$\boxed{2.1}$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad f(n) = n^2 - 1$

$f^{-1}(-5) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - 1 = -5\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = -4\} \quad \nexists$

$f^{-1}(-1) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - 1 = -1\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 0\} = \{0\}$

$f^{-1}(8) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - 1 = 8\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 9\} = \{-3, +3\}$

$f^{-1}(12) = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 - 1 = 12\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 13\} \quad \nexists$

$\boxed{2.2}$

$f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \qquad f((m,n)) = m^2 - n$

1) e' iniettiva? $\iff \forall (m,n), (m',n') \in \mathbb{Z}^2 \mid (m,n) \neq (m',n')$
$\Rightarrow f(m,n) \neq f(m',n')$

Siano $(m,n) \neq (m',n')$
$f(m,n) = m^2 - n \quad , \quad f(m',n') = m'^2 - n'$

Se prendo $m' = -m$ e $n = n'$ otterrei
$f(-m, n) = m^2 - n = f(m,n)$

$\Rightarrow f$ non e' iniettiva

2) e' suriettiva? $\iff \operatorname{Im}(f) = \mathbb{Z}$ ovvero $\forall a \in \mathbb{Z}$
$\exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid f(m,n) = a$

$f(m,n) = m^2 - n \overset{?}{=} a$

Prendo ad esempio $m = 0$ e $n = -a$
$\Rightarrow f(0, -a) = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow f$ e' suriettiva

3) $f^{-1}(0) \cap \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n = 4m\}$

$$\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m^2 - n = 0 \ , \ n = 4m\} =$$
$$= \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m^2 - 4m = 0\} = \{(0,0), (4,16)\}$$

4) Calcolare $f(S)$ di $S = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n = 2m-1\}$

$$f(m, 2m-1) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 1$$

$\boxed{2.3}$ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ e' pari} \\ 3n+1 & \text{se } n \text{ e' dispari} \end{cases}$

a) f e' iniettiva? $\iff \forall n, n' \in \mathbb{N} \mid n \neq n' \Rightarrow f(n) \neq f(n')$

Prendo $n' = 2n$ e $n'' = 2n+1$

$$f(n') = f(2n) = n$$
$$f(n'') = f(2n+1) = 6n+4$$

per n'' ottengo risultati pari, che sono contenuti in $f(n)$ con n dispari $\Rightarrow$ f non e' iniettiva

b) e' suriettiva? $\iff$ $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{N}$ ovvero $\forall a \in \mathbb{N}$ $\exists n \in \mathbb{N} \mid f(n) = a$

$$f(n) \stackrel{?}{=} a$$

se prendo $n = 2a$ (pari)

$f(2a) = a$ $\Rightarrow$ e' suriettiva

c) $f(2\mathbb{N})$ dell' insieme dei numeri pari è contenuto nell' insieme dei numeri dispari;

$f(2a) = a$ $\quad f(2a+1) = 6a+4$ pari $\quad \forall a \in \mathbb{N}$

<u>FALSO</u> $\quad f(2\mathbb{N}) \supseteq f(2\mathbb{N}+1)$

d) $f^{-1}(3\mathbb{N}) \subseteq f(2\mathbb{N})$

f $\quad$ Sia $a \in \mathbb{N}$: $f^{-1}(n) = 3a \iff \frac{n}{2} = 3a \iff n = 6a$ sia pari che divisibile per 3

$\Rightarrow$ <u>VERO</u>

$f(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}) = \{4,1,10,2,16,3,22,4,28,5\}$

$f^{-1}(\{1,2,7,9,10,13\}) = \{2,4,14,18,\{3,20\},26\}$

$\boxed{2.4}$

$p_1 : A \times B \to A$ $\qquad p_2 : A \times B \to B$

$\Gamma_1 = \{a\} \times B \subseteq A \times B$ $\qquad \Gamma_2 = A \times \{b\} \subseteq A \times B$

$\forall a, b \in A \times B$

$\boxed{2.5}$ $\quad f : A \to B$ con grafico $\Gamma \subseteq A \times B$

$S \subseteq A$ sottoinsieme di A

Γ_S grafico di $f|_S$ $\qquad$ dimostrare che $\Gamma_S = \Gamma \cap (S \times B)$