ESERCIZI SUPPLEMENTARI DI MODELLAZIONE

1. Problemi di mix

I seguenti sono esercizi su problemi di mix. Il primo è semplice e necessita solo di due variabili. Un programma con due sole variabili continue si può risolvere molto facilmente con una procedura grafica che verrà presto introdotta nel corso. Gli esercizi successivi, pur rimanendo nell'ambito dei problemi di mix, sono un po' più articolati di quelli esaminati a lezione.

1. Una gelateria produce due tipi di sorbetti, A e B, partendo dalle materie prime latte e frutta. Per produrre un Kg di sorbetto A servono 300 g di frutta e mezzo litro di latte. Per produrre un Kg di sorbetto B servono 250 g di frutta e 650 ml di latte. Sono disponibili a magazzino 300 litri di latte e 200 Kg di frutta. Nessuno dei due sorbetti può rappresentare meno del 30% della produzione totale. Il sorbetto di A garantisce un profitto netto di 10 euro/Kg, il sorbetto B garantisce un profitto di 6 euro/Kg.

Scrivere il programma lineare che permette di determinare il mix produttivo che massimizza il profitto totale, supponendo di poter vendere l'intera produzione.

2. In una mensa scolastica, il pasto quotidiano degli allievi deve fornire loro i seguenti nutrienti.

- Tra i 60 e gli 80 grammi di proteine.
- Non più di 70 grammi di grassi.
- Tra i 200 e i 400 grammi di carboidrati.
- Tra le 2500 e le 4000 calorie.

La mensa può acquistare (1) pasta a 2 euro/Kg, (2) carne a 12 euro/Kg, (3) pesce a 18 euro/Kg, (4) legumi a 5 euro/Kg e (5) altre verdure a 1 euro/Kg. I tenori di macronutrienti in grammi/100 gr e Cal/100 gr dei vari alimenti sono riportati in tabella.

	Pasta	Carne	Pesce	Legumi	Verdure
Proteine	4	59	17	25	10
Grassi	13	13	14	0	0
Carboidrati	83	28	0	60	5
Calorie	130	140	170	360	65

Scrivere il programma lineare che permette di determinare il mix di alimenti per comporre il pasto base che soddisfa i requisiti sui nutrienti e l'apporto calorico a costo totale minimo.

2. Trasporto e assegnamento

3. Un comune deve smistare i rifiuti solidi urbani da quattro centri di raccolta $1, 2, 3, 4$ a tre impianti di trattamento A, B, C. Nei quattro centri di raccolta si accumulano rispettivamente 200, 500, 800 e 300 tonnellate all'anno di rifiuti. I tre impianti hanno rispettive capacità di trattamento massime di 1000, 1500 e 2000 tonnellate/anno, con costi differenti: 1000 euro/ton per l'impianto A, 600 euro/ton per l'impianto B, 1300 euro/ton per l'impianto C. A questo vanno aggiunti i costi di trasporto, in euro/ton, come da tabella seguente.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & 200 & 50 \\ 120 & 130 & 90 \\ 80 & 100 & 120 \\ 120 & 150 & 60 \end{pmatrix} \end{array}$$

Scrivere il programma lineare che permette di pianificare lo smistamento e il trattamento dei rifiuti dai centri di raccolta ai tre impianti a costo totale minimo.

4. Due tipi di carburante, **N**ormale e **S**uper, possono essere prodotti in tre impianti 1, 2, 3 che hanno diverse caratteristiche. L'impianto 1 può produrre 2 barili di Normale e 3 di Super consumando 8 barili di greggio. L'impianto 2 può produrre 3 barili di Normale e 4 di Super ogni 9 barili di greggio. L'impianto 3 può produrre 2 barili di Normale e 4 di Super ogni 10 barili di greggio.

Il greggio viene acquistato da tre fornitori A, B, C, che per il mese corrente hanno disponibilità di 50000, 150000 e 200000 barili, che possono essere forniti ai tre impianti con costi (in euro/barile) inclusivi di spese di acquisto e trasporto come da tabella.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 50 & 60 & 90 \\ 40 & 75 & 80 \\ 100 & 40 & 70 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il carburante Normale è venduto a 120 euro al barile, il Super a 150; la direzione dell'azienda vuole produrre un mix bilanciato, perciò nessuno dei due tipi può rappresentare meno del 40% della produzione mensile.

Scrivere il programma per pianificare l'approvvigionamento di greggio dai fornitori e il mix mensile da produrre al fine di massimizzare il saldo ricavi−costi, supponendo di poter vendere l'intera produzione.

3. Problemi multiperiodali

5. Un finanziere ha a disposizione due piani di investimento A e B, disponibili all'inizio di ciascuno dei prossimi cinque anni. Ogni euro investito in A all'inizio di ogni anno dà, due anni più tardi, un profitto di 0.4 euro, e può essere immediatamente reinvestito. Ogni euro investito in B all'inizio di ogni anno dà, tre anni dopo, un profitto di 0.7 euro. In più, da un certo momento in avanti, sarà possibile sfruttare anche due altri piani di investimento C e D. In particolare, ogni euro investito in C all'inizio del secondo anno raddoppierà dopo quattro anni. Ogni euro investito in D all'inizio del quinto anno darà un profitto di 0.3 euro l'anno successivo. Anche per i piani B, C, D, vale la possibilità di reinvestimento come per il piano A.

Il finanziere ha a disposizione 100000 euro e vuole sapere quale piano di investimento massimizza il profitto maturato entro l'inizio del sesto anno.

1)

Variabili :

x_i = quantità di sorbetto i prodotto

$i = A, B$

p_i = profitto unitario del prodotto i

$$\boxed{\max z = \sum_{i=A}^{B} x_i p_i}$$

soggetto a ...

m_{ij} = quantità di materia prima j necessaria a produrre 1 kg di prodotto i , $j = L, F$

$$\sum_{i=A}^{B} m_{iL} x_i \leq 300$$

$$\sum_{i=A}^{B} m_{iF} x_i \leq 200$$

$$x_i p_i \geq \frac{30}{100} \sum_{i=A}^{B} x_i p_i \qquad i = A, B$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad i = 1, 2, \_, 5$$

2)

Variabili:

x_i = quantità di alimento i necessario a comporre un piatto bilanciato. $i = 1,2,\_\_,5$

c_i = costo al kg dell'alimento i , $i=1,2,\_\_,5$

$$\boxed{\min\ z = \sum_{i=1}^{5} c_i x_i}$$

soggetto a...

y_{ij} = grammi di macro j contenuti in 100 g dell'alimento i

$j = 1,2,3$, $i = 1,2,\_\_,5$

$$60 \leq \sum_{i=1}^{5} x_i y_{i1} \leq 80$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_{i2} \leq 70$$

$$200 \leq \sum_{i=1}^{5} x_i y_{i3} \leq 400$$

cal_i = apporto calorico per 100 g di alimento i , $i=1,2,\_,5$

$$2500 \leq \sum_{i=1}^{5} x_i cal_i \leq 4000$$

$x_i \in \mathbb{R}_+$ $\quad i=1,2,\_,5$

3)

Variabili:

x_{ij} = tonnellate di rifiuti smistati dal centro i all'impianto j

t_{ij} = costo di trasporto per tonnellata dal centro i all'impianto j

c_j = costo per tonnellata del trattamento dei rifiuti nell'impianto j

con $i = 1,2,3,4$ $\quad j = A,B,C$

$$\boxed{\min z = \sum_{j=A}^{C} \sum_{i=1}^{4} x_{ij}(t_{ij} + c_j)}$$

soggetto a...

r_i = tonnellate di rifiuti accumulate in 1 anno nel centro i

$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_{iA} \leq 1000$$

$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_{iB} \leq 1500$$

$$\sum_{i=1}^{4} r_i x_{iC} \leq 2000$$

$x_{ij} \in \mathbb{R}_+$ $\quad i = 1,2,3,4$ $\quad j = A,B,C$

4)

"singola produzione" = n° barili di Normale e Super prodotti consumando un numero dato di barili di greggio.

Variabili:

x_i = n° "singole produzioni" effettuate nell'impianto i

g_i = barili di greggio necessari per "singola produzione" di carburanti nell'impianto i

r_j = ricavo al barile di carburante j

c_{ik} = costo del greggio fornito da k all'impianto i

d_k = disponibilità di greggio del fornitore k

p_{ij} = n° barili di carburante j dati dalla "singola produzione" nell'impianto i

con $i = 1,2,3$, $j = N,S$, $k = A,B,C$

$$\boxed{\max z = \sum_{i=1}^{3} x_i \left(p_{iS} \cdot r_S + p_{iN} r_N - \sum_{k=A}^{C} g_i c_{ik} \right)}$$

soggetto a ...

$p_{iN} + p_{iS} \leq g_i$, $i=1,2,3$

$x_i g_i \leq \sum_{k=A}^{C} d_k$, $i=1,2,3$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i p_{iS} \leq 0{,}4 \sum_{i=1}^{3} x_i (p_{iN} + p_{iS})$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i p_{iN} \leq 0{,}4 \sum_{i=1}^{3} x_i (p_{iN} + p_{iS})$$

$x_i \in \mathbb{Z}_+$

$i=1,2,3$

5)

Variabili:

x_{ij} = denaro investito all'inizio dell'anno i nel piano j $\quad i=1,2,\ldots,5 \quad j=A,B,C,D$

c_j = percentuale (costante) di profitto del piano j $\quad j=A,B,C,D$

$\underbrace{a_j}$ = anni di attesa per iniziare a percepire un profitto dal piano j $\quad j=A,B,C,D$

$a_A = 2$, $a_B = 3$, $a_C = 4$, $a_D = 1$

Y_K = profitto totale maturato all'inizio dell'anno K $\quad K = i + a_j$, $1 < K \leq 6$

$$Y_K = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=A}^{D} c_j x_{ij}$$

$$\boxed{\max \quad z = \sum_{K=2}^{6} Y_K}$$

Soggetto a ...

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=A}^{D} x_{ij} - Y_K \leq 100\,000 \quad \text{con } K = i + a_j$$

$x_{5A} = 0 \qquad\qquad x_{iC} = 0, \quad i=1,3,4,5$

$x_{iB} = 0, \quad i=4,5 \qquad x_{iD} = 0, \quad i=1,2,4,5$

$x_{ij} \in \mathbb{R}_+ \qquad i=1,\ldots,5 \quad j=A,B,C,D$