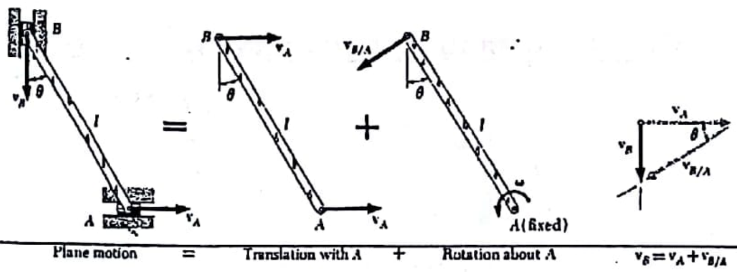
Örnek: 1. Durum

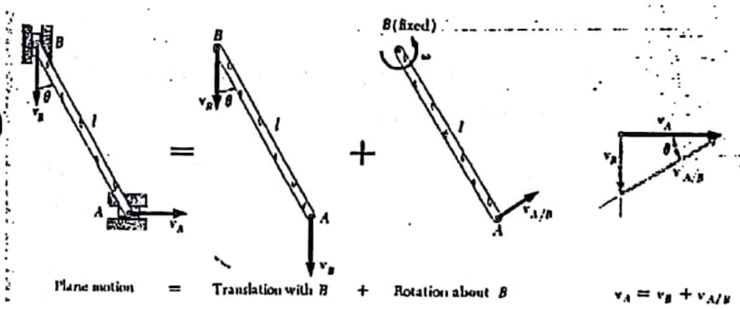
$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{B/A}} \quad (1) \;;$$



Düzlemsel hareket = A nın ötelenmesi + A etrafında dönme

Örnek: 2. Durum

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{A/B} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times \left(-\vec{r}_{B/A}\right)\\ \vec{v}_A &= \vec{v}_B - \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{B/A} \rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{B/A}\end{aligned}} \quad (2)$$



(1) ve (2) nin karşılaştırmasından

$$\left.\boxed{\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_{B/A}\\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{B/A}\end{aligned}}\right\} \boxed{\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A}$$

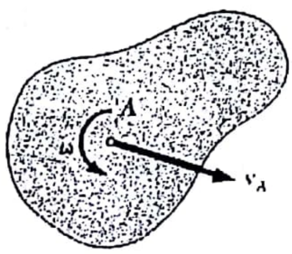
Düzlemsel hareket = B nin ötelenmesi + B etrafında dönme

Bu sonuç geneldir, bu sebeple *bir rijit cismin düzlemsel hareketindeki açısal hızın <u>karşılaştırma noktasından bağımsız</u>* olduğu görülür.

Düzlemsel harekette ani dönme merkezi :

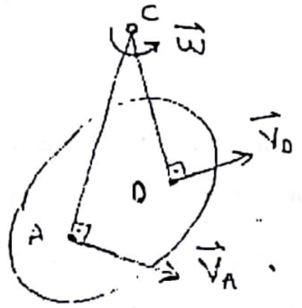
Bir levhanın genel hareketini göz önüne alalım. Verilen herhangi bir anda levhanın çeşitli noktalarının hızlarının, levhanın *ani dönme ekseni* adı verilen ve levha düzlemine dik olan bir eksen etrafında dönmesi ile aynı olduğu görülecektir. Bu eksen levha düzlemini, levhanın *ani dönme merkezi* adı verilen bir noktada keser.

Levhanın düzlemsel bir hareketi herhangi bir *A* karşılaştırma noktasının ötelenmesi ve *A* etrafında bir dönme şeklinde ikiye ayrılabilmekteydi. Hızlar söz konusu olduğu sürece, *A* noktasının ötelenme hızı $\vec{v}_A$, levhanın açısal hızı $\vec{\omega}$ verildiğinde, levhanın tüm diğer noktalarının hızları bunlara bağlı olarak belirlidir



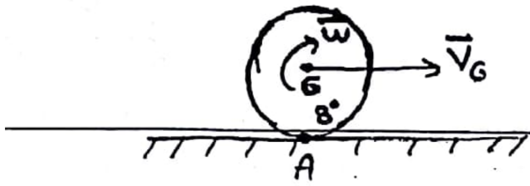
$\boxed{\vec{v}_A = \vec{0}}$ ise *A* noktasının kendisi ani dönme merkezidir.

$\boxed{\vec{\omega} = 0}$ ise levha ötelenme yapmaktadır.



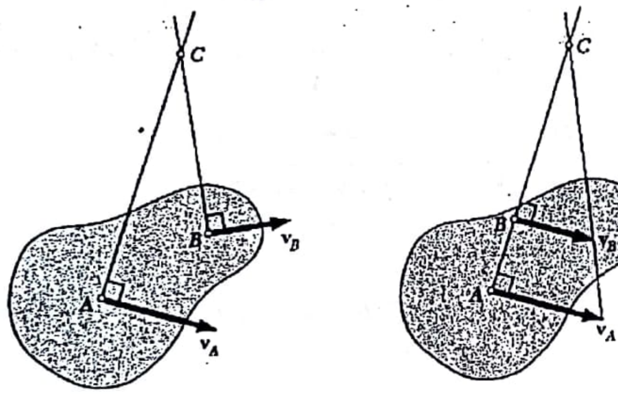
$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{v}_A \neq 0;\; \vec{\omega} \neq 0\\ &\vec{v}_C = 0 = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{C/A}\\ &r_{C/A} = \frac{v_A}{\omega}\\ &\vec{v}_D = \cancel{\vec{v}_C} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{D/C} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{D/C}\end{aligned}}$$

Örnek: Kaymadan yuvarlanan bir tekerin hareketi:



Şekilde görülen teker durumunda, yerle göz önüne alınan anda temas halinde olan bir A noktasının o anda yere göre hızı sıfırdır. Bu durumda bir B noktasının hızı $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ olur. Bu durumda A noktası göz önüne alınan anda ani dönme merkezi olup bu an için tekerin tüm noktalarının hızı, teker A etrafında dönüyormuş kabul edilerek hesaplanabilir.

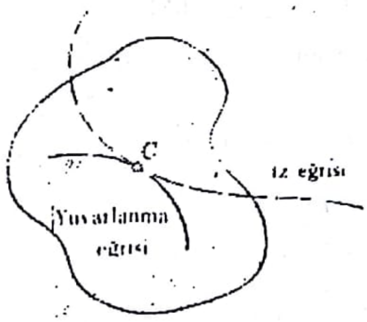
Ani dönme merkezinin yeri başka iki şekilde daha tanımlanabilir. Bunun için levha üzerindeki iki noktanın hızı verilmelidir.



(a) (b)

(a) şeklinde $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızları paralel olursa veya (b) deki $\vec{v}_A$ ve $\vec{v}_B$ hızları aynı şiddette olursa *C* ani dönme merkezi sonsuza gider ve $\vec{\omega}$ sıfır olur; o zaman levha ötelenme yapıyor demektir.

Yuvarlanma ve İz Eğrisi

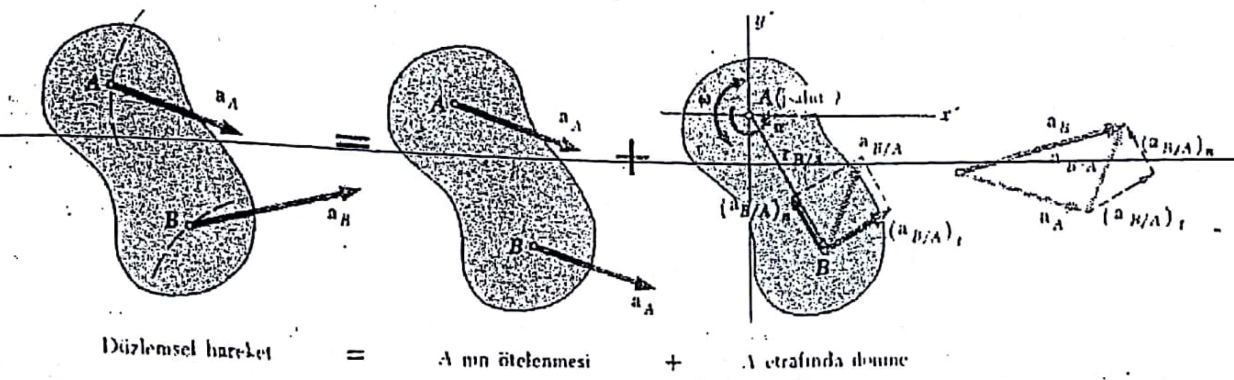


Düzlemsel hareket yapan bir levhanın ani dönme merkezi levhanın üstünde veya dışında bulunabilir. Eğer levhanın üstünde ise, verilen bir *t* anında ani dönme merkeziyle üst üste bulunan *C* noktasının o andaki hızı sıfır olmak zorundadır.

Ani dönme merkezi sadece verilen bir an için geçerlidir. Şu halde bir *t* anında levhenın ani dönme merkezi ile üst üste olan bir *C* noktası, genel olarak, $t+\Delta t$ anında ani dönme merkezi ile üst üste bulunmayacaktır; *t* anında hızı sıfır olduğu halde $t+\Delta t$ anında belki de sıfırdan farklı olacaktır. Bu demektir ki genel olarak *C* noktasının *ivmesi sıfır değildir*, şu halde levhanın çeşitli noktalarının ivmeleri, levha *C* etrafında dönüyormuş gibi belirtilemez.

Levha hareketine devam edince ani dönme merkezi uzayda hareket eder. Öte yandan biraz önce söylendiği gibi ani dönme merkezinin levha üzerindeki yeri de daima değişmektedir. Böylece ani dönme merkezi uzayda *iz eğrisi* adı verilen, levha üzerinde de *yuvarlanma eğrisi* denilen bir eğri çizer (Şekil 5.14). Gösterilebilir ki, herhangi bir anda bu iki eğri *C* de birbirine teğettir ve levha hareket ettikçe yuvarlanma eğrisi iz eğrisinin üzerinde yuvarlanıyormuş gibi görünür.

Düzlemsel harekette salt ve bağıl ivme:



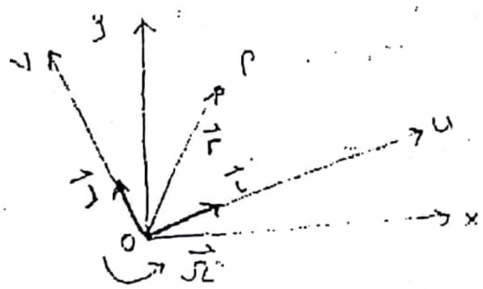
Düzlemsel hareket = A nın ötelenmesi + A etrafında dönme

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}}$$

$$(\vec{a}_{B/A})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} \quad ; \quad (a_{B/A})_t = r\alpha$$
$$(\vec{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \vec{r}_{B/A} \quad ; \quad (a_{B/A})_n = r\omega^2$$
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 \vec{r}_{B/A}$$

Düzlemde Dönen Bir Takıma Göre Bir Vektörün Değişiminin Hızı:

Başlangıç noktaları aynı olan sabit bir *OXY* takımı ile, dönen bir *Ouv* karşılaştırma takımı göz önüne alınsın. *P* uzayda bir maddesel nokta olsun. *P* nin $\vec{r}$ yer vektörü her iki takımda aynı olduğu halde, bunun değişim hızı seçilen karşılaştırma takımına bağlıdır. Maddesel noktanın $\vec{v}_P$ salt hızı $\vec{r}$ nin sabit Oxyz takımına göre $d\vec{r}/dt$ değişim hızı olarak tanımlanır. Bununla beraber $\vec{v}_P$ hızı hareketli takımdan gözlenen $\delta\vec{r}/\delta t$ değişim hızı cinsinden de belirlenebilir. Ouv hareketli takımının göz önüne alınan zamanda açısal hızı $\vec{\Omega}$ ile gösterilirse,



$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} \qquad (1)$$

$$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} \qquad (2)$$

(2), olarak P nin dönen takıma göre değişim hızı tanımlanırsa

$$\vec{v}_P = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} \qquad (3)$$

$$\boxed{\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j}}$$

Eğer P noktası Ouv takımına göre sabit olsaydı $\delta\vec{r}/\delta t = 0$ olacağından $d\vec{r}/dt$ değişim hızı (3) ifadesindeki son iki terime eşit olacaktı. Fakat bu durumda, $d\vec{P}/dt$ değişimi, Ouv ye rijit olarak bağlı bir cismin $\vec{r}$ nin ucuna rastlayan maddesel noktasının hızını gösterecekti. Buna göre göz önüne alınan anda Ouv takımının açısal hızı $\vec{\Omega}$ olduğundan, (3) son iki terim noktanın hızını belirler. Bu durumda

$$\boxed{u\frac{d\vec{i}}{dt}+v\frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{r}} \quad (4)$$

$$\boxed{\vec{v}_P=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}+\vec{\Omega}\times\vec{r}} \quad (5)$$

(2) ve (4), (3) de yerine konursa ⟶ $\boxed{\vec{v}_P=\vec{v}_F+\vec{v}_{P/F}}$ **(6)**

$\vec{v}_P$ $=P$ maddesel noktasının salt hızı
$\vec{v}_F$ $=$ hareketli takımın P ile çakışan noktasının hızı
$\vec{v}_{P/F}$ $=P$ nin hareketli takıma göre hızıdır.

Maddesel noktanın $\vec{a}_P$ salt ivmesi $\vec{v}_P$ nin OXY ye göre değişiminin hızı olarak tanımlanır.

$$\boxed{\vec{a}_P=\frac{d\vec{v}_P}{dt}=\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\Omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\right)} \quad (7)$$

(7) deki son terim, (5) ifadesi dikkate alınarak

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}\right)=\vec{\Omega}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}+\frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2}} \quad (8)$$

Yine (7) deki ikinci ifadede görülen dr/dt yerine (5) ifadesindeki eşdeğeri yazılıp (8) de dikkate alınırsa, (7) eşitliği

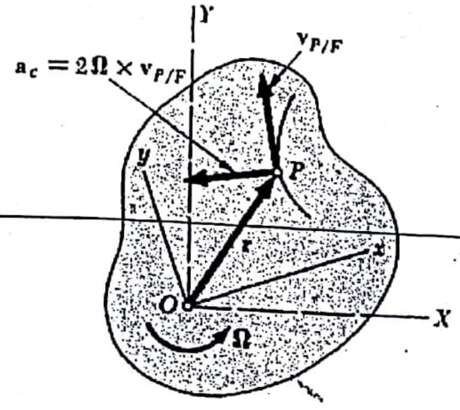
$$\boxed{\vec{a}_P=\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})+2\vec{\Omega}\times\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}+\frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2}} \quad (9)$$

şeklinde elde edilir.

(9) eşitliğin ilk iki teriminin toplamı, göz önüne alınan anda dönen takımın P ye çakışan noktasının $\vec{a}_F$ ivmesini verir. Diğer taraftan sonuncu terim ise P nin dönen takıma göre $\vec{a}_{P/F}$ ivmesini tanımlar. Üçüncü terim $\vec{a}_c$ ile gösterilecek ve bu terime tamamlayıcı ivme veya Fransız matemetikçisi De Coriolis' e izafeten Coriolis ivmesi adı verilecektir. Böylece

$$\boxed{\vec{a}_P=\vec{a}_F+\vec{a}_{P/F}+\vec{a}_c} \quad (10)$$

$\vec{a}_P$ $=P$ maddesel noktasının salt ivmesi
$\vec{a}_F$ $=$ hareketli takımın P ile çakışan noktasının ivmesi
$\vec{a}_{P/F}$ $=P$ nin hareketli takıma göre ivmesi
$\vec{a}_c=2\vec{\Omega}\times\delta\vec{r}/\delta t=2\vec{\Omega}\times\vec{v}_{P/F}$ $=$ tamamlayıcı ivme veya Coriolis ivmesi.

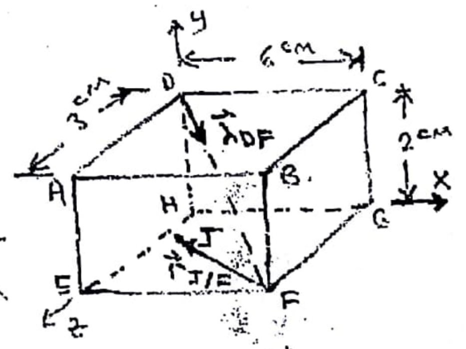


Coriolis ivmesi veya Tamamlayıcı ivme:

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \times \delta\vec{r}/\delta t = 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{P/F}}$$

Şu da belirtilmelidir ki, Coriolis ivmesi $\vec{\Omega}$ *ve* $\vec{v}_{P/F}$ vektörlerine diktir ve eğer bu vektörler paralel veya ikisinden biri sıfır olursa bu ivme de sıfıra eşit olur.

Düzlemsel hareket göz önüne alındığından, $\vec{\Omega}$ vektörü hareket düzlemine ve böylece $\vec{v}_{P/F}$ dik olur. Bu durumda $\vec{a}_c$ nin şiddeti $2\,\Omega v_{P/F}$ ye eşittir ve doğrultusu ise $\vec{v}_{P/F}$ vektörünü hareketli takımın dönme yönünde 90° döndürerek elde edilir. Bu durum aşağıdaki şekilde görülmekte olup burada *P* maddesel noktası, *O* etrafında *Oxy* takımı ile birlikte dönen bir levha üzerinde bir yol çizer.



Problem 1: Şekildeki prizma kutu DF köşegeni etrafında 7 rad/sn lik sabit açısal hızla dönmektedir. Köşegenin F ucundan bakıldığında açısal hızın saat ibrelerinin tersi yönde olduğu görülmektedir. Bu durumda ABFE yüzünün orta noktası olan J nin hızını ve ivmesini bulunuz.

Çözüm: $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\lambda}_{DF}$ $\quad \vec{\lambda}_{DF} = \dfrac{(x_F - x_D)\vec{i} + (y_F - y_D)\vec{j} + (z_F - z_D)\vec{k}}{\sqrt{(x_F - x_D)^2 + (y_F - y_D)^2 + (z_F - z_D)^2}}$

$$\vec{\lambda}_{DF} = \frac{(6-0)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (3-0)\vec{k}}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}}$$

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\lambda}_{DF} = 7 \cdot \left(\frac{6}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}\right) \text{ rad/san}$$

$$\vec{\omega} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \text{ rad/san}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{J/F} = (6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \times (-3\vec{i} + \vec{j}) = 6\vec{k} - 6\vec{k} - 9\vec{j} - 3\vec{i} = -3\vec{i} - 9\vec{j} \text{ cm/sn}$$

$$\vec{a} = \cancel{\vec{\alpha}}^{\,0} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{V} = (6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) \times (-3\vec{i} - 9\vec{j})$$

$$\vec{a} = -54\vec{k} - 6\vec{k} - 9\vec{j} + 27\vec{i} = 27\vec{i} - 9\vec{j} - 60\vec{k} \text{ cm/sn}^2$$

$\vec{\omega}$ da, F ucundan bakıldığında açısal hız saat ibrelerinin tersi yönde olduğundan $\vec{\lambda}_{FD}$ değilde $\vec{\lambda}_{DF}$ alınmıştır.