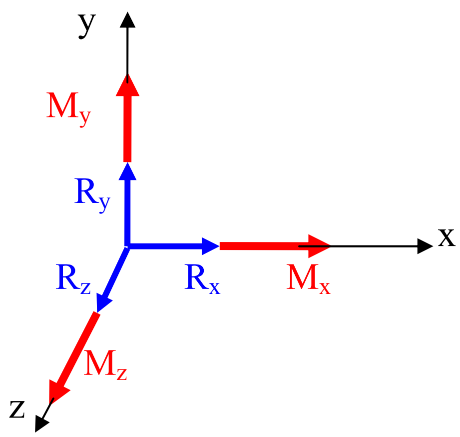
üç doğrultuda bilinmiyen
tepki kuvvetleri



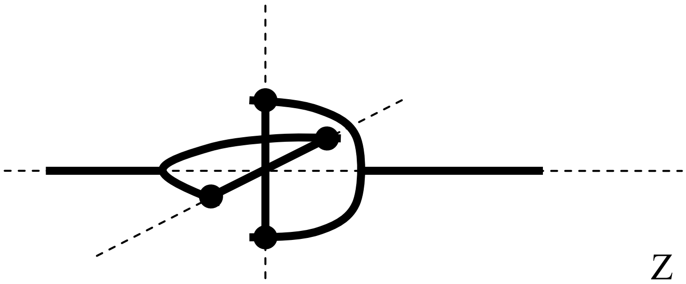
Küresel mafsalın ayrıntılı şekli

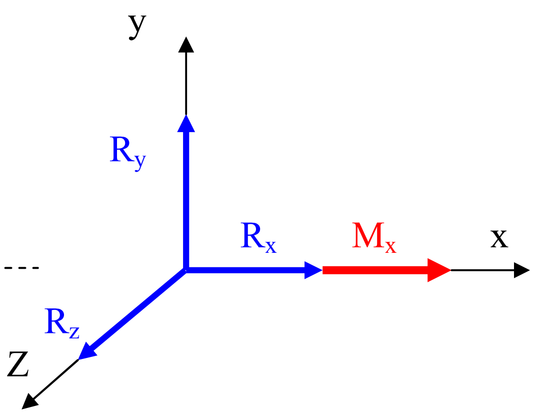


ankastre mesnet



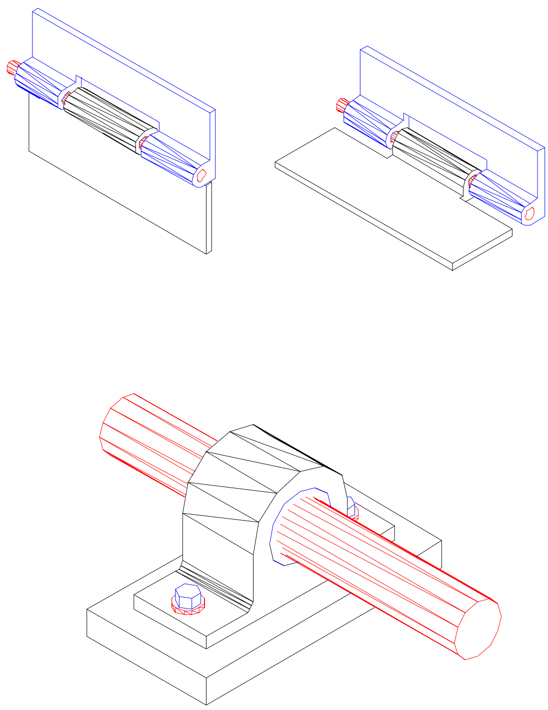
üç doğrultuda bilinmiyen tepki kuvveti
ve üç doğrultuda bilinmiyen tepki momenti

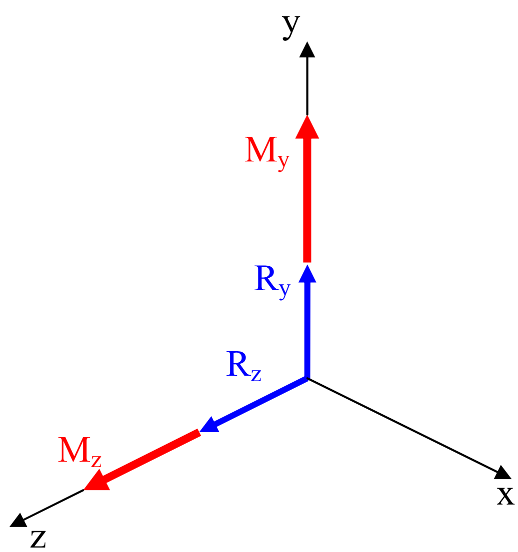




Üniversal kavrama

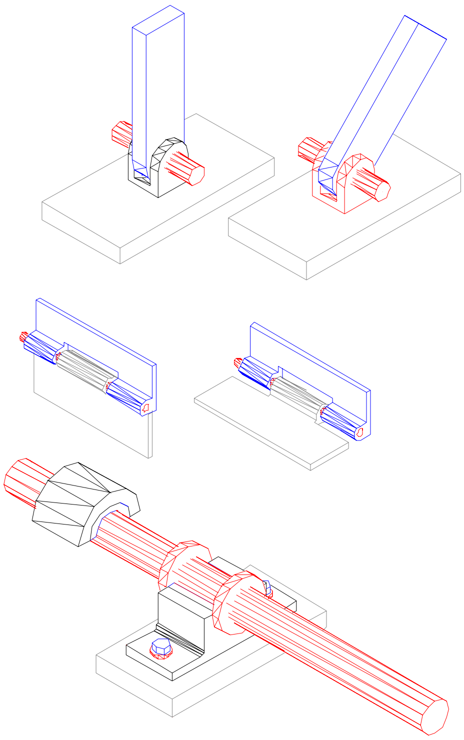
üç doğrultuda bilinmiyen kuvvet ve
bir doğrultuda bilinmiyen moment

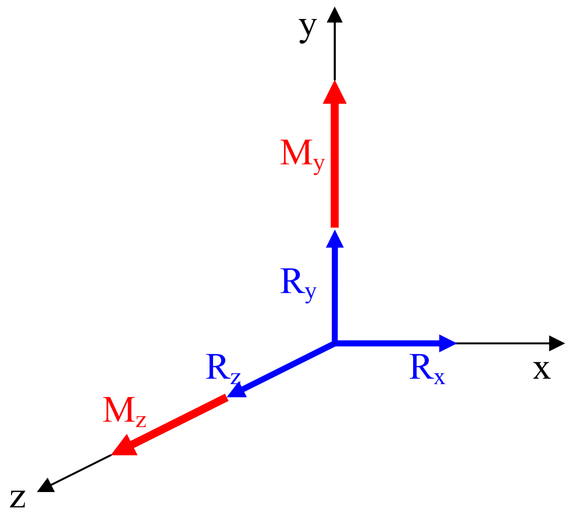




İki doğrultuda bilinmiyen kuvvet ve
iki doğrultuda bilinmiyen moment

Eksenel doğrultuda hareket edebilen silindirik mafsal





Üç doğrultuda bilinmiyen kuvvet ve
İki doğrultuda bilinmiyen moment

Eksenel doğrultuda hareket yeteneği olmayan silindirik mafsal

Bunlardan başka ip kuvveti ip doğrultusundadır. Birde ağırlıksız olup uç noktalarından sürtünmesiz mafsallı ve uç noktaları dışında yük taşımıyan çubuklardan gelen tepki kuvvetleride çubuk doğrultusunda kabul edilir.

6.2 İç kuvvetler ve kesit zorları

İç kuvvetlerin cismin bir kesiti içindeki bileşenlerine kesit zorları denir.
Kesite etki eden kuvvetin kesite dik bileşenine **Normal kuvvet** denir.
Kesite etki eden kuvvetin kesit içindeki bileşenine **Kesme kuvveti** denir.
Kesite etki eden momentin kesite dik bileşenine **Burulma momenti** denir.
Kesite etki eden momentin kesit içindeki bileşenine **Eğilme momenti** denir.

6.3 Statiğin temel ilkelerinin geçerli olduğu referans sistemleri

Orijininde güneş bulunan ve yıldızlara doğru yönelmiş koordinat sistemlerine Newton veya Galileo eksen sistemleri denir. Statiğin temel ilkeleri bu eksen sitemlerine göre geçerlidir.
Bir Newton eksen sistemine göre sabit hızda öteleme hareketi yapan diğer eksen sistemleri de Newton eksen sistemidir.
Herhangi bir cisim Newton eksen sistemine göre hareketsiz veya sabit hızda öteleme hareketi yapıyorsa bu cisim dengededir denir.

6.4 Bir maddesel noktanın kuvvetler etkisinde dengesi

Bir maddesel noktaya etki eden bütün kuvvetler aynı noktada kesişeceğinden dolayı bu kuvvetlerin geometrik toplamının sıfır olması denge için gerek ve yeter koşuldur.

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum \mathbf{F}_x \, \vec{\mathbf{i}} + \sum \mathbf{F}_y \, \vec{\mathbf{j}} + \sum \mathbf{F}_z \, \vec{\mathbf{k}}$$

$$\sum \mathbf{F}_x = 0 \quad , \quad \sum \mathbf{F}_y = 0 \quad , \quad \sum \mathbf{F}_z = 0$$

6.5 Bir rijid cismin kuvvetler etkisinde dengesi

Bir rijid cisme etki eden kuvvvet sisteminin sıfıra eşdeğer olması bu cismin dengesi için gerek ve yeter koşuldur.

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{0} \quad , \quad \sum \vec{\mathbf{M}}_O = \vec{0}$$

$$\sum \mathbf{F}_x = 0 \; , \quad \sum \mathbf{F}_y = 0 \; , \quad \sum \mathbf{F}_z = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_x = 0 \; , \quad \sum \mathbf{M}_y = 0 \, , \quad \sum \mathbf{M}_z = 0$$

Böylece en genel durumda üç boyutlu kuvvetler etkisindeki bir cismin dengesinde denklem sayısı altı olur. Bu denklemlerden altı bilinmiyen çözülebilir. Üç boyutlu kuvvetler etkisinde dengesi incelenen cisimde bilinmiyen sayısı altıdan fazla ise böyle sistemlere hiperstatik sistemler denir.

6.6 Rijid cisim sisteminin kuvvetler etkisinde dengesi

Bir rijid cisim sistemine etki eden kuvvet sisteminin sıfıra eşdeğer olması denge için gerekli fakat yeterli koşul değildir. Bundan dolayı rijid cisim siteminin elemanlarına ayrılarak incelenmesi gerekir.Her bir eleman için sıfıra eşdeğerlik koşulu ve birleşme noktalarında etki tepki ilkesi gözönüne alınarak çözüme gidilir.

6.7 Düzlemsel kuvvetler etkisinde cisimlerin dengesi

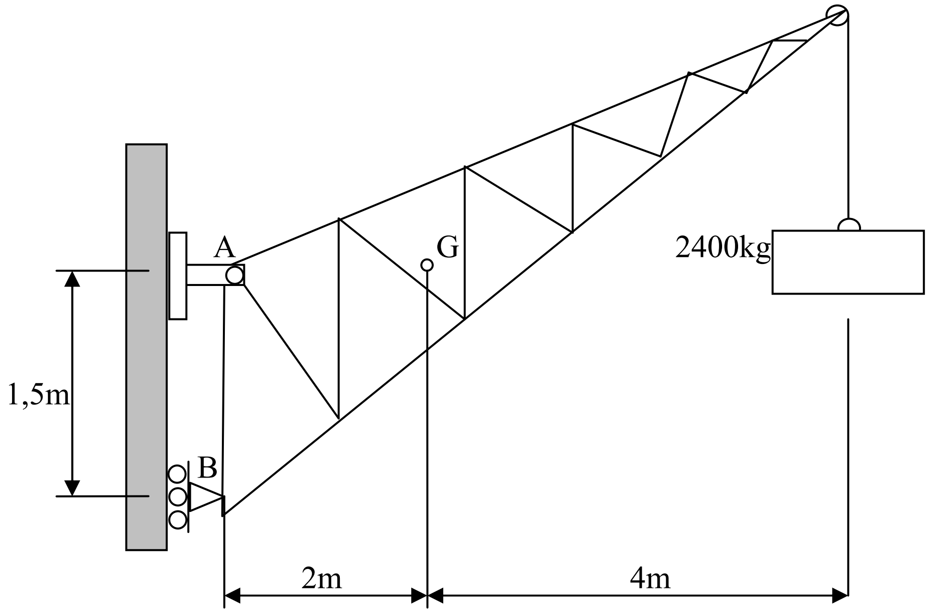
Eğer cisme etki eden dış kuvvetler ve mesnetlerden gelen tepkiler aynı düzlem içinde ise incelenen problem düzlem statik problemidir.
Aynı düzlemde bulunan kuvvetlerin momenti bu düzleme dik olacağından dolayı bu durumda $\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$, $\sum \vec{\mathbf{M}}_O = \vec{0}$ sıfıra eşdeğerlik koşulu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum \mathbf{F}_x = 0 \; , \quad \sum \mathbf{F}_y = 0 \quad , \quad \sum \mathbf{M}_z = 0$$

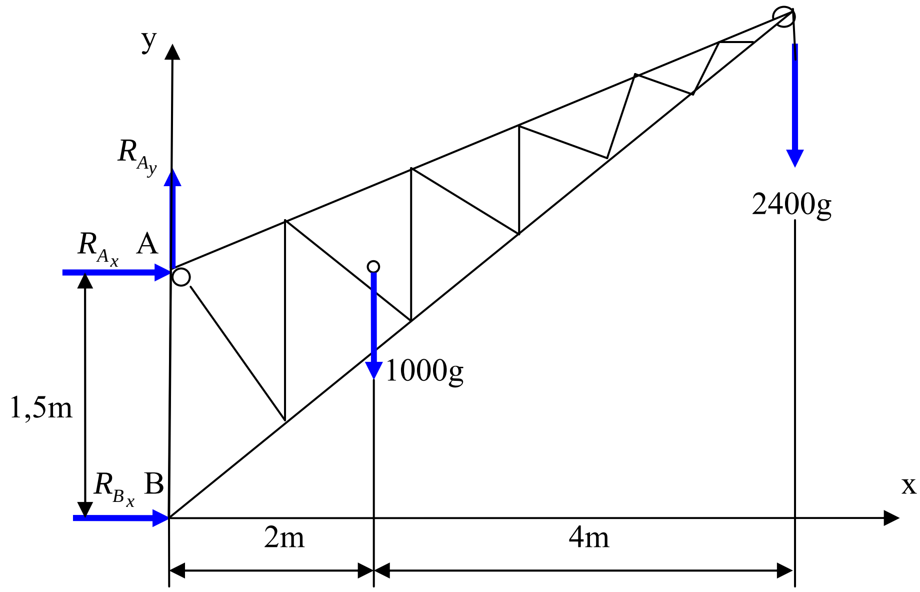
Böylece düzlemsel kuvvetler etkisindeki bir cismin dengesinde denklem sayısı üçe inmiş olur. Bu denklemlerden üç bilinmiyen çözülebilir. Düzlemsel kuvvetler etkisinde dengesi incelenen cisimde bilinmiyen sayısı üçten fazla ise böyle sistemlere hiperstatik sistemler denir.

Problem 6.7.1

1000 kg kütleli bir sabit vinç 2400 kg kütleli bir cismi kaldırmakta kullanılıyor. Vinç A da sabit B de kayıcı mafsal ile mesnetlenmiştir. Vincin kütle merkezi G dir. A ve B mesnetlerindeki tepkileri bulunuz.



Çözüm:



B deki mesnet kayıcı mafsal olduğu için y ekseni doğrultusunda kuvvet taşıyamaz. Bundan dolayı B mesneti sadece x ekseni doğrultusunda tepki kuvveti uygulayabilir.

$$R_{B_y} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A_x} + R_{B_x} = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A_y} - 1000g - 2400g = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{B_x} * 1{,}5 - 1000g * 2 - 2400g * 6 = 0$$

Bu eşitliklerden

$$\boxed{R_{B_x} = 107,256kN}$$

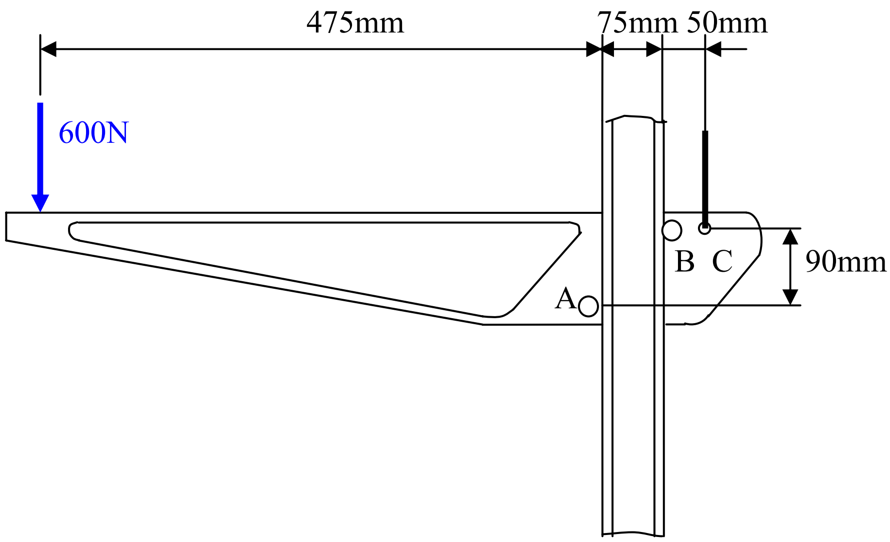
$$\boxed{R_{A_x} = -R_{B_x} = -107,256kN}$$

$$\boxed{R_{A_y} = 33,354kN}$$

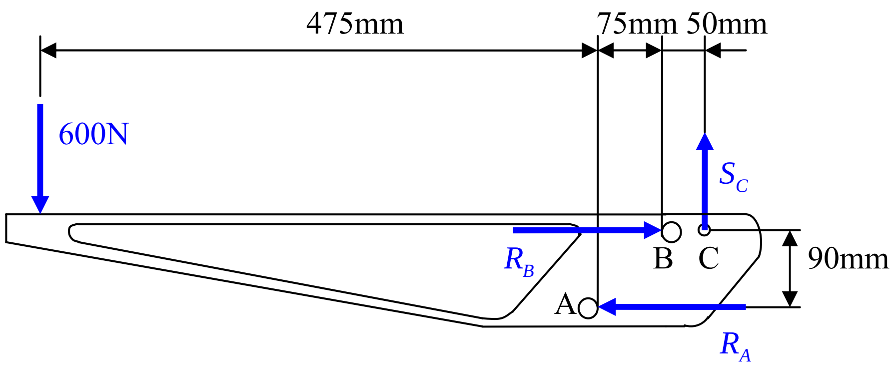
$$R_A = \sqrt{(-107,256)^2 + (33,354)^2} \qquad \boxed{R_A = 112,32kN}$$

Problem 6.7.2

Hareketli bir kol C ye bağlanmış bir kablo ve A ile B deki sürtünmesiz tekerlekler yardımıyla dengede tutuluyor. Şekildeki yükleme halinde kablodaki kuvveti ve A ile B deki tepkileri hesaplayınız.



Çözüm:



A ve B mesnetlerinde sürtünme olmadığı için buradaki tepkiler yatay doğrultudadır.

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B - R_A = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_C - 600 = 0$$
$$\Sigma M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A * 90 - 600 * 600 = 0$$

Bu üç denklemden

$\boxed{R_A = 4000\,Newton}$, $\boxed{R_B = R_A = 4000\,Newton}$

$\boxed{S_C = 600N}$

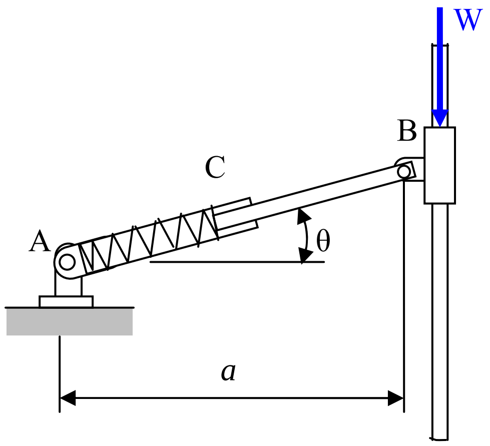
bulunur.

Problem 6.7.3

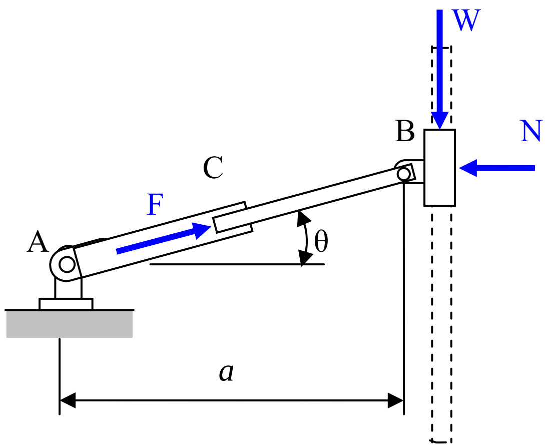
Yay katsayısı k olan AC iç yayı θ = 60^0 iken doğal uzunluğundadır.

a) Sistemin denge durumunda θ, W , *a* ve k arasındaki bağıntıyı bulunuz.

b) Denge durumunda W=80N , *a* =300 mm ve θ =25^0 olduğu bilindiğine göre yay katsayısı k yı hesaplayınız.



Çözüm:



a)

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F\cos\theta - N = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F\sin\theta - W = 0$$

Bu iki denklemden $F = \dfrac{W}{\sin\theta}$

eşitliği bulunur. Ayrıca F yay kuvveti $F = k * \Delta s$ denklemi ile hesaplanır.

Yaydaki kısalma $\Delta s = \dfrac{a}{\cos 60^0} - \dfrac{a}{\cos\theta}$, $\Delta s = a(2 - \dfrac{1}{\cos\theta})$

$$F = ka(2 - \frac{1}{\cos\theta})$$

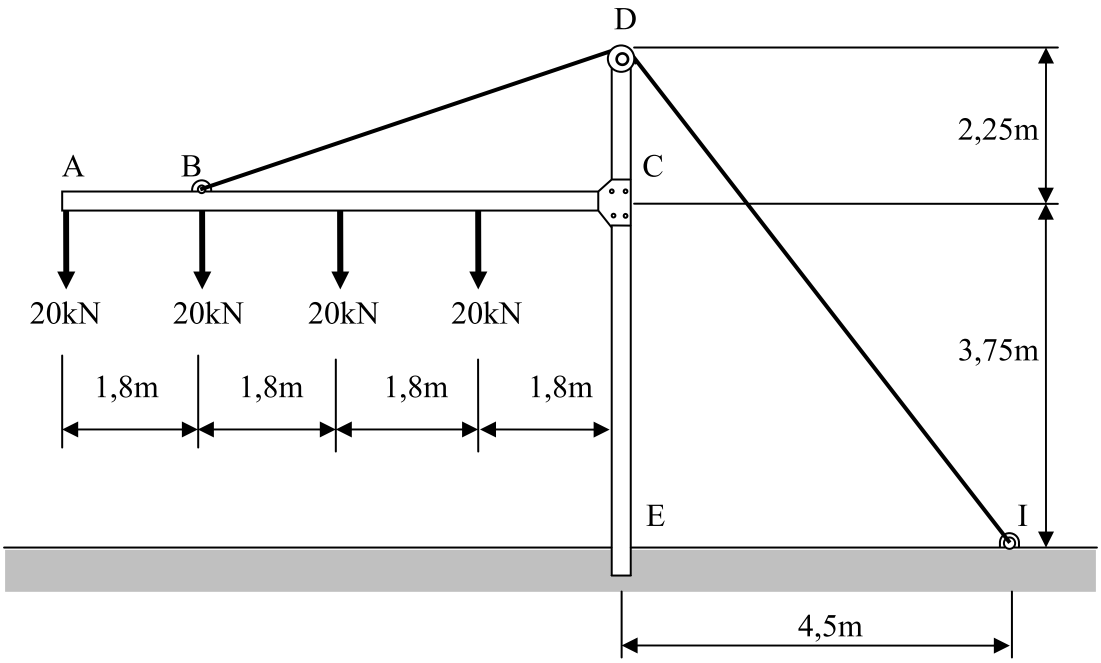
$$ka(2 - \frac{1}{\cos\theta}) = \frac{W}{\sin\theta} \quad , \quad \boxed{2\sin\theta - \tan\theta = \frac{W}{ka}}$$

b) $k = \dfrac{W}{a\left(2\sin\theta - \tan\theta\right)}$, $k = \dfrac{80}{300\left(2\sin 25^0 - \tan 25^0\right)}$

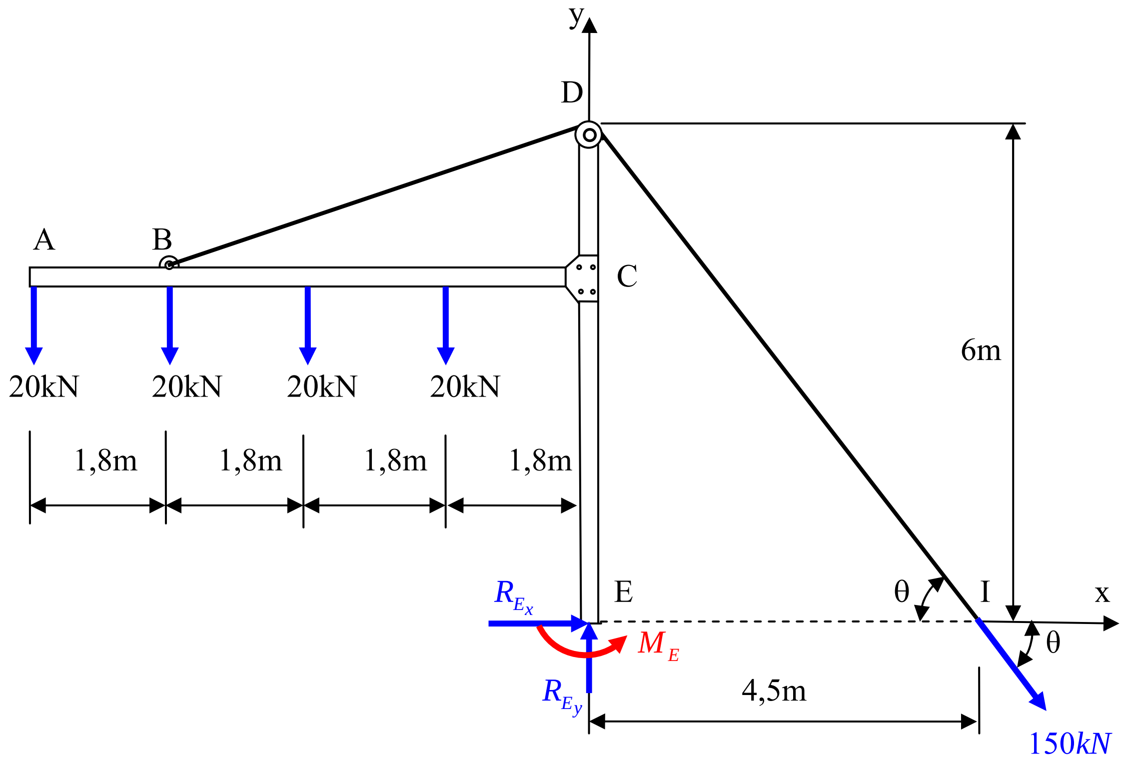
$\boxed{k = 0,704 N/mm}$ $\boxed{k = 704 N/m}$

Problem 6.7.4

Aşağıda gösterilen çerçeve küçük bir yapının çatısını desteklemektedir. Kablodaki gerilme kuvvetinin 150 kN olduğu bilindiğine göre E ankastre mesnetindeki tepkileri bulunuz.



Çözüm:



$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{E_x} + 150\cos\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{E_y} - 20*4 - 150\sin\theta = 0$$

$$\Sigma M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad M_E + 20*(1,8 + 2*1,8 + 3*1,8 + 4*1,8) - 4,5*150*\sin\theta = 0$$

$$\cos\theta = \frac{\overleftrightarrow{EI}}{\overleftrightarrow{DI}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\overleftrightarrow{DE}}{\overleftrightarrow{DI}} \quad , \quad \overleftrightarrow{DI} = \sqrt{4,5^2 + 6^2} \quad , \quad \overleftrightarrow{DI} = 7,5m$$

$$\cos\theta = \frac{4,5}{7,5} \quad , \quad \cos\theta = 0,6$$

$$\sin\theta = \frac{6}{7,5} \quad , \quad \sin\theta = 0,8$$

$$R_{E_x} = -150*0,6 \quad , \quad \boxed{R_{E_x} = -90kN}$$

$$R_{E_y} = 20*4 + 150*0,8 \quad , \quad \boxed{R_{E_y} = 200kN} \quad R_E = \sqrt{(-90)^2 + (200)^2} \quad \boxed{R_E = 219,4kN}$$

$$M_E = -20*(1,8 + 2*1,8 + 3*1,8 + 4*1,8) + 4,5*150*0,8 = 0$$

$$\boxed{M_E = 180kNm.}$$

6.8 Üç boyutlu kuvvetler etkisindeki bir rijid cismin dengesi ile ilgili uygulamalar

Eğer cisme etki eden dış kuvvetler ve mesnetlerden gelen tepkiler aynı düzlem içinde değil ise incelenen problem uzay statik problemidir.

$\vec{\mathbf{R}} = \vec{0}$, $\sum \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \vec{0}$ sıfıra eşdeğerlik koşulu aşağıdaki gibi yazılabilir.

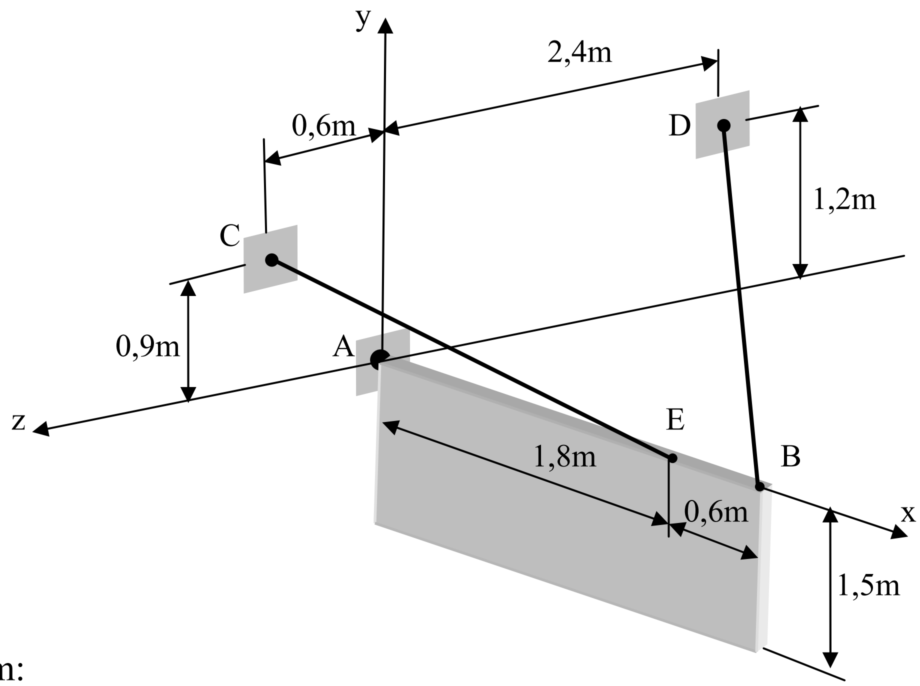
$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \mathbf{F}_x = 0 \;, \quad \sum \mathbf{F}_y = 0 \;, \quad \sum \mathbf{F}_z = 0$$

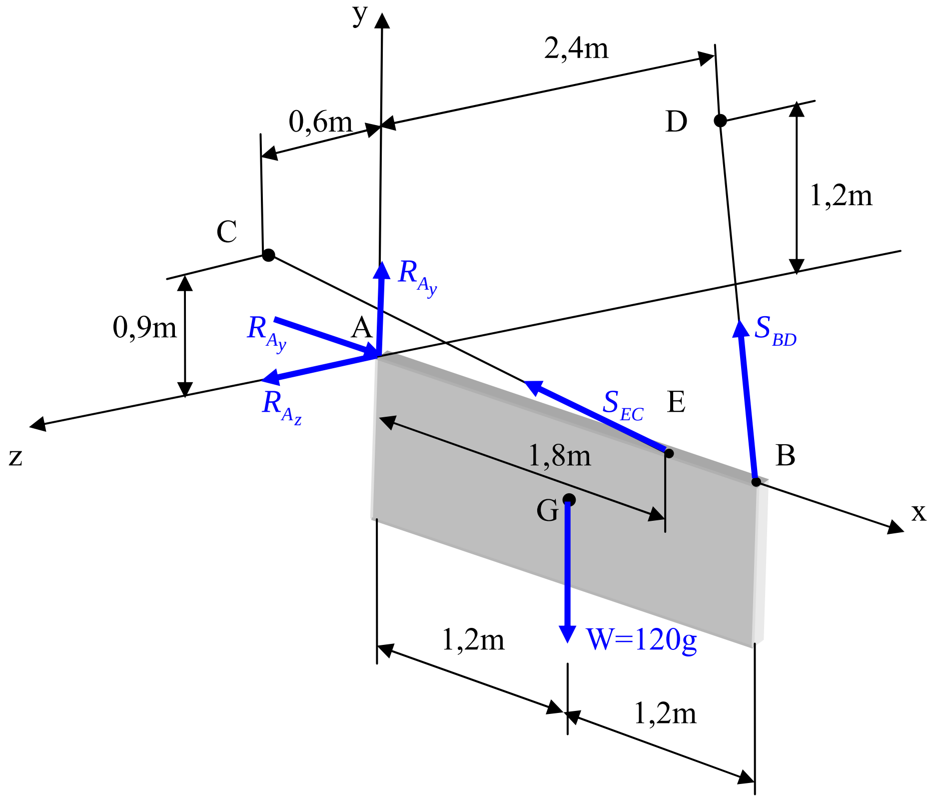
$$\sum \mathbf{M}_x = 0 \;, \quad \sum \mathbf{M}_y = 0 \,, \quad \sum \mathbf{M}_z = 0$$

Problem 6.8.1

120kg kütleli ve 1.5m x 2.4m boyutlarındaki dikdörtgen şeklindeki bir reklam panosu A da küresel mafsal E ile B de birer kablo yardımı ile şekildeki gibi tesbit edilmiştir. Kablolardaki kuvvetleri ve A mafsalındaki tepki kuvvetini bulunuz.



Çözüm:



sıfıra eşdeğerlik koşulu

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{S}_{EC} + \vec{S}_{BD} + \vec{R}_A + \vec{W} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AE} \wedge \vec{S}_{EC} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_{BD} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{W} = \vec{0}$$

$$\vec{S}_{EC} = S_{EC}\vec{U}_{EC} \quad , \quad \vec{U}_{EC} = \frac{\overrightarrow{EC}}{\left|\overrightarrow{EC}\right|} \quad , \quad \vec{U}_{EC} = \frac{(0-1,8)\vec{i} + (0,9-0)\vec{j} + (0,6-0)\vec{k}}{\sqrt{(-1,8)^2 + 0,9^2 + 0,6^2}}$$

$$\vec{U}_{EC} = \frac{-1,8\vec{i} + 0,9\vec{j} + 0,6\vec{k}}{2,1} \ , \ \vec{U}_{EC} = -\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \ , \ \vec{S}_{EC} = -\frac{6}{7}S_{EC}\vec{i} + \frac{3}{7}S_{EC}\vec{j} + \frac{2}{7}S_{EC}\vec{k}$$

$$\vec{S}_{BD} = S_{BD}\vec{U}_{BD} \quad , \quad \vec{U}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|} \quad , \quad \vec{U}_{BD} = \frac{(0-2,4)\vec{i} + (1,2-0)\vec{j} + (-2,4-0)\vec{k}}{\sqrt{(-2,4)^2 + 1,2^2 + 2,4^2}}$$

$$\vec{U}_{BD} = \frac{-2,4\vec{i} + 1,2\vec{j} - 2,4\vec{k}}{3,6} \quad , \quad \vec{U}_{BD} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{S}_{BD} = -\frac{2}{3}S_{BD}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{BD}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{BD}\vec{k} \quad , \quad \vec{R}_A = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} \quad , \quad \vec{W} = -120g\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AE} = 1,8\vec{i} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = 2,4\vec{i} \quad , \quad \overrightarrow{AG} = 1,2\vec{i} - 0,75\vec{j}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AE} \wedge \vec{S}_{EC} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{S}_{BD} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{W} = \vec{0}$$

$$1,8\vec{i} \wedge (-\frac{6}{7}S_{EC}\vec{i} + \frac{3}{7}S_{EC}\vec{j} + \frac{2}{7}S_{EC}\vec{k}) + 2,4\vec{i} \wedge (-\frac{2}{3}S_{BD}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{BD}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{BD}\vec{k}) +$$

$$+(1,2\vec{i} - 0,75\vec{j}) \wedge (-120g\,\vec{j}) = \vec{0}$$

$$1,8 * \frac{3}{7}S_{EC}\vec{k} - 1,8 * \frac{2}{7}S_{EC}\vec{j} + 2,4 * \frac{1}{3}S_{BD}\vec{k} + 2,4 * \frac{2}{3}S_{BD}\vec{j} - 1,2 * 120g\vec{k} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_A = (\frac{4,8}{3}S_{BD} - \frac{3,6}{7}S_{EC})\,\vec{j} + (\frac{2,4}{3}S_{BD} + \frac{5,4}{7}S_{EC} - 144g)\,\vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{l} \frac{4,8}{3}S_{BD} - \frac{3,6}{7}S_{EC} = 0 \\ \frac{2,4}{3}S_{BD} + \frac{5,4}{7}S_{EC} - 144g = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{4,8}{3}S_{BD} - \frac{3,6}{7}S_{EC} = 0 \\ \frac{4,8}{3}S_{BD} + \frac{10,8}{7}S_{EC} = 288g \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{14,4}{7}S_{EC} = 288g$$

$$S_{EC} = 140g \quad , \quad S_{BD} = 45g \quad , \quad \boxed{S_{EC} = 1373,4N} \quad , \quad \boxed{S_{BD} = 441,45N}$$

$$\sum \vec{F} = (-\frac{6}{7}S_{EC}\vec{i} + \frac{3}{7}S_{EC}\vec{j} + \frac{2}{7}S_{EC}\vec{k}) + (-\frac{2}{3}S_{BD}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{BD}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{BD}\vec{k}) +$$

$$+ (R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}) + (-120g\,\vec{j}) = \vec{0}$$

$$\sum \vec{F} = (-\frac{6}{7}S_{EC} - \frac{2}{3}S_{BD} + R_x)\vec{i} + (\frac{3}{7}S_{EC} + \frac{1}{3}S_{BD} + R_y - 120g)\,\vec{j} + (\frac{2}{7}S_{EC} - \frac{2}{3}S_{BD} + R_z)\vec{k} = \vec{0}$$

$$-\frac{6}{7}S_{EC} - \frac{2}{3}S_{BD} + R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{6}{7}140g - \frac{2}{3}45g + R_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = 150g$$

$$\frac{3}{7}S_{EC} + \frac{1}{3}S_{BD} + R_y - 120g = 0 \ \Rightarrow \ \frac{3}{7}140g + \frac{1}{3}45g + R_y - 120g = 0 \ \Rightarrow \ R_y = 45g$$

$$\frac{2}{7}S_{EC} - \frac{2}{3}S_{BD} + R_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{7}140g - \frac{2}{3}45g + R_z = 0 \quad \Rightarrow \quad R_z = -10g$$

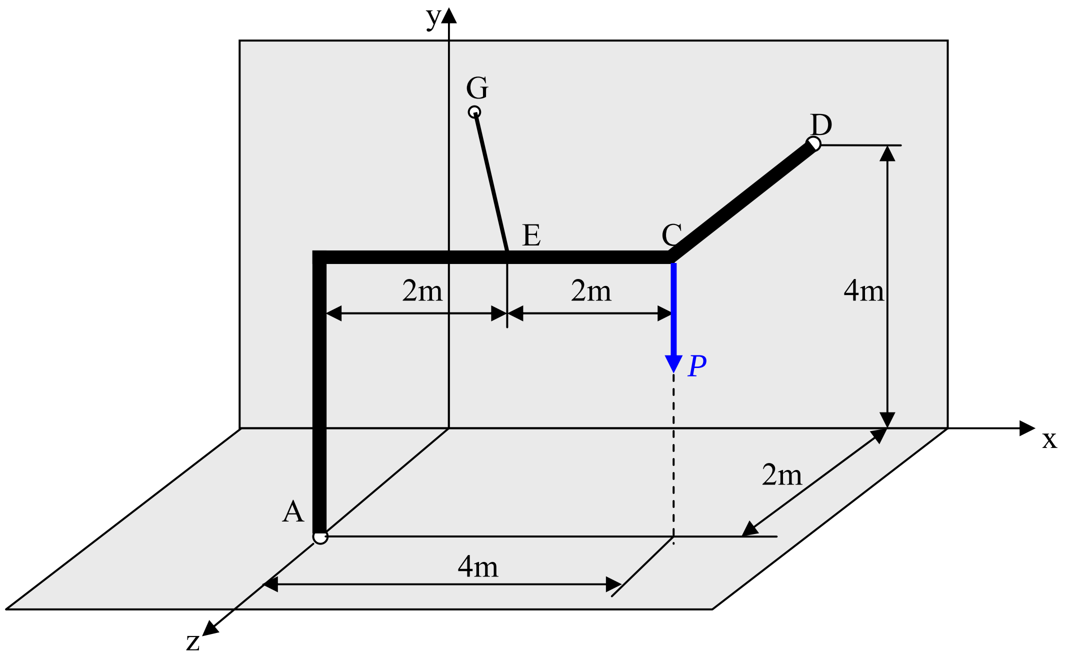
$$\boxed{R_x = 1471,5N} \qquad \boxed{R_y = 441,45N} \qquad \boxed{R_z = -98,1N}$$

Problem 6.8.2

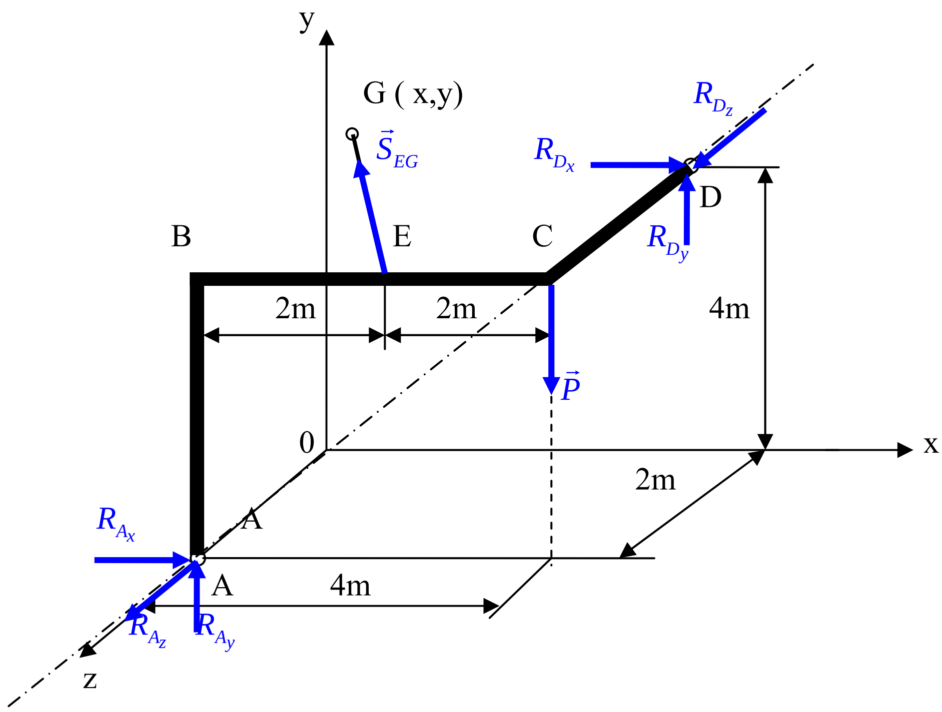
450 N luk bir yük şekildeki gibi bükülmüş bir rijid borunun C köşesine uygulanmıştır. Boru A da zemine ve D de düşey duvara küresel mafsal ile E de ise EG kablosu yardımı ile tesbit edilmiştir.

a) EG kablosundaki gerilme kuvvetinin minumum olması için kablonun karşı duvara bağlandığı G noktası nerde olmalıdır.

b) Bu durumdaki minumum kablo kuvvetinin şiddetini bulunuz.



Çözüm:



S_{EG} kablo kuvvetinin minumum olması için kablonun doğrultusu aynı kuvvetle AD eksenine göre en büyük momenti verecek şekilde olmalı yani AD ekseni ile E noktasının oluşturduğu düzleme dik olmalıdır.

$\overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{EG}$ olmalı

$\overrightarrow{EG} = (x-2)\vec{i} + (y-4)\vec{j} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{ED} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k} = \lambda(x-2)\vec{i} + \lambda(y-4)\vec{j} - 2\lambda\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \lambda(x-2) &= 8 & \lambda &= -4 & & \\ \lambda(y-4) &= -4 \quad \Rightarrow & -4x+8 &= 8 \quad \Rightarrow & \boxed{\begin{matrix} x=0 \\ y=5 \end{matrix}} \\ -2\lambda &= 8 & -4y+16 &= -4 & & \end{aligned}$$

$$\Sigma M_{AD} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG}) \bullet \vec{U}_{AD} + (\overrightarrow{DC} \wedge \vec{P}) \bullet \vec{U}_{AD} = 0$$

$$\overrightarrow{DE} = -2\vec{i} + 2\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{DC} = 2\vec{k} \quad , \quad \vec{P} = -450\vec{j} \quad , \quad \vec{S}_{EG} = S_{EG}\vec{U}_{EG}$$

$$\vec{U}_{EG} = \frac{\overrightarrow{EG}}{\left|\overrightarrow{EG}\right|} \quad , \quad \vec{U}_{EG} = \frac{-2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} \quad , \quad \vec{U}_{EG} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$$

$$\vec{S}_{EG} = -\frac{2}{3}S_{EG}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{EG}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{EG}\vec{k}$$

$$\vec{U}_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|} \quad , \quad \vec{U}_{AD} = \frac{4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}} \quad , \quad \vec{U}_{AD} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG} = (-2\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge (-\frac{2}{3}S_{EG}\vec{i} + \frac{1}{3}S_{EG}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{EG}\vec{k})$$

$$\overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -\frac{2}{3}S_{EG} & \frac{1}{3}S_{EG} & -\frac{2}{3}S_{EG} \end{vmatrix} \quad , \quad \overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG} = -\frac{2}{3}S_{EG}\,\vec{i} - \frac{8}{3}S_{EG}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{EG}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{DC} \wedge \vec{P} = 2\vec{k} \wedge -450\vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{DC} \wedge \vec{P} = 900\vec{i}$$

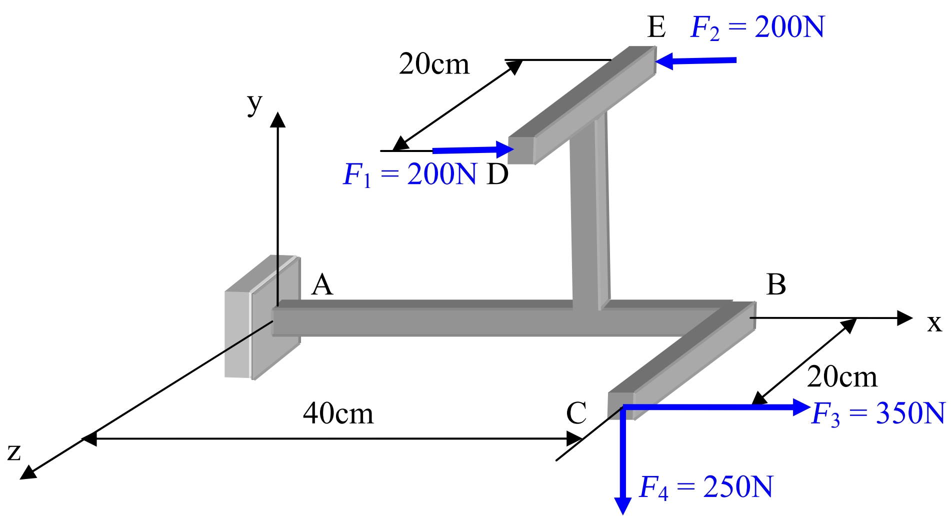
$$(\overrightarrow{DE} \wedge \vec{S}_{EG}) \bullet \vec{U}_{AD} + (\overrightarrow{DC} \wedge \vec{P}) \bullet \vec{U}_{AD} = [(-\frac{2}{3}S_{EG} + 900)\vec{i} - \frac{8}{3}S_{EG}\vec{j} - \frac{2}{3}S_{EG}\vec{k})] \bullet (\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}) = 0$$

$$-\frac{4}{9}S_{EG} + 600 - \frac{16}{9}S_{EG} + \frac{2}{9}S_{EG} = 0$$

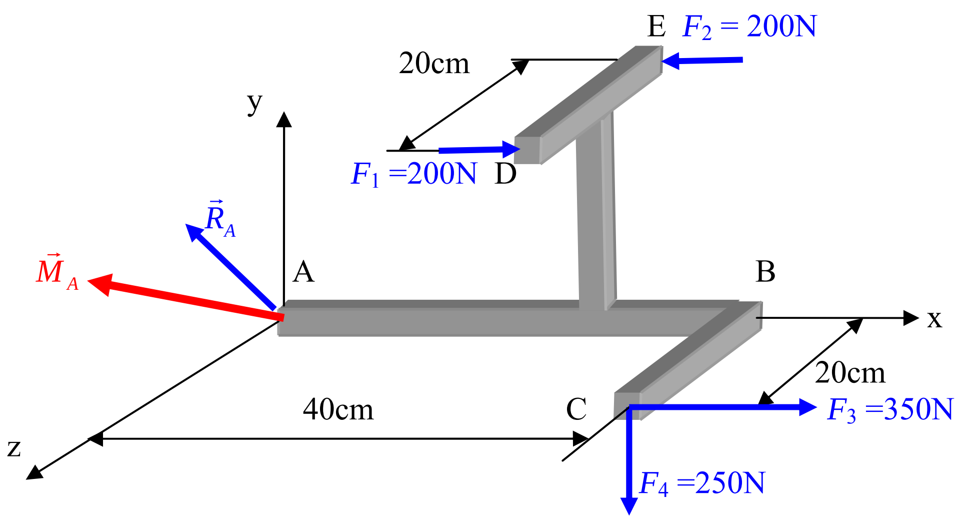
$$-2S_{EG} + 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{EG} = 300\,N}$$

Problem 6.8.3

A da ankastre mesnetli ABCDE cismi şekildeki gibi yüklenmiştir.
a) A ankastre mesnetindeki tepkileri hesaplayınız.
b) A ya çok yakın x eksenine dik kesitteki kesit zorlarını bulunuz.



Çözüm:



a)
sıfıra eşdeğerlik koşulu

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_A + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{AE} \wedge \vec{F}_2 + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_3 + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_4 = \vec{0}$$

$\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_2$ kuvvet çifti olduğundan geometrik toplamı sıfır bileşke momenti ise $200 * 20\,\vec{j}$ dır.

$$\vec{F}_3 = 350\vec{i} \ , \quad \vec{F}_4 = -250\vec{j} \ , \quad \overrightarrow{AC} = 40\vec{i} + 20\vec{k}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{R}_A + 350\vec{i} - 250\vec{j} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R}_A = -350\vec{i} + 250\vec{j}}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{M}_A + (40\vec{i} + 20\vec{k}) \wedge (350\vec{i} - 250\vec{j}) = \vec{0} \ , \quad \boxed{\vec{M}_A = -5000\vec{i} - 11000\vec{j} + 10000\vec{k}}$$

b)

A da ki x eksenine dik kesitteki **normal kuvvet** $\vec{R}_A$ kuvvetinin kesite dik bileşenidir.

normal kuvvet = $\boxed{-350N}$ (Bu kuvvet cismi çekmeye çalıştığından pozitif alınmalıdır.)

A da ki x eksenine dik kesitteki **kesme kuvveti** $\vec{R}_A$ kuvvetinin kesit içindeki bileşenidir.

kesme kuvveti = 250N. $\boxed{250N}$

A da ki x eksenine dik kesitteki **burulma momenti** $\vec{M}_A$ momentinin kesite dik bileşenidir.

burulma momenti = $\boxed{-5000Ncm}$

A da ki x eksenine dik kesitteki **eğilme momenti** $\vec{M}_A$ momentinin kesite içindeki bileşenidir.

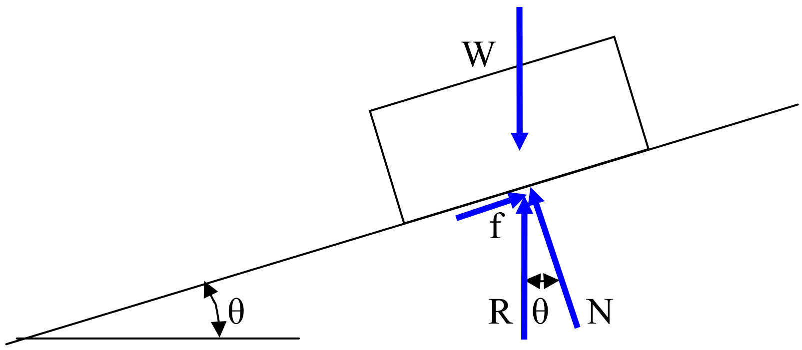
eğilme momenti = $\left|-7000\vec{j}+10000\vec{k}\right|$

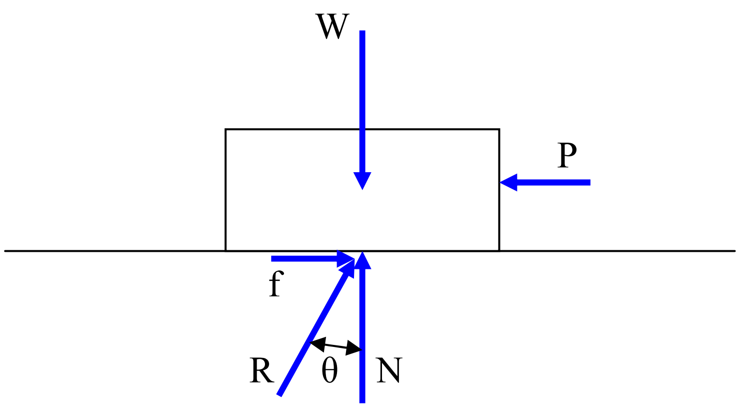
eğilme momenti = $\boxed{\sqrt{7000^2+10000^2}=12206,6Ncm}$

BÖLÜM 7

SÜRTÜNME

7.1 Sürtünme ve sürtünme katsayısı





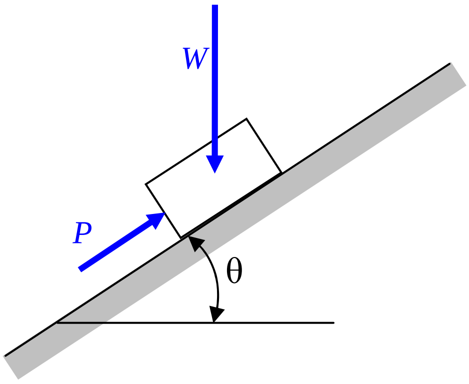
Yukardaki şekillerde gösterildiği gibi eğim açısı θ olan bir eğik düzlem üzerine bırakılan bir cismin θ nın belli değerlerine kadar dengede kaldığı bilinir. Aynı şekilde yatay düzlem üzerine bırakılan bir cisme yatay doğrultuda bir P kuvveti uygulanırsa P nin belli değerlerine kadar cismin dengede kaldığı bilinir. Bütün bunların nedeni temas eden yüzeyler doğrultusunda tepki kuvvetlerinin oluşmasıdır. Bu kuvvetlere sürtünme kuvvetleri denir.

$\mathbf{f} = \mathbf{N} \tan\theta$

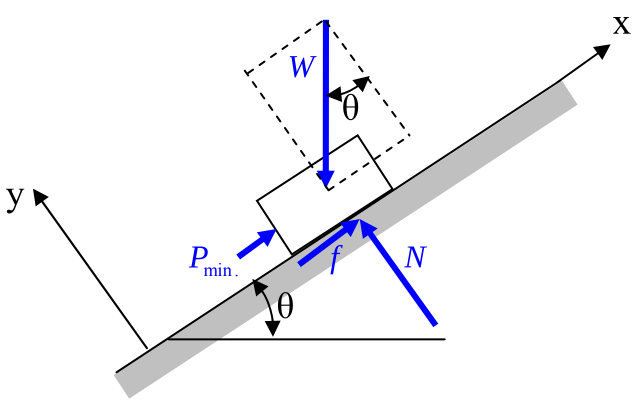
Sürtünme kuvvetinin maksimum değeri birbirlerine temasta olan cisimlerin cinslerine ve temas yüzeylerinin özelliklerine bağlıdır.
dengede kalmak şartıyla θ nın en büyük değerinin tanjantına sürtünme katsayısı denir ve μ ile gösterilir.

$\mu = \tan\theta_{maks.}$, $\mathbf{f}_{\mathbf{maks.}} = \mu\mathbf{N}$

Problem 7.1.1 $\theta = 60^0$ eğim açılı eğik düzlem ile üzerindeki W = 100 N. ağırlığındaki cismin sürtünme katsayısı $\mu = 0.4$ dır. P kuvvetinin hangi değerleri arasında cisim eğik düzlem üzerinde hareketsiz kalır. Bu sınır değerlerdeki sürtünme kuvvetinin değerleri nedir.



Çözüm:
Cismin aşağı doğru kaymaması için gerekli olan en küçük *P* kuvveti $P_{min.}$ dır.Bu durumda sürtünme kuvvetinin yönü yukarı doğrudur.



x ekseni eğik düzlem doğrultusunda ve y ekseni buna dik doğrultuda alınıp bu düzlemde denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

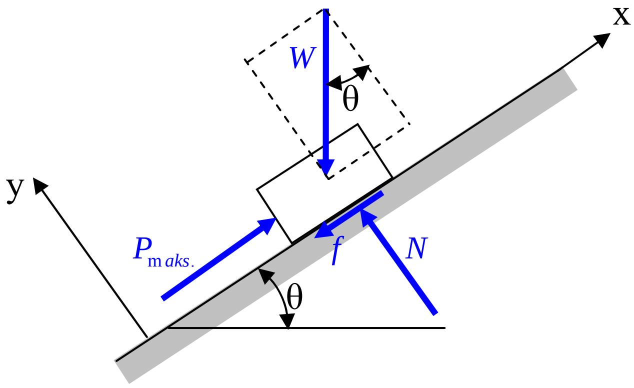
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{min} + f - W \sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - W\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 100\cos 60^0 \;, \quad N = 50\, Newton$$

$$f = \mu N \quad \Rightarrow \quad f = 0,4 * 50 \;, \quad \boxed{f = 20\ Newton}$$

$$P_{min} = -f + W\sin\theta \;, \quad P_{min} = 50\sqrt{3} - 20 \;, \quad \boxed{P_{min} = 66,6\ Newton}$$

Cisim yukarı doğru çıkma meyilinde ve hareketsiz durumda en büyük P kuvveti $P_{\text{maks.}}$ dır. Bu durumda sürtünme kuvveti aşağı doğrudur.



Bu durumda sürtünme kuvvetinin yönü değiştiğinden sadece birinci denklem değişir.

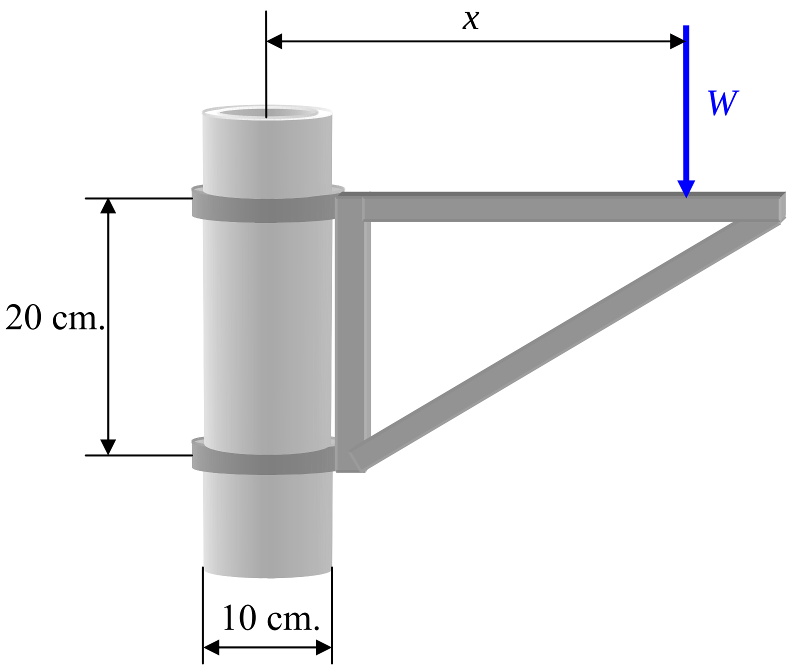
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{maks.}} - f - W\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{\text{maks.}} = f + W\sin\theta$$

$$P_{\text{maks.}} = 50\sqrt{3} + 20 \;,\; \boxed{P_{\text{maks.}} = 106,6\ Newton} \;,\; \boxed{66,6\ Newton \le P \le 106,6\ Newton}$$

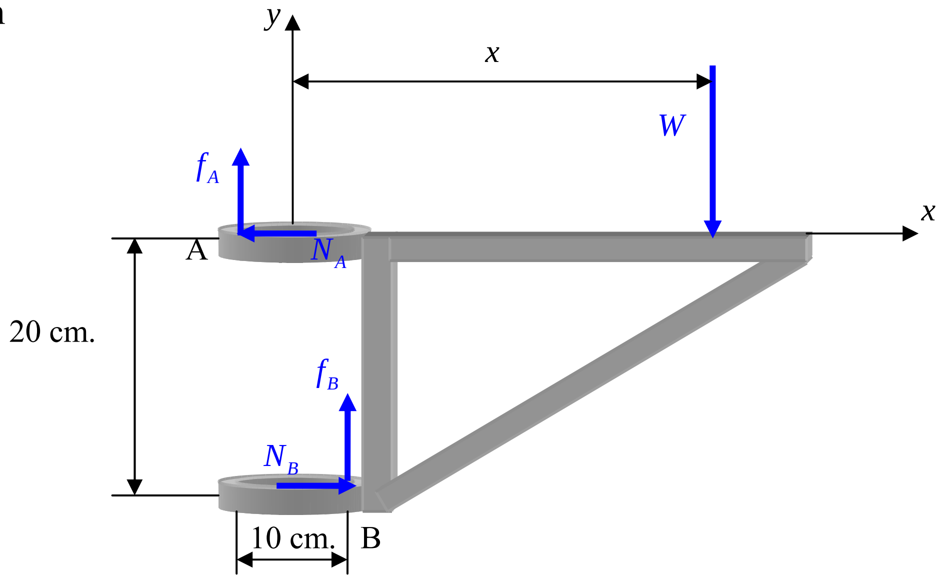
7.2 mesnetlerdeki sürtünmeler

Mesnetlerde temas yüzeyi belli ise sürtünme kuvveti bu yüzeye teğettir. Eğer mesnet mafsal şeklinde ve temas yüzeyi bilinmiyorsa ise sürtünme momenti göz önüne alınarak işlem yapılabilir.

Problem 7.2.1 Şekilde görülen hareketli konsol 10 cm. çapındaki bir borunun üzerinde istenilen bir yüksekliğe konulabilmektedir. Konsolla boru arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0,25$ olduğuna göre , konsolun ağırlığını ihmal ederek W yükünün taşınabileceği en küçük x uzaklığını bulunuz.



Çözüm



$f_A = \mu N_A \quad , \quad f_B = \mu N_B \quad , \quad f_A = 0,25\,N_A \quad , \quad f_B = 0,25 N_B$

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B - N_A = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = N_A$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad f_A + f_B - W = 0 \quad \Rightarrow \quad f_A + f_B = W \quad \Rightarrow \quad f_A = f_B = \dfrac{W}{2}$

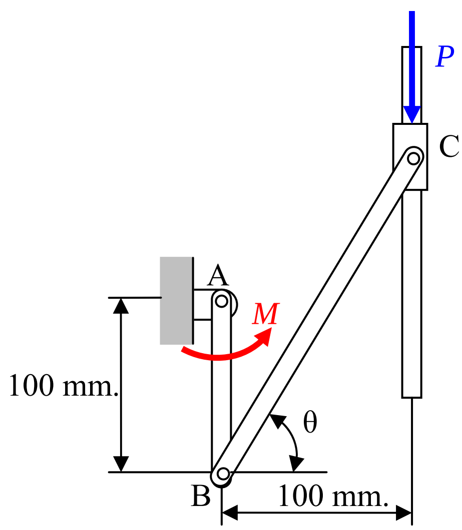
$N_B = N_A = 2W$

$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 20\,N_A - 10\,f_A - (x-5)W = 0$

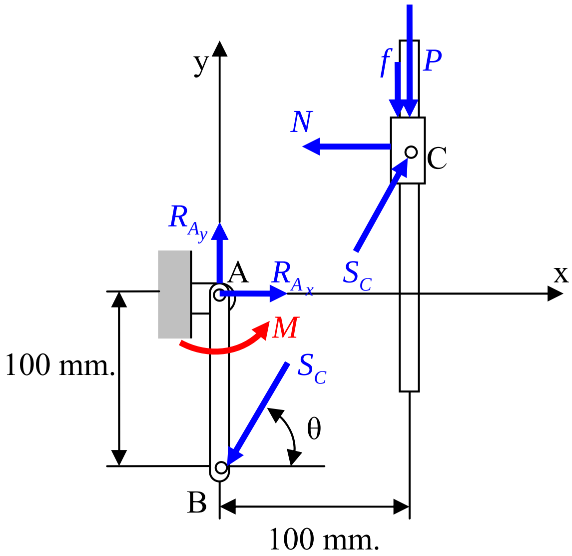
$20\,N_A - 10\,f_A - W\,x + 5W = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{20\,N_A - 10\,f_A + 5W}{W}$

$x = \dfrac{20 * 2W - 10 * \dfrac{W}{2} + 5W}{W} \quad , \quad x = \dfrac{40W - 5W + 5W}{W} \quad , \quad \boxed{x = 40\,cm.}$

Problem 7.2.2 Şekildeki mekanizmada Bilezik ve çubuk arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0,4$, $\theta = 60^0$ ve $P = 200$ N. olduğu bilindiğine göre mekanizma kranka uygulanan M momentinin hangi değerlerinde dengededir.



Çözüm:



C Bileziğinin yukarı doğru kayma başlangıcında dengesi için :

$$f=\mu N \quad , \quad f=0,4*N$$

$$\sum F_x=0 \quad \Rightarrow \quad S_C\cos\theta-N=0 \quad \Rightarrow \quad N=S_C\cos\theta \quad , \quad f=0,4\,S_C\cos\theta$$

$$\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad S_C\sin\theta-f-P=0 \quad \Rightarrow \quad S_C\sin\theta-0,4\,S_C\cos\theta-P=0$$

$$S_C(\sin\theta-0,4\cos\theta)=P \quad \Rightarrow \quad S_C=\frac{P}{\sin\theta-0,4\cos\theta} \quad , \quad S_C=\frac{200}{\sin 60^0-0,4\cos 60^0}$$

$$S_C=300,289\,N.$$

AB çubuğunun dengesi için :

$$\sum M_A=0 \quad \Rightarrow \quad M_{maks.}-100\,S_C\cos\theta=0 \quad \Rightarrow \quad M_{maks.}=100\,S_C\cos\theta$$

$$M_{maks}=100*300,289\cos 60^0 \quad , \quad \boxed{M_{maks.}=15014,5Nmm.}$$

C Bileziğinin aşağı doğru kayma başlangıcında dengesi için :
Bu durumun yukarıdaki şekilden farkı sürtünme kuvvetinin yönü yukarı doğrudur.

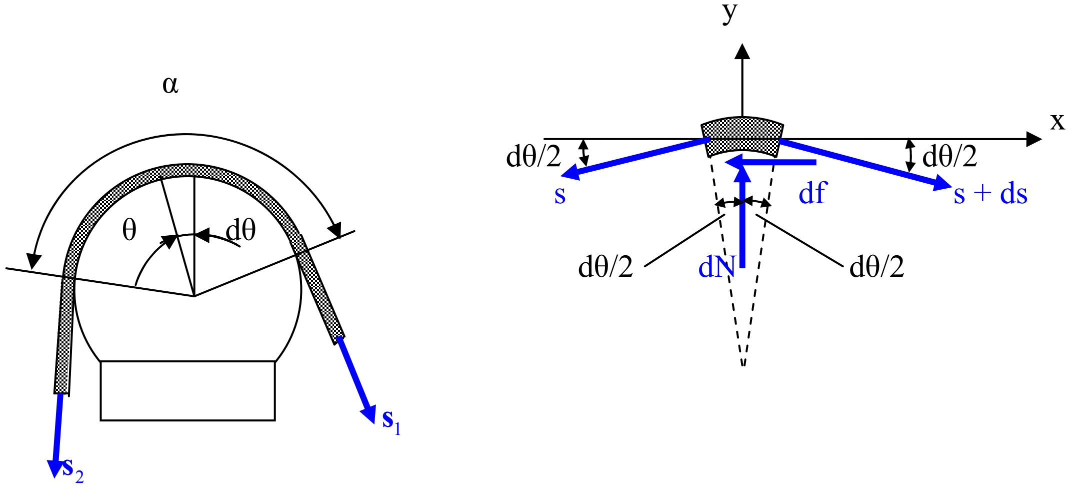
$$\sum F_y=0 \quad \Rightarrow \quad S_C\sin\theta+f-P=0 \quad , \quad S_C\sin\theta+0,4\,S_C\cos\theta-P=0$$

$$S_C(\sin\theta+0,4\cos\theta)=P \quad \Rightarrow \quad S_C=\frac{P}{\sin\theta+0,4\cos\theta} \quad , \quad S_C=\frac{200}{\sin 60^0+0,4\cos 60^0}$$

$$S_C=187,613\,N. \quad M_{\min.}=100\,S_C\cos\theta \quad , \quad M_{\min.}=100*187,613\cos 60^0 \quad ,$$

$$\boxed{M_{\min.}=9380,6\,Nmm.} \qquad \boxed{9,38\,Nm.\le M\le 15,01\,Nm}.$$

7.3 Halat veya kayış kasnak sürtünmesi



Silindirik yüzey üzerine sarılı halattan alınan diferansiyel elemanda

$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{s} + \mathbf{ds})\,\mathbf{Cos}\,(\mathbf{d}\theta/2) - \mathbf{s}\,\mathbf{Cos}\,(\mathbf{d}\theta/2) - \mathbf{df} = 0$

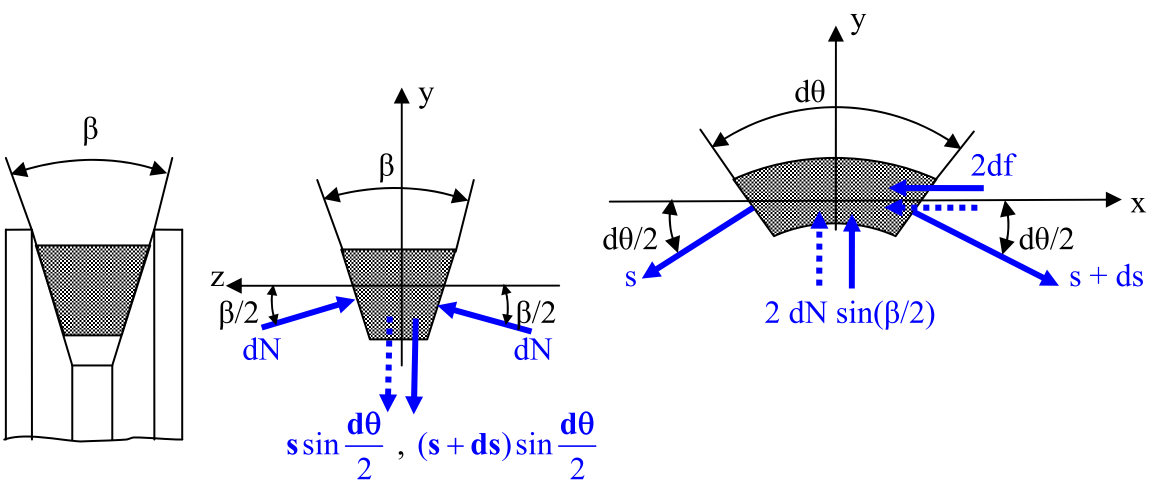
$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dN} - (2\mathbf{s} + \mathbf{ds})\,\mathbf{Sin}\,(\mathbf{d}\theta/2) = 0$ denklemleri yazılabilir.

Cos (dθ/2) =1 , Sin (dθ/2) = (dθ/2) ve df = μ dN olduğu bilindiğine göre

ds = df , dN = s dθ , ds = μ s dθ yazılabilir.

$\frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{s}} = \mu \mathbf{d}\theta \;, \quad \int_{s_2}^{s_1} \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{s}} = \mu \int_0^{\alpha} \mathbf{d}\theta \;, \quad \ln \frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_2} = \mu\alpha \;, \quad \boxed{\frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_2} = \mathbf{e}^{\mu\,\alpha}}$ elde edilir.

Bu çağda kayış kasnak sistemlerinde düz kayış yerine daha çok aşağıda gösterilen kesiti V şeklinde olan V kayışları kullanılır.

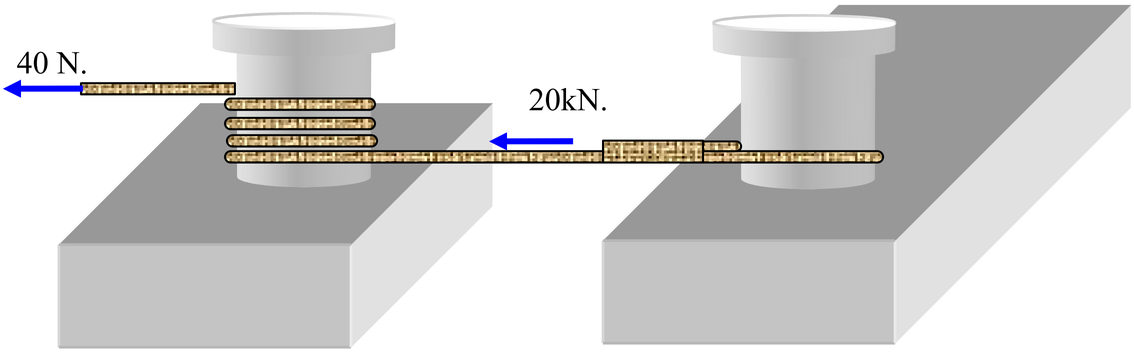


V kayışlı kayış kasnak sistemlerinde kayışın her iki yan yüzeyinde temas olduğundan diferansiyel elemanda sürtünme kuvvetinin iki katı alınır.Normal kuvvet yerine 2dNsin β/2 alınarak düz kayış için yapılan işlemler tekrar edilirse

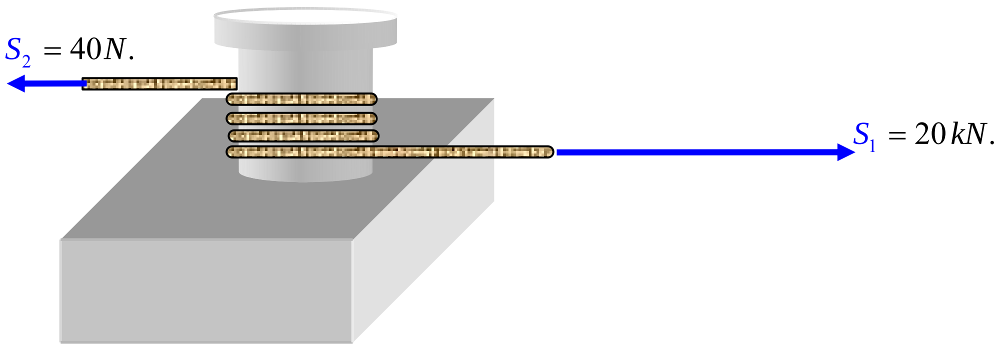
$\boxed{\frac{\mathbf{s}_1}{\mathbf{s}_2} = \mathbf{e}^{\mu\,\alpha/\sin(\beta/2)}}$ formülü bulunur.

Problem 7.3.1 Bir gemiyi rıhtımda durdurmak için kullanılan halatın halka şeklinde oluşturulmuş kısmı iskele babasına takılır.Halatın diğer ucuna gemideki babanın etrafına 4 kere sarıldıktan sonra kuvvet uygulanır. Halata geminin uyguladığı kuvvet 20kN dır.

görevlinin uyguladığı kuvvet 40N olduğuna göre halat ile baba denilen silindirik cismin yanal yüzeyi arasındaki sürtünme katsayısını bulunuz.



Çözüm:

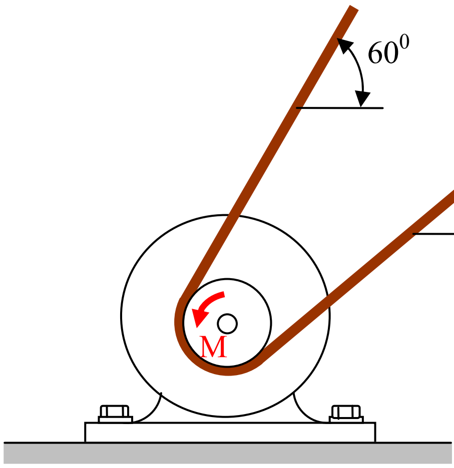


$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha} \quad , \quad S_1 = 20kN. = 20000N. \quad , \quad \alpha = 4 * 2\pi \quad , \quad \alpha = 8\pi$$

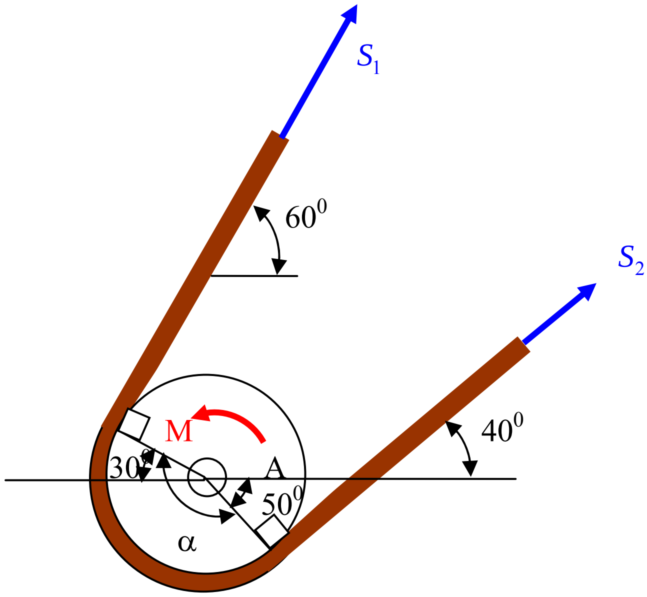
$$\frac{20000}{40} = e^{8\pi\mu} \quad , \quad 500 = e^{8\pi\mu} \quad \Rightarrow \quad \ln 500 = \ln e^{8\pi\mu} \quad \Rightarrow \quad \ln 500 = 8\pi\mu$$

$$\mu = \frac{\ln 500}{8\pi} \quad , \quad \boxed{\mu = 0,247}$$

Problem 7.3.2 Bir elektrik motoru ile üretilen 60 Nm. lik bir momenti iletmek için bir yassı kayış kullanılmaktadır. Kayış şekilde görüldüğü gibi 12 cm. çaplı motordaki kasnaktan aldığı momenti iletmektedir. Kayışla kasnak arasındaki statik sürtünme katsayısı 0.3 dür. Kayışın her iki kısmındaki çekmenin , kayma olmasını engelleyecek en küçük değerlerini bulunuz.



Çözüm:



Kayıştaki büyük kuvvet momentin tersi yönünde olur.

$$\frac{S_1}{S_2}=e^{\mu\alpha} \quad , \quad \mu=0,3 \quad , \quad \alpha=180+30-50 \quad , \quad \alpha=160^0 \quad , \quad \alpha=160\frac{\pi}{180}rad.$$

$$\alpha=2,793rad. \quad \frac{S_1}{S_2}=e^{0,838} \quad , \quad \frac{S_1}{S_2}=2,311 \quad , \quad S_1=2,311S_2$$

$$\sum M_A=0 \quad , \quad M+S_2R-S_1R=0 \quad \Rightarrow \quad S_1-S_2=\frac{M}{R} \quad , \quad S_1-S_2=\frac{60}{0,12/2}$$

$$S_1-S_2=1000N \quad , \quad S_1=2,311S_2 \quad , \quad 2,311S_2-S_2=1000N \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_2=762,8\,N.}$$

$$\boxed{S_1=1762,8\,N.}$$

DİNAMİK

GİRİŞ

Mekaniğin ikinci kısmı olan dinamik kuvvetler etkisinde cisimlerin hareketini inceleyen bilim dalıdır.
Mekanikçiler Dinamiği kinematik ve kinetik adı altında iki ana bölüme ayırırlar.
Kinematik hareketi doğuran nedenleri göz önüne almadan sadece hareketin geometrisini göz önüne alan bilim dalıdır.
Kinetik ise hareketi oluşturan nedenlerle birlikte incelemektir. Kinetik kinematiği de içerdiğinden bazı yazarlar kinetiğe dinamik diyorlar.
Genellikle Dinamik ilk önce kinematik veya kinematik için gerekli matematik bilgileri ile başlar. Burada da ilk iki bölüm kinematik için gerekli matematik konularını içeriyor.

BÖLÜM 8

VEKTÖREL ANALİZ

8.1 Vektör fonksiyonu

Statikte görülen eş zamanlı vektörlerden farklı olarak dinamikte zamanla veya başka bir değişkene göre değişebilen vektörlerle de çalışılır.
Bir u reel sayısının tanımlı olduğu bölgedeki her değerine bir $\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})$ vektörü karşılık geliyorsa $\vec{\mathbf{P}}$ vektörüne u değişkenine bağlı vektörel fonksiyon denir.
Benzer şekilde birden fazla sayıdaki u , v , w gibi değişkenlere veya $\vec{\mathbf{r}}$ gibi vektörlere bağlı vektörel fonksiyonlar tanımlanabilir.

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})$$
$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$
$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}(\vec{\mathbf{r}})$$

Problem 8.1.1

$\vec{P}(u) = 10\,Cos\,u\,\vec{i} + 8\,Sin\,u\,\vec{j} + 3u\vec{k}$ şeklinde verilen vektör fonksiyonunu

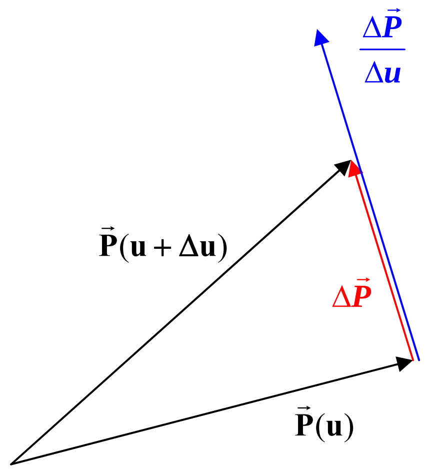
$u = \frac{\pi}{3}$ için hesaplayınız.

$u = \frac{\pi}{3}$ için $\vec{P}(\frac{\pi}{3}) = 10\,Cos\frac{\pi}{3}\,\vec{i} + 8\,Sin\frac{\pi}{3}\,\vec{j} + 3\frac{\pi}{3}\vec{k}$

$$\boxed{\vec{P}(\frac{\pi}{3}) = 5\,\vec{i} + 4\sqrt{3}\,\vec{j} + \pi\vec{k}}$$

8.2 Vektör fonksiyonunun türevi

Bir vektörel fonksiyonun türevi aşğıdak i şekilde gösterildiği gibi skaler fonksiyonlardaki türev işlemlerine benzer biçimde alınabilir.Bir vektörel fonksiyonda u nun herhangi bir değerine karşılık gelen $\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})$ vektörünü u değişkenine verilen artımla elde edilen $\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u})$ vektöründen çıkarılırsa $\Delta\vec{\mathbf{P}}$ artım vektörü elde edilir. Bu artım vektörünü değişkenin artımı olan Δu ya bölümüne ortalama değişim vektörü denir. Ortalama değişim vektöründe değişkenin artımı sıfıra yaklaştırılırsa vektörel fonksiyonunun u da ki türevi elde edilir.



$$\Delta\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})$$

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{P}}}{\mathbf{du}} = \lim_{\Delta U \to O} \frac{\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})}{\Delta\mathbf{u}}$$

8.2.1 Türev kuralları

$\vec{\mathbf{P}}$, $\vec{\mathbf{Q}}$, $\vec{\mathbf{W}}$ vektörleri ve λ ile s skaleri u nun fonksiyonu olsun.Ayrıca $\vec{\mathbf{T}}$ vektörü θ nın θ da s in fonksiyonu olsun ve ´ işareti u ya göre türevi göstersin.

a) $\left(\vec{\mathbf{P}} \mp \vec{\mathbf{Q}} \mp \vec{\mathbf{W}}\right)' = \vec{\mathbf{P}}' \mp \vec{\mathbf{Q}}' \mp \vec{\mathbf{W}}'$

b) $\left(\lambda\,\vec{\mathbf{P}}\right)' = \lambda'\,\vec{\mathbf{P}} + \lambda\,\vec{\mathbf{P}}'$

c) $\left(\vec{\mathbf{P}} \bullet \vec{\mathbf{Q}}\right)' = \vec{\mathbf{P}}' \bullet \vec{\mathbf{Q}} + \vec{\mathbf{P}} \bullet \vec{\mathbf{Q}}'$

d) $\left(\vec{\mathbf{P}} \wedge \vec{\mathbf{Q}}\right)' = \vec{\mathbf{P}}' \wedge \vec{\mathbf{Q}} + \vec{\mathbf{P}} \wedge \vec{\mathbf{Q}}'$

e) $\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{T}}}{\mathbf{du}} = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{T}}}{\mathbf{d}\theta}\frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{ds}}\frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{du}}$

Problem 8.2.1 $\vec{P}(u) = 10 Cos\,u\,\vec{i} + 8 Sin\,u\,\vec{j} + 3u\vec{k}$ şeklinde verilen vektör fonksiyonunun u ya göre birinci ve ikinci türevini $u = \frac{\pi}{3}$ için hesaplayınız.

Çözüm :

$$\frac{d\vec{P}(u)}{du} = -10 Sin\,u\,\vec{i} + 8 Cos\,u\,\vec{j} + 3\vec{k} \quad , \qquad \frac{d^2\vec{P}(u)}{du^2} = -10 Cos\,u\,\vec{i} - 8 Sin\,u\,\vec{j}$$

için $\quad \dfrac{d\vec{P}(\frac{\pi}{3})}{du} = -5\sqrt{3}\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 3\vec{k}$, $\qquad \dfrac{d^2\vec{P}(\frac{\pi}{3})}{du^2} = -5\,\vec{i} - 4\sqrt{3}\,\vec{j}$

Problem 8.2.2 Modülü sabit olarak değişen vektörün türevinin kendisine dik bir vektör olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$\left|\vec{P}(u)\right| = sabit$ olarak verilmiştir.

Bir vektörün modülü vektörün kendisi ile skaler çarpımının karekökü alınarak bulunabileceğinden.

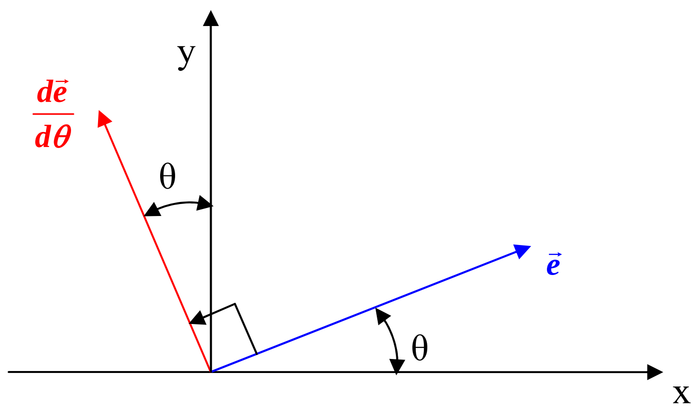
$\vec{P}(u) \bullet \vec{P}(u) = sabit$ yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının u ya göre türevi alınırsa $\quad \vec{P}(u) \bullet \dfrac{d\vec{P}}{du} = 0 \quad$ elde edilir.

Böylece skaler çarpımın sıfır olmasından $\vec{P}(u)$ ile $\dfrac{d\vec{P}}{du}$ türev vektörünün birbirine dik olduğu ispatlanmış olur.

Problem 8.2.3 Bir düzleme paralel olarak değişen bir birim vektörün bu düzlem içindeki sabit bir doğrultuyla yaptığı açıya göre türevi aynı düzlemde bulunan kendisine pozitif yönde dik bir birim vektördür.

Çözüm:

Birim vektörün paralel olduğu düzlemi xy düzlemi bu düzlemdeki sabit bir doğrultu x ekseni ile gösterilsin Bu düzlemde x ekseni ile θ açısı yapan birim vektör $\vec{e}$ ise buna pozitif yönde dik vektör ile θ ya göre türevi alınan vektörün aynı vektör olduğu görülür.



$\vec{e} = Cos\,\theta\,\vec{i} + Sin\,\theta\,\vec{j}$

$$\frac{d\vec{e}}{d\theta} = -Sin\,\theta\,\vec{i} + Cos\,\theta\,\vec{j}$$

$\vec{e}$ birim vektörüne aynı düzleme paralel olmak koşulu ile ve pozitif yönde dik vektör

$$\vec{k} \wedge \vec{e} = \vec{k} \wedge (Cos\,\theta\,\vec{i} + Sin\,\theta\,\vec{j})$$

Buradaki vektörel çarpma işlemi yapılırsa

$$\vec{k} \wedge \vec{e} = \frac{d\vec{e}}{d\theta}$$

bulunur.

8.3 Vektörel fonksiyonun integrali

$\mathbf{x(u)}$, $\mathbf{y(u)}$, $\mathbf{z(u)}$, $\mathbf{u}$ nun belirli bir aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}) = \mathbf{x(u)}\,\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y(u)}\,\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z(u)}\,\vec{\mathbf{k}}$$

u ya bağlı vektörel fonksiyonunu göz önüne alalınırsa aşağıdaki integrale

$$\int \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})\,\mathbf{du} = \int \mathbf{x(u)}\,\mathbf{du}\quad \vec{\mathbf{i}} + \int \mathbf{y(u)}\,\mathbf{du}\quad \vec{\mathbf{j}} + \int \mathbf{z(u)}\,\mathbf{du}\quad \vec{\mathbf{k}}$$

$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})$ vektörel fonksiyonunun belirsiz integrali denir.

$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u}) = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{du}}\vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{u})$ eşitliğini sağlayan bir $\vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{u})$ vektörel fonksiyonu varsa

$$\int \mathbf{P}(\mathbf{u})\,\mathbf{du} = \int \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{du}}\vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{u})\,\mathbf{du} = \vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}) + \vec{\mathbf{C}}$$

olur. Burada $\vec{\mathrm{C}}$ vektörü u skalerine bağlı olmayan sabit bir vektördür.

Bu durumda $\mathrm{u = a}$ ve $\mathrm{u = b}$ sınırları arasındaki belirli integral

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})\,\mathbf{du} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{du}}\vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{u})\,\mathbf{du} = \vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}) + \vec{\mathbf{C}}\,\Big|_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{b}) - \vec{\mathbf{Q}}(\mathbf{a})$$

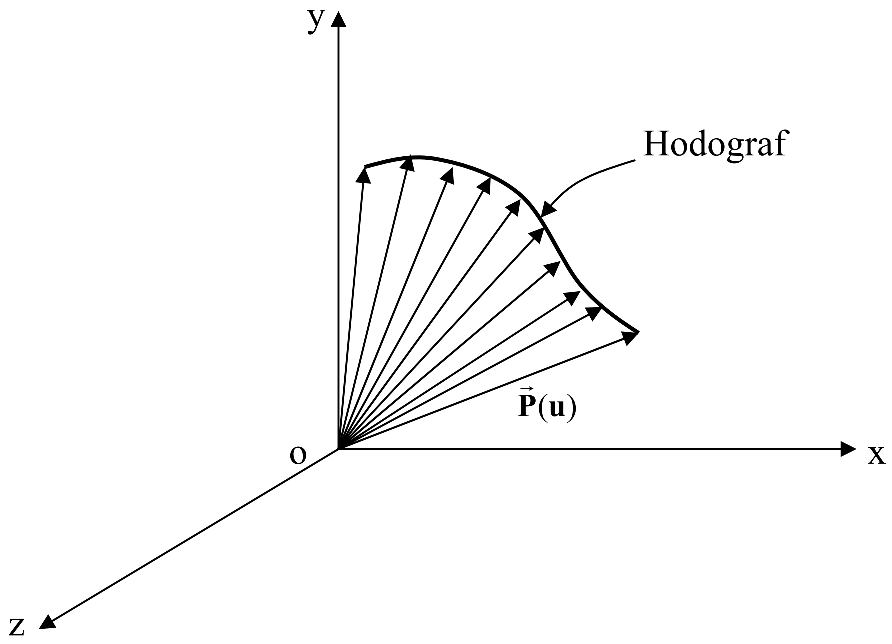
şeklinde yazılabilir.

BÖLÜM 9

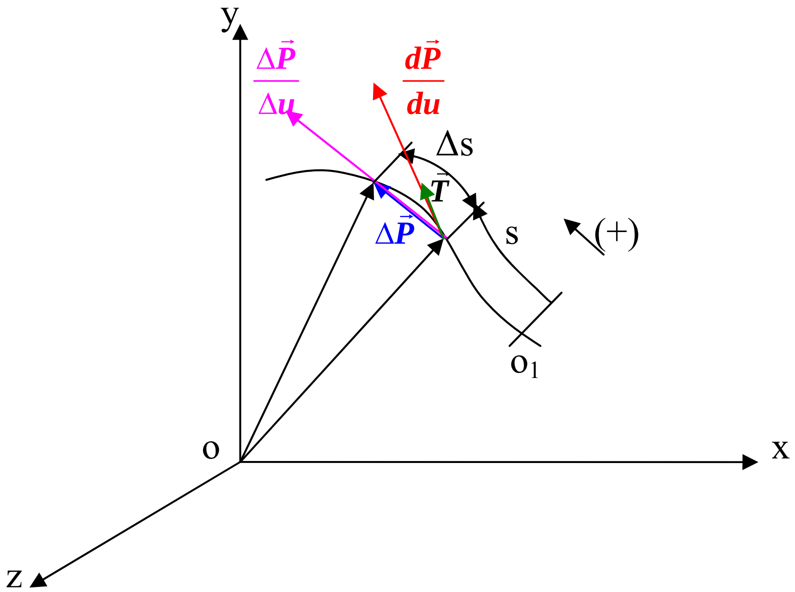
EĞRİLERDE DİFERANSİYEL ÖZELLİKLER

9.1 Bir vektör fonksiyonunun hodografı

u ya bağlı değerler alan $\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{u})$ vektörel fonksiyonunun başlangıçları aynı noktaya getirilirse uç noktalarının çizdiği eğriye bu vektörel fonksiyonun hodografı denir.



9.2 Bir vektörel fonksiyonun hodografı üzerinde $\vec{P}(u)$ vektörel fonksiyonunun türevi



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi eğri üzerinde keyfi bir başlangıç ve yön ile belirlenen s eğrisel ölçüsüne (OA arasındaki eğri uzunluğuna) eğrisel apsis denir. Burada $\vec{P}$ vektörü s değişkeninin s de u nun fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Böylece $\vec{P}$ vektörünün u ya göre türevi aşağıdaki gibi alınabilir.

$\frac{d\vec{P}}{du} = \frac{d\vec{P}}{ds}\frac{ds}{du}$ burada $\frac{d\vec{P}}{ds}$ vektörünün $\vec{T}$ teğet birim vektörüne eşit olduğu türevin tanımı kullanılarak anlaşılır.

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \mathrm{Lim}_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta s} = \vec{T}$$

Böylece $\frac{d\vec{P}}{du} = \frac{ds}{du}\vec{T}$

$\vec{P}$ vektörünün u ya göre birinci mertebeden türevi bulunmuş olur.

$\vec{P}$ vektörünün u ya göre ikinci mertebeden türevi ise birinci mertebeden türevinin tekrar u ya göre türevi alınarak bulunur.

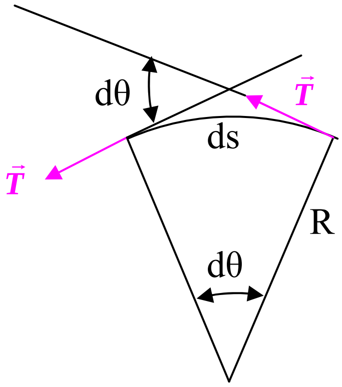
$$\frac{d^2\vec{P}}{du^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{ds}{du}\vec{T}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{P}}{du^2} = \frac{d^2 s}{du^2}\vec{T} + \frac{ds}{du}\frac{d\vec{T}}{du}$$

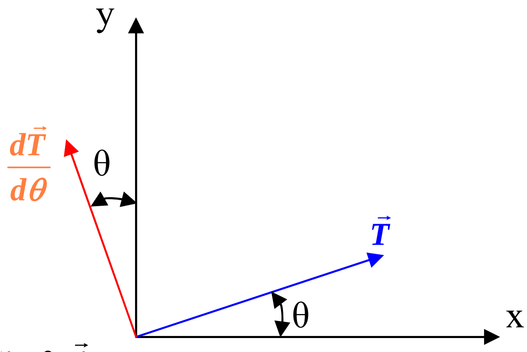
Burada $\frac{d\vec{T}}{du}$ teğet birim vektörün u ya göre türevini almak için üç boyutlu eğrilere ait bazı tanımları kullanmak gerekir.

Oskülatör düzlem : Eğri üzerindeki noktalara göre değişebilen ve bir nokta civarında eğriyi düzlem eğri kabul etmekle bu nokta civarında eğriye en iyi uyan düzlemdir. İki boyutlu eğrilerde eğriyi içinde bulunduran düzlem oskülatör düzlemdir.

Asal normal birim vektörü : Teğete oskülatör düzlemde dik olan ve eğrilik merkezine doğru yönelmiş olan birim vektöre denir.
Üç boyutlu eğrilerde eğrilik yarıçapı , asal normal birim vektörü gibi tanımları yapabilmek için bir nokta civarında eğriyi düzlem eğrisi ve R yarıçaplı çember parçası olarak kabul etmek gerekir. Bir A noktası civarında aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi oskülatör düzlemde bulunan ds yay uzunluğunda, dθ merkez açısında ve R yarıçapında bir çember parçası kabul edilebilir.



burada $ds = R\,d\theta$
Burada görüldüğü gibi $\vec{T}$ birim vektörünü θ nın θ yı s in fonksiyonu olarak düşünülüp zincir kuralından faydalanılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.
$\frac{d\vec{T}}{du} = \frac{d\vec{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{du}$ burada $\frac{d\vec{T}}{d\theta}$ işlemini yapabilmek için sabit bir düzleme paralel olarak değişen $\vec{T}$ birim vektörünün bu düzlemde bulunan sabit bir doğrultuyla yaptığı θ açısına göre türevi göz önüne alınabilir.



$$\vec{T} = \mathrm{Cos}\,\theta\ \vec{i} + \mathrm{Sin}\,\theta\ \vec{j}$$
$$\frac{d\vec{T}}{d\theta} = -\mathrm{Sin}\,\theta\ \mathrm{i} + \mathrm{Cos}\,\theta\ \vec{j}$$
Buradan $\vec{T}$ birim vektörünün θ ya göre türevinin aynı düzlemde kendisine pozitif yönde dik bir vektör olduğu anlaşılır. Bu vektöre $\vec{N}$ asal normal birim vektörü denir.

$\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \vec{N}$ Bu denklem teğet birim vektörün u ya göre türevi ifadesinde yerine yazılırsa $\frac{d\vec{T}}{du} = \vec{N} \frac{d\theta}{Rd\theta} \frac{ds}{du}$

$\frac{d\vec{T}}{du} = \frac{1}{R} \frac{ds}{du} \vec{T}$ Teğet birim vektörün u ya göre türevi bulunur. Bu eşitlikler ile $\frac{d^2\vec{P}}{du^2}$ ikinci türev ifadesine gidilirse

$$\frac{d^2\vec{P}}{du^2} = \frac{d^2s}{du^2}\vec{T} + \frac{(ds/du)^2}{R}\vec{N}$$

$\vec{P}$ vektörünün u ya göre türevi teğet ve asal normal birim vektörleri doğrultusunda bulunur.

9.3 Doğal koordinat sistemi

Bu elde edilen $\vec{T}$ ve $\vec{N}$ birim vektörleri ile birde bunlara sağ el kuralına göre dik üçüncü bir birim vektör tanımlanırsa

$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$

bir koordinat sistemi tanımlanmış olur. Buradaki $\vec{B}$ birim vektörüne binormal birim vektörü denir. Bu $\vec{T}$, $\vec{N}$ ve $\vec{B}$ birim vektörlerinin belirlediği koordinat sistemine doğal koordinat denir.

$\vec{T}$ ve $\vec{N}$ birim vektörlerinin belirlediği düzleme oskülatör düzlem

$\vec{N}$ ve $\vec{B}$ birim vektörlerinin belirlediği düzleme normal düzlem

$\vec{T}$ ve $\vec{B}$ birim vektörlerinin belirlediği düzleme rektifiyen düzlem denir.

Bu üç koordinat düzlemine birlikte Frenet üç yüzlüsü de denir.

9.4 Doğal koordinat sisteminde $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ birim vektörleri ve R eğrilik yarıçapı

Bir $\vec{P} = \vec{P}(u)$ vektörel fonksiyonunda elde edilen $\frac{d\vec{P}}{du} = \frac{ds}{du}\vec{T}$ denkleminden

$\frac{ds}{du} = \left|\frac{d\vec{P}}{du}\right|$ ve $T = \frac{d\vec{P}/du}{\left|\frac{d\vec{P}}{du}\right|}$ elde edilir.

$\vec{N}$ birim vektörü ise $\frac{d\vec{T}}{du} = \vec{N}\frac{1}{R}\frac{ds}{du}$ formülünden elde edilir.

$$\vec{N} = \frac{R\frac{d\vec{T}}{du}}{\left|\frac{d\vec{P}}{du}\right|}$$

R eğrilik yarıçapı ise $\vec{P}$ vektörünün u ya göre 1. ve 2. mertebeden türevleri birbiri ile vektörel çarpılarak elde edilir.

$$\frac{d\vec{P}}{du} \wedge \frac{d^2\vec{P}}{du} = \frac{\left(ds/du\right)^3}{R}$$

Bu denklemin her iki tarafının modülü alınır ve $\frac{ds}{du} = \left|\frac{d\vec{P}}{du}\right|$ eşitliği göz önüne alınırsa R eğrilik yarıçapı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R = \frac{\left|d\vec{P}/du\right|^3}{\left|\frac{d\vec{P}}{du} \wedge \frac{d^2\vec{P}}{du^2}\right|}$$

Problem 9.4.1

y = f(x) kartezyen denklemiyle verilen bir düzlem eğride eğrilik yarıçapını veren formülü yazınız.

Çözüm:

$$\vec{P} = x\,\vec{i} + f(x)\,\vec{j} \qquad \frac{d\vec{P}}{dx} = \vec{i} + f'(x)\,\vec{j} \qquad \frac{d^2\vec{P}}{dx^2} = f''(x)\,\vec{j} \quad \text{ve} \quad \left|\frac{d\vec{P}}{dx}\right| = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

$$\left|\frac{d\vec{P}}{dx} \wedge \frac{d^2\vec{P}}{dx^2}\right| = |f''(x)|$$

denklemleri ile R eğrilik yarıçapını veren formül

$$R = \frac{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{3/2}}{|f''(x)|}$$

şeklinde elde edilir.

Problem 9.4.2

$\vec{P}(u) = 10 Cos\, u\, \vec{i} + 8 Sin\, u\, \vec{j} + 3u\vec{k}$ şeklinde vektör fonksiyonu ile verilen eğrinin $u = \frac{\pi}{3}$ deki eğrilik yarıçapını ve teğet birim vektörünü bulunuz.

(Burada uzunluklar metre açılar radyan cinsindendir.)

Çözüm :

$$R = \frac{\left|d\vec{P}/du\right|^3}{\left|\frac{d\vec{P}}{du} \wedge \frac{d^2\vec{P}}{du^2}\right|}$$

$$\frac{d\vec{P}(u)}{du} = -10 Sin\, u\, \vec{i} + 8 Cos\, u\, \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\frac{d^2\vec{P}(u)}{du^2} = -10Cos\,u\,\vec{i} - 8Sin\,u\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{P}(u)}{du} \wedge \frac{d^2\vec{P}(u)}{du^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -10Sin\,u & 8Cos\,u & 3 \\ -10Cos\,u & -8Sin\,u & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{d\vec{P}(u)}{du} \wedge \frac{d^2\vec{P}(u)}{du^2} = 24Sin\,u\,\vec{i} - 30Cos\,u\,\vec{j} + 80\vec{k}$$

$$\left|\frac{d\vec{P}(u)}{du} \wedge \frac{d^2\vec{P}(u)}{du^2}\right| = \sqrt{576Sin^2\,u + 900Cos^2 u + 6400}$$

$$\left|\frac{d\vec{P}(u)}{du}\right| = \sqrt{100Sin^2 u + 64Cos^2 u + 9} \quad , \quad \left|\frac{d\vec{P}(u)}{du}\right|^3 = (100Sin^2 u + 64Cos^2 u + 9)^{3/2}$$

$$R = \frac{\left|\frac{d\vec{P}(u)}{du}\right|^3}{\left|\frac{d\vec{P}(u)}{du} \wedge \frac{d^2\vec{P}(u)}{du^2}\right|} = \frac{(100Sin^2 u + 64Cos^2 u + 9)^{3/2}}{\sqrt{576Sin^2\,u + 900Cos^2 u + 6400}}$$

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{P}(u)}{du}}{\left|\frac{d\vec{P}(u)}{du}\right|} = \frac{-10Sin\,u\,\vec{i} + 8Cos\,u\,\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{100Sin^2 u + 64Cos^2 u + 9}} \quad , \quad \vec{T} = \frac{-10Sin\,u\,\vec{i} + 8Cos\,u\,\vec{j} + 3\vec{k}}{(100Sin^2 u + 64Cos^2 u + 9)^{1/2}}$$

$u = \frac{\pi}{3}$ için $$\vec{T}(\frac{\pi}{3}) = \frac{-10Sin\,\frac{\pi}{3}\,\vec{i} + 8Cos\,\frac{\pi}{3}\,\vec{j} + 3\vec{k}}{(100Sin^2\frac{\pi}{3} + 64Cos^2\frac{\pi}{3} + 9)^{1/2}}$$

$$\vec{T}(\frac{\pi}{3}) = \frac{-5\sqrt{3}\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 3\vec{k}}{(\frac{300}{4} + 16 + 9)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j} + \frac{3}{10}\vec{k}$$

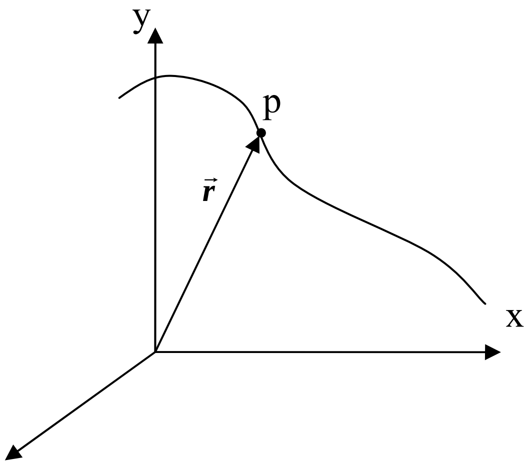
$$R = \frac{(100Sin^2\frac{\pi}{3} + 64Cos^2\frac{\pi}{3} + 9)^{3/2}}{\sqrt{576Sin^2\frac{\pi}{3} + 900Cos^2\frac{\pi}{3} + 6400}} \quad , \quad R = \frac{(\frac{300}{4} + 16 + 9)^{3/2}}{\sqrt{432 + 225 + 6400}}$$

$$\boxed{R = 11.9\,m}$$

BÖLÜM 10
MADDESEL NOKTANIN KİNEMATİĞİ

10.1 Kinematiğin temel kavramları

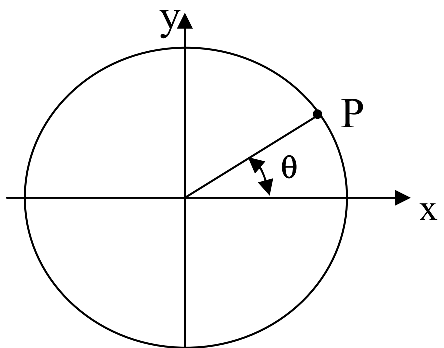
Yer vektörü : Bir maddesel noktanın bir mukayese cismine (koordinat sistemine) göre bulunduğu yere orijinden uzanan vektör.
Hız vektörü : Yer vektörünün zamana göre türevi
İvme vektörü: Hız vektörünün zamana göre türevi veya yer vektörünün zamana göre ikinci türevi
Aşısal hız: Aynı düzlemde hareket eden noktayı sabit bir noktaya bağlayan doğrunun aynı düzlemdeki sabit bir doğru ile yaptığı açının zamana göre türevi
Açısal ivme: Açısal hızın zamana göre türevi



$\vec{r}$ (Yer vektörü)

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ (Hız Vektörü)

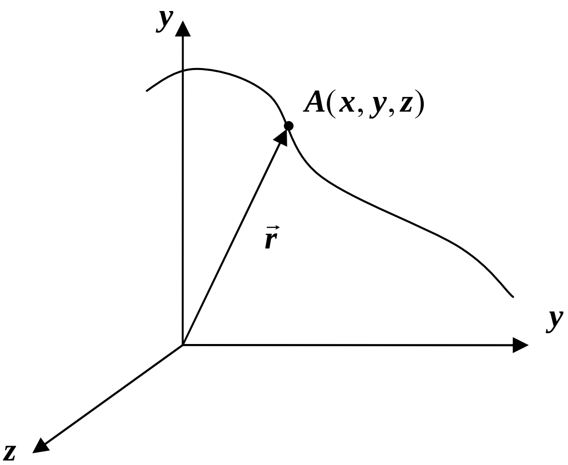
$\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ (İvme vektörü)



$\theta = \theta(t)$ (Zamanı fonksiyonu olan aynı düzlemdeki açı)

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ (Açısal hız) , $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ (Açısal ivme)

10.2 Maddesel noktanın hareketinin kartezyen koordinat sisteminde incelenmesi



Bir maddesel noktanın hareketinde koordinatları

$$x = x(t)\,,\quad y = y(t)\,,\quad z = z(t)$$

şeklinde ise yer , hız ve ivme vektörleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{V} = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j} + \dot{z}(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j} + \ddot{z}(t)\,\vec{k}$$

Burada değişkenlerin üzerindeki noktalar zamana göre türevi göstermektedir.

Problem 10.2.1

Bir maddesel nokta bir eğri üzerinde

$$x = 10 Cos\, t \quad , \quad y = 8 Sin\, t \quad , \quad z = 3\,t$$

bağıntılarına göre hareket etmektedir. $t = \frac{\pi}{6}$ için maddesel noktanın yer, hız ve ivme vektörlerini bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{r} = 10 Cos\, t\,\vec{i} + 8 Sin\, t\,\vec{j} + 3t\,\vec{k} \quad , \quad \vec{V} = -10 Sin\, t\,\vec{i} + 8 Cos\, t\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

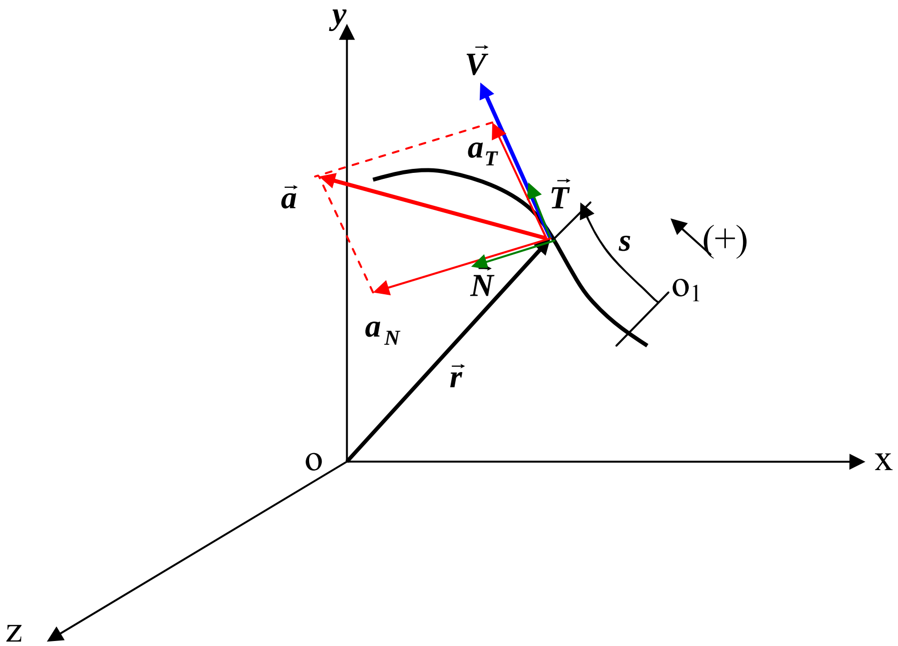
$$\vec{a} = -10 Cos\, t\,\vec{i} - 8 Sin\, t\,\vec{j}$$

$t = \frac{\pi}{6}$ için $\quad \vec{r} = 10 Cos\frac{\pi}{6}\,\vec{i} + 8 Sin\frac{\pi}{6}\,\vec{j} + 3\frac{\pi}{6}\,\vec{k} \quad , \quad \boxed{\vec{r} = 5\sqrt{3}\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \frac{\pi}{2}\,\vec{k}}$

$$\vec{V} = -10 Sin\frac{\pi}{6}\,\vec{i} + 8 Cos\frac{\pi}{6}\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \quad , \quad \boxed{\vec{V} = -5\,\vec{i} + 4\sqrt{3}\,\vec{j} + 3\,\vec{k}}$$

$$\vec{a} = -10 Cos\frac{\pi}{6}\,\vec{i} - 8 Sin\frac{\pi}{6}\,\vec{j} \quad , \quad \boxed{\vec{a} = -5\sqrt{3}\,\vec{i} - 4\,\vec{j}}$$

10.3 Maddesel noktanın hareketinin Doğal koordinat sisteminde incelenmesi



Daha önce formülleri çıkarılan doğal koordinat sistemindeki $\vec{P}$ vektörü yerine $\vec{r}$ yer vektörü u yerine t zaman değişkeni alınırsa aşağıdaki hız ve ivme ifadeleri elde edilir.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T} + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R}\vec{N}$$

Problem 10.3.1

Bir maddesel nokta bir eğri üzerinde $s = 2t^3 + 5t^2 - 4$ (Burada s metre , t saniye cinsindendir.) bağıntısına uygun olarak hareket etmektedir. $t = 1$ de maddesel noktanın bulunduğu yerin eğrilik yarıçapı $R = 5m.$ olduğuna göre bu andaki hız ve ivme vektörlerini doğal koordinat sisteminde hesaplayınız.

Çözüm:

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T} \quad , \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T} + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R}\vec{N}$$

$$\frac{ds}{dt} = 6t^2 + 10t \quad , \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = 12t + 10$$

$$t = 1 \text{ de} \quad \frac{ds}{dt} = 16 \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = 22$$

$$\boxed{\vec{V} = 16\vec{T}} \quad , \quad \vec{a} = 22\vec{T} + \frac{(16)^2}{5}\vec{N} \quad , \quad \boxed{\vec{a} = 22\,\vec{T} + 51{,}2\,\vec{N}}$$

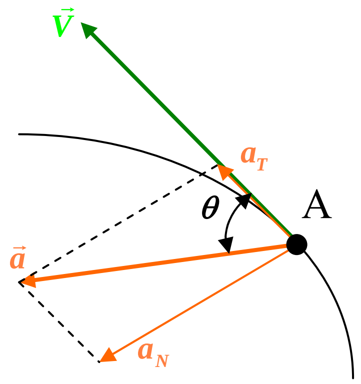
Problem 10.3.2

Bir maddesel nokta bir eğri üzerinde hareket ederken bir t anında hız ve ivme vektörlerinin kartezyen koordinatlardaki bileşenleri

$\vec{V} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

olduğuna göre bu an için hız ve ivme vektörlerinin doğal koordinat sistemindeki ifadelerini ve eğri üzerinde bulunduğu noktanın eğrilik yarıçapını bulunuz.

Çözüm:



$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} \quad , \quad \left|\vec{V}\right| = 7\,\boldsymbol{m/s} \quad , \quad \boxed{\vec{V} = 7\vec{T}}$$

$$\vec{V} \bullet \vec{a} = \left|\vec{V}\right|\left|\vec{a}\right| Cos\,\theta \quad , \quad \left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2} \quad , \quad \left|\vec{a}\right| = 5\,\boldsymbol{m/s^2}$$

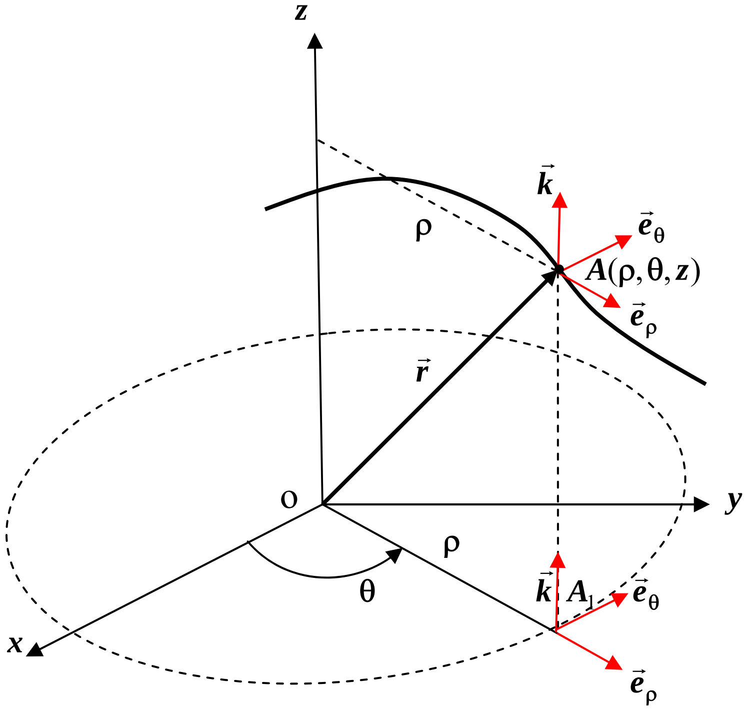
$$Cos\,\theta = \frac{\vec{V} \bullet \vec{a}}{\left|\vec{V}\right|\left|\vec{a}\right|} \quad , \quad Cos\,\theta = \frac{6*3 - 2*4}{7*5} \quad , \quad Cos\,\theta = \frac{10}{35} \quad \Rightarrow \quad \theta = 73,4^{\,o}$$

$$a_T = \left|\vec{a}\right| Cos\,\theta = 1,43\,\boldsymbol{m/s^2} \quad , \quad a_N = \left|\vec{a}\right| Sin\,\theta = 4,79\,\boldsymbol{m/s^2}$$

$$\boxed{\vec{a} = 1,43\vec{T} + 4,79\,\vec{N}}$$

$$a_N = \frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V^2}{a_N} \quad , \quad R = \frac{49}{4,79} \quad , \quad \boxed{R = 10,23\,\boldsymbol{m}}$$

10.4 Maddesel noktanın hareketinin silindirik koordinat sisteminde incelenmesi



Yukarıdaki şekilden $\vec{r}$ vektörü

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik silindirik koordinatların birim vektörleri cinsinden yazılırsa

$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}$$

elde edilir. Yer vektörünün zamana göre türevlerinden hız ve ivme vektörleri bulunur.

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Burada $\vec{e}_\rho$ birim vektörü θ nın fonksiyonu olduğundan zincir kuralı uygulanıp

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$ eşitliği yazılabilir.

Burada $\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}$ bir düzleme paralel olarak değişen bir birim vektör dür. Bu vektörün bu düzlem içindeki sabit bir doğrultu ile yaptığı açıya göre türevi kendisine pozitif yönde dik bir birim vektör olan $\vec{e}_\theta$ vektörüdür.

Böylece elde edilen $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ denklemi ile hız denklemine gidilirse silindirik koordinatlardaki hız vektörü

$$\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}$$

şeklinde elde edilir. Bu elde edilen hız vektörünün zamana göre türevi alınırsa ivme vektörü bulunur.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\,\dot{\theta}\,\dot{\vec{e}}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k}$$

Burada $\vec{e}_\rho$ gibi $\vec{e}_\theta$ da θ nın fonksiyonudur. Bundan dolayı

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$ eşitliği yazılabilir.

Burada $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}$ bir düzleme paralel olarak değişen bir birim vektördür. Bu birim vektörün bu düzlem içindeki sabit bir doğrultu ile yaptığı açıya göre türevi kendisine pozitif yönde dik bir birim vektör olan $-\vec{e}_\rho$ vektörüdür.

Böylece elde edilen $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{e}_\rho$ ve $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ eşitliği ivme denklemine gidilirse

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\,\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k}$$

silindirik koordinatlardaki ivme denklemi elde edilir.

Problem 10.4.1

Bir maddesel nokta bir eğri üzerinde $\rho = 20 + 10Cos\frac{\pi}{6}t$, $\theta = \frac{\pi}{3}t^3$, $z = 10Sin\frac{\pi}{4}t$ Bağıntılarına uygun olarak hareket etmektedir. $t = 1$ için yer ,hız ve ivme vektörlerini silindirik koordinatlarda hesaplayınız.

$$\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_\rho + \left(\rho\,\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\dot{\rho} = -\frac{5\pi}{3}Sin\frac{\pi}{6}t \quad , \quad \ddot{\rho} = -\frac{5\pi^2}{18}Cos\frac{\pi}{6}t$$

$$\dot{\theta} = \pi t^2 \quad , \quad \ddot{\theta} = 2\pi t$$

$$\dot{z} = \frac{5\pi}{2}Cos\frac{\pi}{4}t \quad , \quad \ddot{z} = -\frac{5\pi^2}{8}Sin\frac{\pi}{4}t$$

$t = 1$ de $\quad \rho = 20 + 5\sqrt{3}$, $\dot{\rho} = -\frac{5\pi}{6}$, $\ddot{\rho} = -\frac{5\pi^2}{36}\sqrt{3}$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad , \quad \dot{\theta} = \pi \quad , \quad \ddot{\theta} = 2\pi$$

$$z = 5\sqrt{2} \quad , \quad \dot{z} = \frac{5\pi}{4}\sqrt{2} \quad , \quad \ddot{z} = -\frac{5\pi^2}{16}\sqrt{2}$$

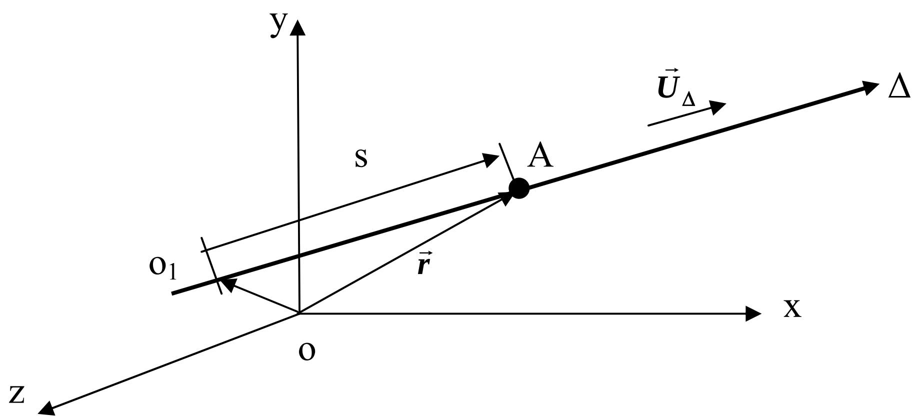
$$\boxed{\vec{r} = (20 + 5\sqrt{3})\vec{e}_\rho + 5\sqrt{2}\vec{k}} \quad , \quad \boxed{\vec{V} = -\frac{5\pi}{6}\vec{e}_\rho + (20 + 5\sqrt{3})\pi\,\vec{e}_\theta + \frac{5\pi}{4}\sqrt{2}\,\vec{k}}$$

$$\vec{a} = [-\frac{5\pi^2}{36}\sqrt{3} - (20 + 5\sqrt{3})\pi^2]\,\vec{e}_\rho + [(20 + 5\sqrt{3})\,2\pi + 2(-\frac{5\pi}{6})\pi]\,\vec{e}_\theta - \frac{5\pi^2}{16}\sqrt{2}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = [-(20 + \frac{185}{36}\sqrt{3})\pi^2]\,\vec{e}_\rho + [(40 + 10\sqrt{3})\pi + (-\frac{5}{3})\pi^2]\,\vec{e}_\theta - \frac{5\pi^2}{16}\sqrt{2}\,\vec{k}}$$

10.5 Maddesel noktanın doğrusal hareketi

Maddesel noktanın yörüngesi bir koordinat sistemine göre doğru şeklinde ise maddesel noktanın bu koordinat sistemine göre yaptığı harekete doğrusal hareket denir.



Maddesel noktanın yörüngesi olan bu doğru üzerinde keyfi bir başlangıç noktası ve yön seçilebilir. Buradaki s A da bulunan maddesel noktanı doğru üzerindeki başlangıç noktasına göre alınan ölçüdür.

Burada maddesel noktanın konumunu gösteren $\vec{r}$ yer vektörü

$\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A}$ şeklinde yazılabilir. $\overrightarrow{O_1A} = s\,\vec{U}_\Delta$ olduğundan

$\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + s\,\vec{U}_\Delta$ olur.

Hız vektörü $\vec{V} = \dfrac{ds}{dt}\vec{U}_\Delta$

İvme vektörü $\vec{a} = \dfrac{d^2s}{dt^2}\vec{U}_\Delta$

Bu elde edilen hız ve ivme vektörleri aynı doğrultuda olduğundan önce şiddetleri hesaplanıp sonra vektör formuna kolayca getirilir.
Doğrusal hareketi için aşağıdaki skaler denklemler kullanılır.

$$V = \frac{ds}{dt} \quad , \quad a = \frac{dV}{dt} \quad , \quad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$

ve ayrıca $V = \dfrac{ds}{dt}$ den çekilen $dt = \dfrac{ds}{V}$ eşitliği $a = \dfrac{dV}{dt}$ denklemine yerleştirilirse

$$a = \frac{VdV}{ds}$$

denklemi elde edilir. Bu elde edilen 4 adet denklemden doğrusal harekete ait problemler çözülmeye çalışılır.

10.5.1 Sabit hızlı doğrusal hareket

Bir doğrusal hareketteki hız V sabit ise aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$a = \dfrac{dV}{dt}$ den

$a = 0$ bulunur. Ve

$V = \dfrac{ds}{dt}$ den $ds = Vdt$ yazılıp V sabit olduğu için kolayca integre ederek

$$\int_{s_0}^{s} ds = V\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + V\,t$$

sabit hızlı doğrusal harekete ait konum zaman bağıntısı bulunur.

Problem 10.5.1.1

Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $V = 6\,m/s$ sabit hızı ile hareket ettiğine göre $t = 0$ da $s = 8\,m$ olduğuna göre 5 inci saniyedeki konumunu bulunuz.

Çözüm:

$s = s_0 + V\,t$ konum zaman denkleminden

$t = 5$ deki konum t yerine 5 yazarak bulunur.

$s = 8 + 6 * 5$, $\boxed{s = 38\,m}$.

10.5.2 Sabit ivmeli doğrusal hareket

Bir doğrusal hareketteki ivme a sabit ise aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$a = \dfrac{dV}{dt}$ den $dV = a\,dt$ yazıp integre ederek

$$\int_{V_0}^{V} dV = a\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad V = V_0 + a\,t$$

hız zaman bağıntısı elde edilir.

$V = \dfrac{ds}{dt}$ den $ds = (V_0 + a\,t)\,dt$ yazıp integre ederek

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (V_0 + a\,t)\,dt \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + V_0\,t + \frac{1}{2}a\,t^2$$

konum-zaman bağıntısı elde edilir.

Ayrıca $a = \dfrac{VdV}{ds}$ bağıntısından yazılan $ds = \dfrac{1}{a}V\,dV$ bağıntısı integre edilirse

$$\int_{s_0}^{s} ds = \frac{1}{a}\int_{V_0}^{V} V\,dV \quad \Rightarrow \quad s = s_0 + \frac{1}{2a}(V^2 - V_0^2)$$

konum-hız bağıntısı elde edilir.

Problem 10.5.2.1 Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $a = 3m/s^2$ sabit ivmesi ile hareket ettiğine göre $t = 0$ da konumu $s = 8m$ ve hızı $V = 4m/s$ olduğuna göre 5 inci saniyedeki konumunu bulunuz.

Çözüm:

$$s = s_0 + V_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2$$ konum zaman denkleminden

$t = 7s.$ deki konum t yerine 7 yazarak bulunur.

$$s = 8 + 4*7 + \frac{1}{2} 3*7^2 \quad , \quad \boxed{s = 109,5m}.$$

10.5.3 $a = f(t)$ İvme zamanın fonksiyonu şeklinde verilmiş ise

$a = \dfrac{dV}{dt}$ den elde edilen $dV = a\,dt$ denklemde a yerine $f(t)$ yazıp integre edilirse

$$dV = f(t)dt \quad \Rightarrow \quad \int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t f(t)dt$$

$$V = V_0 + \int_0^t f(t)\,dt$$

hız –zaman bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdaki V hızı yerine $\dfrac{ds}{dt}$ yazıp düzenlendikten sonra integre edilirse

$$\frac{ds}{dt} = V_0 + \int_0^t f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t [V_0 + \int_0^t f(t)dt]\,dt$$

$$s = s_0 + \int_0^t [V_0 + \int_0^t f(t)dt]\,dt$$

konum-zaman bağıntısı elde edilir. Burada s_0 ve V_0 Başlangıç değerleridir.

Problem 10.5.3.1 Bir maddesel nokta bir doğru $a = 2t + 3$ ivme zaman bağıntısı ile hareket ediyor. $t = 0$ da konum $s = 4m.$ ve hız $V = -10m/s.$ olduğuna göre $t = 6$ daki konumu ve hızı hesaplayınız.

Çözüm:

$a = \dfrac{dV}{dt}$ den $dV = a\,dt$ yazılabilir. Burada a yerine $2t + 3$ yazıp integre edilirse

$$\int_{V_0}^{V} dV = \int_O^t (2t+3)dt \quad \Rightarrow \quad V = V_O + t^2 + 3t$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde V_O yerine -10 konursa

$V = t^2 + 3t - 10$ Hız-zaman denklemi elde edilir.Burada t yerine 6 yazılırsa

$\boxed{V = 29m/s}$ bulunur.

$V = \dfrac{ds}{dt}$ den $ds = V\,dt$ yazılabilir. Burada $\vec{V}$ yerine $t^2 + 3t - 10$ yazıp integre edilirse

$$\int_{s_o}^{s} ds = \int_{0}^{t} (t^2 + 3t - 10)\,dt$$

$$s = s_0 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 10t$$

denklemi elde edilir. Burada s_0 yerine 4 yazılırsa

$$s = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 10t + 4$$

konum-zaman denklemi elde edilir. Burada t yerine 6 yazılırsa

$$\boxed{s = 70\,m}$$

bulunur.

10.5.4 $a = f(s)$ İvme konumun fonksiyonu şeklinde verilmiş ise

a yerine $\dfrac{VdV}{ds}$ veya $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ yazıp denklem düzenlendikten sonra integre ederek hız-konum veya konum-zaman denklemleri bulunur.

Problem 10.5.4.1

Bir maddesel nokta bir doğru $a = 12\,s^{1/2}$ ivme -konum bağıntısı ile hareket ediyor. $t = 0$ da konum $s = 0$ ve hız $V = 0$ olduğuna göre $t = 2$ deki konumu hızı ve ivmeyi hesaplayınız.

Çözüm:

a yerine $\dfrac{VdV}{ds}$ yazıp elde edilen

$\dfrac{VdV}{ds} = 12\,s^{1/2}$ denklemi

$V\,dV = 12\,s^{1/2} ds$ şeklinde düzenlenip integre edilirse

$\int_0^V V\,dV = \int_0^s 12\,s^{1/2} ds \Rightarrow \frac{1}{2}V^2 = 12\frac{1}{3/2}s^{3/2} \Rightarrow V = 4\,s^{3/4}$ denklemi elde edilir.

Bu denklemde V yerine $\dfrac{ds}{dt}$ yazıp elde edilen $\dfrac{ds}{dt} = 4\,s^{3/4}$

denklemi $\frac{ds}{4s^{3/4}} = dt$ şeklinde yazılıp integre edilirse

$$\int_0^s \frac{1}{4} s^{-3/4} ds = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad s^{1/4} = t \quad \Rightarrow \quad s = t^4 \quad , V = 4t^3 \quad , \quad a = 12t^2$$

$t = 2$ de $s = 16\,m.$, $V = 32\,m/s$, $a = 48\,m/s^2$

10.5.5 $a = f(V)$ İvme hızın fonksiyonu şeklinde verilmiş ise

a yerine $\frac{dV}{dt}$ veya $\frac{VdV}{ds}$ yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{dV}{dt} = f(V) \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dV}{f(V)}$$

$$\frac{VdV}{ds} = f(V) \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{VdV}{f(V)}$$

Bu son eşitlikler integre edilirse hız-zaman ve konum-hız denklemleri bulunur.

Problem 10.5.5.1 Bir maddesel nokta bir doğru $a = -0,2V^2$ ivme –hız bağıntısı ile hareket ediyor. $t = 0$ da konum $s = 0$ ve hız $V = 20\,m/s$ olduğuna göre $t = 2$ deki konumu hızı ve ivmeyi hesaplayınız.

Çözüm:

a yerine $\frac{dV}{dt}$ yazarak elde edilen

$\frac{dV}{dt} = -0,2V^2$ denklemi $dt = -5\frac{dV}{V^2}$ şeklinde düzenlenip integre edilirse

$$\int_0^t dt = -5\int_{20}^{V} \frac{dV}{V^2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{5}{V} - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{V} = t + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{5}{t + \frac{1}{4}}$$

$V = \frac{20}{1+4t}$ denklemi elde edilir. Bu denklemde V yerine $\frac{ds}{dt}$ yazarak

$\frac{ds}{dt} = \frac{20}{1+4t}$ elde edilen denklem $ds = \frac{20}{1+4t}dt$ şeklinde düzenlenip integre edilirse $\int_0^s ds = \int_0^t \frac{20}{1+4t}dt \Rightarrow s = 5Ln(1+4t)$ konum-zaman bağıntısı elde edilir.

$t = 2$ de $\boxed{s = 11\,m}$, $\boxed{V = 2,22\,m/s}$, $a = -0.2V^2$, $a = -0.2(2,22)^2$

$\boxed{a = -0,988\,m/s^2}$

10.5.6 $a = -kV$ Bağıntısına uygun doğrusal hareket (geri tepmeyi azaltma)

Burada k pozitif reel sayı

$a = \frac{VdV}{ds}$ de a yerine $-kV$ yazılıp $-kV = \frac{VdV}{ds}$ elde edilen denklem

$dV = -kds$ şeklinde düzenlendikten sonra integre edilirse

$$\int_{V_0}^{V} dV = -k\int_{s_0}^{s} ds \quad \Rightarrow \quad V = V_0 - k(s - s_0)$$

hız-konum bağıntısı elde edilir. Elde edilen bağıntıda V yerine $\frac{ds}{dt}$ yazılırsa

$\frac{ds}{dt} = V_0 - ks + ks_0$ bağıntısı elde edilir. Eğer hız-konum bağıntısında $s_0 = 0$

alınabilirse $\frac{ds}{dt} = V_0 - ks$ şekline gelen denklem $\frac{ds}{V_0 - ks} = dt$ şeklinde

düzenlenip integre edilirse

$$\int_0^s \frac{ds}{V_0 - ks} = \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{k}\ln\frac{V_0 - ks}{V_0} = t \quad \Rightarrow \quad V_0 - ks = V_0 e^{-kt}$$

$s = \frac{V_0}{k}(1 - e^{-kt})$ konum-zaman bağıntısı elde edilir.

10.5.7 $a = -ks$ Bağıntısına uygun doğrusal hareket (serbest titreşim hareketi)

Burada k pozitif reel sayı

$a = -ks$ denkleminde a yerine $\frac{d^2s}{dt^2}$ yazılırsa

$\frac{d^2s}{dt^2} + k\,s = 0$ ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi

elde edilir. Bu denklemin çözüm fonksiyonu olarak

$s = A\,Cos\,\omega t + B\;Sin\;\omega t$

önerilirse diferansiyel denklemi sağladığı görülür. Burada $\omega = \sqrt{k}$ dır. A ve B

sabitleri ise başlangıç koşulları aşağıdaki denklemlerde yerine konarak bulunur.

$s = A\,Cos\,\omega t + B\;Sin\;\omega t$, $V = -A\omega\;Sin\;\omega t + B\omega\,Cos\;\omega t$

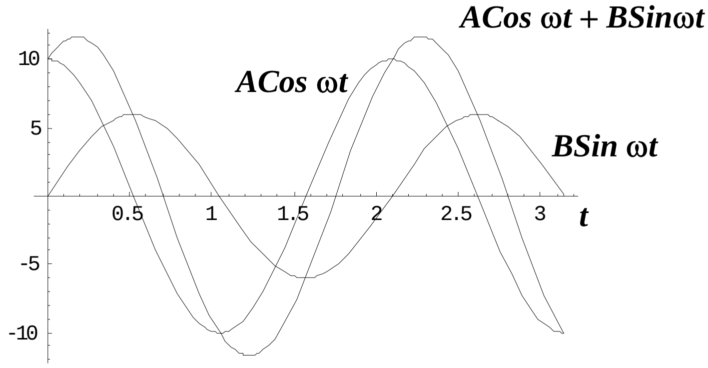
kullanılarak bulunur. Eğer $t = 0$ daki s ve V biliniyorsa aşağıdaki denklemler yazılabilir.

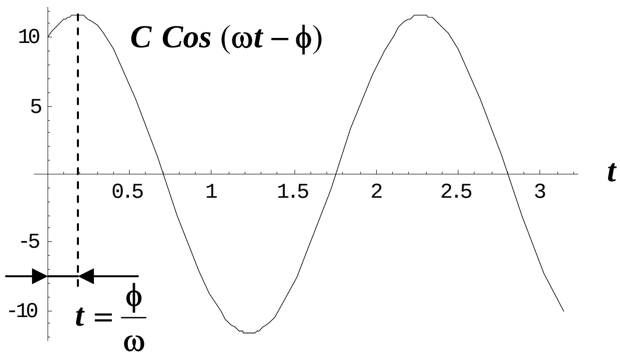
$s_0 = A Cos\;\omega t$, $V_0 = B\omega\,Cos\;\omega t$ bunlardan $A = s_0$ ve $B = \frac{V_0}{\omega}$

Böylece $s = s_0\;Cos\,\omega t + \frac{V_0}{\omega}\;Sin\;\omega t$ Denklemi elde edilir.

$s = A\,Cos\,\omega t + B\;Sin\;\omega t$ denklemi $s = C\;Cos\;(\omega t - \phi)$ şeklinde yazılabilir.

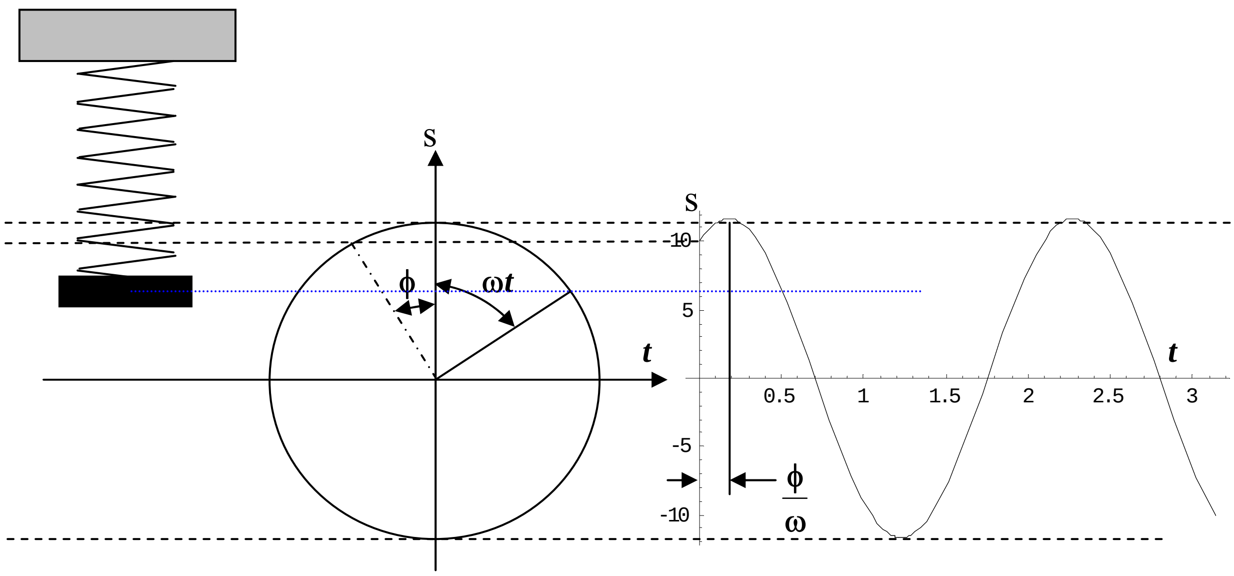
Burada $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\quad \phi = Arc\tan\dfrac{B}{A}$ dır. Eğer fonksiyonun s-t grafiği çizilirse buradaki eğri $Cos\,\omega t$ eğrisinden $Cos\,(\omega t - \phi)$ fonksiyonunun argümanı olan $(\omega t - \phi)$ yi sıfır yapan $t = \dfrac{\phi}{\omega}$ kadar geriden başlar .





Yukarıdaki grafikler $A = 10$, $B = 6$, $C = \sqrt{(10)^2 + 6^2} = 11{,}66$

$\phi = Arc\tan\dfrac{6}{10} = 0{,}54\ Rad.$, $\omega = 3$ ve $\dfrac{\phi}{\omega} = 0{,}18$ için çizilmiştir.



Problem 10.5.7.1 Bir maddesel nokta bir doğru $a=-\frac{\pi^2}{36}s$ ivme –konum bağıntısı ile hareket ediyor. $t=0$ da konum $s=10$ ve hız $V=4\,m/s$ olduğuna göre
$t=2$ deki konumu hızı ve ivmeyi hesaplayınız.
Çözüm:
$a=-\frac{\pi^2}{36}s$ denkleminde a yerine $\frac{d^2s}{dt^2}$ yazılırsa

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\pi^2}{36}s=0$$

ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$s=A\,Cos\frac{\pi}{6}t+B\,Sin\frac{\pi}{6}t$ şeklindedir. Buradan

$V=-\frac{\pi}{6}A\,Sin\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}B\,Cos\frac{\pi}{6}t$ Hız-zaman bağıntısı elde edilir.

$t=0$ daki konum $s=10$ ve hız $V=4\,m/s$ denklemlerde yerine konursa $A=10$ ve $B=\frac{24}{\pi}$ elde edilir. Bu bulunan değerler konum-zaman ve hız-zaman denklemlerinde yerine konursa

$$s=10\,Cos\frac{\pi}{6}t+\frac{24}{\pi}Sin\frac{\pi}{6}t$$

$$V=-10\frac{\pi}{6}Sin\frac{\pi}{6}t+\frac{24}{\pi}\frac{\pi}{6}Cos\frac{\pi}{6}t \quad , \quad V=-5\frac{\pi}{3}Sin\frac{\pi}{6}t+4\,Cos\frac{\pi}{6}t$$

denklemleri elde edilir. Burada t yerine 2 yazılırsa $t=2$ deki konum ve hız değerleri elde edilir.

$$s=10\,Cos\frac{\pi}{3}+\frac{24}{\pi}Sin\frac{\pi}{3} \quad , \quad s=5+\frac{12}{\pi}\sqrt{3} \quad , \quad \boxed{s=11,62\,m}.$$

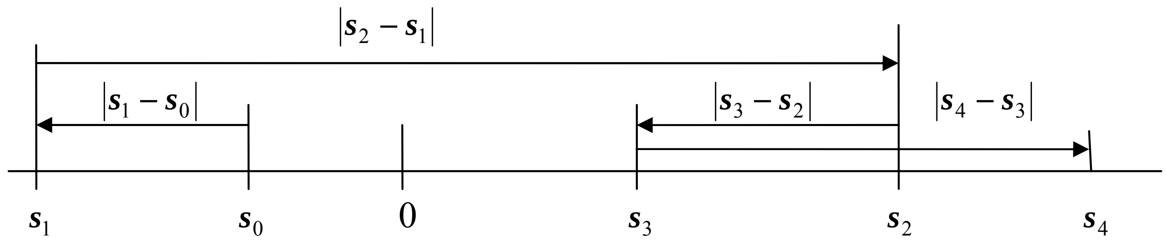
$$V=-5\frac{\pi}{3}Sin\frac{\pi}{3}+4\,Cos\frac{\pi}{3} \quad , \quad V=-5\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}+2 \quad , \quad V=6,53\,m/s.$$

10.5.8 Doğrusal harekette toplam yol

Maddesel nokta bir doğru üzerinde hareket ederken yön değiştirebilir. Bundan dolayı toplam yolu bulurken yön değiştirdiği noktalar arasındaki yollar toplanmalıdır. Yön değiştirdiği noktalardaki zamanlar hızı sıfır yapan zaman değerleridir.Bu elde edilen zamanlar ve istenen zaman noktası arasındaki konum farklarının mutlak değerleri toplandığında toplam yol bulunur.

Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bir maddesel noktanın $t=t_4$ zamanına kadar aldığı toplam yolu inceleyelim. Maddesel nokta $t=0$ da s_0 konumundan harekete başlar. Hız denklemini sıfır yapan zaman değerleri t_1, t_2 ve t_3 ise maddesel nokta $t=0$ dan $t=t_1$ e , $t=t_1$ den

$t = t_2$ ye, $t = t_2$ den $t = t_3$ e kadar ve $t = t_3$ den sonra aynı yönde hareket edeceğinden bu aralıklardaki konum farklarının mutlak değerleri toplanarak toplam yol bulunur.



$t = t_4$ kadar alınan Toplam Yol $= |s_1 - s_0| + |s_2 - s_1| + |s_3 - s_2| + |s_4 - s_3|$

Burada zamanı gösteren alt indisleri birlikte s konumları maddesel noktanın doğru üzerinde indisin belirttiği zamandaki konumunu göstermektedir.

Problem 10.5.8.1

Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $s = \frac{4}{3}t^3 - 12t^2 + 27t$ konum –zaman bağıntısına göre hareket ediyor. İlk 4 saniye içinde maddesel noktanın aldığı toplam yolu bulunuz.

Çözüm:

Maddesel noktanın 4. saniyeye kadar aynı yönde gittiği zaman dilimlerindeki konum farklarının mutlak değerleri toplanırsa toplam yol bulunur. Yön değiştirdiği zamanlar hızı sıfır yapan değerleridir.

$V = 4t^2 - 24t + 27$ denklemini sıfır yapan zaman değerleri

$$t_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4*4*27}}{2*4} \quad , \quad t_{1,2} = \frac{24 \pm 12}{8}$$

$t_1 = 1{,}5$, $t_2 = 4{,}5$ olarak bulunur.

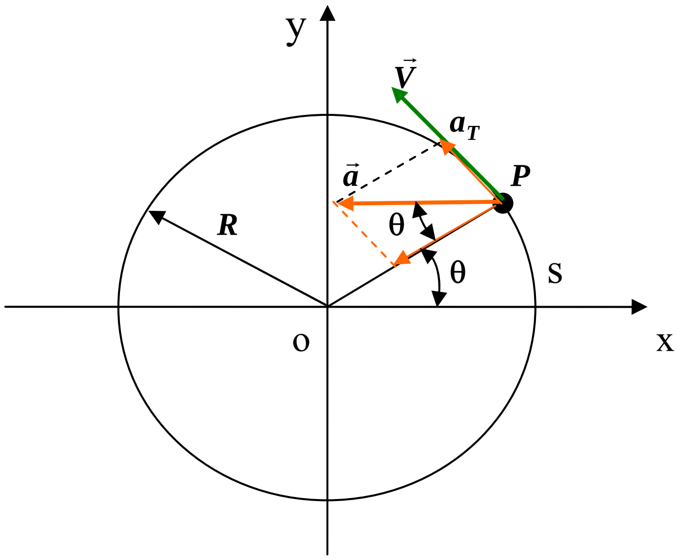
$$\boldsymbol{Top.Yol}_{t=4} = |s_{1,5} - s_0| + |s_4 - s_{1,5}|$$

$$s_0 = 0 \ , \ s_{1,5} = \frac{4}{3}1{,}5^3 - 12*1{,}5^2 + 27*1{,}5 = 18\boldsymbol{m}. , \quad s_{4,5} = \frac{4}{3}4{,}5^3 - 12*4{,}5^2 + 27*4{,}5 = 1{,}33\boldsymbol{m}.$$

$$\boldsymbol{Top.Yol}_{t=4} = |18 - 0| + |1{,}33 - 18| \quad , \quad \boxed{\boldsymbol{Top.Yol}_{t=4} = 34{,}67\,\boldsymbol{m}}.$$

10.6 Maddesel noktanın çembersel hareketi

Maddesel noktanın bir koordinat sistemine göre yörüngesi çember veya çember parçası şeklinde ise bu tür harekete çembersel hareket denir.



Hız ve ivme vektörlerinin doğal koordinat sistemindeki ifadeleri çembersel harekette açısal hız ve açısal ivme cinsinden yazılabilir.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad , \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

s çember yayı uzunluğunu gösterdiğinden

$$s = R\theta$$

yazılabilir. Bu bağıntının her iki tarafının t ye göre 1. ve 2. türevleri alınırsa

$$\frac{ds}{dt} = R\omega \quad , \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = R\alpha$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler doğal koordinat sistemine ait

$$\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T} \quad , \qquad \vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R}\vec{N}$$

denklemlerinde yerine konursa

$$\vec{V} = R\omega\,\vec{T} \quad , \qquad \vec{a} = R\alpha\,\vec{T} + R\omega^2\,\vec{N}$$

Çembersel harekete ait hız ve ivme vektörlerinin doğal koordinat sistemindeki ifadeleri elde edilir. Buradaki açısal hız ω ve açısal ivme α nın değerleri

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad , \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad , \quad \alpha = \frac{\omega\, d\omega}{d\theta}$$

denklemlerinden elde edilir. Bu denklemler doğrusal harekete ait diferansiyel denklemlerle aynı formdadır. Bundan dolayı çözüm yöntemleri de aynıdır.

Problem 10.6.1

Bir maddesel nokta $R = 12\,cm.$ yarıçaplı çember üzerinde saat akrebinin tersi yönünde hareket ederken bir t anında açısal hızı $\omega = 6\,Rad/s.$ ve açısal ivmesi $\alpha = 2\,Rad/s^2$ olduğuna göre bu an için hız ve ivme vektörlerini doğal koordinat sisteminde bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{V} = R\omega\,\vec{T}$$

Şeklindeki çembersel hareketteki hız vektörünün doğal koordinat sistemindeki formülünde verilenler yerine konursa

$$\vec{V} = 12 * 6\,\vec{T} \quad , \quad \boxed{\vec{V} = 72\,\vec{T}}$$

hız vektörünün doğal koordinat sistemindeki ifadesi elde edilir.
Aynı şekilde ivme vektörünün doğal koordinat sistemindeki formülü olan

$$\vec{a} = R\alpha\,\vec{T} + R\omega^2\,\vec{N}$$

denkleminde verilenler yerine konursa

$$\vec{a} = 12 * 2\,\vec{T} + 12 * 6^2\,\vec{N} \quad , \quad \boxed{\vec{a} = 24\,\vec{T} + 432\,\vec{N}}$$

ivme vektörünün doğal koordinat sistemindeki ifadesi bulunur.

Problem 10.6.2

Basit bir sarkacın hareketi

$$\alpha = -k\theta$$

şeklinde veriliyor. $t = 0$ da $\theta = \theta_0$ ve $\omega = \omega_0$ olduğuna göre açı θ, açısal hız ω ve açısal ivme α nın zamana bağlı ifadelerini bulunuz.

Çözüm:

α yerine $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ yazılırsa $\qquad \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$

ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\theta = A\,Cos\,\Omega t + B\,Sin\,\Omega t$$

şeklindedir. Burada $k = \Omega^2$ dir. A ve B sabitleri ise başlangıç şartlarından bulunur.

$$\theta = A\,Cos\,\Omega t + B\,Sin\,\Omega t$$

denkleminde θ yerine θ_0 , t yerine sıfır yazılırsa

$\theta_0 = A$ bulunur.

$$\omega = -A\Omega\,Sin\,\Omega t + B\Omega\,Cos\,\Omega t$$

denkleminde ω yerine ω_0 , t yerine sıfır yazılırsa

$\omega = B\Omega$ elde edilir. Buradan

$B = \dfrac{\omega}{\Omega}$ bulunur. Bu bulunan A ve B değerleri açı-zaman bağıntısında yerine yazılırsa

$$\theta = \theta_0 Cos\,\Omega t + \frac{\omega}{\Omega} Sin\,\Omega t$$

açı-zaman denklemi bulunur.Bu denklemin zaman göre birinci türevi

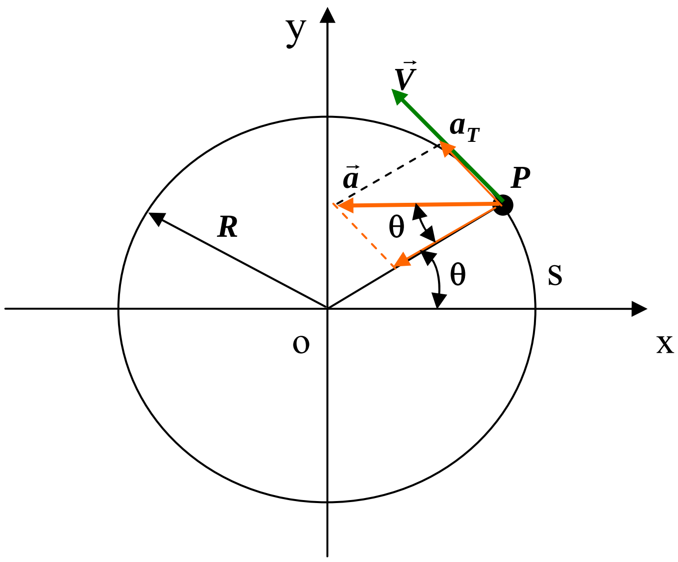
$$\omega = -\Omega\theta_0 Sin\,\Omega t + \omega\,Cos\,\Omega t$$

açısal hız-zaman denklemini verir. Bu denklemin tekrar zaman göre türevi

$$\alpha = -\Omega^2\theta_0 Cos\,\Omega t - \Omega\omega\,Sin\,\Omega t$$

açısal ivme-zaman denklemini verir.

10.6.1 Çembersel harekette hız ve ivmenin kartezyen koordinatlardaki ifadeleri



Çembersel harekette $\vec{\omega}$ açısal hız vektörü tanımlandıktan sonra $\vec{V}$ hız vektörü

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$$

Şeklinde hesaplanabilir.Burada $\vec{\omega}$ açısal hız vektörüdür.Açısal hız vektörünün modülü açısal hızın mutlak değerine eşit , doğrultusu çember düzlemine dik yönü sağ el kuralına uygun maddesel noktanın dönüş yönüne bağlı olarak tesbit edilen yönde bir vektördür.

$\vec{\omega}$ ile $\overrightarrow{OP}$ vektörü birbirine dik olduğundan $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$ nin şiddeti $R|\omega|$ değerine eşit , doğrultusu çembere teğet, yönüde hız vektörü yönünde olduğundan $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$ vektörü hız vektörüne eşittir.

Yukarıdaki şekle göre

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = R\,Cos\,\theta\,\vec{i} + R\,Sin\,\theta\,\vec{j}$$

yazılabilir. Bu eşitliklerle hız vektörü

$\vec{V} = -R\omega\, Sin\theta\, \vec{i} + R\omega Cos\theta\, \vec{j}$
şeklinde kartezyen koordinat sisteminde yazılabilir.
Bu hız vektörünün $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$ şeklindeki denkleminin zamana göre türevi alınırsa ivme vektörü bulunur.

$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}$

Burada $\vec{\alpha}$ vektörü $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ dir.

Yukarıdaki şekilde $\vec{\alpha}$ yerine $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$ alınıp ivme vektöründe yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$\vec{a} = \alpha\vec{k} \wedge \overrightarrow{OP} + \omega\vec{k} \wedge \vec{V}$

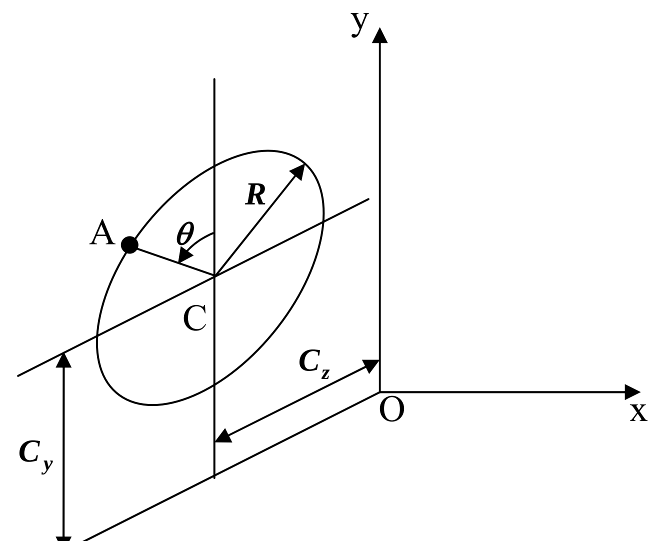
$\vec{a} = \alpha\vec{k} \wedge (RCos\theta\,\vec{i} + R\,Sin\theta\,\vec{j}) + \omega\vec{k} \wedge (-R\omega\,Sin\theta\,\vec{i} + R\omega Cos\theta\,\vec{j})$

$\vec{a} = -(R\alpha\,Sin\theta + R\omega^2\,Cos\theta)\,\vec{i} + (R\alpha Cos\theta - R\omega^2\,Sin\theta)\,\vec{j}$

ivme vektörünün kartezyen koordinatlardaki ifadesi bulunur.

Problem 10.6.1.1

Bir maddesel nokta $R = 14cm.$ yarıçaplı bir çember üzerinde $\theta = \dfrac{\pi}{24}t^3$ bağıntısına uygun olarak hareket etmektedir. Çember şekilde gösterildiği gibi yz düzlemindedir. θ açısı da şekilde gösterildiği gibi alınıyor. $t = 2$ için maddesel noktanın yer hız ve ivme vektörlerini kartezyen koordinatlarda hesaplayınız.



Burada $R = 14cm.$ $C_y = 20cm.$ $C_z = 18cm.$ $\theta = \dfrac{\pi}{24}t^3$ dır.

Çözüm:

$\vec{r} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{OC} = 20\vec{j} + 18\vec{k}$, $\overrightarrow{CA} = RCos\theta\,\vec{j} + RSin\theta\,\vec{k}$

$t = 2$ de $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\overrightarrow{CA} = 7\,\vec{j} + 7\sqrt{3}\,\vec{k}$, $\vec{r} = 27\vec{j} + (18 + 7\sqrt{3})\vec{k}$

$$\boxed{\vec{r} = 27\vec{j} + 30{,}12\vec{k}}$$

Hız vektörü kartezyen koordinatlarda

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}$$

formülü ile hesaplanabilir.Burada $\vec{\omega} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{i}$ (Çünkü x ekseni çember düzlemine diktir ve maddesel nokta çember etrafında y den z ye doğru dönüyor.)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{8}t^2$$

$t = 2$ için $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\pi}{2}$ değeri $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\vec{V} = \frac{\pi}{2}\vec{i} \wedge (7\vec{j} + 7\sqrt{3})\vec{k} \quad , \quad \vec{V} = -\frac{7}{2}\sqrt{3}\pi\vec{j} + \frac{7}{2}\pi\vec{k} \quad , \quad \boxed{\vec{V} = -19\vec{j} + 11\vec{k}}$$

$t = 2$ deki hız ifadesi hesaplanmış olur.

İvme vektörü kartezyen koordinatlarda

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CA} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}$$

formülü ile hesaplanabilir.Burada $\vec{\alpha} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}\vec{i}$ (Çünkü açısal ivme vektörü doğrultu değiştirmiyor.)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\pi}{4}t$$

$t = 2$ için $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{\pi}{2}$ değeri ve diğer elde edilenlerle birlikte

$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CA} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}$ denklemine gidilirse

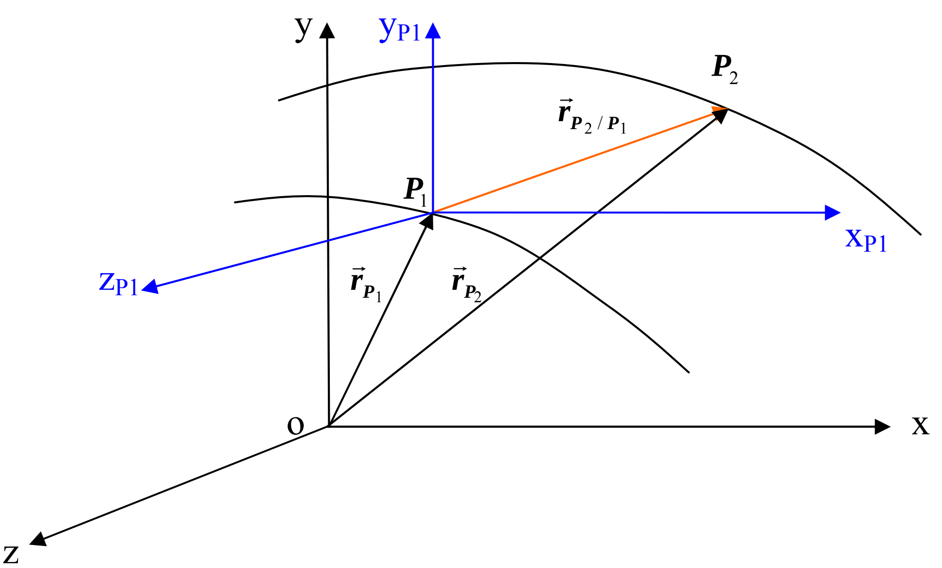
$$\vec{a} = \frac{\pi}{2}\vec{i} \wedge (7\vec{j} + 7\sqrt{3}\vec{k}) + \frac{\pi}{2}\vec{i} \wedge (-\frac{7}{2}\sqrt{3}\pi\vec{j} + \frac{7}{2}\pi\vec{k})$$

$$\vec{a} = -\frac{\pi}{2}(7\pi + 7\sqrt{3})\vec{j} + \frac{\pi}{4}(7 - 7\sqrt{3}\,\pi)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = -53{,}6\vec{j} - 24{,}4\vec{k}}$$

10.7 Maddesel noktanın bağıl hareketi (öteleme hareketi yapan eksen sistemine göre)

İki maddesel noktanın birbirine göre bağıl yer hız ve ivme vektörleri aşağıdaki şekilden elde edilebilir. Bu maddesel noktalardan birisi öteleme hareketi yapan eksen sisteminin orijini alınırsa aşağıdaki şekil çizilebilir.



Yukarıdaki şekilden yer vektörleri arasında

$$\vec{r}_{P_1} + \vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan P_2 noktasının P_1 noktasına veya öteleme hareketi yapan eksen sistemine göre $\vec{r}_{P_2/P_1}$ bağıl yer vektörü çekilip zamana göre birinci ve ikinci türevi alınırsa bağıl hız ve bağıl ivme vektörleri elde edilir.

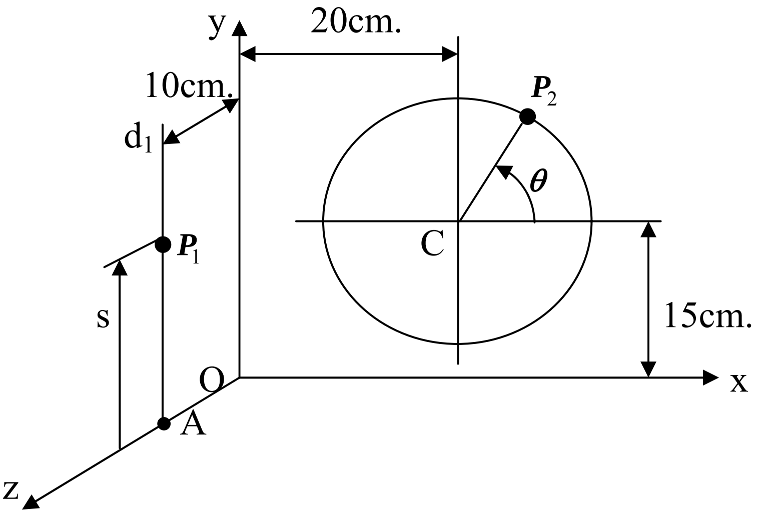
$$\vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_{P_1}$$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = \vec{V}_{P_2} - \vec{V}_{P_1}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = \vec{a}_{P_2} - \vec{a}_{P_1}$$

Problem 10.7.1

Şekilde gösterildiği gibi P_1 maddesel noktası d_1 doğrusu üzerinde $s = 10 + 8 Sin\frac{\pi}{12}t$ konum-zaman bağıntısına göre P_2 maddesel noktası ise xy düzleminde bulunan $R = 12cm.$yarıçaplı bir çember üzerinde $\theta = \frac{\pi}{24}t^3$ açı-zaman bağıntısına göre hareket etmektedir. $t = 2$ için P_2 maddesel noktasının P_1 maddesel noktasına göre bağıl yer , hız , ivme vektörlerini ve aralarındaki uzaklığı bulunuz.



Çözüm:

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_{P_1}$$

$$\vec{r}_{P_2} = \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_2} \quad , \qquad \overrightarrow{OC} = 20\vec{i} + 15\vec{j}$$

$$\vec{r}_{P_2} = (20 + 12\,Cos\,\theta)\vec{i} + (15 + 12\,Sin\,\theta)\vec{j}$$

$$\vec{r}_{P_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP_1} \quad , \qquad \vec{r}_{P_1} = s\,\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = (20 + 12\,Cos\,\theta)\vec{i} + (15 + 12\,Sin\,\theta - s)\vec{j} - 10\vec{k}$$

$t = 2$ de $\quad \theta = \dfrac{\pi}{24}2^3 = \dfrac{\pi}{3}\,Rad.$, $\quad s = 10 + 8\,Sin\dfrac{\pi}{12}2 = 14\,cm.$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = (20 + 12\,Cos\frac{\pi}{3})\vec{i} + (15 + 12\,Sin\frac{\pi}{3} - 14)\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = (20 + 6)\vec{i} + (15 + 6\sqrt{3} - 14)\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = 26\vec{i} + (1 + 6\sqrt{3})\vec{j} - 10\vec{k} \quad , \quad \boxed{\vec{r}_{P_2/P_1} = 26\vec{i} + 11{,}39\vec{j} - 10\vec{k}}$$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = -12\,\omega\,Sin\,\theta\,\vec{i} + (12\,\omega\,Cos\,\theta - V)\vec{j}$$

$$\omega = \frac{\pi}{8}t^2 \quad , \quad V = \frac{2\pi}{3}Cos\frac{\pi}{12}t$$

$t = 2$ de $\quad \omega = \dfrac{\pi}{2}\,Rad/s.$, $\quad V = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi\,cm/s.$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = -12\frac{\pi}{2}Sin\frac{\pi}{3}\vec{i} + (12\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi)\vec{j}$$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = -12\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + (12\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi)\vec{j} \quad , \qquad \vec{V}_{P_2/P_1} = -3\sqrt{3}\pi\vec{i} + (3 - \frac{\sqrt{3}}{3})\pi\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_{P_2/P_1} = -16{,}32\vec{i} + 7{,}61\vec{j}}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(12\,\alpha\,Sin\,\theta + 12\,\omega^2 Cos\,\theta)\vec{i} + (12\,\alpha\,Cos\,\theta - 12\,\omega^2 Sin\,\theta - a)\vec{j}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}t \quad , \quad V = -\frac{\pi^2}{18}Sin\frac{\pi}{12}t$$

$t = 2$ de $\quad \alpha = \frac{\pi}{2}Rad/s^2 \;,\; a = -\frac{\pi^2}{36}cm/s^2$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(12\frac{\pi}{2}Sin\frac{\pi}{3} + 12\frac{\pi^2}{4}\;Cos\frac{\pi}{3})\vec{i} + (12\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi}{3} - 12\frac{\pi^2}{4}\;Sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{36})\vec{j}$$

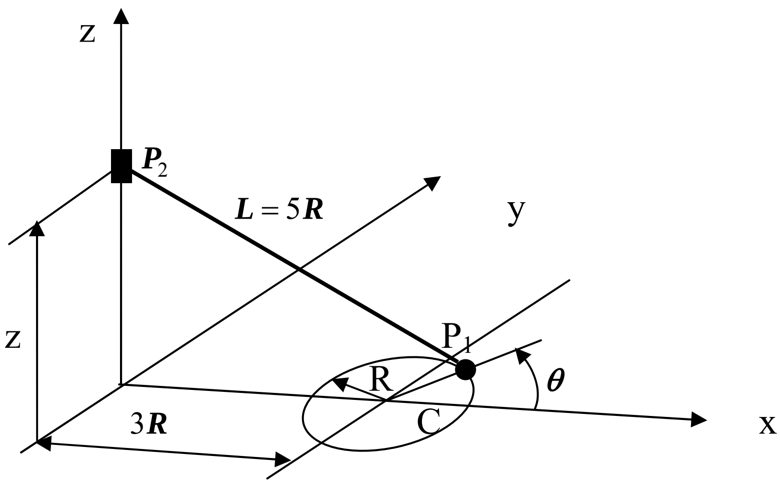
$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(12\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + 12\frac{\pi^2}{4}\;\frac{1}{2})\vec{i} + (12\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} - 12\frac{\pi^2}{4}\;\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{36})\vec{j}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(3\sqrt{3}\pi + \frac{3}{2}\pi^2)\vec{i} + (3\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\pi^2 + \frac{\pi^2}{36})\vec{j}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = -(3\sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi)\pi\vec{i} + (3 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\pi + \frac{\pi}{36})\pi\vec{j} \;,\quad \boxed{\vec{a}_{P_2/P_1} = -31,13\vec{i} + -14,57\vec{j}}$$

Problem 10.7.2

Şekilde gösterildiği gibi P_1 maddesel noktası xy düzleminde bulunan ve merkezi x ekseni üzerinde $R = 8cm.$ yarıçaplı bir çember üzerinde $\theta = \frac{\pi}{6}t$ bağıntısına göre hareket etmektedir. P_2 maddesel noktası ise $\overline{P_1P_2} = L = 5R$ sabit olmak üzere Z ekseni üzerinde hareket ediyor. $t = 1$ için P_2 maddesel noktasının hız ve ivmesini bulunuz.



Çözüm:

$$\vec{r}_{P_2} = z\vec{k} \;,\; \vec{V}_{P_2} = \dot{z}\vec{k} \quad , \quad \vec{a}_{P_2} = \ddot{z}\vec{k} \quad , \quad \left|\vec{r}_{P_2/P_1}\right| = L = 5R$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_{P_1}$$

$$\vec{r}_{P_1} = (3R + RCos\theta)\vec{i} + RSin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = -(3R + RCos\theta)\vec{i} - RSin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$

$$L^2 = \left|\vec{r}_{P_2-P_1}\right|^2 = 25R^2 = 9R^2 + R^2Cos^2\theta + 6R^2Cos\theta + R^2Sin^2\theta + z^2$$

$$z^2 = 15R^2 - 6R^2Cos\theta \quad \Rightarrow \quad z = R\sqrt{15-6Cos\theta} \quad , \quad z = R(15-6Cos\theta)^{1/2}$$

$$\dot{z} = -\frac{1}{2}R(15-6Cos\theta)^{-1/2}(-6Sin\theta)\dot{\theta}$$

$$\dot{z} = 3R\dot{\theta}Sin\theta(15-6Cos\theta)^{-1/2}, \quad \dot{z} = \frac{3R\dot{\theta}Sin\theta}{\sqrt{15-6Cos\theta}}$$

$$\ddot{z} = 3R\ddot{\theta}Sin\theta(15-6Cos\theta)^{-1/2} + 3R\dot{\theta}^2Cos\theta(15-6Cos\theta)^{-1/2} + 3R\dot{\theta}Sin\theta(-\frac{3}{2})(15-6Cos\theta)^{-3/2}(6Sin\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{z} = \frac{3R(\ddot{\theta}Sin\theta + \dot{\theta}^2Cos\theta)}{\sqrt{15-6Cos\theta}} - \frac{27R\dot{\theta}^2Sin^2\theta}{(15-6Cos\theta)\sqrt{15-6Cos\theta}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}t \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{\pi}{6} \quad , \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$t = 1 \text{ de } \quad \theta = \frac{\pi}{6}Rad.$$

$$\dot{z} = \frac{3R\frac{\pi}{6}Sin\frac{\pi}{6}}{\sqrt{15-6Cos\frac{\pi}{6}}}$$

$$\dot{z} = \frac{2\pi}{\sqrt{15-3\sqrt{3}}} \qquad \dot{z} = 2\,cm/s. \qquad \boxed{\vec{V}_{P_2} = 2\vec{k}}$$

$$\ddot{z} = \frac{3R(\frac{\pi}{36}^2 Cos\frac{\pi}{6})}{\sqrt{15-6Cos\frac{\pi}{6}}} - \frac{27R\frac{\pi}{36}^2 Sin^2\frac{\pi}{6}}{(15-6Cos\frac{\pi}{6})\sqrt{15-6Cos\frac{\pi}{6}}}$$

$$\ddot{z} = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{3\sqrt{15-3\sqrt{3}}} - \frac{3\pi^2}{2(15-3\sqrt{3})\sqrt{15-3\sqrt{3}}}$$

$$\ddot{z} = 1{,}34\,cm/s^2 \qquad \boxed{\vec{a}_{P_2} = 1{,}34\vec{k}}$$

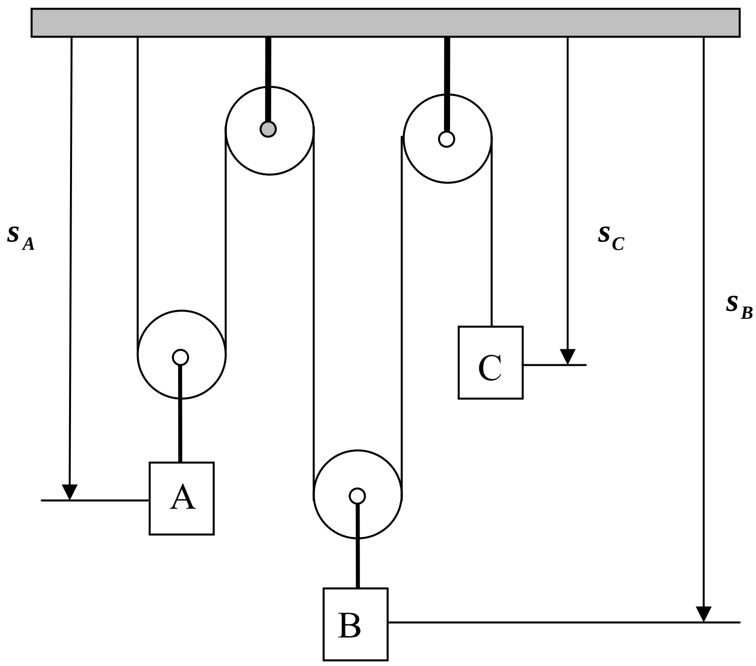
10.8 Maddesel noktaların bağlı hareketi

Bir maddesel noktanın hareketi diğer maddesel noktaların hareketine bağlı olarak veriliyorsa bu tür harekete bağlı hareket denir.

Bir maddesel noktalar sistemi düşünüldüğünde bu sistemin konumunu belirten değişkenlere genelleştirilmiş koordinatlar denir. Genelleştirilmiş koordinatların birbirinden bağımsız sayısına sistemin serbestlik derecesi denir.

Bir maddesel noktalar sistemindeki her bir bağıntı serbestlik derecesini bir azaltır.

Aşağıdaki bir makara sistemindeki maddesel nokta kabul edilen kütleler düşey doğrultuda hareket ediyorlar.Sistemin konumu 3 tane değişkenle gösterilebilir. Bu makaralardan dolandırılan ve cisimleri birbirine bağlı olarak hareket etmesini sağlayan ipin boyunun değişmediği kabul edilirse ek olarak bir bağıntı gelir. Böylece sistemin serbestlik derecesi 2 olur.



İpin toplam uzunluğunun değişmediği kabul edilirse

$$2s_A + 2s_B + s_C = \text{sabit}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının zamana göre türevleri alınırsa

$$2V_A + 2V_B + V_C = 0$$

hızlar arasındaki bağıntı bulunur. Tekrar türev alınırsa

$$2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

ivmeler arasındaki bağıntı bulunur.

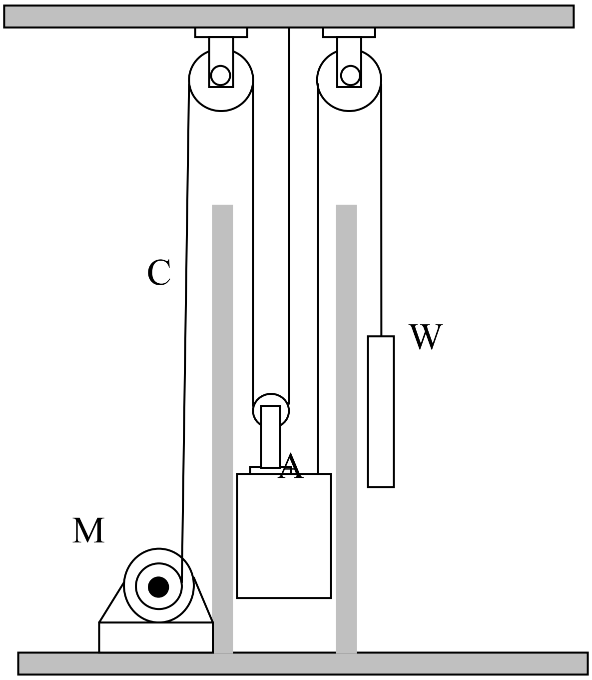
Bu problemden ayrı olarak maddesel noktalar sisteminde maddesel noktalar arasındaki uzaklıklar değişmiyorsa bu sistem rijid cisim modelini oluşturur. Bu modelde serbestlik derecesi 6 dır.

Problem 10.8.1

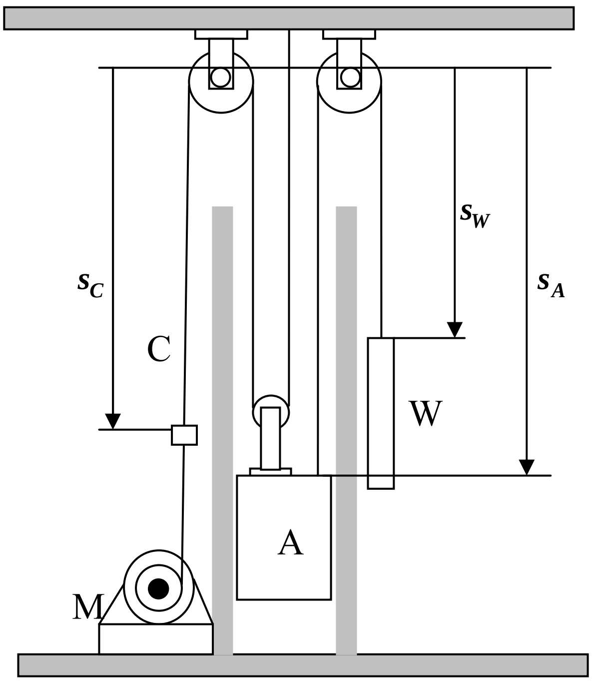
Şekilde gösterilen A asansörü aşağı doğru 5 m/s. sabit hızı ile hareket ediyor.

a) W Karşı ağırlığının hızını
b) C kablosunun hızını
c) C kablosunun A asansörüne göre hızını
d) W karşı ağırlığının A asansörüne göre hızını

bulunuz.



Çözüm:



a) $s_A + s_W = sabit$

$$V_A + V_W = 0$$

$$V_W = -V_A$$

$$V_W = -5\,m/s.$$

b) $s_C + 2s_A = sabit$

$$V_C + 2V_A = 0$$

$$V_C = -10\,m/s$$

c) $V_{C/A} = V_C - V_A$

$$V_{C/A} = -15\,m/s$$

d) $V_{W/A} = V_W - V_A$

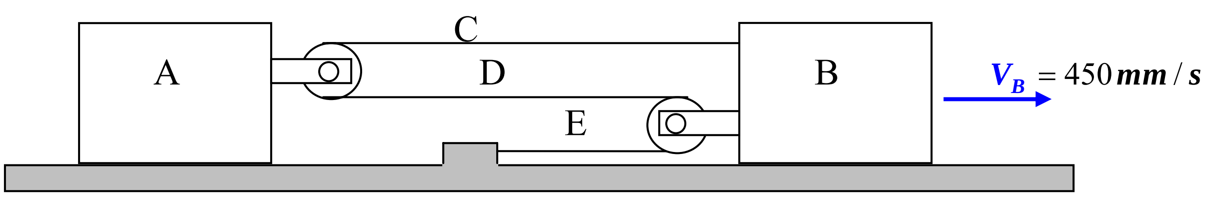
$$V_{W/A} = -5 - 5$$

$$V_{W/A} = -10\,m/s$$

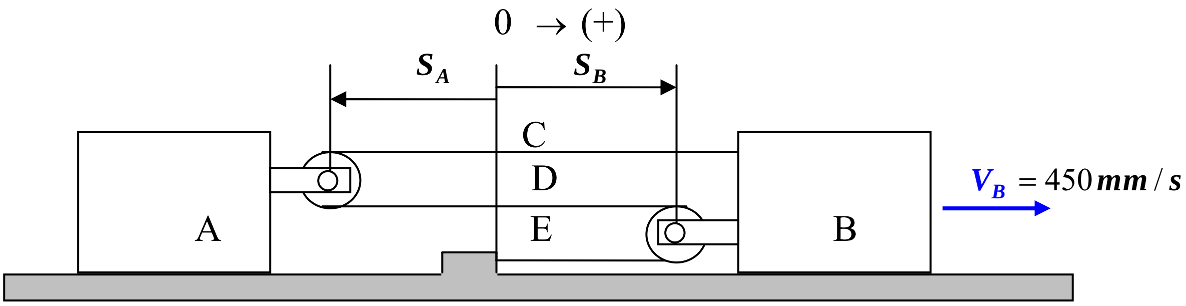
Problem 10.8.2

Şekilde gösterilen B bloğu sağa doğru $V_B = 450\,mm/s.$ sabit hızı ile hareket ediyor.

a) A bloğunun hızını
b) Kablonun D kısmının hızını
c) A nın B ye göre hızını
d) Kablonun C kısmının hızını D kısmına göre bulunuz.



Çözüm:



a)

$$3s_B - 2s_A = sabit$$

$$3V_B - 2V_A = 0$$

$$V_A = \frac{3}{2}V_B$$

$$V_A = \frac{3}{2}450$$

$$V_A = 675\,mm/s$$

b)

$$2s_B - s_D = sabit$$

$$2V_B - V_D = 0$$

$$V_D = 2V_B$$

$$V_D = 2*450$$

$$V_D = 900\,mm/s.$$

c)

$$V_{A/B} = V_A - V_B$$

$$V_{A/B} = 675 - 450$$

$$V_{A/B} = 225\,mm/s.$$

d)

$$V_{C/D} = V_C - V_D$$

$$V_C = V_B = 450\,mm/s.$$

$$V_{C/D} = 450 - 900$$

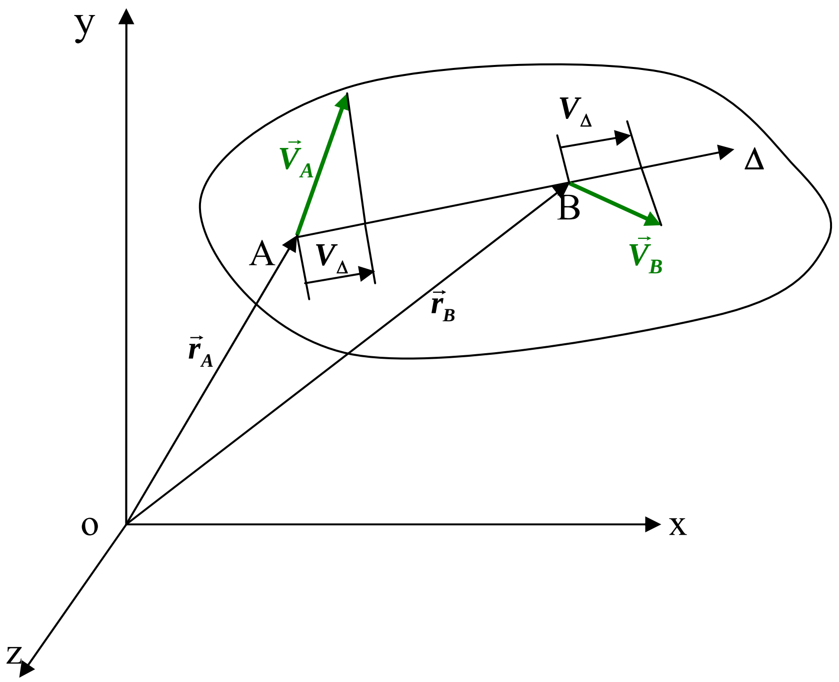
$$V_{C/D} = -450\,mm/s.$$

BÖLÜM 11

RİJİD CİSMİN KİNEMATİĞİ

11.1 Rijid cismin hareketinde izdüşüm hızlar teoremi

Rijid cismin hareketinde aynı doğru üzerinde bulunan noktaların hızlarının bu doğru üzerindeki izdüşümleri birbirine eşittir.
Bu teoremin ispatı aşağıdaki şekilde yapılabilir.



Rijid cisim üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki uzaklık değişmediğinden

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \text{sabit}$$

yazılabilir. Bir vektörün modülü vektörü kendisiyle skaler çarpıp karekökünü alarak da bulunur. Bir vektör sabit ise modülünün karesi de sabittir.

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} =$ sabit

Her iki tarfın zamana göre türevi alınırsa

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$$

elde edilir. Burada $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$ yerine $\vec{V}_B - \vec{V}_A$ yazılırsa

$$(\vec{V}_B - \vec{V}_A) \bullet \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\vec{V}_A \bullet \overrightarrow{AB} = \vec{V}_B \bullet \overrightarrow{AB}$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntının her iki tarfı $\overrightarrow{AB}$ vektörünün modülüne bölünürse

$$\vec{V}_A \bullet \vec{U}_{AB} = \vec{V}_B \bullet \vec{U}_{AB}$$

izdüşüm hızlar teoremi ispatlanmış olur.

Problem 11.1.1:

Bir rijid cismin koordinatları (1,1,0) olan A noktasının hız vektörü $\vec{V}_A = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 8\vec{k}$ ve koordinatları (3,4,6) olan B noktasının hız vektörünün doğrultusunun x eksenine paralel olduğu bilindiğine göre şiddetini bulunuz. (Burada uzunluklar metre zaman saniye cinsindendir.)

Çözüm:

İzdüşüm hızlar teoreminden

$$\vec{V}_A \bullet \overrightarrow{AB} = \vec{V}_B \bullet \overrightarrow{AB}$$

yazılabilir.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\vec{V}_B = V_B\vec{i}$$

$$\vec{V}_A \bullet \overrightarrow{AB} = 3*2 + 7*3 - 8*6$$

$$\vec{V}_A \bullet \overrightarrow{AB} = -21 m/s$$

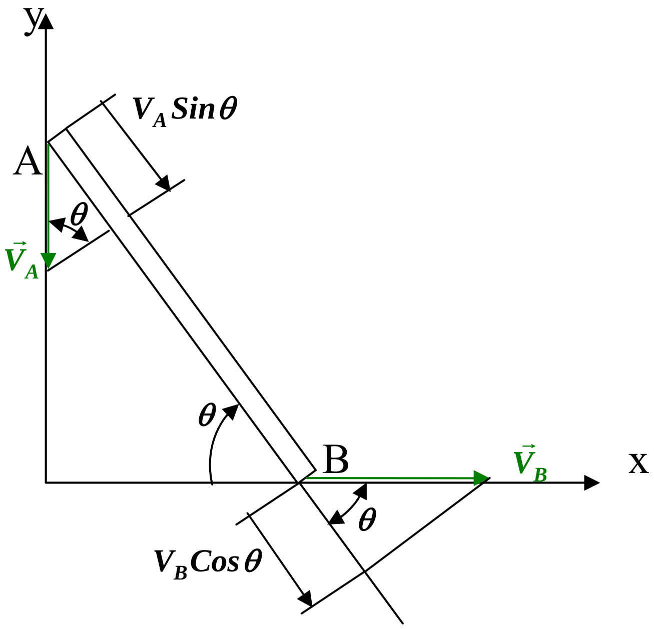
$$\vec{V}_B \bullet \overrightarrow{AB} = 2*V_B = -21 m/s$$

$$V_B = -\frac{21}{2} m/s$$

$$\boxed{V_B = -10{,}5 m/s}.$$

Problem 11.1.2:

Şekilde gösterilen AB cisminin A ucu y ekseni üzerinde V_A hız şiddeti ile aşağı doğru hareket ederken B ucu x ekseni üzerinde hareket ediyor. B ucunun hızının şiddetini A ucunun hızının şiddetine ve θ açısına bağlı olarak bulunuz.



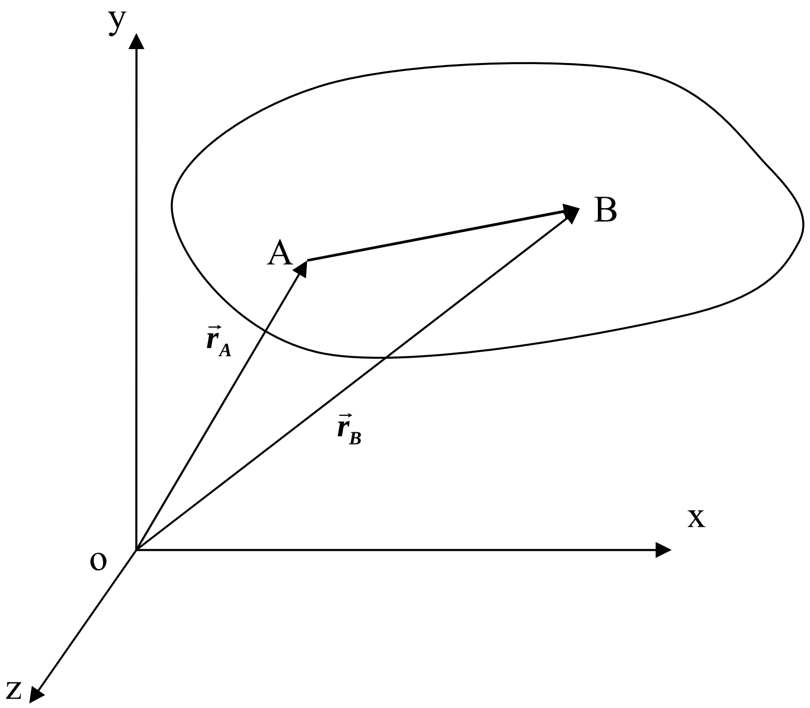
Çözüm:

İzdüşüm hızlar teoremine göre A noktasının hızının AB doğrultusu üzerindeki izdüşümü B noktasının hızının AB doğrultusu üzerindeki izdüşümüne eşittir.

$$V_A Sin\theta = V_B Cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_B = V_A tg\theta}$$

11.2 Rijid cismin ötelenme hareketi

Rijid cismin hareketinde üzerindeki hiçbir doğru doğrultu değiştirmiyorsa bu tür harekete öteleme hareketi denir. Bu durumda rijid cisme bağlı vektörler düzlemler eksen sistemleri doğrultu değiştirmezler.
Rijid cisme bağlı her vektör sabit vektördür. Şekilde bu sabit vektörlerden herhangi biri $\overrightarrow{AB}$ vektörü olsun.



Şekildeki A ve B nin yer vektörleri arasında aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\vec{r}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B$$

$\overrightarrow{AB} =$ sabit olduğu göz önünde bulundurularak eşitliğin her iki tarafının zamana göre türevi alınırsa

$\vec{V}_A = \vec{V}_B$ hız vektörleri arasındaki bağıntı bulunur. Tekrar türev alındığında ise

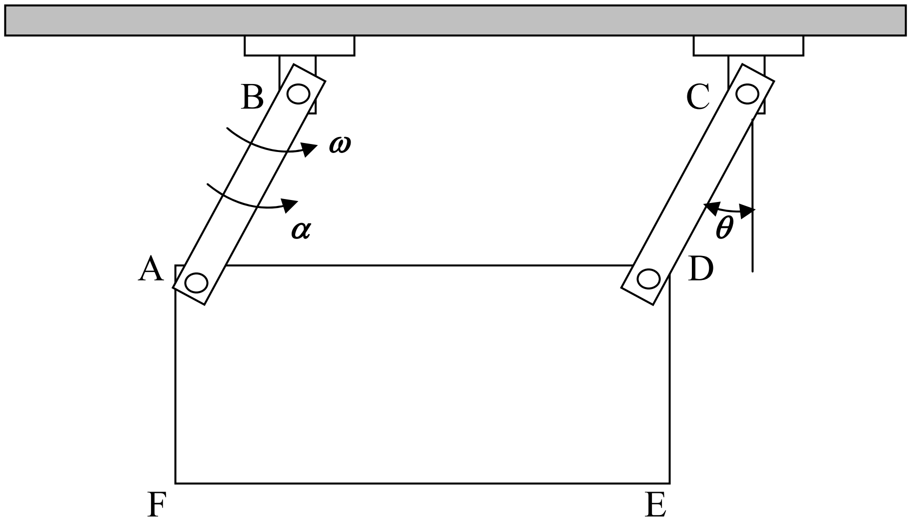
$\vec{a}_A = \vec{a}_B$ ivmeler arasındaki bağıntı bulunur.

Bu bağıntılardan öteleme hareketinde rijid cismin bütün noktalarının hız vektörlerinin birbirine eşit , ivme vektörlerinin birbirine eşit olduğu görülür. Ötelenme hareketinde bütün noktaların hızları birbirine eşit olduğu için yörüngeleri de birbirinin aynı veya ötelenmiş eğriler olur. Eğer bu yörüngeler doğru şeklinde ise bu harekete doğrusal ötelenme, eğri şeklinde ise eğrisel ötelenme hareketi denir.

Problem 11.2.1

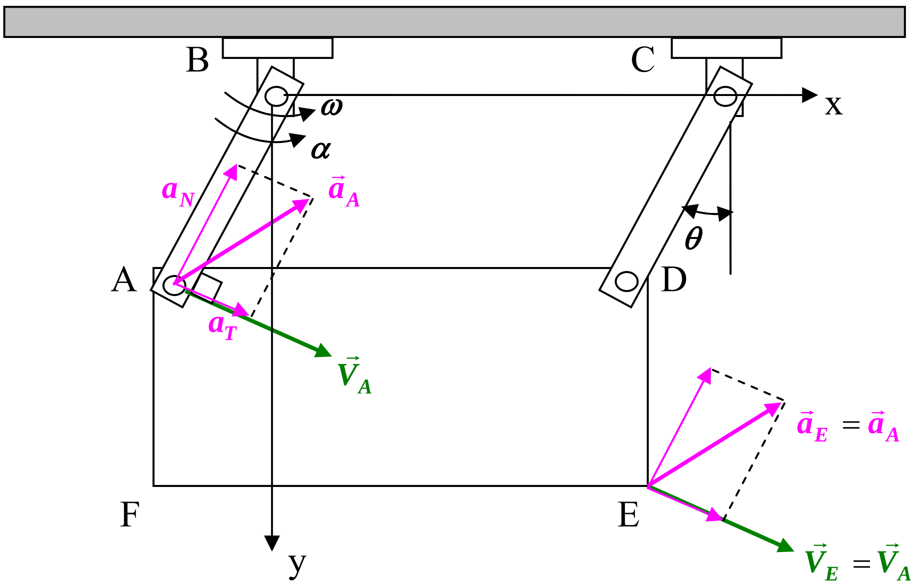
ADEF dikdörtgen plakası şekil düzleminde kalmak şartı ile A noktasından B etrafında dönebilen AB çubuğu ile D noktasından C etrafında dönebilen CD çubuğu ile mafsallı olarak hareket ediyor. AB çubuğunun şekilde verilen konumdan geçerken açısal hızı $\omega = 5\boldsymbol{Rad/s}$ açısal ivmesi $\alpha = 2\boldsymbol{Rad/s^2}$ olduğuna göre bu an için ADEF dikdörtgen levhasının E noktasının hız ve ivme vektörlerini

a) doğal koordinat sisteminde
b) kartezyen koordinat sisteminde bulunuz.



$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{CD} = 20\boldsymbol{cm.}$, $\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AD} = 32\boldsymbol{cm.}$, $\theta = 30^0$

Çözüm:



AB uzunluğu CD uzunluğuna ve BC uzunluğu AD uzunluğuna eşit olduğu için ABCD daima paralel kenar olur. Bundan dolayı dikdörtgen plaka öteleme hareketi yapar.

Öteleme hareketi yapan cisimlerin bütün noktalarının hızları ve ivmeleri birbirinin aynı olduğundan E noktasının hızı ve ivmesi A noktasının hızı ve ivmesine eşit olur.

a) Doğal koordinat sisteminde hız ve ivme vektörleri

$$\vec{V}_A = \overleftrightarrow{AB} \cdot \omega \vec{T} \quad , \quad \vec{V}_A = 20 * 5 \vec{T} \quad , \quad \vec{V}_A = 100 \vec{T}$$

$$\vec{a}_A = \overleftrightarrow{AB} \cdot \alpha \vec{T} + \overleftrightarrow{AB} \cdot \omega^2 \vec{N} \ , \ \vec{a}_A = 20 * 2 \vec{T} + 20 * 5^2 \vec{N} \ , \ \vec{a}_A = 40 \vec{T} + 500 \vec{N}$$

$$\boxed{\vec{V}_E = \vec{V}_A = 100 \vec{T}}$$

$$\boxed{\vec{a}_E = \vec{a}_A = 40 \vec{T} + 500 \vec{N}}$$

b) Kartezyen koordinat sisteminde hız ve ivme vektörleri

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{BA}$$

$$\vec{\omega} = -5 \vec{k}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\overleftrightarrow{BA} * Sin\theta \, \vec{i} + \overleftrightarrow{BA} * Cos\theta \, \vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{BA} = -20 * Sin 30^0 \, \vec{i} + 20 * Cos 30^0 \, \vec{j}$$

$$\overrightarrow{BA} = -10 \vec{i} + 10\sqrt{3} \, \vec{j}$$

$$\vec{V}_A = -5\vec{k} \wedge (-10\vec{i} + 10\sqrt{3}\, \vec{j}) \ , \quad \vec{V}_A = 50\sqrt{3}\, \vec{i} - 50 \vec{j}$$

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{BA} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_A \quad , \quad \vec{a}_A = -2\vec{k} \wedge (-10\vec{i} + 10\sqrt{3}\, \vec{j}) - 5\vec{k} \wedge (50\sqrt{3}\, \vec{i} - 50 \vec{j})$$

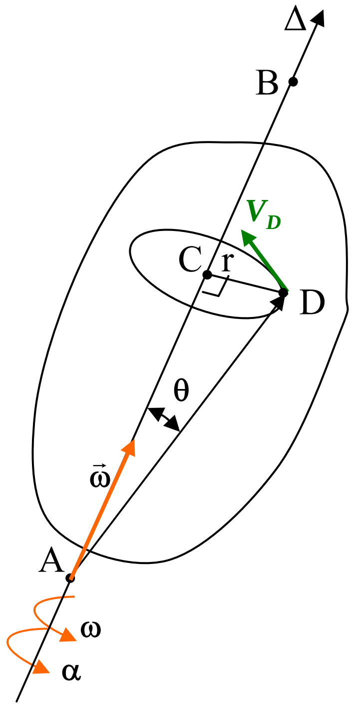
$$\vec{a}_A = (20\sqrt{3} + 250)\vec{i} + (20 - 250\sqrt{3})\, \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_E = \vec{V}_A = 50\sqrt{3}\, \vec{i} - 50 \vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a}_E = \vec{a}_A = (20\sqrt{3} + 250)\vec{i} + (20 - 250\sqrt{3})\, \vec{j}}$$

11.3 Rijid cismin sabit bir eksen etrafında dönme hareketi

Rijid cismin üzerindeki noktaların sabit bir eksene ve bu eksen üzerindeki bir noktaya uzaklıkları hareket boyunca değişmiyorsa rijid cismin bu hareketine sabit bir eksen etrafında dönme hareketi denir.



Yukarıdaki şekilde bir rijid cisim A ve B noktalarından geçen Δ ekseni etrafında ω açısal hızı ve α açısal ivmesi ile dönüyor. Cismin üzerindeki bütün noktaların yörüngeleri Δ eksenine dik düzlemlerdeki çemberlerdir. Burada D noktası C merkezli r yarıçaplı Δ eksenine dik düzlemde bir çember çizer.

Çembersel harekette bir noktanın hız vektörünün doğrultusu çembere teğet ,yönü hareket yönünde , şiddeti ise açısal hız ile yarıçapın çarpımına eşittir.

$$\vec{V} = r\omega\vec{T}$$

İvme vektörü ise

$$\vec{a} = r\alpha\vec{T} + r\omega^2\vec{N}$$

şeklindedir.

Sabit bir eksen etrafında dönme hareketinde $\vec{V}$ hız vektörünün

$$\vec{V}_D = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AD}$$

şeklinde yazılabileceği aşağıda gibi gösterilebilir.

Burada $\vec{\omega}$ açısal hız vektörüdür. Açısal hız vektörü aşısal hız şiddetinde dönme ekseni doğrultusunda ve sağ el kuralı ile cismin dönme yönünü belirten yönde bir vektördür.

$$\left|\vec{V}_D\right| = \left|\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AD}\right| = |\vec{\omega}|\left|\overrightarrow{AD}\right| Sin\,\theta$$

Burad $\left|\overrightarrow{AD}\right| Sin\,\theta = r$ olduğundan $\left|\vec{V}\right| = r|\omega|$ hızın şiddetini veren denklemi sağlanmış olur.

Vektörel çarpımın doğrultusu çarpımdaki her iki vektöre de dik olacağından $\vec{\omega}$ açısal hız vektörü ile $\overrightarrow{AD}$ vektörüne dik doğrultu teğet doğrultusunda olur. Yönü ise sağ el kuralı ile bulunur. Bu elde edilen doğrultu ve yön hız vektörünün doğrultu ve yönü ile aynı olur. Böylece sabit bir eksen etrafında dönme hareketindeki hız vektörünün hesabında

$$\vec{V}_D = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AD}$$

ifadesi kullanılabilr. Bu eşitliğin her iki tarafının zamana göre türevi alınırsa ivme vektörü formülü elde edilir.

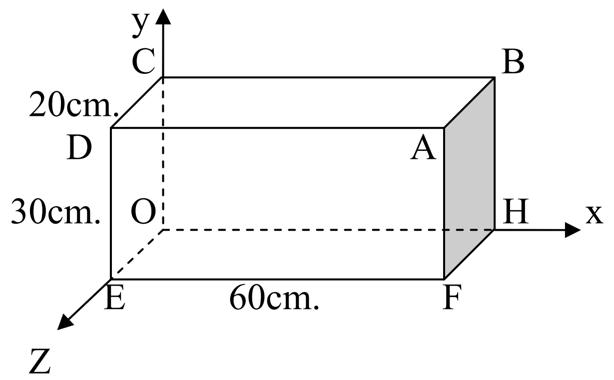
$$\vec{a}_D = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AD} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_D$$

Burada $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ dır.

Problem 11.3.1

Dikdörtgenler prizması şeklindeki cisim bir t anında açısal hızı pozitif yönde $\omega = 7\,Rad/s$ ve açısal ivmesi $\alpha = 2\,Rad/s^2$ dir. Ayrıca aynı anda kenarları koordinat eksenlerine çakışacak konumdan geçmektedir. B noktasının hız ve ivme vektörlerini cisim

a) x ekseni etrafında dönerken
b) y ekseni etrafında dönerken
c) z ekseni etrafında dönerken
d) OA ekseni etrafında dönerken hesaplayınız.



Çözüm:

a) cisim x ekseni etrafında pozitif yönde (y den z ye doğru) dönüyor.

$$\vec{V}_B = \overleftrightarrow{HB} * \omega \vec{T} \;, \qquad \vec{V}_B = 30 * 7\vec{T} \;, \qquad \vec{V}_B = 210\vec{T}$$

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HB} \;, \quad \vec{\omega} = 7\vec{i} \;, \quad \overrightarrow{HB} = 30\vec{j} \;, \quad \vec{V}_B = 7\vec{i} \wedge 30\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = 210\vec{k}}$$

$$\vec{a}_B = \overleftrightarrow{HB} * \alpha \vec{T} + \overleftrightarrow{HB} * \omega^2 \vec{N} \;, \qquad \vec{a}_B = 30 * 2\vec{T} + 30 * 7^2 \vec{N}$$

$$\vec{a}_B = 60\vec{T} + 1470\vec{N}$$

$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{HB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B$, $\vec{a}_B = 2\vec{i} \wedge 30\vec{j} + 7\vec{i} \wedge 210\vec{k}$

$\boxed{\vec{a}_B = -1470\vec{j} + 60\vec{k}}$

b) cisim y ekseni etrafında pozitif yönde (z den x e doğru) dönüyor.

$\vec{V}_B = \overleftrightarrow{CB} * \omega\vec{T}$, $\vec{V}_B = 60 * 7\vec{T}$, $\vec{V}_B = 420\vec{T}$

$\vec{a}_B = 60 * 2\vec{T} + 60 * 7^2\vec{N}$, $\vec{a}_B = 120\vec{T} + 2940\vec{N}$

$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CB}$, $\vec{\omega} = 7\vec{j}$, $\vec{V}_B = 7\vec{j} \wedge 60\vec{i}$

$\boxed{\vec{V}_B = -420\vec{k}}$

$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{CB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B$, $\vec{a}_B = 2\vec{j} \wedge 60\vec{i} + 7\vec{j} \wedge -420\vec{k}$

$\boxed{\vec{a}_B = -2940\vec{i} - 120\vec{k}}$

c) Cisim z ekseni etrafında pozitif yönde (x den y ye doğru) dönüyor.

$\vec{V}_B = \overleftrightarrow{OB} * \omega\vec{T}$, $\overleftrightarrow{OB} = \sqrt{30^2 + 60^2}$, $\overleftrightarrow{OB} = \sqrt{30^2 + 60^2}$, $\overleftrightarrow{OB} = 10\sqrt{45}$

$\vec{V}_B = 70\sqrt{45}\vec{T}$, $\vec{V}_B = 469,57\vec{T}$

$\vec{a}_B = 10\sqrt{45} * 2\vec{T} + 10\sqrt{45} * 7^2\vec{N}$, $\vec{a}_B = 20\sqrt{45}\vec{T} + 490\sqrt{45}\vec{N}$

$\vec{a}_B = 134,16\vec{T} + 3287,02\vec{N}$, $|\vec{a}_B| = 3289,8\,cm/s^2$

$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}$, $\vec{\omega} = 7\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 60\vec{i} + 30\vec{j}$

$\vec{V}_B = 7\vec{k} \wedge (60\vec{i} + 30\vec{j})$

$\boxed{\vec{V}_B = -210\vec{i} + 420\vec{j}}$

$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B$, $\vec{a}_B = 2\vec{k} \wedge (60\vec{i} + 30\vec{j}) + 7\vec{k} \wedge (-210\vec{i} + 420\vec{j})$

$\vec{a}_B = 120\vec{j} - 60\vec{i} - 1470\vec{j} - 2940\vec{i}$

$\boxed{\vec{a}_B = -3000\vec{i} - 1350\vec{j}}$

d) Cisim OA ekseni etrafında pozitif yönde (O dan bakıldığında saat ibrelerinin tersi yönünde) dönüyor.

$\vec{V}_B = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{U}_{OA} \quad , \quad \vec{U}_{OA} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} = \frac{60\vec{i} + 30\vec{j} + 20\vec{k}}{\sqrt{(60)^2 + (30)^2 + (20)^2}}$$

$$\vec{U}_{OA} = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k} \quad , \quad \vec{\omega} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = -20\vec{k}$$

$$\vec{V}_B = (6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}) \wedge -20\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = -60\vec{i} + 120\vec{j}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_B \quad , \quad \vec{\alpha} = \alpha \vec{U}_{OA} \; , \; \vec{\alpha} = \frac{12}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{4}{7}\vec{k}$$

$$\vec{a}_B = (\frac{12}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{4}{7}\vec{k}) \wedge -20\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 2 \\ -60 & 120 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_B = (-\frac{120}{7} - 240)\vec{i} + (\frac{240}{7} - 120)\vec{j} + 900\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -257{,}14\vec{i} - 85{,}71\vec{j} + 900\vec{k}}$$

Problem 11.3.2

Bir rijid cisim A(5,6,2) ve B(7,3,8) noktalarından geçen ve A dan B ye doğru yönelmiş Δ ekseni etrafında pozitif yönde dönüyor. Cismin bir t anındaki açısal hızı $\omega = 14\,\boldsymbol{Rad}/\boldsymbol{s}$ ve açısal ivmesi $\alpha = 7\,\boldsymbol{Rad}/\boldsymbol{s}^2$ dir. Bu anda C noktası (10,8,6) koordinatlarından geçtiğine göre C noktasının
a) bu andaki hız ve ivme vektörlerini
b) dönme eksenine olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{V}_C = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} \quad , \quad \vec{a}_C = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AC} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_C$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{U}_\Delta \quad , \vec{\alpha} = \alpha \vec{U}_\Delta \; , \; \vec{U}_\Delta = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \quad , \quad \vec{U}_\Delta = \frac{(7-5)\vec{i} + (3-6)\vec{j} + (8-2)\vec{k}}{\sqrt{(7-5)^2 + (3-6)^2 + (8-2)^2}}$$

$$\vec{U}_\Delta = \frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k} \quad , \quad \vec{\omega} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k} \quad , \quad \vec{\alpha} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (10-5)\vec{i} + (8-6)\vec{j} + (6-2)\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

a)

$$\vec{V}_C = \vec{\omega} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -6 & 12 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_C = (-6*4-12*2)\vec{i} + (12*5-4*4)\vec{j} + (4*2+6*5)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V}_C = -48\vec{i} + 44\vec{j} + 38\vec{k}}$$

b) $\vec{a}_C = \vec{\alpha} \wedge \overline{AC} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_C$, $\vec{a}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -6 & 12 \\ -48 & 44 & 38 \end{vmatrix}$

$$\vec{a}_C = (-3*4-6*2-6*38-12*44)\vec{i} + (6*5-2*4-48*12-4*38)\vec{j} + \\ + (2*2+3*5+4*44-6*48)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_C = -780\vec{i} - 706\vec{j} - 93\vec{k}}$$

c)

$$\left|\vec{V}_C\right| = R_C\omega \quad \Rightarrow \quad R_C = \frac{\left|\vec{V}_C\right|}{\omega}$$

$$\left|\vec{V}_C\right| = \left|-48\vec{i} + 44\vec{j} + 38\vec{k}\right| \quad , \quad \left|\vec{V}_C\right| = 75,39\,cm/s$$

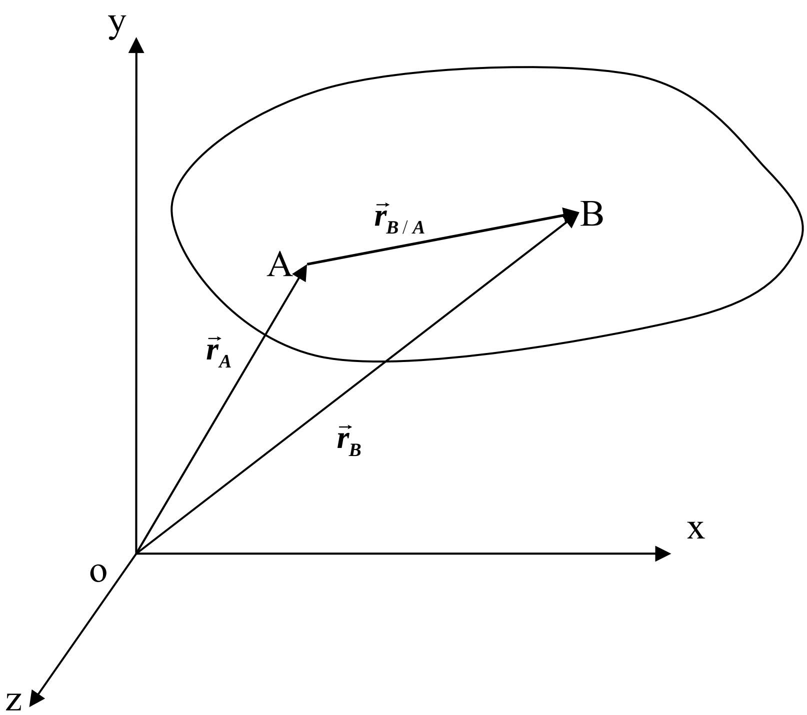
$$R_C = \frac{75,39}{14}$$

$$\boxed{R_C = 5,39\,cm}$$

11.4 Rijid cismin genel düzlemsel hareketi

Rijid cisim üzerindeki bütün noktaların yörüngeleri düzlemsel eğriler ise rijid cismin bu tür hareketine genel düzlemsel hareket denir. Düzlemsel eğriler çizen bu noktalar aynı düzlemde veya birbirine paralel düzlemlerde bulunur.Genel düzlemsel hareket için yapılan bu tanımdan sabit bir eksen etrafındaki hareketin de bir düzlemsel hareket olduğu anlaşılır. Bu paralel düzlemlerden birinde elde edilen hız ve ivmeler bu düzleme çıkılan dik doğru üzerindeki her noktada aynıdır.yörüngeler ise aynı yörüngenin bu noktaya ötelenmiş halidir.

Bundan dolayı genel düzlemsel hareket yapan bir rijid cisim üzerindeki yörüngelere paralel düzlemlerden birini ana levha olarak adlandırıp bunun üzerinde inceleme yapmak yeterli olur.



Şekildeki oAB vektör üçgeninden A ve B nin yer vektörleri arasında aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

Bu yer vektörleri arasındaki bağıntının zaman göre türevinden hız vektörleri arasındaki bağıntı elde edilir.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

Bu eşitliğin zamana göre türevi alınırsa ivmeler arasındaki bağıntı elde edilir.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

Buradaki denklemlerin sol tarafındaki ikinci terimler B nin A daki ötelenme hareketi yapan eksen sistemine göre hareketini göstermektedir. Burada B ile A arasındaki uzaklık değişmediğinden ve B düzlemsel bir yörüngeye sahip olduğundan B nin A daki eksen sistemine göre yörüngesi çember olur.

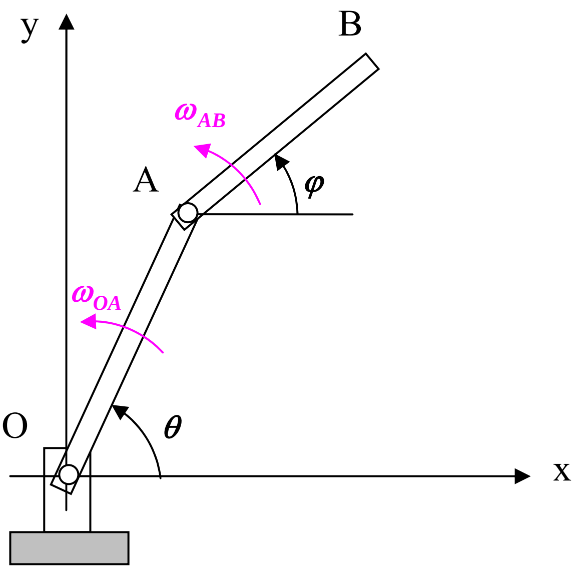
Çembersel harekette sabit eksen etrafında dönme hareketine ait aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{B/A}$$

Problem 11.4.1

Şekilde gösterilen sistemde OA kolu O silindirik mafsalı etrafında AB kolu ise A silindirik mafsalı etrafında dönme hareketi yapmaktadır. Sistem bir t anında verilen konumdan geçerken OA kolunun açısal hızı $\omega_{OA} = 8 Rad/s$,açısal ivmesi $\alpha_{OA} = 3 Rad/s^2$ AB kolunun açısal hızı ise $\omega_{AB} = 6 Rad/s$,açısal ivmesi $\alpha_{AB} = 2 Rad/s^2$ olduğuna göre bu an için B noktasının hız ve ivme vektörlerini bulunuz.



$\overleftrightarrow{OA} = 26 cm.$ $\overleftrightarrow{AB} = 20 cm.$

Sistem verilen konumdan geçerken bilinen değerler

$\theta = 60^0$, $\varphi = 45^0$, $\omega_{OA} = 8 Rad/s$

$\alpha_{OA} = 3 Rad/s^2$, $\omega_{AB} = 6 Rad/s$, $\alpha_{AB} = 2 Rad/s^2$

Çözüm:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \quad , \quad \vec{V}_A = \vec{\omega}_{OA} \wedge \overrightarrow{OA} \quad , \quad \vec{V}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{\omega}_{OA} = 8\vec{k} \ , \ \vec{\alpha}_{OA} = 3\vec{k} \ , \ \vec{\omega}_{AB} = 6\vec{k} \ , \ \vec{\alpha}_{AB} = 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{OA}(Cos\theta\,\vec{i} + Sin\theta\,\vec{j}) \ , \ \overrightarrow{OA} = 13\vec{i} + 13\sqrt{3}\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB}(Cos\varphi\,\vec{i} + Sin\varphi\,\vec{j}), \ \overrightarrow{AB} = 10\sqrt{2}\,\vec{i} + 10\sqrt{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_A = 8\vec{k} \wedge (13\vec{i} + 13\sqrt{3}\,\vec{j}) \ , \ \vec{V}_A = -104\sqrt{3}\,\vec{i} + 104\vec{j}$$

$$\vec{V}_{B/A} = 6\vec{k} \wedge (10\sqrt{2}\,\vec{i} + 10\sqrt{2}\,\vec{j}) \quad , \quad \vec{V}_{B/A} = -60\sqrt{2}\,\vec{i} + 60\sqrt{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_B = -(104\sqrt{3} + 60\sqrt{2})\vec{i} + (104 + 60\sqrt{2})\vec{j} \quad , \quad \boxed{\vec{V}_B = -265\vec{i} + 188{,}9\vec{j}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad , \quad \vec{a}_A = \vec{\alpha}_{OA} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{V}_A \quad , \quad \vec{a}_{B/A} = \vec{\alpha}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{V}_{B/A}$$

$$\vec{a}_A = 3\vec{k} \wedge (13\vec{i} + 13\sqrt{3}\,\vec{j}) + 8\vec{k} \wedge (-104\sqrt{3}\,\vec{i} + 104\vec{j})$$

$$\vec{a}_A = -(39\sqrt{3} + 832)\vec{i} + (39 - 832\sqrt{3})\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_{B/A} = 2\vec{k} \wedge (10\sqrt{2}\,\vec{i} + 10\sqrt{2}\,\vec{j}) + 6\vec{k} \wedge (-60\sqrt{2}\,\vec{i} + 60\sqrt{2}\,\vec{j})$$

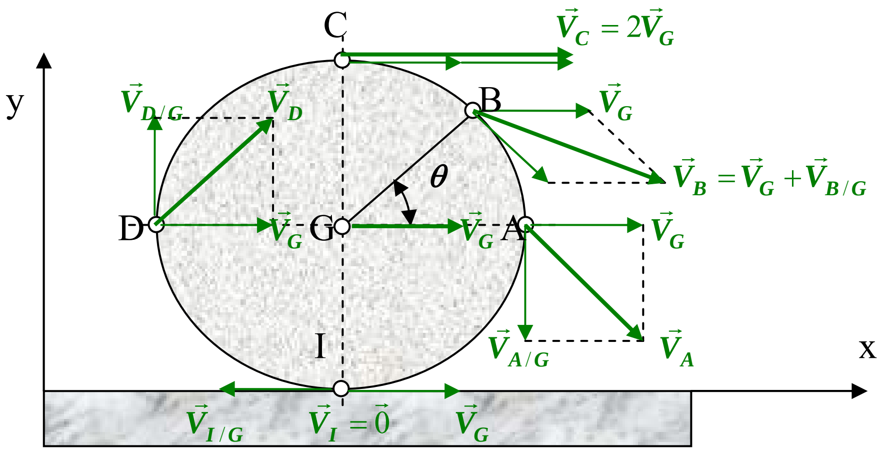
$$\vec{a}_{B/A} = -(20\sqrt{2} + 360\sqrt{2})\,\vec{i} + (20\sqrt{2} - 360\sqrt{2})\,\vec{j} \quad , \quad \vec{a}_{B/A} = -380\sqrt{2}\,\vec{i} - 340\sqrt{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = -(39\sqrt{3} + 380\sqrt{2} + 832)\,\vec{i} + (39 - 832\sqrt{3} - 340\sqrt{2})\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -1436{,}95\vec{i} - 1882{,}9\,\vec{j}}$$

Problem 11.4.2

Aşağıdaki şekilde kaymadan yuvarlanma hareketi yapan bir disk gösterilmektedir. Diskin çevresindeki A , B , C , D ve I noktalarının hız ve ivme vektörlerini bulunuz.



Çözüm:

Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi bütün noktaların hız vektörünü kütle merkezinin hız vektörü ile bu noktaların kütle merkezine göre hız vektörlerinin toplamından elde edilir. İvme vektörleri de aynı şekilde kütle merkezinin ivmesi ile bu noktaların kütle merkezine göre ivmelerinin toplamından elde edilir.

A noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}$$

$$\vec{V}_G = R\omega\,\vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{A/G} = -R\omega\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_A = R\omega\,\vec{i} - R\omega\,\vec{j}}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{a}_{A/G} \quad , \quad \vec{a}_G = R\alpha\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{A/G} = R\alpha\,\vec{T} + R\omega^2\,\vec{N} \quad , \quad \vec{a}_{A/G} = -R\omega^2\,\vec{i} - R\alpha\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_A = R(\alpha - \omega^2)\,\vec{i} - R\alpha\,\vec{j}}$$

B noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_G + \vec{V}_{B/G}$$

$$\vec{V}_G = R\omega\,\vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{B/G} = -\omega\,\vec{k} \wedge (R\,Cos\,\theta\,\vec{i} + R\,Sin\,\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{V}_{B/G} = R\,\omega\,Sin\,\theta\,\vec{i} - R\,\omega\,Cos\,\theta\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_B = R\omega(1 + Sin\,\theta)\,\vec{i} - R\,\omega\,Cos\,\theta\,\vec{j}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_G + \vec{a}_{B/G}$$

$$\vec{a}_{B/G} = -\alpha\,\vec{k} \wedge (R\,Cos\,\theta\,\vec{i} + R\,Sin\,\theta\,\vec{j}) - \omega\,\vec{k} \wedge (R\,\omega\,Sin\,\theta\,\vec{i} - R\,\omega\,Cos\,\theta\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_{B/G} = (R\alpha\,Sin\,\theta - R\omega^2 Cos\,\theta)\,\vec{i} - (R\alpha\,Cos\,\theta + R\omega^2\,Sin\,\theta)\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_B = (R\alpha + R\alpha\,Sin\,\theta - R\omega^2 Cos\,\theta)\,\vec{i} - (R\alpha\,Cos\,\theta + R\omega^2\,Sin\,\theta)\,\vec{j}}$$

C noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_G + \vec{V}_{C/G} \ , \quad \vec{V}_G = R\omega\,\vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{C/G} = R\omega\,\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{V}_C = 2R\omega\,\vec{i}}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_G + \vec{a}_{C/G}$$

$$\vec{a}_G = R\alpha\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{C/G} = R\alpha\,\vec{T} + R\omega^2\,\vec{N}$$

$$\vec{a}_{C/G} = R\alpha\,\vec{i} - R\omega^2\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_C = 2R\alpha\,\vec{i} - R\omega^2\,\vec{j}}$$

D noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_G + \vec{V}_{D/G} \ , \quad \vec{V}_G = R\omega\,\vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{D/G} = R\omega\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{V}_D = R\omega\,\vec{i} + R\omega\,\vec{j}}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_G + \vec{a}_{D/G} \quad , \quad \vec{a}_G = R\alpha\,\vec{i}$$

$$\vec{a}_{D/G} = R\alpha\,\vec{T} + R\omega^2\,\vec{N} \ , \quad \vec{a}_{D/G} = R\omega^2\,\vec{i} + R\alpha\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_D = R(\alpha + \omega^2)\,\vec{i} + R\alpha\,\vec{j}}$$

I noktasının hız ve ivme vektörü:

$$\vec{V}_I = \vec{V}_G + \vec{V}_{I/G}$$

$$\vec{V}_G = R\omega\,\vec{i} \quad , \quad \vec{V}_{I/G} = -R\omega\,\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{V}_I = \vec{0}}$$

$$\vec{a}_I = \vec{a}_G + \vec{a}_{I/G} \ , \quad \vec{a}_G = R\alpha\,\vec{i}$$

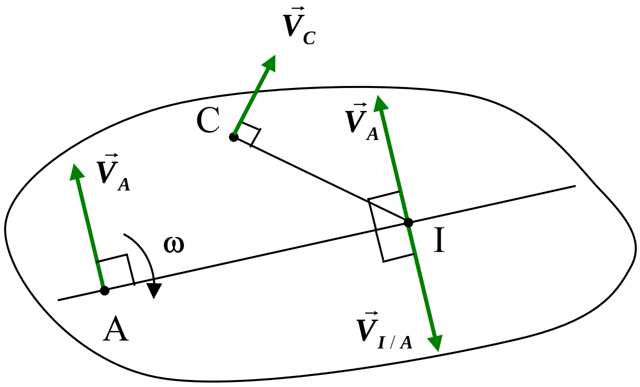
$$\vec{a}_{I/G} = R\alpha\,\vec{T} + R\omega^2\,\vec{N} \quad , \quad \vec{a}_{I/G} = -R\alpha\,\vec{i} + R\omega^2\,\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_I = R\omega^2\,\vec{j}}$$

11.5 Genel düzlemsel harekette ani dönme merkezi

Genle düzlemsel hareketteki $\vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B$ eşitliği göz önüne alınırsa Herhangi bir noktanın hız vektörü hız vektörü bilinen bir noktanın hız vektörüne bu noktayı baz alarak elde edilen bağıl hız vektörü eklenerek bulunur. Bu söylenen bağıntıdan genel düzlemsel harekette hızı sıfır olan Bir noktayı bulmak mümkün olur.

Hızın sıfır olan nokta bulunduktan sonra diğer noktaların bu nokta etrafında çembersel hareket yaptığı düşünülerek hızları hesaplanır.



Şekilde görüldüğü gibi A noktasının hızına çıkılan dikme üzerinde hızı sıfır olan noktayı bulmak mümkündür. Eğer

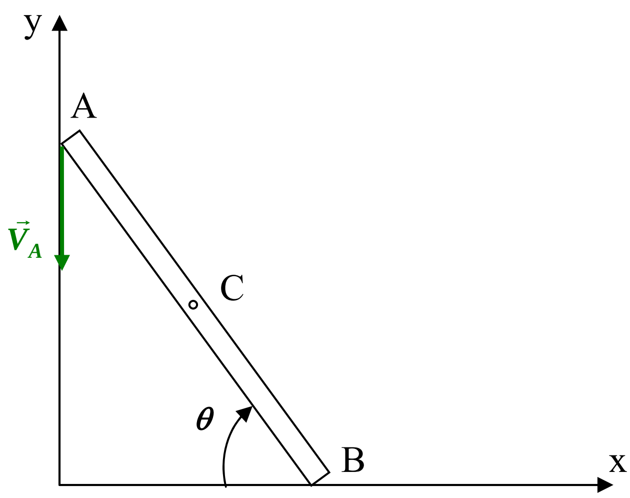
$$\vec{V}_{I/A} = \vec{V}_A$$

olacak şekilde bir I noktası bulunursa bu noktanın hızı sıfır olur. Hızı sıfır olan noktayı bulduktan sonra başka bir C noktasının hızının doğrultusu IC doğrusuna dik çıkarak, yönü ω nın gösterdiği yönde , şiddeti ise IC doğrusunun uzunluğu ile ω açısal hız vektörünün çarpımından şekildeki gibi kolaylıkla bulunur.

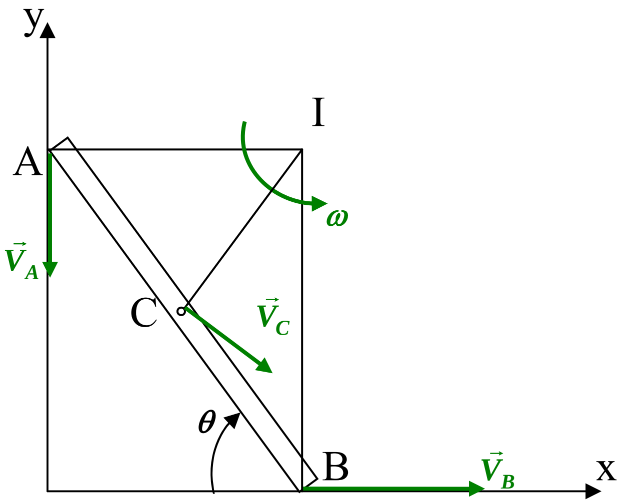
$$\left|\vec{V}_C\right| = \overleftrightarrow{IC} \cdot \omega$$

Problem 11.5.1:

Şekilde gösterilen L uzunluğundaki AB cisminin A ucu y ekseni üzerinde V_A hızı ile aşağı doğru hareket ederken B ucu x ekseni üzerinde hareket ediyor. B ucunun hızını ve C merkezinin hızını A ucunun hızına ve θ açısına bağlı olarak bulunuz.



Çözüm:



$$V_A = \overleftrightarrow{IA} * \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{V_A}{\overleftrightarrow{IA}}$$

$$V_B = \overleftrightarrow{IB} * \omega \quad , \quad V_C = \overleftrightarrow{IC} * \omega$$

$$V_B = \frac{\overleftrightarrow{IB}}{\overleftrightarrow{IA}} * V_A \quad , \quad V_C = \frac{\overleftrightarrow{IC}}{\overleftrightarrow{IA}} * V_A$$

$$\overleftrightarrow{AB} = L \quad , \quad \overleftrightarrow{IA} = L\,Cos\,\theta \quad , \quad \overleftrightarrow{IB} = L\,Sin\,\theta \quad , \quad \overleftrightarrow{IC} = \frac{L}{2}$$

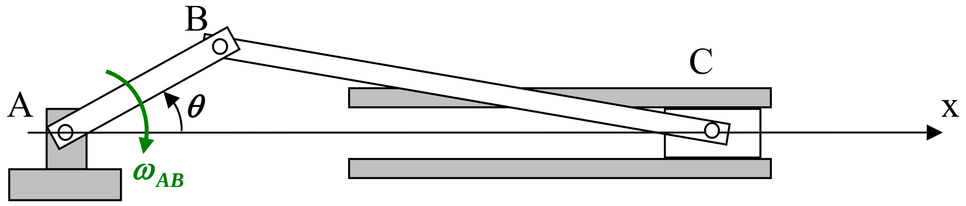
$$V_B = \frac{L\,Sin\,\theta}{L\,Cos\,\theta} * V_A \quad , \quad V_C = \frac{\frac{L}{2}}{L\,Cos\,\theta} * V_A$$

$$\boxed{V_B = V_A\, tg\,\theta}$$

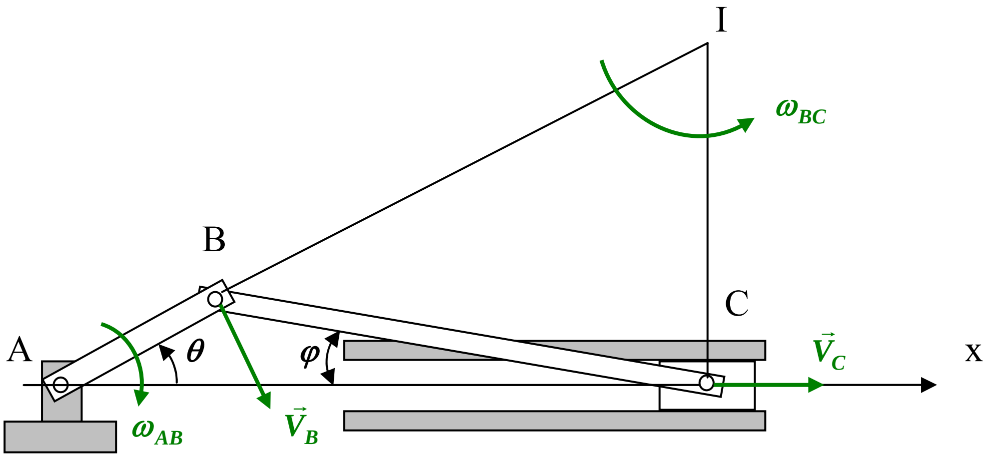
$$\boxed{V_C = \frac{V_A}{2\,Cos\,\theta}}$$

Problem 11.5.2:

Şekildeki krank biyel mekanizmasında AB=10cm. uzunluğundaki krankı A etrafında saat ibreleri yönünde $\omega = 5\,Rad/s$. sabit açısal hızı ile dönüyor. $\theta = 30^0$ için BC=30cm. uzunluğundaki biyelinin açısal hızını ve C pistonunun hızını bulunuz.



Çözüm :



$$V_B = \overleftrightarrow{AB} * \omega_{AB} = \overleftrightarrow{IB} * \omega_{BC} \quad \Rightarrow \quad \omega_{BC} = \frac{\overleftrightarrow{AB}}{\overleftrightarrow{IB}} \omega_{AB}$$

$$V_C = \overleftrightarrow{IC} * \omega_{BC} \quad , \quad V_C = \overleftrightarrow{IC} * \frac{\overleftrightarrow{AB}}{\overleftrightarrow{IB}} \omega_{AB}$$

$$V_B = 10 * 5 \quad , \quad V_B = 50\,cm/s$$

Sinüs teoreminden

$$\frac{Sin\varphi}{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{Sin\theta}{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{Sin(180^0 - \theta - \varphi)}{\overleftrightarrow{AC}} \qquad \Rightarrow \qquad Sin\varphi = \frac{\overleftrightarrow{AB}}{\overleftrightarrow{BC}} Sin\theta$$

$$\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AB}\,Cos\,\theta + \overleftrightarrow{BC}\,Cos\,\varphi$$

$$Cos\,\varphi = \sqrt{1 - Sin^2\varphi} \quad , \quad Cos\,\varphi = \sqrt{1 - (\frac{\overleftrightarrow{AB}}{\overleftrightarrow{BC}})^2 Sin^2\theta}$$

$$\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{AB}\,Cos\,\theta + \overleftrightarrow{BC}\sqrt{1 - (\frac{\overleftrightarrow{AB}}{\overleftrightarrow{BC}})^2 Sin^2\theta}$$

$$\overleftrightarrow{AC} = 10\,Cos\,30^0 + 30\sqrt{1 - (\frac{10}{30})^2 Sin^2 30^0}$$

$$\overleftrightarrow{AC} = 37,815cm.$$

$$\overleftrightarrow{IA} = \frac{\overleftrightarrow{AC}}{Cos\,\theta} \quad , \quad \overleftrightarrow{IA} = \frac{37,815}{Cos\,30^0} \quad , \quad \overleftrightarrow{IA} = 43,665cm.$$

$$\overleftrightarrow{IC} = \overleftrightarrow{IA}\,Sin\,\theta \quad , \quad \overleftrightarrow{IC} = 43,665 * Sin\,30^0$$

$$\overleftrightarrow{IC} = 21,833cm.$$

$$\overleftrightarrow{IB} = \overleftrightarrow{IA} - \overleftrightarrow{AB} \quad , \quad \overleftrightarrow{IB} = 43,665 - 10 \quad , \quad \overleftrightarrow{IB} = 33,665cm.$$

$$\omega_{BC} = \frac{\overleftrightarrow{AB}}{\overleftrightarrow{IB}} \omega_{AB} \quad , \quad \omega_{BC} = \frac{10}{33,665} 5 \quad , \quad \boxed{\omega_{BC} = 1,485\,Rad/s}$$

$$V_C = \overleftrightarrow{IC} * \omega_{BC} \quad , \quad V_C = 21,833 * 1,485$$

$$\boxed{V_C = 32,42\,cm/s}$$

BÖLÜM 12

KİNETİK

12.1 Kinetik ve Newtonun ikinci hareket kanunu

Kinetik hareketi oluşturan kuvvet moment gibi nedenleri de göz önüne alarak hareketin incelenmesidir.

Kinetikte temel yasa Newtonun ikinci hareket kanunudur.

Bir parçacığın lineer momentumunun zamanla değişimi üzerine etkiyen kuvvetlerin bileşkesi ile orantılıdır ve bu bileşkenin yönündedir.

Parçacığın lineer momentumu hızı ile orantılı olup hız yönündedir ve bu orantı katsayısı kütle adını alır.

Parçacığın hızı $\vec{V}$ kütlesi m ile gösterilirse Lineer momentumu

$$\vec{P} = m\vec{V}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımla ikinci hareket yasası

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$

şeklini alır. Newton mekaniği yani klasik mekanik çerçevesinde m kütlesinin yalnız cismin iç özelliklerine bağlı olduğu zaman ve yerle değişmediği varsayılır. Dolayısıyla ikinci yasa

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

şeklinde yazılabilir.

12.2 Maddesel noktanın kinetiği

Newtonun ikinci hareket kanunu olan

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

denkleminin kartezyen koordinatlardaki bileşenleri

$$F_x = m\,a_x \;, \quad F_y = m\,a_y \;, \quad F_z = m\,a_z$$

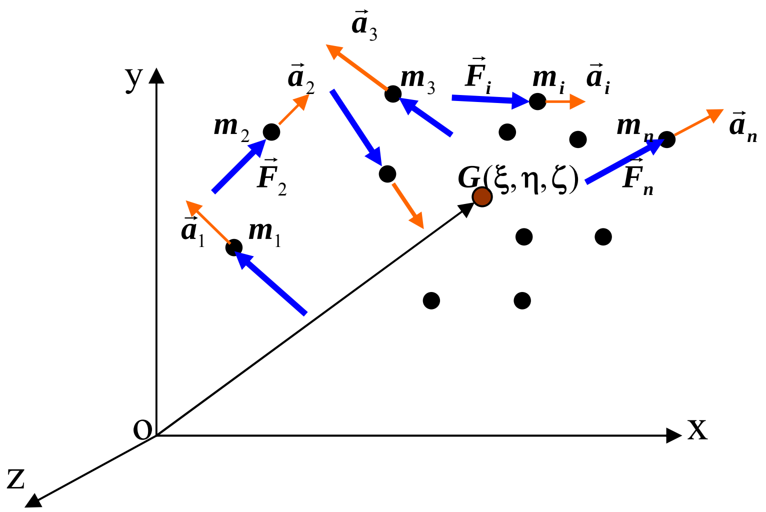
doğal koordinatlardaki bileşenleri

$$F_T = m\,a_T \;, \quad F_N = m\,a_N$$

şeklinde yazılabilir.

12.3 Kütle merkezinin hareketi teoremi

Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi maddesel noktalardan oluştuğu düşünülen sistem veya rijid cismin hareketinde her bir maddesel nokta için yazılan $\vec{F} = m\,\vec{a}$ denklemi alt alta yazılıp toplanırsa



$$
\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= m_1\vec{a}_1 \\
\vec{F}_2 &= m_2\vec{a}_2 \\
\vec{F}_3 &= m_3\vec{a}_3 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\vec{F}_i &= m_i\vec{a}_i \\
+ \quad &\ldots\ldots\ldots \\
F_n &= m_n\vec{a}_n \\
\hline
\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{a}_i
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir. Burada G maddesel noktalar sisteminin kütle merkezidir. Kütle merkezinin yer vektörü

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

şeklinde yazılabilir. Bu vektörün zamana göre ikinci türevi alınırsa kütle merkezinin ivme vektörü bulunur.

$$\vec{a}_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Bu ivme vektörü ifadesinden. $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ olmak üzere

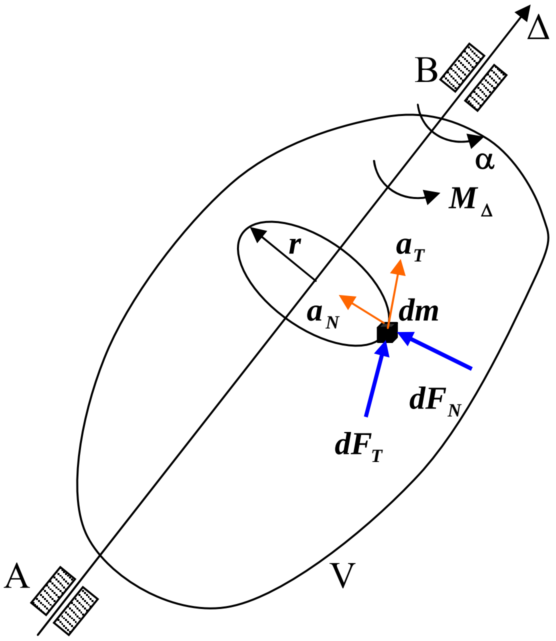
$$m\,\vec{a}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{a}_i$$ yazılabilir.

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{a}_i$ ifadesindeki $\sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{a}_i$ yerine $m\,\vec{a}_G$ yazılırsa

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\,\vec{a}_G}$$

şeklindeki kütle merkezinin hareketi teoremi olarak bilinen denklem elde edilir. Bu denkleme göre maddesel noktalar sisteminin veya rijid cismin kütle merkezi bütün kuvvetler ona uygulanmış ve toplam kütle orada yoğunlaşmış bir maddesel nokta gibi hareket eder.

12.4 Rijid cismin sabit bir eksen etrafında dönme hareketi ve atalet momentleri



Şekilde gösterilen V hacim bölgesini kapsayan ve Δ Ekseni etrafında M_Δ dış momenti etkisinde dönen cismin üzerindeki bir dm diferansiyel kütlesi ve bu kütle için kinetik denklemi yazıp cismin tüm V hacmi içinde integre edilirse rijid cismin sabit eksen etrafında dönme hareketine ait kinetik denklemi bulunur.

Maddesel noktanın hareketi verilen

$\vec{F} = m\,\vec{a}$ denkleminin

doğal koordinatlardaki ifadesi

$F_T = m\,a_T$, $\qquad F_N = m\,a_N$

Bu denklemler rijid cismin bir diferansiyel kütlesine uygulanırsa

$dF_T = a_T\,dm$, $\qquad dF_N = a_N\,dm$

Şekilde gösterildiği gibi sabit bir eksen etrafında dönen cismin bütün noktaları çembersel hareket yapar. Bundan dolayı cisim üzerindeki bir diferansiyel kütle için yazılan denklemlerden ikincisinin dönme hareketine bir etkisi olmaz. Birinci denklemdeki a_T ivmenin teğetsel bileşeni yerine

$a_T = r\,\alpha$ yazılarak elde edilen

$dF_T = r\,\alpha\,dm$

denkleminin her iki tarafı diferansiyel kütlenin yörüngesinin yarıçapı olan r ile çarpılıp integre edilirse sabit eksen etrafında dönme hareketine ait kinetik denklemi elde edilir.

$$\int_V r\,dF_T = \int_V r\,r\,\alpha\,dm$$

Burada $M_\Delta = \int_V r\,dF_T$ olduğu bilindiğine göre yukarıdaki denklem

$$M_\Delta = \alpha \int_V r^2 dm$$

şeklinde yazılabilir.Buradaki $\int_V r^2 dm$ büyüklüne cismin Δ eksenine göre atalet momenti denir

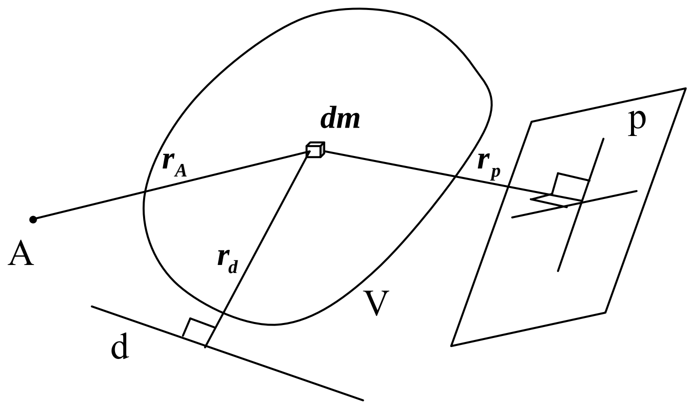
$$I_\Delta = \int_V r^2 dm$$

Böylece sabit bir eksen etrafında dönme hareketine ait moment ve açısal ivme arasındaki bağıntıyı veren kinetik denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\boxed{M_\Delta = I_\Delta \alpha}$$

12.5 Atalet momentleri

Sabit bir eksen etrafında dönme veya genel düzlemsel hareketin kinetiğinde rijid cismin sabit bir eksene göre atalet momentinin bilinmesi gerekir. Bu işlem noktaya ve düzleme göre atalet momentleri tanımlayıp daha kolay yapılabilir.



$I_A = \int_V r_A^2 dm$ A noktasına göre atalet momenti

$I_d = \int_V r_d^2 dm$ d doğrusuna göre atalet momenti

$I_P = \int_V r_P^2 dm$ P düzlemine göre atalet momenti

12.5.1 Atalet yarıçapı

Bir noktaya veya eksene göre atalet momenti I olan m kütleli bir cismin tüm kütlesi bu noktaya veya eksene eşit uzaklıktaki bir bölgede toplanmış farz edilirse bu uzaklığa atalet yarıçapı denir ve k ile gösterilir.

$$I = m * k^2$$

12.5.2 Atalet momenti ile ilgili teoremler

1) Bir rijid cismin birbirine dik üç düzleme göre atalet momentlerinin toplamı bunların ara kesiti olan noktaya göre atalet momentine eşittir.

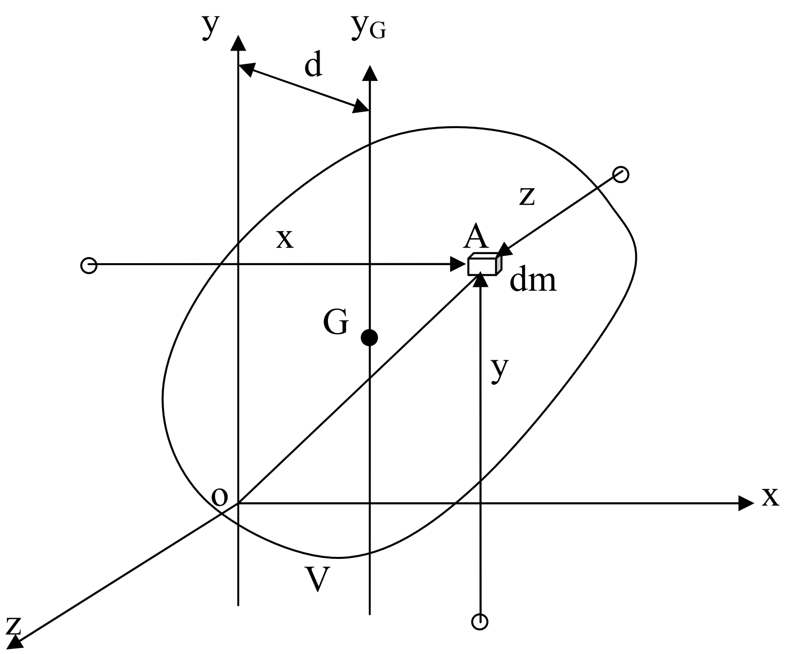
2) Bir rijid cismin birbirine dik iki düzleme göre atalet momenlerinin toplamı bunların ara kesiti olan doğruya göre atalet momentine eşittir.

3) İki boyutlu bir rijid cismin şekil düzleminde bulunan birbirine dik iki doğruya göre atalet momentlerinin toplamı bunların arakesiti olan noktaya göre atalet momentine eşittir.

4) Bir rijid cismin herhangi bir doğruya göre atalet momenti bu doğruya paralel olup kütle merkezinden geçen doğruya göre atalet momenti ile cismin kütlesini bu doğrular arasındaki uzaklıkla çarpılarak elde edilen sayının toplamına eşittir. Bu teoreme paralel eksenler teoremi denir.

5) İki boyutlu cisimlerde Şekil düzlemine dik eksenle bu eksenin şekil düzlemindeki izdüşümü olan noktaya göre atalet momenti birbirine eşittir.Bu son teoreme göre iki boyutlu cisimlerde şekil düzleminde bulunan bir noktaya göre atalet momentinin kütle merkezine göre atalet momenti ile bu noktalar arasındaki uzaklık karesinin kütle ile çarpımının toplamına eşitliği şeklinde paralel eksenler teoremine benzer teorem yazılabilir.

Bu teoremlerin ispatı aşağıdaki şekilde yapılabilir.



$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$$

$$I_{yoz} = \int_V x^2\, dm \quad , \qquad I_{xoz} = \int_V y^2\, dm \quad , \qquad I_{xoy} = \int_V z^2\, dm$$

Bu denklemlerden $\quad I_o = I_{yoz} + I_{xoz} + I_{xoy} \quad$ elde edilir.

Bu eşitlik birinci teoremin ispatıdır.

Ayrıca $\quad I_x = \int\limits_V (y^2 + z^2)\,dm \quad$ olduğundan

$$I_x = I_{xoz} + I_{xoy}$$

yazılabileceğinden ikinci teorem ispatlanmış olur.

Paralel eksenler teoremini ispatlamak için

$$I_y = \int\limits_V (x^2 + z^2)\,dm$$

$$I_{Y_G} = \int\limits_V (x_{A/G}^2 + z_{A/G}^2)\,dm$$

$$x = x_G + x_{A/G} \quad , \qquad z = z_G + z_{A/G}$$

$$x^2 + z^2 = x_G^2 + 2x_G x_{A/G} + x_{A/G}^2 + z_G^2 + 2z_G z_{A/G} + z_{A/G}^2$$

$$x_G^2 + z_G^2 = d^2$$

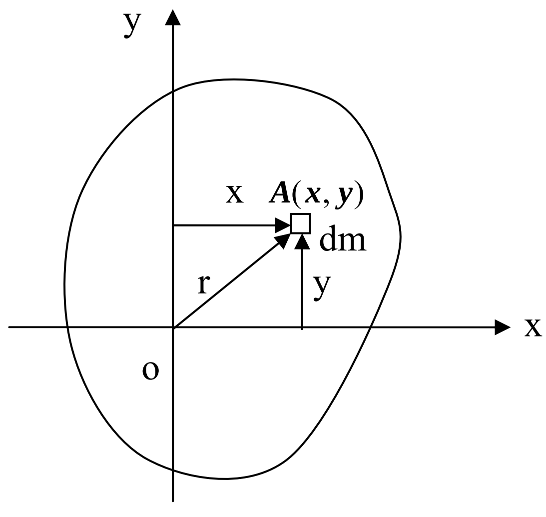
$$I_y = \int\limits_V (x_{A/G}^2 + z_{A/G}^2)\,dm + d^2 \int\limits_V dm + 2x_G \int\limits_V x_{A/G}\,dm$$

kütle merkezi formülünden $\int\limits_V x_{A/G}\,dm = 0$ olduğundan

$$I_y = I_{Y_G} + m\,d^2$$

yazılarak paralel eksenler teoremi ispatlanmış olur.

Üçüncü teorem ikinci teoremin iki boyuta indirgenmiş halidir. Bu teoremin ispatı için aşağıdaki şekil göz önüne alınır.



$$I_x = \int\limits_S y^2\,dm \quad , \qquad I_y = \int\limits_S x^2\,dm$$

$$I_O = \int\limits_S (x^2 + y^2)\,dm$$

Bu atalet momenti ifadelerinden

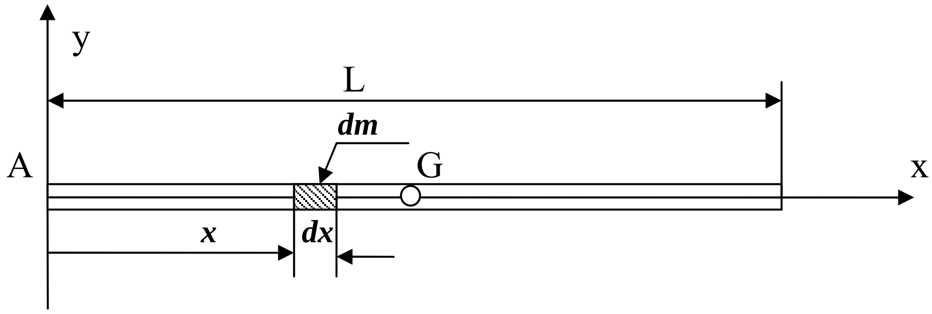
$$I_O = I_x + I_y$$

yazılarak üçüncü teorem ispatlanmış olur.

Problem 12.5.1

Kütlesi m olan L uzunluğundaki homojen , doğrusal ve sabit kesitli çubuğun ucuna ve merkezine göre atalet momentini bulunuz.

Çözüm:



$$I_A = \int_\ell x^2 dm \quad , \qquad dm = \rho\, dx \quad , \qquad m = \rho L$$

$$I_A = \int_O^L x^2 \rho\, dx \qquad , \quad I_A = \rho \frac{L^3}{3}$$

Atalet momentini cismin kütlesi cinsinden bulmak için sonucu $\dfrac{m}{\rho L} = 1$ ile çarpmak gerekir. $I_A = \rho \dfrac{L^3}{3} \dfrac{m}{\rho L}$

$$\boxed{I_A = m \frac{L^2}{3}}$$

paralel eksenler teoremine göre

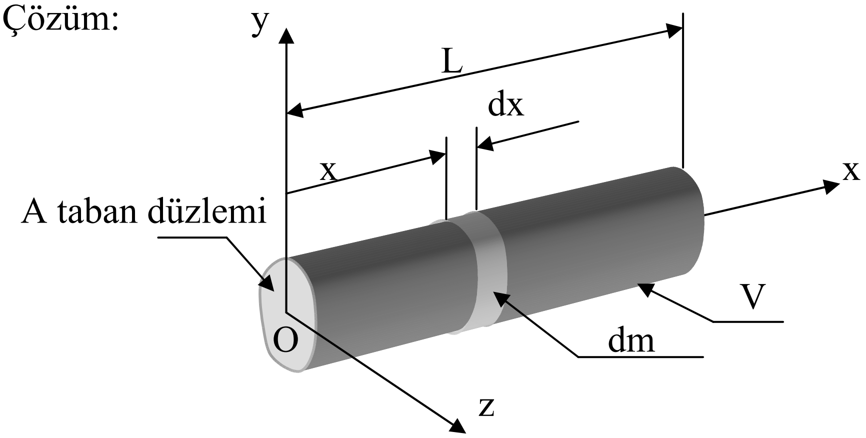
$$I_A = I_G + m(\frac{L}{2})^2 \quad , \qquad I_G = I_A - m(\frac{L}{2})^2 \ , \quad I_G = m\frac{L^2}{3} - m\frac{L^2}{4}$$

$$\boxed{I_G = m \frac{L^2}{12}}$$

Problem 12.5.2

Kütlesi m olan L uzunluğundaki homojen , doğrusal ve sabit kesitli Prizmatik cismin taban düzlemine göre atalet momentini bulunuz.

Çözüm:



Çözüm:

$$I_A = \int_V x^2 dm \quad , \qquad dm = \rho\, dV$$

eğer A taban düzleminin alanı S ise

$m = \rho\, S\, L \quad , \quad dm = \rho\, S\, dL$ dır.

$$I_A = \int_O^L x^2 \rho\, S\, dL \qquad , \quad I_A = \rho S \frac{L^3}{3}$$

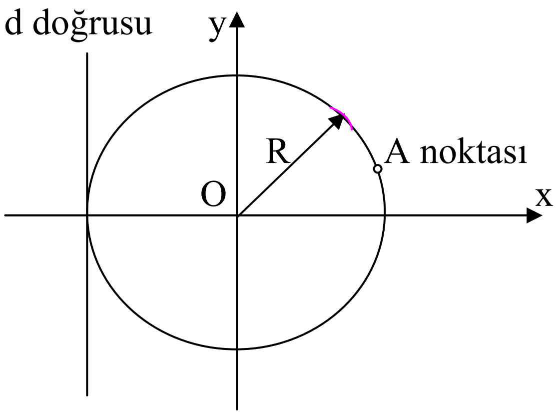
Atalet momentini cismin kütlesi cinsinden bulmak için sonucu $\frac{m}{\rho SL} = 1$

ile çarpmak gerekir. $I_A = \rho S \frac{L^3}{3} \frac{m}{\rho SL}$

$$\boxed{I_A = m\frac{L^2}{3}}$$

Problem 12.5.3

R yarıçaplı ve m kütleli homojen çember şeklindeki cismin atalet momentini a) merkezine , b) çapına , c) teğet doğrusuna , d) çember üzerindeki bir noktaya göre bulunuz.



Çözüm:

a) Çember şeklindeki cismin üzerindeki bütün noktaların O noktasına uzaklığı R olduğundan

$$\boxed{I_O = m\, R^2}$$

olur.

b) Atalet momenti ile ilgili teoremlerden üçüncüsünden

$$I_O = I_x + I_y$$

yazılabilir. Ayrıca tüm çap doğrularına göre kütle dağılımı çember şeklindeki cisimde aynı olduğundan

$I_x = I_y$ yazılabilir. Böylece çember şeklindeki cismin çapına göre

atalet momenti $\boxed{I_x = I_y = \frac{1}{2} m\, R^2}$

Paralel eksenler teoremine göre $I_d = I_y + m R^2$ olduğundan

$$\boxed{I_d = \frac{3}{2} m R^2}$$

c) Atalet momenti ile ilgili beşinci teorem göz önüne alınırsa O ve A noktası arasında paralel eksenler teoremi yazılabilir.

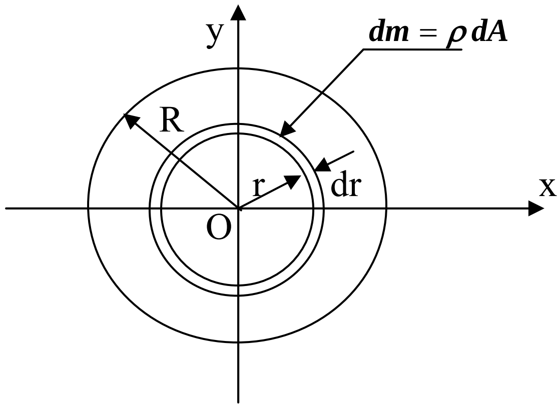
$$I_A = I_O + m R^2$$

$$\boxed{I_A = 2 m R^2}$$

Problem 12.5.4

R yarıçaplı ve m kütleli homojen daire şeklindeki levhanın atalet momentini a) merkezine , b) çapına göre bulunuz.

Çözüm:



$$m = \rho \pi R^2 \ , \quad dA = 2\pi r\, dr \ , \quad dm = \rho 2\pi r\, dr$$

a)

$$I_O = \int_0^R r^2 dm \ , \qquad I_O = \int_0^R r^2 (\rho 2\pi r\, dr) \ , \qquad I_O = \rho 2\pi \int_0^R r^3 dr$$

$$I_O = \rho 2\pi \frac{R^4}{4}$$

Atalet momentini cismin kütlesi cinsinden bulmak için sonucu

$\frac{m}{\rho \pi R^2} = 1$ ile çarpmak gerekir. $I_O = \rho 2\pi \frac{R^4}{4} \frac{m}{\rho \pi R^2}$

$$\boxed{I_O = \frac{1}{2} m R^2}$$

b) Atalet momenti ile ilgili teoremlerden üçüncüsünden

$$I_O = I_x + I_y$$

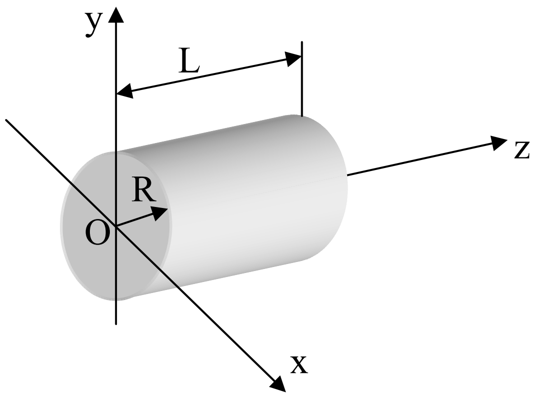
yazılabilir. Ayrıca tüm çap doğrularına göre kütle dağılımı dairesel levha için aynı olduğundan

$I_x = I_y$ yazılabilir. Böylece dairesel levhanın çapına göre atalet momenti

$\boxed{I_x = I_y = \frac{1}{4} m R^2}$ formunda elde edilir.

Problem 12.5.5

Silindir şeklindeki homojen dolu cismin taban düzlemindeki bir çapına göre atalet momentini bulunuz.



Çözüm:

Atalet momentleri ile ilgili ikinci teoreme göre

$$I_x = I_{xoy} + I_{xoz}$$

yazılabilir. Aynı şekilde

$I_z = I_{xoz} + I_{yoz}$ ve $I_{xoz} = I_{yoz}$ olduğundan $I_{xoz} = \frac{I_z}{2}$ yazılabilir.

I_z dairesel levhanın merkezine göre atalet momenti gibi

$I_z = \frac{1}{2} m R^2$ olduğundan

$I_{xoz} = \frac{1}{4} m R^2$ olur.

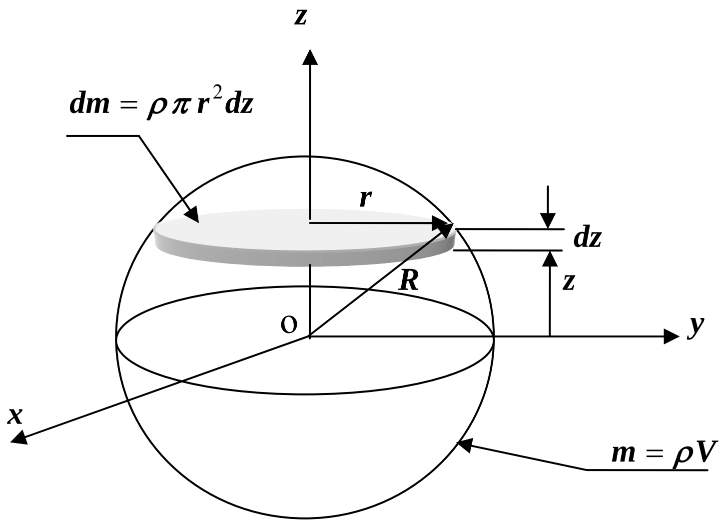
$I_{xoy} = \frac{1}{3} m L^2$ eşitliği prizmatik ve sabit kesitli cisimlerin taban düzlemine göre atalet momenti olduğundan

$I_x = \frac{1}{3} m L^2 + \frac{1}{4} m R^2$, $\boxed{I_x = m(\frac{1}{3} L^2 + \frac{1}{4} R^2)}$ eşitliği bulunur.

Problem 12.5.6

R Yarıçaplı ve m kütleli homojen dolu kürenin kütle merkezinden geçen bir çapına göre atalet momentini bulunuz.

Çözüm:



$$m = 2\int_0^R dm \quad , \quad m = 2\rho\int_0^R \pi r^2 dz \quad , \quad r^2 = R^2 - z^2$$

$$m = 2\rho\pi\int_0^R (R^2 - z^2)dz \quad , \quad m = 2\rho\pi(R^3 - \frac{R^3}{3}) \quad , \quad m = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$$

Atalet momenti ile ilgili teoremlerden ikincisine göre

$I_x = I_{xoy} + I_{xoz}$ yazılabilir. Kürenin bütün çapsal düzlemleri küreyi iki eşit parçaya böldüğünden $I_{xoy} = I_{xoz}$ ve $I_x = 2I_{xoy}$ yazılabilir.

$$I_{xoy} = 2\int_0^R z^2 dm \quad , \quad I_{xoy} = 2\int_0^R z^2 \rho\pi r^2 dz \quad , \quad I_{xoy} = 2\rho\pi\int_0^R z^2 r^2 dz$$

$$I_{xoy} = 2\rho\pi\int_0^R z^2(R^2 - z^2)dz \quad , \quad I_{xoy} = 2\rho\pi\int_0^R (z^2R^2 - z^4)dz$$

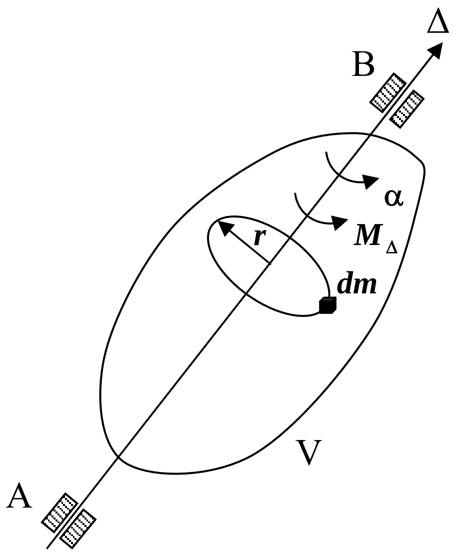
$$I_{xoy} = 2\rho\pi(\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{5}) \quad , \quad I_{xoy} = \frac{4}{15}\rho\pi R^5$$

Atalet momentini cismin kütlesi cinsinden bulmak için sonucu

$\frac{3m}{4\rho\pi R^3} = 1$ ile çarpmak gerekir

$$I_{xoy} = \frac{4}{15}\rho\pi R^5 \frac{3m}{4\rho\pi R^3} \quad , \quad I_{xoy} = \frac{1}{5}mR^2 \quad , \quad \boxed{I_x = \frac{2}{5}mR^2}$$

12.6 Rijid cismin sabit bir eksen etrafındaki dönme hareketi ile ilgili problemler



$$M_\Delta = I_\Delta \alpha$$

Burada M_Δ , Δ eksenine göre cisme uygulanan toplam dış momenti

I_Δ , cismin Δ eksenine göre atalet momentini $I_\Delta = \int_V r^2 dm$

α ise cismin açısal ivmesini göstermektedir.

Rijid cismin sabit eksen etrafında dönme hareketinde cisme etki eden dış aktif kuvvetler ile mafsal tepkileri arasındaki bağıntı kütle merkezinin hareketi teoreminden elde edilebilir.

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

Burada $\vec{a}_G$ cismin kütle merkezinin ivmesidir.

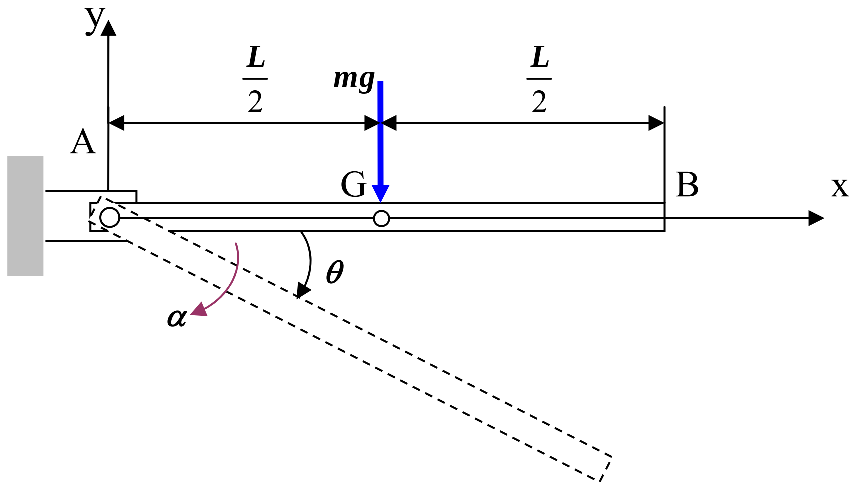
Problem 12.6.1

Homojen L uzunluğunda ve m kütlesindeki sabit kesitli doğrusal çubuk A ucundan kendisine dik silindirik mafsalla bağlıdır. Çubuk yatay konumdan ilk hızsız harekete bırakılıyor. Çubuğun

a) yatayla θ açısı yaptığı andaki açısal ivmesini

b) yeni harekete bırakıldığı andaki mafsal tepkisini bulunuz.

Çözüm:



a)

$$M_\Delta = I_\Delta \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{M_\Delta}{I_\Delta}$$

$$M_\Delta = mg\frac{L}{2}Cos\,\theta \quad , \quad I_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$$

$$\alpha = \frac{mg\frac{L}{2}Cos\,\theta}{\frac{1}{3}mL^2} \quad , \quad \boxed{\alpha = \frac{3g}{2L}Cos\,\theta}$$

b)

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

Çubuk harekete yeni bırakıldığı anda açısal hızı sıfır olduğundan kütle merkezinin ivmesinin yatay bileşeni sıfırdır.

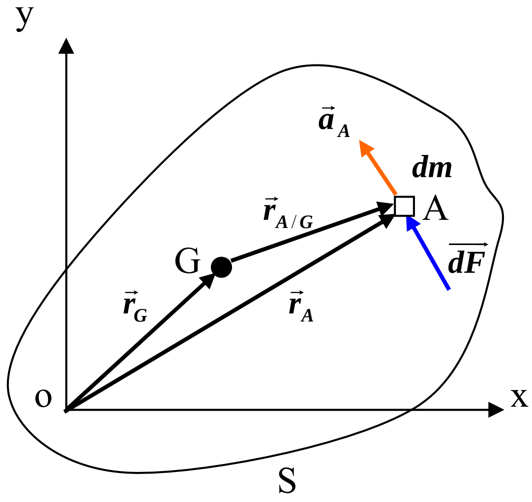
$$\vec{a}_G = -\frac{L}{2}\alpha\,\vec{j}$$

$$\theta = 0 \text{ da} \quad \alpha = \frac{3g}{2L} \quad , \quad \vec{a}_G = -\frac{3g}{4}\vec{j}$$

$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}_G$ denkleminden toplam kuvvetle ivme aynı yönde olması gerekir. Cisme yatay doğrultuda başka aktif kuvvet etkimediğinden mafsal tepkisi de düşey doğrultuda olmalıdır.

$$\vec{R}_A - mg\,\vec{j} = m\,\vec{a}_G \quad , \quad \vec{R}_A - mg\,\vec{j} = m(-\frac{3g}{4})\,\vec{j} \qquad \boxed{\vec{R}_A = \frac{1}{4}mg\,\vec{j}}$$

12.7 Rijid cismin genel düzlemsel hareketinin kinetiği



Maddesel noktanın hareketi için geçerli olan

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

denklemi Rijid cismin bir diferansiyel kütlesine uygulanırsa

$$\overrightarrow{dF} = \vec{a}_A \, dm$$

yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafı diferansiyel kütlenin yer vektörü ile soldan vektörel çarpılır ve cismin tüm kütlesi boyunca integre edilirse rijid cisme uygulanan moment ve cismin açısal hareketleri ile ilgili denklemler elde edilir.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \vec{a}_{A/G}$$

$$\vec{r}_{A/G} \wedge \overrightarrow{dF} = \vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_A dm$$

$$\int_S \vec{r}_{A/G} \wedge \overrightarrow{dF} = \int_S \vec{r}_{A/G} \wedge (\vec{a}_G + \vec{a}_{A/G}) \, dm$$

$$M_z \vec{k} = \int_S \vec{r}_{A/G} \wedge \overrightarrow{dF}$$

$$M_z \vec{k} = (\int_S \vec{r}_{A/G} dm) \wedge \vec{a}_G) + \int_S \vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_{A/G} \, dm$$

sağ taraftaki birinci integral kütle merkezinin formülünden dolayı sıfır olur. İkinci integral için

$$\vec{a}_{A/G} = \alpha\vec{k} \wedge (x\vec{i} + y\vec{j}) + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge (x\vec{i} + y\vec{j})]$$

$$\vec{a}_{A/G} = -y\alpha\,\vec{i} + x\alpha\,\vec{j} + \omega\vec{k} \wedge (x\omega\,\vec{j} - y\omega\,\vec{i})$$

$$\vec{a}_{A/G} = -y\alpha\,\vec{i} + x\alpha\,\vec{j} - x\omega^2\vec{i} - y\omega^2\vec{j}$$

$$\vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_{A/G} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \wedge (-y\alpha\,\vec{i} + x\alpha\,\vec{j} - x\omega^2\vec{i} - y\omega^2\vec{j})$$

$$\vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_{A/G} = x^2\alpha\vec{k} - xy\omega^2\vec{k} + y^2\alpha\vec{k} + xy\omega^2\vec{k}$$

$$\vec{r}_{A/G} \wedge \vec{a}_{A/G} = (x^2 + y^2)\alpha\vec{k}$$

$$\sum M_G \vec{k} = \int_S (x^2 + y^2)\alpha \vec{k}\, dm$$

burada $\quad I_G = \int_S (x^2 + y^2)\, dm \quad$ dır.

Böylece genel düzlemsel harekette moment ve açısal ivme arasındaki

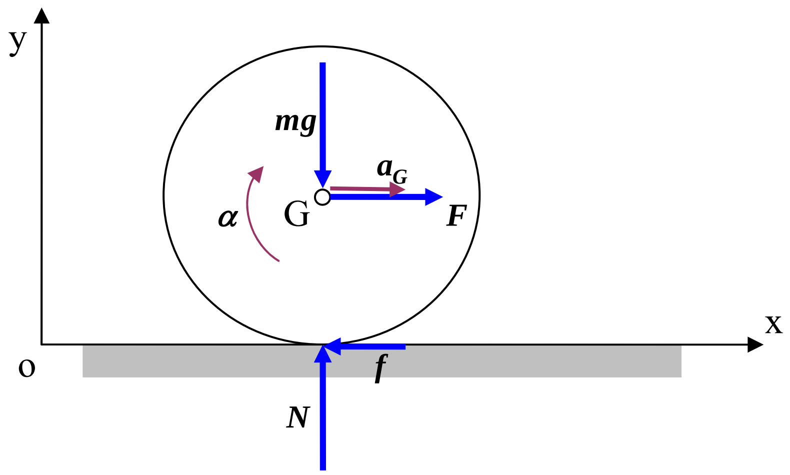
$$\boxed{\sum M_G = I_G \alpha}$$

bağıntısı elde edilir.

Problem 12.7.1

$R = 60\,cm$. Yarıçaplı $m = 10\,kg$. kütleli homojen dairesel levha kaymadan yuvarlanma hareketi yapmaktadır. Levhanın merkezinin ivmesinin $5\,m/s^2$ olması için merkezine uygulanan yatay doğrultudaki F kuvvetini ve gerekli olan en düşük sürtünme katsayısını bulunuz.

Çözüm:



$$\sum M_G = I_G \alpha \quad , \qquad \sum \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

$$a_G = R\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{a_G}{R}$$

$$I_G = \frac{1}{2} mR^2 \quad , \qquad \sum M_G = fR$$

$$\sum M_G = fR = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a_G}{R} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2} m a_G \quad \Rightarrow \quad f = 25\, Newton$$

$$F - f = m a_G \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3}{2} m a_G \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 75\, Newton}$$

$$f = \mu N \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{f}{N}$$

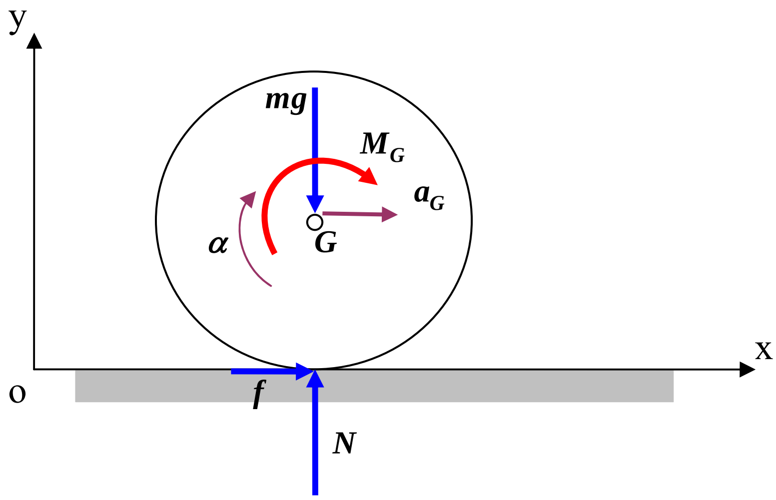
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg = 98{,}1\, Newton$$

$$\mu = \frac{25}{98{,}1} \quad , \qquad \boxed{\mu = 0{,}255}$$

Problem 12.7.2

$R = 60\,cm.$ Yarıçaplı $m = 10kg.$ kütleli homojen dairesel levha kaymadan yuvarlanma hareketi yapmaktadır. Levhanın merkezinin ivmesinin $5\,m/s^2$ olması için merkezine uygulanan Momentin şiddetini ve gerekli olan en düşük sürtünme katsayısını bulunuz.

Çözüm:



$$\sum M_G = I_G \alpha \quad , \qquad \sum \vec{F} = m\,\vec{a}_G$$

$$a_G = R\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{a_G}{R}$$

$$I_G = \frac{1}{2} mR^2 \quad , \qquad \sum M_G = M_G - f\,R$$

$$\sum M_G = M_G - f\,R = \frac{1}{2} mR^2 \frac{a_G}{R} \qquad \Rightarrow \qquad M_G = \frac{1}{2} mR\,a_G + f\,R$$

$$f = ma_G \;\Rightarrow\; f = 50\,Newton$$

$$M_G = \frac{1}{2} 10 * 0,6 * 5 + 50 * 0.6 \quad , \qquad M_G = 45\,Nm.$$

$$f = \mu\,N \;\Rightarrow\; \mu = \frac{f}{N}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; N - mg = 0 \;\Rightarrow\; N = mg = 98,1\,Newton$$

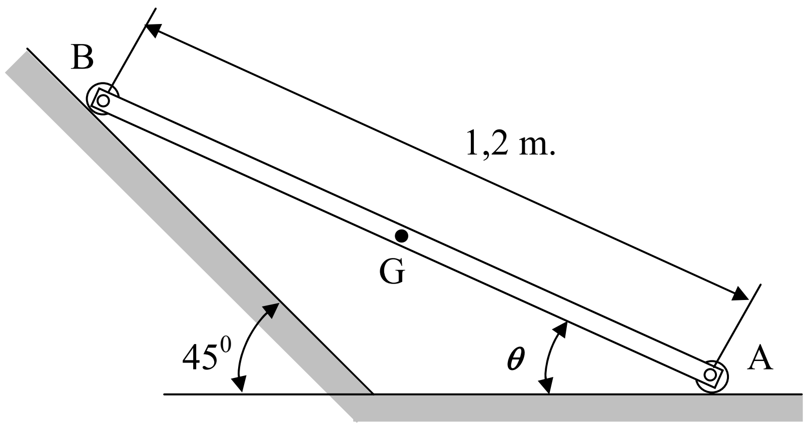
$$\mu = \frac{50}{98,1} \quad , \qquad \boxed{\mu = 0,51}$$

Problem 12.7.3

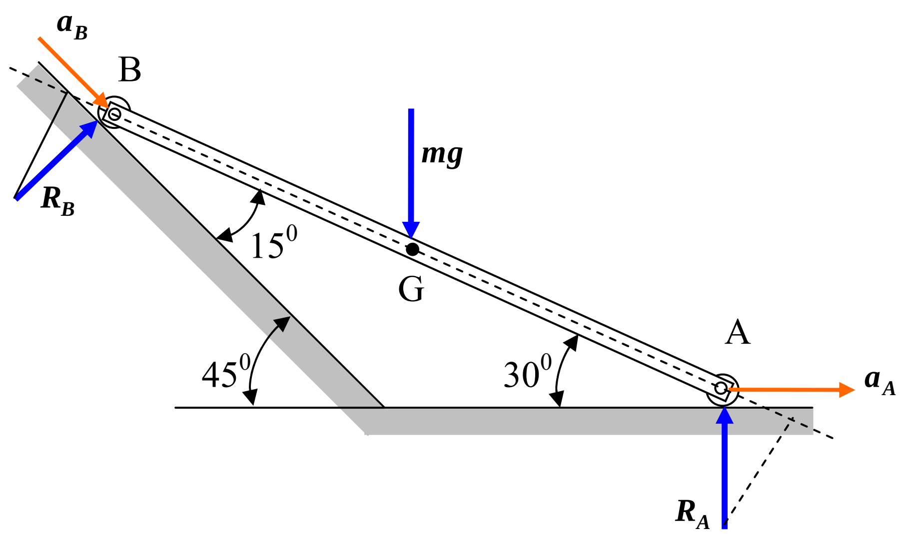
1,2 m. Uzunluğunda ve m=25 kg kütleli bir çubuk A ucu yatay doğru üzerinde B ucu 45^0 eğimli doğru üzerinde olmak üzere sürtünmesiz olarak hareket ediyor. Eğer çubuk ilk hızsız olarak harekete bırakılırsa ve bu anda $\theta = 30^0$ ise bu an için

a) Çubuğun açısal ivmesini

b) A ve B noktalarındaki tepki kuvvetlerini hesaplayınız.



Çözüm:



$$\sum M_G = I_G \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2} R_A Cos\,30^0 - \frac{L}{2} R_B Cos\,15^0 = \frac{1}{12} m L^2 \alpha$$

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \sum F_x = m\,a_{G_X} \quad , \quad \sum F_y = m\,a_{G_Y}$$

$$\sum F_x = m\,a_{G_X} \quad \Rightarrow \quad R_B Cos\,45^0 = m\,a_{G_X}$$

$$\sum F_y = m\,a_{G_Y} \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B Sin\,45^0 - mg = m\,a_{G_Y}$$

Kinematik inceleme:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad , \quad \vec{a}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \vec{j}$$

$$\vec{a}_A = a_A \vec{i} \quad , \quad \vec{a}_{B/A} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{B/A}$$

hareketi yeni başladığı için $\vec{\omega} = \vec{0}$ dır.

$$\vec{a}_{B/A} = \alpha \vec{k} \wedge (-LCos\,30^0 \vec{i} + LSin\,30^0 \vec{j}) \quad , \quad \vec{a}_{B/A} = -\frac{1}{2} L\alpha \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} L\alpha \vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \vec{j} = a_A \vec{i} + (-\frac{1}{2} L\alpha \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} L\alpha \vec{j})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a_B \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \vec{j} = (a_A - \frac{1}{2} L\alpha)\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} L\alpha \vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} a_A - \frac{1}{2} L\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} L\alpha &= -\frac{\sqrt{2}}{2} a_B \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_A &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} L\alpha \\ a_B &= \sqrt{\frac{3}{2}}\, L\alpha \end{aligned}$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{a}_{G/A} \quad , \quad \vec{a}_G = a_{G_X} \vec{i} + a_{G_Y} \vec{j}$$

$$\vec{a}_{G/A} = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AG} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_{G/A}$$

$$\vec{a}_A = \frac{\sqrt{3}+1}{2} L\alpha \vec{i}$$

$$\vec{a}_{G/A} = \alpha \vec{k} \wedge (-\frac{L}{2} Cos\,30^0 \vec{i} + \frac{L}{2} Sin\,30^0 \vec{j}) \qquad \vec{a}_{G/A} = -\frac{L}{4} \alpha \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4} L\alpha \vec{j}$$

$$\vec{a}_G = a_{G_X} \vec{i} + a_{G_Y} \vec{j} = (\frac{\sqrt{3}+1}{2} L\alpha \vec{i}) + (-\frac{L}{4} \alpha \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4} L\alpha \vec{j})$$

$$a_{G_X} \vec{i} + a_{G_Y} \vec{j} = \frac{2\sqrt{3}+1}{4} L\alpha \vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4} L\alpha \vec{j}$$

$$a_{G_X} = \frac{2\sqrt{3}+1}{4} L\alpha \quad , \quad a_{G_Y} = -\frac{\sqrt{3}}{4} L\alpha \; , \quad a_{G_X} = 1{,}339\alpha \; , \quad a_{G_Y} = -0{,}520\alpha$$

$$R_B Cos\,45^0 = m\, a_{G_X} \quad \Rightarrow \quad R_B = 1{,}894 m\alpha$$

$$\frac{L}{2} R_A Cos\,30^0 - \frac{L}{2} R_B Cos\,15^0 = \frac{1}{12} mL^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad R_A = 2{,}3434 m\alpha$$

$$2{,}3434 m\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} 1{,}894 m\alpha - mg = -0{,}520\, m\alpha$$

$$\alpha = \frac{9{,}81}{2{,}3434 + \frac{\sqrt{2}}{2} 1{,}894 + 0{,}520} \quad , \qquad \boxed{\alpha = 2{,}33\, Rad/s}$$

$$a_{G_X} = 3{,}12\, m/s^2 \quad , \quad a_{G_Y} = -1{,}21\, m/s^2$$

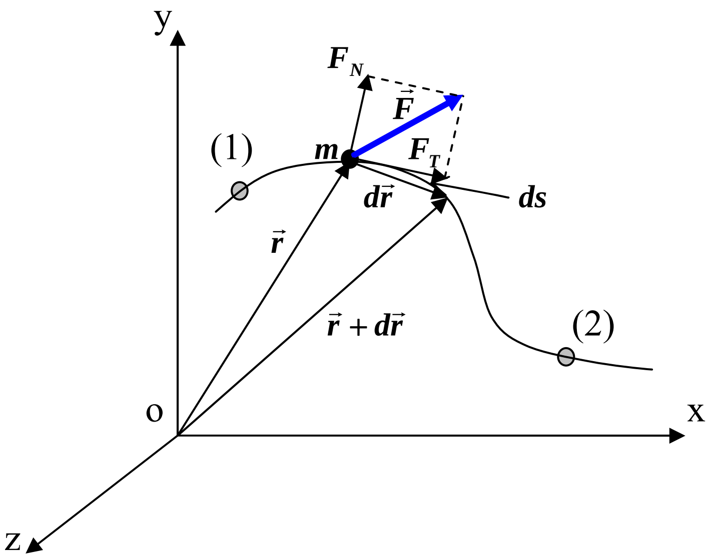
$$\boxed{R_A = 136{,}5\, N} \quad , \quad \boxed{R_B = 110{,}3\, N}$$

BÖLÜM 13

İŞ VE ENERJİ İLKESİ

13.1 Maddesel noktanın hareketinde iş ve enerji ilkesi

Bir maddesel noktaya etki eden kuvvetin maddesel noktanın yer değiştirmesinde yaptığı işi bulabilmek için aşağıdaki şekil çizilebilir.



Burada m kütlesi $d\vec{r}$ kadar yer değiştirme yaptığında etki eden $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı iş $d\tau = \vec{F} \bullet d\vec{r}$ dır.

M kütlesi (1) konumundan (2) konumuna geldiğinde etki eden $\vec{F}$ kuvvetinin yaptığı iş ise $\tau_{(1)\to(2)} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \bullet d\vec{r}$

şeklinde integral ile hesaplanır. Burada $\vec{F} = F_T\vec{T} + F_N\vec{N}$ $d\vec{r} = ds\vec{T}$ şeklinde yazılabileceğinden bir $\vec{F}$ kuvvetin işi $\tau_{(1)\to(2)} = \int_{(1)}^{(2)} F_T \cdot ds$

şeklinde de hesaplanabilir.

Bir maddesel noktanın hareketinin teğet doğrultusundaki denklemi

$$F_T = m\,a_T$$

Burada a_T yerine $\frac{VdV}{ds}$ yazarak

$$F_T = m\frac{VdV}{ds} \quad , \qquad F_T ds = VdV$$

elde edilen denklemin her iki tarafı (1) konumundan (2) konumuna integre edilirse $\displaystyle\int_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{F_T ds} = \int_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{m V dV}$

Burada $\displaystyle\tau_{(1)\to(2)} = \int_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{F_T ds}$

Olduğundan $\tau_{(1)\to(2)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mV_2^2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{mV_1^2}$

denklemi elde edilir. Elde edilen $\frac{1}{2}\boldsymbol{mV^2}$ ifadesine $\boldsymbol{V}$ hızındaki $\boldsymbol{m}$ kütleli maddesel noktanın kinetik enerjisi denir ve $\boldsymbol{T}$ ile gösterilir. $\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mV^2}$

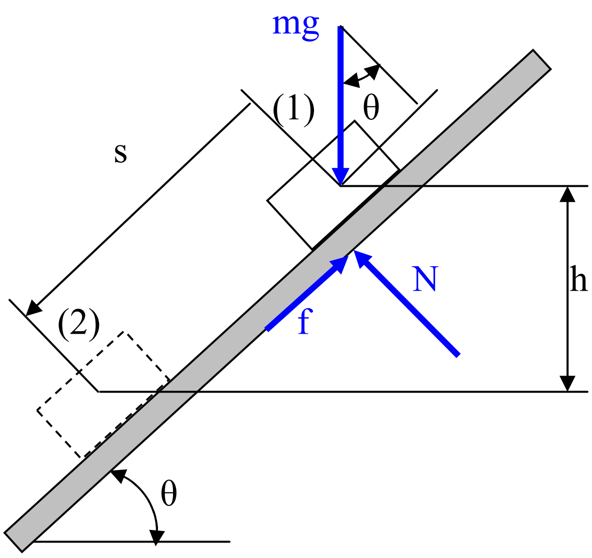
Bu şekilde bulunan $\boxed{\tau_{(1)\to(2)} = \boldsymbol{T_2} - \boldsymbol{T_1}}$

denklemine iş ve enerji ilkesi denir. Bir maddesel noktanın (1) konumundan (2) konumuna hareketinde maddesel noktaya etki eden kuvvetlerin yaptığı işler toplamı maddesel noktanın bu konumlar arasındaki kinetik enerji farkına eşittir. Kinetik enerji maddesel noktanın hareket ettiği yola bağlı değildir. Sadece son ve ilk konumdaki hızlara bağlıdır. Etki eden kuvvetlerin yaptığı işler ise mekanik enerjinin korunmadığı durumlarda yola bağlıdır.

Problem 13.1.1

θ eğim açılı eğik düzlem üzerinde bırakılan bloğun s kadar yol aldıktan sonraki hızını bulunuz.

Çözüm :



$\tau_{(1)\to(2)} = \boldsymbol{T_2} - \boldsymbol{T_1}$, $\tau_{(1)\to(2)} = (\boldsymbol{m\,g\,Sin\theta})\boldsymbol{s} - \boldsymbol{f\,s}$, $\boldsymbol{T_1} = 0$

$\boldsymbol{T_2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mV^2}$, $(\boldsymbol{m\,g\,Sin\theta})\boldsymbol{s} - \boldsymbol{f\,s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{mV^2}$, $\boxed{\boldsymbol{V} = \sqrt{2(\boldsymbol{g\,Sin\theta} - \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{m}})\boldsymbol{s}}}$

13.1.1 Mekanik enerjinin korunumu ve potansiyel enerji:

Bir kuvvet alanı

$$\vec{F} = -\nabla U$$

şeklinde yazılabiliyorsa buradaki kuvvete korunumlu kuvvet U ya ise potansiyel enerji denir.

Kartezyen koordinat sisteminde

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

ile $\tau_{(1)\to(2)} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \bullet d\vec{r}$ denklemine gidilirse

$$\tau_{(1)\to(2)} = -\int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

$$\tau_{(1)\to(2)} = -\int_{(1)}^{(2)} dU$$

$$\tau_{(1)\to(2)} = U_1 - U_2$$

korunumlu kuvvetlerde bir kuvvetin işinin Potansiyel enerji farkının negatifi ile yapılabileceği görülür. Bu elde edilen denklem iş ve enerji denkleminde bir kuvvetin işi yerine yazılırsa

$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

veya

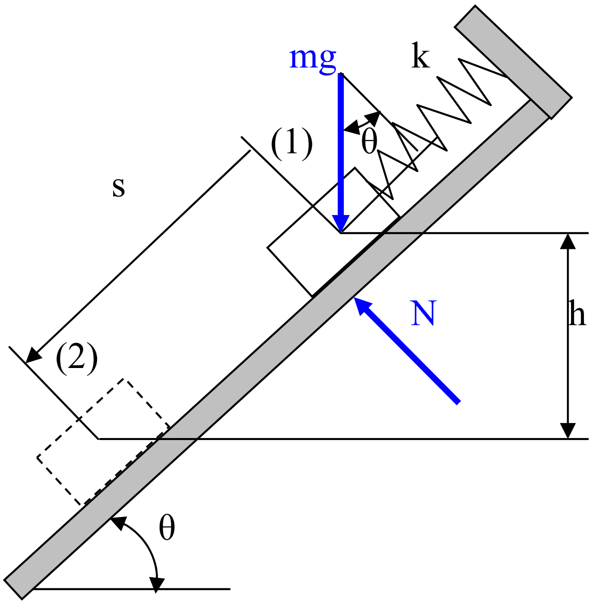
$$U_1 + T_1 = U_2 + T_2$$

mekanik enerjinin korunum denklemi elde edilir.

Problem 13.1.1.1

θ eğim açılı eğik düzlem üzerinde bırakılan bloğun durana kadar aldığı s yolunu bulunuz. Cisim ilk harekete bırakıldığında yay katsayısı k olan yay doğal uzunluğundadır.

Çözüm :

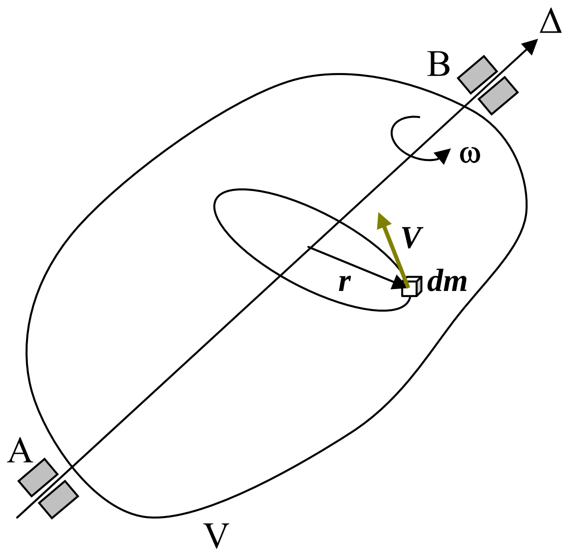


$$\boldsymbol{U_1 - U_2 = T_2 - T_1} \quad , \quad \boldsymbol{U_1 - U_2 = mgh - \frac{1}{2}ks^2} \quad , \quad \boldsymbol{h = s\,Sin\theta} \quad , \quad \boldsymbol{T_1} = 0$$

$$\boldsymbol{T_2 = \frac{1}{2} m V^2} \quad , \quad \boldsymbol{m\,g\,s\,Sin\theta - \frac{1}{2}k\,s^2 = \frac{1}{2} m V^2}$$

durduğu anda hızı sıfırdır. $\boldsymbol{m\,g\,s\,Sin\theta - \frac{1}{2}k\,s^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{s = \frac{2m\,g}{k}\,Sin\theta}}$

13.2 Rijid cismin sabit bir eksen etrafında dönmesinde kinetik enerji hesabı



Rijid cisme ait bir diferansiyel kütlenin kinetik enerjisi

$$dT = \frac{1}{2} V^2 dm$$

Sabit bir eksen etrafında dönme hareketinde

$$V = r\omega$$

olduğundan

$$dT = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

yazılabilir. Bu diferansiyel kinetik enerjinin cismin tüm V hacmi üzerinde integrali alınarak toplam kinetik enerji bulunur.

$$T = \int_V \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

integral içindeki sabitler dışarı alınarak elde edilen

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V r^2 dm$$

denkleminde

$$I_\Delta = \int_V r^2 dm$$

ifadesi Δ eksenine göre cismin atalet momenti olduğundan sabit bir eksen etrafında dönme hareketinde rijid cismin kinetik enerjisi

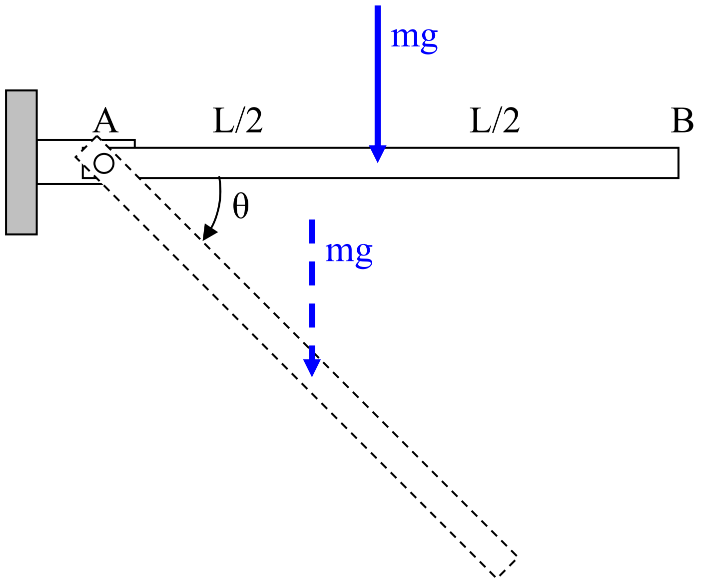
$$T = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

şeklinde hesaplanır.

Problem 13.2.1

Uzunluğu L ve kütlesi m olan AB çubuğu A ucundan silindirik mafsallı olarak düşey düzlemde hareket edebilmektedir. AB çubuğu yatay konumda ilk hızsız harekete bırakılıyor. Yatayla θ açısı yaptığı andaki açısal hızını bulunuz.

Çözüm:



$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

$$U_1 - U_2 = m\,g\,\frac{L}{2}\,Sin\theta$$

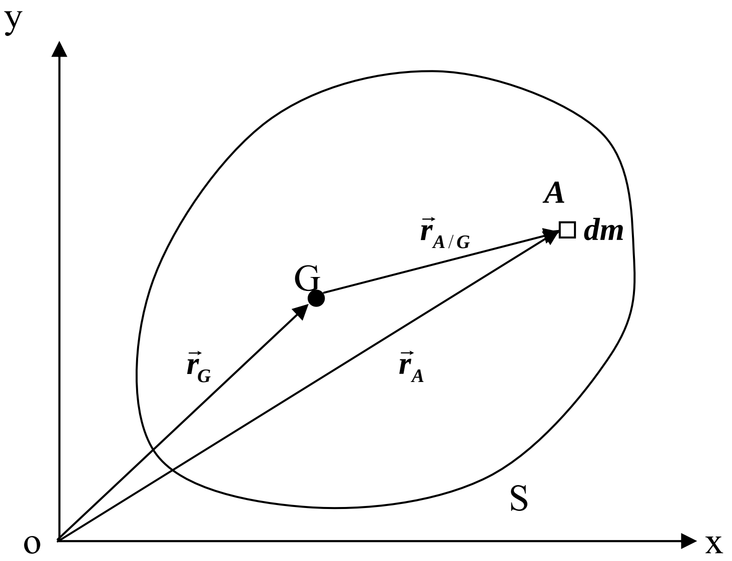
$$T_1 = 0 \quad , \qquad T_2 = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

$$m\,g\,\frac{L}{2}\,Sin\theta = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

$$I_A = \frac{1}{3} mL^2$$

$$m\,g\,\frac{L}{2}\,Sin\theta = \frac{1}{2}\frac{1}{3} mL^2 \omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}\,Sin\theta}}$$

13.3 Rijid cismin genel düzlemsel hareketinde kinetik enerji hesabı



$$dT = \frac{1}{2} V_A^2 dm$$

$$V_A^2 = \vec{V}_A \bullet \vec{V}_A$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}$$

$$V_A^2 = (\vec{V}_G + \vec{V}_{A/G}) \bullet (\vec{V}_G + \vec{V}_{A/G})$$

$$T = \frac{1}{2} \int_S (V_G^2 + V_{A/G}^2 + 2\vec{V}_G \bullet \vec{V}_{A/G}) dm$$

Burada $\vec{V}_G \bullet \int_S \vec{V}_{A/G}\, dm = 0$ ve $V_{A/G}^2 = r_{A/G}^2 \omega^2$ olduğundan toplam kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \int_S r_{A/G}^2 dm$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\int_S r_{A/G}^2 dm = I_G$ cismin kütle merkezinden geçen ve hareket düzlemine dik eksene göre atalet momentini gösterdiğinden genel düzlemsel harekette kinetik enerji

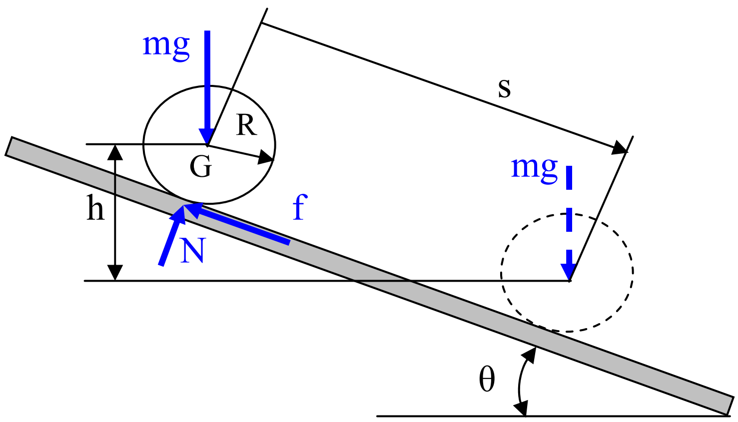
$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

formülü ile hesaplanır.

Problem 13.3.1

R yarıçapılı ve m kütleli bir disk θ eğim açılı eğik düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanma hareketi yapmaktadır. Disk eğik düzlem üzerinde ilk hızsız harekete bırakıldığında diskin n sayıda tam devir yaptığı andaki açısal hızı ne olur ?

Çözüm:



$$U_1 - U_2 = T_2 - T_1$$

Kaymadan yuvarlanmada sürtünme kuvveti iş yapmaz . Çünkü kayma olayındaki gibi sürekli aynı bölgede temas yoktur. Normal kuvvet harakete dik olduğu için iş yapmaz.

$$U_1 - U_2 = mgh \quad , \quad h = s\,Sin\theta \quad , \quad s = n * 2\pi R \; , \quad s = 2n\pi R$$

$$U_1 - U_2 = 2mgn\pi R\,Sin\theta \quad , \quad T_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

Kaymadan yuvarlanma hareketinde $V_G = R\omega$ dır.

$$I_G = \frac{1}{2}mR^2$$

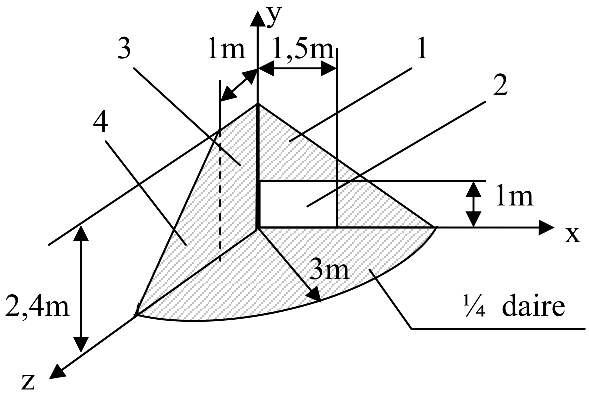
$$T_2 = \frac{1}{2}m(R\omega)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \quad , \quad T_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$$

$$2mgn\pi R\,Sin\theta = \frac{3}{4}mR^2\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{8gn\pi}{3R}Sin\theta}}$$

EK A

Daha önceki senelerde sınavlarda sorulan Statik problemleri

Problem 1) Şekildeki gibi homojen plakalardan oluşturulmuş cismin kütle merkezinin koordinatlarını bulunuz.



Çözüm:

$$x_5 = \frac{4R}{3\pi} \;,\; x_5 = \frac{4}{\pi}$$

$$A_5 = \frac{\pi R^2}{4} \;,\; A_5 = \frac{9\pi}{4}$$

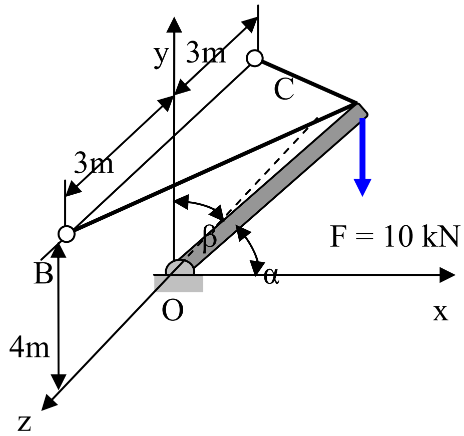
	x	y	z	A	Ax	Ay	Az
1	1	0,8	0	3,6	3,6	2,88	0
2	0,75	0,5	0	-1,5	-1,125	-0,75	0
3	0	1,2	0,5	2,4	0	2,88	1,2
4	0	0,8	1,667	2,4	0	1,92	4
5	$4/\pi$	0	$4/\pi$	$9\pi/4$	9	0	9
			$\sum$	13,969	11,475	6,93	14,2

$$\xi = \frac{\sum Ax}{\sum A} \;,\quad \xi = \frac{11,475}{13,969} \;,\quad \boxed{\xi = 0,821\, m.}$$

$$\eta = \frac{\sum Ay}{\sum A} \;,\quad \eta = \frac{6,93}{13,969} \;,\quad \boxed{\eta = 0,496\, m.}$$

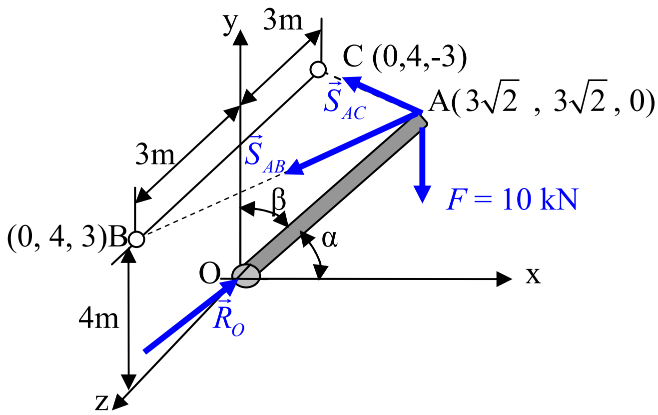
$$\zeta = \frac{\sum Az}{\sum A} \;,\quad \zeta = \frac{14,2}{13,969} \;,\quad \boxed{\zeta = 1,017\, m.}$$

Problem 2) O da küresel mafsallı 6m uzunluğundaki OA kolu A ucunda F = 10 kN şiddetinde bir yük taşımaktadır. O daki tepki kuvveti ile AB ve AC iplerindeki kuvvetleri hesaplayınız.



$\alpha = \beta = 45^0$

Çözüm:



$\sum \vec{F} = \vec{0}$, $\sum \vec{M}_A = \vec{0}$ (denge şartı)

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{S}_{AB} + \vec{S}_{AC} + \vec{R}_O + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_O = R_O \vec{U}_{OA} \quad , \quad \vec{U}_{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{S}_{AB} = S_{AB}\vec{U}_{AB} \quad , \quad \vec{S}_{AC} = S_{AC}\vec{U}_{AC} \quad , \quad \vec{U}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} \quad , \quad \vec{U}_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \, , \; \overrightarrow{AB} = (-3\sqrt{2}\,)\vec{i} + (4 - 3\sqrt{2}\,)\vec{j} + (3-0)\vec{k} \, , \; \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3\sqrt{2}\,)^2 + (4 - 3\sqrt{2}\,)^2 + 3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5{,}2018\,m. \quad , \qquad \vec{U}_{AB} = -0{,}8156\vec{i} - 0{,}0466\,\vec{j} + 0{,}5767\,\vec{k}$$

$$\vec{S}_{AB} = -0{,}8156\,S_{AB}\,\vec{i} - 0{,}0466\,S_{AB}\vec{j} + 0{,}5767\,S_{AB}\vec{k}$$

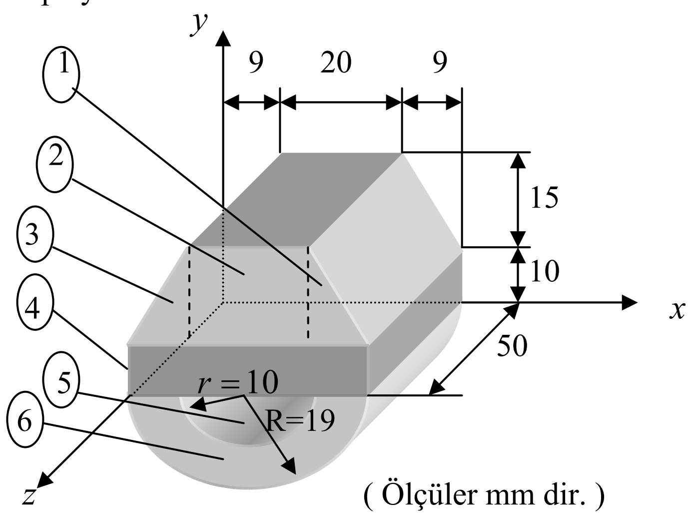
$$\vec{S}_{AC} = -0{,}8156\,S_{AC}\,\vec{i} - 0{,}0466\,S_{AC}\vec{j} - 0{,}5767\,S_{AC}\vec{k}$$

$$\vec{R}_O = 0{,}7071R_O\,\vec{i} + 0{,}7071R_O\,\vec{j}$$

$$\vec{F} = -10\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad -0{,}8156\,S_{AB} - 0{,}8156\,S_{AC} + 0{,}7071R_O = 0 \\ \sum F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad -0{,}0466\,S_{AC} - 0{,}0466\,S_{AC} + 0{,}7071R_O = 10 \\ \sum F_z = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0{,}5767\,S_{AB} - 0{,}5767\,S_{AB} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \boxed{S_{AB} = S_{AC} = 6{,}5\,kN.} \\ \boxed{R_O = 15\,kN.} \end{array}$$

Problem 3) Şekilde ölçüleri verilen homojen dolu cismin kütle merkezinin koordinatlarını hesaplayınız.



$\xi = ?$, $\eta = ?$, $\zeta = ?$

(Ölçüler mm dir.)

Çözüm: $\zeta = 25\,mm$ ($z = 25$ simetri düzlemi olduğu için)

	x	Y	A	Ax	Ay
1	32	15	67,5	2160	1012,5
2	19	17,5	300	5700	5250
3	6	15	67,5	405	1012,5
4	19	5	380	7220	1900
5	19	$-\dfrac{76}{3\pi}$	180,5 π	10774,1	-4572,67
6	19	$-\dfrac{40}{3\pi}$	-50 π	-2984,5	666,67
		$\sum$	1225	23274,6	5269

$$y_5 = -\frac{4R}{3\pi} \ , \quad y_5 = -\frac{4*19}{3\pi} \ , \quad y_5 = -\frac{76}{3\pi}$$

$$A_5 = \frac{\pi R^2}{2} \ , \quad A_5 = \frac{\pi 19^2}{2} \ , \quad A_5 = 180{,}5\pi$$

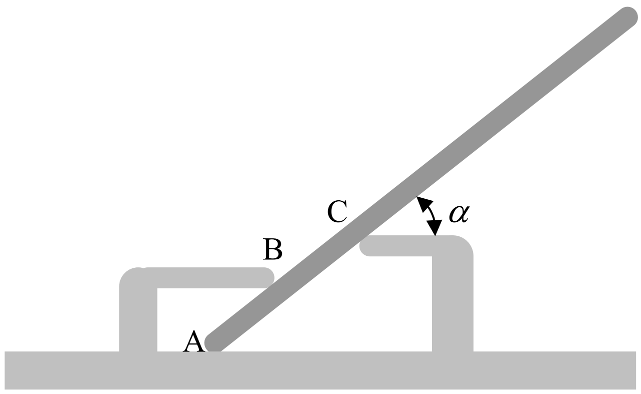
$$y_6 = -\frac{4r}{3\pi} \ , \quad y_6 = -\frac{4*10}{3\pi} \ , \quad y_6 = -\frac{40}{3\pi}$$

$$A_5 = -\frac{\pi r^2}{2} \ , \quad A_5 = -\frac{\pi * 10^2}{2} , \quad A_5 = -50\pi$$

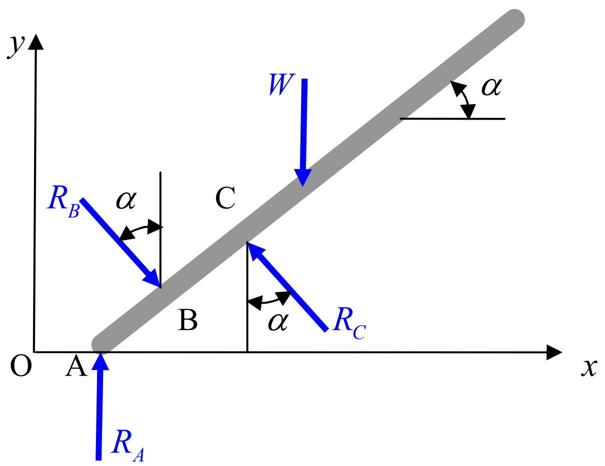
$$\xi = \frac{\sum A x}{\sum A} \ , \quad \xi = \frac{23274{,}6}{1225} \ , \quad \boxed{\xi = 19\,mm}$$ ($x = 19$ simetri düzlemidir.)

$$\eta = \frac{\sum A y}{\sum A} \ , \quad \eta = \frac{5269}{1225} \ , \quad \boxed{\eta = 4{,}3\,\mathrm{mm}}$$

Problem 4) Uzunluğu L ve ağırlığı W olan homojen bir çubuk şekilde görüldüğü gibi Düşey düzlemde tutturulmuştur. Sürtünme kuvvetlerini ihmal ederek A ,B ,C noktalarından gelen tepki kuvvetlerini bulunuz. Not : BC arası a uzunluğundadır.



Çözüm:

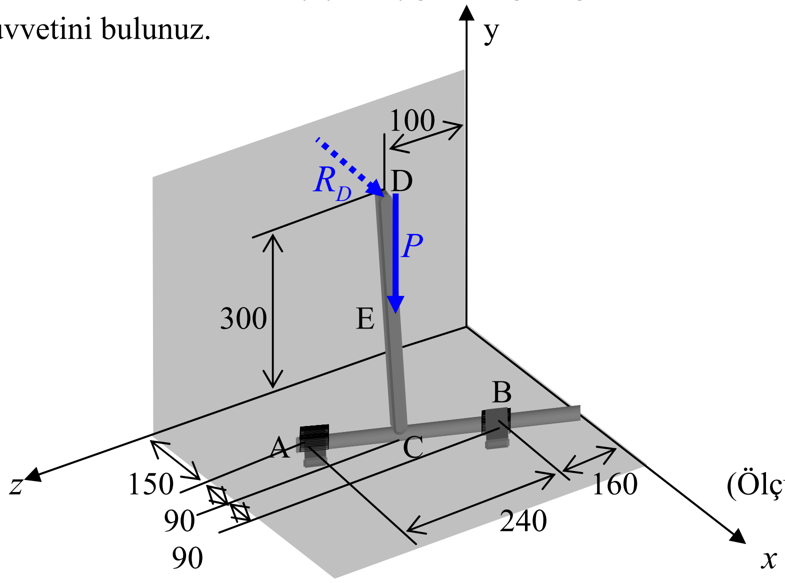


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_B \sin\alpha - R_C \sin\alpha = 0 \Rightarrow R_B = R_C$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A - R_B \cos\alpha + R_A \cos\alpha - W = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = W}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B a - W\frac{L}{2}\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{R_B = R_C = \frac{WL}{2a}\cos\alpha}$$

Problem 5) İki çubuk T şeklinde bir levye oluşturmak için birleştirilmiştir.D de sürtünmesiz duvara dayanmış A ve B de ise rulmanlı yataklar ile mesnetlenmiştir. CD nin ortası E ye $P = 600\,N$ şiddetinde bir düşey yük uygulandığına göre D noktasına duvardan gelen tepki kuvvetini bulunuz.



(Ölçüler mm dir.)

Çözüm :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_D + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\sum M_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\overrightarrow{AD} \wedge \vec{R}_D - \overrightarrow{AE} \wedge \vec{P}) \bullet \vec{U}_{AB} = 0$$

$$\vec{R}_D = R_D \vec{i} \quad , \quad \vec{P} = -600\,\vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{AD} = -150\vec{i} + 300\,\vec{j} - 300\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$$

$$\overrightarrow{AC} = 90\vec{i} - 120\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{CE} = 0{,}5 * \overrightarrow{CD} \quad , \quad \overrightarrow{CE} = 0{,}5 * (-240\vec{i} + 300\,\vec{j} - 180\vec{k})$$

$$\overrightarrow{CE} = -120\vec{i} + 150\,\vec{j} - 90\vec{k} \quad , \qquad \overrightarrow{AE} = -30\vec{i} + 150\,\vec{j} - 210\vec{k}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \quad , \quad \vec{U}_{AB} = \frac{180\vec{i} - 240\vec{k}}{\sqrt{180^2 + 240^2}} \quad , \quad \vec{U}_{AB} = \frac{180\vec{i} - 240\vec{k}}{300} \quad , \quad \vec{U}_{AB} = 0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{k}$$

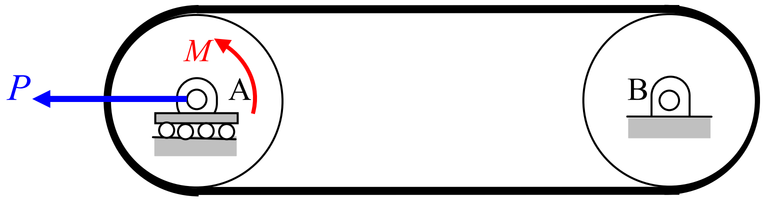
$$\overrightarrow{AD} \wedge \vec{R}_D - \overrightarrow{AE} \wedge \vec{P} = (-150\vec{i} + 300\,\vec{j} - 300\vec{k}) \wedge R_D\,\vec{i} + (-30\vec{i} + 150\,\vec{j} - 210\vec{k}) \wedge -600\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AD} \wedge \vec{R}_D - \overrightarrow{AE} \wedge \vec{P} = -126000\vec{i} - 300 R_D\,\vec{j} + (-300 R_D + 18000)\vec{k}$$

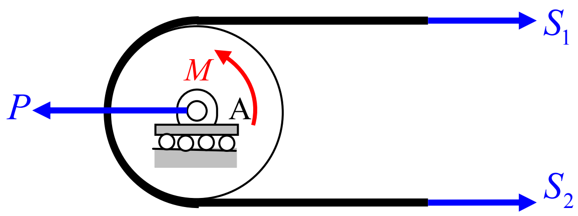
$$(\overrightarrow{AD} \wedge \vec{R}_D - \overrightarrow{AE} \wedge \vec{P}) \bullet \vec{U}_{AB} = -75600 - 14400 + 240\,R_D = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_D = 375\,N}$$

Problem 6) Şekilde gösterildiği gibi düz bir kayış A kasnağından B kasnağına moment iletiminde kullanılmaktadır. Her bir kasnağın yarıçapı 60 mm dir. A Kasnağının aksı $P = 900N$ şiddetinde bir kuvvetle çekiliyor. Kasnaklarla kayış arasındaki sürtünme katsayısının $\mu = 0,35$ olduğu bilindiğine göre

a) İletilebilen en büyük momentin şiddetini b) Bu durumda kayıştaki en büyük çekme kuvvetini bulunuz.



Çözüm :



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 + S_2 - P = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 + S_2 = 900\,N$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M + S_2 R - S_1 R = 0 \quad \Rightarrow \quad M = (S_1 - S_2)R$$

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha} \quad , \quad \frac{S_1}{S_2} = e^{0,35\pi} \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 e^{0,35\pi}$$

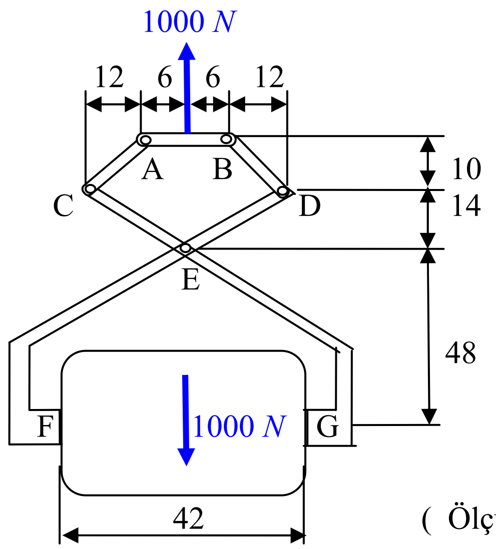
$$S_2 e^{0,35\pi} + S_2 = 900 \quad , \quad S_2(e^{0,35\pi} + 1) = 900 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 224,84\,N$$

$$S_1 = 675,16\,N$$

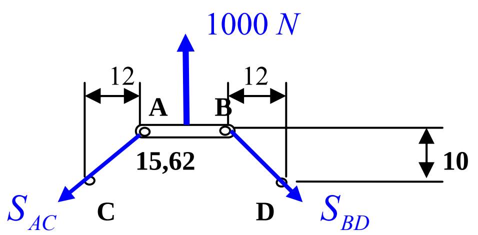
$$M = (S_1 - S_2)R \quad , \quad M = 450,32 * 0,06 \quad , \quad \boxed{M = 27\,Nm}$$

$$\boxed{S_{maks.} = S_1 = 675,16\,N}$$

Problem 7) $1000\,N$ ağırlığındaki bir beton blok şekilde gösterilen mekanizma ile kaldırılmaktadır. Beton bloğun kaymadan taşınabilmesi için blok ile F ve G tutma çeneleri arasındaki sürtünme katsayısı en az ne olmalıdır.



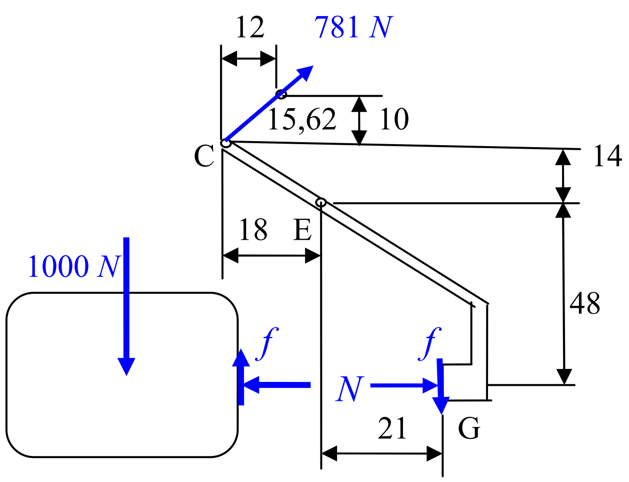
(Ölçüler cm dir)



$$\overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{BD} = \sqrt{12^2 + 10^2} = 15{,}62\,cm$$

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; S_{BD}\frac{12}{15{,}62} - S_{AC}\frac{12}{15{,}62} = 0 \;\Rightarrow\; S_{AC} = S_{BD}$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; 1000 - S_{BD}\frac{10}{15{,}62} - S_{AC}\frac{10}{15{,}62} = 0 \;\Rightarrow\; S_{AC} = S_{BD} = 781\,N$$



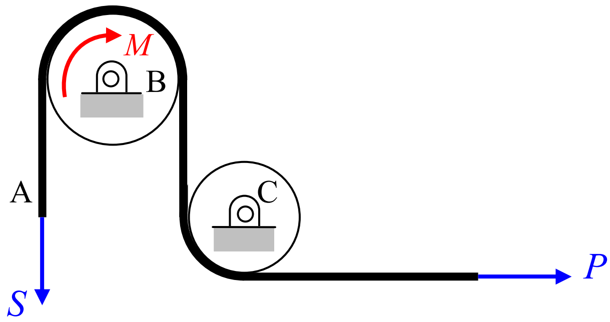
$$f = \frac{1000}{2} = 500\,N \quad , \quad f = \mu N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{f}{\mu} \quad , \quad N = \frac{500}{\mu}$$

$$\sum M_E = 0 \;\Rightarrow\; 48N - 21f - 18S_{AC}\frac{10}{15,62} - 14S_{AC}\frac{12}{15,62} = 0$$

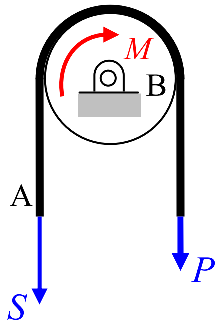
$$48\frac{500}{\mu} - 21*500 - 18*781\frac{10}{15,62} - 14*781\frac{12}{15,62} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{500}{\mu} = 581,25$$

$$\boxed{\mu = 0,86}$$

Problem 8) A kayıt bandı , $r_B = 20\,mm$ yarıçaplı ve $M = 0,3\,Nm$ şiddetindeki moment etkisinde olan B makarasından geçtikten sonra serbest dönen bir C makarasının altından geçiyor. Bant ile makara arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0,4$ olduğuna göre bantın kaymadan hareket edebilmesi için P kuvvetinin minumum değerini bulunuz.



Çözüm:



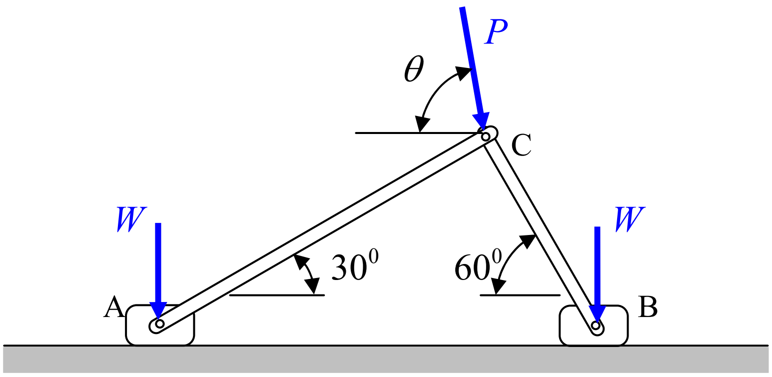
$$\frac{S}{P} = e^{\mu\alpha} \quad \Rightarrow \quad S = Pe^{0,4\pi}$$

$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M + P * r_B - S * r_B = 0 \quad \Rightarrow \quad M = (S - P)r_B$$

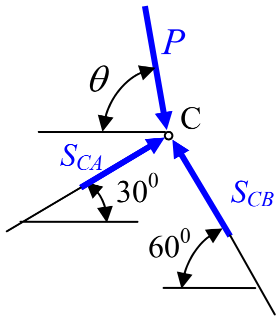
$$0,3 = P(e^{0,4\pi} - 1)0,02 \quad P = \frac{0,3}{0,02(e^{0,4\pi} - 1)}$$

$$\boxed{P = 5,97\,N}$$

Problem 9) Yatay düzlemde bulunan W ağırlığındaki A ve B cismi , birbirine C noktasından mafsallı olan AC ve BC çubuklarına mafsallıdır. Sistemin dengede kalması şertı ile çubukların birleşme noktası olan C ye uygulanacak en büyük P kuvvetinin şiddetini W ağırlığına bağlı olarak $\theta = 80^0$ için bulunuz. (W ağırlıkları ile yatay düzlem arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0,3$ dır.)



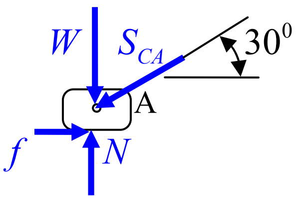
Çözüm :



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{CA}\cos 30^0 - S_{CB}\cos 60^0 + P\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{CA}\sin 30 + S_{CB}\sin 60^0 - P\sin\theta = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2}S_{CA} - \frac{1}{2}S_{CB} = -P\cos\theta \\ \frac{1}{2}S_{CA} + \frac{\sqrt{3}}{2}S_{CB} = P\sin\theta \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} S_{CA} = 0,342\,P \\ S_{CB} = 0,9397\,P \end{array}$$

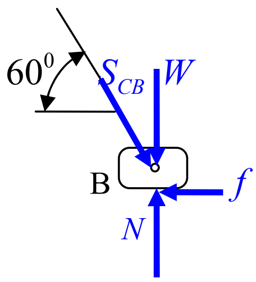


$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow \ f - S_{CA}\cos 30^0 = 0 \ \Rightarrow \ f = 0,2962\,P$$

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \ N - W - S_{CA}\sin 30^0 = 0$$

$$f = \mu N \ , \ f = 0,3\,N$$

$$0,292P = 0,3W + 0,3 * 0,342\,P * 0,5 \quad \Rightarrow \quad P = 1,225W$$



$$\sum F_x = 0 \ \Rightarrow \ S_{CB}\cos 60^0 - f = 0 \Rightarrow f = 0,46985\,P$$

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \ N - W - S_{CB}\sin 60^0 = 0$$

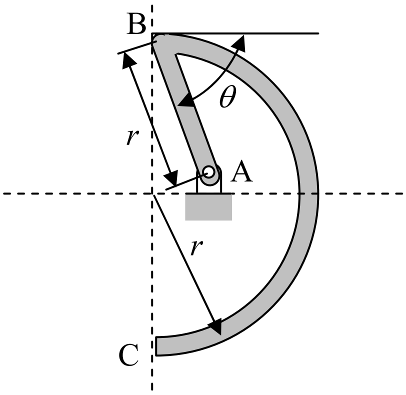
$$f = 0,3\,N$$

$$0,49685P = 0,3W + 0,9397 * \frac{\sqrt{3}}{2} * 0,3P \quad \Rightarrow \quad P = 1,3292W$$

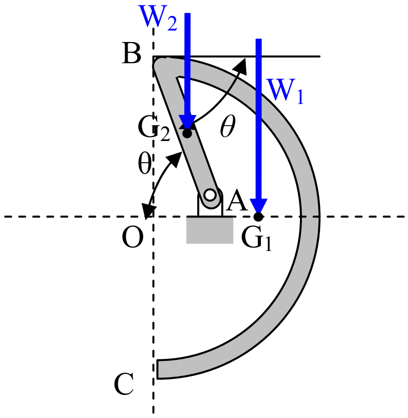
P kuvveti $1,225W$ dan büyük olduğunda denge bozulacağından doğru cevap

$\boxed{P = 1,225W}$ olmalıdır.

Problem 10) Homojen telden şekildeki gibi bükülmüş cismin gösterilen konumda dengede kalabilmesi için θ açısı kaç derece olmalıdır.



Çözüm :



$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(\overleftrightarrow{OG_1} - \overleftrightarrow{OA}) - W_2\,\overleftrightarrow{AG_2}\cos\theta = 0$$

$$\overleftrightarrow{OG_1} = \frac{2r}{\pi} \quad , \quad \overleftrightarrow{OA} = r\cos\theta \quad , \quad \overleftrightarrow{AG_2} = \frac{r}{2}\cos\theta$$

$$W_1 = \pi r\rho \quad , \quad W_2 = r\rho$$

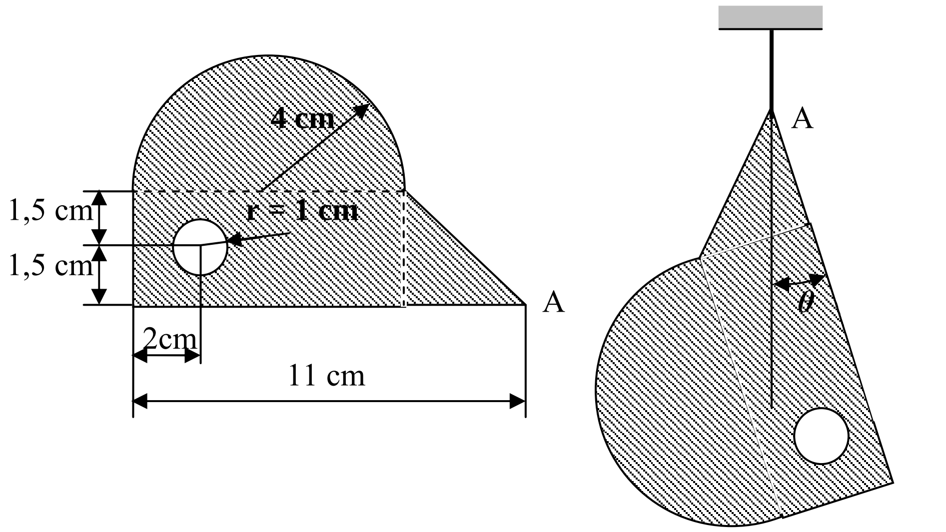
$$\pi r\rho(\frac{2r}{\pi} - r\cos\theta) - r\rho\frac{r}{2}\cos\theta = 0$$

$$2\rho r^2 - \pi\rho r^2\cos\theta - \rho\frac{r^2}{2}\cos\theta = 0$$

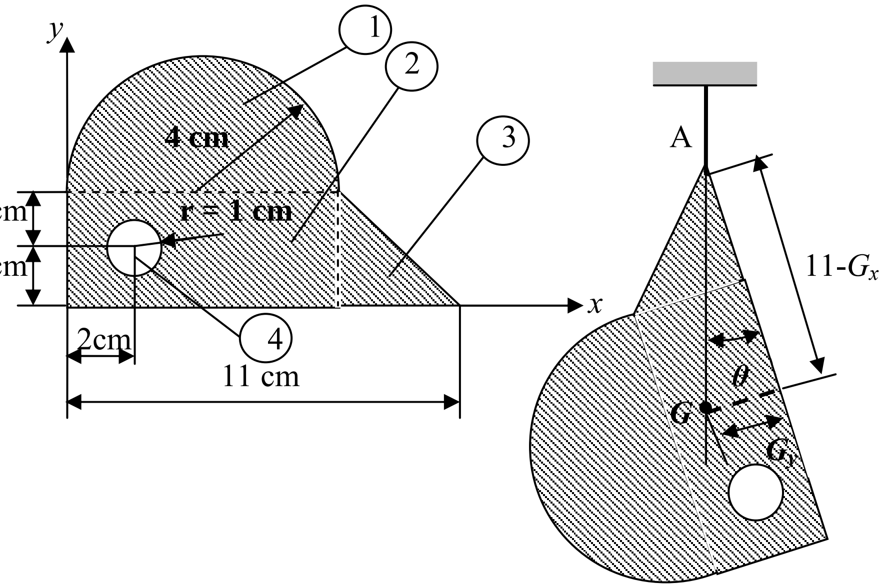
$$2 - \pi\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad (\cos\theta)*(\pi + \frac{1}{2}) = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0,5492$$

$$\boxed{\theta = 56,69^0}$$

Problem 11) Homojen levhadan şekildeki gibi kesilerek oluşturulmuş cismin
a) kütle merkezinin koordinatlarını
b) A ucundan şekildeki gibi asıldığında denge durumundaki θ açısını bulunuz.



Çözüm:

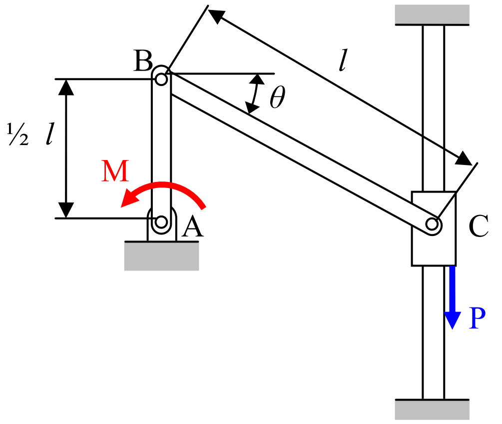


	x	y	A	Ax	Ay
	4	$3+\dfrac{4*4}{3\pi}$	$\dfrac{\pi*4^2}{2}=8\pi$	32π	$24\pi+\dfrac{128}{3}$
	4	1,5	$3*8=24$	96	36
	8+1=9	1	3*3/2	40,5	4,5
	2	1,5	$-\pi$	-2π	$-1,5\pi$
		$\sum$	$7\pi+28,5$	$30\pi+136,5$	$22,5\pi+83,1667$

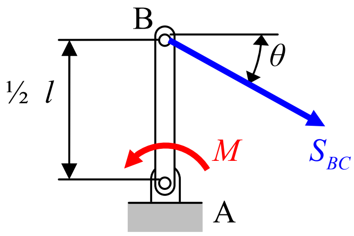
$$G_x=\frac{\sum Ax}{\sum A}\ ,\ G_x=\frac{30\pi+136,5}{7\pi+28,5}\ ,\ G_x=4,57\,cm,\ G_y=\frac{\sum Ay}{\sum A}\ ,\ G_y=\frac{22,5\pi+83,1667}{7\pi+28,5}$$

$$G_y=3,047\,cm\quad ,\quad \tan\theta=\frac{G_y}{11-G_x}\quad ,\quad \tan\theta=\frac{3,047}{11-4,57}\ \Rightarrow\ \boxed{\theta=25,36^0}$$

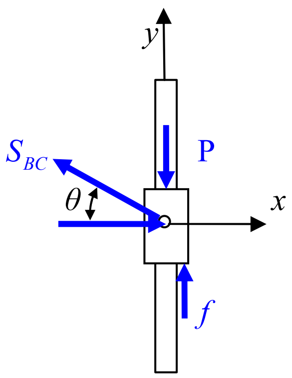
Problem 12) C bileziği ile düşey çubuk arasındaki statik sürtünme katsayısının 0.4 olduğu bilindiğine göre $\theta = 35^0$, $l = 600$ mm , P = 300 N olursa şekilde gösterilen konumda mekanizmanın dengede kalma koşulu ile AB çubuğuna uygulanacak momentin en küçük ve en büyük değerlerini bulunuz.



Çözüm :



$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow\; M - \frac{l}{2} S_{BC} \cos\theta = 0 \;\Rightarrow M = \frac{l}{2} S_{BC} \cos\theta$$



$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; N - S_{BC}\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; N = S_{BC}\cos\theta$$

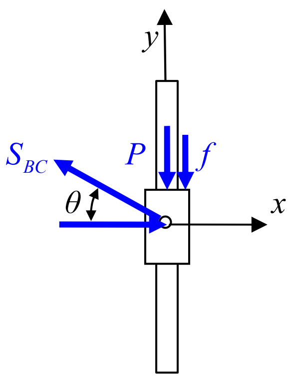
$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; f - P + S_{BC}\sin\theta = 0$$

$$f = \mu N \quad , \quad f = 0{,}4N$$

$$0{,}4\,S_{BC}\cos\theta - 300 + S_{BC}\sin\theta = 0$$

$$S_{BC}\,(0{,}4\cos\theta + \sin\theta) = 300 \;\Rightarrow\; S_{BC} = \frac{300}{0{,}4\cos\theta + \sin\theta}$$

$$M_{\min.} = \frac{300 * 0{,}3\cos\theta}{0{,}4\cos\theta + \sin\theta} \quad , \quad \boxed{M_{\min.} = 81{,}8 \text{ Nm}}$$



$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; N - S_{BC}\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; N = S_{BC}\cos\theta$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; -f - P + S_{BC}\sin\theta = 0$$

$$f = \mu N \quad , \quad f = 0{,}4N$$

$$-0{,}4\,S_{BC}\cos\theta - 300 + S_{BC}\sin\theta = 0$$

$$S_{BC}\,(\sin\theta - 0{,}4\cos\theta) = 300 \;\Rightarrow\; S_{BC} = \frac{300}{\sin\theta - 0{,}4\cos\theta}$$

$$M_{maks.} = \frac{300 * 0{,}3\cos\theta}{\sin\theta - 0{,}4\cos\theta} \quad , \quad \boxed{M_{maks.} = 299{,}8 \text{ Nm}}$$

EK B

Daha önceki senelerde sınavlarda sorulan Dinamik problemleri

Problem 1) Bir maddesel nokta bir doğru üzerinde $\boldsymbol{a} = -0,2\boldsymbol{V}^2$ ivme –hız bağıntısı ile hareket ediyor. $\boldsymbol{t} = 0$ da konum $\boldsymbol{s} = 0$ ve hız $\boldsymbol{V} = 20\,\boldsymbol{m/s}$ olduğuna göre $\boldsymbol{t} = 2$ deki konumu hızı ve ivmeyi hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{dV}{dt} = -0.2V^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^t dt = -5\int_{20}^{V} \frac{dV}{V^2} \quad \Rightarrow \quad t = 5\left(\frac{1}{V}\right)_{20}^{V} = 5\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{20}\right)$$

$$t = \frac{5}{V} - \frac{5}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{V} = t + \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{5} = \frac{1}{t + \frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{5}{t + \frac{1}{4}}$$

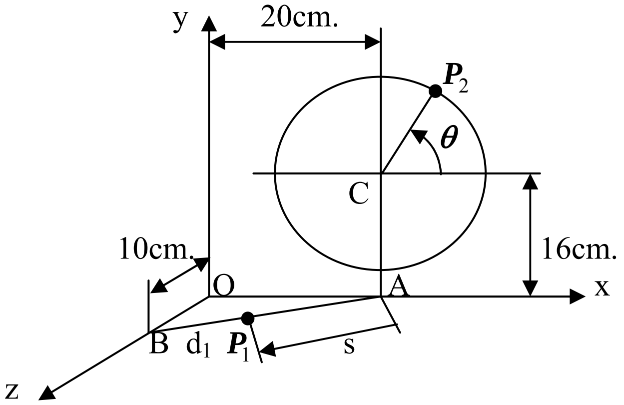
$$\frac{ds}{dt} = V \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \frac{5}{t + \frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^S ds = \int_0^t \frac{5}{t + 1/4}\, dt \quad \Rightarrow \quad s = 5\ln(t + 1/4)\Big|_0^t$$

$$s = 5[\ln(t + 1/4)\big| - \ln(1/4)] \quad \Rightarrow \quad s = 5\ln(4t + 1) \quad , \quad V = \frac{20}{4t + 1}$$

$$t = 2 \text{ de} \quad s = 5\ln 9 \;,\; \boxed{s = 10,99m} \;,\; V = \frac{20}{9} \;,\; \boxed{V = 2,22\,m} \;,\; a = -0,2\,(2,22)^2$$

$$\boxed{a = -0,99\, m/s^2}$$

Problem 2) Şekilde gösterildiği gibi $\boldsymbol{P_1}$ maddesel noktası d_1 doğrusu üzerinde $\boldsymbol{s} = 10 + 8\boldsymbol{Sin}\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{12}\boldsymbol{t}$ konum-zaman bağıntısına göre $\boldsymbol{P_2}$ maddesel noktası ise xy düzleminde bulunan $\boldsymbol{R} = 12\boldsymbol{cm}.$ yarıçaplı bir çember üzerinde $\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{27}\boldsymbol{t}^2$ açı-zaman bağıntısına göre hareket etmektedir. $\boldsymbol{t} = 3$ için $\boldsymbol{P_2}$ maddesel noktasının $\boldsymbol{P_1}$ maddesel noktasına göre bağıl yer , hız , ivme vektörlerini ve aralarındaki uzaklığı bulunuz.



Çözüm:

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = \vec{r}_{P_2} - \vec{r}_{P_1} \;,\; \vec{r}_{P_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_2} \;,\; \overrightarrow{OC} = 20\vec{i} + 16\vec{j} \;,\; \overrightarrow{CP_2} = R\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_{P_2} = (20 + 12\cos\theta)\,\vec{i} + (16 + 12\sin\theta)\,\vec{j} \qquad \vec{r}_{P_1} = \overrightarrow{OA} + s\vec{U}_{AB} \;,\; \vec{U}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

$$\vec{U}_{AB} = \frac{-20\vec{i} + 10\vec{k}}{\sqrt{20^2 + 10^2}} \;,\; \vec{U}_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k} \,,\; \vec{r}_{P_1} = (20 - \frac{2}{\sqrt{5}}s)\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}s\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = (12\cos\theta + \frac{2}{\sqrt{5}}s)\,\vec{i} + (16 + 12\sin\theta)\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}s\,\vec{k} \;,\; t = 3\text{de } \theta = \frac{\pi}{3} \;,\; s = 10 + 4\sqrt{2}$$

$$\vec{r}_{P_2/P_1} = (6 + \frac{2}{\sqrt{5}}(10 + 4\sqrt{2})\,\vec{i} + (16 + 6\sqrt{3})\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}(10 + 4\sqrt{2})\,\vec{k} \,, \quad \boxed{\vec{r}_{P_2/P_1} = 20\vec{i} + 26{,}4\,\vec{j} - 7\,\vec{k}}$$

$$\vec{V}_{P_2/P_1} = (-12\dot{\theta}\sin\theta + \frac{2}{\sqrt{5}}V)\,\vec{i} + 12\dot{\theta}\cos\theta)\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}V\,\vec{k} \,, \quad \dot{\theta} = \frac{2\pi}{27}t \;,\; V = \frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{12}t$$

$$t = 3\text{de } \dot{\theta} = \frac{2\pi}{9} \;,\; V = \frac{\pi}{3}\sqrt{2} \,,\; \vec{V}_{P_2/P_1} = (-12\frac{2\pi}{9}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{3}\sqrt{2})\,\vec{i} + 12\frac{2\pi}{9}\frac{1}{2})\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{3}\sqrt{2}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V}_{P_2/P_1} = -5{,}93\,\vec{i} + 4{,}19\,\vec{j} - 0{,}66\,\vec{k}}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = (-12\ddot{\theta}\sin\theta - 12\dot{\theta}^2\cos\theta + \frac{2}{\sqrt{5}}a)\,\vec{i} + (12\ddot{\theta}\cos\theta - 12\dot{\theta}^2\sin\theta)\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}a\,\vec{k}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2\pi}{27} \;,\; a = -\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi}{12}t \;,\; t = 3\text{de } \ddot{\theta} = \frac{2\pi}{27} \;,\; a = \frac{\pi^2}{36}\sqrt{2}$$

$$\vec{a}_{P_2/P_1} = (-12\frac{2\pi}{27}\frac{\sqrt{3}}{2} - 12\frac{4\pi^2}{81}\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\pi^2}{36}\sqrt{2})\,\vec{i} + (12\frac{2\pi}{27}\frac{1}{2} - 12\frac{4\pi^2}{81}\frac{\sqrt{3}}{2})\,\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\pi^2}{36}\sqrt{2}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a}_{P_2/P_1} = -5{,}7\,\vec{i} + -3{,}7\,\vec{j} + 0{,}17\,\vec{k}} \;,\; \overleftrightarrow{P_1P_2} = \left|\vec{r}_{P_2/P_1}\right| = \sqrt{20^2 + 26{,}4^2 + 7^2} \;,\; \boxed{\overleftrightarrow{P_1P_2} = 33{,}85\,cm}$$

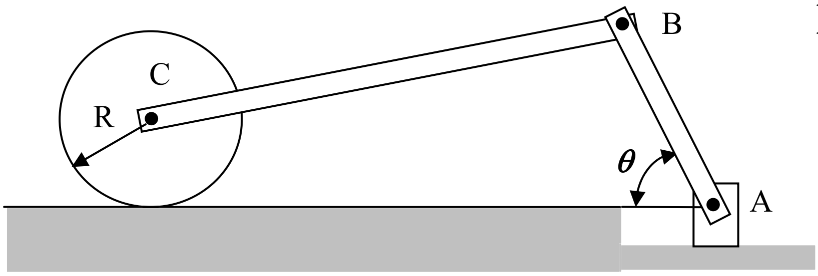
Problem 3) Şekildeki mekanizmada dairesel levhanın merkezinin hızı sola doğru $\boldsymbol{V_C} = 2\,\boldsymbol{cm/s}$ (sabit) olduğuna göre AB çubuğunun verilen konum için

a) açısal hızını b) açısal ivmesini bulunuz

$\boldsymbol{R} = 10\,\boldsymbol{cm}.$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}} = 24\,\boldsymbol{cm}.$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}} = 46\,\boldsymbol{cm}.$

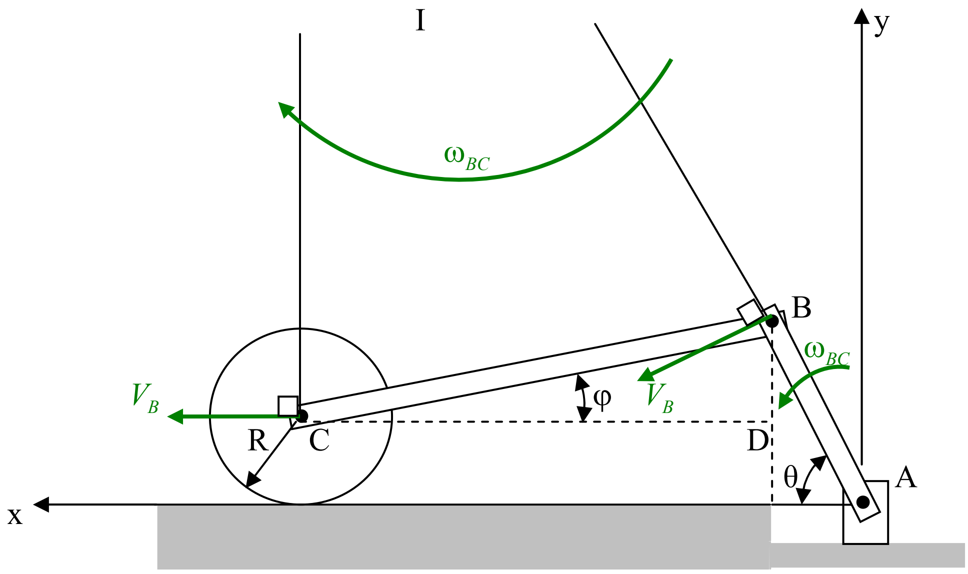


$\boldsymbol{\theta} = 60^0$ için

a) $\boldsymbol{\omega_{AB}} = ?$

b) $\boldsymbol{\alpha_{AB}} = ?$

Çözüm:



a)

$V_C = \overleftrightarrow{IC}\,\omega_{BC}$, $\overleftrightarrow{IC} = \overleftrightarrow{IE} - R$, $\overleftrightarrow{IE} = \overleftrightarrow{AE}\tan\theta$, $\overleftrightarrow{AE} = \overleftrightarrow{BC}\cos\varphi + \overleftrightarrow{AB}\cos\theta$, $\cos\varphi = \dfrac{\overleftrightarrow{CD}}{\overleftrightarrow{BC}}$

$\overleftrightarrow{CD} = \sqrt{\overleftrightarrow{BC}^2 - \overleftrightarrow{BD}^2}$, $\overleftrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{AB}\sin\theta - R$, $\overleftrightarrow{BD} = 10{,}785\,cm$, $\overleftrightarrow{CD} = 44{,}718\,cm$,

$\overleftrightarrow{AE} = 56{,}718\,cm$, $\overleftrightarrow{IE} = 98{,}238\,cm$, $\overleftrightarrow{IC} = 88{,}238\,cm$, $\overleftrightarrow{IA} = \dfrac{\overleftrightarrow{AE}}{\cos\theta}$, $\overleftrightarrow{IA} = 113{,}436\,cm$

$\overleftrightarrow{IB} = 89{,}436\,cm$, $\varphi = 13{,}659^0$, $\omega_{BC} = \dfrac{V_C}{\overleftrightarrow{IC}}$, $\omega_{BC} = \dfrac{2}{88{,}238}$, $\omega_{BC} = 0{,}0227\,rad/s$

$V_B = \overleftrightarrow{IB}\,\omega_{BC}$, $V_B = 2{,}027\,cm/s$, $\boxed{\omega_{AB} = 0{,}0845\,rad/s}$

b)

$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C}$, $\vec{a}_C = \vec{0}$ (C nin hareketi doğrusal hızının şiddeti sabit old.)

$\vec{a}_B = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{V}_B$, $\vec{a}_{B/C} = \vec{\alpha}_{BC} \wedge \overrightarrow{CB} + \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{V}_{B/C}$

$\vec{V}_B = V_B\sin\theta\,\vec{i} - V_B\cos\theta\,\vec{j}$, $\vec{V}_B = 1{,}76\vec{i} - 1{,}01\vec{j}$, $\vec{V}_C = 2\vec{i}$, $\vec{V}_{B/C} = \vec{V}_B - \vec{V}_C$

$\vec{V}_{B/C} = -0{,}24\vec{i} - 1{,}01\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB}\cos\theta\,\vec{i} + \overleftrightarrow{AB}\sin\theta\,\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = 12\vec{i} + 12\sqrt{3}\,\vec{j}$

$\overrightarrow{CB} = \overleftrightarrow{BC}\cos\varphi\,\vec{i} + \overleftrightarrow{BC}\sin\varphi\,\vec{j}$, $\overrightarrow{CB} = 46\cos 13{,}659^0\,\vec{i} + 46\sin 13{,}659^0\,\vec{j}$

$\overrightarrow{CB} = 44{,}7\vec{i} + 10{,}86\vec{j}$

$$\vec{a}_B = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge (12\vec{i} + 12\sqrt{3}\,\vec{j}) - 0,0845\,\vec{k} \wedge (1,76\,\vec{i} - 1,01\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_B = (-12\sqrt{3}\,\alpha_{AB} - 0,085)\,\vec{i} + (12\,\alpha_{AB} - 0,149)\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_{B/C} = \alpha_{BC}\vec{k} \wedge (44,7\,\vec{i} + 10,86\,\vec{j}) + 0,0227\,\vec{k} \wedge (-0,24\,\vec{i} - 1,01\,\vec{j})$$

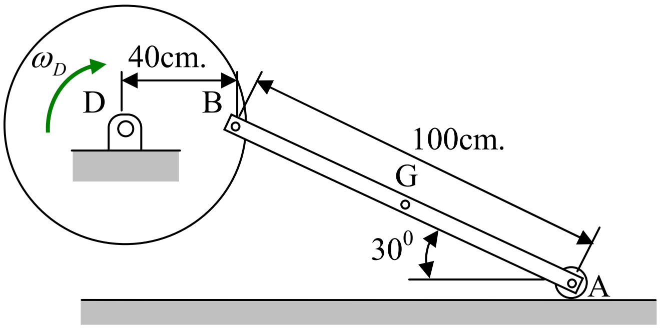
$$\vec{a}_{B/C} = (-10,86\,\alpha_{BC} + 0,023)\,\vec{i} + (44,7\,\alpha_{BC} - 0,00545)\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = (-12\sqrt{3}\,\alpha_{AB} - 0,085)\,\vec{i} + (12\,\alpha_{AB} - 0,149)\,\vec{j} = (-10,86\,\alpha_{BC} + 0,023)\,\vec{i} + (44,7\,\alpha_{BC} - 0,00545)\,\vec{j}$$

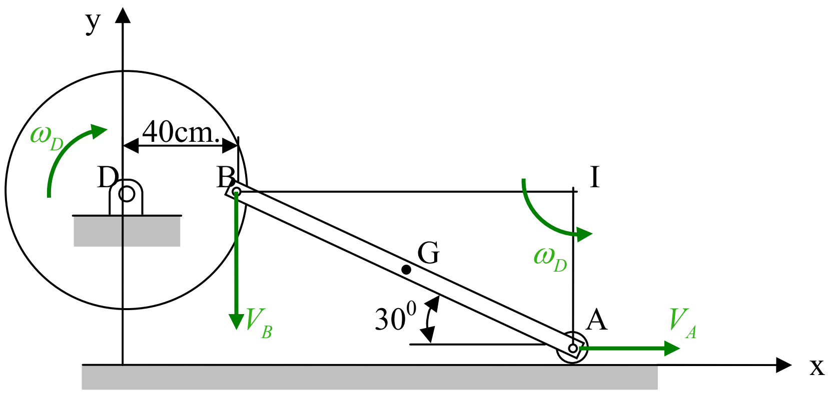
$$\left.\begin{array}{l} -12\sqrt{3}\,\alpha_{AB} - 0,085 = -10,86\,\alpha_{BC} + 0,023 \\ \underline{+\quad \sqrt{3}\,(12\,\alpha_{AB} - 0,149) = \sqrt{3}\,(44,7\,\alpha_{BC} - 0,00545)} \\ 66,56\,\alpha_{BC} = -0,3566 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{BC} = -0,00544\,rad/s^2 \end{array}\right\} \quad \boxed{\alpha_{AB} = -0,00804\,rad/s^2}$$

Problem 4) D diski ve ona mafsallı çubuktan oluşan mekanizmada şekilde gösterildiği anda D diskinin açısal hızı $\omega_D = 6 rad/s.$ ve açısal ivmesi $\alpha_D = 2 rad/s^2$ dır. Şekilde gösterildiği anda

a) AB çubuğunun açısal hızını
b) AB çubuğunun açısal ivmesini
c) AB çubuğunun orta noktası G nin ivmesini hesaplayınız.



Çözüm:



a)

$$V_B = R\omega_D \ , \ V_B = 40*6 \ , \ V_B = 240\,cm/s \ , \ V_B = \overleftrightarrow{IB}\,\omega_{AB} \ \Rightarrow \ \omega_{AB} = \frac{V_B}{\overleftrightarrow{IB}} \ , \ \omega_{AB} = \frac{240}{50\sqrt{3}}$$

$$\omega_{AB} = \frac{8}{5}\sqrt{3} \ , \ \boxed{\omega_{AB} = 2,77\,rad/s} \ , \ V_A = \overleftrightarrow{IA}\,\omega_{AB} \ , \ V_A = 50\frac{8}{5}\sqrt{3} \ , \ V_A = 80\sqrt{3}\,cm/s$$

b) $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \ , \ \vec{a}_B = -\alpha_D\vec{k} \wedge \overrightarrow{DB} - \omega_D\vec{k} \wedge \vec{V}_B \ , \ \vec{a}_B = -2\vec{k} \wedge 40\vec{i} - 6\vec{k} \wedge (-240\vec{j})$

$\vec{a}_B = -1440\vec{i} - 80\vec{j} \ , \ \vec{a}_A = a_A\vec{i} \ , \ \vec{a}_{B/A} = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AB} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \vec{V}_{B/A} \ , \ \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

$\vec{V}_{B/A} = -80\sqrt{3}\,\vec{i} - 240\,\vec{j} \ , \ \overrightarrow{AB} = -50\sqrt{3}\,\vec{i} + 50\,\vec{j} \ ,$

$$\vec{a}_{B/A} = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge (-50\sqrt{3}\,\vec{i} + 50\,\vec{j}) + \frac{8}{5}\sqrt{3}\,\vec{k} \wedge (-80\sqrt{3}\,\vec{i} - 240\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_{B/A} = (-50\alpha_{AB} + 384\sqrt{3})\vec{i} + (-50\sqrt{3}\,\alpha_{AB} - 384)\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = -1440\vec{i} - 80\,\vec{j} = a_A\vec{i} + [(-50\alpha_{AB} + 384\sqrt{3})\vec{i} + (-50\sqrt{3}\,\alpha_{AB} - 384)\,\vec{j}]$$

$$-1440\vec{i} - 80\,\vec{j} = (-50\alpha_{AB} + a_A + 384\sqrt{3})\vec{i} + (-50\sqrt{3}\,\alpha_{AB} - 384)\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} -50\alpha_{AB} + a_A + 384\sqrt{3} = -1440 \\ -50\sqrt{3}\,\alpha_{AB} - 384 = -80 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \alpha_{AB} = \frac{80-384}{50\sqrt{3}} \ , \ \begin{array}{l} \boxed{\alpha_{AB} = -3,51\,rad/s^2} \\ a_A = -1929,6\,cm/s^2 \end{array}$$

c) $\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{a}_{G/A} \ , \ \vec{a}_A = -1929,6\,\vec{i} \ , \ \vec{a}_{G/A} = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AG} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \vec{V}_{G/A}$

$$\vec{V}_{G/A} = \omega_{\mathrm{AB}}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AG} \quad , \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(-50\sqrt{3}\,\vec{i} + 50\,\vec{j}) \ , \ \overrightarrow{AG} = -25\sqrt{3}\,\vec{i} + 25\,\vec{j}$$

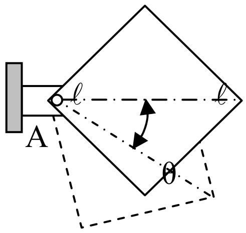
$$\vec{V}_{G/A} = \frac{8}{5}\sqrt{3}\,\vec{k} \wedge (-25\sqrt{3}\,\vec{i} + 25\,\vec{j}) \ , \ \vec{V}_{G/A} = -40\sqrt{3}\,\vec{i} - 120\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_{G/A} = -3,51\vec{k} \wedge (-25\sqrt{3}\,\vec{i} + 25\,\vec{j}) + \frac{8}{5}\sqrt{3}\,\vec{k} \wedge (-40\sqrt{3}\,\vec{i} - 120\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_{G/A} = 420,3\vec{i} - 40\,\vec{j} \quad , \ \vec{a}_G = -1929,6\,\vec{i} + (420,3\vec{i} - 40\,\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{a}_G = -1509,3\,\vec{i} - 40\,\vec{j}} \quad , \quad \boxed{|\vec{a}_G| = 1509,8\ cm/s^2}$$

Problem 5) 6kg Kütleli ve $\ell = 20cm.$ kenar uzunluklu kare şeklindeki homojen malzemeden yapılan aşağıdaki cisim A köşesi etrafında ilk hızsız harekete bırakılıyor. Cismin AB köşegeninin yatayla θ açısı yaptığı anda A mesnetindeki tepki kuvvetini hesaplayınız.

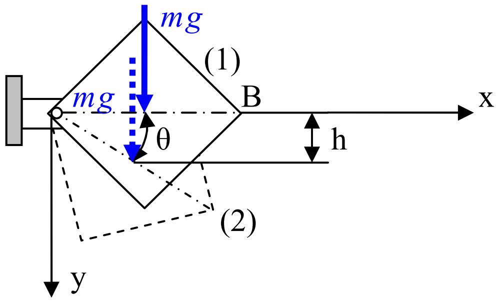


$\ell = 20cm.$

$m = 6kg.$

$\theta = 30^0$

Çözüm:



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AG} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_G$$

$$\vec{V}_G = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AG} \ , \ \overrightarrow{AG_2} = \overleftrightarrow{AG}\cos\theta\,\vec{i} + \overleftrightarrow{AG}\sin\theta\,\vec{j} \ , \ \overleftrightarrow{AG} = \frac{\overleftrightarrow{AB}}{2} \ , \ \overleftrightarrow{AB} = \sqrt{2}\,l \ , \ \overleftrightarrow{AG} = \frac{\sqrt{2}}{2}l$$

$$\overrightarrow{AG_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}l\cos 30^0\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}l\sin 30^0\,\vec{j} \ , \ \overrightarrow{AG_2} = \frac{\sqrt{6}}{4}l\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}l\,\vec{j}$$

$$\sum M_A = I_A\alpha \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{\sum M_A}{I_A} \ , \ \sum M_A = mg\overleftrightarrow{AG}\cos\theta \ , \ \sum M_A = \frac{\sqrt{6}}{4}mgl$$

$$I_A = I_G + m(\overleftrightarrow{AG})^2 \ , \ I_G = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 \ , \ I_G = \frac{1}{6}ml^2 \ , \ I_A = \frac{1}{6}ml^2 + m(\frac{\sqrt{2}}{2}l)^2$$

$$I_A = \frac{1}{6}ml^2 + \frac{2}{4}ml^2 \ , \ I_A = \frac{2}{3}ml^2 \ , \ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}mgl}{\frac{2}{3}ml^2} \ , \ \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{8}\frac{g}{l} \ , \ \alpha = \frac{3\sqrt{6}}{8}\frac{9{,}81}{0{,}2}$$

$\underline{\alpha = 45{,}06\,rad/s^2}$, $\quad \tau_{(1)\to(2)} + T_1 = T_2$, $\quad T_1 = 0$ (ilk hızlar sıfır olduğundan)

$$\tau_{(1)\to(2)} = mg\overleftrightarrow{AG}\sin\theta \ , \ \tau_{(1)\to(2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}mgl \ , \ T_2 = \frac{1}{2}I_A\omega^2 \ , \ T_2 = \frac{1}{2}\frac{2}{3}ml^2\omega^2$$

$$T_2 = \frac{2}{6}ml^2\omega^2 \ , \ \frac{\sqrt{2}}{4}mgl = \frac{2}{6}ml^2\omega^2 \ \Rightarrow \ \omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}\,g}{4l}} \ , \ \omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}\ 9{,}81}{4*0{,}2}} \ ,$$

$\underline{\omega = 7{,}213\,rad/s}$, $\quad \vec{V}_G = 7{,}213\vec{k} \wedge (\frac{\sqrt{6}}{4}l\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}l\,\vec{j})$, $\quad \vec{V}_G = -0{,}51\vec{i} + 0{,}883\vec{j}$

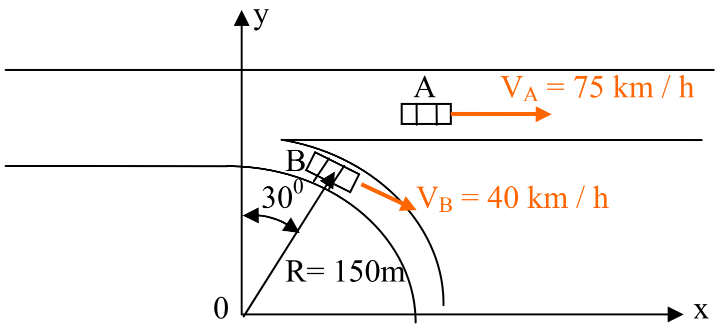
$$\vec{a}_G = 45{,}06\vec{k} \wedge (\frac{\sqrt{6}}{4}0{,}2\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}0{,}2\vec{j}) + 7{,}213\vec{k} \wedge (-0{,}51\vec{i} + 0{,}883\vec{j})$$

$$\vec{a}_G = -9{,}555\vec{i} + 1{,}84\vec{j}$$

$$\sum F_x = m a_{G_x} \ \Rightarrow \ R_{A_x} = 6*(-9{,}555) \ \Rightarrow \ R_{A_x} = -57{,}3\,N.$$

$$\sum F_y = m a_{G_y} \ \Rightarrow \ R_{A_y} + mg = 6*1{,}84 \ \Rightarrow \ R_{A_y} = -47{,}82\,N. \qquad \boxed{R_A = 74{,}6\,N}.$$

Problem 6) A otomobili otobanda doğrusal bir yolda hareket ederken B otomobilide R = 150 m. Yarıçaplı bir çıkışta hareket ediyor. A nın hızı 1 m/s^2 oranında artarken B nin hızı 0.9 m/s^2 oranında azalıyor. Şekilde gösterilen konum için
a) A nın Bye göre hızını $V_{A/B}$, b) A nın B ye göre ivmesini $a_{A/B}$ hesaplayınız.



Çözüm :

a) $\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

$\vec{V}_A = 75\vec{i}$, $\vec{V}_B = 40\cos 30^0\,\vec{i} - 40\sin 30^0\,\vec{j}$, $\vec{V}_B = 20\sqrt{3}\,\vec{i} - 20\,\vec{j}$

$\vec{V}_{A/B} = (75 - 20\sqrt{3})\,\vec{i} + 20\,\vec{j}$, $\boxed{\vec{V}_{A/B} = 40{,}36\vec{i} + 20\,\vec{j}}$, $\boxed{V_{A/B} = 45{,}04\ km/h}$

$$\theta = \arctan\frac{20}{40{,}36} = 26{,}36^0$$

b) $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$

$\vec{a}_A = \vec{i}$

$\vec{a}_B = (a_B)_T\vec{T} + (a_B)_N\vec{N}$, $(a_B)_T = -0{,}9\ m/s^2$, $(a_B)_N = \dfrac{V_B^2}{R}$

$V_B = 40\ km/h = \dfrac{40*1000}{60*60}\ m/s$, $V_B = 11{,}11\ m/s$, $(a_B)_N = \dfrac{(11{,}11)^2}{150}$

$(a_B)_N = 0{,}823\ m/s^2$, $\vec{a}_B = -0{,}9\,\vec{T} + 0{,}823\,\vec{N}$

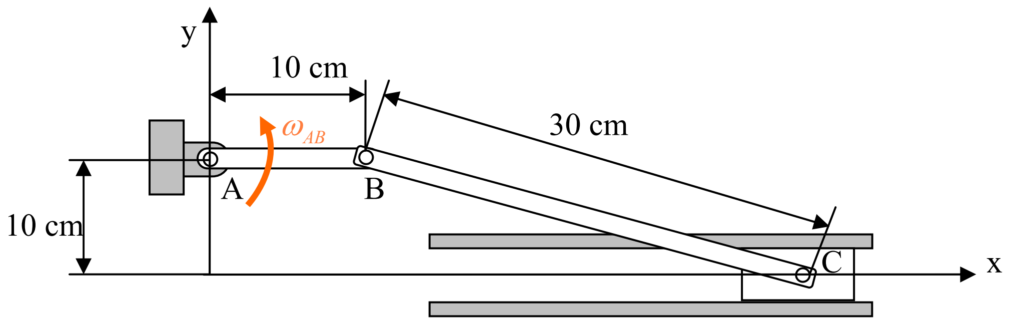
$\vec{a}_B = -0{,}9\,(\cos 30^0\,\vec{i} + \sin 30^0\,\vec{j}) + 0{,}823(-\sin 30^0\,i - \cos 30^0\,\vec{j})$

$\vec{a}_B = -(0{,}45\sqrt{3} + 0{,}4115)\vec{i} + (0{,}45 - 0{,}4115\sqrt{3})\,\vec{j}$

$\vec{a}_B = -1{,}191\vec{i} - 0{,}2627\,\vec{j}$

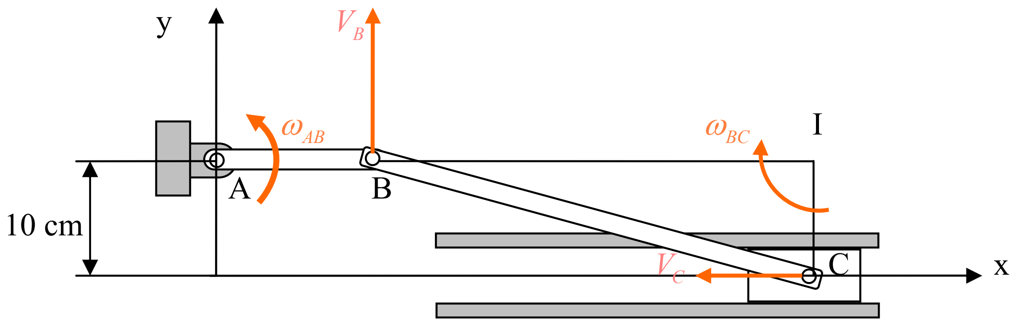
$\boxed{\vec{a}_{A/B} = 2{,}191\vec{i} - 0{,}2627\,\vec{j}}$, $\boxed{a_{A/B} = 2{,}206\ m/s^2}$, $\varphi = \arctan\dfrac{0{,}2627}{2{,}191} = 6{,}84^0$

Problem 7) Şekildeki Krank-Biyel mekanizmasında AB krankı saat ibrelerinin tersi yönünde $\omega_{AB} = 5\ rad/s$ (sabit) açısal hızı ile döndüğüne göre Şekilde gösterilen konum için C pistonunun a) hızını b) ivmesini bulunuz.



Çözüm :

a)



$V_B = \omega_{AB}\,\overleftrightarrow{AB}$, $V_B = 5*10$, $V_B = 50\ cm/s$

$V_B = \omega_{BC}\,\overleftrightarrow{IB} \Rightarrow \omega_{BC} = \dfrac{V_B}{\overleftrightarrow{IB}}$, $\overleftrightarrow{IB} = \sqrt{30^2 - 10^2}$, $\overleftrightarrow{IB} = 10\sqrt{8}\ cm$, $\omega_{BC} = \dfrac{5}{\sqrt{8}}\ rad/s$

$V_C = \omega_{BC}\,\overleftrightarrow{IC}$, $V_C = \dfrac{50}{\sqrt{8}}\ cm/s$, $\boxed{V_C = 17,68\ cm/s}$

b) $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B}$, $\vec{a}_B = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AB} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \vec{V}_B$, ω_{AB} sabit olduğundan $\alpha_{AB} = 0$ dır.

$\vec{V}_B = 50\,\vec{j}$, $\vec{a}_B = 5\vec{k} \wedge 50\,\vec{j}$, $\vec{a}_B = -250\,\vec{i}$, $\vec{a}_{C/B} = \alpha_{BC}\,\vec{k} \wedge \overrightarrow{BC} + \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{V}_{C/B}$

$\vec{\omega}_{BC} = -\dfrac{5}{\sqrt{8}}\vec{k}$, $\vec{V}_{C/B} = \vec{V}_C - \vec{V}_B$, $\vec{V}_C = -17,68\vec{i}$, $\vec{V}_{C/B} = -17,68\vec{i} - 50\,\vec{j}$

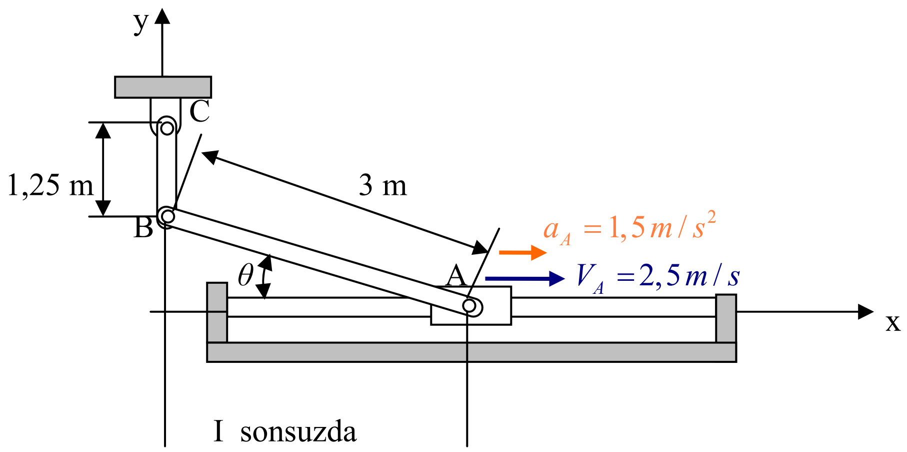
$\overrightarrow{BC} = 10\sqrt{8}\,\vec{i} - 10\,\vec{j}$, $\vec{a}_{C/B} = \alpha_{BC}\,\vec{k} \wedge (10\sqrt{8}\,\vec{i} - 10\,\vec{j}) - \dfrac{5}{\sqrt{8}}\vec{k} \wedge (-17,68\vec{i} - 50\,\vec{j})$

$\vec{a}_{C/B} = (10\alpha_{BC} - \dfrac{250}{\sqrt{8}})\vec{i} + (10\sqrt{8}\,\alpha_{BC} + \dfrac{250}{\sqrt{8}})\,\vec{j}$, $\vec{a}_C = a_C\,\vec{i}$

$\vec{a}_C = a_C\,\vec{i} = (10\alpha_{BC} - \dfrac{250}{\sqrt{8}} - 250)\vec{i} + (10\sqrt{8}\,\alpha_{BC} + \dfrac{250}{\sqrt{8}})\,\vec{j}$

$$\left.\begin{aligned} 10\alpha_{BC} - \frac{250}{\sqrt{8}} - 250 &= a_C \\ 10\sqrt{8}\,\alpha_{BC} + \frac{250}{\sqrt{8}} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_{BC} &= -\frac{25}{8\sqrt{8}} = -1,105\ rad/s^2 \\ a_C &= -349,4\ cm/s^2 \end{aligned}$$

Problem 8) Verilen mekanizmadaki doğrusal hareket yapan A bileziğinin Şekilde gösterildiği anda hızı sağa doğru $V_A = 2.5$ m /s , ivmesi $a_A = 1.5$ m /s^2 olduğuna göre BC krankının
açısal hızını ve açısal ivmesini $\theta = 30^0$ için bulunuz.



Ani dönme merkezi I sonsuzda olduğundan $\omega_{AB} = 0$ ve $V_A = V_B$ dir.

$$V_B = \omega_{BC}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{V_B}{\overleftrightarrow{BC}} \quad , \quad \omega_{BC} = \frac{2,5}{1,25} \quad , \quad \boxed{\omega_{BC} = 2\ rad/s}$$

$$\vec{a}_A = 1,5\vec{i} = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

$$\vec{a}_B = \alpha_{BC}\vec{k} \wedge \overrightarrow{CB} + \omega_{BC}\vec{k} \wedge \vec{V}_B \quad , \quad \vec{a}_{A/B} = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge \overrightarrow{BA} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \vec{V}_{A/B}$$

$$\overrightarrow{CB} = -1,25\,\vec{j} \quad , \quad \vec{V}_B = 2,5\vec{i} \quad , \overrightarrow{BA} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$$

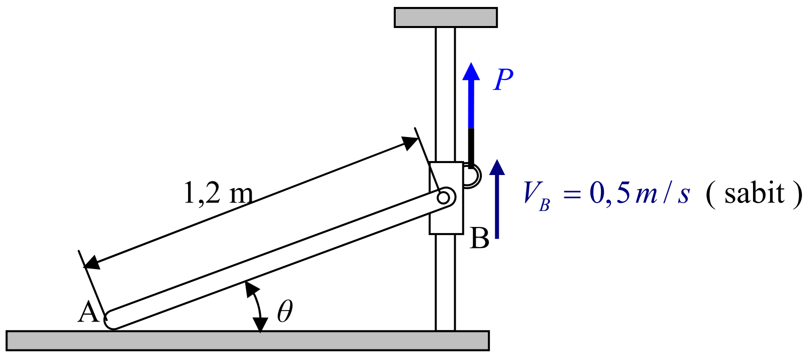
$$\vec{a}_B = \alpha_{BC}\vec{k} \wedge (-1,25)\,\vec{j} + 2\vec{k} \wedge 2,5\vec{i} \quad , \quad \vec{a}_B = 1,25\alpha_{BC}\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_{A/B} = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge (\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}) \quad , \quad \vec{a}_{A/B} = \frac{3}{2}\alpha_{AB}\,\vec{i} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\alpha_{AB}\,\vec{j}$$

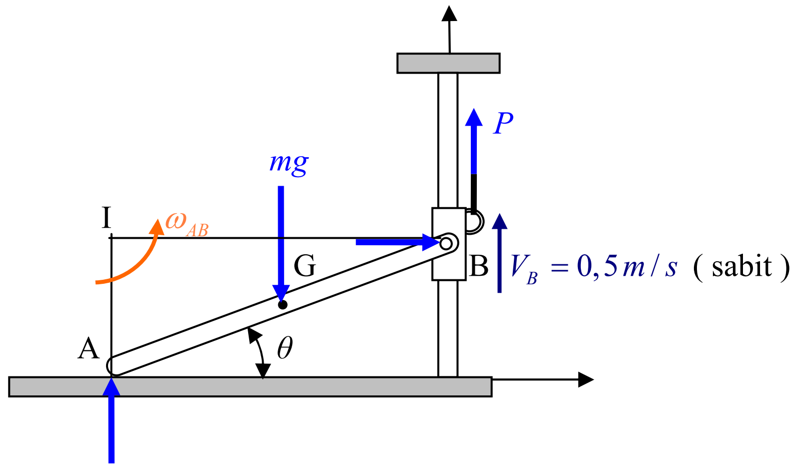
$$\vec{a}_A = 1,5\vec{i} = (1,25\alpha_{BC} + \frac{3}{2}\alpha_{AB})\vec{i} + (\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\alpha_{AB} + 5)\vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} 1,25\alpha_{BC} + \frac{3}{2}\alpha_{AB} &= 1,5 \\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\alpha_{AB} + 5 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\alpha_{AB} = -1,92\ rad/s^2 \\ &\boxed{\alpha_{BC} = 3,51\ rad/s^2} \end{aligned}$$

Problem 9) 6 kg kütleli homojen bir çubuğun A ucu yatay düzlemle temas halinde iken B ucu düşey düzlemde hareket edebilen bir bileziğe mafsallıdır. Ve bu bileziğe bir P kuvveti uygulanarak bileziğe yukarı doğru $V_B = 0,5\,m/s$ (sabit) hız verilmektedir. Sürtünme kuvvetlerini ihmal ederek A mesnedindeki tepki kuvvetini $\theta = 30^0$ için bulunuz.



Çözüm :



$$\sum \vec F = m\vec a_G \quad , \quad \sum M_G = I_G$$

$\vec a_G = \vec a_B + \vec a_{G/B}$, V_B sabit olduğundan $\vec a_B = \vec 0$ dır.

$\vec a_{G/B} = \alpha_{AB}\vec k \wedge \overrightarrow{BG} + \omega_{AB}\vec k \wedge \vec V_{G/B}$, $\overrightarrow{BG} = -0,3\sqrt{3}\,\vec i - 0,3\,\vec j$, $\vec V_{G/B} = \omega_{AB}\vec k \wedge \overrightarrow{BG}$

$\vec a_A = \vec a_B + \vec a_{A/B}$, $\vec a_A = a_A\,\vec i$, $\vec a_B = \vec 0$, $\vec a_{A/B} = \alpha_{AB}\vec k \wedge \overrightarrow{BA} + \omega_{AB}\vec k \wedge \vec V_{A/B}$

$\overrightarrow{BA} = -0,6\sqrt{3}\,\vec i - 0,6\,\vec j$, $\vec V_{A/B} = \vec V_A - \vec V_B$, $\vec V_B = 0,5\,\vec j$, $\vec V_A = \overline{IA} * \omega_{AB}\,\vec i$

$$V_B = \overline{IB} * \omega_{AB} \;\Rightarrow\; \omega_{AB} = \frac{V_B}{\overline{IB}} = \frac{0,5}{0,6\sqrt{3}} \;,\; \omega_{AB} = \frac{5}{6\sqrt{3}} \;,\; \vec V_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\vec i$$

$$\vec V_{A/B} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\vec i - 0,5\,\vec j \;,\; \vec V_{G/B} = \frac{5}{6\sqrt{3}}\vec k \wedge (-0,3\sqrt{3}\,\vec i - 0,3\,\vec j) \;,\; \vec V_{G/B} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\,\vec i - \frac{1}{4}\,\vec j$$

$$a_A\,\vec i = \alpha_{AB}\vec k \wedge (-0,6\sqrt{3}\,\vec i - 0,6\,\vec j) + \frac{5}{6\sqrt{3}}\vec k \wedge \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\vec i - 0,5\,\vec j\right)$$

$$a_A\,\vec i = \left(0,6\,\alpha_{AB} + \frac{5}{12\sqrt{3}}\right)\vec i + \left(-0,6\sqrt{3}\,\alpha_{AB} + \frac{5}{12 * 3}\right)\vec j \;\Rightarrow\; \begin{aligned} \alpha_{AB} &= 0,13365\ rad/s^2 \\ a_A &= 0,32075\ m/s^2 \end{aligned}$$

$$\vec a_G = 0,13365\vec k \wedge (-0,3\sqrt{3}\,\vec i - 0,3\,\vec j) + \frac{5}{6\sqrt{3}}\vec k \wedge \left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\,\vec i - \frac{1}{4}\,\vec j\right)$$

$$\vec{a}_G = 0{,}160375\,\vec{i} - 3{,}22 * 10^{-11}\,\vec{j} \quad , \quad \vec{a}_G = 0{,}160375\,\vec{i}$$

$$\sum F_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad N = 6 * 0{,}160375 \quad , \quad N = 0{,}96 \ \textit{Newton}$$

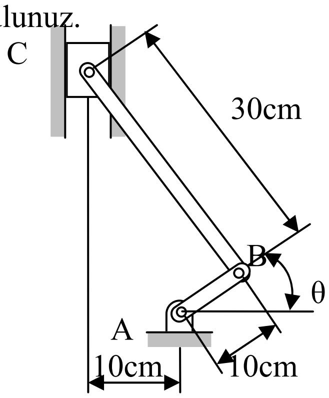
$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad P + R_A - mg = 0 \quad , \quad P + R_A = 6 * 9{,}81 \quad , \quad P + R_A = 58{,}86 \ \textit{Newton}$$

$$\sum M_G = I_G \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}6\sqrt{3}}{2} P - \frac{0{,}6}{2} * N - \frac{0{,}6\sqrt{3}}{2} R_A = \frac{1}{12} m * L^2 * \alpha_{AB}$$

$$\frac{0{,}6\sqrt{3}}{2} P - 0{,}96 * \frac{0{,}6}{2} - R_A \frac{0{,}6\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{12} 6 * 1{,}2^2 * 0{,}13365$$

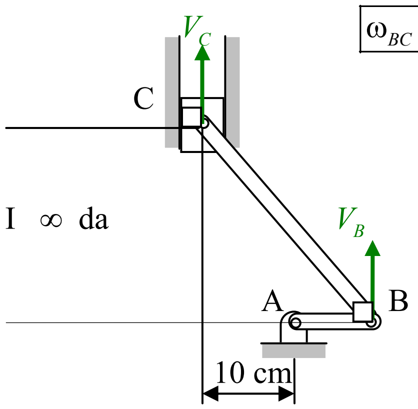
$$\left.\begin{aligned} P - R_A &= 0{,}384225 * \frac{2}{0{,}6\sqrt{3}} \\ P + R_A &= 58{,}86 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_A = 29{,}06 \ \textit{Newton}}$$

Problem 10) Şekildeki krank biyel mekanizmasında AB krank kolu saat ibreleri tersi yönünde 360 dev/dak ile dönmektedir. $\theta = 0^0$, b) $\theta = 90^0$, c) $\theta = 180^0$ değerlerinde BC kolunun açısal hızı ile pistonun hızını bulunuz.



Çözüm:

a) $\theta = 0$



$\boxed{\omega_{BC} = 0}$ (ani dönme merkezi sonsuzda olduğundan.)

$V_B = V_C$ ($\omega_{BC} = 0$ olduğundan)

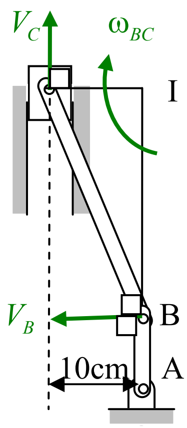
$V_B = \omega_{AB} \overleftrightarrow{AB}$

$\omega_{AB} = 360 \dfrac{2\pi}{60} rad/s$, $\omega_{AB} = 12\pi\, rad/s$

$V_B = 120\pi\, cm/s$, $V_C = 120\pi\, cm/s$

$\boxed{V_C = 377\, cm/s}$

b) $\theta = 90^0$



$V_B = \omega_{AB} \overleftrightarrow{AB}$, $V_B = 120\pi\, cm/s$

$V_B = \omega_{BC} \overleftrightarrow{IB}$, $\omega_{BC} = \dfrac{V_B}{\overleftrightarrow{IB}}$

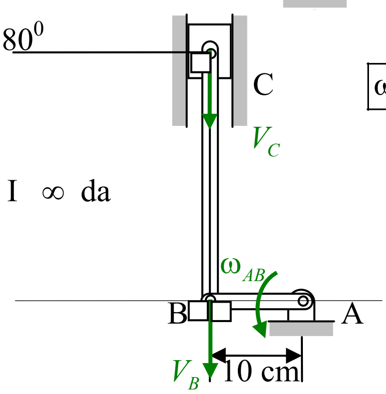
$\overleftrightarrow{IB} = \sqrt{30^2 - 10^2}$, $\overleftrightarrow{IB} = 10\sqrt{8}$

$\omega_{BC} = \dfrac{120\pi}{10\sqrt{8}}$, $\boxed{\omega_{BC} = 13,329\, rad/s}$

$V_C = \omega_{BC} \overleftrightarrow{IC}$, $V_C = 13,329 * 10$

$\boxed{V_C = 133,29\, cm/s}$

c) $\theta = 180^0$



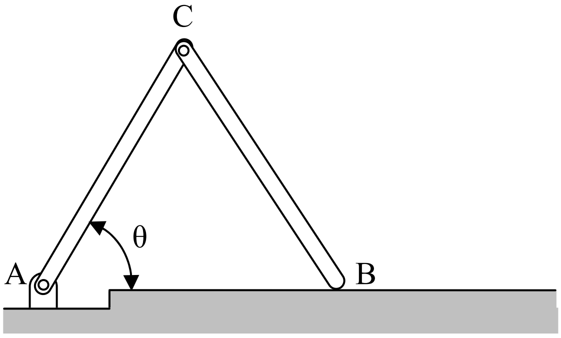
$\boxed{\omega_{BC} = 0}$ (ani dönme merkezi sonsuzda olduğundan.)

$V_B = V_C$ ($\omega_{BC} = 0$ olduğundan)

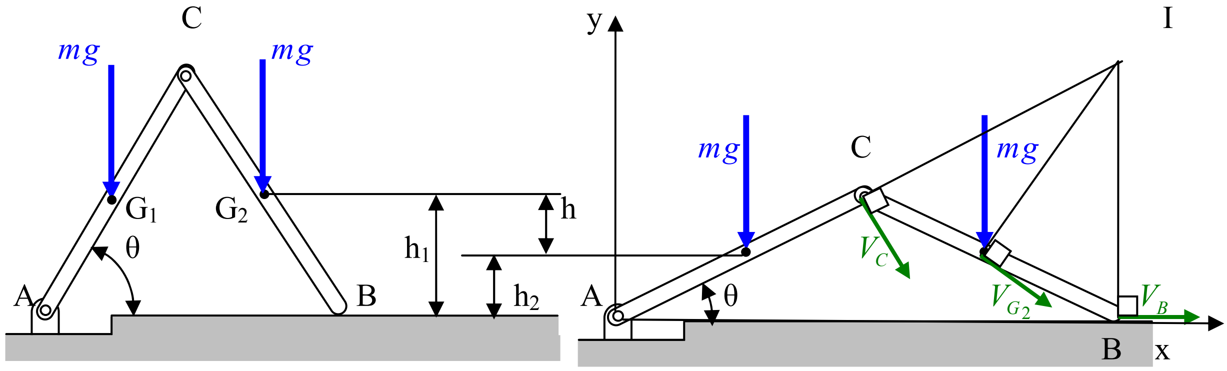
$V_B = \omega_{AB} \overleftrightarrow{AB}$, $V_B = 120\pi\ cm/s$

$\boxed{V_C = 377\, cm/s}$

Problem 11) Kütleleri m = 10 kg ve boyları l = $2m.$ olan iki ince çubuk şekilde görüldüğü gibi birbirine C noktasında mafsalla bağlanmış olup B noktası zemin üzerinde serbestçe kayabilmektedir. Sistem θ = 60^0 de ilk hızsız olarak harekete bırakılıyor. θ = 30^0 de çubukların açısal hızları ile B noktasının hızını bulunuz.



Çözüm:



$$\tau_{(1)\to(2)} + T_1 = T_2 \quad , \quad T_1 = 0 \text{ (ilk hızı sıfır olduğundan)} \quad , \quad \tau_{(1)\to(2)} = 2mgh$$

$$h = h_1 - h_2 \; , \quad h = \frac{l}{2}\sin 60^0 - \frac{l}{2}\sin 30^0 \quad , \quad h = (\sin 60^0 - \sin 30^0) \; , \; h = 0{,}366\, m.$$

$$\tau_{(1)\to(2)} = 2*10*9{,}81*0{,}366 \; , \; \tau_{(1)\to(2)} = 71{,}81\, Nm. \; , \; T_2 = \frac{1}{2}I_A\omega_{AC}^2 + \frac{1}{2}mV_{G_2}^2 + \frac{1}{2}I_{G_2}\omega_{BC}{}^2$$

$$V_{G_2} = \omega_{BC}\overrightarrow{IG_2} \; , \quad V_C = \omega_{AC}\overrightarrow{AC} \quad V_C = \omega_{BC}\overrightarrow{IC} \;\Rightarrow\; \omega_{BC} = \frac{\overleftrightarrow{AC}}{\overleftrightarrow{IC}}\omega_{AC} \; , \; \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AC} \; ,$$

$$\overleftrightarrow{IA} = \frac{\overleftrightarrow{AB}}{\cos\theta} \; , \; \overleftrightarrow{AB} = 2l\cos\theta \; , \; \overleftrightarrow{IA} = 2l \; , \; \overleftrightarrow{IA} = 4m. \; , \overleftrightarrow{IC} = 2m., \; \omega_{BC} = \frac{2}{2}\omega_{AC} \;\Rightarrow\; \omega_{BC} = \omega_{AC}$$

$$\overleftrightarrow{IG_2} = \left|\overrightarrow{IG_2}\right| = \left|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG_2}\right| \; , \; \overrightarrow{IB} = -\overleftrightarrow{IB}\,\vec{j} \; , \; \overleftrightarrow{IB} = \overleftrightarrow{IA}\sin\theta \; , \; \overleftrightarrow{IB} = 4\sin 30^0 \; , \; \overrightarrow{IB} = -2\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{BG_2} = -\frac{l}{2}\cos\theta\,\vec{i} + \frac{l}{2}\sin\theta\,\vec{j} \quad \overrightarrow{BG_2} = -\cos 30^0\,\vec{i} + \sin 30^0\,\vec{j} \; , \; \overrightarrow{BG_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

$$\overleftrightarrow{IG_2} = \left|\overrightarrow{IG_2}\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}\right| \; , \; \overleftrightarrow{IG_2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} \; , \; \overleftrightarrow{IG_2} = \sqrt{3}\, m. \; , \; V_{G_2} = \sqrt{3}\,\omega_{AC}$$

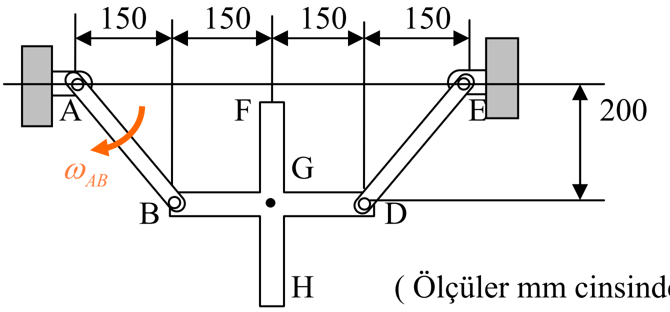
$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega_{AC}^2 + \frac{1}{2}m*3\,\omega_{AC}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega_{AC}^2 \; , \; T_2 = \frac{40}{6}\omega_{AC}^2 + \frac{30}{2}\omega_{AC}^2 + \frac{40}{24}\omega_{AC}^2$$

$$T_2 = \frac{140}{6}\omega_{AC}^2 = 71{,}81 \quad \Rightarrow\; \omega_{AC} = \sqrt{\frac{71{,}81*6}{140}} \; , \; \boxed{\omega_{AC} = \omega_{AB} = 1{,}754\, rad/s} \; , V_B = \omega_{BC}\overleftrightarrow{IB}$$

$$V_B = 1{,}754*2 \; , \quad \boxed{V_B = 3{,}51\, rad/s}$$

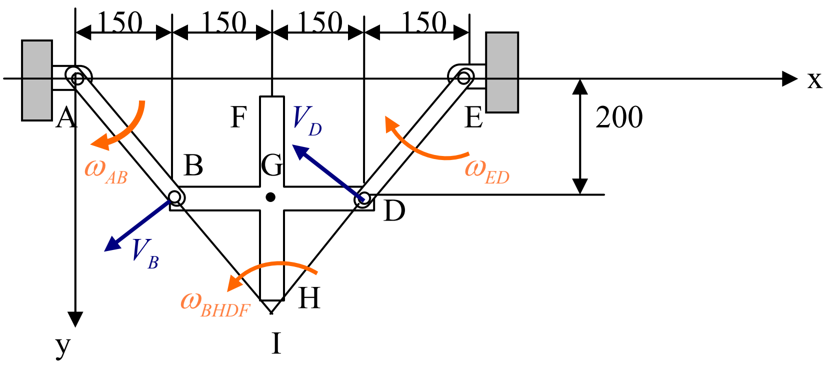
Problem 12) BHDF İstavrozu AB ve DE çubukları ile bağlanmıştır. AB Çubuğu $\omega_{AB} = 4\ rad/s$ sabit açısal hızı ile saat ibreleri yönünde dönüyor. Şekilde gösterildiği anda istavrozun

a) açısal hızını b) açısal ivmesini c) G merkez noktasının ivmesini bulunuz.



(Ölçüler mm cinsindendir.)

Çözüm :



a) $V_B = \overleftrightarrow{AB}\,\omega_{AB}$, $\overleftrightarrow{AB} = \sqrt{150^2 + 200^2}$, $\overleftrightarrow{AB} = 250\ mm$, $V_B = 1000\ mm/s$

$V_B = \overleftrightarrow{IB}\,\omega_{BHDF} \Rightarrow \omega_{BHDF} = \dfrac{V_B}{\overleftrightarrow{IB}}$, $\overleftrightarrow{IB} = \overleftrightarrow{IA} \Rightarrow \boxed{\omega_{BHDF} = \omega_{AB} = 4\ rad/s}$

$V_D = V_B = 1000\ mm/s$, $\omega_{BD} = 4\ rad/s$

b) $\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{a}_{G/B}$, $\vec{a}_G = \vec{a}_D + \vec{a}_{G/D}$

$\vec{a}_B = \alpha_{AB}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AB} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \vec{V}_B$, $\vec{V}_B = \omega_{AB}\vec{k} \wedge \overrightarrow{AB}$, ω_{AB} sabit olduğundan $\alpha_{AB} = 0$ dır.

$\overrightarrow{AB} = 150\vec{i} + 200\vec{j}$, $\vec{V}_B = 4\vec{k} \wedge (150\vec{i} + 200\vec{j})$, $\vec{V}_B = -800\vec{i} + 600\vec{j}$

$\vec{a}_B = 4\vec{k} \wedge (-800\vec{i} + 600\vec{j})$, $\vec{a}_B = -2400\vec{i} - 3200\vec{j}$

$\vec{a}_{G/B} = \alpha_{BHDF}\vec{k} \wedge \overrightarrow{BG} - 4\vec{k} \wedge \vec{V}_{G/B}$, $\vec{V}_{G/B} = -4\vec{k} \wedge 150\vec{i}$, $\vec{V}_{G/B} = -600\vec{j}$

$\vec{a}_{G/B} = \alpha_{BHDF}\vec{k} \wedge 150\vec{i} - 4\vec{k} \wedge -600\vec{j}$, $\vec{a}_{G/B} = -2400\vec{i} + 150\alpha_{BHDF}\,\vec{j}$

$\vec{a}_D = \alpha_{ED}\vec{k} \wedge \overrightarrow{ED} + 4\vec{k} \wedge \vec{V}_D$, $\vec{V}_D = 4\vec{k} \wedge (-150\vec{i} + 200\vec{j})$, $\vec{V}_D = -800\vec{i} - 600\vec{j}$

$\vec{a}_D = \alpha_{ED}\vec{k} \wedge (-150\vec{i} + 200\vec{j}) + 4\vec{k} \wedge (-800\vec{i} - 600\vec{j})$

$\vec{a}_D = (-200\alpha_{ED} + 2400)\vec{i} + (-150\alpha_{ED} - 3200)\vec{j}$

$\vec{a}_{G/D} = \alpha_{BHDF}\vec{k} \wedge \overrightarrow{DG} - 4\vec{k} \wedge \vec{V}_{G/D}$, $\vec{V}_{G/D} = -4\vec{k} \wedge \overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{DG} = -150\vec{i}$

$\vec{V}_{G/D} = -4\vec{k} \wedge -150\vec{i}$, $\vec{V}_{G/D} = 600\vec{j}$

$$\vec{a}_{G/D} = \alpha_{BHDF}\vec{k} \wedge (-150)\vec{i} - 4\vec{k} \wedge 600\,\vec{j} \quad , \quad \vec{a}_{G/D} = 2400\,\vec{i} - 150\alpha_{BHDF}\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_G = (-2400\,\vec{i} - 3200\,\vec{j}) + (-2400\,\vec{i} + 150\,\alpha_{BHDF}\,\vec{j}) =$$

$$[(-200\,\alpha_{ED} + 2400)\,\vec{i} + (-150\,\alpha_{ED} - 3200)\,\vec{j}] + (2400\,\vec{i} - 150\alpha_{BHDF}\,\vec{j})$$

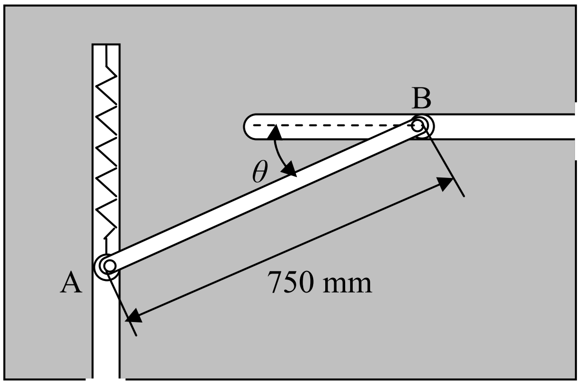
$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_G = -4800\,\vec{i} + (150\,\alpha_{BHDF} - 3200)\,\vec{j} = \\ (4800 - 200\,\alpha_{ED})\,\vec{i} + (-150\,\alpha_{ED} - 3200 - 150\alpha_{BHDF}\,\vec{j}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 4800 - 200\,\alpha_{ED} = -4800 \\ -150\,\alpha_{ED} - 3200 - 150\alpha_{BHDF} = 150\,\alpha_{BHDF} - 3200 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{ED} = 48\ rad/s^2 \\ \boxed{\alpha_{BHDF} = 24\ rad/s^2} \end{array}$$

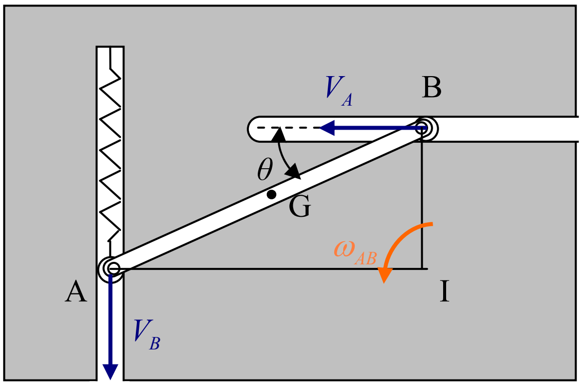
c) $\vec{a}_G = -4800\,\vec{i} + (150\,\alpha_{BHDF} - 3200)\,\vec{j}$

$$\vec{a}_G = -4800\,\vec{i} + 400\,\vec{j} \quad , \quad a_G = 4816{,}6\ mm/s^2 \quad , \quad \boxed{a_G = 4{,}8\ m/s^2}$$

Problem 13) 12 kg kütleli AB çubuğunun uçları şekildeki kanallar doğrultusunda hareket etmektedir. Düşey kanalda hareket eden A ucuna katsayısı k = 120 N/m olan bir yay bağlıdır. Bu yay $\theta = 0$ da doğal uzunluğundadır. Eğer çubuk $\theta = 0$ da ilk hızsız harekete bırakılırsa $\theta = 30^0$ de A ucunun hızını bulunuz.



Çözüm:



$$\tau_{1\to2} + T_1 = T_2$$

$$\tau_{1\to2} = m\,g\frac{0,75}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}k\left(\Delta y\right)^2 \quad , \quad \Delta y = 750\sin\theta$$

$$T_1 = 0 \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}I_G\,\omega^2 \quad , \quad I_G = \frac{1}{12}m*0,75^2$$

$$V_G = \omega\overleftrightarrow{IG} \quad , \quad \overleftrightarrow{IG} = \frac{0,75}{2} \quad , \quad V_G = 0,375\,\omega\; m/s$$

$$T_2 = \frac{1}{2}12\frac{0,75^2}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}12*0,75^2\,\omega^2 \quad , \quad T_2 = 2*0,75^2\,\omega^2$$

$$\tau_{1\to2} = 12\,g\frac{0,75}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}120\left(0,75\frac{1}{2}\right)^2 \quad , \quad \tau_{1\to2} = 3\,g*0,75 - 15*0,75^2$$

$$\tau_{1\to2} = 13,635\;kgm \quad , \quad \tau_{1\to2} = 13,635 = 2*0,75^2\,\omega^2 \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{12,12} \quad , \quad \omega = 3,481\;rad/s$$

$$V_A = \overleftrightarrow{IA}\,\omega \quad , \quad \overleftrightarrow{IA} = 0,75*\cos\theta \quad , \quad \overleftrightarrow{IA} = 0,75*\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad V_A = 0,75*\frac{\sqrt{3}}{2}*\sqrt{12,12}$$

$$\boxed{V_A = 2,26\;m/s}$$