1. 定义

（一） 双边 Z 变换

离散时间序列 x[n]的 Z 变换定义为：

$$X(Z)=Z\{x[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]Z^{-n}$$

式中$Z=e^{\sigma+j\omega}=e^{\sigma}(cos\omega+jsin\omega)$，σ 为实变数，ω 为实变量，所以 Z 是一个幅度为e^{σ}，相位为 ω 的复变量。x[n]和 X(Z)构成一个 Z 变换对。

（二） 单边 Z 变换

通常意义下的 Z 变换指双边 Z 变换，单边 Z 变换只对右边序列（$n\geq0$部分）进行 Z 变换。单边 Z 变换可以看成是双边 Z 变换的一种特例，对于因果序列双边 Z 变换与单边 Z 变换相同。

单边 Z 变换定义为：$X(Z)=Z\{x[n]\}=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]Z^{-n}$

2. 性质

	序列	Z 变换	收敛域	备注
1	$x[n]$	$X(Z)$	$R_{X-}<\|Z\|<R_{X+}$	
2	$y[n]$	$Y(Z)$	$R_{Y-}<\|Z\|<R_{Y+}$	
3	$ax[n]+by[n]$	$aX(Z)+bY(Z)$	$max[R_{X-},R_{Y-}]<\|Z\|<min[R_{X+},R_{Y+}]$	线性性
4	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{Z}\right)$	$\frac{1}{R_{X-}}<\|Z\|<\frac{1}{R_{X+}}$	时域反转
5	$x[n]*y[n]$	$X(Z)Y(Z)$	$max[R_{X-},R_{Y-}]<\|Z\|<min[R_{X+},R_{Y+}]$	序列卷积
6	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi j}\int_C X(v)*Y\left(\frac{Z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_{X-}R_{Y-}<\|Z\|<R_{X+}R_{Y+}$	序列相乘
7	$x^*[n]$	$X^*(Z^*)$	$R_{X-}<\|Z\|<R_{X+}$	序列共轭
8	$nx[n]$	$-Z\frac{dX(Z)}{Z}$	$R_{X-}<\|Z\|<R_{X+}$	频域微

				分
9	$x[n+n_o]$	$Z^{n_o}X(Z)$	$R_{X-}<\lvert Z\rvert<R_{X+}$	序列移位
10	$x[0]=X(\infty)$		因果序列$\lvert Z\rvert>R_{X-}$	初值定理
11	$x[\infty]=Res(X(Z),1)$		$(Z-1)X(Z)$收敛于 $\lvert Z\rvert\geq 1$	终值定理

3. 逆变换

已知 Z 变换 X(Z)求对应的离散时间序列 x[n]称为 Z 变换的逆变换。逆 Z 变换的定义式为：$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\int_c X(Z)Z^{n-1}dz\ c\in(R_{X-},R_{X+})$

逆 Z 变换是一个对 Z 进行的围线积分，积分路径 C 是一条在$X(Z)$收敛环域（Rx-，Rx+）以内逆时针方向绕原点一周的单围线。

求解逆 Z 变换的常用方法：

（1）幂级数展开法（部分分式展开法）

如果得到的 Z 变换是幂级数形式的，则可以看出，序列值 x[n]是幂级数中z^{-n}项的系数；如果已经给出 X(Z)的函数表达式，常常可以推导它的幂级数展开式或者利用已知的幂级数展开式，进一步 X(Z)是部分分式，可用长除法可获得幂级数展开式。

（2）留数定律法

对于有理的 Z 变换，围线积分通常可用留数定律计算，$x[n]=\sum Res[X(Z)Z^{n-1},Z_k]$，即为$X(Z)Z^{n-1}$在围线 C 内所有极点$\{Z_k\}$上留数值的总和。

（3）利用已知变换对

（4）长除法

4. 收敛域

四种序列的 Z 变换收敛域：

（1）有限长序列

指序列只在有限长的区间内为非零值，即$x[n]=0\ (n_1<n<n_2)$

显然|Z|在整个开域$(0,+\infty)$都能满足 Z 变换存在条件，因此有限长序列的收敛域是除 0 及∞两个点（对应 n>0 和 n<0 不收敛）以外的整个 Z 平面：$0<\lvert Z\rvert<\infty$。如果对 n_1，n_2加以一定的限制，如$n_1\geq 0$或$n_2\leq 0$，则根据条件$\lvert Z\rvert<\infty\ (n_1<n<n_2)$，收敛域可进一步扩大为包括 0 点或∞点的半开域。

（2）右边序列

指序列$x[n]$只在$n\geq n_1$有值，而$n<n_1$时，$x[n]=0$，这时 ，其收敛域为收敛半径R_{x-}以外的 Z 平面，即$Z>R_{x-}$。

（3） 左边序列

指序列$x[n]$只在$n \le n_2$有值，而$n > n_2$时，$x[n]=0$，这时，其收敛域为收敛半径R_{x+}以内的 Z 平面，即$Z < R_{x+}$。左边序列 Z 变换可表示为：$X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{n=n_2} x[n]Z^{-n}$

（4）双边序列

可看作一个左边序列和一个右边序列之和,因此双边序列 Z 变换的收敛域是这两个序列 Z 变换收敛域的公共部分。双边序列 Z 变换可表示为：

$$X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{n=n_1} x[n]Z^{-n}+\sum_{n=n_1+1}^{n=+\infty} x[n]Z^{-n}$$

（如果$R_{X+} > R_{X-}$,则存在公共的收敛区间,$X(Z)$有收敛域:$R_{X-} < |Z| < R_{X+}$如果$R_{X+} < R_{X-}$,无公共收敛区间，$X(Z)$无收敛域，不收敛。）

1. DFS 与 Z 变换

设 x(n)为一有限长序列，长度为 N，即：

$$x(n)=\begin{cases} nonzero, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & else \end{cases}$$

那么，能求它的 z 变换为：$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$

现在，以 N 为周期重复 x(n)构造一个周期序列 x(n)，即

$$x(n)=\begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & else \end{cases}$$

x(n) 的 DFS 为：$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)[e^{j\frac{2\pi}{N}k}]^{-n}$

将两者比较后，得到：$\tilde{X}(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$

这就是说，DFS 代表了 z 变换在单位圆上 N 个等间隔样本。

2. DTFT 与 Z 变换

DTFT 和 z 变换之间的关系为：DTFT 是单位圆上的 z 变换。

DTFT 的公式为：$X(e^{jw})=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jwn}=\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-jwn}$

对比 z 变换的公式：$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$

可以得到：$X(e^{jw})=X(z)\big|_{z=e^{jw}}$

从上式即可看出，DTFT 是单位圆上的 z 变换。