1. Mertebeden Yüksek Dereceli Denklemler

1) Clairaut Diferansiyel Denklemi:

$y = xy' + f(y')$ ... (1) formunda yazılabilen denklemdir. f burada y' nün verilen fonksiyonudur. ve bu y ye göre çözülebilen bir dif. denklemdir. $y'=p$ denirse (1) denklemi x'e göre türetildiğinde;

$$y = xp + f(p) \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 1.p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$p = p + \left(x + f'(p)\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \left(x + f'(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{... (2)}$$

elde edilir. Burada iki durum sözkonusudur:

i) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c = sbt$ olup (1) de yazıldığında

$y = cx + f(c)$ ... (3) genel çözümü bulunur.

ii) $\frac{dp}{dx} \neq 0 \Rightarrow x + f'(p) = 0$ olur ki buradan $x = -f'(p)$ çıkar.

x'in bu değeri yine (1) de yazarak

$y = \left(-f'(p)\right)p + f(p)$ çıkar ki bu

$$\left.\begin{aligned} x &= -f'(p) \\ y &= -f'(p).p + f(p) \end{aligned}\right\} \text{... (4)}$$

çözüm çifti (1) in tekil çözümünü verir. Buna (1) in parametrik halde verilen tekil çözümü denir. Eğer (4) de denklemler arasında p parametresi yokedilebilirse tekil çözümün kartezyen gösterimi bulunmuş olur.

Diferansiyel denklemin genel çözümünde sabite değer vererek elde edilemeyen çözüme <u>tekil çözüm</u> denir.

Tekil Çözüm, p-diskriminantı:

$F(x, y, y') = 0$ ... (5) dif. denklemi y' ye göre çözülerek 1. dereceden dif. denkleme indirgenebilir.

Fakat bu yani (5)de y' nün x ve y cinsinden çözülebilmesi genellikle çok zordur. Mesela;

$x^2+y^2+y'^2=0$, $e^y+y'^2=0$ denklemleri y' ye göre çözülemez. Denklem y' ye göre x ve y türünden açıkça ifade edilemese de en azından y' ye göre çözümünün olup olmadığının bilinmesi önemlidir. Analizden bilindiği üzere (5) in y' ye göre çözülebilmesi $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ koşulunu sağlayan tüm (x,y) noktalarında mümkündür.

Tanım: $$\left.\begin{array}{l} F(x,y,p)=0, \quad (y'=p) \\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \end{array}\right\} \cdots (6)$$

sistemini sağlayan (x,y) noktaları kümesine (5) in p-diskriminant eğrileri denir.

Eğer (6) sisteminde p yokedilebilirse bu durumda p-diskriminant eğrilerinin $\phi(x,y)=0$ kartezyen denklemi bulunur. Buna göre p-diskriminant eğrilerinden (5) denklemini sağlayanlara tekil (aykırı) çözüm, sağlamayanlarda aykırı geometrik yer olarak adlandırılır.

Ör1 $x^2+y^2+y'^2=1$ ile verilen denklemin aykırı (tekil) çözümlerini bulalım:

$F=x^2+y^2+y'^2-1=0$ ve $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'=2p=0$ çıkar. Buradan $p=0$ olup ilk denklemde yazılırsa $x^2+y^2=1$ ya da $y=\mp\sqrt{1-x^2}$ eğrilerini verir. Ancak bunlar

$$x^2+y^2+y'^2-1=x^2+(1-x^2)+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2-1=\frac{x^2}{1-x^2}\neq 0$$ olduğu için

dif. denklemi sağlamazlar yani aykırı çözüm değil, aykırı geometrik yerlerdir.

Ör2 $e^{y'} - y' + xy - x - 1 = 0$ denkleminin aykırı çözümleri?

$$\left.\begin{array}{l} F = e^{p} - p + xy - x - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = e^{p} - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{p} = 1 \Rightarrow p = 0$$ ve ilk denklemden

$e^{0} - 0 + xy - x - 1 = 0 \Rightarrow x(y-1) = 0$ bulunur. Buna göre diskriminant eğrileri $x=0$ ve $y=1$ dir. $x=0$ bir fonksiyon olmayıp denklemin aykırı geometrik yeridir fakat $y=1$ denklemi sağlar, dolayısıyla verilen dif. denklemin aykırı çözümü olur.

Ör3 $y = xy' + y'^2$ denkleminin genel ve (varsa) aykırı çözümlerini bulalım:

$y = xp + p^2 \Rightarrow y' = \cancel{p} = 1.\cancel{p} + x\dfrac{dp}{dx} + 2p\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow (x+2p)\dfrac{dp}{dx} = 0$

elde edilir.

i) $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ olup denklemden $y = cx + c^2$ genel çözümünü buluruz.

ii) $\dfrac{dp}{dx} \neq 0 \Rightarrow x + 2p = 0 \Rightarrow x = -2p$ dir. Denklemden

$y = xp + p^2 = (-2p)p + p^2 = -p^2$ olup

$$\left.\begin{array}{l} x = -2p \\ y = -p^2 \end{array}\right\}$$ denklemin aykırı çözümüdür. Aralarında

p yok edilirse $p = -x/2 \Rightarrow y = -p^2 = -(-x/2)^2 = -\dfrac{x^2}{4} \Rightarrow$

$y = -\dfrac{x^2}{4}$ parabolü aykırı çözümün kartezyen gösterimidir.

Ör4 $y = xy' + \dfrac{1}{y'} \Rightarrow \ldots$?

$y = xp + \dfrac{1}{p} \Rightarrow y' = p = p + x\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{1}{p^2}\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow \left(x - \dfrac{1}{p^2}\right)\dfrac{dp}{dx} = 0$

i) $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = cx + \dfrac{1}{c}$ genel çözüm.

ii) $x - \dfrac{1}{p^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{p^2}$ dir. Denklemde yazılırsa

$$y=\frac{1}{p^2}\cdot p+\frac{1}{p}=\frac{2}{p} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{p^2} \\ y=\dfrac{2}{p} \end{array}\right\}$$ aykırı çözümdür.

$p=\frac{2}{y} \Rightarrow x=\frac{1}{\left(\frac{2}{y}\right)^2}=\frac{y^2}{4} \Rightarrow y^2=4x$ eğrisi kartezyen gösterimi dir.

Problemler

1) $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$ genel ve (varsa) tekil çözümleri?

2) $y'^3+3y'x-3y=0$ "

3) $2(y')^2(y-xy')=1$ "

4) $y=xy'+y'^2$ "

2) Lagrange Diferansiyel Denklemi

Bu Clairaut dif. denkleminin genel hali olup

$y=xg(y')+f(y')$ ... (7) şeklindedir. Burada f ve g türetilebilir fonksiyonlar olup $y'=p$ denerek x'e göre türetilirse denklem;

$$y=xg(p)+f(p) \Rightarrow p=g(p)+xg'(p)\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$p-g(p)=\left[xg'(p)+f'(p)\right]\frac{dp}{dx} \quad \text{... (8)}$$ haline gelir.

i) $p-g(p)=0 \Rightarrow$ denklemin reel kökleri varsa bunlar $p=a$ (a sbt) şeklinde olur ve p nin bu değerleri (7) de yazılarak aykırı çözümler bulunur.

ii) $p-g(p)\neq 0 \Rightarrow$ (8) bölünerek

$$\frac{dx}{dp}=\frac{xg'(p)+f'(p)}{p-g(p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp}+\frac{g'(p)}{g(p)-p}x=\frac{f'(p)}{p-g(p)} \quad \text{---} (9)$$

lineer dif. denklemi elde edilir. Bunun genel çözümü $x=\varphi(p,c)$ ise yine (7) den

$y=\varphi(p,c).g(p)+f(p)$ bulunur. Bu iki çözüm çifti;

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(p,c) \\ y=\varphi(p,c)g(p)+f(p) \end{array}\right\}$$ denklemin aykırı çözümünün parametrik gösterimidir.

Ör25 $y=xy'^2+y'^3$ denkleminin genel ve (varsa) aykırı çözümlerini bulalım:

$$y=xp^2+p^3 \Rightarrow p=p^2+x2p\frac{dp}{dx}+3p^2\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$p(1-p)=(2px+3p^2)\frac{dp}{dx}$ bulunur.

i) $p(1-p)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p=0 \\ p=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=x.0+0=0 \\ y=x.1^2+1^3=x+1 \end{array}\right\}$ tekil çözümlerdir.

ii) $p(1-p)\neq 0 \Rightarrow \frac{dx}{dp}=\frac{2px+3p^2}{p(1-p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp}+\frac{2}{p-1}x=\frac{3p}{1-p}$ lineer denklemi bulunur. Çözülürse

$$x(p)=e^{-\int\frac{2}{p-1}dp}\left(\int e^{\int\frac{2}{p-1}dp}\cdot\frac{3p}{1-p}dp+c\right)$$

$$=e^{-2\ln|p-1|}\left(\int e^{2\ln|p-1|}\cdot\frac{3p}{1-p}dp+c\right)$$

$$=\frac{1}{(p-1)^2}\left(-\int 3p(p-1)dp+c\right)=\frac{\frac{3}{2}p^2-p^3+c}{(p-1)^2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x(p)=\dfrac{\frac{3}{2}p^2-p^3+c}{(p-1)^2} \\ y(p)=\dfrac{\frac{3}{2}p^2-p^3+c}{(p-1)^2}p^2+p^3 \end{array}\right\}$$ genel çözüm olur.

Ör6 $y = xy'^2 - 2y'^3$ aynı soru?

$$y = xp^2 - 2p^3 \Rightarrow p = p^2 + x.2p\frac{dp}{dx} - 6p^2\frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$p(1-p) = (2px - 6p^2)\frac{dp}{dx}$$

i) $p(1-p)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p=0 \Rightarrow y=0 \\ p=1 \Rightarrow y=x-2 \end{array}\right\}$ tekil çözümler

ii) $p(1-p) \neq 0 \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{(2x-6p)p}{p(1-p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{6p}{p-1}$ (lineer)

$$x(p) = e^{-\int\frac{2dp}{p-1}}\left(\int e^{\int\frac{2dp}{p-1}}\frac{6p}{p-1}dp + c\right) = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\int 6p(p-1)dp + c\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x(p) = \frac{1}{(p-1)^2}(2p^3 - 3p^2 + c) \Rightarrow \\ y(p) = \frac{2p^3 - 3p^2 + c}{(p-1)^2}\cdot p^2 - 2p^3 \end{array}\right\} \text{genel çözüm.}$$

Problemler

1) $y = x(y' - \sin y') + \cos y'$ genel ve (varsa) tekil çözümler?

2) $y = xp^2 + 7p\sqrt{p}$ "

3) $y = \frac{x}{p} + \frac{2}{3}\sqrt{(p+1)^3}$ "

4) $y = 2xy' + \sqrt{1+y'^2}$ "

5) $y = -\frac{y'}{2}(2x+y')$ "

İzogonal Yörüngeler

Verilen bir-parametreli eğri ailesini belli bir α açısı ($0<\alpha<\pi$, $\alpha\neq\pi/2$) ile kesen düzlem eğrisine denir. Eğer $F(x,y,y')=0$ ...(10) verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemi ise bu aileyi α açısıyla kesen bir izogonal eğri aşağıdaki denklemlerden birini sağlar:

$$F\left(x, z, \frac{z'-\tan\alpha}{1+z'\tan\alpha}\right)=0;\quad F\left(x, z\, \frac{z'+\tan\alpha}{1-z'\tan\alpha}\right)=0 \quad \ldots (11)$$

Özel olarak

$$F\left(x, z, -\frac{1}{z'}\right)=0 \quad \ldots (12)$$

denklemi ortogonal yörüngeler tarafından sağlanır, yani verilen eğri ailesini her noktasında dik açıyla kesen düzlem eğrisini vermektedir. (10) sisteminin dik yörüngeleri 1-parametreli düzlem eğri ailesi oluşturur.

<u>ÖR1</u> Orjin merkezli çember ailesini $45°$ lik açıyla kesen eğrileri belirleyelim:

$x^2+y^2=R^2$ çember ailesinin dif. denklemi;

$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'+\frac{x}{y}=0$ dır. Bu denklemdeki y',

$\frac{y'-\tan 45}{1+y'\tan 45}$ ile değiştirilirse,

$\frac{x}{y}+\frac{y'-1}{1+y'}=0 \Rightarrow$ izogonal yörüngelerin dif. denklemini

verir: Buradan $y'=\frac{y-x}{y+x}$ olup hom. dif. denklemdir.

$$y=ux \Rightarrow y'=u+xu' \Rightarrow u+u'x=\frac{ux-x}{ux+x}=\frac{u-1}{u+1} \Rightarrow$$

$$xu'=\frac{u-1}{u+1}-u=\frac{\cancel{u}-1-u^2-\cancel{u}}{u+1} \Rightarrow \frac{u+1}{u^2+1}du+\frac{dx}{x}=0$$

$$\frac{2u\,du}{u^2+1}+\frac{2\,du}{u^2+1}+2\frac{dx}{x}=0 \Rightarrow \ln(u^2+1)+2\arctan u+2\ln x=\ln c$$

$$2\arctan u=\ln\frac{c^2}{x^2(u^2+1)} \Rightarrow \frac{x^2u^2+x^2}{c^2}=e^{-2\arctan u}$$

$c\,e^{-\arctan\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2+y^2}$ eğri ailesi elde edilir.

ÖR2 $y=ce^x$ eğri ailesini $\frac{\pi}{4}$ açıyla kesen izogonal eğri ailesini bulalım:

$y=ce^x \Rightarrow y'=ce^x \Rightarrow y=y' \Rightarrow y'$ yü $\dfrac{y'-\tan\frac{\pi}{4}}{1+y'\tan\frac{\pi}{4}}$ ile değiştirirsek;

$$y=\frac{y'-1}{1+y'} \Rightarrow y'=\frac{1+y}{1-y} \Rightarrow dy\frac{(1-y)}{1+y}=dx \Rightarrow$$

$\left(\dfrac{2}{1+y}-1\right)dy=dx \Rightarrow 2\ln|y+1|-y=x+c$ bulunur.

ÖR3 $x^2+y^2=2Cx$ çember ailesinin dik yörünge ailesini bulalım:

$(x-c)^2+y^2=c^2$, $(c,0)$ merkezli c-yarıçaplı çember ailesinin dif. denklemi;

$$2x+2yy'=2C \Rightarrow x+yy'=C \Rightarrow x^2+y^2=2x(x+yy') \Rightarrow$$

$y'=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$ çıkar. $y'\to -\dfrac{1}{y'}$ değişimi yapılırsa

$$-\frac{1}{y'}=\frac{y^2-x^2}{2xy} \Rightarrow y'=\frac{2xy}{x^2-y^2} \Rightarrow 2xy\,dx+(y^2-x^2)dy=0$$

denklemine ulaşılır. Bunun integrasyon çarpanı;

$$\frac{P_y-Q_x}{-P}=\frac{2x+2x}{-2xy}=\frac{-2}{y} \Rightarrow \lambda(y)=e^{-\int\frac{2dy}{y}}=\frac{1}{y^2} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla denklem; $\dfrac{2x}{y}dx+\dfrac{y^2-x^2}{y^2}dy=0$ şeklinde tam dif. denklem haline gelir. Bu çözülürse;

$x^2+(y-c)^2=c^2$ şeklinde merkezleri y-ekseni üzerinde bulunan çember ailesi elde edilir.