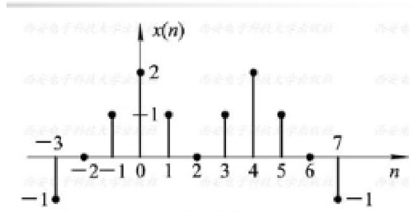
课后习题:

设题图所示的序列 x（n）的 FT 用 X（$e^{j\omega}$）表示，不直接求出 X（$e^{j\omega}$），完成下列运算或工作:



题图

（1）X（e^{j0}）;

（2）$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,\mathrm{d}\omega$;

（3）X（$e^{j\pi}$）;

（4）确定并画出傅里叶变换实部 Re[X（$e^{j\omega}$）]的时间序列x_a（n）;

（5）$\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \mathrm{d}\omega$;

（6）$\int_{-\pi}^{\pi} |\frac{dX(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}|^2\ \mathrm{d}\omega$。

解:（1）X（e^{j0}）=FT[x(n)]$|_{\omega=0} = \sum_{-3}^{7} x(n)\cdot e^{-j\cdot 0\cdot n}$=6

（2）$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}\mathrm{d}\omega=2\pi x(n)$

当 n=0 时，$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\,\mathrm{d}\omega=2\pi x(0)=4\pi$

（3）X（$e^{j\pi}$）= FT[x(n)]$|_{\omega=\pi}=\sum_{-3}^{7} x(n)\cdot e^{-j\cdot\pi\cdot n}$

$=\sum_{-3}^{7} x(n)\cdot(\cos(n\pi)-j\sin(n\pi))$

$=\sum_{-3}^{7} x(n)\cdot(-1)^n$

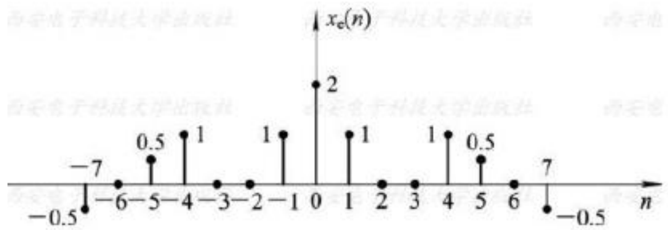
=2

(4) 因为傅里叶变换的实部对应序列的共轭对称部分，即

Re[X（$e^{j\omega}$）]= $\sum_{-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot n}$

x_e（n）=$\frac{1}{2}$[x(n)+x(-n)]

则x_e（n）的波形图如下:



题解

（5）$\sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega=2\pi\sum_{-3}^{7} |x(n)|^2=28\pi$

（6）FT[nx(n)]=j$\frac{dX（e^{j\omega}）}{d\omega}$

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi}|\frac{dX（e^{j\omega}）}{d\omega}|^2$ dω=$2\pi\sum_{-3}^{7}|-jnx（n）|^2$

=$2\pi\sum_{-3}^{7}|nx（n）|^2$

=316π

已知 X(z)=$\frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$分别求：

（1） 收敛域 0.5<|z|<2 对应的原序列 x（n）；

（2） 收敛域|z|>2 对应的原序列 x(n)。

解： x(n)=$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X（z）z^{n-1}$dz

F(z)= $X(z)z^{n-1}$=$\frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}z^{n-1}$=$\frac{-3\cdot z^n}{2(z-0.5)(z-2)}$

(1) 收敛域 0.5<|z|<2：

n≥0 时，c 内有极点 0.5，

x（n）=Res[F(z),0.5]= 0.5^n=2^{-n}

n<0 时，c 内有极点 0.5、0，但 0 是一个 n 阶极点，改求 c 外极点留数，c 外极点只有 2，

x（n）=-Res[F(z),2]= 2^n

最后得到

x(n)= $2^{-n}u(n)+2^n u(-n-1)=2^{|n|} \qquad -\infty<n<\infty$

(2) 收敛域|z|>2:

n≥0 时,c 内有极点 0.5、2，

x（n）=Res[F(z),0.5]+ Res[F(z),2]= $0.5^n+\frac{-3\cdot z^n}{2(z-0.5)(z-2)}(z-2)|_{z=2}$

=0.5^n-2^n

n<0 时，c 内有极点 0.5、2、0，但 0 是一个 n 阶极点，改求 c 外极点留数，可是 c 外没有极点，因此

x（n）=0

最后得到

x（n）=（0.5^n-2^n）$u(n)$