Ör4 $\left(x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$ homogen dif. denklemini çözelim:

$y=ux \Rightarrow dy=u\,dx+x\,du$ dön. yapılırsa

$(x\sin u-ux\cos u)dx+x\cos u\,(u\,dx+x\,du)=0 \Rightarrow$

$(\sin u-\cancel{u\cos u}+\cancel{u\cos u})dx+x\cos u\,du=0 \Rightarrow$

$\frac{dx}{x}+\cot u\,du=0 \Rightarrow \ln x+\ln|\sin u|=\ln c \Rightarrow x\sin u=c \Rightarrow$

$x\sin\frac{y}{x}=c$ genel çözümü çıkar.

Homogen hale getirilebilen denklemler

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad \text{---}(1)$$

denklemi eğer $(ax+by+c)dx+(ex+fy+g)dy=0$ ---(2) formunda ise homogen olmadığından $y_1=ax+by+c$ ve $y_2=ex+fy+g$ doğrularının kesişmesini dikkate alarak homogen hale gelebilir:

a) $\frac{a}{b}\neq\frac{e}{f} \Rightarrow$ doğrular kesişirler. Kesim noktası (α,β) noktası ise $x=\alpha+X$, $y=\beta+Y$ koordinat dönüşümü ile homogen dif. hale gelir: $dx=dX$, $dy=dY$. Bu durumda dif. denklem

$$(aX+bY)dX+(eX+fY)dY=0 \quad \text{---}(3)$$

haline gelir ki buradan da $Y=UX$ dönüşümü uygulanır.

Ör5 $y'=\dfrac{2x+9y-20}{6x+2y-10}$ denklemini homogen hale getirerek çözelim:

Denklemdeki katsayılar $\frac{2}{9} \neq \frac{6}{2}$ sağladığından iki doğru kesişirler:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+9y=20 \\ 6x+2y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} -6x-27y=-60 \\ 6x+2y=10 \\ \hline -25y=-50 \end{array} \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1 \text{ yani}$$

$(1,2)=(\alpha,\beta)$ elde edilir. Dolayısıyla $x=1+X$, $y=2+Y$ koordinat dönüşümüyle $dx=dX$ ve $dy=dY$ dikkate alınırsa denklem

$$Y'=\frac{2X+9Y}{6X+2Y}$$ homogen dif. denklem haline gelir.

$Y=UX \Rightarrow dY=UdX+XdU$ den ya da $Y'=U+XU'$ den

$$U+XU'=\frac{2X+9UX}{6X+2UX}=\frac{2+9U}{6+2U} \Rightarrow XU'=\frac{2+9U}{6+2U}-U=$$

$$XU'=\frac{2+9U-6U-2U^2}{6+2U} \Rightarrow X\frac{dU}{dX}+\frac{2U^2-3U-2}{2U+6}=0 \Rightarrow$$

$$\frac{dX}{X}+\frac{2U+6}{2U^2-3U-2}dU=0$$ değişkenlerine ayrılmış hale gelir. Buradan da integralle;

$$\ln X+\int\frac{2U+6}{2U^2-3U-2}dU=\cancel{0}=\ln X+\frac{1}{2}\int\frac{4U-3+15}{2U^2-3U-2}dU=\ln C$$

$$\ln X+\frac{1}{2}\int\frac{4U-3}{2U^2-3U-2}dU+\frac{15}{4}\int\frac{dU}{\left(U-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}}=\ln C$$

$$\ln X+\frac{1}{2}\ln|2U^2-3U-2|+\frac{15}{4}\frac{1}{2.\frac{5}{4}}\ln\left|\frac{U-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{U-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}\right|=\ln C \Rightarrow$$

$$X\sqrt{2U^2-3U-2}\cdot\left(\frac{2U-4}{2U+1}\right)^{3/2}=C \Rightarrow$$

$$\sqrt{2Y^2-3XY-2X^2}\left(\frac{2Y-4X}{2Y+X}\right)^{3/2}=C$$ ve ardından $X=x-1$, $Y=y-2$ yazılırsa genel çözüm bulunur.

b) $\frac{a}{b}=\frac{e}{f} \Rightarrow$ doğrular paraleldir ve aralarında

$\frac{a}{e}=\frac{b}{f}=k=sbt$ gibi bağıntı vardır. Bu $a=ek$ ve

$b=fk$ demektir ki (2) de $ex+fy=t$ dönüşümüyle

$$(ax+by+c)dx+(ex+fy+g)dy=0 \Rightarrow$$

$$(ekx+fky+c)dx+(ex+fy+g)dy=0 \Rightarrow edx+fdy=dt \text{ old.}$$

$$(kt+c)dx+(t+g)\left(\frac{dt-edx}{f}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\left(kt+c-\frac{e}{f}(t+g)\right)dx+\frac{t+g}{f}dt=0$$ şeklinde değişkenlerine ayrılır.

<u>ÖR6</u> $y'=\frac{2x+2y+1}{x+y-1}$ denkleminin genel çözümü?

Denklem homogen olmayıp doğrular paraleldir.

$x+y=t$ bağımlı değişkeni değiştirelim:

$1+y'=t'$ olacağından denklem;

$$t'-1=\frac{2t+1}{t-1} \Rightarrow t'=\frac{2t+1}{t-1}+1=\frac{3t}{t+1} \Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{3t}{t+1}$$

ya da $3dx=\frac{t+1}{t}dt=\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$ haline gelir.

$$3x=t+\ln t+\ln c=t+\ln tc \Rightarrow tc=e^{3x-t}$$

$$(x+y)c=e^{3x-x-y}=e^{2x-y}=(x+y)c$$ çözümü çıkar.

<u>Problemler</u>

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+(x-1)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$, $y(1)=1$ koşulunu sağlayan çözümü bulunuz.

2) $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ tipindeki denklemin $u=xy$ dönüşümü ile çözülebildiğini gösteriniz.

3) $(3x-2y+2)^2 dx = dy$ denkleminin genel çözümü?

4) $(6x-4y+2)\,dx + (3x-2y+1)\,dy = 0$ 〃 〃

5) $(2x-2y+1)\,dx + (x-y-1)\,dy = 0$ 〃 〃

6) $(x-2y-1)\,dx + (2x-y+1)\,dy = 0$ 〃 〃

Tam Diferansiyel Denklemler

xy-düzleminin bir Ω bölgesinde 1. mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip $F(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli $dF(x,y)$;

$dF(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy$ şeklindedir. Bununla birlikte

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = dF(x,y)$$

olacak şekilde bir F fonksiyonu varsa

(1) — $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ifadesi Ω da tam diferansiyeldir.

Buradan da, eğer (1) ifadesi Ω da 〃 〃 ise

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \quad \text{---} (2)$$

eşitliklerini sağlayan bir $F(x,y)$ fonksiyonu mevcuttur.

Ör1 $\frac{1}{4}x^2y^4\,dx + \frac{1}{3}x^3y^3\,dy$ ifadesi tam diferansiyeldir. Zira;

$\frac{1}{4}x^2y^4\,dx + \frac{1}{3}x^3y^3\,dy = \frac{d}{12}(x^3y^4)$ dir.

Tanım Eğer $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ bir $F(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli ise $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ diferansiyel