ÖR11 $(4xy+3y^4)dx+(2x^2+5xy^3)dy=0$ denkleminin $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ formunda bir integrasyon çarpanı bularak çözelim!

Denklem $x^\alpha y^\beta$ ile çarpılıp $P_y=Q_x$ koşulu uygulanırsa

$$x^\alpha y^\beta(4xy+3y^4)dx+x^\alpha y^\beta(2x^2+5xy^3)dy=0 \Rightarrow$$

$$(4x^{\alpha+1}y^{\beta+1}+3x^\alpha y^{\beta+4})dx+(2x^{\alpha+2}y^\beta+5x^{\alpha+1}.y^{\beta+3})dy=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(4x^{\alpha+1}.y^{\beta+1}+3x^\alpha.y^{\beta+4}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^{\alpha+2}.y^\beta+5x^{\alpha+1}.y^{\beta+3}\right) \Rightarrow$$

$$4(\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta+3(\beta+4)x^\alpha y^{\beta+3}=2(\alpha+2)x^{\alpha+1}.y^\beta+5(\alpha+1)x^\alpha.y^{\beta+3} \Rightarrow$$

$x^{\alpha+1}.y^\beta$ ile $x^\alpha y^{\beta+3}$ terimlerinin katsayıları eşitlenirse denklemleri çıkar. Buradan

$4(\beta+1)=2(\alpha+2)$ ve $3(\beta+4)=5(\alpha+1)$ denklemleri çıkar. Buradan

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha-4\beta=0\\5\alpha-3\beta=7\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=2\beta \Rightarrow 5.(2\beta)-3\beta=7=7\beta \Rightarrow \beta=1 \Rightarrow \alpha=2$$

Dolayısıyla $\mu(x,y)=x^2y$ olarak elde edilir.

ÖR12 $(x+y)y\,dx-x^2dy=0$ denkleminin $\lambda(x,y)=\lambda(xy^2)$ şeklinde bir integrasyon çarpanını bulalım:

Bu amaçla denklem λ ile çarpılıp tam dif. olma kuralı kullanılırsa

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(xy^2)(xy+y^2)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(xy^2)(-x^2)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}(xy+y^2)+\lambda.(x+2y)=\frac{\partial\lambda}{\partial x}(-x^2)-\lambda.(2x)$$ bulunur. Burada;

$u=xy^2$ denirse $\lambda=\lambda(u)$ olacağından

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{d\lambda}{du}.\frac{\partial u}{\partial x}=\lambda'.y^2 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{d\lambda}{du}.\frac{\partial u}{\partial y}=\lambda'.2xy$$ olur.

Dolayısıyla denklem;

$$2xy.\lambda'.(xy+y^2)+\lambda(x+2y)=y^2.\lambda'.(-x^2)-2x\lambda \Rightarrow$$

$$\lambda'\left[2x^2y^2+2xy^3+x^2y^2\right]=\lambda.(-2x-x-2y)=-\lambda.(3x+2y) \Rightarrow$$

$$\lambda'.(3x^2y^2+2xy^3)=-\lambda(3x+2y)=\frac{d\lambda}{du}\,xy^2(3x+2y)\Rightarrow$$

$$-\lambda=xy^2\frac{d\lambda}{du}=u\frac{d\lambda}{du}\Rightarrow -\frac{du}{u}=\frac{d\lambda}{\lambda}\Rightarrow \ln\lambda=-\ln u=\ln\frac{1}{u}\Rightarrow$$

$\boxed{\lambda=\frac{1}{xy^2}}$ olarak elde edilir.

Ardından λ ile çarpıp tam hale gelmiş dif. denklemin genel çözümü bulunur.

Problemler

1) $(x^2+y^2+x)dx+xy\,dy=0$ denkleminin bir integrasyon çarpanını bularak çözünüz.

2) $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$ denklemini bir integrasyon çarpanı yardımıyla tam dif. hale getiriniz.

3) $(x+1)dx+(y-\frac{x}{y})dy=0$ denkleminin $\lambda=\lambda(x^2+y^2)$ şeklinde integrasyon çarpanı yardımıyla çözünüz.

4) $(2xy-y^2-y)dx+(2xy-x^2-x)dy=0$ denkleminin $\lambda=\lambda(x+y)$ şeklindeki integrasyon çarpanı nedir?

5) $(3y^2-x)dx+2y(y^2-3x)dy=0$ için $\lambda(x,y)=\lambda(x+y^2)$ formunda integrasyon çarpanı?