BSM 101

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİNE GİRİŞ

HÜSEYİN ESKİ, İSMAİL ÖZTEL

~ Boole Cebri~

İÇERİK

- Boole cebri
- Mantıksal bağlaçlar
- Boole cebri teoremleri
- Doğruluk tabloları
- Lojik kapılar
- Lojik ifadelerin sadeleştirilmesi
- Maksimum – minimum terimler
- Karnaugh diyagramları

Boole Cebri

- Boole cebri, önermeleri yada nesneler arasındaki ilişkileri ortaya koyan simgesel ve matematiksel bir mantık sistemidir.
- İlk olarak 1854 yılında George Boole tarafından geliştirilmiştir.
- Dijital bilgisayarlardaki devre tasarımlarının temelini oluşturur.
- Sayısal değerlerin değil doğruluk değerlerinin kullanıldığı durumlarda geçerlidir.
  - Doğruluk değeri → 1
  - Yanlışlık değeri →0

Mantıksal Bağlaçlar

- *x* ve *y* iki önereme olsun, önermelerin doğru olduğu durumları *doğru*, yanlış olduğu durumları *yanlış* ile gösterelim. Bu önermelerin *VE (∧)* ile *VEYA* (v) işlemine tabi tutulması ile olası tüm sonuçlar:

x	y	x ∧ y	x v y
doğru	doğru	doğru	doğru
doğru	yanlış	yanlış	doğru
yanlış	doğru	yanlış	doğru
yanlış	yanlış	yanlış	yanlış

Mantıksal Bağlaçlar

- Bilgisayarlarda sıfır ve birler kullanıldığı düşünülürse doğruluk tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Mantıksal Bağlaçlar

- Boole cebri mantıksal değişimler arasındaki ilişkiyi inceler.
- Giriş değişkenleri yalnızca iki durumda olabilir: 0, 1
- Bir eşitliğin giriş değişkenleri üzerindeki VE işlemi çarpımları, VEYA işlemi ise toplamları gösterir.
- Bir değişkenin tümleyeni ise DEĞİL işlemi ile gösterilir.

Boole Cebri Teoremleri

- Değişme kuralı
  - $x + y = y + x$
  - $x . y = y . x$
- Birleşme kuralı
  - $x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$
  - $x . y . z = (x . y) . z = x . (y . z)$
- Dağılma kuralı
  - $x . (y + z) = x . y + x . z$
  - $x + y . z = (x + y) . (x + z)$

Boole Cebri Teoremleri

- Özdeşlik kuralı
  - $x + x = x$
  - $x . x = x$
- VE kuralı
  - $x . 1 = x$
  - $x . 0 = 0$
- VEYA kuralı
  - $x + 1 = 1$
  - $x + 0 = x$

Boole Cebri Teoremleri

- Tamamlayıcı kuralı
  - $x + x' = 1$
  - $x . x' = 0$

- Tersin tersi kuralı
  - $(x')'=x$
  - $((x + y)')'= x + y$
  - $((x . y)')'= x . y$

Boole Cebri Teoremleri

- De Morgan kuralı
  - $(x \,.\, y)' = x' + y'$
  - $(x + y)' = x' \,.\, y'$

- Yutma kuralı
  - $x + x \,.\, y = x$
  - $x\,(x + y) = x$

Boole Cebri Teoremleri

- $x \cdot (x+y')$ ifadesinin eşdeğeri nedir?
  - $x \cdot (x+y') = x \cdot x + x \cdot y' = x + x \cdot y' = x\,(1 + y') = x$

- $x \cdot y + x \cdot y'$ ifadesinin eşdeğeri nedir?
  - $x \cdot y + x \cdot y' = x\,(y + y') = x$

Sadeleştirme örnekleri

- $F = x \cdot y + x' \cdot y + y' = y\,(x + x') + y' = y + y' = 1$
- $F = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z' + x' \cdot y = x \cdot y\,(z + z') + x' \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y = y \cdot (x + x') = y$
- $F = x \cdot (x' + y) = x \cdot x' + x \cdot y = x \cdot y$

Doğruluk Tabloları

- Girişlerin alabileceği farklı durumlarda çıkış durumlarını bulmak için doğruluk tablosu kullanılır.
- Tabloda VE, VEYA ve DEĞİL işlemlerinin doğruluk tablosu verilmiştir.

x	y	x . y	x + y	x’
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Doğruluk Tabloları

- x . y + x fonksiyonunun doğruluk tablosu:

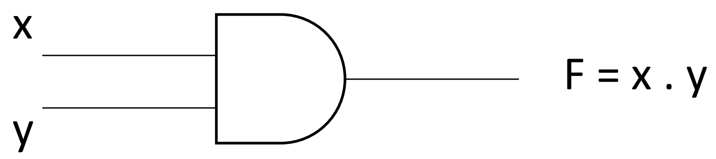
x	y	x . y	x . y + x
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Lojik Kapılar

- Sayısal devrelerin temelini oluşturur.
- Diyot, transistör, direnç gibi devre elemanları içerirler.
    - VE kapısı
    - VEYA kapısı
    - DEĞİL kapısı
    - VE DEĞİL kapısı
    - VEYA DEĞİL kapısı
    - YA DA kapısı
    - YA DA DEĞİL kapısı

Lojik Kapılar

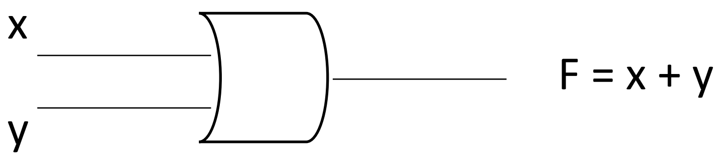
- VE kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Lojik Kapılar

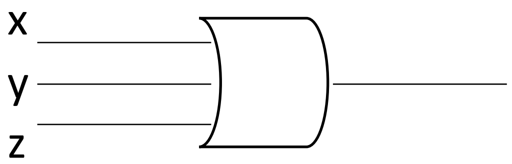
- VEYA kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Lojik Kapılar

- Üç girişli VEYA kapısı ve doğruluk tablosu

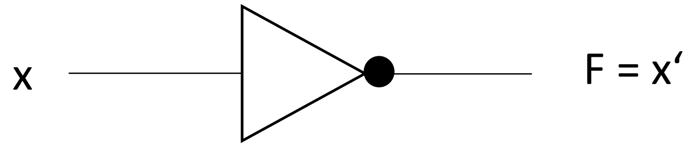


F = x + y + z

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Lojik Kapılar

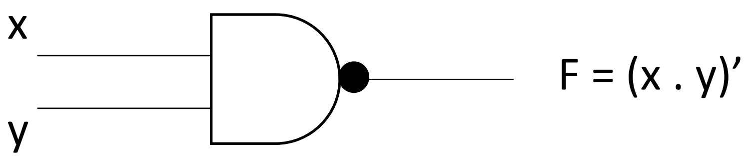
- DEĞİL kapısı ve doğruluk tablosu



x	F
0	1
1	0

Lojik Kapılar

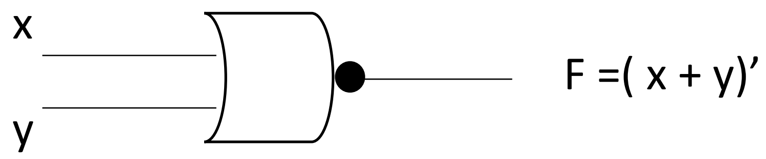
- VE DEĞİL kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Lojik Kapılar

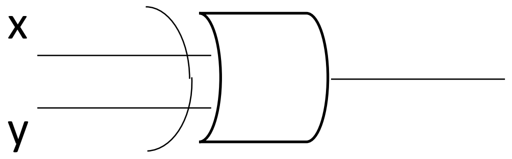
- VEYA DEĞİL kapısı ve doğruluk tablosu



x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Lojik Kapılar

- YA DA kapısı ve doğruluk tablosu



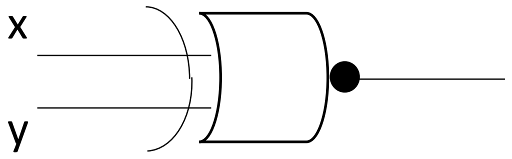
$F = x \oplus y$

$= x' \cdot y + x \cdot y'$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Lojik Kapılar

- YA DA DEĞİL kapısı ve doğruluk tablosu

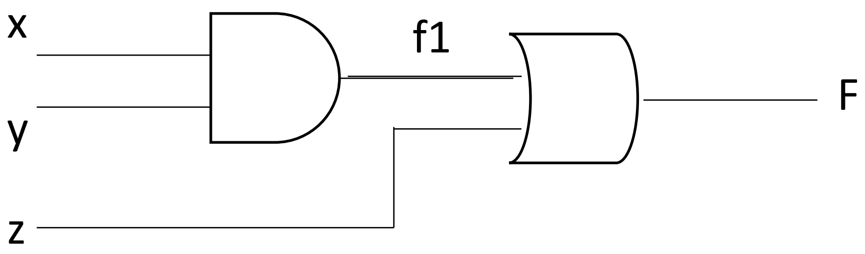


$$F = x \odot y$$
$$= x \,.\, y + x' \,.\, y'$$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Lojik Kapılar

- Lojik kapılardan matematiksel ifadelerin elde edilmesi

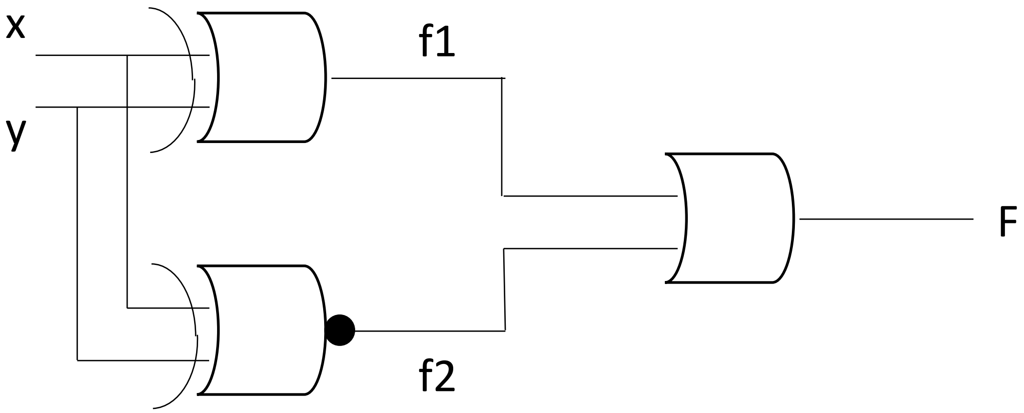


$$f1 = x \cdot y$$

$$F = f1 + z = x \cdot y + z$$

Lojik Kapılar

- Lojik kapılardan matematiksel ifadelerin elde edilmesi



$$f1 = x \oplus y = x' \,.\, y + x \,.\, y'$$

$$f2 = x \odot y = x \,.\, y + x' \,.\, y'$$

$$F = f1 + f2$$

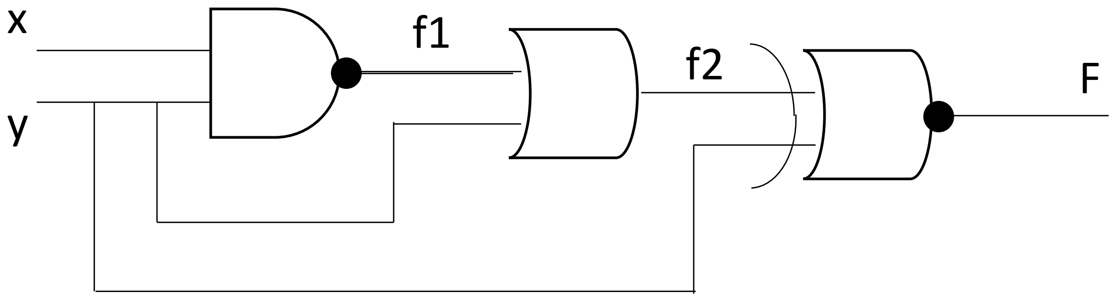
$$= x' \,.\, y + x \,.\, y' + x \,.\, y + x' \,.\, y'$$

$$= x' \,(\, y + y' \,) + x \,(\, y' + y \,)$$

$$= x' + x = 1$$

Lojik Kapılar

- Lojik kapılardan matematiksel ifadelerin elde edilmesi



$$f1 = (x \,.\, y)'$$

$$f2 = f1 + y = x' + y' + y = x' + 1 = 1$$

$$f3 = f2 \odot y = 1 \odot y$$

$$= 1 \,.\, y + 1' \,.\, y' = y + 0 = y$$

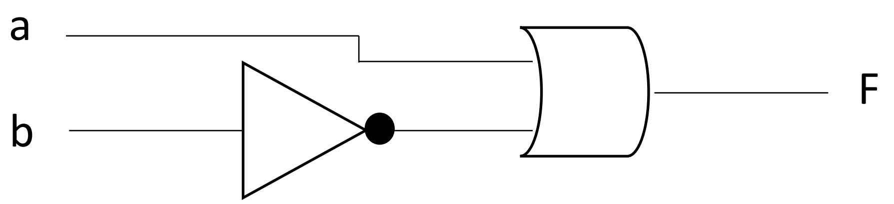
Lojik Kapılar

- Matematiksel ifadelerden lojik diyagram elde edilmesi

$F = (a' . b)' . (a + b')$

$= ((a')' + b') . (a + b')$

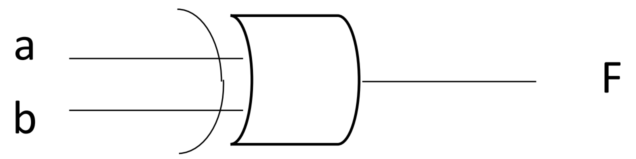
$= (a + b') . (a + b') = (a + b')$



Lojik Kapılar

- Matematiksel ifadelerden lojik diyagram elde edilmesi

$$F = ((a' + a.\,b) \,.\, (b' + a \,.\, b))'$$
$$= (a' + a.\,b)' + (b' + a \,.\, b)'$$
$$= (a')' \,.\, (ab)' + (b')' \,.\, (ab)'$$
$$= a \,.\, (a' + b') + b \,.\, (a' + b')$$
$$= a \,.\, a' + a \,.b' + b \,.\, a' + b \,.\, b'$$
$$= 0 + a \,.b' + b \,.\, a' + 0 = a \oplus b$$



Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Mantıksal fonksiyonlar kullanılarak elde edilen mantıksal devrelerde devre elemanlarının sayısının azaltılması önemli bir problemdir.
- Mantıksal fonksiyonların eşdeğeri olan ve en az eleman içeren fonksiyonun bulunması gerekir.
- Aşağıdaki fonksiyon çarpımlar toplamı olarak ifade edilir ve eşdeğeri:

$$F(x,y,z) = x \cdot y \cdot z + x \cdot y' \cdot z$$
$$= x \cdot z\,(y + y') = x \cdot z$$

- İlk durumda birden fazla çarpma ve toplama işlemi varken eşdeğeri durumda sadece bir adet çarpama işlemi bulunmaktadır.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Mantıksal ifadelerin karmaşık olması durumunda Boole Cebri kuralları ile sadeleştirme yapmak zorlaşır.
- Bu durumda Karnaugh diyagramları sadeleştirme yapmak için daha kullanışlı bir yöntemdir.
- Karnaugh diyagramlarını öğrenmeden önce minimum terimler ve maksimum terimler kavramlarının bilinmesi gerekmektedir.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Minimum terimler (minterm)
  - İkili değişkenler tümleyen formunda bulunabilirler : x, x’
  - VE işlemi ile birleştirilmiş iki adet ikili değişken düşünüldüğünde olası 4 kombinasyon vardır: x . y ,   x’ . y ,   x . y’ ,   x’ . y’
  - Bu dörtlünün her biri minterm ya da standart çarpım diye adlandırılır.
  - Benzer şekilde n adet ikili değişken birleştirilerek 2^n adet minterm elde edilir.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Minimum terimler (minterm)
  - Tabloda x,y ikili değişkenleri için mintermler gösterilmiştir.
  - Değişkene karşılık gelen bit sıfır ise değişken tümleyen işareti ile gösterilir (x’).
  - Her bir minterm için m_j şeklinde bir sembol kullanılır.

x . y	minterm	Minterm simgesi
00	x’ . y’	m_0
01	x’ . y	m_1
10	x . y’	m_2
11	x . y	m_3

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Minimum terimler (minterm)
  - Ör: x . y + x .y’ ifadesinin minterm karşılığı: m_2 + m_3 = $\sum(2,3)$
  - Ör: x’ . y’ + x . y’ + x .y ifadesinin minterm karşılığı: m_0 + m_2 + m_3 = $\sum(0,2,3)$

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Maksimum terimler (maksterm)
  - İkili değişkenler tümleyen formunda bulunabilirler : x, x’
  - VEYA işlemi ile birleştirilmiş iki adet ikili değişken düşünüldüğünde olası 4 kombinasyon vardır: x + y , x’ + y , x + y’ , x’ + y’
  - Bu dörtlünün her biri maksterm ya da standart toplam diye adlandırılır.
  - Benzer şekilde n adet ikili değişken birleştirilerek 2^n adet maxterm elde edilir.

Lojik İfadelerin Sadeleştirilmesi

- Maksimum terimler (maksterm)
  - Tabloda x,y ikili değişkenleri için makstermler gösterilmiştir.
  - Değişkene karşılık gelen bit bir ise değişken tümleyen işareti ile gösterilir (x’).
  - Her bir maksterm için M_j şeklinde bir sembol kullanılır.

x + y	maksterm	maksterm simgesi
00	x + y	M_0
01	x + y’	M_1
10	x’ + y	M_2
11	x’ + y’	M_3

Karnaugh Diyagramları

- Karnaugh diyagramları n adet değişken için 2^n adet hücre içerir.
- Her bir hücre, bir mintermi temsil eder.
- Örneğin x ve y ikilisi için karnaugh diyagramı

m_0	m_1
m_2	m_3

y

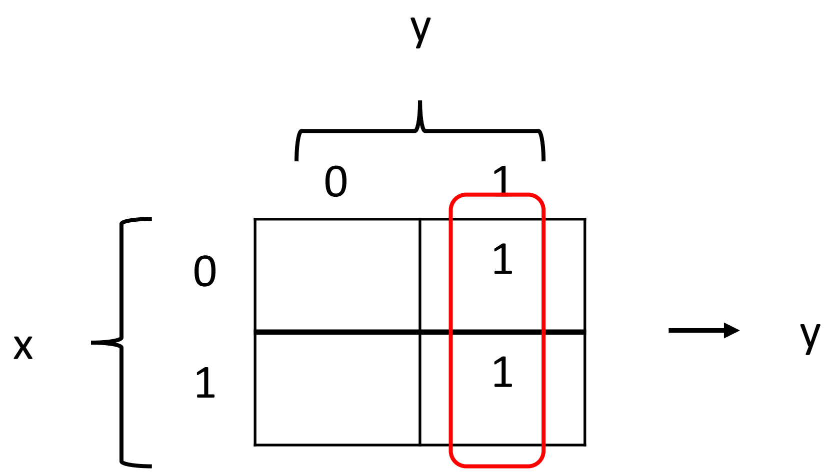
x

x/y	0	1
0	x’ . y’	x’ . y
1	x . y'	x . y

Karnaugh Diyagramları

- Ör: x . y + x’ . y ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

m_0	m_1
m_2	m_3



Karnaugh Diyagramları

- Ör: x . y’ + x . y ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

m_0	m_1
m_2	m_3

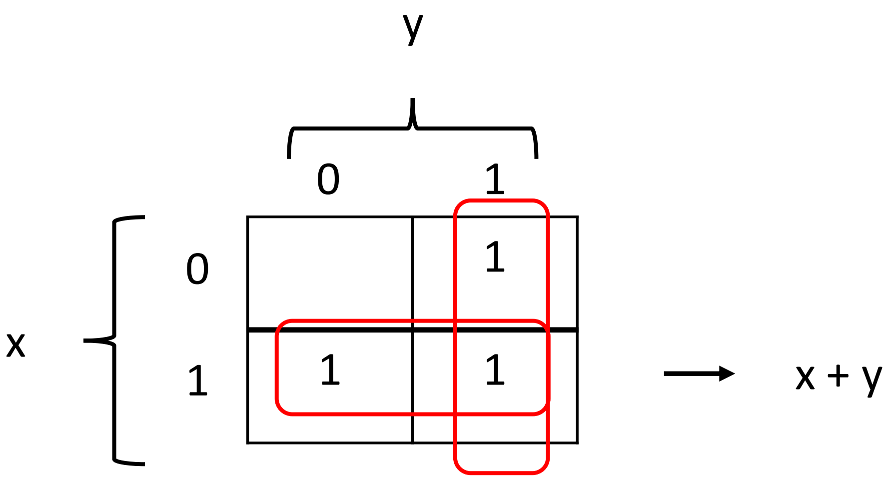
x \ y	0	1
0		
1	1	1

$\longrightarrow$ x

Karnaugh Diyagramları

- Ör: x + x’ . y ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

$$x + x' \cdot y = x \cdot (y + y') + x' \cdot y = x \cdot y + x \cdot y' + x' \cdot y$$



Karnaugh Diyagramları

- Üç değişkenli Karnaugh Diyagramları

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

yz

x/yz	00	01	11	10
0	x' . y' . z'	x' . y' . z	x' . y . z	x' . y . z'
1	x . y' . z'	x . y' . z	x . y . z	x . y . z'

x

Karnaugh Diyagramları

- Ör: x’ . y . z + x . y . z + x . y’ . z’ + x . y . z’ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

m_0	m_1	m_2	m_3
m_4	m_5	m_6	m_7

yz

x/yz	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

x

↓

y . z + x . z’

Karnaugh Diyagramları

- Ör: x . y’ . z + x’ . y . z’ + x . y’ . z’ + x’ . y . z ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

m_0	m_1	m_2	m_3
m_4	m_5	m_6	m_7

yz

x/yz	00	01	11	10
x 0			1	1
x 1	1	1		

$$x \cdot y' + x' \cdot y \longrightarrow x \oplus y$$

Karnaugh Diyagramları

- Ör: $x' + x \,.\, y \,.\, z' + y \,.\, z$ ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

yz

x/y	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	1

x

↓

$x' + y$

Karnaugh Diyagramları

- Ör: y . z + x’ . y + x . y’ . z + x’ . z ifadesinin sadeleştirilmiş hali:

yz

x/y	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	

x

↓

z + x’ . y