1.Bölüm

SİNYALLER ve SİSTEMLER

1.1. GİRİŞ

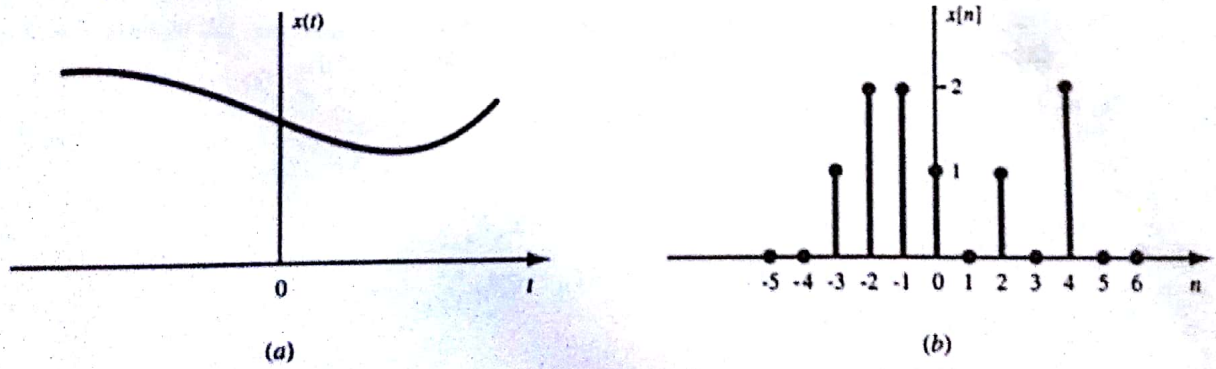
Elektrik mühendisliğinin hemen hemen tüm alanlarında ve diğer bir çok mühendislik ve bilim dallarında sinyallerin ve sistemlerin kuram ve kavramlarına gereksinim duyulur. Bu bölümde, sinyallerin ve sistemlerin matematiksel tanımı, gösterimi ve sınıflandırılması verilmektedir. Ayrıca çalışmalarımız için temel oluşturacak birçok önemli sinyalin de tanımı yapılmaktadır.

1.2. SİNYALLER VE SINIFLANDIRILMALARI

Bir sinyal, fiziksel bir büyüklüğü veya değişkeni temsil eden bir işlev olup, bir olgunun doğasına veya davranışına ilişkin bilgiler içerir. Örneğin bir RC devresinde sinyal, kondansatör uçlarındaki gerilimi veya dirençten akan akımı gösteriyor olabilir. Matematiksel olarak, bir sinyal, bağımsız bir t değişkeninin işlevi olarak gösterilir. Genellikle t zamanı belirtir. Dolayısıyla, bir sinyal $x(t)$ biçiminde yazılır.

A. Sürekli Zamanlı ve Ayrık Zamanlı Sinyaller

t değişkeninin sürekli olması durumunda $x(t)$ sinyalinin sürekli zamanlı bir sinyal olduğu söylenir. t ayrık bir değişkense, yani $x(t)$ ayrık zamanlar için tanımlanmışsa, $x(t)$'nin ayrık zamanlı bir sinyal olduğu söylenir. Ayrık zamanlı bir sinyal, n bir tamsayı olmak üzere, $\{x_n\}$ ya da $x[n]$ biçiminde bir dizi sayı ile gösterilir. Şekil 1.1'de, sürekli zamanlı bir $x(t)$ ve ayrık zamanlı bir $x[n]$ sinyali gösterilmektedir.



Şekil 1.1 (a) Sürekli zamanlı bir sinyal (b) Ayrık zamanlı bir sinyal

Ayrık zamanlı bir $x[n]$ sinyali bağımsız değişkeni doğal olarak ayrık olan bir olguyu gösterebilir. Örneğin, günlük borsa kapanış ortalaması, zamanın farklı anlarında değerler alan (her günün bitiminde) bir sinyaldir. Öte yandan, sürekli zamanlı bir sinyalin örneklenmesiyle

$$x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_n), \ldots$$

biçiminde ya da kısaca

$$x[0], x[1], \ldots, x[n], \ldots$$

veya

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

biçiminde gösterilen ayrık zamanlı bir sinyal elde edilebilir. Bu eşitliklerde

$$x_n = x[n] = x(t_n)$$

olup x_n değerleri "örnek", her bir örnek arasındaki zaman da "örnekleme aralığı" adını alırlar. Örnekleme aralıklarının eşit olması (düzgün örnekleme) durumunda, T_s örnekleme aralığı olmak üzere,

$$x_n = x[n] = x(nT_s)$$

yazılabilir.

Bir $x[n]$ ayrık zamanlı sinyali iki biçimde yazılabilir:

1. Bir dizinin n. değerini hesaplamak için bir kural belirlenebilir. Örneğin,

$$x[n] = x_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

veya

$$\{x_n\} = \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \ldots, \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \ldots\right\}$$

2. Dizinin değerleri açıkça sıralanabilir. Örneğin, Şekil 1-1(b)'de görülen dizi şu biçimde yazılabilir:

$$\{x_n\} = \{\ldots, 0, 0, 1, 2, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0, 2, 0, 0, \ldots\}$$

veya

$$\{x_n\} = \{1, 2, 2, \underset{\uparrow}{1}, 0, 1, 0, 2\}$$

Ok işareti, $n = 0$ terimini belirtmek için kullanılır. Okun bulunmaması, ilk terimin $n = 0$'a karşı düştüğünü ve $n < 0$ için bütün terimlerin sıfır olduğunu gösterir.

İki dizinin toplamı ve çarpımı şu biçimde tanımlanır:

$$\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} \longrightarrow c_n = a_n + b_n$$
$$\{c_n\} = \{a_n\}\{b_n\} \longrightarrow c_n = a_n b_n$$
$$\{c_n\} = \alpha\{a_n\} \longrightarrow c_n = \alpha a_n \qquad \alpha = \text{sabit}$$

B. Analog ve Sayısal Sinyaller:

Eğer bir $x(t)$ sürekli zaman sinyali, (a,b) sürekli aralığında ($a - \infty$ ve $,b + \infty$ olabilir.) herhangi bir değer alabiliyorsa, sinyalin analog olduğu söylenir. Eğer bir $x[n]$ ayrık zamanlı sinyali yalnızca belli bir sayıda ayrık değerler alabiliyorsa, bu sinyalin sayısal bir sinyal olduğu söylenir.

C. Gerçel ve Karmaşık Sinyaller:

Bir $x(t)$ sinyalinin değerleri gerçelse sinyal gerçel, değerleri karmaşıksa sinyal karmaşıktır. Karmaşık $x(t)$ sinyali, aşağıdaki yapıda olur.

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t) \tag{1.1}$$

Burada $j = \sqrt{-1}$ olup, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ gerçel sinyallerdir.

(1.1) eşitliğinde, t, sürekli veya kesikli bir değişkeni gösteriyor olabilir.

D. Gerekirci ve Rasgele Sinyaller:

Gerekirci sinyallerin herhangi bir anda alacağı değerler tamamen belirlenmiştir. Bu nedenle, gerekirci bir sinyal t'nin bilinen bir fonksiyonuyla modellenebilir. Rasgele sinyallerin herhangi bir anda alacağı değerler rasgele olduğundan, bu işaretler istatistiksel olarak karakterize edilir. Bu kitapta rasgele işaretlerle ilgilenilmeyecektir.

E. Çift ve Tek Sinyaller:

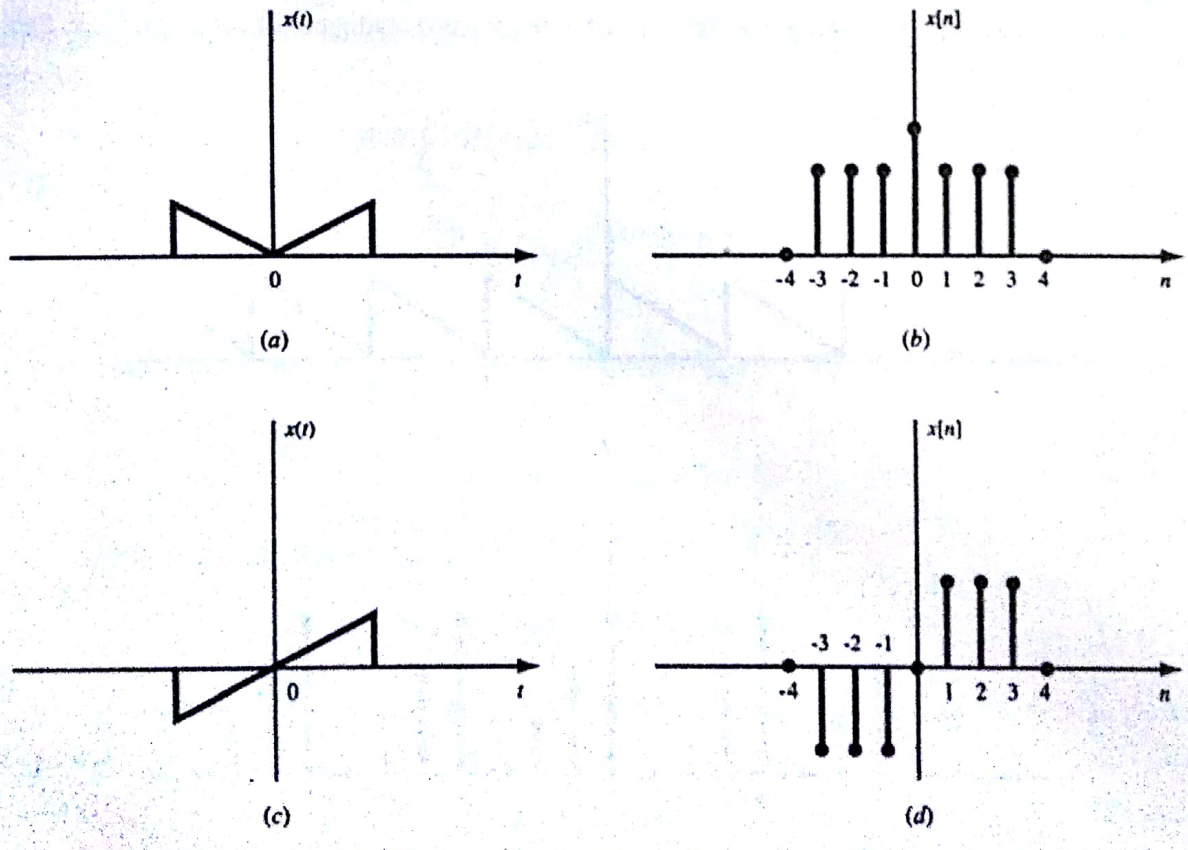
Aşağıdaki koşulları sağlayan $x(t)$ veya $x[n]$ sinyalleri çift sinyallerdir:

$$\begin{aligned} x(-t) &= x(t) \\ x[-n] &= x[n] \end{aligned} \tag{1.2}$$

Aşağıdaki koşulları sağlayan sinyaller ise tek sinyallerdir:

$$\begin{aligned} x(-t) &= -x(t) \\ x[-n] &= -x[n] \end{aligned} \tag{1.3}$$

Şekil 1-2'de tek ve çift sinyal örnekleri verilmektedir.



Şekil 1-2 Çift (a ve b) ve tek (c ve d) sinyallere örnekler

Herhangi bir $x(t)$ veya $x[n]$ sinyali bir çift ve bir tek sinyalin toplamı olarak ifade edilebilir. Yani,

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$
$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \qquad (1.4)$$

Burada:

$$x_e(t) = \tfrac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\} \qquad x(t)\text{'nin çift bölümü}$$
$$x_e[n] = \tfrac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\} \qquad x[n]\text{'nin çift bölümü} \qquad (1.5)$$
$$x_o(t) = \tfrac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\} \qquad x(t)\text{'nin tek bölümü}$$
$$x_o[n] = \tfrac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\} \qquad x[n]\text{'nin tek bölümü} \qquad (1.6)$$

İki tek sinyalin veya iki çift sinyalin çarpımı bir çift sinyaldir. Bir tek işaretle bir çift sinyalin çarpımı ise bir tek sinyaldir (Problem 1.7).

F. Periyodik ve Periyodik Olmayan Sinyaller:

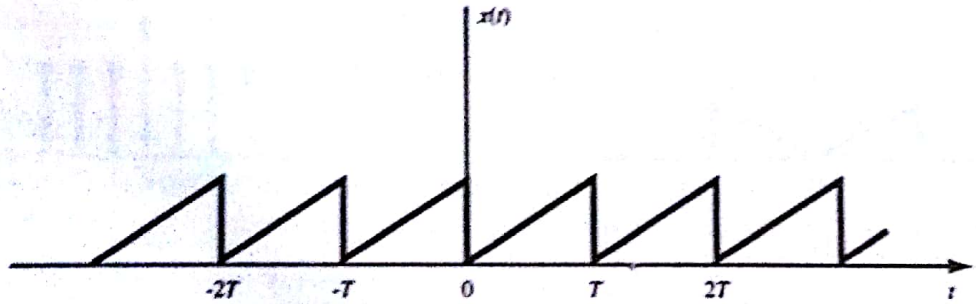
Bir sürekli zamanlı $x(t)$ sinyali, T sıfırdan farklı pozitif bir sayı olmak üzere

$$x(t + T) = x(t), \qquad \text{bütün } t \text{ değerleri için} \qquad (1.7)$$

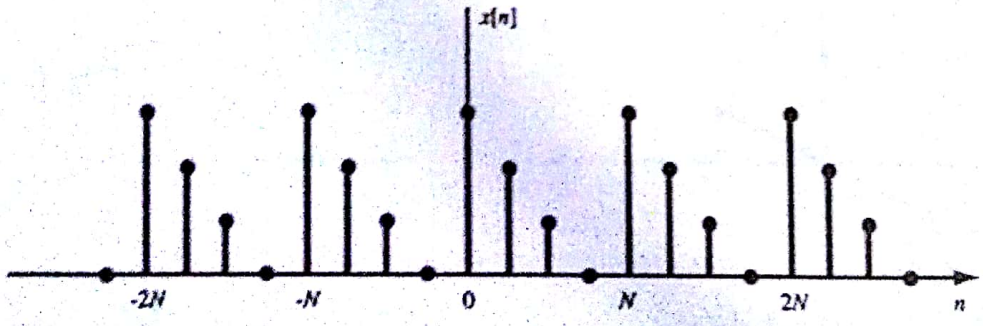
koşulunu sağlıyorsa, bu sinyal periyodiktir ve periyodu T'dir. Şekil 1-3(a)'da periyodik bir sinyal görülmektedir. (1.7) eşitliğinden veya Şekil 1-3(a)'dan, bütün t değerleri ve tamsayı m değerleri için

$$x(t + mT) = x(t) \qquad (1.8)$$

yazılabileceği görülür. $x(t)$'nin temel periyodu T_0, (1.7) eşitliğini sağlayan en küçük pozitif T değeridir. Bu tanımın, sabit bir sinyal (dc sinyal) için geçerli olmadığına dikkat edilmelidir. Sabit bir



(a)



(b)

Şekil 1-3 Periyodik sinyal örnekleri

$x(t)$ sinyali, herhangi bir T için periyodik olduğundan (dolayısıyla, en küçük pozitif değer bulunamadığından), bu sinyaller için temel periyottan söz edilemez. Periyodik olmayan bir sürekli zamanlı sinyalin "aperiyodik" olduğu söylenir.

Periyodik ayrık zamanlı sinyaller de benzer biçimde tanımlanırlar. Bir $x[n]$ dizisi,

$$x[n+N] = x[n] \qquad \text{bütün } n \text{ değerleri için} \tag{1.9}$$

koşuluna sağlayan pozitif bir N tamsayısının varlığı durumunda periyodiktir ve periyodu N'dir Şekil 1-3(b)'de bu türden bir sinyal görülmektedir. (1.9) eşitliğinden ve Şekil 1-3(b)'den, bütün N değerleri ve herhangi bir m tamsayısı için

$$x[n+mN] = x[n] \tag{1.10}$$

elde edilir. $x[n]$'nin temel periyodu olan N_0, (1.9) eşitliğini sağlayan en küçük pozitif N tamsayısıdır. Periyodik olmayan herhangi bir dizi aperiyodik olarak adlandırılır.

Sürekli zamanlı periyodik bir sinyalin düzgün örneklenmesiyle elde edilen bir dizi periyodik olmayabilir. (Problem 1.12 ve 1.13). Ayrıca, sürekli zamanlı iki periyodik sinyalin toplamı da periyodik olmayabilir. Ancak, iki periyodik dizinin toplamı her zaman periyodiktir (Problem 1.12 ve 1.15).

G. Enerji ve Güç Sinyalleri:

$v(t)$, bir R direncinden $i(t)$ akımını akıtan gerilim olsun. Ohm başına ani güç ($p(t)$)

$$p(t) = \frac{v(t)i(t)}{R} = i^2(t) \tag{1.11}$$

biçiminde tanımlanır. Ohm başına düşen toplam enerji (E) ve ortalama güç (P) tanımları ise şu biçimdedir:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t)\,dt \quad \text{Joule} \tag{1.12}$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i^2(t)\,dt \quad \text{Watt} \tag{1.13}$$

Herhangi bir sürekli zamanlı $x(t)$ sinyalinin normalize enerji içeriği (E) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt \tag{1.14}$$

$x(t)$ sinyalinin normalize ortalama gücü (P) ise şu biçimde tanımlanır:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt \tag{1.15}$$

Benzer olarak ayrık zamanlı bir $x[n]$ sinyalinin normalize enerji içeriği ve normalize ortalama gücü de tanımlanabilir:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \tag{1.16}$$

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \qquad (1.17)$$

(1.14)-(1.17) tanımlarına dayanarak, aşağıdaki sinyal sınıfları tanımlanabilir:

1. Yalnızca $0 < E < \infty$ koşulu sağlandığında, $x(t)$ (veya $x[n]$) bir enerji sinyalidir (veya dizisidir) ve dolayısıyla $P = 0$ olur.
2. Yalnızca $0 < P < \infty$ koşulu sağlandığında $x(t)$ (veya $x[n]$) bir güç sinyalidir (veya dizisidir) ve dolayısıyla $E = \infty$ olur.
3. Bu koşulların birini sağlamayan sinyaller enerji sinyali veya güç sinyali olarak adlandırılamazlar.

Periyodik bir sinyalin bir periyot içerisindeki enerjisi sonlu ise bu sinyal bir güç sinyalidir ve bu sinyalin ortalama gücünün yalnızca bir periyot üzerinden hesaplanması yeterlidir (Problem 1.18).

1.3. TEMEL SÜREKLİ ZAMANLI SİNYALLER

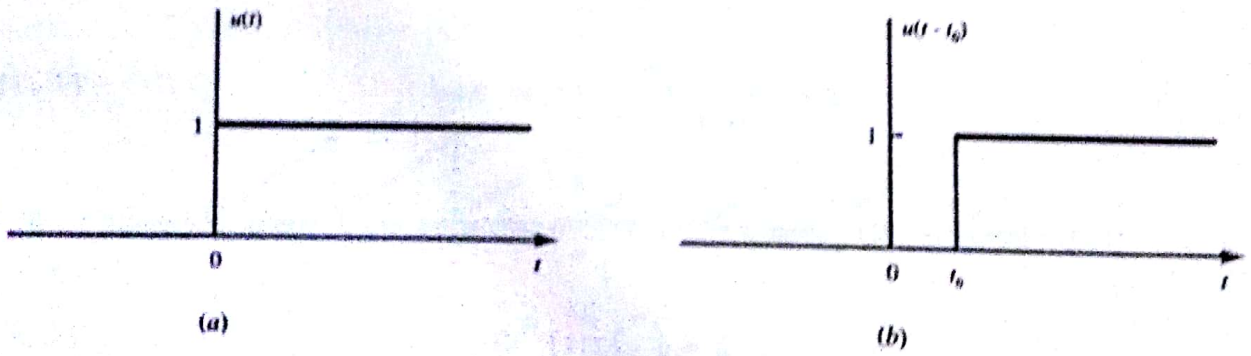
A. Birim Basamak İşlevi:

Heaviside birim işlevi olarak da adlandırılan birim basamak işlevi şu biçimde tanımlanır:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (1.18)$$

Şekil 1-4'de görülen bu işlev $t = 0$'da süreksiz olup, bu noktadaki değeri tanımsızdır. Ötelenmiş $u(t-t_0)$ birim basamak işlevi de benzer olarak tanımlanır (Şekil 1-4b)

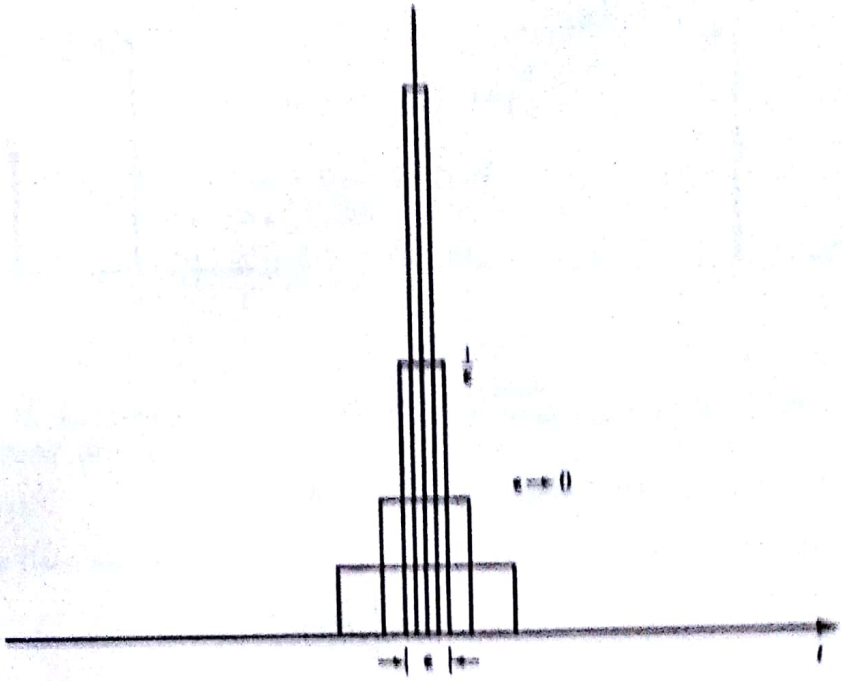
$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \qquad (1.19)$$



Şekil 1-4 (a) Birim basamak işlevi; (b) ötelenmiş birim basamak işlevi

B. Birim Dürtü İşlevi:

Dirac delta işlevi olarak da bilinen $\delta(t)$ *birim dürtü* işlevi, sistem analizinde önemli bir rol üstlenir. Geleneksel olarak, $\delta(t)$, Şekil 1-5'de görüldüğü gibi, sonsuz küçük bir zaman aralığı üzerinde birim alana sahip olacak biçimde seçilen bir işlevin limiti olarak tanımlanır ve şu özelliklere sahiptir:



Şekil 1-5

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1$$

Ancak, tek bir nokta dışında her yerde değeri 0 olan herhangi bir işlevin entegrali (Reimann entegrali) 0 olmalıdır. Dolayısıyla, $\delta(t)$ herhangi bir işlev olamaz. Matematiksel olarak $\delta(t)$ şu biçimde tanımlanır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\, dt = \phi(0) \qquad (1.20)$$

Bu eşitlikte $\phi(t)$, $t = 0$'da sürekli olan herhangi bir işlevdir.

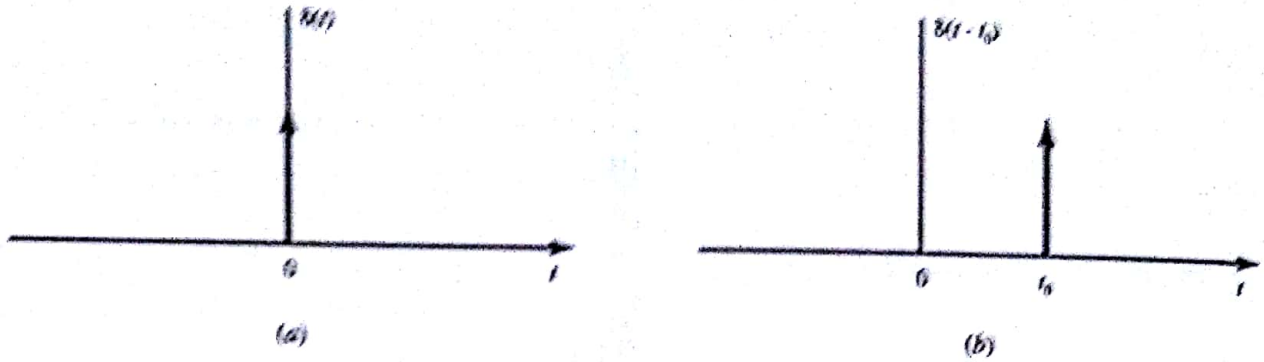
$\delta(t)$ için kullanılan bir başka tanım da şu biçimdedir:

$$\int_{a}^{b} \phi(t)\delta(t)\, dt = \begin{cases} \phi(0) & a < 0 < b \\ 0 & a < b < 0 \quad \text{or} \quad 0 < a < b \\ \text{tanımsız} & a = 0 \quad b = 0 \end{cases} \qquad (1.21)$$

(1.20) ve (1.21) eşitlikleri sembolik ifadeler olup, bunlar sıradan Reimann entegrali olarak düşünülmemelidirler. Bu nedenle, $\delta(t)$ sıklıkla, genelleştirilmiş bir işlev olarak adlandırılır ve $\phi(t)$ de sınama işlevi olarak bilinir. Benzer olarak, ötelenmiş delta işlevi $\delta(t - t_0)$, $\phi(t)$, $t = t_0$'da sürekli olan herhangi bir işlev olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - t_0)\, dt = \phi(t_0) \qquad (1.22)$$

biçiminde tanımlanır. Kolaylık olması açısından $\delta(t)$ ve $\delta(t - t_0)$, Şekil 1-6'daki gibi çizilirler.



Şekil 1-6 (*a*) Birim dürtü işlevi; (*b*) Ötelenmiş birim dürtü işlevi

$\delta(t)$'nin diğer bazı özellikleri aşağıda sıralanmaktadır.

$x(t)$, $t = 0$'da sürekli ise:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1.23}$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{1.24}$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{1.25}$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \tag{1.26}$$

$x(t)$, $t = t_0$'da sürekli ise

Herhangi bir sürekli zamanlı $x(t)$ sinyali, (1.22) ve (1.24) eşitlikleri yardımıyla

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)\, d\tau \tag{1.27}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Genelleştirilmiş Türevler:

$g(t)$ genelleştirilmiş bir işlev ise, bu işlevin n inci genelleştirilmiş türevi $g^{(n)}(t) = d^n g(t)/dt^n$ şu eşitlikle tanımlanır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) g^{(n)}(t)\, dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(t) g(t)\, dt \tag{1.28}$$

Burada $\phi(t)$, herhangi bir mertebeden türevi alınabilen ve belli bir aralığın dışında değeri sıfır olan bir sınama işlevi, ve $\phi^{(n)}(t)$ de $\phi(t)$'nin n inci mertebeden türevidir. Dolayısıyla $\delta(t)$'nin türevi, (1.28) ve (1.20) eşitlikleri yardımıyla şu biçimde tanımlanabilir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t)\, dt = -\phi'(0) \tag{1.29}$$

Burada, $\phi(t)$, $t = 0$'da sürekli olan, belli bir aralığın dışında değeri sıfır olan, ve $\phi'(0) = d\phi(t)/dt\,|_{t=0}$ koşulunu sağlayan bir sınama işlevidir. (1.28) eşitliği kullanılarak, $u(t)$'nin türevinin $\delta(t)$ olduğu gösterilebilir. (Problem 1.28); yani:

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{1.30}$$

Buna göre, birim basamak fonksiyonu $u(t)$ şu biçimde ifade edilebilir:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \qquad (1.31)$$

Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta, birim basamak fonksiyonunun $t = 0$'da süreksiz olduğu ve dolayısıyla, $u(t)$'nin türevini veren (1.30) eşitliğinin sıradan bir türevi göstermediği ve genelleştirilmiş bir fonksiyondaki gibi genel bir türev olduğudur. (1.31) eşitliğinden, $u(t)$'nin $t = 0$'da tanımsız olduğu, ve (1.21) eşitliğinden, $\phi(t) = 1$ için

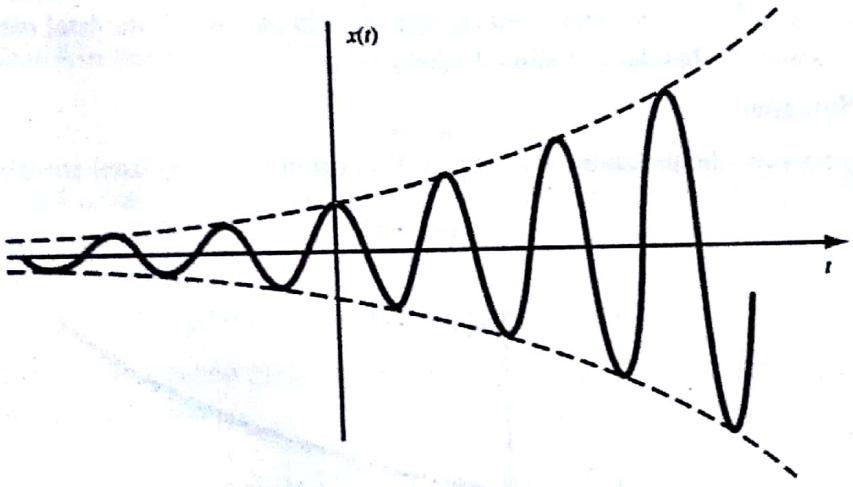
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

olduğu görülmektedir. Bu sonuç, $u(t)$ için verilen (1.18) eşitliği ile uyumludur.

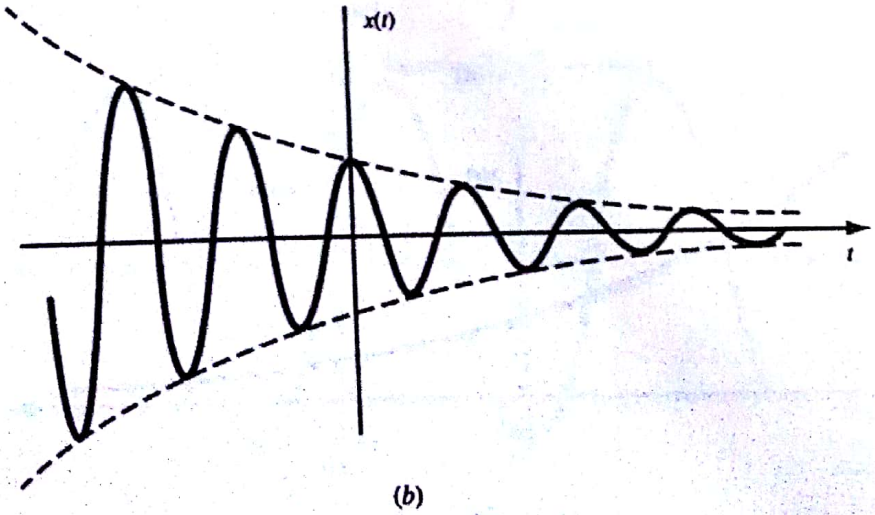
C. Karmaşık Üstel Sinyaller:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \qquad (1.32)$$

biçiminde gösterilen karmaşık üstel sinyal, karmaşık sinyallere iyi bir örnektir.



(a)



(b)

Şekil 1-7 (*a*) Üstel olarak artan sinüzoidal sinyal; (*b*) üstel olarak azalan sinüzoidal sinyal

Bu sinyal, Euler bağıntısı kullanılarak şu biçimde tanımlanabilir:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t \qquad (1.33)$$

Görüldüğü gibi, $x(t)$, gerçel bölümü $\cos\omega_0 t$ ve sanal bölümü $\sin\omega_0 t$ olan karmaşık bir sinyaldir. (1.32) ile tanımlanan karmaşık üstel sinyalin önemli bir özelliği periyodik olmasıdır. $x(t)$'nin temel periyodu T_0,

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad (1.34)$$

eşitliği ile tanımlanır (Problem 1.9). $x(t)$'nin herhangi bir ω_0 değeri için de periyodik olduğuna dikkat ediniz.

Genel Karmaşık Üstel Sinyaller:

$s = \sigma + j\omega$ karmaşık bir sayı olsun ve $x(t)$'yi şu biçimde tanımlayalım:

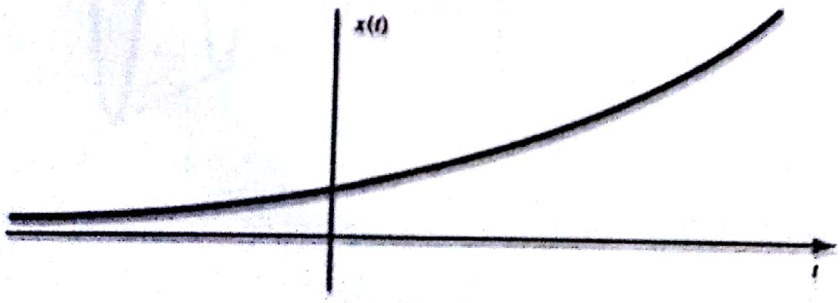
$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t + j\sin\omega t) \qquad (1.35)$$

(1.35) eşitliğindeki $x(t)$ sinyali genel karmaşık üstel sinyal olarak adlandırılır. Bu sinyalin gerçel bölümü olan $e^{\sigma t}\cos\omega t$ ve sanal bölümü olan $e^{\sigma t}\sin\omega t$, $\sigma > 0$ ise üstel olarak artan, $\sigma < 0$ ise üstel olarak azalan sinüzoidal sinyallerdir (Şekil 1-7).

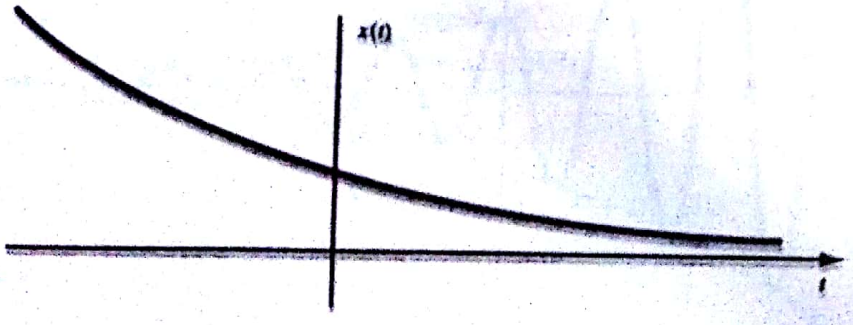
Gerçel Üstel Sinyaller:

σ gerçel bir sayı olmak üzere $s = \sigma$ ise, (1.35) eşitliği bir gerçel üstel sinyale indirgenir.

$$x(t) = e^{\sigma t} \qquad (1.36)$$



(a)



(b)

Şekil 1-8 Sürekli zamanlı gerçel üstel işaretler, (*a*) $\sigma > 0$; (*b*) $\sigma < 0$

Şekil 1-8'de görüldüğü gibi, $\sigma > 0$ ise $x(t)$ gittikçe artan, $\sigma < 0$ ise de gittikçe azalan bir üstel sinyaldir.

D. Sinüzoidal Sinyaller:

Sürekli zamanlı bir sinüzoidal sinyal şu biçimde ifade edilir:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{1.37}$$

Burada, A genliği (gerçel), ω_0 radyan frekansı (radyan/saniye cinsinden) ve θ faz açısını (radyan cinsinden) gösterir. Şekil 1-9'da gösterilen sinüzoidal sinyalin temel periyodu

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1.38}$$

olup, temel periyodun tersi, temel frekans (f_0) adını alır.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \quad \text{hertz (Hz)} \tag{1.39}$$

(1.38) ve (1.39) eşitliklerinden

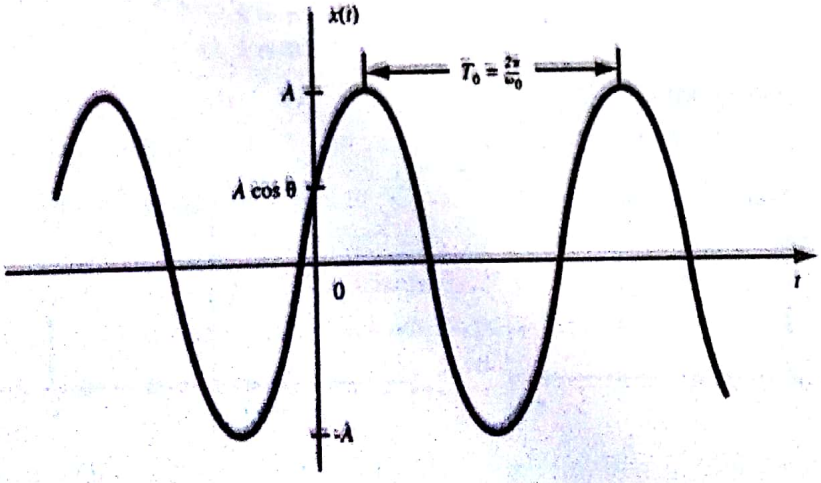
$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{1.40}$$

elde edilir. ω_0, temel açısal frekans adını alır. Euler bağıntısı yardımıyla, (1.37) eşitliği şu biçimde ifade edilebilir:

$$A\cos(\omega_0 t + \theta) = A\,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\} \tag{1.41}$$

Burada, "Re", parantezin içindeki ifadenin gerçel bölümünün alındığını gösterir. Benzer olarak, "Im", sanal bölüm için kullanılır:

$$A\,\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\} = A\sin(\omega_0 t + \theta) \tag{1.42}$$



Şekil 1-9 Sürekli zamanlı sinüzoidal sinyal

1.4. TEMEL AYRIK ZAMANLI SİNYALLER

A. Birim Basamak Dizisi:

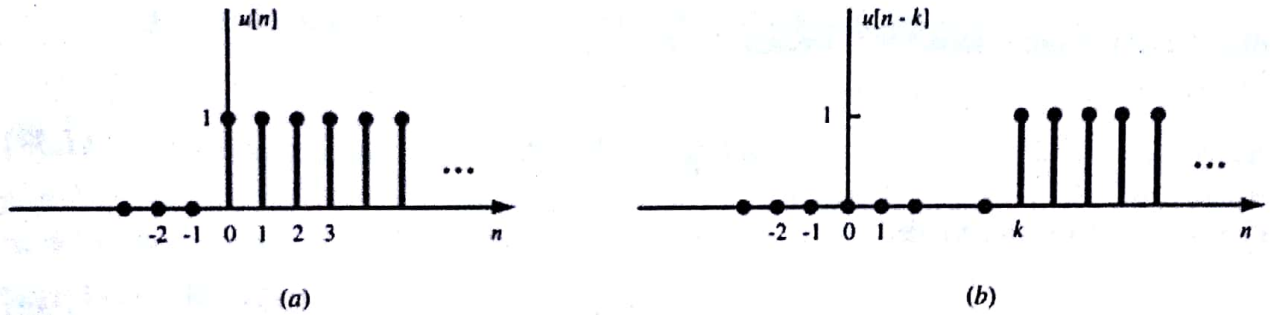
Birim basamak dizisi $u[n]$ şu biçimde tanımlanır:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad (1.43)$$

Bu diğer Şekil 1-10(a)'da görülmektedir. Görüldüğü gibi sürekli zamanlı basamak fonksiyonu $u(t)$'nin $t = 0$'da tanımsız olmasından farklı olarak, $u[n]$, $n = 0$ için tanımlıdır ve birim değerlidir. Benzer olarak, ötelenmiş birim basamak dizisi de

$$u[n-k] = \begin{cases} 1 & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases} \qquad (1.44)$$

biçiminde tanımlanır (Şekil 1-10 (*b*)).



Şekil 1-10 (a) Birim basamak dizisi; (b) ötelenmiş birim basamak dizisi

B. Birim Dürtü Dizisi:

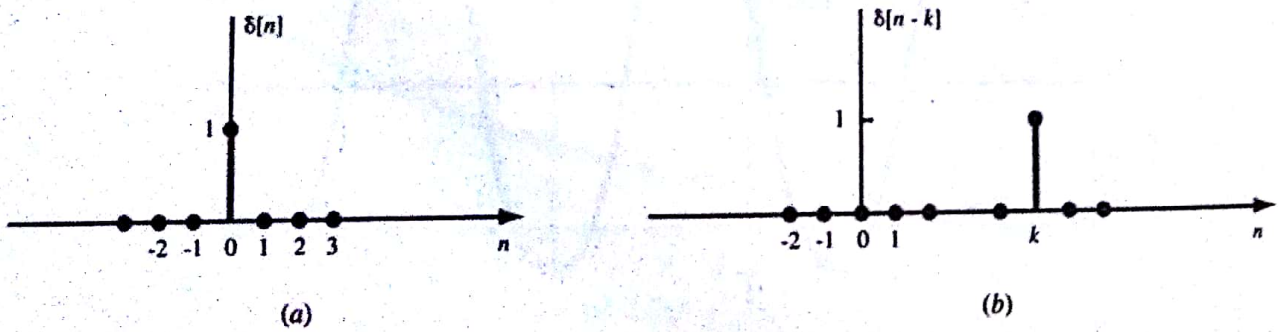
Birim dürtü (ya da birim örnek) dizisi $\delta[n]$ şu biçimde tanımlanır:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \qquad (1.45)$$

Dizi, Şekil 1-11(a)'da görülmektedir. Benzer olarak, ötelenmiş birim dürtü (ya da örnek) dizisi de

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \qquad (1.46)$$

biçiminde tanımlanır (Şekil 1-11 (*b*)).



Şekil 1-11 (a) Birim dürtü (örnek) dizisi; (b) ötelenmiş birim dürtü (örnek) dizisi

$\delta[n]$,sürekli zamanlı birim dürtü fonksiyonu $\delta(t)$'den farklı olarak, matematiksel bir zorluk veya karmaşıklık olmadan tanımlanabilir. (1.45) ve (1.46) tanımlarından, (1.25) ve (1.26) eşitliklerinin ayrık zamanlı karşılıkları kolaylıkla elde edilebilir:

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \tag{1.47}$$

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k] \tag{1.48}$$

(1.43) ve (1.46) arasındaki eşitliklerinden $\delta[n]$ ve $u[n]$ arasındaki ilişki şu biçimde bulunur:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{1.49}$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \tag{1.50}$$

Bu eşitlikler de, (1.30) ve (1.31) eşitliklerinin ayrık zamanlı karşılıklarıdır.

Herhangi bir $x[n]$ dizisi, (1.46) tanımı yardımıyla

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{1.51}$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu tanım da, sürekli zamanlı sinyaller için geçerli (1.27) eşitliğinin karşılığıdır.

C. Karmaşık Üstel Diziler:

Karmaşık üstel diziler şu yapıda ifade edilirler:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \tag{1.52}$$

Yine Euler bağıntısı kullanılarak, $x[n]$ şu biçimde ifade edilebilir:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} = \cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n \tag{1.53}$$

Görüldüğü gibi, $x[n]$, gerçel bölümü $\cos\Omega_0 n$ ve sanal bölümü $\sin\Omega_0 n$ olan karmaşık bir dizidir.

$e^{j\Omega_0 n}$ Dizisinin Periyodikliği:

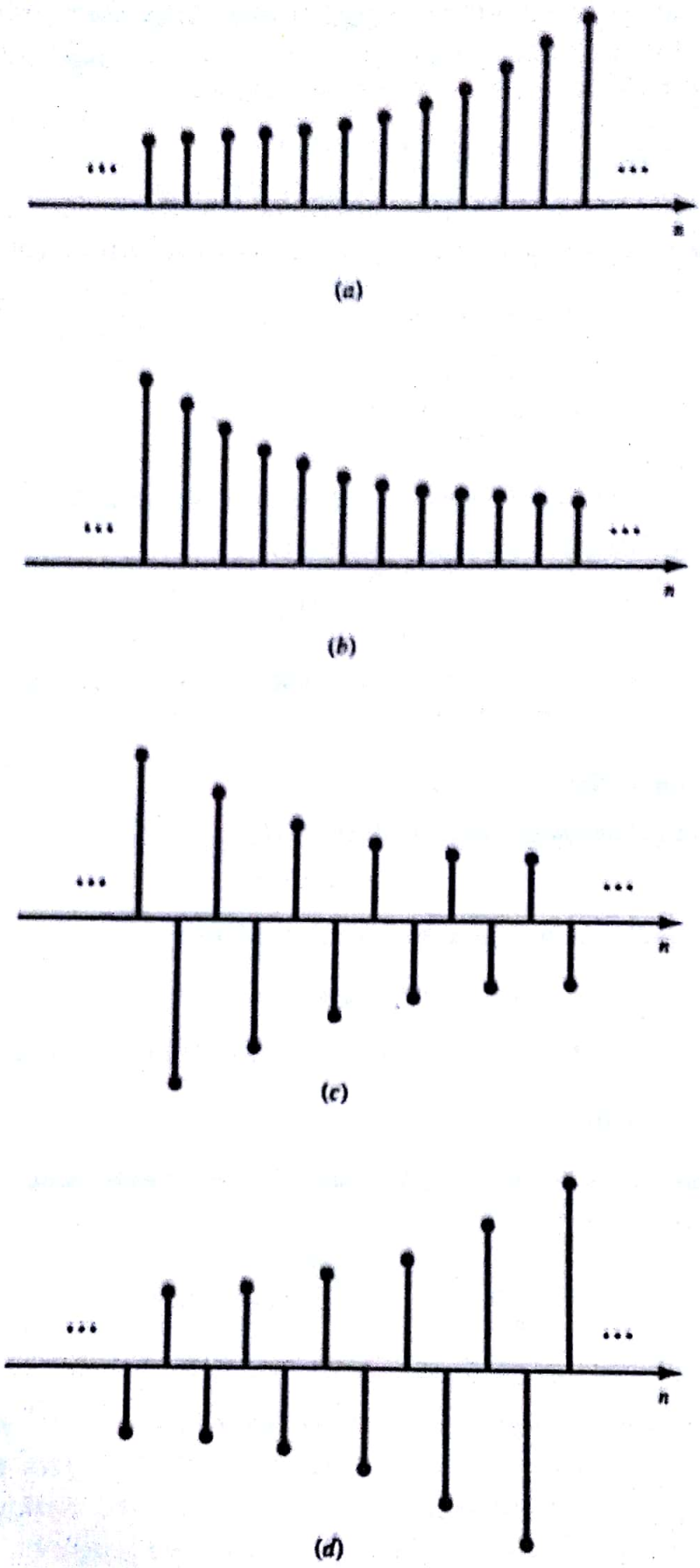
$e^{j\Omega_0 n}$ dizisinin N (>0) periyoduyla periyodik olabilmesi için, Ω_0 aşağıdaki koşulu sağlamalıdır (Problem 1.11):

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \qquad m = \text{pozitif tamsayı} \tag{1.54}$$

Buna göre, $e^{j\Omega_0 n}$ dizisi herhangi bir Ω_0 için periyodik değildir. Yalnızca $\Omega_0/2\pi$ oranının rasyonel bir sayı olması durumunda dizi periyodiktir. Oysa, sürekli zamanlı $e^{j\omega_0 t}$ sinyalinin herhangi bir ω_0 değeri için periyodik olduğu görülmüştü. Ω_0'ın (1.54) ile verilen periyodiklik koşulunu sağlaması durumunda, yani $\Omega_0 \neq 0$ olmak koşuluyla N ve m hiçbir ortak çarpana sahip değilse, (1.52) ile tanımlanan $x[n]$ dizisinin temel periyodu N_0 şu biçimde tanımlanır:

$$N_0 = m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right) \tag{1.55}$$

Ayrık zamanlı ve sürekli zamanlı karmaşık üstel sinyaller arasındaki bir başka önemli farklılık da $e^{j\omega_0 t}$ sinyallerinin, farklı ω_0 değerleri için farklı değerler alması, fakat $e^{j\Omega_0 n}$ sinyallerinde durumun böyle olmamasıdır.



Şekil 1-12 Gerçel üstel diziler. (*a*) $\alpha > 1$; (*b*) $1 > \alpha > 0$; (*c*) $/ > \alpha > -1$; (*d*) $\alpha < -1$

k bir tamsayı olmak üzere ($\Omega_0 + 2\pi k$) frekansına sahip karmaşık üstel bir diziyi göz önüne alalım. $e^{j2\pi kn}=1$ olduğundan

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n}e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n} \qquad (1.56)$$

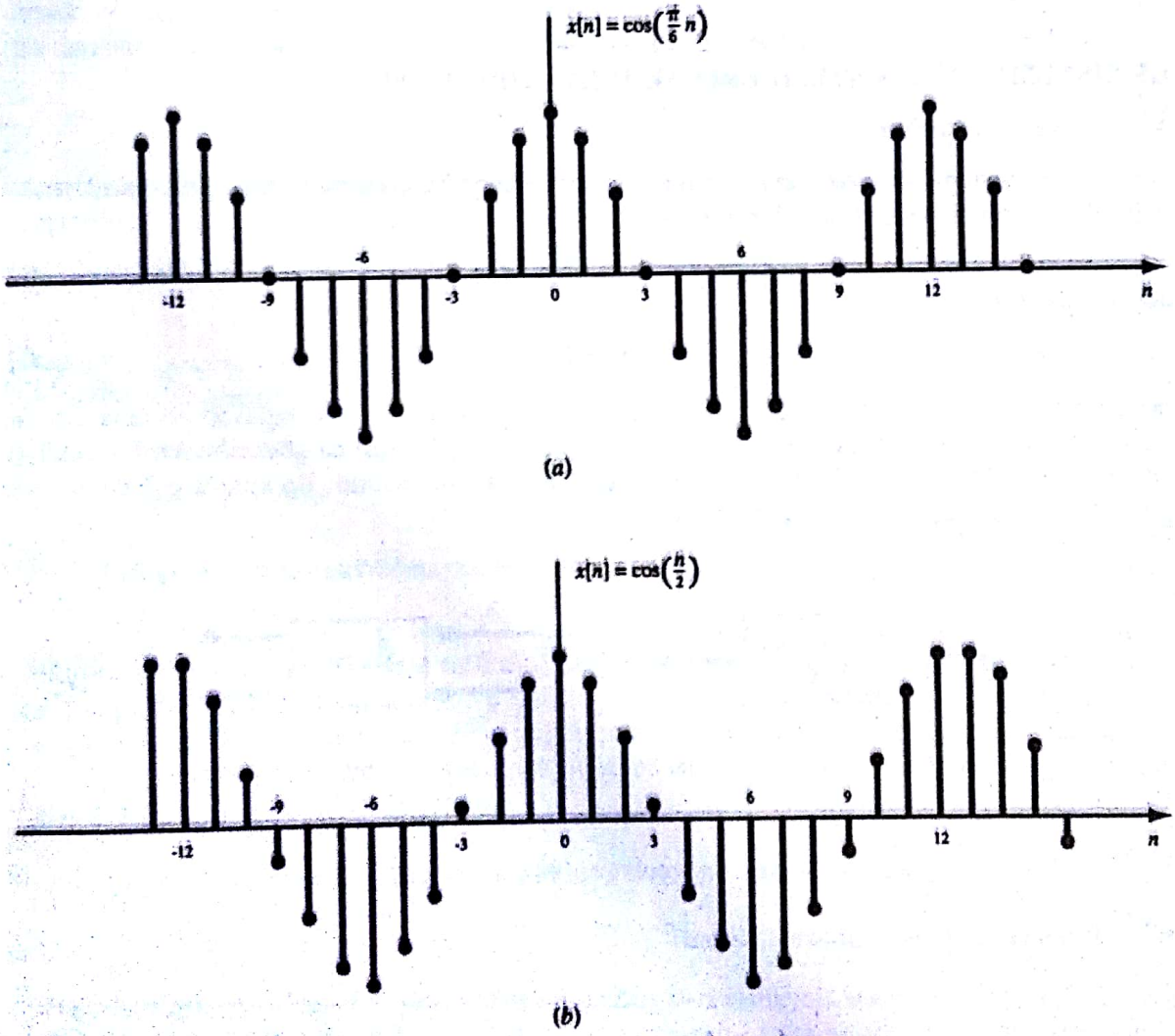
yazılabilir. Buna göre, Ω_0 frekanslı bir karmaşık üstel dizi, $(\Omega_0 \pm 2\pi),(\Omega_0 \pm 4\pi)$ v.b. frekanslı dizilerle aynıdır. Dolayısıyla, ayrık zamanlı üstel işaretlerle çalışırken, içerisinde Ω_0'ın seçileceği 2π uzunluklu bir aralığı göz önüne almak yeterlidir. Genellikle $0 \le \Omega_0 < 2\pi$ veya $-\pi \le \Omega_0 < \pi$ aralıkları kullanılır.

Genel Karmaşık Üstel Diziler:

Karmaşık üstel diziler en genel biçimde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x[n] = C\alpha^n \qquad (1.57)$$

Burada C ve α genellikle karmaşık sayılardır. (1.52) eşitliği, (1.57) eşitliğinin C=1 ve $\alpha = e^{j\Omega_0}$ için elde edilen özel bir durumudur.



Şekil 1-13 Sinüzoidal diziler. (a) $x[n] = \cos(\pi n/6)$; (b) $x[n] = \cos(n/2)$

Gerçel Üstel Diziler:

(1.57) eşitliğindeki C ve α'nın her ikisi de gerçel ise, $x[n]$ gerçel bir üstel dizidir. Dört ayrı durum söz konusudur: $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$, $-1 < \alpha < 0$, ve $\alpha < -1$. Bu dört gerçel üstel dizi Şekil 1-12'de görülmektedir. $\alpha = 1$ olması durumunda $x[n]$ sabit bir dizidir. $\alpha = -1$ olması durumunda ise $x[n]$, sırayla +C ve –C değerlerini alır.

D. Sinüzoidal Diziler:

Sinüzoidal diziler şu biçimde tanımlanır:

$$x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \theta) \tag{1.58}$$

n'nin boyutsuz olması durumunda hem Ω_0 hem de θ'nın birimleri radyandır. Şekil 1-13'te sinüzoidal dizilere iki örnek verilmektedir. (1.58) eşitliğindeki sinüzoidal dizi şu biçimde de ifade edilebilir:

$$A\cos(\Omega_0 n + \theta) = A\,\mathrm{Re}\{e^{j(\Omega_0 n + \theta)}\} \tag{1.59}$$

(1.52) eşitliğindeki karmaşık üstel dizi için geçerli olan (1.54) ve (1.56) eşitlikleri, sinüzoidal diziler için de geçerlidir. Örneğin, Şekil 1-13 (a)'da verilen dizi 12 temel periyoduyla periyodikten, Şekil 1-13 (b)'deki dizi periyodik değildir.

1.5 SİSTEMLER VE SİSTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

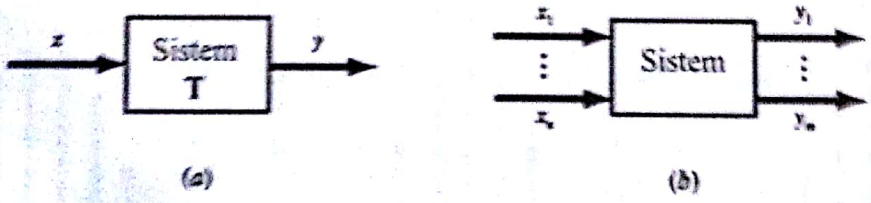
A. Sistem Gösterimi

Bir sistem, bir giriş (veya uyartım) sinyalin e karşı bir çıkış (veya tepki) sinyali oluşturan fiziksel bir sürecin matematiksel bir modelidir.

x ve y, bir sistemin giriş ve çıkış sinyalleri olsun. Bu sistem, x'den y'ye bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Bu dönüşüm

$$y = \mathrm{T}x \tag{1.60}$$

matematiksel notasyonuyla gösterilir. Burada T, x'in y'ye dönüşümünü sağlayan iyi tanımlanmış bir kuralı simgeleyen bir operatördür. (1.60) bağıntısı, Şekil 1-14(a)'da gösterilmektedir. Şekil 1-14(b)'de görüldüğü gibi, çok girişli ve çok çıkışlı sistemler de olabilir. Bu kitapta çoğunlukla tek girişli ve tek çıkışlı sistemler incelenecektir.



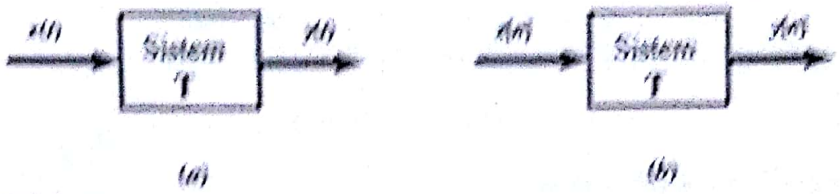
Şekil 1-14 Tek veya çok giriş ve çıkış sinyalli sistemler

B. Deterministik ve Stokastik Sistem:

Eğer giriş ve çıkış sinyalleri x ve y deterministik sinyaller sistemin deterministik sistem olduğu söylenir. Eğer giriş ve çıkış sinyalleri x ve y rasgele sinyaller ise sistemin stokastik sistem olduğu söylenir.

C. Sürekli Zamanlı ve Ayrık Zamanlı Sistemler:

Bir sistemin giriş (x) ve çıkış (y) sinyalleri sürekli zamanlı sinyallerse, bu sistemin sürekli zamanlı bir sistem olduğu söylenir. [Şekil 1-15 (a)]. Giriş ve çıkış sinyallerinin ayrık zamanlı sinyaller veya diziler olması durumunda ise, sistemin ayrık zamanlı bir sistem olduğu söylenir [Şekil 1-15 (b)].



Şekil 1-15 (a) Sürekli zamanlı sistem (b) Ayrık zamanlı sistem

D. Bellekli ve Belleksiz Sistemler

Bir sistemin çıkışının yalnızca o andaki girişe bağlı olması durumunda sistemin belleksiz olduğu söylenir. Bunun tersi durumda ise sistemin belleği olduğu söylenir. Belleksiz sistemlere örnek olarak bir direnç gösterilebilir. Girişin ($x(t)$) akım ve çıkışın ($y(t)$) gerilim alınması durumunda R direncinin giriş-çıkış bağıntısı Ohm yasası ile verilir.

$$y(t) = Rx(t) \tag{1.61}$$

Kondansatör ise bellekli sistemlere bir örnektir. Akımın $x(t)$ girişi ve gerilimin $y(t)$ çıkışı olması durumunda

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \tag{1.62}$$

yazılabilir. Giriş ve çıkış dizileri arasında aşağıdaki gibi bir ilişki bulunan ayrık zamanlı bir sistem de bellekli bir sistemdir.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{1.63}$$

E. Nedensel ve Nedensel Olmayan Sistemler:

Bir sistemin herhangi bir $t = t_0$ anındaki $y(t)$ çıkışı, daha önceki ($t \le t_0$) $x(t)$ girişlerine bağlıysa, sistemin nedensel olduğu söylenir. Yani, nedensel bir sistemin herhangi bir andaki değeri, girişin gelecekteki değerlerine değil, o andaki ve geçmişteki değerlerine bağlıdır. Dolayısıyla, nedensel sistemlerde, sisteme bir giriş uygulanmadan bir çıkış elde etmek olası değildir. Bu özellikleri sağlamayan sistemlere nedensel olmayan sistemler denir. Aşağıda verilen sistemler nedensel olmayan sistemlere örnektirler.

$$y(t) = x(t+1) \tag{1.64}$$

$$y[n] = x[-n] \tag{1.65}$$

Belleksiz sistemlerin tümü aynı zamanda nedenseldir. Ancak nedensel olup da bellekli olan sistemler de vardır.

F. Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Sistemler:

(1.60) eşitliğindeki T operatörü aşağıda belirtilen iki koşulu sağlıyorsa, bu operatör doğrusal bir operatördür, ve doğrusal bir T operatörü ile gösterilen bir sistemin doğrusal olduğu söylenir.

1. Toplamsalık:

Herhangi iki x_1 ve x_2 sinyali için $Tx_1 = y_1$ ve $Tx_2 = y_2$ ise:

$$T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \tag{1.66}$$

2. Homojenlik (veya Ölçekleme):

Herhangi bir x sinyali ve α skaları için:

$$T(\alpha x) = \alpha y \tag{1.67}$$

(1.66) ve/veya (1.67) eşitliğini sağlamayan herhangi bir sistem doğrusal değildir. (1.66) ve (1.67) eşitlikleri α_1 ve α_2 keyfi skalarları kullanılarak

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \tag{1.68}$$

biçiminde tek bir eşitlikle ifade edilebilir. (1.68) eşitliği süperpozisyon özelliği olarak bilinir. (1.61) eşitliğiyle tanımlanan direnç ve (1.62) eşitliğiyle tanımlanan kondansatör doğrusal sistemlere örnek olarak gösterilebilirler. Aşağıda verilen sistemler ise doğrusal değildirler.

$$y = x^2 \tag{1.69}$$

$$y = \cos x \tag{1.70}$$

Doğrusal sistemler için geçerli olan homojenlik (veya ölçekleme) özelliğinin [Eşitlik (1.67)] bir sonucu olarak sıfır giriş, sıfır çıkış verir.

G. Zamanla Değişmeyen ve Zamanla Değişen Sistemler:

Bir sistemin girişindeki bir zaman ötelemesi (gecikme veya ilerleme), çıkış sinyalin de de aynı ötelemeye neden oluyorsa sistemin zamanla değişmeyen bir sistem olduğu söylenir. Dolayısıyla, sürekli zamanlı bir sistem, herhangi bir τ gerçel değeri için

$$T(x(t-\tau)) = y(t-\tau) \tag{1.71}$$

koşulunu sağlıyorsa zamanla değişmiyor demektir. Bu koşul, ayrık zamanlı sistemler için şu biçimde ifade edilir:

$$T(x[n-k]) = y[n-k] \tag{1.72}$$

Burada k herhangi bir tamsayıdır. (1.71) eşitliğini sağlamayan sürekli zamanlı bir sistem veya (1.72) eşitliğini sağlamayan ayrık zamanlı bir sistem zamanla değişiyor demektir. Bir sistemin zamanla değişmezliğini sınamak için ötelenmiş çıkışla, ötelenmiş girişin neden olduğu çıkış karşılaştırılabilir (Problem 1.33-1.39).

H. Doğrusal, Zamanla Değişmeyen Sistemler:

Hem doğrusal hem de zamanla değişmez olan sistemler, doğrusal, zamanla değişmeyen (DZD) sistem adını alırlar.

I. Kararlı Sistemler:

Bir sistem,

$$|x| \leq k_1 \tag{1.73}$$

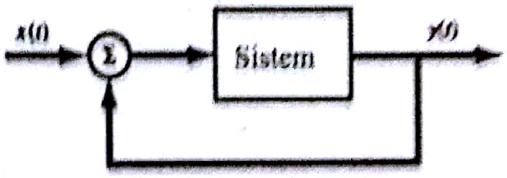
koşulunu sağlayan herhangi bir x sınırlı girişine karşı

$$|y| \leq k_2 \tag{1.74}$$

koşulunu sağlayan sınırlı bir y çıkışını veriyorsa, bu sistemin sınırlı giriş/sınırlı çıkış (SGSÇ) kararlı olduğu söylenir. Bu bağıntılardaki k_1 ve k_2, sonlu gerçel sayılardır. Kararlılık için başka tanımlar da bulunmaktadır (bkz. Bölüm 7).

J. Geribeslemeli Sistemler:

Geri beslemeye sahip olan sistemler, çok önemli bir sistem türünü oluştururlar. Bu tür sistemlerde çıkış geriye beslenip, Şekil 1-16'da görüldüğü gibi girişe eklenir.



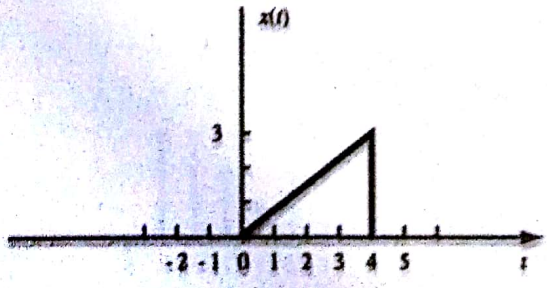
Şekil 1-16 Geribeslemeli Sistem

Çözümlü Problemler

SİNYALLER VE SİNYALLERİN SINIFLANDIRILMASI

1.1. Şekil 1.17'de sürekli zamanlı bir sinyal görülmektedir. Aşağıdaki sinyallerin her birini çiziniz.

(*a*) $x(t-2)$; (*b*) $x(2t)$; (*c*) $x(t/2)$; (*d*) $x(-t)$



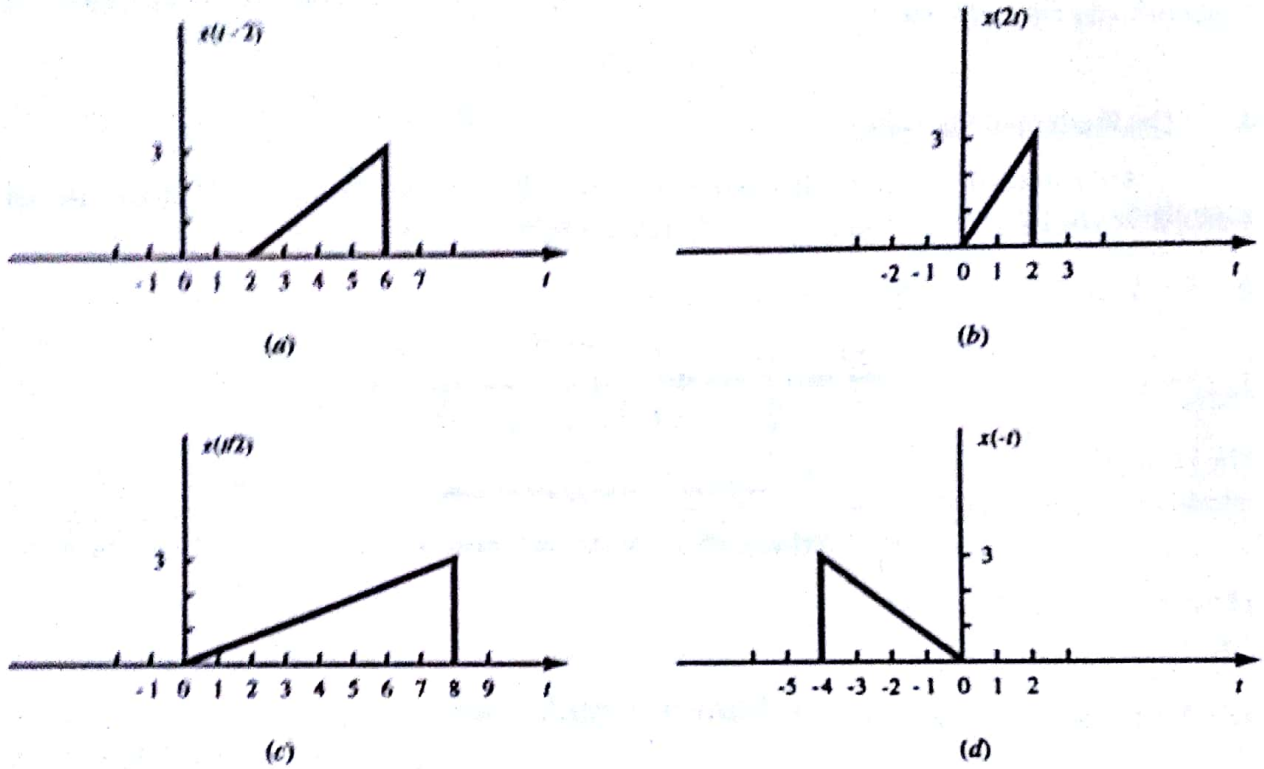
Şekil 1-17

a) $x(t-2)$, Şekil 1-18(a)'da görülmektedir.

b) $x(2t)$, Şekil 1-18(b)'de görülmektedir.

c) $x(t/2)$, Şekil 1-18(c)'de görülmektedir.

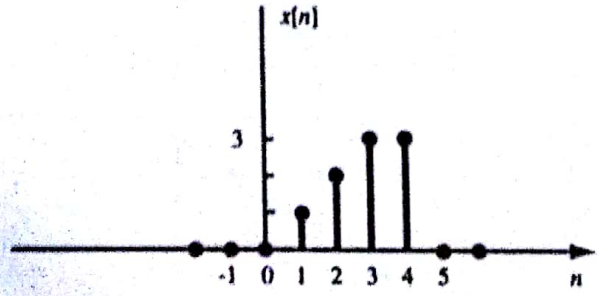
d) $x(-t)$, Şekil 1-18(d)'de görülmektedir.



Şekil 1-18

1.2. Ayrık zamanlı $x[n]$ sinyali Şekil 1-19'da görülmektedir. Aşağıdaki sinyallerin her birini çiziniz.

(a) $x[n-2]$; (b) $x[2n]$; (c) $x[-n]$; (d) $x[-n+2]$



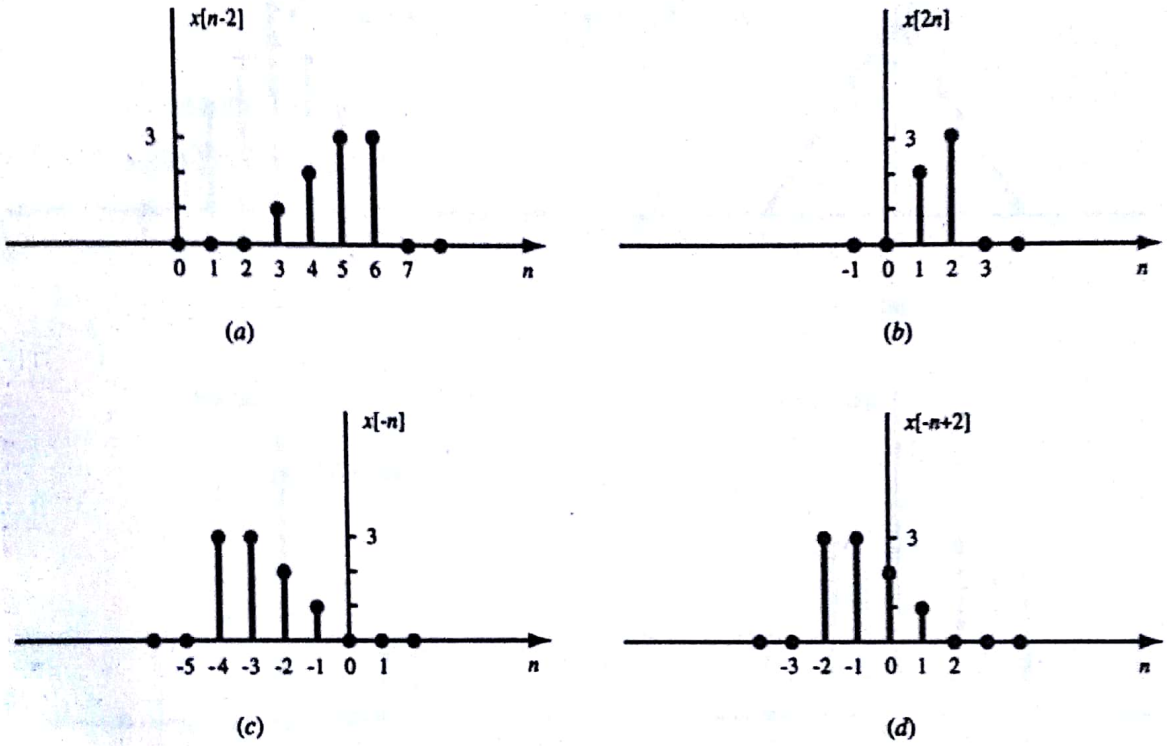
Şekil 1-19

(a) $x[n-2]$, Şekil 1-20(*a*)'da görülmektedir.

(b) $x[2n]$, Şekil 1-20(*b*)'de görülmektedir.

(c) $x[-n]$, Şekil 1-20(*c*)'de görülmektedir.

(d) $x[-n+2]$, Şekil 1-20(*d*)'de görülmektedir.



Şekil 1-20

1.3. Sürekli zamanlı bir sinyal şu biçimde tanımlanmaktadır:

$$x(t) = \begin{cases} 1-|t| & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$x(t)$'nin (a) 0.25 s, (b) 0.5 s ve (c) 1.0 s örnekleme aralıklarıyla düzgün örneklenmesi sonucu elde edilen ayrık zamanlı dizileri bulunuz.

Soruyu grafikler yardımıyla çözmek daha kolay görülmektedir. $x(t)$ sinyali Şekil 1-21(a)'da gösterilmiştir. Şekil 1-21 (b), (c) ve (d) söz konusu örnekleme aralıkları için elde edilen örneklenmiş dizileri göstermektedir.

(*a*) $T_s = 0.25$ s: Şekil 1-21 (b)'den

$$x[n] = \{\ldots, 0, 0.25, 0.5, 0.75, \underset{\uparrow}{1}, 0.75, 0.5, 0.25, 0, \ldots\}$$

elde edilir

(*b*) $T_s = 0.5$ s. Şekil 1-21 (*c*)'den

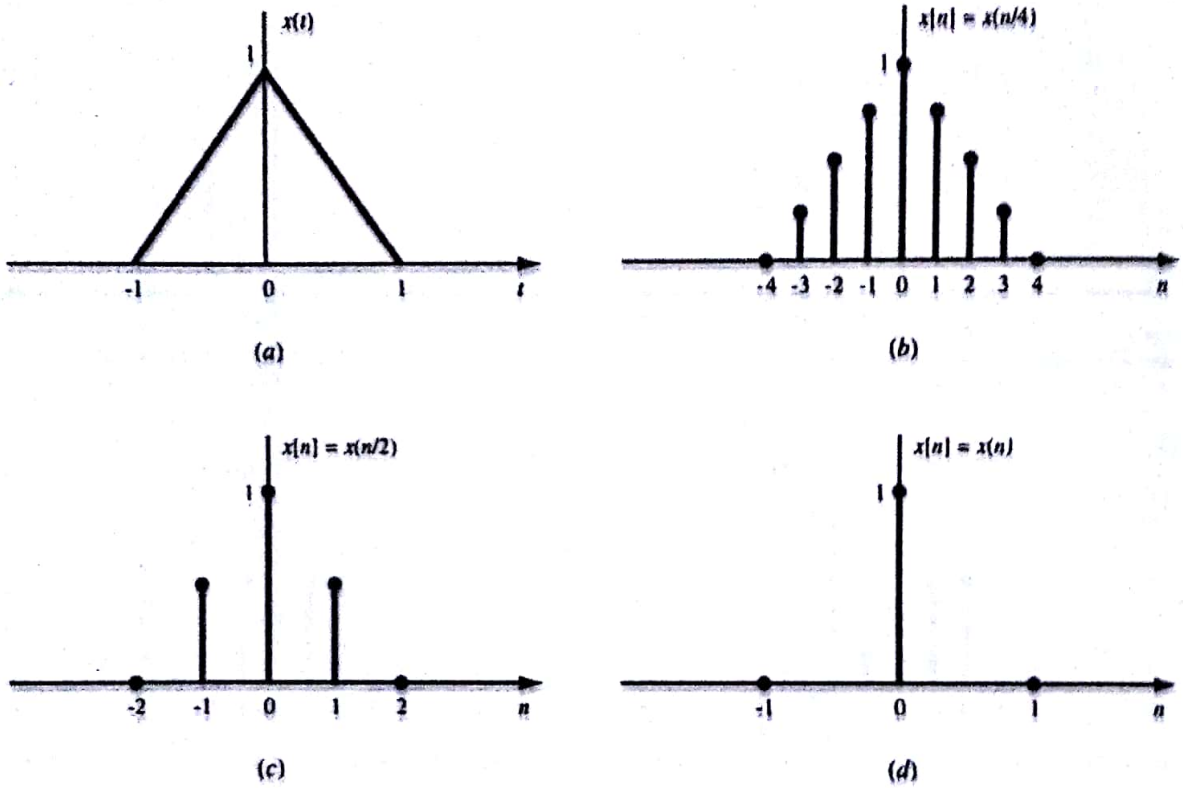
$$x[n] = \{\ldots, 0, 0.5, \underset{\uparrow}{1}, 0.5, 0, \ldots\}$$

elde edilir:

(*c*) $T_s = 0.25$ s: Şekil 1-21 (*d*)'den

$$x[n] = \{\ldots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \ldots\} = \delta[n]$$

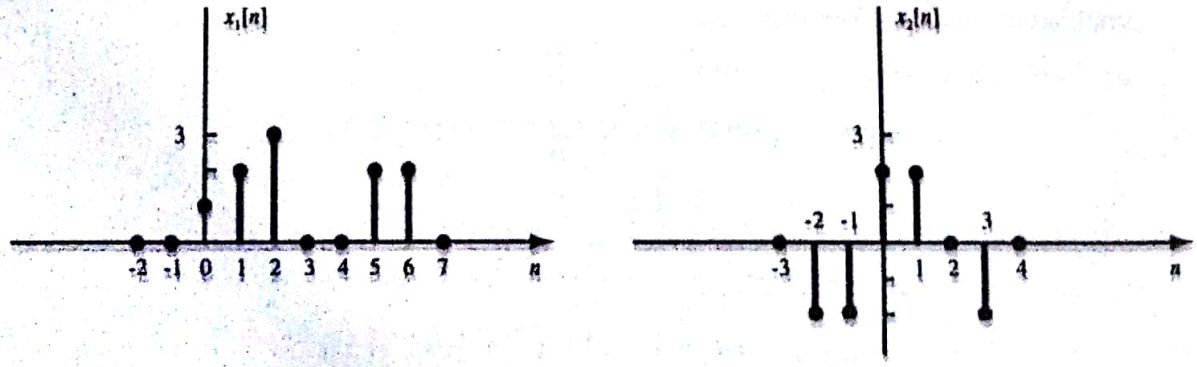
elde edilir.



Şekil 1-21

1.4. Şekil 1-22'de gösterilen ayrık zamanlı $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ sinyallerini kullanarak, aşağıdaki sinyalleri çizimlerle ve sayı dizileriyle tanımlayınız.

(*a*) $y_1[n] = x_1[n] + x_2[n]$; (*b*) $y_2[n] = 2x_1[n]$; (*c*) $y_3[n] = x_1[n]x_2[n]$



Şekil 1-22

(*a*) $y_1[n]$ Şekil 1-23 (*a*)'da çizilmiştir. Şekil 1-23(*a*)'dan

$$y_1[n] = (\ldots, 0, -2, -2, \underset{\uparrow}{3}, 4, 3, -2, 0, 2, 2, 0, \ldots)$$

elde edilir.

(*b*) $y_2[n]$ Şekil 1-23 (*b*)'de çizilmiştir. Şekil 1-23(*b*)'den

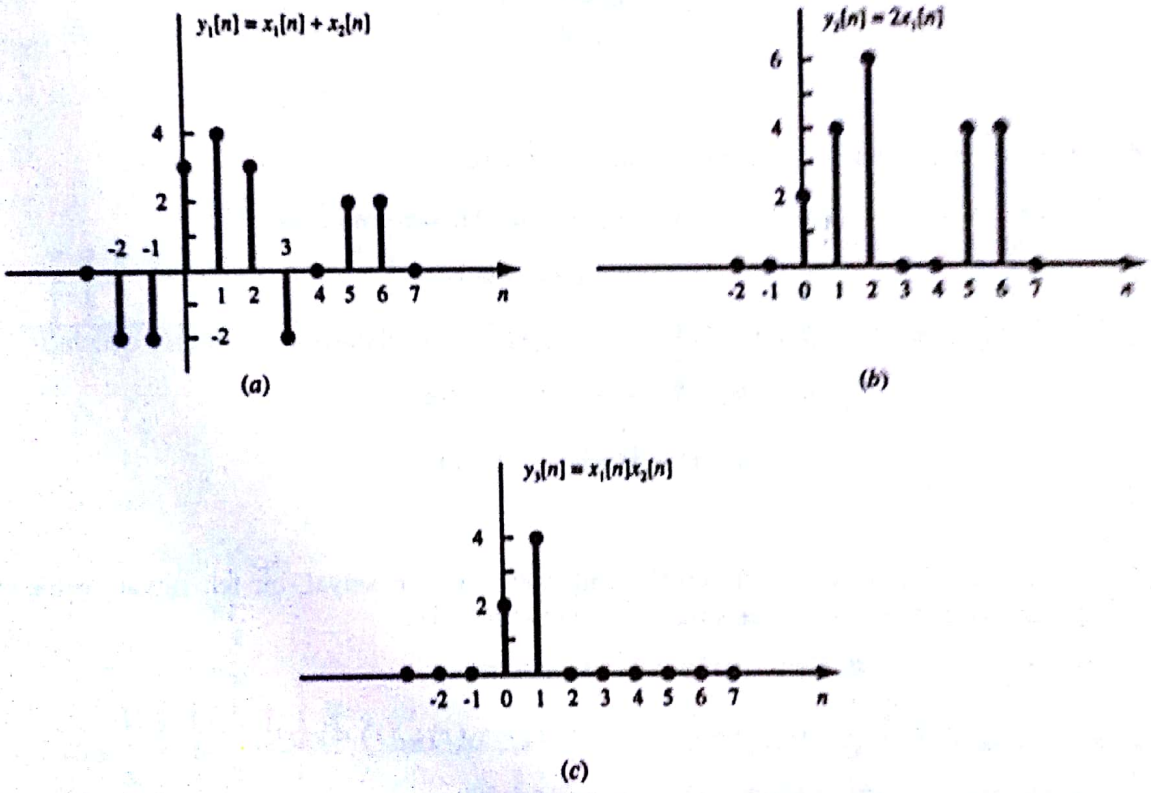
$$y_2[n] = (\ldots, 0, \underset{\uparrow}{2}, 4, 6, 0, 0, 4, 4, 0, \ldots)$$

elde edilir.

(*c*) $y_3[n]$ Şekil 1-23 (*c*)'de çizilmiştir. Şekil 1-23(*c*)'den

$$y_3[n] = (\ldots, 0, \underset{\uparrow}{2}, 4, 0, \ldots)$$

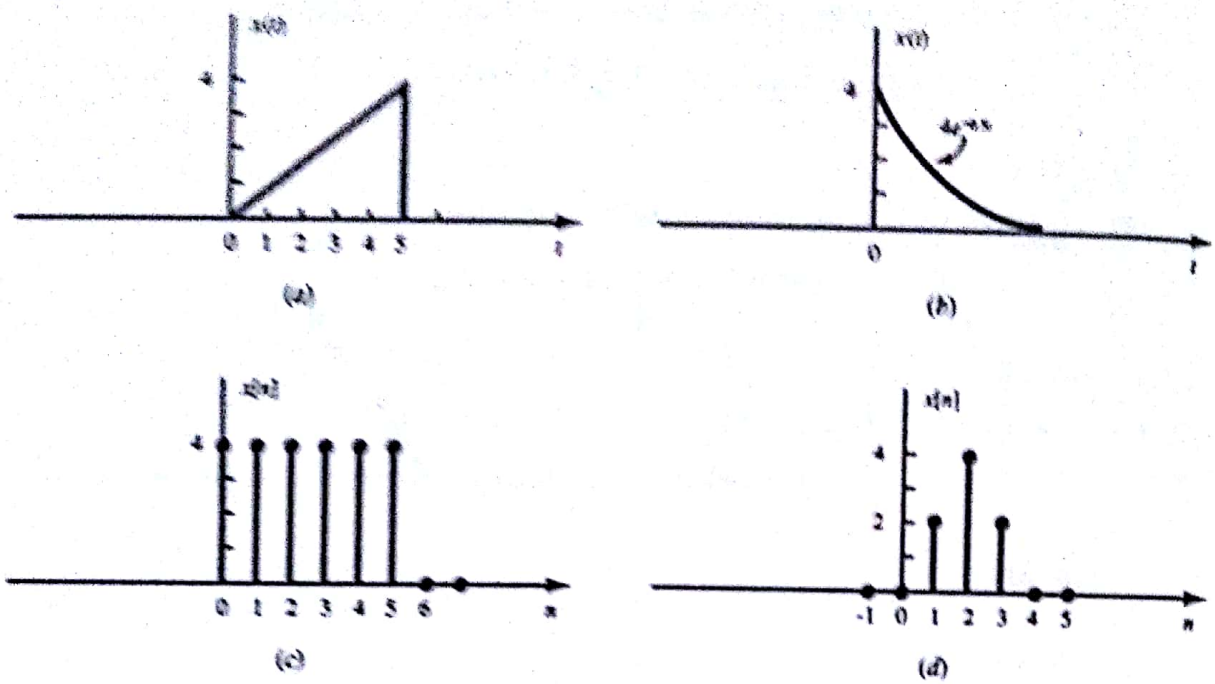
elde edilir.



Şekil 1-23

1.5. Şekil 1-24'deki sinyallerin tek ve çift bileşenlerini elde ediniz.

(1.5) ve (1.6) eşitlikleri kullanılarak sinyallerin tek ve çift bileşenleri elde edilebilir. Sonuçlar Şekil 1-25'de görülmektedir.



Şekil 1-24

1.6. $x(t) = e^{jt}$ sinyalinin tek ve çift bileşenlerini bulunuz.

$x_e(t)$ ve $x_o(t)$, e^{jt} sinyalinin sırasıyla çift ve tek bileşenlerini göstersin.

$$e^{jt} = x_e(t) + x_o(t)$$

(1.5) ve (1.6) eşitlikleri yardımıyla ve Euler bağıntısı kullanılarak bileşenler elde edilebilir.

$$x_e(t) = \tfrac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) = \cos t$$

$$x_o(t) = \tfrac{1}{2}(e^{jt} - e^{-jt}) = j\sin t$$

1.7. İki tek sinyalin veya iki çift sinyalin çarpımının bir çift sinyal, bir tek sinyal ile bir çift sinyalin çarpımının ise bir tek sinyal verdiğini gösteriniz.

$x(t) = x_1(t)\,x_2(t)$ olsun. Hem $x_1(t)$ hem de $x_2(t)$ çift ise,

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

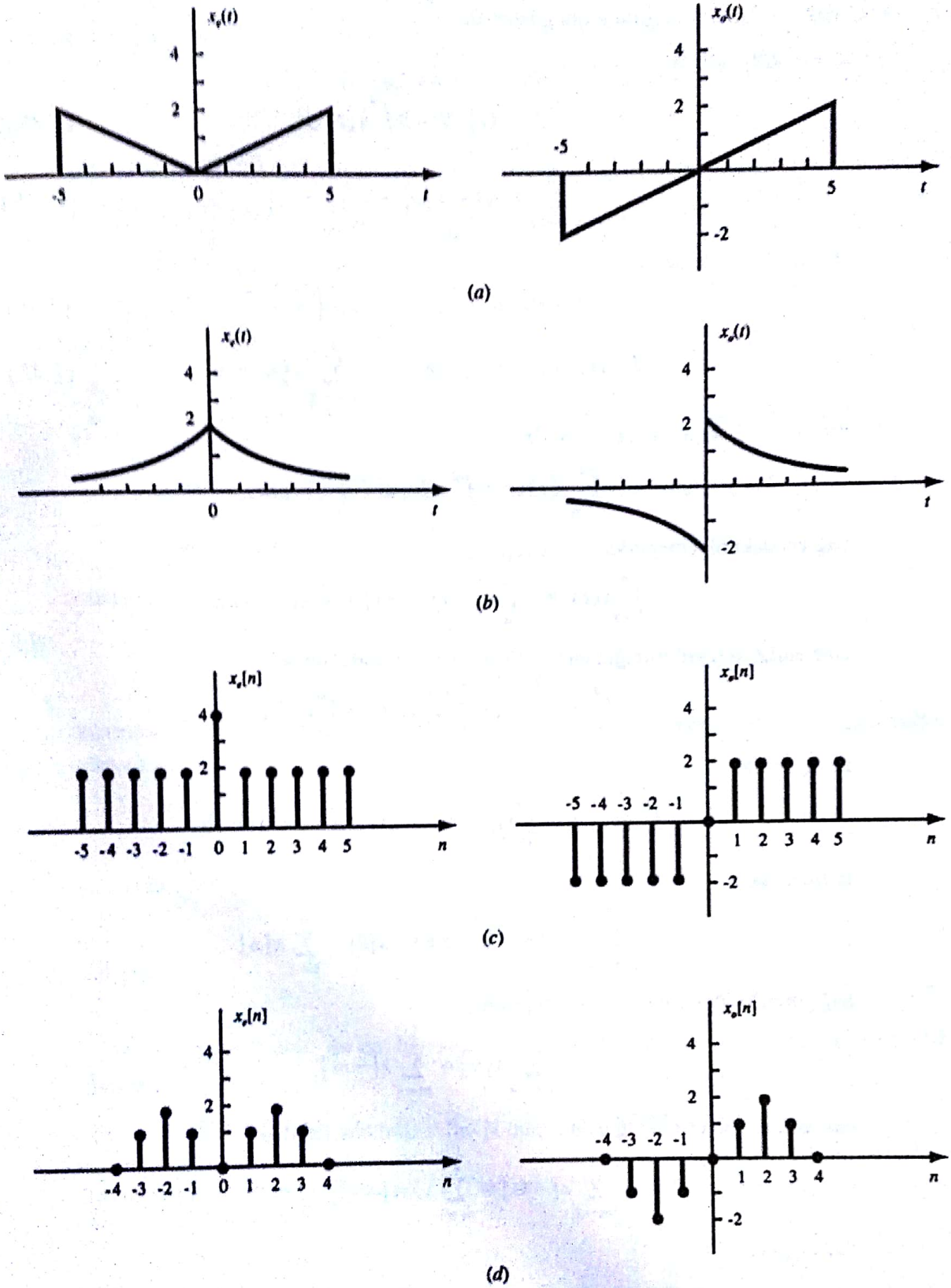
olduğundan $x(t)$ çifttir. Hem $x_1(t)$ hem de $x_2(t)$ tek ise,

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = -x_1(t)[-x_2(t)] = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

olduğundan $x(t)$ yine çifttir. $x_1(t)$ çift ve $x_2(t)$ tek ise, bu durumda

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)[-x_2(t)] = -x_1(t)x_2(t) = -x(t)$$

olduğundan $x(t)$ tektir. Yukarıdaki kanıtlama işlemlerinde, t sürekli ya da ayrık zamanı gösteriyor olabilir.



Şekil 1-25

1.8 Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(*a*) $x(t)$ ve $x[n]$ çift ise:

$$\int_{-a}^{a} x(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} x(t)\,dt \tag{1.75a}$$

$$\sum_{n=-k}^{k} x[n] = x[0] + 2\sum_{n=1}^{k} x[n] \tag{1.75b}$$

(*b*) $x(t)$ ve $x[n]$ tek ise:

$$x(0) = 0 \qquad \text{ve} \qquad x[0] = 0 \tag{1.76}$$

$$\int_{-a}^{a} x(t)\,dt = 0 \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=-k}^{k} x[n] = 0 \tag{1.77}$$

(*a*) Bir entegral, ikiye ayrılarak yazılabilir:

$$\int_{-a}^{a} x(t)\,dt = \int_{-a}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{a} x(t)\,dt$$

Sağ yandaki ilk entegralde $t = -\lambda$ yapılırsa

$$\int_{-a}^{0} x(t)\,dt = \int_{a}^{0} x(-\lambda)(-d\lambda) = \int_{0}^{a} x(-\lambda)\,d\lambda$$

elde edilir. $x(t)$ çift olduğundan, yani $x(-\lambda) = x(\lambda)$ olduğundan:

$$\int_{0}^{a} x(-\lambda)\,d\lambda = \int_{0}^{a} x(\lambda)\,d\lambda = \int_{0}^{a} x(t)\,dt$$

Dolayısıyla:

$$\int_{-a}^{a} x(t)\,dt = \int_{0}^{a} x(t)\,dt + \int_{0}^{a} x(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} x(t)\,dt$$

Benzer olarak:

$$\sum_{n=-k}^{k} x[n] = \sum_{n=-k}^{-1} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n]$$

Sağ yandaki ilk terimde $n = -m$ yapılırsa,

$$\sum_{n=-k}^{-1} x[n] = \sum_{m=1}^{k} x[-m]$$

elde edilir. $x[n]$ çift olduğundan, yani $x[-m] = x[m]$ olduğundan:

$$\sum_{m=1}^{k} x[-m] = \sum_{m=1}^{k} x[m] = \sum_{n=1}^{k} x[n]$$

Dolayısıyla:

$$\sum_{n=-k}^{k} x[n] = \sum_{n=1}^{k} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n] = x[0] + 2\sum_{n=1}^{k} x[n]$$

(*b*) $x(t)$ ve $x[n]$ tek olduğundan yani $x(-t) = -x(t)$ ve $x[-n] = -x[n]$ olduğundan:

$$x(-0) = -x(0) \quad \text{ve} \quad x[-0] = x[0]$$

Dolayısıyla;

$$x(-0) = x(0) = -x(0) \Rightarrow x(0) = 0$$
$$x[-0] = x[0] = -x[0] \Rightarrow x[0] = 0$$

Benzer olarak, (1.76) eşitliği göz önüne alınarak,

$$\int_{-a}^{a} x(t)\,dt = \int_{-a}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{a} x(t)\,dt = \int_{0}^{a} x(-\lambda)\,d\lambda + \int_{0}^{a} x(t)\,dt$$
$$= -\int_{0}^{a} x(\lambda)\,d\lambda + \int_{0}^{a} x(t)\,dt = -\int_{0}^{a} x(t)\,dt + \int_{0}^{a} x(t)\,dt = 0$$

ve

$$\sum_{n=-k}^{k} x[n] = \sum_{n=-k}^{-1} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n] = \sum_{m=1}^{k} x[-m] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n]$$
$$= -\sum_{m=1}^{k} x[m] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n] = -\sum_{n=1}^{k} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n]$$
$$= x[0] = 0$$

yazılabilir.

1.9.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

karmaşık üstel sinyalinin periyodik olduğunu ve temel periyodunun $2\pi/\omega_0$ olduğunu gösteriniz.

(1.7) eşitliğinden, $x(t)$'nin periyodik olma koşulu için

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$$

yazılabilir.

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

olduğundan:

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \qquad (1.78)$$

$\omega_0 = 0$ ise $x(t) = 1$ olur. Bu da, herhangi bir T için periyodiktir. $\omega_0 \neq 0$ ise, (1.78) eşitliği, yalnızca

$$\omega_0 T = m2\pi \quad \text{ya da} \quad T = m\frac{2\pi}{\omega_0} \qquad m = \text{pozitif tam sayı}$$

koşullarında doğrudur. Dolayısıyla, $x(t)$'nin en küçük pozitif T değeri olan temel periyot $2\pi/\omega_0$'dır.

1.10. $x(t) = \cos((\omega_0 t + \theta)$ sinüzoidal sinyalinin periyodik olduğunu ve temel periyodunun $2\pi/\omega_0$ olduğunu gösteriniz.

$$\cos[\omega_0(t+T) + \theta] = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

koşulu sağlanıyorsa $x(t)$ periyodiktir.

$$\cos[\omega_0(t+T) + \theta] = \cos[\omega_0 t + \theta + \omega_0 T] = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

eşitliği

$$\omega_0 T = m2\pi \quad \text{ya da} \quad T = m\frac{2\pi}{\omega_0} \qquad m = \text{pozitif tam sayı}$$

koşulları sağlanıyorsa doğrudur. Dolayısıyla, $x(t)$'nin temel periyodu T_0 $2\pi/\omega_0$ olur.

1.11. $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ karmaşık üstel dizisinin, yalnızca $\Omega_0/2\pi$ oranının rasyonel bir sayı olması durumunda periyodik olduğunu gösteriniz.

(1.9) eşitliğine göre, $x[n]$, yalnızca

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n}e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n}$$

ya da

$$e^{j\Omega_0 N} = 1 \tag{1.79}$$

olduğu zaman periyodik olur. (1.79) eşitliği de yalnızca

$$\Omega_0 N = m2\pi \qquad m = \text{pozitif tamsayı}$$

ya da

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} = \text{rasyonel sayı} \tag{1.80}$$

koşullarının gerçekleşmesi durumunda sağlanır. Dolayısıyla, $x[n]$, yalnızca $\Omega_0/2\pi$ oranının rasyonel sayı olması durumunda periyodiktir.

1.12. $x(t)$, ω_0 radyan frekansına ve $T_0 = 2\pi/\omega_0$ temel frekansına sahip bir karmaşık üstel sinyal olsun:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

T_s örnekleme aralığıyla $x(t)$'nin düzgün olarak örneklenmesi sonucu elde edilen ayrık zamanlı $x[n]$ dizisini göz önüne alınız:

$$x[n] = x(nT_s) = e^{j\omega_0 nT_s}$$

$x[n]$'nin periyodik olabilmesi için T_s'nin sağlaması gereken koşulu bulunuz.

$x[n]$, N_0 temel periyoduyla periyodik ise

$$e^{j\omega_0(n+N_0)T_s} = e^{j\omega_0 nT_s}e^{j\omega_0 N_0 T_s} = e^{j\omega_0 nT_s}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$e^{j\omega_0 N_0 T_s} = 1 \Rightarrow \omega_0 N_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0}N_0 T_s = m2\pi \qquad m = \text{pozitif tamsayı}$$

ya da

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N_0} = \text{rasyonel sayı} \tag{1.81}$$

koşullarının sağlanması gereklidir. Dolayısıyla, örnekleme aralığının $x(t)$'nin temel periyoduna oranı (T_s/T_0) bir rasyonel sayı ise, $x[n]$ periyodiktir. Bu koşul $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$ biçimindeki sinüzoidal sinyaller için de geçerlidir.

1.13. $x(t) = \cos 15t$ sinüzoidal sinyali için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

(*a*) $x[n] = x(nT_s)$ dizisinin periyodik olmasını sağlayacak T_s örnekleme aralığını bulunuz.

(*b*) $T_s = 0.1\,\pi$ saniye ise $x[n] = x(nT_s)$'nin temel periyodunu bulunuz.

(*a*) $x(t)$'nin temel periyodu $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/15$ 'dir. (1.81) eşitliğine göre, $x[n] = x(nT_s)$, yalnızca, m ve N_0 pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{T_s}{2\pi/15} = \frac{m}{N_0} \qquad (1.82)$$

koşulunun sağlanması durumunda periyodiktir. Dolayısıyla T_s için

$$T_s = \frac{m}{N_0}T_0 = \frac{m}{N_0}\frac{2\pi}{15} \qquad (1.83)$$

koşulu gereklidir.

(*b*) (1.82) eşitliğinde $T_s = 0.1\,\pi = \pi/10$ kullanılırsa

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{\pi/10}{2\pi/15} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $x[n] = x(nT_s)$ periyodiktir. (1.82) eşitliğinden

$$N_0 = m\frac{T_0}{T_s} = m\frac{4}{3}$$

bulunur. En küçük pozitif tamsayı N_0, m=3 ile elde edilir. Dolayısıyla, $x[n] = x(0.1\,\pi\, n)$ dizisinin temel periyodu $N_0 = 4$'tür.

1.14. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$, temel periyotları T_1 ve T_2 olan periyodik sinyaller olsun. $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ toplamı hangi koşullarda periyodiktir ve $x(t)$'nin periyodik olması durumunda, temel periyot nedir?

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin T_1 ve T_2 temel periyotlarıyla periyodik olması nedeniyle

$$x_1(t) = x_1(t+T_1) = x_1(t+mT_1) \quad m = \text{pozitif tamsayı}$$
$$x_2(t) = x_2(t+T_2) = x_2(t+kT_2) \quad k = \text{pozitif tamsayı}$$

yazılabilir. Dolayısıyla:

$$x(t) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+kT_2)$$

$x(t)$'nin T periyoduna sahip olabilmesi için,

$$x(t+T) = x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t+mT_1) + x_2(t+kT_2)$$

koşulu sağlanmalıdır. Bunun için,

$$mT_1 = kT_2 = T \qquad (1.84)$$

veya

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m} = \text{rasyonel sayı} \qquad (1.85)$$

olmalıdır. Bir başka deyişle, iki periyodik sinyal, yalnızca sinyallerin periyotlarının oranı rasyonel bir sayı ise periyodiktir. Bu durumda temel periyot, T_1 ve T_2'nin ortak katlarının

en küçüğü olup, m ve k'nin aralarında asal olması durumunda (1.84) eşitliğiyle verilir. T_1/T_2 oranı irrasyonel bir sayı ise, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ sinyallerinin ortak bir periyodu yoktur ve $x(t)$ periyodik olamaz.

1.15. $x_1[n]$ ve $x_2[n]$, N_1 ve N_2 temel periyotlarına sahip periyodik diziler olsun. $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ toplamı hangi koşullarda periyodiktir, ve $x[n]$ periyodikse temel periyodu nedir?

$x_1[n]$ ve $x_2[n]$, N_1 ve N_2 temel periyotlarıyla periyodik olduğundan

$$x_1[n] = x_1[n+N_1] = x_1[n+mN_1] \quad m = \text{pozitif tamsayı}$$

$$x_2[n] = x_2[n+N_2] = x_2[n+kN_2] \quad k = \text{pozitif tamsayı}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$x[n] = x_1[n+mN_1] + x_2[n+kN_2]$$

olur. $x[n]$'nin N periyoduyla periyodik olması için

$$x[n+N] = x_1[n+N] + x_2[n+N] = x_1[n+mN_1] + x_2[n+kN_2]$$

koşulunun sağlanması gereklidir. Dolayısıyla,

$$mN_1 = kN_2 = N \tag{1.86}$$

olmalıdır. (1.86) eşitliğini sağlayacak tamsayılar bulmak her zaman olası olduğundan, iki periyodik dizinin toplamlarının da periyodik olduğu; temel periyodun da N_1 ve N_2'nin en küçük ortak katı olduğu görülür.

1.16. Aşağıdaki sinyallerin her birinin periyodik olup olmadığını belirleyiniz. Periyodik olan sinyallerin temel periyodunu bulunuz.

(a) $x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ (b) $x(t) = \sin \frac{2\pi}{3} t$

(c) $x(t) = \cos \frac{\pi}{3} t + \sin \frac{\pi}{4} t$ (d) $x(t) = \cos t + \sin \sqrt{2}\, t$

(e) $x(t) = \sin^2 t$ (f) $x(t) = e^{j[(\pi/2)t - 1]}$

(g) $x[n] = e^{j(\pi/4)n}$ (h) $x[n] = \cos \frac{1}{4} n$

(i) $x[n] = \cos \frac{\pi}{3} n + \sin \frac{\pi}{4} n$ (j) $x[n] = \cos^2 \frac{\pi}{8} n$

(a) $x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \longrightarrow \omega_0 = 1$

$x(t)$, $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$ temel periyoduyla periyodiktir.

(b) $x(t) = \sin \frac{2\pi}{3} t \longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$x(t)$, $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 3$ temel periyoduyla periyodiktir.

(c) $x(t) = \cos \frac{\pi}{3} t + \sin \frac{\pi}{4} t = x_1(t) + x_2(t)$

Burada, $x_1(t) = \cos(\pi/3)t = \cos \omega_1 t$, $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 6$ ile ve $x_2(t) = \sin(\pi/4)t = \sin \omega_2 t$ $T_2 = 2\pi/\omega_2 = 8$ ile periyodiktir. $T_1/T_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ rasyonel bir sayı olduğundan, $x(t)$ $T_0 = 4T_1 = 3T_2 = 24$ temel periyodu ile periyodiktir.

(*d*) $x(t) = \cos t + \sin\sqrt{2}\,t = x_1(t) + x_2(t)$

Burada, $x_1(t) = \cos t = \cos\omega_1 t$ $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi$ ile ve $x_2(t) = \sin\sqrt{2}\,t = \sin\omega_2 t$, $T_2 = 2\pi/\omega_2 = \sqrt{2}\,\pi$ ile periyodiktir. $T_1/T_2 = \sqrt{2}$ irrasyonel bir sayı olduğundan, $x(t)$ periyodik değildir.

(*e*) $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ özdeşliği kullanılarak

$$x(t) = \sin^2 t = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2t = x_1(t) + x_2(t)$$

yazılabilir. Burada $x_1(t) = \frac{1}{2}$ herhangi bir periyoda sahip bir dc sinyal, ve $x_2(t) = -\frac{1}{2}\cos 2t = -\frac{1}{2}\cos\omega_2 t$ periyoduna sahip bir sinyaldir. Dolayısıyla, $x(t)$ $T_0 = \pi$ temel periyoduyla periyodiktir.

(*f*) $x(t) = e^{j[(\pi/2)t - 1]} = e^{-j}e^{j(\pi/2)t} = e^{-j}e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \omega_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$x(t)$ periyodik olup, temel periyodu $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 4$ 'tür.

(*g*) $x[n] = e^{j(\pi/4)n} = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \Omega_0 = \dfrac{\pi}{4}$

$\Omega_0/2\pi = \frac{1}{8}$ rasyonel bir sayı olduğundan $x[n]$ periyodiktir ve (1.55) eşitliği gereği, temel periyodu $N_0 = 8$'dir.

(*h*) $x[n] = \cos\frac{1}{4}n = \cos\Omega_0 n \longrightarrow \Omega_0 = \frac{1}{4}$

$\Omega_0/2\pi = 1/8\pi$ rasyonel bir sayı olmadığından $x[n]$ periyodik değildir.

(*i*) $x[n] = \cos\dfrac{\pi}{3}n + \sin\dfrac{\pi}{4}n = x_1[n] + x_2[n]$

$x_1[n]$ ve $x_2[n]$ için şunlar yazılabilir.

$$x_1[n] = \cos\frac{\pi}{3}n = \cos\Omega_1 n \longrightarrow \Omega_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$x_2[n] = \sin\frac{\pi}{4}n = \cos\Omega_2 n \longrightarrow \Omega_2 = \frac{\pi}{4}$$

$\Omega_1/2\pi = \frac{1}{6}$ rasyonel bir sayı olduğundan $x_1[n]$, $N_1 = 6$ temel periyodu ile periyodiktir. $\Omega_2/2\pi = \frac{1}{8}$ rasyonel bir sayı olduğundan $x_2[n]$, $N_2 = 8$ temel periyoduyla periyodiktir. Dolayısıyla, Problem 1.15'de belirtildiği gibi $x[n]$ periyodik olup, temel periyot 6 ile 8'in en küçük ortak katı olan 24'e eşittir ($N_0 = 24$).

(*j*) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ özdeşliği kullanılarak

$$x[n] = \cos^2\frac{\pi}{8}n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}n = x_1[n] + x_2[n]$$

yazılabilir. Burada $x_1[n] = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1)^n$ $N_1 = 1$ temel periyoduyla periyodiktir. $x_2[n] = \frac{1}{2}\cos(\pi/4)n = \frac{1}{2}\cos\Omega_2 n$ olup, $\Omega_2 = \pi/4$'tür. $\Omega_2/2\pi = \frac{1}{8}$ rasyonel bir sayı olduğundan, $x[n]$ N_2=8 temel periyoduyla periyodiktir. Dolayısıyla, $x[n]$ N_0=8 temel periyoduyla periyodiktir (1 ile 8'in en küçük ortak katı).

1.17. $x(t+T) = x(t)$ ise ve α, β, ve a herhangi birer gerçel sayı olmak üzere

$$\int_\alpha^\beta x(t)\,dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(t)\,dt \qquad (1.87)$$

$$\int_0^T x(t)\,dt = \int_a^{a+T} x(t)\,dt \qquad (1.88)$$

olduğunu gösteriniz.

$x(t+T) = x(t)$ ise, $t = \tau - T$ yazılarak

$$x(\tau - T + T) = x(\tau) = x(\tau - T)$$

ve

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(\tau - T)\,d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(\tau)\,d\tau = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} x(t)\,dt$$

elde edilir. Ayrıca, (1.88) eşitliğinin sağ tarafı şu biçimde yeniden yazılabilir

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)\,dt = \int_{\alpha}^{0} x(t)\,dt + \int_{0}^{\alpha+T} x(t)\,dt$$

(1.87) eşitliğinden

$$\int_{\alpha}^{0} x(t)\,dt = \int_{\alpha+T}^{T} x(t)\,dt$$

yazılabildiğinden şu sonuca varılır,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)\,dt = \int_{\alpha+T}^{T} x(t)\,dt + \int_{0}^{\alpha+T} x(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\alpha+T} x(t)\,dt + \int_{\alpha+T}^{T} x(t)\,dt = \int_{0}^{T} x(t)\,dt$$

1.18. $x(t)$, temel periyodu T_0 olan periyodik bir sinyal ise, $x(t)$ için (1.15) eşitliği ile tanımlanan P normalize ortalama gücünün, $x(t)$'nin herhangi bir T_0 aralığı üzerinde hesaplanan ortalama gücüne eşit olduğunu, yani

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0} |x(t)|^2\,dt \qquad (1.89)$$

olduğunu gösteriniz.

(1.15) eşitliğinden

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$$

elde edilir. Limit, T aralığı temel periyot T_0'ın tam katı olacak biçimde ($T = kT_0$) alındığında, $x(t)$'nin T aralığı üzerindeki toplam normalize enerji içeriği, bir periyot üzerindeki normalize enerji içeriğinin k katı olur.

$$P = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{kT_0}k\int_{0}^{T_0}|x(t)|^2\,dt\right] = \frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0}|x(t)|^2\,dt$$

1.19. Aşağıdaki eşitlikler bu kitapta sıklıkla kullanılmaktadır. Bunların doğruluğunu kanıtlayınız.

(a) $$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \alpha = 1 \end{cases} \qquad (1.90)$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1 \qquad (1.91)$$

(c) $$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1 \qquad (1.92)$$

(d) $$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \qquad |\alpha| < 1 \qquad (1.93)$$

(*a*)

$$S=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{N-1} \tag{1.94}$$

olsun. Buna göre,

$$\alpha S=\alpha\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^N \tag{1.95}$$

yazılabilir. (1.95) eşitliğini (1.94) eşitliğinden çıkartırsak

$$(1-\alpha)S=1-\alpha^N$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\alpha\neq 1$ için

$$S=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}$$

ve $\alpha=1$ için, (1.94) eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=1+1+1+\cdots+1=N$$

bulunur.

(*b*) $|\alpha|<1$ için, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^N=0$ olur. Dolayısıyla (1.96) eşitliği kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$$

elde edilir.

(*c*) (1.91) eşitliğinin kullanılmasından aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n=\alpha^k+\alpha^{k+1}+\alpha^{k+2}+\cdots$$

$$=\alpha^k(1+\alpha+\alpha^2+\cdots)=\alpha^k\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{\alpha^k}{1-\alpha}$$

(d) (1.91) eşitliğinin her iki yanının α değişkenine göre türevinin alınmasıyla

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\right)=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)=\frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

ve

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{d\alpha}\alpha^n=\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^{n-1}=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n$$

elde edilir. Dolayısıyla:

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{1}{(1-\alpha)^2}\quad\text{ya da}\quad\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

1.20. Aşağıdaki sinyallerin enerji sinyali veya güç sinyali olup olmadığını belirleyiniz.

(*a*) $x(t)=e^{-at}u(t),\quad a>0$ (*b*) $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$

(*c*) $x(t)=tu(t)$ (*d*) $x[n]=(-0.5)^n u[n]$

(*e*) $x[n]=u[n]$ (*f*) $x[n]=2e^{j3n}$

(a) $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} < \infty$

olduğundan, $x(t)$ bir enerji sinyalidir.

(b) $x(t)$ sinyali periyodik olup, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ olduğundan, Problem 1.18'in sonucundan, $x(t)$'nin ortalama gücü için

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} [x(t)]^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta)\, dt$$

$$= \frac{A^2\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{1}{2}[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)]\, dt = \frac{A^2}{2} < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $x(t)$ bir güç sinyalidir. Periyodik sinyallerin genelde güç sinyalleri olduğu akılda tutulmalıdır.

(c) $E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

Görüldüğü gibi $x(t)$ ne bir enerji sinyali ne de güç sinyalidir.

(d) (1.16) tanımı ve (1.91) eşitliği kullanılarak

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3} < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $x[n]$ bir enerji sinyalidir.

(e) (1.17) tanımından

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(N+1) = \frac{1}{2} < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla, $x[n]$ bir güç işareti dir.

(f) $|x[n]| = |2e^{j3n}| = 2|e^{j3n}| = 2$ olduğundan:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} 4(2N+1) = 4 < \infty$$

Görüldüğü gibi $x[n]$ bir güç sinyalidir.

TEMEL SİNYALLER

1.21. Aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösteriniz.

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases} \qquad (1.97)$$

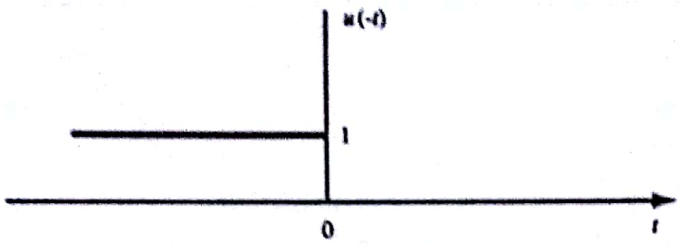
$\tau = -t$ yapılırsa, (1.18) tanımı gereği

$$u(-t) = u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

olur. $\tau > 0$ ve $\tau < 0$, sırasıyla $t < 0$ ve $t > 0$ anlamına geldiğinden

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

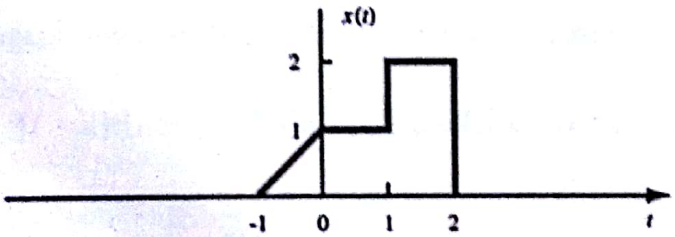
elde edilir. Bu da Şekil 1-26'da görülmektedir.



Şekil 1-26

1.22. Şekil 1-27'de, sürekli zamanlı bir $x(t)$ sinyali görülmektedir. Aşağıdaki tüm sinyalleri çiziniz.

(a) $x(t)u(1-t)$; **(b)** $x(t)[u(t)-u(t-1)]$; **(c)** $x(t)\delta(t-\frac{3}{2})$



Şekil 1-27

(a) (1.19) tanımı gereğince

$$u(1-t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

olup, $x(t)\,u(1-t)$ Şekil 1-28(a)'da görülmektedir.

(b) (1.18) ve (1.19) tanımları kullanılarak

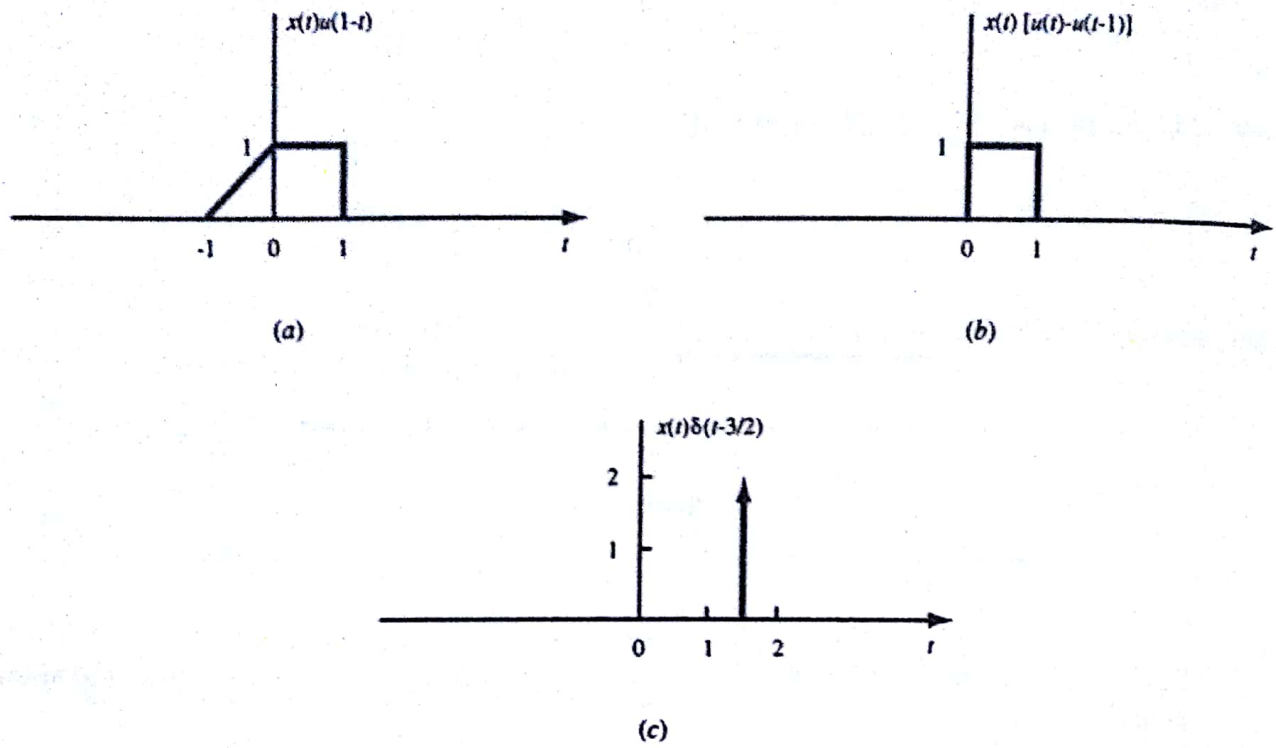
$$u(t) - u(t-1) = \begin{cases} 1 & 0 < t \le 1 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

bulunur. $x(t)[u(t)-u(t-1)]$, Şekil 1-28(b)'de görülmektedir.

(c) (1-26) eşitliğinden

$$x(t)\delta(t-\tfrac{3}{2}) = x(\tfrac{3}{2})\delta(t-\tfrac{3}{2}) = 2\delta(t-\tfrac{3}{2})$$

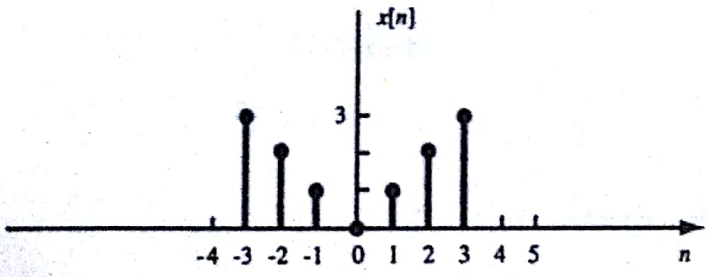
elde edilir. Sonuç, Şekil 1-28 (c)'de görülmektedir.



Şekil 1-28

1.23. Şekil 1-29'da, ayrık zamanlı bir $x[n]$ sinyali görülmektedir. Aşağıdaki sinyallerin her birini çiziniz.

$(a)\ x[n]u[1-n]$; $(b)\ x[n]\{u[n+2]-u[n]\}$; $(c)\ x[n]\delta[n-1]$



Şekil 1-29

(a) (1.44) tanımından

$$u[1-n] = \begin{cases} 1 & n \le 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

elde edilir. $x[n]\ u[1-n]$, Şekil 1-30(a)'da görülmektedir.

(*b*) (1.43) ve (1.44) tanımlarından

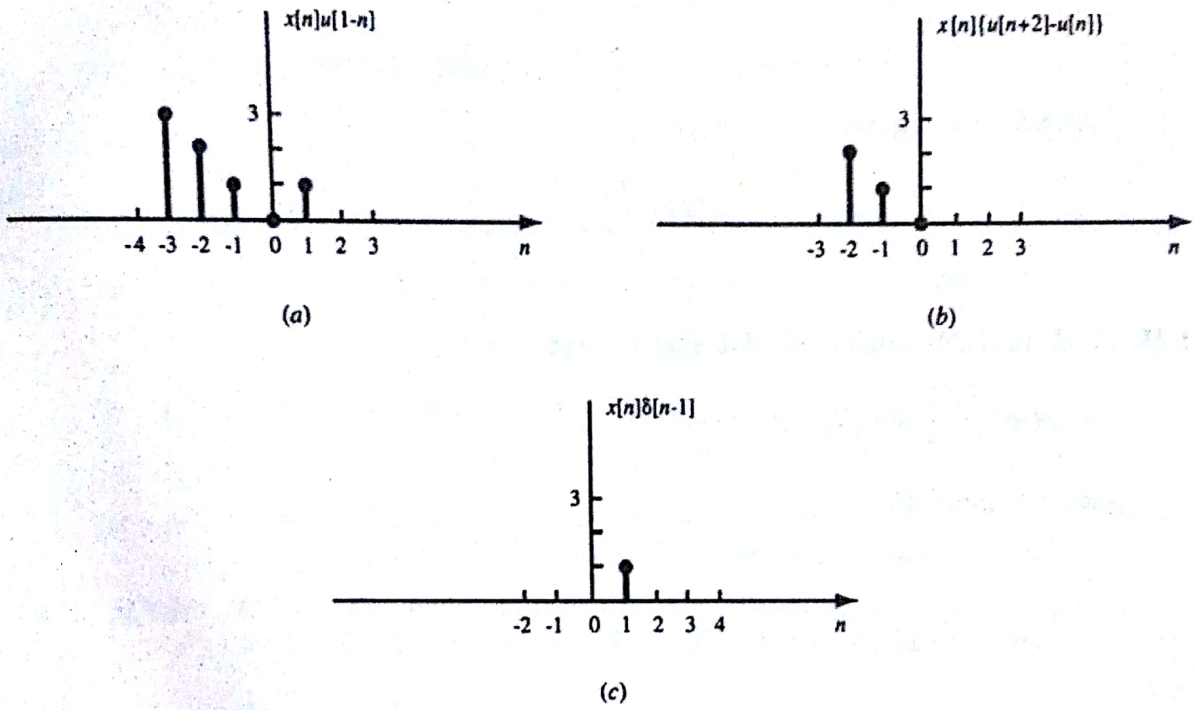
$$u[n+2]-u[n]=\begin{cases}1 & -2\le n<0\\ 0 & \text{diğer durumlar}\end{cases}$$

elde edilir. $x[n]$ ($u[n+2]-u[n]$), Şekil 1-30(b)'de görülmektedir.

(*c*) (1.48) tanımı kullanılarak

$$x[n]\delta[n-1]=x[1]\delta[n-1]=\delta[n-1]=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

elde edilir. Sinyal, Şekil 1-30(c)'de görülmektedir.



Şekil 1-30

1.24. Birim basamak fonksiyonu $u(t)$, aşağıdaki bağıntı yardımıyla genelleştirilmiş bir fonksiyon olarak tanımlanabilir:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)u(t)\,dt=\int_{0}^{\infty}\phi(t)\,dt \qquad (1.98)$$

Burada, $\theta(t)$, $0<t<\infty$ aralığında entegre edilebilen bir sınama fonksiyonudur. Bu tanımı kullanarak

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

(1.98) eşitliği, aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t)u(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0}\phi(t)u(t)\,dt+\int_{0}^{\infty}\phi(t)u(t)\,dt=\int_{0}^{\infty}\phi(t)\,dt$$

Buradan,

$$\int_{-\infty}^{0} \phi(t)u(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} \phi(t)[1-u(t)]\,dt$$

elde edilir. Bu, ancak

$$\int_{-\infty}^{0} \phi(t)u(t)\,dt = 0 \qquad \text{ve} \qquad \int_{0}^{\infty} \phi(t)[1-u(t)]\,dt = 0$$

olması durumunda doğrudur. Bu koşullar,

$$\phi(t)u(t) = 0,\ t<0 \qquad \text{ve} \qquad \phi(t)[1-u(t)] = 0,\ t>0$$

olduğu anlamına gelir. $\phi(t)$ herhangi bir fonksiyon olabildiğinden,

$$u(t) = 0,\ t<0 \qquad \text{ve} \qquad 1-u(t) = 0,\ t>0$$

olur. Sonuç, şu biçimde özetlenebilir.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

1.25. (1.23) ve (1.24) eşitliklerinin doğruluğunu, yani

$$(a)\ \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t);\ (b)\ \delta(-t) = \delta(t)$$

olduğunu gösteriniz.

İspat, aşağıdaki eşdeğerlilik özelliği yardımıyla yapılacaktır.

$g_1(t)$ ve $g_2(t)$ genelleştirilmiş fonksiyonlar olsun. Eşdeğerlilik özelliği, uygun tanımlanmış bütün $\phi(t)$ sınama fonksiyonları için, ancak ve ancak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)g_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)g_2(t)\,dt \tag{1.99}$$

koşulunun sağlanması durumunda $g_1(t) = g_2(t)$ olduğunu belirtir.

(a) $at = \tau$ biçiminde yapılan bir değişken dönüşümü ile, $t = \tau/a$, $dt = (1/a)d\tau$ ve aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$a > 0$ için:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(at)\,dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)\,d\tau = \frac{1}{a}\phi\left(\frac{\tau}{a}\right)\Big|_{\tau=0} = \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

$a < 0$ için:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(at)\,dt = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)\,d\tau$$

$$= -\frac{1}{a}\phi\left(\frac{\tau}{a}\right)\Big|_{\tau=0} = \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

Dolayısıyla, herhangi bir a için:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(at)\,dt = \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

olur. (1.20) eşitliği kullanılarak $\phi(0)$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(at)\,dt = \frac{1}{|a|}\phi(0) = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{1}{|a|}\delta(t)\,dt$$

elde edilir. Bu, her $\phi(t)$ için geçerlidir. (1.99) eşdeğerlilik özelliğinin kullanılmasıyla da

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

elde edilir.

(b) Yukarıdaki eşitlikte $a = -1$ alınarak

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|}\delta(t) = \delta(t)$$

elde edilir. Bu da, $\delta(t)$'nin bir çift fonksiyon olduğunu gösterir.

1.26. *(a)* (1.26) eşitliğini doğrulayınız. $x(t)$'nin $t = t_0$'da sürekli olduğunu varsayınız.

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

(b) (1.25) eşitliğini doğrulayınız. $x(t)$'nin $t = 0$'da sürekli olduğunu varsayınız.

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

(a) $x(t)$, $t = t_0$'da sürekli ise, (1.22) tanımı kullanılarak, $t = t_0$'da sürekli bütün $\phi(t)$ fonksiyonları için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)[x(t)\delta(t - t_0)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(t)x(t)]\delta(t - t_0)\,dt = \phi(t_0)x(t_0)$$

$$= x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - t_0)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)[x(t_0)\delta(t - t_0)]\,dt$$

elde edilir. Dolayısıyla, (1.99) eşdeğerlilik özelliğine göre

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

sonucuna varılır.

(b) Yukarıdaki eşitlikte $t_0 = 0$ yazılarak

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

elde edilir.

1.27. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $t\delta(t) = 0$

(b) $\sin t\delta(t) = 0$

(c) $\cos t\delta(t - \pi) = -\delta(t - \pi)$

(1.25) ve (1.26) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

(a) $t\delta(t) = (0)\delta(t) = 0$

(b) $\sin t\delta(t) = (\sin 0)\delta(t) = (0)\delta(t) = 0$

(c) $\cos t\delta(t - \pi) = (\cos \pi)\delta(t - \pi) = (-1)\delta(t - \pi) = -\delta(t - \pi)$

1.28. Aşağıda tekrar yazılan (1.30) eşitliğini doğruluğunu gösteriniz.

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

(1.28) eşitliğinden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)u'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t)u(t)\,dt \qquad (1.100)$$

elde edilir. Bu eşitlikteki $\phi(t)$, $t = 0$'da sürekli olan ve belli sabit bir aralığın dışında yok olan bir sınama fonksiyonudur. Dolayısıyla $\phi'(t)$ vardır, $0 < t < \infty$ aralığında entegre edilebilir ve $\phi(\infty) = 0$'dır. Buna göre, (1.98) eşitliği veya (1.18) tanımı kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)u'(t)\,dt = -\int_{0}^{\infty} \phi'(t)\,dt = -\phi(t)\Big|_{0}^{\infty} = -[\phi(\infty) - \phi(0)]$$

$$= \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\delta(t)\,dt$$

elde edilir. $\phi(t)$ herhangi bir fonksiyon olduğundan ve (1.99) eşdeğerlilik özelliğinden

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

sonucuna ulaşılır.

1.29. $\delta(t)$ 'nin türevi için aşağıdaki özelliklerin doğruluğunu kanıtlayınız.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t)\,dt = -\phi'(0)$; $\qquad \phi'(0) = \left.\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{t=0}$ $\qquad (1.101)$

(b) $t\delta'(t) = -\delta(t)$ $\qquad (1.102)$

(a) (1.28) ve (1.20) eşitliklerinden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(t)\delta(t)\,dt = -\phi'(0)$$

elde edilir.

(b) (1.101) ve (1.20) eşitliklerinden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)[t\delta'(t)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [t\phi(t)]\delta'(t)\,dt = -\frac{d}{dt}[t\phi(t)]\Big|_{t=0}$$

$$= -[\phi(t) + t\phi'(t)]|_{t=0} = -\phi(0)$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)[-\delta(t)]\,dt$$

elde edilir. (1.99) eşdeğerlilik özelliğinden de

$$t\delta'(t) = -\delta(t)$$

sonucuna varılır.

1.30. Aşağıdaki entegrallerin sonuçlarını bulunuz.

(a) $\int_{-1}^{1}(3t^2+1)\delta(t)\,dt$

(b) $\int_{1}^{2}(3t^2+1)\delta(t)\,dt$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\cos\pi t)\,\delta(t-1)\,dt$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta(2t-2)\,dt$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta'(t)\,dt$

(a) $a=-1$, $b=1$ alınarak (1.21) eşitliği kullanılırsa:

$$\int_{-1}^{1}(3t^2+1)\delta(t)\,dt=(3t^2+1)\big|_{t=0}=1$$

(b) $a=1$, $b=2$ alınarak (1.21) eşitliği kullanılırsa:

$$\int_{1}^{2}(3t^2+1)\delta(t)\,dt=0$$

(c) (1.22) eşitliğinden:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)\,dt=(t^2+\cos\pi t)\big|_{t=1}$$

$$=1+\cos\pi=1-1=0$$

(d) (1.22) ve (1.23) eşitlikleri kullanılarak:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta(2t-2)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta[2(t-1)]\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\frac{1}{|2|}\delta(t-1)\,dt=\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_{t=1}=\frac{1}{2e}$$

(e) (1.29) eşitliği kullanılırsa:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta'(t)\,dt=-\frac{d}{dt}(e^{-t})\Big|_{t=0}=e^{-t}\big|_{t=0}=1$$

1.31. Aşağıdaki sinyallerin ilk türevlerini bulunuz ve çiziniz.

(a) $x(t)=u(t)-u(t-a),\ a>0$

(b) $x(t)=t[u(t)-u(t-a)],\ a>0$

(c) $x(t)=\operatorname{sgn}t=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$

(a) (1.30) eşitliği kullanılırsa

$$u'(t)=\delta(t) \qquad \text{ve} \qquad u'(t-a)=\delta(t-a)$$

Buradan da

$$x'(t) = u'(t) - u'(t-a) = \delta(t) - \delta(t-a)$$

elde edilir. $x(t)$ ve $x'(t)$, Şekil 1.31(a)'da görülmektedir.

(b) İki fonksiyonun çarpımının türevi kuralının ve (a) bölümünün sonucu kullanılarak

$$x'(t) = [u(t) - u(t-a)] + t[\delta(t) - \delta(t-a)]$$

elde edilir. Fakat, (1.25) ve (1.26) eşitliklerinden

$$t\delta(t) = (0)\delta(t) = 0 \qquad \text{ve} \qquad t\delta(t-a) = a\delta(t-a)$$

bulunur. Dolayısıyla:

$$x'(t) = u(t) - u(t-a) - a\delta(t-a)$$

$x(t)$ ve $x'(t)$ sinyalleri Şekil 1.31(b)'de görülmektedir.

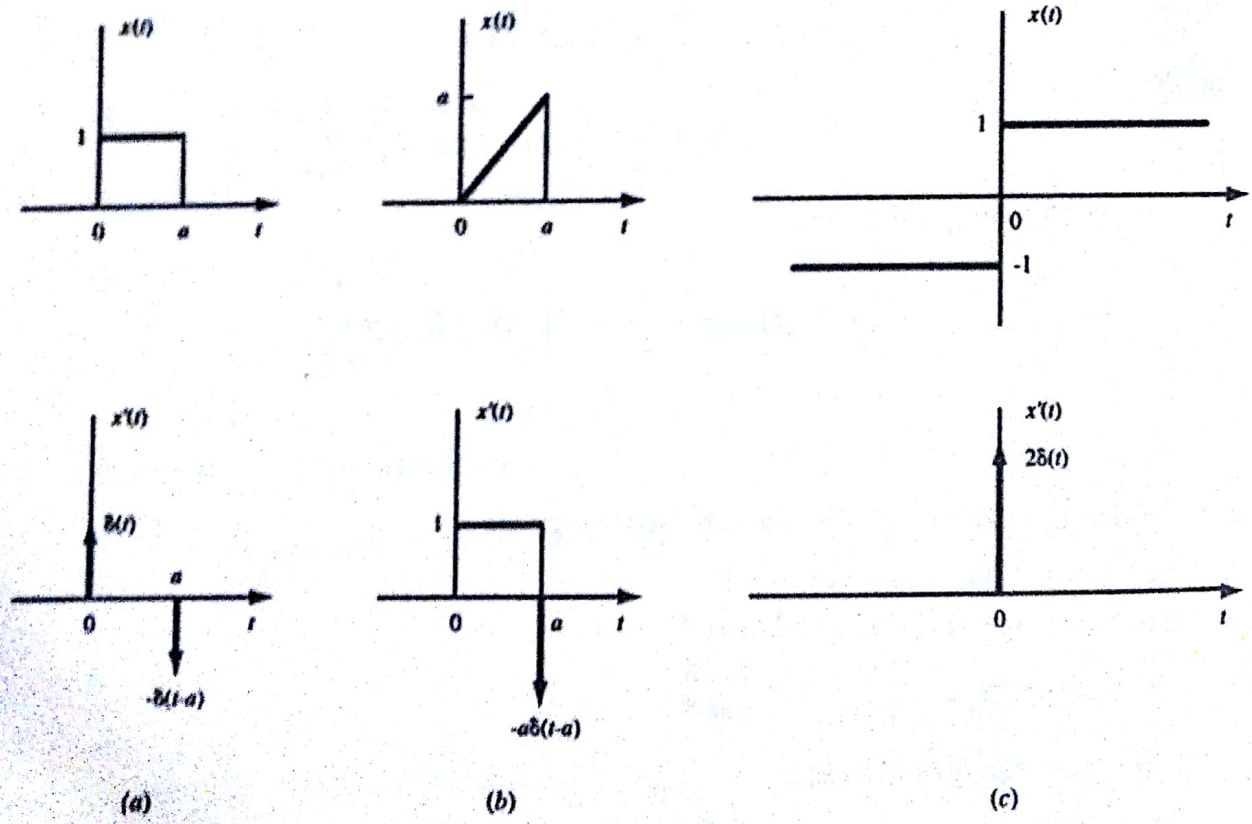
(c) $x(t) = \operatorname{sgn} t$ şu biçimde de yazılabilir:

$$x(t) = \operatorname{sgn} t = u(t) - u(-t)$$

(1.30) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$x'(t) = u'(t) - u'(-t) = \delta(t) - [-\delta(t)] = 2\delta(t)$$

elde edilir. $x(t)$ ve $x'(t)$, Şekil 1.31(c)'de görülmektedir



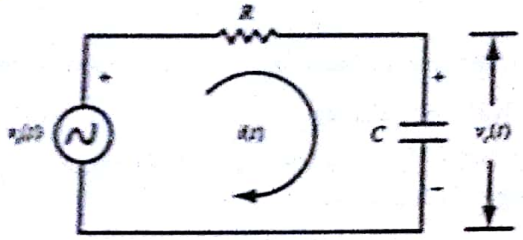
Şekil 1-31

SİSTEMLER VE SİSTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

1.32. Şekil 1-32'de görülen *RC* devresinin girişi $x(t)$ ve çıkışı $y(t)$ arasındaki ilişkiyi aşağıdaki durumlar için bulunuz.

(a) $x(t) = v_s(t)$ ve $y(t) = v_c(t)$ ise

(b) $x(t) = v_s(t)$ ve $y(t) = i(t)$ ise



Şekil 1-32 *RC* devresi

(a) Kirchhoff'un gerilim yasasının *RC* devresine uygulanmasıyla

$$v_s(t) = Ri(t) + v_c(t) \tag{1.103}$$

elde edilir. Akımla gerilim arasındaki ilişki de şu biçimdedir:

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \tag{1.104}$$

$v_s(t) = x(t)$ ve $v_c(t) = y(t)$ alınarak (1.104) eşitliğinin (1.103) eşitliğinde kullanılmasıyla

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

ve

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{1.105}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, *RC* devresinin giriş çıkış ilişkisi, birinci mertebeden sabit katsayılı bir doğrusal türevsel denklemle ifade edilebilir.

(b) (1.104) eşitliğinin entegre edilmesiyle

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \tag{1.106}$$

bulunur. (1.106) eşitliğinin (1.103) içerisinde kullanılması ve $v_s(t) = x(t)$, $i(t) = y(t)$ alınmasıyla

$$Ry(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau = x(t)$$

veya

$$y(t) + \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau = \frac{1}{R}x(t)$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliğin iki yanının da t değişkenine göre türevinin alınmasıyla

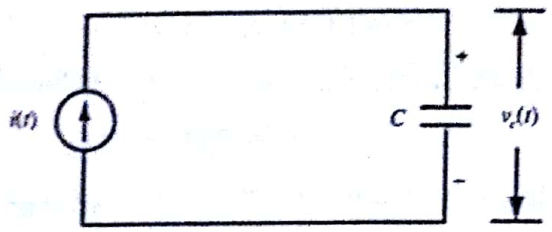
$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{R}\frac{dx(t)}{dt} \qquad (1.107)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, giriş çıkış ilişkisi bir başka birinci mertebeden sabit katsayılı doğrusal türevsel denklemle ifade edilmektedir.

1.33. Şekil 1-33'de görülen kondansatör için giriş, $x(t) = i(t)$ ve çıkış $y(t) = v_c(t)$ olsun.

(a) Giriş-çıkış ilişkisini bulunuz.

(b) Sistemin (*i*) bellekli, (*ii*) nedensel, (*iii*) doğrusal, (*iv*) zamanla değişmez ve (*v*) kararlı olup olmadığını belirleyiniz.



Şekil 1-33

(a) Kapasitenin (C) sabit olduğunu varsayın. Kondansatörün çıkışındaki $y(t)$ gerilimi ile giriş akımı $x(t)$ arasındaki ilişki şu biçimdedir [(1.106) eşitliği].

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \qquad (1.108)$$

(b)

(i) (1.108) eşitliğinden, $y(t)$ çıkışının, girişin geçmişteki ve şimdiki değerlerine bağlı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, sistem belleksizdir.

(ii) $y(t)$ çıkışı girişin gelecek değerlerine bağlı olmadığından, sistem nedenseldir.

(iii) $x(t) = \alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} [\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)]\,d\tau \\ &= \alpha_1\left[\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\,d\tau\right] + \alpha_2\left[\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\,d\tau\right] \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

olduğundan, (1.68) süperpozisyon özelliği sağlanmaktadır ve sistem doğrusaldır.

(iv) $y_1(t)$, ötelenmiş $x_1(t) = x(t-t_0)$ girişine karşı düşen tepki olsun. Buna göre,

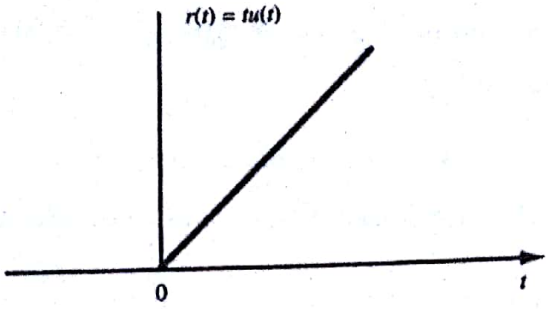
$$\begin{aligned} y_1(t) = \mathrm{T}\{x(t-t_0)\} &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_0)\,d\tau \\ &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t-t_0} x(\lambda)\,d\lambda = y(t-t_0) \end{aligned}$$

olduğundan, sistem zamanla değişmezdir.

(v) $k_1 \neq 0$ olmak üzere $x(t) = k_1\, u(t)$ olsun. Bu durumda

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} k_1 u(\tau)\, d\tau = \frac{k_1}{C}\int_0^t d\tau = \frac{k_1}{C} t u(t) = \frac{k_1}{C} r(t) \qquad (1.109)$$

olur. Bu eşitlikteki $r(t) = t\, u(t)$, birim rampa fonksiyonu olarak adlandırılır (Şekil 1-34). $y(t)$ zamanla sınırsız olarak büyüdüğünden, sistem SGSÇ kararlı değildir.



Şekil 1-34 Birim rampa fonksiyonu

1.34. Şekil 1-35'deki sistemin (a) bellekli, (b) nedensel, (c) doğrusal, (d) zamanla değişmez ve (e) kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

(a) Şekil 1-35'den

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = x(t)\cos\omega_c t$$

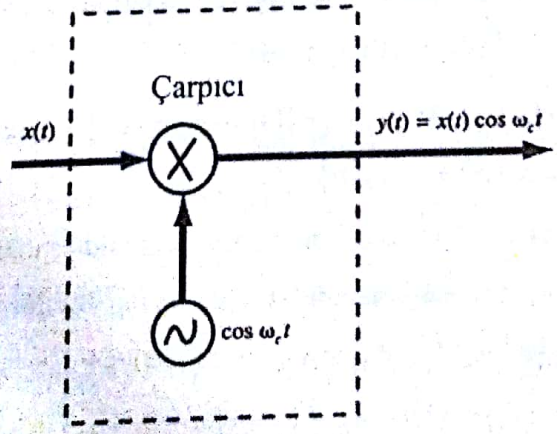
elde edilir. $y(t)$ çıkışı yalnızca girişin şimdiki değerlerine bağlı olduğundan, sistem belleksizdir.

(b) Çıkış girişin gelecek değerlerine bağlı olmadığından, sistem nedenseldir.

(c) $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} &= [\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)]\cos\omega_c t \\ &= \alpha_1 x_1(t)\cos\omega_c t + \alpha_2 x_2(t)\cos\omega_c t \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (1.68) ile verilen süperpozisyon özelliği sağlanmaktadır ve sistem doğrusaldır.



Şekil 1-35

(d) $y_1(t)$, $x_1(t) = x(t-t_0)$ ötelenmiş girişine karşı düşen çıkış olsun. Buna göre

$$y_1(t) = \mathrm{T}\{x(t-t_0)\} = x(t-t_0)\cos\omega_c t$$

olur. Fakat

$$y(t-t_0) = x(t-t_0)\cos\omega_c(t-t_0) \neq y_1(t)$$

olduğundan, sistem zamanla değişmez değildir.

(e) $|\cos\omega_c t| \leq 1$ olduğundan

$$|y(t)| = |x(t)\cos\omega_c t| \leq |x(t)|$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $x(t)$ girişi sınırlı olduğundan, $y(t)$ çıkışı da sınırlıdır ve sistem SGSÇ kararlıdır.

1.35. Bir sistemin giriş çıkış ilişkisi şu biçimde tanımlanmıştır:

$$y = \mathrm{T}\{x\} = x^2 \qquad (1.110)$$

Bu sistemin doğrusal olmadığını gösteriniz.

$$\mathrm{T}\{x_1 + x_2\} = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$
$$\neq \mathrm{T}\{x_1\} + \mathrm{T}\{x_2\} = x_1^2 + x_2^2$$

Görüldüğü gibi sistem doğrusal değildir.

1.36. Şekil 1-36'da görülen ayrık zamanlı sistem, birim geciktirme elemanı olarak adlandırılır. Sistemin (a) belleksiz, (b) nedensel, (c) doğrusal, (d) zamanla değişmez ve (e) kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

Şekil-1-36 Birim geciktirme elemanı

(a) Sistemin giriş çıkış ilişkisi şu biçimde verilmektedir.

$$y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} = x[n-1] \qquad (1.111)$$

n'deki çıkış değeri n–1'deki giriş değerlerine bağlı olduğundan sistem belleklidir.

(b) Çıkış, girişin gelecekteki değerlerine bağlı olmadığından, sistem nedenseldir.

(c) $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$ olsun. Bu durumda,

$$y[n] = \mathrm{T}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 x_1[n-1] + \alpha_2 x_2[n-1]$$
$$= \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$

olup, (1.68) ile verilen süperpozisyon özelliği sağlandığından, sistem doğrusaldır.

(d) $y[n]$, $x_1[n] = x[n-n_0]$ girişine karşı düşen tepki olsun. Bu durumda,

$$y_1[n] = \mathrm{T}\{x_1[n]\} = x_1[n-1] = x[n-1-n_0]$$

ve $$y[n-n_0] = x[n-n_0-1] = x[n-1-n_0] = y_1[n]$$

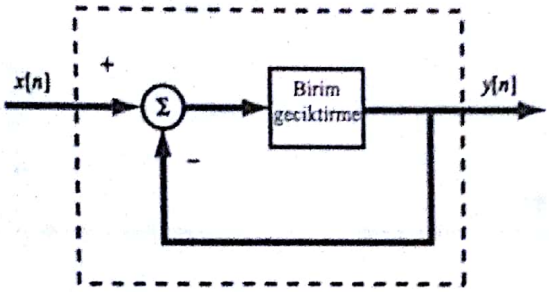
olur. Dolayısıyla, sistem zamanla değişmezdir.

(e) Bütün n değerleri için $|x[n]| \leq k$ ise

$$|y[n]| = |x[n-1]| \leq k$$

olduğundan, sistem SGSÇ kararlıdır.

1.37. Şekil 1-37'deki geribeslemeli sistemin giriş çıkış ilişkisini elde ediniz.



Şekil 1-37

Şekil 1-37'den, birim geciktirme elemanına giriş $x[n]-y[n]$'dir. Dolayısıyla, (1.111) eşitliği de kullanılarak, birim geciktirme elemanının $y[n]$ çıkışı

$$y[n] = x[n-1] - y[n-1]$$

olarak elde edilir. Bu eşitliğin yeniden düzenlenmesi ile

$$y[n] + y[n-1] = x[n-1] \qquad (1.112)$$

yazılabilir. Görüldüğü gibi, sistemin giriş çıkış ilişkisi, birinci mertebeden sabit katsayılı bir türevsel denklemle tanımlanmaktadır.

1.38. Bir sistemin giriş çıkış ilişkisi şu biçimde verilmektedir.

$$y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} = nx[n] \qquad (1.113)$$

Sistemin, (a) belleksiz, (b) nedensel, (c) doğrusal, (d) zamanla değişmez ve (e) kararlı olup olmadığını belirleyiniz.

(a) Çıkışın n'deki değeri yalnızca girişin n'deki değerine bağlı olduğundan sistem belleksizdir.

(b) Çıkış, girişin gelecekteki değerlerine bağlı olmadığından, sistem nedenseldir.

(c) $x[n] = \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]$ olsun. Dolayısıyla,

$$y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} = n(\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n])$$
$$= \alpha_1 n x_1[n] + \alpha_2 n x_2[n] = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$

elde edilir. Dolayısıyla, (1.68) ile tanımlanan süperpozisyon özelliği sağlandığından, sistem doğrusaldır.

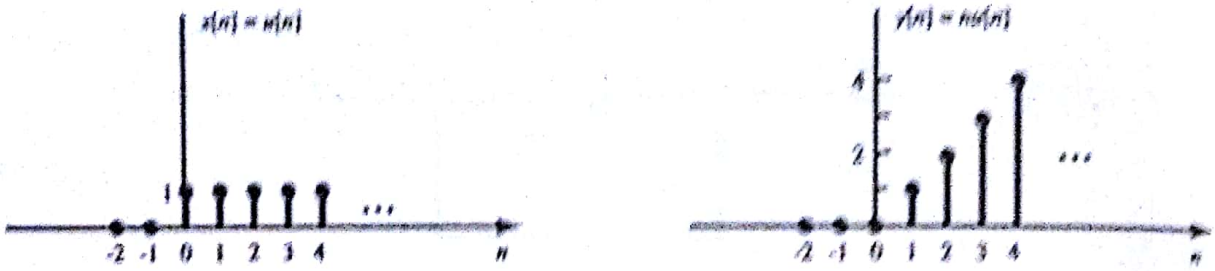
(d) $y_1[n]$, $x_1[n] = x[n-n_0]$ girişine karşı düşen tepki olsun. Bu durumda,

$$y_1[n] = T\{x[n-n_0]\} = nx[n-n_0]$$

olur. Fakat $$y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0] \neq y_1[n]$$

olduğundan, sistem zamanla değişmez değildir.

(e) $x[n] = u[n]$ olsun. Bu durumda $y[n] = n\ u[n]$ olur. Dolayısıyla sınırlı bir basamak dizisi, sınırsız olarak büyüyen bir çıkış dizisine (Şekil 1-38) yol açmaktadır. Bu da, sistemin SGSÇ kararlı olmadığını gösterir.



Şekil 1-38

1.39. Bir sistemin giriş çıkış ilişkisi k_0 pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$y[n] = T\{x[n]\} = x[k_0 n] \qquad (1.114)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Sistemin zamanla değişmez olup olmadığını belirleyiniz.

$y_1[n]$, $x_1[n] = x[n-n_0]$ girişine karşı düşen tepki olsun. Bu durumda,

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = x_1[k_0 n] = x[k_0 n - n_0]$$

olur. Fakat, $$y[n-n_0] = x[k_0(n-n_0)] \neq y_1[n]$$

olduğundan, $k_0 = 1$ olmadıkça, sistem zamanla değişen bir sistemdir. (1.114) eşitliği ile tanımlanan sistem, sıkıştırıcı (kompresör) olarak adlandırılır. Bu sistem, dizinin her k_0 elemanından bir örnek alarak çıkışı oluşturmaktadır. Dolayısıyla, sistemin zamanla değiştiği açıktır.

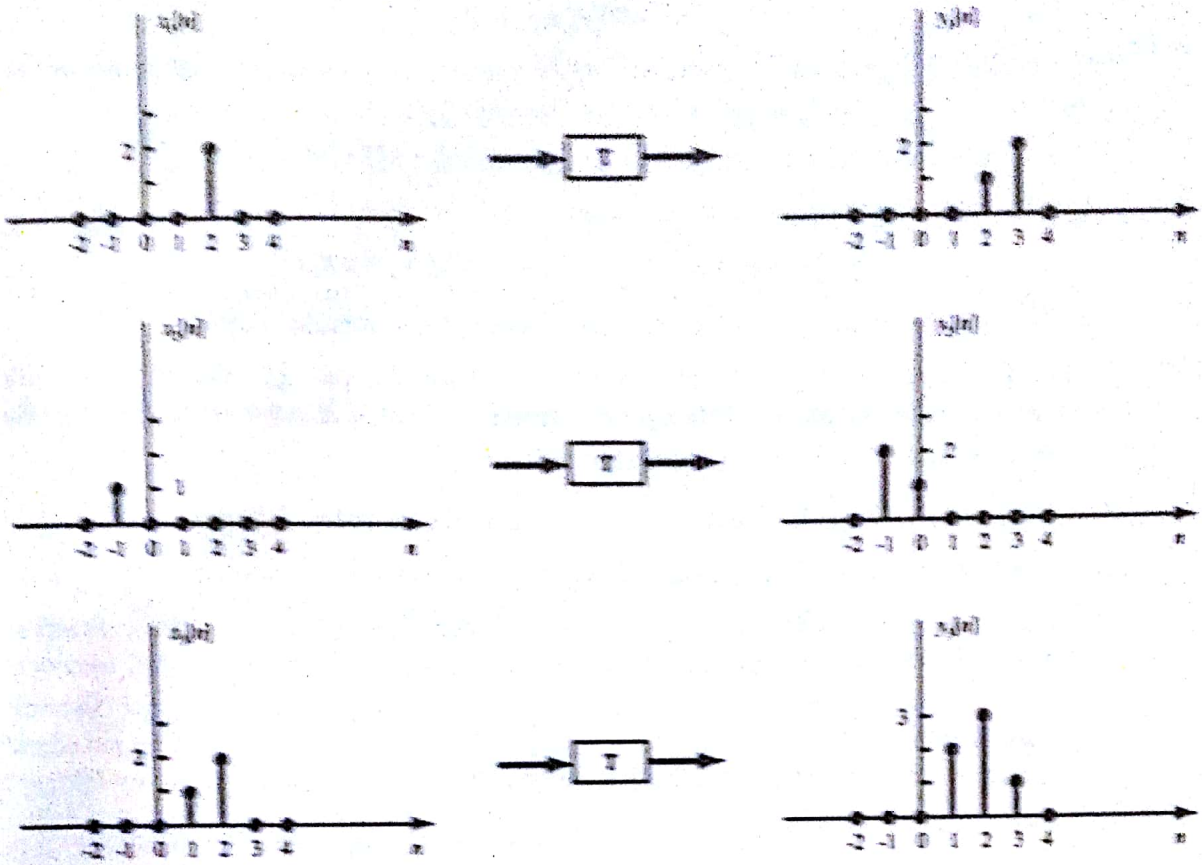
1.40. Giriş çıkış ilişkisi

$$y = ax + b \qquad (1.115)$$

doğrusal eşitliği ile tanımlanan sistemin girişi ve çıkışı, sırasıyla, $x(t)$ ve $y(t)$ olup, a ve b sabit sayılardır. Sistem doğrusal mıdır?

$b \neq 0$ ise, sistem doğrusal değildir, çünkü $x = 0$, $y = b \neq 0$ anlamına gelir. $b = 0$ ise, sistem doğrusaldır.

1.41. Şekil 1-39'da T ile gösterilen sistem, zamanla değişmez olarak bilinmektedir. Sistemin girişi $x_1[n]$, $x_2[n]$, ve $x_3[n]$ olduğunda, çıkışı da $y_1[n]$, $y_2[n]$, ve $y_3[n]$ olmaktadır. Sistemin doğrusal olup olmadığını belirleyiniz.



Şekil 1-39

Şekil 1-39'dan

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n-2]$$

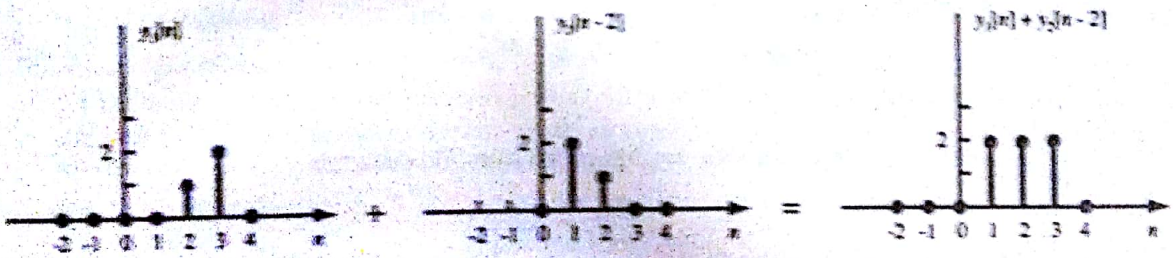
olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, T doğrusal ise

$$T[x_3[n]] = T[x_1[n]] + T[x_2[n-2]] = y_1[n] + y_2[n-2]$$

olmalıdır. Bu işlem Şekil 1-40'da görülmektedir. Şekil 1-39, ve 1-40'dan

$$y_3[n] \neq y_1[n] + y_2[n-2]$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, sistem doğrusal değildir.



Şekil 1-40

1.42. (1.66) ile tanımlanan toplamarlık koşulunu sağlayan, fakat (1.67) homojenlik koşulunu sağlamayan sistemlere bir örnek veriniz.

$$y[n] = T\{x[n]\} = x^*[n] \tag{1.116}$$

bağıntısındaki T operatörü ile gösterilen ayrık zamanlı bir sistemi göz önüne alalım. Bu eşitlikteki $x^*[n]$, $x[n]$'nin karmaşık eşleniğidir. Bu durumda,

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = \{x_1[n] + x_2[n]\}^* = x_1^*[n] + x_2^*[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

yazılabilir. Eğer α herhangi bir karmaşık değerli sabit ise

$$T\{\alpha x[n]\} = \{\alpha x[n]\}^* = \alpha^* x^*[n] = \alpha^* y[n] \neq \alpha y[n]$$

olur. Dolayısıyla, sistem toplanırlık özelliğine sahiptir, fakat homojen değildir.

1.43. *(a)* Sürekli zamanlı doğrusal bir sistem için nedenselliğin şu biçimde de ifade edilebileceğini gösteriniz: Herhangi bir t_0 zamanı ve $t \le t_0$ için $x(t) = 0$ olan herhangi bir $x(t)$ girişi için, $t \le t_0$ bölgesinde $y(t)$ çıkışı sıfırdır.

(b) Nedensel olan, fakat bu koşulu sağlamayan bir nonlineer sistem bulunuz.

(c) Bu koşulu sağlayan, fakat nedensel olmayan bir nonlineer sistem bulunuz.

(a) Sistem doğrusal olduğundan, eğer bütün t değerleri için $x(t)=0$ ise, bütün t değerleri $y(t)=0$'dır. Dolayısıyla, sistem nedensel ise, $t \le t_0$ için $x(t)=0$, $t \le t_0$ için $y(t)=0$ anlamına gelir. Bu gerek koşuldur. Bu koşulun ayrıca yeter koşul da olduğu şu biçimde gösterilebilir: $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ sistemin iki girişi, ve $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ bu girişlere karşı düşen çıkışlar olsun. Eğer $t \le t_0$ için $x_1(t)=x_2(t)$, veya $x(t)=x_1(t)-x_2(t)=0$ ise, $t \le t_0$ için $y_1(t)=y_2(t)$ veya $y(t)=y_1(t)-y_2(t)$ olur.

(b) Giriş çıkış ilişkisi

$$y(t) = x(t) + 1$$

biçiminde olan sistem nonlineerdir (Problem 1.40), ve $y(t)$'nin değeri, $x(t)$'nin yalnızca şimdiki değerlerine bağlı olduğu için, nedenseldir. Fakat, $t \le t_0$ için, $x(t)=0$ ise $y(t)=1$ olur.

(c) Giriş çıkış bağıntısı

$$y(t) = x(t)x(t+1)$$

olan sistemi göz önüne alınız. Açıkça görüldüğü gibi, sistem doğrusal değildir (Problem 1.35), ve $y(t)$'nin t'deki değeri $x(t+1)$ girişinin $t+1$'deki değerine bağlı olduğu için, sistem nedensel de değildir. Bununla birlikte, $t \le t_0$ için $x(t)=0$ olması, $y(t)=0$ anlamına gelir.

1.44. T, sürekli zamanlı DZD bir sistemi göstersin. s karmaşık bir değişken, ve λ karmaşık bir sabit olmak üzere

$$T\{e^{st}\} = \lambda e^{st} \tag{1.117}$$

olduğunu gösteriniz.

$y(t)$, sistemin, $x(t)=e^{st}$ girişine verdiği çıkış olsun. Bu durumda

$$T\{e^{st}\} = y(t)$$

yazılabilir. Sistem zamanla değişmez olduğundan, herhangi bir gerçel t_0 için

$$T\{e^{s(t+t_0)}\} = y(t+t_0)$$

olur. Sistem doğrusal olduğundan

$$T\{e^{s(t+t_0)}\} = T\{e^{st}e^{st_0}\} = e^{st_0}T\{e^{st}\} = e^{st_0}y(t)$$

ve dolayısıyla:

$$y(t+t_0) = e^{st_0}y(t)$$

$t = 0$ alınarak

$$y(t_0) = y(0)e^{st_0} \tag{1.118}$$

elde edilir. t_0, keyfi seçilebildiğinden, t_0 yerine t koymakla, (1.118) eşitliği

$$y(t) = y(0)e^{st} = \lambda e^{st}$$

veya

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Burada, $\lambda = y(0)$' dır.

1.45. T, ayrık zamanlı DZD bir sistemi göstersin. z karmaşık bir değişken ve λ karmaşık bir sabit olmak üzere,

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n \tag{1.119}$$

olduğunu gösteriniz.

$x[n]=z^n$ girişine karşı sistemin çıkışı $y[n]$ olsun. Bu durumda

$$\mathbf{T}\{z^n\} = y[n]$$

olur. Sistem zamanla değişmez olduğundan, herhangi bir n_0 tamsayısı için

$$\mathbf{T}\{z^{n+n_0}\} = y[n+n_0]$$

yazılabilir. Sistem doğrusal olduğundan

$$\mathbf{T}\{z^{n+n_0}\} = \mathbf{T}\{z^n z^{n_0}\} = z^{n_0}\mathbf{T}\{z^n\} = z^{n_0}y[n]$$

olur. Dolayısıyla, $y[n+n_0] = z^{n_0}y[n]$ elde edilir. $n = 0$ alınarak

$$y[n_0] = y[0]z^{n_0} \tag{1.120}$$

bulunur. n_0 keyfi olduğundan, n_0 yerine n alarak, (1.120) eşitliği

$$y[n] = y[0]z^n = \lambda z^n$$

veya

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Burada $\lambda = y[0]$' dır.

Matematik dilinde,

$$\mathbf{T}\{x(\cdot)\} = \lambda x(\cdot) \tag{1.121}$$

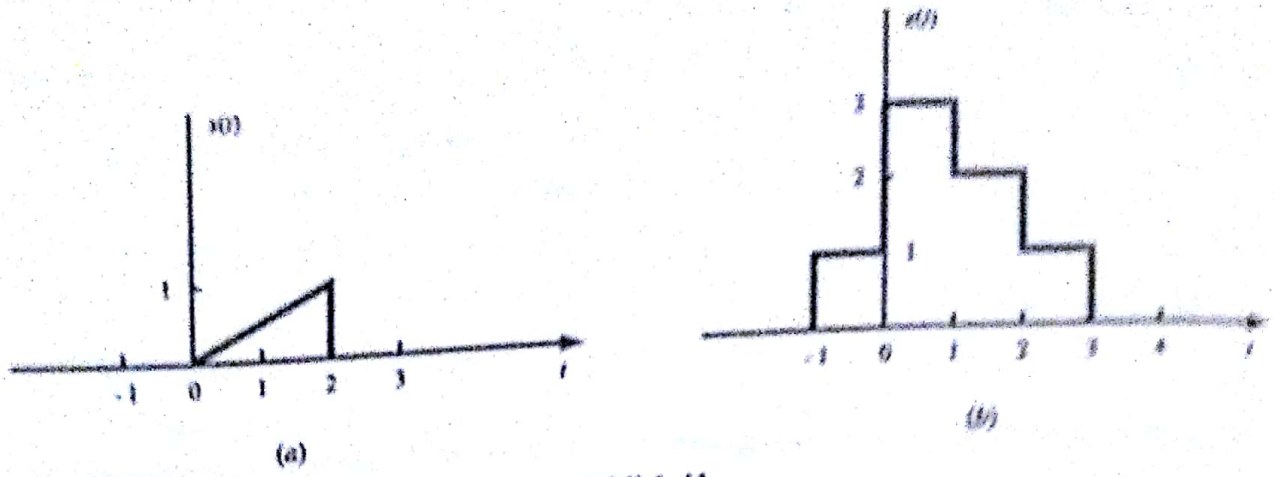
eşitliğini sağlayan bir $x(\cdot)$ fonksiyonu **T** operatörünün öz fonksiyonu (veya karakteristik fonksiyon) adını, λ sabiti de, $x(\cdot)$ öz fonksiyonuna karşı düşen özdeğer (veya karakteristik değer) adını alır. Dolayısıyla (1.117) ve (1.119) eşitlikleri, karmaşık üstel fonksiyonların, herhangi bir DZD sistemin öz fonksiyonları olduğunu gösterir.

Ek Problemler

1.46. Şekil 1-41'de görülen işaretleri, birim basamak fonksiyonları yardımıyla açıklayınız.

Yanıt: (*a*) $x(t) = \frac{t}{2}[u(t) - u(t-2)]$

(*b*) $x(t) = u(t+1) + 2u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$



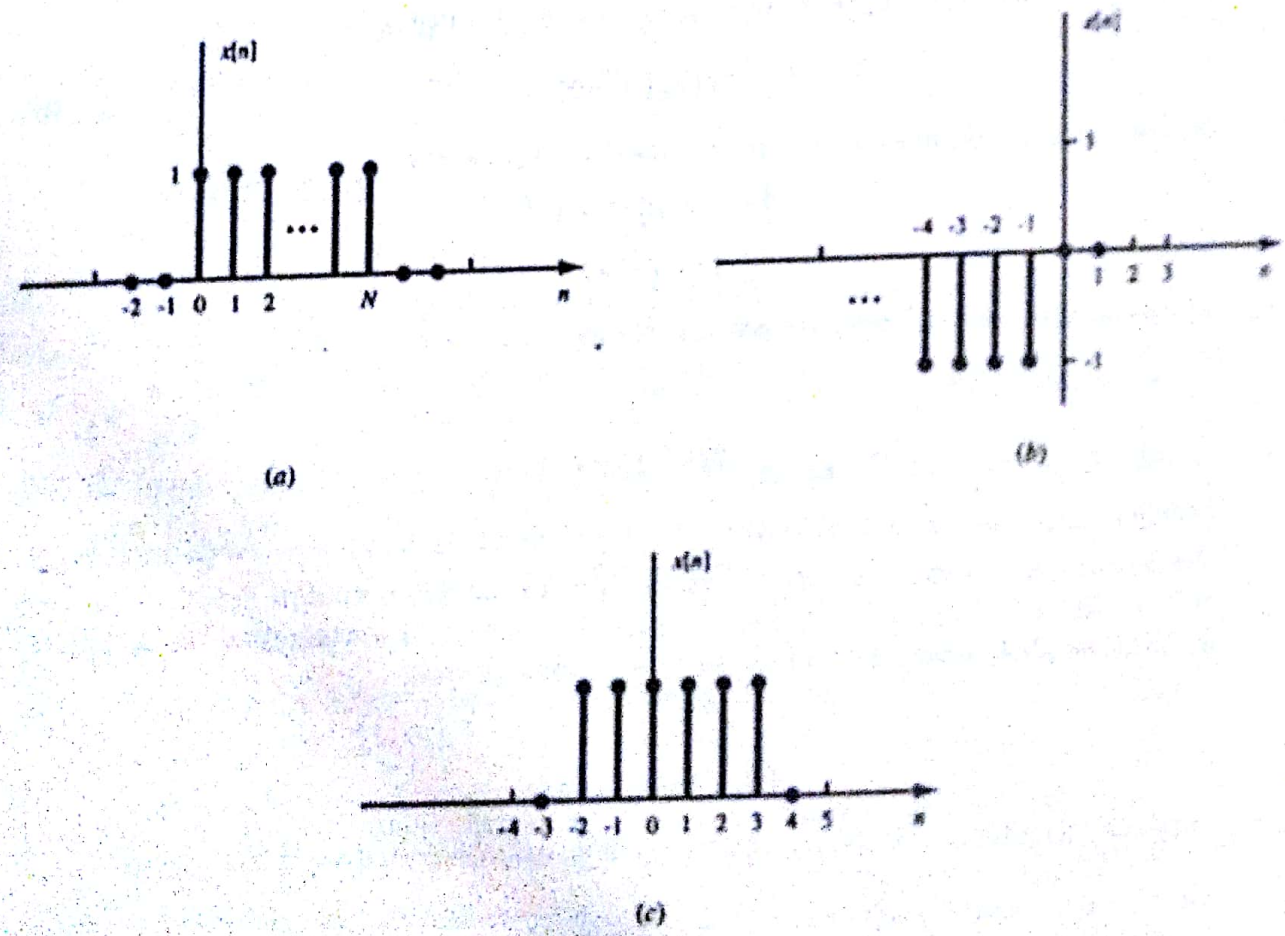
Şekil 1-41

1.47. Şekil 1-42'de görülen dizileri, birim basamak fonksiyonları yardımıyla ifade ediniz.

Yanıt: (a) $x[n] = u[n] - u[n-(N+1)]$

(b) $x[n] = -u[-n-1]$

(c) $x[n] = u[n+2] - u[n-4]$



Şekil 1-42

1.48. Aşağıdaki sinyallerin tek ve çift bileşenlerini belirleyiniz.

(*a*) $x(t) = u(t)$

(*b*) $x(t) = \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$

(*c*) $x[n] = e^{j(\Omega_0 n + \pi/2)}$

(*d*) $x[n] = \delta[n]$

Yanıt: (*a*) $x_e(t) = \frac{1}{2}, x_o(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} t$

(*b*) $x_e(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega_0 t, x_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\omega_0 t$

(*c*) $x_e[n] = j\cos\Omega_0 n, x_o[n] = -\sin\Omega_0 n$

(*d*) $x_e[n] = \delta[n], x_o[n] = 0$

1.49. $x(t)$, çift ve tek bölümleri $x_e(t)$ ve $x_o(t)$ olan herhangi bir sinyal olsun.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)\,dt$$

olduğunu gösteriniz. (İpucu: Problem 1.7'nin sonucunu ve (1.77) eşitliğini kullanınız.)

1.50. $x[n]$, çift ve tek bölümleri $x_e[n]$ ve $x_o[n]$ olan herhangi bir dizi olsun.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$

olduğunu gösteriniz. (İpucu: Problem 1.7'nin sonucunu ve (1.77) eşitliğini kullanınız.)

1.51. Aşağıdaki sinyallerin periyodik olup olmadığını belirleyiniz. Periyodik olanların temel periyodunu bulunuz.

(*a*) $x(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

(*b*) $x(t) = \cos^2 t$

(*c*) $x(t) = (\cos 2\pi t)u(t)$

(*d*) $x(t) = e^{j\pi t}$

(*e*) $x[n] = e^{j[(n/4)-\pi]}$

(*f*) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

(*g*) $x[n] = \cos\left(\frac{n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

(*h*) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

Yanıt: (*a*) Periyodik, periyot = π (*b*) Periyodik, periyot = π

(*c*) Periyodik değil (*d*) Periyodik, periyot = 2

(*e*) Periyodik değil (*f*) Periyodik, periyot = 8

(*g*) Periyodik değil (*h*) Periyodik, periyot = 16

1.52. $x[n]$, periyodu N olan bir dizidir. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.

$$(a)\quad \sum_{k=n_0}^{N} x[k] = \sum_{k=n_0+N}^{n_0+N} x[k]; \qquad (b)\quad \sum_{k=0}^{N} x[k] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N} x[k]$$

İpucu: Problem 1.17'ye bakınız.

1.53. *(a)* $\delta(2t) = ?$

(b) $\delta[2t] = ?$

Yanıt: (*a*) $\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$

(*b*) $\delta[2n] = \delta[n]$

1.54. $\delta'(-t) = -\delta'(t)$

olduğunu gösteriniz. (İpucu: (1.101) ve 1.99) eşitliklerini kullanınız.)

1.55. Aşağıdaki entegralleri hesaplayınız.

(*a*) $\int_{-\infty}^{t} (\cos\tau)u(\tau)\,d\tau$ (*b*) $\int_{-\infty}^{t} (\cos\tau)\delta(\tau)\,d\tau$

(*c*) $\int_{-\infty}^{\infty} (\cos t)u(t-1)\delta(t)\,dt$ (*d*) $\int_{0}^{2\pi} t\sin\frac{t}{2}\delta(\pi - t)\,dt$

Yanıt: (*a*) $\sin t$

(*b*) $t > 0$ için 1; $t \le 0$ için 0; $t = 0$ için tanımsız

(*c*) 0

(*d*) π

1.56. Giriş, çıkış ilişkisi

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau$$

biçiminde olan sürekli zamanlı sistemin (a) doğrusal, (b) zamanla değişmez, (c) nedensel olup olmadığını belirleyiniz.

Yanıt: (a) Doğrusal; (b) Zamanla değişmez; (c) Nedensel değil

1.57. Giriş, çıkış ilişkisi

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t - kT_s)$$

biçiminde olan sürekli zamanlı sistemin (a) doğrusal, (b) zamanla değişmez olup olmadığını belirleyiniz.

Yanıt: (a) Doğrusal; (b) Zamanla değişen

1.58. Giriş çıkış ilişkisi

$$y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} = x^2[n]$$

biçiminde olan ayrık zamanlı sistemin (a) doğrusal, (b) zamanla değişmez olup olmadığını belirleyiniz.

Yanıt: (a) Doğrusal değil; (b) Zamanla değişmez

1.59. (1.67) homojenlik koşulunu sağlayan, fakat (1.66) toplanırlık koşulunu sağlamayan sistemlere bir örnek veriniz.

Yanıt:

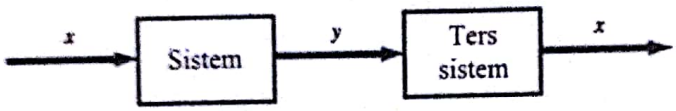
$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = \left[\int_a^b [x(\tau)]^2\, d\tau\right]^{1/2}$$

bağıntısı ile tanımlanan sistemi gözönüne alınız.

1.60. Periyodik bu girişe karşı periyodik olmayan bir çıkış üreten doğrusal, zamanla değişen sistemlere bir örnek veriniz.

Yanıt: $y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} = nx[n]$

1.61. Bir sistemin çıkış sinyali y kullanılarak girişi için tek bir x bulunabiliyorsa, sistemin tersinin alınabildiği söylenir. Bu durumun Şekil 1-43'de görülmektedir. Aşağıdaki sistemlerin terslerinin alınıp alınamadığını belirleyiniz. Tersi alınabilir olanların tersini alınız.



Şekil 1-43

(a) $y(t) = 2x(t)$

(b) $y(t) = x^2(t)$

(c) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$

(d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(e) $y[n] = nx[n]$

Yanıt: (a) Tersi alınabilir; $x(t) = \frac{1}{2}y(t)$

(b) Tersi alınamaz

(c) Tersi alınabilir; $x(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$

(d) Tersi alınabilir; $x[n] = y[n] - y[n-1]$

(e) Tersi alınamaz.

2. Bölüm

Doğrusal, Zamanla Değişmeyen Sistemler

2.1. GİRİŞ

Sistemlerin iki önemli özelliği doğrusallık ve zamanla değişmezliktir. Bu bölümde bu özelliklere sahip olan sistemlerin temel giriş-çıkış ilişkisi geliştirilecektir. DZD sistemler için bu giriş-çıkış ilişkisinin bir konvolüsyon işlemi cinsinden tanımlandığı gösterilecektir. DZD sistemlerde konvolüsyon işleminin önemi; DZD bir sistemin birim dürtü girişine olan tepkisinin bilinmesinin herhangi bir giriş sinyaline olan tepkisini bulma olanağını bize vermesinden kaynaklanmaktadır. DZD sistemler için giriş-çıkış ilişkilerinin türevsel ve fark denklemleri ile tanımlanması da incelenecektir.

2.2. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİSİ VE KONVOLÜSYON ENTEGRALİ

A. Dürtü Tepkisi:

T ile gösterilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $h(t)$ dürtü tepkisi, giriş $\delta(t)$ olduğundaki sistem tepkisi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle:

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \tag{2.1}$$

B. Herhangi Bir Girişe olan Tepki:

Eşitlik (1.27)'den $x(t)$ girişi

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

olarak ifade edilebilir. Sistem doğrusal olduğundan sistemin herhangi bir girişe olan tepkisi de

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau \tag{2.3}$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca, sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \tag{2.4}$$

yazılabilir. Eşitlik (2.4), Eşitlik (2.3)'de yerine konursa

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \tag{2.5}$$

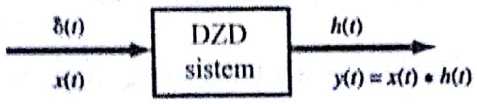
elde edilir. (2.5) eşitliği sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $h(t)$ dürtü tepkisi ile tümüyle tanımlandığını göstermektedir.

C. Konvolüsyon Entegrali:

Eşitlik (2.5); sürekli zamanlı iki adet $x(t)$ ve $h(t)$ sinyalinin

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.6)$$

ifadesi ile verilen konvolüsyonunu tanımlar. (2.6) eşitliği yaygın olarak konvolüsyon entegrali olarak bilinir. O halde, ulaşılan temel sonuç; herhangi bir sürekli zamanlı, DZD sistemin çıkışı, $x(t)$ girişi ile sistemin dürtü tepkisi $h(t)$'nin konvolüsyonudur. Şekil 2-1 dürtü tepkisinin tanımını ve Eşitlik (2.6)'daki ilişkiyi sergilemektedir.



Şekil 2-1 Sürekli Zamanlı DZD Sistem

D. Konvolüsyon Entegralinin Özellikleri:

Konvolüsyon entegrali aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Yer değiştirme:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \qquad (2.7)$$

2. Birleşim:

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} \qquad (2.8)$$

3. Dağılım:

$$x(t) * \{h_1(t)\} + h_2(t)\} = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \qquad (2.9)$$

E. Konvolüsyon Entegral İşlemi:

Konvolüsyonun yer değiştirme özelliği (2.7), Eşitlik (2.6)'ya uygulanırsa

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.10)$$

elde edilir. Konvolüsyonu Eşitlik (2.6) yerine Eşitlik (2.10) ile bulma çoğu kez daha kolaydır. Konvolüsyon işleminin (Eşitlik 2.6) aşağıdaki dört adımdan oluştuğu görülmektedir.

1. $h(\tau)$ dürtü tepkisi zamana göre ters çevrilerek (orijine göre yansıtılarak) $h(-\tau)$ elde edilir. Daha sonra t parametreli, τ 'nun bir fonksiyonu olan $h(t-\tau)=h[-(\tau-t)]$'yi oluşturmak için t birim kaydırılır.
2. t parametresi sabit tutularak $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ sinyalleri, τ 'nun tüm değerleri için çarpılır.

3. $y(t)$ çıkışının tek bir değerini üretmek için $x(\tau)h(t-\tau)$ çarpımı tüm τ için entegre edilir.

4. $y(t)$ çıkışının tüm değerlerini üretmek için t'nin $-\infty$'dan $+\infty$'a kadar olan değerleri ile 1-3 adımları tekrarlanır.

Yukarıdaki konvolüsyon işlemine ilişkin örnekler Prob. 2.4-2.6'da verilmiştir.

F. Basamak Tepkisi:

T ile gösterilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $s(t)$ basamak tepkisi; giriş $u(t)$ olduğundaki sistem tepkisi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle:

$$s(t) = \mathbf{T}\{u(t)\} \tag{2.11}$$

Çoğu uygulamalarda $s(t)$ basamak tepkisi de yararlı bir sistem tanımıdır. Eşitlik (2.10) kullanılarak $s(t)$ basamak tepkisi kolayca saptanabilir.

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \tag{2.12}$$

O halde, $h(t)$ dürtü tepkisi entegre edilirse $s(t)$ basamak tepkisi elde edilir. Eşitlik (2.12)'nin t'ye göre türevi alınırsa

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{2.13}$$

olduğu görülür. O halde, $s(t)$ basamak tepkisinin türevi alınarak $h(t)$ dürtü tepkisi elde edilebilir.

2.3. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

A. Bellekli ya da Belleksiz Sistemler:

Belleksiz bir sistemin $y(t)$ çıkışı yalnızca o andaki $x(t)$ girişine bağımlı olduğundan, doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistem için bu ilişki yalnızca aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y(t) = Kx(t) \tag{2.14}$$

Burada K sistem kazancı olup bir sabittir. Dolayısıyla, sisteme ilişkin $h(t)$ dürtü tepkisi aşağıdaki sade ilişki ile tanımlanır.

$$h(t) = K\delta(t) \tag{2.15}$$

Sonuç olarak, eğer $t \neq 0$ için $h(t) \neq 0$ ise sürekli zamanlı, DZD sistem belleklidir.

B. Nedensellik:

Bölüm 1.5 D'de açıklandığı üzere bir olay gerçekten oluşana kadar nedensel bir sistem bu giriş olayına tepki vermez. Bu nedenle nedensel, DZD bir sistem için

$$h(t) = 0 \qquad t < 0 \tag{2.16}$$

(2.16) nedensellik koşulunu Eşitlik (2.10)'a uygulayarak, nedensel, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.17)$$

Ya da (2.16) nedensellik koşulunu Eşitlik (2.6)'ya uygulayarak $y(t)$ için şu alternatif ifade bulunur.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.18)$$

Eşitlik (2.18) göstermektedir ki, $y(t)$ çıkışını hesaplamak için kullanılan $x(t)$ girişinin değerleri yalnızca $\tau \le t$ koşulunu sağlayan giriş değerleridir. (2.16) koşuluna dayanarak, eğer:

$$x(t) = 0 \qquad t < 0 \qquad (2.19a)$$

ise bir $x(t)$ sinyali nedenseldir, eğer

$$x(t) = 0 \qquad t > 0 \qquad (2.19b)$$

ise nedensel değildir. Bu durumda, Eşitlik (2.17), (2.18) ve (2.19a) kullanılarak nedensel bir $x(t)$ girişi için nedensel, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$y(t) = \int_0^{t} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \qquad (2.20)$$

C. Kararlılık:

DZD bir sistemin SGSÇ (Sınırlı giriş/sınırlı çıkış) kararlılığı (Bölüm 1.5H), onun dürtü tepkisinden kolayca irdelenebilir. Eğer dürtü tepkisi mutlak entegre edilebilir ise, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty \qquad (2.21)$$

koşulu sağlanıyor ise, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin SGSÇ anlamında kararlı olduğu gösterilebilir (Prob. 2.13).

2.4. SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZFONKSİYONLARI

Bölüm 1 (Prob. 1.44)'de, **T** ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD sistemlerin özfonksiyonlarının, s bir karmaşık değişken olmak üzere, e^{st} biçimindeki karmaşık fonksiyonlar olduğu belirlenmişti. Bu durumda,

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st} \qquad (2.22)$$

olup, burada λ, **T**'nin e^{st}'ye ilişkin özdeğeridir. Eşitlik (2.10)'da $x(t)= e^{st}$ koyarak

$$y(t) = \mathbf{T}\{e^{st}\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{s(t-\tau)}\,d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau\right] e^{st}$$

$$= H(s)\,e^{st} = \lambda e^{st} \qquad (2.23)$$

bulunur. Burada $$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau \qquad (2.24)$$

O halde, sürekli zamanlı, DZD bir sistemin e^{st} özfonksiyonuna ilişkin özdeğeri karmaşık bir sabit olan $H(s)$ olup değeri, s'nin ilgili değeri kullanılarak Eşitlik (2.24) ile hesaplanır. Eşitlik (2.23)'den $y(0)= H(s)$ olduğuna dikkat ediniz. (bkz. Prob. 1.44).

Yukarıdaki sonuçlar Bölüm 3 ve 5'de incelenen Laplace ve Fourier dönüşüm tanımlarının temelini oluşturmaktadır.

2.5. TÜREVSEL DENKLEMLERLE TANIMLANAN SİSTEMLER

A. Doğrusal, Sabit Katsayılı Türevsel Denklemler:

N. mertebeden, doğrusal, sabit katsayılı, genel bir türevsel denklem

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{2.25}$$

biçiminde verilmiş olsun. Burada a_k ve b_k katsayıları gerçel sabitlerdir. Eşitlik (2.25)'de N, $y(t)$'nin en yüksek türev derecesini gösterir. Bu tür türevsel denklemler; elektrik, mekanik, kimyasal ve biyolojik alanlardaki farklı sistemlere ilişkin giriş-çıkış ilişkilerini tanımlamada önemli bir rol üstlenir. Örneğin Prob. 1.32'deki RC devresinde $x(t)=v_s(t)$ girişi ve $y(t)=v_c(t)$ çıkışı, birinci mertebeden, sabit katsayılı bir denklem ile ilişkilendirilebilir [Eşitlik (1.105)].

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

Belirli bir $x(t)$ girişi için Eşitlik (2.25)'in genel çözümü

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \tag{2.26}$$

biçiminde olup, $y_p(t)$, Eşitlik (2.25)'i sağlayan bir özel çözüm, $y(t)$ ise aşağıdaki homojen türevsel denklemi sağlayan bir homojen (ya da komplimenter) çözümdür.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0 \tag{2.27}$$

$y_h(t)$'nin kesin biçimini N adet yardımcı koşul belirler. Yardımcı koşullar tanımlamadan Eşitlik (2.25)'in, $y(t)$ çıkışını $x(t)$ cinsinden tümüyle belirlemediğine dikkat ediniz. Genel olarak, bu yardımcı koşullar

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

değişkenlerinin belirli bir t anındaki değerleridir.

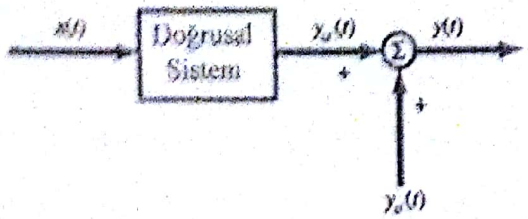
B. Doğrusallık:

Eğer yardımcı koşulların tümü sıfır ise Eşitlik (2.25) ile tanımlanan sistem doğrusaldır (bkz. Prob. 2.21). Eğer yardımcı koşullar sıfır değilse, sistemin $y(t)$ tepkisi

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{2.28}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada; $y_{zi}(t)$, sistemin verilen yardımcı koşulların ilişkin sıfır giriş tepkisi, $y_{zs}(t)$, ise sıfır yardımcı koşullara sahip, doğrusal bir sistemin sıfır durum tepkisidir [Şekil 2.2].

$y_{zi}(t) \neq y_h(t)$ ve $y_{zs}(t) \neq y_p(t)$ olduğuna dikkat ediniz. Genel olarak $y_{zi}(t)$, $y_h(t)$'yi, $y_{zs}(t)$ ise hem $y_h(t)$'yi hem de $y_p(t)$'yi içermektedir (bkz. Prob. 2.20).



Şekil 2.2 Sıfır durum ve sıfır giriş tepkileri

C. Nedensellik:

Eşitlik (2.25) ile tanımlanan bir doğrusal sistemin nedensel olması için başlangıçta durgun olmak koşulunu (ya da ilk enerjisiz olma koşulu) varsaymamız gerekir. Diğer bir deyişle, $t \le t_0$ için $x(t)=0$ ise yine $t \le t_0$ için $y(t)=0$ olduğunu varsayınız (Prob. 1.43). Bu durumda $t > t_0$ için tepki aşağıdaki başlangıç koşullarını kullanarak Eşitlik (2.25)den hesaplanabilir.

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \cdots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

Burada:

$$\frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0}.$$

Açıkça görülmektedir ki başlangıçta durgun olan bir sistemde $y_{zi}(t) = 0$'dır.

D. Zamanla Değişmezlik:

Bir doğrusal nedensel sistemde başlangıçta durgunluk onun zamanla değişmezliğini de ima eder (Prob. 2.22).

E. Dürtü Tepkisi:

Eşitlik (2.25) ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $h(t)$ dürtü tepkisi, başlangıçta durgun olma koşuluyla birlikte aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \qquad (2.29)$$

Dürtü tepkisini hesaplama örnekleri Prob. (2. 29) ve (2.24)'de verilmiştir. Daha sonraki bölümlerde dürtü tepkisi dönüşüm teknikleri kullanılarak bulunacaktır.

2.6. AYRIK ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİSİ VE KONVOLÜSYON TOPLAMI

A. Dürtü Tepkisi:

T ile gösterilen ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi (ya da birim örnek tepkisi), girişe $\delta(t)$ uygulandığı zamanki tepkisi olarak şöyle tanımlanır:

$$h[n] = \mathrm{T}\{\delta[n]\} \qquad (2.30)$$

B. Herhangi Bir Girişe Tepki:

Eşitlik (1.53)'den $x[n]$ girişi

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \tag{2.31}$$

olarak ifade edilebilir. Sistem doğrusal olduğundan sistemin herhangi bir $x[n]$ girişine olan $y[n]$ tepkisi

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \tag{2.32}$$

olarak ifade edilebilir. Sistem zamanla değişmez olduğundan

$$h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \tag{2.33}$$

yazılabilir. Eşitlik (2.33), Eşitlik (2.32)'de yerine konarak

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{2.34}$$

elde edilir. (2.34) eşitliği göstermektedir ki ayrık zamanlı, DZD bir sistem, $h(t)$ dürtü tepkisi ile tümüyle tanımlanmaktadır.

C. Konvolüsyon Toplamı

Eşitlik (2.5); iki adet $x[n]$ ve $h[n]$ dizisinin

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{2.35}$$

ifadesi ile verilen konvolüsyonunu tanımlar. (2.35) eşitliği yaygın olarak konvolüsyon toplamı olarak bilinir. O halde, yine ulaşılan temel sonuç; herhangi bir ayrık zamanlı, DZD sistemin çıkışı, $x[n]$ girişi ile sistemin dürtü tepkisi $h[n]$'nin konvolüsyonudur. Şekil 2.3 dürtü tepkisinin tanımını ve Eşitlik (2.35)'deki ilişkiyi sergilemektedir.

Şekil 2.3 Ayrık zamanlı, DZD sistem

D. Konvolüsyon Toplamının Özellikleri:

Konvolüsyon toplamın aşağıdaki özellikleri Böl.(2.3)'de bahsedilen konvolüsyon entegralinin özelliklerinin karşılığı olan özelliklerdir.

1. *Yer değiştirme:*

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n] \tag{2.36}$$

2. *Birleşim:*

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\} \tag{2.37}$$

3. *Dağılım:*

$$x[n]*\{h_1[n]\}+h_2[n]\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n] \tag{2.38}$$

E. Konvolüsyon Toplamına İlişkin İşlem:

Yine, konvolüsyon toplamın yer değiştirme özelliği Eşitlik (2.35)'e uygulanırsa

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{2.39}$$

elde edilir. Bu işlem, Eşitlik (2.35) ile hesaplamaya kıyasla çoğu kez daha kolaydır. Sürekli zamanlı sistemlerde olduğu gibi konvolüsyon toplamı [Eşitlik (2.35)] aşağıdaki dört adımdan oluşur:

1. $h[k]$ dürtü tepkisi zamana göre ters çevrilerek (orijine göre yansıtılarak) $h[-k]$ elde edilir. Daha sonra n parametreli, k'nın bir fonksiyonu olan $h[n-k]=h[-(k-n)]$'yi oluşturmak için n birim kaydırılır.
2. n parametresi sabit tutularak $x[k]$ ve $h[n-k]$ dizileri k'nın tüm değerleri için çarpılır.
3. $y[n]$ çıkışının tek bir değerini üretmek için $x[k]$ $h[n-k]$ çarpımı tüm k için çarpılır.
4. $y[n]$ çıkışının tüm değerlerini üretmek için n'nin $-\infty$'dan $+\infty$'a kadar olan değerleri için 1-3 adımları tekrarlanır.

Yukarıdaki konvolüsyon toplamı işlemine ilişkin örnekler Prob.(2.28) ve (2.30)'da verilmiştir.

F. Basamak Tepkisi:

$h[n]$ dürtü tepkisi ile tanımlanan ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $s[n]$ basamak tepkisi Eşitlik (2.39) kullanılarak kolayca bulunur.

$$s[n]=h[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{2.40}$$

Eşitlik (2.40)'dan

$$h[n]=s[n]-s[n-1] \tag{2.41}$$

olduğu görülmektedir. Eşitlik (2.40) ve (2.41), Eşitlik (2.12) ve (2.13)'ün ayrık zamanlı karşılıklarıdır.

2.7. AYRIK ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

A. Bellekli ya da Belleksiz Sistemler:

Belleksiz bir sistemin $y[n]$ çıkışı yalnızca o andaki $x[n]$ girişine bağımlı olduğundan, doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sistem için bu ilişki yalnızca aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$y[n] = Kx[n] \tag{2.42}$$

Burada K, sistem kazancı olup bir sabittir. Dolayısıyla, sisteme ilişkin dürtü tepkisi aşağıdaki sade ilişki ile tanımlanır.

$$h[n] = K\delta[n] \tag{2.43}$$

Sonuç olarak, eğer $n_0 = 0$ için $h[n_0] \neq 0$ ise ayrık zamanlı, DZD sistem belleklidir.

B. Nedensellik:

Sürekli zamanlı durumda olduğu gibi ayrık zamanlı, DZD bir sistem için nedensellik koşulu:

$$h[n] = 0 \qquad n < 0 \tag{2.44}$$

(2.44) ile verilen nedensellik koşulu Eşitlik (2.39)'a uygulanırsa, nedensel DZD bir sistemin çıkışı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{2.45}$$

Ya da (2.44) nedensellik koşulunu denkl. (2.35)'e uygulayarak şu alternatif ifade bulunur.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] \tag{2.46}$$

(2.46) eşitliği göstermektedir ki, $y[n]$ çıkışını hesaplamak için kullanılan $x[n]$ girişinin değerleri yalnızca $k \leq n$ koşulunu sağlayan giriş değerleridir.

Sürekli zamanlı durumda olduğu gibi eğer

$$x[n] = 0 \qquad n < 0 \tag{2.47a}$$

ise bir $x[n]$ girişi nedensel, eğer

$$x[n] = 0 \qquad n \geq 0 \tag{2.47b}$$

ise nedensel değildir. O halde, bir nedensel $x[n]$ girişi için nedensel, ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $y[n]$ çıkış şöyle olacaktır:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k] \tag{2.48}$$

C. Kararlılık:

Eğer dürtü tepkisi mutlak toplanabilir ise, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{2.49}$$

koşulu sağlanıyor ise, ayrık zamanlı DZD bir sistemin SGSÇ anlamında kararlı olduğu gösterilebilir.

2.8. AYRIK ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZFONKSİYONLARI

Bölüm 1 (Prob. 1.45)'de, **T** ile tanımlanan ayrık zamanlı, DZD sistemlerin özfonksiyonlarının, z bir karmaşık değişken olmak üzere, z^n biçimindeki karmaşık fonksiyonlar olduğu belirlenmişti. Bu durumda,

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n \tag{2.50}$$

olup, burada λ, T'nin z^n'ye ilişkin özdeğeridir. Eşitlik (2.39)'da $x[n] = z^n$ koyarak

$$y[n] = T\{z^n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{n-k} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \right\} z^n$$

$$= H(z) z^n = \lambda z^n \qquad (2.51)$$

bulunur. Burada:

$$\lambda = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k} \qquad (2.52)$$

O halde, ayrık zamanlı, DZD bir sistemin z^n özfonksiyonuna ilişkin özdeğeri karmaşık bir sabit olan $H(z)$ olup değeri, z'nin ilgili değeri kullanılarak Eşitlik (2.252) ile hesaplanır. Eşitlik (2.51)'den $y[0] = H(z)$ olduğuna dikkat ediniz (bkz. Prob.1.45).

Yukarıdaki sonuçlar Böl. 4. ve 6'da açıklanan z dönüşümünün ve ayrık zamanlı Fourier dönüşümünün tanımlarının temelini oluşturmaktadır.

2.9. FARK DENKLEMLERİYLE TANIMLANAN SİSTEMLER

Türevsel denklemlerin sürekli zamanlı sistemleri tanımlamada üstlendiği rol, ayrık zamanlı sistemleri tanımlamada fark denklemlerince üstlenilir.

A. Doğrusal, Sabit Katsayılı Fark Denklemleri:

(2.25) genel türevsel denkleminin ayrık zamandaki karşıtı N. mertebeden doğrusal, sabit katsayılı aşağıdaki denklemdir.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (2.53)$$

Burada a_k ve b_k gerçel sabitleridir. N mertebesi Eşitlik (2.53)'deki $y[n]$'nin en büyük gecikme değeridir. Doğrusal, sabit katsayılı fark denklemlerinin sınıfına yönelik bir örnek Bölüm 1 (Prob. 1.37)'de verilmiştir. Sürekli zamandakine karşıt olarak Eşitlik (2.53)'ün çözümü ve doğrusallık, nedensellik ve zamanla değişmezlik gibi tüm sistem özellikleri; türevsel denklemlerin incelenmesindeki tekniklere paralel teknikler izlenerek incelenebilir. Eğer sistem başlangıçta durgun durumda ise Eşitlik (2.53) ile tanımlanan sistemin nedensel ve DZD olduğu tekrar vurgulanmalıdır.

B. Tekrarlı Çözüm:

Eşitlik (2.53)'ün daha basit bir alternatif çözümü, bu denklemin yeniden düzenlenmesi ile elde edilir.

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \right\} \qquad (2.54)$$

Bu formül bize n anındaki çıkışın o andaki giriş ile daha önceki giriş ve çıkış değerleri cinsinden hesaplanması olanağını vermektedir. Yardımcı koşullara gereksinim Eşitlik (2.54)'den açıkça görülmektedir. $n = n_0$'dan başlayarak $y[n]$'yi hesaplamak için $n \geq n_0 - M$ için $x[n]$ girişine ek olarak $y[n_0-1], y[n_0-2], \ldots, y[n_0-N]$ değerleri de bilinmelidir. Çıkışı giriş ve daha önceki çıkışlar cinsinden hesaplayan tekrarlı bir yöntem olması nedeniyle Eşitlik (2.54) ile verilen genel ifade bir tekrarlı denklem olarak bilinir.

$N = 0$ için Eşitlik (2.53)

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\} \tag{2.55}$$

tekrarlı olmayan bir denkleme dönüşür. Çünkü, çıkışın şimdiki değerini hesaplamak için çıkışın eski değerleri gerekmez. Bu durumda $y[n]$'nin hesabı için yardımcı koşullara gereksinim yoktur.

C. Dürtü Tepkisi

Sürekli zamanlı sistemden farklı olarak Eşitlik (2.53) ya da eşdeğer biçimde Eşitlik (2.54) ile tanımlanan ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi aşağıdaki eşitlikle kolayca saptanabilir.

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k h[n-k]\right\} \tag{2.56}$$

Eşitlik (2.55) ile tanımlanan sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi ise

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n/a_0 & 0 \le n \le M \\ 0 & \text{Diğer durumlarda} \end{cases} \tag{2.57}$$

biçimindedir. Bu sistem için dürtü tepkisinin sonlu sayıda terimden oluştuğuna dikkat ediniz. Diğer bir deyişle yalnızca sonlu bir zaman süresince tepki sıfırdan farklıdır. Bu özellik nedeniyle Eşitlik (2.55) ile tanımlanmış bir sistem sonlu dürtü tepkili (FIR) sistem olarak bilinir. Diğer taraftan, sonsuz zaman süresince tepkisi sıfırdan farklı olan bir sistem de sonsuz dürtü tepkili (IIR) sistem olarak bilinir. Dürtü tepkisinin bulunmasına ilişkin örnekler Prob.2.44 ve 2.45'de çözülmüştür. Dönüşüm tekniklerini kullanarak dürtü tepkisinin bulunması Bölüm 4'de incelenecektir.

Çözümlü Problemler

SÜREKLİ ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİLERİ VE KONVOLÜSYON

2.1. Aşağıda tekrarlanan Eşitlik (2.7) ve (2.8)'in doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

(b) $[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$

(a) Tanım (2.6) uyarınca

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

yazılabilir. Bu ifadede $t - \tau = \lambda$ değişken değişikliği yapılırsa

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)\,d\lambda = h(t) * x(t)$$

(b) $x(t)*h_1(t)=f_1(t)$ ve $h_1(t)*h_2(t)=f_2(t)$ alınırsa

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_1(t-\tau)\,d\tau$$

ve
$$\{x(t)*h_1(t)\}*h_2(t)=f_1(t)*h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\sigma)h_2(t-\sigma)\,d\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_1(\sigma-\tau)\,d\tau\right]h_2(t-\sigma)\,d\sigma$$

yazılabilir. $\lambda=\sigma-\tau$ konarak ve entegral almanın sırası değiştirilerek

$$\{x(t)*h_1(t)\}*h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\lambda)h_2(t-\tau-\lambda)\,d\lambda\right]d\tau$$

elde edilir.

$$f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\lambda)h_2(t-\lambda)\,d\lambda$$

olduğundan aşağıdaki oluşturulabilir.

$$f_2(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\lambda)h_2(t-\tau-\lambda)\,d\lambda$$

O halde $\{x(t)*h_1(t)\}*h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$

$$=x(t)*f_2(t)=x(t)*\{h_1(t)*h_2(t)\}$$

2.2. Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x(t)*\delta(t)=x(t)$ (2.58)

(b) $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$ (2.59)

(c) $x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$ (2.60)

(d) $x(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\tau)\,d\tau$ (2.61)

(a) Tanım (2.6) ve Eşitlik 1.22)'den yararlanılır.

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau=x(\tau)|_{\tau=t}=x(t)$$

(b) Eşitlik 2.7) ve (1.22)'den yararlanılır.

$$x(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-t_0)x(t-\tau)\,d\tau$$

$$=x(t-\tau)|_{\tau=t_0}=x(t-t_0)$$

(c) Eşitlik 2.6) ve (1.19)'dan yararlanılır.

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau$$

Çünkü: $u(t-\tau)=\begin{cases}1 & \tau<t\\ 0 & \tau>t\end{cases}$

(d) Benzer biçimde:

$$x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau - t_0)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t - t_0} x(\tau)\, d\tau$$

Çünkü: $$u(t - \tau - t_0) = \begin{cases} 1 & \tau \leq t - t_0 \\ 0 & \tau > t - t_0 \end{cases}$$

2.3. $y(t) = x(t) * h(t)$ ise

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2) \qquad (2.62)$$

olduğunu gösteriniz.

Eşitlik (2.6)'dan

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau)\, d\tau \qquad (2.63a)$$

ve $$x(t - t_1) * h(t - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t_1) h(t - \tau - t_2)\, d\tau \qquad (2.63b)$$

yazılabilir. $\tau - t_1 = \lambda$ olsun. Eşitlik (2.63b)'de $\tau = \lambda + t_1$ konarak

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - t_1 - t_2 - \lambda)\, d\lambda \qquad (2.63c)$$

elde edilir. Eşitlik (2.63a) ve Eşitlik (2.63c)'nin kıyaslanması sonucu Eşitlik (2.63a)'da t yerine $t - t_1 - t_2$ koymakla Eşitlik (2.63c)'nin elde edilebileceği görülmektedir.

$$x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$$

2.4. Sürekli Zamanlı, DZD bir sistemin $x(t)$ girişi ve $h(t)$ dürtü tepkisi

$$x(t) = u(t); \qquad h(t) = e^{-\alpha t} u(t),\ \alpha > 0 \text{ olarak verilmiştir.}$$

(a) Eşitlik (2.6)'yı kullanarak $y(t)$'yi hesaplayınız.

(b) Eşitlik (2.10)'u kullanarak $y(t)$'yi hesaplayınız.

(a) Eşitlik (2.6)'yı kullanarak

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau)\, d\tau$$

bulunur. $t<0$ ve $t>0$ için $x(\tau)$ ve $h(t - \tau)$ fonksiyonları Şekil 2-41(a)'da gösterilmiştir. Burada $t<0$ için $x(\tau)$ ve $h(t - \tau)$'nun örtüşmediği, $t>0$ için ise $\tau = 0$ ve $\tau = t$ aralığında örtüştüğü görülmektedir. Bu nedenle $t<0$ için $y(t)=0$ olup $t>0$ için $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\, d\tau = e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$$

olduğundan, $y(t)$ çıkışı şöyle ifade edilebilir.

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) u(t) \qquad (2.64)$$

(b) Eşitlik (2.10) kullanılarak

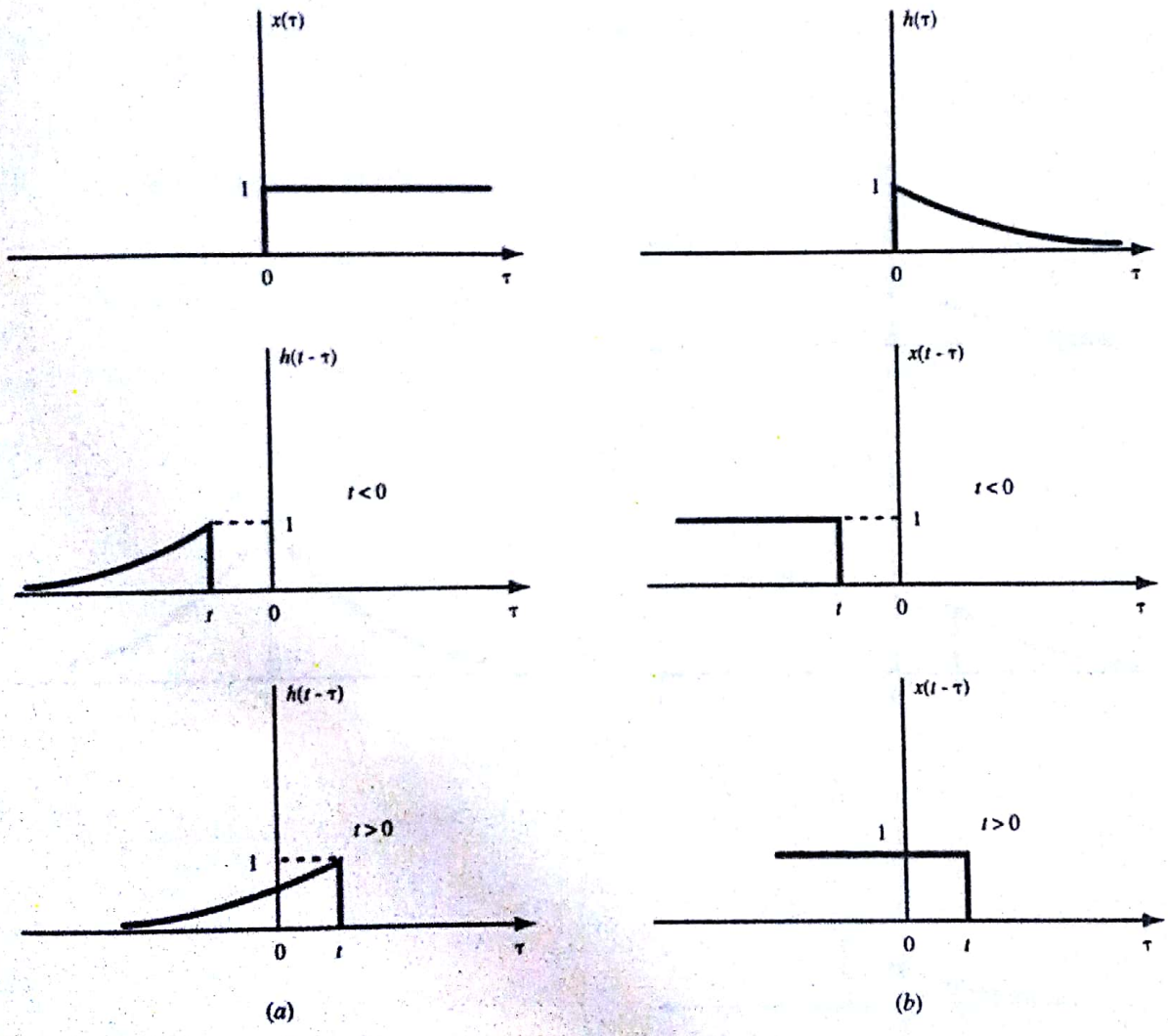
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

bulunur. $t<0$ ve $t>0$ için $h(t)$ ve $x(t-\tau)$ fonksiyonları Şekil 2-4(b)'de gösterilmiştir. Burada da $t<0$ için $h(\tau)$ ve $x(t-\tau)$ 'nun örtüşmediği, $t>0$ için ise $\tau = 0$ ve $\tau = t$ aralığında örtüştüğü görülmektedir. Bu nedenle, $t<0$ için $y(t)=0$ olup $t>0$ için $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}\,d\tau = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

olduğundan, $y(t)$ çıkışı şöyle ifade edilebilir ki, bu, Eşitlik (2.64) ile verilenin aynısıdır.

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t) \qquad (2.65)$$



Şekil. 2-4

2.5. $h(t)$ dürtü tepkisi ve $x(t)$ girişi aşağıda verilen sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $y(t)$ çıkışını hesaplayınız.

$$h(t) = e^{-at}u(t) \qquad x(t) = e^{at}u(-t) \qquad a > 0$$

Eşitlik (2.6) kullanılarak

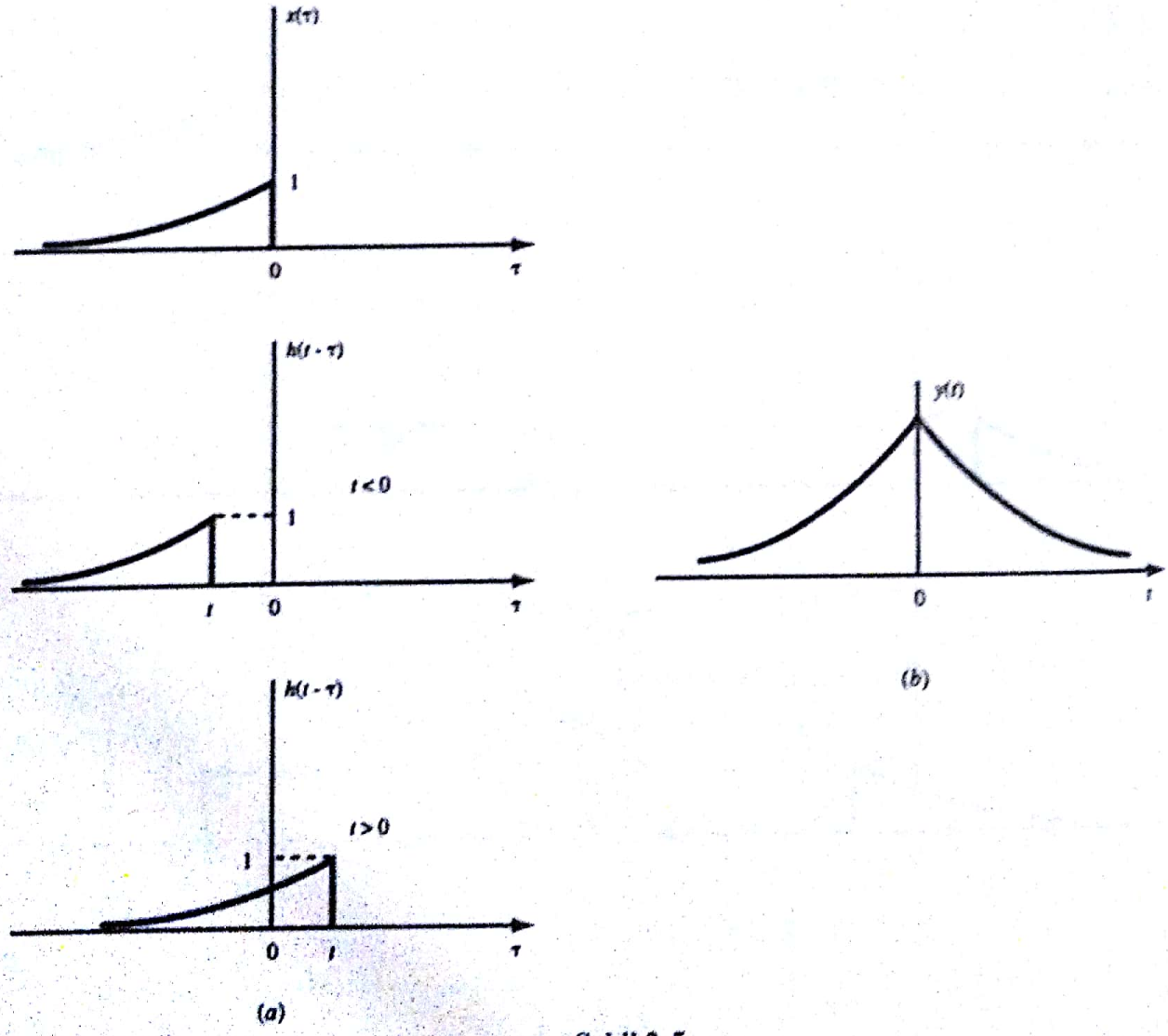
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

yazılır. $t<0$ ve $t>0$ için çizimleri Şekil 2.5(a)'da verilen $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ fonksiyonlarının, $t<0$ için $\tau=-\infty$ ve $\tau=t$, $t>0$ için ise $\tau=-\infty$ ve $\tau=0$ aralıklarında örtüştüğü görülmektedir. O halde $t<0$ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}\,d\tau = e^{-at}\int_{-\infty}^{t} e^{2a\tau}\,d\tau = \frac{1}{2a}e^{at} \qquad (2.66a)$$

ve $t>0$ için

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{a\tau}e^{-a(t-\tau)}\,d\tau = e^{-at}\int_{-\infty}^{0} e^{2a\tau}\,d\tau = \frac{1}{2a}e^{-at} \qquad (2.66b)$$

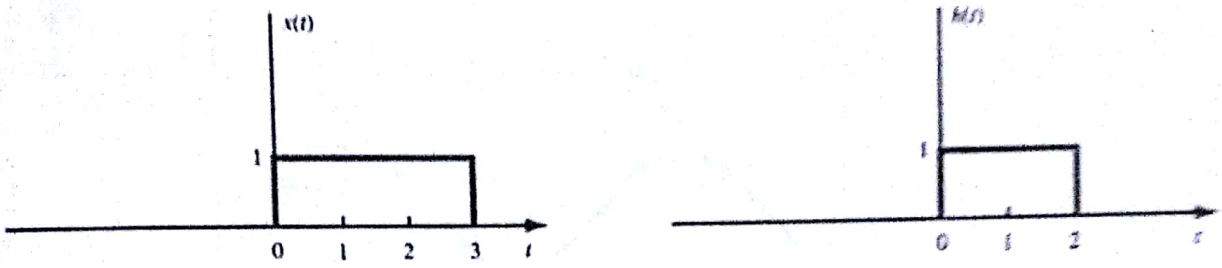


Şekil 2-5

yazılabileceğinden Eşitlik (2.66a) ve (2.66b) birleştirilerek $y(t)$ aşağıdaki gibi oluşturulabilir [Şekil 2-5(b)].

$$y(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \qquad \alpha > 0 \tag{2.67}$$

2.6. $x(t)$ ve $h(t)$ Şekil 2-6'daki gibi verilmiş ise $y(t) = x(t) * h(t)$ işlemlerini (*a*) analitik yöntemle, (*b*) grafiksel yöntemle yapınız.



Şekil 2-6

(a) Önce $x(t)$ ve $h(t)$ analitik biçimde ifade edilir.

$$x(t) = u(t) - u(t-3) \qquad h(t) = u(t) - u(t-2)$$

Daha sonra Eşitlik (2.6) kullanılır.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-3)][u(t-\tau) - u(t-\tau-2)]\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-2-\tau)\,d\tau$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-2-\tau)\,d\tau$$

Ancak,

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 0 < \tau < t,\ t > 0 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$u(\tau)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1 & 0 < \tau < t-2,\ t > 2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 3 < \tau < t,\ t > 3 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1 & 3 < \tau < t-2,\ t > 5 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

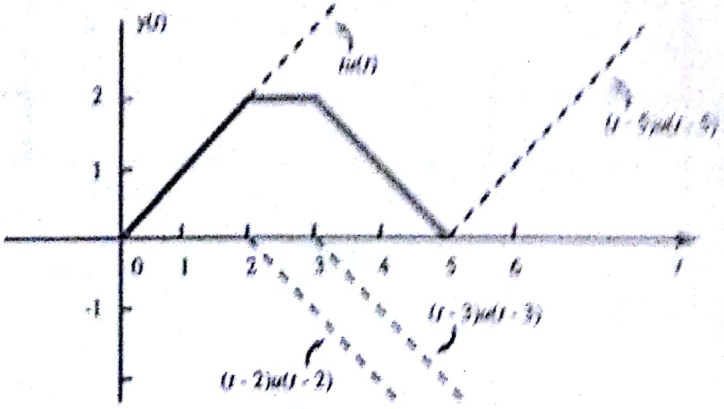
olduğundan, $y(t)$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$y(t) = \left(\int_0^t d\tau\right)u(t) - \left(\int_0^{t-2} d\tau\right)u(t-2)$$

$$-\left(\int_3^t d\tau\right)u(t-3) + \left(\int_5^{t-2} d\tau\right)u(t-5)$$

$$= tu(t) - (t-2)u(t-2) - (t-3)u(t-3) + (t-5)u(t-5)$$

$y(t)$'nin değişimi Şekil 2-7'de çizilmiştir.



Şekil 2-7

(b) $h(\tau), x(\tau)$ fonksiyonları ve t'nin farklı değerleri için $h(t-\tau)$, $x(\tau)h(t-\tau)$ fonksiyonları Şekil 2-8'de çizilmiştir. $t<0$ ve $t>5$ için örtüşme olmadığından $y(t) = 0$'dır. Örtüşmenin olduğu diğer aralıklarda dikdörtgen darbelerin alanları hesaplanırsa $y(t)$ şu biçimde bulunur:

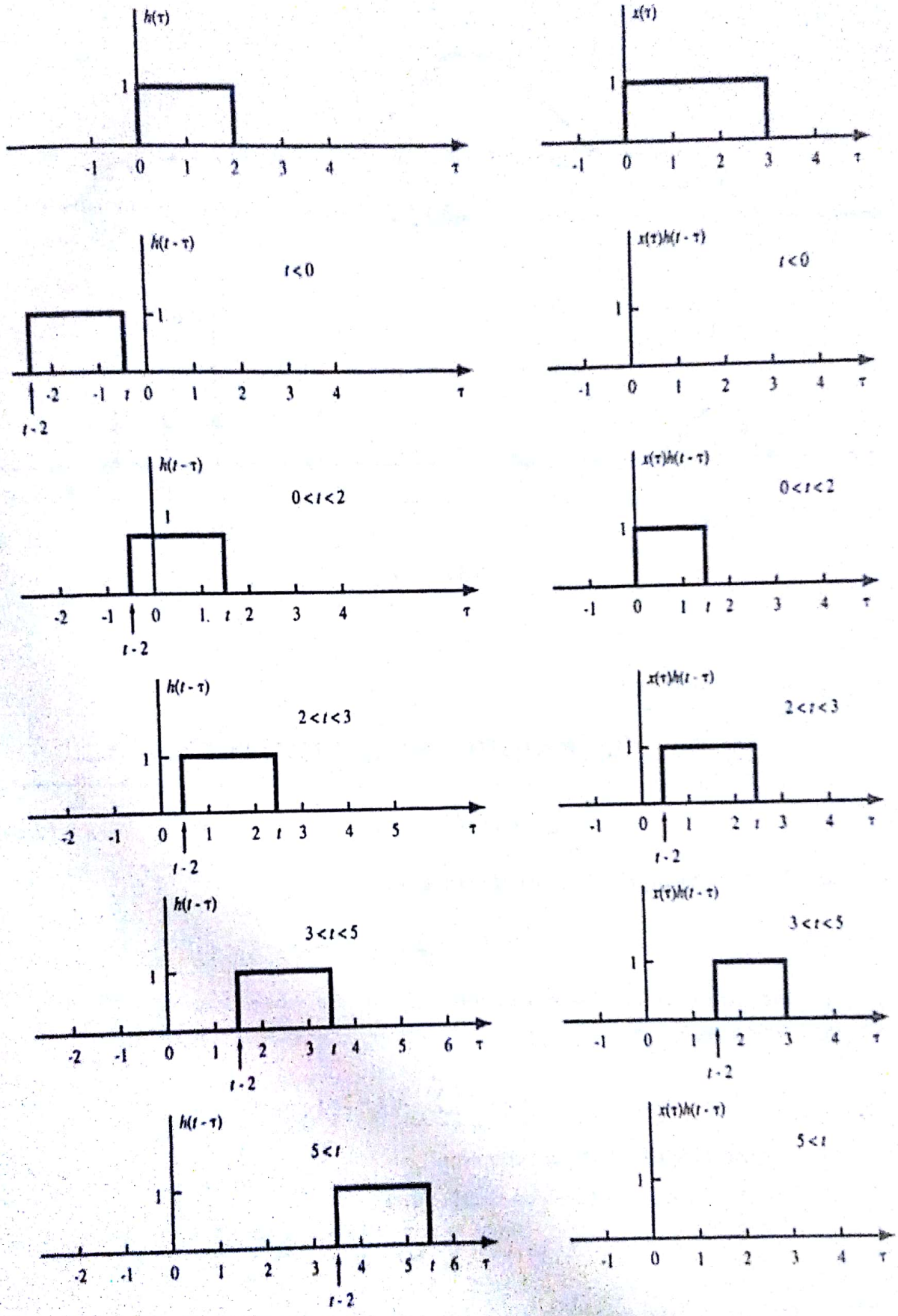
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t \le 2 \\ 2 & 2 < t \le 3 \\ 5 - t & 3 < t \le 5 \\ 0 & 5 < t \end{cases}$$

$y(t)$'nin değişimi Şekil 2.9'da çizilmiştir.

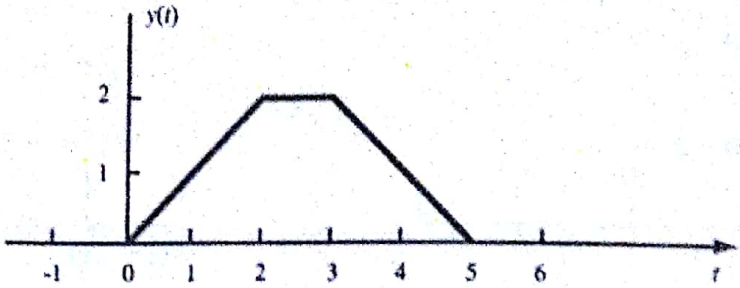
2.7. $h(t)$, Şekil 2-10(a)'da verilen üçgen darbe, $x(t)$ ise Şekil 2-10(b)'de verilen ve matematiksel olarak aşağıda tanımlanan birim dürtü katarı olsun.

$$x(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad (2.68)$$

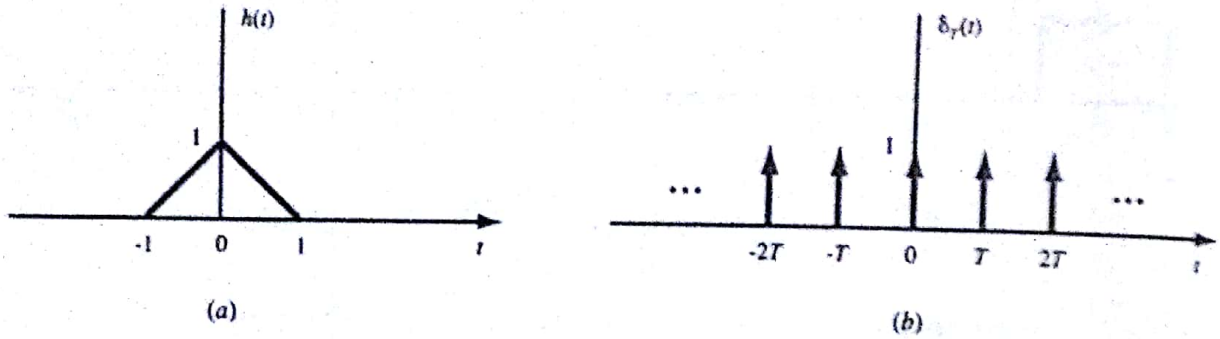
$T = 3$, (b) $T = 2$, (c) $T = 1.5$ değerleri için $y(t) = h(t) * x(t)$'yi hesaplayarak çiziniz.


h(τ)
x(τ)
h(t - τ)
t<0
x(τ)h(t - τ)
t<0
h(t - τ)
0<t<2
x(τ)h(t - τ)
0<t<2
h(t - τ)
2<t<3
x(τ)h(t - τ)
2<t<3
h(t - τ)
3<t<5
x(τ)h(t - τ)
3<t<5
h(t - τ)
5<t
x(τ)h(t - τ)
5<t
t - 2

Şekil 2-8



Şekil 2-9



Şekil 2-10

Eşitlik (2.59) ve (2.9)'dan

$$y(t) = h(t) * \delta_T(t) = h(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT) \qquad (2.69)$$

(a) $T = 3$ için Eşitlik (2.69)'un alacağı biçim

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 3n)$$

olup, çizimi Şekil 2-11(a)'da verilmiştir.

(b) $T=2$ için Eşitlik (2.69)'un alacağı biçim

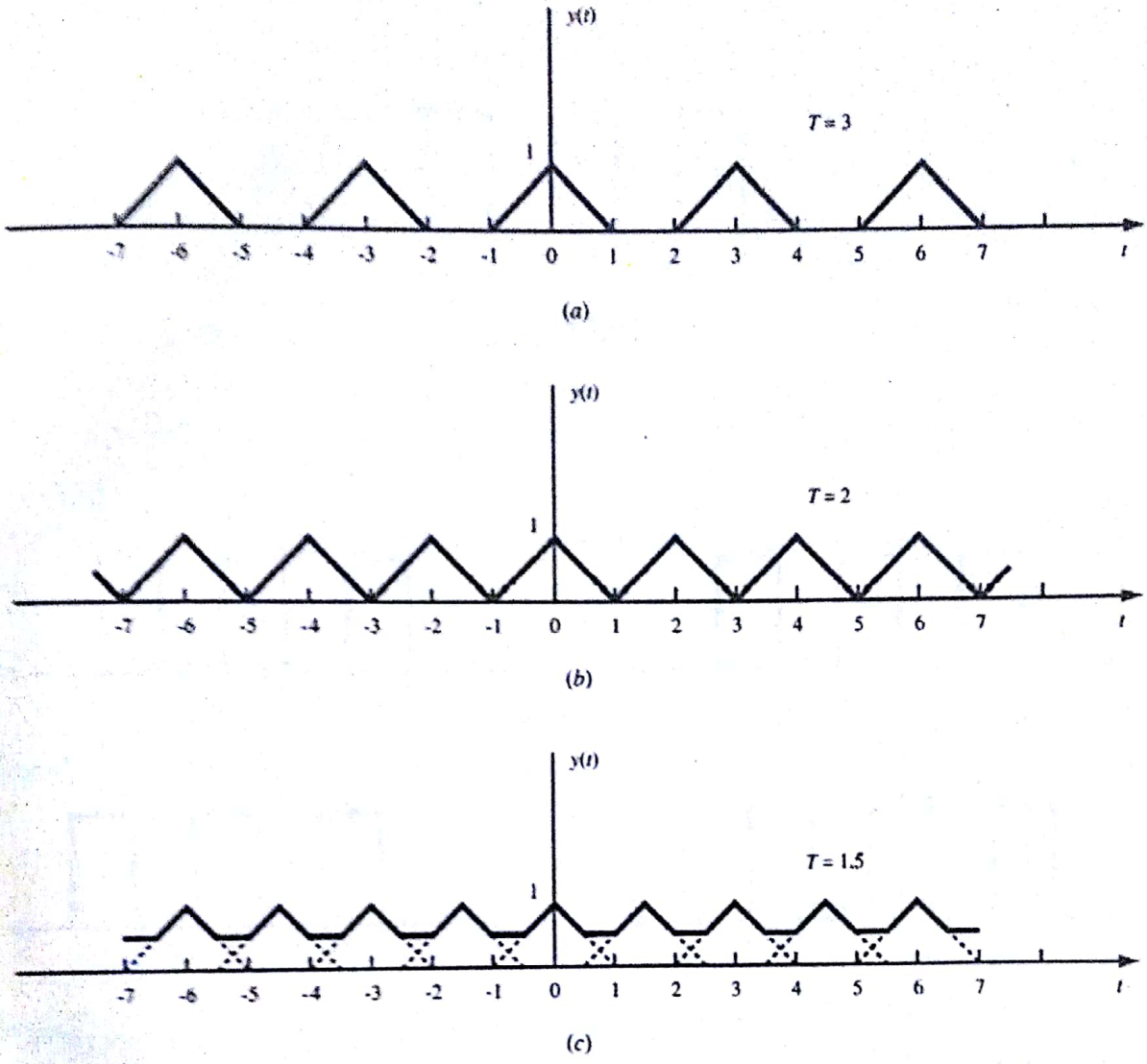
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 2n)$$

olup, çizimi Şekil 2-11(b)'de verilmiştir.

(c) $T = 1.5$ için ise Eşitlik (2.69)'un alacağı biçim

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 1.5n)$$

olup, çizimi Şekil 2-11(c)'de verilmiştir. $T<2$ olduğunda, üçgen darbelerin birbirinden ayrık olmayıp, örtüşmenin söz konusu olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 2-11

2.8. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ ortak periyotları T_0 olan birer periyodik sinyal ise $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin konvolüsyonu yakınsaklaşmaz. Bu durumda $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin periyodik konvolüsyonu şöyle tanımlanır.

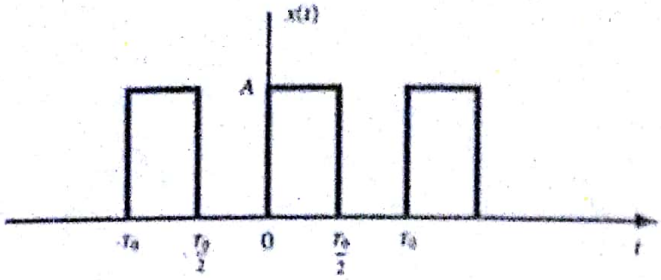
$$f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau \qquad (2.70)$$

(a) $f(t)$'nin periyodik ve periyodunun T_0 olduğunu gösteriniz.

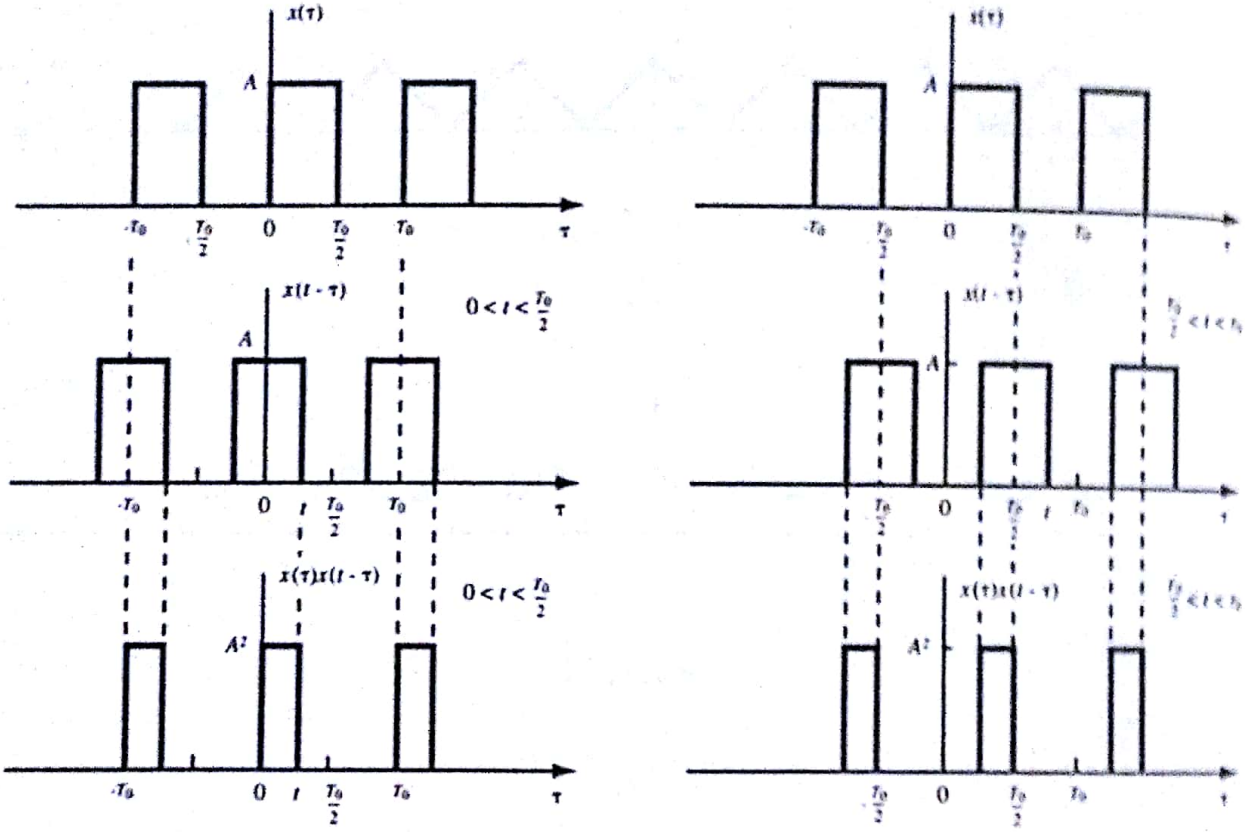
(b) Herhangi bir a için aşağıdaki ifadeyi elde ediniz.

$$f(t) = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\, d\tau \qquad (2.71)$$

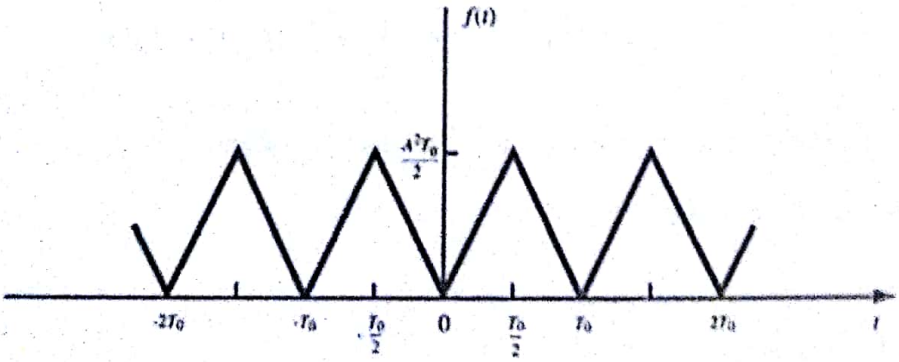
(c) Şekil 2-12'de gösterilen kare dalga $x(t)$ sinyalinin kendisiyle konvolüsyonunu hesaplayınız ve çiziniz.



Şekil 2-12



(*a*)



(*b*)

Şekil 2-13

(a) $x_2(t)$ periyodik ve periyodu T_0 olduğundan

$$x_2(t+T_0-\tau)=x_2(t-\tau)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik Eşitlik (2.70)'de kullanılırsa

$$f(t+T_0)=\int_0^{T_0}x_1(\tau)x_2(t+T_0-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_0^{T_0}x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau=f(t)$$

elde edilir. O halde $f(t)$ periyodik olup periyodu T_0'dır.

(b) $x_1(\tau)$ ve $x_2(\tau)$ aynı T_0 periyotlu, birer periyodik sinyal olduklarından $x_1(\tau)x_2(t-\tau)$ da periyodik olup periyodu T_0'dır. O halde, (1.88) özelliği (Prob.1.17) kullanılarak herhangi bir a için

$$f(t)=\int_0^{T_0}x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau=\int_a^{a+T_0}x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$$

olduğu görülür.

(b) Şekil 2-13(a)'da gösterilen $x(\tau)$, $x(t-\tau)$ ve $x(\tau)x(t-\tau)$ sinyalleri kullanılarak periyodik konvolüsyon işlemi grafiksel olarak gerçekleştirilir. Bulunan sonuç

$$f(t)=\begin{cases}A^2t & 0<t\le T_0/2\\ -A^2(t-T_0) & T_0/2<t\le T_0\end{cases}\quad \text{ve}\quad f(t+T_0)=f(t)$$

olup Şekil 2-13(b)'de çizilmiştir.

SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

2.9. Şekil 2-14(a) ve (b)'deki sinyaller, sürekli zamanlı, DZD belirli bir sistemin sırasıyla $x(t)$ girişi ve $y(t)$ çıkışıdır. Giriş: (*a*) $x(t\text{-}2)$; (b) $\frac{1}{2}x(t)$ için çıkışları çiziniz.

(a) Sistem zamanla değişmez olduğundan çıkış $y(t\text{-}2)$ olacaktır (Şekil 2-14(c)).

(b) Sistem doğrusal olduğundan çıkış $\frac{1}{2}y(t)$ olacaktır (Şekil 2-14(d)).

2.10.

$$s(t)=e^{-t}u(t)$$

basamak tepkisi ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD bir sistemin Şekil 2-15(a)'da verilen $x(t)$ girişi için çıkışını saptayınız ve çiziniz.

Şekil 2-15(a)'da verilen $x(t)$ girişi analitik olarak

$$x(t)=u(t-1)-u(t-3)$$

biçiminde ifade edilebilir. Sistem DZD olduğundan $y(t)$ çıkışı

$$y(t)=s(t-1)-s(t-3)$$
$$=e^{-(t-1)}u(t-1)-e^{-(t-3)}u(t-3)$$

biçiminde oluşturulabilir (Şekil 2-15(b)).

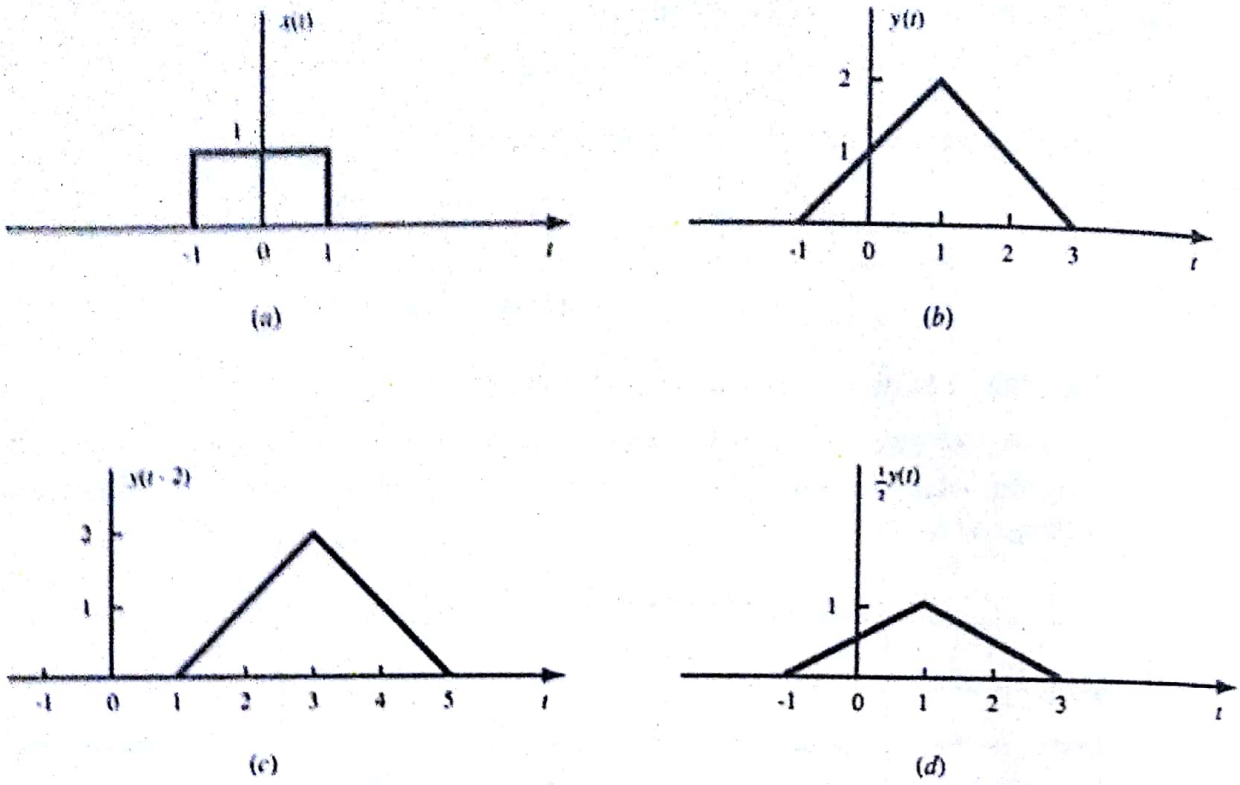
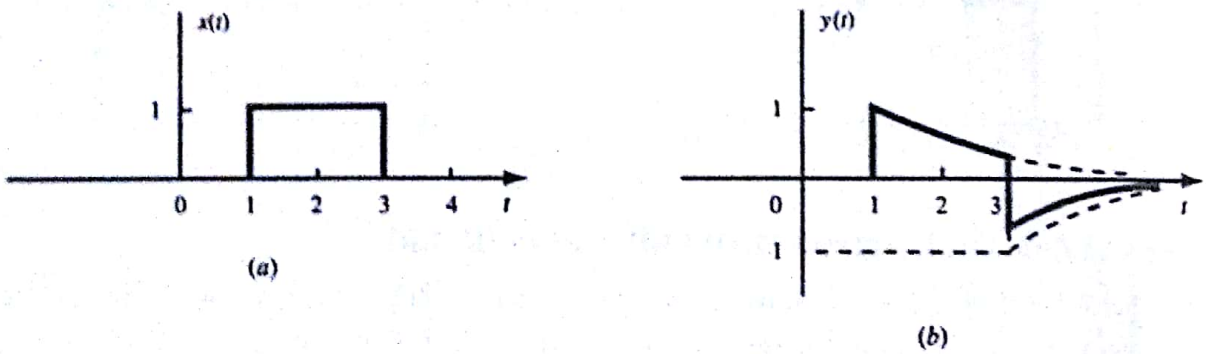


Fig. 2-14



Şekil 2-15

2.11.

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau \tag{2.72}$$

ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD bir sistem verilmiştir. (bkz. Prob.1.56).

(a) Sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz ve çiziniz.

(b) Sistem nedensel midir?

(a) Eşitlik (2.72) aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t+T/2} x(\tau)\,d\tau - \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t-T/2} x(\tau)\,d\tau \tag{2.73}$$

Eşitlik (2.61) ve (2.9) yardımıyla Eşitlik (2.73) şöyle ifade edilebilir.

$$y(t) = \frac{1}{T}x(t) * u\left(t + \frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T}x(t) * u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

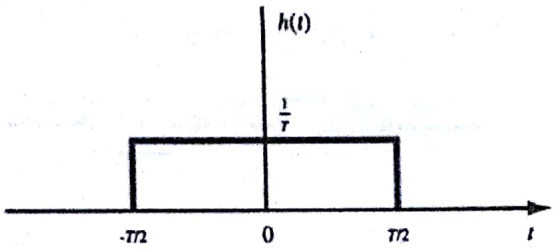
$$= x(t) * \frac{1}{T}\left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = x(t) * h(t) \qquad (2.74)$$

O halde,

$$h(t) = \frac{1}{T}\left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \le T/2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad (2.75)$$

olup, çizimi Şekil 2-16'da gösterilmiştir.

(b) Şekil 2-16 veya Eşitlik (2.75)'den $t<0$ için $h \neq 0$ olduğu görülmektedir. O halde, sistem nedensel değildir.



Şekil 2-16

2.12. Sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $x(t)$ girişine olan çıkışının $y(t)$ olduğunu varsayınız. Girişi $x'(t)$ olduğunda bu sistemin çıkışını bulunuz. Burada $x'(t)$, $x(t)$'nin birinci türevidir.

Eşitlik (2.10) uyarınca

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

olup bu konvolüsyon entegralinin her iki tarafının t 'ye göre türevi alınırsa,

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}[h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x'(t-\tau)\,d\tau = h(t) * x'(t) \qquad (2.76)$$

elde edilir. Burada, giriş $x'(t)$ olduğundan sistem çıkışının $y'(t)$ olduğuna dikkat ediniz.

2.13. Sürekli zamanlı, DZD sistemler için SGSÇ kararlılık şartının [Eşitlik (2.21)] geçerli olduğunu gösteriniz.

Sürekli zamanlı, DZD bir sistemin girişinin aşağıdaki biçimde sınırlandırılmış olduğunu varsayınız.

$$|x(t)| \le k_1 \qquad \text{tüm } t \text{ değerleri için} \qquad (2.77)$$

Bu durumda, Eşitlik (2.10) kullanılarak ve $|x(t-\tau)| \le k$ [Eşitlik (2.77)] koşulu nedeniyle

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|\,d\tau \le k_1\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau$$

yazılabilir. O halde, eğer dürtü tepki aşağıdaki mutlak entegre edilebilme koşulunu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau = K < \infty$$

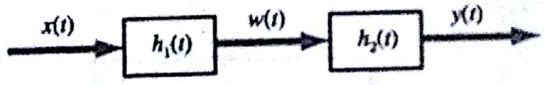
sağlıyor ise $|y(t)| \le k_1 K = k_2$ olacağından sistem SGSÇ anlamında kararlıdır.

2.14. İki sistemin kaskat bağlantısından oluşan bir sistem Şekil 2-17(a)'da gösterilmiştir. Bu sistemlerin dürtü tepkileri sırasıyla $h_1(t)$ ve $h_2(t)$ olup bunlar:

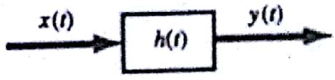
$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \qquad h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$$

(a) Şekil 2-17(b)'de gösterilen tüm sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz.

(b) Tüm sistemin SGSÇ anlamında kararlılığını saptayınız.



(a)



(b)

Şekil 2-17

(a) Birinci sistemin çıkışı $w(t)$ olarak tanımlanırsa Eşitlik (2.6).

$$w(t) = x(t) * h_1(t) \tag{2.78}$$

biçimine girer. $w(t)$'nin tanımı üstteki eşitlikte yerine konursa

$$y(t) = w(t) * h_2(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \tag{2.79}$$

yazılabilir. Konvolüsyonun birleşim özelliği (2-8) uyarınca Eşitlik (2.79) şöyle düzenlenebilir.

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h(t) \tag{2.80}$$

O halde, tüm sistemin dürtü tepkisi

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \tag{2.81}$$

biçiminde olacaktır. Verilen $h_1(t)$ ve $h_2(t)$ ile işlemler yapılırsa sonuç elde edilir.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)h_2(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)2e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= 2e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = 2e^{-t}\left[\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right]u(t)$$

$$= 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

(b) Yukarıda elde edilen $h(t)$ kullanılarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = 2\int_0^{\infty} (e^{-\tau} - e^{-2\tau})\, d\tau = 2\left[\int_0^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau - \int_0^{\infty} e^{-2\tau}\, d\tau\right]$$
$$= 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = 1 < \infty$$

sonucuna ulaşılır. O halde sistem SGSÇ anlamında kararlıdır.

SÜREKLİ ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZFONKSİYONLARI

2.15. Giriş-çıkış ilişkisi aşağıda verilen sürekli zamanlı, DZD sistem için:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau \tag{2.82}$$

(a) Sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz.

(b) e^{st} karmaşık üstel fonksiyonunun sistemin bir özfonksiyonu olduğunu gösteriniz.

(c) e^{st}'ye ilişkin sistem özdeğerini (a) kısmında elde edilen $h(t)$ dürtü tepkisini kullanarak bulunuz.

(a) Eşitlik (2.82), tanım (2.1) ve Eşitlik (1.21) den

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau)\, d\tau = e^{-(t-\tau)}\big|_{\tau=0} = e^{-t} \qquad t > 0$$

elde edilir. O halde

$$h(t) = e^{-t} u(t) \tag{2.83}$$

(b) $x(t) = e^{st}$ ise,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} e^{s\tau}\, d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{(s+1)\tau}\, d\tau$$
$$= \frac{1}{s+1} e^{st} = \lambda e^{st} \qquad \text{if } \operatorname{Re} s > -1 \tag{2.84}$$

bulunur. O halde, tanım (2.22) uyarınca e^{st} sistemin özvektörü olup buna ilişkin özdeğer:

$$\lambda = \frac{1}{s+1} \tag{2.85}$$

(c) Eşitlik (2.24) ve (2.83) yardımıyla, e^{st}'ye ilişkin özdeğer:

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+1)\tau}\, d\tau = \frac{1}{s+1} \qquad \text{if } \operatorname{Re} s > -1$$

olup bu, Eşitlik (2.85)'de verilen ile aynıdır.

2.16.

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\, d\tau \tag{2.86}$$

ile tanımlanan sürekli zamanlı, DZD sistem için:

(a) e^{st} özfonksiyonuna ilişkin sistem özdeğerini bulunuz.

(b) Sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini kullanarak (a) kısmını tekrarlayınız.

(a) Eşitlik (2.86)'da $x(\tau) = e^{s\tau}$ dönüştümü yapılarak

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{s\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{sT}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})\, e^{st} = \lambda\, e^{st}$$

elde edilir. Bu nedenle sistemin e^{st}'ye ilişkin özdeğeri:

$$\lambda = \frac{1}{sT}(e^{sT/2} - e^{-sT/2}) \tag{2.87}$$

$$h(t) = \frac{1}{T}\left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \le T/2 \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Eşitlik (2.24) deki tanım ifadesi ile e^{st} ye ilişkin $H(s)$ özdeğeri

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-s\tau}\, d\tau = \frac{1}{sT}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$$

olup, bu Eşitlik (2.87) ile aynıdır.

2.17. $h(t)$ dürtü tepkisi gerçel ve çift olan kararlı, sürekli zamanlı, DZD bir sistem verilmiştir. Bu sistemin aynı gerçel özdeğere ilişkin özfonksiyonlarının $\cos\omega t$ ve $\sin\omega t$ olduğunu gösteriniz.

Eşitlik (2.23) ve (2.24)'de $s = j\omega$ konarak $e^{j\omega t}$'nin sürekli zamanlı, DZD sisteminin bir özfonksiyonu olduğu ve buna ilişkin özdeğerin ise

$$\lambda = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{2.88}$$

olduğu görülür. Sistem kararlı olduğundan, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$$

sağlandığından $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}|\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||e^{-j\omega\tau}|\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty$

bulunur. Burada $\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$ dir. $H(j\omega)$ her ω için yakınsaklaşır. Euler formülü ile

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau - j\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\sin\omega\tau\, d\tau \tag{2.89}$$

oluşturulur. $\cos\omega t$ τ'nun bir çift, $\sin\omega t$ ise τ'nun bir tek fonksiyonudur. Eğer $h(t)$ gerçel ve çift ise $h(\tau)\cos\omega\tau$ çift, $h(\tau)\sin\omega\tau$ ise tektir. Bu durumda, Eşitlik (1.75a) ve (1.77) nedeniyle Eşitlik (2.89) şöyle yazılabilir.

$\cos\omega\tau$ çift bir fonksiyon olduğundan, Eşitlik (2.90)'da $\omega \to -\omega$ ve Eşitlik (2.89)'da $j \to -j$ dönüşümü yapılırsa

$$H(-j\omega) = H(j\omega)^* = 2\int_0^\infty h(\tau)\cos(-\omega\tau)\,d\tau$$

$$= 2\int_0^\infty h(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau = H(j\omega) \qquad (2.91)$$

elde edilir. Bu durumda $e^{j\omega t}$ özfonksiyonuna ilişkin $H(j\omega)$ özdeğerinin gerçel olduğu görülmektedir. Sistemin T ile tanımlandığı varsayılırsa Eşitlik (2.23), (2.24) ve (2.91) den

$$\mathrm{T}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega)\,e^{j\omega t} \qquad (2.92a)$$

$$\mathrm{T}\{e^{-j\omega t}\} = H(-j\omega)\,e^{-j\omega t} = H(j\omega)\,e^{-j\omega t} \qquad (2.92b)$$

bulunur. T doğrusal olduğundan

$$\mathrm{T}\{\cos\omega t\} = \mathrm{T}\{\tfrac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\} = \tfrac{1}{2}\mathrm{T}\{e^{j\omega t}\} + \tfrac{1}{2}\mathrm{T}\{e^{-j\omega t}\}$$

$$= H(j\omega)\{\tfrac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\} = H(j\omega)\cos\omega t \qquad (2.93a)$$

ve

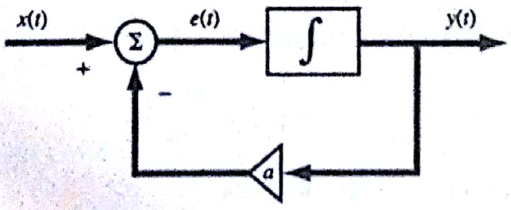
$$\mathrm{T}\{\sin\omega t\} = \mathrm{T}\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = \frac{1}{2j}\mathrm{T}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}\mathrm{T}\{e^{-j\omega t}\}$$

$$= H(j\omega)\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = H(j\omega)\sin\omega t \qquad (2.93b)$$

yazılabilir. O halde, Eşitlik (2.93) ve (2.93b)'den $\cos\omega t$ ve $\sin\omega t$'nin Eşitlik (2.88) ve (2.90) ile verilen aynı gerçel $H(j\omega)$ özdeğerlerine sahip sistemin özfonksiyonları olduğu sonucuna varılır.

TÜREVSEL DENKLEMLER İLE TANIMLANAN SİSTEMLER

2.18. Bir entegratör ve bir skalar çarpıcıdan oluşan sürekli zamanlı bir sistem için $y(t)$ çıkışı ile $x(t)$ girişi arasındaki ilişkiyi veren türevsel denklemi bulunuz (Şekil 2-18).



Şekil 2-18

Şekil 2-18'deki entegratör girişi $e(t)$ olarak seçilirse, entegratörün giriş ve çıkış ilişkisi

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)\,d\tau \qquad (2.94)$$

olduğundan bu eşitliğin iki tarafının t'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dy(t)}{dt} = e(t) \qquad (2.95)$$

olur. Daha sonra, yine Şekil 2-18'den entegratör girişi $e(t)$

$$e(t) = x(t) - ay(t) \tag{2.96}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (2.96), Eşitlik (2.95)'de yerine konursa

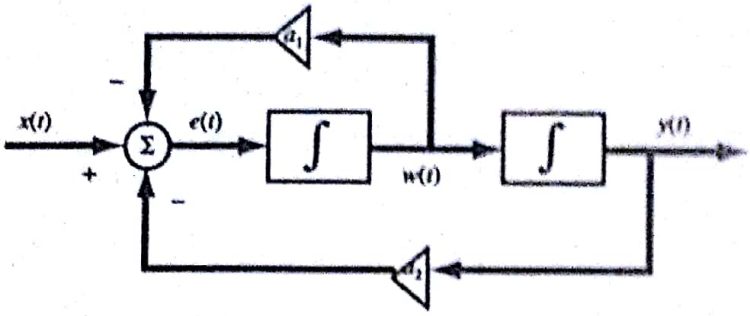
$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - ay(t)$$

ya da

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \tag{2.97}$$

elde edilir. Bu istenen birinci mertebeden türevsel denklemdir.

2.19. Şekil 2-19'da verilen sürekli zamanlı sistem iki entegratör ve iki skalar çarpıcıdan oluşmuştur. $y(t)$ çıkışı ve $x(t)$ girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan türevsel denklemi yazınız.



Şekil 2-19

Şekil 2-19'da $e(t)$ ve $w(t)$ sırasıyla entegratörün girişini ve çıkışını temsil etsin. Eşitlik (2.95) kullanılarak birinci entegratörün girişi şöyle ifade edilir.

$$e(t) = \frac{dw(t)}{dt} = -a_1 w(t) - a_2 y(t) + x(t) \tag{2.98}$$

Yine Şekil 2-19'dan $w(t)$'nin ikinci entegratörün girişi olduğu görülmektedir.

$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt} \tag{2.99}$$

Eşitlik (2.99), Eşitlik (2.98)'de yerine konursa

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_2 y(t) + x(t)$$

ya da

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t) \tag{2.100}$$

bulunur ki bu istenen ikinci mertebeden türevsel denklemdir.

Not: Genel olarak, entegratörlerin ve skalar çarpıcıların bağlanmasından oluşan sürekli zamanlı, DZD bir sistemin mertebesi, sistemdeki entegratör sayısına eşittir.

2.20. a bir sabit olmak üzere sürekli zamanlı bir sistemde $x(t)$ girişi ve $y(t)$ çıkışı arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \tag{2.101}$$

(a) $y(t)$ çıkışını bulunuz. Yardımcı koşul: $y(0) = y_0$ ve $x(t)$ girişi:

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t) \tag{2.102}$$

(b) $y(t)$'yi sıfır giriş ve sıfır durum tepkileri cinsinden ifade ediniz.

(a)

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

olsun. Burada $y_p(t)$, Eşitlik (2.101)'i sağlayan özel çözüm ve $y_h(t)$ ise aşağıdaki eşitliği sağlayan homojen çözümdür.

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + ay_h(t) = 0 \tag{2.103}$$

$y_p(t)$ özel çözümünün

$$y_p(t) = Ae^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.104}$$

biçiminde olduğu varsayılırsa, Eşitlik (2.104), Eşitlik (2.101)'de yerine konarak

$$-bAe^{-bt} + aAe^{-bt} = Ke^{-bt}$$

yazılabileceğinden, $A = K/(a-b)$ ve

$$y_p(t) = \frac{K}{a-b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.105}$$

elde edilir. $y_h(t)$'yi elde etmek için bunun

$$y_h(t) = Be^{st}$$

biçiminde olduğu varsayılırsa, bunun Eşitlik (2.103)'de yerine konulmasıyla

$$sBe^{st} + aBe^{st} = (s+a)Be^{st} = 0$$

yazılabilir. Buradan $s = -a$ ve

$$y_h(t) = Be^{-at}$$

bulunur. $y_p(t)$ ve $y_h(t)$'nin birleştirilmesi sonucu

$$y(t) = Be^{-at} + \frac{K}{a-b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.106}$$

olur. $y(0) = y_0$ yardımcı koşulu Eşitlik (2.106)'da kullanılırsa

$$B = y_0 - \frac{K}{a-b}$$

olarak bulunur. O halde, Eşitlik (2.106) aşağıdaki biçimi alır.

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{K}{a-b}\right)e^{-at} + \frac{K}{a-b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.107}$$

$t < 0$ için $x(t) = 0$ olduğundan Eşitlik (2.101), Eşitlik (2.103)'e dönüşür. Bunun sonucu

$$y(t) = Be^{-at} \qquad t < 0$$

geçerli olup $y(0) = y_0$ yardımcı koşulu ile $y(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$y(t) = y_0 e^{-at} \qquad t < 0 \tag{2.108}$$

(b) Eşitlik (2.107) ve (2.108)'in birleştirilmesiyle $y(t)$, sıfır giriş tepkisi $y_{zi}(t)$ ve sıfır durum tepkisi $y_{zs}(t)$ cinsinden

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})u(t)$$

$$= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{2.109}$$

olarak yazılabilir. Burada:

$$y_{zi}(t) = y_0 e^{-at} \tag{2.110a}$$

$$y_{zs}(t) = \frac{K}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})u(t) \tag{2.110b}$$

2.21. Prob. 2.20'deki sistemi ele alalım.

(a) $y(0) = y_0 \neq 0$ ise sistemin doğrusal olmadığını gösteriniz.

(b) $y(0) = y_0 = 0$ ise sistemin doğrusal olduğunu gösteriniz.

(a) Doğrusal bir sistemin sıfır giriş için sıfır çıkışa sahip olma özelliğini anımsayınız (Bölüm 1.5E). Ancak, K=0 için Eşitlik (2.102)'den $x(t)=0$ olduğu, buna karşılık Eşitlik (2.109)'dan ise

$$y(t) = y_0 e^{-at} \neq 0 \qquad y_0 \neq 0$$

olduğu görülmektedir. O halde $y(0) = y_0 \neq 0$ ise sistem doğrusal değildir.

(b) $y(0) = 0$ ise sistemin doğrusal olduğunu gösterelim. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ giriş sinyallerine ilişkin çıkışlar $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + ay_1(t) = x_1(t) \tag{2.111}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + ay_2(t) = x_2(t) \tag{2.112}$$

olup ilgili yardımcı koşullar:

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \tag{2.113}$$

α_1 ve α_2 karmaşık katsayıları ile $x(t)$ girişi

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

biçiminde ifade edilirse, Eşitlik (2.111) α_1 ile ve Eşitlik (2.112) α_2 ile çarpılıp toplandığında elde edilen

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

ilişkisi

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

türevsel denklemini sağlar. Ayrıca Eşitlik (2.113)'den

$$y(0) = \alpha_1 y_1(0) + \alpha_2 y_2(0) = 0$$

bulunur. O halde $y(t)$, $x(t)$ girişine ilişkin çıkıştır ve bunun sonucu sistem doğrusaldır.

2.22. Prob. 2.20'deki sistemi ele alalım. $y(0)=0$ başlangıçta durgun olma koşulunun sistemi ayrıca zamanla değişmez yaptığını gösteriniz.

$x_1(t)$ girişine olan tepki $y_1(t)$ olsun. Bu durumda

$$x_1(t)=0 \qquad t\le 0 \tag{2.114}$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+ay_1(t)=x_1(t) \tag{2.115}$$

$$y_1(0)=0 \tag{2.116}$$

Kaydırılmış giriş $x_2(t)=x_1(t-\tau)$ için olan tepki $y_2(t)$ ise, Eşitlik (2.114)'den

$$x_2(t)=0 \qquad t\le \tau \tag{2.117}$$

olup $y_2(t)$ tepkisi

$$\frac{dy_2(t)}{dt}+ay_2(t)=x_2(t) \tag{2.118}$$

ve

$$y_2(\tau)=0 \tag{2.119}$$

ilişkilerini sağlamalıdır. Eşitlik (2.115)'den

$$\frac{dy_1(t-\tau)}{dt}+ay_1(t-\tau)=x_1(t-\tau)=x_2(t)$$

yazılabilir. $y_2(t)=y_1(t-\tau)$ varsayımı altında Eşitlik (2.116) yardımıyla

$$y_2(\tau)=y_1(\tau-\tau)=y_1(0)=0$$

olduğu görülür. O halde Eşitlik (2.118) ve (2.119) sağlanmakta ve sistemin zamanla değişmez olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.

2.23. Prob. 2.20'deki sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz.

$h(t)$ dürtü tepkisi

$$\frac{dh(t)}{dt}+ah(t)=\delta(t) \tag{2.120}$$

türevsel denklemini sağlamalıdır. Eşitlik (2.120)'nin $h_h(t)$ homojen çözümü de

$$\frac{dh_h(t)}{dt}+ah_h(t)=0 \tag{2.121}$$

eşitliğini sağlar. $h_h(t)$ için varsayılan tip çözümü

$$h_h(t)=ce^{st}$$

Eşitlik (2.121)'de yerine konursa, bulunacak olan

$$sce^{st}+ace^{st}=(s+a)ce^{st}=0$$

ilişkisinden $s=-a$ ve

$$h_h(t)=ce^{-at}u(t) \tag{2.122}$$

elde edilir. $h_p(t)$ sinyali $\delta(t)$ içeremeyeceğinden $h_p(t)$ özel çözümünün sıfır olması gerekir. Aksi halde $h(t)$, Eşitlik (2.120)'nin sağ tarafında bulunmayan $\delta(t)$'nin bir türevini içerecektir. O halde

$$h(t)=ce^{-at}u(t) \tag{2.123}$$

c sabitini bulmak için Eşitlik (2.123)'ü Eşitlik (2.120)'de yerine koyalım.

$$\frac{d}{dt}\left[ce^{-at}u(t)\right] + ace^{-at}u(t) = \delta(t)$$

ya da
$$-ace^{-at}u(t) + ce^{-at}\frac{du(t)}{dt} + ace^{-at}u(t) = \delta(t)$$

ilişkisi Eşitlik (1.25) ve (1.30)'un ışığı altında irdelenirse

$$ce^{-at}\frac{du(t)}{dt} = ce^{-at}\delta(t) = c\delta(t) = \delta(t)$$

ve $c = 1$ bulunacaktır. O halde, dürtü tepkisi aşağıdaki gibidir.

$$h(t) = e^{-at}u(t) \tag{2.124}$$

2.24. Prob. 2.20'deki sistem için $y(0)=0$'dır.

(a) $h(t)$ dürtü tepkisinden yararlanmadan $s(t)$ basamak tepkiyi bulunuz.

(b) Prob. 2.23'de bulunan $h(t)$ dürtü tepkisinden yararlanarak $s(t)$ basamak tepkisini bulunuz.

(c) $s(t)$'den $h(t)$ dürtü tepkisini elde ediniz.

(a) Prob. 2.20'de bulunan

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t)$$

ifadesinde $K=1$, $b=0$ yapılırsa $x(t)=u(t)$ ve bunun sonucu $y(t)=s(t)$ olduğu görülür. O halde, Eşitlik (2.109)'da $K=1$, $b=0$ ve $y(0)=y_0=0$ yapılırsa, basamak tepki

$$s(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t) \tag{2.125}$$

olarak elde edilecektir.

(b) Prob.2.23'deki Eşitlik (2.12) ve (2.124) kullanılırsa, $s(t)$ basamak tepkisi

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-a\tau}u(\tau)\,d\tau$$

$$= \left[\int_0^t e^{-a\tau}\,d\tau\right]u(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

olarak bulunur ki bu, Eşitlik (2.125) ile aynıdır.

(c) Eşitlik (2.13) ve (2.125) kullanılarak $h(t)$ dürtü tepkisi oluşturabilir.

$$h(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)\right]$$

$$= e^{-at}u(t) + \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u'(t)$$

Eşitlik (1.25) ve (1.30) gereği

$$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})u'(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})\,\delta(t) = \frac{1}{a}(1 - 1)\,\delta(t) = 0$$

olacağından
$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

bulunur ki bu, Eşitlik (1.124) ile aynıdır.

2.25.

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t) \qquad (2.126)$$

denklemi ile tanımlanan sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini elde ediniz.

$h(t)$ dürtü tepkisi aşağıdaki türevsel denklemi sağlanmalıdır.

$$h'(t) + 2h(t) = \delta(t) + \delta'(t) \qquad (2.127)$$

Eşitlik (2.127)'nin $h_h(t)$ homojen çözümü [bkz Prob. 2.23 ve Eşitlik (2.122)]

$$h_h(t) = c_1 e^{-2t} u(t)$$

biçiminde olup $h_p(t)$ özel çözümü için de

$$h_p(t) = c_2 \delta(t)$$

biçiminde bir tip çözüm varsayılırsa, genel çözüm

$$h(t) = c_1 e^{-2t} u(t) + c_2 \delta(t) \qquad (2.128)$$

olacaktır. $h'(t)$'nin, Eşitlik (2.127)'nin sol tarafına $\delta'(t)$ katkısında bulunabilmesi için çözüm ifadesinde $\delta(t)$ fonksiyonu bulunmalıdır. Eşitlik (2.128), Eşitlik (2.127)'de yerine konulursa

$$-2c_1 e^{-2t} u(t) + c_1 e^{-2t} u'(t) + c_2 \delta'(t) + 2c_1 e^{-2t} u(t) + 2c_2 \delta(t)$$
$$= \delta(t) + \delta'(t)$$

elde edilir. Yine Eşitlik (1.25) ve (1.30)'dan yararlanırsak

$$(c_1 + 2c_2)\,\delta(t) + c_2 \delta'(t) = \delta(t) + \delta'(t)$$

bulunacaktır. $\delta(t)$ ve $\delta'(t)$ 'nin katsayılarının eşitlenmesiyle oluşan

$$c_1 + 2c_2 = 1 \qquad c_2 = 1$$

ifadelerinden c_1=—1ve c_2=1 bulunur. Bu değerler Eşitlik (2.128)'de yerleştirilirse dürtü tepkisi elde edilir.

$$h(t) = -e^{-2t} u(t) + \delta(t) \qquad (2.129)$$

AYRIK ZAMANLI, DZD BİR SİSTEMİN TEPKİLERİ VE KONVOLÜSYON

2.26. Eşitlik (2.36) ve (2.37) ile verilen aşağıdaki ilişkilerin doğruluğunu gösteriniz.

(*a*) $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

(*b*) $\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$

(a) Tanım (2.35) uyarınca

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

yazılabilir. $n-k=m$ değişken değişikliği yapılırsa istenen sonuçlar elde edilir.

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m] h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] x[n-m] = h[n] * x[n]$$

(b) $x[n] * h_1[n] = f_1[n]$ ve $h_1[n] * h_2[n] = f_2[n]$ olsun. Bu durumda

$$f_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_1[n-k]$$

ve
$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=f_1[n]*h_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1[m]h_2[n-m]$$
$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_1[m-k]\right]h_2[n-m]$$

olacaktır. $r=m-k$ dönüşümü uygulayarak ve toplamada işlem sırasını değiştirerek

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r]h_2[n-k-r]\right)$$

yazılabilir.

$$f_2[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r]h_2[n-r]$$

olduğundan

$$f_2[n-k]=\sum_{r=-\infty}^{\infty} h_1[r]h_2[n-k-r]$$

yazılabilir. O halde
$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]f_2[n-k]$$
$$=x[n]*f_2[n]=x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}$$

2.27. Aşağıdakilerin doğruluğunu gösteriniz.

(*a*) $x[n]*\delta[n]=x[n]$ (2.130)

(*b*) $x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$ (2.131)

(*c*) $x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (2.132)

(*d*) $x[n]*u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$ (2.133)

(a) Eşitlik (2.35) ve $\delta(n-k)$'nin (1.46) ile verilen özelliği uyarınca:

$$x[n]*\delta[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]=x[n]$$

(b) Benzer bir yol izlenerek

$$x[n]*\delta[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k-n_0]=x[n-n_0]$$

(c) Eşitlik (2.35) ve $u(n-k)$'nın (1.44) ile verilen özelliği uyarınca:

$$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

(d) Benzer bir yol izlenerek:

$$x[n]*u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

2.28. Kesikli zamanlı, DZD bir sistemin $x[n]$ girişi ve $h[n]$ dürtü tepkisi aşağıda verilmiştir.

$$x[n] = u[n] \qquad h[n] = \alpha^n u[n] \qquad 0 < \alpha < 1$$

(a) Eşitlik (2.35)'i kullanarak $y[n]$'yi hesaplayınız.

(b) Eşitlik (2.39)'u kullanarak $y[n]$'yi hesaplayınız.

(a) Eşitlik (2.39) kullanılarak

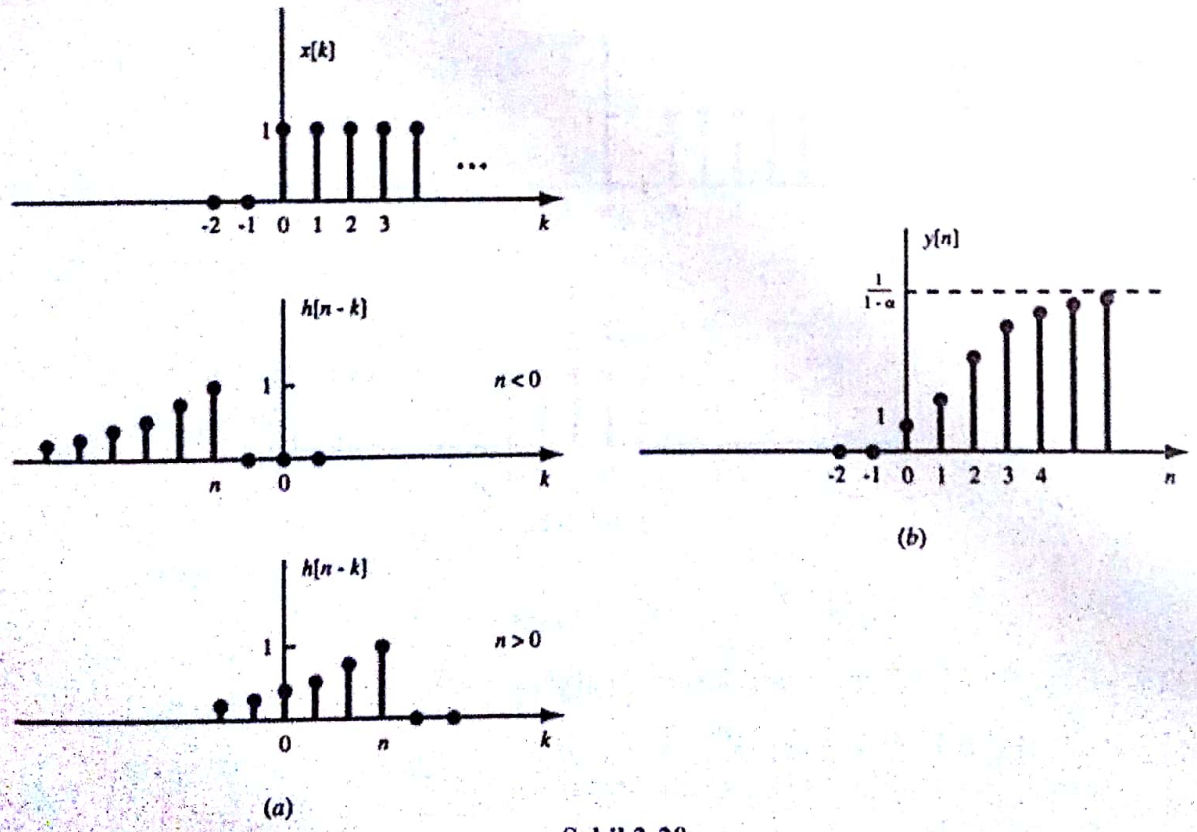
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

yazılabilir. $x[k]$ ve $h[n-k]$ dizileri $n<0$ ve $n>0$ için Şekil 2-20(a)'da gösterilmiştir. Şekil 2.20(a)'nın incelenmesi sonucu $n<0$ için $x(k)$ ve $h[n-k]$'nın örtüşmediği, $n \geq 0$ için ise bunların $k=0$'dan $k=n$'ye kadar örtüştüğü görülmektedir. O halde $n<0$ için $y[n]=0$ dır. $n \geq 0$ için

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}$$

olduğundan toplama işlemindeki k değişkeni $m=n-k$ olarak değiştirilir ve Eşitlik (1.90) kullanılırsa $y[n]$

$$y[n] = \sum_{m=n}^{0} \alpha^m = \sum_{m=0}^{n} \alpha^m = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$



Şekil 2-20

olarak elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilen $y[n]$ çıkışının değişimi Şekil 2-20(b)'de verilmiştir.

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n] \tag{2.134}$$

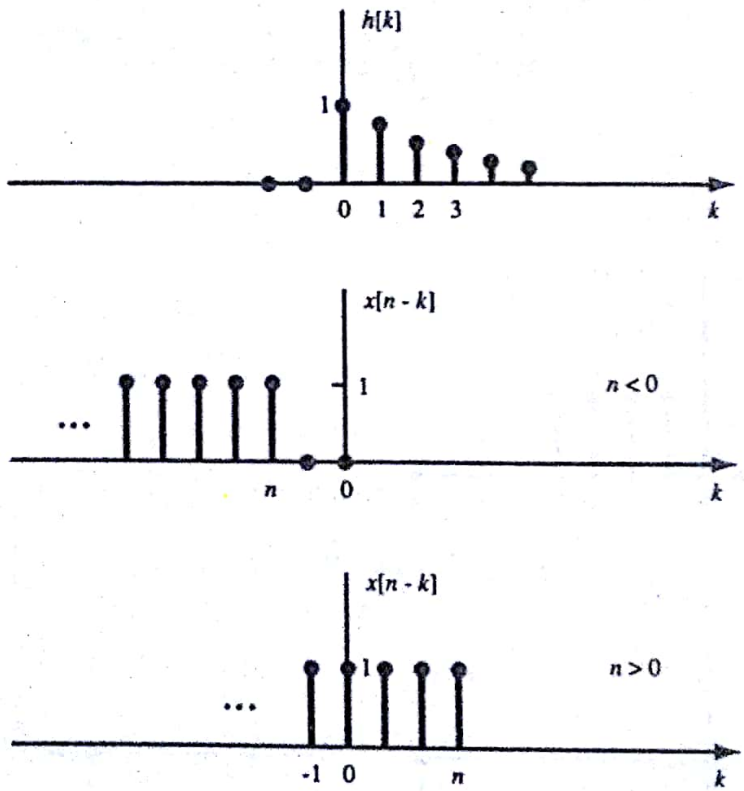
(b) Eşitlik (2.39) kullanılarak

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

yazılabilir. Şekil 2-21'de verilen $h[k]$ ve $x[n-k]$ dizilerinin $n<0$ için örtüşmediği, $n \geq 0$ için ise bunların $k=0$, $k=n$ aralığında örtüştüğü görülmektedir. O halde, $n<0$ için $y[n]=0$ ve $n \geq 0$ için ise

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

olup bu, Eşitlik (2.134)'de verilen sonuçla aynıdır.



Şekil 2-21

2.29. $y[n] = x[n]*h[n]$ ifadesini aşağıdakiler için hesaplayınız.

(*a*) $x[n] = \alpha^n u[n]$, $h[n] = \beta^n u[n]$

(*b*) $x[n] = \alpha^n u[n]$, $h[n] = \alpha^{-n} u[-n]$, $0 < \alpha < 1$

(a) Eşitlik (2.35)'den

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k]\beta^{n-k}u[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \beta^{n-k} u[k]u[n-k]$$

yazılabilir.

$$u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le n \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğundan

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \qquad n \ge 0$$

elde edilir. Eşitlik (1.90) kullanılarak

$$y[n] = \begin{cases} \beta^n \dfrac{1-(\alpha/\beta)^{n+1}}{1-(\alpha/\beta)} u[n] & \alpha \ne \beta \\ \beta^n (n+1) u[n] & \alpha = \beta \end{cases} \qquad (2.135a)$$

ya da

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) u[n] & \alpha \ne \beta \\ \beta^n (n+1) u[n] & \alpha = \beta \end{cases} \qquad (2.135b)$$

elde edilecektir.

(b)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] \alpha^{-(n-k)} u[-(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{-n} \alpha^{2k} u[k]u[k-n]$$

$n \le 0$ için

$$u[k]u[k-n] = \begin{cases} 1 & 0 \le k \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğundan

$$y[n] = \alpha^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} = \alpha^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^2)^k = \frac{\alpha^{-n}}{1-\alpha^2} \qquad n \le 0 \qquad (2.136a)$$

elde edilir. $n \ge 0$ için.

$$u[k]u[k-n] = \begin{cases} 1 & n \le k \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

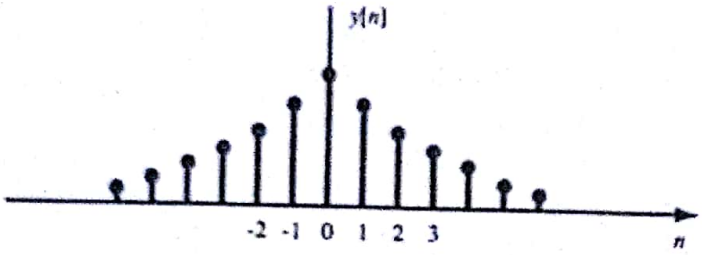
olduğundan Eşitlik (1.92) kullanılarak

$$y[n] = \alpha^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} (\alpha^2)^k = \alpha^{-n} \frac{\alpha^{2n}}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha^n}{1-\alpha^2} \qquad n \ge 0 \qquad (2.136b)$$

yazılabilir. Eşitlik (2.136a) ve Eşitlik (2.136b) birleştirilirse sonuç

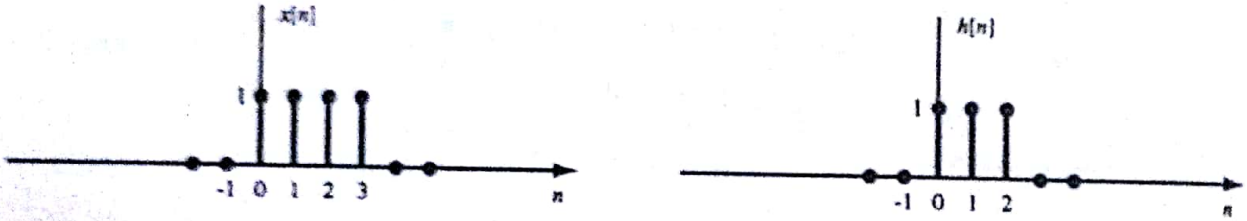
$$y[n] = \frac{\alpha^{|n|}}{1-\alpha^2} \tag{2.137}$$

biçiminde olup çizimi Şekil 2-22'dedir.



Şekil 2-22

2.30. Şekil 2-23'de gösterilen $x[n]$ ve $h[n]$ için $y[n] = x[n]*h[n]$ konvolüsyonunu (a) analitik bir yöntemle, (b) grafiksel bir yöntemle hesaplayınız.



Şekil 2-23

(a) $x[n]$ ve $h[n]$ analitik olarak şöyle ifade edilebilir.

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$
$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Eşitlik (2.38), (2.130) ve (2.131) kullanılarak

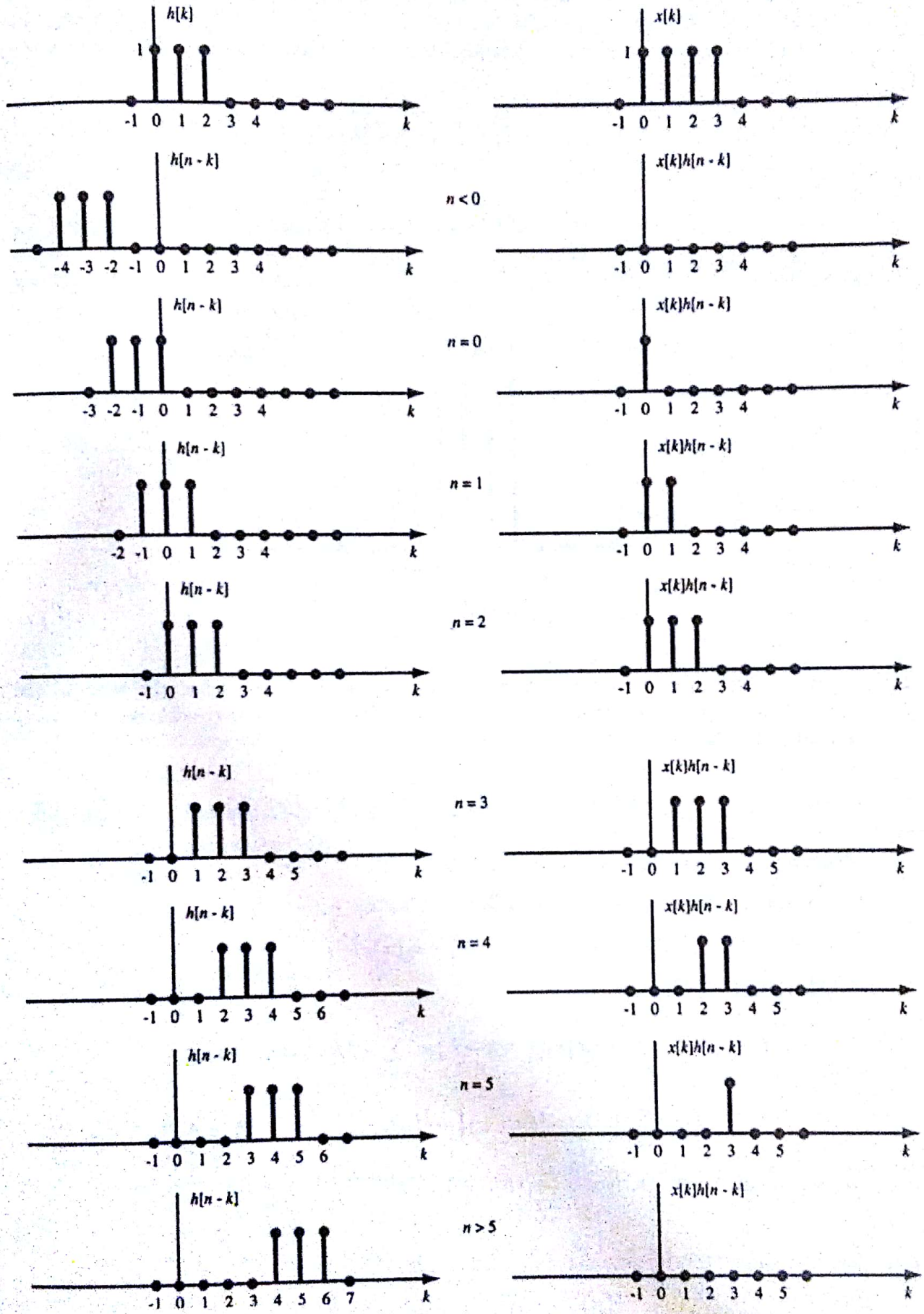
$$\begin{aligned} x[n]*h[n] &= x[n]*\{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\} \\ &= x[n]*\delta[n] + x[n]*\delta[n-1] + x[n]*\delta[n-2]\} \\ &= x[n] + x[n-1] + x[n-2] \end{aligned}$$

oluşturulur. O halde, istenen sonuç: $y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$

$$+ \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$$
$$+ \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5]$$

ya da $y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$

ya da $y[n] = \{1,2,3,3,2,1\}$



Şekil 2-24

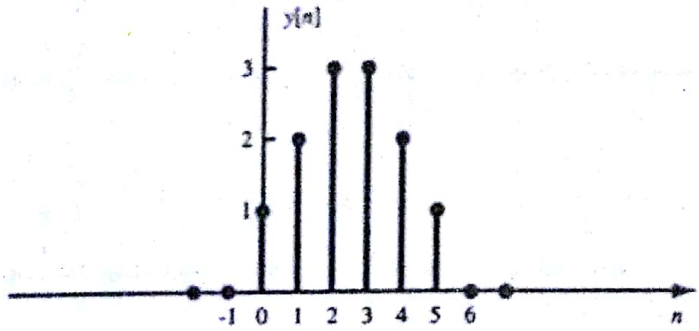
(b) $h[k]$, $x[k]$ ve $h[n-k]$, $x[k]\,h[n-k]$ dizileri çeşitli n değerleri için Şekil 2-24'de çizilmiştir. Şekil 2-24'den de görüleceği üzere $n<0$ ve $n>5$ *için* $x[k]$ ve $h[n-k]$ örtüşmediğinden $y[n]=0$'dır. $0 \le n \le 5$ için $x[k]\,h[n-k]$ örtüşüyor. O halde $0 \le n \le 5$ için $x[k]\,h[n-k]$ terimlerini toplarsak

$$y[0]=1 \qquad y[1]=2 \qquad y[2]=3 \qquad y[3]=3 \qquad y[4]=2 \qquad y[5]=1$$

ya da

$$y[n]=\{1,2,3,3,2,1\}$$

elde edilir. Bu sonuç Şekil 2-25'de gösterilmiştir.



Şekil 2-25

2.31. $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ dizilerinin her ikisi de periyodik ve ortak periyotları N ise $x_1[n]$ ve $x_2[n]$'nin konvolüsyonu yakınsaklaşmaz. Bu durumda $x_1[n]$ ve $x_2[n]$'nin periyodik konvolüsyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f[n]=x_1[n]\otimes x_2[n]=\sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[n-k] \qquad (2.138)$$

$f[n]$'nin periyodik ve periyodunun N olduğunu gösteriniz.

$x_2[n]$ periyodik olup periyodu N'dir. Diğer bir deyişle

$$x_2[(n-k)+N]=x_2[n-k]$$

O halde Eşitlik (2.138)'den

$$f[n+N]=\sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[n+N-k]=\sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[(n-k)+N]$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[(n-k)]=f[n]$$

yazılabileceğinden $f[n]$ periyodik olup periyodu N'dir.

2.32. Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $s[n]$ basamak tepkisi

$$s[n]=\alpha^n u[n] \qquad 0<\alpha<1$$

olarak verilmiş ise bu sistemin, $h[n]$ dürtü tepkisini bulunuz.

Eşitlik (2.41)'den $h[n]$ dürtü tepkisi şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} h[n] &= s[n] - s[n-1] = \alpha^n u[n] - \alpha^{n-1} u[n-1] \\ &= \{\delta[n] + \alpha^n u[n-1]\} - \alpha^{n-1} u[n-1] \\ &= \delta[n] - (1-\alpha)\alpha^{n-1} u[n-1] \end{aligned}$$

AYRIK ZAMANLI, DZD SİSTEMLERİN ÖZELLİKLERİ

2.33. Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $x[n]$ girişi periyodik ve periyodu N ise $y[n]$ çıkışının da periyodik ve periyodunun N olduğunu gösteriniz.

Sistemin dürtü tepkisi $h[n]$ olsun. Eşitlik (2.39) uyarınca $y[n]$ çıkışı

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

olacaktır. $n = m + N$ yapılırsa

$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[m+N-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[(m-k)+N]$$

biçimine dönüşür. $x[n]$ periyodik ve periyodu N olduğundan

$$x[(m-k)+N] = x[m-k]$$

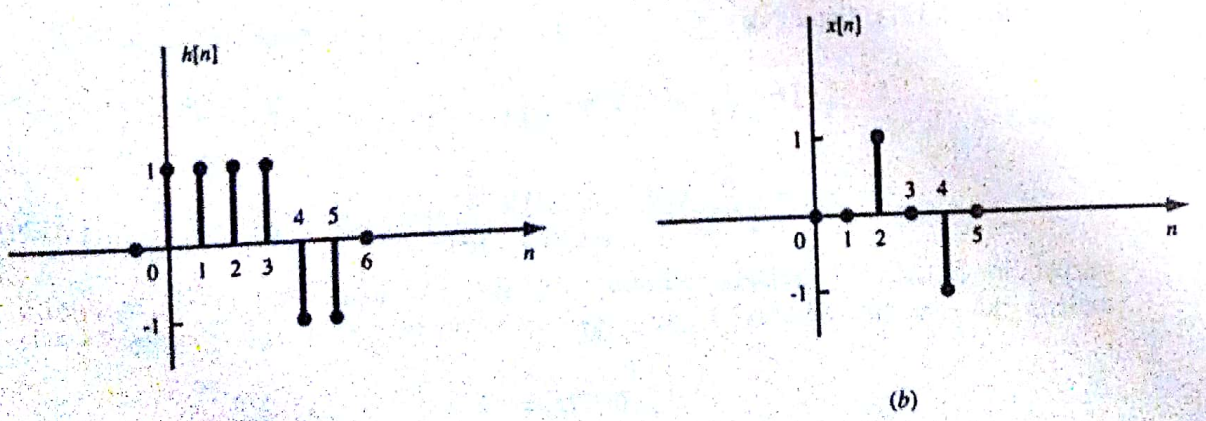
O halde
$$y[m+N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[m-k] = y[m]$$

yazılabilir. Bu ilişki $y[n]$'nin periyodik ve periyodunun N olduğunu gösterir.

2.34. Ayrık zamanlı DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi Şekil 2-26(a) verilmiştir. Konvolüsyon tekniğini kullanmadan Şekil 2-26 (b)'de verilen $x[n]$ girişi için sistemin $h[n]$ dürtü tepkisini bulunuz ve çiziniz.

Şekil 2-26 (b)'de verilen $x[n]$ sinyalini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$x[n] = \delta[n-2] - \delta[n-4]$$



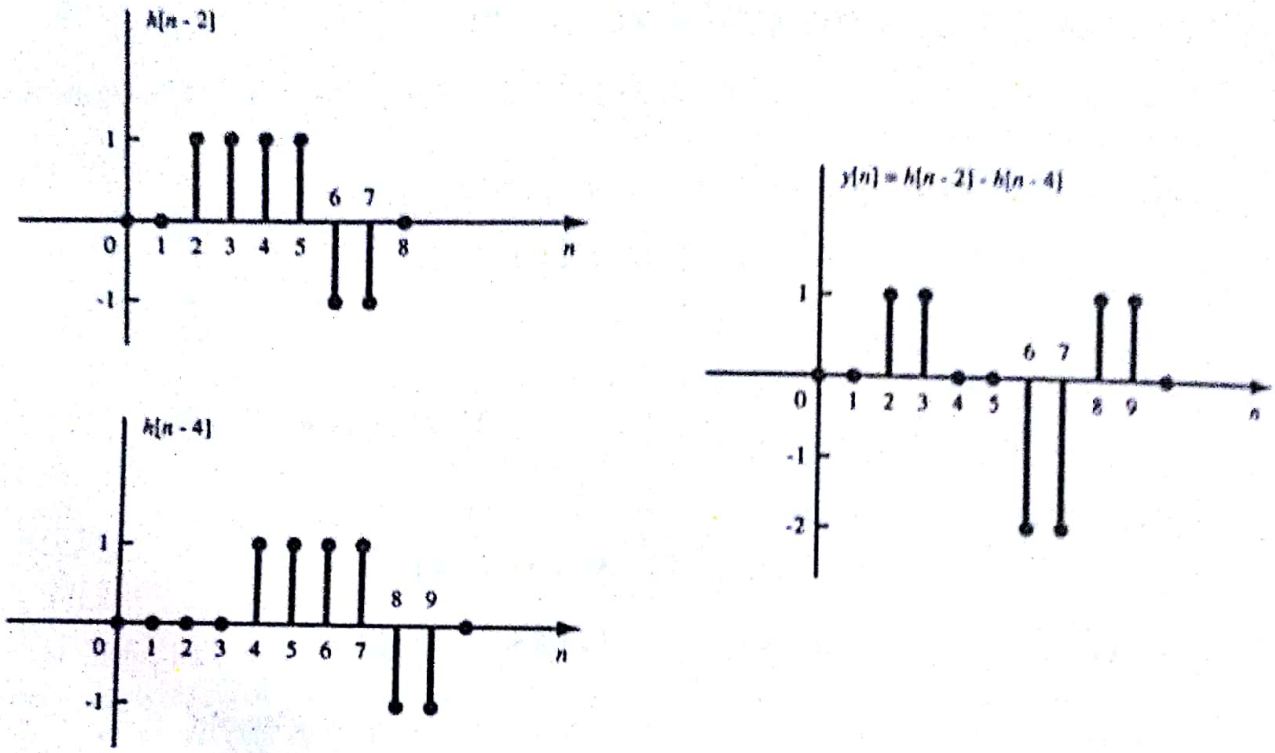
(a) (b)

Şekil 2-26

Sistem doğrusal ve zamanla değişmez olduğundan dürtü tepkisinin tanımı uyarınca $y[n]$ çıkış tepkisinin

$$y[n] = h[n-2] - h[n-4]$$

biçiminde olduğu görülmektedir. Bu sonuç Şekil 2-27'de çizilmiştir.



Şekil 2-27

2.35. Herhangi bir n_0 için $y[n]$ çıkış dizisinin $n=n_0$ daki değeri; $x[n]$ girişinin yalnızca $n \le n_0$ için olan değerlerine bağımlıysa, bu ayrık zamanlı sistem nedenseldir. (bkz.Böl.1.5D). Bu tanımı kullanarak ayrık zamanlı, DZD bir sistem için Eşitlik (2.44) ile verilen $n<0$ için $h[n]=0$ nedensellik şartını elde ediniz.

Eşitlik (2.39) kullanılarak

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \qquad (2.139)$$

yazılabilir. Burada ilk toplama teriminin $x[n]$'nin gelecekteki değerlerinin ağırlıklı bir toplamı olduğuna dikkat ediniz. O halde, sistem nedensel ise

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] = 0$$

olmalıdır. Bunun doğru olması için de

$$h[n]=0 \qquad n<0$$

doğru olmalıdır. $n<0$ için $h[n]=0$ ise Eşitlik (2.139)

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

biçimine dönüşür. Bu ilişki de $y[n]$ çıkışının yalnızca geçmişteki ve o andaki giriş değerlerine bağımlı olduğunu gösterir.

2.36. $x[n]$ girişi ile $y[n]$ çıkışı arasındaki ilişkisi aşağıdaki tanımlanan ayrık zamanlı, DZD bir sistem kararlı mıdır?

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n}x[k+1]$$

Tanım (2.30) ve Eşitlik (1.48) uyarınca sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{k-n}\delta[k+1]=\sum_{k=-\infty}^{n} 2^{-(n+1)}\delta[k+1]=2^{-(n+1)}\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k+1]$$

olarak ifade edilebilir. $k+1=m$ dönüşümü yapılırsa Eşitlik (1.50) uyarınca

$$h[n]=2^{-(n+1)}\sum_{m=-\infty}^{n+1}\delta[m]=2^{-(n+1)}u[n+1] \qquad (2.140)$$

olacaktır. Bu ifadeden $h[-1]=u[0]\neq 0$ olduğu görüldüğünden sistem nedensel değildir.

2.37. Ayrık zamanlı, DZD sistemler için SGSÇ kararlılık koşulunun [Eşitlik (2.49)] sağlandığını gösteriniz.

Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $x[n]$ girişi

$$|x[n]|\leq k_1 \qquad (2.141)$$

biçiminde sınırlandırılmış olsun. Eşitlik (2.35) kullanılarak ve Eşitlik (2.141) gereği $|x[n-k]|\leq k_1$ olduğundan

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right|\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]||x[n-k]|\leq k_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|$$

yazılabilir. O halde dürtü tepkisi mutlak toplanabilir ise, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=K<\infty$$

ise

$$|y[n]|\leq k_1K=k_2<\infty$$

olacağından sistem SGSÇ anlamında kararlıdır.

2.38. Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi aşağıda verilmiştir.

$$h[n]=\alpha^n u[n]$$

(a) Bu sistem nedensel midir?
(b) Bu sistem SGSÇ anlamında kararlı mıdır?

(a) $n<0$ için $h[n]=0$ olduğundan sistem nedenseldir.

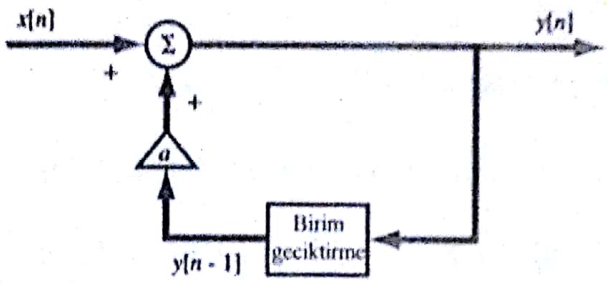
(b) Prob. 1.19'daki Eşitlik (1.91) kullanılarak

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha^k u[n]| = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k = \frac{1}{1-|\alpha|} \qquad |\alpha|<1$$

yazılabilir. O halde bu sistem $|\alpha|<1$ ise SGSÇ anlamında kararlı, $|\alpha|\geq 1$ ise kararsızdır.

FARK DENKLEMLERİYLE TANIMLANAN SİSTEMLER

2.39. Şekil 2-28'deki ayrık zamanlı sistem bir birim geciktirme elemanı ve bir skalar çarpıcıdan oluşmuştur. $y[n]$ çıkışı ve $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan fark denklemini yazınız.



Şekil 2-28

Şekil 2-28'deki birim geciktirme elemanının çıkışı $y[n-1]$ olduğundan

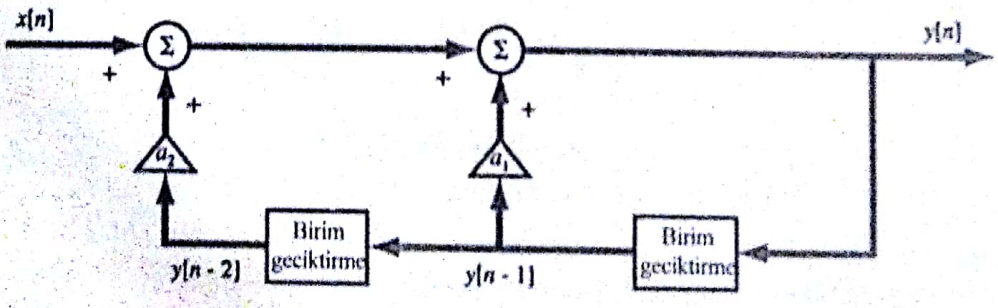
$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{2.142}$$

ya da

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \tag{2.143}$$

yazılabilir. Bu, istenen birinci mertebeden fark denklemidir.

2.40. Şekil 2-29'daki ayrık zamanlı sistem iki birim geciktirme elemanı ve bir skalar çarpıcıdan oluşmuştur. $y[n]$ çıkışı ve $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi tanımlayan fark denklemini yazınız.



Şekil 2-29

Şekil 2-29'daki sağdan birinci birim geciktirme elemanının çıkışı $y[n-1]$, sağdan ikinci birim geciktirme elemanının çıkışı ise $y[n-2]$ dir. O halde

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \tag{2.144}$$

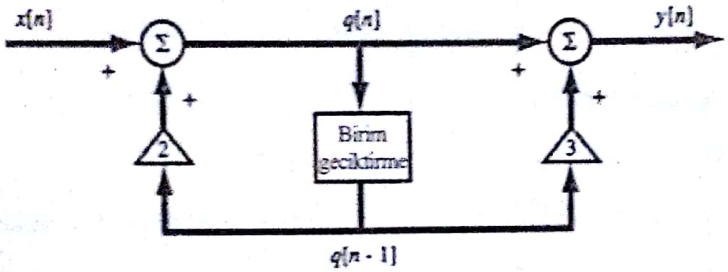
ya da

$$y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = x[n] \tag{2.145}$$

yazılabilir. Bu, istenen ikinci mertebe fark denklemidir.

Not: Genel olarak, birim geciktirme elemanlarının ve skalar çarpıcıların bağlanmasından oluşan ayrık zamanlı, DZD bir sistemin mertebesi, sistemdeki birim geciktirme elemanlarının sayısına eşittir.

2.41. Şekil 2-30'daki sistemde $y[n]$ çıkışı ile $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi veren fark denklemini yazınız.



Şekil 2-30

Şekil 2-30'daki birim geciktirme elemanının girişi $q[n]$ olsun. Bu durumda

$$q[n] = 2q[n-1] + x[n] \tag{2.146a}$$

$$y[n] = q[n] + 3q[n-1] \tag{2.146b}$$

yazılabilir. Bu iki eşitlikten $q[n]$ ve $q[n-1]$, $x[n]$ ve $y[n]$ cinsinden çözülebilir.

$$q[n] = \tfrac{2}{5}y[n] + \tfrac{3}{5}x[n] \tag{2.147a}$$

$$q[n-1] = \tfrac{1}{5}y[n] - \tfrac{1}{5}x[n] \tag{2.147b}$$

Eşitlik (2.147a)'da $n \to (n-1)$ değişikliği yapılırsa

$$q[n-1] = \tfrac{2}{5}y[n-1] + \tfrac{3}{5}x[n-1] \tag{2.147c}$$

elde edilir. Eşitlik (2.147b) ve Eşitlik (2.147c) birbirine eşitlenerek

$$\tfrac{1}{5}y[n] - \tfrac{1}{5}x[n] = \tfrac{2}{5}y[n-1] + \tfrac{3}{5}x[n-1]$$

ve yeniden düzenleme ile

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1] \tag{2.148}$$

elde edilir. Bu, istenen fark denklemidir.

2.42. $x[n]$ girişi ile $y[n]$ çıkışı arasındaki ilişkisi aşağıda verilen ayrık zamanlı, DZD bir sistemi ele alalım. Burada a bir sabittir.

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \tag{2.149}$$

$y[-1]=y_{-1}$ yardımcı koşulu altında aşağıda verilen giriş için $y[n]$'yi bulunuz.

$$x[n]=Kb^n u[n] \qquad (2.150)$$
$$y[n]=y_p[n]+y_h[n]$$

olsun. Burada $y_p[n]$, Eşitlik (2.149)'u sağlayan bir özel çözüm ve $y_h[n]$ ise

$$y[n]-ay[n-1]=0 \qquad (2.151)$$

homojen denklemini sağlayan homojen çözümdür.

$$y_p[n]=Ab^n \qquad n\geq 0 \qquad (2.152)$$

ile tanımlanan $y_p[n]$ çözümü Eşitlik (2.149)'da yerine konursa elde edilecek

$$Ab^n-aAb^{n-1}=Kb^n$$

ifadesinden $A=Kb/(b-a)$ ve

$$y_p[n]=\frac{K}{b-a}b^{n+1} \qquad n\geq 0 \qquad (2.153)$$

bulunur. $y_h[n]$'yi elde etmek için

$$y_h[n]=Bz^n$$

olduğunu varsayalım. Bunu Eşitlik (2.151)'de yerine koymakla elde edilen

$$Bz^n-aBz^{n-1}=(z-a)Bz^{n-1}=0$$

eşitliğinden $z=a$ ve

$$y_h[n]=Ba^n \qquad (2.154)$$

bulunur. $y_p[n]$ ve $y_h[n]$'nin birleştirilmesi ile

$$y[n]=Ba^n+\frac{K}{b-a}b^{n+1} \qquad n\geq 0 \qquad (2.155)$$

elde edilir. Eşitlik (2.155)'deki B'nin saptanması için $y[0]$'ın değeri gereklidir. Eşitlik (2.149) ve (2.150)'de $n=0$ yapılırsa

$$y[0]-ay[-1]=y[0]-ay_{-1}=x[0]=K$$

ya da

$$y[0]=K+ay_{-1} \qquad (2.156)$$

olur. Eşitlik (2.155)'de $n=0$ yapılırsa

$$y[0]=B+K\frac{b}{b-a} \qquad (2.157)$$

elde edilir. Eşitlik (2.156) ve (2.157) birbirine eşitlenirse elde edilecek

$$K+ay_{-1}=B+K\frac{b}{b-a}$$

ilişkisinden

$$B=ay_{-1}-K\frac{a}{b-a}$$

olarak hesaplanır. O halde denkl (2.155)

$$y[n]=y_{-1}a^{n+1}+K\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} \qquad n\geq 0 \qquad (2.158)$$

biçiminde ifade edilir. $n<0$ için $x[n]=0$ olup Eşitlik (2.149), Eşitlik (2.151)'e dönüşür. O halde

$$y[n] = Ba^n \tag{2.159}$$

$y[-1] = y_{-1}$ yardımcı koşulu

$$y[-1] = y_{-1} = Ba^{-1}$$

olarak yazılabilir. buradan $B = y_{-1}\ a$ bulunur.

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} \qquad n<0 \tag{2.160}$$

Eşitlik (2.158) ve (2.160)'ın birleştirilmesi sonucu $y[n]$ için çözüm bulunur.

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} + K\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}u[n] \tag{2.161}$$

Not: Sürekli zaman sistemlerindeki gibi (Prob. 2-21 ve 2.22), Eşitlik (2.149) ile tanımlanan sistem, eğer $y[-1] \neq 0$ ise doğrusal değildir. Sistem başlangıçta durgun ise yani $y[-1]=0$ ise nedensel ve zamanla değişmezdir. Ayrıca, Eşitlik (2.149) tekrarlı biçimde de çözülebilir (bkz.Prob.2.43).

2.43. Prob.2.42'deki ayrık zamanlı sistemin $x[n]=K\delta[n]$ ve $y[-1]=y_{-1}=\alpha$ için $y[n]$ çıkışını bulunuz.

Eşitlik (2.149), $n \geq 0$ için $y[n]$'nin birbirini izleyen değerleri hesaplanarak şöyle çözülebilir: Eşitlik (2.149) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{2.162}$$

Bunun sonucunda

$$\begin{aligned}
y[0] &= ay[-1] + x[0] = a\alpha + K \\
y[1] &= ay[0] + x[1] = a(a\alpha + K) \\
y[2] &= ay[1] + x[2] = a^2(a\alpha + K) \\
&\vdots \\
y[n] &= ay[n-1] + x[n] = a^n(a\alpha + K) = a^{n+1}\alpha + a^nK
\end{aligned} \tag{2.163}$$

elde edilir. Benzer biçimde $n<0$ için $y[n]$'nin hesabında Eşitlik (2.149) yeniden şöyle düzenlenir.

$$y[n-1] = \frac{1}{a}\{y[n] - x[n]\} \tag{2.164}$$

Bunun sonucunda

$$\begin{aligned}
y[-1] &= \alpha \\
y[-2] &= \frac{1}{a}\{y[-1] - x[-1]\} = \frac{1}{a}\alpha = a^{-1}\alpha \\
y[-3] &= \frac{1}{a}\{y[-2] - x[-2]\} = a^{-2}\alpha \\
&\vdots \\
y[-n] &= \frac{1}{a}\{y[-n+1] - x[-n+1]\} = a^{-n+1}\alpha
\end{aligned} \tag{2.165}$$

elde edilir. Eşitlik (2.163) ve (2.165) birleştirilerek $y[n]$ bulunur.

$$y[n] = a^{n+1}\alpha + Ka^nu[n] \tag{2.166}$$

2.44. Prob.2.43'deki ayrık zamanlı sistem başlangıçta durgun durumda ise

(a) Sistemin $h[n]$ dürtü tepkisini bulunuz.

(b) Sistemin $s[n]$ basamak tepkisini bulunuz.

(c) Şık (b) sonucundan yararlanarak $h[n]$ dürtü tepkisini bulunuz.

(a) Eşitlik (2.166)'da $K=1$ ve $y[-1]=a=0$ yapılırsa:

$$h[n]=a^n u[n] \tag{2.167}$$

(b) Eşitlik (2.161)'de $K=1$, $b=1$ ve $y[-1]=y_{-1}=0$ yapılırsa:

$$s[n]=\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)u[n] \tag{2.168}$$

(c) Eşitlik (2.41) ve (2.168)'den yararlanarak $h[n]$ dürtü tepkisi

$$h[n]=s[n]-s[n-1]=\left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)u[n]-\left(\frac{1-a^{n}}{1-a}\right)u[n-1]$$

olarak ifade edilebilir. $n=0$ için

$$h[0]=\left(\frac{1-a}{1-a}\right)u[0]=1$$

$n\geq 1$ için

$$h[n]=\frac{1}{1-a}\left[1-a^{n+1}-(1-a^n)\right]=\frac{a^n(1-a)}{1-a}=a^n$$

olacaktır. O halde $$h[n]=a^n u[n]$$

olup bu, Eşitlik (2.167)'de bulunan sonuç ile aynıdır.

2.45. Aşağıda verilen nedensel, DZD, ayrık zamanlı sistemlerin her birisi için $h[n]$ dürtü tepkisini bularak bunun FIR ya da IIR sistemi olduğunu belirtiniz.

(a) $y[n]=x[n]-2x[n-2]+x[n-3]$

(b) $y[n]+2y[n-1]=x[n]+x[n-1]$

(c) $y[n]-\frac{1}{2}y[n-2]=2x[n]-x[n-2]$

(a) Tanım (2.56) uyarınca

$$h[n]=\delta[n]-2\delta[n-2]+\delta[n-3]$$

ya da

$$h[n]=\{1,0,-2,1\}$$

yazılabilir. $h[n]$ yalnızca dört terim içerdiğinden bu bir FIR sistemidir.

(b) $h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1]$

sistem nedensel olduğundan $h[-1] = 0$'dır. Böylece

$$h[0] = -2h[-1] + \delta[0] + \delta[-1] = \delta[0] = 1$$
$$h[1] = -2h[0] + \delta[1] + \delta[0] = -2 + 1 = -1$$
$$h[2] = -2h[1] + \delta[2] + \delta[1] = -2(-1) = 2$$
$$h[3] = -2h[2] + \delta[3] + \delta[2] = -2(2) = -2^2$$
$$\vdots$$
$$h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1] = (-1)^n 2^{n-1}$$

O halde, $$h[n] = \delta[n] + (-1)^n 2^{n-1} u[n-1]$$

$h[n]$, sonsuz terim içerdiğinden bu bir IIR sistemidir.

(c) $h[n] = \frac{1}{2}h[n-2] + 2\delta[n] - \delta[n-2]$

Sistem nedensel olduğundan $h[-2] = h[-1] = 0$'dır. Böylece

$$h[0] = \tfrac{1}{2}h[-2] + 2\delta[0] - \delta[-2] = 2\delta[0] = 2$$
$$h[1] = \tfrac{1}{2}h[-1] + 2\delta[1] - \delta[-1] = 0$$
$$h[2] = \tfrac{1}{2}h[0] + 2\delta[2] - \delta[0] = \tfrac{1}{2}(2) - 1 = 0$$
$$h[3] = \tfrac{1}{2}h[1] + 2\delta[3] - \delta[1] = 0$$
$$\vdots$$

O halde, $$h[n] = 2\delta[n]$$

$h[n]$, yalnızca bir terim içerdiğinden bu bir FIR sistemidir.

Ek Problemler

2.46. Aşağıdaki sinyal çiftleri için $y(t) = x(t) * h(t)$ konvolüsyonunu bulunuz.

(a) $x(t) = \begin{cases} 1 & -a < t \le a \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$, $h(t) = \begin{cases} 1 & -a < t \le a \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

(b) $x(t) = \begin{cases} t & 0 < t \le T \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$, $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \le 2T \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

(c) $x(t) = u(t-1), h(t) = e^{-3t}u(t)$

Yanıt: (a) $y(t) = \begin{cases} 2a - |t| & |t| < 2a \\ 0 & |t| \ge 2a \end{cases}$

(b) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 < t \le T \\ \frac{1}{2}T^2 & T < t \le 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2T - \frac{5}{2}T^2 & 2T < t \le 3T \\ 0 & 3T < t \end{cases}$

(c) $\frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1)$

2.47. Aşağıdaki dizi çiftleri için $y(n) = x[n]*h[n]$ konvolüsyonunu bulunuz.

(a) $x[n] = u[n], h[n] = 2^n u[-n]$

(b) $x[n] = u[n] - u[n-N], h[n] = \alpha^n u[n], 0 < \alpha < 1$

(c) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n], h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$

Yanıt: (a) $y[n] = \begin{cases} 2^{1-n} & n \le 0 \\ 2 & n > 0 \end{cases}$

(b) $y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & 0 \le n \le N-1 \\ \alpha^{n-N+1}\left(\dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha}\right) & N-1 < n \end{cases}$

(c) $y[n] = \delta[n]$

2.48. $y(t) = x(t)*h(t)$ ise aşağıdakinin doğruluğunu gösteriniz.

$$y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$$

İpucu: Eşitlik (2.6) ve (2.10)'un t'ye göre türevlerini alınız.

2.49. $x(t) * \delta'(t) = x'(t)$

olduğunu gösteriniz.

İpucu: Prob.2.48'deki sonucu ve Eşitlik (2.58)'i kullanınız.

2.50. $y(n) = x(n)*h(n)$ ise aşağıdakinin doğruluğunu gösteriniz.

$$x[n-n_1] * h[n-n_2] = y[n-n_1-n_2]$$

İpucu: Prob.2.3'den yararlanınız.

2.51. Herhangi bir n_0 noktasından başlayarak

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x_1[k]x_2[n-k]$$

olduğunu gösteriniz.

İpucu: Prob.2.31 ve 2.8'e bakınız.

2.52. Sürekli zamanlı, DZD bir sistemin $s[t]$ basamak tepkisi

$$s(t) = [\cos \omega_0 t]u(t)$$

ise bu sistemin $h[n]$ dürtü tepkisini hesaplayınız.

Yanıt: $h(t) = \delta(t) - \omega_0[\sin \omega_0 t]u(t)$

2.53. Şekil 2-31'deki sistem iki altsistemin paralel bağlantısından oluşmuştur. Bu altsistemlerin dürtü tepkileri aşağıdaki gibi verilmiştir.

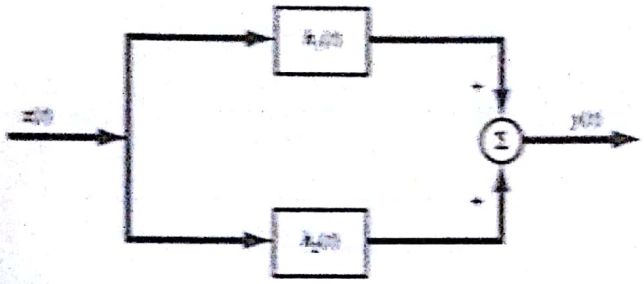
$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \qquad \text{ve} \qquad h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$$

(a) Tüm sistemin $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz.

(b) Tüm sistem kararlı mıdır?

Yanıt: (*a*) $h(t) = (e^{-2t} + 2e^{-t})u(t)$

(b) Evet



Şekil 2-31

2.54. $x(t)$ girişi ve $y(t)$ çıkışı aşağıdaki gibi ilişkilendirilmiş bir entegratörü ele alalım.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

(a) Entegratörün $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz.

(b) Entegratör kararlı mıdır?

Yanıt: *(a)* $h(t)=u(t)$

(b) Hayır

2.55. Dürtü tepkisi $h[n]= \delta[n-1]$ olan ayrık zamanlı, DZD bir sistem belleksiz midir?

Yanıt: Hayır, sistem belleklidir.

2.56. Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin dürtü tepkisi

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

olup bu sistemin

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-3]$$

girişi için tepkisi $y[n]$ ise $y[1]$ ve $y[4]$ değerlerini hesaplayınız.

Yanıt: $y[1]=1$ ve $y[4]=\frac{3}{8}$

2.57. Ayrık zamanlı, DZD bir sistemin $h[n]$ dürtü tepkisi aşağıda verilmiştir.

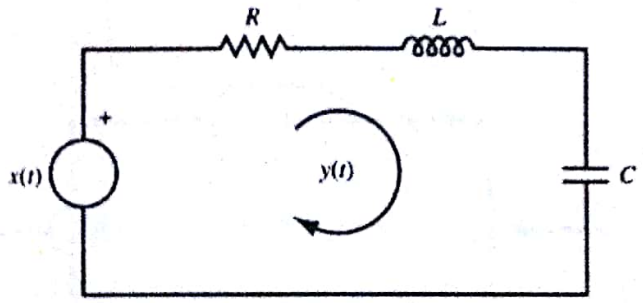
$$h[n] = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

(a) Sistem nedensel midir?

(b) Sistem kararlı mıdır?

Yanıt: (a) Evet; (b) Evet

2.58. Şekil 2.32'deki RLC devresi için $y(t)$ çıkışını $x(t)$ girişine ilişkilendiren türevsel denklemi elde ediniz.



Şekil 2-32

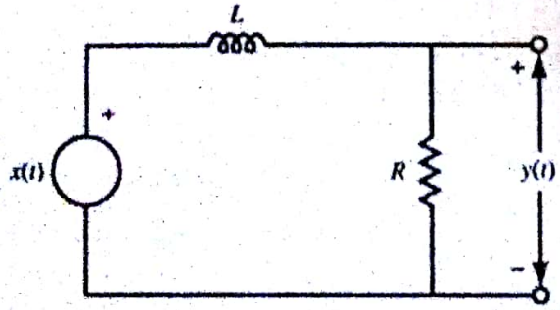
Yanıt: $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{L}\frac{dx(t)}{dt}$$

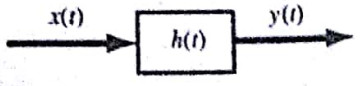
2.59. Şekil 2.33'deki devreyi ele alalım.

(a) R'nin uçlarındaki $y(t)$ çıkış gerilimini $x(t)$ giriş gerilimine ilişkilendiren türevsel denklemi bulunuz.

(b) Devrenin $h(t)$ dürtü tepkisini bulunuz.

(c) Devrenin $s(t)$ basamak tepkisini bulunuz.





Şekil 2-33

Yanıt: (a) $$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{R}{L}y(t) = \frac{R}{L}x(t)$$

(b) $$h(t) = \frac{R}{L}e^{-(R/L)t}u(t)$$

(c) $$s(t) = [1 - e^{-(R/L)t}]u(t)$$

2.60. Prob. 2.20'deki sistemde $x(t) = e^{-at}u(t)$ ve $y(0) = 0$ ise $y(t)$ çıkışını hesaplayınız.

Yanıt: $te^{-at}u(t)$

2.61.

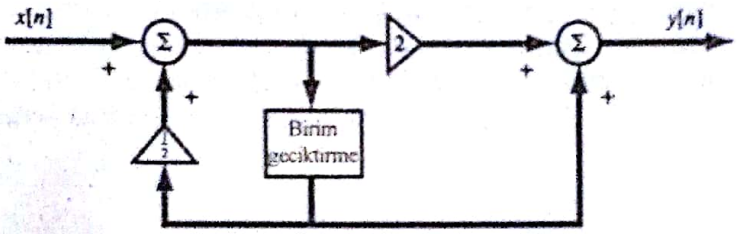
$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) + 2 = x(t)$$

türevsel denklemi ile tanımlanan sistem doğrusal mıdır?

Yanıt: Hayır, doğrusal değildir.

2.62. Şekil 2-34'de gösterilen sistemin giriş-çıkış denklemini yazınız.

Yanıt: $2y[n] - y[n-1] = 4x[n] + 2x[n-1]$



Şekil 2-34

2.63. Dürtü tepkisi

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilen ayrık zamanlı, DZD bir sistemin giriş-çıkış ilişkisini bulunuz.

Yanıt: $y[n] = x[n] + x[n-1]$

2.64. $y[-1]=0$ olan ayrık zamanlı, DZD bir sistemin fark denklemi

$$y[n] - \tfrac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

olarak verilmiş ise aşağıdaki girişler için $y[n]$ çıkışını saptayınız.

(*a*) $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n]$;

(*b*) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

Yanıt: (*a*) $y[n] = 6[(\frac{1}{2})^{n+1} - (\frac{1}{3})^{n+1}]u[n]$

(*b*) $y[n] = (n+1)(\frac{1}{2})^n u[n]$

2.65. Prob.2.42'yi tekrar ele alalım. Sistemin özfonksiyonunu ve buna ilişkin özdeğerini bulunuz.

Yanıt: $z^n, \lambda = \dfrac{z}{z-a}$

3. Bölüm

Laplace Dönüşümü ve Sürekli Zamanlı DZD Sistemler

3.1. GİRİŞ

2. Bölüm'ün temel bir sonucu, DZD (Doğrusal, Zamanla Değişmeyen) bir sistemin tepkisinin, giriş ile sistemin dürtü tepkisinin konvolüsyonu olduğu şeklinde idi. Bu ve bunu izleyen bölümlerde sinyaller ve DZD sistemler için alternatif bir gösterim şekli sunulmaktadır. Bu bölümde, sürekli zamanlı sinyalleri s tanım bölgesinde (s bir karmaşık değişken) göstermek için Laplace dönüşümü tanıtılmaktadır ve sürekli zamanlı DZD bir sistem için sistem fonksiyonu fikri açıklanmaktadır. Laplace dönüşüm tekniklerinin uygulanmasıyla hem sürekli zamanlı DZD sistemlerin özellikleri ile ilgili önemli bilgiler edinilebilir, hem de DZD sistemler ile ilgili bir çok problem çözülebilir.

3.2. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Bölüm 2.4'te, dürtü tepkisi $h[t]$ olan bir sürekli zamanlı DZD sistemin e^{st} formundaki karmaşık üstel girişe karşılık gelen $y[t]$ çıkışının

$$y(t) = T\{e^{st}\} = H(s)e^{st} \tag{3.1}$$

biçiminde olduğu görülmüştü.

Burada

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-} \; dt \tag{3.2}$$

idi.

A. Tanım:

Eşitlik (3.2)'deki $H(s)$ fonksiyonu, $h(t)$'nin Laplace dönüşümü olarak adlandırılır. Genel bir sürekli zamanlı $x[t]$ sinyali için Laplace dönüşümü $X(s)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt \tag{3.3}$$

s değişkeni genellikle karmaşıktır ve

$$s = \sigma + j\omega \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (3.3)'te tanımlanan Laplace dönüşümü sıklıkla çift yanlı Laplace dönüşümü olarak adlandırılır ve aşağıda tanımlanan tek yanlı Laplace dönüşümünden farklıdır.

$$X_1(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt \tag{3.5}$$

Burada, $0^- = \lim_{\varepsilon \to 0}(0-\varepsilon)$ biçiminde tanımlanmaktadır. Açıkça görülmektedir ki eğer $t < 0$ için $x(t) = 0$ ise her iki tanım birbirine denktir. Tek yanlı Laplace dönüşümü Bölüm 3.8'de tartışılacaktır. Burada çift yanlı ifadesini karmaşıklığa sebep vermemek için gerekli olmadıkça kullanmayacağız.

(3.3) eşitliği, bazen bir $x(t)$ sinyalini $X(s)$ fonksiyonuna dönüştüren bir operatör olarak gözönüne alınır.

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \tag{3.6}$$

$x(t)$ sinyali ile ona ait Laplace dönüşümü, Laplace dönüşüm çifti olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) \tag{3.7}$$

B. Yakınsama Bölgesi (YB)

Laplace dönüşümünün yakınsadığı s karmaşık değişkenine ait değerler aralığına yakınsama bölgesi (YB) adı verilir. Laplace dönüşümü ve ilgili YB'yi göstermek için birkaç örneği gözönüne alalım.

ÖRNEK 3.1

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad \text{a gerçel} \tag{3.8}$$

sinyalini gözönüne alalım. Eşitlik (3.3) gereğince $x(t)$'nin Laplace dönüşümü

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a \tag{3.9}$$

olur. Çünkü yalnızca $\mathrm{Re}(s+a)>0$ veya $\mathrm{Re}(s)>-a$ koşulu sağlanıyorsa $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+a)t} = 0$ olur.

Bu nedenle, bu örnek için YB, Eşitlik (3.9)'da $\mathrm{Re}(s)>-a$ olarak belirtilmiş ve Şekil 3.1'de karmaşık düzlemde $\mathrm{Re}(s) = -a$ çizgisinin sağında taralı alan olarak gösterilmiştir. Laplace dönüşümü uygulamalarında, karmaşık düzlem genel olarak s–düzlemi olarak, ve yatay eksen ile düşey eksen ise sırası ile σ ekseni ve $j\omega$ ekseni olarak adlandırılır.

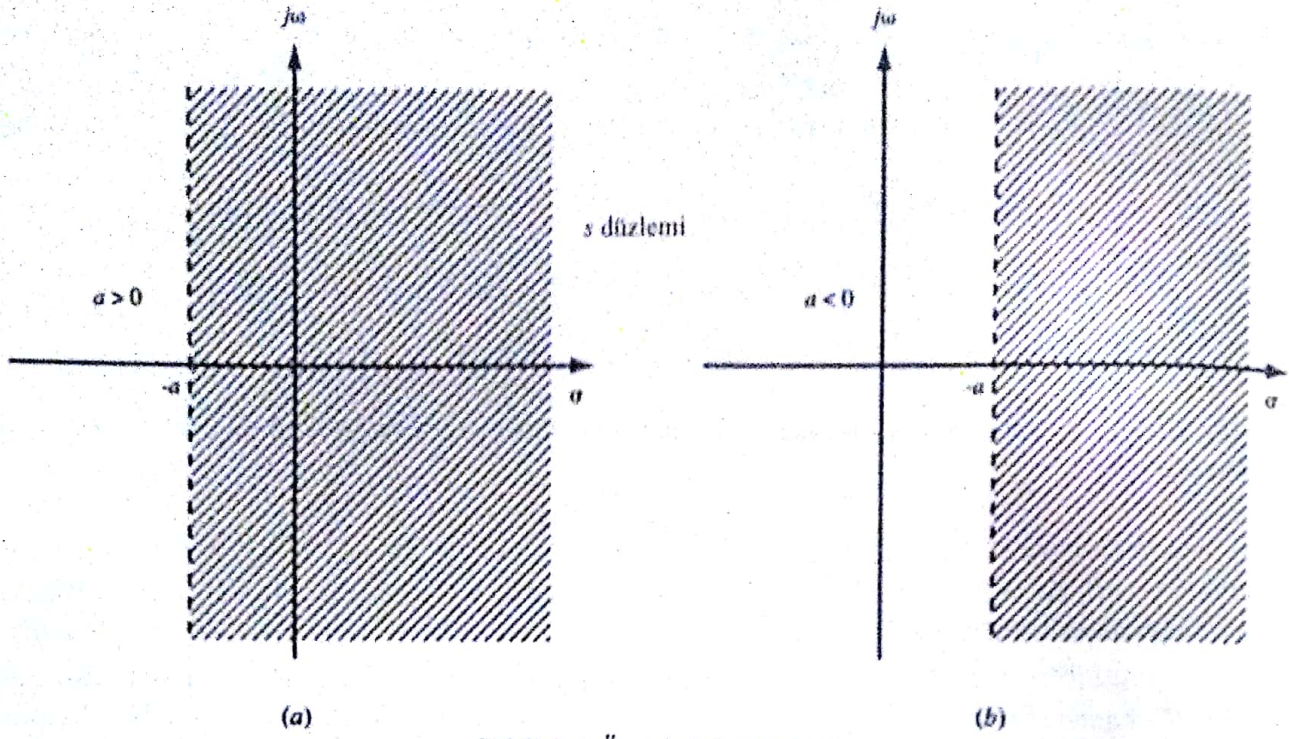
ÖRNEK 3.2

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \tag{3.10}$$

sinyalini ele alalım. Bu sinyalin Laplace dönüşümü $X(s)$ (Problem (3.1)'den) aşağıdaki gibidir:

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) < -a \tag{3.11}$$

Bu nedenle, YB bu problem için Eşitlik (3.11)'de $\mathrm{Re}(s)<-a$ olarak belirtilmiş ve Şekil 3.2'de karmaşık düzlemde $\mathrm{Re}(s) = -a$ çizgisinin solunda taralı olarak gösterilmiştir. Eşitlik (3.9) ile (3.11) karşılaştırıldığında, bu farklı iki sinyal için $X(s)$ ifadelerinin YB'leri dışında, cebirsel olarak aynı olduğu görülmektedir. Bundan ötürü, her sinyale ait Laplace dönüşümünün tek olabilmesi için, YB'nin dönüşümün bir parçası olarak tanımlanması gerekir.



Şekil 3.1 Örnek 3.1 için YB.

C. $X(s)$'nin Kutupları ve Sıfırları:

Genellikle $X(s)$, s'nin rasyonel bir fonksiyonu olacaktır. Yani:

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} = \frac{a_0}{b_0}\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \qquad (3.12)$$

a_k ve b_k katsayıları gerçel sabitler, m ve n ise pozitif tamsayılardır. Eğer $n > m$ ise $X(s)$'ye uygun rasyonel fonksiyon, $n \le m$ ise uygun olmayan rasyonel fonksiyon denir. Payın kökleri z_k, $X(s)$'nin sıfırları olarak adlandırılır çünkü s'nin bu değerleri için $X(s) = 0$ olur. Benzer şekilde $X(s)$'nin paydasının köklerine $X(s)$'nin kutupları denir, çünkü s'nin bu değerleri için $X(s)$ sonsuzdur. Bu nedenle, $X(s)$'nin kutupları YB'nin dışındadır. Çünkü, $X(s)$, tanımı gereğince kutuplarda yakınsamaz. Diğer taraftan sıfırlar YB içinde veya dışında bulunabilir. $X(s)$, a_0/b_0 oranı dışında sıfırları ve kutupları cinsinden tamamı ile ifade edilebilir. Bu nedenle, $X(s)$'nin s-düzleminde gösteriminin bir yolu da, YB'ye ilave olarak kutup ve sıfırlarının yerlerinin de belirtilmesidir.

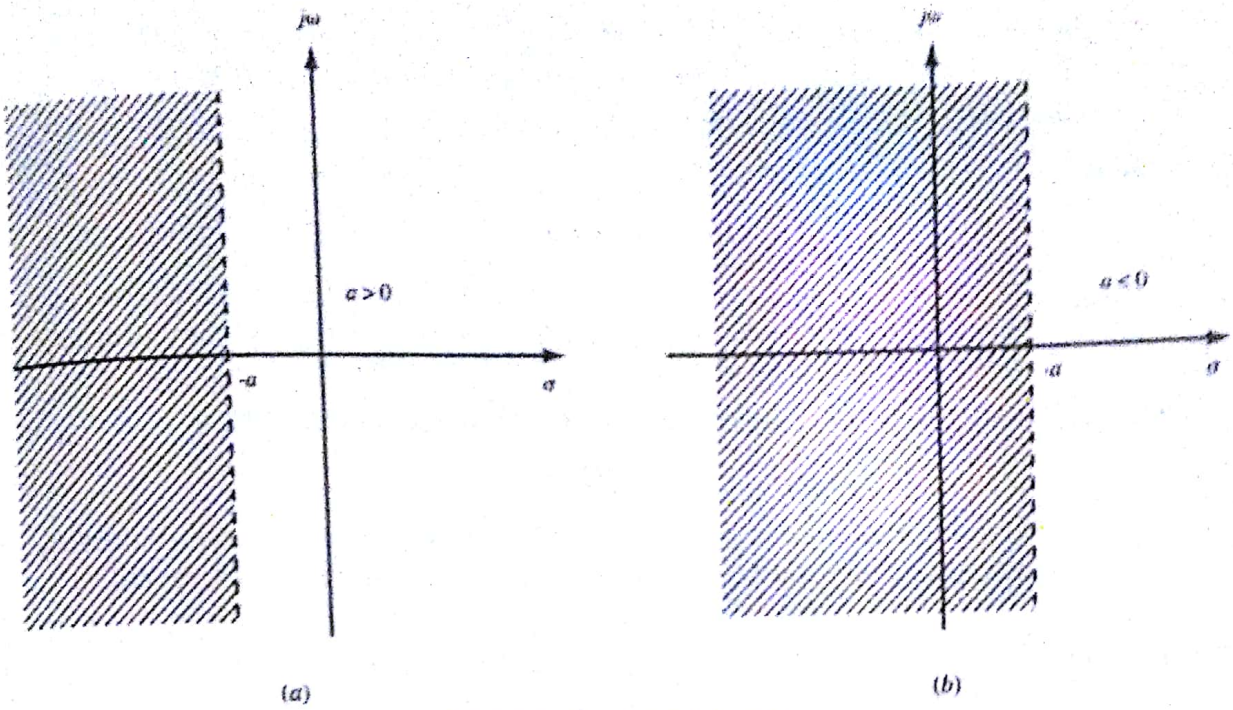
Geleneksel olarak, bir "×" kutup yerini ve bir "o" sinyali sıfır yerini göstermek için kullanılır. Aşağıda verilen $X(s)$'nin bu şekildeki bir gösterimi Şekil 3.3'te verilmiştir.

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

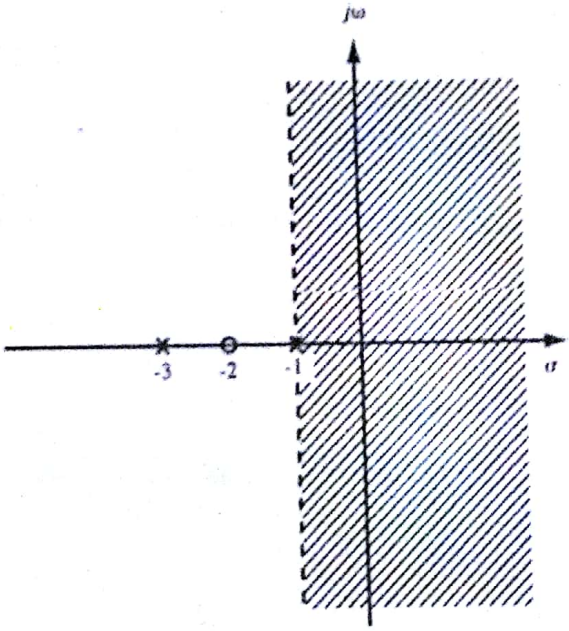
$X(s)$'nin $s = -2$'de bir sıfırının, $s = -1$ ve $s = -3$'de iki adet kutbunun olduğuna dikkat ediniz.

D. YB'nin Özellikleri

3.1 ve 3.2 örneklerinde gördüğümüz üzere, $X(s)$'nin YB'si, $x(t)$'nin doğasına bağlıdır. YB'nin özellikleri aşağıda özetlenmiştir. Biz, $X(s)$'nin, s'nin bir rasyonel fonksiyonu olduğunu varsayıyoruz.



Şekil 3.2 Örnek 3.2 için YB.



Şekil 3.3 $X(s) = (2s+4)/(2+4s+3)$.

Özellik 1: YB hiçbir kutbu içermez.

Özellik 2: Eğer $x(t)$ sonlu sürekli bir sinyal ise, yani, $t_1 \le t \le t_2$, $(-\infty < t_1$ ve $t_2 < \infty)$ sonlu aralığı dışında $x(t) = 0$ ise, o zaman YB, muhtemelen $s = 0$ ve $s = \infty$ dışında kalan tüm s-düzlemidir.

Özellik 3: Eğer, $x(t)$ bir sağ yanlı sinyal ise, yani, $t<t_1<\infty$ için $x(t)=0$ ise, o zaman YB, $\mathrm{Re}(s)> \sigma_{max}$ biçimindedir.

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_{max}$$

Burada σ_{max}, $X(s)$'nin kutuplarından gerçel kısmı en büyük olanın gerçel kısmıdır. Bu nedenle YB, s düzleminde $Re(s) = \sigma_{max}$ düşey çizgisinin sağındaki yarı düzlemdir ve bölgesinde $X(s)$'nin tüm kutuplarının sağındadır.

Özellik 4: Eğer $x(t)$ bir sol yanlı sinyal ise, yani $t < t_0$, $t < -\infty$ için $x(t) = 0$ ise, YB

$$Re(s) > \sigma_{min}$$

şeklindedir. Burada σ_{min}, $X(s)$'nin kutuplarının gerçel kısımlarının en küçüğüne eşittir. Bu nedenle YB, s düzleminde $Re(s) = \sigma_{min}$ düşey çizgisinin solundaki yarı düzlemdir, yani $X(s)$'nin tüm kutuplarının solundadır.

Özellik 5: Eğer $x(t)$ bir çift yanlı sinyal, yani $x(t)$ bir sonlu süreli sinyal ise, YB

$$\sigma_1 < Re(s) < \sigma_2$$

şeklindedir. Burada σ_1 ve σ_2, $X(s)$'nin iki kutbunun gerçel kısımlarıdır. Bu nedenle, YB s düzleminde $Re(s) = \sigma_1$ ve $Re(s) = \sigma_2$ düşey çizgileri arasındaki düşey şerittir.

1. özellik kısıp tanımından yani, $X(s)$'nin bir kutupta sonsuz olduğu gerçeğinden kolaylıkla çıkarılabilir. Diğer özelliklerin doğrulaması için 3.2'den 3.7'ye kadar ki problemlere bakınız.

3.3 BAZI SİNYALLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

A. Birim dürtü fonksiyonu $\delta(t)$:

Eşitlik (3.3) ve (1.20)'yi kullanarak

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st}\, dt = 1 \qquad \text{tüm } s \tag{3.13}$$

elde edilir.

B. Birim basamak fonksiyonu $u(t)$:

$$\mathscr{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-st}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad Re(s) > 0 \tag{3.14}$$

burada: $0^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} (0 + \varepsilon)$.

C. Yaygın Olarak Karşılaşılan Sinyaller için Laplace Dönüşüm Çiftleri

Yaygın olarak kullanılan bazı sinyaller için Laplace dönüşümleri Tablo 3.1'de verilmiştir. Verilen bir sinyal için dönüşümü yeniden hesaplamak yerine bu tür bir tablodan yararlanılabilir.

3.4 LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

Laplace dönüşümünün temel özellikleri aşağıda verilmiştir. Bu özelliklerin doğrulaması 3.8'den 3.16'ya kadar olan örneklerde verilmiştir.

Tablo 3-1 Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	All s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$
$\cos \omega_0 tu(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sin \omega_0 tu(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at}\cos \omega_0 tu(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$e^{-at}\sin \omega_0 tu(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$

A. Doğrusallık

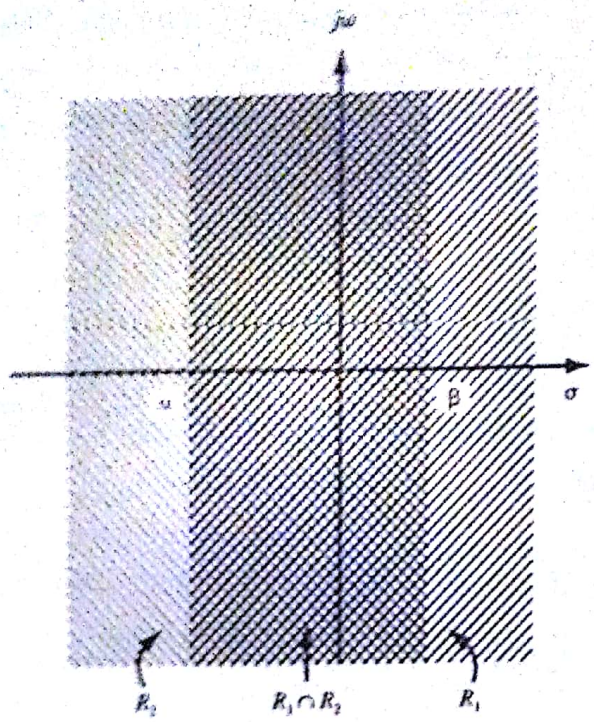
Eğer

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \qquad \text{YB} = R_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) \qquad \text{YB} = R_2 \quad ;$$

ise $$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2 \qquad (3.15)$$

olur. $A \supset B$ gösterimi A'nın B'yi içerdiği, $A \cap B$ ise A ve B'nin kesişimi anlamına gelmektedir. Bu nedenle Eşitlik (3.15), elde edilen Laplace dönüşümünün YB'sinin en azından R_1 ve R_2 arasındaki ortak bölge kadar büyük olduğunu göstermektedir. Genelde, $R' = R_1 \cap R_2$ mevcuttur ve bu durum Şekil 3.4'te gösterilmiştir.



Şekil 3-4 $a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s)$'nin YB'si.

B. Zamanda Öteleme:

Eğer

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) \qquad \text{YB} = R \text{ ise:}$$

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0} X(s) \qquad R' = R \tag{3.16}$$

Eşitlik (3.16), zamanda öteleme işleminden önceki ve sonraki YB'lerin aynı olduğunu ifade etmektedir.

C. s Bölgesinde Öteleme

Eğer

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) \qquad \text{YB} = R \text{ ise:}$$

$$e^{s_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(s - s_0) \qquad R' = R + \text{Re}(s_0) \tag{3.17}$$

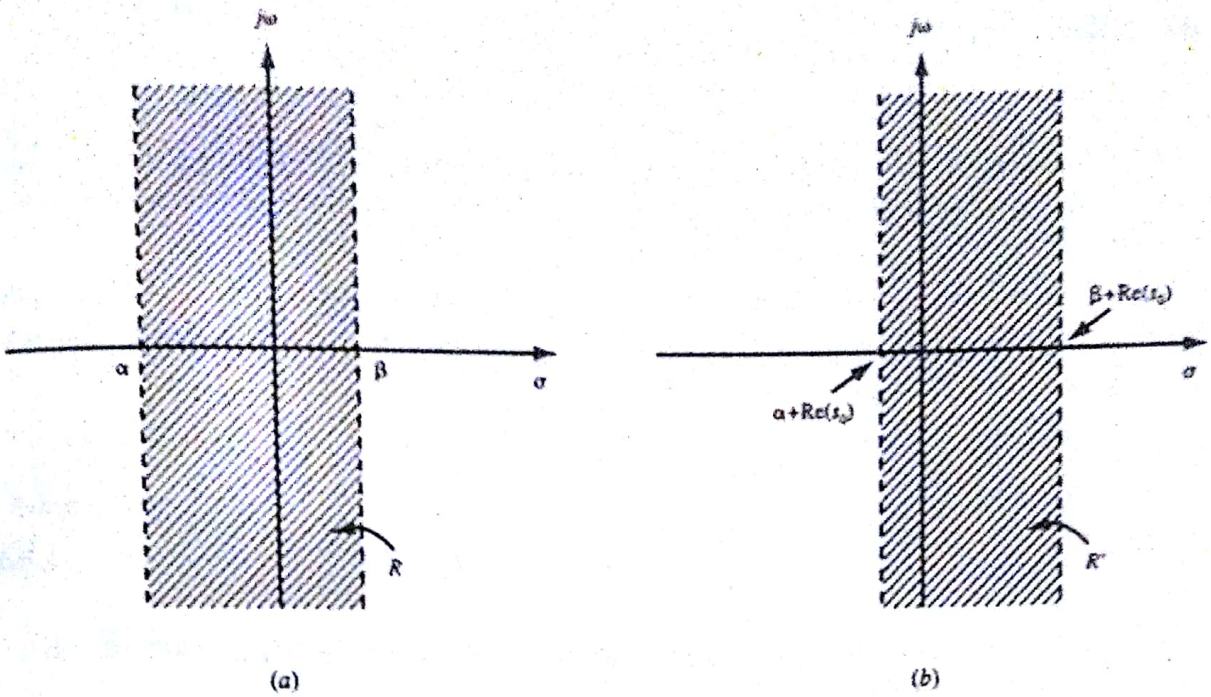
Eşitlik (3.17), $X(s-s_0)$ ile ilişkili YB'nin, $X(s)$ ile ilişkili olanın $\text{Re}(s_0)$ kadar ötelenmiş hali olduğunu ifade etmektedir. Bu durum Şekil 3-5'te gösterilmiştir.

D. Zaman Ölçekleme

Eğer

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) \qquad \text{YB} = R \text{ ise:}$$

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R' = aR \tag{3.18}$$



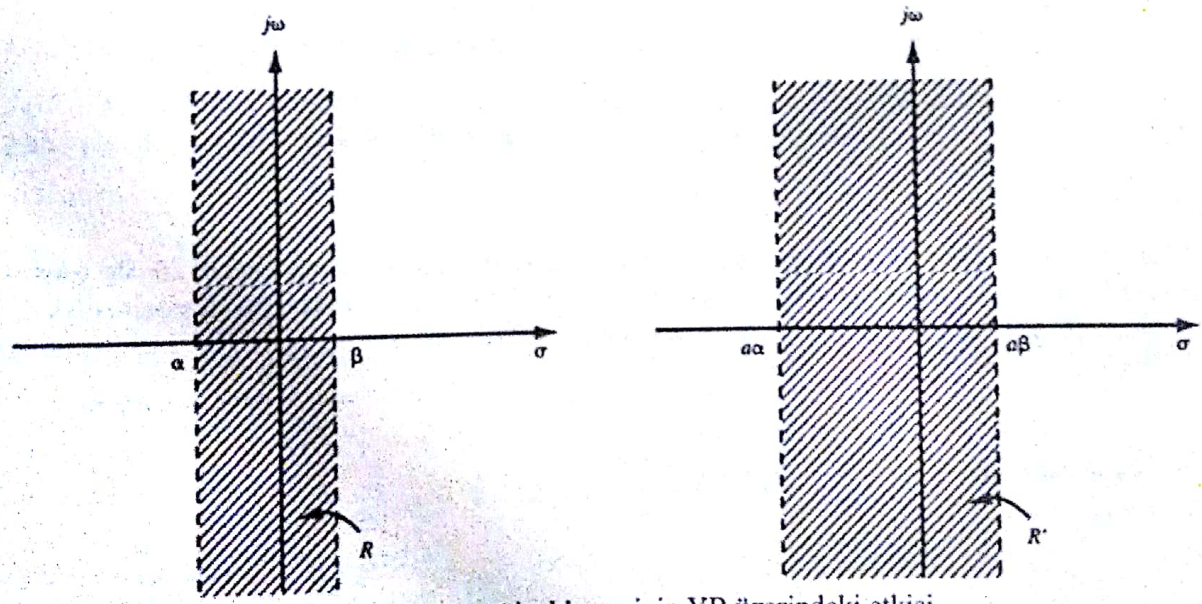
Şekil 3-5. s- düzleminde ötelemenin YB üzerindeki etkisi.

a) $X(s)$'nin YB'si; **b)** $X(s-s_0)$'in YB

Eşitlik (3.18), zaman değişkeni t'yi a ile çarpmanın, s değişkeninde $\frac{1}{a}$ kadar bir ters ölçeklemeye ve $X(s/a)$ genliğinde $\frac{1}{|a|}$ değerinde bir ölçeklemeye sebep olduğunu ifade etmektedir. Bu durum Şekil 3-6'da gösterilmiştir.

E. Zamanda Geri Dönüş

Eğer $x(t) \leftrightarrow X(s)$, YB = R ise



Şekil 3-6 Zaman ölçeklemesinin YB üzerindeki etkisi
a) $X(s)$'nin YB'si b) $X(s/a)$'nın YB'sı.

bu durumda:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-s) \qquad R' = -R \tag{3.19}$$

olur. Bu nedenle, $x(t)$'nin zamanda geri dönüşü s-düzleminde hem σ ekseni hem de $j\omega$ ekseninde zamanda geri dönüşe neden olmaktadır. Eşitlik (3.19), Eşitlik (3.18)'de $a = -1$ kullanılarak rahatlıkla elde edilebilir.

F. Zaman Bölgesinde Türev:

Eğer

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \qquad \text{YB} = R$$

ise,

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) \qquad R' \supset R \tag{3.20}$$

olur. Eşitlik (3.20), zaman bölgesinde türev almanın etkisinin Laplace dönüşümünde s ile çarpmaya eşdeğer olduğunu göstermektedir.

G. s Bölgesinde Türev:

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \qquad \text{YB} = R$$

ise:

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \qquad R' = R \tag{3.21}$$

H. Zaman Bölgesinde Entegral:

Eğer

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \qquad \text{YB} = \text{R}$$

ise:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s) \qquad R' = R \cap \{\text{Re}(s) > 0\} \tag{3.22}$$

olur. Eşitlik (3.22), zaman bölgesinde entegral almanın Laplace dönüşümünü $1/s$ ile çarpmaya eşdeğer olduğunu göstermektedir, ve bu beklenen bir durumdur, zira entegral türev alma işleminin tersidir. R''nün biçimini, $1/s$ ile çarpma sonucu $s = 0$'da oluşması muhtemel bir kutup tarafından belirlenir.

İ. Konvolüsyon:

Eğer

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \qquad \text{YB} = \text{R}_1$$

$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) \qquad \text{YB} = \text{R}_2$$

Tablo 3-2 Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	Sinyal	Dönüşüm	YB
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Doğrusallık	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Zamanda öteleme	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	$R' = R$
s'de öteleme	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R' = R + \mathrm{Re}(s_0)$
Zaman ölçekleme	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(s)$	$R' = aR$
Zamanda geri dönüş	$x(-t)$	$X(-s)$	$R' = -R$
t'ye göre türev	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R' \supset R$
s'ye göre türev	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R' = R$
Türev	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$R' \supset R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

ise
$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s)X_2(s) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2 \tag{3.23}$$

olur. Bu konvolüsyon özelliği analizlerde önemli bir yer tutar ve sürekli zamanlı DZD sistemlerinin tasarımı için önemlidir.

Tablo 3-2, bu bölümde gösterilen Laplace dönüşümlerinin bir özetini vermektedir.

3.5 TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$X(s)$'den $x(t)$ sinyalini elde etme işlemine ters Laplace dönüşümü adı verilir ve sembolik olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} \tag{3.24}$$

A. Ters alma Formülü:

s karmaşık düzleminde bir çizgi-entegralinin hesaplanmasını içeren tüm dönüşüm fonksiyonlarına uygulanabilen bir prosedür vardır.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}\,ds \tag{3.25}$$

biçiminde ifade edilen bu entegralde, gerçel c sayısı öyle bir şekilde seçilmeli ki eğer $X(s)$'nin YB'si $\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$ ise $\sigma_1 < c < \sigma_2$ olsun. Bu entegralin hesabı, karmaşık değişken teorisi bilgisi gerektirir.

B. Laplace Dönüşüm Çiftleri için Tablolardan Kullanımı:

$X(s)$'nin ayrıştırılı olmasının için basit yöntem olarak, $X(s)$, aşağıdaki gibi bir toplam biçiminde ifade edilmeye çalışılır.

$$X(s) = X_1(s) + \cdots + X_n(s) \tag{3.26}$$

Burada $X_1(s), \ldots, X_n(s)$ ters dönüşümleri $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ bilinen fonksiyonlardır. Doğrusallık özelliği (3.15)'ten;

$$x(t) = x_1(t) + \cdots + x_n(t) \tag{3.27}$$

ifadesi elde edilir.

C. Kısmi Kesirler Açılımı:

Eğer $X(s)$

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \tag{3.28}$$

biçiminde bir rasyonel fonksiyon ise, $X(s)$'nin tersini almak için aşağıdaki gibi, kısmi kesirler açılımına dayanan basit bir teknik kullanılabilir.

(a) $X(s)$ uygun bir rasyonel fonksiyon ise, yani $m < n$ ise:

1. Basit Kutup Durumu:

Eğer $X(s)$'nin tüm kutupları, yani $D(s)$'nin tüm sıfırları, basit ise (yani birbirinden farklı), bu durumda $X(s)$

$$X(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n} \tag{3.29}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada c_k katsayıları şu biçimde tanımlanır:

$$c_k = (s-p_k)X(s)\big|_{s=p_k} \tag{3.30}$$

2. Katlı Kutup Durumu:

Eğer $D(s)$'nin katlı kökleri varsa, yani, $D(s)$ $(s-p_i)^r$ şeklinde ifadeler içeriyorsa, p_i'ye $X(s)$'nin r katlı kutbu adı verilir. Bu durumda $X(s)$'nin açılımı

$$\frac{\lambda_1}{s-p_i} + \frac{\lambda_2}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(s-p_i)^r} \tag{3.31}$$

şeklinde ifadeler içerecektir ve

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left[(s-p_i)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_i} \tag{3.32}$$

olacaktır.

(b) $X(s)$ uygun olmayan bir rasyonel fonksiyon, yani $m \geq n$ ise:

Eğer $m \geq n$ ise, $X(s)$'yi uzun bölme yardımı ile

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} \tag{3.33}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $N(s)$ ve $D(s)$, s'ye bağlı pay ve payda polinomları, $Q(s)$ s'ye bağlı $(m-n)$ derecesinden bir polinom ve kalan $R(s)$ ise derecesi kesinlikle n'den küçük olan s'ye bağlı bir

polinomdur. $X(s)$'nin ters Laplace dönüşümü, $Q(s)$ ve $R(s)/D(s)$'nin ters Laplace dönüşümleri belirlenerek bulunur. $R(s)/D(s)$ uygun olduğu için, ters Laplace dönüşümü, önce kısmi kesirlere açılımı yapılarak bulunur. $Q(s)$'nin ters Laplace dönüşümü ise dönüşüm çift kullanılarak hesaplanabilir.

$$\frac{d^k\delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.34}$$

3.6. SİSTEM FONKSİYONU

A. Sistem Fonksiyonu:

Bölüm 2.2'de, sürekli zamanlı DZD bir sistemin $y(t)$ çıkışının, giriş $x(t)$ ile dürtü tepkisi $h(t)$'nin konvolusyonu olduğu, yani

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{3.35}$$

olduğu gösterilmişti. Konvolüsyon özeliğini uygulayarak

$$Y(s) = X(s)H(s) \tag{3.36}$$

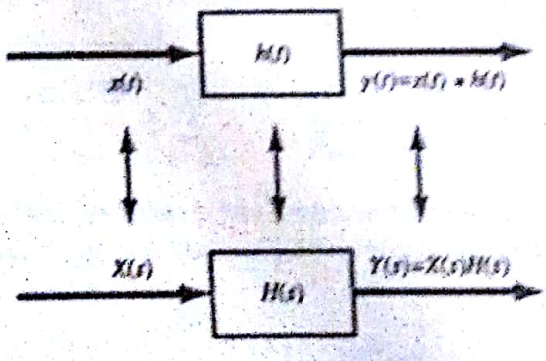
ifadesi elde edilir. Burada, $Y(s)$, $X(s)$, ve $H(s)$ sırası ile $y(t)$, $x(t)$ ve $h(t)$'nin Laplace dönüşümleridir. Eşitlik (3.36),

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{3.37}$$

şeklinde ifade edilebilir. $h(t)$'nin Laplace dönüşümü $H(s)$'ye, *sistem fonksiyonu* (veya *transfer fonksiyonu*) adı verilir. Eşitlik (3.37)'ye göre $H(s)$ aynı zamanda çıkış $y(t)$ ile giriş $x(t)$'nin Laplace dönüşümlerinin oranı olarak da tanımlanabilir. Dürtü tepkisi $h(t)$ bir sistemi tamamı ile karakterize ettiğinden, sistem fonksiyonu $H(s)$ de sistemi tamamı ile karakterize eder. Şekil 3-7, (3.35) ve (3.36) eşitliklerinin ilişkisini göstermektedir.

B. DZD Sistemlerin Karakterize Edilmesi

Sürekli zamanlı DZD sistemlerin birçok özelliği s-düzleminde $H(s)$'nin karakteristiği ile, ve özellikle kutup yerleri ve YB ile ilişkilendirilebilir.



Şekil 3-7 Dürtü tepkisi ve sistem fonksiyonu

1. *Nedensellik:*

Nedensel sürekli zamanlı DZD bir sistem için

$$h(t) = 0 \qquad t < 0$$

ilişkisi vardır. $h(t)$ sağ yanlı bir sinyal olduğundan, $H(s)$'ye ait YB aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_{max}$$

Yani, YB, s-düzleminde sistemin tüm kutuplarının sağındaki bölgedir. Benzer şekilde, eğer sistem nedensel değil ise, o zaman

$$h(t) = 0 \qquad t > 0$$

olur ve $h(t)$ sol yanlıdır. Bu nedenle, $H(s)$'nin YB'si

$$\mathrm{Re}(s) < \sigma_{min}$$

şeklindedir. Yani YB, s-düzleminde sistemin tüm kutuplarının solundaki bölgedir.

2. *Kararlılık:*

Bölüm 2.3'de sürekli zamanlı DZD bir sistemin sınırlı giriş/sınırlı çıkış (SGÇÇ) kararlı olmasının [Eşitlik (2.21)] ancak ve ancak

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

olması durumuna bağlı olduğu söylenmişti. $H(s)$'de buna karşılık gelen durum ise, $H(s)$'nin YB'sinin $j\omega$ eksenini (yani $s = j\omega$) içermesidir (bkz. Prob.3.26).

3. *Nedensel ve Kararlı Sistemler:*

Eğer sistem hem nedensel hem de kararlı ise, $H(s)$'nin tüm kutupları s-düzleminin sol yarısında bulunmalıdır, yani hepsinin gerçel kısımları negatif olmalıdır. Bunun nedeni, YB'nin $\mathrm{Re}(s) > \sigma_{max}$ şeklinde olmasıdır ve $j\omega$ ekseni YB'yi içerdiğinden $\sigma_{max} < 0$ olmalıdır.

C. Doğrusal Sabit Katsayılı Türevsel Denklemlerle Tanımlanabilen DZD Sistemler için Sistem Fonksiyonu:

Bölüm 2.5'te $x(t)$ girişi ve $y(t)$ çıkışı

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \qquad (3.38)$$

genel doğrusal sabit katsayılı türevsel denklemini sağlayan sürekli zamanlı DZD bir sistem gözönüne alınmıştı. Laplace dönüşümü uygulanarak ve (3.20) türev özelliği kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

ifadesi, ya da

$$Y(s)\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s)\sum_{k=0}^{M} b_k s^k \qquad (3.39)$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \qquad (3.40)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $H(s)$ daima rasyoneldir. $H(s)$'nin YB'sinin (3.40)'ta belirtilmediğini, fakat sisteme ait nedenselik veya kararlılık gereksinimlerinden sonuca gidilmesi gerektiğini unutmayınız.

D. Sistemlerin Ara Bağlantıları:

Ardışık bağlanmış [Şekil 3-8(a)] iki DZD sistem için [sırası ile $h_1(t)$ ve $h_2(t)$] toplam dürtü tepkisi $h(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır [Eşitlik (2.81), Prob. 2.14]:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

Bu bağlantının sistem fonksiyonu, sistem fonksiyonlarının çarpımına eşittir.

$$H(s) = H_1(t)\ H_2(s) \qquad (3.41)$$

Bu ilişki Şekil 3-8 (b)'de gösterilmiştir.

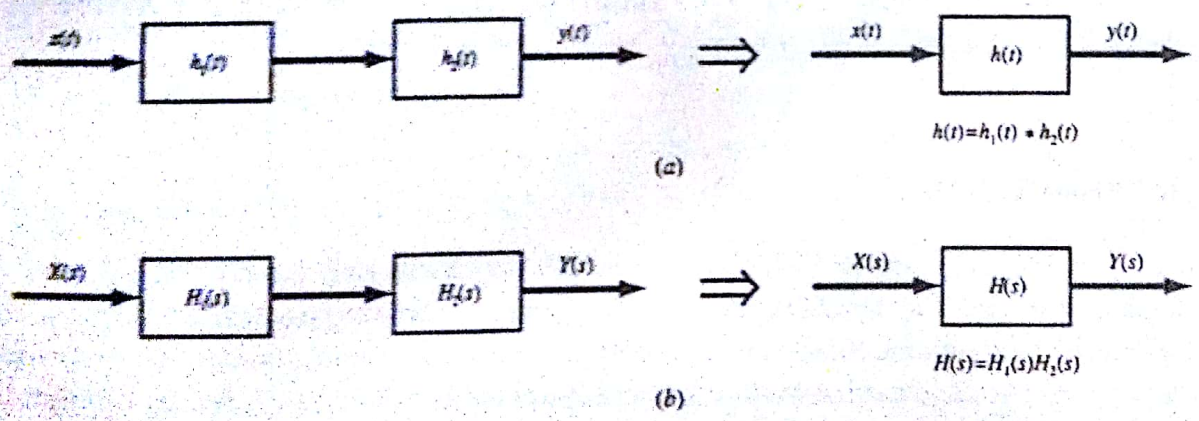
Benzer şekilde, iki DZD sisteminin paralel konbinasyonuna (Şekil 3-9 (a)) ait dürtü tepkisi

$$h(t) = h(t) * h_2(t)$$

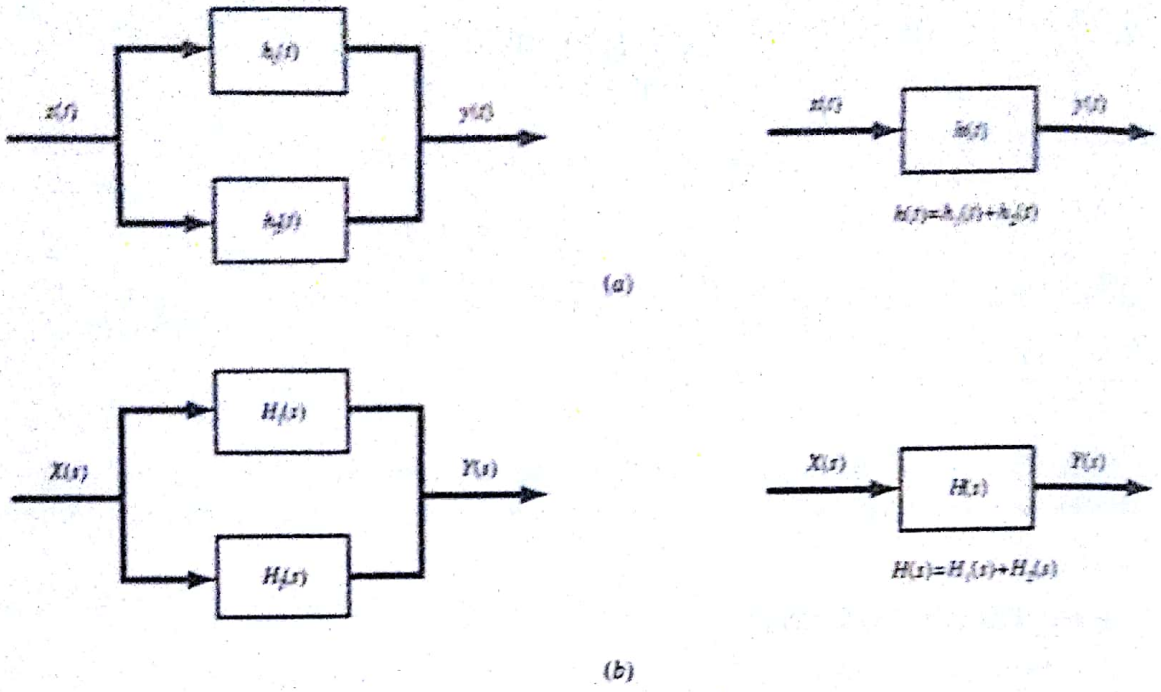
şeklinde (Prob. 2.53) verilmektedir. Bu nedenle:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \qquad (3.42)$$

Bu ilişki şekil 3-9(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 3-8 Ardışık iki sistem (a) Zaman bölgesi gösterimi; (b) s bölgesi gösterimi.



Şekil 3-9 Paralel iki sistem (a) Zaman bölgesi gösterimi; (b) s bölgesi gösterimi

3.7 TEK YANLI LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

A. Tanımlar:

Bir $x(t)$ sinyaline ait tek yanlı Laplace dönüşümü $X_1(s)$

$$X_1(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \tag{3.43}$$

şeklinde tanımlanır Eşitlik (3.5)].

Entegralin alt limitinin (0 veya 0^+ değil) 0^- seçilmesinin nedeni $x(t)$'nin $\delta(t)$ ve türevlerini içermesine izin vermektir. Bu nedenle 0^- dan 0^+'ya entegralin, orijinde bir dürtü fonksiyonu veya türevleri olması durumu dışında sıfır olduğuna dikkat ediniz. Tek yanlı Laplace dönüşümünde $x(t)$, $t < 0$ için dikkate alınmaz. Eşitlik (3-43)'teki $x(t)$ sağ yanlı bir sinyal olduğundan $X_1(s)$'nin YB'si daima $\mathrm{Re}(s) > \delta_{max}$ şeklindedir, yani, *s-düzleminde* sağ yarı düzlemdir.

B. Temel Özellikler:

Tek yanlı Laplace dönüşümüne ait bir çok özellik çift yanlı Laplace dönüşümününki ile aynıdır. Tek yanlı Laplace dönüşümü, özellikle doğrusal, sabit katsayılı, sıfırdan farklı başlangıç koşullu bir türevsel denklem takımı ile tanımlanan nedensel bir sistemin, nedensel bir girişe verdiği tepkiyi hesaplamak için kullanışlıdır. Tek yanlı Laplace dönüşümünün bu uygulamada kullanışlı olan temel özellikleri zamanda türev alma ve zamanda entegral alma özellikleridir. Çift yanlı dönüşümdekinden farklı olan bu özellikler aşağıda verilmiştir:

1. Zaman Bölgesinde Türev:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-) \tag{3.44}$$

Burada koşul, $\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} = 0$ olmasıdır. Bu özelliğin ardarda uygulaması ile

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \tag{3.45}$$

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nX_I(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-) \tag{3.46}$$

elde edilir. Burada $x^{(r)}(0^-) = \left.\frac{d^rx(t)}{dt^r}\right|_{t=0^-}$

2. Zaman Bölgesinde Entegral

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s) \tag{3.47}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau \tag{3.48}$$

C. Sistem Fonksiyonu:

Tekyanlı Laplace dönüşümü ile, sistem fonksiyonunun ($H(s) = Y(s)/X(s)$), başlangıç koşulları sıfır olan DZD bir sistem için tanımlanmakta olduğuna dikkat edilmelidir.

D. Dönüşüm Devreleri:

Elektrik devrelerinin analizi, devrenin işlem ve sinyallerinin Laplace dönüşüm bağıntıları ile gösterilmesi durumunda, entegro-türevsel denklem yazmadan yapılabilir. [Bu alt bölümde Laplace dönüşüm tek yanlı Laplace dönüşümü anlamına gelmektedir. $X_I(s)$'deki I alt indisi bundan böyle kullanılmayacaktır.] Laplace eşitliklerden elde edilen devreye *dönüşüm devresi* adını veriyoruz. Bu tekniği kullanmak için, devrelerdeki her eleman için Laplace dönüşüm modelini kullanmak gereklidir. Bu modeller aşağıdaki bölümlerde oluşturulmaktadır ve Şekil 3-10'da gösterilmiştir. Bu dönüşüm modeli tekniğinin elektrik devreleri problemlerine uygulanışı 3.40'tan 3.42'ye kadarki problemlerde gösterilmiştir.

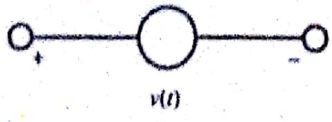
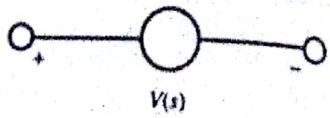
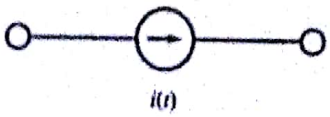
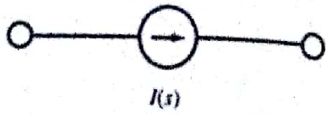
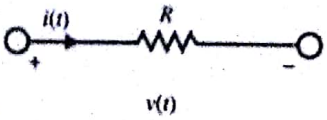
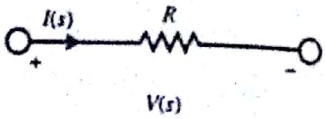
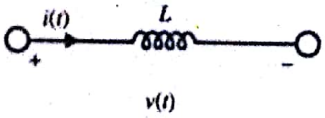
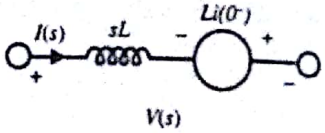
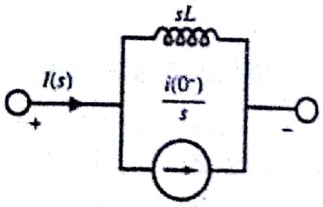
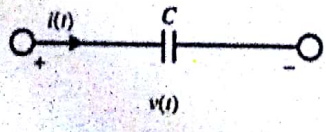
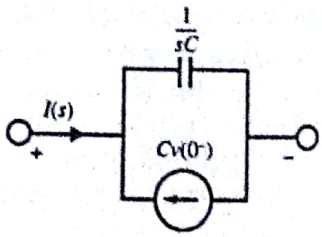
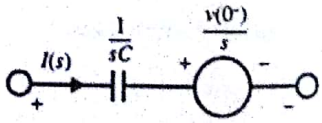
1. Sinyal Kaynakları:

$$v(t) \leftrightarrow V(s) \qquad i(t) \leftrightarrow I(s)$$

Burada $v(t)$ ve $i(t)$, gerilim ve akım kaynaklarıdır.

2. Direnç R:

$$v(t) = Ri(t) \leftrightarrow V(s) = RI(s) \tag{3.49}$$

Devre elemanı	Gösterim	
	t–Bölgesi	s–Bölgesi
Gerilim kaynağı		
Akım kaynağı		
Direnç		
Endüktans		 
Kondansatör		 

Şekil 3-10 Devre elemanlarının Laplace dönüşüm modellerinin gösterimi

3. ***Endüktans L:***

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow V(s) = sLI(s) - Li(0^-) \tag{3.50}$$

Şekil 3-10'daki endüktansın 2. Modeli, Eşitlik (3.50)'yi

$$i(t) \leftrightarrow I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{1}{s}i(0^-) \tag{3.51}$$

şeklinde yeniden yazarak elde edilmektedir.

4. ***Kapasite C:***

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \leftrightarrow I(s) = sCV(s) - Cv(0^-) \tag{3.52}$$

Şekil 3-10'daki 2. model, Eşitlik (3.52)'yi

$$v(t) \leftrightarrow V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{s}v(0^-) \tag{3.53}$$

şeklindeki yeniden yazarak elde edilmektedir.

Çözümlü Problemler

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

3.1. Aşağıdakilerin Laplace dönüşümlerini bulun.

(a) $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

(b) $x(t) = e^{at}u(-t)$

(a) Eşitlik (3.3)'ten

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}\,dt = -\int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0^-} = \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) < -a$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) < -a \tag{3.54}$$

bulunur.

(b) Benzer şekilde,

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0^-} = -\frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}(s) < a$$

Bu nedenle

$$e^{at}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}(s) < a \tag{3.56}$$

elde edilir.

3.3. Bir sonlu süreli $x(t)$ sinyali şu biçimde tanımlanmaktadır:

$$x(t)\begin{cases} \neq 0 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ = 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Burada t_1 ve t_2 sonlu değerlerdir. Eğer $X(s)$ sıfırdan bir s değeri için yakınsıyorsa, $x(t)$'nin YB'sinin tüm s-düzlemi olduğunu gösteriniz.

$X(s)$'nin $s = \sigma_0$'da yakınsadığını varsayalım. Bu durumda, Eşitlik (3.37)'e göre:

$$|X(s)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}|dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty$$

$\mathrm{Re}(s) = \sigma_1 > \sigma_0$ olsun. O zaman

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-(\sigma_1 + j\omega)t}|dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma_1 t}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}\, dt$$

olur. $(\sigma_1 - \sigma_0) > 0$ olduğundan, $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}$ üstel olarak azalır. O zaman $x(t)$'nin sıfırdan farklı olduğu bölgede bu üstel fonksiyonun maksimum değeri $e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_1}$ olur ve

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma_1 t}\, dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty \tag{3.56}$$

yazılabilir. Bu nedenle $X(s)$, $\mathrm{Re}(s) = \sigma_1 > \sigma_0$ için yakınsar. Benzer olarak, eğer $(\sigma_1 - \sigma_0) < 0$ ise

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma_1 t}\, dt < e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t_2} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty \tag{3.57}$$

olur ve $X(s)$ yine $\mathrm{Re}(s) = \sigma_1 > \sigma_0$ için yakınsar. Bu nedenle, $X(s)$'nin YB'si tüm s-düzlemidir.

3.3. Aşağıdaki gibi tanımlanan $x(t)$'nin Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Eşitlik (3.3) ile

$$X(s) = \int_0^T e^{-st}e^{-at}\, dt = \int_0^T e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^T = \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{-(s+a)T}\right] \tag{3.58}$$

yazılabilir. $x(t)$ sonlu süreli bir sinyal olduğundan, $X(s)$'nin YB'si tüm s-düzlemidir. Eşitlik (3.58)'den, $s = -a$ için $X(s)$ yakınsamıyormuş gibi görünmektedir. Fakat bu doğru değildir.

Eşitlik (3.58)'deki entegralde $s = a$ alarak

$$X(-a) = \int_0^T e^{-(a+a)t}\,dt = \int_0^T dt = T$$

elde edilir. Aynı sonuç, Eşitlik (3.58)'e L'Hospital's kuralı uygulanarak da elde edilebilir.

3.4. $x(t)$ sağ yanlı bir sinyal ise ve $X(s)$ bazı s değerleri için yakınsıyorsa, σ_{max} $X(s)$'nin kutuplarının gerçel bölümlerinin en büyüğü olmak üzere, $X(s)$'nin YB'sinin

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_{max}$$

formunda olduğunu gösteriniz.

Bir sağ yanlı $x(t)$ sinyalini gözönüne alalım öyle ki

$$x(t) = 0 \qquad t < t_1$$

olsun ve $X(s)$, $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$ için yakınsasın. O zaman

$$|X(s)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt < \infty$$

olur. Şimdi, $\mathrm{Re}(s) = \sigma_1 > \sigma_0$ olsun. Bu durumda,

$$\int_{t_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_1 t}\,dt = \int_{t_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}\,dt$$

$$< e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t_1}\int_{t_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt < \infty$$

olur. Bu nedenle, $X(s)$, $\mathrm{Re}(s) = \sigma_1$ için yakınsar ve $X(s)$'nin YB'si, $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ şeklindedir. $X(s)$'nin YB'si, $X(s)$'nin hiçbir kutbunu içeremeyeceğinden,

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_{max}$$

biçiminde olduğu sonucuna varılır. Burada, σ_{max} $X(s)$'nin kutuplarının gerçel bölümlerinin en büyüğüdür.

3.5. Aşağıdaki fonksiyonlar için Laplace dönüşümü $X(s)$'yi bulun ve kutup-sıfır grafiğini YB'yi içerecek şekilde çiziniz.

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

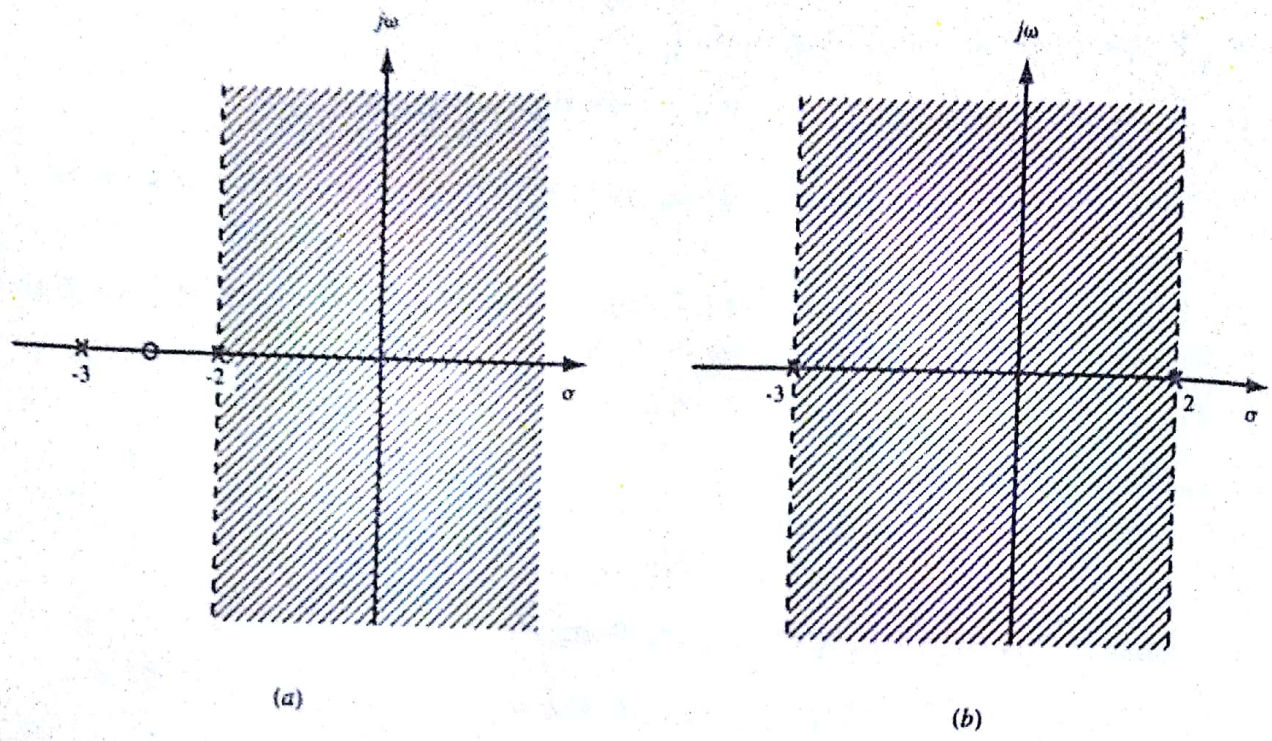
(b) $x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

(c) $x(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$

(a) Tablo 3-1'den

$$e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -2 \tag{3.59}$$

$$e^{-3t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3 \tag{3.60}$$



Şekil 3-11

Eşitlik (3.59) ve (3.60)'ta YB'lerin kesiştiği görülmektedir ve bu nedenle:

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{2(s+\frac{5}{2})}{(s+2)(s+3)} \qquad \mathrm{Re}(s) > -2 \qquad (3.61)$$

Eşitlik (3.61)'den, $X(s)$'nin $s=-\frac{5}{2}$'de bir sıfırı, $s=-2$ ve $s=-3$'te de iki kutbu olduğu görülmektedir. Ayrıca Şekil 3-11(a)'da çizildiği gibi, YB'nin $\mathrm{Re}(s)>-2$ olduğunu görüyoruz.

(b) Tablo 3-1'den:

$$e^{-3t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3 \qquad (3.62)$$

$$e^{2t}u(-t) \longleftrightarrow -\frac{1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}(s) < 2 \qquad (3.63)$$

Eşitlik (3.62) ve (3.63)'den YB'lerin kesiştiği görülmektedir. Dolayısıyla:

$$X(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-2} = \frac{-5}{(s-2)(s+3)} \qquad -3 < \mathrm{Re}(s) < 2 \qquad (3.64)$$

Eşitlik (3.64)'den $X(s)$'nin sıfırının olmadığı, $s=2$ ve $s=-3$'de kutupları bulunduğu, YB'nin de $-3<\mathrm{Re}(s)<2$ olduğu görülmektedir. Bu durum Şekil 3-11(b)'de gösterilmiştir.

(c) Tablo 3-1'den:

$$e^{2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}(s) > 2 \qquad (3.65)$$

$$e^{-3t}u(-t) \longleftrightarrow -\frac{1}{s+3} \qquad \mathrm{Re}(s) < -3 \qquad (3.66)$$

Eşitlik (3-65) ve (3.66)'dan, YB'lerin kesişmediği ve ortak YB olmadığı, bu nedenle, $x(t)$'nin bir dönüşümünün olmadığı görülmektedir.

3.6

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

olsun. $X(s)$'yi hesaplayıp, $a>0$ ve $a<0$ için sıfır-kutup resmini ve YB'yi çiziniz.

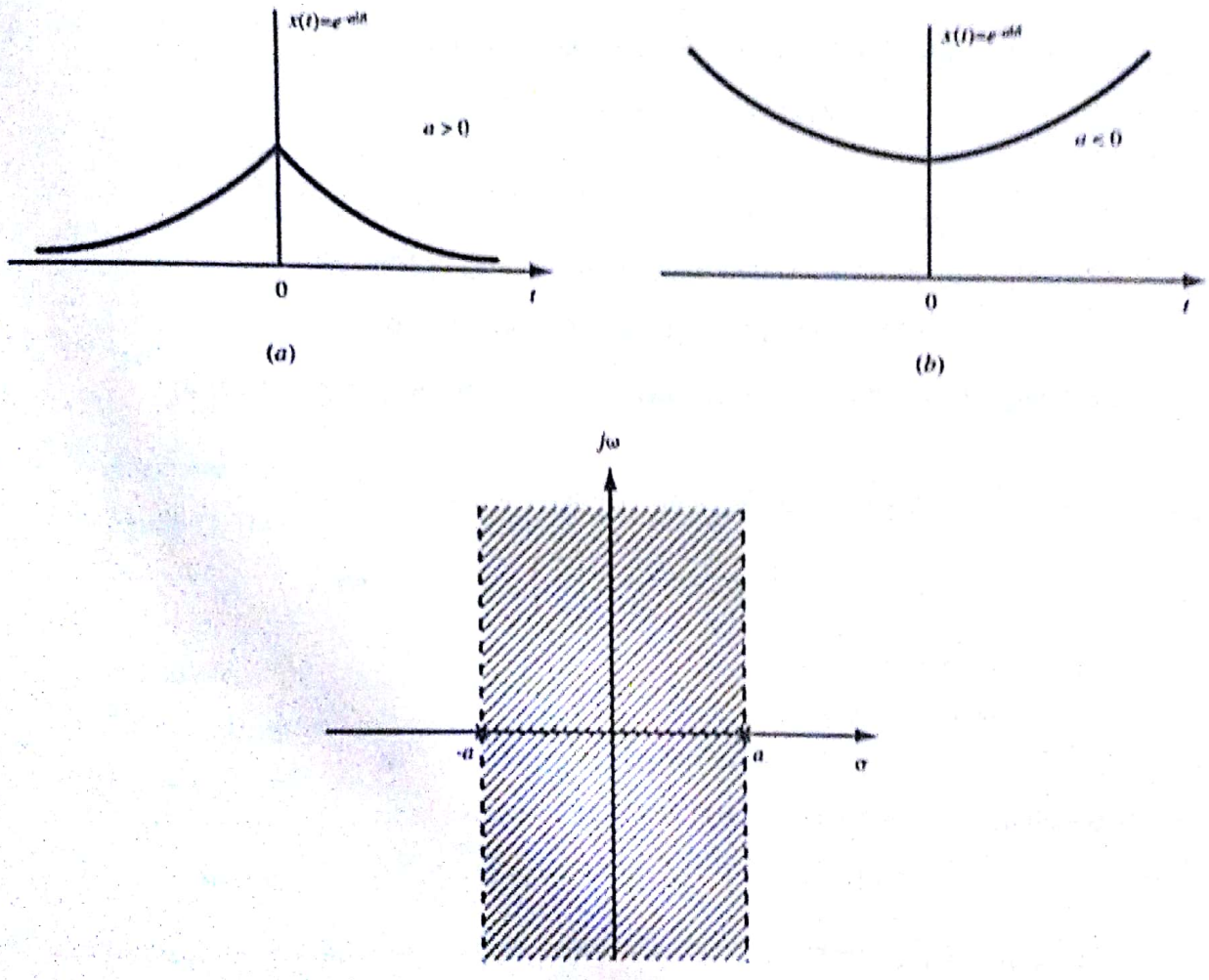
$x(t)$, Şekil 3-12(a) ve (b)'de $a>0$ ve $a<0$ için çizilmiştir. $x(t)$ çift yanlı bir sinyal olduğu için aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) \qquad (3.67)$$

$x(t)$'nin $t = 0$'da sürekli olduğu ve $x(0^-) = x(0) = x(0^+) = 1$ olduğu görülmektedir. Tablo 3-1'den:

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a \qquad (3.68)$$

$$e^{at}u(-t) \longleftrightarrow -\frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}(s) < a \qquad (3.69)$$



Şekil 3-12

Eğer $a > 0$ ise, Eşitlik (3.68) ve (3.69) için YB'lerin kesiştiği ve bu nedenle

$$X(s) = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s-a} = \frac{-2a}{s^2-a^2} \qquad -a < \mathrm{Re}(s) < a \tag{3.70}$$

olduğu görülmektedir. Eşitlik (3.70)'den $X(s)$'nin sıfırının olmadığı, $s = a$ ve $s = -a$'da iki kutbun bulunduğu ve YB'nin Şekil 3-12(c)'de gösterildiği gibi $-a < \mathrm{Re}(s) < a$ biçiminde olduğu görülmektedir. Eğer $a < 0$ ise, (3.68) ve (3.69)'dan YB'lerin kesişmediği, ortak bir YB'nin olmadığı, bu nedenle $x(t)$'nin $X(s)$ gibi bir dönüşümünün olmadığı görülmektedir.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

3.7. (3.16) ile verilen zamanda öteleme özelliğini doğrulayınız, yani

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad R' = R$$

olduğunu gösteriniz.

(3.3) tanımı gereğince

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st}\,dt$$

yazılır. $\tau = t-t_0$ biçiminde bir değişken dönüşümü yoluyla

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}\,d\tau$$

$$= e^{-st_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-st_0}X(s)$$

elde edilir. Bu fonksiyon, $X(s)$ ile aynı YB'ye sahiptir. Dolayısıyla,

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad R' = R$$

yazılabilir. Burada R ve R' zaman ötelemesinden önceki ve sonraki YB'lerdir.

3.8. (3-18) ile tanımlanan zaman ölçekleme özelliğini doğrulayınız. Yani,

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R' = aR$$

olduğunu gösteriniz.

(3.3) tanımı gereğince

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-st}\,dt$$

yazılabilir. $\tau = at$ $(a>0)$ biçimindeki değişken dönüşümü ile

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-(s/a)\tau}\,d\tau = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R' = aR$$

elde edilir. Dönüşümdeki s/a ölçeklemesinden ötürü, $X(s/a)$'nın YB'si aR olmaktadır. $a<0$ durumunda ise

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{-(s/a)\tau}\,d\tau$$

$$= -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-(s/a)\tau}\,d\tau = -\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R' = aR$$

elde edilir. Bu nedenle, $a>0$ ve $a<0$ durumları için toplu çözüm şu biçimde yazılabilir:

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R' = aR$$

3.9. Aşağıdaki sinyaller için Laplace dönüşümünü ve ilgili YB'leri bulunuz.

(a) $x(t) = \delta(t - t_0)$

(b) $x(t) = u(t - t_0)$

(c) $x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-5)]$

(d) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$

(e) $x(t) = \delta(at + b), a, b$ gerçel sabitler

(a) Eşitlik (3.13) ve (3.16)'yı kullanarak

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} \text{ (tüm } s \text{ değerleri için)} \tag{3.71}$$

elde edilir.

(b) Eşitlik (3.14) ve (3.16) kullanılarak:

$$u(t - t_0) \leftrightarrow \frac{e^{-st_0}}{s} \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.72}$$

(c) $x(t)$ aşağıdaki gibi yeniden ifade edilerek

$$x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-5)] = e^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t-5)$$
$$= e^{-2t}u(t) - e^{-10}e^{-2(t-5)}u(t-5)$$

şekline dönüştürülür. Buradan, Tablo 3-1 ve Eşitlik (3.16) kullanılarak

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - e^{-10}e^{-5s}\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+2}(1 - e^{-5(s+2)}) \qquad \mathrm{Re}(s) > -2$$

elde edilir.

(d) Eşitlik (3.71) ve (1.99) kullanılarak

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-sT})^k = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.73}$$

elde edilir.

(e) $f(t) = \delta(at)$ olsun.

Bu durumda

$$f(t) = \delta(at) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{|a|} \text{ (tüm } s \text{ değerleri için)} \tag{3.74}$$

olur. Buradan da $\quad x(t) = \delta(at + b) = \delta\left[a\left(t + \frac{b}{a}\right)\right] = f\left(t + \frac{b}{a}\right)$

yazılabilir. Eşitlik (3.16) ve (3.74) yardımıyla

$$X(s) = e^{sb/a}F(s)\frac{1}{|a|}e^{sb/a} \text{ (tüm } s \text{ değerleri için)} \tag{3.75}$$

elde edilir.

3.10. Aşağıda tekrar yazılan ve (3.20) ile tanımlanan zamana göre türev alma özelliğinin doğruluğunu gösteriniz.

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) \qquad R' \supset R$$

(3.24) eşitliğine göre ters Laplace dönüşümü şu biçimde tanımlanır:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}\,ds \tag{3.76}$$

Bu eşitliğin her iki yanının t'ye göre türevi alınarak

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} sX(s)e^{st}\,ds \tag{3.77}$$

elde edilir. (3.77) ile (3.76)'nın karşılaştırılmasından $dx(t)$ / dt'nin, $sX(s)$'nin ters Laplace dönüşümü olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s) \qquad R' \supset R$$

$s = 0$'da bir sıfır-kutup iptali olmadıkça ilgili YB'nin değişikliğe uğramadığına dikkat ediniz.

3.11. Aşağıda tekrar yazılan ve (3.21) ile tanımlanan s'ye göre türev alma özelliğinin doğruluğunu gösteriniz.

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \qquad R' = R$$

(3.3) tanımından

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanının s'ye göre türevi alınarak

$$\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty}(-t)x(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}[-tx(t)]e^{-st}\,dt$$

elde edilir. Dolayısıyla:

$$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \qquad R' = R$$

3.12. Aşağıda tekrar yazılan ve (3.22) ile tanımlanan entegral alma özelliğinin doğruluğunu gösteriniz.

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$$

$f(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow F(s)$$

Bu durumda $x(t)$ şu biçimde bulunur.

$$x(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

Türev alma özelliği (3.20) kullanılarak

$$X(s) = sF(s)$$

bulunur. Dolayısıyla:

$$F(s) = \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$$

$1/s$ ile çarpmadan dolayı s=0'da ek bir kutbun gelme olasılığı R′ yakınsama bölgesinin şeklini de etkiler.

3.13. Çeşitli Laplace dönüşüm özelliklerini kullanarak, aşağıdaki SİNYALLERİN Laplace dönüşümünü $u(t)$'nin Laplace dönüşümünden yararlanarak çıkarınız.

(*a*) $\delta(t)$ (*b*) $\delta'(t)$
(*c*) $tu(t)$ (*d*) $e^{-at}u(t)$
(*e*) $te^{-at}u(t)$ (*f*) $\cos\omega_0 tu(t)$
(*g*) $e^{-at}\cos\omega_0 tu(t)$

(a) Eşitlik (3.14)'ten

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re(s)>0 \text{ için}}$$

Eşitlik (1.30)'dan:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Bu nedenle, (3.25) zamana göre türev alma özelliği kullanılarak

$$\delta(t) \leftrightarrow s\tfrac{1}{s} = 1 \qquad \text{tüm } s \text{ için}$$

elde edilir.

(b) (3.20) zamana göre türev alma özelliği (*a*)'daki sonuca uygulanırsa:

$$\delta'(t) \longleftrightarrow s \qquad \text{tüm } s \text{ için} \tag{3.78}$$

(c) s'ye göre türev özelliği (3.21) kullanılarak:

$$tu(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.79}$$

(d) s bölgesinde öteleme özelliği (3.17) kullanılarak:

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a$$

(e) (*c*) şıkkındaki sonuç ve s'ye göre türev özelliği (3.21) kullanılarak:

$$te^{-at}u(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a \tag{3.80}$$

(f) Euler formülünden:

$$\cos\omega_0 tu(t) = \tfrac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})u(t) = \tfrac{1}{2}e^{j\omega_0 t}u(t) + \tfrac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t)$$

Doğrusallık özelliği (3.15) ve s bölgesinde ötelenme özelliği (3.17) kullanılarak,

$$\cos \omega_0 t u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \qquad (3.35)$$

(g) s bölgesinde ötelenme özelliği (3.17) ve *(f)* deki sonuçu kullanarak

$$e^{-at}\cos \omega_0 t u(t) \longleftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a \qquad (3.36)$$

3.14. (3.23) ile verilen konvolüsyon özelliğini, yani

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s)X_2(s) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2$$

eşitliğini doğrulayınız.

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$$

olsun. (3.3) tanımı gereği,

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-st}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-st}\,dt\right]d\tau$$

olur. En son ifadedeki parantez içindeki terimin ötelenmiş $x_2(t-\tau)$ sinyalinin Laplace dönüşümü olduğuna dikkat edilirse, Eşitlik (3.16) yardımıyla

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau}X_2(s)\,d\tau$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\right]X_2(s) = X_1(s)X_2(s)$$

bulunur. YB, $X_1(s)$ ve $X_2(s)$'nin YB'lerinin kesişimidir. Eğer bir dönüşümün bir sıfırı diğer dönüşümün bir kutbunu yok ederse, $Y(s)$'nin YB'si daha büyük olabilir. Bu nedenle,

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s)X_2(s) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2$$

olduğu sonucuna varılır.

3.15. (3.23) konvolüsyon özelliğini kullanarak, Eşitlik (3.22)'yi, yani

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$$

eşitliğini doğrulayınız.

Eşitlik (2.60) (Problem 2.2) yardımıyla

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * u(t) \qquad (3.85)$$

yazılabilir. Eşitlik (3.14)'ten:

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

Dolayısıyla, konvolüsyon özelliği (3.23) de kullanılarak

$$x(t) * u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$$

elde edilir ve bunun YB'si $X(s)$'nin ve $u(t)$'nin Laplace dönüşümlerinin YB'lerinin kesişimidir. Bundan ötürü:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$$

TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

3.16. Aşağıdaki $X(s)$'ler için ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

(a) $X(s) = \dfrac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}(s) > -1$

(b) $X(s) = \dfrac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}(s) < -1$

(c) $X(s) = \dfrac{s}{s^2+4}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

(d) $X(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$, $\mathrm{Re}(s) > -1$

(a) Tablo 3-1 den:

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

(b) Tablo 3-1 den:

$$x(t) = -e^{-t}u(-t)$$

(c) Tablo 3-1 den:

$$x(t) = \cos 2t\, u(t)$$

(d) Tablo 3-1 den:

$$s(t) = e^{-t}\cos 2t\, u(t)$$

3.17. Aşağıdaki $X(s)$'ler için ters Laplace dönüşümlerini bulunuz.

(a) $X(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$, $\mathrm{Re}(s) > -1$

(b) $X(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$, $\mathrm{Re}(s) < -3$

(c) $X(s) = \dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$, $-3 < \mathrm{Re}(s) < -1$

Kısmi kesirler açılımı ile

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}$$

elde edilir. Eşitlik (3.30)'u kullanarak,

$$c_1 = (s+1)X(s)|_{s=-1} = 2\frac{s+2}{s+3}\bigg|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = (s+3)X(s)|_{s=-3} = 2\frac{s+2}{s+1}\bigg|_{s=-3} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

(a) $X(s)$'nin YB'si $\mathrm{Re}(s) > -1$ olup, $x(t)$ sağ yanlı bir sinyaldir. Tablo 3-1'den:

$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

(b) $X(s)$'nin YB'si $\mathrm{Re}(s) < -3$ olup, $x(t)$ sol yanlı bir sinyaldir. Tablo 3-1'den:

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-3t}u(-t) = -(e^{-t} + e^{-3t})u(-t)$$

(c) $X(s)$'nin YB'si $-3 < \mathrm{Re}(s) < -1$ olup, $x(t)$ çift yanlı bir sinyaldir. Tablo 3-1'den:

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-3t}u(t)$$

3.18. Aşağıdaki fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

Paydadaki polinom için

$$s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 9 = (s+2-j3)(s+2+j3)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} = \frac{5s+13}{s(s+2-j3)(s+2+j3)}$$
$$= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s-(-2+j3)} + \frac{c_3}{s-(-2-j3)}$$

olur. Katsayılar aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$c_1 = sX(s)|_{s=0} = \frac{5s+13}{s^2+4s+13}\bigg|_{s=0} = 1$$

$$c_2 = (s+2-j3)X(s)|_{s=-2+j3} = \frac{5s+13}{s(s+2+j3)}\bigg|_{s=-2+j3} = -\frac{1}{2}(1+j)$$

$$c_3 = (s+2+j3)X(s)|_{s=-2-j3} = \frac{5s+13}{s(s+2-j3)}\bigg|_{s=-2-j3} = -\frac{1}{2}(1-j)$$

Dolayısıyla:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}(1+j)\frac{1}{s-(-2+j3)} - \frac{1}{2}(1-j)\frac{1}{s-(-2-j3)}$$

$X(s)$'nin YB'si $\mathrm{Re}(s)>0$ olduğundan $x(t)$ sağ yanlı bir sinyaldir ve Tablo 3-1'den

$$x(t) = u(t) - \tfrac{1}{2}(1+j)e^{(-2+j3)t}u(t) - \tfrac{1}{2}(1-j)e^{(-2-j3)t}u(t)$$

elde edilir.

$$e^{(-2\pm j3)t} = e^{-2t}e^{\pm j3t} = e^{-2t}(\cos 3t \pm j\sin 3t)$$

özdeşliğinin yukarıdaki ifadede kullanılması ve basit bazı işlemlerle sonuç bulunur:

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t)u(t) \\ &= \left[1 - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t)\right]u(t) \end{aligned}$$

Alternatif Çözüm:

$X(s)$

$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2 s + c_3}{s^2+4s+13}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Daha önce olduğu gibi, Eşitlik (3.30) ile c_1 katsayısı bulunur.

$$c_1 = sX(s)|_{s=0} = \left.\frac{5s+13}{s^2+4s+13}\right|_{s=0} = 1$$

Bu durumda

$$\frac{c_2 s + c_3}{s^2+4s+13} = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} - \frac{1}{s} = \frac{-s+1}{s^2+4s+13}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s-1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{s} - \frac{s+2-3}{(s+2)^2+9} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{3}{(s+2)^2+3^2} \end{aligned}$$

olup, $x(t)$ Tablo 3-1'den bulunur.

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - e^{-2t}\cos 3t u(t) + e^{-2t}\sin 3t u(t) \\ &= \left[1 - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t)\right]u(t) \end{aligned}$$

3.19. Aşağıdaki fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3$$

$X(s)$'nin $s=-3$'te basit bir kutbu ve $s=-5$'te katlı bir kutbu vardır. Eşitlik (3.29) ve (3.31) yardımıyla $X(s)$ şu biçimde yazılabilir:

$$X(s) = \frac{c_1}{s+3} + \frac{\lambda_1}{s+5} + \frac{\lambda_2}{(s+5)^2} \qquad (3.84)$$

Eşitlik (3.30) ve (3.31) kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$c_1 = (s+3)X(s)\big|_{s=-3} = \left.\frac{s^2+2s+5}{(s+5)^2}\right|_{s=-3} = 2$$

$$\lambda_2 = (s+5)^2X(s)\big|_{s=-5} = \left.\frac{s^2+2s+5}{s+3}\right|_{s=-5} = -10$$

$$\lambda_1 = \frac{d}{ds}\left[(s+5)^2X(s)\right]\Big|_{s=-5} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+2s+5}{s+3}\right]\Big|_{s=-5}$$

$$= \left.\frac{s^2+6s+1}{(s+3)^2}\right|_{s=-5} = -1$$

Dolayısıyla:

$$X(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

$X(s)$'nin YB'si $\mathrm{Re}(s)>-5$ olduğundan $x(t)$ sağ yanlı bir sinyaldir. Tablo 3-1'den $x(t)$ bulunur

$$x(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{-5t}u(t) - 10te^{-5t}u(t)$$
$$= [2e^{-3t} - e^{-5t} - 10te^{-5t}]u(t)$$

Türev alma yoluna gitmeden λ_1'i elde etmenin daha basit bir yolu vardır. Bu şöyle gösterilebilir: Önce c_1 ve λ_2 normal yoldan bulunur. Daha sonra c_1 ve λ_2 Eşitlik (3.84)'ye yerine konularak

$$\frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{2}{s+3} + \frac{\lambda_1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede her iki tarafta $s=0$ konularak

$$\frac{5}{75} = \frac{2}{3} + \frac{\lambda_1}{5} - \frac{10}{25}$$

elde edilir. Buradan da $\lambda_1 = 1$ bulunur.

3.28. Aşağıdaki $X(s)$ fonksiyonlarının ters Laplace dönüşümlerini bulunuz.

(a) $X(s) = \dfrac{2s+1}{s+2}$, $\mathrm{Re}(s) > -2$

(b) $X(s) = \dfrac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2}$, $\mathrm{Re}(s) > -1$

(c) $X(s) = \dfrac{s^3+2s^2+6}{s^2+3s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

(a) $X(s) = \dfrac{2s+1}{s+2} = \dfrac{2(s+2)-3}{s+2} = 2 - \dfrac{3}{s+2}$

$X(s)$'nin YB'si $\mathrm{Re}(s)>-2$ olduğundan $x(t)$ sağ yanlı bir sinyaldir. Tablo 3-1'den $x(t)$ bulunur.

$$x(t) = 2\delta(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

(b) Uzun bölme yoluyla

$$X(s) = \frac{s^2 + 6s + 7}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 2)}$$

ifadesi elde edilir. $X_1(s)$'nin aşağıdaki gibi olduğu kabul edilsin.

$$X_1(s) = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{c_1}{s + 1} + \frac{c_2}{s + 2}$$

Burada

$$c_1 = (s + 1)X_1(s)\big|_{s=-1} = \frac{3s + 5}{s + 2}\bigg|_{s=-1} = 2$$

$$c_2 = (s + 2)X_1(s)\big|_{s=-2} = \frac{3s + 5}{s + 1}\bigg|_{s=-2} = 1$$

olup, dolayısıyla,

$$X(s) = 1 + \frac{2}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}$$

yazılabilir. $X(s)$'nin YB'si Re(s)>−1'dir. Sonuç olarak $x(t)$ sağ yanlı bir sinyaldir ve Tablo 3-1'den $x(t)$ bulunur.

$$x(t) = \delta(t) + (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$

(c) Benzer şekilde hareketle

$$X(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6}{s^2 + 3s} = s - 1 + \frac{3s + 6}{s(s + 3)}$$

ifadesi elde edilir. $X_1(s)$'nin aşağıdaki gibi olduğu kabul edilsin.

$$X_1(s) = \frac{3s + 6}{s(s + 3)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s + 3}$$

Dolayısıyla

$$c_1 = sX_1(s)\big|_{s=0} = \frac{3s + 6}{s + 3}\bigg|_{s=0} = 2$$

$$c_2 = (s + 3)X_1(s)\big|_{s=-3} = \frac{3s + 6}{s}\bigg|_{s=-3} = 1$$

$X(s)$'nin YB'si Re(s)>0'dir. Bu nedenle, $x(t)$ sağ yanlı bir sinyaldir ve Tablo 3-1 ile Eşitlik (3.78)'den $x(t)$ bulunur.

$$X(s) = s - 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s + 3}$$

Bu problemdeki tüm $X(s)$'lerin uygun olmadığına, ve $x(t)$'nin $\delta(t)$ve türevlerini içerdiğine dikkat ediniz.

3.21. Aşağıdaki ifadenin ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$X(s) = \frac{2 + 2se^{-2s} + 4e^{-4s}}{s^2 + 4s + 3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

$X(s)$'nin

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)e^{-2s} + X_3(s)e^{-4s}$$

şeklinde bir toplamdan oluştuğu ve

$$X_1(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} \qquad X_2(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 3} \qquad X_3(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 3}$$

olduğu görülmektedir. Eğer

$$x_1(t) \longleftrightarrow X_1(s) \qquad x_2(t) \longleftrightarrow X_2(s) \qquad x_3(t) \longleftrightarrow X_3(s)$$

ise o zaman doğrusallık özelliği (3.15) ve zaman öteleme özelliği (3.16)'dan

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t-2) + x_3(t-4) \tag{3.85}$$

elde edilir. Bir sonraki adım olarak kısmı kesirler açılımının kullanılmasıyla

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \longleftrightarrow x_1(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

$$X_2(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+3} \longleftrightarrow x_2(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$$

$$X_3(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+3} \longleftrightarrow x_3(t) = 2(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$$

ifadeleri bulunur. Bu nedenle, Eşitlik (3.85)'ten

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t) + [-e^{-(t-2)} + 3e^{-3(t-2)}]u(t-2)$$
$$+ 2[e^{-(t-4)} - e^{-3(t-4)}]u(t-4)$$

sonucuna varılır.

3.22. s'ye göre türev özelliği (3.21)'i kullanarak $X(s)$'nin ters Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a$$

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

olduğundan ve Eşitlik (3.9)'dan

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a$$

elde edilir. Bu nedenle, s'ye göre türev özelliği (3.21)'den $x(t)$ bulunur.

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

SİSTEM FONKSİYONU

3.23. Şekil 1-32'deki (Prob. 1.32) RC devresinin sistem fonksiyonu $H(s)$ ve dürtü tepkisi $h(t)$'yi bulunuz.

(a)

$$x(t) = v_s(t) \qquad y(t) = v_c(t)$$

olsun. Bu durumda, RC devresi Eşitlik (1.105) ile tanımlanabilir.

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

Yukarıdaki ifadenin Laplace dönüşümü alınarak

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{RC}X(s)$$

veya

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)Y(s) = \frac{1}{RC}X(s)$$

ifadesi elde edilir. Eşitlik (3.37)'nin kullanılmasıyla da sistem fonksiyonu $H(s)$ ifadesi

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC} = \frac{1}{RC}\frac{1}{s + 1/RC}$$

biçiminde bulunur. Sistem nedensel olduğundan, $H(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak dürtü tepkisi $h(t)$ elde edilir.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

(b) $x(t)$ aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

$$x(t) = v_s(t) \qquad y(t) = i(t)$$

Bu durumda, RC devresi aşağıdaki gibi tanımlanabilir. [bkz. (1.107)].

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{R}\frac{dx(t)}{dt}$$

Yukarıdaki ifadenin Laplace dönüşümü alınarak

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{R}sX(s)$$

veya

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)Y(s) = \frac{1}{R}sX(s)$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla, sistem fonksiyonu $H(s)$ aşağıdaki gibidir.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s/R}{s + 1/RC} = \frac{1}{R}\frac{s}{s + 1/RC}$$

Bu durumda sistem fonksiyonu $H(s)$ uygun olmayan bir kesirdir ve aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$H(s) = \frac{1}{R}\frac{s + 1/RC - 1/RC}{s + 1/RC} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2C}\frac{1}{s + 1/RC}$$

Sistem nedensel olduğundan, $H(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak dürtü tepkisi $h(t)$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$$

şeklinde bulunur. Farklı giriş ve çıkış durumlarına bağlı olarak farklı sistem fonksiyonları bulunduğuna dikkat ediniz.

3.24. Laplace dönüşümünü kullanarak, Prob. 2-5'i yeniden çözünüz.

Problem 2.5'te

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad x(t) = e^{\alpha t}u(-t) \qquad \alpha > 0$$

bulunmuştu. Tablo 3-1'den

$$H(s) = \frac{1}{s+\alpha} \qquad \mathrm{Re}(s) > -\alpha$$

$$X(s) = -\frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathrm{Re}(s) < \alpha$$

yazılır. Bu nedenle,

$$Y(s) = X(s)H(s) = -\frac{1}{(s+\alpha)(s-\alpha)} = -\frac{1}{s^2-\alpha^2} \qquad -\alpha < \mathrm{Re}(s) < \alpha$$

olur ve Tablo 3-1'den (veya prob. 3.6) çıkış

$$y(t) = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|t|}$$

biçiminde hesaplanır. Bu da Eşitlik (2.67) ile aynıdır.

3.25. Bir sürekli zamanlı DZD sistem, $x(t) = u(t)$ girişine karşılık $y(t) = 2e^{-3t}u(t)$ çıkışını üretmektedir.

(a) Sistemin dürtü tepkisi $h(t)$'yi bulunuz.

(b) Giriş $x(t) = e^{-t}u(t)$ iken $y(t)$ çıkışını bulunuz.

(a)

$$x(t) = u(t), \; y(t) = 2e^{-3t}u(t)$$

$y(t)$ ve $x(t)$'nin Laplace dönüşümü alınarak

$$X(s) = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$Y(s) = \frac{2}{s+3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3$$

ifadeleri elde edilir.

Bu nedenle, sistem fonksiyonu $H(s)$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s}{s+3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3$$

olur. $H(s)$ aşağıdaki gibi yeniden yazılarak

$$H(s) = \frac{2s}{s+3} = \frac{2(s+3)-6}{s+3} = 2 - \frac{6}{s+3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3$$

ve ters Laplace dönüşümü alınarak

$$h(t) = 2\delta(t) - 6e^{-3t}u(t)$$

elde edilir. $h(t)$'nin $2e^{-3t}u(t)$'nin türevi olduğunu, bunun da sistemin basamak tepkisi $s(t)$ [bkz. Eşitlik (2.13)] olduğunu gözlemleyiniz.

(*b*)

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+1} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

Bu nedenle:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

Kısmı kesirler açılımı kullanılarak,

$$Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+3}$$

ifadesi elde edilir. $Y(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$y(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$$

bulunur.

3.26. Eğer bir sürekli zamanlı DZD sistem sınırlı-giriş/sınırlı-çıkış kararlı ise, sistem fonksiyonu $H(s)$'nin yakınsama bölgesinin sanal ekseni, yani $s = j\omega$ eksenini, içermek durumunda olduğunu ispatlayınız.

Bir sürekli zamanlı DZD sistem, yalnız ve yalnızca, sistemin dürtü tepkisi $h(t)$ kesinlikle türeve sahip ise sınırlı-giriş/sınırlı-çıkış kararlıdır (bkz. Eşitlik (2.4). Aşağıda tekrar verilmektedir.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

Eşitlik (3.3)'den

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt$$

yazılabilir. $s = j\omega$ olsun. O zaman

$$|H(j\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)e^{-j\omega t}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

olur. Dolayısıyla, eğer sistem kararlı ise $H(s)$, $s = j\omega$'ya yakınsar. Yani, bir sürekli zamanlı DZD sistem için $H(s)$'nin YB'si $s = j\omega$ eksenini içerir.

3.27. Laplace dönüşümünü kullanarak Prob. 2.14'ü yeniden çözünüz.

(a) Eşitlik (2.36) ve (3.41)'i kullanarak

$$Y(s) = X(s)H_1(s)H_2(s) = X(s)H(s)$$

elde edilir. Burada, $H(s) = H_1(s)\,H_2(s)$ tüm sistemin sistem fonksiyonudur. Tablo (3.1)'den

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow H_1(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -2$$

$$h_2(t) = 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H_2(s) = \frac{2}{s+1} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

bulunur. Dolayısıyla:

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

$H(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak $h(t)$ bulunur.

$$h(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

(b) $X(s)$'ninYB'si $\mathrm{Re}(s)>-1$ olduğundan, $X(s)$ $j\omega$ eksenini içerir ve dolayısıyla sistem bütün olarak kararlıdır.

3.28. Laplace dönüşümünü kullanarak Prob. 2.23'ü yeniden çözünüz.

Sistem şu biçimde tanımlanmaktadır:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

Yukardaki eşitliğin Laplace dönüşümü alınarak

$$sY(s) + aY(s) = X(s) \text{ veya } \qquad (s+a)Y(s) = X(s)$$

elde edilir. Dolayısıyla, sistem fonksiyonu $H(s)$ şu biçimde bulunur:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+a}$$

Sistemin nedensel olduğu varsayımıyla, $H(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak dürtü tepkisi $h(t)$

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

şeklinde bulunur ki, bu da Eşitlik (3.124) ile aynıdır.

3.29. Laplace dönüşümünü kullanarak Prob. 2.25'i yeniden çözünüz.

Sistem

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

olarak tanımlanmıştır. Yukarıdaki eşitliğin Laplace dönüşümü alınarak

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s) + sX(s)$$

veya

$$(s+2)Y(s) = (s+1)X(s)$$

ifadesi elde edilir.

Bu nedenle, sistem fonksiyonu $H(s)$ şu biçimde olur:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+1}{s+2}=\frac{s+2-1}{s+2}=1-\frac{1}{s+2}$$

Sistemin nedensel olduğunu varsayımıyla, $H(s)$'nin ters Laplace dönüşümünü alınarak, dürtü tepkisi $h(t)$ bulunur:

$$h(t)=\delta(t)-e^{-2t}u(t)$$

3.30. Giriş ve çıkışı aşağıda verilen sürekli zamanlı DZD sistemi gözönüne alalım:

$$y''(t)+y'(t)-2y(t)=x(t) \qquad (3.86)$$

(a) Sistem fonksiyonu $H(s)$'yi bulunuz.

(b) Aşağıdaki her üç durum için dürtü tepkisi $h(t)$'yi bulunuz: (*i*) sistem nedensel, (*ii*) sistem kararlı, (*iii*) sistem nedensel de değil, kararlı da değil.

(a) Eşitlik (3.86)'nın Laplace dönüşümü alınarak

$$s^2Y(s)+sY(s)-2Y(s)=X(s)$$

veya

$$(s^2+s-2)Y(s)=X(s)$$

bulunur. Bu nedenle, sistem fonksiyonu $H(s)$ şu biçimdedir:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2+s-2}=\frac{1}{(s+2)(s-1)}$$

(b) Kısmi kesirler açılımı kullanılarak $H(s)$ yeniden yazılabilir:

$$H(s)=\frac{1}{(s+2)(s-2)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s-1}$$

i) Sistem nedensel ise, $h(t)$ nedenseldir (yani sağ yanlı bir sinyal) ve $H(s)$'nin YB'si Re(s)>1 olur. $h(t)$ Tablo 3-1'den bulunur:

$$h(t)=-\tfrac{1}{3}(e^{-2t}-e^{t})u(t)$$

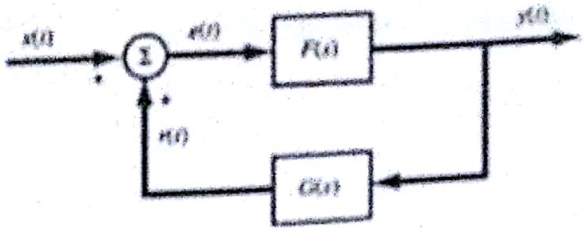
ii) Sistem kararlı ise, $H(s)$'nin YB'si $j\omega$ eksenini kapsamalıdır. Dolayısıyla, YB $-2<$ Re(s)'dir. Bu nedenle, $h(t)$ çift yanlıdır ve Tablo 3-1'den şu biçimde elde edilir:

$$h(t)=-\tfrac{1}{3}e^{-2t}u(t)-\tfrac{1}{3}e^{t}u(-t)$$

iii) Sistem nedensel veya kararlı değil ise, $H(s)$'nin YB'si Re(s)<–2'dir. O zaman $h(t)$ nedensel değildir (yani, sol yanlı bir sinyaldir). Tablo 3-1 den:

$$h(t)=\tfrac{1}{3}e^{-2t}u(-t)-\tfrac{1}{3}e^{t}u(-t)$$

3.31. Sistem fonksiyonu $F(s)$ ve $\theta(s)$ olan nedensel iki sistemin geribeslemeli bağlantısı Şekil 3-13'te çizilmiştir. Bu geribeslemeli sistemin sistem fonksiyonu $H(s)$'yi bulunuz.



Şekil 3-13 Geribeslemeli sistem.

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) \qquad y(t) \longleftrightarrow Y(s) \qquad r(t) \longleftrightarrow R(s) \qquad e(t) \longleftrightarrow E(s)$$

olsun.

$$Y(s) = E(s)F(s) \tag{3.87}$$

$$R(s) = Y(s)G(s) \tag{3.88}$$

O zaman,

$$e(t) = x(t) + r(t)$$

olduğundan

$$E(s) = X(s) + R(s) \tag{3.89}$$

ifadesi elde edilir. Eşitlik (3.88), Eşitlik (3.89)'da yerine koyulur ve çıkan sonuç da Eşitlik (3.87)'de yerine koyulursa,

$$Y(s) = [X(s) + Y(s)G(s)]F(s)$$

veya

$$[1 - F(s)G(s)]Y(s) = F(s)X(s)$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle, tüm sistemin sistem fonksiyonu $H(s)$ şu biçimdedir:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F(s)}{1 - F(s)G(s)} \tag{3.90}$$

TEK YANLI LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

3.32. Aşağıda yeniden yazılan Eşitlik (3.44) ve Eşitlik (3.45)'in doğruluğunu gösteriniz.

(*a*) $\dfrac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$

(*b*) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$

(*a*) Eşitlik (3.43)'ü kullanarak ve parça parça entegral alarak

$$\mathscr{L}_I\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\,dt$$

$$= x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

$$= -x(0^-) + sX_I(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

ifadeleri elde edilir. Dolayısıyla:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$$

(b) Yukarıdaki özelliği $x'(t) = dx(t)/dt$ sinyaline uygulayarak

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow s[sX_I(s) - x(0^-)] - x'(0^-)$$

$$= s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

ifadeleri elde edilir. Eşitlik (3.46)'nın yukarıdaki prosedürün ardışıl olarak uygulanmasından da elde edilebileceğini gözlemleyiniz.

3.33. Aşağıda yeniden yazılan Eşitlik (3.47) ve (3.48)'in doğruluğunu gösteriniz.

(*a*) $\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s)$

(*b*) $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$

(*a*) $g(t) = \int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$ olsun

O zaman $\frac{dg(t)}{dt} = x(t)$ ve $g(0^-) = 0$

Şimdi eğer

$$g(t) \longleftrightarrow G_I(s)$$

ise Eşitlik (3.44) ile

$$X_I(s) = sG_I(s) - g(0^-) = sG_I(s)$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$G_I(s) = \frac{1}{s}X_I(s)$$

veya

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s)$$

olur.

(a) Aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau + \int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

Sağ taraftaki ilk terimin sabit olduğuna dikkat ediniz. Bu nedenle, yukarıdaki ifadenin tek yanlı Laplace dönüşümü alınarak ve Eşitlik (3.47) kullanılarak sonuç bulunabilir:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$$

3.34. (*a*) $x(t)$'nin çift yanlı Laplace dönüşümünün iki tek yanlı Laplace dönüşümü uygulaması ile elde edilebildiğini gösteriniz.

(*b*) (*a*)'da elde edilen sonucu kullanarak $e^{-2|t|}$ sinyalinin çift yanlı Laplace dönüşümünü bulunuz.

(a) Eşitlik (3.3)'te tanımlanan $x(t)$'nin çift yanlı Laplace dönüşümü

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0^-} x(t)e^{-st}\,dt + \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{st}\,dt + \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \qquad (3.91)$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi,

$$\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt = X_I(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > \sigma^+ \qquad (3.92)$$

olsun. Ayrıca

$$\mathcal{L}_I\{x(-t)\} = X_I^-(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{-st}\,dt \qquad \mathrm{Re}(s) > \sigma^- \qquad (3.93)$$

olsun. Bu durumda:

$$\int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{-(-s)t}\,dt = X_I^-(-s) \qquad \mathrm{Re}(s) < \sigma^- \qquad (3.94)$$

Bu nedenle, Eşitlik (3.92) ve Eşitlik (3.94), Eşitlik (3.91)'de yerine koyularak

$$X(s) = X_I(s) + X_I^-(-s) \qquad \sigma^+ < \mathrm{Re}(s) < \sigma^- \qquad (3.95)$$

$$x(t) = e^{-2|t|}$$

ifadesi elde edilir.

(b) (1) $t > 0$ için $x(t)=e^{-2t}$ olduğundan, şu sonuç elde edilir:

$$\mathcal{L}_I\{x(t)\} = X_I(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -2$$

(2) $t < 0$ için $x(t)=e^{2t}$ olduğundan $t > 0$ için $x(-t) = e^{-2t}$ yazılabilir ve bu da

$$\mathcal{L}_I\{x(-t)\} = X_I^-(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -2$$

sonucunu verir. Dolayısıyla:

$$X_I^-(-s) = \frac{1}{-s+2} = -\frac{1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}(s) < 2$$

Eşitlik (3.95)'e göre

$$X(s) = X_I(s) + X_I^-(-s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2}$$

$$= -\frac{4}{s^2-4} \qquad -2 < \mathrm{Re}(s) < 2 \qquad (3.96)$$

yazılabilir. Bu da, $a = 2$ için Problem 3.6'daki Eşitlik (3.70)'in aynıdır.

3.35. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX_I(s)$ (3.97)

(b) $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX_I(s)$ (3.98)

Eşitlik (3.99) tek yanlı Laplace dönüşümü için *ilk değer teoremi* alarak adlandırılırken, Eşitlik (3.98) ise son değer değer teoremi olarak adlandırılır.

(a) Eşitlik (3.44) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
sX_l(s) - x(0^-) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt \\
&= \int_{0^-}^{0^+} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt \\
&= x(t)\big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt \\
&= x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$sX_l(s) = x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt$$

olup, $\lim_{s\to\infty} e^{-st} = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} sX_l(s) &= x(0^+) + \lim_{s\to\infty} \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt \\
&= x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \left(\lim_{s\to\infty} e^{-st} \right) dt = x(0^+)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(b) Yine Eşitlik (3.44) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} \left[sX_l(s) - x(0^-) \right] &= \lim_{s\to 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \left(\lim_{s\to 0} e^{-st} \right) dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}\, dt = x(t)\big|_{0^-}^{\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0^-)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ancak, $\lim_{s\to 0} \left[sX_l(s) - x(0^-) \right] = \lim_{s\to 0} \left[sX_l(s) \right] - x(0^-)$

olduğundan, aşağıdaki sonuca varılır.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX_l(s)$$

3.36. Tek yanlı Laplace dönüşümü bazen

$$\mathscr{L}_+\{x(t)\} = X_l^+(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt \qquad (3.99)$$

biçiminde ifade edilir. Burada 0^+ alt limittir. (Bu tanım bazen 0^+ tanımı olarak adlandırılır).

(a) Aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösteriniz.

$$\mathscr{L}_+\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = sX_l^+(s) - x(0^+) \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \qquad (3.100)$$

(b) Aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösteriniz.

$$\mathscr{L}_+\{u(t)\} = \frac{1}{s} \tag{3.102}$$

$$\mathscr{L}_+\{\delta(t)\} = 0 \tag{3.103}$$

(a) $x(t)$'nin tek yanlı Laplace dönüşümü $X_+(s)$ olsun. Eşitlik (3.99)'u kullanarak iki parçalı eşit eşit entegre ederek

$$\mathscr{L}_+\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}\, dt$$

$$= x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt$$

$$= -x(0^+) + sX_+(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle,

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_+(s) - x(0^+)$$

ifadesi bulunur.

(b) (3.99) tanımından

$$\mathscr{L}_+\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

yazılabilir. Eşitlik (1.30)'dan da

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{3.104}$$

ifadesi bulunur. Eşitlik (3.103) ile verilen tek yanlı Laplace dönüşümü alınarak ve Eşitlik (3.104) kullanılarak

$$\mathscr{L}_+\{\delta(t)\} = s\frac{1}{s} - u(0^+) = 1 - 1 = 0$$

ifadesi elde edilir. Bu Eşitlik (1.21) ile uyumludur. Yani;

$$\mathscr{L}_+\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 0$$

Eşitlik (3.103) ile verilen 0^- tek yanlı Laplace dönüşümünü alarak ve Eşitlik (3.44)'ü kullanarak

$$\mathscr{L}_+\{\delta(t)\} = s\frac{1}{s} - u(0^-) = 1 - 0 = 1$$

ifadesinin elde edildiğine de dikkat ediniz.

TEK YANLI LAPLACE DÖNÜŞÜM UYGULAMALARI

3.37. Tek yanlı Laplace dönüşümünü kullanarak, Problem 2.20'yi yeniden çözünüz.

Sistem

$$y'(t) + ay(t) = x(t) \tag{3.105}$$

ile tanımlanmıştır. Burada $y(0) = y_0$ ve $x(t) = Ke^{-bt}u(t)$ olarak verilmektedir.

$y(0)=y(0^-)$ olduğu varsayılsın ve

$$y(t) \longleftrightarrow Y_I(s)$$

olsun. Eşitlik (3.44)'den

$$y'(t) \longleftrightarrow sY_I(s) - y(0^-) = sY_I(s) - y_0$$

bulunur ve Tablo 3-1'den

$$x(t) \longleftrightarrow X_I(s) = \frac{K}{s+b} \qquad \mathrm{Re}(s) > -b$$

yazılabilir. Eşitlik (3.104)'ün tek yanlı Laplace dönüşümü alınarak,

$$[sY_I(s) - y_0] + aY_I(s) = \frac{K}{s+b}$$

veya

$$(s+a)Y_I(s) = y_0 + \frac{K}{s+b}$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle

$$Y_I(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

bulunur. Kısmi kesirler açılımı kullanılarak

$$Y_I(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{K}{a-b}\left(\frac{1}{s+b} - \frac{1}{s+a}\right)$$

ifadesi elde edilir. $Y_I(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak

$$y(t) = \left[y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})\right]u(t)$$

bulunur. Bu, Eşitlik (2.107)'nin aynısıdır. $y(0^+) = y(0) = y(0^-) = y_0$ olduğundan $y(t)$

$$y(t) = y_0 e^{-at} + \frac{K}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at}) \qquad t \geq 0$$

şeklinde yazılabilir.

3.38. Aşağıdaki 2. mertebeden doğrusal türevsel denklemi, $y(0)=2$, $y'(0)=1$ başlangıç koşulları ve $x(t)=e^{-t}u(t)$ için çözünüz.

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t) \qquad (3.105)$$

$y(0) = y(0^-)$ ve $y'(0)=y'(0)$ olduğunu varsayın ve

$$y(t) \longleftrightarrow Y_I(s)$$

olsun. Bu durumda, Eşitlik (3.44) ve (3.45)'den

$$y'(t) \longleftrightarrow sY_I(s) - y(0^-) = sY_I(s) - 2$$

$$y''(t) \longleftrightarrow s^2Y_I(s) - sy(0^-) - y'(0^-) = s^2Y_I(s) - 2s - 1$$

yazılabilir. Tablo 3-1'den de

$$x(t) \longleftrightarrow X_I(s) = \frac{1}{s+1}$$

ifadesi bulunur.

Eşitlik (3.105)'in tek yanlı Laplace dönüşümü alınarak

$$\left[s^2Y_l(s) - 2s - 1\right] + 5\left[sY_l(s) - 2\right] + 6Y_l(s) = \frac{1}{s+1}$$

veya

$$(s^2 + 5s + 6)Y_l(s) = \frac{1}{s+1} + 2s + 11 = \frac{2s^2 + 13s + 12}{s+1}$$

ifadesi elde edilir. Bu nedenle,

$$Y_l(s) = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)} = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

yazılabilir. Kısmi kesirler açılımı kullanılarak

$$Y_l(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + 6\frac{1}{s+2} - \frac{9}{2}\frac{1}{s+3}$$

ifadesi elde edilir. $Y_l(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak $y(t)$

$$y(t) = \left(\tfrac{1}{2}e^{-t} + 6e^{-2t} - \tfrac{9}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

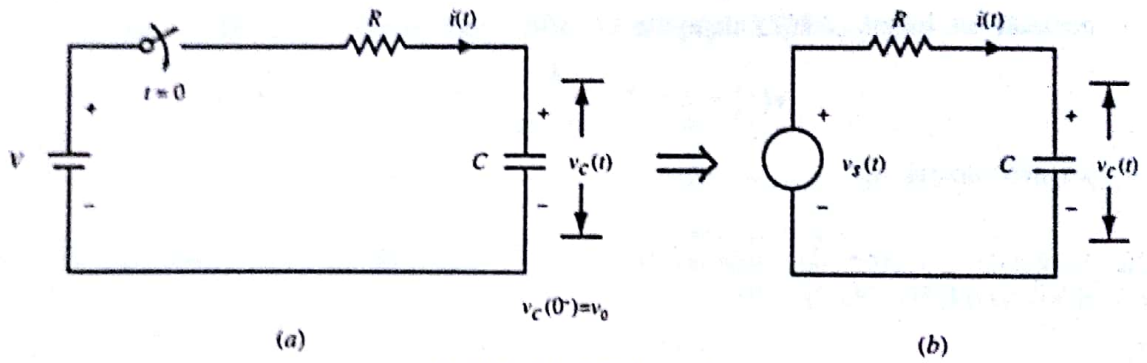
şeklinde yazılabilir. $y(0^+) = 2 = y(0)$ ve $y'(0^+) = 1 = y'(0)$ kullanılarak:

$$y(t) = \tfrac{1}{2}e^{-t} + 6e^{-2t} - \tfrac{9}{2}e^{-3t} \qquad t \geq 0$$

3.39. Şekil 3-14(a)'da gösterilen RC devresini gözönüne alalım. Anahtar t=0'da kapanıyor. Kondansatörde bir başlangıç geriliminin olduğunu ve $v_c(0^-) = v_0$ olduğunu kabul edelim.

(a) $i(t)$ akımını bulunuz.

(b) Kondansatör uçlarındaki $v_c(t)$ gerilimini bulunuz.



Şekil 3-14 RC devresi

(a) Anahtarlama olayından sonra Şekil 3-14(a)'daki devre Şekil 3-14(b) gibi modellenebilir ve $v_s(t)=Vu(t)$ olarak düşünülebilir. Akım $i(t)$ çıkış, gerilim $v_s(t)$ giriş iken, devrede geçerli olan türevsel denklem şu biçimdedir:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = v_s(t) \qquad (3.106)$$

Eşitlik (3.106)'nın tek yanlı Laplace dönüşümü alınarak ve Eşitlik (3.48) kullanılarak

$$RI(s) + \frac{1}{C}\left[\frac{1}{s}I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} i(\tau)\,d\tau\right] = \frac{V}{s} \qquad (3.107)$$

ifadesi elde edilir. Burada $I(s)$ şu biçimde tanımlanır:

$$I(s) = \mathcal{L}_s\{i(t)\}$$

Şimdi

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

ve

$$v_c(0^-) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-} i(\tau)\,d\tau = v_0$$

olduğundan, Eşitlik (3.107)

$$\left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) + \frac{v_0}{s} = \frac{V}{s}$$

ifadesine indirgenir. Çözüm sonucu, $I(s)$ ifadesi

$$I(s) = \frac{V - v_0}{s}\,\frac{1}{R + 1/Cs} = \frac{V - v_0}{R}\,\frac{1}{s + 1/RC}$$

biçiminde elde edilir. $I(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak $i(t)$ bulunur:

$$i(t) = \frac{V - v_0}{R}e^{-t/RC}u(t)$$

(b) $v_c(t)$ çıkış ve $v_s(t)$ giriş iken devreyi modelleyen türevsel denklem şu biçimdedir:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t) \qquad (3.108)$$

Eşitlik (3.108)'in tek yanlı Laplace dönüşümü alınarak ve Eşitlik (3.44) kullanılarak

$$sV_c(s) - v_c(0^-) + \frac{1}{RC}V_c(s) = \frac{1}{RC}\frac{V}{s}$$

veya

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)V_c(s) = \frac{1}{RC}\frac{V}{s} + v_0$$

elde edilir. $V_c(s)$ için çözüm yapıldığında

$$V_c(s) = \frac{V}{RC}\,\frac{1}{s(s + 1/RC)} + \frac{v_0}{s + 1/RC}$$

$$= V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}\right) + \frac{v_0}{s + 1/RC}$$

ifadesi bulunur. Ters Laplace dönüşümü yapılarak

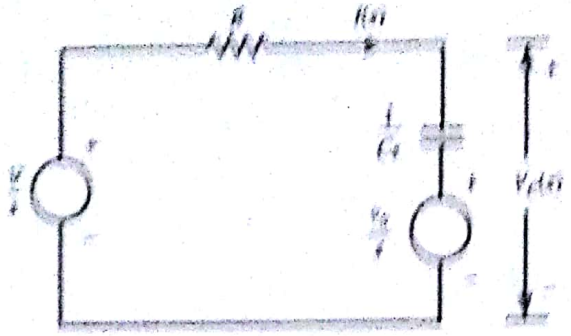
$$v_c(t) = V[1 - e^{-t/RC}]u(t) + v_0 e^{-t/RC}u(t)$$

bulunur $v_c(0^+) = v_0 = v_c(0^-)$ olduğundan $v_c(t)$ şu biçimde yazılabilir:

$$v_c(t) = V(1 - e^{-t/RC}) + v_0 e^{-t/RC} \qquad t \geq 0$$

3.40. Dönüşüm devresi tekniğini kullanarak Problem 3.39'u tekrar çözünün.

(a) Şekil 3-10'u kullanarak, Şekil 3-14'e karşı düşen dönüşüm devresi Şekil 3-15 gösterilmiştir.



Şekil 3-15 Dönüşüm devresi

Çevre için gerilim yasası yazılırsa

$$\left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) + \frac{v_0}{s} = \frac{V}{s}$$

ifadesini buluruz. $I(s)$ için çözüm yapıldığında

$$I(s) = \frac{V - v_0}{s}\,\frac{1}{R + 1/Cs} = \frac{V - v_0}{R}\,\frac{1}{s + 1/RC}$$

bulunur. Ters Laplace dönüşümü alınarak $i(t)$ elde edilir.

$$i(t) = \frac{V - v_0}{R}e^{-t/RC}u(t)$$

(b) Şekil 3.15'ten aşağıdaki ifade elde edilir.

$$V_c(s) = \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{v_0}{s}$$

(a) şıkkında elde edilen $I(s)$ yerine konulursa

$$V_c(s) = \frac{V - v_0}{RC}\,\frac{1}{s(s + 1/RC)} + \frac{v_0}{s}$$

$$= (V - v_0)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}\right) + \frac{v_0}{s}$$

$$= V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}\right) + \frac{v_0}{s + 1/RC}$$

ifadesi elde edilir. $V_c(s)$ nin ters Laplace dönüşümü alınarak

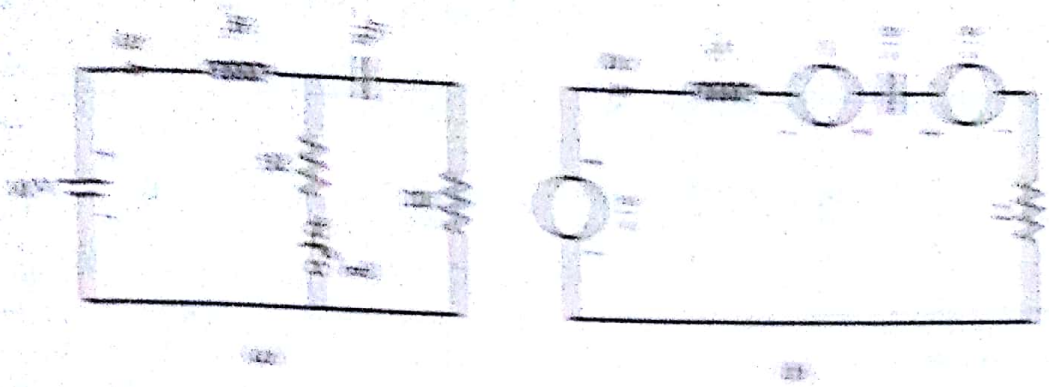
$$v_c(t) = V(1 - e^{-t/RC})u(t) + v_0 e^{-t/RC}u(t)$$

bulunur.

3.41. Şekil 3-16(a)'daki devrede anahtar $t = 0$'da açılmadan evvel çok uzun bir süre kapalı durumdadır. Endüktans akımı $i(t)$'yi, $t \geq 0$ için bulunuz.

Anahtar kapalı pozisyonda uzun bir süre kaldığında, kondansatör 10 V'a dolar ve içerisinden akım akmaz. Endüktans kısa devre olarak davranır ve endükstans akımı $\frac{10}{5} = 2$ A olur.

Bu nedenle, anahtar açıldığında $i(0^-) = 2$ ve $v_c(0^-) = 10$'dur. Giriş gerilimi 10V olup, $10\delta(t)$ olarak modellenebilir. Sonra, Şekil 3-10 kullanılarak Şekil 3-16(b)'deki devre oluşturulabilir.



(a) (b)

Şekil 5-16

Şekil 5-16(b) devresinden

$$\frac{d}{dt}v_C(t) + 2 + 2v_C(t) + \frac{2v_C}{4} + \frac{v_C}{4} = \frac{10}{4}$$

veya

$$\left(\frac{d}{dt} + 2 + \frac{3}{4}\right)v_C(t) = 2$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$V_C(s) = \frac{2}{\left(s+2+\frac{3}{4}\right)s} = \frac{2s}{s^2+4s+3}$$

$$= \frac{2(s+2)-4}{(s+2)^2-4^2} = 2\frac{(s+2)}{(s+2)^2-4^2} - \frac{2}{3}\frac{4}{(s+2)^2-4^2}$$

(b) Ters ve Laplace dönüşümleri olarak,

$$v_C(t) = e^{-2t}\left(2\cos 4t - \frac{2}{3}\sin 4t\right)u(t)$$

Bulunur. Ancak, $v_C(0^-) = 2 = v_C(0^+)$ olduğunu, yani anahtarın açılmasında kondansatör gerilimi sürekli olduğunu dikkat ediniz. Dolayısıyla

$$v_C(t) = e^{-2t}\left(2\cos 4t - \frac{2}{3}\sin 4t\right) \quad t \geq 0$$

Örnek. Şekil 5-17'de bir devreyi gösterilmiştir. Bu devrede $t=0$'da açılan anahtar kapatılıyor. L_1 ve L_2 kondansatörlerinin gerilim sıfır ve akımlar sırasıyla 1 A ve 2 A'dır.

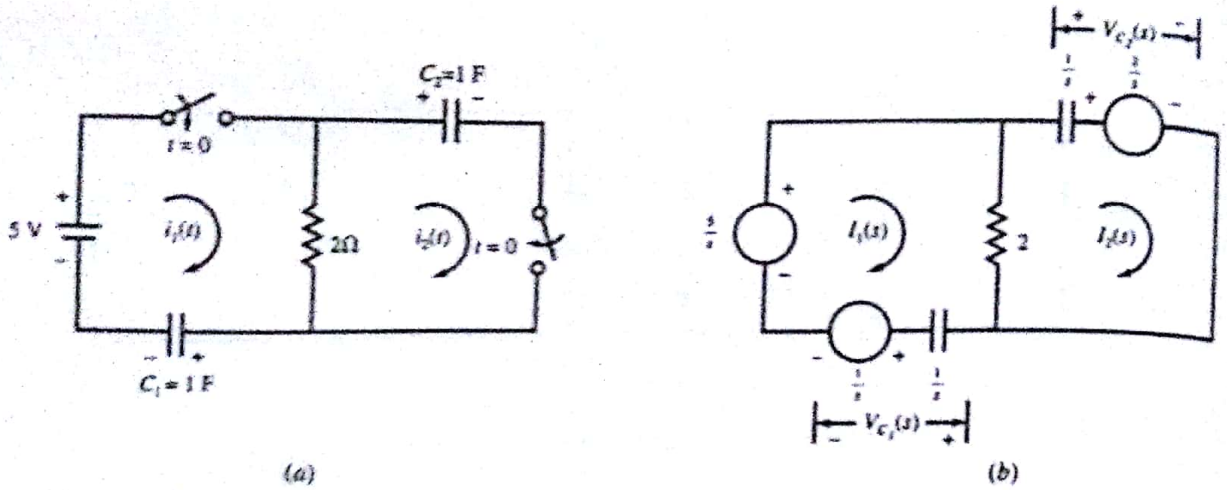
(a) $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ akımlarını bulunuz.

(b) Kondansatör gerilimlerini $t=0^+$'da bulunuz.

(c) Verilen başlangıç koşullarında

$$v_{L_1}(0^+) = 2\,V \quad \text{ve} \quad v_{L_2}(0^+) = 2\,V$$

yazılabilir. Bu nedenle, Şekil 5-18'deki devre, Şekil 5-17'de verilen devreyi ve



Şekil 3-17

Şekil 3-17(b)'de çevre denklemleri doğrudan

$$\left(2 + \frac{1}{s}\right) I_1(s) - 2I_2(s) = \frac{4}{s}$$

$$-2I_1(s) + \left(2 + \frac{1}{s}\right) I_2(s) = -\frac{2}{s}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemler $I_1(s)$ ve $I_2(s)$ için çözüldüğünde

$$I_1(s) = \frac{s+1}{s+\frac{1}{4}} = \frac{s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{s+\frac{1}{4}} = 1 + \frac{3}{4}\frac{1}{s+\frac{1}{4}}$$

$$I_2(s) = \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}} = \frac{s+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{s+\frac{1}{4}} = 1 - \frac{3}{4}\frac{1}{s+\frac{1}{4}}$$

elde edilir. $I_1(s)$ ve $I_2(s)$'nin ters Laplace dönüşümü alınarak

$$i_1(t) = \delta(t) + \tfrac{3}{4}e^{-t/4}u(t)$$

$$i_2(t) = \delta(t) - \tfrac{3}{4}e^{-t/4}u(t)$$

bulunur.

(b) Şekil 3-17(b)'den

$$V_{C_1}(s) = \frac{1}{s}I_1(s) + \frac{1}{s}$$

$$V_{C_2}(s) = \frac{1}{s}I_2(s) + \frac{2}{s}$$

ifadeleri yazılabilir. *(a)* da bulunan $I_1(s)$ ve $I_2(s)$ ifadeleri yerine koyulursa

$$V_{C_1}(s) = \frac{1}{s}\frac{s+1}{s+\frac{1}{4}} + \frac{1}{s}$$

$$V_{C_2}(s) = \frac{1}{s}\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}} + \frac{2}{s}$$

elde edilir.

Daha sonra, ilk değer teoremi (3.97) kullanılarak

$$v_{C_1}(0^+) = \lim_{s\to\infty} sV_{C_1}(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s+1}{s+\frac{1}{4}} + 1 = 1 + 1 = 2\text{ V}$$

$$v_{C_2}(0^+) = \lim_{s\to\infty} sV_{C_2}(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}} + 2 = 1 + 2 = 3\text{ V}$$

elde edilir. $v_{C_1}(0^+) \neq v_{C_1}(0^-)$ ve $v_{C_2}(0^+) \neq v_{C_2}(0^-)$ olduğuna dikkat ediniz. Bunun nedeni, devrede kapasitif bir çevrimin olması ve bunun kondansatör uçlarında ani bir gerilim değişimine sebep olmasıdır. Bu gerilim değişikliği $i_1(t)$ ve $i_2(t)$'de darbelerin oluşmasına neden olur. İçlerinde kapasitif bir çevrim veya yıldız bağlı endüktans içeren devreler *yozlaştırıcı devreler* olarak bilinir.

Ek Problemler

3.43. Aşağıdaki $x(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini bulunuz.

(*a*) $x(t) = \sin \omega_0 t\, u(t)$

(*b*) $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi) u(t)$

(*c*) $x(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$

(*d*) $x(t) = 1$

(*e*) $x(t) = \operatorname{sgn} t$

Yanıt.

(*a*) $X(s) = \dfrac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$

(*b*) $X(s) = \dfrac{s\cos\phi - \omega_0 \sin\phi}{s^2 + \omega_0^2}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$

(*c*) Eğer $a>0$ ise $a > 0$, $X(s) = \dfrac{2s}{s^2 - a^2}$, $-a < \operatorname{Re}(s) < a$. Eğer $a<0$ ise, $X(s)$'nin YB'si olmadığından, $X(s)$ mevcut değildir.

(*d*) *İpucu:* $x(t)=u(t)+u(-t)$

$X(s)$'nin nin YB'si olmadığından $X(s)$ mevcut değildir.

3.44. Aşağıda verilen $x(t)$'nin Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t_1 \le t \le t_2 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Yanıt: $X(s) = \dfrac{1}{s}[e^{-st_1} - e^{-st_2}]$, (tüm s ler için).

3.45. $x(t)$ sağ yanlı bir sinyalse ve bazı s değerleri için $X(s)$ yakınsıyorsa, yakınsama bölgesinin

$$\mathrm{Re}(s) < \sigma_{min}$$

biçiminde olduğunu gösteriniz. Burada σ_{min}, $X(s)$'nin kutuplarının gerçel bölümlerinin en küçüğüne eşittir.

İpucu: Problem 3.4'teki gibi benzer bir yaklaşım izleyin.

3.46. Eşitlik (3.211)'i doğrulayın. Yani,

$$-tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds} \qquad R' = R$$

olduğunu gösteriniz.

İpucu: Eşitlik (3.3)'ün her iki tarafını s'ye göre türetin.

3.47. Laplace dönüşümünün aşağıdaki özelliklerini gösteriniz.

(a) Eğer $x(t)$ çift ise, o zaman $X(-s)=X(s)$; yani, $X(s)$ de çiftir.

(b) Eğer $x(t)$ tek ise, o zaman $X(-s)=-X(s)$; yani, $X(s)$ de tektir.

(c) Eğer $x(t)$ tek ise, o zaman $X(s)$'nin $s=0$'da bir sıfırı vardır.

İpucu:

(a) Eşitlik (1.2) ve (3.17)'yi kullanınız.

(b) Eşitlik (1.3) ve (3.17)'yi kullanınız.

(c) (b) şıkkının sonucunu ve Eşitlik (1.83a)'yı kullanınız.

3.48. Aşağıda verilen $x(t)$'nin Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$x(t) = (e^{-t}\cos 2t - 5e^{-2t})u(t) + \tfrac{1}{2}e^{2t}u(-t)$$

Yanıt: $X(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4} - \dfrac{5}{s+2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s-2}, \quad -1 < \mathrm{Re}(s) < 2$

3.49. Aşağıdaki $X(s)$ fonksiyonlarının ters Laplace dönüşümlerini bulunuz.

(a) $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}, \mathrm{Re}(s) > -1$

(b) $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}, -1 < \mathrm{Re}(s) < 0$

(c) $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}, \mathrm{Re}(s) < -1$

(d) $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2+4s+13}, \mathrm{Re}(s) > -2$

(e) $X(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)^2}, \mathrm{Re}(s) > 0$

(f) $X(s) = \dfrac{s}{s^3+2s^2+9s+18}, \mathrm{Re}(s) > -2$

Yanıt:

(*a*) $x(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$

(*b*) $x(t) = -u(-t) - (1 + t)e^{-t}u(t)$

(*c*) $x(t) = (-1 + e^{-t} + te^{-t})u(-t)$

(*d*) $x(t) = e^{-2t}(\cos 3t - \frac{1}{3}\sin 3t)u(t)$

(*e*) $x(t) = \frac{1}{4}t \sin 2tu(t)$

(*f*) $x(t) = (-\frac{2}{13}e^{-2t} + \frac{2}{13}\cos 3t + \frac{3}{13}\sin 3t)u(t)$

3.50. Laplace dönüşümünü kullanarak Problem 2.46'yı tekrar çözünüz.

İpucu: Eşitlik (3.21) ve Tablo 3-1'i kullanınız.

3.51. Laplace dönüşümünü kullanarak

(*a*) $x(t) * \delta(t) = x(t)$

(*b*) $x(t) * \delta'(t) = x'(t)$

olduğunu gösteriniz.

İpucu:

(a) Eşitlik (3.21) ve Tablo 3-1'i kullanınız.

(b) Eşitlik (3.18) ve (3.21) ile Tablo 3-1'i kullanınız.

3.52. Laplace dönüşümünü kullanarak Problem 2.54'ü yeniden çözünüz.

İpucu:

(a) Sistem fonksiyonu $H(s)$'yi Eşitlik (3.22) ile bulunuz ve ters Laplace dönüşümünü elde ediniz.

(b) $H(s)$'nin YB'sini bulunuz ve $j\omega$ eksenini içermediğini gösteriniz.

3.53. Aşağıda girişleri verilen sistemler için $h(t) = e^{-2t}\,u(t)$ alarak sistem çıkışları $y(t)$'yi bulunuz.

$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

(*a*) $x(t) = e^{-t}u(t)$

(*b*) $x(t) = e^{-t}u(-t)$

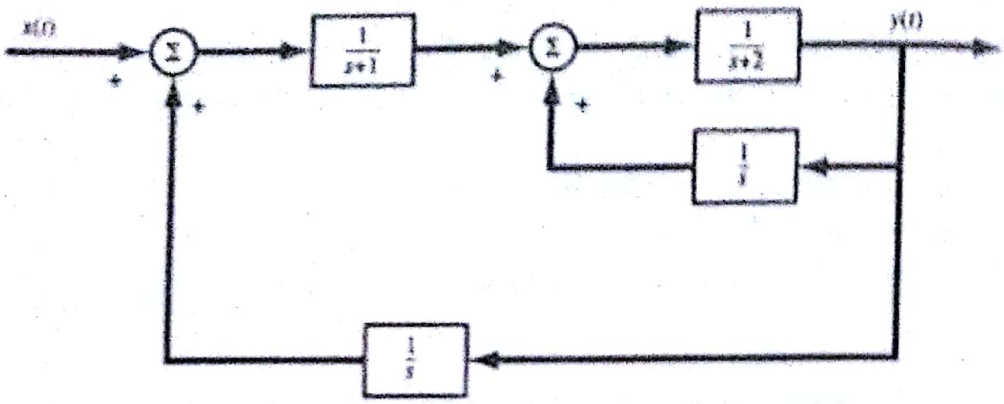
Yanıt:

(*a*) $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

(*b*) $y(t) = e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(t)$

3.54. Sürekli zamanlı DZD bir sisteme ait dürtü tepkisi $(1 - e^{-t})u(t)$ 'dir. Bilinmeyen bir giriş $x(t)$ için $y(t)$'nin $(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$ olduğu gözleniyor. Giriş $x(t)$'yi bulunuz.

Yanıt. $x(t) = 2\,(1 - e^{-3t})u(t)$



Şekil 3-18

3.55. Şekil 3-18'de gösterilen sistemin bütününe ilişkin $H(s)$ fonksiyonunu bulunuz.

İpucu: Problem 3.11'deki sonucu kullanarak blok diyagramını basitleştirin.

Yanıt: $H(s) = \dfrac{s}{s^3 + 3s^2 + s - 2}$

3.56. Eğer $x(t)$, T periyotlu peryodik bir fonksiyon ise, tek yanlı Laplace dönüşümünü bulunuz.

Yanıt: $X(s) = \dfrac{1}{1 - e^{-sT}} \displaystyle\int_{0^-}^{T} x(t) e^{-st}\, dt$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

3.57. Şekil 3.19'daki peryodik sinyallerin tek yanlı Laplace dönüşümlerini bulunuz.

Yanıt: $X(s) = \dfrac{1}{1 - e^{-sT}} \displaystyle\int_{0^-}^{T} x(t) e^{-st}\, dt$, $\mathrm{Re}(s) > 0$

3.58. Tek yanlı Laplace dönüşümünü kullanarak,

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = e^t$$

ifadesinin $y(0) = 1$ ve $y'(0) = 0$ ile $t \geq 0$ için çözümünü bulunuz.

Yanıt: $y(t) = -\frac{1}{6}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$, $t \geq 0$

3.59. Tek yanlı Laplace dönüşümünü kullanarak, $x(0) = 1$ ve $y(0) = 1$ koşullarında, $t \geq 0$ için aşağıdaki türevsel denklemleri çözünüz.

$$y'(t) + y(t) + x'(t) + x(t) = 1$$
$$y'(t) - y(t) - 2x(t) = 0$$

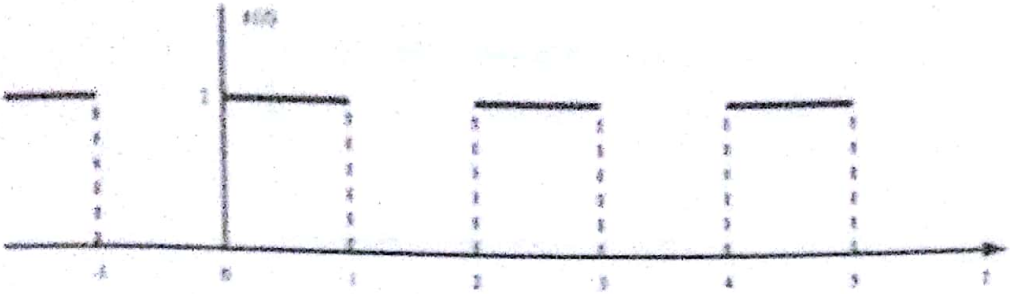
Yanıt: $x(t) = e^{-t} - 1$, $y(t) = 2 - e^{-t}$, $t \geq 0$

3.60. Tek yanlı Laplace dönüşümünü kullanarak, aşağıdaki entegral denklemlerini çözünüz.

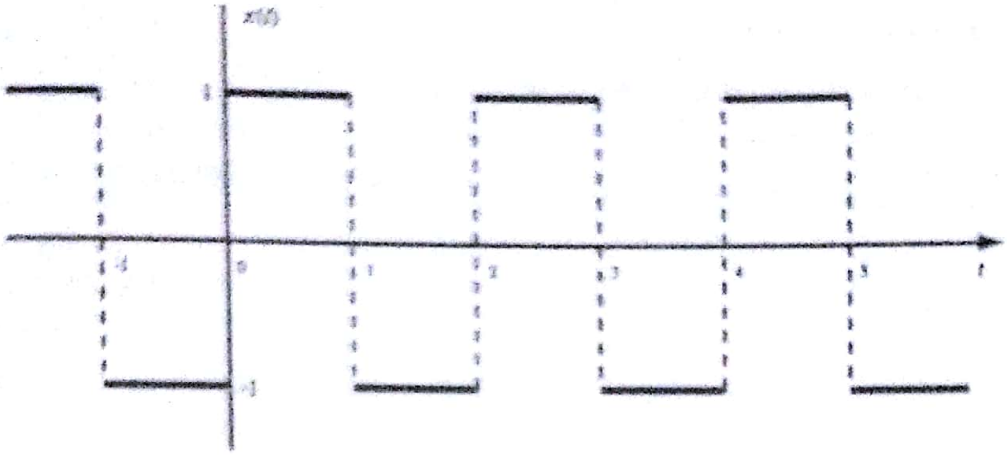
(*a*) $y(t) = 1 + a\displaystyle\int_0^t y(\tau)\, d\tau$, $t \geq 0$

(*b*) $y(t) = e^t\left[1 + \displaystyle\int_0^t e^{-\tau} y(\tau)\, d\tau\right]$, $t \geq 0$

Yanıt: (*a*) $y(t) = e^{at}$, $t \geq 0$; (*b*) $y(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$



(a)

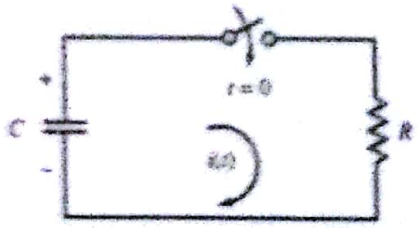


(b)

Şekil 3-19

3.61. Şekil 3.20'deki RC devresini gözönüne alınız. Anahtar $t=0$'da kapanıyor. Kondansatörün gerilimi anahtar kapanmadan evvel v_0 olduğuna göre, $t \geq 0$ için kondansatör gerilimini bulunuz.

Yanıt $v_c(t) = v_0 e^{-t/RC}$, $t \geq 0$

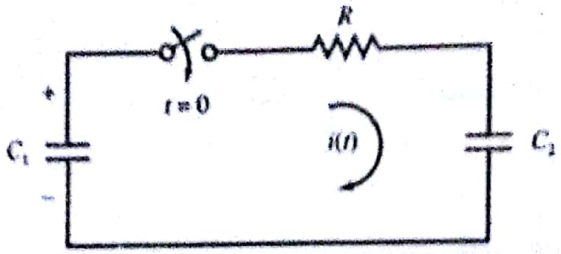


Şekil 3-20 RC devresi.

3.62. Şekil 3.21'deki RC devresini gözönüne alınız. Anahtar $t=0$'da kapanıyor. Anahtar kapanmadan evvel C_1 kondansatörü v_0 Volt'a dolduruluyor fakat C_2 kondansatörü yüklü değildir.

(a) $C_1 = C_2 = C$ kabul ederek $t \geq 0$ için $i(t)$ akımını bulunuz.

(b) R direnci tarafından tüketilen toplam kayıp enerji E'yi bulun ve E'nin R'den bağımsız olduğunu gösteriniz. Aynı zamanda bunun, C_1'de depolanan başlangıç enerjisinin yarısına eşit olduğunu gösteriniz.



Şekil 3-21 RC devresi

(c) $R=0$ ve $C_1=C_2=C$ olduğunu kabul ediniz. $t \geq 0$ için $i(t)$ akımı ve $v_{C_1}(0^+)$ ve $v_{C_2}(0^+)$ gerilimlerini bulunuz.

Yanıt. (a) $i(t) = (v_0/R)e^{-2t/RC}$, $t \geq 0$

(b) $E = \frac{1}{4}v_0^2 C$

(c) $i(t) = \frac{1}{2}v_0 C\,\delta(t)$, $v_{C_1}(0^+) = v_0/2 \neq v_{C_1}(0^-) = v_0$, $v_{C_2}(0^+) = v_0/2 \neq v_{C_2}(0^-) = 0$

4. Bölüm

z-Dönüşümü ve Ayrık Zamanlı DZD Sistemler

4.1. GİRİŞ

Bir önceki bölümde Laplace dönüşümü anlatıldı. Bu bölümde ise, Laplace dönüşümünün ayrık zamanda karşılığı olan z dönüşümü sunulmaktadır. z-dönüşümü, ayrık zamanlı işaretlerin (veya dizilerin) z bölgesinde (z, karmaşık bir değişkendir) gösterimi için kullanılmaktadır. Bu bölümde ayrıca, ayrık zamanlı DZD bir sistem için sistem fonksiyonu kavramı anlatılmaktadır. Laplace dönüşümü, entegro-türevsel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürür. Benzer olarak, z-dönüşümü, fark eşitliklerini cebirsel eşitliklere dönüştürerek, ayrık zamanlı sistemlerin analizini basitleştirir.

z-dönüşümünün özellikleri, Laplace dönüşümünün özellikleriyle paralellik gösterir. Bununla birlikte, z-dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasında önemli farklılıklar da vardır.

4.2. z-DÖNÜŞÜMÜ

Bölüm 2.8'de, dürtü tepkisi $h[n]$ olan ayrık zamanlı DZD bir sistemde, z^n biçiminde karmaşık üstel bir girişe sistemin verdiği $y[n]$ tepkisinin

$$y[n] = \mathrm{T}\{z^n\} = H(z)z^n \tag{4.1}$$

olduğunu görmüştük. Burada, $H(z)$ şu biçimde tanımlanmaktadır:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \tag{4.2}$$

A. Tanım:

(4.2) eşitliğindeki $H(z)$ fonksiyonu, $h[n]$'nin z-dönüşümü olarak adlandırılır. Genel bir $x[n]$ ayrık zamanlı işareti için $X[z]$ şu biçimde tanımlanır:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{4.3}$$

z değişkeni genellikle karmaşık diğerli olup, kutupsal gösterimi

$$z = re^{j\Omega} \tag{4.4}$$

biçimindedir. Burada r, z'nin genliği, Ω ise z'nin açısıdır. (4.3) eşitliği ile tanımlanan z-dönüşümü genellikle çift yanlı (veya iki yanlı) z-dönüşümü olarak tanımlanır. z-dönüşümü ise aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{4.5}$$

Yalnızca $n<0$ için $x[n]=0$ koşulu sağlandığında tek yanlı ve çift yanlı z-dönüşümleri eşdeğerdir. Tek yanlı z-dönüşümü, Bölüm 4.8'de tartışılmaktadır. Karmaşa yaratmamak için bundan böyle, zorunlu olmadıkça, "tek yanlı" sözcüğü kullanılmayacaktır.

Laplace dönüşümünde de olduğu gibi (4.3) eşitliği bazen, $x[n]$ dizisini $X[z]$ fonksiyonuna dönüştüren bir operatör olarak değerlendirilir. Bu, simgesel olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} \tag{4.6}$$

$x[n]$ ve $X[z]$'nin

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \tag{4.7}$$

biçiminde gösterilen bir z-dönüşümü çifti oluşturduğu söylenir.

B. Yakınsama Bölgesi

Laplace dönüşümünde olduğu gibi, Z-dönüşümünün yakınsak olduğu z karmaşık değişkeni değerleri aralığı, yakınsama bölgesi (YB) olarak adlandırılır. z-dönüşümünün nasıl yapıldığını ve yakınsama bölgesinin nasıl bulunduğunu göstermek için aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

ÖRNEK 4.1. a gerçel bir sayı olsun.

$$x[n] = a^n u[n] \tag{4.8}$$

biçiminde tanımlanan $x[n]$ dizisinin z-dönüşümü, (4.3) eşitliğinden, şu biçimde bulunur:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$X[z]$'nin yakınsaklık koşulu aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

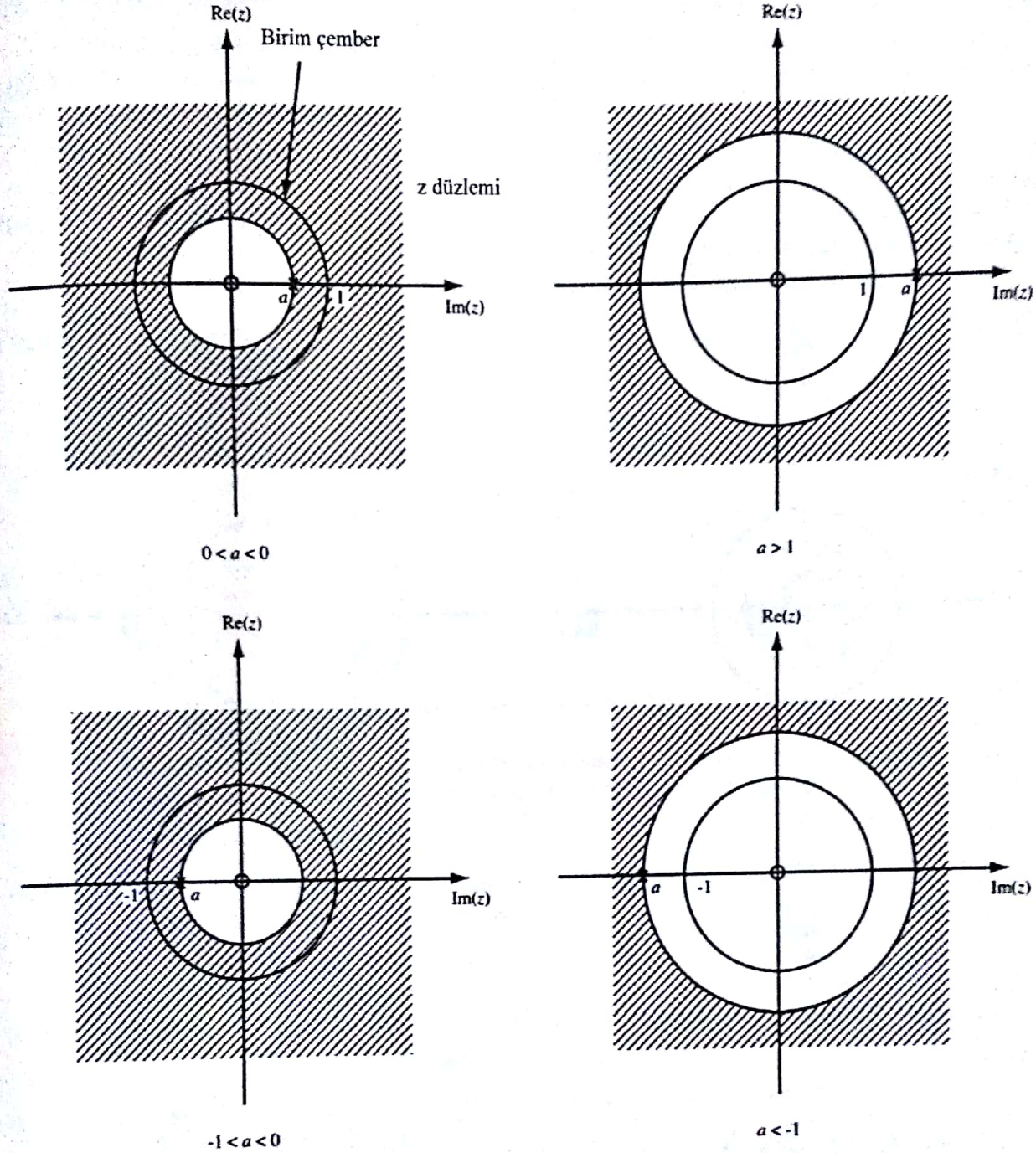
Dolayısıyla, yakınsama bölgesi, $|az^{-1}| < 1$, yani, $|z| > |a|$ koşulunu sağlayan z değerleri aralığıdır. Dolayısıyla:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a| \tag{4.9}$$

(4.9) eşitliğinin pay ve paydasının z ile çarpılması sonucunda $X(z)$ şu biçimde de yazılabilir.

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a| \tag{4.10}$$

(4.9) ve (4.10) eşitlikleri eşdeğer olup, uygulamanın türüne göre kullanılacak olan seçilir. (4.10) eşitliğinden, $X(z)$'nin, z'nin rasyonel bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, aynı rasyonel Laplace dönüşümlerinde olduğu gibi, $X(z)$ de, sıfırları (payındaki polinomun kökleri) ve kutupları (paydasındaki polinomun kökleri) ile karakterize edilebilir. (4.10) eşitliğinden, $z=0$'da bir sıfır ve $z=a$'da bir kutup olduğu görülmektedir. Yakınsama bölgesi ve sıfır kutup çizimi Şekil 4-1'de görülmektedir. z-dönüşümü uygulamalarında, karmaşık düzlem, genellikle z-düzlemi olarak anılır.



Şekil 4-1 $|z| > |a|$ için yakınsama bölgesi

ÖRNEK 4.2

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \tag{4.11}$$

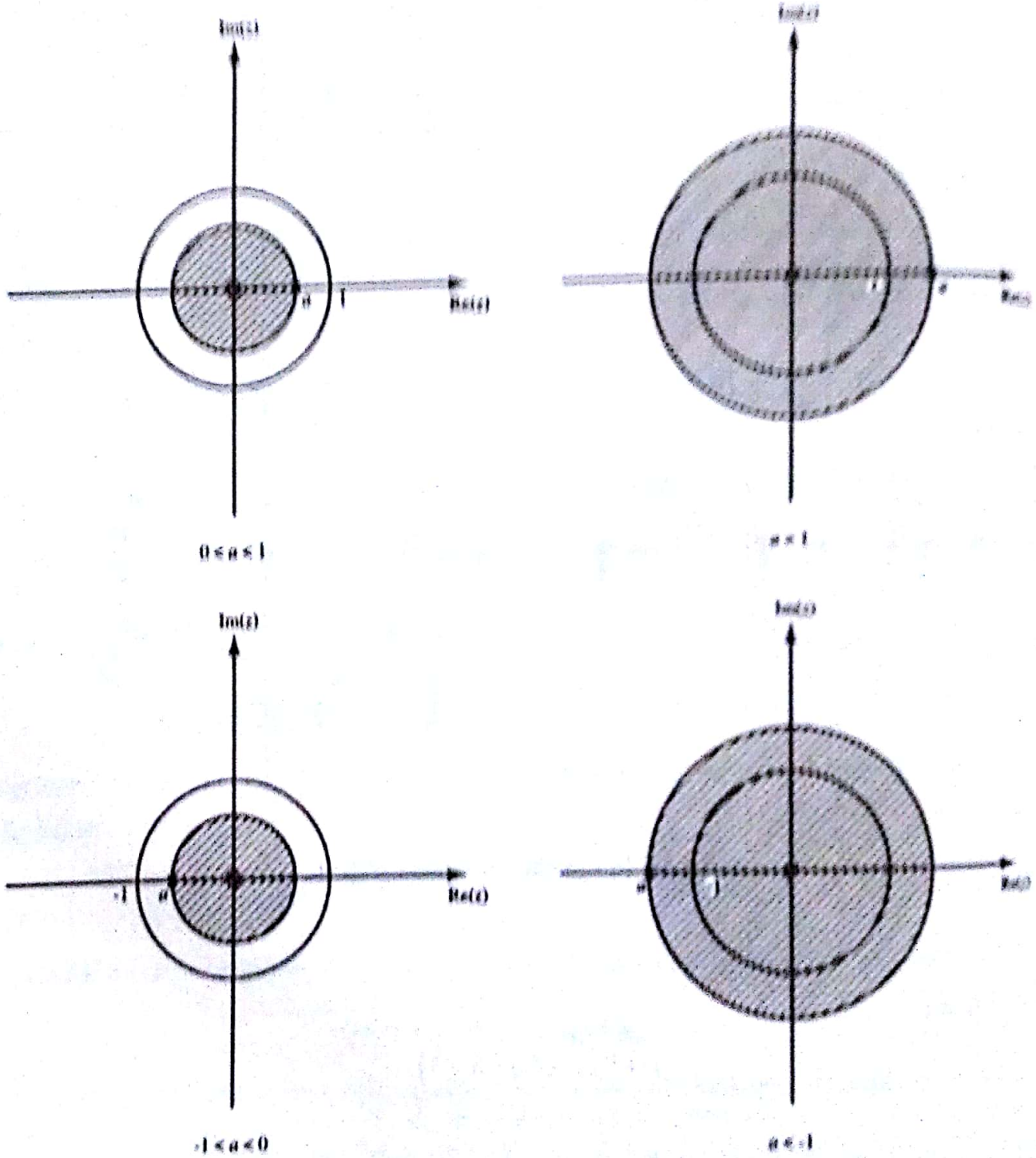
dizisini gözönüne alalım. Bu dizinin $X(z)$ dönüşümü, (Prob. 4.1)'de aşağıdaki gibi bulunmuştu:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| < |a| \tag{4.12}$$

Daha önce yapıldığı gibi, $X(z)$ yeniden yazılabilir

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| < |a| \tag{4.13}$$

Bu örnek için yakınsama bölgesi ve kutup-sıfır çizimi, Şekil 4-2'de gösterilmektedir. (4.9) ve (4.13) eşitliklerinin karşılaştırılmasından (veya (4.10) ve (4.14) eşitliklerinin), iki farklı dizi için de $X(z)$'nin çebirsel ifadelerinin, yakınsama bölgeleri dizinde, eşit olduğu gösterilmektedir. Dolayısıyla Laplace dönüşümünde olduğu gibi, z-dönüşümünün ifade edilebilmesi için, hem cebirsel ifadeye hem de yakınsama bölgesine gereksinim vardır.



Şekil 4-2 $|z| < |a|$ **için yakınsama bölgesi**

C. Yakınsama Bölgesinin Özellikleri

Örnek 4.1 ve 4.2'de görüldüğü gibi, $X(z)$'nin yakınsama bölgesi, $x[n]$'nin yapısına bağlıdır. Yakınsama bölgesinin özellikleri aşağıda özetlenmiştir. $X(z)$'nin, z'nin rasyonel bir fonksiyonu olduğu varsayılmaktadır.

Özellik 1: Yakınsama bölgesinde, herhangi bir kutup bulunamaz.

Özellik 2: $x[n]$, sonlu bir dizi ise, (yani, N_1 ve N_2 sonlu sayılar olmak üzere, sonlu bir $N_1 \le n \le N_2$ aralığı dışında $x[n]=0$ ise) ve $X(z)$, z'nin bazı değerleri için yakınsak ise, yakınsama bölgesi, belki $z=0$ veya $z=\infty$ dışında, bütün z-düzlemidir.

Özellik 3: $x[n]$, bir sağ yanlı dizi ise (yani, $n<N_1<\infty$ için $x[n]=0$ ise), ve $X(z)$, z'nin herhangi bir değeri için yakınsaksa, yakınsama bölgesi

$$|z| > r_{max} \quad \text{veya} \quad \infty > |z| > r_{max}$$

biçimindedir. Burada, r_{max}, $X(z)$'nin kutuplarının genliklerinin en büyüğüne eşittir. Dolayısıyla, yakınsama bölgesi, z-düzlemindeki $|z| = r_{max}$ çemberinin dış bölgesi olup, $z=\infty$'a uzanması da olasıdır.

Özellik 4: $x[n]$, bir sol yanlı dizi ise (yani, $n>N_2>-\infty$ için $x[n]=0$ ise), ve $X(z)$, z'nin herhangi bir değeri için yakınsaksa, yakınsama bölgesi

$$|z| < r_{min} \quad \text{veya} \quad 0 < |z| < r_{min}$$

biçimindedir. Burada r_{min}, $X(z)$'nin kutuplarının genliklerinin en küçüğüne eşittir. Dolayısıyla, yakınsama bölgesi, z-düzlemindeki $|z| = r_{min}$ çemberinin iç bölgesi olup, $z=0$'a uzaması da olasıdır.

Özellik 5: $x[n]$ bir çift yanlı dizi ise (yani $x[n]$, sol veya sağ yanlı değil, sonsuz süreli bir dizi ise) ve $X(z)$, z'nin herhangi bir değeri için yakınsaksa, yakınsama bölgesi

$$r_1 < |z| < r_2$$

biçimindedir. Burada, r_1 ve r_2, $X(z)$'nin iki kutbunun genlikleridir. Dolayısıyla, yakınsama bölgesi, z-düzleminde, $|z| = r_1$ ve $|z| = r_2$ çemberleri arasında kalan ve herhangi bir kutup içermeyen, halka biçimindeki bölgedir.

Kutup tanımı gereği, $X(z)$, kutuplarında sonsuz değerlidir. Birinci özellik, bu gerçekten hareketle hemen görülebilir. Diğer özelliklerin gösterilmesi için Problem 4.2 ve 4.5'e bakınız.

4.3. BAZI DİZİLERİN z-DÖNÜŞÜMLERİ

A. Birim Dürtü Dizisi $\delta[n]$:

(1.45) ve (4.3) tanımlarından

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = z^{-0} = 1 \qquad \text{tüm } z\text{'ler için} \qquad (4.14)$$

elde edilir. Dolayısıyla:

$$\delta[n] \leftrightarrow 1 \qquad \text{tüm } z\text{'ler için} \tag{4.15}$$

B. Birim Basamak Dizisi $u[n]$:

(4.8) ile (4.10) arasındaki eşitliklerde a=1 alınarak, aşağıdaki dizi elde edilir:

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad |z|>1 \tag{4.16}$$

C. z-Dönüşümü Çiftleri:

Sıklıkla kullanılan bazı dizilerin z-dönüşümleri Tablo 4.1'de görülmektedir.

Tablo 4-1. Çok kullanılan bazı z-dönüşümü Çiftleri

$x[n]$	$X(z)$	Yakınsama Bölgesi
$\delta[n]$	1	tüm z'ler için
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert<1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	0(m>0 ise) veya ∞ (m<0 ise) dışındaki tüm z'ler
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$\lvert z<\lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \left[\frac{z}{z-a}\right]^2$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$(\cos\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^2-(\cos\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$(\sin\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{(\sin\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$(r^n\cos\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^2-(r\cos\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert>r$
$(r^n\sin\Omega_0 n)u[n]$	$\frac{(r\sin\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert>r$
$\begin{cases} a^n & 0\le n\le N-1 \\ 0 & \text{diğer durumlar}\end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>0$

4.4 z-DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

z-dönüşümünün temel özellikleri aşağıda tartışılmaktadır.

A. Doğrusallık

Eğer

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R_1$$
$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R_2$$

ise,

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1(z) + a_2X_2(z) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2 \qquad (4.17)$$

olur. Burada, a_1 ve a_2 keyfi sabitlerdir.

B. Zaman Öteleme

Eğer

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R$$

ise,

$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}X(z) \qquad R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\} \qquad (4.18)$$

Özel Durumlar:

$$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z) \qquad R' = R \cap \{0 < |z|\} \qquad (4.19)$$
$$x[n+1] \leftrightarrow zX(z) \qquad R' = R \cap \{|z| < \infty\} \qquad (4.20)$$

Bu bağıntılardan dolayı [(4.19) ve (4.20) eşitlikleri], z^{-1} genellikle birim geciktirme operatörü, ve z, birim ilerletme operatörü olarak adlandırılır. Laplace dönüşümündeki $s^{-1}=1/s$ ve s'nin, zaman bölgesinde entegrasyona ve türeve karşılık geldiğine de dikkat ediniz [(3.22) ve (3.20) eşitlikleri].

C. z_0^n ile Çarpma:

Eğer

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R$$

ise

$$z_0^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad R' = |z_0|R \qquad (4.21)$$

$X[z]$ içerisinde $z = z_k$'daki bir kutup (veya sıfır), z_0^n ile çarpma sonucu, $z = z_0 z_k$'ya kayar ve yakınsama bölgesi $|z_0|$ çarpanıyla genişler veya daralır.

Özel Durum:

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(e^{-j\Omega_0}z) \qquad R' = R \qquad (4.22)$$

Bu özel durumda, bütün kutup ve sıfırlar Ω_0 açısı kadar döndürülür, ve yakınsama bölgesi değişmez.

D. Zaman Geri Dönüş:

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R$$

ise

$$x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad R' = \frac{1}{R} \tag{4.23}$$

olur. Dolayısıyla $X(z)$ içerisinde, $z = z_k$'daki bir kutup (veya sıfır) zamanda geri dönüşten sonra $1/z_k$'ya kayar. $R' = 1/R$ bağıntısı, R'nin terslendiği anlamına gelir, ve sağ yanlı bir dizinin, zaman terslemesinden sonra sol yanlı hale geldiğini gösterir. (Bunun tersi de doğrudur.)

E. *n* ile Çarpma (z'ye göre türev):

Eğer

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R$$

ise,

$$nx[n] \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R' = R \tag{4.24}$$

F. Birikim

Eğer

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R$$

ise:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}X(z) = \frac{z}{z-1}X(z) \qquad R' \supset R \cap \{|z| > 1\} \tag{4.25}$$

$\Sigma_{k=-\infty}^{n} x[k]$ işleminin, zaman bölgesindeki entegrasyonun ayrık zamanlı karşılığı olduğuna dikkat ediniz. Bu, birikim adını alır. Bunun Laplace dönüşümündeki karşılığı olan operatör 1/s'dir.

G. Konvolüsyon:

Eğer

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R_1$$
$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(z) \qquad \text{Yakınsama Bölgesi} = R_2$$

ise,

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2 \tag{4.26}$$

olur. Bu bağıntı, sürekli zamanlı sistemlere benzer olarak, ayrık zamanlı DZD sistemlerin analiz ve tasarımında çok önemli bir yer tutar.

Tablo 4-2. z-Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Özellik	Dizi	Dönüşüm	Yakınsama Bölgesi
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Doğrusallık	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Zaman Öteleme	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R' \supset R \cap \{0<\lvert z\rvert<\infty\}$
z_0^n ile çarpma	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R'=\lvert z_0\rvert R$
$e^{j\Omega_0 n}$ ile çarpma	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$	$R'=R$
Zamanda geri dönüş	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R'=\frac{1}{R}$
n ile çarpma	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R'=R$
Birikim	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R' \supset R \cap \{\lvert z\rvert>1\}$
Konvolüsyon	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

H. Bazı z-dönüşümü Özelliklerinin Özeti

Anlatılan özellikler, Tablo 4-2'de özetlenmiştir.

4.5. TERS z-DÖNÜŞÜMÜ

$x[n]$ dizisinin dönüşümü olan $X(z)$'den, $x[n]$ dizisini elde etmeye, ters z-dönüşümü adı verilir ve simgesel olarak şu biçimde gösterilir.

$$x[n]=\mathfrak{Z}^{-1}\{X(z)\} \tag{4.27}$$

A. Ters Dönüşüm Bağıntısı:

Laplace dönüşümünde olduğu gibi, ters dönüşüm için de, z-düzleminde entegrasyon içeren bir bağıntı vardır:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\,dz \tag{4.28}$$

Burada C, orijini saatin ters yönünde çevreleyen bir çevrimdir. (4.28) eşitliğinin çözümü, karmaşık değişkenler kuramı bilgisi gerektirir.

B. z-Dönüşümü Çiftleri Tablosunun Kullanımı:

$X(z)$'nin tersini almak için kullanılan ikinci bir yöntem, $X(z)$'yi bir toplam biçiminde ifade etmeye çalışmaktır.

$$X(z)=X_1(z)+\cdots+X_n(z) \tag{4.29}$$

Burada $X_1(z), \ldots, X_n(z)$, ters dönüşümleri ($x_1[n], \ldots, x_n[n]$) bilinen fonksiyonlardır. (4.17) ile tanımlanan doğrusallık özelliğinden,

$$x[n] = x_1[n] + \cdots + x_n[n] \tag{4.30}$$

bulunur.

C. Güç Serisi Açılımı:

z-dönüşümünü tanımlayan (4.3) eşitliği bir güç serisidir. Bu seride, z^{-n} terimlerinin katsayıları, $x[n]$ dizi değerleridir. Dolayısıyla, $X(z)$

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots \tag{4.31}$$

biçiminde güç serisi olarak verildiğinde, dizinin herhangi bir değeri, uygun z^{-1} teriminin katsayısı bulunarak belirlenebilir. Bu yaklaşım, kapalı bir çözüm vermeyebilir, ama $X(z)$'nin z^{-1}'e bağlı bir polinomdan daha basit bir yapıya sahip olmaması durumunda, sonlu uzunluklu bir dizi için çok kullanışlıdır (bkz. Problem 4.15). Rasyonel z-dönüşümleri için, güç serisine açılım, Problem 4.16 ve 4.17'de gösterilen uzun bölmelerle yapılabilir.

D. Kısmi Kesirler Açılımı:

Ters Laplace dönüşümünde olduğu gibi, özellikle $X(z)$, z'nin rasyonel bir fonksiyonu ise, kısmi kesirlere açılım yöntemi, en kullanışlı ters dönüşüm yöntemidir.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = k\frac{(z-z_1)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)\cdots(z-p_n)} \tag{4.32}$$

olsun. $n \geq m$ ve bütün p_k köklerinin basit olduğu varsayımıyla,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n} = \frac{c_0}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z-p_k} \tag{4.33}$$

bulunur. Burada, c_0 ve c_k şu biçimde tanımlanır:

$$c_0 = X(z)|_{z=0} \qquad c_k = (z-p_k)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=p_k} \tag{4.34}$$

Dolayısıyla,

$$X(z) = c_0 + c_1\frac{z}{z-p_1} + \cdots + c_n\frac{z}{z-p_n} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k\frac{z}{z-p_k} \tag{4.35}$$

elde edilir. (4.35)'deki her bir terimin yakınsama bölgesinin $X(z)$'nin tüm yakınsama bölgesinden çıkartılması ve Tablo 4-1'in kullanılmasıyla, her bir terimin ters dönüşümü yapılabilir ve böylece tüm ters z-dönüşümü elde edilebilir (bkz. Problem 4.19 ve 4.23)

Eğer (4.32) eşitliğinde $m>n$ ise, (4.35) eşitliğinin sağ yanına $(m-n)$ mertebesinde bir z polinomu eklenmelidir. Dolayısıyla, $m>n$ için, toplam kısmi kesirler açılımı şu yapıda olur:

$$X(z)=\sum_{q=0}^{m-n} b_q z^q+\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{z}{z-p_k} \tag{4.36}$$

$X(z)$'nin katlı kutupları varsa, örneğin p_i kökü r katlı ise, $X(z)$ / z'nin açılımı, şu terimlerden oluşur.

$$\frac{\lambda_1}{z-p_i}+\frac{\lambda_2}{(z-p_i)^2}+\cdots+\frac{\lambda_r}{(z-p_i)^r} \tag{4.37}$$

Burada,

$$\lambda_{r-k}=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left[(z-p_i)^r\frac{X(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=p_i} \tag{4.38}$$

bağıntısı vardır.

4.6. AYRIK ZAMANLI DZD SİSTEMLERİN SİSTEM FONKSİYONLARI

A. Sistem Fonksiyonu

Bölüm 2.6'da, ayrık zamanlı DZD bir sistemin $y[n]$ çıkışının, $x[n]$ girişi ile dürtü tepkisi $h[n]$'nin konvolüsyonuna eşit olduğunu göstermiştik; yani [(2.35) eşitliği)]:

$$y[n]=x[n]*h[n] \tag{4.39}$$

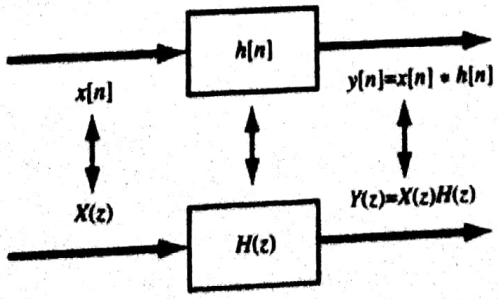
z-dönüşümünün konvolüsyon özelliğinin (4.26) uygulanmasıyla,

$$Y(z)=X(z)H(z) \tag{4.40}$$

elde edilir. Burada, $Y(z)$, $X(z)$ ve $H(z)$ sırasıyla, $y[n]$, $x[n]$ ve $h[n]$'nin z-dönüşümleridir. (4.40) eşitliği, şu biçimde ifade edilebilir:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{4.41}$$

$h[n]$'nin z-dönüşümü olan $H[z]$, sistemin sistem fonksiyonu (veya transfer fonksiyonu) olarak adlandırılır. (4.41) eşitliğinden $H(z)$, çıkış $y[n]$ ve giriş $x[n]$'nin z-dönüşümlerinin oranı olarak da tanımlanabilir. $H(z)$ sistem fonksiyonu, sistemi bütünüyle karakterize eder. Şekil 4-3, (4.39) ve (4.40) eşitlikleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.



Şekil 4-3 Dürtü tepkisi ve sistem fonksiyonu

B. Ayrık zamanlı DZD Sistemlerin Karakterize Edilmesi

Ayrık zamanlı DZD sistemlerin büyük özelliği, $H(z)$'nin z-düzlemindeki karakteristikleriyle, ve özellikle kutup konumları ve yakınsama bölgesiyle yakından ilişkilidir.

1. Nedenselik:

Nedensel bir ayrık zamanlı DZD sistemi için, (2.66) eşitliğinden,

$$h[n] = 0 \qquad n < 0$$

olup, $h[n]$ sağ yanlı bir işaretir. Bunun karşılığı olarak $H(z)$'de ortaya çıkan zorunluluk, $H(z)$'nin yakınsama bölgesinin

$$|z| > r_{max}$$

biçiminde olmasıdır. Yani, yakınsama bölgesi, z-düzleminde, $H(z)$'nin tüm kutuplarını içeren çemberin dış bölgesidir. Benzer olarak, sistem nedensel değilse, yani,

$$h[n] = 0 \qquad n \geq 0$$

ise, $h[n]$ sol yanlıdır ve $H(z)$'nin yakınsama alanı

$$|z| < r_{min}$$

yapısındadır. Yani, yakınsama alanı, z-düzleminde $H(z)$'nin hiçbir kutbunu içermeyen çemberin iç bölgesidir.

2. Kararlılık:

Bölüm 2.7'de, ayrık zamanlı DZD bir sistemin BGSK kararlı olmasının, ancak ve ancak

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

koşulunun sağlanmasıyla mümkün olduğu belirtilmişti. Bu, $H(z)$'nin yakınsama bölgesinin birim çemberi (yani, $|z| = 1$) içermesi gerektiği anlamına gelir (bkz. Problem 4.39.)

3. Nedensel ve Kararlı Sistemler:

Bir sistem hem nedensel hem de kararlı ise, $H(z)$'nin tüm kutupları z-düzlemindeki birim çemberin iç bölgesinde olmalıdır. Bunun nedeni, yakınsama bölgesinin $|z| > r_{max}$ biçiminde olmasıdır ve birim çemberin yakınsama bölgesi içerisinde olması nedeniyle $r_{max} < 1$ olmalıdır.

C. Doğrusal, Sabit Katsaylı Fark Denklemleri ile Tanımlanan DZD Sistemler için Sistem Fonksiyonu

Bölüm 2.9'da, $x[n]$ girişi ve $y[n]$çıkışı,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (4.C)$$

biçiminde verilen doğrusal, sabit katsaylı fark eşitliğini sağlayan ayrık zamanlı DZD bir sistemi inceledik.

z-dönüşümünü uygulayarak ve z-dönüşümünün zaman öteleme (4.18) ve doğrusallık (4.17) özelliklerini kullanarak

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

veya

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{4.43}$$

elde edilir. Buradan da,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{4.44}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $H(z)$ her zaman rasyoneldir. $H(z)$'nin yakınsama bölgesinin (4.44) eşitliğinde belirtilmediğine, kararlılık ve nedensellik gibi özelliklerin sistemde olup olmadığının sorgulanmasıyla bulunması gerektiğine dikkat ediniz.

D. Bağlantılı Sistemler:

Birbiri ardına bağlanan iki DZD sistemin ($h_1[n]$ ve $h_2[n]$) dürtü tepkisi $h[n]$ şu biçimde tanımlanır:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] \tag{4.45}$$

Dolayısıyla, sistem fonksiyonları arasında da şu ilişki vardır:

$$H(z) = H_1(z) H_2(z) \qquad R \supset R_1 \cap R_2 \tag{4.46}$$

Benzer olarak, paralel bağlı iki DZD sistemin dürtü tepkisi

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \tag{4.47}$$

olup, sistem fonksiyonu şu biçimde bulunur:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \qquad R \supset R_1 \cap R_2 \tag{4.48}$$

4.7. TEK YANLI z-DÖNÜŞÜMÜ

A. Tanım:

Bir $x[n]$ dizisinin tek yanlı z-dönüşümü $X_1(z)$ (4.5)

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \tag{4.49}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu dönüşümün çift yanlı dönüşümden farkı, toplama işleminin yalnızca $n \geq 0$ için yapılmasıdır. Dolayısıyla, $x[n]$'nin tek yanlı z-dönüşümü $x[n]u[n]$'nin çift yanlı dönüşümü gibi düşünülebilir. $x[n]u[n]$ sağ yanlı bir dizi olduğundan, $X_1(z)$'nin yakınsama bölgesi, her zaman z-düzlemindeki bir çemberin dışıdır.

B. Temel Özellikler

Çift yanlı z-dönüşümünün özelliklerinin çoğu, tek yanlı dönüşüm için de geçerlidir. Tek yanlı z-dönüşümü, özellikle, doğrusal, sabit katsayılı fark denklemi ve sıfır başlangıç koşullarıyla tanımlanmış nedensel bir sistemin, nedensel bir girişe tepkisini hesaplarken kullanışlıdır. Tek yanlı z-dönüşümünün bu uygulama için kullanışlı olan temel özelliği, aşağıda belirtilen zaman öteleme özelliğidir. Bu özellik, çift yanlı dönüşümünkinden farklıdır.

Zaman Öteleme Özelliği:

$x[n] \leftrightarrow X_1[z]$ ise, $m \geq 0$ için

$$x[n-m] \leftrightarrow z^{-m}X_1(z) + z^{-m+1}x[-1] + z^{-m+2}x[-2] + \cdots + x[-m] \qquad (4.50)$$

$$x[n+m] \leftrightarrow z^{m}X_1(z) - z^{m}x[0] - z^{m-1}x[1] - \cdots - zx[m-1] \qquad (4.51)$$

olur. Bu eşitliklerin ispatı Problem 4.36'da verilmektedir.

D. Sistem Fonksiyonu:

Sürekli zamanlı DZD sistemleri için olduğu gibi, tek yanlı z-dönüşümü durumunda, $H(z) = Y(z)/X(z)$ sistem fonksiyonu, sistemin bütün başlangıç koşulları sıfır alınarak hesaplanır (sistemin gevşemiş olma durumu)

Çözümlü Problemler

z-DÖNÜŞÜMÜ

4.1. Aşağıdaki dizilerin z-dönüşümlerini bulunuz.

(a) $x[n] = -a^n u[-n-1]$

(b) $x[n] = a^{-n} u[-n-1]$

(a) (4.3) eşitliğinden:

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

yazılabilir. Fakat, (1.91) eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = \frac{1}{1-a^{-1}z} \quad |a^{-1}z| < 1 \text{ veya } |z| < |a|$$

olduğundan, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|<|a| \qquad (4.52)$$

(b) Benzer olarak,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-n}u[-n-1]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az)^{-n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (az)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^{n} - 1$$

yazılabilir. Yine (1.91) eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} (az)^{n} = \frac{1}{1-az} \qquad |az|<1 \text{ veya } |z|<\frac{1}{|a|} \text{ ise}$$

olduğundan, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$X(z) = \frac{1}{1-az} - 1 = \frac{az}{1-az} = -\frac{z}{z-1/a} \qquad |z|<\frac{1}{|a|} \qquad (4.53)$$

4.2. Sonlu bir $x[n]$ dizisi şu biçimde tanımlanmaktadır.

$$x[n]\begin{cases} \neq 0 & N_1 \le n \le N_2 \\ = 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Burada N_1 ve N_2 sonlu değerlerdir. $X[z]$'nin yakınsama bölgesinin, belki yalnızca z=0 veya $z=\infty$ 'u dışarda bırakarak, tüm z-düzlemi olduğunu gösteriniz.

(4.3) eşitliğinden

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \qquad (4.54)$$

yazılabilir. z sıfır veya sonsuz değilse, (4.54)'deki bütün terimler sonludur ve $X(z)$ yakınsar. N_1<0 ve N_2>0 ise, (4.54)'de hem pozitif hem de negatif üslü z terimleri vardır. $|z|$ sıfıra yaklaştıkça z'nin negatif güçleri sınırsız hale gelir. $|z|$ sonsuza yaklaştıkça, z'nin pozitif güçleri sınırsız duruma gelir. Dolayısıyla, z=0 ve $z=\infty$ dışında kalan tüm z-düzlemi, yakınsama bölgesidir. $N_1 \ge 0$ ise, (4.54) yalnızca z'nin negatif güçlerini içerir ve yakınsama bölgesi $z=\infty$ 'u da kapsar. $N_2 \le 0$ ise, (4.54) yalnızca z'nin pozitif güçlerini içerir ve yakınsama bölgesi z=0 noktasını da kapsar.

4.3. Sonlu bir $x[n]$ dizisi

$$x[n] = \{5, 3, \underset{\uparrow}{-2}, 0, 4, -3\}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. $X(z)$'yi ve yakınsama bölgesini bulunuz.

(4.3) eşitliğinden ve verilen $x[n]$'den aşağıdakiler elde edilir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-2}^{3} x[n]z^{-n}$$
$$= x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3}$$
$$= 5z^2 + 3z - 2 + 4z^{-2} - 3z^{-3}$$

Sıfırdan ve sonsuzdan farklı z değerleri için $X(z)$'deki bütün terimler sonlu olur ve dolayısıyla $X(z)$ yakınsak olur. $X(z)$ içerisinde z'nin hem pozitif hem de negatif güçleri bulunur. Dolayısıyla, Problem 4.2'nin sonucundan, yakınsama bölgesinin $0<|z|<\infty$ olduğu sonucuna varılır.

4.4. Aşağıda tanımlanan dizi için $X(z)$'yi bulunuz, ve sıfır ve kutuplarını çiziniz.

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1,\ a>0 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

(4.3) eşitliğinden ve (1.90) eşitliğini kullanarak

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1-\left(az^{-1}\right)^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a} \qquad (4.55)$$

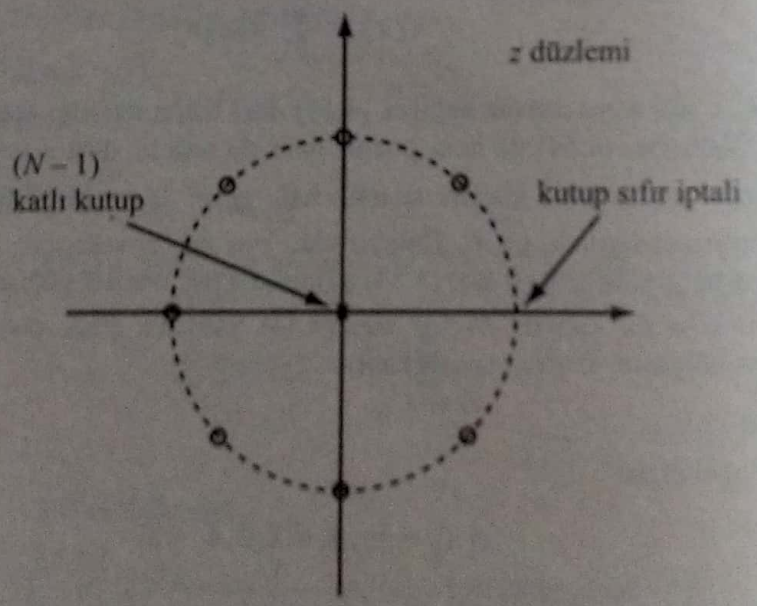
elde edilir. (4.55) eşitliğinden, z=0'da (N–1) katlı bir kutup, ve z=a'da bir kutup olduğu görülmektedir. $x[n]$ sonlu bir dizi olup, n<0 için yakınsama bölgesi $|z|$>0'dır. Paydaki polinomun N kökü şu biçimdedir:

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (4.56)$$

k=0'daki kök, z=a'daki kutbu yokeder. $X(z)$'nin diğer sıfırları

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)} \qquad k = 1, \ldots, N-1 \qquad (4.57)$$

noktalarındadır. Şekil 4-4'de, N=8 için kutup-sıfır çizimi verilmektedir.



Şekil 4-4 N=8 için kutup-sıfır çizimi

4.5. $x[n]$'nin sağ yanlı bir dizi olması ve $X[z]$'nin z'nin belli bir değeri için yakınsaması durumunda, $X(z)$'nin yakınsama bölgesinin, r_{max} $X(z)$'nin kutupları arasındaki en büyük genlik olmak üzere, aşağıdaki yapıda olduğunu gösteriniz.

$x[n]$ sağ yanlı bir dizi olsun ve

$$|z| > r_{max} \quad \text{veya} \qquad \infty > |z| > r_{max}$$

koşulunu sağlasın. Ayrıca, $X(z)$, $|z| = r_0$ için yakınsak olsun. Bu durumda, (4.3) eşitliğinden,

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

elde edilir. Şimdi, eğer $r_1 > r_0$ ise,

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_1^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| \left(r_0 \frac{r_1}{r_0}\right)^{-n} = \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n}$$

$$\leq \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-N_1} \sum_{n=N_1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty$$

yazılabilir. Bu işlem sırasında $(r_1/r_0)^{-n}$'nin azalan bir dizi olmasından yararlanılmıştır. Dolayısıyla $X(z)$, $r = r_1$ için yakınsar ve yakınsama bölgesi

$$|z| > r_0$$

biçiminde ifade edilir. $X(z)$'nin yakınsama bölgesi kutupları içeremeyeceğinden yakınsama bölgesinin şu biçimde olacağı sonucuna varırız:

$$|z| > r_{max}$$

Burada, r_{max}, $X(z)$'nin kutupları arasındaki en büyük genliktir.

$N_1 < 0$ olması durumda

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[N_1] z^{-N_1} + \cdots + x[-1] z + \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

yazılabilir. Yani $X(z)$, z'nin pozitif güçlerini içerir ve $z = \infty$'da sınırsız olur. Bu durumda yakınsama bölgesi

$$\infty > |z| > r_{max}$$

biçimindedir. Bu sonuca göre $X(z)$'nin yakınsama bölgesinde $z = \infty$ içerildiğinde, bir $x[n]$ dizisinin yalnızca sağ yanlı değil, nedensel olduğunu da söyleyebiliriz. Oysa, Laplace dönüşümünde durum böyle değildir.

4.6. Aşağıdaki diziler için z-dönüşümlerini bulunuz ve yakınsama bölgeleri ile sıfır kutup çizimlerini elde ediniz.

(a) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{1}{3})^n u[n]$

(b) $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n] + (\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

(c) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n] + (\frac{1}{3})^n u[-n-1]$

(a) Tablo 4-1'den aşağıdakiler yazılabilir:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| > \frac{1}{2} \tag{4.58}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z| > \frac{1}{3} \tag{4.59}$$

(4.58) ve (4.59) eşitliklerindeki yakınsama bölgeleri kesiştiğinden

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}} = \frac{2z\left(z-\frac{5}{12}\right)}{\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad |z| > \frac{1}{2} \tag{4.60}$$

bulunur. (4.60) eşitliğinden, $X(z)$'nin, z=0 ve z=5/12'de iki sıfırının ve z=1/2 ve z=1/3'de iki kutbunun olduğu, ve yakınsama bölgesinin, Şekil 4-5'a'da görüldüğü gibi, $|z|$>1/2olduğu anlaşılmaktadır.

(b) Tablo 4-1'den dönüşümler bulunur:

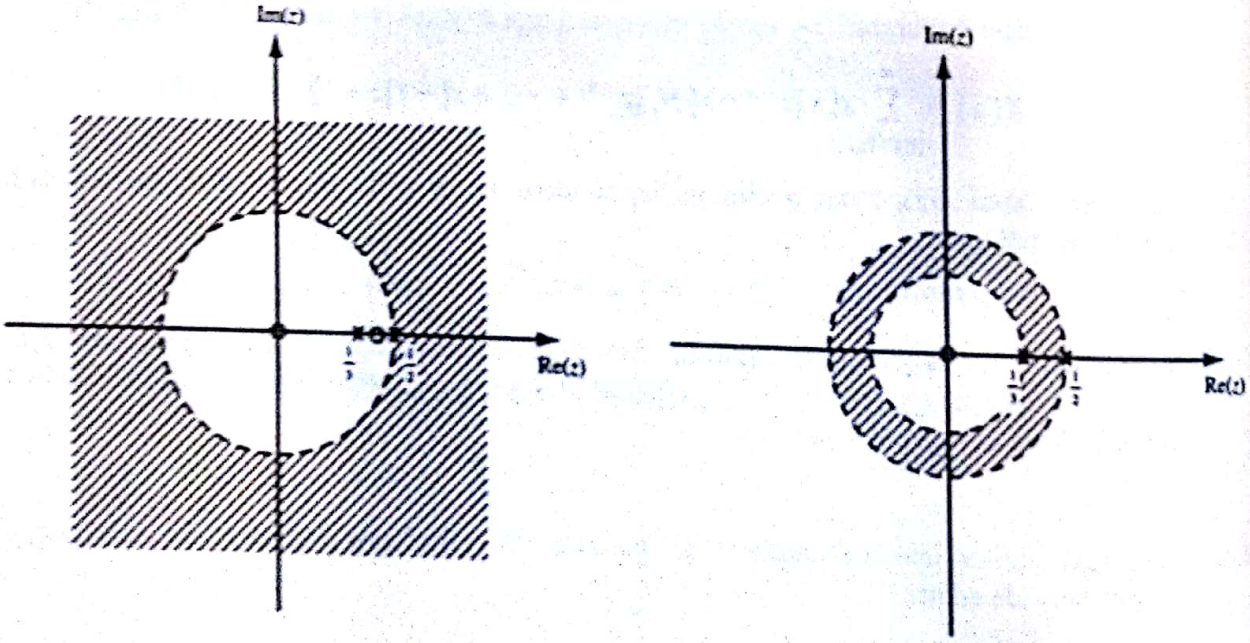
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z| > \frac{1}{3} \tag{4.61}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| < \frac{1}{2} \tag{4.62}$$

(4.61) ve (4.62) eşitliklerindeki yakınsama bölgeleri kesişmektedir. Dolayısıyla;

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2} \tag{4.63}$$

(4.63) eşitliğinden $X(z)$'nin z=0'da bir sıfırın, z=1/2 ve z=1/3'de iki kutbunun olduğu, ve yakınsama bölgesinin (Şekil 4-5(b)) 1/3<$|z|$<1/2biçiminde ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.



(a) *(b)*

Şekil 4-5

(c) Tablo 4-1'den dönüşümler bulunabilir.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| > \frac{1}{2} \tag{4.64}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z| < \frac{1}{3} \tag{4.65}$$

(4.64) ve (4.65) eşitliklerinden, yakınsama bölgelerinin kesişmediği görülmektedir. Dolayısıyla, ortak bir yakınsama bölgesi yoktur, ve $x[n]$ bir $X(z)$'ye sahip değildir.

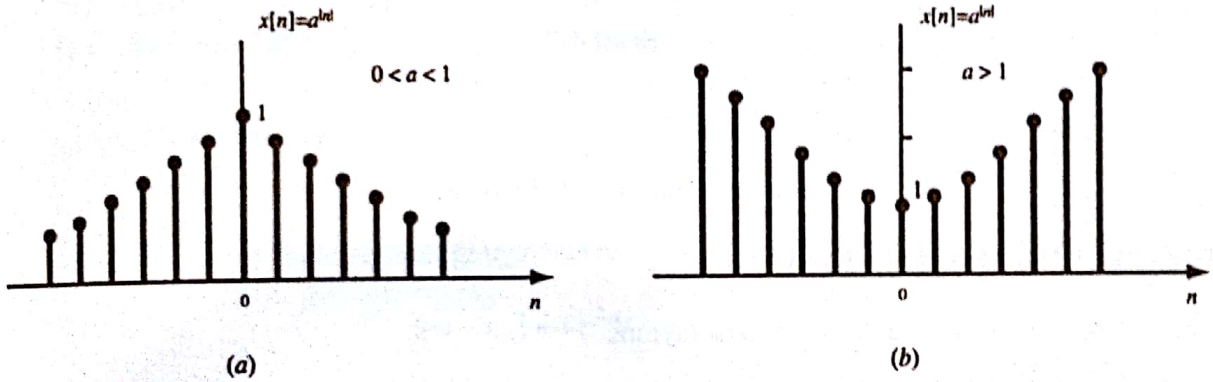
4.7. $x[n]$ dizisi şu biçimde tanımlanmaktadır.

$$x[n] = a^{|n|} \qquad a > 0 \tag{4.66}$$

(a) $a<1$ ve $a>1$ için $x[n]$'yi çiziniz.

(b) $X(z)$'yi bulunuz ve $a<1$ ve $a>1$ için sıfır-kutup çizimiyle yakınsanma bölgesini elde ediniz.

(a) $x[n]$, $a<1$ ve $a>1$ için Şekil 4-6(a)'da gösterilmiştir.



Şekil 4-6

(b) $x[n]$ çift yanlı bir dizi olduğundan, şu biçimde ifade edilebilir.

$$x[n] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1] \tag{4.67}$$

Tablo 4-1'den dönüşümleri bulalım:

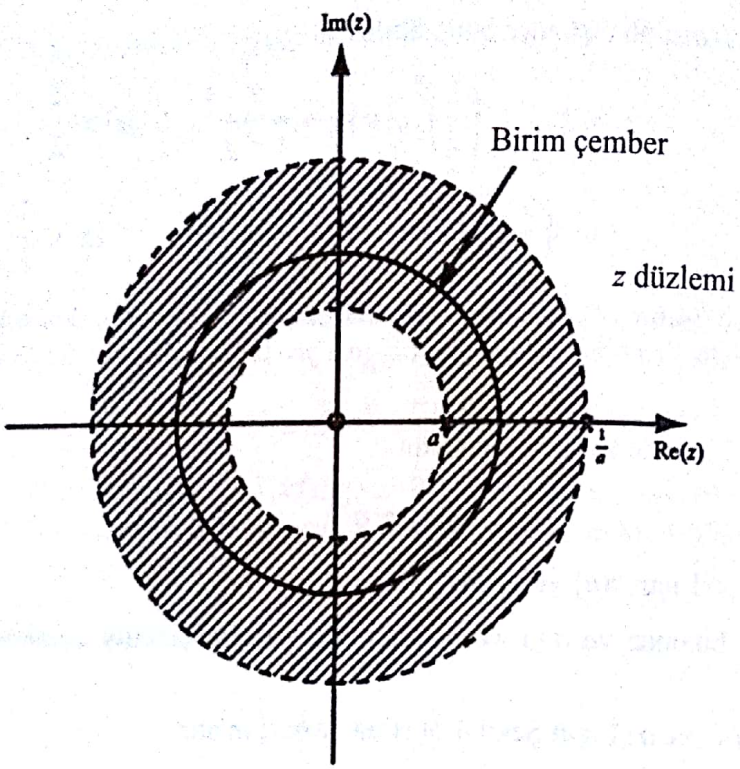
$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z| > a \tag{4.68}$$

$$a^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{z}{z-1/a} \qquad |z| < \frac{1}{a} \tag{4.69}$$

$a<1$ ise, (4.68) ve (4.69) eşitliklerinden, yakınsama bölgelerinin kesiştiği anlaşılır. Dolayısıyla;

$$X(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-1/a} = \frac{a^2-1}{a}\,\frac{z}{(z-a)(z-1/a)} \qquad a < |z| < \frac{1}{a} \tag{4.70}$$

(4.70) eşitliğinden, $X(z)$'nin orijinde bir sıfırının ve z=0 ile z=1/a'da iki kutbunun olduğu, ve yakınsama bölgesinin, Şekil 4-7'de görüldüğü gibi, $a<|z|<1/a$ olduğu anlaşılmaktadır. $a>1$ ise, (4.68) ve (4.69) eşitliklerinden, yakınsama bölgelerinin kesişmediği görülmektedir. Dolayısıyla ortak bir yakınsama bölgesi yoktur ve $x[n]$, bir $X(z)$'ye sahip değildir.



Şekil 4-7

z-DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

4.8. (4.8) zaman öteleme özelliğini ispatlayınız.

$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}X(z) \qquad R' \supset R \cap \{0<|z|<\infty\}$$

(4.3) tanımından

$$\mathfrak{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}$$

yazılır. $m=n-n_0$ değişken dönüşümü ile

$$\mathfrak{Z}\{x[n-n_0]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)}$$

$$= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m} = z^{-n_0}X(z)$$

elde edilir. z^{-n_0} ile çarpmadan dolayı, $n_0>0$ için, $z=0$'da fazladan kutuplar ortaya çıkar; bu kutuplar, $z=\infty$'da yok edilir. Bunun için, $z=0$ ve $z=\infty$ noktaları, zaman öteleme yoluyla yakınsama bölgesine eklenir veya bölgeden çıkartılır. Dolayısıyla,

$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}X(z) \qquad R' \supset R \cap \{0<|z|<\infty\}$$

elde edilir. Burada R ve R′ zaman ötelemeden önceki ve sonraki yakınsama bölgeleridir.

4.9. (4.21) eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

$$z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad R' = |z_0|R$$

(4.3) tanımından

$$\mathcal{Z}\{z_0^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z_0^n x[n]) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

yazılabilir. $X(z)$'nin $z = z_k$'daki kutbu (veya sıfırı), $z = z_0 z_k$'ya kayar, ve yakınsama bölgesi çarpanı ile genişler veya daralır. Dolayısıyla, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad R' = |z_0|R$$

4.10. Aşağıdaki dizilerin z-dönüşümlerini ve yakınsama bölgesini bulunuz.

(*a*) $x[n] = \delta[n - n_0]$ (*b*) $x[n] = u[n - n_0]$
(*c*) $x[n] = a^{n+1}u[n+1]$ (*d*) $x[n] = u[-n]$
(*e*) $x[n] = a^{-n}u[-n]$

(a) (4.15) eşitliğinden:

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1 \text{ bütün } z \text{ değerleri için}$$

(4.18) zaman öteleme özelliği uygulanarak:

$$\delta[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0} \qquad \begin{array}{l} 0 < |z|,\ n_0 > 0 \\ |z| < \infty,\ n_0 < 0 \end{array} \qquad (4.71)$$

(b) (4.16) eşitliğinden:

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

Yine (4.18) zaman öteleme özelliğinden:

$$u[n - n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{-(n_0-1)}}{z-1} \qquad 1 < |z| < \infty \qquad (4.72)$$

(c) (4.8) ve (4.10) eşitliklerinden:

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

(4.20) eşitliğinden:

$$a^{n+1}u[n+1] \longleftrightarrow z\frac{z}{z-a} = \frac{z^2}{z-a} \qquad |a| < |z| < \infty \qquad (4.73)$$

(d) (4.16) eşitliğinden:

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$$

Zamanda geri dönüş (4.23) özelliği kullanılarak:

$$u[-n] \longleftrightarrow \frac{1/z}{1/z-1} = \frac{1}{1-z} \qquad |z|<1 \tag{4.74}$$

(e) (4.8) ve (4.10) eşitliklerinden:

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

Yine (4.23) zamanda geri dönüş özelliği kullanılarak:

$$a^{-n}u[-n] \longleftrightarrow \frac{1/z}{1/z-a} = \frac{1}{1-az} \qquad |z|<\frac{1}{|a|} \tag{4.75}$$

4.11. n ile çarpma (veya z'ye göre türev alma) özelliğini (4.24) sağlayınız:

$$nx[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R'=R$$

(4.3) tanımından:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Her iki tarafın da z'ye göre türevinin alınmasıyla:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -nx[n]z^{-n-1}$$

ve

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{nx[n]\}z^{-n} = \mathcal{Z}\{nx[n]\}$$

elde edilir ve aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$nx[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R'=R$$

4.12. Aşağıdaki dizilerin z-dönüşümlerini bulunuz.

(*a*) $x[n] = na^n u[n]$

(*b*) $x[n] = na^{n-1}u[n]$

(a) (4.8) ve (4.10) eşitliklerinden:

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a| \tag{4.76}$$

(4.24) n ile çarpma özelliğini kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$na^n u[n] \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{az}{(z-a)^2} \qquad |z|>|a| \tag{4.77}$$

(b) (4.76) eşitliğinin a'ya göre türevi alınarak

$$na^{n-1}u[n] \leftrightarrow \frac{d}{da}\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{z}{(z-a)^2} \qquad |z|>|a| \qquad (4.78)$$

sonucuna varılır. (4.77) eşitliğinin her iki yanının a'ya bölünmesiyle de aynı sonuca ulaşılır.

4.13. (4.26) konvolüsyon özelliğini gösteriniz.

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2$$

(2.35) tanımından

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

ve (4.3) tanımından

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]\right)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n}\right)$$

elde edilir. Son ifadedeki parantezin içinin, ötelenmiş $x_2[n-k]$ işaretinin z-dönüşümü olduğu düşünülürse, (4.18) zaman öteleme özelliğinin kullanılmasıyla

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left[z^{-k}X_2(z)\right] = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}\right)X_2(z) = X_1(z)X_2(z)$$

sonucuna ulaşılır. Yakınsama bölgesi, $X_1(z)$ ve $X_2(z)$'nin yakınsama bölgelerinin kesişimini içerir. Eğer bir dönüşümün sıfırı diğerinin kutbunu iptal ederse, $Y(z)$'nin yakınsama bölgesi genişleyebilir. Dolayısıyla, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2$$

4.14. (4.25) birikim özelliğini kanıtlayınız.

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}X(z) = \frac{z}{z-1}X(z) \qquad R' \supset R \cap \{|z|>1\}$$

(2.40) eşitliğinden:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] * u[n]$$

(4.16) eşitliğinin ve (4.26) konvolüsyon özelliğinin kullanılmasıyla

$$Y(z) = X(z)\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = X(z)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

elde edilir. Yakınsama bölgesi, $X(z)$'nin yakınsama bölgesi ile $u[n]$'nin z-dönüşümünün yakınsama bölgesinin kesişimini kapsar. Dolayısıyla:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}X(z) = \frac{z}{z-1}X(z) \qquad R' \supset R \cap \{|z|>1\}$$

TERS z-DÖNÜŞÜMÜ

4.15. Aşağıdaki fonksiyonun ters z-dönüşümünü bulunuz.

$$X(z) = z^2(1 - \tfrac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1}) \qquad 0 < |z| < \infty \qquad (4.79)$$

(4.79)'un terimleri çarpılırsa, $X(z)$

$$X(z) = z^2 + \tfrac{1}{2}z - \tfrac{5}{2} + z^{-1}$$

biçimine dönüşür. (4.3) tanımı kullanılarak da

$$X(z) = x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1}$$

ve

$$x[n] = (\ldots, 0, 1, \tfrac{1}{2}, \underset{\uparrow}{-\tfrac{5}{2}}, 1, 0, \ldots)$$

elde edilir.

4.16. Güç serisine açma tekniğini kullanarak, aşağıdaki $X(z)$'nin ters z-dönüşümünü elde ediniz.

(a) $X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}, \ |z| > |a|$

(b) $X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}, \ |z| < |a|$

(a) Yakınsama bölgesi $|z| > |a|$, yani, bir çemberin dış bölgesi olduğundan, $x[n]$ sağ yanlı bir dizidir. Dolayısıyla, z^{-1}'in güçleri cinsinden bir dizi elde etmek için bölme yapmak zorundayız. Uzun bölme işlemi sonucu

$$\begin{array}{r|l} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots \\ \hline 1 - az^{-1} & z \\ & \underline{1 - az^{-1}} \\ & \quad az^{-1} \\ & \quad \underline{az^{-1} - a^2z^{-2}} \\ & \qquad a^2z^{-2} \\ & \qquad \vdots \end{array}$$

ve dolayısıyla

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots + a^kz^{-k} + \cdots$$

elde edilir. (4.3) tanımından dolayı

$$x[n] = 0 \qquad n < 0$$

$$x[0] = 1 \qquad x[1] = a \qquad x[2] = a^2 \qquad \cdots \qquad x[k] = a^k \qquad \cdots$$

olduğundan, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$x[n] = a^n u[n]$$

(b) Yakınsama bölgesi, $|z| < |a|$, yani bir çemberin iç bölgesi olduğundan, $x[n]$ sol yanlı bir dizidir. Dolayısıyla, z'nin güçleri cinsinden bir dizi elde etmek için bölme yapmak gereklidir. $X(z)$'nin hem payını hem de paydasını z ile çarparak

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

ve sonra da uzun bölme işlemi yapılarak

$$
\begin{array}{r|l}
 & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \cdots \\
\hline
-a + z & z \\
 & z - a^{-1}z^2 \\
\hline
 & a^{-1}z^2 \\
 & a^{-1}z^2 - a^{-2}z^3 \\
\hline
 & a^{-2}z^3 \\
 & \vdots
\end{array}
$$

elde edilir. Dolayısıyla, $X(z)$ şu biçimde ifade edilebilir:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \cdots - a^{-k}z^k - \cdots$$

(4.3) tanımı kullanılarak

$$x[n] = 0 \qquad n \geq 0$$

$$x[-1] = -a^{-1} \quad x[-2] = -a^{-2} \quad x[-3] = -a^{-3} \quad \cdots \quad x[-k] = -a^{-k} \quad \cdots$$

yazılır, ve aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

4.17. Aşağıdaki $X(z)$ fonksiyonlarının ters dönüşümlerini elde ediniz.

(*a*) $X(z) = \log\left(\dfrac{1}{1 - az^{-1}}\right), \ |z| > |a|$

(*b*) $X(z) = \log\left(\dfrac{1}{1 - a^{-1}z}\right), \ |z| < |a|$

(a) log (1–r) için güç serisi açılımı şu biçimdedir:

$$\log(1 - r) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n \qquad |r| < 1 \qquad (4.80)$$

$X(z)$'yi yeniden yazalım:

$$X(z) = \log\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right) = -\log(1 - az^{-1}) \qquad |z| > |a|$$

Yakınsama bölgesi $|z| > |a|$, yani $|az^{-1}| < 1$ olduğundan, (4.80) eşitliğinden, $X(z)$'nin seri açılımı şu biçimde olur:

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^n z^{-n}$$

Bu eşitlikten $x[n]$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$x[n] = \begin{cases} (1/n)a^n & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$$

veya

$$x[n] = \frac{1}{n} a^n u[n-1] \qquad (4.81)$$

(b)

$$X(z) = \log\left(\frac{1}{1 - a^{-1}z}\right) = -\log(1 - a^{-1}z) \qquad |z| < |a|$$

yakınsama bölgesi $|z| < |a|$, yani $|a^{-1}z| < 1$ olduğundan, (4.80) eşitliği gereği, $X(z)$ aşağıdaki güç serisi açılımına sahiptir:

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a^{-1}z)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{1}{n}(a^{-1}z)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{1}{n}a^n z^{-n}$$

Buradan, $x[n]$ aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -(1/n)a^n & n \leq -1 \end{cases}$$

veya

$$x[n] = -\frac{1}{n}a^n u[-n-1] \tag{4.82}$$

4.18. Güç serisine açma tekniğini kullanarak, aşağıdaki $X(z)$ fonksiyonları için ters z-dönüşümlerini bulunuz.

(a) $X(z) = \dfrac{z}{2z^2 - 3z + 1}$ $\qquad |z| < \dfrac{1}{2}$

(b) $X(z) = \dfrac{z}{2z^2 - 3z + 1}$ $\qquad |z| > 1$

(a) Yakınsama bölgesi $|z| < \frac{1}{2}$ olduğundan, $x[n]$ sol yanlı bir dizidir. Dolayısıyla, z'nin güçleri cinsinden bir seri elde etmek için, bölme işlemi gereklidir. Uzun bölme işlemi sonucu

$$\begin{array}{r|l}
 & z + 3z^2 + 7z^3 + 15z^4 + \cdots \\ \hline
1 - 3z + 2z^2 & z \\
 & z - 3z^2 + 2z^3 \\ \hline
 & 3z^2 - 2z^3 \\
 & 3z^2 - 9z^3 + 6z^4 \\ \hline
 & 7z^3 - 6z^4 \\
 & 7z^3 - 21z^4 + 14z^5 \\ \hline
 & 15z^4 \cdots
\end{array}$$

elde edilir, dolayısıyla $X(z)$ için

$$X(z) = \cdots + 15z^4 + 7z^3 + 3z^2 + z$$

yazılabilir ve (4.3) tanımından aşağıdaki sonuç bulunur.

$$x[n] = \{\ldots, 15, 7, 3, 1, 0\}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

(b) Yakınsama bölgesi $|z| > 1$ olduğundan $x[n]$ sağ yanlı bir dizidir. Dolayısıyla z cinsinden bir dizi elde etmek için, bölme işlemine gerek vardır:

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} + \frac{7}{8}z^{-3} + \cdots \\ \hline
2z^2 - 3z + 1 & z \\
 & z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} \\ \hline
 & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} \\
 & \frac{3}{2} - \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} \\ \hline
 & \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2} \\
 & \vdots
\end{array}$$

Dolayısıyla, $X(z)$ için

$$X(z) = \tfrac{1}{2}z^{-1} + \tfrac{3}{4}z^{-2} + \tfrac{7}{8}z^{-3} + \cdots$$

yazılabilir ve (4.3) tanımından $x[n]$ elde edilir.

$$x[n] = \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}, \ldots\}$$

4.19. Kısmi kesirlere açılım yöntemini kullanarak, Problem 4.18'i yeniden çözünüz.

(a)
$$X(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{z}{2(z-1)(z-\frac{1}{2})} \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

Kısmi kesirler açılımı ile

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} = \frac{1}{2(z-1)(z-\frac{1}{2})} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada, $c_1 = \left.\dfrac{1}{2(z-\frac{1}{2})}\right|_{z=1} = 1 \qquad c_2 = \left.\dfrac{1}{2(z-1)}\right|_{z=1/2} = -1$

olup, sonuçta

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

elde edilir. $X(z)$'nin yakınsama bölgesi $|z| < \frac{1}{2}$ olduğunda, $x[n]$ sol yanlı bir dizidir. Tablo 4-1'den

$$x[n] = -u[-n-1] + (\tfrac{1}{2})^n u[-n-1] = \left[(\tfrac{1}{2})^n - 1\right]u[-n-1]$$

yazılabilir. Buradan, $x[n]$ şu biçimde bulunur.

$$x[n] = \{\ldots, 15, 7, 3, 1, \underset{\uparrow}{0}\}$$

(b)
$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| > 1$$

$X(z)$'nin yakınsama bölgesi $|z| > 1$ olduğundan, $x[n]$ sağ yanlı bir dizidir. Tablo 4-1'den

$$x[n] = u[n] - (\tfrac{1}{2})^n u[n] = \left[1 - (\tfrac{1}{2})^n\right]u[n]$$

yazılabilir. Buradan, $x[n]$ şu biçimde bulunur.

$$x[n] = \{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}, \ldots\}$$

4.20. Aşağıda verilen $X(z)$'nin ters z-dönüşümünü bulunuz.

$$X(z) = \frac{z}{z(z-1)(z-2)^2} \qquad |z| > 2$$

Kısmi kesirler açılımından

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{\lambda_1}{z-2} + \frac{\lambda_2}{(z-2)^2} \qquad (4.83)$$

elde edilir. Burada,

$$c_1 = \left.\frac{1}{(z-2)^2}\right|_{z=1} = 1 \qquad \lambda_2 = \left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=2} = 1$$

olup, bu değerlerin (4.53) eşitliğinde yerine konulmasıyla

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{\lambda_1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}$$

elde edilir. Bu ifadede $z = 0$ yapılırsa

$$-\frac{1}{4} = -1 - \frac{\lambda_1}{2} + \frac{1}{4} \longrightarrow \lambda_1 = -1$$

bulunur. Dolayısıyla $X(z)$ şu biçimde ifade edilir.

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2} \qquad |z| > 2$$

Yakınsama bölgesi $|z| > 2$ olduğundan, $x[n]$ sağ yanlı bir dizidir. Tablo 4-1'den

$$x[n] = (1 - 2^n + n2^{n-1})u[n]$$

elde edilir.

4.21. Aşağıda verilen $X(z)$'nin ters z-dönüşümünü bulunuz.

$$X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{(z-1)(z-2)} \qquad |z| < 1$$

$$X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{(z-1)(z-2)} = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{z^2 - 3z + 2}$$

$X(z)$ normal bir rasyonel fonksiyon olmadığından, uzun bölme işlemiyle

$$X(z) = 2z + 1 + \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = 2z + 1 + \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

elde edilir. $$X_1(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

olsun. Bu durumda $$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z-2}$$

bulunur. Burada c_1, c_2 ve c_3 aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$c_1 = \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)}\right|_{z=0} = \frac{1}{2} \qquad c_2 = \left.\frac{1}{z(z-2)}\right|_{z=1} = -1$$

$$c_3 = \left.\frac{1}{z(z-1)}\right|_{z=2} = \frac{1}{2}$$

Dolayısıyla:

$$X_1(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-2}$$

ve $$X(z) = 2z + \frac{3}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-2} \qquad |z| < 1$$

$X(z)$'nin yakınsama bölgesi $|z| < 1$ olduğundan, $x[n]$ sol yanlı bir dizidir. Tablo 4-1'den aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$x[n] = 2\delta[n+1] + \tfrac{3}{2}\delta[n] + u[-n-1] - \tfrac{1}{2}2^n u[-n-1]$$

$$= 2\delta[n+1] + \tfrac{3}{2}\delta[n] + (1 - 2^{n-1})u[-n-1]$$

4.22. Aşağıda verilen $X(z)$'nin ters z-dönüşümünü bulunuz.

$$X(z)=\frac{3}{z-2}=3z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) \qquad |z|>2$$

$X(z)$ aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir:

$$2^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-2}$$

Yakınsama bölgesi $|z|>2$ olduğundan, $x[n]$ sağ yanlı bir dizidir. Tablo 4-1'den

$$2^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-2}$$

elde edilir. (4.18) zaman öteleme özelliği kullanılırsa

$$2^{n-1}u[n-1] \longleftrightarrow z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right)=\frac{1}{z-2}$$

bulunur. Buradan $x[n]$ elde edilebilir:

$$x[n]=3(2)^{n-1}u[n-1]$$

4.23. Aşağıda verilen $X(z)$ için ters z-dönüşümünü bulunuz.

$$X(z)=\frac{2+z^{-2}+3z^{-4}}{z^2+4z+3} \qquad |z|>0$$

$X(z)$, şu biçimde yeniden yazılabilir:

$$X(z)=(2z^{-1}+z^{-3}+3z^{-5})X_1(z)$$

Burada

$$X_1(z)=\frac{z}{z^2+4z+3}$$

olup,

$$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(z)$$

koşulunun sağlanması durumunda, (4.17) doğrusallık özelliği ve (4.18) zaman öteleme özellikleri kullanılarak $x[n]$ bulunabilir:

$$x[n]=2x_1[n-1]+x_1[n-3]+3x_1[n-5] \qquad (4.84)$$

Şimdi,

$$\frac{X_1(z)}{z}=\frac{1}{z^2+4z+3}=\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{c_1}{z+1}+\frac{c_2}{z+3}$$

olup, burada c_1, c_2 ve c_3 değerleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_1=\left.\frac{1}{z+3}\right|_{z=-1}=\frac{1}{2} \qquad c_2=\left.\frac{1}{z+1}\right|_{z=-3}=-\frac{1}{2}$$

Buna göre, $X_1(z)=\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{z}{z+3} \qquad |z|>0$

olur. $X_1(z)$'nin yakınsama bölgesi $|z|>0$ olduğundan, $x_1[n]$ sağ yanlı bir dizidir. Tablo 4-1 yardımıyla $x_1[n]$ bulunur.

$$x_1[n]=\tfrac{1}{2}\left[(-1)^n-(-3)^n\right]u[n]$$

(4.84) eşitliği yardımıyla da $x[n]$ elde edilir:

$$x[n]=\left[(-1)^{n-1}-(-3)^{n-1}\right]u[n-1]+\tfrac{1}{2}\left[(-1)^{n-3}-(-3)^{n-3}\right]u[n-3]$$
$$+\tfrac{3}{2}\left[(-1)^{n-5}-(-3)^{n-5}\right]u[n-5]$$

4.24. Aşağıda verilen $X(z)$'nin ters z-dönüşümünü bulunuz.

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z| > |a|$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})^2} = \frac{z^2}{(z-a)^2} \qquad |z| > |a| \tag{4.85}$$

(4.78) eşitliğinden (Problem 4.12),

$$na^{n-1}u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2} \qquad |z| > |a| \tag{4.86}$$

ve (4.85) eşitliğinden

$$X(z) = z\left[\frac{z}{(z-a)^2}\right] \qquad |z| > |a|$$

elde edilir. (4.20) zaman öteleme özelliğinin (4.86) eşitliğine uygulanmasıyla, $x[-1]=0$ olduğundan ($n = -1$)

$$x[n] = (n+1)a^n u[n+1] = (n+1)a^n u[n] \tag{4.87}$$

bulunur.

SİSTEM FONKSİYONLARI

4.25. z-dönüşümü yardımıyla Problem 2.28'i yeniden çözünüz.

Problem 2.28'de, $x[n]$ ve $h[n]$ şu biçimde verilmektedir.

$$x[n] = u[n] \qquad h[n] = a^n u[n] \qquad 0 < a < 1$$

Tablo 4-1'den:

$$x[n] = u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > |1|$$

$$h[n] = a^n u[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

(4.40) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \qquad |z| > 1$$

ve kısmi kesirler açılımı yardımıyla

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-a)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-a}$$

elde edilir. Burada, $c_1 = \left.\frac{z}{z-a}\right|_{z=1} = \frac{1}{1-a} \qquad c_2 = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=a} = -\frac{a}{1-a}$

olup, $Y(z)$ şu biçimde yazılabilir:

$$Y(z) = \frac{1}{1-a}\frac{z}{z-1} - \frac{a}{1-a}\frac{z}{z-a} \qquad |z| > 1$$

$Y(z)$'nin ters z-dönüşümü alınarak

$$y[n] = \frac{1}{1-\alpha}u[n] - \frac{\alpha}{1-\alpha}\alpha^n u[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right)u[n]$$

bulunur. Sonuç, (3.134) ile aynıdır.

4.26. z-dönüşümünü kullanarak Problem 2.29'u yeniden çözünüz.

(a) Problem 2.29 (a)'da $x[n]$ ve $h[n]$ şu biçimde verilmektedir.

$$x[n] = \alpha^n u[n] \qquad h[n] = \beta^n u[n]$$

Tablo 4-1'den:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| > |\alpha|$$

$$h[n] = \beta^n u[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{z}{z-\beta} \qquad |z| > |\beta|$$

Bu durumda

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)(z-\beta)} \qquad |z| > \max(\alpha, \beta)$$

yazılabilir. Kısmi kesirler açılımı yardımıyla

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{c_1}{z-\alpha} + \frac{c_2}{z-\beta}$$

bulunur. Burada,

$$c_1 = \left.\frac{z}{z-\beta}\right|_{z=\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \qquad c_2 = \left.\frac{z}{z-\alpha}\right|_{z=\beta} = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

olup,

$$Y(z) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\frac{z}{z-\alpha} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\frac{z}{z-\beta} \qquad |z| > \max(\alpha, \beta)$$

ve

$$y[n] = \left[\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n\right]u[n] = \left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)u[n]$$

sonucuna varılır. Bu da, (2.135) eşitliği ile aynıdır. $\alpha = \beta$ için

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)^2} \qquad |z| > \alpha$$

olur. Kısmi kesirler açılımı ile

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\lambda_1}{z-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(z-\alpha)^2}$$

elde edilir. λ_1 *ve* λ_2 için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\lambda_2 = z|_{z=\alpha} = \alpha$$

$$\frac{z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\lambda_1}{z-\alpha} + \frac{\alpha}{(z-\alpha)^2}$$

Yukarıdaki eşitlikte $z = 0$ alınırsa

$$0 = -\frac{\lambda_1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \rightarrow \lambda_1 = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$Y(z) = \frac{z}{z-\alpha} + \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2} \qquad |z| > \alpha$$

ve Tablo 4-1'den

$$y[n] = (\alpha^n + n\alpha^n)u[n] = \alpha^n(1+n)u[n]$$

bulunur. Bu, (2.135) eşitliğiyle aynıdır.

(b) Problem 2.29(b)'de $x[n]$ ve $h[n]$ şu biçimde verilmektedir.

$$x[n] = \alpha^n u[n] \qquad h[n] = \alpha^{-n}u[-n] \qquad 0 < \alpha < 1$$

Tablo 4-1'den ve (4.75) eşitliğinden

$$x[n] = \alpha^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| > |\alpha|$$

$$h[n] = \alpha^{-n}u[-n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{1}{1-\alpha z} = -\frac{1}{\alpha(z-1/\alpha)} \qquad |z| < \frac{1}{|\alpha|}$$

elde edilir. Buradan da

$$Y(z) = X(z)H(z) = -\frac{1}{\alpha}\frac{z}{(z-\alpha)(z-1/\alpha)} \qquad \alpha < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

yazılabilir. Kısmi kesirler açılımı yardımıyla

$$\frac{Y(z)}{z} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(z-\alpha)(z-1/\alpha)} = -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{c_1}{z-\alpha} + \frac{c_2}{z-1/\alpha}\right)$$

bulunur. Burada, c_1, ve c_2 katsayılarının değerleri aşağıdaki gibidir.

$$c_1 = \left.\frac{1}{z-1/\alpha}\right|_{z=\alpha} = -\frac{\alpha}{1-\alpha^2} \qquad c_2 = \left.\frac{1}{z-\alpha}\right|_{z=1/\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha^2}$$

Dolayısıyla,

$$Y(z) = \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{z}{z-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha^2}\frac{z}{z-1/\alpha} \qquad \alpha < |z| < \frac{1}{\alpha}$$

olup, Tablo 4-1'den

$$y[n] = \frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^n u[n] - \frac{1}{1-\alpha^2}\left\{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n u[-n-1]\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^n u[n] + \frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^{-n}u[-n-1] = \frac{1}{1-\alpha^2}\alpha^{|n|}$$

elde edilir. Bu da, (2.137) eşitliğiyle aynıdır.

4.27. z-dönüşümü yardımıyla Problem 2.30'u yeniden çözünüz.

Şekil (2.23) ve (4.3) tanımı yardımıyla

$$x[n] = \{1,1,1,1\} \longleftrightarrow X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}z^{-3}$$

$$h[n] = \{1,1,1\} \longleftrightarrow H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

yazılabilir. (4.26) konvolüsyon özelliği yardımıyla

$$Y(z)=X(z)H(z)=(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})(1+z^{-1}+z^{-2})$$
$$=1+2z^{-1}+3z^{-2}+3z^{-3}+2z^{-4}+z^{-5}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$h[n]=\{1,2,3,3,2,1\}$$

bulunur. Bu, Problem 2.30'un sonucuyla aynıdır.

4.28. z-dönüşümünü kullanarak Problem 2.32'yi yeniden çözünüz.

$x[n]$ ve $y[n]$, sistemin girişi ve çıkışı olsun. Bu durumda

$$x[n]=u[n] \quad \longleftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

$$y[n]=\alpha^n u[n] \longleftrightarrow Y(z)=\frac{z}{z-\alpha} \qquad |z|>|\alpha|$$

yazılabilir. (4.41) eşitliği kullanılarak

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z-1}{z-\alpha} \qquad |z|>\alpha$$

elde edilir. Kısmi kesirler açılımı yöntemiyle de

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z-1}{z(z-\alpha)}=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z-\alpha}$$

bulunur. Burada c_1 ve c_2 için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$c_1=\left.\frac{z-1}{z-\alpha}\right|_{z=0}=\frac{1}{\alpha} \qquad c_2=\left.\frac{z-1}{z}\right|_{z=\alpha}=\frac{\alpha-1}{\alpha}=-\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Dolayısıyla,

$$H(z)=\frac{1}{\alpha}-\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{z}{z-\alpha} \qquad |z|>\alpha$$

yazılabilir. $H(z)$'nin ters z-dönüşümü alınarak

$$h[n]=\frac{1}{\alpha}\delta[n]-\frac{1-\alpha}{\alpha}\alpha^n u[n]$$

elde edilir. n=0 için

$$h[0]=\frac{1}{\alpha}-\frac{1-\alpha}{\alpha}=1$$

olur. Dolayısıyla

$$h[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ -(1-\alpha)\alpha^{n-1} & n\geq 1\end{cases}$$

olup, $h[n]$ şu biçimde de yazılabilir.

$$h[n]=\delta[n]=\delta[n]-(1-\alpha)\alpha^{n-1}u[n-1]$$

Bu, Problem 2.32'nin sonucuyla aynıdır.

4.29. Ayrık zamanlı DZD bir sistemin girişi $x[n]=u[n]$ iken, çıkışı $y[n]=2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ olarak bulunmuştur.

(a) Sistemin $h[n]$ dürtü tepkisini bulunuz.

(b) Giriş $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ için $y[n]$ çıkışını bulunuz.

(a)

$$x[n]=u[n]\longleftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

$$y[n]=2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\longleftrightarrow Y(z)=\frac{2z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

olduğundan, sistem fonksiyonu $H(z)$ şu biçimde bulunur:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

Kısmi kesirler açılımı yardımıyla da

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{2(z-1)}{z\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z-\frac{1}{3}}$$

elde edilir. c_1 ve c_2'nin değerleri

$$c_1=\left.\frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}}\right|_{z=0}=6 \qquad c_2=\left.\frac{2(z-1)}{z}\right|_{z=1/3}=-4$$

olup,

$$H(z)=6-4\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

yazılabilir. $H(z)$'nin ters z-dönüşümü alınarak $h[n]$ bulunur:

$$h[n]=6\delta[n]-4\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(b)

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\longleftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

olduğundan $$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{2z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

yazılabilir. Yine kısmi kesirler açılımı yardımıyla

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{2(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\frac{c_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{c_2}{z-\frac{1}{3}}$$

bulunur. Burada, c_1 ve c_2'nin değerleri şu biçimdedir:

$$c_1=\left.\frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}}\right|_{z=1/2}=-6 \qquad c_2=\left.\frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{2}}\right|_{z=1/3}=8$$

Dolayısıyla,

$$Y(z)=-6\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+8\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

elde edilir. $Y(z)$'nin ters z-dönüşümü ile $y[n]$ bulunur.

$$y[n]=\left[-6\left(\tfrac{1}{2}\right)^n+8\left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

4.30. Ayrık zamanlı DZD bir sistemin SGSÇ kararlı olması durumunda, sistem fonksiyonu $H(z)$'nin yakınsama bölgesinin birim çemberi, yani $|z|=1$, kapsaması gerektiğini gösteriniz.

Ayrık zamanlı DZD bir sistem, ancak ve ancak, sistemin dürtü tepkisi $h[n]$ mutlak toplanabilir ise SGSÇ kararlıdır. Bu koşul [(2.49) eşitliği]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

biçiminde ifade edilir.

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

Eşitliğinde $z = e^{j\Omega}$ *yazalım*. ($|z| = |e^{j\Omega}| = 1$)

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \right|$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Görüldüğü gibi, sistem kararlı ise, $z = e^{j\Omega}$ için $H(z)$ yakınsaktır. Yani, kararlı DZD bir sistem için, $H(z)$'nin yakınsama bölgesi, $|z|=1$ birim çemberini kapsamak zorundadır.

4.31. z-dönüşümü yardımıyla Problem 2.38'i yeniden çözünüz.

(a) Problem 2.38'de sistemin dürtü tepkisi şu biçimde bulunmuştu:

Buna göre,

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

$$H(z) = \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| > |\alpha|$$

olur. $H(z)$'nin yakınsama bölgesi $|z|>|\alpha|$ olduğundan, $z=\infty$ da içerilmektedir. Dolayısıyla Problem 4.5'in sonucundan, $h[n]$'nin nedensel bir dizi olduğu anlaşılır. Bu da sistemin nedensel olduğunu gösterir.

(b) $|\alpha|>1$ ise, $H(z)$'nin yakınsama bölgesi birim çemberi ($|z|=1$) içermez. Dolayısıyla sistem kararlı olmayacaktır. $|\alpha|<1$ ise, $H(z)$'nin yakınsama bölgesi $|z|=1$ birim çemberini içerir ve dolayısıyla, sistem kararlı olacaktır.

4.32. Nedensel bir ayrık zamanlı DZD sistem şu biçimde tanımlanmaktadır:

$$y[n] - \tfrac{3}{4}y[n-1] + \tfrac{1}{8}y[n-2] = x[n] \qquad (4.88)$$

$x[n]$ ve $y[n]$ sistemin giriş ve çıkışını göstermektedir.

(a) Sistem fonksiyonunu ($H(z)$) bulunuz.

(b) Sistemin dürtü tepkisini ($h[n]$) bulunuz.

(c) Sistemin basamak tepkisini ($s[n]$) bulunuz.

(a) (4.88) eşitliğinin z-dönüşümü alınarak

$$Y(z) - \tfrac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \tfrac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

veya

$$(1 - \tfrac{3}{4}z^{-1} + \tfrac{1}{8}z^{-2})Y(z) = X(z)$$

elde edilir. Dolayısıyla:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}$$

$$=\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

(b) Kısmi kesirler açılımı yardımıyla,

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}=\frac{c_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{c_2}{z-\frac{1}{4}}$$

elde edilir. Burada $c_1=\left.\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right|_{z=1/2}=2\qquad c_2=\left.\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right|_{z=1/4}=-1$

olup,

$$H(z)=2\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

yazılabilir. $H(z)$'nin ters z-dönüşümü alınarak $h[n]$ bulunur.

$$h[n]=\left[2(\tfrac{1}{2})^n-(\tfrac{1}{4})^n\right]u[n]$$

(c)

$$x[n]=u[n]\longleftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}\qquad |z|>1$$

olduğundan, $Y(z)=X(z)H(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}\qquad |z|>1$

yazılabilir. Kısmi kesirler açılımı yardımıyla

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}=\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_2}{z-\frac{1}{2}}+\frac{c_3}{z-\frac{1}{4}}$$

elde edilir. c_1, c_2 ve c_3 katsayılarının değerleri aşağıdaki gibidir.

$$c_1=\left.\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}\right|_{z=1}=\frac{8}{3}\qquad c_2=\left.\frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{4})}\right|_{z=1/2}=-2$$

$$c_3=\left.\frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}\right|_{z=1/4}=\frac{1}{3}$$

Dolayısıyla:

$$Y(z)=\frac{8}{3}\frac{z}{z-1}-2\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\qquad |z|>1$$

$Y(z)$'nin ters z-dönüşümü alınarak $y[n]$ elde edilir.

$$y[n]=s[n]=\left[\tfrac{8}{3}-2(\tfrac{1}{2})^n+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^n\right]u[n]$$

4.33. z-dönüşümünü kullanarak, Problem 2.41'i yeniden çözünüz.

Problem 2.41'de olduğu gibi, Şekil 2-30'dan

$$q[n] = 2q[n-1] + x[n]$$
$$y[n] = q[n] + 3q[n-1]$$

yazılabilir. Bu eşitliklerin z-dönüşümü yapılarak

$$Q(z) = 2z^{-1}Q(z) + X(z)$$
$$Y(z) = Q(z) + 3z^{-1}Q(z)$$

bulunur. Bu eşitlikler yeniden düzenlenerek

$$(1-2z^{-1})Q(z) = X(z)$$
$$(1+3z^{-1})Q(z) = Y(z)$$

elde edilir. Buradan da

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+3z^{-1}}{1-2z^{-1}} \qquad (4.89)$$

bulunur. (4.89)'un yeniden düzenlenmesiyle

$$(1-2z^{-1})Y(z) = (1+3z^{-1})X(z)$$

veya

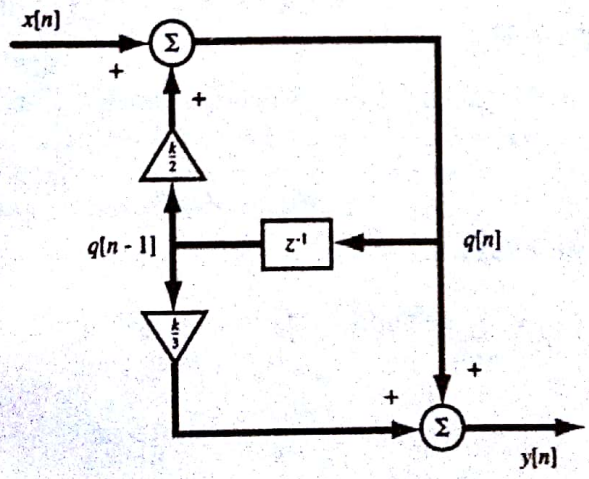
$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) = X(z) + 3z^{-1}X(z) \qquad (4.90)$$

elde edilir. (4.90)'ın ters z-dönüşümü alınarak ve (4.18) zaman öteleme özelliği kullanılarak

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1]$$

bulunur. Bu, (2.148) eşitliğiyle aynıdır.

4.34. Şekil 4-8'de görülen ayrık zamanlı sistem, hangi k değerleri için SGSÇ kararlıdır?



Şekil 4-8

Şekil 4-8'den

$$q[n] = x[n] + \frac{k}{2}q[n-1]$$

$$y[n] = q[n] + \frac{k}{3}q[n-1]$$

yazılabilir. Bu eşitliklerin z-dönüşümleri alınarak

$$Q(z) = X(z) + \frac{k}{2}z^{-1}Q(z)$$

$$Y(z) = Q(z) + \frac{k}{3}z^{-1}Q(z)$$

elde edilir. Yeniden düzenlemeyle

$$\left(1 - \frac{k}{2}z^{-1}\right)Q(z) = X(z)$$

$$\left(1 + \frac{k}{3}z^{-1}\right)Q(z) = Y(z)$$

yazılabilir. Bu eşitliklerden

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + (k/3)z^{-1}}{1 - (k/2)z^{-1}} = \frac{z + k/3}{z - k/2} \qquad |z| > \left|\frac{k}{2}\right|$$

bulunur. Bu eşitlikten, sistemin $z = -k/3$'de bir sıfırının ve $z = k/2$'de bir kutbunun olduğu, ve yakınsama bölgesinin $|z| > |k/2|$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Problem 4.30'da gösterildiği gibi, yakınsama bölgesinin $|z| = 1$ birim çemberini içermesi durumunda sistem SGSÇ kararlı olacaktır. Dolayısıyla sistem yalnızca $|k| < 2$ için kararlıdır.

TEK YANLI z-DÖNÜŞÜMÜ

4.35. Aşağıdaki $x[n]$ dizileri için tek yanlı z-dönüşümlerini bulunuz.

(*a*) $x[n] = a^n u[n]$

(*b*) $x[n] = a^{n+1}u[n+1]$

(a) $n<0$ için $x[n]=0$ olduğundan, $X_l(z) = X(z)$ olup, Örnek 4.1'den $X_l(z)$ bulunabilir.

$$X_l(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad |z| > |a| \tag{4.91}$$

(b) (4.99) tanımı yardımıyla

$$X_l(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}u[n+1]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}z^{-n} = a\sum_{n=0}^{\infty}\left(az^{-1}\right)^n$$

$$= a\frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{az}{z - a} \qquad |z| > |a| \tag{4.92}$$

bulunur. $X_l(z)$ ve $X(z)$ farklı olduklarından, $x[n]$ nedensel değildir. (bkz. Problem 4.73, Eşitlik (4.73).)

4.36. (4.50) ve (4.51) eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz. Yani $m \geq 0$ için;

(a) $x[n-m] \leftrightarrow z^{-m}X_I(z) + z^{-m+1}x[-1] + z^{-m+2}x[-2] + \cdots + x[-m]$

(b) $x[n+m] \leftrightarrow z^{m}X_I(z) - z^{m}x[0] - z^{m-1}x[1] - \cdots - zx[m-1]$

(a) (4.49) tanımından, $m \geq 0$ için ve $k = n-m$ değişken dönüşümü kullanılarak:

$$\mathfrak{Z}_I\{x[n-m]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m]z^{-n} = \sum_{k=-m}^{\infty} x[k]z^{-(m+k)}$$

$$= z^{-m}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} + \sum_{k=-1}^{-m} x[k]z^{-k}\right\}$$

$$= z^{-m}\{X_I(z) + x[-1]z + x[-2]z^2 + \cdots + x[-m]z^m\}$$

$$= z^{-m}X_I(z) + z^{-m+1}x[-1] + z^{-m+2}x[-2] + \cdots + x[-m]$$

(b) $m \geq 0$ için:

$$\mathfrak{Z}_I\{x[n+m]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+m]z^{-n} = \sum_{k=m}^{\infty} x[k]z^{-(k-m)}$$

$$= z^{m}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right\}$$

$$= z^{m}\{X_I(z) - (x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots + x[m-1]z^{-(m-1)})\}$$

$$= z^{m}X_I(z) - z^{m}x[0] - z^{m-1}x[1] - \cdots - zx[m-1]$$

4.37. Tek yanlı z-dönüşümünü kullanarak, Problem 2.42'yi yeniden çözünüz.

Sistem $y[-1]=y_{-1}$ ve $X[n]= Kb^n u[n]$ olmak üzere

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \qquad (4.93)$$

biçiminde tanımlanır.

$$y[n] \leftrightarrow Y_I(z)$$

olması durumunda, (4.50) eşitliğinden

$$y[n-1] \leftrightarrow z^{-1}Y_I(z) + y[-1] = z^{-1}Y_I(z) + y_{-1}$$

yazılabilir. Tablo 4-1'den

$$x[n] \leftrightarrow X_I(z) = K\frac{z}{z-b} \qquad |z| > |b|$$

elde edilir. (4.93) eşitliğinin tek yanlı z-dönüşümü alınarak

$$Y_I(z) - a\{z^{-1}Y_I(z) + y_{-1}\} = K\frac{z}{z-b}$$

veya

$$(1 - az^{-1})Y_I(z) = ay_{-1} + K\frac{z}{z-b}$$

veya

$$\left(\frac{z-a}{z}\right)Y_I(z) = ay_{-1} + K\frac{z}{z-b}$$

bulunur. Dolayısıyla:

$$Y_I(z) = ay_{-1}\frac{z}{z-a} + K\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

Kısmi kesirler açılımı kullanılarak

$$Y_I(z) = ay_{-1}\frac{z}{z-a} + \frac{K}{b-a}\left(b\frac{z}{z-b} - a\frac{z}{z-a}\right)$$

bulunur. $Y_I(z)$'nin ters z-dönüşümü alınarak

$$y[n] = ay_{-1}a^n u[n] + K\frac{b}{b-a}b^n u[n] - K\frac{a}{b-a}a^n u[n]$$

$$= \left(y_{-1}a^{n+1} + K\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}\right)u[n]$$

elde edilir. Bu da, (2.158) eşitliği ile aynı sonuçtur.

4.38. Aşağıdaki fark denklemlerinin, yanlarında verilen girişler ve başlangıç koşulları için $y[n]$ çıkışlarını bulunuz.

(*a*) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$; $x[n] = (\frac{1}{3})^n$, $y[-1] = 1$

(*b*) $3y[n] - 4y[n-1] + y[n-2] = x[n]$; $x[n] = (\frac{1}{2})^n$, $y[-1] = 1$, $y[-2] = 2$

(*a*)
$$x[n] \longleftrightarrow X_I(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z| > \left|\frac{1}{3}\right|$$

Verilen denklemin tek yanlı z-dönüşümü alınarak

$$Y_I(z) - \tfrac{1}{2}\{z^{-1}Y_I(z) + y[-1]\} = X_I(z)$$

elde edilir. $y[-1] = 1$ ve $X_I(z)$'nin yerlerine konulmasıyla

$$\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)Y_I(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

veya
$$\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{z}\right)Y_I(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$Y_I(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} = \frac{7}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - 2\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

ve:

$$y[n] = 7(\tfrac{1}{2})^{n+1} - 2(\tfrac{1}{3})^n \qquad n \geq -1$$

(*b*)
$$x[n] \longleftrightarrow X_I(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z| > \left|\frac{1}{2}\right|$$

Verilen fark denkleminin tek yanlı z-dönüşümü alınarak

$$3Y_I(z) - 4\{z^{-1}Y_I(z) + y[-1]\} + \{z^{-2}Y_I(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\} = X_I(z)$$

elde edilir. $y[-1] = 1$, $y[-2] = 2$ ve $X_1(z)$'nin yerlerine konulmasıyla,

$$(3 - 4z^{-1} + z^{-2})Y_1(z) = 2 - z^{-1} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

veya

$$\frac{3(z-1)(z-\frac{1}{3})}{z^2} Y_1(z) = \frac{3z^2 - 2z + \frac{1}{2}}{z(z - \frac{1}{2})}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$Y_1(z) = \frac{z(3z^2 - 2z + \frac{1}{2})}{3(z-1)(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

ve

$$y[n] = \tfrac{3}{2} - (\tfrac{1}{2})^n + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3})^n \qquad n \geq -2$$

bulunur.

4.39. $x[n]$ nedensel bir dizi ve

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

olsun. Bu durumda

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) \tag{4.94}$$

olduğunu gösteriniz. (4.94) eşitliği, z-dönüşümü için ilk değer teoremi olarak adlandırılır. $n>0$ için $x[n]=0$ olduğundan:

$$X[z] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

$n>0$ için z sonsuza yaklaştıkça z^{-n} de sonsuza yaklaştığından:

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = x[0]$$

4.40. $x[n]$ nedensel bir dizi ve

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

olsun. $X(z)$'nin, belki $z = 1$'deki birinci mertebeden bir kutup dışında, bütün kutupları birim çember içinde olan rasyonel bir fonksiyon olması durumunda,

$$\lim_{N \to \infty} x[N] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})X(z) \tag{4.95}$$

olduğunu gösteriniz. (4.95) eşitliği, z-dönüşümü için son değer teoremi olarak bilinir.

(4.19) ile verilen zaman öteleme özelliği kullanılarak

$$\mathfrak{Z}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - z^{-1})X(z) \tag{4.96}$$

elde edilir. (4.96) eşitliğinin sol yanının yeniden yazılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{x[n] - x[n-1]\}z^{-n} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \{x[n] - x[n-1]\}z^{-n}$$

bulunur. $z \to 1$ durumunda, (4.96) eşitliğinden

$$\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) X(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \{x[n] - x[n-1]\} = \lim_{N \to \infty} x[N]$$

elde edilir.

Ek Problemler

4.41. Aşağıdaki $x[n]$ dizilerinin z-dönüşümlerini bulunuz:

(*a*) $x[n] = \{\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3}\}$
(*b*) $x[n] = 2\delta[n+2] - 3\delta[n-2]$
(*c*) $x[n] = 3(-\frac{1}{2})^n u[n] - 2(3)^n u[-n-1]$
(*d*) $x[n] = 3(\frac{1}{2})^n u[n] - 2(\frac{1}{4})^n u[-n-1]$

Yanıt: (*a*) $X(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}, 0 < |z|$

(*b*) $X(z) = 2z^3 - 3z^{-3}, 0 < |z| < \infty$

(*c*) $X(z) = \dfrac{z(5z-8)}{(z+\frac{1}{2})(z-3)}, \dfrac{1}{2} < |z| < 3$

(*d*) $X(z)$ çözümü yoktur.

4.42. $x[n]$'nin sol yanlı bir dizi olması ve $X[z]$'nin belli bir z değeri için yakınsaması durumunda $X(z)$'nin yakınsama bölgesinin, r_{min} $X(z)$'nin kutuplarının en küçük genliği olmak üzere

$$|z| < r_{min} \quad \text{veya} \quad 0 < |z| < r_{min}$$

biçiminde ifade edildiğini gösteriniz.

İpucu: Problem 4.5'dekine benzer bir yol izleyiniz.

4.43.

$$X(z) = \frac{z(z-4)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

(*a*) $X(z)$ için bütün olası yakınsama bölgelerini belirleyiniz.

(*b*) $X(z)$, hangi yakınsama bölgesi için nedensel bir dizinin z-dönüşümüdür?

Yanıt: (*a*) $0 < |z| < 1, 1 < |z| < 2, 2 < |z| < 3, |z| > 3$

(*b*) $|z| > 3$

4.44. (4.23) ile verilen ve aşağıda tekrar yazılan zamanda geri dönüş özelliğini gösteriniz.

$$x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad R' = \frac{1}{R}$$

İpucu: (4.3) tanımında n yerine $-n$ yazınız.

4.45. Aşağıda verilen z-dönüşümü özelliklerini gösteriniz.

(a) $x[n]$ çift ise, $X(z^{-1}) = X(z)$.

(b) $x[n]$ tek ise, $X(z^{-1}) = -X(z)$.

(c) $x[n]$ tek ise, $X(z)$'nin, $z = 1$'de bir sıfırı vardır.

İpucu:(a) (1.2) ve (4.23) eşitliklerini kullanınız.

(b) (1.3) ve (4.23) eşitliklerini kullanınız.

(c) bölümünün sonuçlarını kullanınız.

4.46. Aşağıda verilen sürekli zamanlı sinyali gözönüne alınız:

$$x(t) = e^{-at} \qquad t \geq 0$$

$x[n]$, $x[n] = x(nT_s)$ olacak biçimde, T_s örnekleme aralığıyla $x(t)$'nin örneklenmesiyle elde edilen dizi olsun. $x[n]$'nin z-dönüşümünü bulunuz.

Yanıt: $X(z) = \dfrac{1}{1 - e^{-aT_s}z^{-1}}$

4.47. Aşağıdaki dönüşüm çiftlerini elde ediniz.

$$(\cos \Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{z^2 - (\cos \Omega_0)z}{z^2 - (2\cos \Omega_0)z + 1} \qquad |z| > 1$$

$$(\sin \Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{(\sin \Omega_0)z}{z^2 - (2\cos \Omega_0)z + 1} \qquad |z| > 1$$

İpucu:

$$\cos \Omega_0 n = \frac{1}{2}\left(e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n}\right) \qquad \sin \Omega_0 n = \frac{1}{2j}\left(e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}\right)$$

Euler bağıntılarını ve (4.8) ile (4.10) eşitliklerini, $a = e^{\pm j\Omega_0}$ alarak kullanınız.

4.48. Aşağıdaki $x[n]$ dizilerinin z-dönüşümlerini elde ediniz.

(a) $x[n] = (n-3)u[n-3]$

(b) $x[n] = (n-3)u[n]$

(c) $x[n] = u[n] - u[n-3]$

(d) $x[n] = n\{u[n] - u[n-3]\}$

Yanıt: *(a)* $\dfrac{z^{-2}}{(z-1)^2}, |z| > 1$

(b) $\dfrac{-3z^2 + 4z}{(z-1)^2}, |z| > 1$

(c) $\dfrac{z - z^{-2}}{z - 1}, |z| > 1$

(d) $\dfrac{z - 4z^{-2} + 3z^{-3}}{(z-1)^2}, |z| > 1$

4.49.

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

bağıntısını kullanarak, aşağıdaki $x[n]$ dizilerinin z-dönüşümlerini bulunuz:

(*a*) $x[n]=na^{n-1}u[n]$

(*b*) $x[n]=n(n-1)a^{n-2}u[n]$

(*c*) $x[n]=n(n-1)\cdots(n-k+1)a^{n-k}u[n]$

İpucu: Verilen bağıntının her iki yanının a'ya göre türevlerini alınız.

Yanıt: (*a*) $\dfrac{z}{(z-a)^2}$, $|z|>|a|$

(*b*) $\dfrac{2z}{(z-a)^3}$, $|z|>|a|$

(*c*) $\dfrac{k!z}{(z-a)^{k+1}}$, $|z|>|a|$

4.50. z-dönüşümü yardımıyla Problem 2.27'deki (2.130) ve (2.131) eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz. Eşitlikler aşağıda yeniden verilmektedir.

(*a*) $x[n]*\delta[n]=x[n]$

(*b*) $x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

İpucu: z-dönüşümü ile ilgili (4.26) eşitliğini ve Tablo 4-1'deki 1 ve 4 çiftlerini kullanınız

4.51. z-dönüşümü yardımıyla, Problem 2.47'yi yeniden çözünüz.

İpucu: (4.26) eşitliğini ve Tablo 4-1'i kullanınız.

4.52. Aşağıda verilen $X(z)$'nin ters z-dönüşümünü bulunuz.

$$X(z)=e^{a/z} \qquad |z|>0$$

İpucu: e^x üstel fonksiyonunun güç serisi açılımını kullanınız.

Yanıt: $x[n]=\dfrac{a^n}{n!}u[n]$

4.53. Aşağıda verilen $X(z)$ fonksiyonlarının ters z-dönüşümlerini, uzun bölme yöntemiyle bulunuz.

(*a*) $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$, $|z|<1$

(*b*) $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$, $1<|z|<2$

(*c*) $X(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$, $|z|>2$

Yanıt: (*a*) $x[n]=\{\ldots,\frac{7}{8},\frac{3}{4},\frac{1}{2},\underset{\uparrow}{0}\}$

(*b*) $x[n]=\{\ldots,-\frac{1}{8},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\underset{\uparrow}{-1},-1,-1,\ldots\}$

(*c*) $x[n]=\{0,1,3,7,15,\ldots\}$

4.54. Kısmi kesirlere açılım yöntemini kullanarak, Problem 4.53'ü yeniden çözünüz.

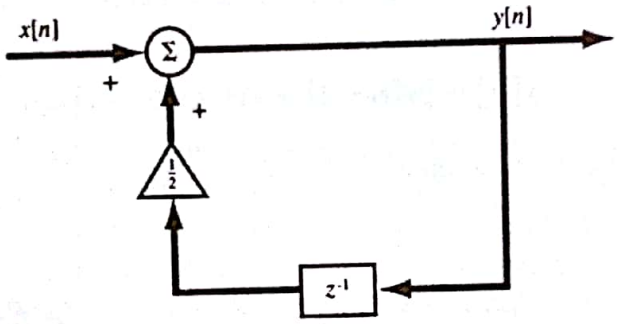
Yanıt: (*a*) $x[n] = (1 - 2^n)u[-n-1]$

(*b*) $x[n] = -u[n] - 2^n u[-n-1]$

(*c*) $x[n] = (-1 + 2^n)u[n]$

4.55. Şekil 4-9'da gösterilen sistemi gözönüne alınız. Sistem fonksiyonunu ve dürtü tepkisini bulunuz.

Yanıt: $H(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$, $h[n] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u[n]$



Şekil 4-9

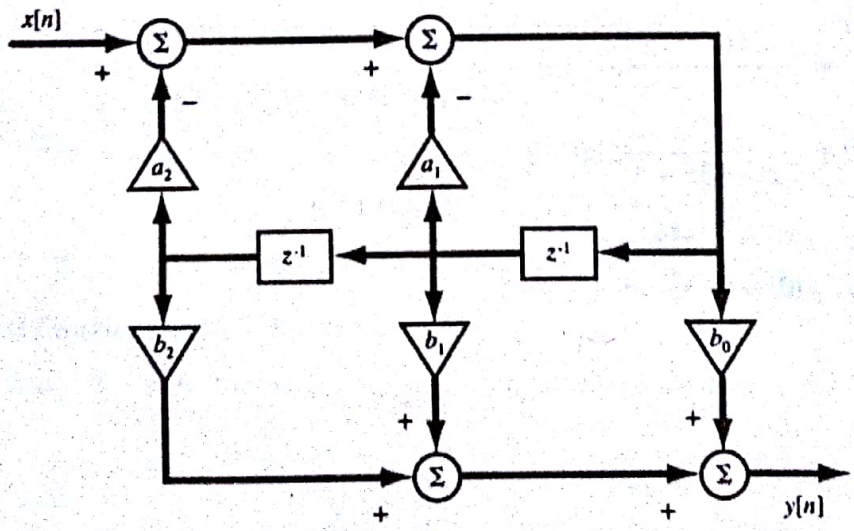
4.56. Şekil 4-10'da gösterilen sistemi gözönüne alınız.

(*a*) $H(z)$ sistem fonksiyonunu bulunuz.

(*b*) $y[n]$ çıkışı ile $x[n]$ girişi arasındaki ilişkiyi gösteren fark denklemini elde ediniz.

Yanıt: (*a*) $H(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$

(*b*) $y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$



Şekil 4-10

4.57. Aşağıda verilen sistem fonksiyonuna sahip ayrık zamanlı DZD sistemi gözönüne alınız.

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

(a) $s[n]$ basamak tepkisini bulunuz.

(b) $x[n] = u[n]$ girişi için çıkışı elde ediniz.

Yanıt: (*a*) $s[n] = [2 - (\frac{1}{2})^n]u[n]$

(*b*) $y[n] = 2[(\frac{1}{2})^n + n - 1]u[n]$

4.58. Girişi ile çıkışı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanan nedensel bir ayrık zamanlı sistemi gözönüne alınız:

$$y[n] - \tfrac{5}{6}y[n-1] + \tfrac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

(a) Sistem fonksiyonunu bulunuz.

(b) Dürtü tepkisini bulunuz.

Yanıt: (*a*) $H(z) = \dfrac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}, \ |z| > \dfrac{1}{2}$

(*b*) $h[n] = [3(\frac{1}{2})^n - 2(\frac{1}{3})^n]u[n]$

4.59. Tek yanlı z-dönüşümünü kullanarak, aşağıdaki fark denklemlerini, verilen başlangıç koşulları için çözünüz.

(*a*) $y[n] - 3y[n-1] = x[n]$, with $x[n] = 4u[n]$, $y[-1] = 1$

(*b*) $y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$, with $x[n] = u[n]$, $y[-1] = 3$, $y[-2] = 2$

Yanıt: (*a*) $y[n] = -2 + 9(3)^n, \ n \geq -1$

(*b*) $y[n] = \frac{1}{2} + 8(2)^n - \frac{9}{2}(3)^n, \ n \geq -2$

4.60. Aşağıdaki $X(z)$ fonksiyonları için, $x[n]$'nin başlangıç ve son değerlerini bulunuz.

(*a*) $X(z) = \dfrac{2z(z - \frac{5}{12})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}, \ |z| > \dfrac{1}{2}$

(*b*) $X(z) = \dfrac{z}{2z^2 - 3z + 1}, \ |z| > 1$

Yanıt: (*a*) $x[0] = 2, \ x[\infty] = 0$

(*b*) $x[0] = 0, \ x[\infty] = 1$

5. Bölüm

Sürekli Zamanlı Sinyallerin ve Sistemlerin Fourier Çözümlemesi

5.1 GİRİŞ

Önceki bölümlerde, zaman bölgesi sinyallerini, çözümlemenin ve işlem yapmanın pek çok açıdan daha elverişli olduğu karmaşık s bölgesi ve z bölgesi gösterimlerine çeviren Laplace dönüşümünü ve z dönüşümünü görmüştük. Ayrıca, bu dönüşümler bir çok sinyalin ve sistemin niteliğinin ve özelliklerinin daha iyi kavranmasını sağlar. Bu bölümde ve gelecek bölümde, zaman bölgesi sinyallerini frekans bölgesi (veya spektral) gösterimlerine çeviren Fourier serilerini ve Fourier dönüşümünü göreceğiz. Sinyallerin spektral gösterimlerini sağlamasının yanı sıra, Fourier çözümlemesi frekans bölgesinde belli sistemlerin ve özelliklerinin betimlenmesinde de esastır. Bu bölümde Fourier çözümlemesinin sürekli zamanlı sinyallere ve sistemlere uygulanmasını göreceğiz.

5.2 PERİYODİK SİNYALLERİN FOURIER SERİSİ GÖSTERİMİ

A. Periyodik Sinyaller:

Bölüm 1'de, pozitif, sıfırdan farklı bir T değeri için

$$x(t+T)=x(t) \qquad \text{her } t \text{ için} \tag{5.1}$$

koşulunu sağlayan bir sürekli zamanlı sinyal $x(t)$'yi periyodik olarak tanımlamıştık. $x(t)$ nin temel periyodu T_0, T'nin Eşitlik (5.1)'i sağlayan en küçük pozitif değeridir, ve $1/T_0=f_0$ temel frekans olarak adlandırılır.

Periyodik sinyallere iki basit örnek gerçel sinüzoidal sinyal

$$x(t)=\cos(\omega_0 t+\phi) \tag{5.2}$$

ve karmaşık üstel sinyaldir.

$$x(t)=e^{j\omega_0 t} \tag{5.3}$$

Burada $\omega_0=2\pi/T_0=f_0$ temel açısal frekans olarak adlandırılır.

B. Karmaşık Üstel Fourier Serisi Gösterimi:

Temel periyodu T_0 olan bir $x(t)$ periyodik sinyalinin karmaşık üstel Fourier serisi gösterimi

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0} \tag{5.4}$$

ile verilir.

Burada c_k karmaşık Fourier katsayısı olarak bilinir ve

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \tag{5.5}$$

eşitliğiyle verilir. $\int_{T_0}$ herhangi bir periyot boyunca olan entegrali belirtir ve genellikle entegral için 0'dan T_0'a veya $-T_0/2$'den $T_0/2$'ye kadar olan periyot kullanılır. Eşitlik (5.5)'te $k = 0$ aldığımızda

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, dt \tag{5.6}$$

elde ederiz. Bu, c_0 katsayısının $x(t)$'nin bir periyodu boyunca ortalama değerine eşit olduğunu gösterir.

$x(t)$ gerçelse Eşitlik (5.5)'ten

$$c_{-k} = c_k^* \tag{5.7}$$

olduğu görülür. Burada yıldız işareti karmaşık eşleniği göstermektedir.

C. Trigonometrik Fourier Serisi:

Temel periyodu T_0 olan bir sinyalin trigonometrik Fourier serisi gösterimi

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.8}$$

ile verilir. Burada a_k ve b_k

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t\, dt \tag{5.9a}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t) \sin k\omega_0 t\, dt \tag{5.9b}$$

ile verilen Fourier katsayılarıdır. a_k ve b_k katsayıları ile c_k karmaşık Fourier katsayıları birbirlerine

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \qquad a_k = c_k + c_{-k} \qquad b_k = j(c_k - c_{-k}) \tag{5.10}$$

eşitlikleri ile bağlıdırlar (Problem 5.3). Eşitlik (5.10)'dan

$$c_k = \tfrac{1}{2}(a_k - jb_k) \qquad c_{-k} = \tfrac{1}{2}(a_k + jb_k) \tag{5.11}$$

elde edilir. $x(t)$ gerçelse, a_k ve b_k katsayıları gerçeldir ve Eşitlik (5.10)'dan

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}[c_k] \qquad b_k = -2\,\mathrm{Im}[c_k] \tag{5.12}$$

olduğu görülür.

Çift ve Tek Sinyaller:

Periyodik bir $x(t)$ sinyali çiftse, bu durumda $b_k = 0$ olur ve (5.8) ile verilen Fourier serisi yalnızca kosinüslü terimleri içerir:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.13}$$

Eğer $x(t)$ tekse, bu durumda $a_k = 0$ olur ve Fourier serisi yalnızca sinüslü terimleri içerir.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.14}$$

D. Fourier Serisinin Harmonik Biçimi:

Temel periyodu T_0 olan periyodik gerçel bir $x(t)$ sinyalinin bir diğer Fourier serisi gösterimi

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.15}$$

ile verilir Eşitlik (5.15), Eşitlik (5.8)'den türetilebilir ve $x(t)$'nin harmonik Fourier serisi olarak bilinir. C_0 terimi *dc* bileşendir, ve $C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)$ terimi $x(t)$'nin k. harmonik bileşeni olarak adlandırılır. Birinci harmonik bileşen $C_1 \cos(\omega_0 t - \theta_1)$, $x(t)$ ile aynı temel periyoda sahip olduğundan genellikle temel bileşen olarak adlandırılır. C_k katsayıları ve θ_k açıları, sırasıyla, harmonik genlikler ve faz açılarıdır, ve a_k ve b_k Fourier katsayılarına

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \qquad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \theta_k = \tan^{-1}\frac{b_k}{a_k} \tag{5.16}$$

eşitlikleriyle bağlıdırlar.

Periyodik gerçel bir $x(t)$ sinyali için Eşitlik (5.4)'te karmaşık üsteller cinsinden verilen Fourier serisi Eşitlik (5.8) ve (5.15)'te verilen her iki biçime matematiksel olarak denktir. Son ikisi Fourier serilerinin yaygın biçimleri olmakla birlikte, Eşitlik (5.4)'teki karmaşık biçim daha genel ve genellikle daha kullanışlıdır, ve biz hemen hemen yalnızca bu biçimi kullanacağız.

E. Fourier Serilerinin Yakınsaklığı:

Aşağıda verilen Dirichlet koşullarını sağlayan periyodik bir $x(t)$ sinyali bir Fourier serisi ile gösterilebilir:

1. $x(t)$ herhangi bir periyot boyunca mutlak entegrallenebilirdir, yani

$$\int_{T_0} |x(t)|\, dt < \infty \tag{5.17}$$

2. $x(t)$'nin sonlu bir t aralığında sonlu sayıda maksimumu ve minimumu vardır.
3. $x(t)$'nin sonlu bir t aralığında sonlu sayıda süreksizliği vardır, ve bu süreksizliklerinin her biri sonludur.

Dirichlet koşullarının Fourier serisi gösterimi için yeterli olduğuna, fakat zorunlu olmadığına dikkat edin (Problem 5.8).

F. Periyodik Bir Sinyalin Genlik ve Faz Spektrumu:

Eşitlik (5.4)'teki c_k karmaşık Fourier katsayıları

$$c_k = |c_k|\, e^{j\phi_k} \tag{5.18}$$

ile verilsin

Açısal frekans ω'ya karşı $|c_k|$'nın grafiğine $x(t)$ periyodik sinyalinin genlik spektrumu ve ϕ_k'nın ωya karşı grafiğine faz spektrumu denir. k indisi yalnızca tamsayı değerler aldığından, genlik ve faz spektrumları sürekli eğriler olmayıp yalnızca $k\omega_0$ ayrık frekanslarında ortaya çıkarlar. Dolayısıyla bunlara ayrık frekans spektrumları veya çizgi spektrumları denir.

Gerçel periyodik bir $x(t)$ sinyali için $c_{-k} = c_k^*$ olur. Böylece

$$|c_{-k}| = |c_k| \qquad \phi_{-k} = -\phi_k \tag{5.19}$$

elde edilir. Dolayısıyla gerçel periyodik bir sinyal için genlik spektrumu ω'nın çift fonksiyonu, ve faz spektrumu ω'nın tek fonksiyonudur.

G. Periyodik Bir Sinyalin Gücü:

1. Bölümde (Problem 1.18) periyodik bir $x(t)$ sinyalinin herhangi bir periyot boyunca ortalama gücünü

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt \tag{5.20}$$

olarak tanımlamıştık. Eşitlik (5.4)'teki karmaşık üstel Fourier serisi ile gösterilebilen $x(t)$ sinyali için

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \tag{5.21}$$

olduğu gösterilebilir (Problem 5.14). Eşitlik (5.21)'e Fourier serisi için Parseval özdeşliği (veya Parseval teoremi) denir.

5.3 FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

A. Fourier Serisinden Fourier Dönüşümüne:

$x(t)$ sonlu süreli periyodik olmayan bir sinyal olsun, yani

$$x(t) = 0 \qquad |t| > T_1$$

koşulunu sağlasın. Böylesi bir sinyal Şekil 5-1(a)'da görülmektedir. $x_{T_0}(t)$, Şekil 5-1(b)'de görüldüğü gibi $x(t)$'yi T_0 temel periyodunda tekrarlayarak oluşturulan periyodik bir sinyal olsun. Eğer $T_0 \to \infty$ yapılırsa

$$\lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = x(t) \tag{5.22}$$

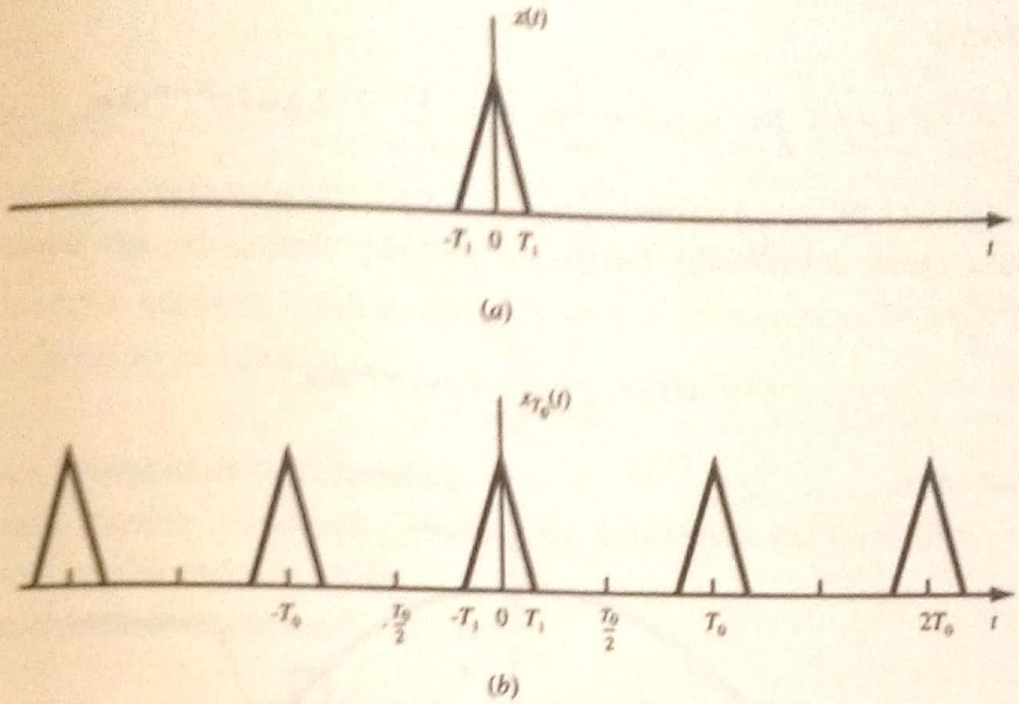
elde edilir. $x_{T_0}(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisi

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.23}$$

ile verilir. Burada

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \tag{5.24a}$$

olmaktadır. $|t| < T_0/2$ için $x_{T_0}(t) = x(t)$ olduğundan ve bu aralığın dışında $x(t) = 0$ olduğundan Eşitlik (5.24a)



Şekil 5-1 (*a*) Periyodik olmayan sinyal $x(t)$; (*b*) $x(t)$'nin periyodik olarak tekrarlanmasıyla oluşturulan periyodik sinyal.

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \qquad (5.24b)$$

biçiminde yazılabilir.

$X(\omega)$'yı

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (5.25)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda Eşitlik (5.24b)'den karmaşık Fourier katsayıları c_k

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) \qquad (5.26)$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (5.26), Eşitlik (5.23)'te yerine konulursa

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

veya

$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \qquad (5.27)$$

elde edilir. $T_0 \to \infty$ için, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ sonsuz küçük olur ($\omega_0 \to 0$). Böylece $\omega_0 = \Delta\omega$ olsun. Bu durumda Eşitlik (5.27)

$$x_{T_0}(t)|_{T_0\to\infty} \to \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\,\Delta\omega)\, e^{jk\,\Delta\omega t}\,\Delta\omega \qquad (5.28)$$

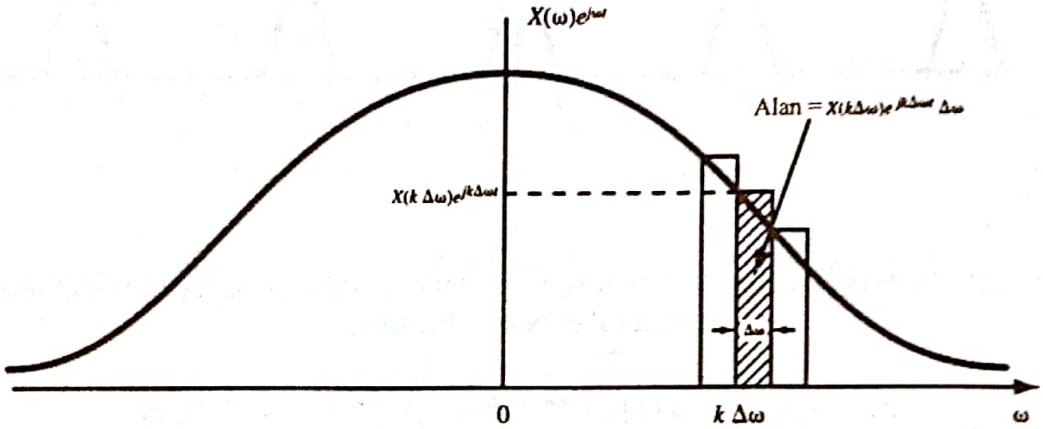
olur. Dolayısıyla

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\,\Delta\omega)\, e^{jk\,\Delta\omega t}\, \Delta\omega \qquad (5.29)$$

elde edilir. Eşitlik (5.29)'un sağ tarafındaki toplam, Şekil 5-2'de görüldüğü gibi $X(\omega)e^{j\omega t}$ işlevinin altındaki alan olarak düşünülebilir. Dolayısıyla periyodik olmayan bir $x(t)$ sinyalinin Fourier gösterimi olan

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (5.30)$$

eşitliğini elde ederiz.



Şekil 5-2 Eşitlik (5.29)'un grafiksel yorumu

B. Fourier Dönüşüm Çifti:

Eşitlik (5.25)'te tanımlanan $X(\omega)$ işlevi $x(t)$'nin Fourier dönüşümü olarak adlandırılır ve Eşitlik (5.30) ters Fourier dönüşümü $X(\omega)$ 'yı tanımlar. Bu dönüşümler simgesel olarak

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (5.31)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (5.32)$$

eşitlikleriyle gösterilirler. $x(t)$ ve $X(\omega)$ 'nın

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \qquad (5.33)$$

ile belirtilen bir Fourier dönüşüm çifti oluşturdukları söylenir.

C. Fourier Spektrumları:

$x(t)$'nin Fourier dönüşümü $X(\omega)$ genelde karmaşıktır ve

$$X(\omega) = |X(\omega)|\, e^{j\phi(\omega)} \qquad (5.34)$$

biçiminde yazılabilir. Periyodik bir $x(t)$ sinyalinin karmaşık Fourier katsayıları için kullanılan terminolojiye benzer olarak, periyodik olmayan bir $x(t)$ sinyalinin $X(\omega)$ Fourier dönüşümü $x(t)$'nin frekansı bölgesi gösterimidir ve $x(t)$'nin spektrumu (ya da Fourier spektrumu) olarak adlandırılır. $|X(\omega)|$, $x(t)$'nin genlik spektrumu ve $\phi(\omega)$, $x(t)$'nin faz spektrumudur.

Eğer $x(t)$ gerçel bir sinyalse Eşitlik (5.31)'den

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt \qquad (5.35)$$

elde ederiz. Buradan

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \qquad (5.36a)$$

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \qquad \phi(-\omega) = -\phi(\omega) \qquad (5.36b)$$

bulunur. Dolayısıyla, periyodik sinyaller için olduğu gibi, genlik spektrumu $|X(\omega)|$ ω'nın bir çift işlevi ve $\phi(\omega)$ ω'nın bir tek işlevidir.

D. Fourier Dönüşümlerinin Yakınsaklığı:

Periyodik sinyaller için olduğu gibi, $X(\omega)$ 'nın yakınsaması için (yine Dirichlet koşulları denilen) yeterli koşullar aşağıdaki gibidir:

1. $x(t)$ mutlak olarak entegrallenebilirdir, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty \qquad (5.37)$$

eşitsizliği sağlanır.

2. $x(t)$'nin sonlu bir aralıktaki maksimum ve minimumları sonlu sayıdadır.
3. $x(t)$'nin sonlu bir aralıktaki süreksizlikleri sonlu sayıdadır, ve bu süreksizliklerin her biri sonludur.

Yukarıdaki Dirichlet koşulları bir sinyal için Fourier dönüşümünün varlığını garantilemekle birlikte, dönüşümde dürtü işlevlerinin kullanılmasına izin verilirse bu koşulları sağlamayan sinyallerin de Fourier dönüşümleri alınabilir (Problem 5.23).

E. Fourier Dönüşümü ile Laplace Dönüşümü Arasındaki İlişki:

Eşitlik (5.31), $x(t)$'nin Fourier dönüşümünü

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad (5.38)$$

olarak tanımlar. $x(t)$'nin çift yanlı Laplace dönüşümü Eşitlik (4.3)'te tanımlanmıştır ve

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (5.39)$$

ile verilir. Eşitlik (5.38) ve Eşitlik (5.39)'u karşılaştırdığımızda, Fourier dönüşümünün, Laplace dönüşümünün $s = j\omega$ yani

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\} \qquad (5.40)$$

olduğu özel bir durumu olduğunu görürüz. Eşitlik (5.39)'da $s = \sigma + j\omega$ alınırsa

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\, e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t}\, dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\, e^{-\sigma t}\} \qquad (5.41)$$

elde edilir. Bu $x(t)$'nin çift yanlı Laplace dönüşümünün $x(t)\ e^{-\sigma(t)}$ nin Fourier dönüşümü olarak yorumlanabileceğini gösterir.

Laplace dönüşümü, Fourier dönüşümünün frekansın $j\omega$ yerine $s = \sigma + j\omega$ olarak alındığı bir genelleştirmesi olarak düşünülebileceğinden, karmaşık s değişkeni sık sık karmaşık frekans olarak adlandırılır.

Eşitlik (5.39)'daki entegral $X(s)$ ile gösterildiğinden Eşitlik (5.38)'deki entegralin $X(j\omega)$ ile gösterilebileceğine dikkat ediniz. Dolayısıyla, bu kitabın geri kalan kısmında, Fourier dönüşümünü Laplace dönüşümü ile ilişkilendirdiğimizde hem $X(\omega)$ ve hem de $X(j\omega)$ aynı anlamda kullanılacaktır. Fourier dönüşümü, Laplace dönüşümünün $s = j\omega$ alınmış durumu olmakla birlikte, bir $x(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümünün, $x(t)$'nin Laplace dönüşümünde s yerine $j\omega$ alınarak otomatik olarak elde edilebileceği varsayılmamalıdır. Eğer $x(t)$ mutlak olarak entegrallenebilirse, yani $x(t)$ Eşitlik (5.37)'deki koşulu sağlarsa, $x(t)$'nin Fourier dönüşümü $x(t)$'nin Laplace dönüşümünde $s = j\omega$ alınarak elde edilebilir. Bu mutlak olarak entegrallenemeyen sinyaller için genelde doğru değildir. Aşağıdaki örnekler yukarıdaki ifadeleri açıklığa kavuşturmaktadır.

ÖRNEK 5.1. Birim dürtü işlevi $\delta(t)$'yi düşünelim.

Eşitlik (3.13)'ten $\delta(t)$' nin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{5.42}$$

biçimindedir. Eşitlik (5.31) ve Eşitlik (1.20) tanımlarından $\delta(t)$'nin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1 \tag{5.43}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi $\delta(t)$'nin Laplace dönüşümü ve Fourier dönüşümü aynıdır.

ÖRNEK 5.2 Aşağıda verilen üstel sinyali düşünelim.

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$$

Eşitlik (3.8)'den $x(t)$'nin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a \tag{5.44}$$

olarak verilir Eşitlik (5.31)'deki tanımdan $x(t)$'nin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \frac{1}{a+j\omega} \tag{5.45}$$

biçiminde bulunur. Böylece, Eşitlik (5.44) ile (5.45) karşılaştırılırsa

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega} \tag{5.46}$$

olduğu görülür. $x(t)$'nin mutlak olarak entegrallenebilir olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 5.3 Birim basamak işlevi $u(t)$'yi düşünelim.

Eşitlik (3.14)'ten $u(t)$'nin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{5.47}$$

biçimindedir. $u(t)$'nin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{5.48}$$

ile verilir (Problem 5.30). Böylece, $u(t)$'nin Fourier dönüşümü, $u(t)$'nin Laplace dönüşümünden elde edilemez. Birim basamak işlevi $u(t)$'nin mutlak olarak entegrallenebilir olmadığına dikkat ediniz.

5.4. SÜREKLİ ZAMAN FOURİER DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

Fourier dönüşümünün temel özellikleri aşağıda verilmiştir. Bu özelliklerin bir çoğu Laplace dönüşümünün özelliklerine benzerdir (Bölüm 3.4'e bakınız).

A. Doğrusallık:

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega) \tag{5.49}$$

B. Zamanda Öteleme:

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega) \tag{5.50}$$

Eşitlik (5.50) zaman bölgesindeki bir ötelemenin etkisinin sadece orijinal faz spektrumu $\theta(\omega)$ 'ya $-\omega t_0$ doğrusal terimini eklemek olduğunu gösterir. Bu Fourier dönüşümü $X(\omega)$ 'nın doğrusal faz kayması olanak bilinir.

C. Frekans Ötelemesi:

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \tag{5.51}$$

$x(t)$'nin bir $e^{j\omega_0 t}$ karmaşık üstel sinyaliyle çarpımı bazen karmaşık modülasyon olarak adlandırılır. Dolayısıyla, Eşitlik (5.51) zaman bölgesindeki karmaşık modülasyonun frekans bölgesinde $X(\omega)$ 'nın ötelenmesine karşılık geldiğini gösterir. Eşitlik (5.51)'deki frekans kaydırma özelliğinin Eşitlik (5.50)'deki zaman kaydırma özelliğinin çifteşi (duali) olduğuna dikkat ediniz.

D. Zaman Ölçeklemesi:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{5.52}$$

a gerçel bir sabittir. Bu özellik doğrudan Fourier dönüşümünün tanımından çıkar. Eşitlik (5.52), zaman değişkeni t'nin a çarpanı ile ölçeklenmesinin frekans değişkeni ω'nın $1/a$ ile ters ölçeklenmesine ve $X(\omega/a)$'nın genliğinin $1/|a|$ ile ölçeklenmesine neden olduğunu belirtir. Böylece, ölçekleme özelliği (5.52), bir sinyalin zaman bölgesinde sıkıştırılmasının ($a>1$) sinyalin spektrumunun genişlemesine ve sinyalin zaman bölgesinde genişletilmesinin ($a<1$) sinyalin spektrumunun sıkışmasına yol açtığını belirtir.

E. Zamanda Geri Dönüş:

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) \tag{5.53}$$

Böylece, $x(t)$'nin zamanda geri gelen $X(\omega)$ için frekans ekseninde benzer bir geri dönüşe neden olur. Eşitlik (5.53), Eşitlik (5.52)'de $a=-1$ alınarak kolayca elde edilir.

F. Çifteşlik (ya da Simetri):

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \tag{5.54}$$

Fourier dönüşümünün çifteşlik özelliğinin önemli etkileri vardır. Bu özellik Eşitlik (5.31)'deki entegrali bir kez alarak bu çifteş Fourier dönüşüm çiftlerinin her ikisini de elde etmemize izin verir. (Problem 5.20 ve 5.22'ye bakınız.)

G. Zaman Bölgesinde Türev:

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega) \tag{5.55}$$

Eşitlik (5.55), zaman bölgesindeki türevin etkisinin frekans bölgesinde $V(\omega)$'nın $j\omega$ ile çarpılması olduğunu gösterir (Problem 5.28).

H. Frekans Bölgesinde Türev:

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} \tag{5.56}$$

Eşitlik (5.56), Eşitlik (5.55)'in çifteş özelliğidir.

İ. Zaman Bölgesinde Entegralleme:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega) \tag{5.57}$$

Entegralleme türevin tersi olduğundan Eşitlik (5.57) zaman bölgesinde entegrallemeye karşılık gelen frekans bölgesi işleminin $1/j\omega$ ile çarpma olduğunu, ve entegral alıcının çıkışındaki olası bir dc bileşenin hesaba katılması için ek bir terimin gerekli olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $X(0)=0$ olmadıkça, entegral alıcı bir dc bileşen üretir (Problem 5.33).

J. Konvolüsyon

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega) X_2(\omega) \tag{5.58}$$

Eşitlik (5.58) zaman konvolüsyon teoremi olarak bilinir, ve zaman bölgesindeki konvolüsyonun frekans bölgesinde çarpmaya karşılık geldiğini belirtir (Problem 5.31). Bu konvolüsyon özelliği, Laplace dönüşümünde olduğu gibi, sürekli zaman DZD sistemlerin incelenmesinde (Bölüm 5.5) önemli bir rol oynar ve aynı zamanda süzgeç incelemelerine (Bölüm 5.6) bir temel oluşturur.

K. Çarpma:

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) \tag{5.59}$$

Çarpma özelliği (5.59), Eşitlik (5.58)'in çifteş özelliğidir ve genellikle frekans konvolüsyon teoremi olarak bilinir. Böylece, zaman bölgesinde çarpma frekans bölgesinde konvolüsyona karşılık gelir (Problem 5.35).

L. Ek Özellikler:

Gerçel $x(t)$ için, $x_e(t)$ ve $x_0(t)$ sırasıyla $x(t)$'nin çift ve tek bileşenleri olmak üzere

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \tag{5.60}$$

olsun.

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

olsun. Bu durumda

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \tag{5.61a}$$

$$x_e(t) \leftrightarrow \mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega) \tag{5.61b}$$

$$x_o(t) \leftrightarrow j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega) \tag{5.61c}$$

olur. Eşitlik (5.61a), $x(t)$'nin gerçel olması için gerek ve yeter koşuldur (Problem 5.39). Eşitlik (5.61b) ve (5.61c) bir çift sinyalin Fourier dönüşümünün ω'nın gerçel bir işlevi olduğunu ve bir tek sinyalin Fourier dönüşümünün ω'nın sadece sanal bir işlevi olduğunu gösterir.

M. Parseval Bağıntıları

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda)\,d\lambda \tag{5.62}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega)\,d\omega \tag{5.63}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega \tag{5.64}$$

Eşitlik (5.64) Fourier dönüşümü için Parseval özdeşliği (ya da Parseval teoremi) olarak adlandırılır. Eşitlik (5.64)'ün sol tarafındaki niceliğin $x(t)$'nin normalize edilmiş enerji içeriği E [Eşitlik (1.14)] olduğuna dikkat ediniz. Parseval özdeşliği bu enerji içeriği E'nin $|X(\omega)|^2$'nin bütün frekanslar üzerinden entegrallenmesiyle hesaplanabileceğini belirtir. Bu nedenle $|X(\omega)|^2$ genellikle $x(t)$'nin enerji yoğunluğu spektrumu olarak adlandırılır, ve Eşitlik (5.64) enerji teoremi olarak da bilinir.

Tablo 5-1 bu bölümde anlatılan Fourier dönüşümünün özelliklerinin bir özetini göstermektedir. Bazı yaygın sinyaller ve Fourier dönüşümleri Tablo 5-2'de verilmiştir.

Tablo 5-1. Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özelllik	İşaret	Fourier dönüşümü
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Doğrusallık	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
Zamanda öteleme	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Frekans ötelemesi	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$
Zaman ölçeklemesi	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Zamanda geri dönüş	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Çifteşlik	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Zaman türevi	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Frekans türevi	$(-jt)x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Entegralleme	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\pi X(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}X(\omega)$
Konvolüsyon	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Çarpma	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$
Gerçel sinyal	$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$	$X(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)$
		$X(-\omega)=X^*(\omega)$
Çift bileşen	$x_e(t)$	$\mathrm{Re}\{X(\omega)\}=A(\omega)$
Tek bileşen	$x_o(t)$	$j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}=jB(\omega)$

Parseval bağıntıları

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda)\,d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega)\,d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$$

Tablo 5-2. Yaygın Fourier Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega)-\dfrac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a>0$	$\dfrac{1}{j\omega+a}$
$te^{-at}u(t), a>0$	$\dfrac{1}{(j\omega+a)^2}$
$e^{-a\|t\|}, a>0$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$e^{-a\|\omega\|}$
$e^{-at^2}, a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t)=\begin{cases}1 & \|t\|<a\\ 0 & \|t\|>a\end{cases}$	$2a\dfrac{\sin\omega a}{\omega a}$
$\dfrac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega)=\begin{cases}1 & \|\omega\|<a\\ 0 & \|\omega\|>a\end{cases}$
$\operatorname{sgn} t$	$\dfrac{2}{j\omega}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0), \omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

5.5. SÜREKLİ ZAMANLI DZD SİSTEMLERİN FREKANS TEPKİSİ

A. Frekans Tepkisi:

Bölüm 2.2'de bir sürekli zamanlı DZD bir sistemin y(t) çıktısının x(t) girişi ile dürtü tepkisi h(t)'nin konvolüsyonuna eşit olduğunu, yani

$$y(t)=x(t)*h(t) \tag{5.65}$$

olduğunu göstermiştik. Konvolüsyon özelliği (5.58)'i uygulayarak

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega) \tag{5.66}$$

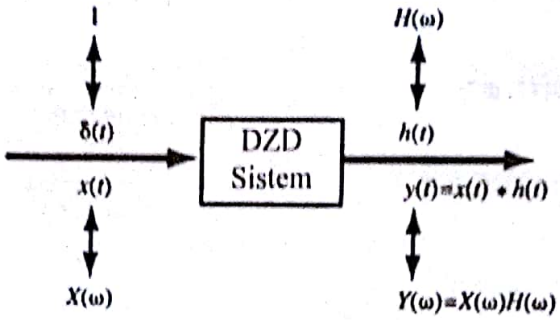
elde ederiz. Burada $Y(\omega)$, $X(\omega)$ ve $H(\omega)$ sırasıyla $y(t)$, $x(t)$ ve $h(t)$'nin Fourier dönüşümüdür. Eşitlik (5.66)'dan

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{5.67}$$

elde ederiz. $H(\omega)$, sistemin frekans tepkisi olarak adlandırılır. Eşitlik (5.65) ve (5.66)'nın belirttiği ilişkiler Şekil 5-3'te gösterilmiştir. $H(\omega)$ 'yı

$$H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\theta_H(\omega)} \tag{5.68}$$

biçiminde yazalım. Bu durumda $|H(\omega)|$ 'ya sistemin genlik tepkisi, ve $\theta_H(\omega)$ 'ya sistemin faz tepkisi denir.



Şekil 5-3 Bir DZD sistemin girişleri ve çıkışları arasındaki ilişkiler

Fourier dönüşümü (Problem 5.23)

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \tag{5.69}$$

ile verilen

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{5.70}$$

karmaşık üstel sinyali düşünelim. Bu durumda Eşitlik (5.66) ve (1.26)'dan

$$Y(\omega) = 2\pi H(\omega_0)\,\delta(\omega - \omega_0) \tag{5.71}$$

elde ederiz. $Y(\omega)$ 'nın ters Fourier dönüşümü alınarak

$$y(t) = H(\omega_0)\, e^{j\omega_0 t} \tag{5.72}$$

bulunur. Bu, daha önce Bölüm 2'de (Bölüm 2.4 ve Problem 2.17) gözlendiği gibi, $e^{j\omega_0 t}$ karmaşık üstel sinyalinin, karşılık gelen özdeğer $H(\omega_0)$ olmak üzere DZD sistemin bir özişlevi olduğunu gösterir. Ayrıca, doğrusallık özelliği (5.49)'dan, $x(t)$ girişi periyodikse ve Fourier serisi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.73}$$

ile veriliyorsa bu durumda karşılık gelen $y(t)$ çıkışı da periyodiktir ve Fourier serisi

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t} \tag{5.74}$$

biçimindedir. Eğer $x(t)$ periyodik değilse, bu durumda Eşitlik (5.30)'dan

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{5.75}$$

yazılır ve Eşitlik (5.66) kullanılarak, karşılık gelen $y(t)$ çıkışı

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{5.76}$$

biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla, bir sürekli zaman DZD sistemin frekans bölgesi davranışı tümüyle bu sistemin frekans tepkisi $H(\omega)$ ile karakterize edilir. $X(\omega)$ ve $Y(\omega)$ 'yı

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta_X(\omega)} \qquad Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\theta_Y(\omega)} \tag{5.77}$$

biçiminde yazalım. Bu durumda Eşitlik (5.66)'dan

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)| \tag{5.78a}$$

$$\theta_Y(\omega) = \theta_X(\omega) + \theta_H(\omega) \tag{5.78b}$$

elde ederiz. Böylece, girişin genlik spektrumu $|X(\omega)|$ ile sistemin genlik tepkisi $|H(\omega)|$ çıkışın genlik spektrumu $|Y(\omega)|$'yı belirlemek üzere çarpılır, ve faz tepkisi $\theta_H(\omega)$ girişin faz spektrumu $\theta_X(\omega)$'ya çıkışın faz spektrumu $\theta_Y(\omega)$'yı üretmek üzere eklenir. Genlik tepkisi $|H(\omega)|$'ya bazen sistemin kazancı da denir.

B. Bozulmasız İletim:

Bir DZD sistemde bozulmasız iletim için giriş sinyalinin şeklinin çıkışta tam olarak yeniden üretilmesi gerekir, ancak çıkışın genliği farklı olabilir ve bir zaman gecikmesi olabilir. Dolayısıyla, eğer $x(t)$ giriş sinyali ise, istenen çıkış

$$y(t) = Kx(t - t_d) \tag{5.79}$$

biçimindedir. Burada t_d zaman gecikmesi ve K (>0) bir kazanç sabitidir. Bu durum Şekil 5-4(a) ve (b)'de gösterilmiştir. Eşitlik (5.79)'da her iki tarafın Fourier dönüşümü alınarak

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}X(\omega) \tag{5.80}$$

elde edilir. Böylece Eşitlik (5.66)'dan bozulmasız iletim için sistemin

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_H(\omega)} = Ke^{-j\omega t_d} \tag{5.81}$$

biçiminde bir frekans tepkisine sahip olması gerektiğini görürüz. Böylece

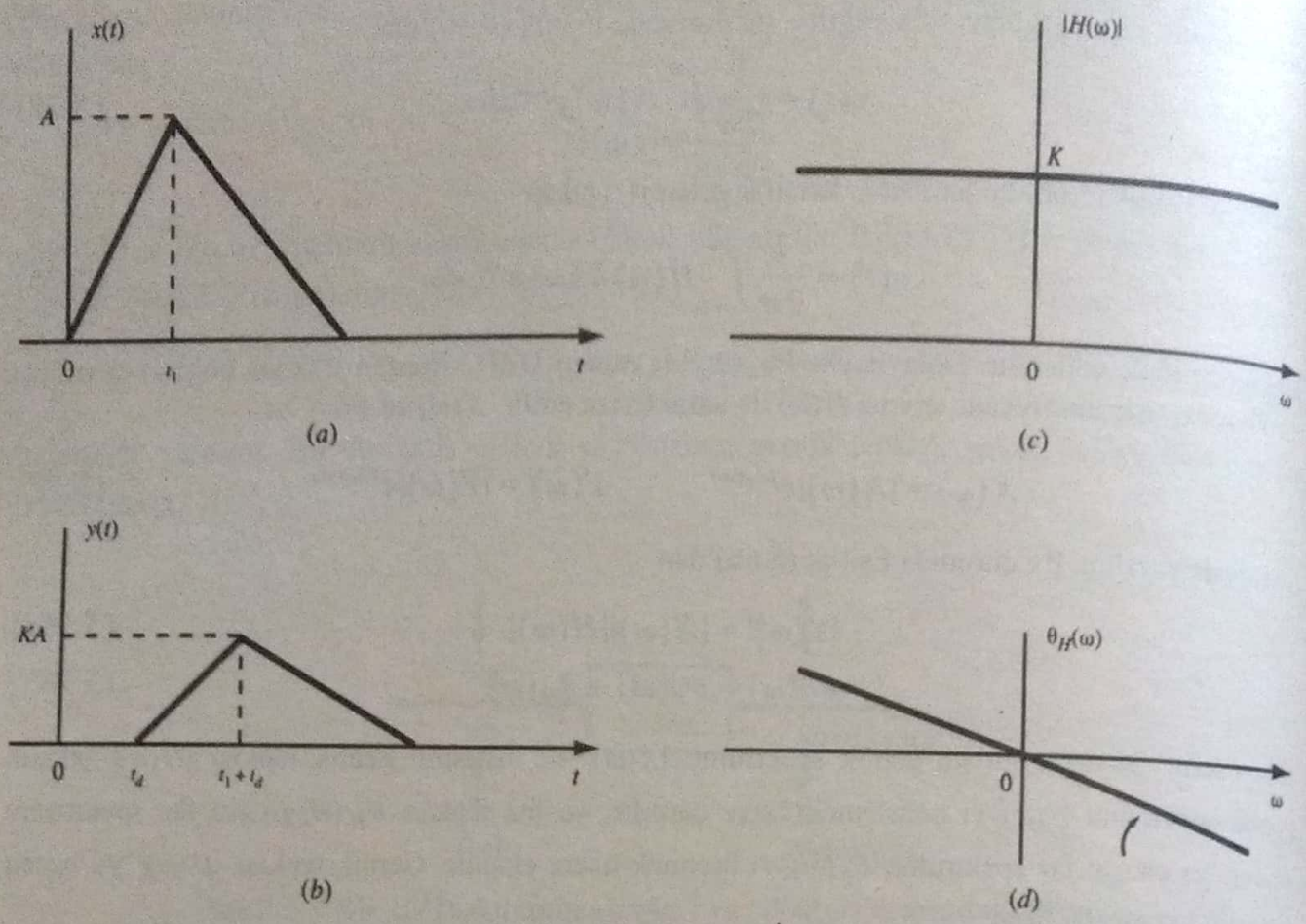
$$|H(\omega)| = K \tag{5.82a}$$

$$\theta_H(\omega) = -j\omega t_d \tag{5.82b}$$

olur. Yani, $H(\omega)$ 'nın genliği tüm frekans aralığında sabit olmalı, ve $H(\omega)$ 'nın fazı frekansla doğru orantılı olmalıdır. Bu durum Şekil 5-4(c) ve (d)'de gösterilmiştir.

Genlik ve Faz Bozulması:

Sistemin genlik spektrumu $|H(\omega)|$ ilgili frekans bandında sabit değilse, giriş sinyalinin frekans bileşenleri farklı miktarlarda kazanç ya da zayıflama ile iletilir. Bu etkiye genlik bozulması denir. Sistemin faz spektrumu $\theta_H(\omega)$ frekansla doğru orantılı değilse, giriş sinyalinin farklı frekans



Şekil 5-4 Bozulmasız İletim

bileşenleri sistemden geçerken farklı gecikmelere maruz kaldığından, çıkış sinyalinin dalga biçimi giriş sinyalininkinden farklı olur. Bu bozulma biçimine faz bozulması denir.

C. Diferansiyel Denklemlerle Karakterize Edilen DZD Sistemler:

Bölüm 2.5'de tartışıldığı gibi, pek çok pratik sürekli zamanlı DZD sistem, $M \le N$ olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{5.83}$$

biçiminde bir doğrusal sabit katsayılı diferansiyel denklemle tanımlanır. Eşitlik (5.83)'ün her iki tarafının Fourier dönüşümü alınarak ve doğrusallık özelliği (5.49) ve zaman türevi (5.55) kullanılarak

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

$$Y(\omega) \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(\omega) \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k \tag{5.84}$$

elde edilir. Böylece, Eşitlik (5.67)'den

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} \tag{5.85}$$

bulunur. $H(\omega)$, ω'nın rasyonel bir işlevidir. (5.85) sonucu, $s = j\omega$ alındığında, Laplace dönüşümünde karşılık gelen $H(s) = Y(s)/X(s)$ sonucuyla [Eşitlik (3.40)] aynıdır yani

$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

olur.

5.6. SÜZME

Herhangi bir sinyal işleme sistemindeki en temel işlemlerden biri süzmedir. Süzme bir sinyaldeki frekans bileşenlerinin bağıl genliklerinin değiştirilmesi veya belki de bazı frekans bileşenlerinin bastırılması işlemidir. Önceki alt bölümde gördüğümüz gibi, sürekli zaman DZD sistemlerin çıkış spektrumu, sistemin frekans tepkisi ile çarpılmış giriş spektrumudur. Dolayısıyla, bir DZD sistem giriş sinyali üzerinde bir süzgeç gibi etkide bulunur. Burada "süzgeç" sözcüğü bir çeşit frekans seçici davranış gösteren bir sistemi belirtmek üzere kullanılmaktadır.

A. İdeal Frekans Seçici Süzgeçler:

İdeal bir frekans seçici süzgeç bir grup frekanstaki sinyalleri tam olarak geçiren ve geri kalan sinyalleri tümüyle reddeden bir süzgeçtir. Süzgecin geçirdiği frekans bandına geçirme bandı, ve süzgecin reddettiği frekans bandına durdurma bandı denir.

En yaygın ideal frekans seçici süzgeç tipleri aşağıda verilmiştir.

1. *İdeal Alçak Geçiren Süzgeç:*

İdeal bir alçak geçiren süzgeç (LPF)

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \tag{5.86}$$

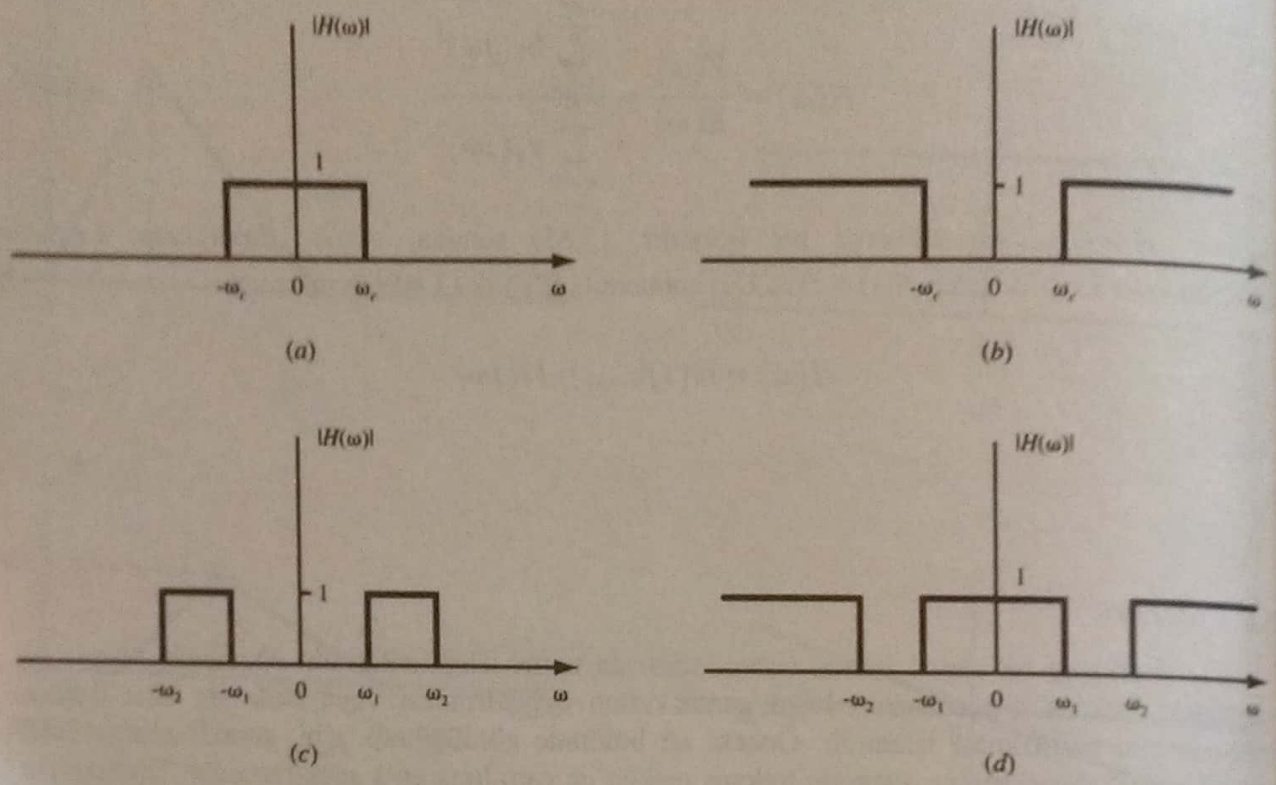
ile nitelenir. $|H(\omega)|$ Şekil 5-5(a)'da gösterilmiştir. ω_c frekansı kesim frekansı olarak adlandırılır.

2. *İdeal Yüksek Geçiren Süzgeç:*

İdeal bir yüksek geçiren süzgeç (HPF)

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \tag{5.87}$$

ile nitelenir. $|H(\omega)|$ Şekil 5-5(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 5-5 İdeal frekans seçici süzgeçlerin genlik tepkileri

3. ***İdeal Bant Geçiren Süzgeç:***

İdeal bir bant geçiren süzgeç (BPF)

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 1 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0 & \end{cases} \tag{5.88}$$

ile nitelenir. $|H(\omega)|$ Şekil 5-5(c)'de gösterilmiştir.

4. ***Bant Durduran Süzgeç:***

İdeal bir bant durduran süzgeç (BSF)

$$|H(\omega)| = \begin{cases} 0 & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 1 & \end{cases} \tag{5.89}$$

ile nitelenir. $|H(\omega)|$ Şekil 5-5(d)'de gösterilmiştir.

Yukarıdaki tartışmada, süzgeçlerin faz tepkisi ile ilgili olarak hiçbir şey söylenmemiştir. Süzme işleminde faz bozulmasını engellemek için, bir süzgeç, geçirme bandında doğrusal bir faz karakteristiğine sahip olmalıdır, yani [Eş (5.82b)]

$$\theta_H(\omega) = -\omega t_d \tag{5.90}$$

olmalıdır. Burada t_d bir sabittir.

Tüm ideal frekans seçici süzgeçlerin nedensel olmayan sistemler olduğuna dikkat ediniz.

B. İdeal Olmayan Frekans Seçici Süzgeçler:

Basit, sürekli zamanlı, nedensel bir frekans seçici süzgeç örneği olarak Şekil 5-6(a)'da görülen RC süzgeci ele alalım. $y(t)$ çıktısı ile $x(t)$ girişi

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

ile birbirine bağlıdır (Problem 1.32). Yukarıdaki denklemin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınırsa, RC süzgecin frekans tepkisi $H(\omega)$

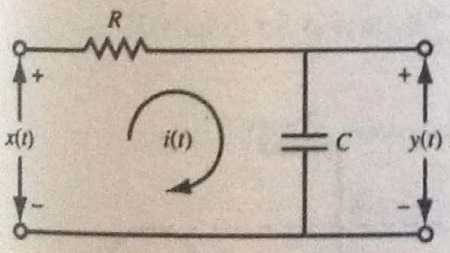
$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{1}{1+j\omega/\omega_0} \qquad (5.91)$$

olarak elde edilir. Burada $\omega_0=1/RC$ ile verilmektedir. Böylece, genlik tepkisi $|H(\omega)|$ ve faz tepkisi $\theta_H(\omega)$

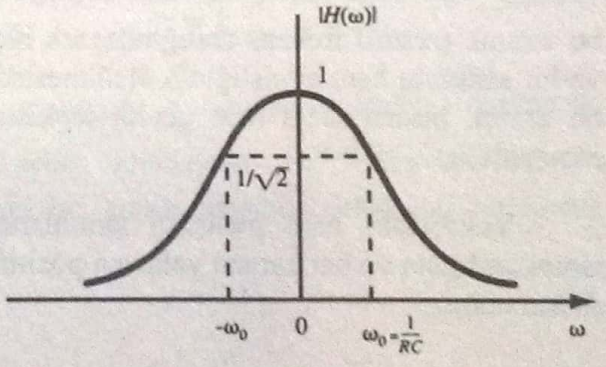
$$|H(\omega)|=\frac{1}{|1+j\omega/\omega_0|}=\frac{1}{\left[1+(\omega/\omega_0)^2\right]^{1/2}} \qquad (5.92)$$

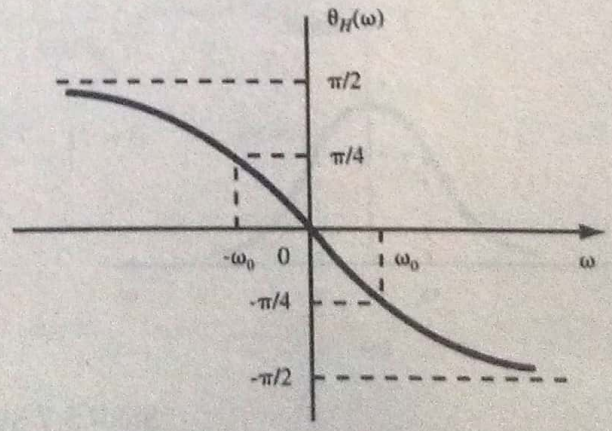
$$\theta_H(\omega)=-\tan^{-1}\frac{\omega}{\omega_0} \qquad (5.93)$$

olur. $|H(\omega)|$ ve $\theta_H(\omega)$ Şekil 5-6(b)'de çizilmiştir. Şekil 5-6(b)'den görüldüğü gibi, Şekil 5-6(a)'daki RC devresi bir alçak geçiren süzgeç olarak çalışmaktadır.



(a)





Şekil 5-6 RC süzgeç ve frekans tepkisi

5.7. BANT GENİŞLİĞİ

A. Süzgeç (ya da Sistem) Bant Genişliği:

Sistem çözümlemesinde önemli olan kavramlardan bir tanesi bir DZD sistemin bant genişliğidir. Sistem bant genişliğinin pek çok farklı tanımı vardır.

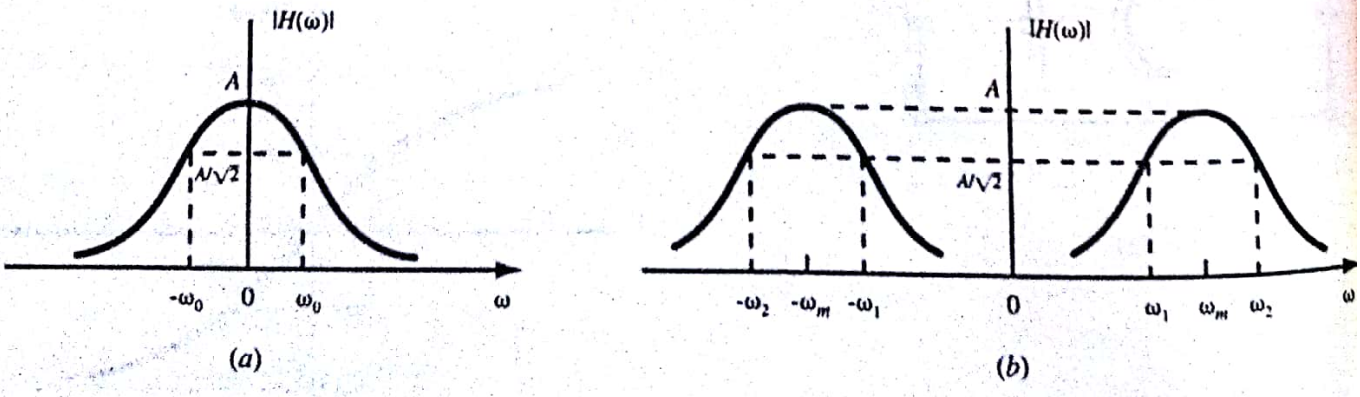
1. *Mutlak Bant Genişliği:*

İdeal bir alçak geçiren süzgecin bant genişliği W_B, süzgecin kesim frekansına eşittir; yani $W_B = \omega_c$ [Şekil 5-5(*a*)] olur. Bu durumda W_B'ye mutlak bant genişliği denir. İdeal bir bant geçiren süzgecin mutlak bant genişliği $W_B = \omega_2 - \omega_1$ olarak verilmektedir [Şekil 5-5(c)]. Eğer $W_B << \omega_0$ ise bant geçiren süzgece dar bant süzgeç denir; $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ süzgecin merkez frekansıdır. Yüksek geçiren ya da bant durduran bir süzgeç için bant genişliği tanımlı değildir.

2. *3-dB (ya da Yarı Güç) Bant Genişliği:*

Nedensel ya da pratik süzgeçler için, süzgeç (ya da sistem) bant genişliğinin yaygın bir tanımı 3-dB bant genişliği W_{3dB}'dir. Eşitlik (5.92) veya Şekil 5-6(b) ile betimlenen *RC* süzgeç gibi alçak geçiren bir süzgeç için, W_{3dB} genlik spektrumu $|H(\omega)|$'nın $|H(0)|/\sqrt{2}$ değerine düştüğü pozitif frekans olarak tanımlanır; bu durum Şekil 5-7(a)'da gösterilmiştir. $|H(0)|$'ın alçak geçiren *RC* süzgeç için $H(\omega)$'nın tepe değeri olduğuna dikkat ediniz. Gerilimin ya da akımın 3 dB zayıflaması gücün yarıya düşmesine denk olduğundan, 3-dB bant genişliği yarı güç bant genişliği olarak da bilinir. Bant geçiren süzgeç için, W_{3dB}, Şekil 5-7(b)'de gösterildiği gibi, $|H(\omega)|$'nın $|H(\omega_m)|$ tepe değerinin $1/\sqrt{2}$'sine düştüğü frekanslar arasındaki fark olarak tanımlanır. W_{3dB}'nin bu tanımı, (pozitif frekans aralığında) tek biçimli genlik tepkisine sahip sistemler için kullanışlıdır ve bir sistemin bant genişliğinin ölçülmesinde yaygın olarak kabul edilmiş olan bir ölçüttür; fakat bu tanım, birden fazla tepe genlik tepkisine sahip sistemler için belirsiz olabilir veya biricik olmayabilir.

Yukarıdaki bant genişliği tanımlarının her birinin yalnızca pozitif frekans ekseninde tanımlandığına ve her zaman yalnızca pozitif frekans, veya tek yanlı bant genişliğini tanımladığına dikkat ediniz.



Şekil 5-7 Süzgeç Bant Genişliği

B. Sinyal Bant Genişliği:

Bir sinyalin bant genişliği, bu sinyalin enerjisinin ya da gücünün çoğunu içeren pozitif frekans aralığı olarak tanımlanabilir. Bu tanım oldukça belirsizdir ve çeşitli kabuller söz konusudur (Problem 5.57 ve 5.76).

3-dB Bant Genişliği:

Bir $x(t)$ sinyalinin bant genişliği, sinyalin genlik spektrumu $|X(\omega)|$ kullanılarak, 3-dB bant genişliği örneğinde olduğu gibi, bir süzgeç bant genişliğine benzer olarak da tanımlanabilir. Gerçekten de, Şekil 5-5(a)-(c)'de $|H(\omega)|$'yı $|X(\omega)|$ ile değiştirirsek, alçak geçiren, yüksek geçiren, ve bant geçiren sinyallerin frekans bölgesi çizimlerini elde ederiz.

Bant Sınırlı Sinyal:

Eğer bir $x(t)$ sinyali için

$$|X(\omega)| = 0 \qquad |\omega| > \omega_M \tag{5.94}$$

sağlanıyorsa bu $x(t)$ sinyaline bant sınırlı sinyal denir. Böylece, bant sınırlı bir sinyal için bant genişliğini ω_M olarak tanımlamak doğaldır.

Çözümlü Problemler

FOURIER SERİLERİ

5.1. Eğer, $\{\Psi_n(t)\}$ bir sinyal kümesi olmak üzere, $\Psi_m(t)$ ve $\Psi_k(t)$ sinyalleri

$$\int_a^b \Psi_m(t)\Psi_k^*(t)\,dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \alpha & m = k \end{cases} \tag{5.95}$$

koşulunu sağlıyorlarsa, $\{\Psi_n(t)\}$ kümesine (a,b) aralığında ortogonaldir denir; $*$ karmaşık eşleniği gösterir ve $\alpha \neq 0$'dır. Karmaşık üsteller kümesinin $\{e^{jk\omega_0 t} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ olmak üzere, T_0 periyotluk herhangi bir aralık üzerinde ortogonal olduğunu gösteriniz.

Herhangi bir t_0 için, $e^{jm2\pi} = 1$ olduğundan

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t}\Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = \frac{1}{jm\omega_0}\left(e^{jm\omega_0(t_0+T_0)} - e^{jm\omega_0 t_0}\right)$$

$$= \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t_0}\left(e^{jm2\pi} - 1\right) = 0 \qquad m \neq 0 \tag{5.96}$$

elde ederiz. $m = 0$ için $e^{jm\omega_0 t}\big|_{m=0} = 1$ ve

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}\,dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = T_0 \tag{5.97}$$

bulunur.

Böylece, Eşitlik (5.96) ve (5.97)'den

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}(e^{jk\omega_0 t})^* \, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(m-k)\omega_0 t} \, dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ T_0 & m = k \end{cases} \tag{5.98}$$

olduğunu çıkartırız. Eşitlik (5.98), $\{e^{jk\omega_0 t}: k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ kümesinin T_0 periyotluk herhangi bir aralık üzerinde ortogonal olduğunu gösterir.

5.2. Eşitlik (5.98)'deki ortogonallik koşulunu kullanarak karmaşık Fourier serileri için (5.5) eşitliğini türetiniz.

Eşitlik (5.4)'ten

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

yazalım. Bu eşitliğin her iki tarafını $e^{-jm\omega_0 t}$ ile çarparak ve sonucun t_0'dan (t_0+T_0)'a kadar entegralini alarak

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jm\omega_0 t} \, dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-jm\omega_0 t} \, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} \, dt \tag{5.99}$$

elde ederiz. Daha sonra Eşitlik (5.98) kullanılarak Eşitlik (5.99)

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jm\omega_0 t} \, dt = c_m T_0 \tag{5.100}$$

biçimine indirgenir. m indeksini k ile değiştirerek Eşitlik (5.5)'i yani

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \, dt \tag{5.101}$$

eşitliğini elde ederiz. Eşitlik (5.101)'i daha çok $t_0 = 0$ ve $t_0 = -T_0/2$ özel durumları için kullanacağız. Bu özel durumlar için

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \, dt \tag{5.102a}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \, dt \tag{5.102b}$$

elde edilir.

5.3. Eşitlik (5.4)'teki karmaşık üstel Fourier serisinden Eşitlik (5.8)'deki trigonometrik Fourier serisini türetiniz.

Eşitlik (5.4)'teki toplamayı

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \right)$$

biçiminde yeniden düzenleyerek ve

$$e^{\pm jk\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t \pm j \sin k\omega_0 t$$

ile verilen Euler formülünü kullanarak

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_k + c_{-k}) \cos k\omega_0 t + j(c_k - c_{-k}) \sin k\omega_0 t] \qquad (5.103)$$

elde ederiz. Eşitlik (5.103)'te katsayılar

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad c_k + c_{-k} = a_k \qquad j(c_k - c_{-k}) = b_k \qquad (5.104)$$

olarak alınarak

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

eşitliğine ulaşılır.

5.4. Aşağıdaki sinyallerin her biri için karmaşık üstel Fourier serisi gösterimini bulunuz.

(a) $x(t) = \cos \omega_0 t$

(b) $x(t) = \sin \omega_0 t$

(c) $x(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$

(d) $x(t) = \cos 4t + \sin 6t$

(e) $x(t) = \sin^2 t$

(a) Karmaşık Fourier katsayısı c_k'yı elde etmek için Eşitlik (5.5)'i kullanmak yerine Euler formülünü kullanarak

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

elde ederiz. Böylece, $\cos \omega_0 t$ için karmaşık Fourier katsayıları

$$c_1 = \tfrac{1}{2} \qquad c_{-1} = \tfrac{1}{2} \qquad c_k = 0, |k| \neq 1$$

olur.

(b) Benzer biçimde

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = -\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

elde ederiz. Böylece $\sin \omega_0 t$ için karmaşık Fourier katsayıları

$$c_1 = \frac{1}{2j} \qquad c_{-1} = -\frac{1}{2j} \qquad c_k = 0, |k| \neq 1$$

olur.

(c) $x(t)$'nin temel açısal frekansı ω_0 2'dir. Böylece

$$x(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

bulunur. Buradan

$$x(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(e^{j(2t+\pi/4)} + e^{-j(2t+\pi/4)})$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j\pi/4} e^{-j2t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/4} e^{j2t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

elde edilir. Böylece, cos $(2t+\pi/4)$ için karmaşık Fourier katsayıları

$$c_1 = \frac{1}{2}e^{j\pi/4} = \frac{1}{2}\frac{1+j}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)$$

$$c_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4} = \frac{1}{2}\frac{1-j}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)$$

$$c_k = 0 \qquad |k| \neq 1$$

olur.

(d) Problem 1.14'ün sonucundan $x(t)$'nin temel periyodu T_0 π'dir ve $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$ olur. Böylece,

$$x(t) = \cos 4t + \sin 6t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

olur. Yine Euler formülü kullanılarak

$$x(t) = \cos 4t + \sin 6t = \frac{1}{2}(e^{j4t} + e^{-j4t}) + \frac{1}{2j}(e^{j6t} - e^{-j6t})$$

$$= -\frac{1}{2j}e^{-j6t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2j}e^{j6t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

elde edilir. Böylece cos $4t$+sin $6t$ için karmaşık Fourier katsayıları

$$c_{-3} = -\frac{1}{2j} \qquad c_{-2} = \frac{1}{2} \qquad c_2 = \frac{1}{2} \qquad c_3 = \frac{1}{2j}$$

olur ve diğer bütün kastayılar c_k=0'dır.

(e) Problem 1.16(e)'den $x(t)$'nin temel periyodu π ve $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$ dir. Böylece

$$x(t) = \sin^2 t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

olur. Yine Euler formülünü kullanarak

$$x(t) = \sin^2 t = \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{j2t} - 2 + e^{-j2t})$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-j2t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{j2t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2kt}$$

elde ederiz. Buradan, $\sin^2 t$ için karmaşık Fourier katsayıları

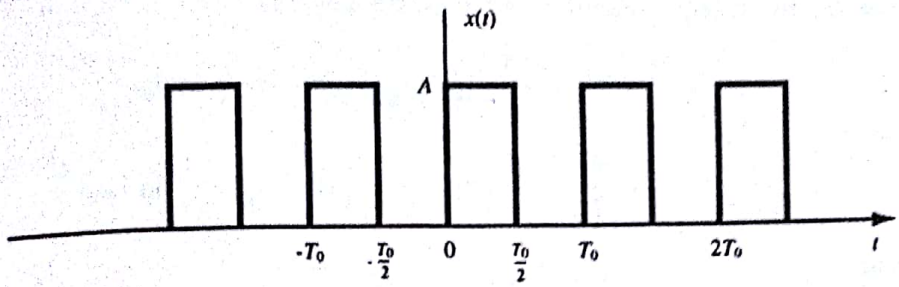
$$c_{-1} = -\tfrac{1}{4} \qquad c_0 = \tfrac{1}{2} \qquad c_1 = -\tfrac{1}{4}$$

olarak bulunur, diğer bütün katsayılar c_k=0'dır.

5.5. Şekil 5-8'de görülen periyodik kare dalga $x(t)$'yi düşünelim.

(a) $x(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisini bulunuz.

(b) $x(t)$'nin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.



Şekil 5-8

(a) $x(t)$ için

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

yazalım. (5.102a) eşitliğini ve $\omega_0 T_0 = 2\pi$ ve $e^{-jk\pi} = (-1)^k$ eşitliklerini kullanarak

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{T_0/2} = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left(e^{-jk\omega_0 T_0/2} - 1\right)$$

$$= \frac{A}{jk2\pi}\left(1 - e^{-jk\pi}\right) = \frac{A}{jk2\pi}\left[1 - (-1)^k\right]$$

elde ederiz. Buradan

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \qquad k = 2m+1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, dt = \frac{A}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$c_0 = \frac{A}{2} \qquad c_{2m} = 0 \qquad c_{2m+1} = \frac{A}{j(2m+1)\pi} \tag{5.105}$$

olur ve $x(t)$ için

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.106}$$

elde ederiz.

(b) Eşitlik (5.105), (5.10), ve (5.12)'den

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{A}{2} \qquad a_{2m} = b_{2m} = 0, m \neq 0$$

$$a_{2m+1} = 2\,\mathrm{Re}[c_{2m+1}] = 0 \qquad b_{2m+1} = -2\,\mathrm{Im}[c_{2m+1}] = \frac{2A}{(2m+1)\pi}$$

elde ederiz. Bu değerleri Eşitlik (5.8)'de yerine koyarak

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)\omega_0 t$$

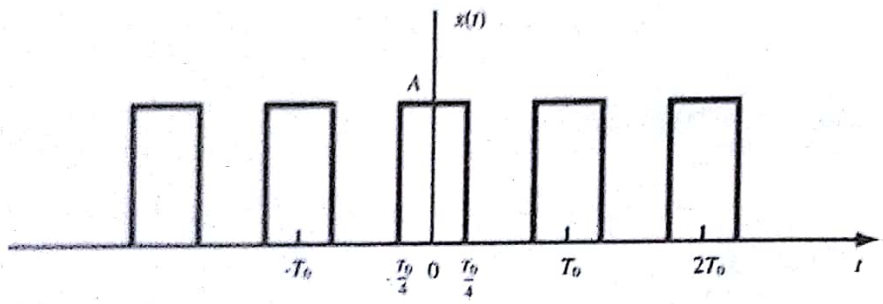
$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots\right) \qquad (5.107)$$

buluruz.

5.6. Şekil 5-9'da görülen periyodik kare dalga $x(t)$'yi düşünelim.

(a) $x(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisini bulunuz.

(b) $x(t)$'nin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.



Şekil 5-9

(a) $x(t)$ için

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

yazalım. Eşitlik (5.102b)'yi kullanarak

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} A e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left(e^{-jk\omega_0 T_0/4} - e^{jk\omega_0 T_0/4}\right)$$

$$= \frac{A}{-jk2\pi}\left(e^{-jk\pi/2} - e^{jk\pi/2}\right) = \frac{A}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

elde ederiz. Buradan

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = (-1)^m \frac{A}{k\pi} \qquad k = 2m+1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} A\, dt = \frac{A}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$c_0 = \frac{A}{2} \qquad c_{2m} = 0,\ m \neq 0 \qquad c_{2m+1} = (-1)^m \frac{A}{(2m+1)\pi} \qquad (5.108)$$

olur ve

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \qquad (5.109)$$

buluruz.

(b) Eşitlik (5.108), (5.10) ve 5.12)'den

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{A}{2} \qquad a_{2m} = 2\,\mathrm{Re}[c_{2m}] = 0,\ m \neq 0$$

$$a_{2m+1} = 2\,\mathrm{Re}[c_{2m+1}] = (-1)^m \frac{2A}{(2m+1)\pi} \qquad b_k = -2\,\mathrm{Im}[c_k] = 0$$

elde ederiz. Bu değerleri Eşitlik (5.8)'de yerine koyarak

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos(2m+1)\omega_0 t$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\cos\omega_0 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t - \cdots\right) \qquad (5.110)$$

buluruz. $x(t)$'nin çift olduğuna dikkat ediniz; böylece, $x(t)$ yalnızca bir dc terim ve kosinüs terimlerinden oluşur. Şekil 5-9'daki $x(t)$'nin, Şekil 5-8'deki $x(t)$'nin $T_0/4$ kadar sola kaydırılmasıyla elde edilebileceğine dikkat ediniz.

5.7. Şekil 5-10'da görülen periyodik kare dalga $x(t)$'yi düşünelim.

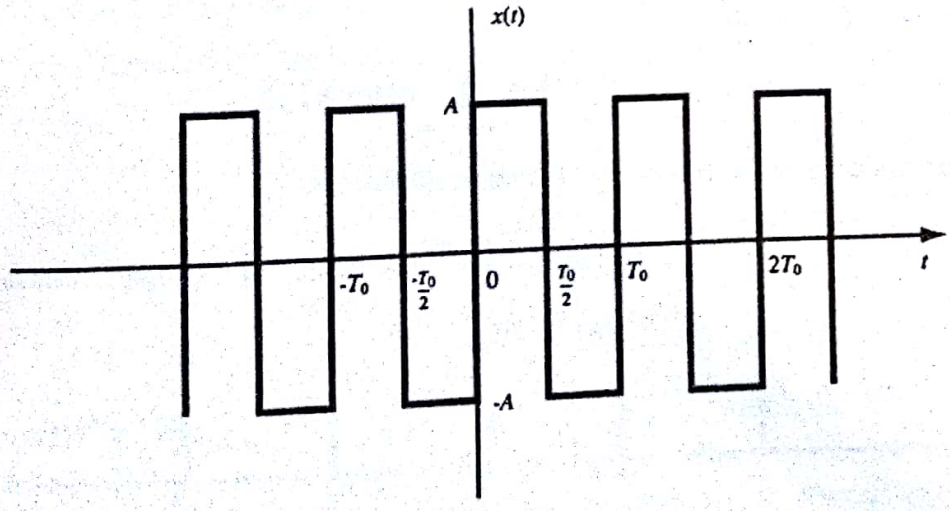
(a) $x(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisini bulunuz.

(b) $x(t)$'nin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.

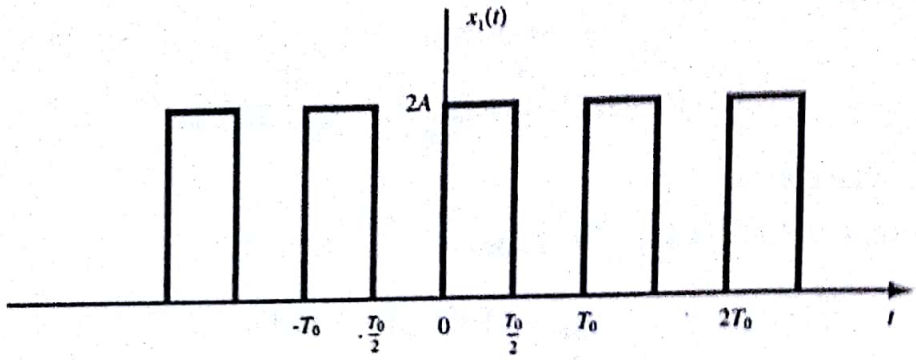
$x(t)$'nin

$$x(t) = x_1(t) - A$$

biçiminde açıklanabileceğine dikkat ediniz; $x_1(t)$ Şekil 5-11'de gösterilmiştir. Şekil 5-11 ve Problem 5.5'teki Şekil 5-8'i karşılaştırdığımızda $x_1(t)$'nin Şekil 5-8'deki kare dalga $x(t)$ ile aynı olduğunu görürüz; yalnızca A, 2A olur.



Şekil 5-10



Şekil 5-11

(a) Eşitlik (5.106)'da A yerine 2A alarak

$$x_1(t) = A + \frac{2A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t}$$

elde ederiz. Buradan

$$x(t) = x_1(t) - A = \frac{2A}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \qquad (5.111)$$

bulunur.

(b) Benzer biçimde, Eşitlik (5.107)'de A yerine 2A alarak

$$x_1(t) = A + \frac{4A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\omega_0 t$$

elde ederiz. Buradan

$$x_1(t) = A + \frac{4A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\omega_0 t$$

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\omega_0 t$$

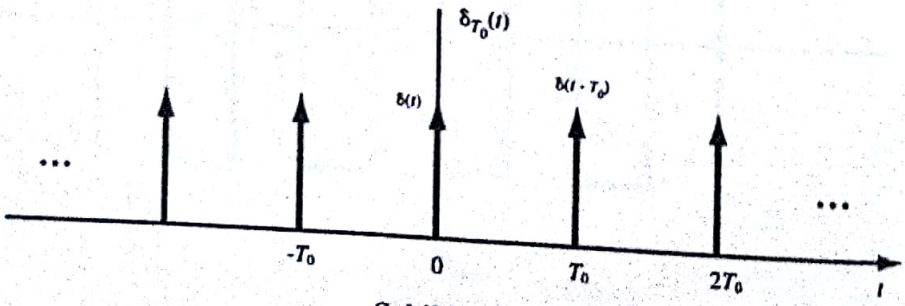
$$= \frac{4A}{\pi}\left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots\right) \qquad (5.112)$$

bulunur. $x(t)$'nin tek olduğuna dikkat ediniz; dolayısıyla, $x(t)$ yalnızca sinüs terimlerini içerir.

5.8. Şekil 5.12'de gösterilen ve

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \qquad (5.113)$$

ile tanımlanan $\delta_{T_0}(t)$ periyodik dürtü katarını düşünelim.



Şekil 5-12

(a) $\delta_{T_0}(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisini bulunuz.

(b) $\delta_{T_0}(t)$'nin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.

(a) $\delta_{T_0}(t)$ için

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

yazalım. Eşitlik $\delta(t)$'yi içerdiğinden, Fourier katsayılarını bulmakta Eşitlik (5.102b)'yi kullanarak

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0} \tag{5.114}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.115}$$

bulunur.

(b) $\delta_{T_0}(t)$ için

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

yazalım. $\delta_{T_0}(t)$ çift olduğundan $b_k = 0$ olur ve Eşitlik (5.9a)'dan a_k katsayıları

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) \cos k\omega_0 t\, dt = \frac{2}{T_0} \tag{5.116}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0}\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.117}$$

elde edilir.

5.9. Şekil 5-13(a)'da verilen üçgen dalga $x(t)$'yi düşünelim. Türev tekniğini kullanarak, (a) $x(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisini, ve (b) $x(t)$'nin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.

Üçgen dalga $x(t)$'nin türevi $x'(t)$ Şekil 5-13(b)'de görüldüğü gibi bir kare dalgadır.

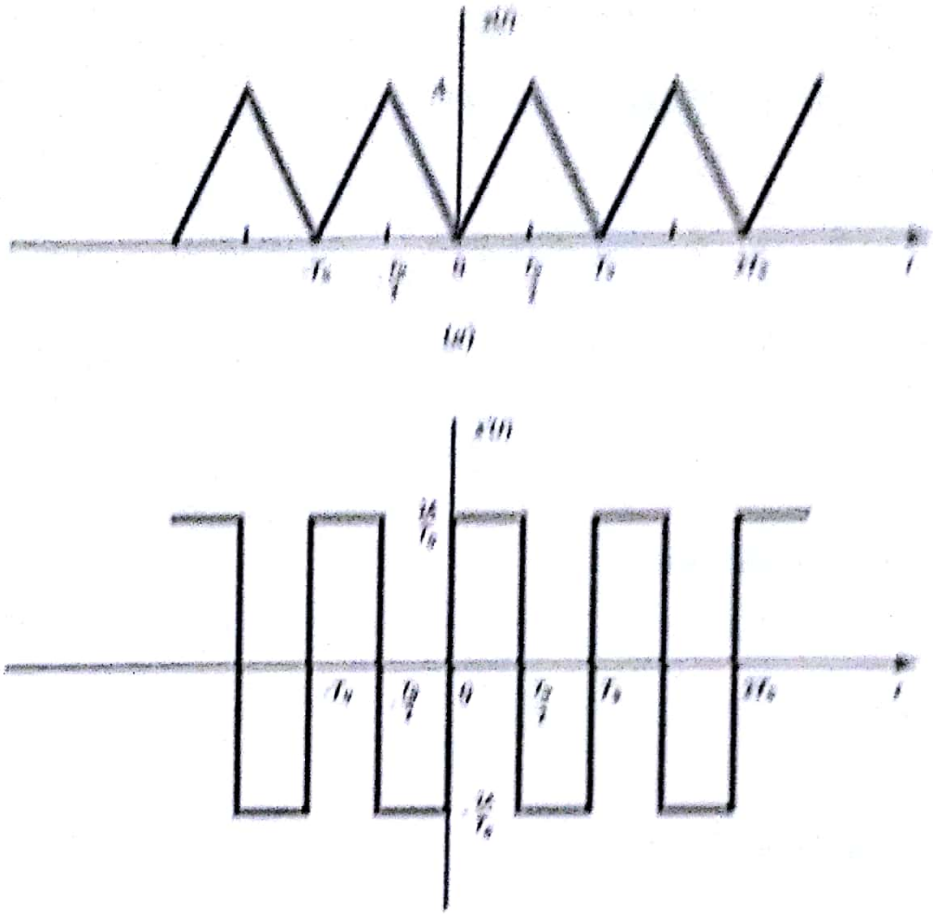
(a) $x(t)$ için

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.118}$$

yazalım. Eşitlik (5.118)'in türevini aldığımızda

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.119}$$

buluruz. Eşitlik (5.119) $x'(t)$'nin karmaşık Fourier katsayılarının $jk\omega_0 c_k$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $x'(t)$'nin Fourier katsayıları biliniyorsa c_k $(k \neq 0)$ katsayılarını bulabiliriz. c_0 terimi Eşitlik (5.119)'dan bulunamaz ve Eşitlik (5.6) kullanılarak doğrudan $x(t)$ cinsinden elde edilmelidir.



Şekil 5-13

Şekil 5-13(b) ile Şekil 5-10'u karşılaştırdığımızda, A yerine $2A/T_0$ alındığında, Şekil 5-13(b)'deki $x'(t)$'nin Şekil 5-10'daki $x(t)$ ile aynı olduğunu görürüz. Dolayısıyla, Eşitlik (5.111)'de A yerine $2A/T_0$ alarak

$$x'(t) = \frac{4A}{j\pi T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.120}$$

elde ederiz. Eşitlik (5.119) ve (5.120)'yi birbirine eşitleyerek

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$jk\omega_0 c_k = \frac{4A}{j\pi k T_0} \quad \text{veya} \quad c_k = -\frac{2A}{\pi^2 k^2} \qquad k = 2m+1$$

buluruz. Şekil 5-13(a)'dan ve Eşitlik (5.6)'dan c_0

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{A}{2}$$

olarak bulunur. Bu değerler Eşitlik (5.118)'de yerine konulduğunda

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{2A}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.121}$$

elde edilir.

(b) Benzer biçimde, Eşitlik (5.8)'in türevini alarak

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\omega_0(b_k \cos k\omega_0 t - a_k \sin k\omega_0 t) \qquad (5.122)$$

elde ederiz. Eşitlik (5.122), $x'(t)$'nin Fourier kosinüs katsayılarının $n\omega_0 b_k$ ve sinüs katsayılarının $-n\omega_0 a_k$ olduğunu gösterir. Böylece, Eşitlik (5.112)'de A yerine $2A/T_0$ alarak

$$x'(t) = \frac{8A}{\pi T_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\omega_0 t \qquad (5.123)$$

elde ederiz. Eşitlik (5.122) ve (5.123)'ü birbirine eşitleyerek

$$b_k = 0 \qquad a_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$-k\omega_0 a_k = \frac{8A}{\pi k T_0} \qquad a_k = -\frac{4A}{\pi^2 k^2} \qquad k = 2m+1$$

buluruz. Eşitlik (5.6) ve (5.10) ve Şekil 5-13(a)'dan

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{A}{2}$$

olur. Bu değerleri Eşitlik (5.8)'e yerleştirerek

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)\omega_0 t \qquad (5.124)$$

elde ederiz.

5.10. Şekil 5-14(a)'da görülen üçgen dalga $x(t)$'yi düşünelim. Türev tekniğini kullanarak, $x(t)$'nin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.

Şekil 5-14(a)'daki üçgen dalga $x(t)$'nin türevi Şekil 5-14(b)'de görüldüğü gibidir ve

$$x'(t) = -\frac{A}{T_0} + A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \qquad (5.125)$$

ile verilir. Eşitlik (5.117) kullanılırsa, Eşitlik (5.125)

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{T_0} \cos k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad (5.126)$$

biçimini alır. Eşitlik (5.126) ve (5.122) birbirine eşitlenirse

$$a_k = 0,\ k \neq 0 \qquad k\omega_0 b_k = \frac{2A}{T_0} \qquad b_k = \frac{A}{k\pi}$$

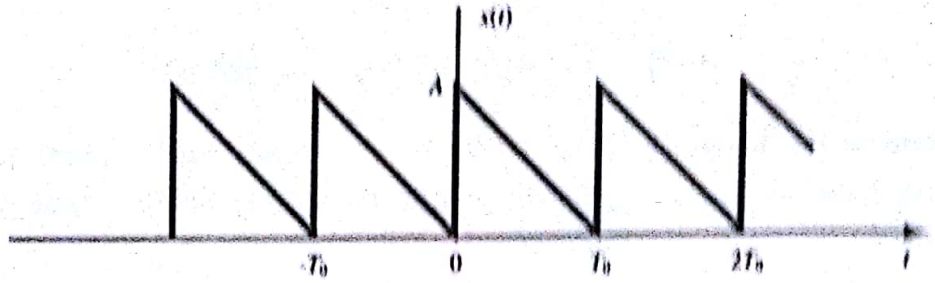
elde edilir. Şekil 5-14(a) ve Eşitlik (5.9a)'dan

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{A}{2}$$

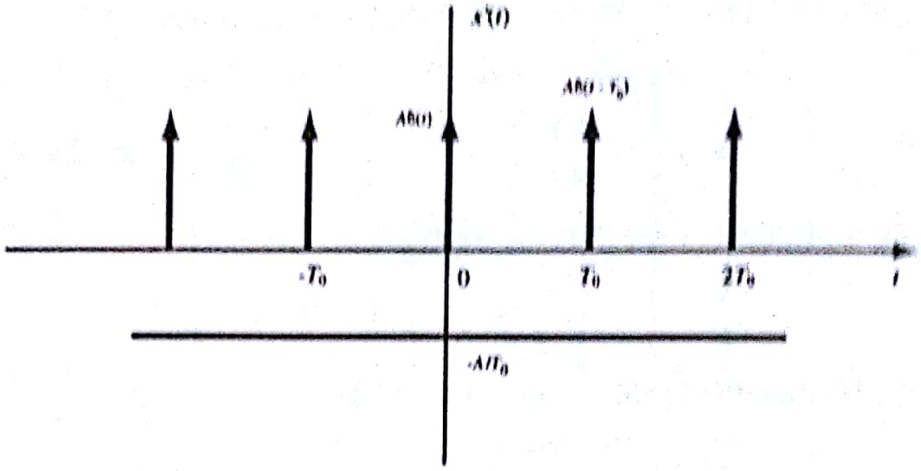
bulunur. Dolayısıyla, bu değerler Eşitlik (5.8)'te yerine konularak

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \qquad (5.127)$$

sonucuna ulaşılır.



(a)



(b)

Şekil 5-14

5.11. Şekil 5-15(a)'da görülen periyodik kare darbe katarı $x(t)$ için genlik spektrumunu bulunuz ve çiziniz; (a) $d=T_0/4$, ve (b) $d=T_0/8$ alınız.

Eşitlik (5.102a)'yı kullanarak

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{d} e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\frac{1}{-jk\omega_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^d = \frac{A}{T_0}\frac{1}{jk\omega_0}(1 - e^{-jk\omega_0 d})$$

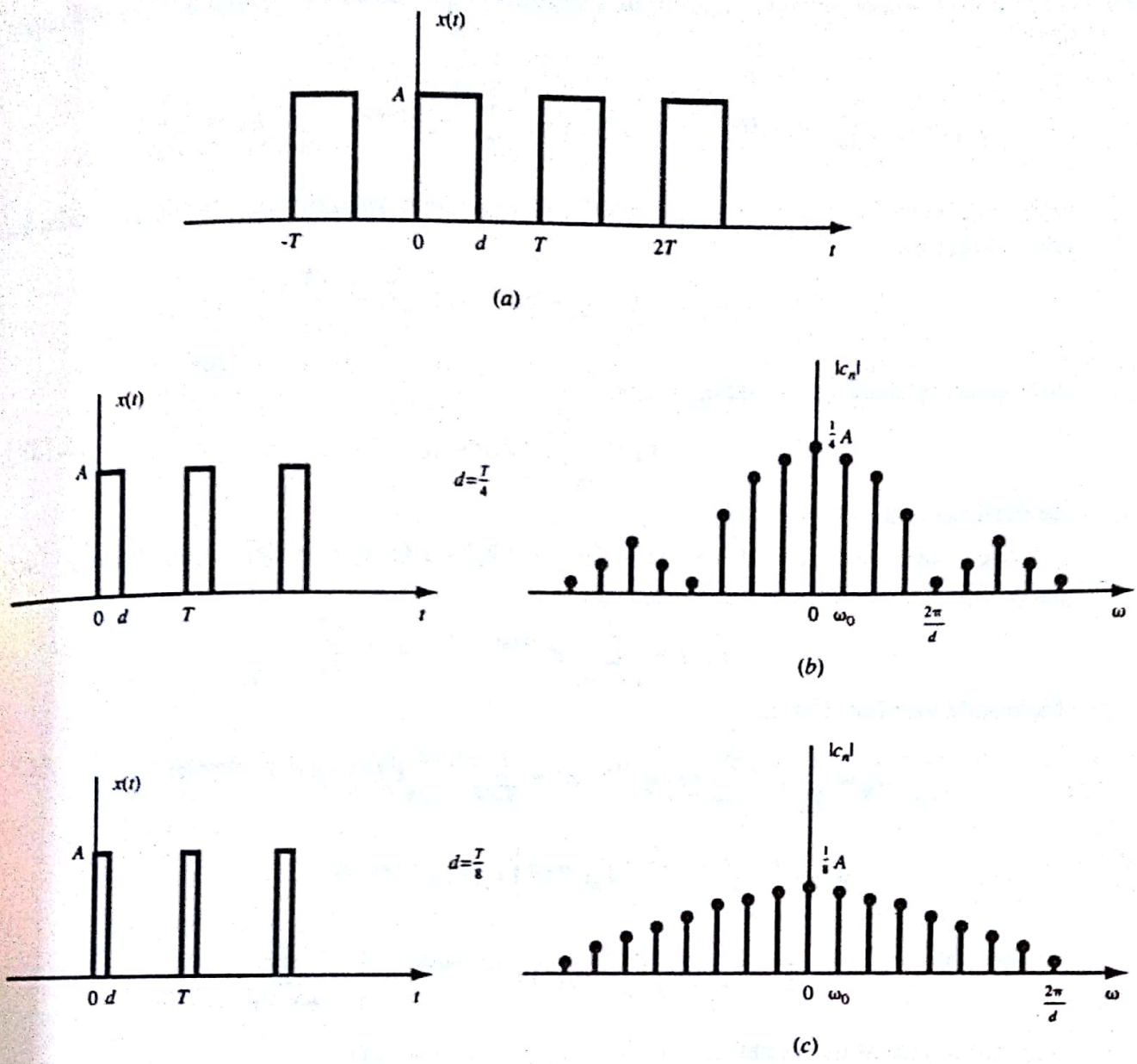
$$= \frac{A}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 d/2}(e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2})$$

$$= A\frac{d}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2} e^{-jk\omega_0 d/2} \qquad (5.128)$$

bulunur. $k\omega_0 d/2 = m\pi$ yani

$$n\omega_0 = \frac{m2\pi}{d} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

için $c_k=0$ olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 5-15

(*a*) $d = T_0/4, k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/4,$

$$|c_k| = \frac{A}{4}\left|\frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4}\right|$$

Bu durum için genlik spektrumu Şekil 5-15(b)'de gösterilmiştir.

(*b*) $d = T_0/8, k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/8,$

$$|c_k| = \frac{A}{8}\left|\frac{\sin(k\pi/8)}{k\pi/8}\right|$$

Bu durum için genlik spektrumu Şekil 5-15(c)'de gösterilmiştir.

5.12. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ temel periyodu T_0 olan iki periyodik sinyal olsun ve bunların karmaşık Fourier serisi

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \qquad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

biçiminde verilsin. $x(t) = x_1(t)\, x_2(t)$ sinyalinin aynı temel T_0 periyoduna sahip periyodik bir işlev olduğunu ve

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

biçiminde yazılabileceğini gösteriniz. c_k,

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m} \tag{5.129}$$

ile verilmektedir.

Bu durumda; $x(t+T_0) = x_1(t+T_0)x_2(t+T_0) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$ olduğundan $x(t)$ periyodiktir ve temel periyodu T_0'dır. $x(t)$'yi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

biçiminde yazalım. Burada c_k,

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)\, x_2(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jm\omega_0 t} \right) x_2(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_2(t)\, e^{-j(k-m)\omega_0 t}\, dt \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m}$$

biçiminde yazılabilir, çünkü e_k

$$e_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_2(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

olarak verilmektedir ve parantez içindeki terim e_{k-m}'e eşittir.

5.13. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ Problem 5.12'de verilen iki periyodik sinyal olsun. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ için

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k} \tag{5.130}$$

olduğunu gösteriniz. Eşitlik (5.130) periyodik sinyaller için Parseval bağıntısı olarak bilinir.

Problem 5.12 ve Eşitlik (5.129)'dan

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki ifadede $k = 0$ alarak

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t)\, dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k}$$

elde ederiz.

5.14. Fourier serileri için (5.21) ile verilen Parseval özdeşliğini yani

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Eğer $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ yazılırsa buradan

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \qquad (5.131)$$

bulunur; burada $*$ karmaşık eşleniği gösterir. Eşitlik (5.131) $x(t)$'nin Fourier katsayıları c_k ise, $x^*(t)$'nin Fourier katsayılarının c_{-k}^* olduğunu gösterir. Eşitlik (5.130)'da $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x^*(t)$ aldığımızda $d_k = c_k$ ve $e_k = c_{-k}^*$ ya da ($e_{-k} = c_k^*$) buluruz ve

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_k^* \qquad (5.132)$$

ya da

$$\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

sonucuna ulaşırız.

5.15. *(a)* Periyodik konvolüsyon $f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$ Problem 2.8'de tanımlanmıştı. d_n ve e_n, sırasıyla, $x_1(t)$ ve $x_2(t)$'nin karmaşık Fourier katsayıları ise, $f(t)$'nin karmaşık Fourier katsayısı c_k'nın

$$c_k = T_0 d_k e_k \qquad (5.133)$$

ile verildiğini gösteriniz; T_0, $x_1(t)$, $x_2(t)$ ve $f(t)$'nin ortak temel periyodudur.

(a) Problem 2.8(c)'de tanımlanan $f(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisini bulunuz.

(a) Eşitlik (2.70)'ten (Problem 2.8)

$$f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau$$

$x_1(t)$ ve $x_2(t)$'yi

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \qquad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t}$$

biçiminde yazalım. Bu durumda

$$f(t) = \int_0^{T_0} x(\tau)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0(t-\tau)}\right)d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t}\int_0^{T_0} x(\tau)\,e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau$$

olur.

$$d_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(\tau)\,e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau$$

olduğundan

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0 d_k e_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (5.134)$$

elde ederiz; bu eşitlik $f(t)$'nin karmaşık Fourier katsayısı c_k'nin $T_0 d_k e_k$'ya eşit olduğunu gösterir.

(b) Problem 2.8(c)'de $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ alınmıştı. $x(t)$, Şekil 2-12 ve 5-8'de (Problem 5.5) görülmektedir. Eşitlik (5.105)'ten

$$d_0 = e_0 = \frac{A}{2} \qquad d_k = e_k = \begin{cases} 0 & k = 2m,\ m \neq 0 \\ A/jk\pi & k = 2m+1 \end{cases}$$

yazabiliriz. Böylece, $f(t)$'nin karmaşık Fourier katsayısı c_k, Eşitlik (5.133) kullanılarak

$$c_0 = T_0 d_0 e_0 = T_0 \frac{A^2}{4}$$

$$c_k = T_0 d_k e_k = \begin{cases} 0 & k = 2m,\ m \neq 0 \\ -T_0 A^2/k^2\pi^2 & k = 2m+1 \end{cases}$$

biçiminde bulunur. Problem 2.8(c)'de, Şekil 2-13(b)'de gösterilen $f(t) = x_1(t) \circledS x_2(t)$ işlevinin Şekil 15-13(a)'da gösterilen $x(t)$ ile orantılı olduğuna dikkat ediniz. Böylece, Problem 5.9'un sonuçlarında A yerine $A^2T_0/2$ alarak

$$c_0 = T_0 \frac{A^2}{4} \qquad c_k = \begin{cases} 0 & k = 2m,\ m \neq 0 \\ -T_0 A^2/k^2\pi^2 & k = 2m+1 \end{cases}$$

elde ederiz, bu sonuç Eşitlik (5.133) kullanılarak elde edilen sonuçla aynıdır.

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

5.16. (a) Eşitlik (5.50) yani

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

ile verilen zamanda öteleme özelliğini kanıtlayınız.

(5.31)'deki tanımdan

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

yazalım. $\tau = t - t_0$ değişken değiştirimiyle

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega(\tau + t_0)}\, d\tau$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$x(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

olur.

5.17. Eşitlik (5.51) yani

$$x(t)\, e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

ile verilen frekans ötelemesi özelliğini kanıtlayınız.

(5.31)'deki tanımdan

$$\mathcal{F}\{x(t)\, e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega_0 t}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j(\omega - \omega_0)t}\, dt = X(\omega - \omega_0)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$x(t)\,e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

olur.

5.18. Eşitlik (5.54) ile, yani

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

ile verilen çifteşlik özelliğini kanıtlayınız.

(5.32) ile verilen ters Fourier dönüşümünün tanımından

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = 2\pi x(t)$$

elde ederiz. t yerine $-t$ alarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,e^{-j\omega t}\,d\omega = 2\pi x(-t)$$

buluruz. Burada t ve ω 'nin yerlerini değiştirerek

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = 2\pi x(-\omega)$$

elde ederiz. $x(t)$'nin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

ile verildiğinden

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

olduğu sonucunu çıkartırız.

5.19. Şekil 5-16(a)'da görülen ve

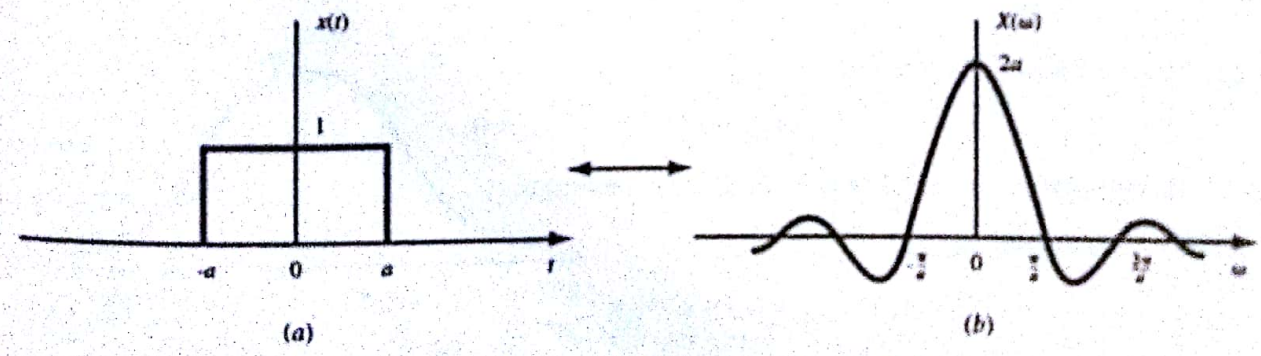
$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \qquad (5.135)$$

ile tanımlanan dikdörtgen darbe sinyali $x(t)$'nin Fourier dönüşümünü bulunuz.

(5.31)'de verilen tanımdan

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}) = 2\frac{\sin\omega a}{\omega} = 2a\frac{\sin\omega a}{\omega a}$$



Şekil 5-16 Dikdörtgen darbe ve Fourier dönüşümü

bulunur. Dolayısıyla

$$p_a(t) \longleftrightarrow 2\frac{\sin \omega a}{\omega} = 2a\frac{\sin \omega a}{\omega a} \qquad (5.136)$$

elde edilir. $x(t)$'nin Fourier dönüşümü $X(\omega)$, Şekil 5-16(b)'de gösterilmiştir.

5.20. Şekil 5-17(a)'da görülen ve

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$$

ile verilen sinyalin Fourier dönüşümünü bulunuz.

Eşitlik (5.136)'dan

$$p_a(t) \longleftrightarrow 2\frac{\sin \omega a}{\omega}$$

yazalım. Burada, çifteşlik özelliği (5.54)'ten

$$2\frac{\sin at}{t} \longleftrightarrow 2\pi p_a(-\omega)$$

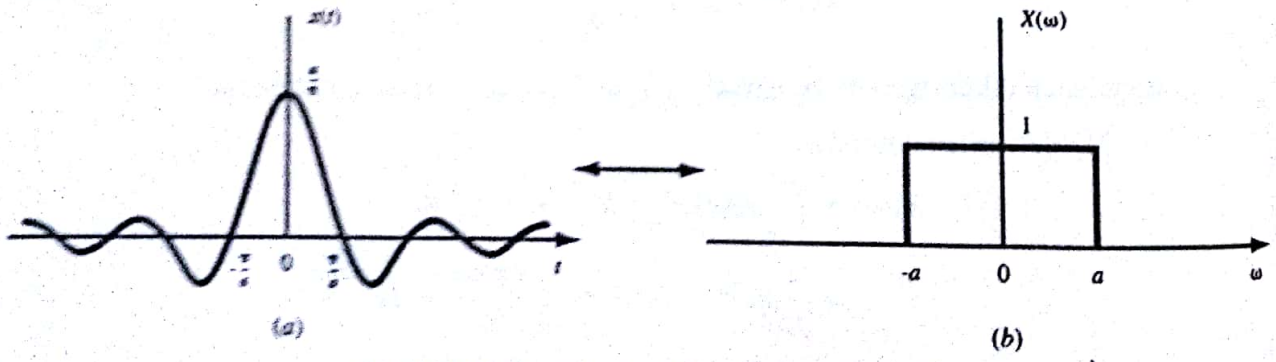
elde ederiz. Her iki tarafı 2π 'ye bölerek (ve doğrusallık özelliğini kullanarak)

$$\frac{\sin at}{\pi t} \longleftrightarrow p_a(-\omega) = p_a(\omega) \qquad (5.137)$$

elde ederiz; $p_a(\omega)$

$$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

ile tanımlanır [bkz. Eşitlik (5.135) ve Şekil 5-17(b)].



Şekil 5-17 sin $at/\pi t$ ve Fourier dönüşümü

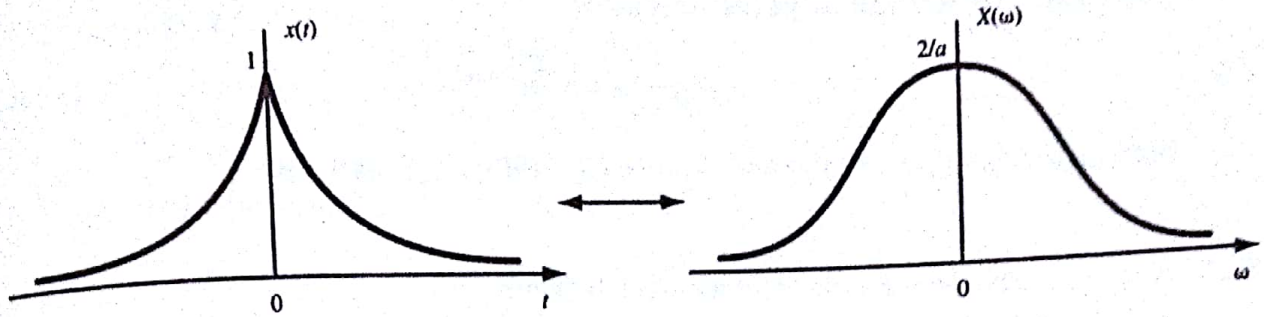
5.21. Şekil 5-18(a)'da görülen ve

$$x(t) = e^{-a|t|} \qquad a > 0$$

ile tanımlanan sinyalin Fourier dönüşümünü bulunuz.

$x(t)$ sinyali

$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$$



Şekil 5-18 $e^{-|a|t}$ **ve Fourier dönüşümü**

biçiminde yazılabilir. Bu durumda

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

olur. Böylece

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad (5.138)$$

elde ederiz. $x(t)$'nin Fourier dönüşümü $X(\omega)$ Şekil 5-18(b)'de gösterilmiştir.

5.22. Şekil 5-19(a)'da görülen ve

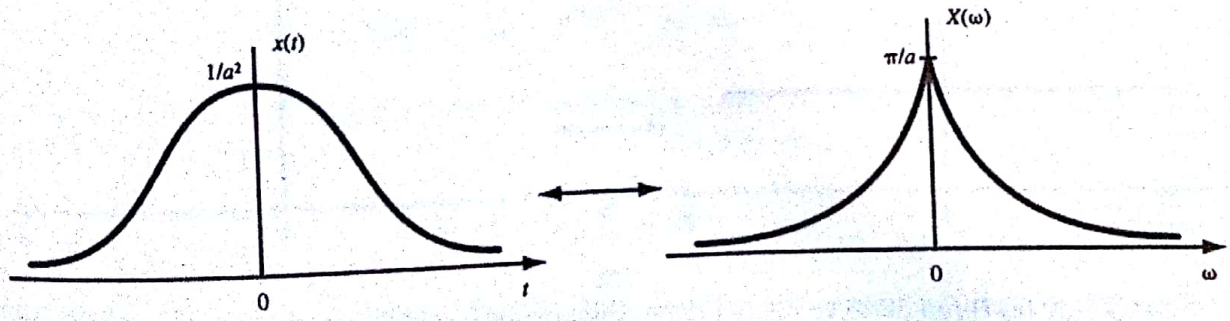
$$x(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$$

ile verilen sinyalin Fourier dönüşümünü bulunuz.

Eşitlik (5.138)'den

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

yazalım. Burada, (5.54) çifteşlik özelliğini kullanarak



Şekil 5-19 $1/(a^2+t^2)$ **ve Fourier dönüşümü**

elde ederiz. Her iki tarafı $2a$'ya böldüğümüzde

$$\frac{1}{a^2+t^2} \longleftrightarrow \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|} \tag{5.139}$$

buluruz. $x(t)$'nin Fourier dönüşümü $X(\omega)$ Şekil 5-19(b)'de gösterilmiştir.

5.23. Aşağıdaki sinyallerin Fourier dönüşümlerini bulunuz.

(*a*) $x(t) = 1$ (*b*) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

(*c*) $x(t) = e^{-j\omega_0 t}$ (*d*) $x(t) = \cos \omega_0 t$

(*e*) $x(t) = \sin \omega_0 t$

(*a*) Eşitlik (5.43)'ten

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \tag{5.140}$$

yazalım. Böylece, (5.54) çifteşlik özelliğinden

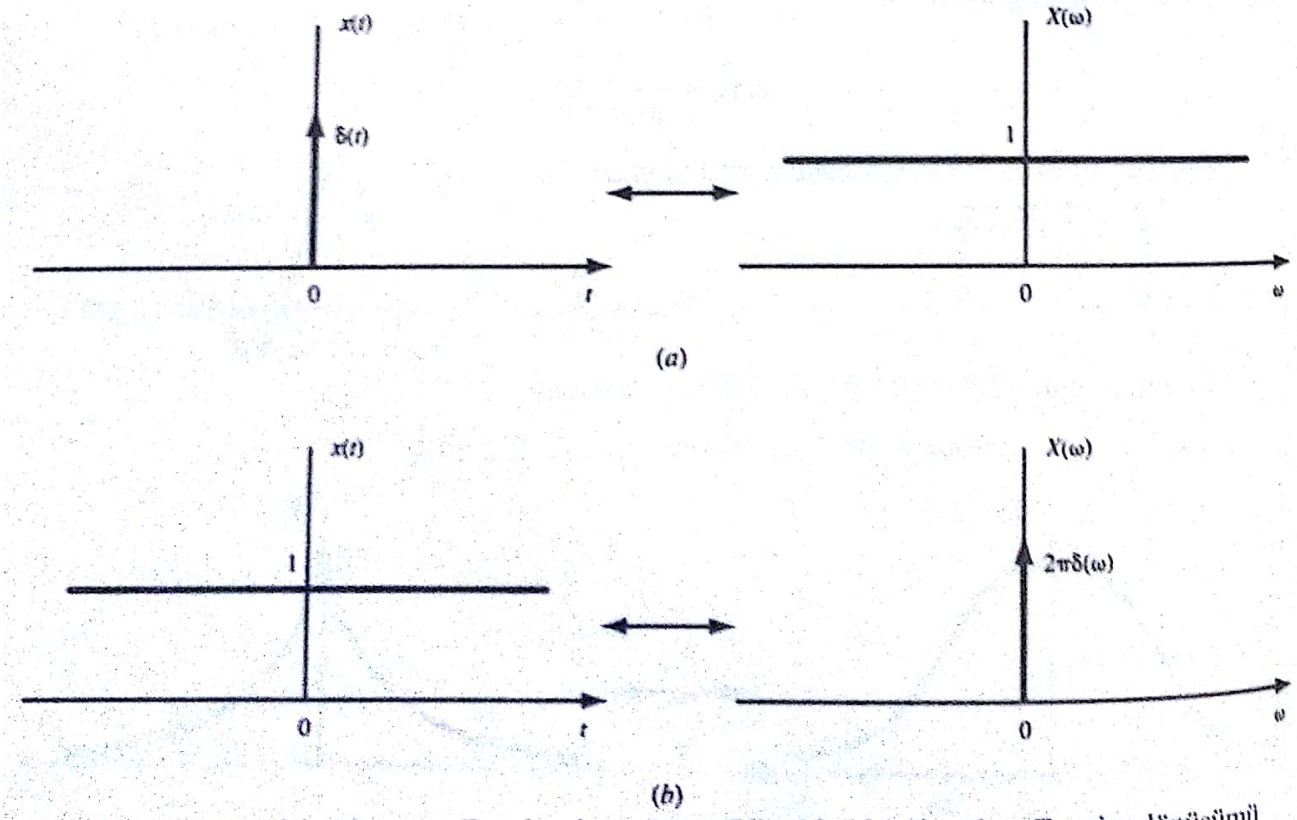
$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \tag{5.141}$$

elde ederiz. Şekil 5-20(a) ve (b), sırasıyla, Eşitlik (5.140) ve (5.141)'deki ilişkileri göstermektedir.

(*b*) Frekans ötelemesi özelliği (5.51)'i Eşitlik (5.141)'e uygulayarak

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{5.142}$$

elde ederiz.



Şekil 5-20 (a) Birim dürtü ve Fourier dönüşümü; (b) sabit (dc) sinyal ve Fourier dönüşümü

(c) Eşitlik (5.142)'den

$$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \qquad (5.143)$$

bulunur.

(d) Euler formülünden

$$\cos \omega_0 t = \tfrac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

yazalım. Böylece, Eşitlik (5.142) ve (5.143) ve doğrusallık özeliği (5.49)'dan

$$\cos \omega_0 t \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \qquad (5.144)$$

elde ederiz. Şekil 5-21, Eşitlik (5.144)'teki ilişkiyi gösterir.

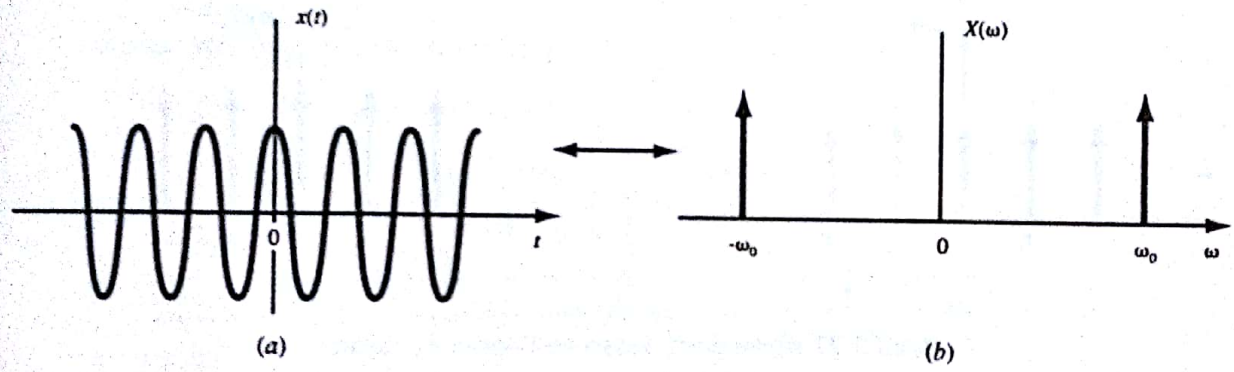
(e) Benzer olarak

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

yazabiliriz, ve yine Eşitlik (5.142) ve (5.143)'ü kullanarak

$$\sin \omega_0 t \longleftrightarrow -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \qquad (5.145)$$

elde ederiz.



Şekil 5-21 Kosinüs sinyali ve Fourier dönüşümü

5.24. Periyodu T_0 olan bir periyodik $x(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

$x(t)$ sinyalini

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

biçiminde yazalım. Her iki tarafın Fourier dönüşümünü alarak ve Eşitlik (5.142) ve doğrusallık özelliği (5.49)'u kullanarak

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) \qquad (5.146)$$

elde ederiz; bu eşitlik, periyodik bir sinyalin Fourier dönüşümünün, sinyalin harmonik frekanslarında yer alan eşit aralıklı bir dürtü dizisi olduğunu gösterir.

5.25. Şekil 5-22(a)'da görülen ve

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

ile verilen periyodik dürtü katarının Fourier dönüşümünü bulunuz.

Problem 5.8'deki Eşitlik (5.115)'ten $\delta_{T_0}(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisi

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

ile verilir. Eşitlik (5.146)'yı kullanarak

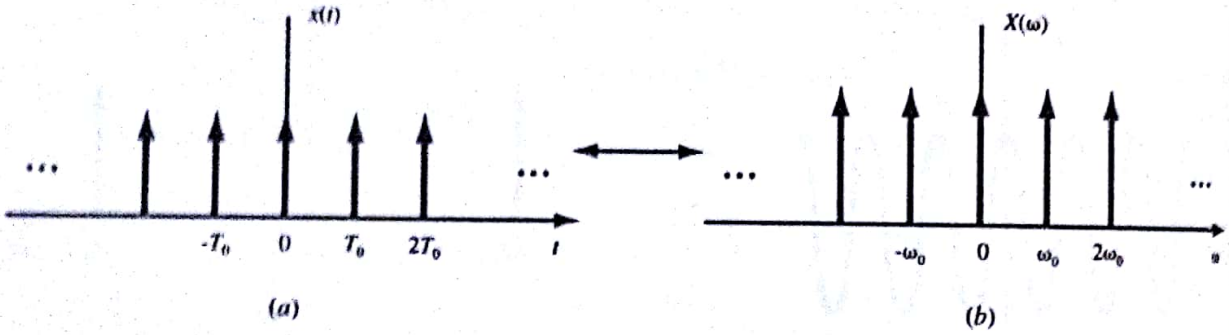
$$\mathcal{F}[\delta_{T_0}(t)] = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

ya da

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \longleftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \tag{5.147}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, birim dürtü katarının Fourier dönüşümü yine benzer bir dürtü katarıdır [Şekil 5-22(b)].



Şekil 5-22 Birim dürtü katarı ve Fourier dönüşümü

5.26. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayınız.

$$x(t)\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \tfrac{1}{2}X(\omega + \omega_0) \tag{5.148}$$

$$x(t)\sin\omega_0 t \longleftrightarrow -j\left[\tfrac{1}{2}X(\omega - \omega_0) - \tfrac{1}{2}X(\omega + \omega_0)\right] \tag{5.149}$$

Eşitlik (5.148) modülasyon teoremi olarak bilinir.

Euler formülünden

$$\cos\omega_0 t = \tfrac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

yazalım. Buradan, frekans ötelemesi özelliği (5.51) ve doğrusallık özelliği (5.49) kullanılarak

$$\mathcal{F}[x(t)\cos\omega_0 t] = \mathcal{F}\left[\tfrac{1}{2}x(t)\,e^{j\omega_0 t} + \tfrac{1}{2}x(t)\,e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \tfrac{1}{2}X(\omega + \omega_0)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$x(t)\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}X(\omega - \omega_0) + \tfrac{1}{2}X(\omega + \omega_0)$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

ve

$$\mathcal{F}[x(t)\sin \omega_0 t] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}x(t)\,e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}x(t)\,e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j}X(\omega + \omega_0)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$x(t)\sin \omega_0 t \longleftrightarrow -j\left[\tfrac{1}{2}X(\omega - \omega_0) - \tfrac{1}{2}X(\omega + \omega_0)\right]$$

bulunur.

5.27. Bir $x(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümü Şekil 5-23(a)'da görülmekte ve

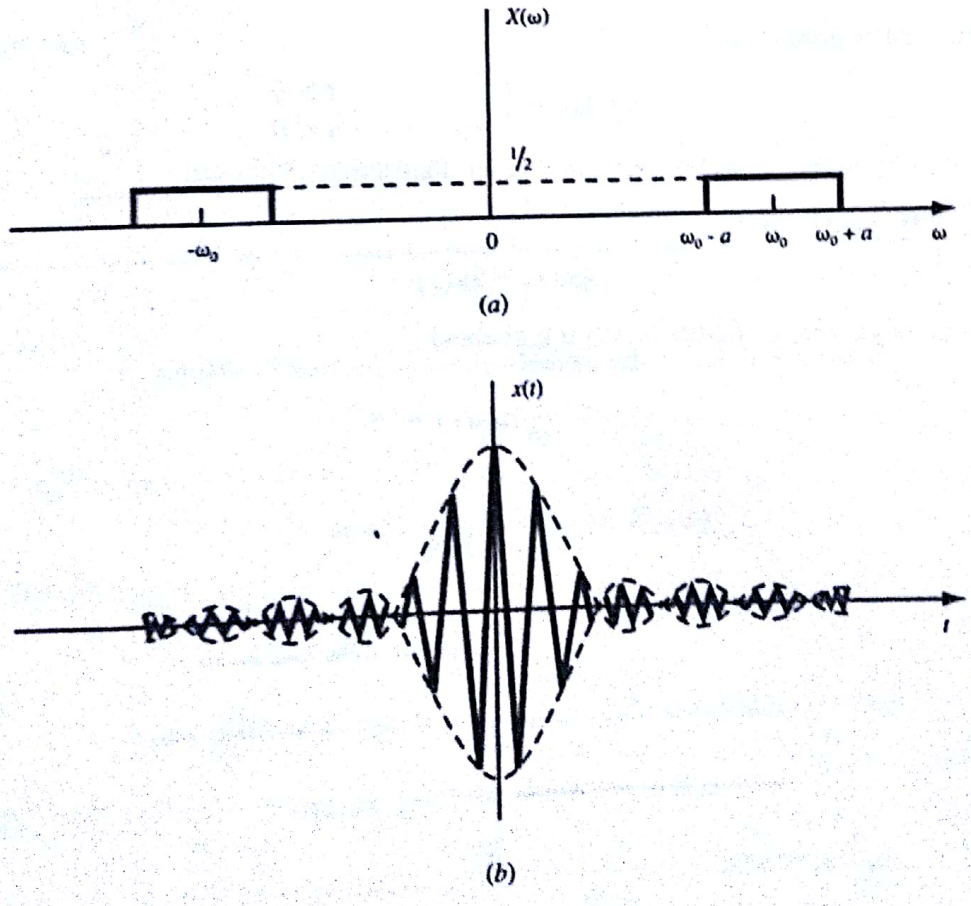
$$X(\omega) = \tfrac{1}{2}p_a(\omega - \omega_0) + \tfrac{1}{2}p_a(\omega + \omega_0)$$

ile verilmektedir. $x(t)$ sinyalini bulunuz ve çiziniz.

Eşitlik (5.137) ve modülasyon teoremi (5.148)'den

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t}\cos \omega_0 t$$

bulunur; $x(t)$ Şekil 5-23(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 5-23

5.28. (5.55) ile verilen türev özelliğini yani

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Eşitlik (5.32)'den $X(\omega)$'nın ters Fourier dönüşümü

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{5.150}$$

olarak yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{\partial}{\partial t}(e^{j\omega t})\,d\omega\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\end{aligned} \tag{5.151}$$

bulunur. Eşitlik (5.151) ile Eşitlik (5.150)'yi karşılaştırdığımızda, $dx(t)/dt$'nin $j\omega X(\omega)$'nın ters Fourier dönüşümü olduğunu görürüz. Böylece

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow j\omega X(\omega)$$

elde edilir.

5.29. Şekil 5-24'te görülen ve

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \tag{5.152}$$

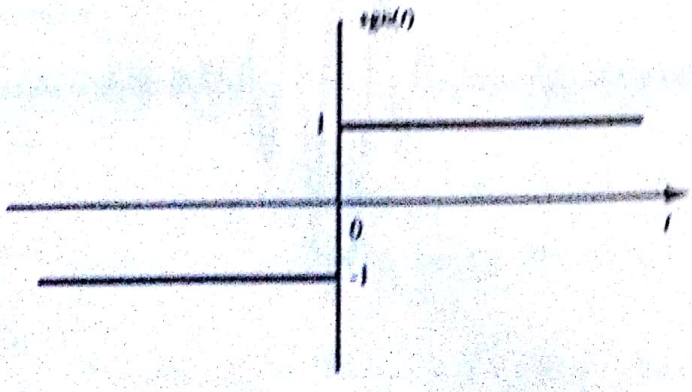
biçiminde tanımlanan işaret işlevinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

İşaret işlevi, $\operatorname{sgn}(t)$

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (1.30)'u kullanarak

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t) = 2\delta(t)$$



Şekil 5-24 İşaret İşlevi

yazabiliriz. sgn(t)'nin Fourier dönüşümünü

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

ile gösterelim. Türev özelliği (5.55)'i uygulayarak

$$j\omega X(\omega) = \mathcal{F}[2\delta(t)] = 2 \longrightarrow X(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega} \tag{5.153}$$

olur. sgn (t)'nin bir tek işlev olduğuna, ve dolayısıyla Fourier dönüşümünün ω 'nın yalnızca sanal bir işlevi olduğuna dikkat ediniz (Problem 5.41).

5.30. Eşitlik (5.48)'i yani

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{5.154}$$

eşitliğini kanıtlayınız.

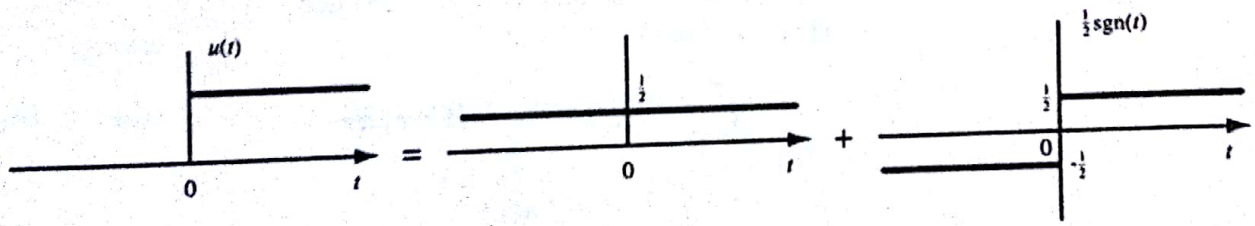
Şekil 5-25'te görüldüğü gibi, $u(t)$

$$u(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{sgn}(t)$$

biçiminde yazılabilir. $u(t)$'nin çift bileşeninin $\frac{1}{2}$ ve tek bileşeninin $\frac{1}{2}$ sgn(t) olduğuna dikkat ediniz. Böylece, Eşitlik (5.141) ve (5.153) ve doğrusallık özelliği (5.49)'dan

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

elde ederiz.



Şekil 5-25 Birim basamak işlevi ve çift ve tek bileşenleri

5.31. Zaman konvolüsyonu teoremi (5.58)'i, yani

$$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(2.6) ve (5.31) tanımlarını kullanarak

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-j\omega t}\,dt$$

yazabiliriz. Entegrasyon sırasını değiştirerek

$$\mathcal{F}[x_1(t) * x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt\right]d\tau$$

elde ederiz. Zamanda öteleme özelliği (5.50)'den

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt = X_2(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

buluruz ve böylece

$$\mathcal{F}[x_1(t)*x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)X_2(\omega)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau\right]X_2(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$x_1(t)*x_2(t) \longleftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$$

olur.

5.32. Zaman konvolüsyonu teoremi (5.58)'i kullanarak $X(\omega) = 1/(a+j\omega)^2$'nin ters Fourier dönüşümünü bulunuz.

Eşitlik (5.45)'ten

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} \tag{5.155}$$

yazabiliriz. $X(\omega)$'yı

$$X(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2} = \left(\frac{1}{a+j\omega}\right)\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)$$

biçiminde yazalım. Böylece, zaman konvolüsyonu teoremi (5.58)'den

$$x(t) = e^{-at}u(t)*e^{-at}u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= e^{-at}\int_0^t d\tau = te^{-at}u(t)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$te^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2} \tag{5.156}$$

olur.

5.33. Entegralleme özelliği (5.57)'yi yani

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Eşitlik (2.60)'dan

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t)*u(t)$$

yazabiliriz. Böylece, zaman konvolüsyonu teoremi (5.58)'den ve Eşitlik (5.154)'ten

$$\mathcal{F}[x(t)*u(t)] = X(\omega)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \pi X(\omega)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

$$= \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

elde ederiz; Eşitlik (1.25)'ten $X(\omega)\delta(\omega) = X(0)\delta(\omega)$ olur. Dolayısıyla

$$\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right] \longleftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

bulunur.

5.34. Entegralleme özelliği (5.57)'yi ve Eşitlik (1.31)'i kullanarak $u(t)$'nin Fourier dönüşümünü bulunuz.

Eşitlik (1.31)'den

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

yazabiliriz. Bu durumda Eşitlik (5.140)'dan

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

elde ederiz. Eşitlik (5.57)'de $x(\tau) = \delta(\tau)$ alarak

$$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(\omega) = 1 \qquad \text{ve} \qquad X(0) = 1$$

ve

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

buluruz.

5.35. Frekans konvolüsyonu teoremi (5.59)'u, yani

$$x_1(t)x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(5.31) ve (5.32) tanımlarından

$$\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)e^{j\lambda t}\,d\lambda\right]x_2(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j(\omega-\lambda)t}\,dt\right]d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$x_1(t)x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

olur.

5.36. Frekans konvolüsyonu teoremi (5.59)'u kullanarak, modülasyon teoremi (5.148)'i türetiniz.

Eşitlik (5.144)'ten

$$\cos \omega_0 t \longleftrightarrow \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

elde ederiz. Frekans konvolüsyonu teoremi (5.59)'dan

$$\begin{aligned} x(t)\cos\omega_0 t &\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega) * [\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)] \\ &= \tfrac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \tfrac{1}{2}X(\omega+\omega_0) \end{aligned}$$

buluruz. Son eşitlik Eşitlik (2.59)'dan çıkar.

5.37. Parseval bağıntısı (5.63)'ü, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega)\,d\omega$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Frekans konvolüsyonu teoremi (5.59)'dan

$$\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)\,d\lambda$$

yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x_1(t)x_2(t)]e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)\,d\lambda$$

elde ederiz. $\omega = 0$ alarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)X_2(-\lambda)\,d\lambda$$

buluruz. Geçici entegralleme değişkenini değiştirerek

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega)\,d\omega$$

elde ederiz.

5.38. Fourier dönüşümü için Parseval özdeşliğini ya da Parseval teoremini [Eşitlik (5.64)] ya

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(5.31)'deki tanımdan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}\,dt\right]^* = X^*(-\omega) \end{aligned}$$

yazabiliriz; $*$ karmaşık eşleniği göstermektedir. Dolayısıyla

$$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-\omega)$$

olur. Parseval bağıntısı (5.63)'te $x_1(t)=x(t)$ ve $x_2(t)=x^*(t)$ alarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega)\,d\omega$$

ya da

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$$

elde ederiz.

5.39. Eşitlik (5.61a)'nın yani

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

eşitliğinin $x(t)$'nin gerçel olması için gerekli ve yeterli koşul olduğunu gösteriniz.

(5.31)'deki tanımdan

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

yazalım. Eğer $x(t)$ gerçelse, $x^*(t) = x(t)$ olur ve

$$X^*(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}\,dt = X(-\omega)$$

elde edilir. Böylece, $x(t)$'nin gerçel olması için gerekli koşul $X^*(\omega) = X(-\omega)$ olmasıdır. Daha sonra $X^*(\omega) = X(-\omega)$ olduğunu varsayalım. Ters Fourier dönüşümünün tanımı (5.32)'den

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

yazalım. Bu durumda

$$x^*(t) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(-\omega)e^{-j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)e^{j\lambda t}\,d\lambda = x(t)$$

elde ederiz; bu eşitlik $x(t)$'nin gerçel olduğunu gösterir. Böylece,

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

eşitliğinin $x(t)$'nin gerçel olması için gerekli ve yeterli koşul olduğu sonucuna ulaşırız.

5.40. Aşağıdaki sinyallerin Fourier dönüşümlerini bulunuz.

(a) $x(t) = u(-t)$

(b) $x(t) = e^{at}u(-t),\ a > 0$ $\quad x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega)$

Eşitlik (5.53)'ten

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega)$$

yazabiliriz.

Böylece, eğer $x(t)$ gerçelse, Eşitlik (5.61a)'dan

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) \tag{5.158}$$

elde ederiz.

(a) Eşitlik (5.154)'ten

$$u(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

yazabiliriz. Böylece, Eşitlik (5.158)'den

$$u(-t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \tag{5.159}$$

elde ederiz.

(b) Eşitlik (5.155)'ten

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

yazabiliriz. Böylece, Eşitlik (5.158) yardımıyla

$$e^{at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{a-j\omega} \tag{5.160}$$

sonucuna ulaşırız.

5.41. Gerçel bir $x(t)$ sinyalini düşünelim. $x(t)$ için

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = A(\omega) + jB(\omega)$$

ve

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

olsun; $x_e(t)$ ve $x_o(t)$, sırasıyla $x(t)$'nin çift ve tek bileşenleridir. Aşağıdakileri gösteriniz.

$$x_e(t) \longleftrightarrow A(\omega) \tag{5.161a}$$

$$x_o(t) \longleftrightarrow jB(\omega) \tag{5.161b}$$

Eşitlik (1.5) ve (1.6)'dan

$$x_e(t) = \tfrac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \tfrac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

yazalım. Eğer $x(t)$ gerçelse, Eşitlik (5.158)'den

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) = A(\omega) - jB(\omega)$$

elde ederiz. Böylece

$$x_e(t) \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}X(\omega) + \tfrac{1}{2}X^*(\omega) = A(\omega)$$

$$x_o(t) \longleftrightarrow \tfrac{1}{2}X(\omega) - \tfrac{1}{2}X^*(\omega) = jB(\omega)$$

olduğu sonucunu çıkartırız. Eşitlik (5.161a) ve (5.161b), sırasıyla, gerçel bir çift sinyalin Fourier dönüşümünün ω'nın gerçel bir işlevi olduğunu, ve gerçel bir tek sinyalin Fourier dönüşümünün ω'nın sanal bir işlevi olduğunu gösterir.

5.42. Eşitlik (5.161a) ve (5.155)'i kullanarak $e^{-a|t|}$'nin ($a>0$) Fourier dönüşümünü bulunuz.

Eşitlik (5.155)'ten

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a}{a^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

yazabiliriz. Eşitlik (1.5)'ten $e^{-at}u(t)$'nin çift bileşeni

$$\tfrac{1}{2}e^{-at}u(t) + \tfrac{1}{2}e^{at}u(-t) = \tfrac{1}{2}e^{-a|t|}$$

ile verilir. Böylece, Eşitlik (5.161a)'dan

$$\frac{1}{2}e^{-a|t|} \longleftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right) = \frac{a}{a^2+\omega^2}$$

ya da

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

buluruz; bu sonuç Problem 5.21'de [Eşitlik (5.138)] elde edilmiş olan sonucun aynısıdır.

5.43. Aşağıda verilen gauss darbesi sinyalinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

$$x(t) = e^{-at^2} \qquad a>0$$

(5.31)'deki tanımdan

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-j\omega t}\,dt \tag{5.162}$$

yazalım. Eşitlik (5.162)'nin her iki tarafının ω'ya göre türevini alarak

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -j\int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2}e^{-j\omega t}\,dt$$

elde ederiz. Burada, kısmi entegrasyon formülünü kullanarak

$$\int_{\alpha}^{\beta} u\,dv = uv\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v\,du$$

ve

$$u = e^{-j\omega t} \qquad \text{ve} \qquad dv = te^{-at^2}\,dt$$

alarak

$$du = -j\omega e^{-j\omega t}\,dt \qquad \text{ve} \qquad v = -\frac{1}{2a}e^{-at^2}$$

elde ederiz ve $a>0$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-at^2}e^{-j\omega t}\,dt = -\frac{1}{2a}e^{-at^2}e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - j\frac{\omega}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= -j\frac{\omega}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-j\omega t}\,dt$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a}X(\omega)$$

buluruz. $X(\omega)$ için yukarıdaki ayrılabilir diferansiyel denklemi çözerek

$$X(\omega) = Ae^{-\omega^2/4a} \tag{5.163}$$

elde ederiz; burada A keyfi bir sabittir. A'nın değerini bulmak için aşağıdaki yolu izleriz. Eşitlik (5.162)'de $\omega = 0$ alarak ve değişken değişimi yaparak

$$X(0) = A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-at^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

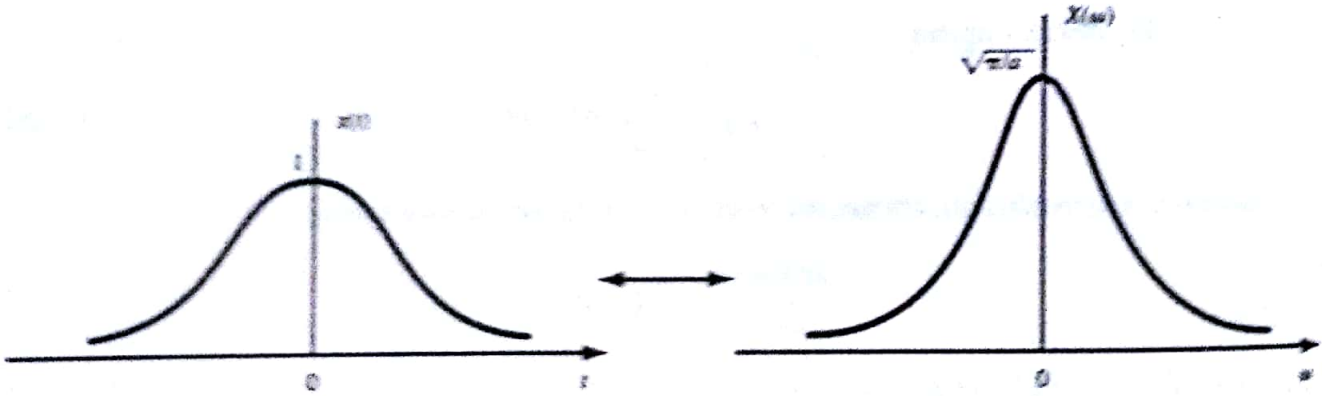
buluruz. A'nın bu değerini Eşitlik (5.163)'te yerine koyarak

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\omega^2/4a} \tag{5.164}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$e^{-at^2},\ a > 0 \longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\omega^2/4a} \tag{5.165}$$

sonucuna ulaşırız. Gauss darbe sinyalinin Fourier dönüşümünün frekans bölgesinde de bir gauss darbesi olduğuna dikkat ediniz. Şekil 5-26, Eşitlik (5.165)'teki ilişkiyi göstermektedir.



Şekil 5-26 Gauss darbesi ve Fourier dönüşümü

FREKANS TEPKİSİ

5.44. Fourier dönüşümü kullanarak, Problem 2.25'i yeniden çözünüz.

Sistem

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

eşitliğiyle tanımlanmaktadır. Yukarıdaki eşitliğin Fourier dönüşümünü alarak

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) + j\omega X(\omega)$$

ya da

$$(j\omega + 2)Y(\omega) = (1 + j\omega)X(\omega)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, Eşitlik (5.67)'den frekans tepkisi $H(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega} = \frac{2 + j\omega - 1}{2 + j\omega} = 1 - \frac{1}{2 + j\omega}$$

olur. $H(\omega)$'nın ters Fourier dönüşümünü alarak, dürtü tepkisi $h(t)$'yi

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

biçiminde buluruz. Yöntemin Laplace dönüşümü yönteminde, s yerine $j\omega$ alınmasına izin verdiğinde dikkat ediniz (Problem 3.29).

5.45. Aşağıdaki denklemle tanımlanan sürekli zamanlı bir DZD sistemi düşünelim.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \qquad (5.166)$$

Fourier dönüşümünü kullanarak, aşağıdaki giriş sinyallerinin her biri için $y(t)$ çıkışını bulunuz.

(a) $x(t) = e^{-t}u(t)$

(b) $x(t) = u(t)$

(a) Eşitlik (5.166)'nın Fourier dönüşümünü alarak

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2 + j\omega}$$

olur. Eşitlik (5.155)'ten

$$X(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

ve

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega}$$

olur. Buradan

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

bulunur.

(b) Eşitlik (5.1/38)'ten

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

yazabiliriz. Böylece Eşitlik (5.96) ve kısmi kesrlere açılım tekniği kullanılarak

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]\frac{1}{2+j\omega}$$

$$= \pi\delta(\omega)\frac{1}{2+j\omega} + \frac{1}{j\omega(2+j\omega)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\delta(\omega) + \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2}\frac{1}{2+j\omega}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] - \frac{1}{2}\frac{1}{2+j\omega}$$

elde ederiz burada $f(\omega)\delta(\omega) = f(0)\delta(\omega)$ olduğu gerçeği kullanılmıştır [Eşitlik (1.25)].

Böylece

$$y(t) = \tfrac{1}{2}u(t) - \tfrac{1}{2}e^{-2t}u(t) = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$$

olur. Bu örnekte, $u(t)$'nın Fourier dönüşümü nedeniyle Laplace dönüşümü yönteminin daha kolay olduğunu gözlemekteyiz.

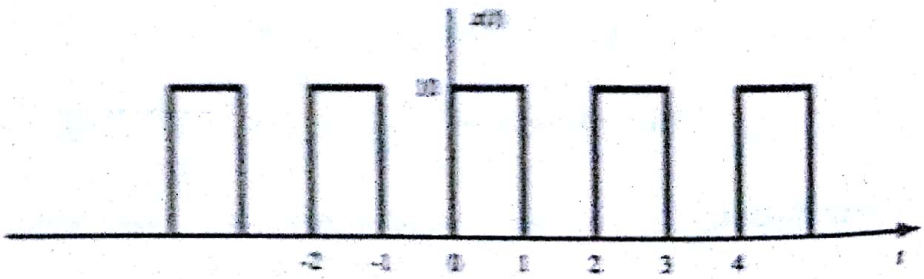
5.46. Problem 5.45'teki DZD sistemi düşünelim. Eğer $x(t)$ girişi Şekil 5-27'de görülen periyodik kare dalga ise, $y(t)$ çıkışının birinci ve üçüncü harmoniklerinin genliklerini bulunuz.

$x(t)$'nın Şekil 5-8'deki [Problem 5.5] $x(t)$ ile aynı olduğuna dikkat ediniz. Dolayısıyla, Eşitlik (5.106)'da $A = 10$, $T_0 = 2$, ve $\omega_0 = 2\pi / T_0 = \pi$ alarak

$$x(t) = 5 + \frac{10}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}e^{j(2m+1)\pi t}$$

elde ederiz. Daha sonra, Problem 5.45'ten

$$H(\omega) = \frac{1}{2+j\omega} \rightarrow H(k\omega_0) = H(k\pi) = \frac{1}{2+jk\pi}$$



Şekil 5-27

yazabiliriz. Böylece, Eşitlik (5.74)'ten

$$y(t) = 5H(0) + \frac{10}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}H[(2m+1)\pi]e^{j(2m+1)\pi t}$$

$$= \frac{5}{2} + \frac{10}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)[2+j(2m+1)\pi]}e^{j(2m+1)\pi t} \qquad (5.167)$$

elde ederiz. $y(t)$'yi

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}$$

biçiminde yazalım. $y(t)$'nin harmonik biçimi [Eşitlik (5.15)]

$$y(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(k\omega_0 t - \phi_k)$$

ile verilir; D_k, $y(t)$'nin k.ncı harmonik bileşeninin genliğidir. Eşitlik (5.11) ve (5.16)'dan D_k ve d_k arasındaki ilişki

$$D_k = 2|d_k| \qquad (5.168)$$

ile verilir. Dolayısıyla, Eşitlik (5.167)'de $m = 0$ alarak

$$D_1 = 2|d_1| = 2\left|\frac{10}{j\pi(2+j\pi)}\right| = 1.71$$

elde ederiz. $m = 1$ alarak

$$D_3 = 2|d_3| = 2\left|\frac{10}{j\pi(3)(2+j3\pi)}\right| = 0.22$$

buluruz.

5.47. Frekans tepkisi $H(\omega)$'nın en yaygın kullanılan grafiksel gösterimi Bode çizimidir; Bode çiziminde $20\log_{10}|H(\omega)|$ ve $\theta_H(\omega)$, ω logaritmik ölçekte olmak üzere, ω'ya karşı çizilir. $20\log_{10}|H(\omega)|$ niceliği $|H(\omega)|_{dB}$ ile gösterilir ve desibel (dB) cinsinden ifade edilen genlik olarak adlandırılır. Aşağıdaki frekans tepkileri için Bode çizimlerini gerçekleştiriniz.

(a) $H(\omega) = 1 + \dfrac{j\omega}{10}$

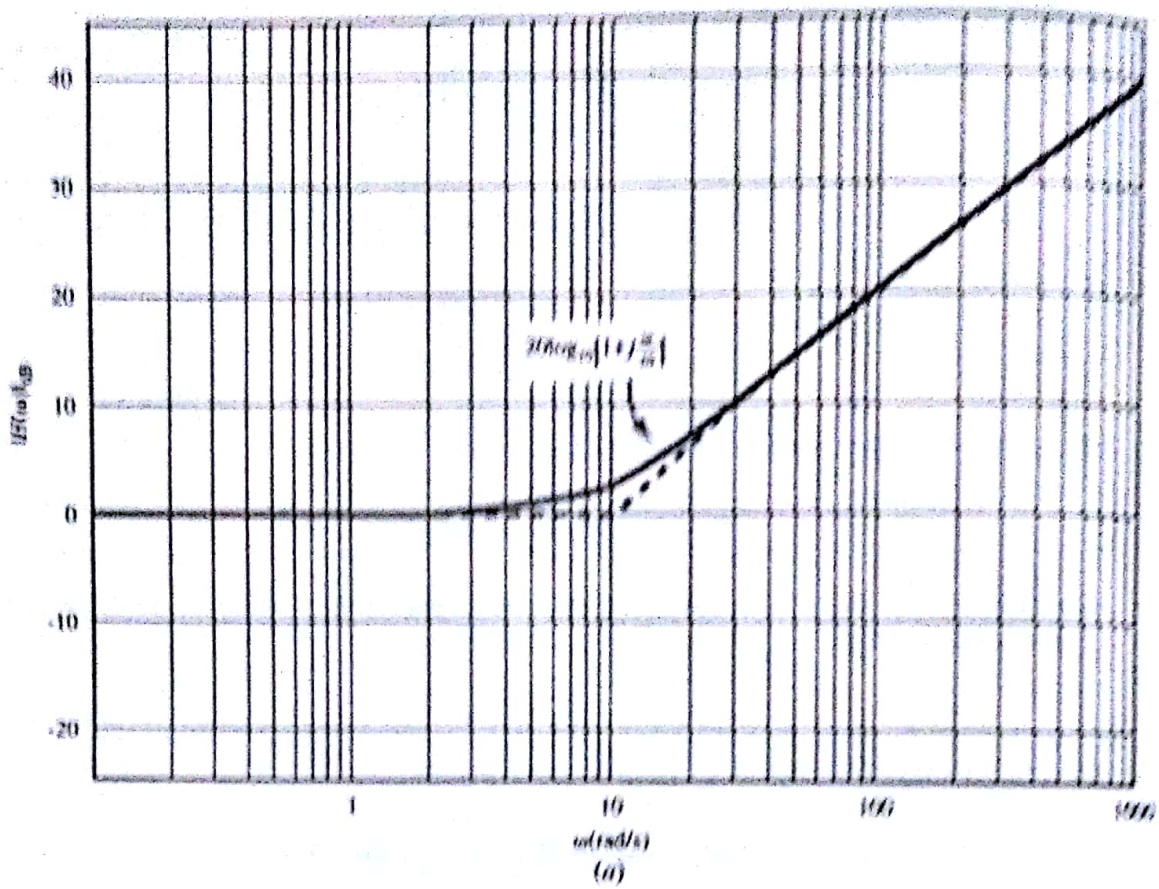
(b) $H(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega/100}$

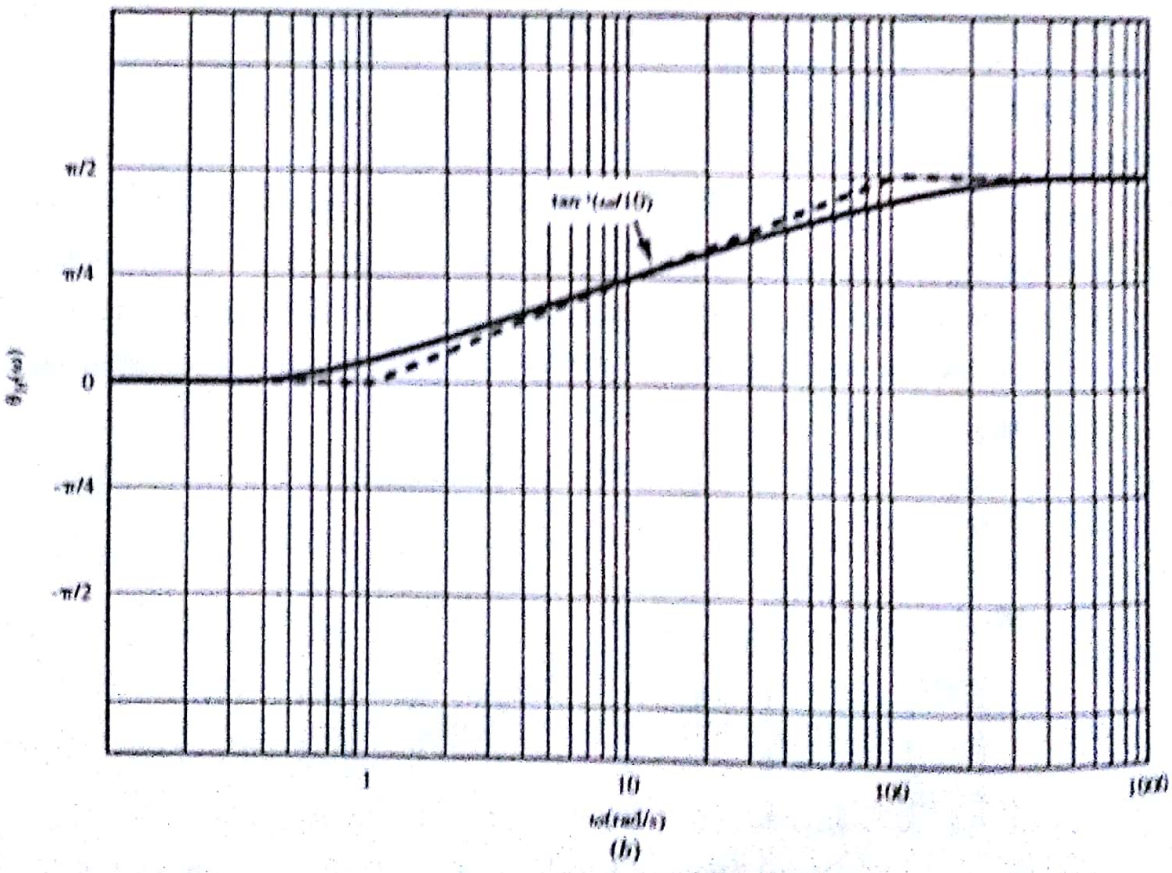
(c) $H(\omega) = \dfrac{10^4(1+j\omega)}{(10+j\omega)(100+j\omega)}$

(a)
$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(\omega)| = 20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right|$$

$\omega << 10$ için

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| \longrightarrow 20\log_{10}1 = 0 \qquad \omega \longrightarrow 0 \text{ için}$$





Şekil 5-28 Bode çizimleri

olur. $\omega >> 10$ için

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{10}\right| \rightarrow 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{10}\right) \qquad \omega \rightarrow \infty$$

elde edilir. Logaritmik frekans ölçeğinde, $20\log_{10}(\omega/10)$ eğimi 20 dB/onlu (dB/dekat) olan bir doğru çizgidir (bir onlu, frekansta 10^0'dan 1^0'e bir değişimdir). Bu doğru çizgi 0-dB eksenini $\omega = 10^0$'da keser [Şekil 5-28(a)]. (ω'nın bu değerine köşe frekansı denir.) Köşe frekansı $\omega = 10^0$'da

$$H(10)|_{dB} = 20\log_{10}|1 + j1| = 20\log_{10}\sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$

olur. $|H(\omega)|_{dB}$'nin çizimi Şekil 5-28(a)'da gösterilmiştir. Daha sonra,

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$

yazılır. Bu durumda

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{10} \rightarrow 0 \qquad \omega \rightarrow 0$$

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{10} \rightarrow \frac{\pi}{2} \qquad \omega \rightarrow \infty$$

elde edilir. $\omega = 10^0$'da, $\theta_H(10) = \tan^{-1} 1 = \pi/4$ radyandır. $\theta_H(\omega)$'nın çizimi Şekil 5-28(b)'de gösterilmiştir. Noktalı çizgilerin, Bode çizimlerinin doğru çizgisel yaklaşımı olduğuna dikkat ediniz.

$$(b) \qquad |H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1 + j\omega/100}\right| = -20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{100}\right|$$

$\omega << 100$ için

$$|H(\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{100}\right| \rightarrow -20\log_{10} 1 = 0 \qquad \omega \rightarrow 0 \text{ için}$$

$\omega >> 100$ için

$$|H(\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{100}\right| \rightarrow -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{100}\right) \qquad \omega \rightarrow \infty \text{ için}$$

olur. Logaritmik frekans ölçeğinde $-20\log_{10}(\omega/100)$ eğimi -20dB/onlu olan bir doğru çizgidir. Bu doğru çizgi 0-dB eksenini köşe frekansı $\omega=100^0$'de keser [Şekil 5-29(a)]. Köşe frekansı $\omega=100^0$'de

$$H(100)|_{dB} = -20\log_{10}\sqrt{2} \approx -3 \text{ dB}$$

olur. $|H(\omega)|_{dB}$'nin çizimi Şekil 5-29(a)'da gösterilmiştir. Daha sonra,

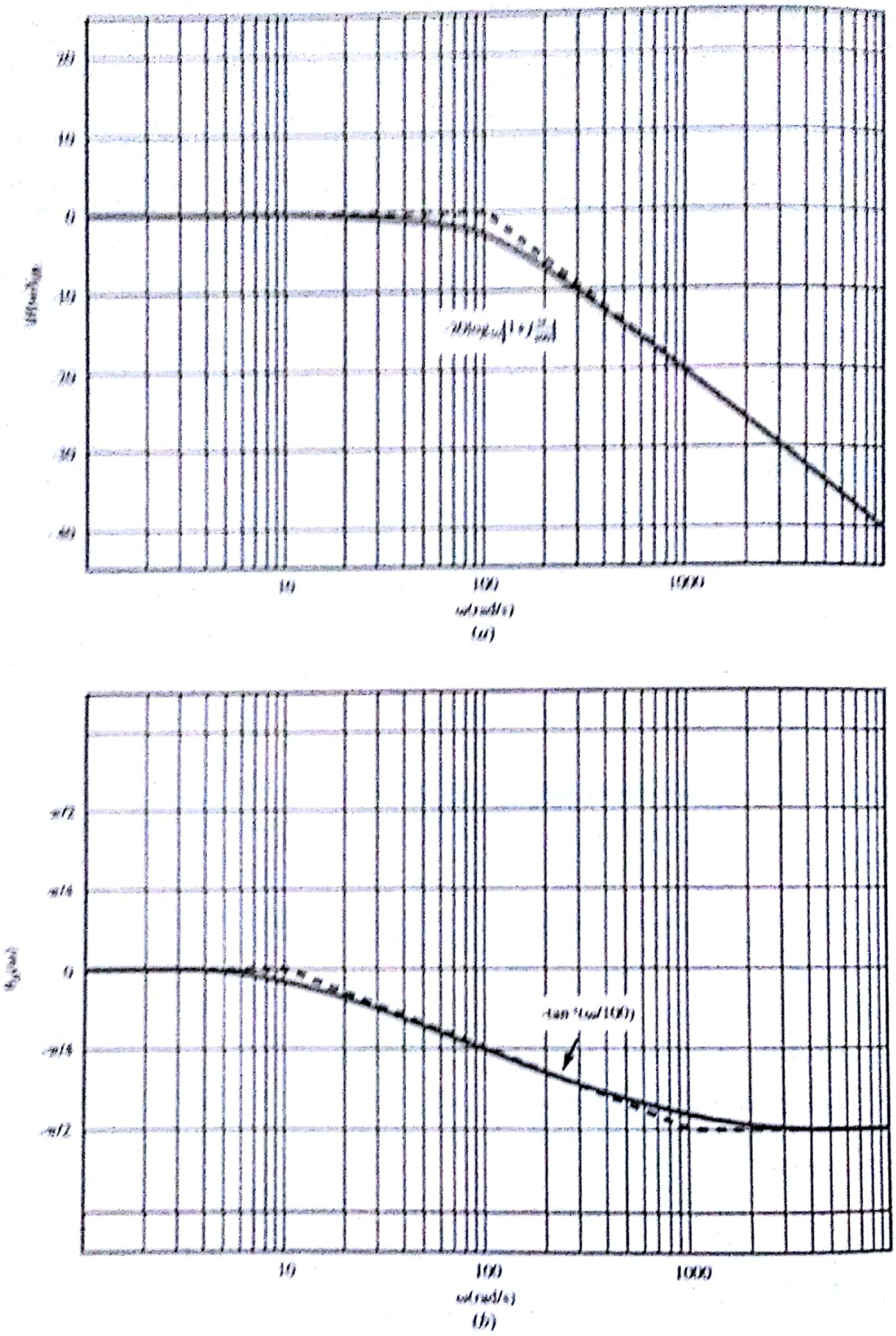
$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{100}$$

yazılır. Buradan

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{100} \rightarrow 0 \qquad \omega \rightarrow 0$$

$$\theta_H(\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{100} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \qquad \omega \rightarrow \infty$$

bulunur. $\omega=100^0$'de, $\theta_H(100) = -\tan^{-1} 1 = -\pi/4$ radyandır. $\theta_H(\omega)$'nın çizimi Şekil 5-29(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 5-29 Bode çizimleri

(c) İlk önce, $H(\omega)$'yı

$$H(\omega) = \frac{10(1+j\omega)}{(1+j\omega/10)(1+j\omega/100)}$$

biçiminde standart formda yazalım. Daha sonra

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}10 + 20\log_{10}|1+j\omega| - 20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{10}\right| - 20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{100}\right|$$

elde ederiz. $\omega = 1$, $\omega = 10$, ve $\omega = 100$'de üç köşe frekansı olduğuna dikkat ediniz. Köşe frekansı $\omega = 1$'de

$$H(1)|_{dB} = 20 + 20\log_{10}\sqrt{2} - 20\log_{10}\sqrt{1.01} - 20\log_{10}\sqrt{1.0001} \approx 23 \text{ dB}$$

olur. Köşe frekansı $\omega = 10$'da

$$H(10)|_{dB} = 20 + 20\log_{10}\sqrt{101} - 20\log_{10}\sqrt{2} - 20\log_{10}\sqrt{1.01} \approx 37 \text{ dB}$$

olur. Köşe frekansı $\omega = 100$'de

$$H(100)|_{dB} = 20 + 20\log_{10}\sqrt{10{,}001} - 20\log_{10}\sqrt{101} - 20\log_{10}\sqrt{2} \approx 37 \text{ dB}$$

olur. Bode genlik çizimi Şekil 5-30(a)'da görülmektedir. Toplam genliğe katkıda bulunan her terim şekil üzerinde belirtilmiştir. Daha sonra,

$$\theta_H(\omega) = \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\frac{\omega}{10} - \tan^{-1}\frac{\omega}{100}$$

yazılabilir. Böylece

$$\theta_H(\omega) = \longrightarrow 0 - 0 - 0 = 0 \qquad \omega \longrightarrow 0$$

$$\theta_H(\omega) = \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \qquad \omega \longrightarrow \infty$$

ve

$$\theta_H(1) = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0.1) - \tan^{-1}(0.01) = 0.676 \text{ rad}$$

$$\theta_H(10) = \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0.1) = 0.586 \text{ rad}$$

$$\theta_H(100) = \tan^{-1}(100) - \tan^{-1}(10) - \tan^{-1}(1) = -0.696 \text{ rad}$$

elde edilir. $\theta_H(\omega)$'nın çizimi Şekil 5-30(b)'de gösterilmiştir.

5.48. İdeal bir $(-\pi/2)$ radyan (veya $-90°$) faz kaydırıcısı (Şekil 5-31)

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j(\pi/2)} & \omega > 0 \\ e^{j(\pi/2)} & \omega < 0 \end{cases} \tag{5.169}$$

frekans tepkisi ile tanımlanmıştır.

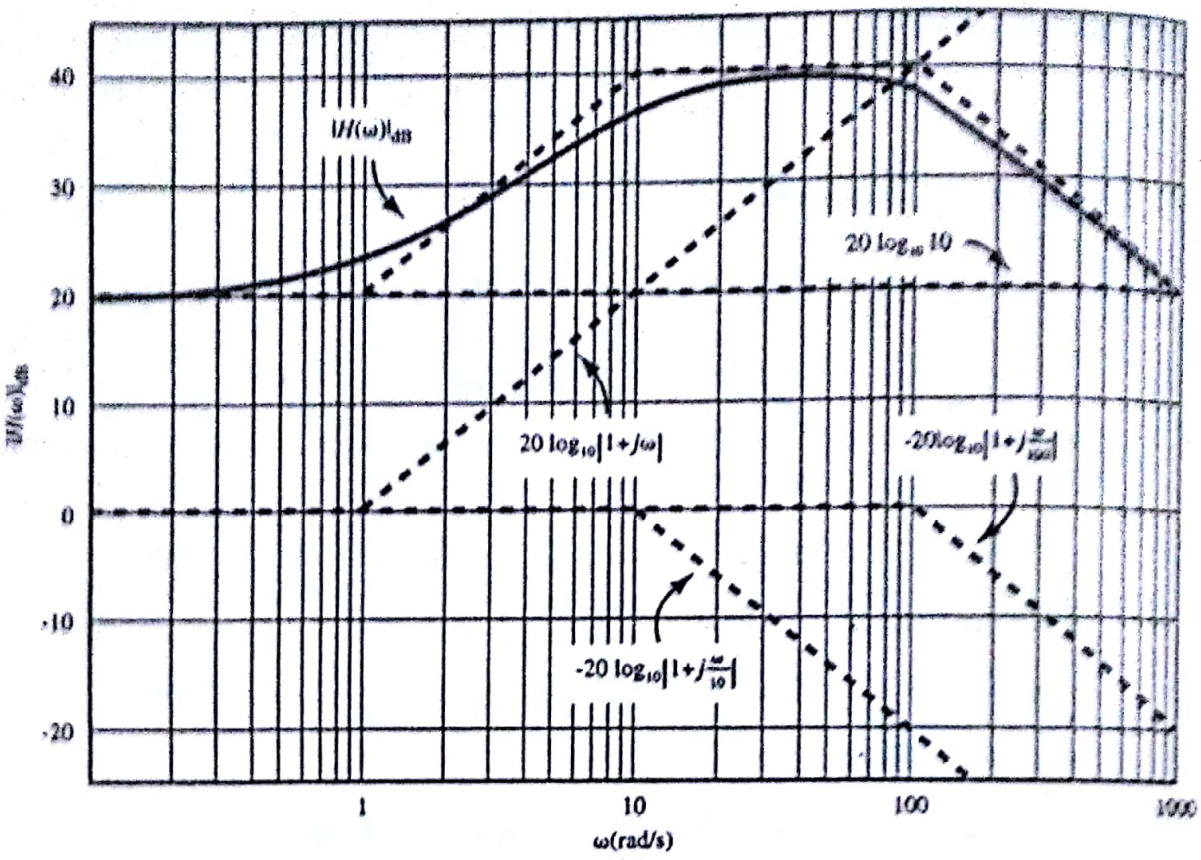
(a) Bu faz kaydırıcının dürtü tepkisi $h(t)$'yi bulunuz.

(b) Keyfi bir $x(t)$ girişi için faz kaydırıcının $y(t)$ çıktısını bulunuz.

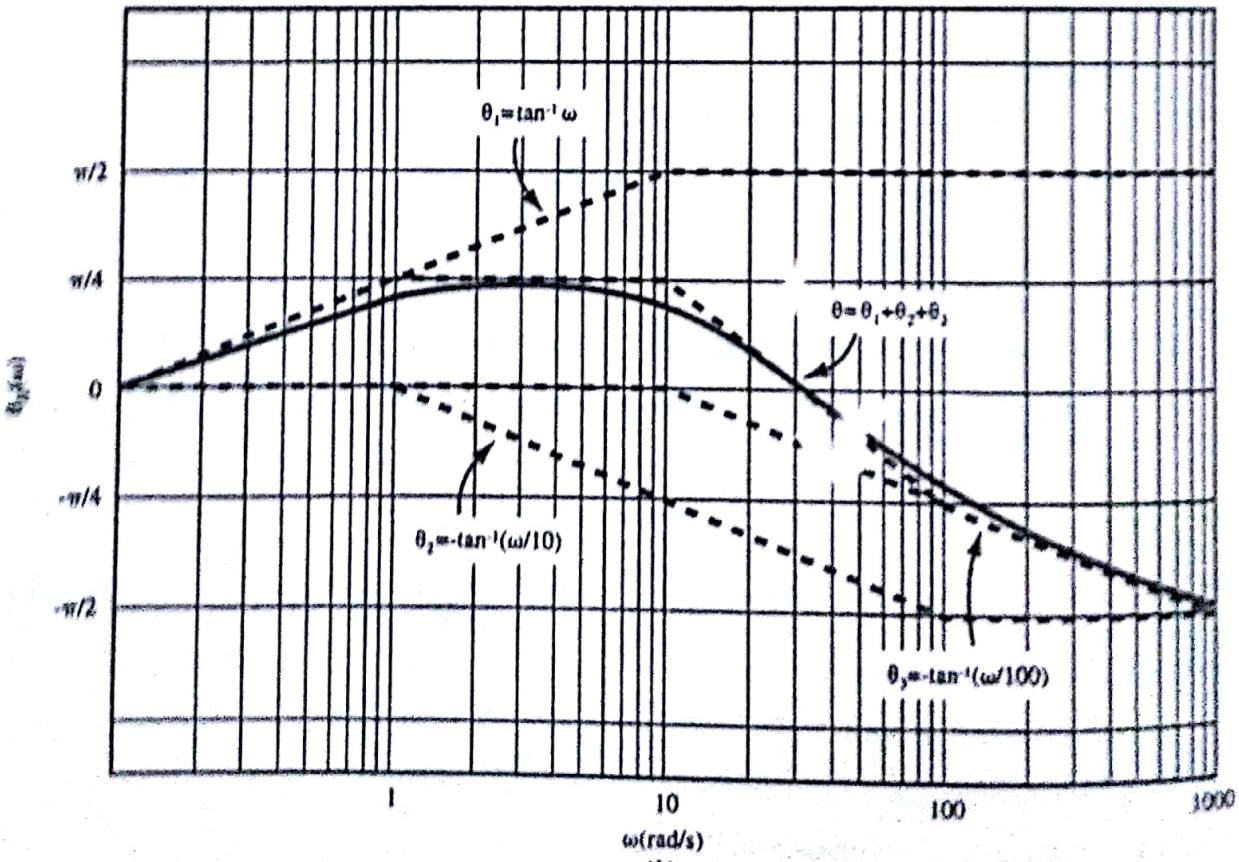
(c) $x(t) = \cos\omega_0 t$ için $y(t)$ çıktısını bulunuz.

(a) $e^{-j\pi/2} = j$ ve $e^{j\pi/2} = j$ olduğundan $H(\omega)$

$$H(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega) \tag{5.170}$$

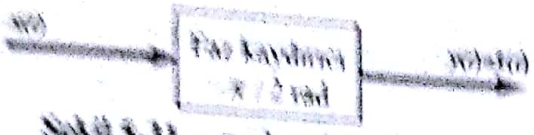


(a)



(b)

Şekil 5-30 Bode Çizimleri



Şekil 5.41 $-\pi/2$ rad faz kaydırıcı

biçiminde yazılabilir; burada $\operatorname{sgn}(\omega)$

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases} \tag{5.171}$$

ile verilmektedir. Bu durumda Eşitlik (5.153)'ten

$$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

yazalım ve çiftleşik özelliği (5.54)'ten

$$\frac{2}{jt} \longleftrightarrow 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

ya da

$$\frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) \tag{5.172}$$

elde ederiz. $\operatorname{sgn}(\omega)$, ω'nın bir tek işlevidir. Dolayısıyla, $h(t)$ dürtü tepkisi

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[-j \operatorname{sgn}(\omega)] = \frac{1}{\pi t} \tag{5.173}$$

ile verilir.

(b) Eşitlik (2.6)'dan

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\, d\tau \tag{5.174}$$

elde ederiz. Eşitlik (5.174) ile tanımlanan $y(t)$ sinyali $x(t)$'nin Hilbert dönüşümü olarak adlandırılır ve genellikle $\hat{x}(t)$ ile gösterilir.

(c) Eşitlik (5.144)'ten

$$\cos \omega_0 t \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

yazalım. Bu durumda $\operatorname{sgn}(\omega_0) = 1$ ve $\operatorname{sgn}(-\omega_0) = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= X(\omega)H(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)][-j \operatorname{sgn}(\omega)] \\ &= -j\pi \operatorname{sgn}(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) - j\pi \operatorname{sgn}(-\omega_0)\delta(\omega + \omega_0) \\ &= -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, Eşitlik (5.145)'ten

$$y(t) = \sin \omega_0 t$$

buluruz. $\cos(\omega_0 t - \pi/2) = \sin \omega_0 t$ olduğuna dikkat ediniz.

5.49. Frekans tepkisi

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

olan bir nedensel sürekli zaman DZD sistemi ele alalım. Sistemin dürtü tepkisi $h(t)$'nin yalnızca $A(\omega)$'dan ya da yalnızca $B(\omega)$'dan elde edilebileceğini gösteriniz.

Sistem nedensel olduğundan, tanım gereği

$$h(t) = 0 \qquad t < 0$$

olur. Böylece

$$h(-t) = 0 \qquad t > 0$$

elde ederiz. $h(t)$ için

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

yazalım; burada $h_e(t)$ ve $h_o(t)$, sırasıyla $h(t)$'nin çift ve tek bileşenleridir. Bu durumda Eşitlik (1.5) ve (1.6)'dan

$$h(t) = 2h_e(t) = 2h_o(t) \tag{5.175}$$

yazabiliriz. Eşitlik (5.61b) ve (5.61c)'den

$$h_e(t) \longleftrightarrow A(\omega) \qquad\qquad h_o(t) \longleftrightarrow jB(\omega)$$

elde ederiz. Böylece, Eşitlik (5.175)'ten

$$h(t) = 2h_e(t) = 2\mathcal{F}^{-1}[A(\omega)] \qquad t > 0 \tag{5.176a}$$

$$h(t) = 2h_o(t) = 2\mathcal{F}^{-1}[jB(\omega)] \qquad t > 0 \tag{5.176b}$$

buluruz. Eşitlik (5.176a) ve (5.176b) $h(t)$'nin yalnızca $A(\omega)$'dan ya da yalnızca $B(\omega)$'dan elde edilebileceğini gösterir.

5.50. Frekans tepkisi

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

olan bir nedensel sürekli zaman DZD sistemi ele alalım. Sistemin dürtü tepkisi $h(t)$ orijinde hiçbir dürtü içermiyorsa, $A(\omega)$'nın ve $B(\omega)$'nın aşağıdaki eşitlikleri sağladığını gösteriniz.

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda \tag{5.177a}$$

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda \tag{5.177b}$$

Problem 5.49'da olduğu gibi

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

yazalım. $h(t)$ nedensel olduğundan, yani $t<0$ için $h(t) = 0$ olduğundan

$$h_e(t) = -h_o(t) \qquad t < 0$$

elde ederiz. Yine Eşitlik (5.175)'ten

$$h_e(t) = h_o(t) \qquad t > 0$$

buluruz. Böylece, Eşitlik (5.152)'yi kullanarak

$$h_e(t) = h_o(t)\,\mathrm{sgn}(t) \tag{5.178a}$$

$$h_o(t) = h_e(t)\,\mathrm{sgn}(t) \tag{5.178b}$$

yazabiliriz. Artık Eşitlik (5.61b), (5.61c), ve (5.153)'ten

$$h_e(t) \longleftrightarrow A(\omega) \qquad h_o(t) \longleftrightarrow jB(\omega) \qquad \mathrm{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

buluruz. Böylece, frekans konvolüsyonu teoremi (5.59)'dan

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} jB(\omega) * \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{\pi} B(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda$$

ve

$$jB(\omega) = \frac{1}{2\pi} A(\omega) * \frac{2}{j\omega} = -j\frac{1}{\pi} A(\omega) * \frac{1}{\omega}$$

yazılır

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi} A(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda$$

elde ederiz. $A(\omega)$'nın $B(\omega)$'nın Hilbert dönüşümü [Eşitlik (5.174)] olduğuna ve $B(\omega)$'nın $A(\omega)$'nın Hilbert dönüşümünün negatifi olduğuna dikkat ediniz.

5.51. Nedensel DZD bir sistemin frekans tepkisi $H(\omega)$'nın gerçel kısmının $\pi\delta(\omega)$ olduğu bilinmektedir. Sistemin frekans tepkisi $H(\omega)$'yı ve sistemin dürtü tepkisi $h(t)$'yi bulunuz.

$H(\omega)$'yı

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

biçiminde yazalım. Eşitlik (5.177b)'de $A(\omega) = \pi\delta(\omega)$ alarak

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi\delta(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda)\frac{1}{\omega - \lambda}\, d\lambda = -\frac{1}{\omega}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$H(\omega) = \pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

ve Eşitlik (5.154)'ten

$$h(t) = u(t)$$

buluruz.

SÜZME

5.52. Frekans tepkisi

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

olan bir ideal alçak geçiren süzgeç düşünelim. Bu sistemin girişi

$$x(t) = \frac{\sin \omega t}{\pi t}$$

biçimindedir.

(a) $\omega < \omega_c$ için $y(t)$ çıktısını bulunuz.

(b) $\omega > \omega_c$ için $y(t)$ çıktısını bulunuz.

(c) Hangi durumda çıktı bozulmaya uğrar?

(a) Eşitlik (5.137)'den (Problem 5.20)

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t} \longleftrightarrow X(\omega) = p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

yazabiliriz. Bu durumda $a < \omega_c$ için

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)$$

elde ederiz. Böylece

$$y(t) = x(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$$

olur.

(b) $a > \omega_c$ için

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = H(\omega)$$

buluruz. Böylece

$$y(t) = h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

olur.

(c) (a) durumunda, yani $\omega_c > a$ için $y(t) = x(t)$ olur ve süzgeç herhangi bir bozulmaya neden olmaz. (b) durumunda, yani $\omega_c < a$ için $y(t) = h(t)$ olur ve süzgeç bozulmaya neden olur.

5.53. Frekans tepkisi

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi \\ 0 & |\omega| > 4\pi \end{cases}$$

olan bir ideal alçak geçiren süzgeç düşünelim. Bu süzgecin girişi Şekil 5-27'de görülen periyodik kare dalgadır. $y(t)$ çıktısını bulunuz.

Eşitlik (5.107)'de (Problem 5.5) $A=10$, $T_0 = 2$ ve $\omega_0 = 2\pi / T_0 = \pi$ alarak

$$x(t) = 5 + \frac{20}{\pi}\left(\sin \pi t + \frac{1}{3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5}\sin 5\pi t + \cdots\right)$$

elde ederiz. Süzgecin kesim frekansı ω_c 4π rad olduğundan, süzgeç $x(t)$'nin açısal frekansı 4π rad'dan daha küçük olan harmonik bileşenlerinin tümünü geçirir ve $x(t)$'nin açısal frekansı 4π rad'dan daha büyük olan harmonik bileşenlerinin tümünü engeller. Dolayısıyla

$$y(t) = 5 + \frac{20}{\pi}\sin \pi t + \frac{20}{3\pi}\sin 3\pi t$$

olur.

5.54. Frekans tepkisi

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

olan bir ideal alçak geçiren süzgeç düşünelim. Bu süzgecin girişi

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

biçimindedir. Bu süzgecin, giriş sinyali $x(t)$'nin normalize edilmiş enerjisinin tam olarak yarısını geçirmesini sağlayan ω_c değerini bulunuz.

Eşitlik (5.139)'den,

$$|X(\omega_c)| = \frac{1}{2\omega_c}$$

bulunur. Buradan,

$$X(\omega) = |X(\omega_c)|H(\omega_c) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\omega_c} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

olur. $x(t)$'nin normalize edilmiş enerjisi

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} 0^2\,dt = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Parseval özdeşliği (5.94) kullanılarak, $x(t)$'nin normalize edilmiş enerjisi

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4+\omega^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{4+\omega^2} = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{\omega_c}{2} = \frac{1}{2}E_x = \frac{1}{2}$$

biçiminde elde edilir. Buradan

$$\frac{\omega_c}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{veya} \quad \omega_c = 2\ (\text{rad/s})$$

bulunur.

5.55. Frekans tepkisi $H(\omega)$ olan bir süzgecin eşdeğer bant genişliği

$$W_{eq} = \frac{1}{|H(\omega)|^2_{max}}\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2\,d\omega \qquad (5.270)$$

ile tanımlanır; burada $|H(\omega)|^2_{max}$ genlik spektrumunun maksimum değerini gösterir. Şekil 5-6(a)'da görülen alçak geçiren süzgeci düşünelim.

(a) Süzgecin 3-dB bant genişliği W_{-3dB}'yi bulunuz.

(b) Süzgecin eşdeğer bant genişliği W_{eq}'yi bulunuz.

(a) Eşitlik (5.91)'den RC süzgecin frekans tepkisi $H(\omega)$,

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j(\omega/\omega_0)}$$

ile verilir; burada $\omega_0 = 1/RC$'dir. Buradan

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left[1+(\omega/\omega_0)^2\right]^{1/2}}$$

bulunur. Genlik spektrumu $|H(\omega)|$, Şekil 5-6(b)'de çizilmiştir. $\omega = \omega_0 = 1/RC$ için $|H(\omega_0)| = 1/\sqrt{2}$ olur. Böylece RC süzgecin 3-dB bant genişliği

$$W_{-3dB} = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

olur.

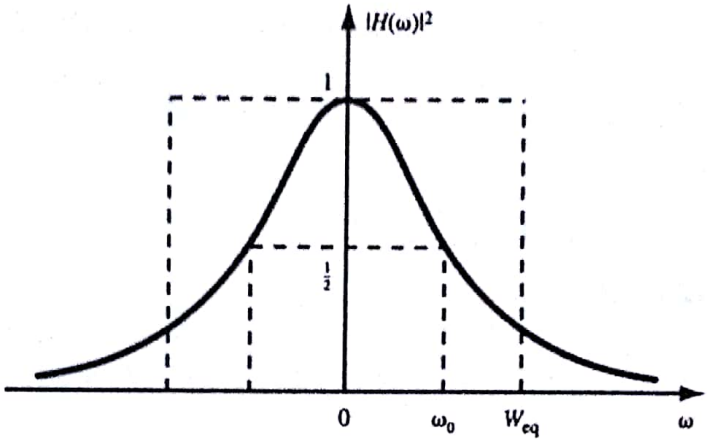
(b) Şekil 5-6(b)'den $|H(0)|=1$'in genlik spektrumunun maksimumu olduğunu görürüz. $H(\omega)$'yı

$$H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{1}{RC}\frac{1}{1/RC+j\omega}$$

biçiminde yeniden yazarak ve Eşitlik (5.179)'u kullanarak, RC süzgecin eşdeğer bant genişliği (Şekil 5-32)

$$W_{eq}=\frac{1}{(RC)^2}\int_0^\infty\frac{d\omega}{(1/RC)^2+\omega^2}=\frac{1}{(RC)^2}\frac{\pi}{2/RC}=\frac{\pi}{2RC}$$

ile verilir.



Şekil 5-32 Süzgeç bant genişliği

5.56. Şekil 5-6(a)'daki alçak geçiren *RC* süzgecin yükselme süresi t_r birim basamak tepkisinin son değerinin %10'undan %90'ına çıkması için gereken süre olarak tanımlanır. $f_{3\,\mathrm{dB}}=W_{3\,\mathrm{dB}}/2\pi=1/2\pi RC$ süzgecin Hertz cinsinden 3-dB bant genişliği olmak üzere

$$t_r=\frac{0.35}{f_{3\,\mathrm{dB}}}$$

olduğunu gösteriniz.

RC süzgecin frekans tepkisi $H(\omega)$'dan, dürtü tepkisi

$$h(t)=\frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

olur. Bu durumda, Eşitlik (2.12)'den birim basamak tepkisi $s(t)$

$$s(t)=\int_0^t h(\tau)\,d\tau=\int_0^t\frac{1}{RC}e^{-\tau/RC}\,d\tau=(1-e^{-t/RC})u(t)$$

olarak bulunur; $s(t)$ Şekil 5-33'de gösterilmiştir. Yükselme süresinin tanımından

$$t_r=t_2-t_1$$

olur; burada t_1 ve t_2

$$s(t_1)=1-e^{-t_1/RC}=0.1\longrightarrow e^{-t_1/RC}=0.9$$

$$s(t_2)=1-e^{-t_2/RC}=0.9\longrightarrow e^{-t_2/RC}=0.1$$

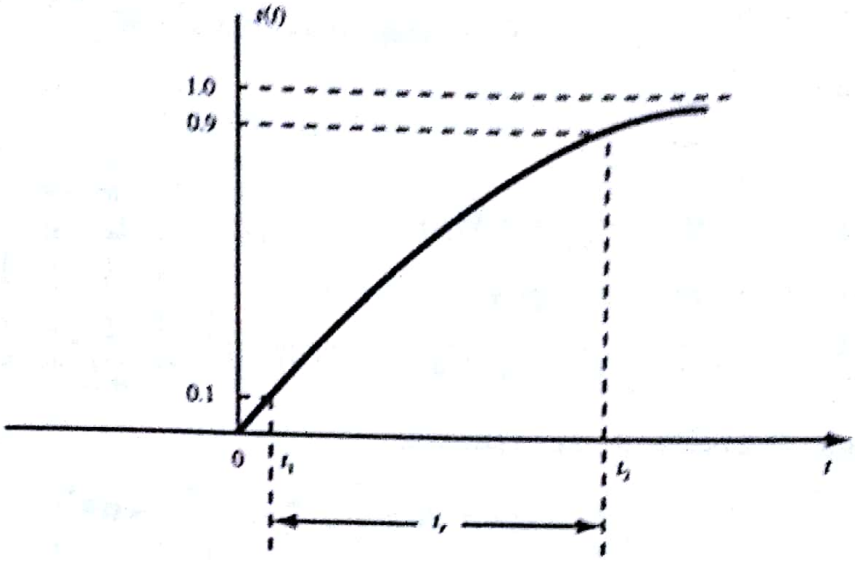
eşitliklerini sağlar. Sağ taraftaki birinci eşitliği ikinci eşitliğe bölerek

$$e^{(t_2-t_1)/RC}=9$$

ve

$$t_r = t_2 - t_1 = RC\ln(9) = 2.197RC = \frac{2.197}{2\pi f_{3\,dB}} = \frac{0.35}{f_{3\,dB}}$$

elde ederiz; bu eşitlik bant genişliği ile yükselme süresi arasındaki ters ilişkiyi gösterir.



Şekil 5-33

5.57. $x(t)$ sinyali için bir diğer bant genişliği tanımı

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-W_{90}}^{W_{90}} |X(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{W_{90}} |X(\omega)|^2\, d\omega = 0.9E_x \qquad (5.180)$$

ile tanımlanan %90 enerji içerimi bant genişliği W_{90}'dır; E_x, $x(t)$ sinyalinin normalize edilmiş enerji içeriğidir. Aşağıdaki sinyaller için W_{90}'ı bulunuz:

(*a*) $x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$

(*b*) $x(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$

(a) Eşitlik (5.155)'ten

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

olur. Eşitlik (1.14)'ten

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = \int_0^{\infty} e^{-2at}\, dt = \frac{1}{2a}$$

buluruz. Şimdi, Eşitlik (5.180)'den

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a\pi}\tan^{-1}\left(\frac{W_{90}}{a}\right) = 0.9\frac{1}{2a}$$

elde ederiz ve buradan

$$\tan^{-1}\left(\frac{W_{90}}{a}\right) = 0.45\pi$$

buluruz. Böylece

$$W_{90} = a\tan(0.45\pi) = 6.31a \quad \text{rad/s}$$

bulunur.

(b) Eşitlik (5.137)'den

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t} \longleftrightarrow X(\omega) = p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

yazalım. (5.64) Parseval özdeşliğini kullanarak

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{a} d\omega = \frac{a}{\pi}$$

buluruz. Daha sonra, Eşitlik (5.180)'den

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}} d\omega = \frac{W_{90}}{\pi} = 0.9\frac{a}{\pi}$$

ve buradan

$$W_{90} = 0.9a \quad \text{rad/s}$$

elde ederiz. $x(t)$'nin mutlak bant genişliğinin a (radyan/saniye) olduğuna dikkat ediniz.

5.58. $x(t)$

$$X(\omega) = 0 \qquad |\omega| > \omega_M$$

ile verilen gerçel değerli bant sınırlı bir sinyal olsun [Şekil 5-34(b)]. $x_s(t)$

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \tag{5.181}$$

biçiminde tanımlansın.

(a) $T_S < \pi/\omega_M$ için $x_s(t)$'yi çiziniz.

(b) $x_s(t)$'nin Fourier spektrumu $X_s(\omega)$ 'yı $T_S < \pi/\omega_M$ ve $T_S > \pi/\omega_M$ için bulunuz ve çiziniz.

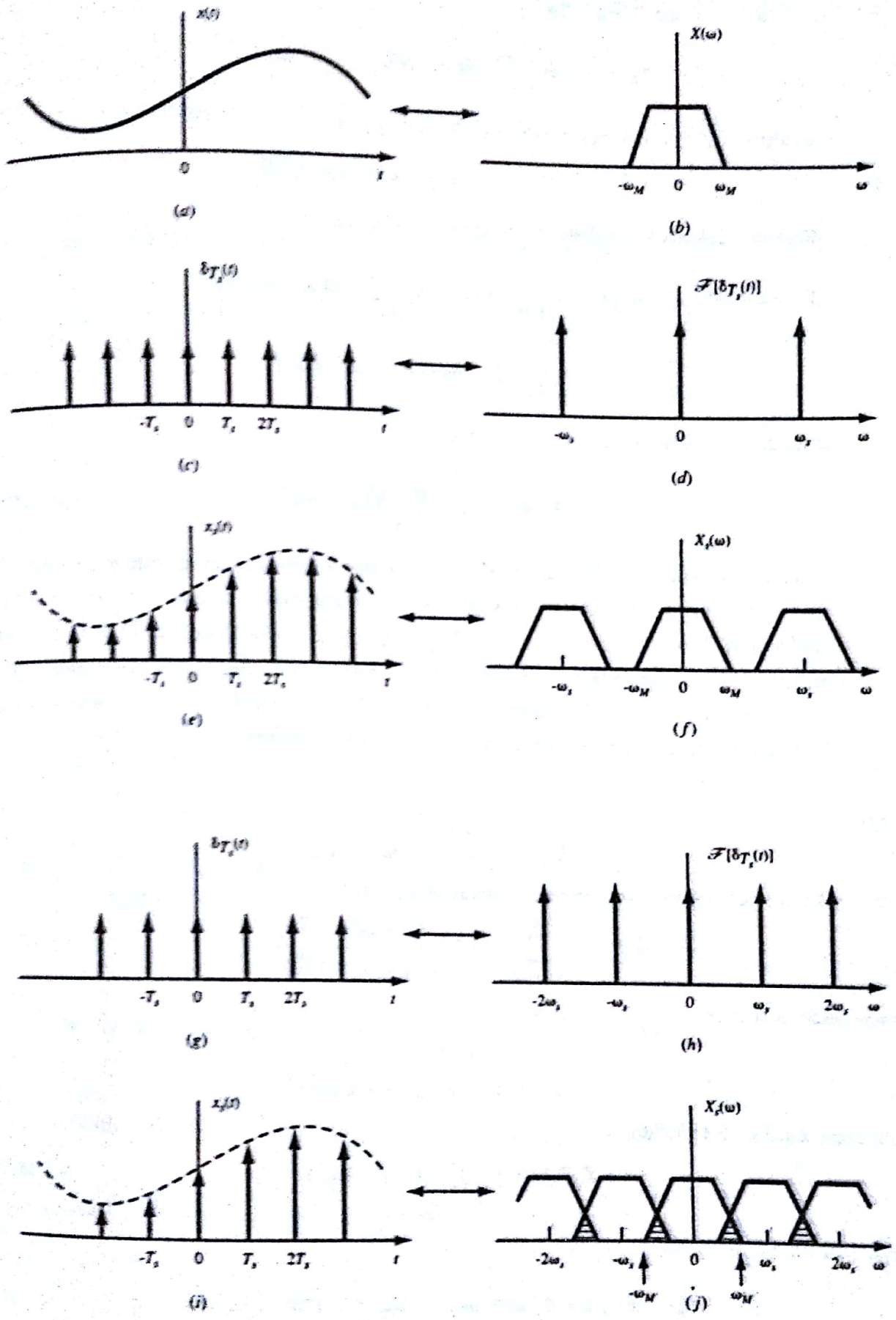
(a) Eşitlik (1.26)'yı kullanarak

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \tag{5.182}$$

elde ederiz. Örneklenmiş $x_s(t)$ sinyali $T_S < \pi/\omega_M$ için Şekil 5-34(c)'de, ve $T_S > \pi/\omega_M$ için Şekil 5-34(i)'de çizilmiştir.

$x_s(t)$ sinyaline ideal örneklenmiş sinyal, T_s'ye örnekleme aralığı (ya da periyodu), ve $f_s = 1/T_s$'e örnekleme hızı (ya da frekansı) denir.



Şekil 5-34 İdeal örnekleme

(b) Eş (5.147)'den (Problem 5.25)

$$\delta_{T_s}(t) \longleftrightarrow \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

yazalım. $x_s(t)$'nin Fourier dönüşümü $X_s(\omega)$ olsun:

$$x_s(t) \longleftrightarrow X_s(\omega)$$

Böylece, frekans konvolüsyonu teoremi (5.59)'dan

$$X_s(\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\delta_{T_s}(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)\right]$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_s)$$

elde ederiz. Eşitlik (1.26)'yı kullanarak

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \tag{5.183}$$

buluruz; bu eşitlikten görüleceği gibi, $X_S(\omega)$, her k için $k\omega_S$ çevresinde merkezlenmiş $X(\omega)$'nın periyodik olarak tekrarlanan kopyalarından oluşur. $X_S(\omega)$ Fourier spektrumu $T_S < \pi/\omega_M$ (ya da $\omega_s > 2\omega_M$) için Şekil 5-34(f)'de, ve $T_S > \pi/\omega_M$ (ya da $\omega_s > 2\omega_M$) için Şekil 5-34(j)'de gösterilmiştir; $\omega_S = 2\pi/T_S$'dir. Görüldüğü gibi $\omega_s \geq 2\omega_M$ için $X(\omega - k\omega_s)$ kopyaları üst üste binmez, ancak $\omega_s < 2\omega_M$ için spektral kopyalar üst üste biner. Bu etki eşgörüngüleme olarak bilinir.

5.59. $x(t)$

$$X(\omega) = 0 \qquad |\omega| > \omega_M$$

ile verilen gerçel değerli bant sınırlı bir sinyal olsun. $x(t)$'nin

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \omega_M(t - kT_s)}{\omega_M(t - kT_s)} \tag{5.184}$$

biçiminde açıklanabileceğini gösteriniz; $T_s = \pi/\omega_M$'dir.

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) \longleftrightarrow X_s(\omega)$$

yazalım. Eşitlik (5.183)'ten

$$T_s X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \tag{5.185}$$

elde ederiz. Bu durumda

$$(1) \quad X(\omega) = 0,\ |\omega| > \omega_M \qquad \text{ve} \qquad (2) \quad T_s = \frac{\pi}{\omega_M}$$

ile verilen iki koşul altında, Eşitlik (5.185)'ten

$$X(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M} X_s(\omega) \qquad |\omega| < \omega_M \tag{5.186}$$

olduğunu görürüz. Daha sonra, Eşitlik (5.182)'nin Fourier dönüşümünü alarak

$$X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)e^{-jkT_s\omega} \qquad (5.187)$$

elde ederiz. Eşitlik (5.187)'yi Eşitlik (5.186)'da yerine koyduğumuzda

$$X(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)e^{-jkT_s\omega} \qquad |\omega| < \omega_M \qquad (5.188)$$

buluruz. Eşitlik (5.188)'in ters Fourier dönüşümünü alarak

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\omega_M}\int_{-\omega_M}^{\omega_M}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)e^{j\omega(t-kT_s)}\,d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\frac{1}{2\omega_M}\int_{-\omega_M}^{\omega_M} e^{j\omega(t-kT_s)}\,d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\frac{\sin\omega_M(t-kT_s)}{\omega_M(t-kT_s)} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Problem 5.58 ve 5.59'dan görüldüğü gibi f_M hertz'den daha yüksek hiçbir frekans bileşeni olmayan bant sınırlı bir sinyal $f_s(\geq 2f_M)$ örnek/saniye hızında alınmış örneklerle tamamen yeniden oluşturulabilir. Bu, alçak geçiren sinyaller için düzgün örnekleme teoremi olarak bilinir. $T_s = \pi/\omega_M = 1/2f_M\,(\omega_M = 2\pi = f_M)$ Nyquist örnekleme aralığı ve $f_s = 1/T_s = 2f_M$ Nyquist örmekleme hızı olarak adlandırılır.

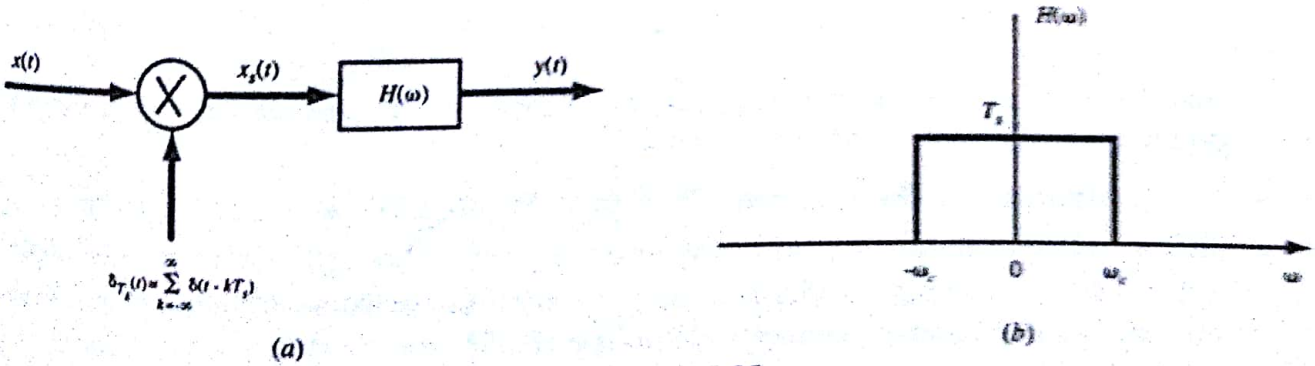
5.60. Şekil 5-35(a)'da görülen sistemi düşünelim. İdeal alçak geçiren süzgecin frekans tepkisi $H(\omega)$ [Şekil 5-35(b)]

$$H(\omega) = T_s p_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

ile verilmektedir. $\omega_c = \omega_s/2$ alındığında, herhangi bir T_s için

$$y(mT_s) = x(mT_s) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

olduğunu gösteriniz.



Şekil 5-35

Eşitlik (5.37)'den ideal alçak geçiren süzgecin dürtü tepkisi $h(t)$

$$h(t) = T_s \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{T_s \omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c t}{\omega_c t} \tag{5.189}$$

ile verilir. Eşitlik (5.182)'den

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

yazalım. Eşitlik (2.6), (2.7) ve (1.26)'dan $y(t)$ çıkışı

$$y(t) = x_s(t) * h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \right] * h(t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)[h(t) * \delta(t - kT_s)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)h(t - kT_s)$$

olur. Eşitlik (5.189)'u kullanarak

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{T_s \omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c (t - kT_s)}{\omega_c (t - kT_s)}$$

buluruz. $\omega_c = \omega_s / 2$ ise $T_s \omega_c / \pi = 1$ olur ve

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin[\omega_s (t - kT_s)/2]}{\omega_s (t - kT_s)/2}$$

elde ederiz. $t = m\,T_s$ (m tamsayı) alarak ve $\omega_s T_s = 2\pi$ eşitliğini kullanarak

$$y(mT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \frac{\sin \pi(m - k)}{\pi(m - k)}$$

sonucuna ulaşırız.

$$\frac{\sin \pi(m - k)}{\pi(m - k)} = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

olduğundan

$$y(mT_s) = x(mT_s) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

elde ederiz; bu sonuç $x(t)$ üzerinde herhangi bir sınırlama olmaksızın, herhangi bir tamsayı m değeri için $y(mT_s) = x(mT_s)$ olduğunu gösterir.

Örnekleme teoremi gereğince (Problem 5.58 ve 5.59) $\omega_s = 2\pi / T_s$, $x(t)$'deki en yüksek frekansın iki katından daha büyükse ve $\omega_c = \omega_s / 2$ ise $y(t) = x(t)$ olduğuna dikkat ediniz. Eğer $x(t)$'nin bant genişliği üzerindeki bu koşul sağlanmazsa $y(t) \neq x(t)$ olur. Ancak, $\omega_c = \omega_s / 2$ ise herhangi bir tamsayı m değeri için $y(mT_s) = x(mT_s)$ olur.

Ek Problemler

5.61. Aşağıda tanımlanan doğrultulmuş sinüs dalga sinyali $x(t)$'yi düşünelim.

$$x(t) = |A \sin \pi t|$$

(a) $x(t)$'yi çiziniz ve temel periyodunu bulunuz.

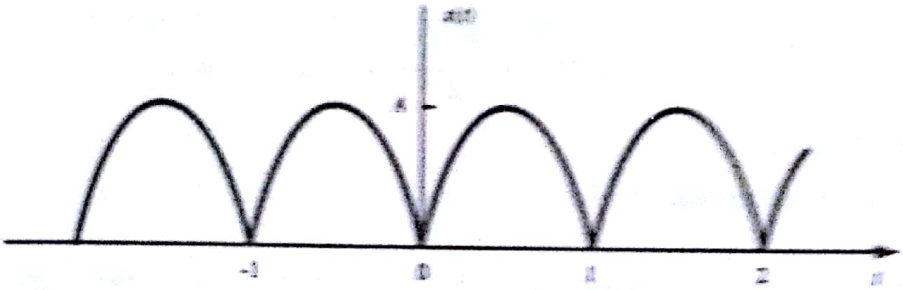
(b) $x(t)$'nin karmaşık üstel Fourier serisini bulunuz.

(c) $x(t)$'nin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.

Yanıt: (a) $x(t)$ Şekil 5-36'da çizilmiştir ve $T_0 = 1$'dir.

$$(b)\quad x(t) = -\frac{2A}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} e^{jk2\pi t}$$

$$(c)\quad x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos k2\pi t$$



Şekil 5-36

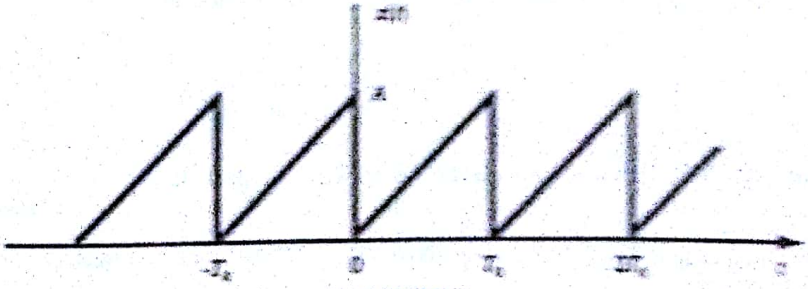
5.62. Aşağıda tanımlanan periyodik $x(t)$ sinyalinin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.

$$x(t) = t^2, \ -\pi < t < \pi \qquad \text{ve} \qquad x(t + 2\pi) = x(t)$$

Yanıt: $x(t) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kt$

5.63. Problem 5.10'un sonucunu kullanarak Şekil 5-37'de gösterilen $x(t)$ sinyalinin trigonometrik Fourier serisini bulunuz.

Yanıt: $x(t) = \dfrac{A}{2} - \dfrac{A}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$



Şekil 5-37

5.64. Trigonometrik Fourier serisi gösterimi (5.8)'den Fourier serisinin karmaşık gösterim (5.15)'i türetiniz.

İpucu: $a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t$'yi

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\left[\frac{a_k}{(a_k^2+b_k^2)^{1/2}}\cos k\omega_0 t + \frac{b_k}{(a_k^2+b_k^2)^{1/2}}\sin k\omega_0 t\right]$$

biçiminde yazınız ve $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ trigonometrik özdeşliğini kullanınız.

5.65. Gerçel değerli periyodik bir $x(t)$ sinyalinin karé ortalamasının, harmonikların kare ortalamalarının toplamına eşit olduğunu gösteriniz.

İpucu: Fourier serisi için Parseval özdeşliği (5.21)'i ve Eşitlik (5.168)'i kullanınız.

5.66. Eğer

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

ise

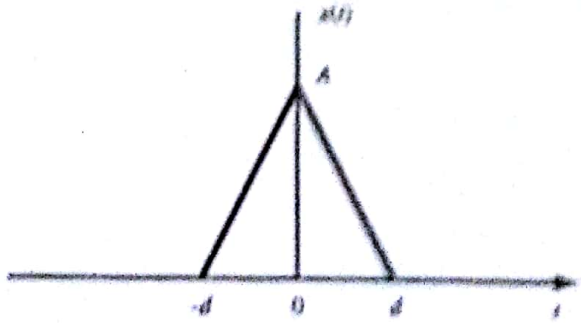
$$x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

olduğunu gösteriniz.

İpucu: Zaman bölgesinde türevleme özelliği (5.55)'i tekrarlayınız.

5.67. Türevleme tekniğini kullanarak Şekil 5-38'de görülen üçgen darbe sinyalinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

Yanıt: $Ad\left[\dfrac{\sin(\omega d/2)}{\omega d/2}\right]^2$



Şekil 5-38

5.68. Aşağıda verilen $X(\omega)$'nın ters Fourier dönüşümünü bulunuz.

$$X(\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^N}$$

İpucu: Eşitlik (5.155)'in (a)'ya göre N defa türevini alınız.

Yanıt: $\dfrac{t^{N-1}}{(N-1)!}e^{-at}u(t)$

5.69. Aşağıda verilen $X(\omega)$'nın ters Fourier dönüşümünü bulunuz.

$$X(\omega) = \frac{1}{2 - \omega^2 + j3\omega}$$

İpucu:

$$2 - \omega^2 + j3\omega = 2 + (j\omega)^2 + j3\omega = (1 + j\omega)(2 + j\omega)$$

olduğuna dikkat ediniz ve kısmi kesirler açılımı tekniğini kullanınız.

Yanıt: $x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

5.70. Türevleme özelliği (5.56)'yı yani

$$(-jt)x(t) \longleftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

eşitliğini kanıtlayınız.

İpucu: (5.31)'deki tanımı kullanınız ve Problem 5.28'dekine benzer şekilde ilerleyiniz.

5.71. Aşağıdaki sinyallerin Fourier dönüşümlerini bulunuz.

(*a*) $x(t) = \cos \omega_0 t u(t)$
(*b*) $x(t) = \sin \omega_0 t u(t)$
(*c*) $x(t) = e^{-at} \cos \omega_0 t u(t),\ a > 0$
(*d*) $x(t) = e^{-at} \sin \omega_0 t u(t),\ a > 0$

İpucu: Çarpma özelliği (5.59)'u kullanınız.

Yanıt: (*a*) $X(\omega) = \frac{\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0) + \frac{\pi}{2}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \omega_0^2}$

(*b*) $X(\omega) = \frac{\pi}{2j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{2j}\delta(\omega + \omega_0) + \frac{\omega_0}{(j\omega)^2 + \omega_0^2}$

(*c*) $X(\omega) = \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

(*d*) $X(\omega) = \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

5.72. $x(t)$, Fourier dönüşümü $X(\omega)$

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

ile verilen bir sinyal olsun. Aşağıda verilen $y(t)$ sinyalini düşünelim:

$$y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

sinyali için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt$$

değerini bulunuz.

İpucu: Fourier dönüşümü için Parseval özdeşliği (5.64)'ü kullanınız.

Yanıt: $1/3\pi$

5.73. $x(t)$, Fourier dönüşümü $X(\omega)$'dan gerçel bir sinyal olsun. $x(t)$ ile ilişkili analitik sinyal $x_1(t)$

$$x_1(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

ile tanımlanan karmaşık bir sinyaldir; $\hat{x}(t)$, $x(t)$'nin Hilbert dönüşümüdür.

(a) $x_1(t)$'nin Fourier dönüşümü $X_1(\omega)$'yı bulunuz.

(b) $\cos\omega_0 t$ ile ilişkili analitik sinyal $x_1(t)$'yi ve Fourier dönüşümü $X_1(\omega)$'yı bulunuz.

Yanıt: (a) $X_1(\omega) = 2X(\omega)u(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega) & \omega > 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases}$

(b) $x_1(t) = e^{j\omega_0 t}$; $X_1(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$

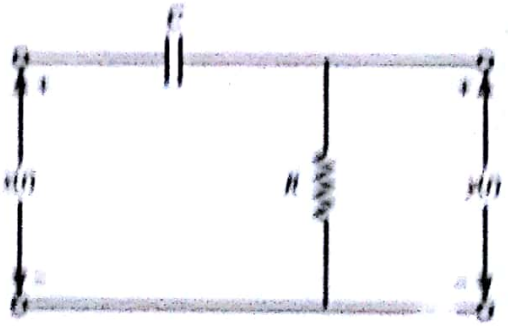
5.74. Frekans tepkisi $H(\omega)$'dan sürekli zamanlı bir LTI sistemi düşünelim. Sistemin birim basamak tepkisi $s(t)$'nin Fourier dönüşümü $S(\omega)$'yı bulunuz.

İpucu: Eşitlik (3.121)'yi ve entegralleme özelliği (5.87)'yi kullanınız.

Yanıt: $S(\omega) = \pi H(0)\delta(\omega) + (1/j\omega)H(\omega)$

5.75. Şekil 5.39'da görülen RC süzgeci düşünelim. Bu süzgecin frekans tepkisi $H(\omega)$'yı bulunuz ve süzgecin türünü tartışınız.

Yanıt: $H(\omega) = \dfrac{j\omega}{(1/RC) + j\omega}$, yüksek geçiren süzgeç



Şekil 5.39

5.76. Aşağıdaki sinyalin yüzde 99 enerji içerini bant genişliğini bulunuz:

$$x(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

Yanıt: $W_{99} = 2.3/a$ radyan/saniye veya $f_{99} = 0.366/a$ hertz

5.77. Frekans bölgesinde örnekleme teoremine göre, süre sınırlı yani

$$x(t) = 0 \qquad |t| > t_M$$

koşulunu sağlayan gerçel bir $x(t)$ sinyalinin Fourier dönüşümü $X(\omega)$, π/t_M eşit aralığıyla yerleştirilmiş noktalarda alınan $X(n\pi/t_M)$ değerlerinden tek bir biçimde belirlenebilir. Gerçekte, $X(\omega)$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n\pi}{t_M}\right)\frac{\sin(\omega t_M - n\pi)}{\omega t_M - n\pi}$$

ile verilir. Yukarıdaki, frekans bölgesindeki örnekleme teoremini kanıtlayınız.

İpucu: $x(t)$'nin karmaşık Fourier serisi açınımını yazınız ve Problem 5.59'dakine benzer biçimde ilerleyiniz.

6. Bölüm

Ayrık Zamanlı Sinyallerin ve Sistemlerin Fourier Çözümlemesi

6.1. GİRİŞ

Bu bölümde ayrık zamanlı sinyallerin (dizilerin) ve sistemlerin Fourier çözümlemesi sunulmaktadır. Fourier çözümlemesi ayrık zamanda da, sürekli zamanda olduğu gibi aynı temel rolü oynar. Göreceğimiz gibi, ayrık zamanlı Fourier çözümleme teknikleri ile bunların sürekli zamandaki karşılıkları arasında pek çok benzerlik olmakla birlikte bazı önemli farklar da bulunmaktadır.

6.2. AYRIK FOURIER SERİLERİ

A. Periyodik Diziler:

Bölüm 1'de ayrık zamanlı bir sinyal (ya da dizi) için

$$x[n+N] = x[n] \tag{6.1}$$

koşulunu sağlayan bir pozitif N tamsayısı varsa bu sinyali periyodik olarak tanımlamıştık. $x[n]$'nin temel periyodu N_0, Eşitlik (6.1)'yi sağlayan en küçük pozitif N tamsayısıdır.

Bölüm 1.4'te gördüğümüz gibi

$$x[n] = e^{j(2\pi/N_0)n} = e^{j\Omega_0 n} \tag{6.2}$$

ile verilen karmaşık üstel dizi periyodu N_0 olan periyodik bir dizidir; burada $\Omega_0 = 2\pi/N_0$ ile verilir. Bölüm 1.4C'de tartıştığımız gibi, ayrık zamanlı ve sürekli zamanlı karmaşık üstel arasındaki çok önemli bir fark $e^{j\omega_0 t}$ sinyalinin farklı ω_0 değerleri için farklı olması, fakat frekansları arasındaki fark 2π 'nin tam katı olan $e^{j\Omega_0 n}$ dizilerinin özdeş olmasıdır. Yani

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi k n} = e^{j\Omega_0 n} \tag{6.3}$$

$$\Psi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6.4}$$

yazalım. Bu durumda Eşitlik (6.3)'ten.

$$\Psi_0[n] = \Psi_{N_0}[n] \qquad \Psi_1[n] = \Psi_{N_0+1}[n] \qquad \ldots \qquad \Psi_k[n] = \Psi_{N_0+k}[n] \qquad \ldots \tag{6.5}$$

ve daha genel olarak

$$\Psi_k[n] = \Psi_{k+mN_0}[n] \qquad m = \text{tamsayı} \tag{6.6}$$

elde ederiz. Böylece $\Psi_k[n]$ dizileri yalnızca k'nın N_0 ardışık değeri için farklıdır.

B. Ayrık Fourier Serisi Gösterimi:

Temel periyodu N_0 olan periyodik bir $x[n]$ dizisinin ayrık Fourier serisi gösterimi

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \tag{6.7}$$

ile verilir; burada c_k'lar Fourier katsayılarıdır ve

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.8}$$

ile verilirler (Problem 6.2). Eşitlik 6.5'ten [ya da Eşitlik (6.6)'dan], Eşitlik (6.7) ve (6.8)

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \tag{6.9}$$

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.10}$$

biçiminde yazılabilirler; burada $\sum_{k=\langle N_0 \rangle}$ toplamanın N_0 adet ardışık tamsayı üzerinde değişen k üzerinden olduğunu gösterir. Eşitlik (6.10)'da $k = 0$ alarak

$$c_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] \tag{6.11}$$

elde ederiz; bu eşitlik c_0'nın $x[n]$'nin bir periyot boyunca ortalamasına eşit olduğunu gösterir.

c_k Fourier katsayıları genellikle $x[n]$'nin spektral katsayıları olarak bilinir.

C. Ayrık Fourier Serilerinin Yakınsaklığı:

Ayrık Fourier serisi, sürekli zamandaki durumun tersine sonlu bir seri olduğundan ayrık Fourier serileri için hiçbir yakınsama sorunu yoktur.

D. Ayrık Fourier Serilerinin Özellikleri:

1. *Fourier Katsayılarının Periyodikliği:*

Eşitlik (6.5) ve (6.7)'den [ya da (6.9)'dan]

$$c_{k+N_0} = c_k \tag{6.12}$$

olduğunu görürüz; bu eşitlik Fourier serisi katsayıları c_k'ların N_0 temel periyodu ile periyodik olduğunu gösterir.

2. *Çifteşlik:*

Eşitlik (6.12)'den Fourier katsayıları c_k'ların N_0 temel periyotlu bir periyodik dizi oluşturduklarını görmekteyiz. Böylece, c_k yerine $c[k]$ yazarak Eşitlik (6.10) aşağıdaki şekle getirilebilir:

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.13}$$

Eşitlik (6.13)'te $n = -m$ alalım. Böylece

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m]\, e^{jk\Omega_0 m}$$

olur. Yukarıdaki ifadede $k = n$ ve $m = k$ alarak

$$c[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k]\, e^{jk\Omega_0 n} \tag{6.14}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.14)'ü Eşitlik (6.9) ile karşılaştırdığımızda $(1/N_0)x[-k]$'nın $c[n]$'nin Fourier katsayıları olduğunu görürüz. Ayrık Fourier serisi çiftini göstermek için

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{AFS}} c_k = c[k] \tag{6.15}$$

notasyonunu kullanırsak, Eşitlik (6.14)'ten

$$c[n] \xleftrightarrow{\text{AFS}} \frac{1}{N_0} x[-k] \tag{6.16}$$

elde ederiz. (6.16) eşitliği ayrık Fourier serisinin çifteşlik özelliği olarak bilinir.

3. *Diğer Özellikler:*

$x[n]$ gerçel ise, Eşitlik (6.8) [veya Eşitlik (6.10)] ve Eşitlik (6.12)'den

$$c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^* \tag{6.17}$$

olur; burada * karmaşık eşleniği gösterir.

Tek ve Çift Diziler:

Gerçel $x[n]$ için, $x_e[n]$ ve $x_o[n]$, $x[n]$'nin sırasıyla çift ve tek bileşenleri olmak üzere

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

yazalım.

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{AFS}} c_k$$

olması durumunda

$$x_e[n] \xleftrightarrow{\text{AFS}} \text{Re}[c_k] \tag{6.18a}$$

$$x_o[n] \xleftrightarrow{\text{AFS}} j\,\text{Im}[c_k] \tag{6.18b}$$

bulunur. Böylece, gerçel ve çift $x[n]$ için Fourier katsayıları gerçel, gerçel ve tek $x[n]$ için Fourier katsayıları sanal olur.

E. Parseval Teoremi:

Eğer $x[n]$ Eşitlik (6.9)'daki ayrık Fourier serisi ile gösterilirse, bu durumda

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} |c_k|^2 \tag{6.19}$$

olduğu gösterilebilir (Problem 6.10). Eşitlik (6.19) ayrık Fourier serileri için Parseval özelliği (ya da Parseval teoremi) olarak adlandırılır.

6.3. FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

A. Ayrık Fourier Serisinden Fourier Dönüşümüne:

$x[n]$ sonlu süreli periyodik olmayan bir dizi olsun. Yani, bir pozitif N_1 tamsayısı için

$$x[n] = 0 \qquad |n| > N_1$$

olsun. Böylesi bir dizi Şekil 6-1(a)'da gösterilmiştir. $x_{N_0}[n]$, Şekil 6-1(b)'de görüldüğü gibi $x[n]$'nin N_0 temel periyodunda tekrarlanmasıyla oluşturulan periyodik dizi olsun. $N_0 \to \infty$ alırsak

$$\lim_{N_0 \to \infty} x_{N_0}[n] = x[n] \tag{6.20}$$

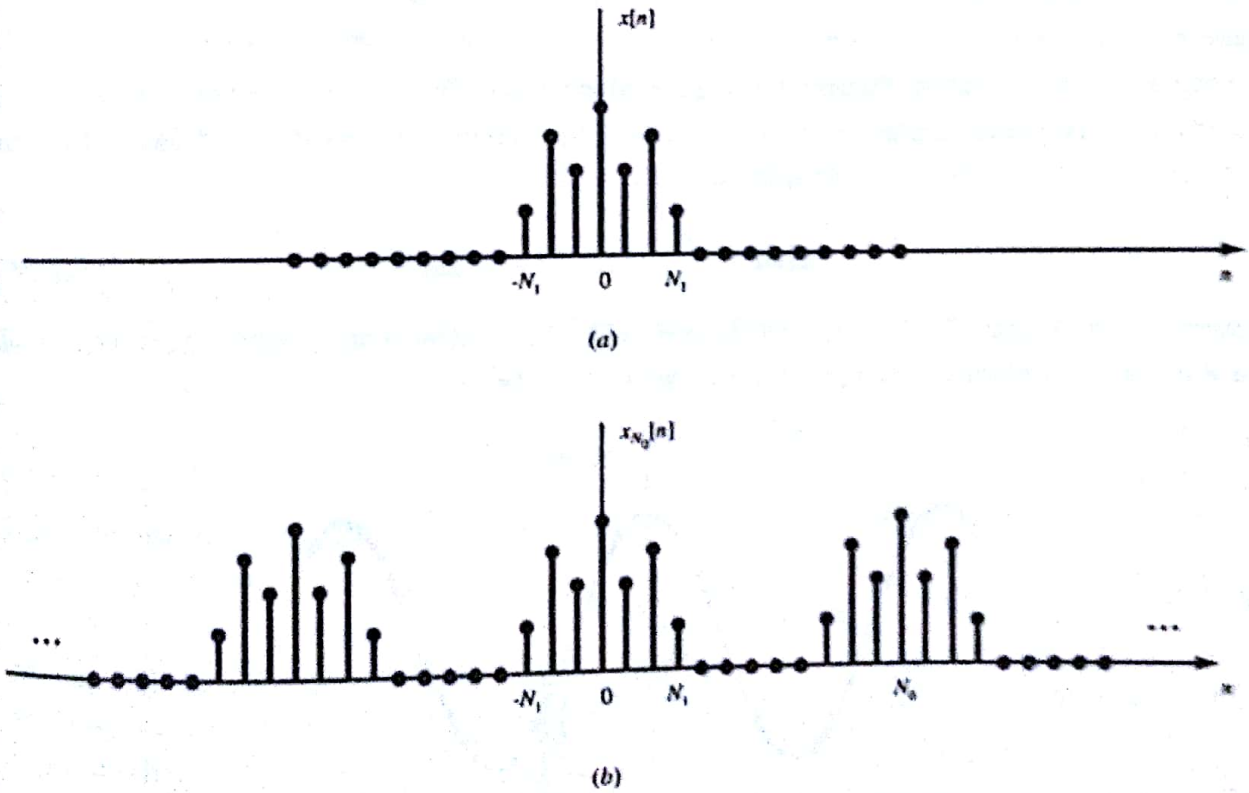
elde ederiz. $x_{N_0}[n]$'nin ayrık Fourier serisi

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \tag{6.21}$$

ile verilir; burada c_k

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{N_0}[n]\, e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.22a}$$

biçimindedir.



Şekil 6-1 (a) Periyodik olmayan sonlu $x[n]$ dizisi; (b) $x[n]$'nin periyodik olarak uzatılmasıyla oluşturulan periyodik dizi.

$|n| \le N_1$ için $x_{N_0}[n] = x[n]$ olduğundan, ve yine bu aralığın dışında $x[n] = 0$ olduğundan Eşitlik (6.22a)

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.22b}$$

biçiminde yazılabilir.

$X(\Omega)$'yı

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{6.23}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda, Eşitlik (6.22b)'den c_k Fourier katsayıları

$$c_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) \tag{6.24}$$

biçiminde ifade edilebilir. Eşitlik (6.24)'ü Eşitlik (6.21)'e yerleştirerek

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}$$

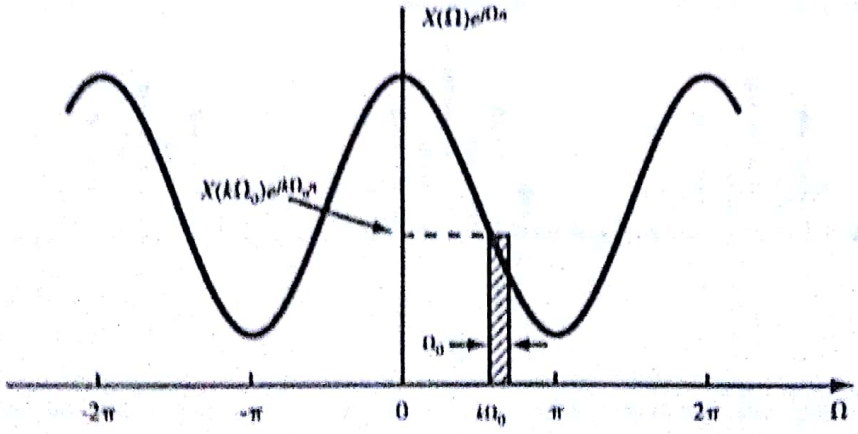
veya

$$x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 \tag{6.25}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.23)'ten $X(\Omega)$ ve dolayısıyla $e^{j\Omega n}$, 2π periyodu ile periyodiktir. Böylece, $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ çarpımı da 2π periyodu ile periyodik olur. Şekil 6-2'de görüldüğü gibi, Eşitlik (6.25)'teki toplamadaki her terim yüksekliği $X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}$ ve genişliği Ω_0 olan bir dikdörtgenin alanını temsil eder. $N_0 \to \infty$ için $\Omega_0 = 2\pi / N_0$ sonsuz küçük olur ($\Omega_0 \to 0$) ve Eşitlik (6.25) bir entegrale dönüşür. Dahası, Eşitlik (6.25)'teki toplama $\Omega_0 = 2\pi / N_0$ genişliğinde N_0 ardışık aralık üzerinden olduğundan toplam entegralleme aralığı her zaman 2π genişliğinde olacaktır. Böylece, $N_0 \to \infty$ için ve Eşitlik (6.20)'nin ışığında Eşitlik (6.25)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{6.26}$$

biçimini alır. $X(\Omega)e^{j\Omega n}$, 2π periyodu ile periyodik olduğundan, Eşitlik (6.26)'daki entegralleme aralığı 2π uzunluğunda herhangi bir aralık olarak alınabilir.



Şekil 6-2 Eşitlik (6.25)'nin grafiksel yorumu

B. Fourier Dönüşüm Çifti:

Eşitlik (6.25) ile tanımlanan $X(\Omega)$ işlevi $x[n]$'nin Fourier dönüşümü olarak adlandırılır ve Eşitlik (6.26) $X(\Omega)$'nın ters Fourier dönüşümünü tanımlar. Fourier simgesel olarak

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{6.27}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{6.28}$$

ile gösterilir ve $x[n]$ ile $X(\Omega)$'nın

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega) \tag{6.29}$$

ile gösterilen bir Fourier dönüşüm çifti olduğu söylenir. Eşitlik (6.27) ve (6.28) Eşitlik (5.31) ve (5.32)'nin ayrık zamandaki karşılıklarıdırlar.

C. Fourier Spektrumları:

$x[n]$'nin Fourier dönüşümü $X(\Omega)$ genellikle karmaşıktır ve

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)} \tag{6.30}$$

biçiminde ifade edilebilir. Sürekli zamanda olduğu gibi, periyodik olmayan bir $x[n]$ dizisinin Fourier dönüşümü $X(\Omega)$, $x[n]$'nin frekans bölgesi gösterimidir ve $x[n]$'nin spektrumu (veya Fourier spektrumu) olarak adlandırılır. $|X(\Omega)|$ niceliğine $x[n]$'nin genlik spektrumu, ve $\phi(\Omega)$'ya $x[n]$'nin faz spektrumu denir. Ayrıca, eğer $x[n]$ gerçekse, genlik spektrumu $|X(\Omega)|$, Ω'nın bir çift işlevi ve faz spektrumu $\phi(\Omega)$, Ω'nın bir tek işlevidir.

D. $X(\Omega)$'nın Yakınsaklığı:

Tam olarak sürekli zaman için olduğu gibi, $X(\Omega)$'nın yakınsaklığı için yeterli koşul $x[n]$'nin mutlak olarak toplanabilir olması yani

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \tag{6.31}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

E. Fourier Dönüşümü ile z- Dönüşümü arasındaki İlişki:

Eşitlik (6.27)'de $x[n]$'nin Fourier dönüşümü

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{6.32}$$

olarak tanımlanmaktadır. $x[n]$'nin z dönüşümü Eşitlik (4.3)'te tanımlandığı üzere

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{6.33}$$

ile verilmektedir. Eşitlik (6.32) ve (6.33)'ü karşılaştırdığımızda, eğer $X(z)$'nin yakınsama bölgesi birim çemberi içerirse, $x[n]$'nin Fourier dönüşümü $X(\Omega)$, birim çember üzerinden alınan $X(z)$'ye eşit olur, yani

$$X(\Omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \tag{6.34}$$

eşitliği sağlanır. Eşitlik (6.33)'teki toplama $X(z)$ ile gösterildiğinden, Eşitlik (6.32)'deki toplamanın da $X(e^{j\Omega})$ biçiminde gösterilebileceğine dikkat ediniz. Dolayısıyla, bu kitabın geri kalanında,

Fourier dönüşümü ile z dönüşümünü ilişkilendirdiğimizde, hem $X(\Omega)$ ve hem de $X(e^{j\Omega})$ aynı şeyi ifade edecektir. Fourier dönüşümü $z = e^{j\Omega}$ alınmış z dönüşümü olduğundan, bir $x[n]$ dizisinin Fourier dönüşümünün z dönüşümünde z yerine $e^{j\Omega}$ alınarak otomatik olarak bulunabileceği varsayılmamalıdır. Eğer $x[n]$ mutlak olarak toplanabilir ise yani $x[n]$ (6.31) koşulunu sağlıyorsa, $X(z)$'nin yakınsama bölgesi birim çemberi içereceğinden yani $\left|e^{j\Omega}\right| = 1$ olduğundan, $x[n]$'nin Fourier dönüşümü $z = e^{j\Omega}$ alınarak $x[n]$'nin z dönüşümünden elde edilebilir. Bu mutlak olarak toplanabilir olmayan diziler için genelde doğru değildir. Aşağıdaki örnekler yukarıdaki ifadelere açıklık getirmektedir.

ÖRNEK 6.1. Birim dürtü dizisi $\delta[n]$'yi düşünelim.

Eşitlik (4.14)'ten $\delta[n]$'nin z dönüşümü

$$\mathfrak{Z}\{\delta[n]\} = 1 \tag{6.35}$$

ile verilir. (6.27) ve (1.45) tanımlarından $\delta[n]$'nin Fourier dönüşümü

$$\mathscr{F}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, e^{-j\Omega n} = 1 \tag{6.36}$$

olur. Böylece $\delta[n]$'nin z dönüşümü ve Fourier dönüşümü aynıdır. $\delta[n]$'nin mutlak olarak toplanabilir olduğuna ve $\delta[n]$'nin z dönüşümünün birim çemberi içerdiğine dikkat ediniz.

ÖRNEK 6.2. Aşağıda verilen nedensel üstel diziyi düşünelim.

$$x[n] = a^n u[n]$$

Eşitlik (4.9)'dan $x[n]$'nin z dönüşümü

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

ile verilir. $|a| < 1$ için $X(z)$'nin yakınsama bölgesi birim çemberi içerdiğinden $X(e^{j\Omega})$ vardır. Yani

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \qquad |a| < 1 \tag{6.37}$$

olur. Sonra, (6.27) tanımından ve Eşitlik (1.91)'den $x[n]$'nin Fourier dönüşümü

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\Omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \qquad |ae^{-j\Omega}| = |a| < 1 \tag{6.38}$$

biçiminde bulunur. Böylece Eşitlik (6.37) ve (6.38)'yi karşılaştırırsak

$$X(\Omega) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

elde ederiz. $x[n]$'nin mutlak olarak toplanabilir olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 6.3. Birim basamak dizisi $u[n]$'yi düşünelim.

Eşitlik (4.16)'dan $u[n]$'nin z dönüşümü

$$\mathfrak{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1 \tag{6.39}$$

olur. $u[n]$'nin z dönüşümünün yakınsama bölgesi birim çemberi içermediğinden

$u[n]$'nin Fourier dönüşümü z dönüşümünden elde edilemez. Birim basamak dizisi $u[n]$'nin mutlak olarak toplanabilir olmadığına dikkat ediniz. $u[n]$'nin Fourier dönüşümü (Problem 6.28)

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \qquad |\Omega| \le \pi \tag{6.40}$$

ile verilir.

6.4. FOURIER DÖNÜŞÜMÜNÜN ÖZELLİKLERİ

Fourier dönüşümünün temel özellikleri aşağıda verilmektedir. Sürekli zaman durumu ile pek çok benzerlik ve bazı farklar vardır. Bu özelliklerin çoğu, $X(z)$'nin yakınsama bölgesinin birim çemberi içermesi durumunda, z dönüşümünün özelliklerine de benzerdir.

A. Periyodiklik:

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \tag{6.41}$$

Sürekli zaman durumunda ω'nın (radyan/saniye) $-\infty < \omega < \infty$ aralığındaki tüm değerlerini düşünmek gerekliyken, ayrık zaman durumunda, Eşitlik (6.41)'nin bir sonucu olarak Ω'nın (radyan) yalnızca $0 \le \Omega < 2\pi$ veya $-\pi \le \Omega < \pi$ aralığındaki değerlerini göz önüne almalıyız.

B. Doğrusallık:

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1(\Omega) + a_2X_2(\Omega) \tag{6.42}$$

C. Zamanda Öteleme:

$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega) \tag{6.43}$$

D. Frekans Ötelemesi:

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0) \tag{6.44}$$

E. Eşlenik alma:

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega) \tag{6.45}$$

burada * karmaşık eşleniği gösterir.

F. Zamanda Geri Dönüş:

$$x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega) \tag{6.46}$$

G. Zaman Ölçeklemesi:

Bölüm 5.4D'de sürekli zamanlı Fourier dönüşümünün ölçekleme özelliği

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{6.47}$$

biçiminde açıklanmıştı [Eşitlik (5.52)]. Ancak, ayrık zamanlı durumda, a bir tamsayı değilse $x[an]$ bir dizi değildir. Diğer yandan, eğer a bir tamsayı ise, $a = 2$ diyelim, bu durumda $x[2n]$ $x[n]$'nin yalnızca çift örneklerini içerir. Dolayısıyla, ayrık zamanda zaman ölçeklemesi Eşitlik (6.47)'den biraz farklı bir biçim alır.

m pozitif bir tamsayı olsun ve

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] = x[k] & n = km, \quad m = \text{tamsayı} \\ 0 & n \neq km \end{cases} \tag{6.48}$$

dizisini tanımlayalım. Bu durumda

$$x_{(m)}[n] \longleftrightarrow X(m\Omega) \tag{6.49}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.49), Eşitlik (6.47)'nin ayrık zamandaki karşılığıdır. Bu eşitlik yine zaman ve frekans arasındaki ters ilişkiyi ifade eder. Yani, sinyal zamanda yayıldıkça $(m>1)$, Fourier dönüşümü sıkıştırılır. (Problem 6.22). $X(\Omega)$ 2π ile periyodik olduğundan $X(m\Omega)$'nın $2\pi/m$ ile periyodik olduğuna dikkat ediniz.

H. Çifteşlik:

Bölüm 5.4F'de sürekli zamanlı Fourier dönüşümünün çifteşlik özelliği

$$X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) \tag{6.50}$$

biçiminde açıklanmıştı [Eşitlik (5.54)]. Bu özelliğin hiçbir ayrık zaman karşılığı yoktur. Ancak, ayrık zamanlı Fourier dönüşümü ile sürekli zamanlı Fourier serileri arasında bir çifteşlik vardır.

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$$

yazalım. Eşitlik (6.27) ve (6.41)'den

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{6.51}$$

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega) \tag{6.52}$$

yazabiliriz. Ω sürekli bir değişken olduğundan, Eşitlik (6.51)'de $\Omega = t$ ve $n = -k$ alarak

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]\, e^{jkt} \tag{6.53}$$

buluruz. $X(t)$ $T_0=2\pi$ periyodu ve $\omega_0 = 2\pi / T_0 = 1$ temel frekansı ile periyodik olduğundan, Eşitlik (6.53) $X(t)$'nin Fourier serisi katsayılarının $x[-k]$ olacağını belirtir. Bu çifteşlik ilişkisi

$$X(t) \overset{FS}{\longleftrightarrow} c_k = x[-k] \tag{6.54}$$

ile gösterilir; burada FS Fourier serisini ve c_k Fourier katsayılarını gösterir.

İ. Frekans Türevi:

$$nx[n] \longleftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \tag{6.55}$$

J. Fark Alma:

$x[n]- x[n-1]$ dizisine ilk fark dizisi denir. Eşitlik (6.56), doğrusallık özelliği (6.42) ve zaman ötelemesi özelliği (6.43)'ten kolayca elde edilir.

$$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega) \tag{6.56}$$

K. Birikim:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \pi X(0)\,\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega) \qquad |\Omega| \le \pi \tag{6.57}$$

Birikimin entegrallemenin ayrık zamandaki karşılığı olduğuna dikkat ediniz. Eşitlik (6.57)'nin sağ tarafındaki dürtü terimi birikimin neden olabileceği dc veya ortalama değeri gösterir.

L. Konvolüsyon:

$$x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega) \tag{6.58}$$

Bu konvolüsyon özelliği, z dönüşümünde olduğu gibi, ayrık zamanlı DZD sistemlerin incelenmesinde önemli bir rol oynar.

M. Çarpma:

$$x_1[n]x_2[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega) \tag{6.59}$$

Burada ⊗

$$X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega) = \int_{2\pi} X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta)\, d\theta \tag{6.60}$$

ile tanımlanan [Eşitlik (2.70)] periyodik konvolüsyonu gösterir. Çarpma özeliği (6.59), Eşitlik (6.58)'nin çifteş özelliğidir.

N. Ek Özellikler:

Gerçel $x[n]$ için, $x_e[n]$ ve $x_o[n]$ sırasıyla $x[n]$'nin çift ve tek bileşenleri olmak üzere

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

yazalım.

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)} \tag{6.61}$$

olsun. Bu durumda

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega) \tag{6.62}$$

$$x_e[n] \longleftrightarrow \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \tag{6.63a}$$

$$x_o[n] \longleftrightarrow j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \tag{6.63b}$$

buluruz. (6.62) eşitliği $x[n]$'nin gerçel olması için gerekli ve yeterli koşuldur. Eşitlik (6.62) ve (6.61)'den

$$A(-\Omega) = A(\Omega) \qquad B(-\Omega) = -B(\Omega) \tag{6.64a}$$

$$|X(-\Omega)| = |X(\Omega)| \qquad \theta(-\Omega) = -\theta(\Omega) \tag{6.64b}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.63a), (6.63b) ve (6.64a)'dan görüldüğü gibi eğer $x[n]$ gerçel ve çiftse, $X(\Omega)$ gerçel ve çifttir, eğer $x[n]$ gerçel ve tekse, $X(\Omega)$ sanal ve tektir.

O. Parseval Bağıntıları:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\Omega)X_2(-\Omega)\, d\Omega \tag{6.65}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2\, d\Omega \tag{6.66}$$

Eşitlik (6.66) ayrık zamanlı Fourier dönüşümü için Parseval özdeşliği (veya Parseval teoremi) olarak bilinir.

Tablo 6-1 bu bölümde verilen Fourier dönüşümü özelliklerinin bir özetini içermektedir. Bazı yaygın diziler ve Fourier dönüşümleri Tablo 6-2'de verilmiştir.

Tablo 6-1 Fourier Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	Dizi	Fourier dönüşümü
	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
Periyodiklik	$x[n]$	$X(\Omega+2\pi)=X(\Omega)$
Doğrusallık	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(\Omega)+a_2X_2(\Omega)$
Zaman Ötelemesi	$x[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
Frekans ötelemesi	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega-\Omega_0)$
Eşlenik alma	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Zamanda geri dönüş	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Zaman ölçeklemesi	$x_{(m)}[n]=\begin{cases} x[n/m] & n=km \\ 0 & n\neq km \end{cases}$	$X(m\Omega)$
Frekans türevi	$nx[n]$	$j\dfrac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
İlk fark	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Birikim	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\pi X(0)\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)$ $\lvert\Omega\rvert\leq\pi$
Konvolüsyon	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
Çarpma	$x_1[n]x_2[n]$	$\dfrac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)$
Gerçel dizi	$x[n]=x_e[n]+x_o[n]$	$X(\Omega)=A(\Omega)+jB(\Omega)$ $X(-\Omega)=X^*(\Omega)$
Çift bileşen	$x_e[n]$	$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}=A(\Omega)$
Tek bileşen	$x_o[n]$	$j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}=jB(\Omega)$
Parseval bağıntıları		

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\Omega)X_2(-\Omega)\,d\Omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2\,d\Omega$$

Tablo 6-2. Yaygın Fourier Dönüşüm Çiftleri

$x[n]$	$X(\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$x[n]=1$	$2\pi\delta(\Omega), \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0), \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$\cos\Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)], \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$\sin\Omega_0 n$	$-j\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)], \lvert\Omega\rvert, \lvert\Omega_0\rvert \le \pi$
$u[n]$	$\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}, \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$-u[-n-1]$	$-\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}, \lvert\Omega\rvert \le \pi$
$a^n u[n], \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$-a^n u[-n-1], \lvert a\rvert > 1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$(n+1)a^n u[n], \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert}, \lvert a\rvert < 1$	$\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$
$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert \le N_1\\ 0 & \lvert n\rvert > N_1\end{cases}$	$\dfrac{\sin[\Omega(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\Omega/2)}$
$\dfrac{\sin Wn}{\pi n}, 0 < W < \pi$	$X(\Omega)=\begin{cases}1 & 0 \le \lvert\Omega\rvert \le W\\ 0 & W < \lvert\Omega\rvert \le \pi\end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN_0]$	$\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0), \Omega_0=\dfrac{2\pi}{N_0}$

6.5. AYRIK ZAMANLI DZD SİSTEMLERİN FREKANS TEPKİSİ

A. Frekans Tepkisi:

Bölüm 2.6'da ayrık zamanlı bir DZD sistemin $y[n]$ çıktısının $x[n]$ girişi ile dürtü tepkisi $h[n]$'nin konvolüsyonuna eşit olduğunu, yani

$$y[n]=x[n]*h[n] \tag{6.67}$$

olduğunu gösterdik. Konvolüsyon özelliği (6.58)'yi uygulayarak

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega) \tag{6.68}$$

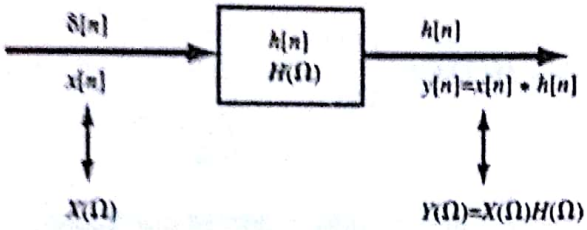
elde ederiz; burada $Y(\Omega)$, $X(\Omega)$ ve $H(\Omega)$, sırasıyla $y[n]$, $x[n]$ ve $h[n]$'nin Fourier dönüşümleridir. Eşitlik (6.68)'den

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \tag{6.69}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.67) ve (6.68) ile temsil edilen ilişkiler Şekil 6-3'te gösterilmiştir. $H(\Omega)$ için

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\theta_H(\Omega)} \tag{6.70}$$

yazalım. Sürekli zamanda olduğu gibi, $H(\Omega)$ işlevine sistemin frekans tepkisi, $|H(\Omega)|$'ya sistemin genlik tepkisi ve $\theta_H(\Omega)$'ya sistemin faz tepkisi denir.



Şekil 6-3. Ayrık zamanlı bir DZD sistemde girişler ve çıkışlar arasındaki ilişkiler

Aşağıda verilen karmaşık üstel diziyi düşünelim:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \tag{6.71}$$

Bu durumda, Eşitlik (4.1)'de $z = e^{j\Omega_0}$ alarak

$$y[n] = H(e^{j\Omega_0})\, e^{j\Omega_0 n} = H(\Omega_0)\, e^{j\Omega_0 n} \tag{6.72}$$

elde ederiz; bu eşitlik, daha önce Bölüm 2'de (Bölüm 2.8) gözlendiği gibi, $e^{j\Omega_0 n}$ karmaşık üstel dizisinin, karşılık gelen özdeğer $H(\Omega_0)$ olmak üzere, DZD sistemin bir özişlevi olduğunu gösterir. Ayrıca, doğrusallık özelliği (6.42)'den $x[n]$ girişi

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} c_k\, e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \tag{6.73}$$

ayrık Fourier serisi ile periyodikse, karşılık gelen $y[n]$ çıkışı da

$$y[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} c_k H(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n} \tag{6.74}$$

ayrık Fourier serisi ile periyodiktir. Eğer $x[n]$ periyodik değilse, karşılık gelen $y[n]$ çıkışı Eşitlik (6.68) ve (6.28)'den

$$y[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} H(\Omega)X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega \tag{6.75}$$

biçiminde ifade edilebilir.

B. Fark Denklemleri ile Karakterize Edilen DZD Sistemler:

Bölüm 2.9'da tartışıldığı gibi, pratik ilgi konusu pek çok ayrık zamanlı DZD sistem, $M \le N$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{6.76}$$

biçiminde doğrusal sabit katsayılı fark denklemleri ile betimlenir. Eşitlik (6.76)'nın her iki tarafının Fourier dönüşümünü alarak ve doğrusallık özelliği (6.42)'yi ve zaman ötelemesi özelliği (6.43)'ü kullanarak

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

veya eşdeğer olarak

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}} \tag{6.77}$$

elde ederiz. (6.77) sonucu, $z = e^{j\Omega}$ alındığında, z dönüşümü karşılığı $H(z) = Y(z)/X(z)$ ile aynıdır [Eşitlik (4.44)]; yani

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})$$

olur.

C. Frekans Tepkisinin Periyodik Niteliği:

Eşitlik (6.41)'den

$$H(\Omega) = H(\Omega + 2\pi) \tag{6.78}$$

elde ederiz. Böylece, sürekli zamanlı sistemlerin frekans tepkisinden farklı olarak, tüm ayrık zamanlı DZD sistemlerin frekans tepkisi 2π periyodu ile periyodiktir. Dolayısıyla, bir sistemin frekans tepkisini yalnızca $0 \le \Omega < 2\pi$ veya $-\pi \le \Omega < \pi$ frekans aralığında gözlememiz yeterlidir.

6.6. SİSTEMLERİN ÖRNEKLENMİŞ SÜREKLİ ZAMANLI SİNÜZOİTLERE TEPKİSİ

A. Sistem Tepkileri:

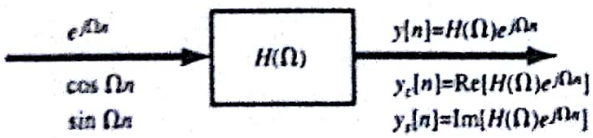
$\cos\Omega n$, $\sin\Omega n$ ve $e^{j\Omega n}$'e sistem tepkilerini, sırasıyla $y_c[n]$, $y_s[n]$ ve $y[n]$ ile gösteriyoruz (Şekil 6-4). $e^{j\Omega n} = \cos\Omega n + j\sin\Omega n$ olduğundan, Eşitlik (6.72) ve sistemin doğrusallık özelliğinden

$$y[n] = y_c[n] + jy_s[n] = H(\Omega)\, e^{j\Omega n} \tag{6.79a}$$

$$y_c[n] = \mathrm{Re}\{y[n]\} = \mathrm{Re}\{H(\Omega)\, e^{j\Omega n}\} \tag{6.79b}$$

$$y_s[n] = \mathrm{Im}\{y[n]\} = \mathrm{Im}\{H(\Omega)\, e^{j\Omega n}\} \tag{6.79c}$$

olur.



Şekil 6-4 $e^{j\Omega n}$, $\cos\Omega n$ ve $\sin\Omega n$ için sistem tepkileri

Bir $\cos \Omega n$ sinüzoidi, sürekli zamanlı $\cos \omega t$ sinyali T_s örnekleme aralığında örneklenerek elde edildiğinde, yani

$$\cos \Omega n = \cos \omega t|_{t=nT_s} = \cos \omega T_s n \qquad (6.80)$$

olduğunda, Ω yerine ωT_s alınırsa bu alt bölümde geliştirilen bütün sonuçlar geçerlidir:

$$\Omega = \omega T_s \qquad (6.81)$$

Sürekli zamanlı bir $\cos \omega t$ sinüzoidi için $0-\infty$ aralığındaki her ω değeri için tek bir dalga biçimi vardır. ω 'nın artırılması gittikçe artan frekanslı bir sinüzoide yol açar. Diğer yandan, ayrık zamanlı $\cos \Omega n$ sinüzoidi,

$$\cos[(\Omega + 2\pi m)n] = \cos(\Omega n + 2\pi mn) = \cos \Omega n \qquad m = \text{tamsayı} \qquad (6.82)$$

olduğundan, yalnızca Ω 'nın 0 ile 2π aralığındaki değerleri için tek bir dalga biçimine sahiptir. Bu aralık

$$\cos(\pi \pm \Omega)n = \cos \pi n \cos \Omega n \mp \sin \pi n \sin \Omega n$$
$$= (-1)^n \cos \Omega n \qquad (6.83)$$

olduğu gerçeğinden ötürü daha da sınırlanır. Dolayısıyla,

$$\cos(\pi + \Omega)n = \cos(\pi - \Omega)n \qquad (6.84)$$

olur. (6.84) eşitliği $(\pi + \Omega)$ frekanslı bir sinüzoit ile $(\pi - \Omega)$ frekanslı bir sinüzoidin aynı dalga biçimine sahip olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $0-\pi$ aralığının dışında herhangi bir Ω değerine sahip bir sinüzoit, $0-\pi$ aralığında Ω değerine sahip bir sinüzoide eşittir. Böylece, $0 \le \Omega < \pi$ aralığında bir frekansı olan her ayrık zamanlı sinüzoidin farklı bir dalga biçimine sahip olduğuna, ve bir sistemin frekans tepkisini yalnızca $0 \le \Omega < \pi$ frekans aralığında gözlemenin yeterli olduğuna karar veriyoruz.

B. Örnekleme Hızı:

ω_M $(=2\pi f_M)$ sürekli zamanlı sinüzoidin en yüksek frekansı olsun. Bu durumda Eşitlik (6.81)'den örneklenmiş ayrık zamanlı bir sinüzoidin tek bir dalga biçimine sahip olması için gereken koşul

$$\omega_M T_s < \pi \rightarrow T_s < \frac{\pi}{\omega_M} \qquad f_s > 2f_M \qquad (6.85)$$

olur; burada $f_s = 1/T_s$ örnekleme hızı (ya da frekansıdır). Eşitlik (6.85) sürekli zamanlı bir sinüzoidi ayrık zamanlı bir sistemde işlemek için, örnekleme hızının sinüzoidin (hertz cinsinden) frekansının iki katından az olmaması gerektiğini belirtir. Bu sonuç Problem (5.59)'da tartışılan örnekleme teoreminin özel bir halidir.

6.7. BENZETİM

Girişi $x(t)$, çıkışı $y(t)$ olan sürekli zamanlı bir DZD sistemi ele alalım. T_s örnekleme aralığı olmak üzere

$$\text{eğer} \qquad x[n] = x[nT_s] \text{ ise } y[n] = y[nT_s] \qquad (6.86)$$

olacak şekilde, girişi $x[n]$ ve çıkışı $y[n]$ olan ayrık zamanlı bir DZD sistem bulmak istiyoruz.

$H_c(s)$ ve $H_d(z)$, sırasıyla, sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sistemlerin sistem fonksiyonları olsunlar (Şekil 6-5).

$$x(t) = e^{j\omega t} \qquad x[n] = x(nT_s) = e^{jn\omega T_s} \tag{6.87}$$

yazalım. Bu durumda Eşitlik (3.1) ve (4.1)'den

$$y(t) = H_c(j\omega)\, e^{j\omega t} \qquad y[n] = H_d(e^{j\omega T_s})\, e^{jn\omega T_s} \tag{6.88}$$

elde ederiz. Böylece, $y[n] = y(nT_s)$ gerektirmesi

$$H_c(j\omega)\, e^{jn\omega T_s} = H_d(e^{j\omega T_s})\, e^{jn\omega T_s}$$

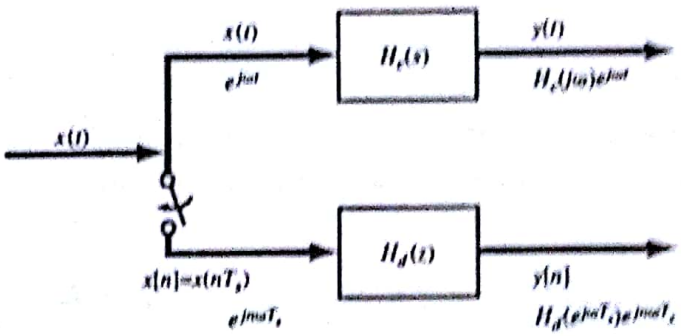
koşuluna götürür ve buradan

$$H_c(j\omega) = H_d(e^{j\omega T_s}) \tag{6.89}$$

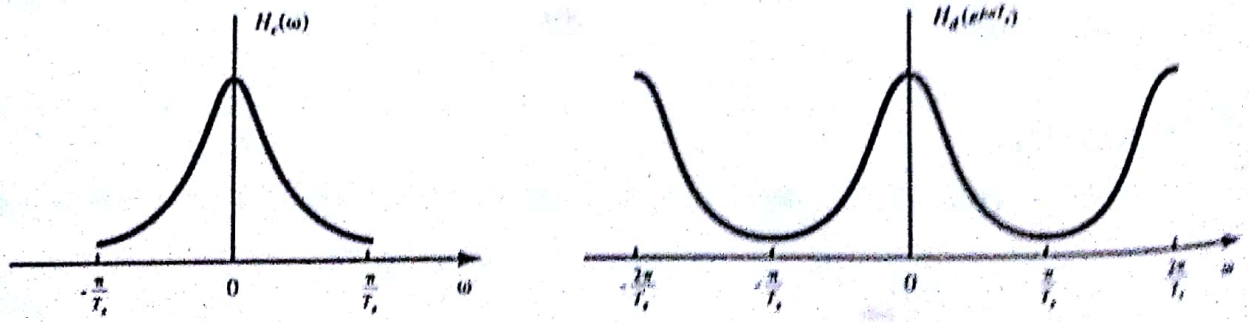
çıkar. Eşitlik (6.89), Fourier dönüşümü cinsinden

$$H_c(\omega) = H_d(\Omega) \qquad \Omega = \omega T_s \tag{6.90}$$

biçiminde ifade edilebilir. Ayrık zamanlı sistemin frekans tepkisi $H_d(\Omega)$'nın ($2\pi / T_s$ periyodu ile) ω'nın periyodik bir işlevi olduğuna, fakat sürekli zamanlı sistemin frekans tepkisi $H_c(\omega)$'nın periyodik olmadığına dikkat ediniz. Dolayısıyla, Eşitlik (6.89) veya (6.90), genel olarak her ω için doğru olamaz. Eğer $x(t)$ girişi bant sınırlı ise [Eşitlik (5.94)], ilkesel olarak, $(-\pi / T_s, \pi / T_s)$ frekans aralığındaki her ω için Eşitlik (6.89)'u sağlamak mümkündür (Şekil 6-6). Ancak, Eşitlik (5.85) ve (6.77)'den, $H_c(\omega)$'nın ω'nın rasyonel bir işlevi olduğunu, diğer yandan $H_d(\Omega)$'nın $e^{j\Omega}$'nın ($\Omega = \omega T_s$) rasyonel bir işlevi olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla, Eşitlik (6.89)'u sağlanması olanaksızdır. Ancak, ayrık zamanlı bir sistemi, giriş bandındaki her ω için makul bir doğrulukla Eşitlik (6.89)'u sağlayacak biçimde belirleme yöntemleri vardır (Problem 6.43-6.47).



Şekil 6-5 Analog sistemlerin sayısal benzetimi



Şekil 6-6

6.8 AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, sonlu uzunluktaki diziler için ayrık Fourier dönüşümü (AFD) olarak bilinen tekniği tanıtacağız. AFD Fourier dönüşümü ile karıştırılmamalıdır.

A. Tanım:

$x[n]$, N uzunluğunda sonlu uzunluklu bir dizi, yani

$$x[n]=0 \qquad 0 \le n \le N-1 \text{ aralığının dışında} \tag{6.91}$$

olsun. $x[n]$'nin AFD'si $X[k]$ ile gösterilir ve

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{6.92}$$

ile tanımlanır; burada W_N birin

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{6.93}$$

ile verilen N. inci köküdür. Ters AFD (TAFD)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{6.94}$$

ile verilir. AFD çifti

$$x[n] \longleftrightarrow X[k] \tag{6.95}$$

ile gösterilir.

AFD'nin önemli özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. $x[n]$ ve $X[k]$ arasında birebir karşılıklılık vardır.
2. Hesaplanması için hızlı Fourier dönüşümü (HFD) denilen son derece hızlı bir algoritma vardır.
3. AFD ayrık Fourier serileri ve Fourier dönüşümü ile yakından ilişkilidir.
4. AFD, hem zaman ve hem de frekans bölgesinde ayrık ve sonlu uzunlukta olduğu için, sayısal bilgisayar gerçekleştiriminde uygun Fourier gösterimidir.

Eşitlik (6.92)'de N'nin seçiminin sabit olmadığına dikkat ediniz. Eğer $x[n]$ $N_1<N$ uzunluğundaysa, 0 değerinde $(N-N_1)$ tane örnek ekleyerek $x[n]$'nin N uzunluğunda olduğunu varsaymak istiyoruz. Bu sözde örneklerin eklenmesine sıfır doldurma denir. Sonuçta elde edilen $x[n]$'ye genellikle N noktalı dizi, ve Eşitlik (6.92)'de tanımlanan $X[k]$'ya N noktalı AFD denir. N'nin, 2'nin bir kuvveti olarak seçilmesi durumunda hesaplama kolaylıkları sağlanabilir.

B. AFD ve Ayrık Fourier Serileri arasındaki İlişki:

Eşitlik (6.94) ve (6.92)'yi Eşitlik (6.7) ve (6.8)'le karşılaştırdığımızda, sonlu $x[n]$ dizisinin $X[k]$'sının $x[n]$'nin periyodik uzantısının ayrık Fourier serisi gösterimindeki c_k katsayılarının N_0 periyodu ile çarpılmış hali ($N_0 = N$) olarak yorumlanabileceğini görürüz. Yani

$$X[k] = Nc_k \tag{6.96}$$

olur.

Gerçekte, $1/N$ çarpanı TAFD yerine AFD'nin içine yerleştirilerek bu ikisi özdeş kılınabilir.

C. AFD ile Fourier Dönüşümü arasındaki İlişki:

Eşitlik (6.91) ile tanımlanan $x[n]$'nin Fourier dönüşümü, (6.27) tanımından

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\Omega n} \tag{6.97}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (6.97)'yi Eşitlik (6.92) ile karşılaştırdığımızda

$$X[k] = X(\Omega)|_{\Omega = k2\pi/N} = X\left(\frac{k2\pi}{N}\right) \tag{6.98}$$

olduğunu görürüz. Böylece, $X[k]$, tamsayı k için $\Omega = k2\pi / N$ düzgün aralıklı frekanslarında örneklenmiş $X(\Omega)$ 'ya karşılık gelir.

D. AFD'nin Özellikleri:

AFD ve Fourier dönüşümü arasındaki (6.98) ilişkisinden ötürü, AFD $X[k]$'nın bir ayrık değişkenin işlevi olması ve Fourier dönüşümü $X(\Omega)$ 'nın sürekli bir değişkenin işlevi olması dışında bunların özelliklerinin tümüyle benzer olmasını bekliyoruz. AFD değişkenleri n ve k'nın $0 \le n,\ k < N$ aralığına sınırlanması gerektiğine, AFD kaymaları $x[n-n_0]$ veya $X[k-k_0]$'nın $x[n-n_0]_{\text{mod } N}$ veya $X[k-k_0]_{\text{mod } N}$'yi gerektirdiklerine, $[m]_{\text{mod } N}$ modül notasyonunun bazı tamsayı i için

$$[m]_{\text{mod } N} = m + iN \tag{6.99}$$

olması anlamına geldiğine, burada

$$0 \le [m]_{\text{mod } N} < N \tag{6.100}$$

koşulunun sağlanması gerektiğine dikkat ediniz. Örneğin, $x[n] = \delta[n-3]$ ise

$$x[n-4]_{\text{mod } 6} = \delta[n-7]_{\text{mod } 6} = \delta[n-7+6] = \delta[n-1]$$

olur. AFD kayması dairesel kayma olarak da bilinir. AFD'nin temel özellikleri aşağıda verilmiştir:

1. Doğrusallık:

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \longleftrightarrow a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k] \tag{6.101}$$

2. Zamanda Öteleme:

$$x[n-n_0]_{\text{mod } N} \longleftrightarrow W_N^{kn_0} X[k] \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{6.102}$$

3. Frekans Ötelemesi:

$$W_N^{-kn_0} x[n] \longleftrightarrow X[k-k_0]_{\text{mod } N} \tag{6.103}$$

4. Eşlenik Alma:

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*[-k]_{\text{mod } N} \tag{6.104}$$

burada * karmaşık eşleniği gösterir.

5. **Zamanda Geri Dönüş:**

$$x[-n]_{\text{mod } N} \leftrightarrow X[-k]_{\text{mod } N} \tag{6.105}$$

6. **Çifteşlik:**

$$X[n] \leftrightarrow Nx[-k]_{\text{mod } N} \tag{6.106}$$

7. **Dairesel Konvolüsyon:**

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1[k]X_2[k] \tag{6.107}$$

burada

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i]x_2[n-i]_{\text{mod } N}$$

ile verilmektedir. Eşitlik (6.108)'deki konvolüsyon toplamına $x_1[n]$ ve $x_2[n]$'nin dairesel konvolüsyonu denir.

8. **Çarpma:**

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{N}X_1[k] \otimes X_2[k] \tag{6.109}$$

burada

$$X_1[k] \otimes X_2[k] = \sum_{i=1}^{N-1} X_1[i]X_2[k-i]_{\text{mod } N}$$

ile verilmektedir.

9. **Ek Özellikler:**

Gerçel $x[n]$ için, $x_e[n]$ ve $x_o[n]$, sırasıyla, $x[n]$'nin çift ve tek bileşenleri olmak üzere

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

yazalım.

$$x[n] \leftrightarrow X[k] = A[k] + jB[k] = |X[k]|e^{j\theta[k]}$$

olsun. Bu durumda

$$X[-k]_{\text{mod } N} = X^*[k] \tag{6.110}$$

$$x_e[n] \leftrightarrow \text{Re}\{X[k]\} = A[k] \tag{6.111a}$$

$$x_o[n] \leftrightarrow j\,\text{Im}\{X[k]\} = jB[k] \tag{6.111b}$$

olur. Eşitlik (6.110)'dan

$$A[-k]_{\text{mod } N} = A[k] \qquad B[-k]_{\text{mod } N} = -B[k] \tag{6.112a}$$

$$|X[-k]|_{\text{mod } N} = |X[k]| \qquad \theta[-k]_{\text{mod } N} = -\theta[k] \tag{6.112b}$$

elde ederiz.

10. **Parseval Bağıntısı:**

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X[k]|^2 \tag{6.113}$$

(6.113) eşitliği AFD için Parseval özdeşliği (veya Parseval Teoremi) olarak bilinir.

Çözümlü Problemler

AYRIK FOURIER SERİLERİ

6.1. Bir dizi kümesi $\{\psi_k[n]\}$ alalım. Bu kümeden iki $\psi_m[n]$ ve $\psi_k[n]$ sinyali

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \psi_m[n]\psi_k^*[n] = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \alpha & m = k \end{cases} \tag{6.116}$$

koşulunu sağlarsa bu kümeye $[N_1, N_2]$ aralığında ortogonal denir; burada * karmaşık eşleniği gösterir ve $\alpha \neq 0$'dır. Aşağıda verilen karmaşık üstel diziler kümesinin N uzunluğundaki herhangi bir aralık üzerinde ortogonal olduğunu gösteriniz:

$$\psi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{6.117}$$

Eşitlik (1.90)'dan

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{6.118}$$

yazalım. Eşitlik (6.116)'da $\alpha = e^{jk(2\pi/N)}$ aldığımızda, $e^{jk(2\pi/N)N} = e^{jk2\pi} = 1$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk(2\pi/N)}} = 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{6.119}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.117)'deki toplamadaki karmaşık üstellerin her biri N periyodu ile periyodik olduğundan, toplamanın herhangi bir N uzunluğundaki aralık üzerinden alınması durumunda Eşitlik (6.117) geçerli kalır. Yani

$$\sum_{n=\langle N\rangle} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{6.120}$$

olur. Şimdi, Eşitlik (6.118)'yi kullanarak, $m, k<N$ olmak üzere,

$$\sum_{n=\langle N\rangle} \psi_m[n]\psi_k^*[n] = \sum_{n=\langle N\rangle} e^{jm(2\pi/N)n} e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$= \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(m-k)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases} \tag{6.121}$$

elde ederiz. (6.119) eşitliği $\{e^{jk(2\pi/N)n};\ k = 0, 1, \ldots, N-1\}$ kümesinin, N uzunluğunda herhangi bir aralık üzerinde ortogonal olduğunu gösterir. (6.114) eşitliği, Problem 5.1'de verilen Eşitlik (5.95)'nin ayrık zamandaki karşılığıdır.

6.2. Ortogonallik koşulu Eşitlik (6.119)'u kullanarak Fourier katsayıları için Eşitlik (6.8)'yi türetiniz.

Eşitlik (6.7)'de toplama değişkeni k yerine m alarak

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N-1} c_m e^{jm(2\pi/N_0)n} \tag{6.120}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.115)'te $N = N_0$ alınarak Eşitlik (6.120)

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} c_m \Psi_m[n] \tag{6.121}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (6.121)'nin her iki tarafını $\Psi_k^*[n]$ ile çarparak ve $n = 0$'dan (N_0-1)'e kadar toplayarak

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\Psi_k^*[n] = \sum_{n=0}^{N_0-1} \left(\sum_{m=0}^{N_0-1} c_m \Psi_m[n] \right) \Psi_k^*[n]$$

elde ederiz. Toplamanın sırasını değiştirerek ve Eşitlik (6.119)'u kullanarak

$$\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\Psi_k^*[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} c_m \left(\sum_{n=0}^{N_0-1} \Psi_m[n]\Psi_k^*[n] \right) = N_0 c_k \tag{6.122}$$

elde ederiz. Böylece

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\Psi_k^*[n] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N_0)n}$$

olur.

6.3. Şekil 6-7'de görülen periyodik $x[n]$ dizisi için Fourier katsayılarını bulunuz.

Şekil 6-7'den görüldüğü gibi $x[n]$, N_0=4 temel periyotlu {0, 1, 2, 3} dizisinin periyodik uzantısıdır. Böylece

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{4} \qquad \text{ve} \qquad e^{-j\Omega_0} = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = -j$$

olur. Eşitlik (6.8)'den c_k ayrık zamanlı Fourier katsayıları

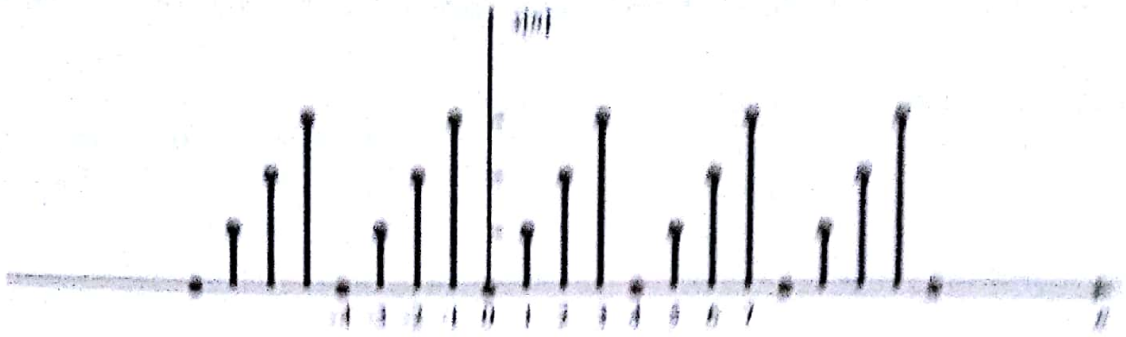
$$c_0 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n] = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = \frac{3}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^n = \frac{1}{4}(0 - j1 - 2 + j3) = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{2n} = \frac{1}{4}(0 - 1 + 2 - 3) = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{3n} = \frac{1}{4}(0 + j1 - 2 - j3) = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

olarak bulunur. $c_3 = c_{4-1} = c_1^*$ [Eşitlik (6.17)] olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 6-7

6.4. Şekil 6-8(a)'da görülen periyodik $s[n]$ dizisini düşünelim. c_k Fourier katsayılarını bulunuz ve genlik spektrumu $|c_k|$'yı çiziniz.

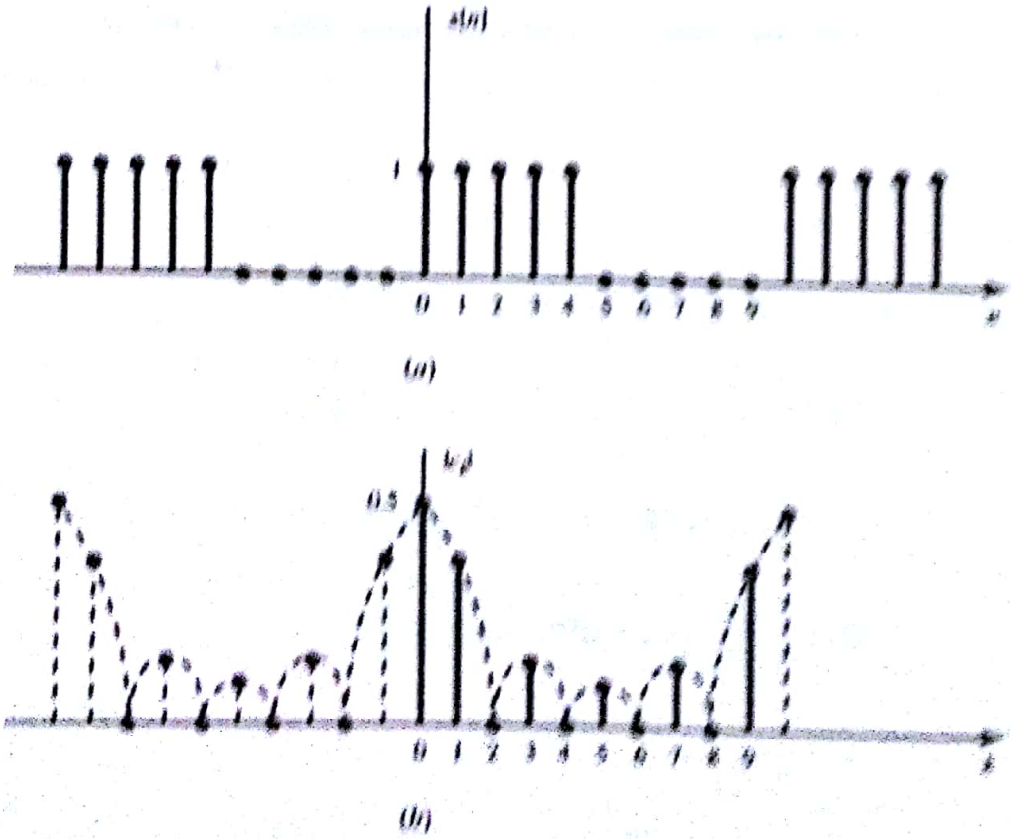
Şekil 6-8(a)'dan $s[n]$'nin temel periyodunun $N_0 = 10$ olduğunu ve $\Omega_0 = 2\pi / N_0 = \pi/5$ olduğunu görüyoruz. Eşitlik (6.8)'den Eşitlik (1.90)'ı kullanarak

$$c_k = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{4} e^{-jk\pi/5n} = \frac{1}{10}\frac{1 - e^{-jk\pi}}{1 - e^{-jk(\pi/5)}}$$

$$= \frac{1}{10}\frac{e^{-jk\pi/2}(e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2})}{e^{-jk\pi/10}(e^{jk\pi/10} - e^{-jk\pi/10})}$$

$$= \frac{1}{10}e^{-jk(\pi/5)}\frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 9$$

elde ederiz. $|c_k|$ genlik spektrumu Şekil 6-8(b)'de çizilmiştir.



Şekil 6-8

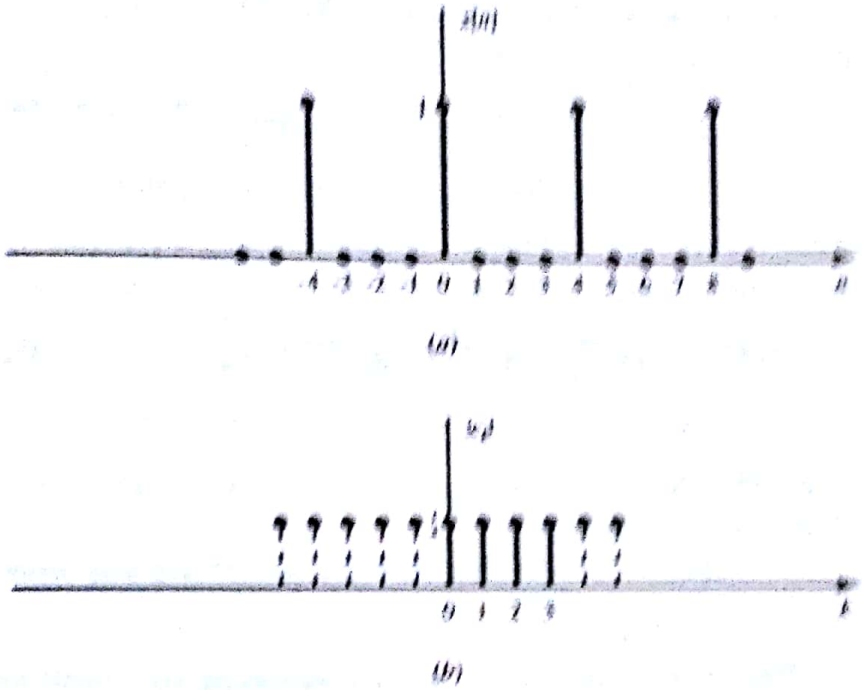
6.5. Aşağıda verilen diziyi düşünelim:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

(a) $x[n]$'yi çiziniz.

(b) $x[n]$'nin c_k Fourier katsayılarını bulunuz.

(a) $x[n]$ dizisi Şekil 6.9(a)'da çizilmiştir. Görüldüğü gibi, $x[n]$, $N_0 = 4$ periyotlu $\{1, 0, 0, 0\}$ dizisinin periyodik uzantısıdır.



Şekil 6.9

(b) Eşitlik (6.7) ve (6.8)'den ve Şekil 6.9(a)'dan, $x[1] = x[2] = x[3] = 0$ olduğundan,

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk(2\pi/4)n} = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\pi n/2}$$

ve

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-jk(2\pi/4)n} = \frac{1}{4}x[0] = \frac{1}{4} \qquad \text{her } k \text{ için}$$

elde ederiz. $x[n]$'nin Fourier katsayıları Şekil 6.9(b)'de görülmektedir.

6.6. Aşağıdaki dizilerin her biri için ayrık Fourier serisi gösterimini bulunuz.

(a) $x[n] = \cos\frac{\pi}{4}n$

(b) $x[n] = \cos\frac{\pi}{3}n + \sin\frac{\pi}{4}n$

(c) $x[n] = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

(a) $x[n]$'nin temel periyodu $N_0 = 8$'dir ve $\Omega_0 = 2\pi / N_0 = \pi / 4$ olur. c_k Fourier katsayılarını bulmak için Eşitlik (6.8)'yi kullanmak yerine, Euler formülünü kullanarak

$$\cos\frac{\pi}{4}n = \frac{1}{2}(e^{j\pi/4)n} + e^{-j\pi/4)n}) = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 n}$$

elde ederiz. Böylece, $x[n]$'nin Fourier katsayıları $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_{-1} = c_{-1+8} = c_7 = \frac{1}{2}$, ve diğer bütün katsayılar $c_k = 0$ olur. Dolayısıyla, $x[n]$'nin ayrık Fourier serisi

$$x[n] = \cos\frac{\pi}{4}n = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j7\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

olur.

(b) Problem 1.16(*i*)'den $x[n]$'nin temel periyodu $N_0 = 24$'tür ve $\Omega_0 = 2\pi / N_0 = \pi / 12$ olur. Yine Euler formülünü kullanarak

$$x[n] = \frac{1}{2}(e^{j\pi/3)n} + e^{-j\pi/3)n}) + \frac{1}{2j}(e^{j\pi/4)n} - e^{-j\pi/4)n})$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{-j4\Omega_0 n} + j\tfrac{1}{2}e^{-j3\Omega_0 n} - j\tfrac{1}{2}e^{j3\Omega_0 n} + \tfrac{1}{2}e^{j4\Omega_0 n}$$

elde ederiz. Böylece, $c_3 = -j(\frac{1}{2})$, $c_4 = \frac{1}{2}$, $c_{-4} = c_{-4+24} = c_{20} = \frac{1}{2}$, $c_{-3} = c_{-3+24} = c_{21} = j(\frac{1}{2})$, ve diğer bütün katsayılar $c_k = 0$ olur. Dolayısıyla, $x[n]$'nin ayrık Fourier serisi

$$x[n] = -j\frac{1}{2}e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j4\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j20\Omega_0 n} + j\frac{1}{2}e^{j21\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{\pi}{12}$$

olur.

(c) Problem 1.16(*j*)'den $x[n]$'nin temel periyodu $N_0 = 8$'dir ve $\Omega_0 = 2\pi / N_0 = \pi / 4$ olur. Yine Euler formülünü kullanarak

$$x[n] = (\tfrac{1}{2}e^{j\pi/8)n} + \tfrac{1}{2}e^{-j\pi/8)n})^2 = \tfrac{1}{4}e^{j\pi/4)n} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}e^{-j\pi/4)n}$$

$$= \tfrac{1}{4}e^{j\Omega_0 n} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}e^{-j\Omega_0 n}$$

buluruz. Böylece $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_{-1} = c_{-1+8} = c_7 = \frac{1}{4}$, ve diğer bütün katsayılar $c_k = 0$ olur. Dolayısıyla, $x[n]$'nin ayrık Fourier serisi

$$x[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{4}e^{j7\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

olur.

6.7. $x[n]$, temel periyodu N_0 olan ve Fourier katsayıları, a_k ve b_k gerçel olmak üzere, $c_k = a_k + jb_k$ olan gerçel bir periyodik dizi olsun.

(a) $a_{-k} = a_k$ ve $b_{-k} = -b_k$ olduğunu gösteriniz.

(b) Çift N_0 için $c_{N_0/2}$'nin gerçel olduğunu gösteriniz.

(c) $x[n]$'nin tek N_0 için

$$x[n] = c_0 + 2\sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}(a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \sin k\Omega_0 n) \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \quad (6.123)$$

biçiminde ve çift N_0 için

$$x[n] = c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2\sum_{k=1}^{(N_0-2)/2}(a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \sin k\Omega_0 n) \quad (6.124)$$

biçiminde ayrık trigonometrik Fourier serisi olarak ifade edilebileceğini gösteriniz.

(a) Eğer $x[n]$ gerçekse, Eşitlik (6.16)'dan

$$c_{-k} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{jk\Omega_0 n} = \left(\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}\right)^* = c_k^*$$

elde edeririz. Böylece

$$c_{-k} = a_{-k} + jb_{-k} = (a_k + jb_k)^* = a_k - jb_k$$

olur ve

$$a_{-k} = a_k \quad \forall k \qquad b_{-k} = -b_k$$

bulunur.

(b) Eğer N_0 çiftse, Eşitlik (6.16)'dan

$$c_{N_0/2} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jN_0/2\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j\pi n}$$

$$= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} (-1)^n x[n] = \text{gerçel} \tag{6.18}$$

elde edeririz.

(c) Eşitlik (6.7)'yi

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} = c_0 + \sum_{k=1}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

biçiminde yeniden yazalım. N_0 tekse, (N_0-1) çiftdir ve $x[n]$'yi

$$x[n] = c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_{N_0-k}e^{j(N_0-k)\Omega_0 n}\right)$$

biçiminde yazabiliriz. Şimdi, Eşitlik (6.17)'den

$$c_{N_0-k} = c_k^*$$

ve

$$e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} = e^{jN_0\Omega_0 n}e^{-jk\Omega_0 n} = e^{j2\pi n}e^{-jk\Omega_0 n} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_k^* e^{-jk\Omega_0 n}\right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} 2\,\mathrm{Re}(c_k e^{jk\Omega_0 n}) \\ &= c_0 + 2\sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} \mathrm{Re}(a_k + jb_k)(\cos k\Omega_0 n + j\sin k\Omega_0 n) \\ &= c_0 + 2\sum_{k=1}^{(N_0-1)/2} (a_k\cos k\Omega_0 n - b_k\sin k\Omega_0 n) \end{aligned}$$

olur. Eğer N_0 çiftse, $x[n]$'yi

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + \sum_{k=1}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} \left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_{N_0-k}e^{j(N_0-k)\Omega_0 n}\right) + c_{N_0/2}e^{jN_0/2\Omega_0 n} \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Yine Eşitlik (6.17)'den

$$c_{N_0-k} = c_k^* \qquad \text{ve} \qquad e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

ve

$$e^{j(N_0/2)\Omega_0 n} = e^{j(N_0/2)(2\pi/N_0)n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

elde ederiz. Bu durumda

$$x[n] = c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} 2\,\mathrm{Re}(c_k e^{jk\Omega_0 n})$$

$$= c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2\sum_{k=1}^{(N_0-2)/2} (a_k \cos k\Omega_0 n - b_k \sin k\Omega_0 n)$$

olur.

6.8. $x_1[n]$ ve $x_2[n]$ temel periyotları N_0 olan periyodik diziler olsunlar ve ayrık Fourier serileri

$$x_1[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} d_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} e_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

ile verilsin. $x[n] = x_1[n]\,x_2[n]$ dizisinin aynı N_0 temel periyoduyla periyodik olduğunu ve

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

biçiminde ifade edilebileceğini gösteriniz; burada c_k

$$c_k = \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e_{k-m} \tag{6.126}$$

ile verilmektedir.

Şimdi

$$x[n+N_0] = x_1[n+N_0]x_2[n+N_0] = x_1[n]x_2[n] = x[n]$$

olduğuna dikkat ediniz. Böylece, $x[n]$, N_0 temel periyodu ile periyodiktir. $x[n]$ için

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

yazalım. Bu durumda

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_2[n]\,e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}\left(\sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e^{jm\Omega_0 n}\right)x_2[n]\,e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$= \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m\left(\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_2[n]\,e^{-j(k-m)\Omega_0 n}\right) = \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e_{k-m}$$

olur çünkü e_k

$$e_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_2[n]\,e^{-jk\Omega_0 n}$$

ile verilmektedir ve parantez içindeki terim e_{k-m}'ye eşittir.

6.9. $x_1[n]$ ve $x_2[n]$, Problem 6.8'de verilen iki periyodik sinyal olsun.

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} d_k e_{-k} \qquad (6.127)$$

olduğunu gösteriniz. (6.127) eşitliği periyodik diziler için Parseval bağıntısı olarak bilinir.

Eşitlik (6.126)'dan

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_2[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e_{k-m}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki ifadede $k = 0$ alarak

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_2[n] = \sum_{m=0}^{N_0-1} d_m e_{-m} = \sum_{k=0}^{N_0-1} d_k e_{-k}$$

elde ederiz.

6.10. *(a)* Ayrık Fourier serileri için Parseval özdeşliğini [Eşitlik (6.19)] yani

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(b) Problem 6.3'teki $x[n]$'yi kullanarak Parseval özdeşliğini [Eşitlik (6.19)] kanıtlayınız.

(b) $x[n]$ ve $x^*[n]$ için

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$x^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} d_k e^{jk\Omega_0 n}$$

yazalım. Bu durumda

$$d_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x^*[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \left(\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{jk\Omega_0 n}\right)^* = c^*_{-k} \qquad (6.128)$$

olur. (6.128) eşitliği, $x[n]$'nin Fourier katsayılarının c_k olması durumunda, $x^*[n]$'nin Fourier katsayılarının c^*_{-k} olduğunu gösterir. Eşitlik (6.127)'de $x_1[n] = x[n]$ ve $x_2[n] = x^*[n]$ alarak $d_k = c_k$ ve $e_k = c^*_{-k}$ (veya $e_{-k} = c^*_k$) buluruz ve

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]x^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k c_k^* \qquad (6.129)$$

veya

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2$$

elde ederiz.

(c) Şekil 6-7 ve Problem 6.3'ün sonuçlarından

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{4}(0 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

elde ederiz ve böylece Parseval özdeşliği kanıtlanmış olur.

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

6.11. Aşağıda verilen dizinin Fourier dönüşümünü bulunuz:

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \qquad a \text{ gerçel}$$

Eşitlik (4.12)'den $x[n]$'nin z dönüşümü

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| < |a|$$

ile verilir. Böylece, $X(z)$'nin yakınsama bölgesi birim çemberi içerdiğinden $|a| > 1$ için $X(e^{j\Omega})$ tanımlıdır. Böylece

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \qquad |a| > 1 \tag{6.130}$$

olur.

6.12. Şekil 6-10'da verilen dikdörtgen darbe dizisinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

$$x[n] = u[n] - u[n-N]$$

Eşitlik (1.90)'ı kullanarak $x[n]$'nin z dönüşümü

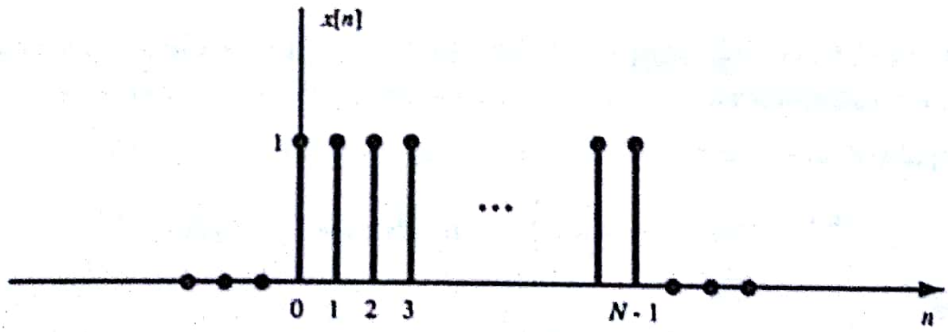
$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1-z^N}{1-z} \qquad |z| > 0 \tag{6.131}$$

olarak bulunur. $X(z)$'nin yakınsama bölgesi birim çemberi içerdiğinden $X(e^{j\Omega})$ tanımlıdır. Dolayısıyla

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \frac{1-e^{-j\Omega N}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{e^{-j\Omega N/2}(e^{j\Omega N/2} - e^{j\Omega N/2})}{e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})}$$

$$= e^{-j\Omega(N-1)/2}\frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)} \tag{6.132}$$

olur.



Şekil 06-10

6.13. Zaman ötelemesi özelliği (6.43)'ü yani

$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(6.27) tanımından

$$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]e^{-j\Omega n}$$

buluruz. $m = n - n_0$ değişken değişimiyle

$$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, e^{-j\Omega(m+n_0)}$$

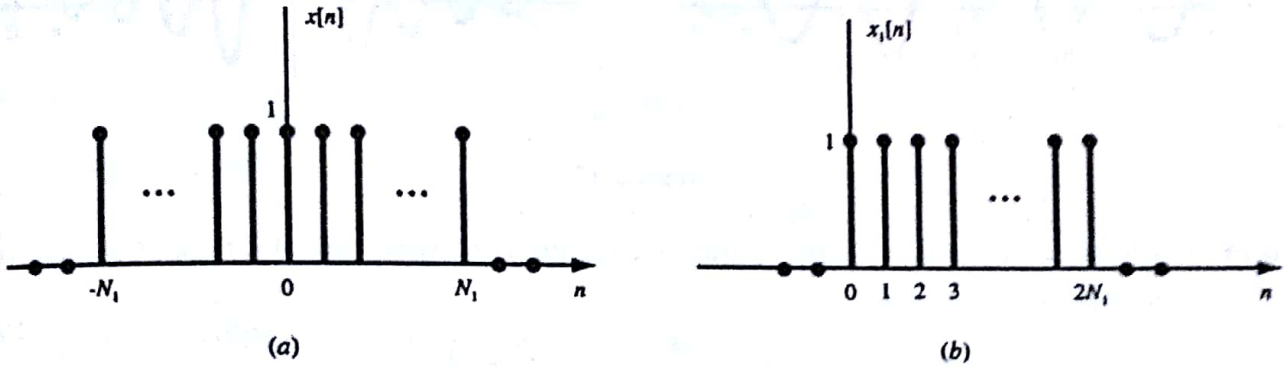
$$= e^{-j\Omega n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, e^{-j\Omega m} = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

olur.

6.14. *(a)* Şekil 6-11(a)'da görülen dikdörtgen darbe dizisinin Fourier dönüşümü $X(\Omega)$ 'yı bulunuz.



Şekil 6-11

(b) $N_1 = 4$ ve $N_1 = 8$ için $X(\Omega)$ 'yı çiziniz.

(a) Şekil 6-11'den

$$x[n] = x_1[n + N_1]$$

olduğunu görüyoruz; $x_1[n]$, Şekil 6-11(b)'de gösterilmiştir. Eşitlik (6.132)'de $N = 2N_1 + 1$ koyarak

$$X_1(\Omega) = e^{-j\Omega N_1} \frac{\sin[\Omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\Omega/2)}$$

elde ederiz. Şimdi, zaman ötelemesi özelliği (6.43)'ten

$$X(\Omega) = e^{j\Omega N_1} X_1(\Omega) = \frac{\sin[\Omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\Omega/2)} \qquad (6.133)$$

buluruz.

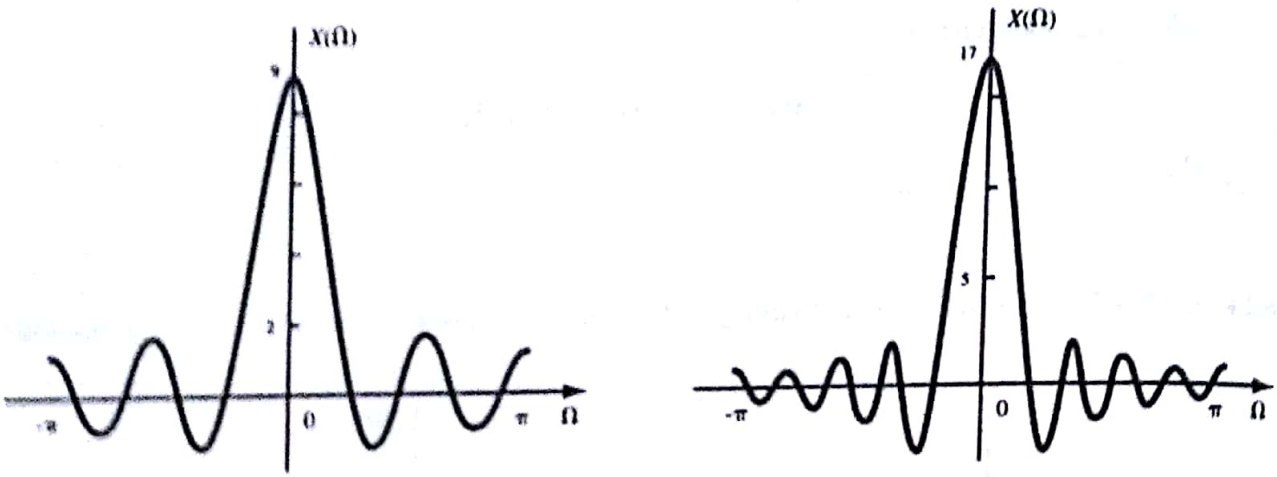
(b) Eşitlik (6.133)'te $N_1 = 4$ alarak

$$X(\Omega) = \frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

elde ederiz; $N_1 = 4$ için $X(\Omega)$, Şekil 6-12(a)'da görülmektedir. Benzer biçimde, $N_1 = 8$ için

$$X(\Omega) = \frac{\sin(8.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

elde ederiz; $N_1 = 8$ için $X(\Omega)$, Şekil 6-12(b)'de görülmektedir.

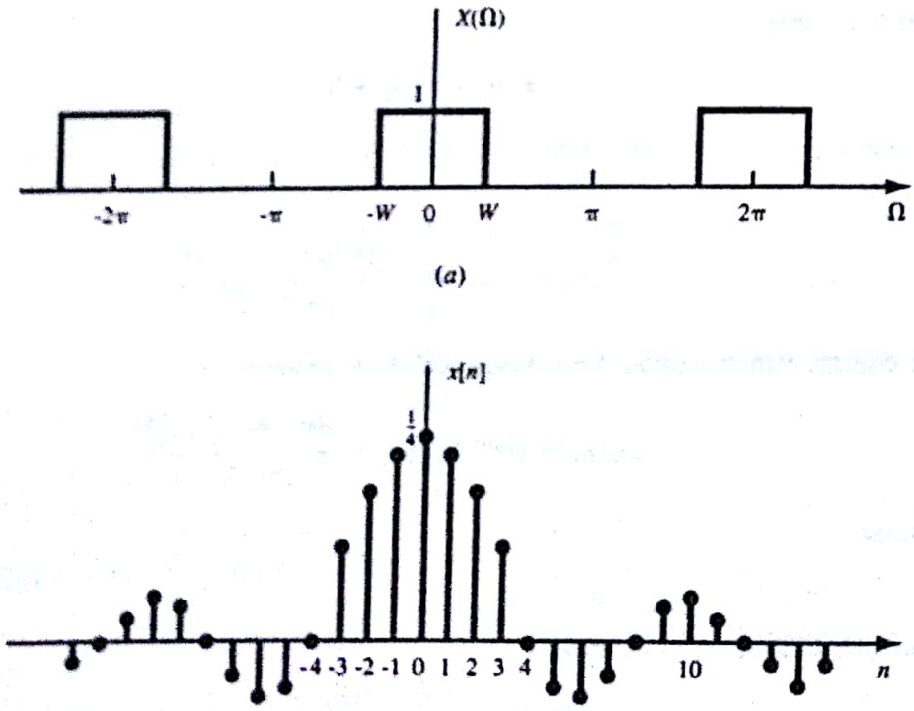


Şekil 6-12

6.15. *(a)* Aşağıda tanımlanan [Şekil 6-13(a)] dikdörtgen darbe spektrumu $X(\Omega)$'nın ters Fourier dönüşümü $x[n]$'yi bulunuz:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \le W \\ 0 & W < |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

(c) $W = \pi/4$ için $x[n]$'yi çiziniz.



Şekil 6-13

(a) Eşitlik (6.28)'den

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\frac{\sin Wn}{\pi n} \longleftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \le W \\ 0 & W < |\Omega| \le \pi \end{cases} \qquad (6.134)$$

sonucunu elde ederiz.

(b) $x[n]$ dizisi $W = \pi/4$ için Şekil 6-13(b)'de çizilmiştir.

6.16. Frekans ötelemesi özelliği (6.44)'ü yani

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Eşitlik (6.27)'den

$$\mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 n}x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 n}x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j(\Omega-\Omega_0)n} = X(\Omega - \Omega_0)$$

0

elde ederiz. Böylece

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

olur.

6.17. Aşağıda verilen $X(\Omega)$ 'nın ters Fourier dönüşümü $x[n]$'yi bulunuz:

$$X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \qquad |\Omega|, |\Omega_0| \le \pi$$

Eşitlik (6.28) ve (1.22)'den

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega = e^{j\Omega_0 n}$$

elde ederiz. Böylece

$$e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \qquad |\Omega|, |\Omega_0| \le \pi \qquad (6.135)$$

olur.

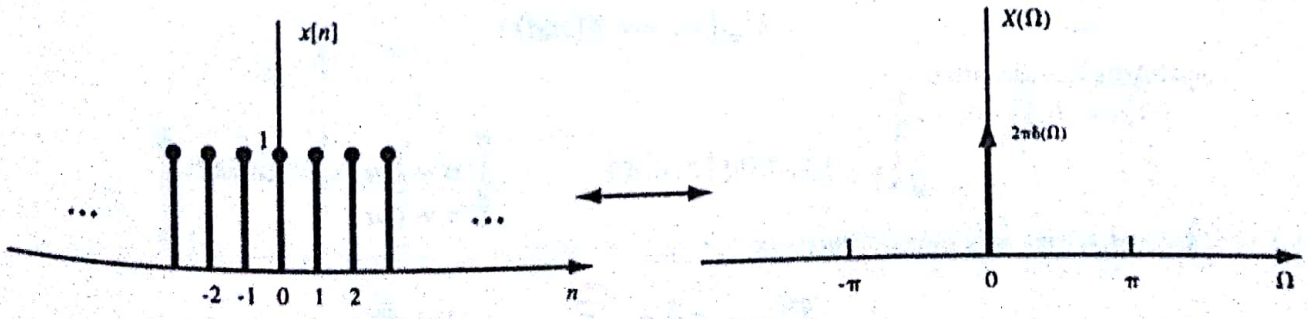
6.18. Aşağıda verilen $x[n]$'nin Fourier dönüşümünü bulunuz:

$$x[n] = 1 \qquad \text{her } n \text{ için}$$

Eşitlik (6.135)'te $\Omega_0 = 0$ alarak

$$x[n] = 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega) \qquad |\Omega| \le \pi \qquad (6.136)$$

elde ederiz. (6.136) eşitliği Şekil 6.14'te resmedilmiştir.



Şekil 6-14 Sabit bir dizi ve Fourier dönüşümü

6.19. Aşağıda verilen sinüzoidal dizinin Fourier dönüşümünü bulunuz:

$$x[n] = \cos \Omega_0 n \qquad |\Omega_0| \le \pi$$

Euler formülünden

$$\cos \Omega_0 n = \tfrac{1}{2}(e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n})$$

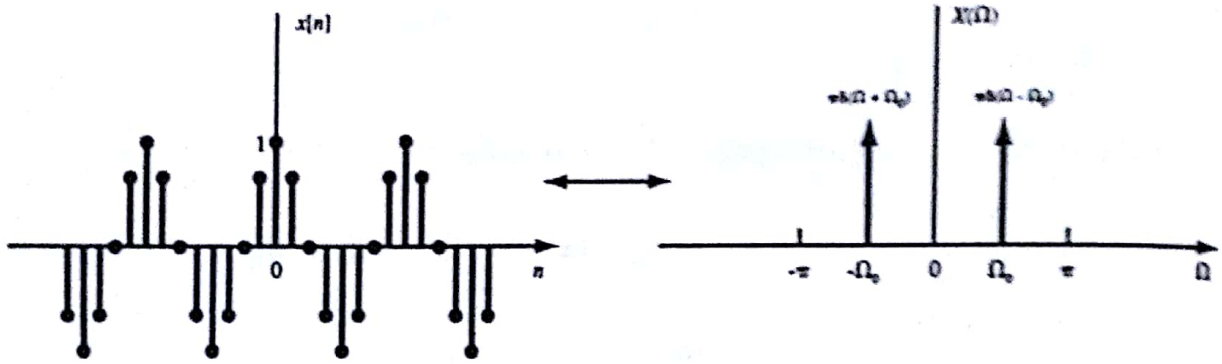
yazabiliriz. Böylece, Eşitlik (6.135) ve doğrusallık özelliği (6.42)'yi kullanarak

$$X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] \qquad |\Omega|, |\Omega_0| \le \pi$$

elde ederiz; $X(\Omega)$, Şekil 6-15'te çizilmiştir. Böylece

$$\cos \Omega_0 n \longleftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] \qquad |\Omega|, |\Omega_0| \le \pi \qquad (6.137)$$

olur.



Şekil 6-15. Bir kosinüs dizisi ve Fourier dönüşümü

6.20. Eşlenik alma özelliği (6.45)'yi, yani

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(-\Omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Eşitlik (6.27)'den

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] e^{-j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\Omega n} \right)^*$$

$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(-\Omega)n} \right)^* = X^*(-\Omega)$$

buluruz. Böylece

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(-\Omega)$$

olur.

6.21. Zaman ölçeklemesi özelliği (6.49)'u, yani

$$x_{(m)}[n] \longleftrightarrow X(m\Omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Eşitlik (6.48)'den

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] = x[k] & n = km,\ k = \text{tamsayı} \\ 0 & n \ne km \end{cases}$$

yazabiliriz. Bu durumda, Eşitlik (6.27)'den

$$\mathcal{F}\{x_{(m)}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(m)}[n] e^{-j\Omega n}$$

elde ederiz. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafında $n = km$ değişken değiştirmesini yaparak

$$\mathcal{F}\{x_{(m)}[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{(m)}[km]e^{-j\Omega km} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-jm\Omega k} = X(m\Omega)$$

elde ederiz. Böylece

$$x_{(m)}[n] \longleftrightarrow X(m\Omega)$$

olur.

6.22. Aşağıda tanımlanan $x[n]$ dizisini düşünelim:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le 2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(a) $x[n]$'yi ve Fourier dönüşümü $X(\Omega)$'yı çiziniz.

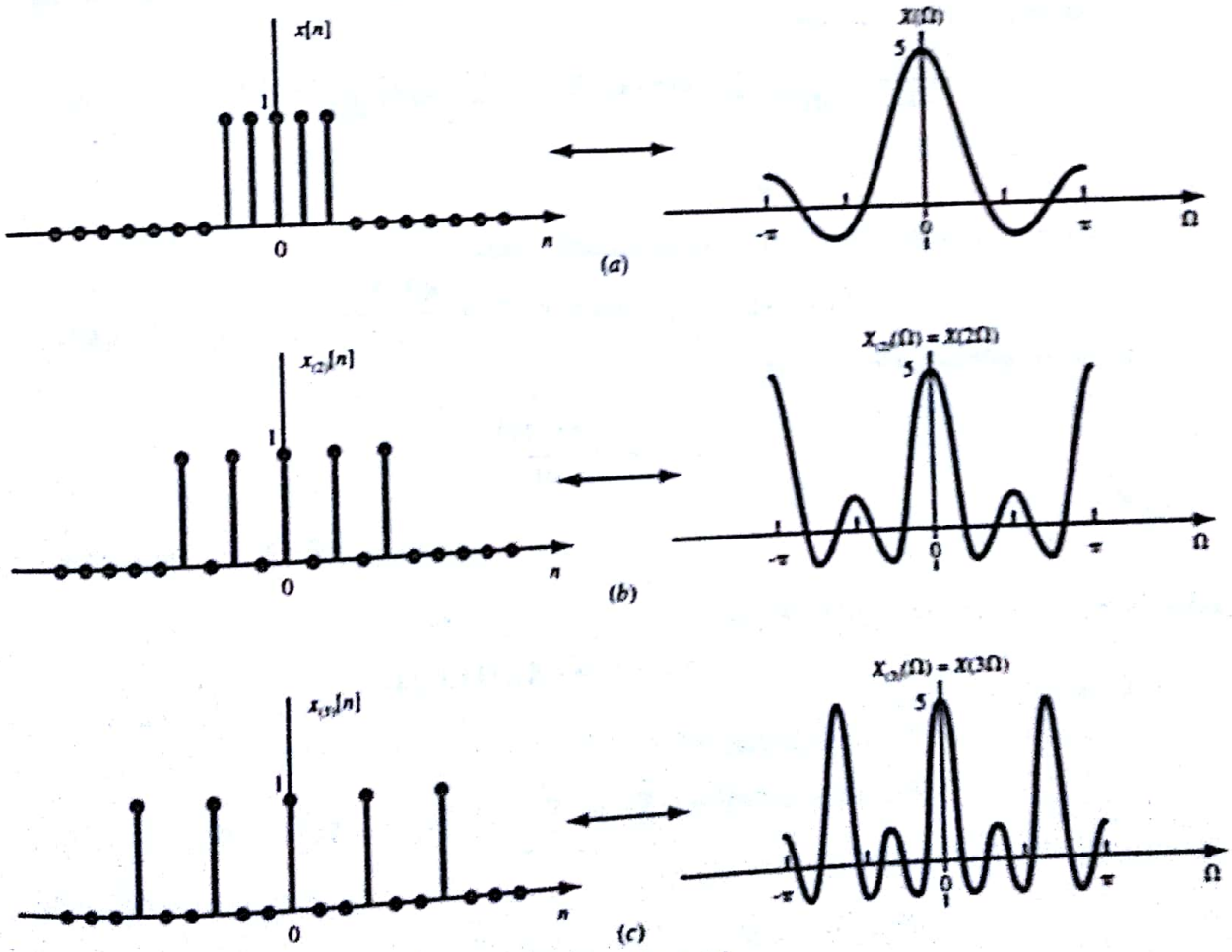
(b) Zaman ölçeklenmiş $x_{(2)}[n]$ dizisini ve Fourier dönüşümü $X_{(2)}(\Omega)$'yı çiziniz.

(c) Zaman ölçeklenmiş $x_{(3)}[n]$ dizisini ve Fourier dönüşümü $X_{(3)}(\Omega)$'yı çiziniz.

(a) Eşitlik (6.133)'te $N_1 = 2$ alarak

$$X(\Omega) = \frac{\sin(2.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)} \qquad (6.138)$$

elde ederiz. $x[n]$ dizisi ve Fourier dönüşümü $X(\Omega)$ Şekil 6-16(a)'da çizilmiştir.



Şekil 6-16

(b) Eşitlik (6.46) ve (6.138)'den

$$X_{(2)}(\Omega) = X(2\Omega) = \frac{\sin(2\Omega)}{\sin(\Omega)}$$

elde ederiz. Zaman ölçeklenmiş $x_{(2)}[n]$ dizisi ve Fourier dönüşümü $X_{(2)}(\Omega)$ şekil 6.16(b)'de çizilmiştir.

(c) Benzer biçimde

$$X_{(3)}(\Omega) = X(3\Omega) = \frac{\sin(1.5\Omega)}{\sin(1.5\Omega)}$$

elde ederiz. Zaman ölçeklenmiş $x_{(3)}[n]$ dizisi ve Fourier dönüşümü $X_{(3)}(\Omega)$ şekil 6.16(c)'de çizilmiştir.

6.23. Frekans türevi özelliği (6.55)'yi, yani

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(6.27) tanımından

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

yazalım. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının Ω'ya göre türevini alarak ve türevle toplamanın yerlerini değiştirerek

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{d}{d\Omega}(e^{-j\Omega n})$$

$$= -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\Omega n}$$

elde ederiz. Eşitliğin her iki tarafını j ile çarpılmasıyla

$$\mathcal{F}(nx[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\Omega n} = j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

olur.

6.24. Konvolüsyon teoremi (6.58)'yi, yani

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

(2.35) ve (6.27) tanımlarından

$$\mathcal{F}(x_1[n] * x_2[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]\right)e^{-j\Omega n}$$

yazabiliriz. Toplamaların sırasını değiştirerek

$$\mathcal{F}(x_1[n] * x_2[n]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]e^{-j\Omega n}\right)$$

elde ederiz. Zaman ötelemesi özelliği (6.43)'ten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega k}X_2(\Omega)$$

buluruz. Böylece

$$\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]e^{-j\Omega k}X_2(\Omega)$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]e^{-j\Omega k}\right)X_2(\Omega) = X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

olur.

6.25. Konvolüsyon teoremi (6.58)'yi kullanarak aşağıda verilen $X(\Omega)$'nın ters Fourier dönüşümü $x[n]$'yi bulunuz.

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2} \qquad |a| < 1$$

Eşitlik (6.37)'den

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \qquad |a| < 1$$

yazalım. Buradan

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2} = \left(\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\right)\left(\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\right)$$

elde ederiz. Böylece, konvolüsyon teoremi Eşitlik (6.58)'den

$$x[n] = a^n u[n] * a^n u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k]$$

$$= a^n \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)a^n u[n]$$

buluruz. Dolayısıyla

$$(n+1)a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2} \qquad |a| < 1 \qquad (6.139)$$

olur.

6.26. Çarpma özelliği (6.59)'u, yani

$$x_1[n]x_2[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

$x[n] = x_1[n]\,x_2[n]$ yazalım. Bu durumda (6.27) tanımından

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]e^{-j\Omega n}$$

olur. Eşitlik (6.28)'den

$$x_1[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta)\,e^{j\theta n}\,d\theta$$

elde ederiz. Buradan

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, e^{j\theta n}\, d\theta \right] x_2[n]\, e^{-j\Omega n}$$

buluruz. Toplamanın ve integrasyonun sırasını değiştirerek

$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]\, e^{-j(\Omega-\theta)n} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, X_2(\Omega-\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \circledast X_2(\Omega)$$

sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla

$$x_1[n]x_2[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \circledast X_2(\Omega)$$

olur.

6.27. (6.62), (6.63a) ve (6.63b) özelliklerini kanıtlayınız; yani, $x[n]$ gerçelse ve $x_e[n]$ ve $x_o[n]$, sırasıyla, $x[n]$'nin çift ve tek bileşenleri olmak üzere

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \longleftrightarrow X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) \qquad (6.140)$$

eşitliği sağlanıyorsa

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega)$$

$$x_e[n] \longleftrightarrow \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega)$$

$$x_o[n] \longleftrightarrow j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega)$$

eşitliklerinin de sağlandığını gösteriniz.

Eğer $x[n]$ gerçelse $x^*[n] = x[n]$ olur, ve Eşitlik (6.45)'ten

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(-\Omega)$$

yazabiliriz; bu iki eşitlikten

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \quad \text{veya} \quad X(-\Omega) = X^*(\Omega)$$

elde ederiz. Şimdi, Eşitlik (6.46), (1.2) ve (1.3)'ü kullanarak

$$x[-n] = x_e[n] - x_o[n] \longleftrightarrow X(-\Omega) = X^*(\Omega) = A(\Omega) - jB(\Omega) \qquad (6.141)$$

buluruz. Eşitlik (6.141)'yi Eşitlik (6.140)'a ekleyerek

$$x_e[n] \longleftrightarrow A(\Omega) = \mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$$

sonucunu, ve Eşitlik (6.140)'tan Eşitlik (6.141)'yi çıkartarak

$$x_o[n] \longleftrightarrow jB(\Omega) = j\,\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$$

sonucunu elde ederiz.

6.28. Aşağıdaki eşitliği kanıtlayınız.

$$u[n] \longleftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \qquad |\Omega| \le \pi \qquad (6.142)$$

$u[n]$ için

$$u[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$$

yazalım. Şimdi,

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

olduğuna dikkat ediniz. Yukarıdaki ifadenin her iki tarafının Fourier dönüşümünü alarak Eşitlik (6.36) ve (6.43)'ten

$$1 = (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$$

buluruz. $\Omega = 0$ için $(1-e^{-j\Omega}) = 0$ olması gerektiğine dikkat ettiğimizde, $X(\Omega)$

$$X(\Omega) = A\,\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \qquad |\Omega| \le \pi$$

biçiminde olmalıdır; burada A bir sabittir. A'yı bulmak için aşağıdaki yolu izleriz. Eşitlik (1.5)'ten $u[n]$'nin çift bileşeni

$$u_e[n] = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\delta[n]$$

ile verilir. $u[n]$'nin tek bileşeni, bu durumda,

$$u_o[n] = u[n] - u_e[n] = u[n] - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\delta[n]$$

ile verilir ve

$$\mathcal{F}\{u_o[n]\} = A\,\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} - \pi\delta(\Omega) - \frac{1}{2}$$

olur. Eşitlik (6.63b)'den tek gerçel bir dizinin Fourier dönüşümü tümüyle sanal olmalıdır. Böylece, A = π olmalıdır, ve

$$u[n] \longleftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \qquad |\Omega| \le \pi$$

sonucuna ulaşırız.

6.29. Birikim özelliği (6.57)'yi, yani

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \pi X(0)\,\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(\Omega) \qquad |\Omega| \le \pi$$

eşitliğini kanıtlayınız.

Eşitlik (2.132)'den

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] * u[n]$$

yazabiliriz. Böylece, konvolüsyon teoremi (6.58) ve Eşitlik (6.142)'den

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow X(\Omega)\left[\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\right] \qquad |\Omega| \le \pi$$

$$= \pi X(0)\,\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} X(\Omega)$$

buluruz; burada Eşitlik (1.25)'ten elde edilen $X(\Omega)\,\delta(\Omega) = X(0)\,\delta(\Omega)$ sonucu kullanılmıştır.

6.30. Birikim özelliği (6.57)'yi ve Eşitlik (1.50)'yi kullanarak $u[n]$'nin Fourier dönüşümünü bulunuz.

Eşitlik (1.50)'den

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

yazalım. Şimdi, Eşitlik (6.36)'dan

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1$$

elde ederiz. Eşitlik (6.57)'de $x[k] = \delta[k]$ alarak

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow X(\Omega) = 1 \quad \text{ve} \quad X(0) = 1$$

ve

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \longleftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \qquad |\Omega| \le \pi$$

buluruz.

FREKANS TEPKİSİ

6.31. Nedensel ayrık zamanlı bir DZD sistem

$$y[n] - \tfrac{3}{4}y[n-1] + \tfrac{1}{8}y[n-2] = x[n] \tag{6.143}$$

ile tanımlanmaktadır; burada $x[n]$ ve $y[n]$, sırasıyla, sistemin giriş ve çıkışıdır (Problem 4.32).

(a) Sistemin frekans tepkisi $H(\Omega)$'yı bulunuz.

(b) Sistemin dürtü tepkisi $h[n]$'yi bulunuz.

(a) Eşitlik (6.143)'ün Fourier dönüşümünü alarak

$$Y(\Omega) - \tfrac{3}{4}e^{-j\Omega}Y(\Omega) + \tfrac{1}{8}e^{-j2\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega)$$

veya

$$(1 - \tfrac{3}{4}e^{-j\Omega} + \tfrac{1}{8}e^{-j2\Omega})Y(\Omega) = X(\Omega)$$

elde ederiz. Böylece

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$$

olur.

(b) Kısmi kesirler açılımı kullanarak

$$H(\Omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

elde ederiz. $H(\Omega)$'nın ters Fourier dönüşümünü alarak

$$h[n] = \left[2(\tfrac{1}{2})^n - (\tfrac{1}{4})^n\right]u[n]$$

sonucuna ulaşırız; bu sonuç Problem 4.32(b)'de elde edilen sonucun aynısıdır.

6.32. Aşağıda tanımlanan ayrık zamanlı DZD sistemi düşünelim.

$$y[n] - \tfrac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \tfrac{1}{2}x[n-1] \tag{6.144}$$

(a) Sistemin frekans tepkisi $H(\Omega)$'yı bulunuz.

(b) Sistemin dürtü tepkisi $h[n]$'yi bulunuz.

(c) Sistemin aşağıda verilen girişe $y[n]$ tepkisini bulunuz.

$$x[n] = \cos\frac{\pi}{2}n$$

(a) Eşitlik (6.144)'ün Fourier dönüşümünü alarak

$$Y(\Omega) - \tfrac{1}{2}e^{-j\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega) + \tfrac{1}{2}e^{-j\Omega}X(\Omega)$$

elde ederiz. Böylece,

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

olur.

(b)
$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{1}{2}\frac{e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$H(\Omega)$'nın ters Fourier dönüşümünü alarak

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & n \geq 1 \end{cases}$$

sonucuna ulaşırız.

(c) Eşitlik (6.137)'den

$$X(\Omega) = \pi\left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)\right] \qquad |\Omega| \leq \pi$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned} Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) &= \pi\left[\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \\ &= \pi\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}\right)\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}\right)\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi\left(\frac{1 - j\frac{1}{2}}{1 + j\frac{1}{2}}\right)\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\left(\frac{1 + j\frac{1}{2}}{1 - j\frac{1}{2}}\right)\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi\,\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)e^{-j2\tan^{-1}(1/2)} + \pi\,\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)e^{j2\tan^{-1}(1/2)} \end{aligned}$$

elde ederiz. $Y(\Omega)$'nın ters Fourier dönüşümünü alarak ve Eşitlik (6.135)'yi kullanarak

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}e^{j(\pi/2)n}e^{-j2\tan^{-1}(1/2)} + \frac{1}{2}e^{-j(\pi/2)n}e^{j2\tan^{-1}(1/2)} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}n - 2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

sonucunu bulunuz.

6.33. Dürtü tepkisi

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

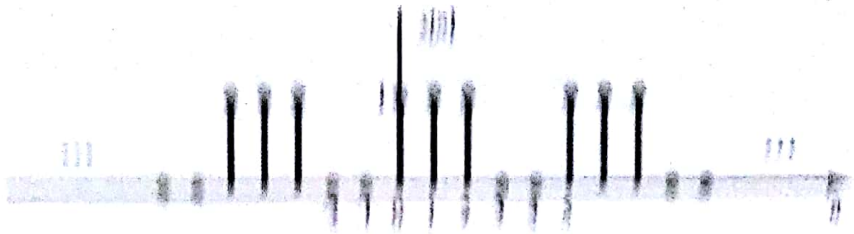
ile verilen ayrık zamanlı DZD sistemi düşünelim. $x[n]$ girişi Şekil 6-17'de görüldüğü gibi N_0=5 temel periyotlu periyodik bir dizi ise $y[n]$ çıkışını bulunuz.

Eşitlik (6.134)'ten

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \pi/4 \\ 0 & \pi/4 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

yazabiliriz. $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = 2\pi/5$ olduğundan ve süzgeç yalnızca $|\Omega| \leq \pi/4$, aralığındaki frekansları geçirdiğinden, yalnızca dc terim geçer. Şekil 6-17 ve Eşitlik (6.11)'den

$$c_0 = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x[n] = \frac{3}{5}$$



Şekil 6.17

bulunur. Böylece $x[n]$ şöyle

$$x[n] = \frac{1}{2} \quad \text{bazı } n \text{ için}$$

ile verilir.

6.44. Şekil 6.18'de görülen ayrık zamanlı LTI sistemi düşünelim.

(a) Sistemin birim impuls tepkisi $H(\Omega)$'yı bulunuz.
(b) Sistemin birim tepkisi $h[n]$'yi bulunuz.
(c) Eşitlik tepkisi $|H(\Omega)|$'yı ve faz tepkisi $\theta(\Omega)$'yı çiziniz.
(d) Sistemin 3 dB band genişliğini bulunuz.

(a) Şekil 6.18'den

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{6.145}$$

yazabiliriz. Eşitlik (6.145)'nin Fourier dönüşümünü alarak ve Eşitlik (6.77)'yi kullanarak

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = 1 + e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2})$$

$$= 2e^{-j\Omega/2}\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \qquad |\Omega| \le \pi \tag{6.146}$$

elde ederiz.

(b) $h[n]$'nin tanımından [Eşitlik (2.30)] ve Eşitlik (6.145)'ten

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

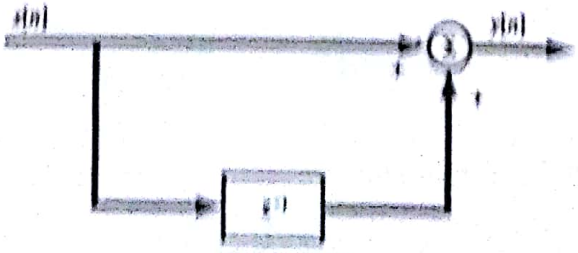
veya

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde ederiz.

(c) Eşitlik (6.146)'dan

$$|H(\Omega)| = 2\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \qquad |\Omega| \le \pi$$

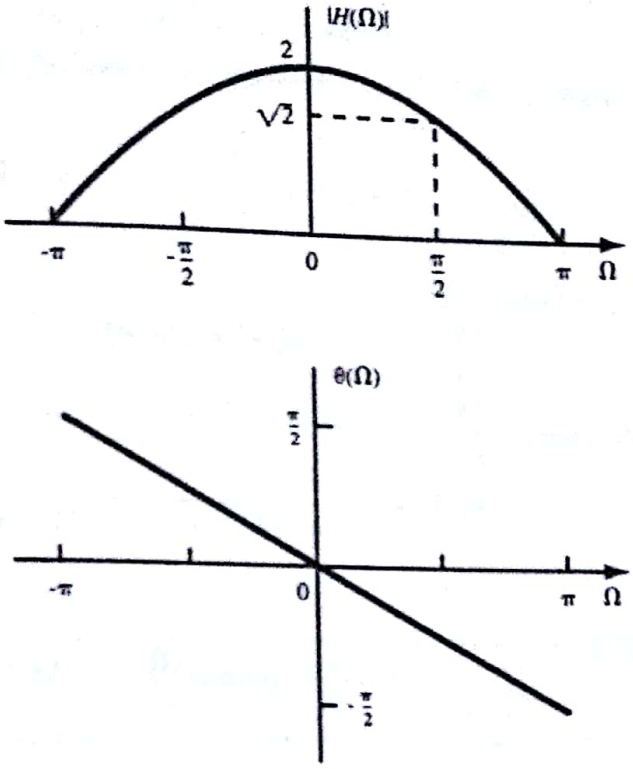


Şekil 6.18

ve

$$\theta(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} \qquad |\Omega| \le \pi$$

buluruz. $|H(\Omega)|$ ve $\theta(\Omega)$ Şekil 6-19'da çizilmiştir.



Şekil 6-19

(d) Ω_{3dB} sistemin 3–dB bant genişliği olsun. Bu durumda tanımdan (Bölüm 5.7)

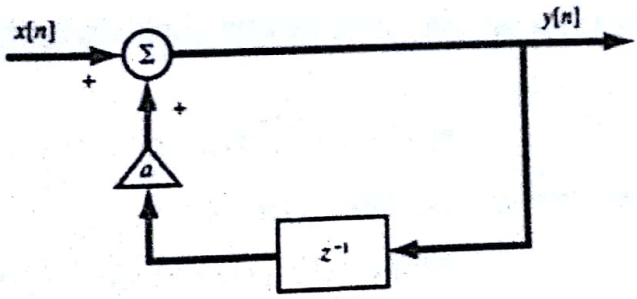
$$|H(\Omega_{3\,dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(\Omega)|_{max}$$

yazabiliriz ve buradan

$$\cos\left(\frac{\Omega_{3\,dB}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{ve} \qquad \Omega_{3\,dB} = \frac{\pi}{2}$$

elde ederiz. Bu sistemin ayrık zamanlı geniş bantlı alçak geçirgen sonlu dürtü tepkili (FIR) bir süzgeç olduğunu görüyoruz (Bölüm 2.9C).

6.35. Şekil 6-20'de görülen ayrık zamanlı DZD sistemin düşünelim; burada a bir sabittir ve $0 < a < 1$'dir.



Şekil 6-20

(a) Sistemin frekans tepkisi $H(\Omega)$'yı bulunuz.
(b) Sistemin dürtü tepkisi $h[n]$'yi bulunuz.
(c) $a=0.9$ ve $a=0.5$ için sistemin genlik tepkisi $|H(\Omega)|$'yı çiziniz.

(a) Şekil 6-20'den

$$y[n]-ay[n-1]=x[n] \tag{6.147}$$

yazabiliriz. Eşitlik (6.147)'nin Fourier dönüşümünü alarak ve Eşitlik (6.77)'yi kullanarak

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \qquad |a|<1 \tag{6.148}$$

elde ederiz.

(b) Eşitlik (6.37)'yi kullanarak

$$h[n]=a^n u[n]$$

elde ederiz.

(c) Eşitlik (6.148)'den

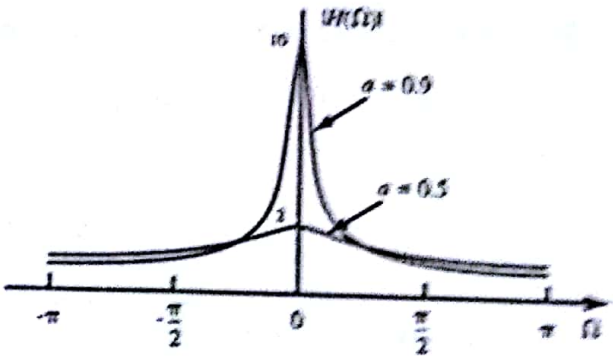
$$H(\Omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-a\cos\Omega+ja\sin\Omega}$$

ve

$$|H(\Omega)|=\frac{1}{\left[(1-a\cos\Omega)^2+(a\sin\Omega)^2\right]^{1/2}}=\frac{1}{(1+a^2-2a\cos\Omega)^{1/2}} \tag{6.149}$$

elde ederiz; $|H(\Omega)|$ Şekil 6-21'de $a=0.9$ ve $a=0.5$ için çizilmiştir.

Bu sistemin ayrık zamanlı alçak geçirgen sonsuz dürtü tepkili (IIR) bir süzgeç olduğunu görüyoruz. (Bölüm 2.9C).



Şekil 6-21

6.36. $h_{LPF}[n]$, frekans tepkisi $H_{LPF}(\Omega)$ olan ayrık zamanlı alçak geçirgen bir süzgecin dürtü tepkisi olsun. Dürtü tepkisi

$$h[n]=(-1)^n h_{LPF}[n] \tag{6.150}$$

ile verilen ayrık zamanlı bir süzgecin, frekans tepkisi

$$H(\Omega)=H_{LPF}(\Omega-\pi) \tag{6.151}$$

olan yüksek geçirgen bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

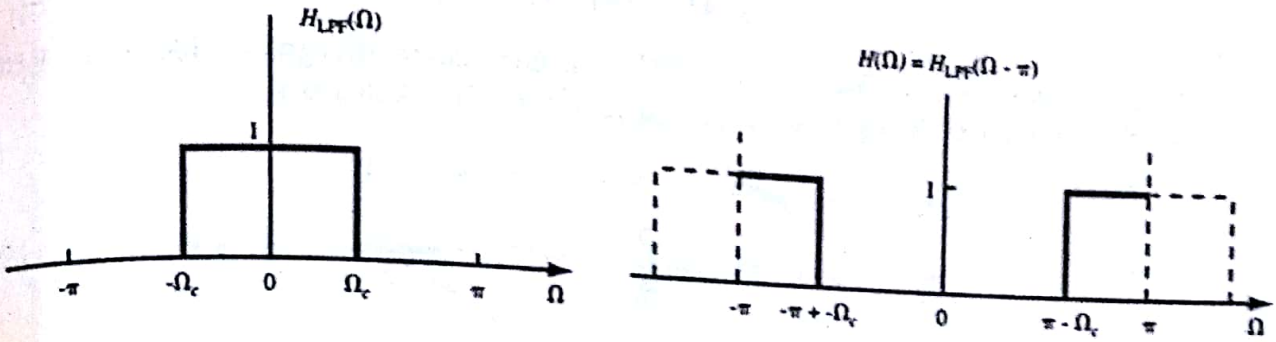
$-1 = e^{j\pi}$ olduğundan

$$h[n] = (-1)^n h_{LPF}[n] = e^{j\pi n} h_{LPF}[n] \qquad (6.152)$$

yazabiliriz. Eşitlik (6.152)'nin Fourier dönüşümünü alarak ve frekans ötelemesi özelliği (6.44)'ü kullanarak

$$H(\Omega) = H_{LPF}(\Omega - \pi)$$

elde ederiz; bu yüksek geçirgen bir süzgecin frekans tepkisini gösterir. Bu durum Şekil 6-22'de gösterilmiştir.



Şekil 6-22 Alçak geçirgen bir süzgecin yüksek geçirgen bir süzgece dönüştürülmesi

6.37. Ayrık zamanlı alçak geçirgen bir süzgeç

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (6.153)$$

fark denklemiyle tanımlanıyorsa

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k x[n-k] \qquad (6.154)$$

ile tanımlanan ayrık zamanlı süzgecin yüksek geçirgen bir süzgeç olduğunu gösteriniz.

Eşitlik (6.153)'ün Fourier dönüşümünü alarak alçak geçirgen süzgecin frekans tepkisi $H_{LPF}(\Omega)$ 'yı

$$H_{LPF}(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk\Omega}} \qquad (6.155)$$

biçiminde elde ederiz. Eşitlik (6.155)'de Ω yerine $(\Omega - \pi)$ koyarsak

$$H_{HPF}(\Omega) = H_{LPF}(\Omega - \pi) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk(\Omega-\pi)}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk(\Omega-\pi)}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (-1)^k e^{-jk\Omega}}{1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k e^{-jk\Omega}} \qquad (6.156)$$

elde ederiz; bu eşitlik

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k x[n-k]$$

fark denklemine karşılık gelir.

6.38. Şekil 6-18'de (Problem 6.34) görülen ayrık zamanlı alçak geçirgen süzgeci yüksek geçirgen bir süzgece dönüştürünüz.

Problem 6.34'ten Şekil 6-18'de görülen alçak geçirgen süzgeç

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

ile tanımlanır [Eşitlik (6.145)]. Eşitlik (6.154)'ü kullanarak, dönüştürülen yüksek geçirgen süzgeç

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \tag{6.157}$$

ile tanımlanır; bu eşitlikten Şekil 6-23'te görülen devre diyagramı elde edilir. Eşitlik (6.157)'nin Fourier dönüşümünü alarak ve Eşitlik (6.77)'yi kullanarak

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= 1 - e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2}\left(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}\right) \\ &= j2e^{-j\Omega/2}\sin\frac{\Omega}{2} = 2e^{j(\pi-\Omega)/2}\sin\frac{\Omega}{2} \qquad |\Omega| \le \pi \end{aligned} \tag{6.158}$$

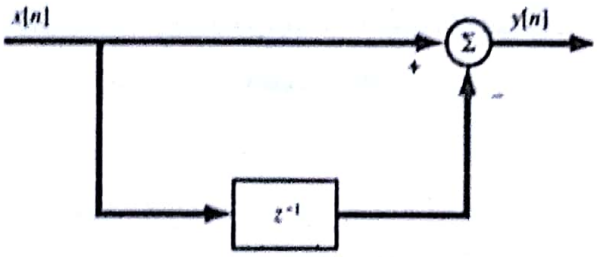
elde ederiz. Eşitlik (6. 158)'den

$$|H(\Omega)| = 2\left|\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right| \qquad |\Omega| \le \pi$$

ve

$$\theta(\Omega) = \begin{cases} (\pi - \Omega)/2 & 0 < \Omega < \pi \\ (-\pi - \Omega)/2 & -\pi \le \Omega < 0 \end{cases}$$

buluruz; $|H(\Omega)|$ ve $\theta(\Omega)$ Şekil 6-24'te çizilmiştir. Bu sistemin ayrık zamanlı yüksek geçirgen bir FIR süzgeç olduğunu görüyoruz.



Şekil 6-23

6.39. Nedensel ayrık zamanlı bir DZD sistemin sistem fonksiyonu $H(z)$

$$H(z) = \frac{b + z^{-1}}{1 - az^{-1}} \tag{6.159}$$

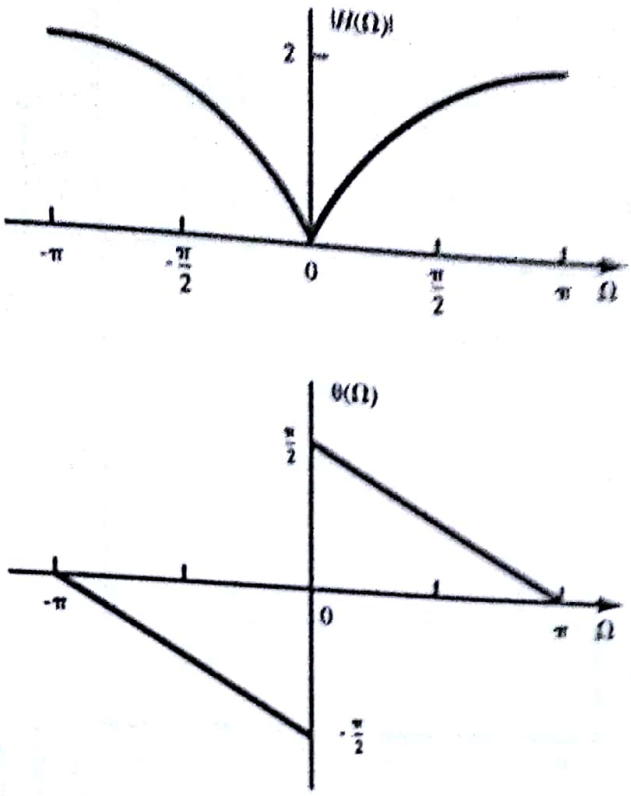
ile verilmektedir; a gerçeldir ve $|a| < 1$'dir. Sistemin frekans tepkisi $H(\Omega)$

$$|H(\Omega)| = 1 \qquad \text{Her } \Omega \text{ için} \tag{6.160}$$

koşulunu sağlayacak şekilde b değerini bulunuz. Böylesi bir sisteme tüm geçiren süzgeç denir.

Eşitlik (6.34)'ten sistemin frekans tepkisi

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{b + e^{-j\Omega}}{1 - ae^{-j\Omega}} \tag{6.161}$$



Şekil 6-24

olur. Bu durumda Eşitlik (6.160)'dan

$$|H(\Omega)| = \left|\frac{b + e^{-j\Omega}}{1 - ae^{-j\Omega}}\right| = 1$$

elde ederiz; bu sonuçtan

$$|b + e^{-j\Omega}| = |1 - ae^{-j\Omega}|$$

veya

$$|b + \cos\Omega - j\sin\Omega| = |1 - a\cos\Omega + ja\sin\Omega|$$

veya

$$1 + b^2 + 2b\cos\Omega = 1 + a^2 - 2a\cos\Omega \qquad (6.162)$$

olduğunu çıkartırız. Eğer $b = -a$ ise, Eşitlik (6.162) her Ω için geçerli olur ve Eşitlik (6.160) sağlanır.

6.40. Aşağıda verilen $h[n]$ bir FIR süzgecin dürtü tepkisi olsun:

$$h[n] = 0 \qquad n < 0, n \geq N$$

$h[n]$'nin gerçel olduğunu ve frekans tepkisi $H(\Omega)$'nın

$$H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)}$$

biçiminde ifade edildiğini varsayınız.

(a) $h[n]$

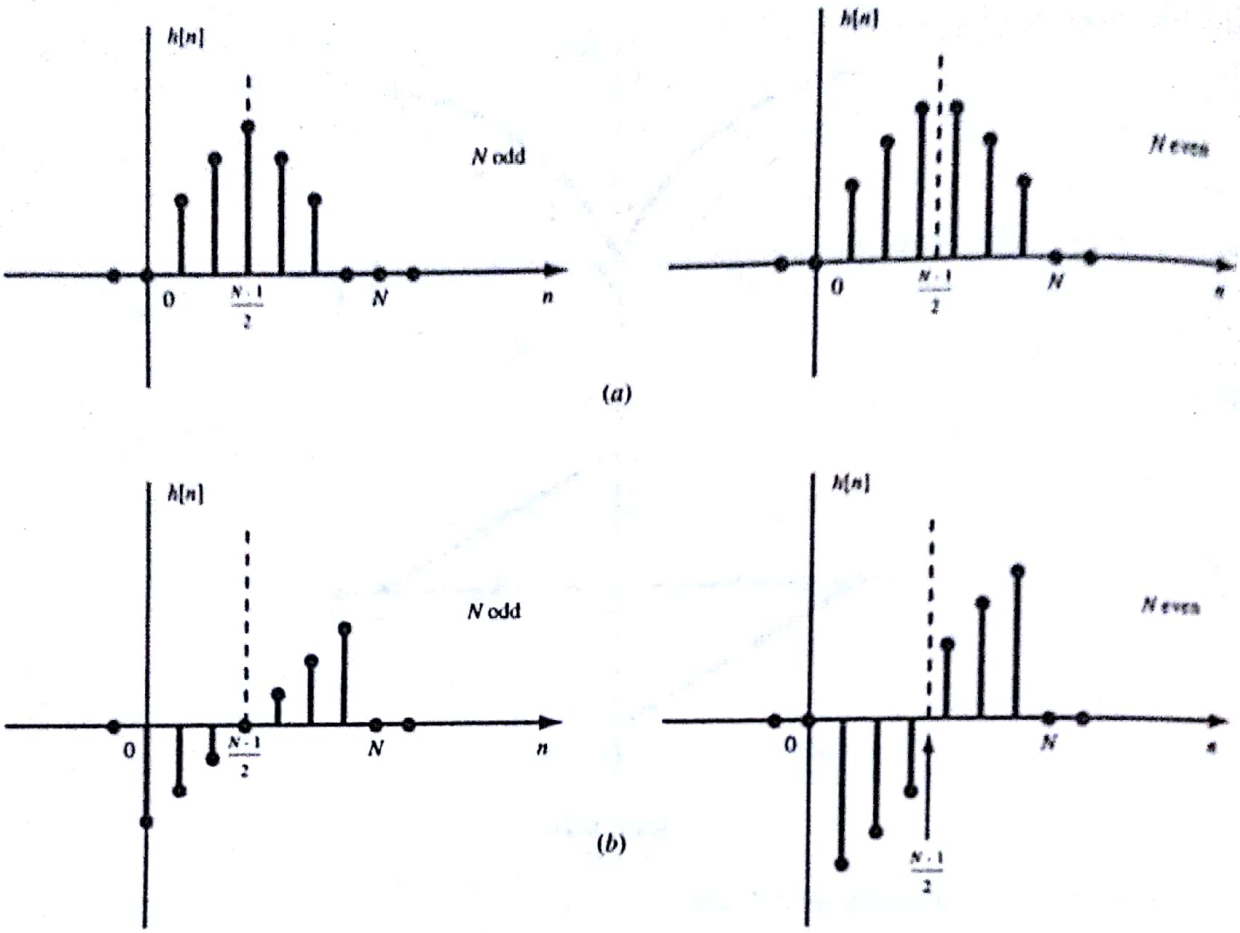
$$h[n] = h[N-1-n] \qquad (6.163)$$

koşulunu sağlıyorsa [Şekil 6-25(a)] faz tepkisi $\theta(\Omega)$'yı bulunuz.

(b) $h[n]$

$$h[n] = -h[N-1-n] \qquad (6.164)$$

koşulunu sağlıyorsa [Şekil 6-25(b)] faz tepkisi $\theta(\Omega)$'yı bulunuz.



Şekil 6-25

(a) Eşitlik (6.163)'ün Fourier dönüşümünü alarak ve Eşitlik (6.43), (6.46) ve (6.62)'yi kullanarak

$$H(\Omega) = H^*(\Omega)\, e^{-j(N-1)\Omega}$$

veya

$$|H(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)} = |H(\Omega)|e^{-j\theta(\Omega)} e^{-j(N-1)\Omega}$$

elde ederiz. Böylece

$$\theta(\Omega) = -\theta(\Omega) - (N-1)\Omega$$

ve

$$\theta(\Omega) = -\tfrac{1}{2}(N-1) \qquad (6.165)$$

olur; bu eşitlik faz tepkisinin doğrusal olduğunu gösterir.

(b) Benzer şekilde, Eşitlik (6.164)'ün Fourier dönüşümünü alarak

$$H(\Omega) = -H^*(\Omega)\, e^{-j(N-1)\Omega}$$

veya

$$|H(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)} = |H(\Omega)|e^{j\pi} e^{-j\theta(\Omega)} e^{-j(N-1)\Omega}$$

elde ederiz. Böylece

$$\theta(\Omega) = \pi - \theta(\Omega) - (N-1)\Omega$$

ve

$$\theta(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(N-1)\Omega \qquad (6.166)$$

olur; yine bu eşitlik faz tepkisinin doğrusal olduğunu gösterir.

6.41. Aşağıdaki fark denklemi ile tanımlanan üç noktalı yürüyen ortalamalı ayrık zamanlı süzgeci düşünelim.

$$y[n] = \tfrac{1}{3}\{x[n] + x[n-1] + x[n-2]\} \qquad (6.167)$$

(a) Süzgecin dürtü tepkisi $h[n]$'yi bulunuz ve çiziniz.

(b) Süzgecin frekans tepkisi $H(\Omega)$'yı bulunuz.

(c) Süzgecin genlik tepkisi $|H(\Omega)|$'yı ve faz tepkisi $\theta(\Omega)$'yı çiziniz.

(a) $h[n]$'nin tanımından [Eşitlik (2.30)]

$$h[n] = \tfrac{1}{3}\{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\} \qquad (6.168)$$

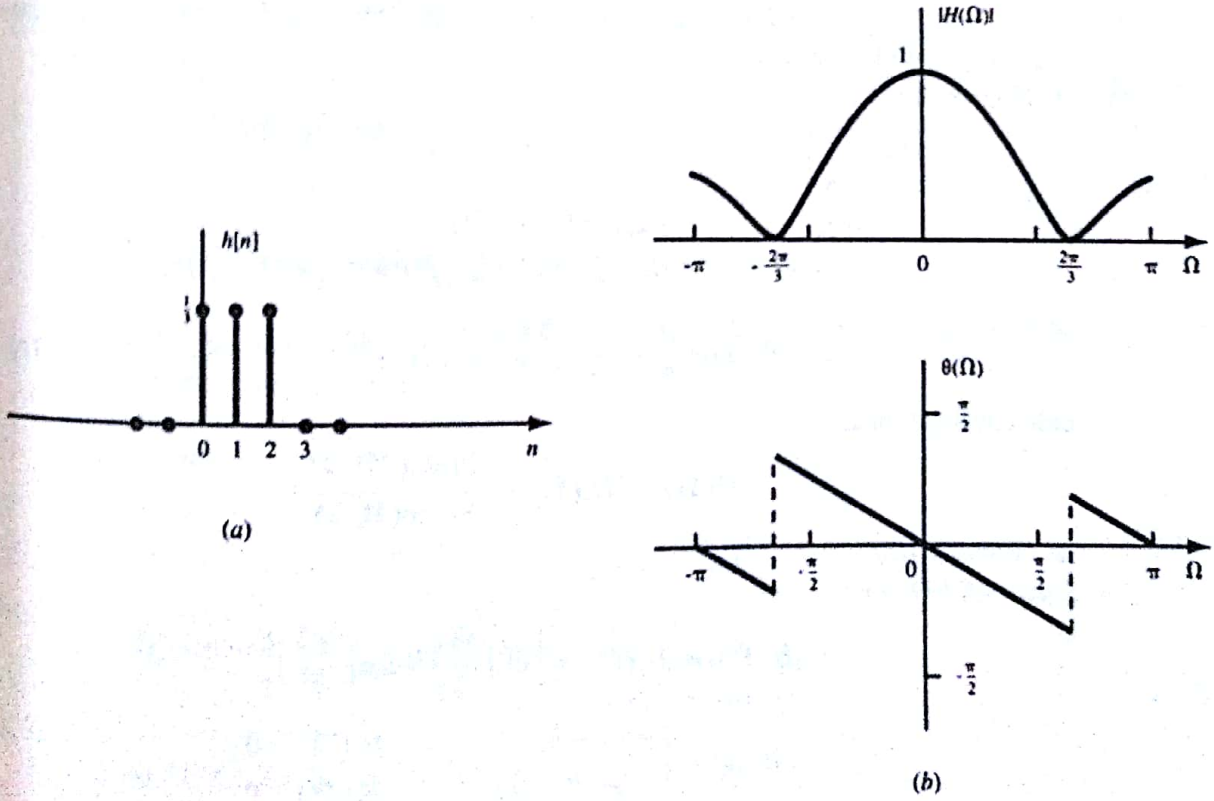
veya

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \le n \le 2 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde ederiz; $h[n]$ Şekil 6-26(a)'da çizilmiştir. $h[n]$'nin $N = 3$ için (6.163) koşulunu sağladığına dikkat ediniz.

(b) Eşitlik (6.168)'nin Fourier dönüşümünü alarak

$$H(\Omega) = \tfrac{1}{3}\{1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}\}$$



Şekil 6-26

elde ederiz. Eşitlik (1.90)'da $\alpha = e^{-j\Omega}$ alarak

$$H(\Omega) = \frac{1}{3}\frac{1-e^{-j3\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{1}{3}\frac{e^{-j3\Omega/2}(e^{j3\Omega/2}-e^{-j3\Omega/2})}{e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2}-e^{-j\Omega/2})}$$

$$= \frac{1}{3}e^{-j\Omega}\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} = H_r(\Omega)\,e^{-j\Omega} \qquad (6.169)$$

buluruz. Burada

$$H_r(\Omega) = \frac{1}{3}\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \qquad (6.170)$$

ile verilmektedir.

(c) Eşitlik (6.169)'dan

$$|H(\Omega)| = |H_r(\Omega)| = \frac{1}{3}\left|\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$$

ve

$$\theta(\Omega) = \begin{cases} -\Omega & H_r(\Omega) \geq 0 \\ -\Omega + \pi & H_r(\Omega) < 0 \end{cases}$$

olur; $|H(\Omega)|$ ve $\theta(\Omega)$ Şekil 6-26(b)'de çizilmiştir. Bu süzgecin doğrusal fazlı alçak geçirgen bir FIR süzgeç olduğunu görüyoruz.

6.42. Dürtü tepkisi aşağıda verilen nedensel ayrık zamanlı bir FIR süzgeci düşünelim:

$$h[n] = \{2, 2, -2, -2\}$$

(a) Süzgecin dürtü tepkisi $h[n]$'yi çiziniz.

(b) Süzgecin frekans tepkisi $H(\Omega)$'yı bulunuz.

(c) Süzgecin genlik tepkisi $|H(\Omega)|$'yı ve faz tepkisi $\theta(\Omega)$'yı çiziniz.

(a) Dürtü tepkisi $h[n]$ Şekil 6-27(a)'da çizilmiştir. $h[n]$'nin $N = 4$ için (6.164) koşulunu sağladığına dikkat ediniz.

(b) (6.27) tanımından

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} = 2 + 2e^{-j\Omega} - 2e^{-j2\Omega} - 2e^{-j3\Omega}$$

$$= 2(1 - e^{-j3\Omega}) + 2(e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega})$$

$$= 2e^{-j3\Omega/2}(e^{j3\Omega/2} - e^{-j3\Omega/2}) + 2e^{-j3\Omega/2}(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})$$

$$= je^{-j3\Omega/2}\left(\sin\frac{\Omega}{2} + \sin\frac{3\Omega}{2}\right) = H_r(\Omega)\,e^{j(\pi/2-3\Omega/2)} \qquad (6.171)$$

elde ederiz, burada

$$|H(\Omega)| = |H_r(\Omega)| = \frac{1}{3}\left|\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$$

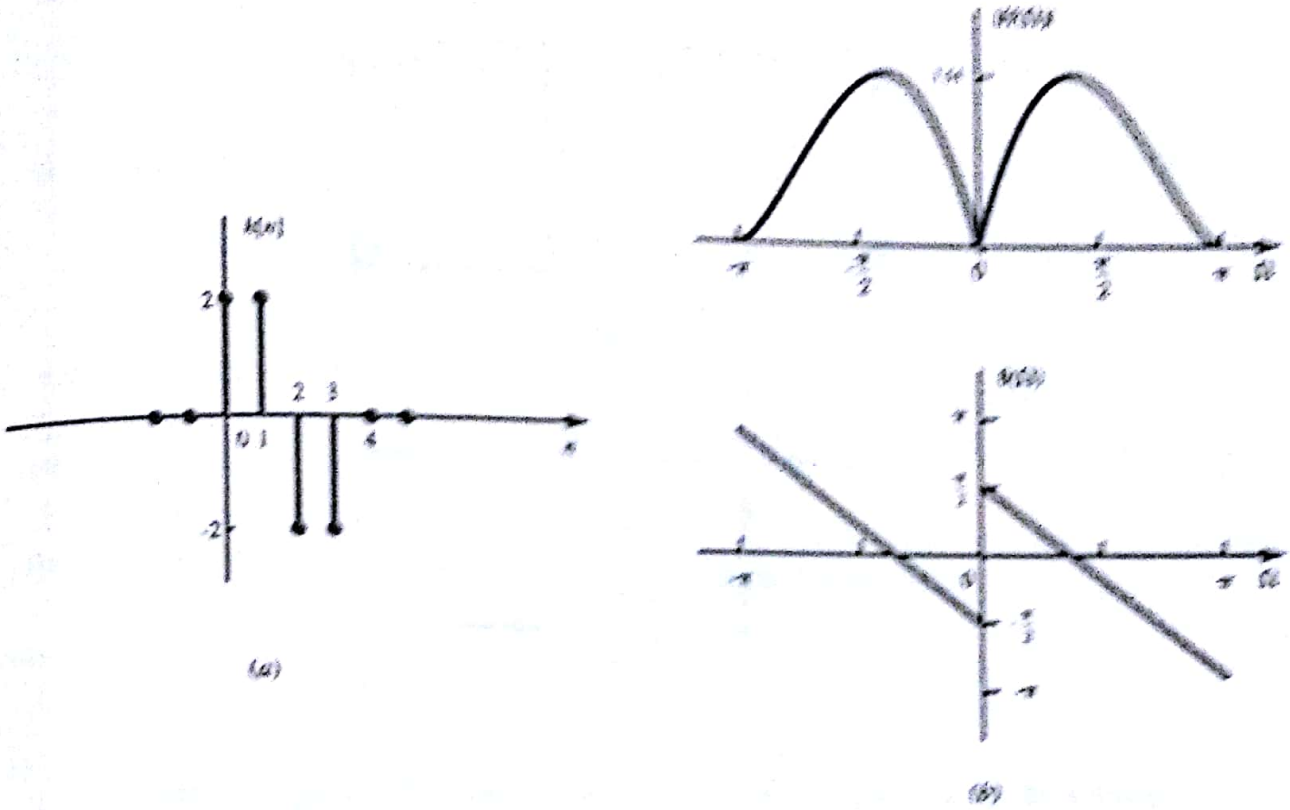
ile verilmektedir.

(c) Eşitlik (6.171)'den

$$|H(\Omega)| = |H_r(\Omega)| = \left|\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)\right|$$

$$\theta(\Omega) = \begin{cases} \pi/2 - \frac{3}{2}\Omega & H_r(\Omega) \geq 0 \\ -\pi/2 - \frac{3}{2}\Omega & H_r(\Omega) < 0 \end{cases}$$

buluruz; $|H(\Omega)|$ ve $\theta(\Omega)$ Şekil 6-27(b)'de çizilmiştir. Bu sistemin doğrusal fazlı band geçiren bir FIR süzgeç olduğunu görüyoruz.



Şekil 6-27

BENZETİM

6.43. Şekil 6-28(a)'da görülen alçak geçirgen *RC* süzgeci ($RC=1$) düşünelim.

(a) $h_c(t)$ *RC* süzgecin dürtü tepkisi, $h_d[n]$ ayrık zamanlı süzgecin dürtü tepkisi, ve T_s tasarım işleminin bir parçası olarak seçilecek pozitif bir sayı olmak üzere

$$h_d[n] = h_c(t)|_{t=nT_s} = h_c(nT_s) \tag{6.172}$$

koşulunu sağlayan ayrık zamanlı bir süzgeç tasarlayınız.

(b) $T_s=1$ ve $T_s=0.1$ için *RC* süzgecin genlik tepkisi $|H_c(\omega)|$'yı ve ayrık zamanlı süzgecin genlik tepkisi $|H_d(\omega T_s)|$'yi çiziniz.

(a) *RC* süzgecin sistem fonksiyonu $H_c(s)$

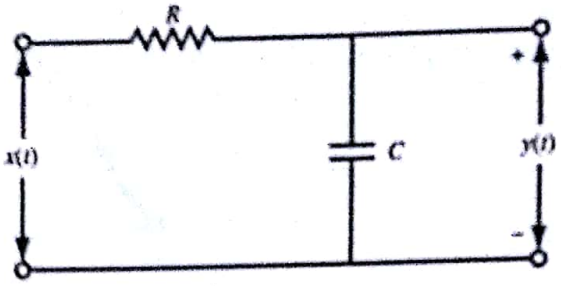
$$H_c(s) = \frac{1}{s+1} \tag{6.173}$$

ile (Problem 3.23) ve dürtü tepkisi $h_c(t)$

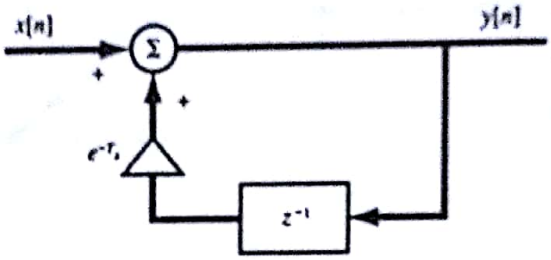
$$h_c(t) = e^{-t}u(t) \tag{6.174}$$

ile verilir. Eşitlik (6.172)'den karşılık gelen $h_d[n]$

$$h_d[n] = e^{-nT_s}u[n] = (e^{-T_s})^n u[n] \tag{6.175}$$



(a)



(b)

Şekil 6-28 Bir RC süzgecin dürtü tepkisinin değişmezliği yöntemi ile benzetimi

olur. Bu durumda, Eşitlik (6.175)'nin z dönüşümünü alarak ayrık zamanlı süzgecin sistem fonksiyonu $H_d(z)$'yi

$$H_d(z) = \frac{1}{1 - e^{-T_s} z^{-1}}$$

biçiminde buluruz; buradan ayrık zamanlı süzgeci tanımlayan fark denklemini

$$y[n] - e^{-T_s} y[n-1] = x[n] \qquad (6.176)$$

olarak elde ederiz; buradan da RC süzgecin benzetimi olan ayrık zamanlı süzgecin Şekil 6-28(b)'de görüldüğü gibi olduğunu buluruz.

(b) Eşitlik (5.40)'tan

$$H_c(\omega) = H_c(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

buluruz. Böylece

$$|H_c(\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2)^{1/2}}$$

olur. Eşitlik (6.34) ve (6.81)'den

$$H_d(\omega T_s) = H_d(z)|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{1 - e^{-T_s} e^{-j\omega T_s}}$$

yazabiliriz. Eşitlik (6.149)'dan

$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{\left[1 + e^{-2T_s} - 2e^{-T_s}\cos(\omega T_s)\right]^{1/2}}$$

elde ederiz. $T_s = 1$ için

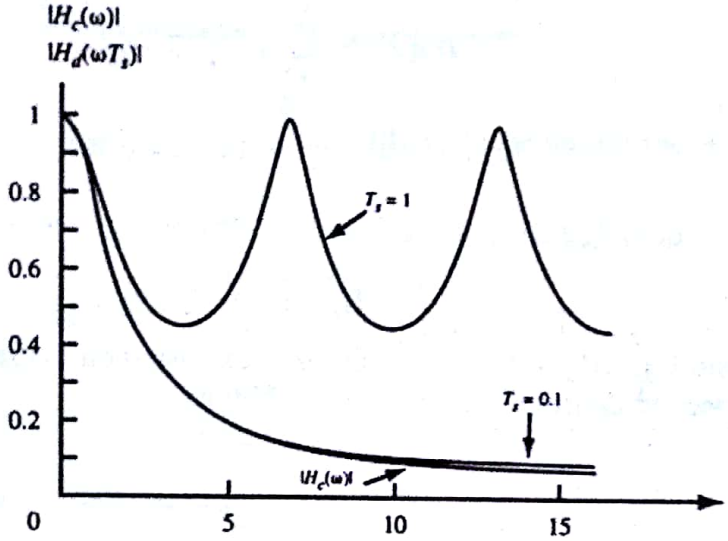
$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{\left[1 + e^{-2} - 2e^{-1}\cos(\omega)\right]^{1/2}}$$

ve $T_s = 0.1$ için

$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{\left[1 + e^{-0.2} - 2e^{-0.1}\cos(0.1\omega)\right]^{1/2}}$$

olur. RC süzgecin genlik tepkisi $|H_c(\omega)|$ ve ayrık zamanlı süzgecin genlik tepkisi $|H_d(\omega T_s)|$, $T_s = 1$ ve $T_s = 0.1$ için Şekil 6-29'da çizilmiştir. Çizimlerin $\omega = 0$ 'daki genlikler 1 olacak şekilde ölçeklendiğine dikkat ediniz.

Sürekli zamanlı bir sistemin benzetimi için bu problemdeki gibi ayrık zamanlı bir sistem kurmak dürtü tepkisinin değişmezliği yöntemi olarak adlandırılır.



Şekil 6-29

6.44. Değişmez dürtü yöntemini uygulayarak, sistem fonksiyonu

$$H_c(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

ile verilen bir sürekli zamanlı DZD sistemi benzeten ayrık zamanlı sistemin frekans tepkisi $H_d(\Omega)$ 'yı bulunuz.

Kısmi kesirler açılımı kullanarak

$$H_c(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

elde ederiz. Böylece, Tablo 3-1'den sürekli zamanlı sistemin dürtü tepkisi

$$h_c(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \qquad (6.177)$$

olur. $h_d[n]$ ayrık zamanlı sistemin dürtü tepkisi olsun. Bu durumda, Eşitlik (6.177)'den

$$h_d[n] = h_c(nT_s) = (e^{-nT_s} - e^{-2nT_s})u[n]$$

buluruz ve ayrık zamanlı sistemin sistem fonksiyonu

$$H_d(z) = \frac{1}{1 - e^{-nT_s}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2nT_s}z^{-1}} \tag{6.178}$$

olur. Dolayısıyla, ayrık zamanlı sistemin frekans tepkisi $H_d(\Omega)$

$$H_d(\Omega) = H_d(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 - e^{-nT_s}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - e^{-2nT_s}e^{-j\Omega}} \tag{6.179}$$

biçimini alır.

Sürekli zamanlı bir DZD sistemin sistem fonksiyonu

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s + \alpha_k} \tag{6.180}$$

ile veriliyorsa, dürtü tepkisinin değişmezliği yöntemi, sistem fonksiyonu $H_d(z)$

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{-\alpha_k nT_s}z^{-1}} \tag{6.181}$$

ile verilen ayrık zamanlı bir sistem üretir.

6.45. Bir türev alıcı, sistem fonksiyonu

$$H_c(s) = s \tag{6.182}$$

ile verilen [Eşitlik (3.20)] sürekli zamanlı DZD bir sistemdir. Türev alıcıyı benzetmek için, $H_c(s)$'de s yerine çift doğrusal dönüşüm olarak bilinen ve

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{6.183}$$

ile verilen dönüşüm konularak ayrık zamanlı bir DZD sistem oluşturulur. Yine Eşitlik (6.183)'teki T_s, tasarım işleminin bir parçası olarak seçilecek olan pozitif bir sayıdır.

(a) Ayrık zamanlı sistemin diyagramını çiziniz.

(b) Ayrık zamanlı sistemin frekans tepkisi $H_d(\Omega)$ 'yı bulunuz ve genlik ve faz tepkilerini çiziniz.

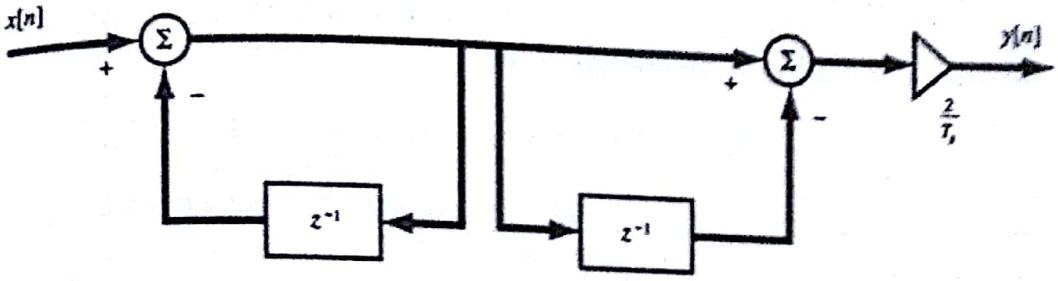
(a) $H_d(z)$ ayrık zamanlı sistemin sistem fonksiyonu olsun. Bu durumda, Eşitlik (6.182) ve (6.183)'den

$$H_d(z) = \frac{2}{T_s}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{6.184}$$

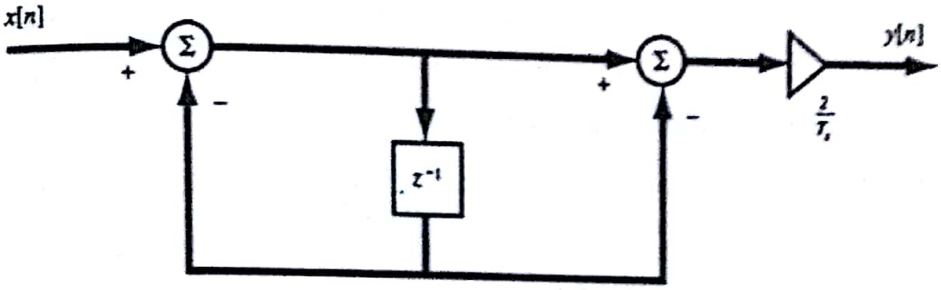
elde ederiz. $H_d(z)$'yi

$$H_d(z) = \frac{2}{T_s}\left(\frac{1}{1 + z^{-1}}\right)(1 - z^{-1})$$

biçiminde yazarsak, Problem (6.35) ve (6.38)'den, ayrık zamanlı sistem Şekil 6-30(a)'da görüldüğü gibi ardışık bağlı iki sistem biçiminde oluşturulabilir. Şekil 6-30(a)'daki iki adet birim geciktirme elemanı yerine Şekil 6-30(b)'de görüldüğü gibi tek bir birim geciktirme elemanı yerleştirebiliriz.



(a)



(b)

Şekil 6-30 Bir türev alıcının benzetimi

(b) Eşitlik (6.184)'ten ayrık zamanlı sistemin frekans tepkisi $H_d(\Omega)$

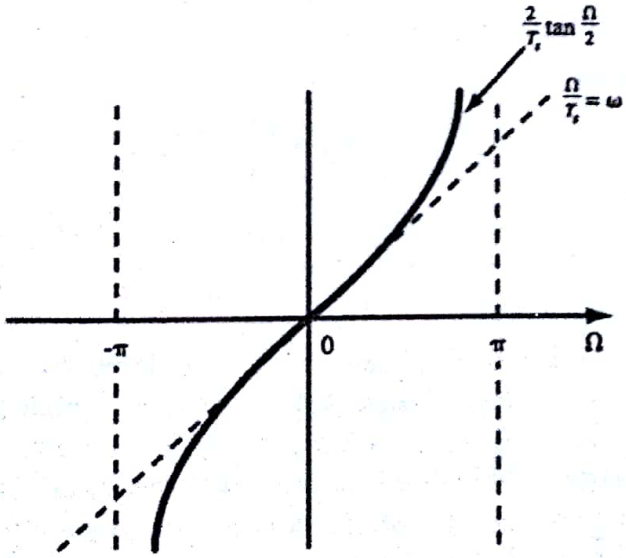
$$H_d(\Omega) = \frac{2}{T_s}\frac{1-e^{-j\Omega}}{1+e^{-j\Omega}} = \frac{2}{T_s}\frac{e^{-j\Omega/2}\left(e^{j\Omega/2}-e^{-j\Omega/2}\right)}{e^{-j\Omega/2}\left(e^{j\Omega/2}+e^{-j\Omega/2}\right)}$$

$$= j\frac{2}{T_s}\frac{\sin\Omega/2}{\cos\Omega/2} = j\frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega}{2} = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega}{2}e^{j\pi/2} \qquad (6.185)$$

ile verilir. Eğer $\Omega = \omega T_s$ ise, $\Omega \ll 1$ için

$$H_d(\Omega) = j\frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega}{2} \approx j\frac{\Omega}{T_s} = j\omega \qquad (6.186)$$

elde ederiz (Şekil 6-31).



Şekil 6-31

6.46. Rasyonel bir sistem fonksiyonunu ($H_c(s)$) sahip olan sürekli zamanlı bir DZD sisteme çift doğrusal dönüşüm uygulanarak elde edilen ve sistem fonksiyonu $H_d(z)$ olan ayrık zamanlı bir DZD sistemin tasarlanmasını düşünelim. Yani

$$H_d(z) = H_c(s)\big|_{s=(2/T_s)(1-z^{-1})/(1+z^{-1})} \tag{6.187}$$

olsun. Kararlı, nedensel sürekli zamanlı bir sistemin her zaman kararlı nedensel ayrık zamanlı bir sistem ürettiğini gösteriniz.

Eşitlik (6.183)'te verilen çift doğrusal dönüşümü düşünelim:

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{6.188}$$

Eşitlik (6.188)'yi z'ye göre çözdüğümüzde

$$z = \frac{1+(T_s/2)s}{1-(T_s/2)s} \tag{6.189}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.189)'da $s = j\omega$ alırsak

$$|z| = \left|\frac{1+j\omega(T_s/2)}{1-j\omega(T_s/2)}\right| = 1 \tag{6.190}$$

buluruz. Böylece, s düzlemindeki $j\omega$ ekseninin z düzleminde birim çembere dönüştüğünü görüyoruz.

$$z = re^{j\Omega} \qquad \text{ve} \qquad s = \sigma + j\omega$$

yazalım. Bu durumda, Eşitlik (6.188)'den

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T_s}\frac{re^{j\Omega}-1}{re^{j\Omega}+1} \\ &= \frac{2}{T_s}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\Omega} + j\frac{2r\sin\Omega}{1+r^2+2r\cos\Omega}\right) \end{aligned}$$

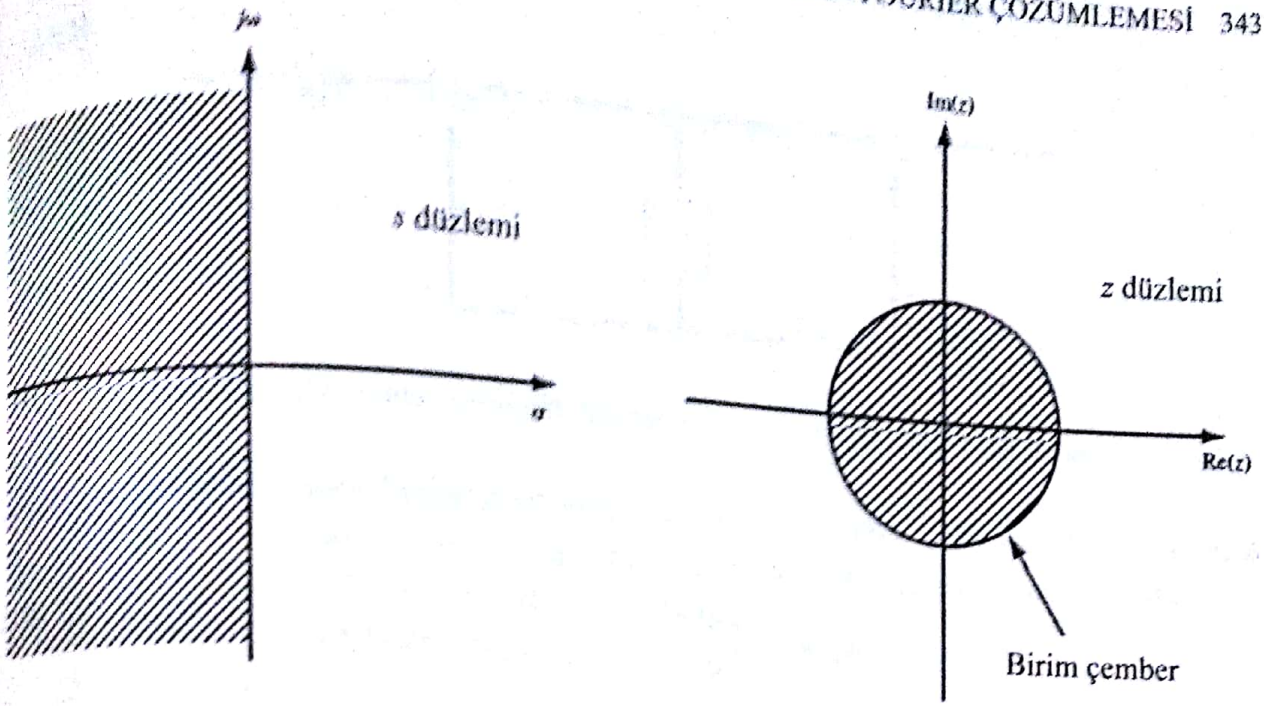
elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\sigma = \frac{2}{T_s}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\Omega} \tag{6.191a}$$

$$\omega = \frac{2}{T_s}\frac{2r\sin\Omega}{1+r^2+2r\cos\Omega} \tag{6.191b}$$

buluruz. Eşitlik (6.191a)'dan $r<1$ için $\sigma<0$ olduğunu ve $r>1$ için $\sigma>0$ olduğunu görüyoruz. Sonuç olarak, s düzlemindeki sol yarı düzlem z düzleminde birim çemberin içine dönüştürülür, ve s düzlemindeki sağ yarı düzlem birim çemberin dışına dönüştürülür (Şekil 6-32). Böylece, çift doğrusal bir dönüşümle, kararlı, nedensel sürekli zamanlı bir sistemin, kararlı, nedensel ayrık zamanlı bir sisteme dönüşeceği yargısına ulaşıyoruz (Bakınız Bölüm 3.6B ve 4.6B) $r = 1$ için $\sigma = 0$ ve

$$\omega = \frac{2}{T_s}\frac{\sin\Omega}{1+\cos\Omega} = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega}{2} \tag{6.192}$$



Şekil 6-32 Çift doğrusal dönüşüm

veya

$$\Omega = 2\tan^{-1}\frac{\omega T_s}{2} \tag{6.193}$$

olur. Eşitlik (6.193)'ten tüm $-\infty < \omega < \infty$ aralığının yalnızca $-\pi \le \Omega \le \pi$ aralığına dönüştüğünü görüyoruz.

6.47. Şekil 6-28(a)'daki alçak geçirgen *RC* süzgeci düşünelim. Çift doğrusal dönüşüm yöntemini kullanarak 3-dB bant genişliği $\pi/4$ olacak şekilde alçak geçirgen ayrık zamanlı bir süzgeç tasarlayınız.

Eşitlik (6.192)'yi kullanarak, $\Omega_{3\,dB} = \pi/4$

$$\omega_{3\,dB} = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega_{3\,dB}}{2} = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\pi}{8} = \frac{0.828}{T_s} \tag{6.194}$$

değerine karşılık gelir. Problem 5.55(a)'dan $\Omega_{3\,dB} = 1/RC$'dir. Böylece, *RC* süzgecin sistem fonksiyonu $H_c(s)$

$$H_c(s) = \frac{0.828/T_s}{s + 0.828/T_s} \tag{6.195}$$

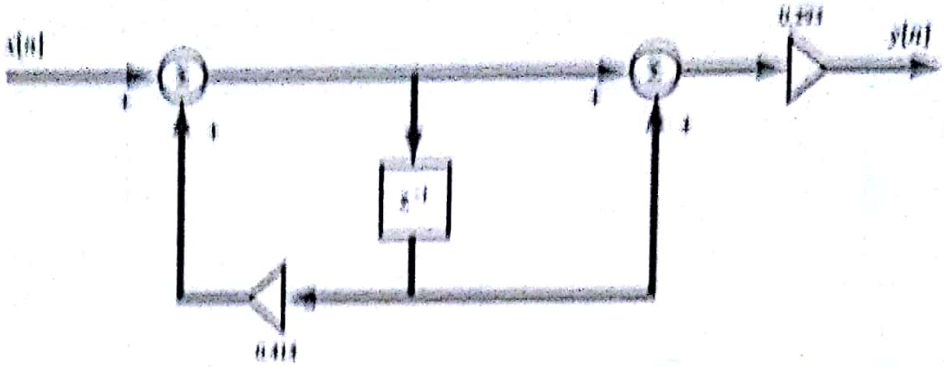
ile verilir. $H_d(z)$, istenen ayrık zamanlı süzgecin sistem fonksiyonu olsun. Çift doğrusal dönüşüm (6.183)'ü Eşitlik (6.195)'e uygulayarak

$$H_d(z) = \frac{0.828/T_s}{\dfrac{2}{T_s}\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \dfrac{0.828}{T_s}} = \frac{0.293(1+z^{-1})}{1-0.414z^{-1}} \tag{6.196}$$

elde ederiz; buradan Şekil 6-33'teki sistem ortaya çıkar. Ayrık zamanlı süzgecin frekans tepkisi

$$H_d(\Omega) = \frac{0.293(1+e^{-j\Omega})}{1-0.414e^{-j\Omega}} \tag{6.197}$$

olur. $\Omega = 0$, $H_d(0) = 1$, ve $\Omega = \pi/4$'te $|H_d(\pi/4)| = 0.707 = 1/\sqrt{2}$ olur; bu istenen tepkidir.



Şekil 6.33 Bir RC süzgecin çift doğrusal dönüştüm yöntemiyle benzetimi

6.48. $h[n]$, frekans tepkisi $H(\Omega)$ olan bir IIR süzgecin dürtü tepkisi olsun ve $h_0[n]$ frekans tepkisi $H_0(\Omega)$ olan N uzunluklu bir FIR süzgecin dürtü tepkisi olsun. $h_0[n]$

$$h_0[n] = \begin{cases} h[n] & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases} \tag{6.198}$$

ile verildiğinde

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega) - H_0(\Omega)|^2 \, d\Omega \tag{6.199}$$

biçiminde tanımlanan kare ortalama hata ε^2'nin minimum olduğunu gösteriniz.

Tanım (6.27)'den

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \quad \text{ve} \quad H_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0[n]e^{-j\Omega n}$$

olur. $e[n] = h[n] - h_0[n]$ olmak üzere

$$E(\Omega) = H(\Omega) - H_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n] - h_0[n])e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]e^{-j\Omega n} \tag{6.200}$$

yazalım. Parseval teoremi (6.66)'dan

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |E(\Omega)|^2 \, d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - h_0[n]|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} |h[n] - h_0[n]|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |h[n]|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |h[n]|^2 \tag{6.201}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.201)'deki son iki terim iki pozitif sabittir. Böylece,

$$h[n] - h_0[n] = 0 \qquad 0 \le n \le N-1$$

yani

$$h[n] = h_0[n] \qquad 0 \le n \le N-1$$

olur.

Eşitlik (6.198)'nin

$$h_0[n] = h[n]w[n] \tag{6.202}$$

biçiminde ifade edilebileceğine dikkat ediniz; burada $w[n]$

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases} \tag{6.203}$$

ile verilen dikdörtgen pencere işlevidir.

AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

6.49. Aşağıdaki $x[n]$ dizileri için N noktalı AFD'yi bulunuz.

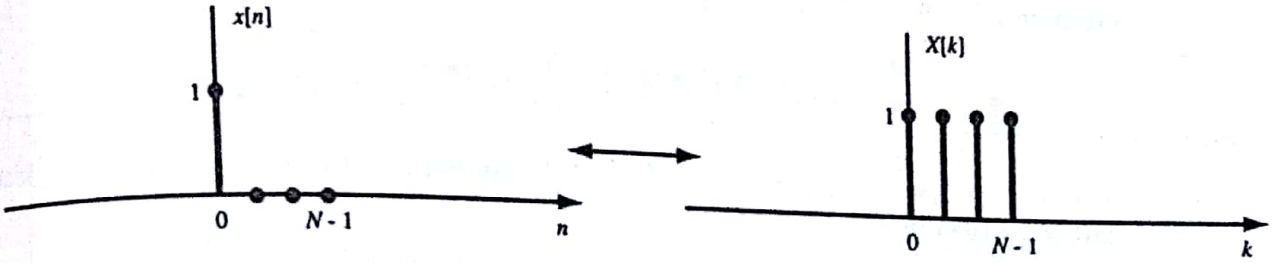
(*a*) $x[n] = \delta[n]$

(*b*) $x[n] = u[n] - u[n-N]$

(*a*) (6.92) ve (1.45) tanımlarından

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] w_N^{kn} = 1 \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

elde ederiz. Şekil 6-34, $x[n]$'yi ve N noktalı AFD $X[k]$'yı göstermektedir.



Şekil 6-34

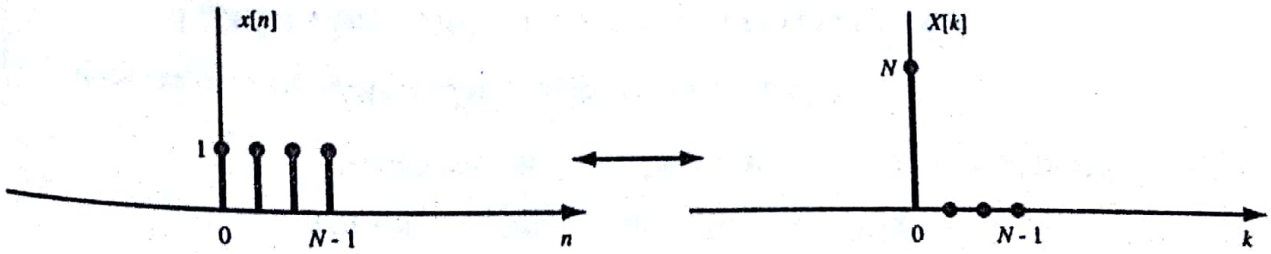
(*b*) Yine (6.92) ve (1.44) tanımlarından ve Eşitlik (1.90)'ı kullanarak

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 - W_N^{k}} = 0 \qquad k \neq 0$$

elde ederiz; $W_N^{kN} = e^{-j(2\pi/N)kN} = e^{-jk2\pi} = 1$ olduğundan

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{0} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

sonucunu buluruz. Şekil 6-35, $x[n]$'yi ve N noktalı AFD $X[k]$'yı göstermektedir.



Şekil 6-35

6.50. Aşağıda verilen 4 uzunluklu $x[n]$ ve $h[n]$ dizilerini düşünelim.

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \qquad n = 0, 1, 2, 3$$

(a) Doğrudan dairesel konvolüsyonu alarak $y[n] = x[n] \circledcirc h[n]$'yi hesaplayınız.

(b) $y[n]$'yi AFD ile hesaplayınız.

(a) $x[n]$ ve $h[n]$ dizileri

$$x[n] = \{1, 0, -1, 0\} \qquad \text{ve} \qquad h[n] = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8}\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Eşitlik (6.108)'den

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = \sum_{i=0}^{3} x[i]h[n-i]_{\text{mod } 4}$$

olur. $x[i]$ ve $h[n-i]_{\text{mod } 4}$ dizileri $n = 0, 1, 2, 3$ için Şekil 6-36(a)'da çizilmiştir. Böylece, Eşitlik (6.108)'den

$$\begin{aligned}
n &= 0 \qquad & y[0] &= 1(1) + (-1)(\tfrac{1}{4}) = \tfrac{3}{4} \\
n &= 1 \qquad & y[1] &= 1(\tfrac{1}{2}) + (-1)(\tfrac{1}{8}) = \tfrac{3}{8} \\
n &= 2 \qquad & y[2] &= 1(\tfrac{1}{4}) + (-1)(1) = -\tfrac{3}{4} \\
n &= 3 \qquad & y[3] &= 1(\tfrac{1}{8}) + (-1)(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{8}
\end{aligned}$$

ve

$$y[n] = \{\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{8}, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{8}\}$$

elde ederiz; $y[n]$ Şekil 6-36(b)'de çizilmiştir.

(b) Eşitlik (6.92)'den

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]W_4^{kn} = 1 - W_4^{2k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

$$H[k] = \sum_{n=0}^{3} h[n]W_4^{kn} = 1 + \tfrac{1}{2}W_4^k + \tfrac{1}{4}W_4^{2k} + \tfrac{1}{8}W_4^{3k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

elde ederiz. Bu durumda, Eşitlik (6.107)'den $y[n]$'nin AFD'si

$$\begin{aligned}
Y[k] = X[k]H[k] &= (1 - W_4^{2k})(1 + \tfrac{1}{2}W_4^k + \tfrac{1}{4}W_4^{2k} + \tfrac{1}{8}W_4^{3k}) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}W_4^k - \tfrac{3}{4}W_4^{2k} - \tfrac{3}{8}W_4^{3k} - \tfrac{1}{4}W_4^{4k} - \tfrac{1}{8}W_4^{5k}
\end{aligned}$$

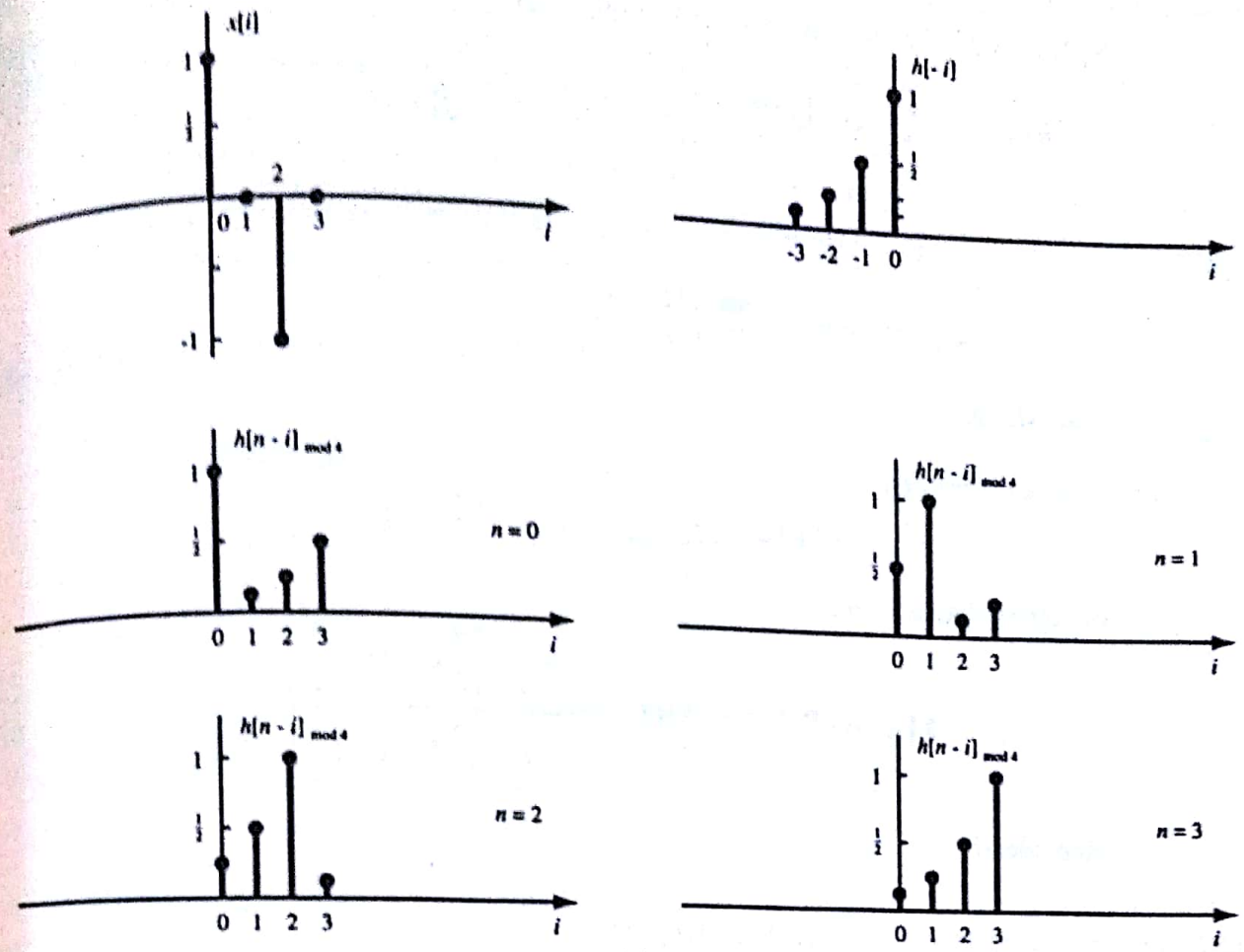
olur. $W_4^{4k} = (W_4^4)^k = 1^k$ ve $W_4^{5k} = W_4^{(4+1)k} = W_4^k$ olduğundan

$$Y[k] = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{8}W_4^k - \tfrac{3}{4}W_4^{2k} - \tfrac{3}{8}W_4^{3k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

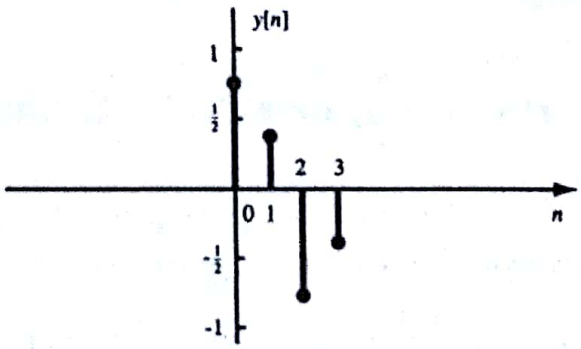
buluruz. Böylece, AFD'nin tanımından [Eşitlik (6.92)]

$$y[n] = \{\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{8}, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{8}\}$$

elde ederiz.



(a)



(b)

Şekil 6-36

6.51. Aşağıda verilen sonlu uzunluklu karmaşık üstel diziyi düşünelim.

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\Omega_0 n} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(a) $x[n]$'nin Fourier dönüşümü $X(\Omega)$'yı bulunuz.

(b) $x[n]$'nin N noktalı AFD'si $X[k]$'yı bulunuz.

(a) Eşitlik (6.27)'den ve Eşitlik (1.90)'ı kullanarak

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\Omega_0 n}e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\Omega-\Omega_0)n}$$

$$= \frac{1-e^{-j(\Omega-\Omega_0)N}}{1-e^{-j(\Omega-\Omega_0)}} = \frac{e^{-j(\Omega-\Omega_0)N/2}\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)N/2} - e^{-j(\Omega-\Omega_0)N/2}\right)}{e^{-j(\Omega-\Omega_0)/2}\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)/2} - e^{-j(\Omega-\Omega_0)/2}\right)}$$

$$= e^{j(\Omega-\Omega_0)(N-1)/2}\frac{\sin[(\Omega-\Omega_0)N/2]}{\sin[(\Omega-\Omega_0)/2]}$$

elde ederiz.

(a) Eşitlik (6.98)'den

$$X[k] = X(\Omega)|_{\Omega=k2\pi/N} = X\left(\frac{k2\pi}{N}\right)$$

olduğuna dikkat ederek

$$X[k] = e^{j[(2\pi/N)k-\Omega_0](N-1)/2}\frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}k-\Omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}k-\Omega_0\right)\frac{1}{2}\right]}$$

elde ederiz.

6.52. Eğer $x[n]$ gerçelse, $x[n]$'nin AFD'si $X[k]$'nın

$$X[N-k] = X^*[k] \tag{6.204}$$

bağıntısını sağladığını gösteriniz; * karmaşık eşleniği göstermektedir.

Eşitlik (6.92)'den

$$X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)(N-k)n}$$

buluruz. Burada

$$e^{-j(2\pi/N)(N-k)n} = e^{-j2\pi n}e^{j(2\pi/N)kn} = e^{j(2\pi/N)kn}$$

olmaktadır. Dolayısıyla, $x[n]$ gerçelse $x^*[n] = x[n]$ olur ve

$$X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j(2\pi/N)kn} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}\right]^* = X^*[k]$$

sonucuna ulaşırız.

6.53. Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösteriniz:

$$x[n] = \text{TAFD}\{X[k]\} = \frac{1}{N}[\text{AFD}\{X^*[k]\}]^* \tag{6.205}$$

Burada * karmaşık eşleniği göstermekte ve

$$X[k] = \text{AFD}\{x[n]\}$$

ile verilmektedir.

Eşitlik (6.94)'ü

$$x[n] = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn}\right] = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} X^*[k]e^{-j(2\pi/N)nk}\right]^*$$

biçiminde yazabiliriz. Son terimdeki parantez içindeki terimin $X^*[k]$'nın AFD'si olduğuna dikkat ederek

$$x[n] = \text{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N}[\text{DFT}\{X^*[k]\}]^*$$

elde ederiz; bu eşitlik AFD'yi hesaplamakta kullanılan aynı algoritmanın TAFD'yi hesaplamakta da kullanılabileceğini gösterir.

6.54. Eşitlik (6.92)'deki AFD tanımı

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x} \tag{6.206}$$

biçiminde matris işlemi olarak ifade edilebilir; burada $\mathbf{x}$, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{W}_N$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \tag{6.207}$$

ile verilir. $N \times N$, $\mathbf{W}_N$ matrisi AFD matrisi olarak bilinir. $\mathbf{W}_N$'nin simetrik olduğuna, yani $\mathbf{W}_N^T = \mathbf{W}_N$ olduğuna dikkat ediniz; $\mathbf{W}_N^T$, $\mathbf{W}_N$'nin devriğidir.

(a) $\mathbf{W}_N^{-1}$, $\mathbf{W}_N$'nin tersi ve $\mathbf{W}_N^*$, $\mathbf{W}_N$'nin karmaşık eşleniği olmak üzere

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^* \tag{6.208}$$

olduğunu gösteriniz.

(b) $\mathbf{W}_4$ ve $\mathbf{W}_4^{-1}$'yi açık olarak yazınız.

(a) $\mathbf{W}_N$'nin tersinin olduğunu varsayalım. Eşitlik (6.206)'nın her iki tarafını $\mathbf{W}_N^{-1}$ ile çarparak

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1}\mathbf{X} \tag{6.209}$$

elde ederiz; bu eşitlik TAFD'nin bir ifadesidir. Eş (6.94)'te verilen TAFD matris biçiminde

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^*\mathbf{X} \tag{6.210}$$

olarak ifade edilebilir. Eşitlik (6.210) ile Eş (6.209)'u karşılaştırdığımızda

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^*$$

olduğunu görürüz.

(a) $W_{n+1,k+1}$, $\mathbf{W}_4$ matrisinin $(n+1)$.ci satırındaki ve $(k+1)$.ci sütunundaki girişi göstersin. Bu durumda, Eşitlik (6.207)'den

$$W_{n+1,k+1} = W_4^{nk} = e^{-j(2\pi/4)nk} = e^{-j(\pi/2)nk} = (-j)^{nk} \tag{6.211}$$

buluruz ve

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W}_4^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \tag{6.212}$$

elde ederiz.

6.55. (a) $x[n] = \{0, 1, 2, 3\}$'ün AFD'si $X[k]$'yı bulunuz.

(b) (a) şıkkında elde ettiğiniz $X[k]$'dan TAFD $x[n]$'yi bulunuz.

(a) Eşitlik (6.206) ve (6.212)'yi kullanarak $x[n]$'nin AFD'si $X[k]$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+j2 \\ -2 \\ -2-j2 \end{bmatrix}$$

ile verilir.

(b) Eşitlik (6.209) ve (6.212)'yi kullanarak $X[k]$'nın TAFD $x[n]$

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -2+j2 \\ -2 \\ -2-j2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ile verilir.

6.56. $x[n]$

$$x[n] = 0 \qquad n < 0,\ n \geq N \tag{6.213}$$

koşulunu sağlayan N uzunluklu sonlu bir dizi olsun. $x[n]$'nin N noktalı AFD'si $X[k]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{6.214}$$

ile verilsin [Eşitlik (6.92)]. N'nin çift olduğunu varsayalım ve

$$f[n] = x[2n] \tag{6.215a}$$

$$g[n] = x[2n+1] \tag{6.215b}$$

olsun. $f[n]$ ve $g[n]$ dizileri, sırasıyla, $x[n]$'nin çift numaralı ve tek numaralı örneklerini gösterir.

(a) Aşağıdaki eşitliği gösteriniz.

$$f[n] = g[n] = 0 \qquad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \text{ dışında} \tag{6.216}$$

(b) $x[n]$'nin N noktalı AFD'sinin

$$X[k] = F[k] + W_N^k G[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \qquad (6.217a)$$

$$X\left[k + \frac{N}{2}\right] = F[k] - W_N^k G[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \qquad (6.217b)$$

biçiminde ifade edilebileceğini gösteriniz, burada

$$F[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \qquad (6.218a)$$

$$G[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}^{kn}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \qquad (6.218b)$$

ile verilmektedir.

(c) $N = 8$ için, Eşitlik (6.217a)'dan ve Eşitlik (6.217b)'den $X[k]$'nın hesaplanmasını gösteren bir akış diyagramı çiziniz.

(d) $x[n]$'nin karmaşık olduğunu ve W_N^{nk}'nın daha önceden hesaplandığını varsayalım. $X[k]$'yı Eşitlik (6.214)'ten ve Eşitlik (6.217a) ve (6.217b)'den hesaplamak için gereken karmaşık çarpım sayısını belirleyiniz ve $N = 2^{10} = 1024$ için sonuçları karşılaştırınız.

(a) Eşitlik (6.213)'ten

$$f[n] = x[2n] = 0, n < 0 \qquad \text{ve} \qquad f\left[\frac{N}{2}\right] = x[N] = 0$$

olur. Böylece

$$f[n] = 0 \qquad n < 0, n \geq \frac{N}{2}$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$g[n] = x[2n+1] = 0, n < 0 \qquad \text{ve} \qquad g\left[\frac{N}{2}\right] = x[N+1] = 0$$

olur. Böylece

$$g[n] = 0 \qquad n < 0, n \geq \frac{N}{2}$$

elde ederiz.

(b) Eşitlik (6.214)'ü

$$X[k] = \sum_{n \text{ çift}} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n \text{ tek}} x[n] W_N^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x[2m] W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x[2m+1] W_N^{(2m+1)k} \qquad (6.219)$$

biçiminde yeniden yazalım. Ancak

$$W_N^2 = (e^{-j2\pi/N})^2 = e^{-j4\pi/N} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2} \qquad (6.220)$$

olmaktadır. Bunu yerine koyduğumuzda Eşitlik (6.219)

$$X[k] = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f[m] W_{N/2}^{mk} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} g[m] W_{N/2}^{mk}$$

$$= F[k] + W_N^k G[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad (6.221)$$

biçiminde ifade edilebilir; burada $F[k]$ ve $G[k]$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$G[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

ile verilmektedir. $F[k]$ ve $G[k]$'nın, sırasıyla, $f[n]$ ve $g[n]$'nin $(N/2)$ noktalı AFD'leri olduğuna dikkat ediniz. Şimdi

$$W_N^{k+N/2} = W_N^k W_N^{N/2} = -W_N^k \tag{6.222}$$

elde ederiz; burada

$$W_N^{N/2} = (e^{-j(2\pi/N)})^{(N/2)} = e^{-j\pi} = -1 \tag{6.223}$$

olmaktadır. Dolayısıyla, Eşitlik (6.221)

$$X[k] = F[k] + W_N^k G[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

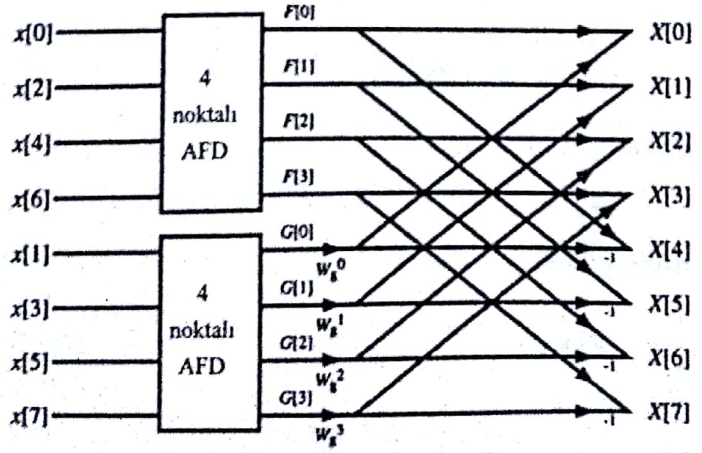
$$X\left[k + \frac{N}{2}\right] = F[k] - W_N^k G[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

biçiminde ifade edilebilir.

(c) Eşitlik (6.217a) ve (6217b)'yi kullanarak $X[k]$'yı belirlerken izlenen adımları gösteren akış diyagramı Şekil 6-37'de görülmektedir.

(d) $X[k]$'nın bir değerini Eşitlik (6.214)'ten hesaplamak için N karmaşık çarpım gerekir. Böylece, Eşitlik (6.214) için toplam karmaşık çarpımların sayısı N^2'dir. $F[k]$'yı ve $G[k]$'yı hesaplamak için gereken karmaşık çarpımların sayısı $(N/2)^2$'dir. Ek olarak $W_N^k G[k]$'nın hesaplanması için N adet çarpım gereklidir. Böylece, Eşitlik (6.217a) ve (6.217b) için karmaşık çarpımların toplam sayısı $2(N/2)^2 + N = N^2/2 + N$'dir. $N = 2^{10} = 1024$ için Eşitlik (6.214)'ün kullanılması durumunda gereken toplam karmaşık çarpım sayısı $2^{20} \approx 10^6$ ve Eşitlik (6.217a) ve (6.217b)'nın kullanılması durumunda $10^6/2 + 1024 \approx 10^6/2$ olur. Böylece Eşitlik (6.217a) ve (6.217b)'nin kullanılması durumunda çarpım sayısının yaklaşık olarak yarıya düştüğünü görüyoruz.

Eşitlik (6.217a) ve (6.217b)'yi kullanarak $X[k]$'nın hesaplanması yöntemine zamanda örnek seyreltmeli hızlı Fourier dönüşümü (HFD) algoritması denir. $N/2$ çift olduğundan, aynı işlem kullanılarak, $F[k]$ ve $G[k]$'nın, uygun şekilde seçilmiş dizilerin $(N/4)$ noktalı AFD'lerinin hesaplanması ve birleştirilmesiyle bulunabileceğine dikkat ediniz.



Şekil 6-37 8 noktalı zamanda örnek seyreltmeli HFD algoritmasının akış diyagramı

6.57. Aşağıda verilen diziyi düşünelim:

$$x[n] = \{1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1\}$$

Zamanda örnek seyreltmeli HFD algoritmasını kullanarak $x[n]$'nin AFD'si $X[k]$'yı bulunuz.

Şekil 6-38(a) ve (b)'den, W_4^k ve W_8^k

$$W_4^0 = 1 \qquad W_4^1 = -j \qquad W_4^2 = -1 \qquad W_4^3 = j$$

$$W_8^0 = 1 \qquad W_8^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad W_8^2 = -j \qquad W_8^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$W_8^4 = -1 \qquad W_8^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad W_8^6 = j \qquad W_8^7 = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

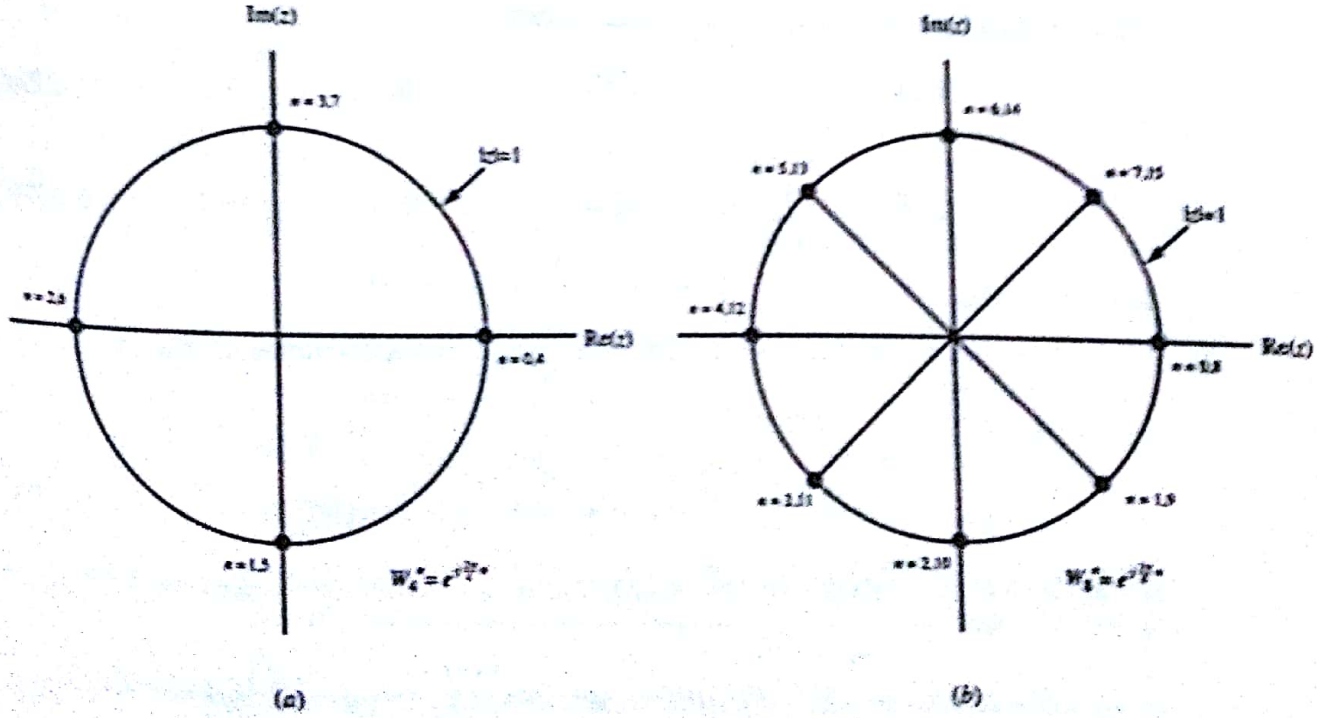
olarak kolayca bulunur. Daha sonra, Eşitlik (6.215a)'dan ve (6.215b)'den

$$f[n] = x[2n] = \{x[0], x[2], x[4], x[6]\} = \{1, -1, -1, 1\}$$
$$g[n] = x[2n+1] = \{x[1], x[3], x[5], x[7]\} = \{1, -1, 1, -1\}$$

elde ederiz. Bu durumda, Eşitlik (6.206) ve (6.212)'yi kullanarak

$$\begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2+j2 \\ 0 \\ 2-j2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \\ G[2] \\ G[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



(a) (b)

Şekil 6-38 W_4^n ve W_8^n faz faktörleri

buluruz ve Eşitlik (6.217a) ve (6.217b)'den

$$X[0] = F[0] + W_8^0 G[0] = 0 \qquad X[4] = F[0] - W_8^0 G[0] = 0$$
$$X[1] = F[1] + W_8^1 G[1] = 2 + j2 \qquad X[5] = F[1] - W_8^1 G[1] = 2 + j2$$
$$X[2] = F[2] + W_8^2 G[2] = -j4 \qquad X[6] = F[2] - W_8^2 G[2] = j4$$
$$X[3] = F[3] + W_8^3 G[3] = 2 - j2 \qquad X[7] = F[3] - W_8^3 G[3] = 2 - j2$$

elde ederiz.

$x[n]$'nin gerçel olduğuna dikkat ederek ve Eşitlik (6.204)'ü kullanarak, $X[7]$, $X[6]$ ve $X[5]$, sırasıyla $X[1]$, $X[2]$ ve $X[3]$'ün eşleniğini alarak kolayca bulunabilir.

6.58. $x[n]$, sonlu N uzunluklu bir dizi olsun ve

$$x[n] = 0 \qquad n < 0,\ n \geq N$$

koşulunu sağlasın $x[n]$'nin N noktalı AFD $X[k]$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \quad (6.224)$$

ile verilsin [Eşitlik (6.92)]. N'nin çift olduğunu varsayalım ve

$$p[n] = x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \qquad 0 \leq n < \frac{N}{2} \quad (6.225a)$$

$$q[n] = \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right]\right) W_N^n \qquad 0 \leq n < \frac{N}{2} \quad (6.225b)$$

olsun.

(a) $x[n]$'nin N noktalı AFD $X[k]$'nın

$$X[2k] = P[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.226a)$$

$$X[2k+1] = Q[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.226b)$$

biçiminde ifade edilebileceğini gösteriniz; burada

$$P[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n] W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.227a)$$

$$Q[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n] W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.227b)$$

ile verilmektedir.

(b) $N = 8$ için, Eşitlik (6.226a) ve (6.226b)'den $X[k]$'nın hesaplanmasını gösteren bir akış diyagramı çiziniz.

(a) Eşitlik (6.224)'ü

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (6.228)$$

biçiminde yeniden yazalım. Eşitlik (6.228)'nin ikinci terimindeki değişkeni $n = m + N/2$ ile değiştirirsek

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{kn} + W_N^{(N/2)k} \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x\left[m + \frac{N}{2}\right] W_N^{km} \quad (6.229)$$

elde ederiz. Eşitlik (6.223)'ten

$$W_N^{(N/2)k} = (-1)^k$$

olduğuna dikkat ederek Eşitlik (6.229)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ x[n] + (-1)^k x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right\} W_N^{kn} \qquad (6.230)$$

biçiminde ifade edilebilir. k çiftse, Eşitlik (6.230)'da $k = 2r$ alarak

$$X[2r] = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} p[n] W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n] W_{N/2}^{rn} \qquad r = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.231)$$

elde ederiz; burada Eşitlik (6.220) kullanılmıştır. Benzer şekilde, tek k için, Eşitlik (6.230)'da $k=2r+1$ alarak

$$X[2r+1] = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} q[n] W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n] W_{N/2}^{rn} \qquad r = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \quad (6.232)$$

elde ederiz. Eşitlik (6.231) ve (6.232), sırasıyla, $p[n]$ ve $q[n]$'nin $(N/2)$ noktalı AFD'sini gösterir. Böylece, Eşitlik (6.231) ve (6.232)

$$X[2k] = P[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X[2k+1] = Q[k] \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

biçiminde yazılabilir; burada

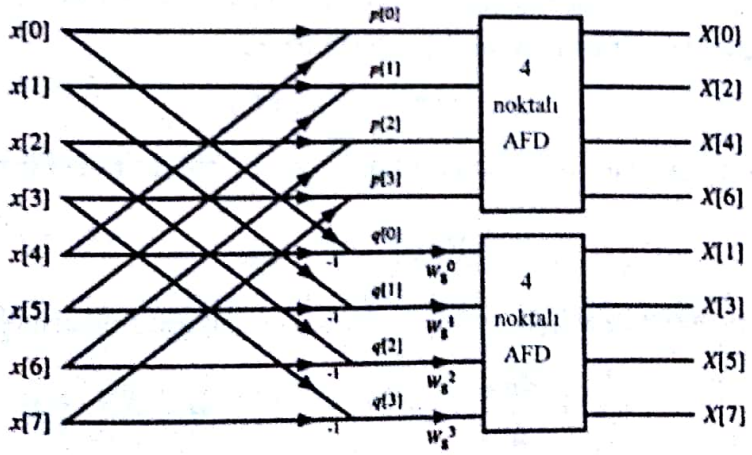
$$P[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n] W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$Q[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n] W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

ile verilmektedir.

(b) Eşitlik (6.227a) ve (6.227b)'yi kullanarak $X[k]$'yı belirlerken izlenen adımları gösteren akış diyagramı Şekil 6-39'da görülmektedir.

Eşitlik (6.227a) ve (6.227b)'yi kullanarak $X[k]$'nın hesaplanması yöntemine frekansta örnek seyreltmeli hızlı Fourier dönüşümü (HFD) algoritması denir.



Şekil 6-39 8 noktalı frekansta örnek seyreltmeli HFD algoritması akış diyagramı

6.59. Frekansta örnek seyreltmeli HFD tekniğini kullanarak, Problem 6.57'yi tekrar çözünüz.

Problem 6.57'de

$$x[n] = \{1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1\}$$

biçiminde verilmekteydi. Eşitlik (6.225a) ve (6.225b)'yi ve Problem 6.57'de elde edilen W_8^r değerlerini kullanarak

$$\begin{aligned} p[n] &= x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \\ &= \{(1-1), (1+1), (-1+1), (-1-1)\} = \{0, 2, 0, 2\} \\ q[n] &= \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right]\right) W_8^r \\ &= \{(1+1)W_8^0, (1-1)W_8^1, (-1-1)w_8^2, (-1+1)W_8^3\} \\ &= \{2, 0, j2, 0\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Daha sonra Eşitlik (6.206) ve (6.212)'yi kullanarak

$$\begin{bmatrix} P[0] \\ P[1] \\ P[2] \\ P[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j4 \\ 0 \\ j4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q[0] \\ Q[1] \\ Q[2] \\ Q[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ j2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j2 \\ 2-j2 \\ 2+j2 \\ 2-j2 \end{bmatrix}$$

elde ederiz, ve Eşitlik (6.226a) ve (6.226b)'den

$$\begin{aligned} X[0] &= P[0] = 0 & X[4] &= P[2] = 0 \\ X[1] &= Q[0] = 2 + j2 & X[5] &= Q[2] = 2 + j2 \\ X[2] &= P[1] = -j4 & X[6] &= P[3] = j4 \\ X[3] &= Q[1] = 2 - j2 & X[7] &= Q[3] = 2 - j2 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız; bu sonuç Problem 6.57'de elde edilen sonuçla aynıdır.

6.60. Fourier dönüşümü $X(\omega)$ olan nedensel sürekli zamanlı bant sınırlı $x(t)$ sinyalini düşünelim. T_s zaman bölgesindeki örnekleme aralığı olmak üzere

$$x[n] = T_s x(nT_s) \tag{6.233}$$

olsun. $\Delta\omega$ frekans çözünürlüğü olarak bilinen frekans bölgesindeki örnekleme aralığı olmak üzere

$$X[k] = X(k\,\Delta\omega) \tag{6.234}$$

olsun. T_1, $x(t)$'nin kayıt uzunluğu ve ω_M, $x(t)$'nin en yüksek frekansı olsun. Eğer

$$\frac{T_1}{T_s} = \frac{2\omega_M}{\Delta\omega} = N \qquad \text{ve} \qquad N \geq \frac{\omega_M T_1}{\pi} \tag{6.235}$$

koşulları sağlanıyorsa, $x[n]$ ve $X[k]$'nın N noktalı bir AFD çifti oluşturduğunu gösteriniz.

$t<0$ için $x(t)=0$ olduğundan, $x(t)$'nin Fourier dönüşümü $X(\omega)$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \qquad (6.236)$$

ile verilir [Eşitlik (5.31)]. T_1, $x(t)$'nin, $X(\omega)$'yı hesaplamak için gereken toplam kayıt süresi olsun. Bu durumda yukarıdaki entegral $t_n=n\,\Delta T$ ve $T_1=N\,\Delta t$ olmak üzere

$$X(\omega)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\,e^{-j\omega t_n}$$

şeklinde sonlu bir seri ile yaklaştırılabilir. Yukarıdaki ifadede $\omega=\omega_k$ alarak

$$X(\omega_k)=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\,e^{-j\omega_k t_n} \qquad (6.237)$$

elde ederiz. Daha sonra, $x(t)$'nin en yüksek frekansı ω_M olduğundan, $X(\omega)$'nın ters Fourier dönüşümü

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (6.238)$$

ile verilir [Eşitlik (5.32)]. $-\omega_M\le\omega\le\omega_M$ aralığını $\Delta\omega$ uzunluklu N (çift) parçaya bölerek yukarıdaki entegral

$$x(t)=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} X(\omega_k)\,e^{j\omega_k t}$$

ile yaklaştırılabilir; burada $2\,\omega_M=N\,\Delta\omega$ olmaktadır. Yukarıdaki ifadede $t=t_n$ alarak

$$x(t_n)=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} X(\omega_k)\,e^{j\omega_k t_n} \qquad (6.239)$$

elde ederiz. $x(t)$'nin en yüksek frekansı ω_M olduğundan, örnekleme teoremi gereğince (Problem 5.59), $x(t)$'yi

$$\frac{2\pi}{T_s}\ge 2\omega_M$$

koşulu sağlanacak şekilde örneklemeliyiz; burada T_s örnekleme aralığıdır. $T_s=\Delta t$ olduğundan, Δt'nin en büyük değerini seçerek (Nyquist aralığı)

$$\Delta t=\frac{\pi}{\omega_M}$$

ve

$$\omega_M=\frac{\pi}{\Delta t}=\frac{\pi N}{T_1} \qquad (6.240)$$

elde ederiz. Böylece, N

$$\frac{T_1}{T_s}=\frac{2\omega_M}{\Delta\omega}=N \qquad \text{ve} \qquad N\ge\frac{\omega_M T_1}{\pi} \qquad (6.241)$$

koşullarını sağlayan uygun bir çift tamsayıdır. Eşitlik (6.240)'tan frekans çözünürlüğü $\Delta\omega$

$$\Delta\omega=\frac{2\omega_M}{N}=\frac{2\pi N}{NT_1}=\frac{2\pi}{T_1} \qquad (6.242)$$

ile verilir. $t_n = n\Delta t$ ve $\omega_k = k\Delta\omega$ olsun. Bu durumda

$$t_n\omega_k = (n\Delta t)(k\Delta\omega) = nk\frac{T_1}{N}\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{N}nk \tag{6.243}$$

olur. Eşitlik (6.243)'ü, Eşitlik (6.237) ve (6.239)'da yerine koyarak

$$X(k\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t\, x(n\Delta t)\, e^{-j(2\pi/N)nk} \tag{6.244}$$

ve

$$x(n\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega)\, e^{j(2\pi/N)nk} \tag{6.245}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.245)'yi

$$x(n\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega)\, e^{j(2\pi/N)nk} + \sum_{k=-N/2}^{-1} X(k\Delta\omega)\, e^{j(2\pi/N)nk}\right]$$

biçiminde yeniden yazalım. Eşitlik (6.244)'ten $X(k\Delta\omega)$'nın k'ya göre N periyodu ile periyodik olduğunu görüyoruz. Böylece, yukarıdaki ifadede ikinci toplamdaki değişkeni $k = m - N$ ile değiştirerek

$$x(n\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega)\, e^{j(2\pi/N)nk} + \sum_{m=N/2}^{N-1} X(m\Delta\omega)\, e^{j(2\pi/N)nm}\right]$$

$$= \frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta\omega)\, e^{j(2\pi/N)nk} \tag{6.246}$$

elde ederiz. Eşitlik (6.246)'nın her iki tarafını Δt ile çarparak ve $\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi/N$ olduğuna dikkat ederek

$$x(n\Delta t)\,\Delta t = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta\omega)\, e^{j(2\pi/N)nk} \tag{6.247}$$

buluruz. Şimdi

$$x[n] = \Delta t\, x(n\Delta t) = T_s x(nT_s) \tag{6.248}$$

$$X[k] = X(k\Delta\omega) \tag{6.249}$$

tanımlarını yaparsak, Eşitlik (6.244) ve (6.247) bir AFD çiftine indirgenir, yani

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

olur.

6.61. (a) AFD kullanarak

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

ile verilen sürekli zamanlı sinyalin Fourier spektrumu $X(\omega)$'yı kestiriniz. $x(t)$'nin toplam kayıt süresinin $T_1 = 10$s ve $x(t)$'nin en yüksek frekansının $\omega_M = 100$ rad/s olduğunu varsayınız.

(b) $X[k]$, $x(t)$'nin örneklenmiş dizisinin AFD'si olsun. $X[0]$, $x[1]$, ve $X[10]$ değerlerini $X(0)$, $X(\Delta\omega)$ ve $X(10\Delta\omega)$ ile karşılaştırınız.

(a) Eşitlik (6.241)'den

$$N \geq \frac{\omega_M T_1}{\pi} = \frac{100(10)}{\pi} = 318.3$$

elde ederiz. Böylece, $N = 320$ seçerek

$$\Delta\omega = \tfrac{200}{320} = \tfrac{5}{8} = 0.625 \text{ rad}$$

$$\Delta t = \tfrac{10}{320} = \tfrac{1}{32} = 0.031 \text{ s}$$

ve

$$W_N = W_{320} = e^{-j(2\pi/230)}$$

buluruz. Bu durumda Eşitlik (6.244), (6.249) ve (1.92)'den

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t x(n\,\Delta t)\, e^{-j(2\pi/N)nk}$$

$$= \frac{1}{32} \sum_{n=0}^{319} e^{-n(0.031)} e^{-j(2\pi/320)nk} = \frac{1}{32} \frac{1 - e^{320(0.031)}}{1 - e^{-0.031} e^{-j(2\pi/320)k}}$$

$$= \frac{0.031}{[1 - 0.969\cos(k\pi/160)] + j0.969\sin(k\pi/160)} \qquad (6.250)$$

elde ederiz; bu $X(k\,\Delta\omega)$'nın kestirimidir.

(b) Eşitlik (6.250)'de $k = 0$, $k = 1$, ve $k = 10$ alarak

$$X[0] = \frac{0.031}{1 - 0.969} = 1$$

$$X[1] = \frac{0.031}{0.0312 + j0.019} = 0.855e^{-j0.547}$$

$$X[10] = \frac{0.031}{0.0496 - j0.189} = 0.159e^{-j1.314}$$

elde ederiz. Tablo 5-2'den

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

olduğunu görürüz ve buradan

$$X(0) = 1$$

$$X(\Delta\omega) = X(0.625) = \frac{1}{1 + j0.625} = 0.848e^{-j0.559}$$

$$X(10\,\Delta\omega) = X(6.25) = \frac{1}{1 + j6.25} = 0.158e^{-j1.412}$$

buluruz. $x(t)$ bant sınırlı olmamakla birlikte, belirtilen frekans aralığında $X[k]$'nın $X(\omega)$'nın son derece iyi bir yaklaşımı olduğu görülmektedir.

Ek Problemler

6.62. Aşağıdaki periyodik dizilerin her birinin ayrık Fourier serisini bulunuz:

(*a*) $x[n] = \cos(0{,}1\pi n)$

(*b*) $x[n] = \sin(0.1\pi n)$

(*c*) $x[n] = 2\cos(1.6\pi n) + \sin(2.4\pi n)$

Yanıt: (*a*) $x[n] = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j19\Omega_0 n}, \Omega_0 = 0.1\pi$

(*b*) $x[n] = \dfrac{1}{2j}e^{j\Omega_0 n} - \dfrac{1}{2j}e^{j19\Omega_0 n}, \Omega_0 = 0.1\pi$

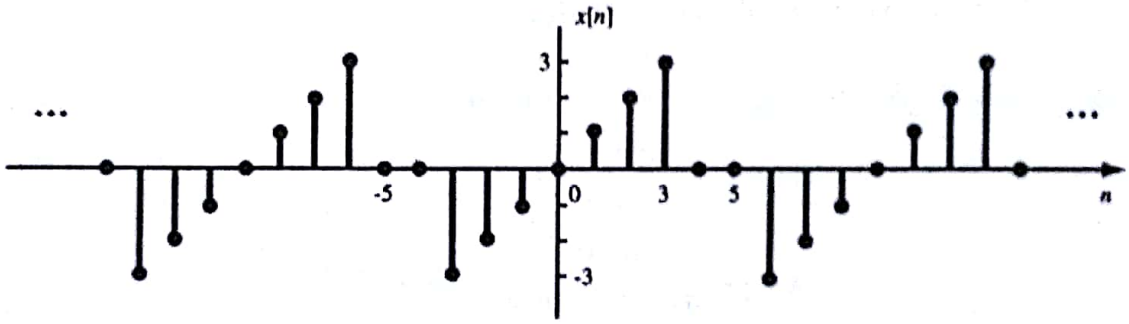
(*c*) $x[n] = (1 - j0.5)\,e^{j\Omega_0 n} + (1 + j0.5)\,e^{j4\Omega_0 n}, \Omega_0 = 0.4\pi$

6.63. Şekil 6-40'ta görülen $x[n]$ dizisi için ayrık Fourier serisini bulunuz.

Yanıt:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{8} c_k\, e^{j\Omega_0 k n}, \Omega_0 = \frac{2\pi}{9}$$

$$c_k = -j\frac{2}{9}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)k + 2\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)k + 3\sin\left(\frac{6\pi}{9}\right)k\right]$$



Şekil 6-40

6.64. Problem 6.3'te Şekil 6-7'de görülen periyodik $x[n]$ dizisinin ayrık Fourier serisinin trigonometrik biçimini bulunuz.

Yanıt: $x[n] = \dfrac{3}{2} - \cos\dfrac{\pi}{2}n - \sin\dfrac{\pi}{2}n - \dfrac{1}{2}\cos\pi n$

6.65. Aşağıdaki dizilerin her birinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

(*a*) $x[n] = a^{|n|}, |a| < 1$

(*b*) $x[n] = \sin(\Omega_0 n), |\Omega_0| < \pi$

(*c*) $x[n] = u[-n-1]$

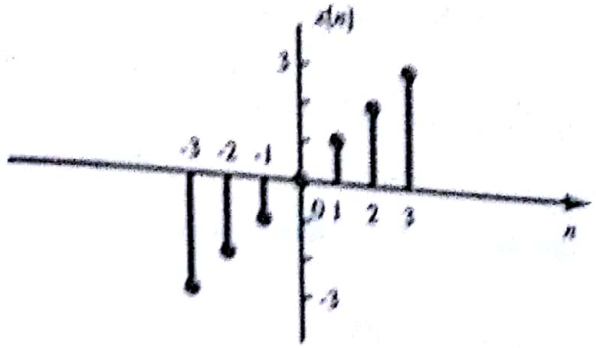
Yanıt: (*a*) $X(\Omega) = \dfrac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}$

(*b*) $X(\Omega) = -j\pi[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)], |\Omega|, |\Omega_0| \le \pi$

(*c*) $X(\Omega) = \pi\,\delta(\Omega) - \dfrac{1}{1 - e^{-j\Omega}}, |\Omega| \le \pi$

6.66. Şekil 6-41'de görülen $x[n]$ dizisinin Fourier dönüşümünü bulunuz.

Yanıt: $X(\Omega) = j2(\sin\Omega + 2\sin 2\Omega + 3\sin 3\Omega)$



Şekil 6-41

6.67. Aşağıdaki Fourier dönüşümlerinin her birinin ters Fourier dönüşümünü bulunuz

(*a*) $X(\Omega) = \cos(2\Omega)$

(*b*) $X(\Omega) = j\Omega$

Yanıt: (*a*) $x[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n+2]$

(*b*) $x[n] = \begin{cases} (-1)^n/n & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$

6.68. Aşağıda verilen $y[n]$ dizisini düşünelim.

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ çiftse} \\ 0 & n \text{ tekse} \end{cases}$$

$Y(\Omega)$ 'yı, $X(\Omega)$ cinsinden ifade ediniz.

Yanıt: $Y(\Omega) = \frac{1}{2}X(\Omega) + \frac{1}{2}X(\Omega - \pi)$

6.69. $x[n]$ dizisi

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & |n| > 2 \end{cases}$$

biçiminde verilsin.

(*a*) $y[n] = x[n]*x[n]$ ifadesini bulunuz.

(*b*) $y[n]$'nin Fourier dönüşümü $Y(\Omega)$ 'yı bulunuz.

Yanıt: (*a*) $y[n] = \begin{cases} 5(1 - |n|/5) & |n| \leq 5 \\ 0 & |n| > 5 \end{cases}$

(*b*) $Y(\Omega) = \left(\dfrac{\sin(2.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}\right)^2$

6.70. Ayrık zamanlı Fourier dönüşümü için Parseval teoremini [Eşitlik 6.66)], yani

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2\, d\Omega$$

eşitliğini kanıtlayınız.

İpucu: Problem 5.38'nin çözümüne benzer şekilde ilerleyiniz.

6.71. $x[n]$ ve $y[n]$, sırasıyla, sistemin girişi ve çıkışı olmak üzere, nedensel ayrık zamanlı bir DZD sistem

$$y[n] - \tfrac{1}{4}y[n-1] + \tfrac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

ile tanımlanmaktadır.

(a) Sistemin frekans tepkisi $H(\Omega)$'yı bulunuz.

(b) Sistemin dürtü tepkisi $h[n]$'yi bulunuz.

(c) Eğer $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ ise $y[n]$'yi bulunuz.

Yanıt: (a) $H(\Omega) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$

(b) $h[n] = [2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n]u[n]$

(c) $y[n] = [(\frac{1}{4})^n + n(\frac{1}{2})^{n-1}]u[n]$

6.72. Frekans tepkisi

$$H(\Omega) = \mathrm{Re}\{H(\Omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{H(\Omega)\} = A(\Omega) + jB(\Omega)$$

ile verilen nedensel ayrık zamanlı bir DZD sistemi düşünelim.

(a) Sistemin dürtü tepkisi $h[n]$'nin yalnızca $A(\Omega)$ veya $B(\Omega)$ cinsinden elde edilebileceğini gösteriniz.

(b) Eğer

$$\mathrm{Re}\{H(\Omega)\} = A(\Omega) = 1 + \cos\Omega$$

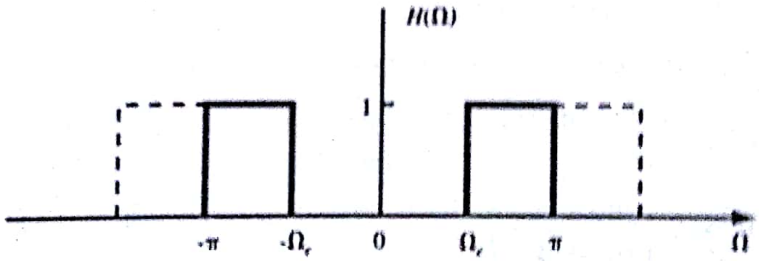
koşulu sağlanıyorsa $H(\Omega)$ ve $h[n]$'yi bulunuz.

(a) *İpucu:* Problem 5.49'a benzer şekilde ilerleyiniz.

(b) *Yanıt:* $H(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega}$, $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$

6.73. Şekil 6-42'de görülen Ω_c kesim frekanslı ($0<\Omega_c<\pi$) ideal ayrık zamanlı HPF'nin dürtü tepkisi $h[n]$'yi bulunuz.

Yanıt: $h[n] = \delta[n] - \dfrac{\sin\Omega_c n}{\pi n}$



Şekil 6-42

6.74. Eğer $H_{LPF}(z)$ ayrık zamanlı alçak geçirgen bir süzgecin sistem fonksiyonu ise, sistem fonksiyonu $H(z)$, $H(z)=H_{LPF}(-z)$ ile verilen ayrık zamanlı sistemin bir yüksek geçirgen süzgeç olduğunu gösteriniz.

İpucu: Problem 6.37'deki (6.156) eşitliğini kullanınız.

6.75. Sistem fonksiyonu

$$H_c(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

ile verilen sürekli zamanlı bir DZD sistemi düşünelim. Değişmez dürtü yöntemi kullanılarak bu sistemden tasarlanan ayrık zamanlı sistemin frekans tepkisi $H_d(\Omega)$'yı bulunuz.

Yanıt: $H(\Omega) = T_s e^{-T_s} \dfrac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-T_s}e^{-j\Omega})^2}$ burada T_s, $h_c(t)$'nin örnekleme aralığıdır.

6.76. Sistem fonksiyonu

$$H_c(s) = \frac{1}{s+1}$$

ile verilen sürekli zamanlı bir DZD sistemi düşünelim. Değişmez basamak tepkisi yöntemi, yani

$$s_d[n] = s_c(nT_s)$$

eşitliği kullanılarak bu sistemden tasarlanan ayrık zamanlı sistemin frekans tepkisi $H_d(\Omega)$'yı bulunuz; burada $s_c(t)$ ve $s_d[n]$, sırasıyla sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sistemlerin birim basamak tepkileridir.

İpucu: $h_d[n] = s_d[n] - s_d[n-1]$.

Yanıt: $H_d(\Omega) = \dfrac{(1-e^{-T_s})\,e^{-j\Omega}}{1-e^{-T_s}e^{-j\Omega}}$

6.77. $H_p(z)$, ayrık zamanlı prototip alçak geçirgen bir süzgecin sistem fonksiyonu olsun. Sistem fonksiyonu $H(z)$, α gerçel olmak üzere, $H_p(z)$'de z yerine $(z-\alpha)/(1-\alpha z)$ konularak elde edilen yeni bir ayrık zamanlı alçak geçirgen süzgeci düşünelim.

(a) Aşağıdakileri gösteriniz:

$$H_p(z)|_{z=1+j_0} = H(z)|_{z=1+j_0}$$

$$H_p(z)|_{z=-1+j_0} = H(z)|_{z=-1+j_0}$$

(b) Ω_{p1} ve Ω_1 $(< \pi)$, sırasıyla, prototip alçak geçirgen süzgecin ve yeni alçak geçirgen süzgecin belirtilen frekansları olsunlar. Bu durumda

olduğunu gösteriniz.

İpucu: $e^{j\Omega_{p1}} = \dfrac{e^{j\Omega_1}-\alpha}{1-\alpha e^{j\Omega_1}}$ alınız ve bu eşitlikten α'yı çekiniz.

6.78. Sistem fonksiyonu

$$H_p(z) = 0.5(1+z^{-1})$$

ile verilen ayrık zamanlı prototip alçak geçirgen süzgeci düşünelim.

(a) Bu prototip süzgecin 3 dB bant genişliğini bulunuz.

(b) Bu prototip süzgeci kullanarak, 3 dB bant genişliği $2\pi/3$ olacak şekilde yeni bir ayrık zamanlı alçak geçirgen süzgeç tasarlayınız.

İpucu: Problem 6.77'nin sonucunu kullanınız.

Yanıt: (*a*) $\Omega_{3\,db} = \dfrac{\pi}{2}$

(*b*) $H(z) = 0.634\dfrac{1+z^{-1}}{1+0.268z^{-1}}$

6.79. Aşağıda verilen dizinin AFD'sini bulunuz:

$$x[n] = a^n \qquad 0 \le n \le N-1$$

Yanıt: $X[k] = \dfrac{1-a^N}{1-ae^{-j(2\pi/N)k}} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$

6.80. Aşağıda verilen dairesel konvolüsyonu bulunuz:

$$y[n] = x[n] \circledast h[n]$$

Burada $x[n]$ ve $h[n]$

$$x[n] = u[n] - u[n-4]$$
$$h[n] = u[n] - u[n-3]$$

olarak verilmektedir.

(*a*) $N = 4$ alınız.

(*b*) $N = 8$ alınız.

Yanıt: (*a*) $y[n] = \{3, 3, 3, 3\}$

(*b*) $y[n] = \{1, 2, 3, 3, 2, 1, 0, 0\}$

6.81. Problem 6.80'de verilen $x[n]$ ve $h[n]$ dizilerini düşünelim.

(*a*) $x[n]$, $h[n]$, ve $y[n]$'nin 4 noktalı AFD'lerini bulunuz.

(*b*) $Y[k]$'nın TAFD'sini alarak $y[n]$'yi bulunuz.

Yanıt: (*a*) $[X[0], X[1], X[2], X[3]] = [4, 0, 0, 0]$

$[H[0], H[1], H[2], H[3]] = [3, -j, 1, j]$

$[Y[0], Y[1], Y[2], Y[3]] = [12, 0, 0, 0]$

(*b*) $y[n] = \{3, 3, 3, 3\}$

6.82. Kesim frekansı 10kHz olan alçak geçirgen bir süzgeç ile önsüzgeçlenen sürekli zamanlı bir $x(t)$ sinyalini düşünelim. $x(t)$'nin spektrumu N noktalı AFD ile kestirilmektedir. İstenen frekans çözünürlüğü 0.1 Hz'tir. Gerekli N değerini (2'nin bir kuvveti olduğunu varsayınız) ve gerekli veri uzunluğu T_1 değerini bulunuz.

Yanıt: $N = 2^{18}$ ve $T_1 = 13.1072$ s