

# 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

## 2.1 引言

## 2.2 时域离散信号的傅里叶变换的定义及性质

## 2.3 周期序列的离散傅里叶级数及傅里叶变换表示式

## 2.4 时域离散信号的傅里叶变换与模拟信号

## 傅里叶变换之间的关系

## 2.5 序列的Z变换

## 2.6 利用Z变换分析信号和系统的频响特性

## 习题与上机题

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2.1 引言

我们知道，信号和系统的分析方法有两种，即时域分析方法和频域分析方法。在模拟领域中，信号一般用连续变量时间的函数表示，系统则用微分方程描述。在频率域，则用信号的傅里叶变换(Fourier Transform)或拉普拉斯变换表示。而在时域离散信号和系统中，信号用时域离散信号（序列）表示，系统则用差分方程描述。在频率域，则用信号的傅里叶变换或Z变换表示。

本章学习序列的傅里叶变换和Z变换，以及利用Z变换分析系统和信号频域特性。该章内容是本书也是数字信号处理的理论基础。



### 2.2 时域离散信号的傅里叶变换的定义及性质

#### 2.2.1 时域离散信号傅里叶变换的定义

序列 $x(n)$ 的傅里叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (2.2.1)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

FT为Fourier Transform的缩写。FT[ $x(n)$ ]存在的充分必要条件是序列 $x(n)$ 满足绝对可和的条件，即满足下式：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \quad (2.2.2)$$

$X(e^{j\omega})$ 的傅里叶反变换为

$$x(n) = \text{IFT}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.2.3)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

---

(2.2.1) 和 (2.2.3) 式组成一对傅里叶变换公式。

(2.2.2) 式是傅里叶变换存在的充分必要条件，有些函数（例如周期序列）并不满足 (2.2.2) 式，说明它的傅里叶变换不存在，但如果引入冲激函数，其傅里叶变换也可以用冲激函数的形式表示出来，这部分内容将在2.3节介绍。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

【例2.2.1】 设 $x(n)=R_N(n)$ ，求 $x(n)$ 的傅里叶变换。

解

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2} (e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \\ &= e^{-j(N-1)\omega/2} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \\ &= |X(e^{j\omega})| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

其中

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \right| \\ \arg[X(e^{j\omega})] &= -\frac{(N-1)\omega}{2} + \arg\left[ \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} \right] \end{aligned}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### $N=4$ 时的幅度与相位曲线

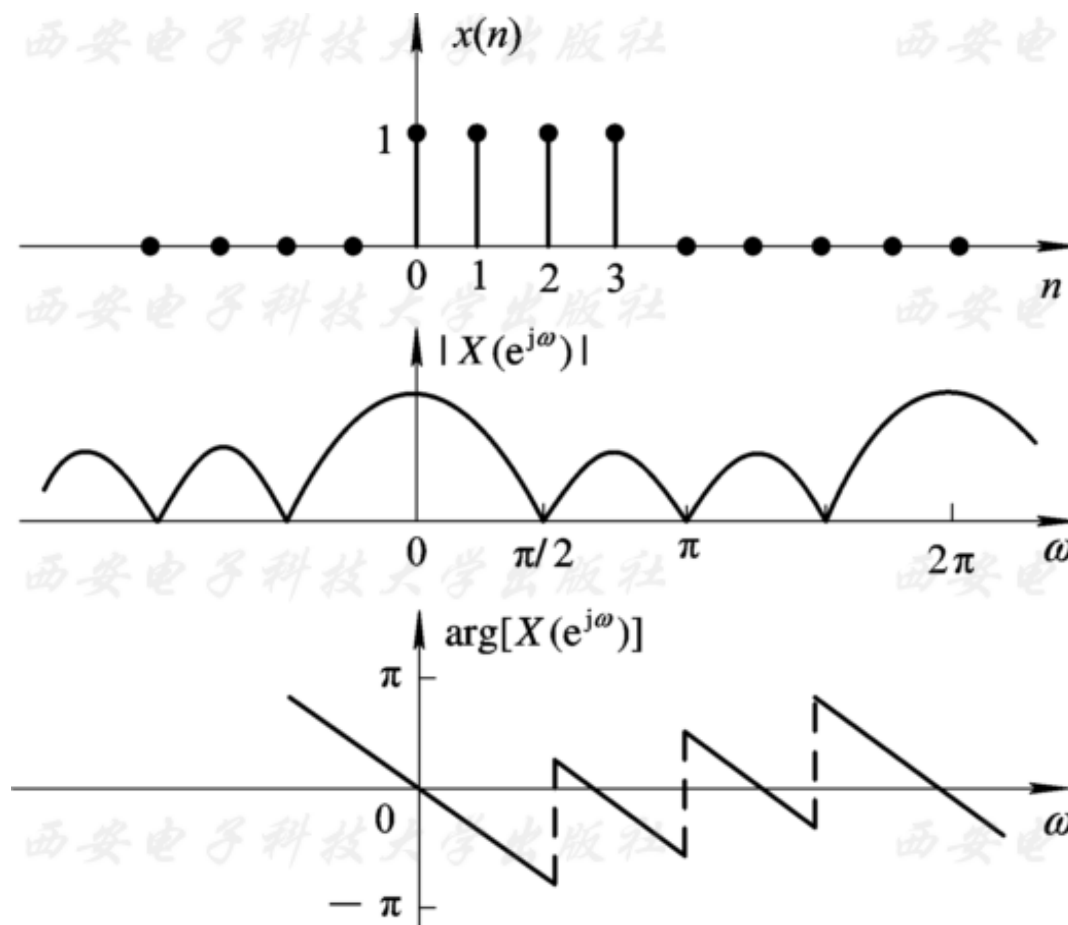


图2.2.1  $R_4(n)$ 的幅度与相位曲线

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2.2.2 时域离散信号傅里叶变换的性质

#### 1. FT的周期性

在定义（2.2.1）式中， $n$ 取整数，因此下式成立：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j(\omega+2\pi M)n} = X(e^{j(\omega+2\pi M)}) \quad M \text{为整数} \quad (2.2.5)$$

观察上式，得到傅里叶变换是频率 $\omega$ 的周期函数，周期是 $2\pi$ 。这一特点不同于模拟信号的傅里叶变换。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

由FT的周期性进一步分析得到，在 $\omega=0$ 和 $\omega=2\pi M$ 附近的频谱分布应是相同的( $M$ 取整数)，在 $\omega=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ ，点上表示 $x(n)$ 信号的直流分量；离开这些点愈远，其频率愈高，但又是以 $2\pi$ 为周期，那么最高的频率应是 $\omega=\pi$ 。另外要说明的是，所谓 $x(n)$ 的直流分量，是指如图2.2.2(a)所示的波形。例如， $x(n)=\cos\omega n$ ，当 $\omega=2\pi M$ ,  $M$ 取整数时， $x(n)$ 的序列值如图2.2.2(a)所示，它代表一个不随 $n$ 变化的信号（直流信号）；当 $\omega=(2M+1)\pi$ 时， $x(n)$ 波形如图2.2.2(b)所示，它代表最高频率信号，是一种变化最快的正弦信号。由于FT的周期是 $2\pi$ ，一般只分析 $-\pi \sim +\pi$ 之间或 $0 \sim 2\pi$ 范围的FT就够了。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

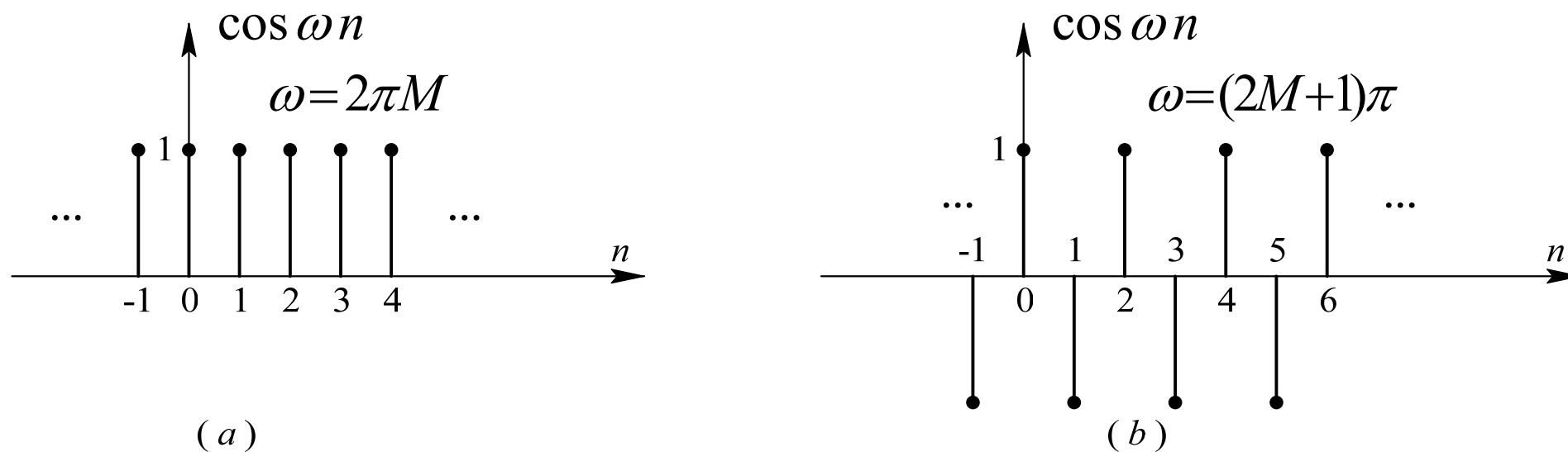


图2.2.2  $\cos \omega n$  的波形

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2. 线性

设 $X_1(e^{j\omega})=\text{FT}[x_1(n)]$ ,  $X_2(e^{j\omega})=\text{FT}[x_2(n)]$ , 那么

$$\text{FT}[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega}) \quad (2.2.6)$$

式中,  $a$ ,  $b$ 是常数。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 3. 时移与频移

设 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$ , 那么

$$FT[x(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (2.2.7)$$

$$FT[e^{j\omega_0 n} x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \quad (2.2.8)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 4. FT的对称性

设序列 $x_e(n)$ 满足下式：

$$x_e(n) = x_e^*(-n) \quad (2.2.9)$$

则称 $x_e(n)$ 为共轭对称序列。

为研究共轭对称序列具有什么性质，将 $x_e(n)$ 用其实部与虚部表示：

$$x_e(n) = x_{er}(n) + jx_{ei}(n)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

将上式两边 $n$ 用 $-n$ 代替，并取共轭，得到：

$$x_e^*(-n) = x_{er}(-n) - jx_{ei}(-n)$$

对比上面两公式，因左边相等，因此得到：

$$x_{er}(n) = x_{er}(-n) \quad (2.2.10)$$

$$x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n) \quad (2.2.11)$$

上面两式表明共轭对称序列其实部是偶函数，而虚部是奇函数。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

共轭反对称序列定义：

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) \quad (2.2.12)$$

将 $x_o(n)$ 表示成实部与虚部，如下式：

$$x_o(n) = x_{or}(n) + jx_{oi}(n)$$

可以得到：

$$x_{or}(n) = -x_{or}(-n) \quad (2.2.13)$$

$$x_{oi}(n) = x_{oi}(-n) \quad (2.2.14)$$

即共轭反对称序列的实部是奇函数，而虚部是偶函数。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.2.2】** 试分析 $x(n)=e^{j\omega n}$ 的对称性。

解 因为  $x^*(-n)=e^{j\omega n}=x(n)$

满足(2.2.9)式，所以 $x(n)$ 是共轭对称序列

如展成实部与虚部，则得到：

$$x(n)=\cos\omega n+j \sin\omega n$$

上式表明，共轭对称序列的实部确实是偶函数，虚部是奇函数。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

一般序列可用共轭对称与共轭反对称序列之和表示，即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (2.2.15)$$

式中， $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 可以分别用原序列 $x(n)$ 求出，将（2.2.15）式中的 $n$ 用 $-n$ 代替，再取共轭，得到：

$$x^*(-n) = x_e(n) - x_o(n) \quad (2.2.16)$$

利用（2.2.15）和（2.2.16）式，得到：

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \quad (2.2.17)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \quad (2.2.18)$$

利用上面两式，可以用 $x(n)$ 分别求出 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

对于频域函数 $X(e^{j\omega})$ ，也有和上面类似的概念和结论：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \quad (2.2.19)$$

式中， $X_e(e^{j\omega})$ 与 $X_o(e^{j\omega})$ 分别称为共轭对称部分和共轭反对称部分，它们满足：

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \quad (2.2.20)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \quad (2.2.21)$$

同样有下面公式成立：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (2.2.22)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \quad (2.2.23)$$

有了上面的概念和结论，下面研究FT的对称性。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

(1) 将序列 $x(n)$ 分成实部 $x_r(n)$ 与虚部 $x_i(n)$ ，即

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

将上式进行傅里叶变换，得到：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

式中

$$X_e(e^{j\omega}) = FT[x_r(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_r(n) e^{-j\omega n}$$
$$X_o(e^{j\omega}) = FT[jx_i(n)] = j \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(n) e^{-j\omega n}$$

上面两式中， $x_r(n)$ 和 $x_i(n)$ 都是实数序列。容易证明： $X_e(e^{j\omega})$ 满足（2.2.20）式，具有共轭对称性，它的实部是偶函数，虚部是奇函数； $X_o(e^{j\omega})$ 满足（2.2.21）式，具有共轭反对称性质，它的实部是奇函数，虚部是偶函数。

最后得到结论：序列分成实部与虚部两部分，实部对应的傅里叶变换具有共轭对称性，虚部和 $j$ 一起对应的傅里叶变换具有共轭反对称性。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

(2) 将序列分成共轭对称部分 $x_e(n)$ 和共轭反对称部分 $x_o(n)$ , 即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \quad (2.2.24)$$

将 (2.2.17) 和 (2.2.18) 式重写如下:

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

将上面两式分别进行傅里叶变换, 得到:

$$\text{FT}[x_e(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{j\omega})] = X_R(e^{j\omega})$$

$$\text{FT}[x_o(n)] = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] = j\text{Im}[X(e^{j\omega})] = jX_I(e^{j\omega})$$

因此 (2.2.24) 式的FT为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (2.2.25)$$

(2.2.25) 式表示：序列 $x(n)$ 的共轭对称部分 $x_e(n)$ 对应着 $X(e^{j\omega})$ 的实部 $X_R(e^{j\omega})$ ，而序列 $x(n)$ 的共轭反对称部分 $x_o(n)$ 对应着 $X(e^{j\omega})$ 的虚部(包括j)。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

---

下面分析实因果序列 $h(n)$ 的对称性，并推导其偶函数 $h_e(n)$ 和奇函数 $h_o(n)$ 与 $h(n)$ 之间的关系。

因为 $h(n)$ 是实序列，其FT只有共轭对称部分 $H_e(e^{j\omega})$ ，共轭反对称部分为零。

$$H(e^{j\omega}) = H_e(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

因此实序列的FT是共轭对称函数, 其实部是偶函数, 虚部是奇函数, 用公式表示为

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$$

模的平方是偶函数, 相位函数是奇函数, 这和实模拟信号的FT有同样的结论。

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg \tan[H_I(e^{j\omega}) / H_R(e^{j\omega})]$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

按照 (2.2.17) 和 (2.2.18) 式得到:

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n)$$

$$h_e(n) = \frac{1}{2}[h(n) + h(-n)]$$

$$h_o(n) = \frac{1}{2}[h(n) - h(-n)]$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

因为 $h(n)$ 是实因果序列，按照上面两式， $h_e(n)$ 和 $h_o(n)$ 可用下式表示：

$$h_e(n) = \begin{cases} h(0) & n = 0 \\ \frac{1}{2}h(n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}h(-n) & n < 0 \end{cases} \quad (2.2.26)$$

$$h_o(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}h(n) & n > 0 \\ -\frac{1}{2}h(-n) & n < 0 \end{cases} \quad (2.2.27)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

按照上面两式，实因果序列 $h(n)$ 可以分别用 $h_e(n)$ 和 $h_o(n)$ 表示为

$$h(n) = h_e(n)u_+(n) \quad (2.2.28)$$

$$h(n) = h_o(n)u_+(n) + h(0)\delta(n) \quad (2.2.29)$$

式中

$$u_+(n) = \begin{cases} 2 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (2.2.30)$$

因为 $h(n)$ 是实序列，上面公式中 $h_e(n)$ 是偶函数， $h_o(n)$ 是奇函数。按照（2.2.28）式，实因果序列完全由其偶序列恢复，但按照（2.2.27）式， $h_o(n)$ 中缺少 $n=0$ 点 $h(n)$ 的信息。因此由 $h_o(n)$ 恢复 $h(n)$ 时，要补充一点 $h(h)\delta(n)$ 信息。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

【例2.2.3】  $x(n)=a^n u(n)$ ,  $0<a<1$ 。求其偶函数 $x_e(n)$ 和奇函数 $x_o(n)$ 。

解  $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$  按 (2.2.26) 式, 得到:

$$x_e(n) = \begin{cases} x(0), & n = 0 \\ \frac{1}{2}x(n), & n > 0 \\ \frac{1}{2}x(-n), & n < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}a^n, & n > 0 \\ \frac{1}{2}a^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

按 (2.2.27) 式, 得到:

$$\begin{aligned}x_o(n) &= \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}x(n), & n > 0 \\ -\frac{1}{2}x(-n), & n < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}a^n, & n > 0 \\ -\frac{1}{2}a^{-n}, & n < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$x(n)$ 、 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 波形如图2.2.3所示。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

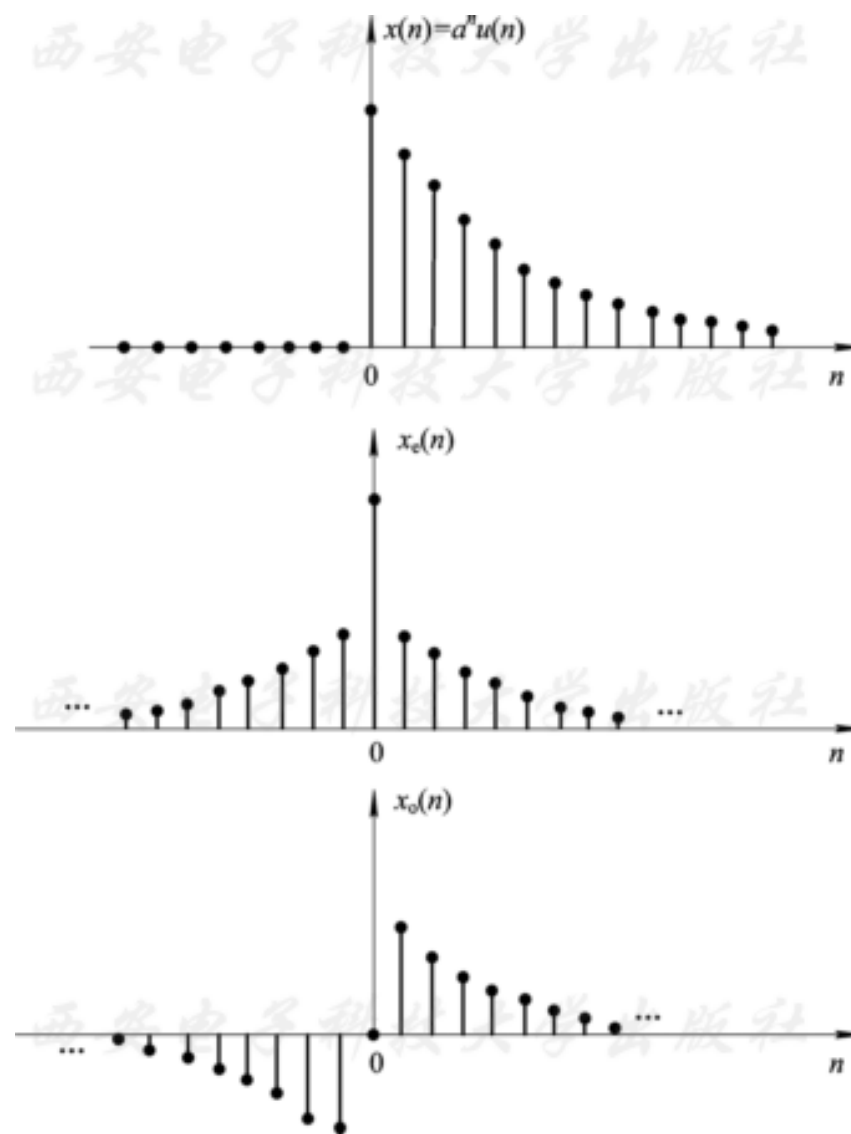


图2.2.3 例2.2.3图

### 5. 时域卷积定理

设  $y(n)=x(n)*h(n)$

则

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (2.2.31)$$

证明  $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$

$$Y(e^{j\omega}) = \text{FT}[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right] e^{-j\omega n}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

令  $k = n - m$ , 则

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(k)x(m)]e^{-j\omega k} e^{-j\omega m} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\omega m} \\ &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

该定理说明，两序列卷积的FT服从相乘的关系。对于线性时不变系统，输出的FT等于输入信号的FT乘以单位脉冲响应的FT。因此，在求系统的输出信号时，可以在时域用卷积公式（1.3.7）计算，也可以在频域按照（2.2.31）式，求出输出的FT，再作逆FT，求出输出信号 $y(n)$ 。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 6. 频域卷积定理

设  $y(n)=x(n)h(n)$  则

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) H(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (2.2.32)$$

证明  $Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(n)e^{-j\omega n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right] e^{-j\omega n} \quad (2.2.33)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

交换积分与求和的次序，得到：

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * H(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

该定理表明，在时域两序列相乘，转移到频域时服从卷积关系。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 7. 帕斯维尔 (Parseval) 定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.2.35)$$

证明

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) x^*(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

---

帕斯维尔定理表明了信号时域的能量与频域的能量关系。

表2.2.1综合了FT的性质，这些性质在分析问题和实际应用中是很重要的。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

表2.2.1 序列傅里叶变换的性质定理

序 列	傅 里 叶 变 换
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
$y(n)$	$Y(e^{j\omega})$
$ax(n) + by(n)$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$ , $a$ 、 $b$ 为常数
$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
$x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{-j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
$nx(n)$	$j[dX(e^{j\omega})/d\omega]$
$\text{Re}[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega})$
$j \text{Im}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega})$
$x_e(n)$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$
$x_o(n)$	$j \text{Im}[X(e^{j\omega})]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x(n) ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	



### 2.3 周期序列的离散傅里叶级数及傅里叶变换表示式

因为周期序列不满足（2.2.2）式绝对可和的条件，因此它的FT并不存在，但由于是周期性的，可以展成离散傅里叶级数，引入奇异函数 $\delta(\cdot)$ ，其FT可以用公式表示出来。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2.3.1 周期序列的离散傅里叶级数

设 $\tilde{x}(n)$ 是以 $N$ 为周期的周期序列，展成傅里叶级数如下：

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.3.1)$$

式中， $a_k$ 是傅里叶级数的系数。为求系数 $a_k$ ，将上式

两边乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$ ，并对 $n$ 在一个周期 $N$ 中求和，即

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

式中

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \begin{cases} N, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (2.3.2)$$

因此

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad -\infty < k < \infty \quad (2.3.3)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

上式中， $k$ 和 $n$ 均取整数，当 $k$ 或者 $n$ 变化时，  
是周期为 $N$ 的周期函数，可表示成

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad l \text{ 取整数}$$

因此，系数 $a_k$ 也是周期序列，满足 $a_k = a_{k+lN}$ 。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

令  $\tilde{X}(k) = Na_k$ ，并将(2.3.3)式代入，得到

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad -\infty < k < \infty \quad (2.3.4)$$

上式中  $\tilde{X}(k)$  也是一个以  $N$  为周期的周期序列，称为  $\tilde{x}(n)$  的离散傅里叶系数，用 **DFS(Discrete Fourier Series)** 表示。

将  $a_k = \frac{1}{N} \tilde{X}(k)$  代入(2.31)式，得到

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.3.5)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

将(2.3.4)式和(2.3.5)式重写如下：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.3.6)$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.3.7)$$

(2.3.6)式和(2.3.7)式称为一对 $DFS$ 。(2.3.5)式表明将周期序列分解成 $N$ 次谐波，第 $k$ 个谐波频率为 $\omega_k=(2\pi/N)k$ ,  $k=0, 1, 2 \dots N-1$ ，幅度为 $(1/N)\tilde{X}(k)$ 。基波分量的频率是 $2\pi/N$ ，幅度是 $(1/N)\tilde{X}(1)$ 。一个周期序列可以用其 $DFS$ 表示它的频谱分布规律。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.3.1】** 设 $x(n)=R_4(n)$ ，将 $x(n)$ 以 $N=8$ 为周期进行周期延拓，得到如图2.3.1(a)所示的周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，周期为8，求DFS[  $\tilde{x}(n)$  ]。

解： 按照(2.3.6)式,有  $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{7} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{\pi}{4}kn}$

$$= \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k \cdot 4}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$
$$= \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k} (e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k})}{e^{-j\frac{\pi}{8}k} (e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k})} = e^{-j\frac{3\pi}{8}k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{8}k}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

其幅度特性  $|\tilde{X}(k)|$  如图2.3.1(b)所示。

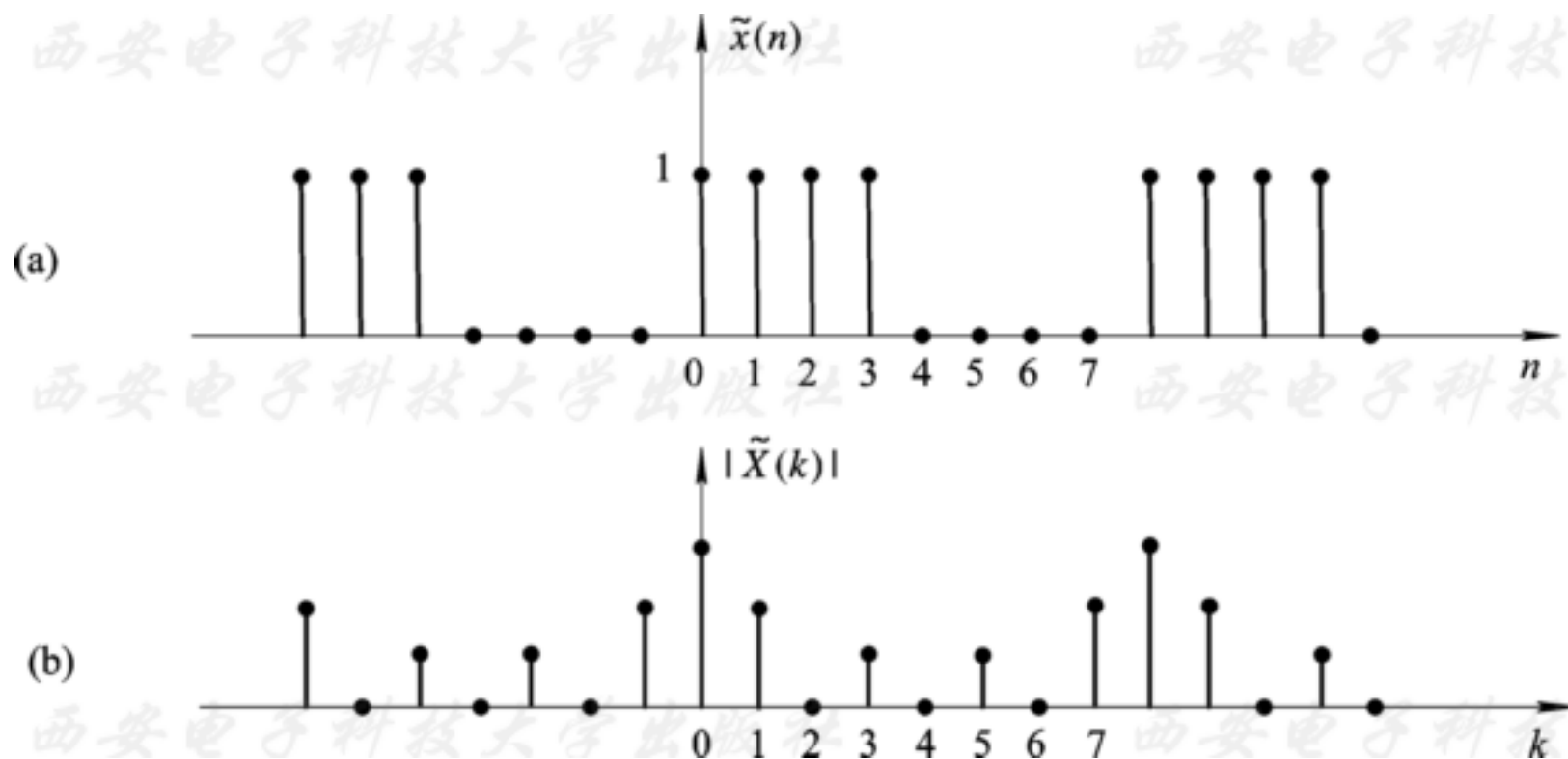


图2.3.1 例2.3.1图

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2.3.2 周期序列的傅里叶变换表示式

在模拟系统中,  $x_a(t) = e^{j\Omega_0 t}$ , 其傅里叶变换是在  $\Omega = \Omega_0$  处的单位冲激函数, 强度是  $2\pi$ , 即

$$\begin{aligned} X_a(j\Omega) &= FT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt \\ &= 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

对于时域离散系统中,  $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ ,  $2\pi / \omega_0$  为有理数, 暂时假定其FT的形式与(2.3.8)式一样, 即是在  $\omega = \omega_0$  处的单位冲激函数, 强度为  $2\pi$ , 但由于  $n$  取整数, 下式成立

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j(\omega_0 + 2\pi r)n}, r \text{ 取整数}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

因此  $e^{j\omega_0 n}$  的FT为

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[e^{j\omega_0 n}] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) \quad (2.3.9)$$

(2.3.9)式表示复指数序列的FT是在  $\omega_0 + 2\pi r$  处的单位冲激函数，强度为  $2\pi$ ，如图2.3.2所示。

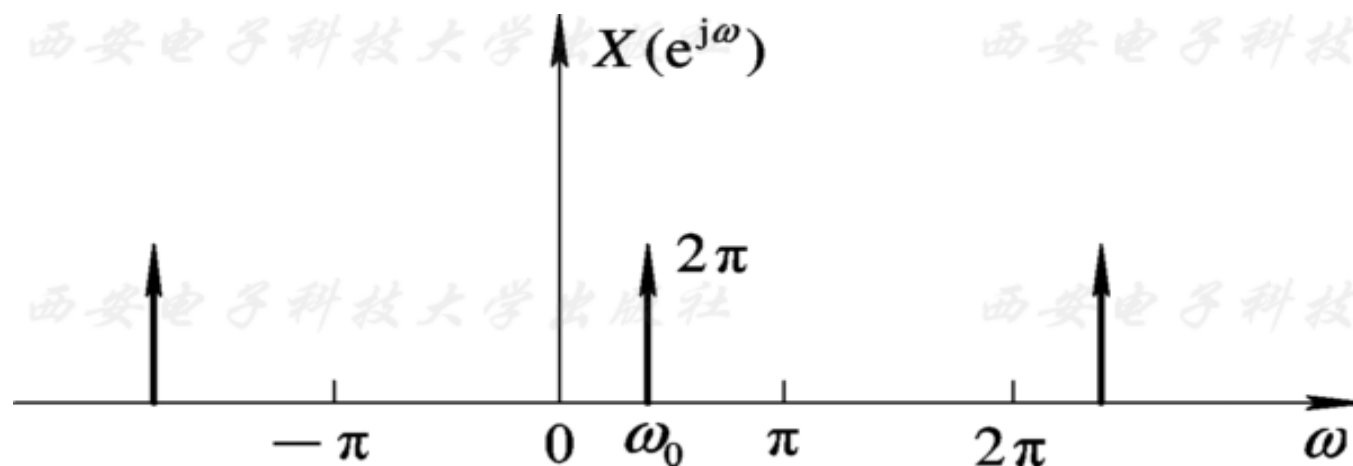


图2.3.2  $e^{j\omega_0 n}$  的FT

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

但这种假定如果成立，则要求按照（2.3.9）式的逆变换必须存在，且唯一等于 $e^{j\omega_0 n}$ ，下面进行验证。按照IFT定义，对（2.3.9）式两边进行IFT，得到：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) e^{j\omega n} d\omega$$

观察图2.3.2，在 $-\pi \sim +\pi$ 区间，只包括一个单位冲激函数 $\delta(\omega - \omega_0)$ ，等式右边为 $e^{j\omega_0 n}$ ，因此得到下式：

$$e^{j\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = IFT[X(e^{j\omega})]$$

证明了（2.3.9）式确实是 $e^{j\omega_0 n}$ 的FT，前面的暂时假定是正确的。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

对于一般周期序列  $\tilde{x}(n)$ ，按 (2.3.7) 式展成 *DFS*，  
第  $k$  次谐波为  $(\tilde{X}(k)/N)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ ，类似于复指数序列的 **FT**，  
其 **FT** 为

$$\frac{2\pi\tilde{X}(k)}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r\right)$$

因此  $\tilde{x}(n)$  的 **FT** 如下式：

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[\tilde{x}(n)] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2\pi\tilde{X}(k)}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r\right)$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

式中,  $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。如果让 $k$ 在 $-\infty \sim \infty$ 区间变化, 上式可简化成

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \quad (2.3.10)$$

式中

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

(2.3.10)式就是周期性序列的傅里叶变换表示式。需要说明的是, 上面公式中的 $\delta(\omega)$ 表示单位冲激函数, 而 $\delta(n)$ 表示单位脉冲序列, 由于括弧中的自变量不同, 因而不会引起混淆。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

表2.3.2 基本序列的傅里叶变换

序 列	傅里叶变换
$\delta(n)$	1
$a^n u(n) \quad  a  < 1$	$(1 - ae^{-j\omega})^{-1}$
$R_N(n)$	$e^{-j(N-1)\omega/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$
$u(n)$	$(1 - e^{-j\omega})^{-1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$
$x(n) = 1$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
$e^{j\omega_0 n} \quad 2\pi/\omega_0 \text{ 为有理数}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$
$\cos\omega_0 n \quad 2\pi/\omega_0 \text{ 为有理数}$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$
$\sin\omega_0 n \quad \pi/\omega_0 \text{ 为有理数}$	$-j\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

表中 $u(n)$ 序列的傅里叶变换推导如下:

$$\text{令} \quad x(n) = u(n) - \frac{1}{2} \quad (2.3.11)$$

$$x(n-1) = u(n-1) - \frac{1}{2}$$

$$x(n) - x(n-1) = u(n) - u(n-1) = \delta(n) \quad (2.3.12)$$

对(2.3.12)式进行FT, 得到:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}$$

对(2.3.11)式进行FT, 得到:

$$X(e^{j\omega}) = U(e^{j\omega}) - \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

【例2.3.2】 求例2.3.1中周期序列的FT。

解 将例2.3.1中得到的  $\tilde{X}(k)$  代入 (2.3.10) 式中, 得到:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin(\pi k / 2)}{\sin(\pi k / 8)} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}k\right)$$

其幅频特性如图2.3.3所示。

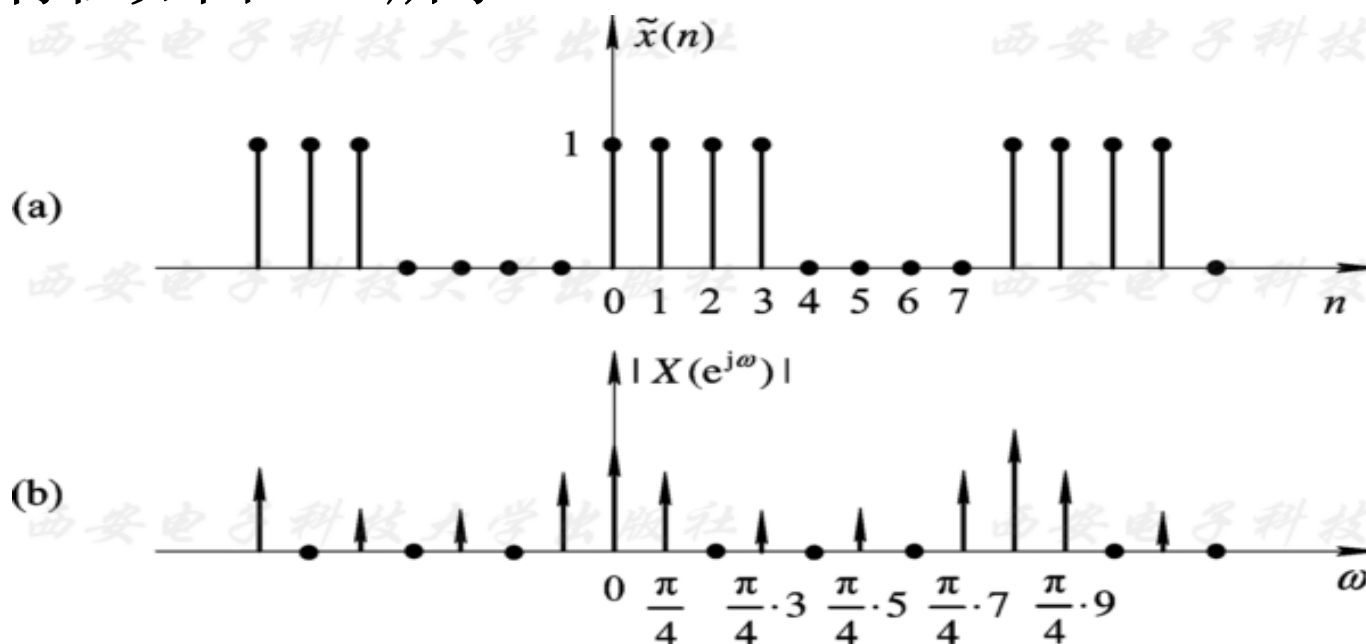


图2.3.3 例2.3.2图

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

【例2.3.3】 令  $\tilde{x}(n) = \cos \omega_0 n$ ,  $2\pi / \omega_0$  为有理数, 求其FT。

解 将  $\tilde{x}(n)$  用欧拉公式展开:

按照 (2.3.9) 式, 其FT推导如下:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= FT[\cos \omega_0 n] \\ &= \frac{1}{2} \bullet 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)] \\ &= \pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi r)] \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

(2.3.13)式表明,  $\cos \omega_0 n$ 的FT是在 $\omega = \pm \omega_0$ 处的单位冲激函数, 强度为 $\pi$ , 且以 $2\pi$ 为周期进行延拓, 如图2.3.4所示。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

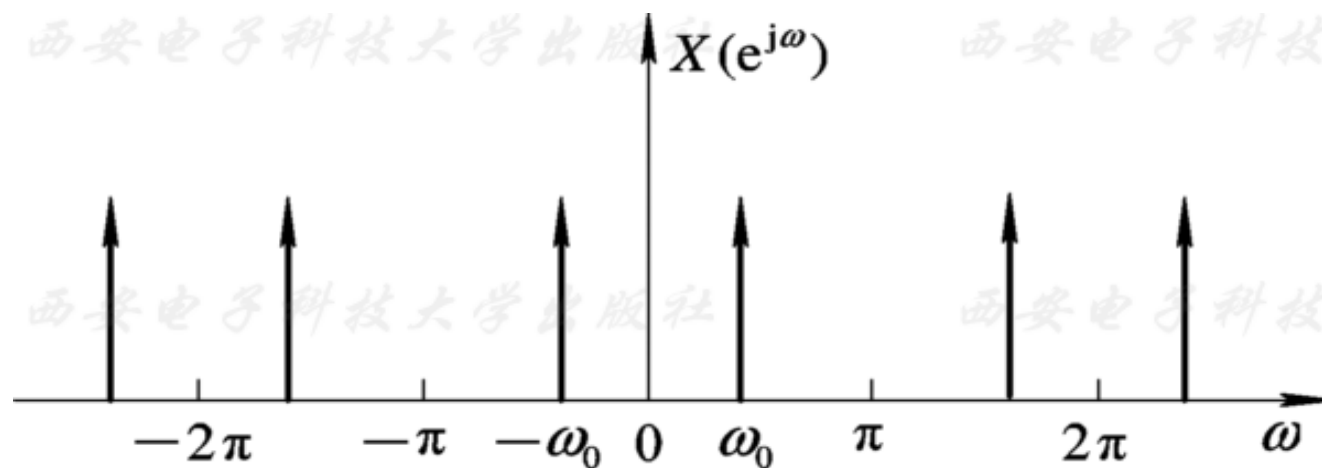


图2.3.4  $\cos \omega_0 n$  的FT



### 2.4 时域离散信号的傅里叶变换与模拟信号傅里叶变换之间的关系

时域离散信号与模拟信号是两种不同的信号，傅里叶变换也不同，如果时域离散信号是由某模拟信号采样得来，那么时域离散信号的傅里叶变换和该模拟信号的傅里叶变换之间有一定的关系。下面推导这一关系式。

公式 $x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=x_a(nT)$ 表示了由采样得到的时域离散信号和模拟信号的关系，而理想采样信号  $\hat{x}_a(t)$  和模拟信号的关系用（1.5.2）式表示，重写如下：

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

对上式进行傅里叶变换, 得到:

$$\begin{aligned}\hat{X}_a(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-j\Omega t} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT}\end{aligned}$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

令 $\omega = \Omega T$ , 且 $x(n) = x_a(nT)$ , 得到:

$$X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega) \quad (2.4.1)$$

或者写成:

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \quad (2.4.2)$$

式中

$$\Omega_s = 2\pi F_s = \frac{2\pi}{T}$$

(2.4.2)式也可以表示成

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}) \quad (2.4.3)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

(2.4.1)、(2.4.2)和(2.4.3)式均表示时域离散信号的傅里叶变换和模拟信号傅里叶变换之间的关系。由这些关系式可以得出两点结论。一点结论是时域离散信号的频谱也是模拟信号的频谱周期性延拓，周期为  $\Omega_s = 2\pi F_s = \frac{2\pi}{T}$ ，因此由模拟信号进行采样得到时域离散信号时，同样要满足前面推导出的采样定理，采样频率必须大于等于模拟信号最高频率的2倍以上，否则也会产生频域混叠现象，频率混叠在 $\Omega_s/2$ 附近最严重，在数字域则是在 $\pi$ 附近最严重。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

另一点结论是计算模拟信号的FT可以用计算相应的时域离散信号的FT得到，方法是：首先按照采样定理，以模拟信号最高频率的两倍以上频率对模拟信号进行采样得到时域离散信号，再通过计算机对该时域离散信号进行FT，得到它的频谱函数，再乘以采样间隔 $T$ 便得到模拟信号的FT，注意关系式 $\omega = \Omega T$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

按照数字频率和模拟频率之间的关系，在一些文献中经常使用归一化频率 $f' = f/F_s$ 或 $\Omega' = \Omega/\Omega_s$ ,  $\omega' = \omega/2\pi$ , 因为 $f'$ 、 $\Omega'$ 和 $\omega'$ 都是无量纲量，刻度是一样的，将 $f$ 、 $\Omega$ 、 $\omega$ 、 $f'$ 、 $\Omega'$ 、 $\omega'$ 的定标值对应关系用图2.4.1表示。

图2.4.1表明，模拟折叠频率 $F_s/2$ 对应数字频率 $\pi$ ；如果采样定理满足，则要求模拟最高频率 $f_c$ 不能超过 $F_s/2$ ；如果不满足采样定理，则会在 $\omega=\pi$ 附近，或者 $f=F_s/2$ 附近引起频率混叠。以上几个频率之间的定标关系很重要，尤其在模拟信号数字处理中，经常需要了解它们的对应关系。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

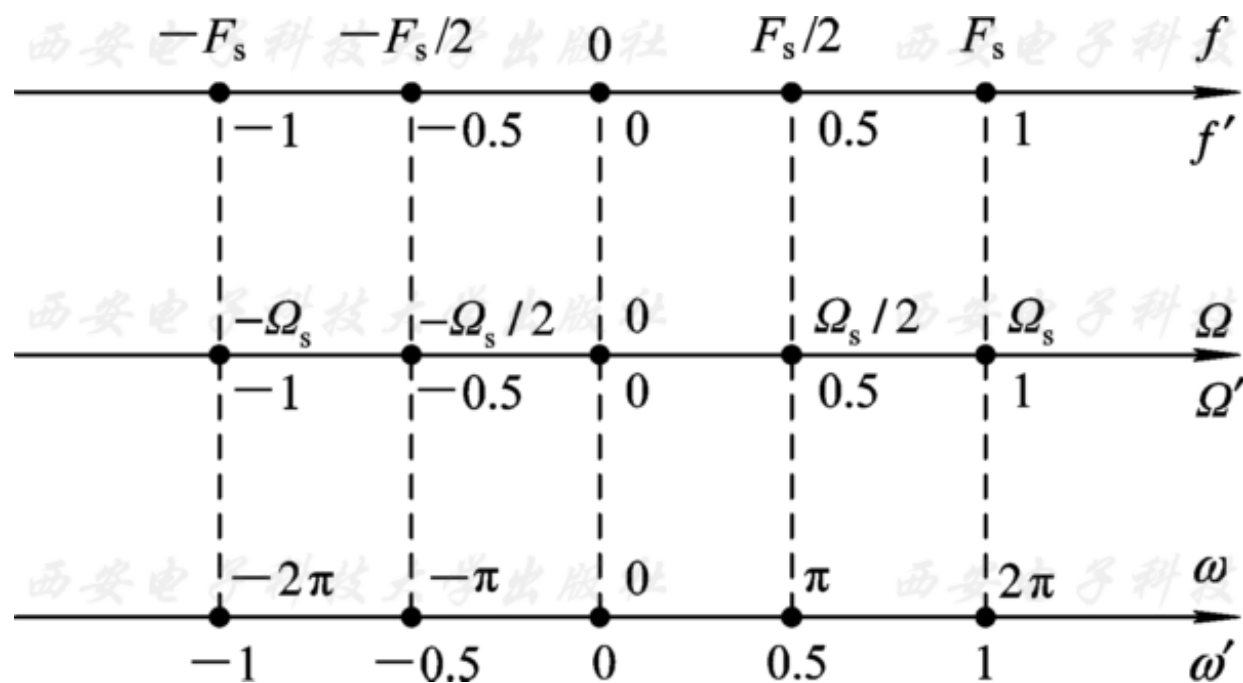


图2.4.1 模拟频率与数字频率之间的定标关系

### 2.5 序列的Z变换

在模拟信号系统中，用傅里叶变换进行频域分析，拉普拉斯变换可作为傅里叶变换的推广，对信号进行复频域分析。在时域离散信号和系统中，用序列的傅里叶变换进行频域分析，Z变换则是其推广，用以对序列进行复频域分析。因此Z变换在数字信号处理中同样起着很重要的作用。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2.5.1 Z变换的定义

序列 $x(n)$ 的Z变换定义为

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.5.1)$$

式中 $z$ 是一个复变量，它所在的复平面称为 $z$ 平面。注意在定义中，对 $n$ 求和是在 $-\infty$ 、 $+\infty$ 之间求和，可以称为双边Z变换。还有一种称为单边Z变换的定义，如下式：

$$X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2.5.2)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

这种单边Z变换的求和限是从零到无限大，因此对于因果序列，用两种Z变换定义计算的结果是一样的。本书中如不另外说明，均用双边Z变换对信号进行分析和变换。

(2.5.1) 式Z变换存在的条件是等号右边级数收敛，要求级数绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)z^{-n}| < \infty \quad (2.5.3)$$

使(2.5.3)式成立，Z变量取值的域称为收敛域。一般收敛域为环状域，即

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

令 $z=re^{j\omega}$ ，代入上式得到 $R_{x-}<r<R_{x+}$ ，收敛域是分别以 $R_{x+}$ 和 $R_{x-}$ 为收敛半径的两个圆形成的环状域(如图 2.5.1 中所示的斜线部分)。当然， $R_{x-}$ 可以小到零， $R_{x+}$ 可以大到无穷大。收敛域的示意图如图2.5.1所示。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

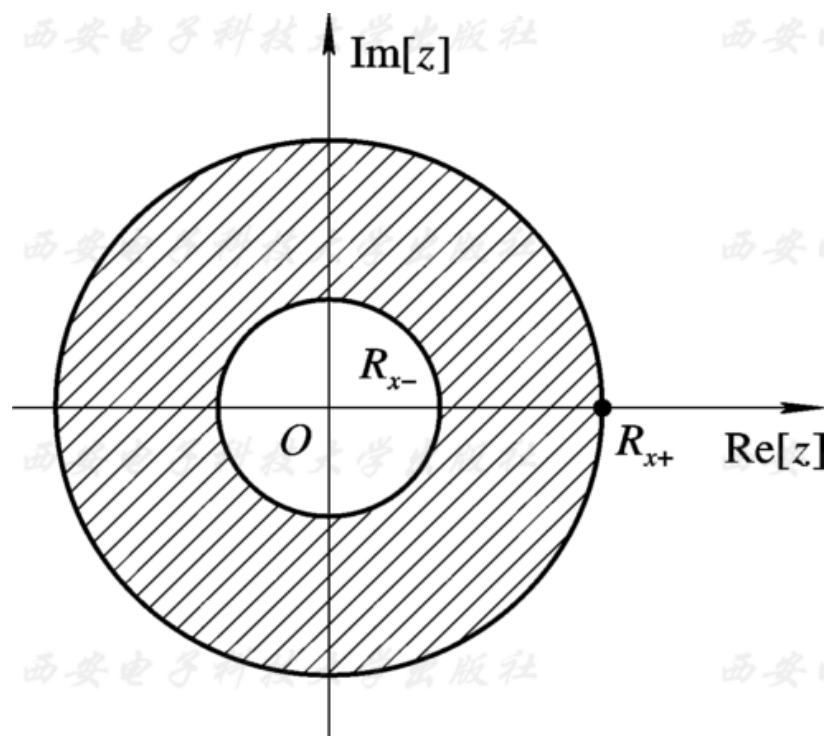


图2.5.1 变换的收敛域

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

常用的Z变换是一个有理函数，用两个多项式之比表示：

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

分子多项式 $P(z)$ 的根是 $X(z)$ 的零点，分母多项式 $Q(z)$ 的根是 $X(z)$ 的极点。在极点处Z变换不存在，因此收敛域中没有极点，收敛域总是用极点限定其边界。

对比序列的傅里叶变换定义（2.2.1）式，很容易得到傅里叶变换和Z变换（ZT）之间的关系，用下式表示：

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} \quad (2.5.4)$$

式中,  $z=e^{j\omega}$ 表示在 $z$ 平面上 $r=1$ 的圆, 该圆称为单位圆。

(2.5.4) 式表明单位圆上的 $Z$ 变换就是序列的傅里叶变换。如果已知序列的 $Z$ 变换, 就可用 (2.5.4) 式很方便地求出序列的傅里叶变换, 条件是收敛域中包含单位圆。

**【例2.5.1】**  $x(n)=u(n)$ , 求其 $Z$ 变换。

解

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$X(z)$ 存在的条件是 $|z^{-1}| < 1$ ，因此收敛域为 $|z| > 1$ ，因此

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$X(z)$ 表达式表明，极点是 $z=1$ ，单位圆上的Z变换不存在，或者说收敛域不包含单位圆，因此其傅里叶变换不存在，更不能用（2.5.4）式求傅里叶变换。该序列的傅里叶变换不存在，但如果引进奇异函数 $\delta(\omega)$ ，其傅里叶变换则可以表示出来（见表2.3.2）。该例同时说明一个序列的傅里叶变换不存在，但在一定收敛域内Z变换是可以存在的。

### 2.5.2 序列特性对收敛域的影响

#### 1 有限长序列

如序列 $x(n)$ 满足下式:

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n_1 \leq n \leq n_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

即序列 $x(n)$ 从 $n_1$ 到 $n_2$ 的序列值不全为零, 此范围之外序列值为零, 这样的序列称为有限长序列。  
其Z变换为

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

设 $x(n)$ 为有界序列，由于是有限项求和，除 $0$ 与 $\infty$ 两点是否收敛与 $n_1$ 、 $n_2$ 取值情况有关外，整个 $z$ 平面均收敛。如果 $n_1 < 0$ ，则收敛域不包括 $\infty$ 点；如果 $n_2 > 0$ ，则收敛域不包括 $z=0$ 点；如果是因果序列，收敛域包括 $z=\infty$ 点。具体有限长序列的收敛域表示如下：

$$n_1 < 0, n_2 \leq 0 \text{ 时, } 0 \leq |z| < \infty$$

$$n_1 < 0, n_2 > 0 \text{ 时, } 0 < |z| < \infty$$

$$n_1 \geq 0, n_2 > 0 \text{ 时, } 0 < |z| \leq \infty$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

【例2.5.2】 求 $x(n)=R_N(n)$ 的Z变换及其收敛域。

解

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

这是一个因果的有限长序列，因此收敛域为 $0 < z \leq \infty$ 。但由结果的分母可以看出，似乎 $z=1$ 是 $X(z)$ 的极点，但同时分子多项式在 $z=1$ 时也有一个零点，极、零点对消， $X(z)$ 在单位圆上仍存在，求 $R_N(n)$ 的傅里叶变换，可将 $z=e^{j\omega}$ 代入 $X(z)$ 得到，其结果和例题2.2.1中的结果（2.2.5）式是相同的。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2. 右序列

右序列是指在 $n \geq n_1$ 时, 序列值不全为零, 而在 $n < n_1$ 时, 序列值全为零的序列。右序列的Z变换表示为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

第一项为有限长序列, 设 $n_1 \leq -1$ , 其收敛域为 $0 \leq |z| < \infty$ 。第二项为因果序列, 其收敛域为 $R_{x-} < |z| \leq \infty$ ,  $R_{x-}$ 是第二项最小的收敛半径。将两收敛域相与, 其收敛域为 $R_{x-} < |z| < \infty$ 。如果是因果序列, 收敛域为 $R_{x-} < |z| \leq \infty$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

【例2.5.3】 求 $x(n)=a^n u(n)$ 的Z变换及其收敛域。

解

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

在收敛域中必须满足 $|az^{-1}| < 1$ ，因此收敛域为 $|z| > |a|$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 3. 左序列

左序列是指在 $n \leq n_2$ 时，序列值不全为零，而在 $n > n_2$ 时，序列值全为零的序列。左序列的Z变换表示为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

如果 $n_2 < 0$ ， $z=0$ 点收敛， $z=\infty$ 点不收敛，其收敛域是在某一圆（半径为 $R_{x+}$ ）的圆内，收敛域为 $0 \leq |z| < R_{x+}$ 。如果 $n_2 \geq 0$ ，则收敛域为 $0 < |z| < R_{x+}$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.5.4】** 求 $x(n)=-a^n u(-n-1)$ 的Z变换及其收敛域。

解 这里 $x(n)$ 是一个左序列，当 $n \geq 0$ 时， $x(n)=0$ ，

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} z^n \end{aligned}$$

$X(z)$ 存在要求 $|a^{-1}z| < 1$ ，即收敛域为 $|z| < |a|$ ，因此

$$X(z) = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| < a$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 4. 双边序列

一个双边序列可以看做是一个左序列和一个右序列之和，其Z变换表示为

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = X_1(z) + X_2(z) \\ X_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)z^{-n} \quad 0 \leq |z| < R_{x+} \\ X_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad R_{x-} < |z| \leq \infty \end{aligned}$$

$X(z)$ 的收敛域是 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 收敛域的交集。如果 $R_{x+} > R_{x-}$ ，则其收敛域为 $R_{x-} < |z| < R_{x+}$ ，是一个环状域；如果 $R_{x+} < R_{x-}$ ，两个收敛域没有交集， $X(z)$ 则没有收敛域，因此 $X(z)$ 不存在。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

【例2.5.5】  $x(n)=a^{|n|}$ ,  $a$ 为实数, 求 $x(n)$ 的Z变换及其收敛域。

解

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n a^{-n} \end{aligned}$$

第一部分收敛域为 $|az| < 1$ , 得 $|z| < |a|^{-1}$ ; 第二部分收敛域为 $|az|^{-1} < 1$ , 得到 $|z| > |a|$ 。如果 $|a| < 1$ , 两部分的公共收敛域为 $|a| < |z| < |a|^{-1}$ , 其Z变换如下式:

$$X(z) = \frac{az}{1-az} + \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})} \quad |a| < |z| < |a|^{-1}$$

如果 $|a| \geq 1$ , 则无公共收敛域, 因此 $X(z)$ 不存在。当 $0 < a < 1$ 时,  $x(n)$ 的波形及 $X(z)$ 的收敛域如图2.5.2所示。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

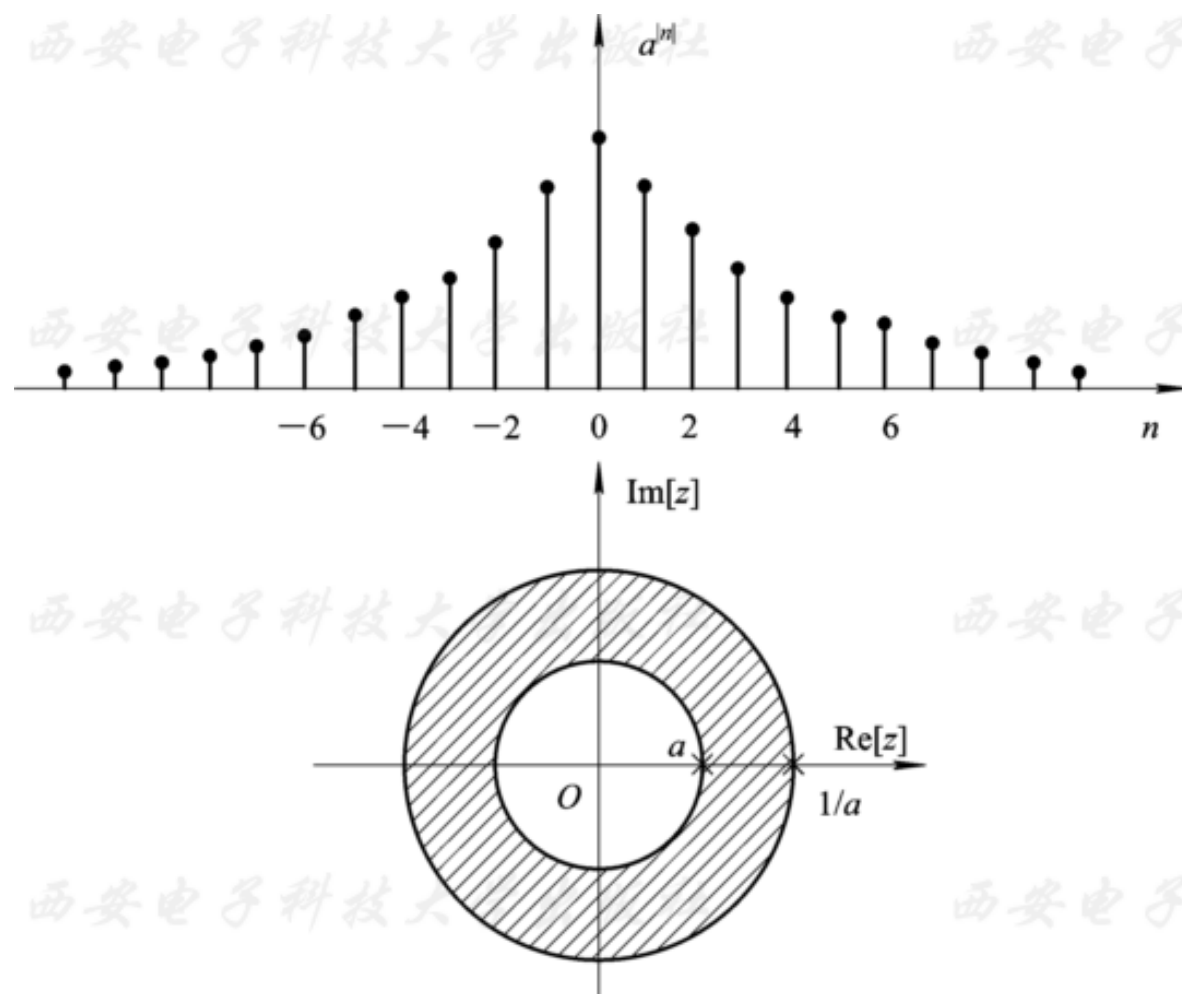


图2.5.2 例2.5.5图

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

我们注意到，例2.5.3和例2.5.4的序列是不同的，即一个是左序列，一个是右序列，但其Z变换 $X(z)$ 的函数表示式相同，仅收敛域不同。换句话说，同一个Z变换函数表达式，收敛域不同，对应的序列是不相同的。所以， $X(z)$ 的函数表达式及其收敛域是一个不可分离的整体，求Z变换就包括求其收敛域。

此外，收敛域中无极点，收敛域总是以极点为界的。如果求出序列的Z变换，找出其极点，则可以根据序列的特性，较简单地确定其收敛域。例如在例2.5.3中，其极点为 $z=a$ ，根据 $x(n)$ 是一个因果性序列，其收敛域必为： $|z|>a$ ；又例如在例2.5.4中，其极点为 $z=a$ ，但 $x(n)$ 是一个左序列，收敛域一定在某个圆内，即 $|z|<|a|$ 。



### 2.5.3 逆Z变换

计算逆Z变换的方法有留数法、部分分式展开法和幂级数法（长除法）。下面仅介绍留数法和部分分式展开法，重点放在留数法。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 1. 用留数定理求逆Z变换

序列的Z变换及其逆Z变换表示如下：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2.5.5)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z)z^{n-1} dz \quad c \in (R_{x-}, R_{x+})$$

式中,  $c$  是  $X(z)$  收敛域中一条包围原点的逆时针的闭合曲线, 如图2.5.3所示。求逆Z变换时, 直接计算围线积分是比较麻烦的, 用留数定理求则很容易。为了表示简单, 用  $F(z)$  表示被积函数:  $F(z)=X(z)z^{n-1}$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

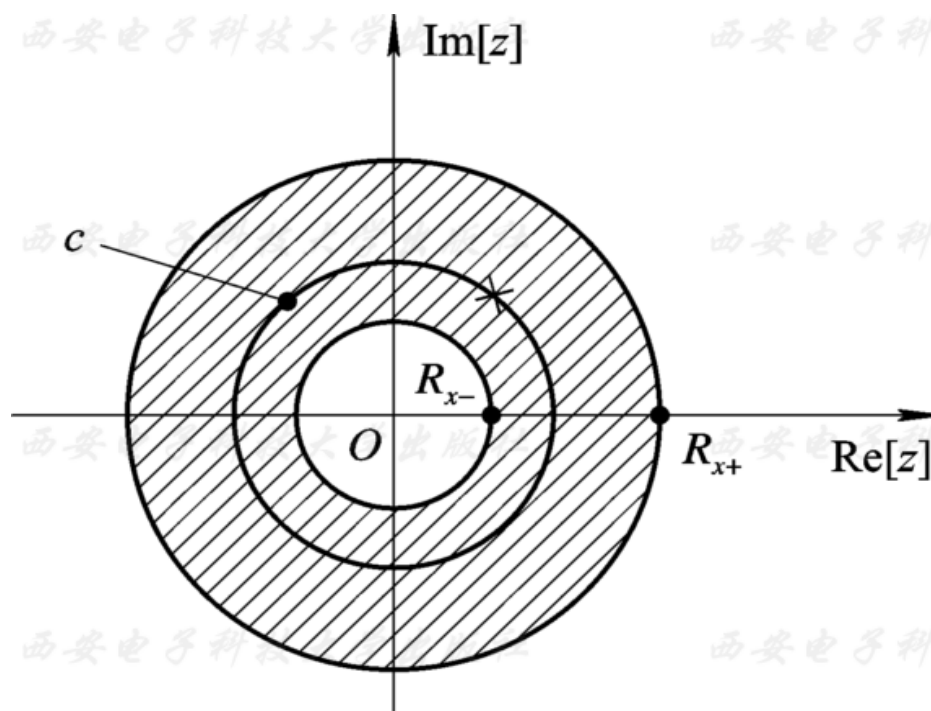


图2.5.3 围线积分路径

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

如果 $F(z)$ 在围线 $c$ 内的极点用 $z_k$ 表示, 则根据留数定理有

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz = \sum_k \text{Res}[F(z), z_k] \quad (2.5.6)$$

式中,  $\text{Res}[F(z), z_k]$ 表示被积函数 $F(z)$ 在极点 $z=z_k$ 的留数, 逆Z变换是围线 $c$ 内所有的极点留数之和。

如果 $z_k$ 是单阶极点, 则根据留数定理有

$$\text{Res}[F(z), z_k] = (z - z_k) \cdot F(z) \Big|_{z=z_k} \quad (2.5.7)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

如果 $z_k$ 是 $N$ 阶极点，则根据留数定理有

$$\text{Res}[F(z), z_k] = \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z - z_k)^N F(z)] \Big|_{z=z_k} \quad (2.5.8)$$

(2.5.8) 式表明，对于 $N$ 阶极点，需要求 $N-1$ 次导数，这是比较麻烦的。如果 $c$ 内有多阶极点，而 $c$ 外没有多阶极点，则可以根据留数辅助定理改求 $c$ 外的所有极点留数之和，使问题简单化。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

如果 $F(z)$ 在 $z$ 平面上有 $N$ 个极点，在收敛域内的封闭曲线 $c$ 将 $z$ 平面上的极点分成两部分：一部分 $c$ 是内极点，设有 $N_1$ 个极点，用 $z_{1k}$ 表示；另一部分是 $c$ 外极点，有 $N_2$ 个，用 $z_{2k}$ 表示。 $N=N_1+N_2$ 。根据留数辅助定理，下式成立：

$$\sum_{k=1}^{N_1} \text{Res}[F(z), z_{1k}] = - \sum_{k=1}^{N_2} \text{Res}[F(z), z_{2k}] \quad (2.5.9)$$

注意：（2.5.9）式成立的条件是 $F(z)$ 的分母阶次应比分子阶次高二阶以上。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

设 $X(z)=P(z)/Q(z)$ ,  $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别是 $M$ 与 $N$ 阶多项式。

(2.5.9) 式成立的条件是

$$N-M-n+1 \geq 2$$

因此要求

$$n < N-M \quad (2.5.10)$$

如果 (2.5.10) 式满足,  $c$  圆内极点中有多阶极点, 而  $c$  圆外没有多阶极点, 则逆Z变换的计算可以按照 (2.5.9) 式, 改求  $c$  圆外极点留数之和, 最后加一个负号。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.5.6】** 已知 $X(z)=(1-az^{-1})^{-1}$ ,  $|z|>a$ , 求其逆Z变换 $x(n)$ 。

解

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c (1-az^{-1})^{-1} z^{n-1} dz$$

$$F(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} z^{n-1} = \frac{z^n}{z-a}$$

为了用留数定理求解, 先找出 $F(z)$ 的极点。显然,  $F(z)$ 的极点与 $n$ 的取值有关。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

极点有两个： $z=a$ ；当 $n<0$ 时，其中 $z=0$ 的极点和 $n$ 的取值有关。 $n\geq 0$ 时， $z=0$ 不是极点； $n<0$ 时， $z=0$ 是一个 $n$ 阶极点。因此，分成 $n\geq 0$ 和 $n<0$ 两种情况求 $x(n)$ 。

$n\geq 0$ 时， $F(z)$ 在 $c$ 内只有1个极点： $z_1=a$ ；

$n<0$ 时， $F(z)$ 在 $c$ 内有2个极点： $z_1=a, z_2=0$ （ $n$ 阶）；

所以，应当分段计算 $x(n)$ 。

$n\geq 0$  时，

$$x(n) = \text{Res}[F(z), a] = (z - a) \frac{z^n}{z - a} \bigg|_{z=a} = a^n$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$n < 0$ 时,  $z=0$ 是 $n$ 阶极点, 不易求留数。采用留数辅助定理求解, 先检查(2.5.10)式是否满足。该例题中  $N=M=1$ ,  $N-M=0$ , 所以 $n < 0$ 时, 满足(2.5.10)式, 可以采用留数辅助定理求解, 改求圆外极点留数, 但对于 $F(z)$ , 该例题中圆外没有极点(见图2.5.4), 故 $n < 0, x(n)=0$ 。最后得到该例题的原序列为

$$x(n)=a^n u(n)$$

事实上, 该例题由于收敛域是 $|z| > a$ , 根据前面分析的序列特性对收敛域的影响知道,  $x(n)$ 一定是因果序列, 这样 $n < 0$ 部分一定为零, 无需再求。本例如此求解是为了证明留数辅助定理法的正确性。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

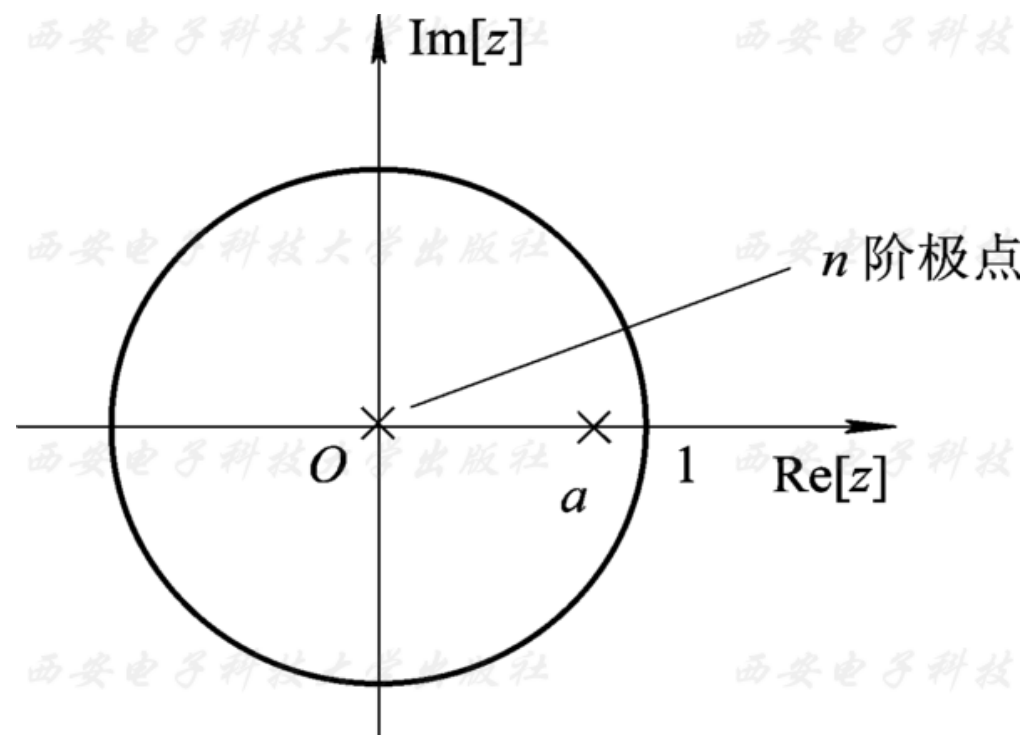


图2.5.4 例2.5.6中 $n < 0$ 时 $F(z)$ 的极点分布

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.5.7】** 已知  $X(z) = \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$  ,  $|a| < 1$   
求其逆变换 $x(n)$ 。

解 分析 $X(z)$ , 得到其极点分布如图2.5.5所示。图中有两个极点:  $z=a$ 和 $z=a^{-1}$ , 这样收敛域有三种选法, 它们是

- (1)  $|z| > |a^{-1}|$ , 对应的 $x(n)$ 是因果序列;
- (2)  $|z| < |a|$ , 对应的 $x(n)$ 是左序列;
- (3)  $|a| < |z| < |a^{-1}|$ , 对应的 $x(n)$ 是双边序列。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

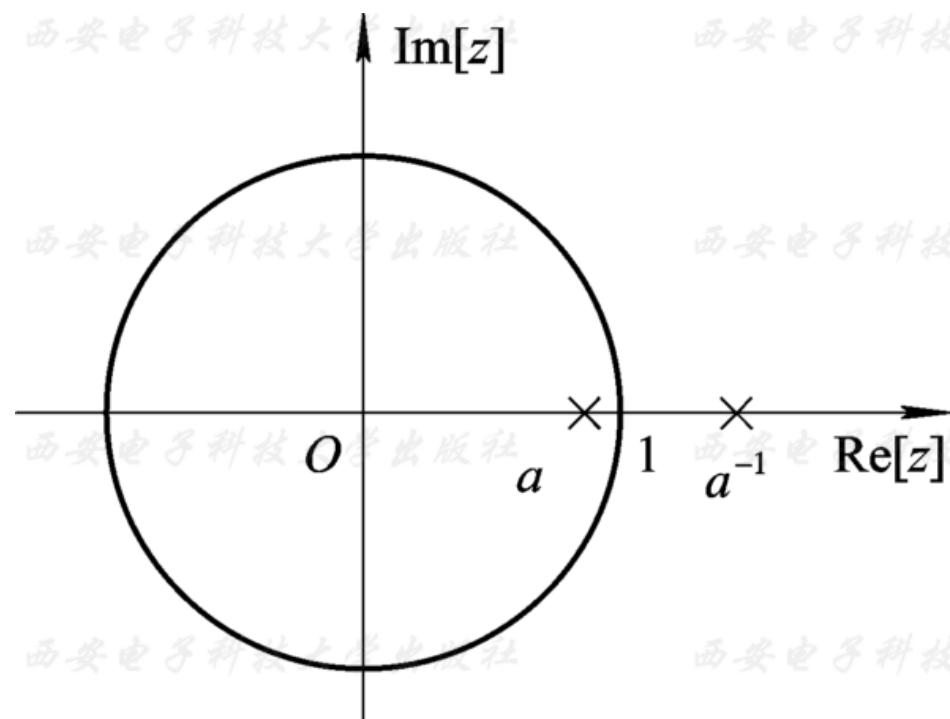


图2.5.5 例2.5.7中 $X(z)$ 的极点

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

下面分别按照不同的收敛域求其 $x(n)$ 。

(1) 收敛域为 $|z|>|a^{-1}|$ :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})} z^{n-1} \\ &= \frac{1-a^2}{-a(z-a)(z-a^{-1})} z^n \end{aligned}$$

这种情况的原序列是因果的右序列，无须求 $n<0$ 时的 $x(n)$ 。当 $n\geq 0$ 时， $F(z)$ 在 $c$ 内有两个极点： $z=a$ 和 $z=a^{-1}$ ，因此

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$x(n) = \text{Res}[F(z), a] + \text{Res}[F(z), a^{-1}]$$

$$= \frac{(1-a^2)z^n}{(z-a)(1-az)}(z-a) \Big|_{z=a} + \frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a^{-1}) \Big|_{z=a^{-1}}$$

$$= a^n - a^{-n}$$

最后表示成： $x(n)=(a^n-a^{-n})u(n)$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### (2) 收敛域为 $|z|<|a|$ :

这种情况原序列是左序列，无须计算 $n \geq 0$ 情况。实际上，当 $n \geq 0$ 时，围线积分 $c$ 内没有极点，因此 $x(n)=0$ 。 $n < 0$ 时， $c$ 内只有一个极点 $z=0$ ，且是 $n$ 阶极点，改求 $c$ 外极点留数之和。

$n < 0$ 时，

$$x(n) = -\text{Res}[F(z), a] - \text{Res}[F(z), a^{-1}]$$

$$= -\frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a)\Big|_{z=a} - \frac{(1-a^2)z^n}{-a(z-a)(z-a^{-1})}(z-a^{-1})\Big|_{z=a^{-1}}$$

$$= -a^n - (-a^{-n}) = a^{-n} - a^n$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

最后将 $x(n)$ 表示成封闭式:

$$x(n)=(a^{-n}-a^n)u(-n-1)$$

(3) 收敛域为 $|a|<|z|<|a^{-1}|$ :

这种情况对应的 $x(n)$ 是双边序列。根据被积函数 $F(z)$ , 按 $n\geq 0$ 和 $n<0$ 两种情况分别求 $x(n)$ 。

$n\geq 0$ 时,  $c$ 内只有1个极点:  $z=a$ ,

$$x(n)=\text{Res}[F(z), a]=a^n$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$n < 0$ 时,  $c$ 内极点有2个, 其中 $z=0$ 是 $n$ 阶极点, 改求 $c$ 外极点留数,  $c$ 外极点只有 $z=a^{-1}$ , 因此

$$x(n) = -\text{Res}[F(z), a^{-1}] = a^{-n}$$

最后将 $x(n)$ 表示为

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ a^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

即

$$x(n) = a^{|n|}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2. 部分分式展开法（不作要求）

对于大多数单阶极点的序列，常常也用部分分式展开法求逆Z变换。

设 $x(n)$ 的Z变换 $X(z)$ 是有理函数，分母多项式是 $N$ 阶，分子多项式是 $M$ 阶，将 $X(z)$ 展成一些简单的常用的部分分式之和，通过查表（参考表2.5.1）求得各部分的逆变换，再相加便得到原序列 $x(n)$ 。设 $X(z)$ 只有 $N$ 个一阶极点，可展成下式：

$$X(z) = A_0 + \sum_{m=1}^N \frac{A_m z}{z - z_m} \quad (2.5.11)$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_0}{z} + \sum_{m=1}^N \frac{A_m}{z - z_m} \quad (2.5.12)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

观察上式， $X(z)/z$ 在 $z=0$ 的极点留数就是系数 $A_0$ ，在极点 $z=z_m$ 的留数就是系数 $A_m$ 。

$$A_0 = \text{Res} \left[ \frac{X(z)}{z}, 0 \right] \quad (2.5.13)$$

$$A_m = \text{Res} \left[ \frac{X(z)}{z}, z_m \right] \quad (2.5.14)$$

求出 $A_m$ 系数( $m=0, 1, 2, \dots, N$ )后，查表2.5.1可求得 $x(n)$ 序列。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.5.8】** 已知  $X(z) = \frac{5z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$ ,  $2 < |z| < 3$ ,  
 $2 < |z| < 3$ , 求逆Z变换。

$$\text{解 } \frac{X(z)}{z} = \frac{5z^{-2}}{1+z^{-1}-6z^{-2}} = \frac{5}{z^2+z-6} = \frac{5}{(z-2)(z+3)} = \frac{A_1}{z-2} + \frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1 = \text{Res} \left[ \frac{X(z)}{z}, 2 \right] = \frac{X(z)}{z} (z-2) \Big|_{z=2} = 1$$

$$A_2 = \text{Res} \left[ \frac{X(z)}{z}, -3 \right] = \frac{X(z)}{z} (z+3) \Big|_{z=-3} = -1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+3}$$

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} - \frac{1}{z+3z^{-1}}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

因为收敛域为 $2 < |z| < 3$ ，第一部分极点是 $z=2$ ，因此收敛域为 $|z| > 2$ 。第二部分极点是 $z=-3$ ，收敛域应取 $|z| < 3$ 。查表2.5.1，得到：

$$x(n) = 2^n u(n) + (-3)^n u(-n-1)$$

注意：在进行部分分式展开时，也用到求留数问题；求各部分分式对应的原序列时，还要确定它的收敛域在哪里，因此一般情况下不如直接用留数法求方便。一些常见的序列的Z变换可参考表2.5.1。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

表2.5.1 常见序列的Z变换

序 列	Z 变 换	收 敛 域
$\delta(n)$	1	整体 $z$ 平面
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z >1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$ z >0$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z >1$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
$e^{j\omega_0 n} u(n)$	$\frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}}$	$ z >1$
$\sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z >1$
$\cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z >1$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2.5.4 Z变换的性质和定理

#### 1. 线性性质

设  $m(n)=ax(n)+by(n)$        $a, b$  为常数

$$X(z)=ZT[x(n)] \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$Y(z)=ZT[y(n)] \quad R_{y-}<|z|<R_{y+}$$

$$\text{则 } M(z)=ZT[m(n)]=aX(z)+bY(z) \quad R_{m-}<|z|<R_{m+} \quad (2.2.15)$$

$$R_{m+}=\min[R_{x+}, R_{y+}]$$

$$R_{m-}=\max[R_{x-}, R_{y-}]$$

这里,  $M(z)$  的收敛域  $(R_{m-}, R_{m+})$  是  $X(z)$  和  $Y(z)$  的公共收敛域, 如果没有公共收敛域, 例如当  $R_{x+}>R_{x-}>R_{y+}>R_{y-}$  时, 则  $M(z)$  不存在。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2. 序列的移位性质

设  $X(z)=ZT[x(n)]$        $R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则

$$ZT[x(n-n_0)]=z^{-n_0}X(z), \quad R_{x-}<|z|<R_{x+} \quad (2.5.16)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 3. 序列乘以指数序列的性质

$$\text{设 } X(z)=\text{ZT}[x(n)] \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$y(n)=a^n x(n) \quad a \text{ 为常数}$$

$$\text{则 } Y(z)=\text{ZT}[a^n x(n)]=X(a^{-1}z) \quad |a|R_{x-}<|z|<|a|R_{x+} \quad (2.5.17)$$

证明

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

因为 $R_{x-}<|a^{-1}z|<R_{x+}$ , 得到 $|a|R_{x-}<|z|<|a|R_{x+}$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 4. 序列乘以 $n$ 的性质

设  $X(z)=\text{ZT}[x(n)]$   $R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则

$$\text{ZT}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2.5.18)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

证明

$$\begin{aligned}\frac{dX(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{d}{dz} [z^{-n}] \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n) z^{-n} \\ &= -z^{-1} \text{ZT}[nx(n)]\end{aligned}$$

因此

$$\text{ZT}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 5. 复共轭序列的ZT性质

$$\begin{aligned} \text{设} \quad & X(z) = \text{ZT}[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \\ \text{则} \quad & \text{ZT}[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+} \quad (2.5.19) \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned} \text{ZT}[x^*(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum [x(n)(z^*)^{-n}]^* \\ &= \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n} \right]^* = X^*(z^*) \end{aligned}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 6. 初值定理

设 $x(n)$ 是因果序列,  $X(z)=ZT[x(n)]$ , 则

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

证明

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

因此

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 7. 终值定理

若 $x(n)$ 是因果序列，其Z变换的极点，除可以有一个一阶极点在 $z=1$ 上，其它极点均在单位圆内，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) \quad (2.5.21)$$

证明

$$(z-1)X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x(n+1) - x(n)]z^{-n}$$

因为 $x(n)$ 是因果序列， $x(n)=0, n<0$ ，所以

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$(z-1)X(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{m=-1}^n x(m+1)z^{-m} - \sum_{m=0}^n x(m)z^{-m} \right]$$

因为 $(z-1)X(z)$ 在单位圆上无极点，上式两端对 $z=1$ 取极限：

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{m=-1}^n x(n+1)z^{-n} - \sum_{m=0}^n x(n)z^{-n} \right] \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{m=-1}^n x(n+1) - \sum_{m=0}^n x(n) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [x(0) + x(1) + \dots + x(n+1) - x(0) - x(1) - \dots - x(n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x(n+1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \end{aligned}$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

终值定理也可用 $X(z)$ 在 $z=1$ 点的留数表示, 因为

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z) = \text{Res}[X(z), 1]$$

因此

$$x(\infty) = \text{Res}[X(z), 1] \quad (2.5.22)$$

如果在单位圆上 $X(z)$ 无极点, 则 $x(\infty)=0$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 8. 时域卷积定理

设  $w(n)=x(n)*y(n)$

$$X(z)=ZT[x(n)] \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$Y(z)=ZT[y(n)] \quad R_{y-}<|z|<R_{y+}$$

则

$$W(z)=ZT[w(n)]=X(z)Y(z) \quad R_{w-}<|z|<R_{w+} \quad (2.5.23)$$

$$R_{w+}=\min[R_{x+}, R_{y+}]$$

$$R_{w-}=\max[R_{x-}, R_{y-}]$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

证明  $W(z) = ZT[x(n) * y(n)]$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m) \right] z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-m)z^{-n} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-m}Y(z) \\ &= X(z) \cdot Y(z) \end{aligned}$$

$W(z)$  的收敛域就是 $X(z)$ 和 $Y(z)$ 的公共收敛域。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.5.9】** 已知网络的单位脉冲响应 $h(n)=a^n u(n)$ ,  $|a|<1$ , 网络输入序列 $x(n)=u(n)$ , 求网络的输出序列 $y(n)$ 。

解  $y(n)=h(n)*x(n)$

求 $y(n)$ 可用两种方法, 一种直接求解线性卷积, 另一种是Z变换法。

$$\begin{aligned} (1) \quad y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a^m u(m)u(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^n a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$(2) \quad y(n) = h(n) * x(n)$$

$$H(z) = ZT[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$X(z) = ZT[u(n)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - az^{-1})} \quad |z| > 1$$

$$y(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{z^{n+1}}{(z-1)(z-a)} dz$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

由收敛域判定

$$y(n)=0 \quad n<0$$

$n \geq 0$ 时,

$$y(n) = \text{Res}[Y(z)z^{n-1}, 1] + \text{Res}[Y(z)z^{n-1}, a]$$

$$= \frac{1}{1-a} + \frac{a^{n+1}}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

将 $y(n)$ 表示为

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 9. 复卷积定理

$$\text{如果 } \text{ZT}[x(n)] = X(z) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\text{ZT}[y(n)] = Y(z) \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$w(n) = x(n)y(n)$$

则

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v} \quad (2.5.24)$$

$W(z)$ 的收敛域为

$$R_{x-} R_{y-} < |z| < R_{x+} R_{y+} \quad (2.5.25)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

(2.5.24) 式中 $v$ 平面上, 被积函数的收敛域为

$$\max\left(R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}}\right) < |v| < \min\left(R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}}\right) \quad (2.5.26)$$

证明

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)v^{n-1} dv \right] y(n)z^{-n} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \left( \frac{z}{v} \right)^{-n} \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y\left( \frac{z}{v} \right) \frac{dv}{v} \end{aligned}$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

由 $X(z)$ 的收敛域和 $Y(z)$ 的收敛域得到:

$$R_{x-} < |v| < R_{x+}$$

$$R_{y-} < \left| \frac{z}{v} \right| < R_{y+}$$

因此

$$R_{x-} R_{y-} < |z| < R_{x+} R_{y+}$$

$$\max \left( R_{x-}, \frac{|z|}{R_{y+}} \right) < |v| < \min \left( R_{x+}, \frac{|z|}{R_{y-}} \right)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.5.10】** 已知 $x(n)=u(n)$ ,  $y(n)=a^{|n|}$ , 若 $w(n)=x(n)y(n)$ , 求 $W(z)=\text{ZT}[w(n)]$ 。

解 
$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad 1 < |z| \leq \infty$$

$$Y(z) = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}, |a| < |z| < |a|^{-1}$$

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c Y(v) X\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1-a^2}{(1-av^{-1})(1-av)} \cdot \frac{1}{1-\frac{v}{z}} \frac{dv}{v} \end{aligned}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$W(z)$ 的收敛域为 $|a| < |z| \leq \infty$ ; 被积函数 $v$ 平面上的收敛域为 $\max(|a|, 0) < |v| < \min(|a^{-1}|, |z|)$ ,  $v$ 平面上极点:  $a$ 、 $a^{-1}$ 和 $z$ ,  $c$ 内极点:  $z=a$ 。 令

$$F(v) = Y(v)X\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}$$

$$W(z) = \text{Res}[F(v), a] = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad a < |z| \leq \infty$$

$$w(n) = a^n u(n)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 10. 帕斯维尔 (Parseval) 定理

$$\text{设 } X(z) = \text{ZT}[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$Y(z) = \text{ZT}[y(n)] \quad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$R_{x-} R_{y-} < 1, R_{x+} R_{y+} > 1$$

那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right) v^{-1} dv \quad (2.5.27)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$v$ 平面上,  $c$ 所在的收敛域为

$$\max\left(R_{x-}, \frac{1}{R_{y+}}\right) < |v| < \min\left(R_{x+}, \frac{1}{R_{y-}}\right)$$

利用复卷积定理可以证明上面的重要的帕斯维尔定理。

证明 令  $w(n)=x(n)y^*(n)$

按照 (2.5.24) 式得到:

$$W(z) = ZT[w(n)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v) Y^*\left(\left(\frac{z}{v}\right)^*\right) v^{-1} dv$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

按照 (2.5.25) 式,  $R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$ ; 按照假设,  $z=1$  在收敛域中, 将  $z=1$  代入  $W(z)$  中, 则有

$$W(1) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(\nu) Y^* \left( \frac{1}{\nu^*} \right) \nu^{-1} d\nu$$

$$W(1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n) z^{-n} \Big|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

因此

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

如果 $x(n)$ 和 $y(n)$ 都满足绝对可和，即单位圆上收敛，在上式中令 $v=e^{j\omega}$ ，得到：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

令 $x(n)=y(n)$ ，得到：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (2.5.28)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

---

上面得到的公式和在傅里叶变换中所讲的帕斯维尔定理（2.2.34）式是相同的。（2.5.28）说明时域中求序列的能量与频域中求序列的能量是一致的。



### 2.5.5 利用Z变换解差分方程

设 $N$ 阶线性常数差分方程为

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (2.5.30)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 1. 求稳态解

如果输入序列 $x(n)$ 是在 $n=0$ 以前 $\infty$ 时加上的,  $n$ 时刻的 $y(n)$ 是稳态解, 对 (2.5.30) 式求Z变换, 得到:

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z)$$

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad (2.5.31)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

式中

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.5.32)$$

$$y(n) = IZT[Y(z)]$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2. 求暂态解

对于 $N$ 阶差分方程，求暂态解必须已知 $N$ 个初始条件。设 $x(n)$ 是因果序列，即 $x(n)=0, n<0$ ，已知初始条件 $y(-1), y(-2), \dots, y(-N)$ 。对（2.5.30）式进行 $Z$ 变换时，注意这里要用单边 $Z$ 变换。该方程式的右边由于 $x(n)$ 是因果序列，单边 $Z$ 变换与双边 $Z$ 变换是相同的。下面先求移位序列的单边 $Z$ 变换。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

设  $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n}$

$$\begin{aligned} ZT[y(n-m)u(n)] &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n-m)z^{-n} \\ &= z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-m)z^{-(n-m)} \\ &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} y(k)z^{-k} \\ &= z^{-m} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} + \sum_{k=-m}^{-1} y(k)z^{-k} \right] \\ &= z^{-m} \left[ Y(z) + \sum_{k=-m}^{-1} y(k)z^{-k} \right] \quad (2.5.33) \end{aligned}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

按照 (2.5.33) 式对 (2.5.30) 式进行单边Z变换,

有

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} [Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}] = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$
$$Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (2.5.34)$$

上式右边第一部分与系统初始状态无关, 称为零状态解; 而第二部分与输入信号无关, 称为零输入解。求零状态解时, 可用双边Z变换求解也可用单边Z变换求解, 求零输入解却必须考虑初始条件, 用单边Z变换求解。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.5.11】** 已知差分方程 $y(n)=by(n-1)+x(n)$ ，式中 $x(n)=a^n u(n)$ ,  $y(-1)=2$ ，求 $y(n)$ 。

解 将已知差分方程进行单边Z变换：

$$Y(z) = bz^{-1}Y(z) + by(-1) + X(z)$$

$$Y(z) = \frac{2b + X(z)}{1 - bz^{-1}}$$

式中

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

于是

$$Y(z) = \frac{2b}{1-bz^{-1}} + \frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}$$

收敛域为 $|z| > \max(|a|, |b|)$ , 因此

$$y(n) = 2b^{n+1} + \frac{1}{a-b}(a^{n+1} - b^{n+1}) \quad n \geq 0$$

式中第一项为零输入解, 第二项为零状态解。





### 2.6 利用Z变换分析信号和系统的频响特性

#### 2.6.1 频率响应函数与系统函数

设系统初始状态为零，系统对输入为单位脉冲序列 $\delta(n)$ 的响应输出称为系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。对 $h(n)$ 进行傅里叶变换, 得到:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.6.1)$$

一般称 $H(e^{j\omega})$ 为系统的频率响应函数，或称系统的传输函数，它表征系统的频率响应特性。 $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性函数， $\varphi(\omega)$ 称为相频特性函数。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

将 $h(n)$ 进行Z变换, 得到 $H(z)$ , 一般称 $H(z)$ 为系统的系统函数, 它表征了系统的复频域特性。对 $N$ 阶差分方程(1.4.2)式, 进行Z变换, 得到系统函数的一般表示式

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}} \quad (2.6.2)$$

如果 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆 $|z|=1$ , 则 $H(e^{j\omega})$ 与 $H(z)$ 之间的关系如下:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (2.6.3)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$H(e^{j\omega})$ 表示系统对特征序列 $e^{j\omega n}$ 的响应特性,这也是 $H(e^{j\omega})$ 的物理意义所在,下面具体阐述。

若系统输入信号 $x(n)=e^{j\omega n}$ ,则系统输出信号为

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \end{aligned}$$

$$\text{即 } y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} = |H(e^{j\omega})|e^{j[\omega n + \varphi(\omega)]}$$

上式说明,单频复指数信号 $e^{j\omega n}$ 通过频率响应函数为 $H(e^{j\omega})$ 的系统后,输出仍为单频复指数序列,其幅度放大 $|H(e^{j\omega})|$ 倍,相移为 $\varphi(\omega)$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

为了加深读者对 $H(e^{j\omega})$ 物理意义的理解，下面以大家熟悉的正弦信号为例进行讨论。

当系统输入信号 $x(n)=\cos(\omega n)$ 时，求系统的输出信号 $y(n)$ ：

因为

$$x(n) = \cos(\omega n) = \frac{1}{2}[e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}]$$

所以，利用上面的结论可得到：

$$y(n) = \frac{1}{2}[H(e^{j\omega})e^{j\omega n} + H(e^{j(-\omega)})e^{-j\omega n}]$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

设 $h(n)$ 为实序列，则 $H^*(e^{j\omega})=H(e^{-j\omega})$ ,  $|H(e^{j\omega})|=|H(e^{-j\omega})|$ ,  
 $\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$ , 故

$$\begin{aligned}y(n) &= \frac{1}{2} [|H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega n} + |H(e^{-j\omega})| e^{j\varphi(-\omega)} e^{-j\omega n}] \\&= \frac{1}{2} |H(e^{j\omega})| \{e^{j[\omega n + \varphi(\omega)]} + e^{-j[\omega n + \varphi(\omega)]}\} \\&= |H(e^{j\omega})| \cos[\omega n + \varphi(\omega)]\end{aligned}$$

由此可见，线性时不变系统对单频正弦信号 $\cos(\omega n)$ 的响应为同频正弦信号，其幅度放大 $|H(e^{j\omega})|$ 倍，相移增加 $\varphi(\omega)$ ，这就是其名称“频率响应函数”、“幅频响应”和“相频响应”的物理含义。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

---

如果系统输入为一般的序列 $x(n)$ ，则 $H(e^{j\omega})$ 对 $x(n)$ 的不同的频率成分进行加权处理。对感兴趣的频段，取 $|H(e^{j\omega})|=1$ ，其他频段 $|H(e^{j\omega})|=0$ ，则 $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$ ，就实现了对输入信号的滤波处理。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2.6.2 用系统函数的极点分布分析系统的因果性和稳定性

因果（可实现）系统其单位脉冲响应 $h(n)$ 一定是因果序列，那么其系统函数 $H(z)$ 的收敛域一定包含 $\infty$ 点，即 $\infty$ 点不是极点，极点分布在某个圆内，收敛域在某个圆外。

系统稳定要求  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ ，对照Z变换定义，系统

稳定要求收敛域包含单位圆。如果系统因果且稳定，收敛域包含 $\infty$ 点和单位圆，那么收敛域可表示为

$$r < |z| \leq \infty \quad 0 < r < 1$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

这样 $H(z)$ 的极点集中在单位圆的内部。具体系统的因果性和稳定性可由系统函数 $H(z)$ 的极点分布和收敛域确定。

下面通过例题说明。

如果系统函数分母多项式阶数较高（如3阶以上），用手工计算极点分布并判定系统是否稳定，不是一件简单的事情。用**MATLAB**函数判定则很简单，判定函数程序如下：



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**function stab(A)**

**%stab:** 系统稳定性判定函数，**A**是 $H(z)$ 的分母多项式系数向量

**disp('系统极点为: ')**

**P=roots(A)**                    **%求 $H(z)$ 的极点，并显示**

**disp('系统极点模的最大值为: ')**

**M=max(abs(P))**            **%求所有极点模的最大值，并显示**

**if M<1 disp('系统稳定'), else, disp('系统不稳定'), end**

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

请注意，这里要求 $H(z)$ 是正幂有理分式。给 $H(z)$ 的分母多项式系数向量A赋值，调用该函数，求出并显示系统极点，极点模的最大值M，判断M值，如果 $M < 1$ ，则显示“系统稳定”，否则显示“系统不稳定”。如果 $H(z)$ 的分母多项式系数 $A=[2 \quad -2.98 \quad 0.17 \quad 2.3418 \quad -1.5147]$ ，则调用该函数输出如下：

**$P=-0.9000 \quad 0.7000+0.6000i \quad 0.7000-0.6000i \quad 0.9900$**

系统极点模的最大值为： **$M=0.9900$** 系统稳定。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.6.1】** 已知  $H(z) = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$ ,  $0 < a < 1$ ,

分析其因果性和稳定性。

解  $H(z)$ 的极点为 $z=a$ ,  $z=a^{-1}$ , 如图2.5.5所示。

(1) 收敛域为 $a^{-1} < |z| \leq \infty$ : 对应的系统是因果系统, 但由于收敛域不包含单位圆, 因此是不稳定系统。单位脉冲响应 $h(n)=(a^n-a^{-n})u(n)$  (参考例2.5.7), 这是一个因果序列, 但不收敛。

(2) 收敛域为 $0 \leq |z| < a$ : 对应的系统是非因果且不稳定系统。其单位脉冲响应 $h(n)=(a^{-n}-a^n)u(-n-1)$  (参考例2.5.7), 这是一个非因果且不收敛的序列。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

(3) 收敛域为 $a < |z| < a^{-1}$ : 对应一个非因果系统, 但由于收敛域包含单位圆, 因此是稳定系统。其单位脉冲响应 $h(n)=a^{|n|}$ , 这是一个收敛的双边序列, 如图2.6.1(a)所示。

下面分析如同例2.6.1这样的系统的可实现性。

$H(z)$ 的三种收敛域中, 前两种系统不稳定, 不能选用; 最后一种收敛域, 系统稳定但非因果, 还是不能具体实现。因此严格地讲, 这样的系统是无法具体实现的。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

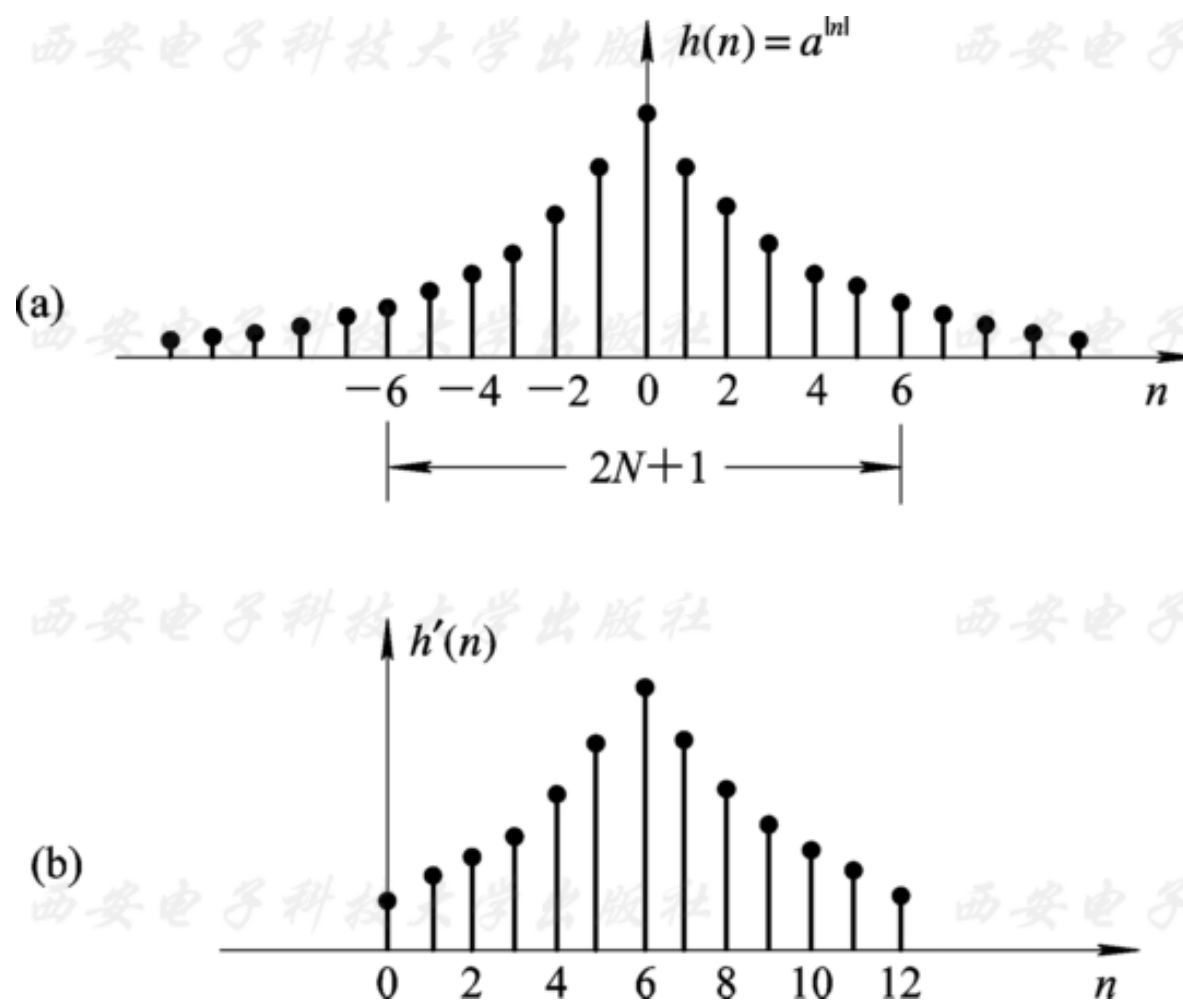


图2.6.1 例2.6.1图示

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

但是我们利用数字系统或者说计算机的存储性质，可以近似实现第三种情况。方法是将图2.6.1(a)从 $-N$ 到 $N$ 截取一段，再向右移，形成如图2.6.1(b)所示的 $h'(n)$ 序列，将 $h'(n)$ 作为具体实现的系统单位脉冲响应。 $N$ 愈大， $h'(n)$ 表示的系统愈接近 $h(n)$ 系统。具体实现时，预先将 $h'(n)$ 存储起来，备运算时应用。这种非因果但稳定的系统的近似实现性，是数字信号处理技术比模拟信息处理技术优越的地方。

说明：对一个实际的物理实现系统，其 $H(z)$ 的收敛域是唯一的。

### 2.6.3 利用系统的极零点分布分析系统的频率响应特性

将(2.6.2)式因式分解，得到：

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})} \quad (2.6.4)$$

式中， $A=b_0/a_0$ ， $c_r$ 是 $H(z)$ 的零点， $d_r$ 是其极点。 $A$ 参数影响频率响应函数的幅度大小，影响系统特性的是零点 $c_r$ 和极点 $d_r$ 的分布。下面我们采用几何方法研究系统零极点分布对系统频率特性的影响。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

将(2.6.4)式分子、分母同乘以 $z^{N+M}$ ，得到：

$$H(z) = Az^{N-M} \frac{\prod_{r=1}^M (z - c_r)}{\prod_{r=1}^N (z - d_r)} \quad (2.6.5)$$

设系统稳定，将 $z=e^{j\omega}$ 代入上式，得到频率响应函数

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - c_r)}{\prod_{r=1}^N (e^{j\omega} - d_r)} \quad (2.6.6)$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

在 $z$ 平面上,  $e^{j\omega}-c_r$ 用一根由零点 $c_r$ 指向单位圆上 $e^{j\omega}$ 点 $B$ 的向量  $\overrightarrow{c_r B}$  表示, 同样,  $e^{j\omega}-d_r$ 用由极点指向 $e^{j\omega}$ 点 $B$ 的向量  $\overrightarrow{d_r B}$  表示, 如图2.6.2所示, 即 $\overrightarrow{c_r B}$  和 $\overrightarrow{d_r B}$ 分别称为零点向量和极点向量, 将它们用极坐标表示:

$$\overrightarrow{c_r B} = c_r B e^{j\alpha_r}$$

$$\overrightarrow{d_r B} = d_r B e^{j\beta_r}$$

将  $\overrightarrow{c_r B}$  和  $\overrightarrow{d_r B}$  表示式代入(2.6.7)式, 得到:

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

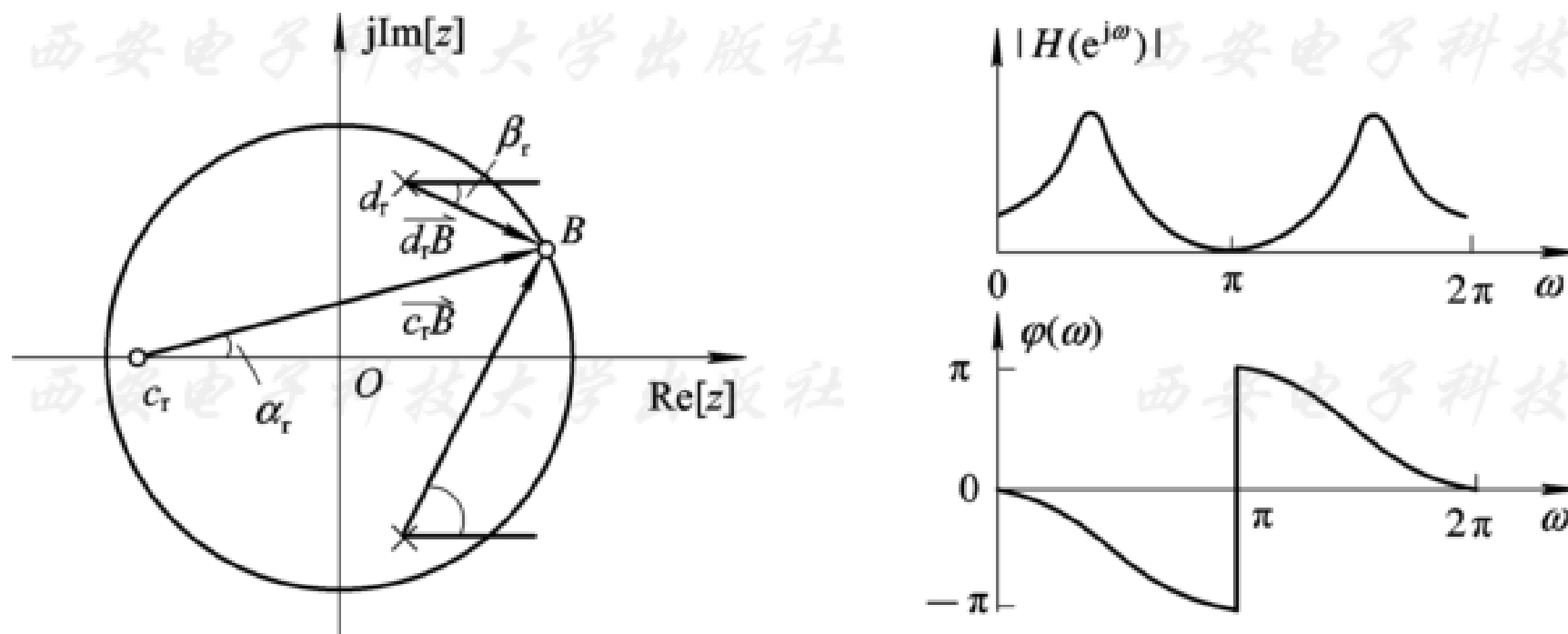


图2.6.2 频响的几何表示法

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$H(e^{j\omega}) = Ae^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^M \overrightarrow{c_r B}}{\prod_{r=1}^N \overrightarrow{d_r B}} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.6.7)$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_{r=1}^M c_r B}{\prod_{r=1}^N d_r B} \quad (2.6.8)$$

$$\varphi(\omega) = \omega(N-M) + \sum_{r=1}^M \alpha_r - \sum_{r=1}^M \beta_r \quad (2.6.9)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

系统的频响特性由(2.6.8)式和(2.6.9)式确定。当频率 $\omega$ 从0变化到 $2\pi$ 时，这些向量的终点B沿单位圆逆时针旋转一周，按照(2.6.8)式和(2.6.9)式，分别估算出系统的幅频特性和相频特性。例如图2.6.2表示了具有一个零点和两个极点的频率特性。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

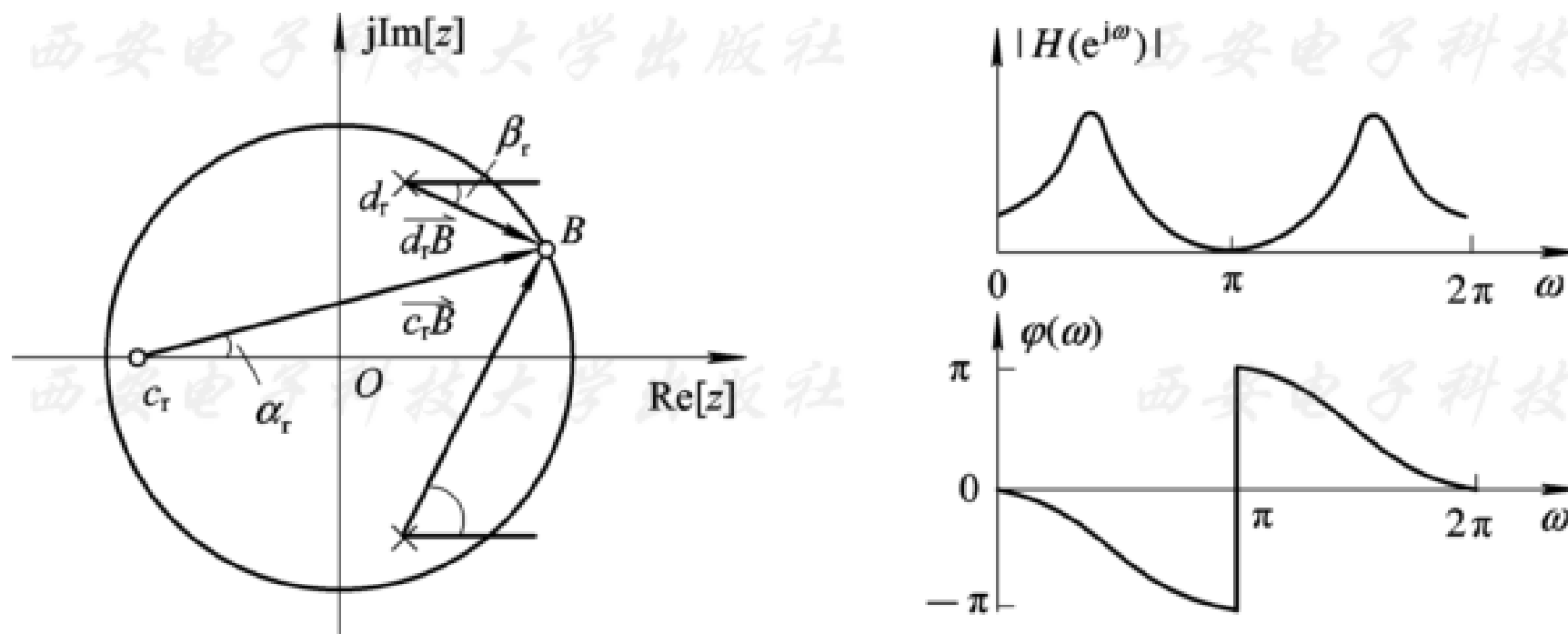


图2.6.2 频响的几何表示法

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

按照(2.6.8)式, 知道零极点的分布后, 可以很容易地确定零极点位置对系统特性的影响。当 $B$ 点转到极点附近时, 极点相量长度最短, 因而幅度特性可能出现峰值, 且极点愈靠近单位圆, 极点相量长度愈短, 峰值愈高愈尖锐。如果极点在单位圆上, 则幅度特性为 $\infty$ , 系统不稳定。对于零点, 情况相反, 当 $B$ 点转到零点附近时, 零点相量长度变短, 幅度特性将出现谷值, 零点愈靠近单位圆, 谷值愈接近零。当零点处在单位圆上时, 谷值为零。

总结以上结论: 极点位置主要影响频响的峰值位置及尖锐程度, 零点位置主要影响频响的谷点位置及形状。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

---

这种通过零极点位置分布分析系统频响的几何方法为我们提供了一个直观的概念，对于分析和设计系统是十分有用的。基于这种概念，可以用零极点累试法设计简单滤波器。

下面介绍用**MATLAB**计算零、极点及频率响应曲线。首先介绍**MATLAB**工具箱中两个函数**zplane**和**freqz**的功能和调用格式。

**zplane** 绘制 $H(z)$ 的零、极点图。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**zplane(z, p)** 绘制出列向量 $\mathbf{z}$ 中的零点（以符号“○”表示）和列向量 $\mathbf{p}$ 中的极点（以符号“×”表示），同时画出参考单位圆，并在多阶零点和极点的右上角标出其阶数。如果 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{p}$ 为矩阵，则**zplane**以不同的颜色分别绘出 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{p}$ 各列中的零点和极点。

**zplane(B, A)** 绘制出系统函数 $H(z)$ 的零极点图。其中 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 为系统函数 $H(z) = \mathbf{B}(z)/\mathbf{A}(z)$ 的分子和分母多项式系数向量。假设系统函数 $H(z)$ 用下式表示：

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(1) + B(2)z^{-1} + \cdots + B(M)z^{-(M-1)} + B(M+1)z^{-M}}{A(1) + A(2)z^{-1} + \cdots + A(N)z^{-(N-1)} + A(N+1)z^{-N}}$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

则

$$\mathbf{B}=[\mathbf{B}(1) \quad \mathbf{B}(2) \quad \mathbf{B}(3) \quad \cdots \quad \mathbf{B}(M+1)],$$

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}(1) \quad \mathbf{A}(2) \quad \mathbf{A}(3) \quad \cdots \quad \mathbf{A}(N+1)]$$

**freqz** 计算数字滤波器 $H(z)$ 的频率响应。

$\mathbf{H}=\text{freqz}(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{w})$  计算由向量 $\mathbf{w}$ 指定的数字频率点上数字滤波器 $H(z)$ 的频率响应 $H(e^{j\omega})$ ，结果存于 $\mathbf{H}$ 向量中。  
 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 仍为 $H(z)$ 的分子和分母多项式系数向量（同上）。

$[\mathbf{H}, \mathbf{w}]=\text{freqz}(\mathbf{B}, \mathbf{A}, M)$  计算出 $M$ 个频率点上的频率响应，存放在 $\mathbf{H}$ 向量中， $M$ 个频率存放在向量 $\mathbf{w}$ 中。**freqz**函数自动将这 $M$ 个频率点均匀设置在频率范围 $[0, \pi]$ 上。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**$[H, w] = \text{freqz}(B, A, M, 'whole')$**  自动将M个频率点均匀设置在频率范围 $[0, 2\pi]$ 上。

当然，还可以由频率响应向量**H**得到各采样频点上的幅频响应函数和相频响应函数；再调用**plot**绘制其曲线图。

$$|H(e^{j\omega})| = \text{abs}(H)$$

$$\varphi(\omega) = \text{angle}(H)$$

式中，**abs**函数的功能是对复数求模，对实数求绝对值；**angle**函数的功能是求复数的相角。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

---

**freqz(B, A)** 自动选取512个频率点计算。不带输出向量的**freqz**函数将自动绘出固定格式的幅频响应和相频响应曲线。所谓固定格式,是指频率范围为 $[0, \pi]$ , 频率和相位是线性坐标, 幅频响应为对数坐标。其他几种调用格式可用命令**help**查阅。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.6.2】** 已知 $H(z)=z^{-1}$ ，分析其频率特性。

解 由 $H(z)=z^{-1}$ ，可知极点为 $z=0$ ，幅频特性 $|H(e^{j\omega})|=1$ ，相频特性 $\varphi(\omega)=-\omega$ ，频响特性如图 2.6.3所示。用几何方法也容易确定，当 $\omega=0$ 转到 $\omega=2\pi$ 时，极点向量的长度始终为1。由该例可以得到结论：处于原点处的零点或极点，由于零点向量长度或者极点向量长度始终为1，因此原点处的零极点不影响系统的幅频响应特性，但对相频特性有贡献。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

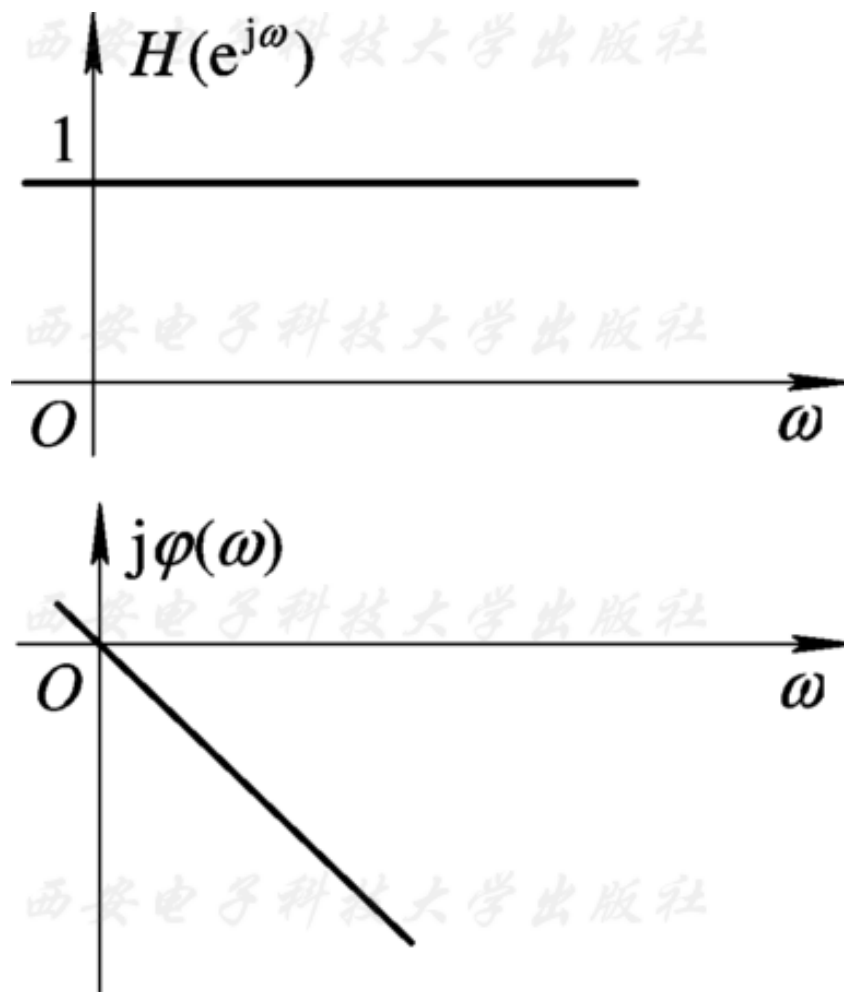


图2.6.3  $H(z)=z^{-1}$ 的频响特性

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

【例2.6.3】 设一阶系统的差分方程为

$$y(n)=by(n-1)+x(n)$$

用几何法分析其幅度特性。

解 由系统差分方程得到系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b} \quad |z| > |b|$$

式中， $0 < b < 1$ 。系统极点 $z=b$ ，零点 $z=0$ ，当 $B$ 点从 $\omega=0$ 逆时针旋转时，在 $\omega=0$ 点，由于极点向量长度最短，形成波峰；在 $\omega=\pi$ 点形成波谷； $z=0$ 处零点不影响幅频响应。极零点分布及幅度特性如图2.6.4所示。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

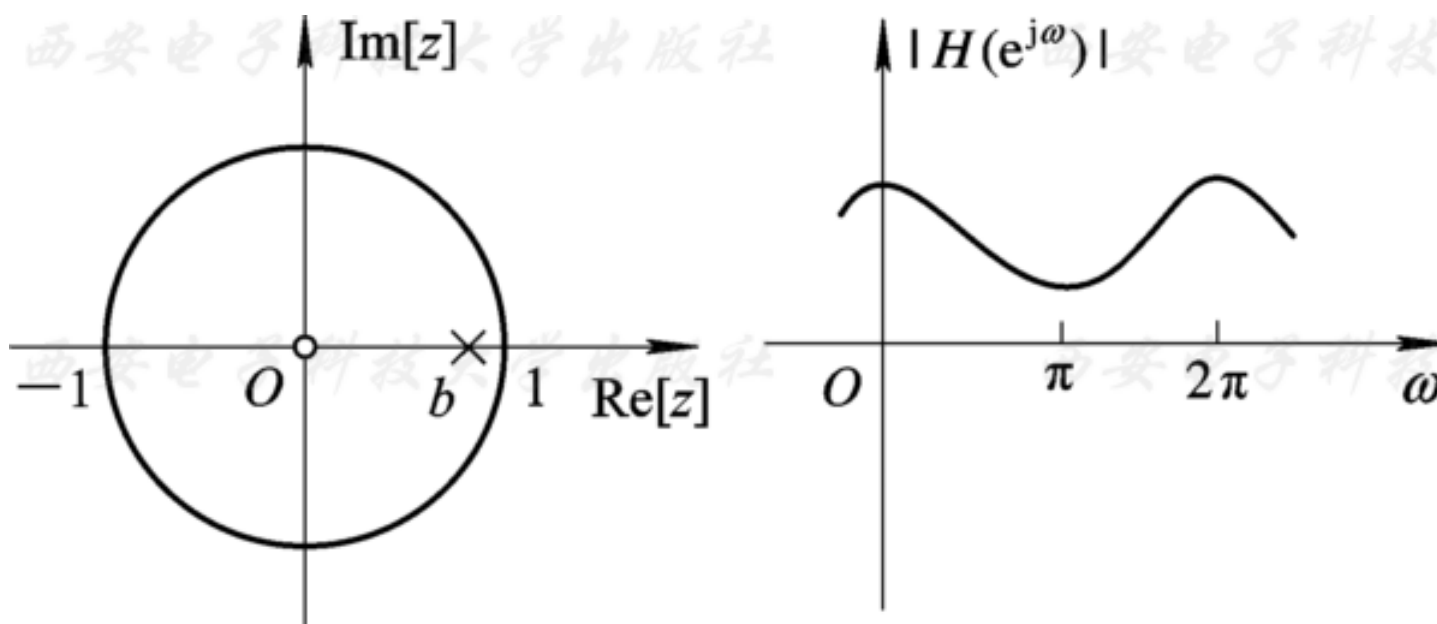


图2.6.4 例2.6.3插图

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**【例2.6.4】** 已知 $H(z)=1-z^{-N}$ ，试定性画出系统的幅频特性。

解 
$$H(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

$H(z)$ 的极点为 $z=0$ ，这是一个 $N$ 阶极点，它不影响系统的幅频响应。零点有 $N$ 个，由分子多项式的根决定

$$z^N - 1 = 0 \quad \text{即} \quad z^N = e^{j2\pi k}$$

$$z = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$N$ 个零点等间隔分布在单位圆上，设 $N=8$ ，极零点分布如图2.6.5所示。当 $\omega$ 从0变化到 $2\pi$ 时，每遇到一个零点，幅度为零，在两个零点的中间幅度最大，形成峰值。幅度谷值点频率为： $\omega_k=(2\pi/N)k, k=0, 1, 2, \cdots, N-1$ 。一般将具有如图2.6.5所示的幅调用zplane和freqz求解本例的程序ep264.m如下：

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

**%ep264.m: 例2.6.4求解程序**

**B=[1 0 0 0 0 0 0 0 -1]; A=1; %设置系统函数系数向量B和A**

**subplot(2, 2, 1); zplane(B, A); %绘制零极点图**

**[H, w]=freqz(B, A); %计算频率响应**

**subplot(2, 2, 2); plot(w/pi, abs(H)); %绘制幅频响应曲线**

**xlabel('\omega\pi'); ylabel('|H(e^{j\omega})|');**

**axis([0, 1, 0, 2.5])**

**subplot(2, 2, 4); plot(w/pi, angle(H)); %绘制相频响应曲线**

**xlabel('\omega\pi'); ylabel('phi(\omega)');**

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

运行上面的程序，绘制出8阶梳状滤波器的零极点图和幅频特性、相频特性如图2.6.5所示。

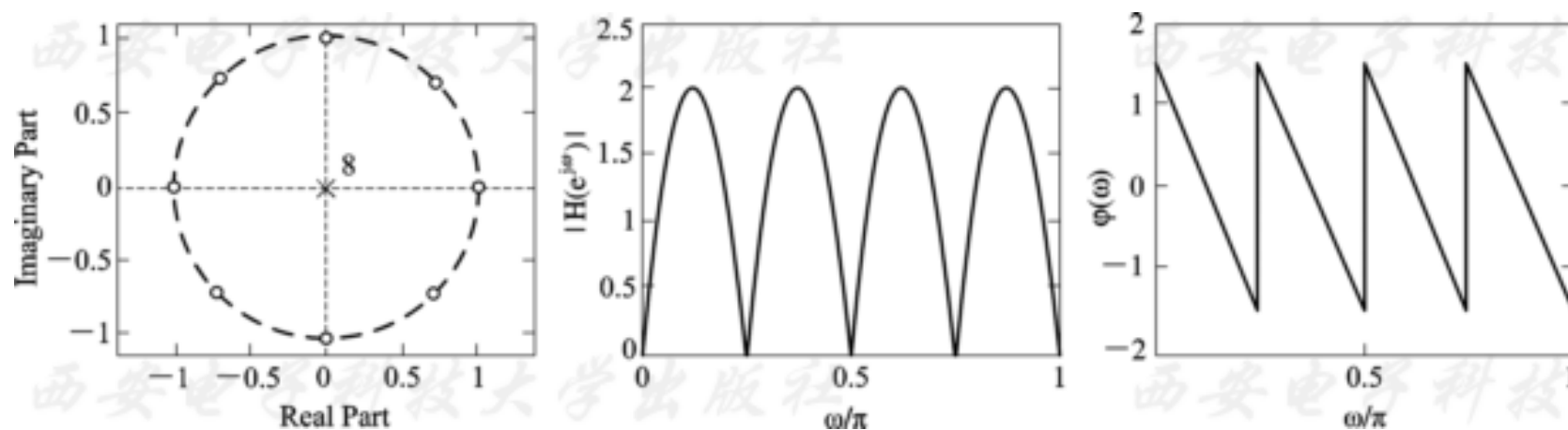


图2.6.5 梳状滤波器的极零点分布及幅频、相频特性

### 2.6.4 几种特殊系统的系统函数及其特点

这一节介绍几种特殊的系统，即全通滤波器、梳状滤波器、最小相位系统等。

#### 1. 全通滤波器

如果滤波器的幅频特性对所有频率均等于常数或1，  
即

$$|H(e^{j\omega})|=1 \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi \quad (2.6.10)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

则该滤波器称为全通滤波器(或称全通系统、全通网络)。全通滤波器的频率响应函数可表示成

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.6.11)$$

(2.6.11) 式表明信号通过全通滤波器后, 幅度谱保持不变, 仅相位谱随 $\varphi(\omega)$ 改变, 起纯相位滤波作用。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

全通滤波器的系统函数一般形式如下式：

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$
$$= \frac{z^{-N} + a_1 z^{-N+1} + a_2 z^{-N+2} + \cdots + a_N}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}, a_0 = 1 \quad (2.6.12)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

或者写成二阶滤波器级联形式：

$$H(z) = \prod_{i=1}^L \frac{z^{-2} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}}{a_{2i}z^{-2} + a_{1i}z^{-1} + 1} \quad (2.6.13)$$

上面两式中的系数均为实数。容易看出，全通滤波器系统函数 $H(z)$ 的构成特点是其分子、分母多项式的系数相同，但排列顺序相反。下面证明（2.6.12）式表示的滤波器具有全通幅频特性。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = z^{-N} \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^k}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = z^{-N} \frac{D(z^{-1})}{D(z)} \quad (2.6.14)$$

式中,  $D(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}$  由于系数  $a_k$  是实数, 因此

$$D(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = D(e^{-j\omega}) = D^*(e^{j\omega})$$

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| \frac{D^*(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} \right| = 1$$



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

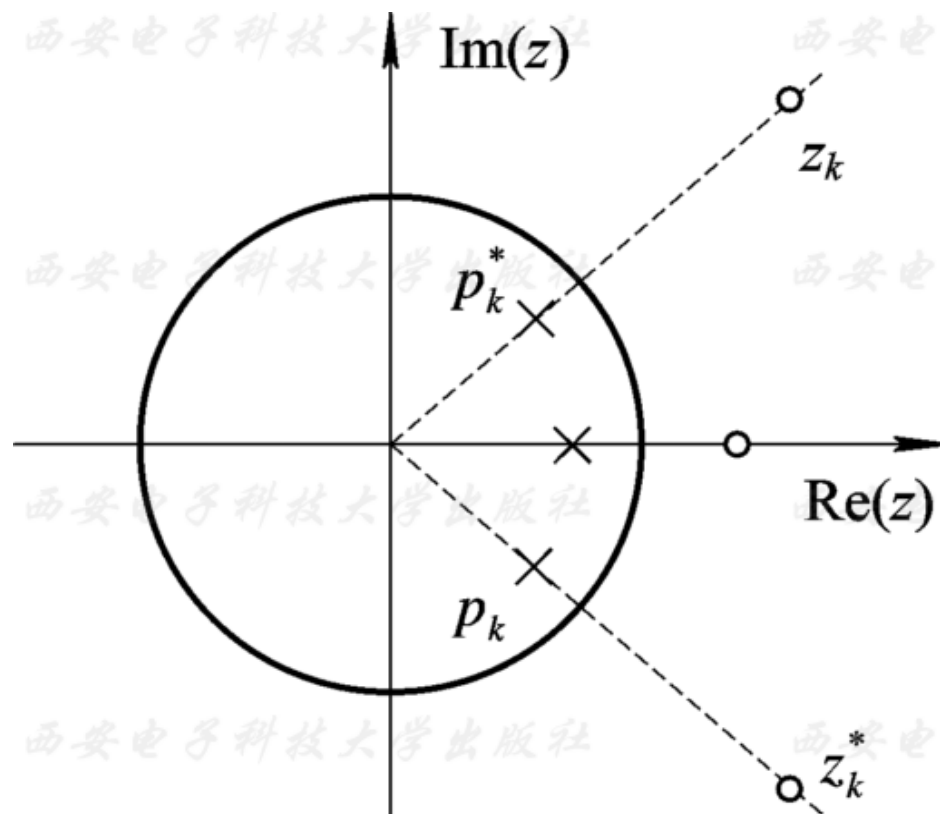


图2.6.6 全通滤波器一组零极点示意

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

这就证明了 (2.6.12) 式表示的  $H(z)$  具有全通滤波特性。下面分析全通滤波器的零点和极点的分布规律。设  $z_k$  为  $H(z)$  的零点, 按照 (2.6.14) 式,  $z_k^{-1}$  必然是  $H(z)$  的极点, 记为  $p_k = z_k^{-1}$ , 则  $p_k z_k = 1$ , 全通滤波器的极点和零点互为倒数关系。如果再考虑到  $D(z)$  和  $D(z^{-1})$  的系数为实数, 其极点、零点均以共轭对出现, 这样, 复数零点、复数极点必然以四个一组出现。例如,  $z_k$  是  $H(z)$  的零点, 则必有零点  $z_k^*$ 、极点  $p_k = z_k^{-1}$ 、 $p_k^* = (z_k^{-1})^*$ 。对实数零极点, 则以两个一组出现, 且零点与极点互为倒数关系。零极点位置示意图如图 2.6.6 所示。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

观察图2.6.6，如果将零点 $z_k$ 和极点 $p_k^*$ 组成一对，将零点 $z_k^*$ 与极点 $p_k$ 组成一对，那么全通滤波器的极点与零点便以共轭倒易关系出现，即如果 $z_k^{-1}$ 为全通滤波器的零点，则 $z_k^*$ 必然是全通滤波器的极点。因此，全通滤波器系统函数也可以写成如下形式：

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - z_k}{1 - z_k^* z^{-1}} \quad (2.6.15)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

显然，（2.6.15）式中极点和零点互为共轭倒易关系。其全通特性的证明留作习题。应当注意，为了保证分子、分母多项式系数是实数，极点、零点分别以共轭对形式出现，当 $N=1$ 时，零点、极点均为实数。

全通滤波器是一种纯相位滤波器，经常用于相位均衡。如果要求设计一个线性相位滤波器，可以设计一个具有线性相位的**FIR**滤波器，也可以先设计一个满足幅频特性要求的**IIR**滤波器，再级联一个全通滤波器进行相位校正，使总的相位特性是线性的。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 2. 梳状滤波器

在前一节例2.6.4中，曾提到具有如图2.6.5所示的幅度特性的滤波器称为梳状滤波器，显然，梳状滤波器起名于它的幅度特性形状。下面介绍一般梳状滤波器的构成方法。

设滤波器的系统函数为 $H(z)$ ，我们知道，如果其频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 以 $2\pi$ 为周期。将 $H(z)$ 的变量 $z$ 用 $z^N$ 代替，得到 $H(z^N)$ ，则相应的频率响应函数 $H(e^{j\omega N})$ 是以 $2\pi/N$ 为周期的，在区间 $[0, 2\pi]$ 上有 $N$ 个相同频率特性周期。利用这种性质，可以构成各种梳状滤波器。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

例如,  $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - az^{-1}}, 0 < a < 1$ , 零点为1, 极点为 $a$ ,

所以 $H(z)$ 表示一个高通滤波器。以 $z^N$ 代替 $H(z)$ 的 $z$ , 得到:

$$H(z^N) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - az^{-N}}$$

当 $N=8$ 时, 零点为  $z_k = e^{j\frac{2\pi}{8}k}, k = 0, 1, \dots, 7$ ; 极点为

$p_k = \sqrt[8]{a} e^{j\frac{2\pi}{8}k}, k = 0, 1, \dots, 7$ 。  $H(z^N)$  零极点分布和幅频

响应特性绘制程序为**fig267.m**, 其中 $a=0.2$ 部分程序如下:

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

% 图2.6.7绘制程序: fig267.m

```
a=0.2; B= [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1 ] ; A= [ 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -a ] ;
```

```
subplot(2, 2, 1); zplane(B, A); title('(a)零极点分布(a=0.2, N=8)')
```

```
[Hk, w] =freqz(B, A, 1024);          %计算频响特性(a=0.2, N=8)
```

```
subplot(2, 2, 2); plot(w/pi, abs(Hk)/max(abs(Hk)));
```

```
xlabel(' \omega/ \pi'); axis( [ 0, 1, 0, 1.5 ] ); title('(b)幅频特性(a=0.2,  
N=8)')
```

```
a=0.9
```

以下程序与a=0.2时相同(省略)。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

---

运行本书程序集程序**fig267.m**，绘制出当 $N=8$ ， $a=0.2$ 和 $a=0.9$ 时， $H(z^N)$ 的零极点分布和幅频响应特性曲线如图2.6.7所示。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

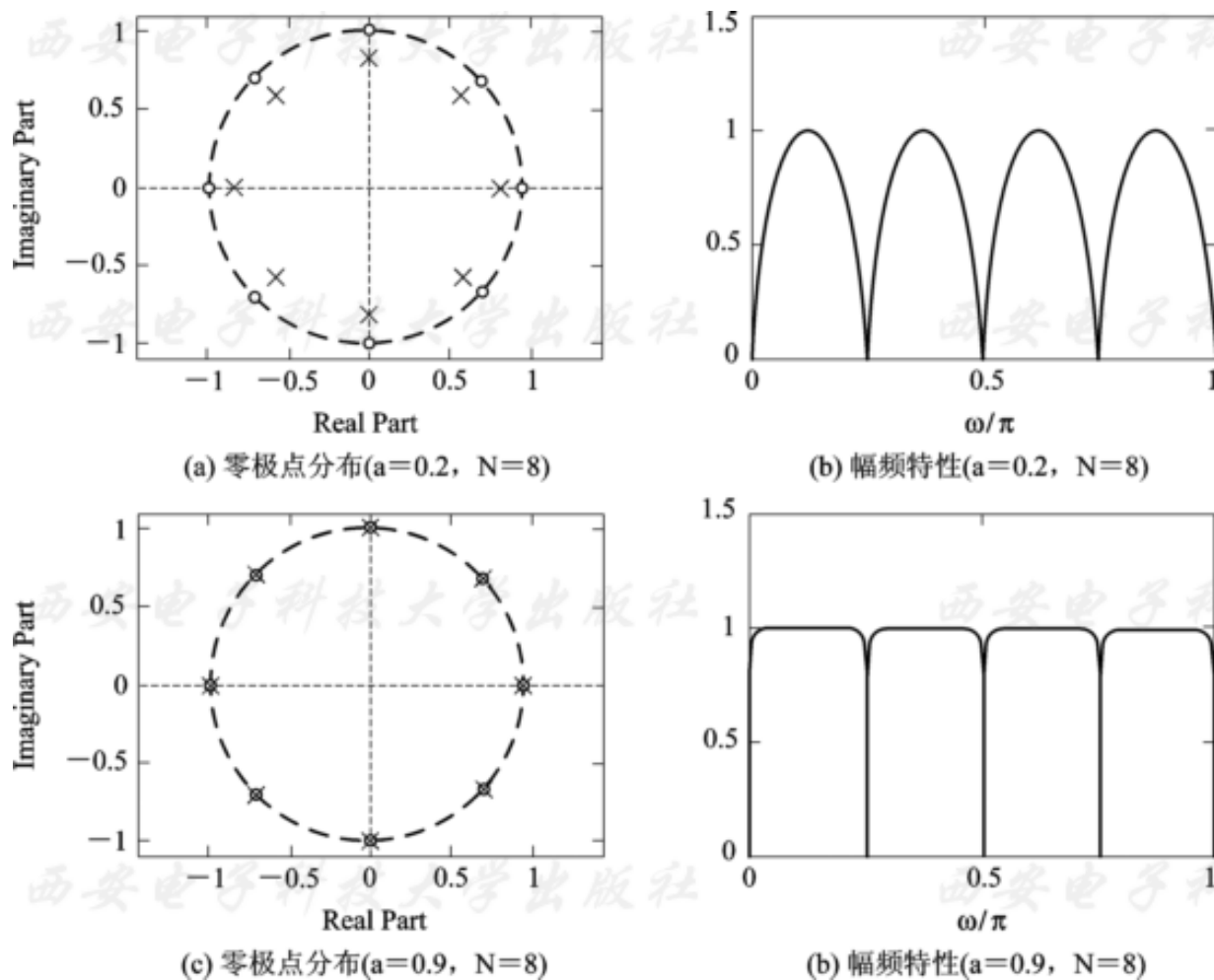


图2.6.7 梳状滤波器的零极点分布和幅频响应特性

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

梳状滤波器可滤除输入信号中  $\omega = \frac{2\pi}{N}k, k = 0, 1, \dots, N-1$  的频率分量。这种滤波器可用于消除信号中的电网谐波干扰。

由图2.6.7可见,  $a$ 取值越接近1, 幅频特性越平坦。将图2.6.7和图2.6.5比较, 形状很相似, 不同的是每一个梳状周期的形状不同。显然, 图2.6.5对应的系统函数是由 $(1-z^{-1})$ 中变量 $z$ 用 $z^N$ 代替后得到的, 用于消除电网谐波干扰时, 特性不如

$H(z^N) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - az^{-N}}$  的滤波性能好。但图2.6.5对应的梳状滤波器

适用于分离两路频谱等间隔交错分布的信号, 例如, 彩色电视接收机中用于进行亮色分离和色分离等。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 3. 最小相位系统

一个因果稳定的时域离散线性非移变系统 $H(z)$ ，其所有极点必须在单位圆内，但其零点可在 $z$ 平面上任意位置，只要频响特性满足要求即可。如果因果稳定系统 $H(z)$ 的所有零点都在单位圆内，则称之为“最小相位系统”，记为 $H_{\min}(z)$ ；反之，如果所有零点都在单位圆外，则称之为“最大相位系统”，记为 $H_{\max}(z)$ ；若单位圆内、外都有零点，则称之为“混合相位系统”。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

最小相位系统在工程理论中较为重要。下面给出最小相位系统的几个重要特点。

(1) 任何一个非最小相位系统的系统函数 $H(z)$ 均可由一个最小相位系统 $H_{\min}(z)$ 和一个全通系统 $H_{\text{ap}}(z)$ 级联而成，即

$$H(z)=H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z) \quad (2.6.16)$$

证明 假设因果稳定系统 $H(z)$ 仅有一个零点在单位圆外，令该零点为 $z=1/z_0$ ,  $|z_0|<1$ ，则 $H(z)$ 可表示为

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z)(z^{-1} - z_0) = H_1(z)(z^{-1} - z_0) \frac{1 - z_0^* z^{-1}}{1 - z_0^* z^{-1}} \\ &= H_1(z)(1 - z_0^* z^{-1}) \frac{z^{-1} - z_0}{1 - z_0^* z^{-1}} \end{aligned} \quad (2.6.17)$$

因为 $H_1(z)$ 为最小相位，所以 $H_1(z)(1 - z_0^* z^{-1})$ 也是最小相位，又因为 $(z^{-1} - z_0)/(1 - z_0^* z^{-1})$ 为全通系统，故 $H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{ap}}(z)$ 。显然， $|H(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

该特点说明了在滤波器优化中很有用的结论：将系统位于单位圆外的零（或极）点 $z_k$ 用 $1/z_k^*$ 代替时，不会影响系统的幅频响应特性。这一点在滤波器优化设计中已用到。在那里，将单位圆外的极点用其镜像代替，以确保滤波器因果稳定。该结论为我们提供了一种用非最小相位系统构造幅频特性相同的最小相位系统的方法：将非最小相位系统 $H(z)$ 位于单位圆外的零点 $z_{0k}$ 用 $1/z_{0k}^*$ 代替（ $k=1, 2, \dots, m_0$ ； $m_0$ 为单位圆外零点数目），即得最小相位系统 $H_{\min}(z)$ ，且 $H_{\min}(z)$ 与 $H(z)$ 的幅频响应特性相同。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

(2) 在幅频响应特性相同的所有因果稳定系统集中，最小相位系统的相位延迟（负的相位值）最小。

由(2.6.16)式可知，任何一个非最小相位系统 $H(z)$ 的相位函数，是一个与 $H(z)$ 的幅频特性相同的最小相位系统 $H_{\min}(z)$ 的相位函数加上一个全通系统 $H_{\text{ap}}(z)$ 的相位函数。可以证明全通系统 $H_{\text{ap}}(z)$ 的相位函数是非正的<sup>[1]</sup>，因此任意系统比最小相位系统多了一个负相位，这样使最小相位系统具有最小相位延迟的性质，或者从时域说，最小相位系统的时域响应波形延迟和能量延迟均最小。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

(3) 最小相位系统保证其逆系统存在。给定一个因果稳定系统 $H(z)=B(z)/A(z)$ ，定义其逆系统为

$$H_{\text{INV}}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

当且仅当 $H(z)$ 为最小相位系统时， $H_{\text{INV}}(z)$ 才是因果稳定的（物理可实现的）。

逆滤波在信号检测及解卷积中有重要应用。例如，信号检测中的信道均衡器实质上就是设计信道的近似逆滤波器。





### 习题与上机题

1. 设 $X(e^{j\omega})$ 和 $Y(e^{j\omega})$ 分别是 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的傅里叶变换，试求下面序列的傅里叶变换：

(1)  $x(n - n_0)$

(2)  $x^*(n)$

(3)  $x(-n)$

(4)  $x(n)*y(n)$

(5)  $x(n)y(n)$

(6)  $nx(n)$

(7)  $x(2n)$

(8)  $x^2(n)$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$(9) \quad x_9(n) = \begin{cases} x(n/2), & n = \text{偶数} \\ 0 & , n = \text{奇数} \end{cases}$$

2. 已知

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \omega_0 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

求 $X(e^{j\omega})$ 的傅里叶反变换 $x(n)$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

### 3. 线性时不变系统的频率响应（频率响应函数）

$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$ ，如果单位脉冲响应 $h(n)$ 为实序列，试证明输入 $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$ 的稳态响应为

$$y(n) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \varphi + \theta(\omega_0)]$$

### 4. 设

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 0.1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

将 $x(n)$ 以4为周期进行周期延拓，形成周期序列 $\tilde{x}(n)$ ，画出 $x(n)$ 和 $\tilde{x}(n)$ 的波形，求出 $\tilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{X}(k)$ 和傅里叶变换。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

5. 设题5图所示的序列 $x(n]$ 的FT用 $X(e^{j\omega})$ 表示，不直接求出 $X(e^{j\omega})$ ，完成下列 运算：

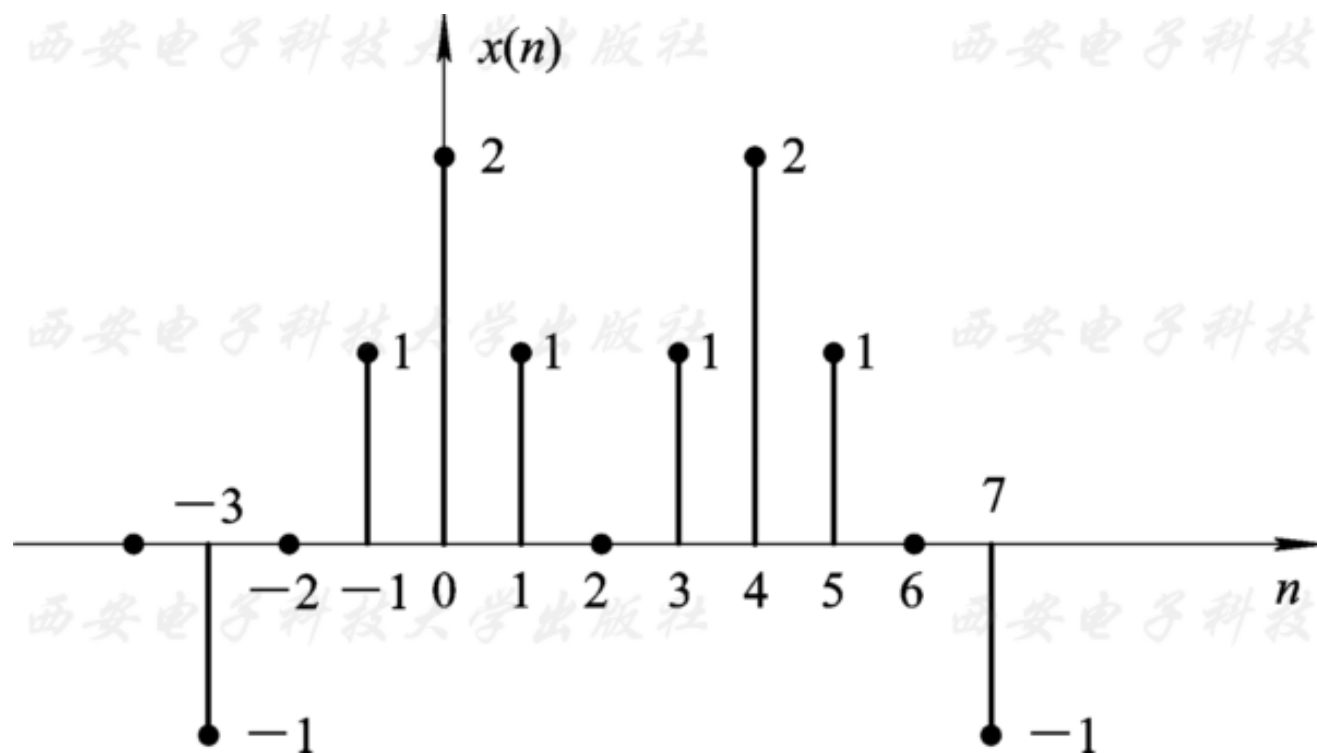
(1)  $X(e^{j0})$  ；

(2)  $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$  ；

(3)  $X(e^{j\pi})$ ；

(4) 确定并画出傅里叶变换实部 $\text{Re} [X(e^{j\omega})]$  的时间序列 $x_a(n)$ ；

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析



题5图

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad ;$$

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega \quad .$$

6. 试求如下序列的傅里叶变换：

$$(1) \quad x_1(n) = \delta(n-3)$$

$$(2) \quad x_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n+1) + \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

$$(3) \quad x_3(n) = a^n u(n) \quad 0 < a < 1$$

$$(4) \quad x_4(n) = u(n+3) - u(n-4)$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

7. 设:

(1)  $x(n)$ 是实偶函数,

(2)  $x(n)$ 是实奇函数,

分别分析推导以上两种假设下, 其 $x(n)$ 的傅里叶变换性质。

8. 设 $x(n)=R_4(n)$ , 试求 $x(n)$ 的共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$ , 并分别用图表示。

9. 已知 $x(n)=a^n u(n)$ ,  $0 < a < 1$ , 分别求出其偶函数 $x_e(n)$ 和奇函数 $x_o(n)$ 的傅里叶变换。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

10. 若序列 $h(n)$ 是实因果序列，其傅里叶变换的实部如下式：

$$H_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos \omega$$

求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

11. 若序列 $h(n)$ 是实因果序列， $h(0)=1$ ，其傅里叶变换的虚部为

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin \omega$$

求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

12. 设系统的单位脉冲响应 $h(n)=a^n u(n)$ ,  $0 < a < 1$ , 输入序列为

$$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)$$

完成下面各题:

- (1) 求出系统输出序列 $y(n)$ ;
- (2) 分别求出 $x(n)$ 、 $h(n)$ 和 $y(n)$ 的傅里叶变换。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

13. 已知 $x_a(t)=2\cos(2\pi f_0 t)$ , 式中 $f_0=100$  Hz, 以采样频率 $f_s=400$  Hz对 $x_a(t)$ 进行采样, 得到采样信号 和时域离散信号 $x(n)$ , 试完成下面各题:

- (1) 写出 $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换表示式 $X_a(j\Omega)$ ;
- (2) 写出 $\hat{x}_a(t)$ 和 $x(n)$ 的表达式;
- (3) 分别求出 $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换和 $x(n)$ 序列的傅里叶变换。

14. 求出以下序列的Z变换及收敛域:

- |                   |                             |
|-------------------|-----------------------------|
| (1) $2^{-n}u(n)$  | (2) $-2^{-n}u(-n-1)$        |
| (3) $2^{-n}u(-n)$ | (4) $\delta(n)$             |
| (5) $\delta(n-1)$ | (6) $2^{-n} [u(n)-u(n-10)]$ |

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

15. 求以下序列的Z变换及其收敛域，并在z平面上画出极零点分布图。

(1)  $x(n)=R_N(n) \quad N=4$

(2)  $x(n)=Ar^n\cos(\omega_0n+\varphi)u(n)$

$r=0.9, \omega_0=0.5\pi\text{rad}, \varphi=0.25\pi\text{rad}$

(3) 
$$x(n) = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq 4 \\ 2N - n & N + 1 \leq n \leq 2N \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

式中， $N=4$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

16. 已知

$$X(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 2z^{-1}}$$

求出对应 $X(z)$ 的各种可能的序列表达式。

17. 已知 $x(n]=a^n u(n)$ ,  $0 < a < 1$ 。分别求:

- (1)  $x(n)$ 的Z变换;
- (2)  $nx(n)$ 的Z变换;
- (3)  $a^{-n}u(-n)$ 的Z变换。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

18. 已知  $X(z) = \frac{-3z^{-1}}{2 - 5z^{-1} + 2z^{-2}}$  , 分别求:

(1) 收敛域  $0.5 < |z| < 2$  对应的原序列  $x(n)$ ;

(2) 收敛域  $|z| > 2$  对应的原序列  $x(n)$ 。

19. 分别用长除法、部分分式法求以下  $X(z)$  的反变换:

$$(1) X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{2 - 5z^{-1} + 2z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$(2) X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z| < \frac{1}{2}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

20. 设确定性序列 $x(n]$ 的自相关函数用下式表示:

$$r_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n+m)$$

试用 $x(n]$ 的Z变换 $X(z)$ 和傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 分别表示自相关函数的Z变换 $R_{xx}(z)$ 和傅里叶变换 $R_{xx}(e^{j\omega})$ 。

21. 用Z变换法解下列差分方程:

(1)  $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n) \quad y(n) = 0, n \leq -1$

(2)  $y(n) - 0.9y(n-1) = 0.05u(n)$

$$y(-1) = 1, y(n) = 0, n < -1$$

(3)  $y(n) - 0.8y(n-1) - 0.15y(n-2) = \delta(n)$

$$y(-1) = 0.2, y(-2) = 0.5, y(n) = 0, n \leq -3$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

22. 设线性时不变系统的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}, a \text{ 为实数}$$

(1) 在 $z$ 平面上用几何法证明该系统是全通网络, 即 $|H(e^{j\omega})| = \text{常数}$ ;

(2) 参数 $a$ 如何取值, 才能使系统因果稳定? 画出其极零点分布及收敛域。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

23. 设系统由下面差分方程描述：

$$y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$$

- (1) 求系统的系统函数 $H(z)$ ，并画出极零点分布图；
- (2) 限定系统是因果的，写出 $H(z)$ 的收敛域，并求出其单位脉冲响应 $h(n)$ ；
- (3) 限定系统是稳定性的，写出 $H(z)$ 的收敛域，并求出其单位脉冲响应 $h(n)$ 。



## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

24. 已知线性因果网络用下面差分方程描述：

$$y(n)=0.9y(n-1)+x(n)+0.9x(n-1)$$

(1) 求网络的系统函数 $H(z)$ 及单位脉冲响应 $h(n)$ ；

(2) 写出网络频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 的表达式，并定性画出其幅频特性曲线；

(3) 设输入  $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ ，求输出 $y(n)$ 。

25. 已知网络的输入和单位脉冲响应分别为

$$x(n)=a^n u(n), h(n)=b^n u(n) \quad 0 < a < 1, 0 < b < 1$$

(1) 试用卷积法求网络输出 $y(n)$ ；

(2) 试用ZT法求网络输出 $y(n)$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

26. 线性因果系统用下面差分方程描述：

$$y(n) - 2ry(n-1)\cos\theta + r^2y(n-2) = x(n)$$

式中， $x(n) = a^n u(n)$ ,  $0 < a < 1$ ,  $0 < r < 1$ ,  $\theta = \text{常数}$ ，试求系统的响应  $y(n)$ 。

27. 如果  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  是两个不同的因果稳定实序列，求证：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega}) d\omega \right] \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega}) X_2(e^{j\omega}) d\omega \right] \end{aligned}$$

式中， $X_1(e^{j\omega})$  和  $X_2(e^{j\omega})$  分别表示  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的傅里叶变换。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

28. 若序列 $h(n)$ 是因果序列，其傅里叶变换的实部如下式：

$$H_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \quad |a| < 1$$

求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

29. 若序列 $h(n)$ 是因果序列， $h(0)=1$ ，其傅里叶变换的虚部为

$$H_I(e^{j\omega}) = \frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \quad |a| < 1$$

求序列 $h(n)$ 及其傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

30\*. 假设系统函数如下式：

$$H(z) = \frac{(z+9)(z-3)}{3z^4 - 3.98z^3 + 1.17z^2 + 2.3418z - 1.5147}$$

试用MATLAB语言判断系统是否稳定。

31\*. 假设系统函数如下式：

$$H(z) = \frac{z^2 + 5z - 50}{2z^4 - 2.98z^3 + 0.17z^2 + 2.3418z - 1.5147}$$

- (1) 画出极、零点分布图，并判断系统是否稳定；
- (2) 求出输入单位阶跃序列 $u(n)$ 检查系统是否稳定。

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

32\*. 下面四个二阶网络的系统函数具有一样的极点分布：

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 1.6z^{-1} + 0.9425z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 - 0.3z^{-1}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.9425z^{-2}}$$

$$H_3(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.9425z^{-2}}$$

$$H_4(z) = \frac{1 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.9425z^{-2}}$$

## 第2章 时域离散信号和系统的频域分析

试用MATLAB语言研究零点分布对于单位脉冲响应的影响。要求：

- (1) 分别画出各系统的零、极点分布图；
- (2) 分别求出各系统的单位脉冲响应，并画出其波形；
- (3) 分析零点分布对于单位脉冲响应的影响。

