Diferansiyel Denklemler I

Tanımlar ve sınıflandırmalar

Mühendislikte ve fen bilimlerinde, pek çok olayın açıklanmasında matematiksel formüller ve modellerden faydalanılır. Bu modeller genellikle, bir bilinmeyen fonksiyon ve onun bazı türevlerini içeren bir denklem olarak ortaya çıkar. Böyle bir denkleme diferansiyel denklem denir. Eğer bir dif. denklemde bilinmeyen fonksiyon yalnızca bir bağımsız değişkene bağlı bu dif. denkleme adi dif. denklem, iki ya da daha fazla bağımsız değişkene bağlı olması halinde de kısmi dif. denklem adını alır.

Mesela, $xy' = y$ ... (1)

$$(xy - y^2)dx + x^2 dy = 0 \quad \text{... (2)}$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad \text{... (3)}$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \quad \text{... (4)}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - x^2 \quad \text{... (5)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{... (6)}$$

şeklinde verilen denklemlerden ilk dördü adi dif., son ikisi ise kısmi dif. denklemdir. Biz bu derste sadece adi dif. denklemlerle ilgileneceğiz.

Diferansiyel Denklemlerin sınıflandırılması

Diferansiyel denklemler, mertebe, derece ve lineerlik özellikleri bakımından sınıflandırılır.

Tanım 1 Bir dif. denklemde görülen türevin en büyük değerine o denklemin mertebesi ya da basamağı denir.
Bu tanıma göre (1-6) denklemlerinden 1,2 ve 5. 1. mertebeden 3 ve 6, 2. mertebeden 4. ise 4. mertebeden bir dif. denklemdir.

En genel adi dif. denklem ise $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$ şeklinde yazılan n. mertebeden denklemdir. Burada $y', y'', \dots, y^{(n)}$ terimleri sırasıyla $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ dir.

Tanım 2 Eğer bir dif. denklem var olan tüm türevlere göre bir polinom denklem şeklindeyse, en yüksek mertebeden türevin kuvvetine denklemin derecesi denir.
Yine (1-6) denklemleri bu bağlamda ele alınırsa 4. denklem haricindekiler 1. dereceden olup 4. 2. dereceden bir denklemdir. Öte yandan

$$(y'')^{2/3} = 1+y' \quad \dots (7)$$

denklemini ele alırsak denklemin mertebesinin 2 old görülür. Derecesini belirlemek için eşitliğin iki yanının kübü alınırsa $(y'')^2=(1+y')^3$ elde edilir ki en yüksek mertebeye sahip terim y'' nün derecesi 2 olacağından denklem de 2. dereceden olacaktır.

Son olarak, her dif. denklem varolan türevlere göre polinom denklem formunda olmayabilir. Mesela

$y''+(y')^2=\ln y''$ denkleminin derecesi tanımlı değildir.

Tanım 3 Şayet bir dif. denklem bilinmeyen fonksiyon ve onun varolan türevlerine göre 1. dereceden ise denkleme lineer dif. denklem denir. Bu şartlar altında (1) ve (3) denklemlerinin lineer, (2) ve (4) ün ise lineer olmadığı görülür.

En genel n. mertebeden lineer dif. denklem,

$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = Q(x)$ şeklinde

yazılır. Burada $a_0, \ldots, a_n$ ve Q x'in verilen fonksiyonlarıdır.

Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu aşamada, bir veya daha çok keyfi sabit içeren bir eğri ailesinden keyfi sabitlerin yokedilmesiyle dif. denklemin nasıl elde edileceğini görelim:

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x, y, c) = 0 \quad \ldots (8)$$

bağıntısını ele alalım. f xy-düzleminin bir Ω-bölgesinde x ve y ye göre türetilebilir ve $f_y \neq 0$ olduğunu varsayalım. Geometrik olarak (8) denklemi düzlemde 1-parametreli bir eğri ailesi tanımlar. Bu eğri ailesine karşı gelen dif. denklemi bulmak için (8) in x'e göre türevini alalım:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\, y' = 0 \quad \ldots (9)$$

Eğer (9) de olduğu gibi denklem c sabitini içermezse bu aranan dif. denklemdir. Şayet (9) da c sabiti olsaydı (9) ile (8) arasından bu sabit yokedilerek diferansiyel denklem elde edilecektir. Sonuçta x, y ve y' ye bağlı $F(x,y,y')=0$ 1. mertebeden dif. denklemi elde edilecektir. İki veya daha fazla keyfi sabit içeren eğri ailelerine karşı gelen dif. denklemi bulabilmek için de benzer şekilde keyfi sabit sayısı kadar türev alıp bu denklemlerle ilk eğri ailesi arasında sabitler yokedilerek dif. denklem bulunabilir.

ÖR1 $y=ce^x$ ile verilen eğri ailesini çözüm kabul eden dif. denklemi bulalım:

Eşitliğin x'e göre türevi alınırsa $y'=ce^x$ olur. Bu ise

$y'=ce^x=y \Rightarrow y'=y$ dif. denklemini verir.

ÖR2 $y=c\cancel{x}^2=cx^2$ parabol ailesinin dif. denklemi?

x'e göre türevle $y'=2cx$ çıkar. Buradan c belirlenip parabolde yazılırsa $c=\frac{y'}{2x} \Rightarrow y=\frac{y'}{2x}x^2 \Rightarrow 2y=xy'$ dif. denklemine ulaşılır.

ÖR3 Birim çember ailesinin dif. denklemini bulalım:

Adı geçen çemberin denklemi, (c_1,c_2) merkezi ol. üzere $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1$ dir. Bu denklemde x'e göre iki defa türev almakla

$$2(x-c_1)+2(y-c_2)y'=0 \quad \text{ve} \quad 1+(y')^2+(y-c_2)y''=0$$

denklemleri elde edilir. Bu üç denklem arasında c_1 ve c_2 sabitleri yokedilirse

$$(y'')^2=(1+(y')^2)^3$$ dif. denklemi bulunur.

Tanım 4 n. mertebeden

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0 \quad \text{---}(10)$$

dif. denklemi ve reel sayıların bir J aralığında (aralık açık, kapalı ya da yarı-açık olabilir) tanımlı ve bu aralıkta n. mertebeye kadar türevli bir $\phi(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\phi(x)$ fonksiyonu (10) u özdeş olarak sağlıyorsa ($\forall x\in J$ için), ϕ ye (10) denkleminin bir çözümü denir.

$\phi(x)$, (10) denkleminin bir çözümü ise, $y=\phi(x)$ in grafiği düzlemde bir eğridir. Buna denklemin integral eğrisi denir.

Ör 4 $\phi(x)=x^2-x^{-1}$ $(x\neq 0)$ fonksiyonu $y''-(2/x^2)y=0$ denkleminin bir çözümüdür. Gerçekten $\phi(x)$ ve bunun

$\phi'(x)=2x+x^{-2}$, $\phi''(x)=2-2x^{-3}$ türevleri $\forall x\neq 0$ için tanımlıdır. Denklemde yerlerine yazılırsa

$$y''-(2/x^2)y=2-2x^{-3}-(2/x^2)(x^2-x^{-1})=2-2x^{-3}-2+2x^{-3}\equiv 0$$

olduğu görülecektir.

Tanım 5 (10) denkleminin $y=\phi(x)$ formundaki çözümüne denklemin açık çözümü denir ve son örnekteki $\phi(x)=x^2-x^{-1}$ denklemin açık bir çözümüdür.

Tanım 6 Eğer bir $G(x,y)=0$ bağıntısı J aralığında bir dif. denklemin bir ya da daha fazla çözümünü tanımlıyorsa $G(x,y)=0$'a J de denklemin kapalı çözümü denir.

Ör 5 $y^2-x^3+8=0$ bağıntısı $(2,\infty)$ aralığında

$2yy' = 3x^2$ dif. denkleminin kapalı çözümüdür.

Gerçekten de bağıntı y'ye göre çözülürse

$y = \mp\sqrt{x^3-8}$ olur. Bu $y = \sqrt{x^3-8}$ eğrisinin denklemi sağladığını görelim: $y = \phi(x) = \sqrt{x^3-8} \Rightarrow$ türev almakla

$\phi'(x) = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}}$ olup hem ϕ hem de ϕ' $x^3-8>0$ koşulunu sağlayan x ler için tanımlıdır. Dolayısıyla denklemde yazılırsa

$$2yy' = 2.\sqrt{x^3-8}.\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}} \equiv 3x^2$$ olduğu görülür.

Sonuçta $y^2-x^3+8=0$ kapalı bağıntısıyla ifade edilen eğri denklemin çözümü olmaktadır.

Başlangıç ve Sınır Değer Problemleri

Diferansiyel denklemler içeren uygulamalarda, denklemin genel çözümünden ziyade, denklemle birlikte verilen yardımcı koşulları sağlayan çözümünün bulunması istenir. Bu koşullar bağımsız değişkenin bir ya da daha çok değeri için bilinmeyen fonksiyonun ve onun türevlerinin önceden verilmesi şeklinde ortaya çıkmaktadır. Bu yardımcı koşullar, bağımsız değişkenin tek bir değeri için veriliyorsa başlangıç koşulları, iki veya daha çok değeri için veriliyorsa sınır " adını alır. Buna göre bir dif. denklem başlangıç koşulları ile birlikte bir başlangıç değer problemi, sınır koşullarıyla " veriliyorsa bir sınır değer problemi olarak adlandırılır.

Örneğin $y'=y,\ y(0)=1$ ve $y''+2y'=e^x,\ y(\pi)=1,\ y'(\pi)=2$ problemleri birer başlangıç-değer problemi (BDP);

$$y''+y=0,\ y(0)=0,\ y(\pi)=0 \text{ ve}$$
$$y''+2y'=e^x,\ y(0)=1,\ y(1)=1$$

problemleri de birer sınır-değer problemi (SDP) dir.

ÖR 6 $y''=\sin x,\ y(0)=a,\ y'(0)=b$ ile verilen BDP ni çözelim:

Denklemin genel çözümünün $y=-\sin x+c_1x+c_2$ olduğu kolayca görülür. Sonrasında başlangıç koşulları kullanılırsa

$$y(0)=a \Rightarrow -\sin 0+c_1.0+c_2=a \Rightarrow c_2=a$$
$$y'=-\cos x+c_1 \Rightarrow y'(0)=b \Rightarrow -\cos 0+c_1=b \Rightarrow c_1=b+1$$

olur ki bu da çözümün $y=-\sin x+(b+1)x+a$ olduğunu gösterir.

ÖR 7 $y''=\sin x,\ y(0)=3,\ y(\pi)=5$ şeklinde verilen SDP nin çözümünü bulalım:

Denklemin genel çözümü yine $y=-\sin x+c_1x+c_2$ olup sınır koşulları kullanılırsa;

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=3 \Rightarrow -\sin 0+c_1.0+c_2=3 \Rightarrow c_2=3 \\ y(\pi)=5 \Rightarrow -\sin\pi+c_1.\pi+c_2=5 \Rightarrow c_1=\frac{2}{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{SDP nin çözümü}$$

$y=-\sin x+\frac{2x}{\pi}+3$ olur.

Teo 1 Eğer F ve $\frac{\partial F}{\partial y}$ fonksiyonları xy-düzleminin bir Ω-bölgesinde sürekli ve (x_0,y_0) Ω nın bir noktası ise bu durumda $y'=F(x,y),\ y(x_0)=y_0$ BDP nin x_0 ı içeren bir aralıkta bir ve yalnız bir çözümü vardır.

ÖR8 $y' + 3x^2 y = \sin x$ dif. denklemini ele alalım. Denklemdeki $3x^2$ ve $\sin x$ fonksiyonları herhangi bir $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Bu durumda $F(x,y) = -3x^2 y + \sin x$ ve $\frac{\partial F}{\partial y} = -3x^2$ fonksiyonları da herhangi bir $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. Dolayısıyla $\Omega = \{(x,y) \mid a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ bölgesinde süreklidir. Böylece teoreme göre $a < x_0 < b$, ve $-\infty < y_0 < \infty$ olmak üzere $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir tek çözüm varolacaktır.

ÖR9 $y' = 3y^{2/3}$ dif. denklemini ele alalım. Burada
$F(x,y) = 3y^{2/3}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3 \cdot \frac{2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$ dir. F fonksiyonu tüm düzlemde, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ise $y=0$ (x-ekseni) hariç her yerde süreklidir.
Böylece teorem verilen denklemin

$$y(x_0) = y_0, \quad y_0 \neq 0$$

başlangıç şartını sağlayan bir tek çözümü olduğunu söyler. Bununla birlikte $y(x_0)=0$ koşulunu sağlayan çözümlerden ileride bahsedilecektir. (Sonsuz çözüm olduğu gösterilecektir)

Problemler

PR1 $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = (x^3 + c)e^{-3x}$ fonksiyonunun $y' + 3y = 3x^2 e^{-3x}$ denkleminin çözümü olduğunu gösteriniz.

PR2 $y = (\sqrt{x} + c)^2$ eğri ailesinin $(0,\infty)$ aralığında $y' = \sqrt{y/x}$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

PR3 $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ ile verilen eğri ailesine karşı gelen dif. denklemi elde ediniz ve bu denklemi derece ve mertebesi açısından irdeleyiniz.

PR4 En genel çember ailesinin dif. denklemini bulunuz.

PR5 " " elips " " " "

PR6 Aşağıdaki BDP lerinin çözümlerinin varlığını araştırınız.

a) $y' = y^2$, $y(1) = 2$

b) $y' = xy^3$, $y(0) = 1$

c) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(1) = 3$.

2) Birinci Mertebeden 1. Dereceden Diferansiyel Denklemler

İlk bölümde tanımlanan mertebe ve derece kavramları dikkate alındığında 1. mertebeden ve 1. dereceden bir dif. denklem;

$$Q(x,y)\,y' + P(x,y) = 0 \quad \ldots (11)$$

şeklindedir. P ve Q x ve y nin verilen fonksiyonları olup

$$Q(x,y) \neq 0 \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = F(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \ldots (12)$$

olarak yazılabilir. Daha önce ifade edildiği üzere, (x_0, y_0) noktası; $F(x,y)$ ve $\frac{\partial F}{\partial y}$ nin sürekli olduğu bir bölgeye ait bir noktaysa (12) denkleminin $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir çözümü vardır ve böyle bir çözüm, geometrik olarak, (x_0, y_0) dan geçen ve her (x,y) noktasındaki teğetinin eğimi (12) yi sağlayan bir eğridir.

Değişkenleri Ayrılabilir Denklemler

(12) ile ifade edilen denklem

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \quad \ldots (13)$$

şeklinde yazılabilirse bu denkleme değişkenlerine ayrılabilir denklem denir. Bu aşamada genel çözümü bulabilmek için eşitliğin her iki yanının integrali alınırsa

$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = c$ genel çözümü bulunur.

ÖR10 $\dfrac{dy}{dx} = (x-2)^2(y-3)$ denkleminin genel çözümünü bulalım:

Denklem düzenlendiğinde

$\dfrac{dy}{y-3} = (x-2)^2 dx$ şeklinde ayrılır ve ardından integrali alınırsa

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int (x-2)^2 dx + c \Rightarrow \ln|y-3| = \frac{(x-2)^3}{3} + c$$

çözümü bulunur. y değişkeni açık olarak bulunmak istenirse

$$y - 3 = c_1 e^{\frac{(x-2)^3}{3}}; \quad (c = \ln c_1)$$

$y = 3 + c_1 e^{\frac{(x-2)^3}{3}}$ genel çözümü çıkar. Bu $y \neq 3$ için yazılan çözümdür. $y=3$ de çözümdür lakin bu $c_1 = 0$ için çözümü ifade eder yani bir özel çözümdür.

ÖR11 $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$ denklemini çözünüz.

$\dfrac{dx}{x^2-2x+2} = dt$ şeklinde değişkenlerine ayrılır. Buradan

integral alarak $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1^2} = \int dt + c \Rightarrow \arctan(x-1) = t + c$

$\Rightarrow x - 1 = \tan(t+c) \Rightarrow x(t) = 1 + \tan(t+c)$ bulunur.