专题 4：Z 变换收敛域（region of convergence, ROC）及因果序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

1. Z 变换收敛含义

- $X(z)$ 是一个幂级数求和的形式，存在收敛问题
- 使级数收敛的所有 z 值集合，称为收敛域（region of convergence, ROC）
- 令 $z=re^{j\omega}$
- 则 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\omega n}$

$$|X(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n] r^{-n}\right| \left|e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n] r^{-n}\right|$$

- 若 $x[n]r^{-n}$ 绝对可和，则 $X(z)$ 收敛

1） 如果离散时间序列 x[n]非零值的范围为 n∈(-∞,-1)（左边序列特例）,即 X（z）的无穷级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ 仅包含正幂次项，则其收敛域是半径为 R_{x+} 的圆的内部，即
$r < R_{x+}$；如下图示

2） 如果离散时间序列 x[n]非零值的范围为 n∈[0,∞)（右边序列特例）,即 X（z）的无穷级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ 仅包含非正幂次项，则其收敛域是半径为 R_{x-} 的圆的内部，即
$r > R_{x-}$；如下图示

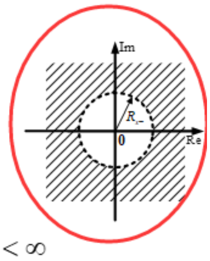
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- Z变换的收敛域ROC

$$|X(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{-1} \left|x[n] r^{|n|}\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left|x[n] \left(\frac{1}{r}\right)^{n}\right|$$

- 若 $r=R_{x-}$ 时， $\sum_{n=0}^{\infty} \left|x[n] \frac{1}{R_{x-}^{n}}\right| < \infty$
- 则 $r>R_{x-}$ 时，
- 令 $r=kR_{x-}$ 则 $k>1$

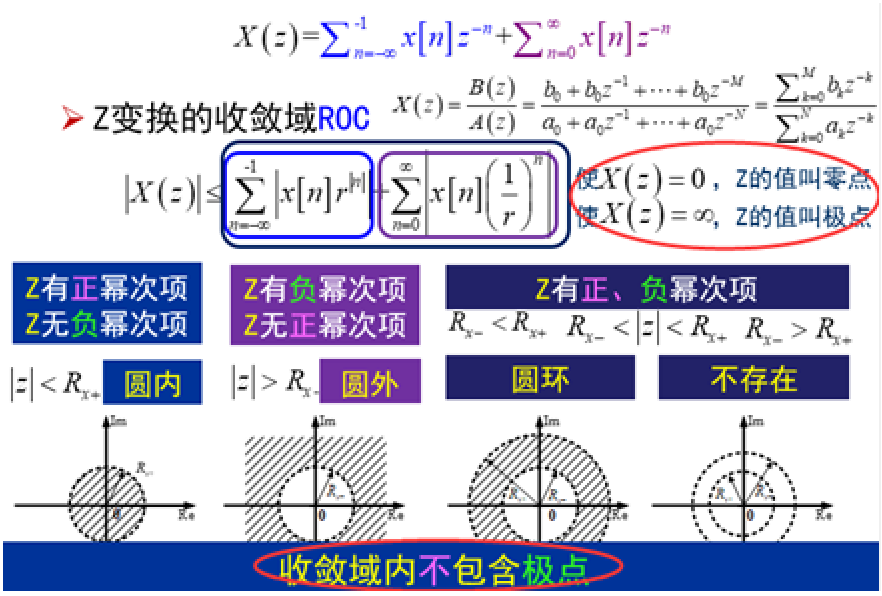
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|x[n] \frac{1}{k^{n} R_{x-}^{n}}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} \left|x[n] \frac{1}{R_{x-}^{n}}\right| \left|\frac{1}{k^{n}}\right| < \sum_{n=0}^{\infty} \left|x[n] \frac{1}{R_{x-}^{n}}\right| < \infty$$



- 其收敛域为： $|z| > R_{x-}$

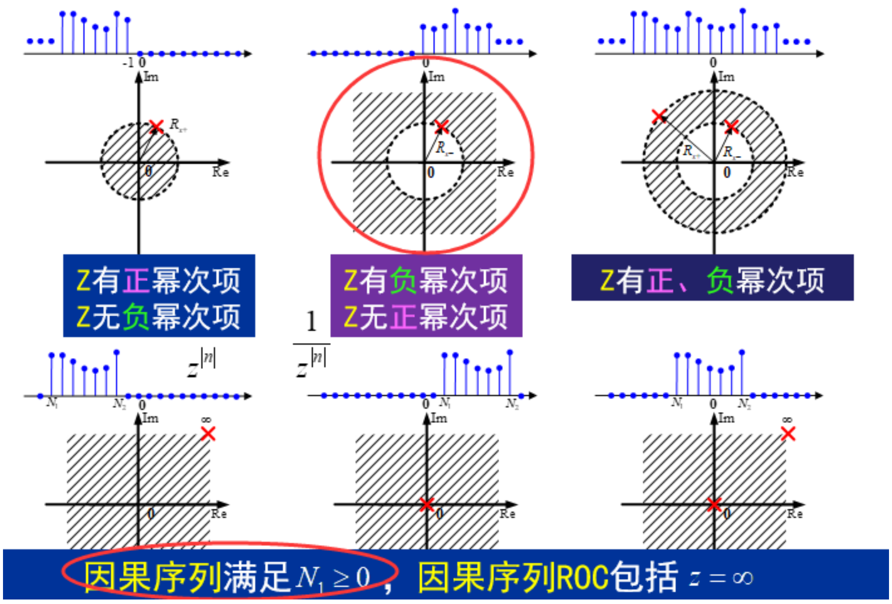
Z有负幂次项、无正幂次项，ROC是以原点为圆心的圆外

注意收敛域内不包含极点!!!!



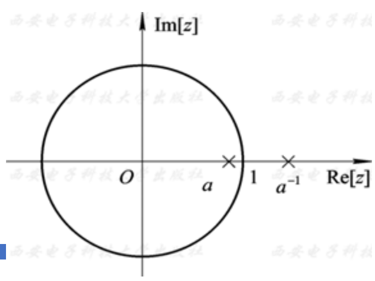
2. Z 变换的因果序列

系统在输入信号作用下才有输出信号的性质，是因果性，该系统是因果系统。
因果序列满足 n<0 时，x[n]=0。
1（2）满足因果条件，即如下图。



3. 例题

【例2.6.1】 已知 $H(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)},0<a<1$，分析其因果性和稳定性。



解：

$H(z)$的极点为 $z=a, z=a^{-1}$，如上图所示。

（1） 收敛域为 $a^{-1}<|z|\leq\infty$: 对应的系统是因果系统，但由于收敛域不包含单位圆，因此是不稳定系统。单位脉冲响应 $h(n)=(a^{n}-a^{-n})u(n)$（参考例 2.5.7），这是一个因果序列，但不稳定（不包含单位圆）。

此收敛域是在半径a^{-1}之外的区域，根据 Z 变换因果序列的特性（因果特性是右边序列的特例，即圆外）；后面两种显然不符合 Z 变换因果序列条件。

（2） 收敛域为 $0\leq|z|<a$: 对应的系统是非因果且不稳定系统。其单位脉冲响应 $h(n)=(a^{-n}-a^{n})u(-n-1)$（参考例 2.5.7），这是一个非因果且不收敛的序列。

（3） 收敛域为 $a<|z|<a^{-1}$：对应一个非因果系统，但由于收敛域包含单位圆，因此是稳定系统。其单位脉冲响应 $h(n)=a^{|n|}$，这是一个收敛的双边序列，如图 2.6.1(a)所示。

$H(z)$的三种收敛域中，前两种系统不稳定，不能选用；最后一种收敛域，系统稳定但非因果，还是不能具体实现。因此严格地讲，这样的系统是无法具体实现的。