МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»

ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Лабораторная работа 4

по курсу «**Теория вероятностей и математическая статистика, часть 2**»

ВАРИАНТ 67

Тема: **«Проверка статистических гипотез о математическом ожидании и дисперсии нормально распределённых случайных величин»**

Выполнил:
Студент 3-го курса
Мусатов Д. Ю

Группа: КМБО-03-18

МОСКВА – 2021

Содержание

1 Задания

1.1 Задание 4-1.

В соответствии с номером варианта взять из файла $D1\_2021$ выборку $\{x_1, ..., x_N\}$, а из файла $D1.1\_2021$ взять значения a и σ.

Следуя Указанию:

Проверить гипотезу $\mathbf{H}_0 = \{M\varepsilon = a\}$ о равенстве математического ожидания наблюдаемой случайной величины ε значению a при известной дисперсии σ^2 при конкурирующей гипотезе $\mathbf{H}_1 = \{M\varepsilon = a + 1\}$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

1.2 Задание 4-2.

Из файла $D3\_2021$ в соответствии с номером варианта взять двумерный массив $\{u_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$, столбцами которого являются выборки одинакового объёма N трёх наблюдаемых нормально распределенных случайных величин.

Следуя Указанию:

Проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий с использованием распределения Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,05$ для всех трёх пар наблюдаемых нормально распределённых случайных величин, выборки которых находятся в столбцах двумерного массива $\{u_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$.

1.3 Задание 4-3.

Из файла $D3\_2021$ в соответствии с номером варианта взять двумерный массив $\{u_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$, столбцами которого являются выборки одинакового объёма N трёх наблюдаемых нормально распределенных случайных величин.

Следуя Указанию:

Проверить с использованием однофакторного дисперсионного анализа гипотезу о равенстве математических ожиданий при уровне значимости $0,05$ трёх наблюдаемых нормально распределённых случайных величин, выборки которых находятся в столбцах двумерного массива $\{u_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$.

1.4 Задание 4-4.

Из файла $D3\_2021$ в соответствии с номером варианта взять двумерный массив $\{u_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$, столбцами которого являются выборки одинакового объёма N трёх наблюдаемых нормально распределенных случайных величин.

Следуя Указанию:

Проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий наблюдаемых случайных величин при уровне значимости $0,05$ с помощью встроенных функций.

1.5 Задание 4-5.

Из файла $D3\_2021$ в соответствии с номером варианта взять двумерный массив $\{u_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$, столбцами которого являются выборки одинакового объёма N трёх наблюдаемых нормально распределенных случайных величин.

Следуя Указанию:

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий каждой пары случайных величин, выборки которых находятся в столбцах массива $U = \{u_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$ при уровне значимости $0,05$.

1.6 Задание 4-6.

Из файла $D3\_2021$ в соответствии с номером варианта взять двумерный массив $\{u_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N,\ 1 \leqslant j \leqslant 3\}$, столбцами которого являются выборки одинакового объёма N трёх наблюдаемых нормально распределенных случайных величин.

Следуя Указанию:

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий наблюдаемых случайных величин при уровне значимости $0,05$ с помощью встроенных функций.

2 Краткие теоретические сведения

2.1 Нормальное распределение(a, σ^2), $\sigma > 0$

Плотность распределения: $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\sigma} \cdot \varphi_0\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\dfrac{x^2}{2}}$

Функция распределения: $F_\xi(x) = \varPhi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$, где $\varPhi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt$

Математическое ожидание: $M\varepsilon = a$

Дисперсия: $D\varepsilon = \sigma^2$

Среднее квадратическое отклонение: σ

Характеристическая функция $g_\varepsilon(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Если для всех $X_i \sim N(a, \sigma^2)$ и X_i независимы, то $\overline{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i \sim N\left(a, \dfrac{\sigma^2}{N}\right)$

или $\dfrac{\overline{\mathbf{X}} - a}{\sigma}\sqrt{N} \sim (0, 1)$.

Общая схема проверки:
Расчитываются:

1) $\overline{\mu_1} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{j=1}^{N} x_j$;

2) $C_\alpha = a + \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\Phi^{-1}(1-\alpha)$

где $\Phi(x)$ - функция распределения стандартного нормального закона.

Если $\overline{\mu_1} \leqslant C_\alpha$, то при уровне α принимается основная гипотеха $\mathbf{H}_0$.

Если $\overline{\mu_1} > C_\alpha$, то при уровне α принимается основная гипотеза $\mathbf{H}_1$.

2.2 Распределение Стьюдента с n степенями свободы t(n)

Плотность распределения: $t(n)\quad f_\varepsilon(x) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$

Математическое ожидание: $M\varepsilon = 0$ при $n \geqslant 2$

Дисперсия: $D\varepsilon = \dfrac{n}{n-2}$ при $n \geqslant 3$

Если $\varepsilon \sim N(0,1)$ и $\eta \sim \chi^2(N)$ независимы, то $\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{\eta}} \sim t(N)$

Если $X_i \sim N(0,1)$ $(i = 0, 1, ..., N)$ и X_i независимы, то $\dfrac{X_0}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}^2}}} \sim t(N)$

где $\overline{\mathbf{X}^2} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2$.

Если $X_i \sim N(a,\sigma^2)$ $(i = 1, ..., N)$ и X_i независимы, то $\dfrac{\overline{\mathbf{X}}-a}{S}\sqrt{N} \sim t(N-1)$,

где $\overline{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$, $S = \sqrt{S^2}$, $S^2 = \dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{\mathbf{X}}\right)^2$

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий

с использованием распределения Стьюдента

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух случайных величин по выборкам $\{x_1, ..., x_N\}$ и $\{y_1, ..., y_M\}$ с использованием распределения Стьюдента с числом степеней свободы $N+M-2$ проводится следующим образом.

Рассчитывается значение критерия $T_{N,M}$:

$$S_x^2(N-1) = N(\overline{x^2} - \overline{x}^2),\ S_y^2(M-1) = M(\overline{y^2} - \overline{y}^2),$$

$$T_{N,M} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{S_x^2(N-1) + S_y^2(M-1)}}\sqrt{\frac{MN(N+M-2)}{N+M}}.$$

Если гипотеза о равенстве математических ожиданий нормально распределенных случайных величин X и Y верна, то $T_{N,M}$ имеет распределение $t(N+M-2)$ –

распределение Стьюдента с числом степеней свободы $N+M-2$.

По уровню значимости α находится критическое значение $t_{кр,\alpha}(N+M-2)$ распределения Стьюдента с числом степеней свободы $N+M-2$.

Вычисленное значение $T_{N,M}$ сравнивается с критическим значением двустороннего критерия $t_{кр,\alpha}(N+M-2)$: если $|T_{N,M}| \leq t_{кр,\alpha}(N+M-2)$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий принимается.

В данной выборке N=M

Если $|T_{N,N}| \leq t_{кр,\alpha}(2N-2)$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий не противоречит экспериментальным данным (верна) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Если $|T_{N,N}| > t_{кр,\alpha}(2N-2)$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий противоречит экспериментальным данным (неверна) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

2.3 Распределение Фишера-Снедекора $F(k_1, k_2)$ (F-распределение с (k_1, k_2) степенями свободы)

Плотность распределения:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right) \cdot k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k_1}{2}-1} \cdot (k_1 x + k_2)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, \quad x > 0 \end{cases}$$

Математическое ожидание: $M\varepsilon = \dfrac{k_2}{k_2-2}$ при $k_2 \geqslant 3$,

Дисперсия $D\varepsilon = \dfrac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)}$ при $k_2 \geqslant 5$.

Если для всех $\varepsilon \sim \chi^2(k_1)$ и $\eta \sim \chi^2(k_2)$ независимы, то $\dfrac{\frac{\varepsilon}{k_1}}{\frac{\eta}{k_2}} \sim F(k_1, k_2)$.

Если выборки $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, ..., Y_M)$ независимы,

$X_i \sim N(a_1, \sigma^2)$ и X_i независимы, $Y_i \sim N(a_2, \sigma^2)$ и Y_i независимы, то верны свойства:

1) $\dfrac{\overline{\mathbf{X}^2}}{\overline{\mathbf{Y}^2}} \sim F(N, M)$, где $\overline{\mathbf{X}^2} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2$, $\overline{\mathbf{Y}^2} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{M} Y_i^2$;

2) $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(N-1, M-1)$, где $S_1^2 = \dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}(X_i - \overline{\mathbf{X}})^2 = \dfrac{N}{N-1}(\overline{\mathbf{X}^2} - (\overline{\mathbf{X}})^2)$,

$S_2^2 = \dfrac{1}{M-1}\sum\limits_{i=1}^{M}(Y_i - \overline{\mathbf{Y}})^2 = \dfrac{M}{M-1}(\overline{\mathbf{Y}^2} - (\overline{\mathbf{Y}})^2)$.

Проверка с использованием однофакторного дисперсионного анализа гипотезы о равенстве математических ожиданий трёх случайных величин по выборкам, являющимся столбцами массива $U = \{u_{i,j} \mid 1 \le i \le N, 1 \le j \le m\}$, $m = 3$, проводится по следующей схеме.

Расчет общего среднего значения и групповых средних

$$\overline{u} = \frac{1}{Nm}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{N} u_{ij} \ , \ \overline{u}_{.j} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_{ij}, \ j = 1, ..., m.$$

Расчет общей суммы квадратов отклонений $S_{общ} = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{N}(u_{ij} - \overline{u})^2$.

Расчет факторной суммы квадратов отклонений $S_{факт} = N\sum\limits_{j=1}^{m}(u_{.j} - \overline{u})^2$.

Расчет остаточной суммы квадратов отклонений

$$S_{ост} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}(u_{ij} - u_{.j})^2 = S_{общ} - S_{факт}.$$

Расчет значения критерия $F_{N,m}$:

$$F_{N,m} = \frac{s^2_{факт}}{s^2_{ост}}, \text{ где } s^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{m-1}, \ s^2_{ост} = \frac{S_{ост}}{m(N-1)}.$$

Если гипотеза о равенстве математических ожиданий m нормально распределенных случайных величин верна, то $F_{N,m}$ имеет распределение Фишера-Снедекора с числом степеней свободы (k_1, k_2), $k_1 = m-1$, $k_2 = m(N-1)$.

Нужно сравнить вычисленное значение $F_{N,m}$ с критическим значением z_α при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и сделать вывод о справедливости гипотезы. Критическое значение $z_\alpha = F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ можно найти с помощью функции языка программирования (для Octave оно равно finv(x,m,n), где x=1-α =0,95; m=k_1; n=k_2).

Если $F_{N,m} \le z_{\alpha}$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий трёх случайных величин, выборки которых находятся в столбцах массива $U = \{u_{i,j} \mid 1 \le i \le N, 1 \le j \le 3\}$, не противоречит экспериментальным данным (может быть принята) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Если $F_{N,m} > z_{\alpha}$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий трёх случайных величин противоречит экспериментальным данным (не может быть принята) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

2.4 Функция языка применяемые в программе

$scipy.stats.norm.ppf(x)$ - обратная функция распределения стандартного нормального закона.

$$x = 1 - \alpha$$

$scipy.stats.t.ppf(x, n)$ - функция для нахождения критического значение распределения Стьюдента

$$x = 1 - \frac{\alpha}{2} \qquad \text{n=N+M-2}$$

$scipy.stats.f.isf(alpha, k_1, k_2)$ - функция для нахождения критического значение распределения Фишера-Снедекора

$$k_1 = m - 1 \qquad k_2 = m * (N - 1)$$

$scipy.stats.f\_oneway(X, Y, Z)$ - функция, проводящая однофакторный дисперсионный анализ.

$scipy.stats.ttest\_ind(x, y, equal\_var)$ - функция, возвращая значение t-критерия Стьюдента, если equal_var=True(по умолчанию), значение t-критерия Уэлча, если equal_var=False.

$scipy.stats.bartlett(X, Y, Z)$ - функция, проверяет гипотезу о равенстве выборочных дисперсий тестом Барлетта.

$scipy.stats.levene(x, y)$ - функция, проверяет гипотезу о равенстве выборочных дисперсий тестом Левена.

3 Результаты расчётов

В программе расчёта был использован язык программирования Python. Работа осуществлялась в среде Jupyter Notebook.

Вариант №67 $a = 0.33$ $\sigma = 0.866$ $\sigma^2 = 0.749956$

3.1 Задание 4-1

Исходная выборка

0,57449	0,03156	-0,37043	0,17178	1,44855	-0,32346	-0,29277	0,23479	-0,75252	-0,10496
1,77142	0,56115	1,4909	1,49796	0,17993	0,7799	1,32721	0,60618	0,00642	0,02607
0,97563	0,06541	2,1449	0,41022	0,04321	0,27108	-0,00354	-0,34842	0,72862	1,55716
-0,77904	0,57806	-0,33951	-0,47123	0,07041	0,70973	0,25956	-0,95821	-0,71237	1,43153
0,6307	0,44395	-0,68234	-0,32134	0,12111	1,94839	0,56118	0,43551	0,21878	-1,24623
0,25832	0,60141	1,41768	0,52711	1,472	0,10061	0,38725	1,70926	0,91447	0,80336
-0,04137	-0,93922	-0,26222	-1,81064	1,86124	0,70078	1,19596	-0,02966	0,40458	1,3365
0,80947	-0,34906	1,65231	1,661	0,20538	0,2126	0,30023	0,15962	2,2281	-0,15093
-0,37135	-1,99111	0,42467	-0,38438	-0,47199	-0,57173	-0,88295	1,27701	-1,11478	-0,17734
-0,75236	-0,90651	2,17084	-0,25015	0,29631	0,98042	-0,55342	1,35258	-1,10275	0,34195
-0,45308	1,73779	0,65766	1,18183	-0,38429	-0,03274	0,06211	1,92864	0,17461	0,71345
-0,11517	0,87593	-1,04093	-0,27874	0,60467	0,17479	-0,72073	0,61575	0,18401	0,33681
-1,06277	-0,5331	-0,24172	0,33456	0,89634	0,50277	0,67348	0,32683	-0,125	-0,20868
0,24373	0,89785	0,38912	-0,59241	-0,24913	1,10598	2,42994	-0,65016	2,095	0,59435
0,78888	-0,14191	-1,10848	0,07334	1,7372	0,0085	0,93942	1,06237	-0,50819	0,77735
1,00513	1,85915	0,65868	-0,14702	0,77537	-0,70454	1,29008	-0,54021	1,15592	1,24858
0,88847	0,42821	-0,52983	1,38144	1,18535	0,70942	0,90209	0,67157	-0,53932	-0,45475
0,84618	1,09132	1,89393	2,04818	0,3525	0,42235	0,12583	-1,29217	-0,53414	1,13713
-0,17522	0,43283	-0,50829	-1,2331	-0,49711	-0,08304	0,39196	0,50895	1,34122	0,2668
0,62106	-0,48537	-0,06912	1,15618	-0,09977	-1,19084	1,55921	2,0015	0,69147	-1,50157

Упорядоченная выборка

-1,99111	-1,81064	-1,50157	-1,29217	-1,24623	-1,2331	-1,19084	-1,11478	-1,10848	-1,10275
-1,06277	-1,04093	-0,95821	-0,93922	-0,90651	-0,88295	-0,77904	-0,75252	-0,75236	-0,72073
-0,71237	-0,70454	-0,68234	-0,65016	-0,59241	-0,57173	-0,55342	-0,54021	-0,53932	-0,53414
-0,5331	-0,52983	-0,50829	-0,50819	-0,49711	-0,48537	-0,47199	-0,47123	-0,45475	-0,45308
-0,38438	-0,38429	-0,37135	-0,37043	-0,34906	-0,34842	-0,33951	-0,32346	-0,32134	-0,29277
-0,27874	-0,26222	-0,25015	-0,24913	-0,24172	-0,20868	-0,17734	-0,17522	-0,15093	-0,14702
-0,14191	-0,125	-0,11517	-0,10496	-0,09977	-0,08304	-0,06912	-0,04137	-0,03274	-0,02966
-0,00354	0,00642	0,0085	0,02607	0,03156	0,04321	0,06211	0,06541	0,07041	0,07334
0,10061	0,12111	0,12583	0,15962	0,17178	0,17461	0,17479	0,17993	0,18401	0,20538
0,2126	0,21878	0,23479	0,24373	0,25832	0,25956	0,2668	0,27108	0,29631	0,30023
0,32683	0,33456	0,33681	0,34195	0,3525	0,38725	0,38912	0,39196	0,40458	0,41022
0,42235	0,42467	0,42821	0,43283	0,43551	0,44395	0,50277	0,50895	0,52711	0,56115
0,56118	0,57449	0,57806	0,59435	0,60141	0,60467	0,60618	0,61575	0,62106	0,6307
0,65766	0,65868	0,67157	0,67348	0,69147	0,70078	0,70942	0,70973	0,71345	0,72862
0,77537	0,77735	0,7799	0,78888	0,80336	0,80947	0,84618	0,87593	0,88847	0,89634
0,89785	0,90209	0,91447	0,93942	0,97563	0,98042	1,00513	1,06237	1,09132	1,10598
1,13713	1,15592	1,15618	1,18183	1,18535	1,19596	1,24858	1,27701	1,29008	1,32721
1,3365	1,34122	1,35258	1,38144	1,41768	1,43153	1,44855	1,472	1,4909	1,49796
1,55716	1,55921	1,65231	1,661	1,70926	1,7372	1,73779	1,77142	1,85915	1,86124
1,89393	1,92864	1,94839	2,0015	2,04818	2,095	2,1449	2,17084	2,2281	2,42994

$$\overline{\mu_1} = 0.34198 \qquad \alpha = 0.05 \qquad C_\alpha = 0.43072$$

3.2 Задание 4-2

Вариант №67

Исходный массив

-6,54904	-5,15432	-8,48788
-4,3748	-14,48273	-3,11196
-4,23102	-10,30817	-5,56135
-4,11006	-7,83343	-4,27921
-3,91399	-0,58401	-6,21715
-5,66094	-7,16446	-4,48036
-2,58886	-8,65025	-12,4294
-2,01304	-6,04245	-2,44876
-4,09868	-8,70021	-6,49921
-5,03011	-11,94866	-2,95046
-3,71262	-9,31894	-8,65657
-7,85802	-2,06919	-1,83661
-7,02994	-7,60675	-3,12774
-8,37713	-7,59884	-2,26872
-6,55112	-6,66361	-2,26019
-1,80857	-5,58101	-3,51741
-4,5738	-8,67629	-4,57958
-4,39857	-4,39008	-7,25398
-2,42637	-3,45603	-6,30885
-8,22516	-4,60334	-2,80343

Столбцы	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x^2}$	$\overline{y^2}$	S_x^2	S_y^2	$T_{N,N}$
(1,2)	-4.87659	-7.04164	27.60841	59.76882	4.0287	10.72016	2.52118
(1,3)	-4.87659	-4.95394	27.60841	31.655	4.0287	7.48786	0.10193
(2,3)	-7.04164	-4.95394	59.76882	31.655	10.72016	7.48786	-2.18801

3.3 Задание 4-3

Вариант №67

Исходный массив

-6,54904	-5,15432	-8,48788
-4,3748	-14,48273	-3,11196
-4,23102	-10,30817	-5,56135
-4,11006	-7,83343	-4,27921
-3,91399	-0,58401	-6,21715
-5,66094	-7,16446	-4,48036
-2,58886	-8,65025	-12,4294
-2,01304	-6,04245	-2,44876
-4,09868	-8,70021	-6,49921
-5,03011	-11,94866	-2,95046
-3,71262	-9,31894	-8,65657
-7,85802	-2,06919	-1,83661
-7,02994	-7,60675	-3,12774
-8,37713	-7,59884	-2,26872
-6,55112	-6,66361	-2,26019
-1,80857	-5,58101	-3,51741
-4,5738	-8,67629	-4,57958
-4,39857	-4,39008	-7,25398
-2,42637	-3,45603	-6,30885
-8,22516	-4,60334	-2,80343

$S_{\text{общ}}$	$S_{\text{факт}}$	$S_{\text{ост}}$	$s^2_{\text{факт}}$	$s^2_{\text{ост}}$	k_1	k_2	$F_{N,m}$
482.84359	10.08343	472.76016	5.04171	8.29404	2	57	0.60787

3.4 Задание 4-4

Вариант №67

Исходный массив

-6,54904	-5,15432	-8,48788
-4,3748	-14,48273	-3,11196
-4,23102	-10,30817	-5,56135
-4,11006	-7,83343	-4,27921
-3,91399	-0,58401	-6,21715
-5,66094	-7,16446	-4,48036
-2,58886	-8,65025	-12,4294
-2,01304	-6,04245	-2,44876
-4,09868	-8,70021	-6,49921
-5,03011	-11,94866	-2,95046
-3,71262	-9,31894	-8,65657
-7,85802	-2,06919	-1,83661
-7,02994	-7,60675	-3,12774
-8,37713	-7,59884	-2,26872
-6,55112	-6,66361	-2,26019
-1,80857	-5,58101	-3,51741
-4,5738	-8,67629	-4,57958
-4,39857	-4,39008	-7,25398
-2,42637	-3,45603	-6,30885
-8,22516	-4,60334	-2,80343

$$pval\ [\ f\_oneway\ ] = 0.02226$$

Столбцы	$pval\ [\ Student's\ ]$
(1,2)	0.01601
(1,3)	0.91935
(2,3)	0.03489

Столбцы	$pval\ [\ Welch\ ]$
(1,2)	0.01696
(1,3)	0.9194
(2,3)	0.03509

3.5 Задание 4-5

Вариант №67

Исходный массив

-6,54904	-5,15432	-8,48788
-4,3748	-14,48273	-3,11196
-4,23102	-10,30817	-5,56135
-4,11006	-7,83343	-4,27921
-3,91399	-0,58401	-6,21715
-5,66094	-7,16446	-4,48036
-2,58886	-8,65025	-12,4294
-2,01304	-6,04245	-2,44876
-4,09868	-8,70021	-6,49921
-5,03011	-11,94866	-2,95046
-3,71262	-9,31894	-8,65657
-7,85802	-2,06919	-1,83661
-7,02994	-7,60675	-3,12774
-8,37713	-7,59884	-2,26872
-6,55112	-6,66361	-2,26019
-1,80857	-5,58101	-3,51741
-4,5738	-8,67629	-4,57958
-4,39857	-4,39008	-7,25398
-2,42637	-3,45603	-6,30885
-8,22516	-4,60334	-2,80343

Столбцы	S_1^2	S_2^2	k_1	k_2	$F_{N,M}$
(1,2)	10.72016	4.0287	19	19	2.66095
(1,3)	7.48786	4.0287	19	19	1.85863
(2,3)	10.72016	7.48786	19	19	1.43167

3.6 Задание 4-6

Вариант №67

Исходный массив

-6,54904	-5,15432	-8,48788
-4,3748	-14,48273	-3,11196
-4,23102	-10,30817	-5,56135
-4,11006	-7,83343	-4,27921
-3,91399	-0,58401	-6,21715
-5,66094	-7,16446	-4,48036
-2,58886	-8,65025	-12,4294
-2,01304	-6,04245	-2,44876
-4,09868	-8,70021	-6,49921
-5,03011	-11,94866	-2,95046
-3,71262	-9,31894	-8,65657
-7,85802	-2,06919	-1,83661
-7,02994	-7,60675	-3,12774
-8,37713	-7,59884	-2,26872
-6,55112	-6,66361	-2,26019
-1,80857	-5,58101	-3,51741
-4,5738	-8,67629	-4,57958
-4,39857	-4,39008	-7,25398
-2,42637	-3,45603	-6,30885
-8,22516	-4,60334	-2,80343

$pval\ [\ scipy.stats.bartlett\ ] = 0.11764$

Столбцы	$pval\ [\ scipy.stats.levene\ ]$
(1,2)	0.10521
(1,3)	0.28178
(2,3)	0.54512

4 Анализ результатов и выводы

4.1 Задание 4-1

$\overline{\mu_1}$	α	C_α	Принятая гипотеза
0.34198	0.05	0.43072	$\mathbf{H}_0$

4.2 Задание 4-2

Столбцы	$\lvert T_{N,N}\rvert$	$t_{\text{кр},\alpha}$	Вывод
(1,2)	2.52118	2.02439	**Неверна**
(1,3)	0.10193	2.02439	**Верна**
(2,3)	2.18802	2.02439	**Неверна**

4.3 Задание 4-3

$F_{N,m}$	α	$F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$	Вывод
0.60787	0.05	3.15884	**Верна**

4.4 Задание 4-4

$pval\ [\ f\_oneway\ ]$	α	Вывод
0.02226	0.05	**Противоречит**

Столбцы	$pval\ [\ Student's\ ]$	α	Вывод
(1,2)	0.01601	0.05	**Неверна**
(1,3)	0.91935	0.05	**Верна**
(2,3)	0.03489	0.05	**Неверна**

Столбцы	$pval\ [\ Welch\ ]$	α	Вывод
(1,2)	0.01696	0.05	**Неверна**
(1,3)	0.9194	0.05	**Верна**
(2,3)	0.03509	0.05	**Неверна**

4.5 Задание 4-5

Столбцы	$F_{N,m}$	$F_{\text{кр}}\left(\frac{\alpha}{2}, k_1, k_2\right)$	Вывод
(1,2)	2.66095	2.52645	**Противоречит**
(1,3)	1.85863	2.52645	**Не противоречит**
(2,3)	1.43167	2.52645	**Не противоречит**

4.6 Задание 4-6

$pval$ [$scipy.stats.bartlett$]	α	Вывод
0.11764	0.05	**Не противоречит**

Столбцы	$pval$ [$scipy.stats.levene$]	α	Вывод
(1,2)	0.10521	0.05	**Верна**
(1,3)	0.28178	0.05	**Верна**
(2,3)	0.54512	0.05	**Верна**

5 Список использованной литературы

1. Математическая статистика [Электронный ресурс]: метод. указания по выполнению лаб. работ / А.А. Лобузов — М.: МИРЭА, 2017.

2. Боровков А. А. Математическая статистика. — СПб.: Лань, 2010.-704 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Юрайт, 2013. — 479 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Юрайт, 2013. — 404 с.

5. Емельянов Г.В.Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. — СПб.: Лань, 2007. — 336 с.

6. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Введение в математическую статистику. — М.: Изд-во ЛКИ, 2010. — 599 с.

7. Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачам. Учебное пособие — М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 232 с.

8. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика: Для инженеров и научных работников — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 816 с.

9. Монсик В.Б., Скрынников А. А. Вероятность и статистика.— М. : БИНОМ, 2015 — 384 с.

10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: Учеб. пособие для вузов / Под ред. А. А. Свешникова. — СПб.: Лань, 2012. — 472 с.

11. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам: учеб. пособие для вузов. — М.: Айрис-пресс, 2013. — 288 с.

12. Ramachandran Kandethody M., Tsokos Chris P. Mathematical Statistics with Applications in R. — N-Y.: Academic Press, 2009. — 826 p.

13. Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математическая статистика: Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad:Учеб. пособие для вузов — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 528 с.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math
import plotly.graph_objects as go
import copy
import xlsxwriter
import pandas as pd
import scipy
from scipy.stats import norm

a=0.33
sigma=0.866
sigma_2=sigma**2

df=pd.read_excel("selection_1.xlsx","Лист1")
Selection_1_unsort = []
for i in range(len(df.columns)):
    Selection_1_unsort.extend(df[df.columns[i]].tolist())

df_2=pd.read_excel("selection_3.xlsx","Лист1")
Selection_3_1_unsort = []
Selection_3_2_unsort = []
Selection_3_3_unsort = []
Selection_3_1_unsort.extend(df_2[df_2.columns[0]].tolist())
Selection_3_2_unsort.extend(df_2[df_2.columns[1]].tolist())
Selection_3_3_unsort.extend(df_2[df_2.columns[2]].tolist())

Selection_3_unsort = [df_2[df_2.columns[0]].tolist(),df_2[df_2.columns[1]].tolist(),
df_2[df_2.columns[2]].tolist()]

Selection_1 = copy.deepcopy(Selection_1_unsort)
Selection_1.sort()
Selection_3_1 = copy.deepcopy(Selection_3_1_unsort)
Selection_3_1.sort()
Selection_3_2 = copy.deepcopy(Selection_3_2_unsort)
Selection_3_2.sort()
Selection_3_3 = copy.deepcopy(Selection_3_3_unsort)
Selection_3_3.sort()

N=len(Selection_1)
alpha=0.05
mu_1=sum(Selection_1)/N
C=a+sigma*norm.ppf(1-alpha)/math.sqrt(N)

print(mu_1)
print(C)

N_3_1=len(Selection_3_1)
```

```
N_3_2=len(Selection_3_2)
N_3_3=len(Selection_3_3)

x_2_3_1=sum(map(lambda x:x*x,Selection_3_1))/N_3_1
x_2_3_2=sum(map(lambda x:x*x,Selection_3_2))/N_3_2
x_2_3_3=sum(map(lambda x:x*x,Selection_3_3))/N_3_3

x_3_1=sum(Selection_3_1)/N_3_1
x_3_2=sum(Selection_3_2)/N_3_2
x_3_3=sum(Selection_3_3)/N_3_3

S_2_3_1=N_3_1*(x_2_3_1-x_3_1**2)/(N_3_1-1)
S_2_3_2=N_3_2*(x_2_3_2-x_3_2**2)/(N_3_2-1)
S_2_3_3=N_3_3*(x_2_3_3-x_3_3**2)/(N_3_3-1)-1)

T_1_2=(x_3_1-x_3_2)*math.sqrt(N_3_1*N_3_2*(N_3_1+N_3_2-
2)/(N_3_2+N_3_1))/math.sqrt(S_2_3_1*(N_3_1-1)+S_2_3_2*(N_3_2-1))
T_1_3=(x_3_1-x_3_3)*math.sqrt(N_3_1*N_3_3*(N_3_1+N_3_3-
2)/(N_3_1+N_3_3))/math.sqrt(S_2_3_1*(N_3_1-1)+S_2_3_3*(N_3_3-1))
T_2_3=(x_3_2-x_3_3)*math.sqrt(N_3_2*N_3_3*(N_3_2+N_3_3-
2)/(N_3_2+N_3_3))/math.sqrt(S_2_3_2*(N_3_2-1)+S_2_3_3*(N_3_3-1))

x=1-alpha/2
n=N_3_1+N_3_2-2
t_kr=scipy.stats.t.ppf(x,n)

print(abs(T_1_2)<=t_kr)
print(abs(T_1_3)<=t_kr)
print(abs(T_2_3)<=t_kr)

u_mean=(sum(Selection_3_1)+sum(Selection_3_2)+sum(Selection_3_3))/(N_3_1*3)

S_common=sum(map(lambda x:(x-u_mean)**2,Selection_3_1))
S_common+=sum(map(lambda x:(x-u_mean)**2,Selection_3_2))
S_common+=sum(map(lambda x:(x-u_mean)**2,Selection_3_3))

S_fact=N_3_1*((x_3_1-u_mean)**2)*((x_3_2-u_mean)**2)*((x_3_3-u_mean)**2)

S_residual=S_common-S_fact

m=3
k_1=m-1
k_2=m*(N_3_1-1)
S_2_fact=S_fact/k_1
S_2_residual=S_residual/k_2
F_N_M=S_2_fact/S_2_residual

z_a=scipy.stats.f.isf(alpha,k_1,k_2)
```

```
print(F_N_M<=z_a)

pval=scipy.stats.f_oneway(Selection_3_unsort[0],Selection_3_unsort[1],Selection_3_u
nsort[2])

pval_1_2=scipy.stats.ttest_ind(Selection_3_unsort[0],Selection_3_unsort[1])
pval_1_3=scipy.stats.ttest_ind(Selection_3_unsort[0],Selection_3_unsort[2])
pval_2_3=scipy.stats.ttest_ind(Selection_3_unsort[1],Selection_3_unsort[2])

pval_w_1_2=scipy.stats.ttest_ind(Selection_3_unsort[0],Selection_3_unsort[1],
equal_var=False)
pval_w_1_3=scipy.stats.ttest_ind(Selection_3_unsort[0],Selection_3_unsort[2],
equal_var=False)
pval_w_2_3=scipy.stats.ttest_ind(Selection_3_unsort[1],Selection_3_unsort[2],
equal_var=False)

S_2_1_1_2=max(S_2_3_1,S_2_3_2)
S_2_1_1_3=max(S_2_3_1,S_2_3_3)
S_2_1_2_3=max(S_2_3_2,S_2_3_3)
S_2_2_1_2=min(S_2_3_1,S_2_3_2)
S_2_2_1_3=min(S_2_3_1,S_2_3_3)
S_2_2_2_3=min(S_2_3_2,S_2_3_3)

F_1_2=S_2_1_1_2/S_2_2_1_2
F_1_3=S_2_1_1_3/S_2_2_1_3
F_2_3=S_2_1_2_3/S_2_2_2_3

k_4_5=N_3_1-1
z_a_4_5=scipy.stats.f.isf(alpha/2, k_4_5, k_4_5)

pval_bar=scipy.stats.bartlett(Selection_3_unsort[0],Selection_3_unsort[1],Selection_3
_unsort[2])

pval_lev_1_2=scipy.stats.levene(Selection_3_unsort[0],Selection_3_unsort[1])
pval_lev_1_3=scipy.stats.levene(Selection_3_unsort[0],Selection_3_unsort[2])
pval_lev_2_3=scipy.stats.levene(Selection_3_unsort[1],Selection_3_unsort[2])
```