МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»
РТУ МИРЭА

Институт кибернетики

Кафедра высшей математики

КУРСОВАЯ РАБОТА
по дисциплине
«Численные методы»

Тема курсовой работы

«Найти максимальное значение функции, на заданном отрезке»

Студент группы КМБО-03-18 *Мусатов Д.Ю.*

Руководитель курсовой работы *Сенявин М.М.*

Работа представлена к защите «__»_______2021 г. *(подпись студента)*

«Допущен к защите» «__»_______2021 г. *(подпись руководителя)*

МОСКВА — 2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»
РТУ МИРЭА

Институт кибернетики

Кафедра высшей математики

Утверждаю
Заведующий
кафедрой_____________*Ю.И.Худак*

«____» __________2021г.

ЗАДАНИЕ
на выполнение курсовой работы
по дисциплине «Численные методы»

Студент *Мусатов Д.Ю.* Группа *КМБО-03-18*

1. **Тема: «Найти максимальное значение функции, на заданном отрезке»**

2. **Исходные данные:**
   Функция и дифференциальное уравнение для построения интерполяционного многочлена второй степени. Концы отрезка и шаг.

3. **Перечень вопросов, подлежащих разработке, и обязательного графического материала:**
   1) Найти точки для построения интерполяционного многочлена
   2) Поиск максимального значения разности заданной функции

4. **Срок представления к защите курсовой работы: до** « » ___________ 2021 г.

Задание на курсовую работу выдал	«___»______2021 г.	_________________	(*_____________*)
Задание на курсовую работу получил	«___»______2021 г.	_________________	(*_____________*)

Содержание

1 Постановка задачи и разработка алгоритма её решения

Найти максимальное значение функции $F(x) = |P_2(x) - f(x)|$ на отрезке $[a,\ b]$, где $f(x) = e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1,\ \ P_2(x)$ - интерполяционный многочлен, построенный по таблице решений дифференциального уравнения $y' + y\cos(x) = \sin(x)\ \cdot\ \cos(x),\ \ y(0) = 0,\ \ x \in [a,\ b]$ с шагом h.

Исходные данные:

a	b	h
0	1	0.5

Алгоритм решения:

Для решения данной задачи разобъём её на две подзадачи, первая нахождение точек и построение интерполяционного многочлена, а вторая нахождение максимального значения фукнции модуля разности заданной функции и интерполяционного многочлена построенного по таблице решений дифференциального уравнения.

2 Теоретические сведения

Дифференциальное уравнение — уравнение, в которое входят производные функции и могут входить сама функция, независимая переменная и параметры. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем не ограничен). Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или могут отсутствовать вовсе, кроме хотя бы одной производной. Не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением. Например, $f'(x) = f(f(x))$ не является дифференциальным уравнением.

В отличие от алгебраических уравнений, в результате решения которых ищется число (несколько чисел), при решении дифференциальных уравнений ищется функция (семейство функций).

Дифференциальное уравнение порядка выше первого можно преобразовать в систему уравнений первого порядка, в которой число уравнений равно порядку исходного дифференциального уравнения.

2.1 Метод Эйлера

Простейший численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера является явным, одношаговым методом первого порядка точности. Он основан на аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией, так называемой ломаной Эйлера.

Описание метода

Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y|_{x=x_0} = y_0$$

где функция f определена на некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$. Решение ищется на интервале $(x_0, b]$. На этом интервале введем узлы: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Приближенное решение в узлах x_i, которое обозначим через y_i, определяется по формуле:

$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, ..., n.$

Эти формулы непосредственно обобщаются на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оценка погрешности метода на шаге и в целом Погрешность на шаге или локальная погрешность — это разность между численным решением после одного шага вычисления y_i и точным решением в точке $x_i = x_{i-1} + h$.

Численное решение задаётся формулой

$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1},\ y_{i-1})$.
Точное решение можно разложить в ряд Тейлора:
$y(x_{i-1} + h) = y(x_{i-1}) + hy'(x_{i-1}) + O(h^2)$
Локальную ошибку L получаем, вычитая из второго равенства первое:
$L = y(x_{i-1} + h) - y_i = O(h^2)$

Это справедливо, если y имеет непрерывную вторую производную. Другим достаточным условием справедливости этой оценки, из которого вытекает предыдущее и которое обычно может быть легко проверено, является непрерывная дифференцируемость $f(x, y)$ по обоим аргументам.

Погрешность в целом, глобальная или накопленная погрешность — это погрешность в последней точке произвольного конечного отрезка интегрирования уравнения. Для вычисления решения в этой точке требуется S/h шагов, где S длина отрезка. Поэтому глобальная погрешность метода $G = O(h^2 S/h) = O(h)$.

Таким образом, метод Эйлера является методом первого порядка — имеет погрешность на шаге $O(h^2)$ и погрешность в целом $O(h)$[3].

2.2 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

Математическая функция позволяющая записать полином n-степени, который будет соединять все заданные точки из набора значений, полученных опытным путём или методом случайной выборки с постоянным/переменным временным шагом измерений.

В общем виде интерполяционный многочленв форме Ньютона записывается в следующем виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_0, ..., x_k) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right)$$

где n – вещественное число, которое указывает степень полинома; $f(x_0, ..., x_k)$ - переменная, которая представляет собой разделенную разность k-го порядка, которая вычисляется по следующей формуле:

$$f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Разделённая разность является симметричной функцией своих аргументов, то есть при любой их перестановке её значение не меняется. Следует отметить, что для разделённой разности k-го порядка справедлива следующая формула:

$$f(x_0, x_1, ..., x_k) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} \right)$$

2.3 Метод золотого сечения

Метод поиска экстремума действительной функции одной переменной на заданном отрезке. В основе метода лежит принцип деления отрезка в пропорциях золотого сечения.

Описание метода

Пусть задана функция $f(x): \ [a,\ b] \to \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{C}([a,\ b])$. Тогда для того, чтобы найти неопределённое значение этой функции на заданном отрезке, отвечающее критерию поиска (пусть это будет минимум), рассматриваемый отрезок делится в пропорции золотого сечения в обоих направлениях, то есть выбираются две точки x_1 и x_2 такие, что:
$\dfrac{b-a}{b-x_1} = \dfrac{b-a}{x_2-a} = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$, где Φ - пропорция золотого сечения.

Таким Образом:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\Phi}$$
$$x_2 = a + \frac{b-a}{\Phi}$$

То есть точка x_1 делит отрезок $[a,\ x_2]$ в отношении золотого сечения. Аналогично x_2 делит отрезок $[x_1,\ b]$ в той же пропорции. Это свойство и используется для построения итеративного процесса.

Иллюстрация выбора промежуточных точек метода золотого сечения

Алгоритм

1. На первой итерации заданный отрезок делится двумя симметричными относительно его центра точками и рассчитываются значения в этих точках.
2. После чего тот из концов отрезка, к которому среди двух вновь поставленных точек ближе оказалась та, значение в которой максимально (для случая поиска минимума), отбрасывают.
3. На следующей итерации в силу показанного выше свойства золотого сечения уже надо искать всего одну новую точку.
4. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

3 Решение первой подзадачи

Дифференциальное уравнение и начальные условия:
$y' + y\cos(x) = \sin(x)\ \cdot\ \cos(x),\ \ y(0) = 0,\ \ x \in [0,\ 1]$ с шагом $h = 0.5$.
Найдём точки для построения интерполяционного многочлена двумя способами:

3.1 С помощью метода Эйлера

$y' = -y\cos(x) + \sin(x)\ \cdot\ \cos(x)$

$x_0 = 0$
$y_0 = 0$

$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.5 = 0.5$
$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0 + 0.5(0 \cdot \cos(0) + \sin(0)\ \cdot\ \cos(0)) = 0$

$x_2 = x_1 + h = 0.5 + 0.5 = 1$
$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 0 + 0.5(0 \cdot \cos(0.5) + \sin(0.5)\ \cdot\ \cos(0).5) = 0.2103677$

i	0	1	2
x_i	0	0.5	1
y_i	0	0	0.2103677462

С помощью Интерполяционного метода Ньютона найдем многочлен $P_2(x)$

$f(x_0) = 0$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0 - 0}{0.5 - 0} = 0$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0.2103677 - 0}{1 - 0.5} = 0.4207354524$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{0.420735492}{1} = 0.420735492$$

Построим многочлен $P_2(x)$:

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 0 + 0(x - 0) + 0.420735492(x - 0)(x - 0.5) = 0.420735492\,x^2 - 2103677462\,x$$

3.2 Решив дифференциальное уравнение

$T_{on} = T_{oo} + T_{chn}$

Найдём T_{oo} :

$$y' + y\cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -y\cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\cos(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln(y) = -\sin(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = C(x)e^{-\sin(x)}$$

Подставим в исходное уравнение:

$$\cancel{-C(x)\cos(x)e^{-\sin(x)}} + C'(x)e^{-\sin(x)} + \cancel{C(x)\cos(x)e^{-\sin(x)}} = \sin(x)\cdot\cos(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C'(x)e^{-\sin(x)} = \sin(x)\cdot\cos(x) \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \frac{e^{\sin(x)}\sin(2x)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = C + e^{\sin(x)}\cdot\sin(x) - e^{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = (C + e^{\sin(x)}\cdot\sin(x) - e^{\sin(x)})e^{-\sin(x)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1 \qquad y(0) = 0 \Rightarrow Ce^0 + sin(0) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Решение дифференциального уравнения с начальными условиями имеет вид:

$$y(x) = e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1$$

Заметим, что решение дифференциального уравнения совпало с заданной функцией.

Подставим x на промежутке $[a,\ b]$ с шагом $h = 0.5$ и составим таблицу значений.

i	0	1	2
x_i	0	0.5	1
y_i	0	0.0985645	0.27254694

С помощью Интерполяционного метода Ньютона найдем многочлен $P_2(x)$

$f(x_0) = 0$

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0.0985645 - 0}{0.5 - 0} = 0.197129$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{0.27254694 - 0.0985645}{1 - 0.5} = \frac{0.17398244}{0.5} = 0.34796488$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{0.34796488 - 0.197129}{1} = 0.15083588$$

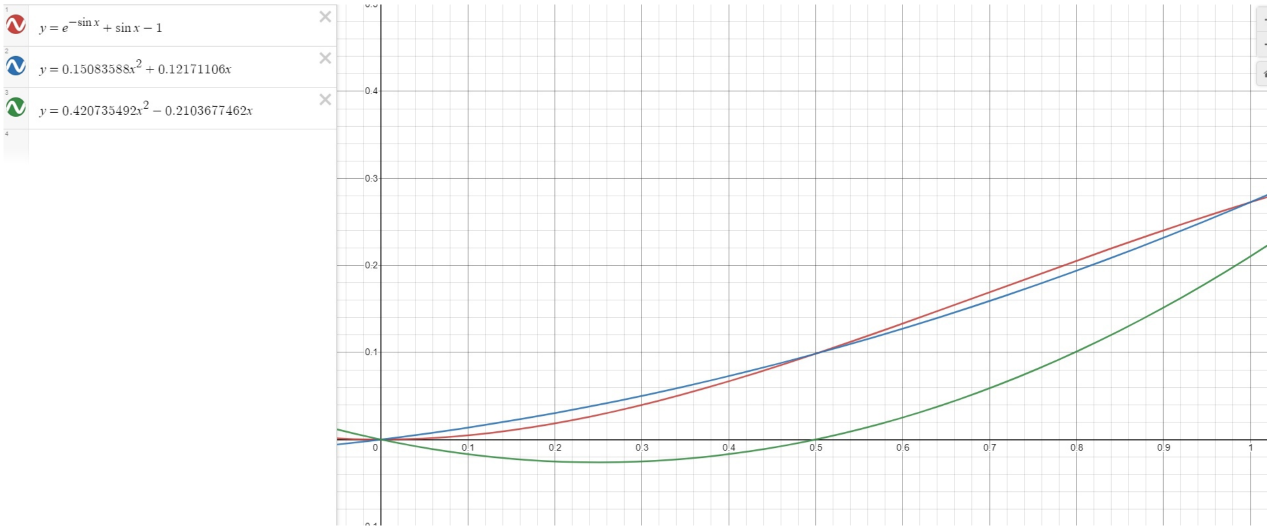
Построим многочлен $P_2(x)$:

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$

$$P_2(x) = 0 + 0.197129\,(x - 0) + 0.15083588\,(x - 0)(x - 0.5) = 0.15083588\,x^2 + 0.12171106\,x$$

4 Решение второй подзадачи

Построим графики полученных полиномов, используя результаты первой подзадачи.



Найдём максимальное значение разности заданной функции и многочленов второй степени построенных по точкам полученным с помощью метода Эйлера и подстановкой в решение дифференциального уравнения с помощью программы основанной на методе золотого сечения.
(Код программы представлен в приложении к курсовой работе)

Результат выполнения программы

```
interval ends
a = 0      b = 1     step = 0.5

First polynom with Newton interpolation to function F,
the points are obtained using the Euler method
max difference F and P
x = 0.681369 max difference =  0.110531


Second polynom with Newton interpolation to function F,
the points are obtained by substituting into the equation
the solution of which is obtained analytically
max difference F and P
x = 0.212373 max difference =  0.0119189
```

Как было видно из графика максимальное отклонение от точки многочленом построенным по точкам полученным из решения дифференциального уравнения меньше, чем из точек полученных методом Эйлера. Также программа находит точку, где отклонение от заданной функции максимально.

5 Выводы

Исходная задача была решена путём разбиения на две подзадачи, для каждой из которых был подобран метод решения и составлен алгоритм решения.

Для данной работы были написина программа, основанная на методе золотого сечения, а также для её работы были вычислены точки используя метод Эйлера и найденное аналитически решение дифференциального уравнения.

Файл functions.h

```
#pragma once
#include<iostream>
#include<cmath>

using functions = double(*)(const double& x) ;

double polynom_1(const double& x) {
	return (0.15083588 * x * x + 0.12171106 * x);
}

double polynom_2(const double& x) {
	return (0.420735492 * x * x - 0.2103677462 * x);
}

double function_f(const double & x) {
	return (exp(-sin(x))+sin(x)-1);
}

double max_d(double a, double b, const double& eps, functions f, functions p) {
	double x_1, x_2, F, y_1, y_2;
	while (fabs(a-b)>eps){
		F = 0.5+sqrt(5)/2;
		x_1 = b - (b - a) / F;
		x_2 = a + (b - a) / F;
		y_1 = fabs(f(x_1) - p(x_1));
		y_2 = fabs(f(x_2) - p(x_2));
		if (y_1 <= y_2) {
			a = x_1;
		}
		else {
			b = x_2;
		}
	}
	return ((a + b) / 2);
}

double min_d(double a, double b, const double& eps, functions f, functions p) {
	double x_1, x_2, F, y_1, y_2;
	while (fabs(a - b) > eps) {
		F = 0.5 + sqrt(5) / 2;
		x_1 = b - (b - a) / F;
		x_2 = a + (b - a) / F;
		y_1 = fabs(f(x_1) - p(x_1));
		y_2 = fabs(f(x_2) - p(x_2));
		if (y_1 >= y_2) {
			a = x_1;
		}
		else {
			b = x_2;
		}
	}
	return ((a + b) / 2);
}

void print(const double& a , const double& b, const double& h, const double& eps) {
	using std::cout;
	double x_1 = max_d(a, b, eps, &function_f, &polynom_1);
	double x_2 = max_d(a, b, eps, &function_f, &polynom_2);
	cout << " interval ends\n a = " << a << "       b = " << b << "      step = " << h
		<< "\n\n First polynom with Newton interpolation to function F,\n the
points are obtained using the Euler method \n max difference F and P\n"<<
		" x = "<< x_2 << " max difference =  " << fabs(function_f(x_2) -
polynom_2(x_2)) <<"\n" ;
```

```
	cout << "\n\n Second polynom with Newton interpolation to function F,\n the 
points are obtained by substituting into the equation \n the solution of which is 
obtained analytically \n max difference F and P\n" <<
		" x = " << x_1 << " max difference =  " << fabs(function_f(x_1) - 
polynom_1(x_1)) << "\n";
	return;
}
```

Файл main.cpp

```
#include<iostream>
#include<cmath>
#include"functions.h"

int main() {

	print(0.0,1,0.5,0.00001);
	system("pause");
	return 0;
}
```

Отзыв
о курсовой работе Мусатова Д. Ю.

Работа посвящена определению максимального значения функции, зависящей от интерполяционного многочлена; узлы интерполяции определяются решением дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение решается аналитически и методом Эйлера; интерполяционный многочлен строится по формуле Ньютона, а для максимизации применяется метод золотого сечения. Возможность применения методов обоснована, точность решения задач каждого этапа оценивается; также анализируется влияние на результат способа решения дифференциального уравнения.

Курсовая работа заслуживает оценки „отлично"

Руководитель работы [подпись] (Сенявин М. М.)