Birinci Mertebeden Lineer Denklemler

En genel 1. mertebeden dif. denklem

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = Q(x) \quad \text{---(1)}$$

şeklindedir. a_0, a_1 ve Q x'in verilen fonksiyonları olup bu fonksiyonlar sürekli ve $a_0(x) \neq 0$ olması halinde $y(x_0)=y_0$ koşulunu sağlayan $(x_0 \in I)$ bir $y(x)$ çözümünün var ve tek olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca bu çözüm tüm I aralığında tanımlı olacaktır.

(1) in genel çözümü için denklemi

$y' + p(x)y = q(x)$ --- (2) formunda yazarız. Şimdi

(2) nin her iki yanını $\lambda(x)$ fonksiyonuyla çarpalım:

$$\lambda(x)y' + \lambda(x)p(x)y = \lambda(x)q(x) \quad \text{--- (3)}$$

(3) ün sol yanının $\lambda(x)y$ nin türevine eşit yani

$\lambda(x)\dfrac{dy}{dx} + \lambda(x)p(x)y = \dfrac{d}{dx}(\lambda(x)y)$ olması için λ nın

$\dfrac{d\lambda(x)}{dx} = \lambda(x)p(x)$ --- (4) denklemini sağlaması gerekir.

Bu ise λ yı verecek olan değişkenlerine ayrılabilir bir denklemdir ve çözümü

$\lambda(x) = e^{\int p(x)dx}$ --- (5) dir. Bu $\lambda(x)$'e denklemin integrasyon çarpanı denir. Bu şekilde elde edilen $\lambda(x)$ yardımıyla denklem $\dfrac{d}{dx}[\lambda(x)y] = \lambda(x)q(x)$ haline gelir ki buradan integral almak suretiyle

$$\lambda(x)y = \int \lambda(x)q(x)\,dx + C \Rightarrow y = \frac{1}{\lambda(x)}\int \lambda(x)q(x)\,dx + \frac{C}{\lambda(x)} \quad \text{--- (6)}$$

genel çözümü elde edilir.

ÖR1 $(x+1)y'-y=x$ denkleminin genel çözümü?

Verilen bu denklem, $x=-1$ noktasını içermeyen bir I açık aralığında

$$y'-\frac{y}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$ yazılır. Buna göre $\lambda(x)$,

$$\lambda(x)=e^{-\int\frac{dx}{x+1}}=e^{-\ln(x+1)}=\frac{1}{x+1}$$ olup denklem çarpılırsa,

$$\frac{1}{x+1}y'-\frac{1}{(x+1)^2}y=\frac{x}{(x+1)^2}\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x+1}\right)=\frac{x}{(x+1)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{y}{x+1}=\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2}+c\Rightarrow y=(x+1)\left[\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|+c\right]$$

çözümü elde edilir.

(1) denkleminin bir başka çözümü ise, denklemin $y=uv$ şeklinde $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının bulunması şeklindedir. Bu amaçla $y=uv\Rightarrow y'=u'v+uv'$ yazarak denklem;

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x)\Rightarrow u\left(v'+p(x)v\right)+u'v=q(x)\quad\text{---}(7)$$

haline getirilir. Burada (7) deki parantezi sıfır yapan v fonksiyonu bulunursa;

$$v'+p(x)v=0\Rightarrow\frac{dv}{v}=p(x)\,dx\Rightarrow\ln v=\int p(x)\,dx\Rightarrow$$

$v=e^{\int p(x)\,dx}$ çıkar. v nin bu değeri (7) de yazılırsa

$$u'.e^{\int p(x)\,dx}=q(x)\Rightarrow\int du=\int q(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}dx+c\Rightarrow$$

$u=\int q(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}dx+c$ elde edilir. Böylece çözüm

$$y=uv=\left[\int q(x)\,e^{-\int p(x)dx}dx+c\right]e^{\int p(x)\,dx}\quad\text{---}(8)$$

şeklinde belirlenir.

ÖR2 $(1+x^2)y'+y=\arctan x$ genel çözümü?

$$y'+\frac{y}{1+x^2}=\frac{\arctan x}{1+x^2}$$ olup $y=uv \Rightarrow y'=uv'+u'v$ yazılırsa

$$u'v+uv'+\frac{uv}{1+x^2}=\frac{\arctan x}{1+x^2}=u\left(v'+\frac{v}{1+x^2}\right)+u'v$$ olur.

$$v'+\frac{v}{1+x^2}=0 \Rightarrow \frac{dv}{v}=\frac{-dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln v=-\arctan x \Rightarrow v=e^{-\arctan x}$$

çıkar. Böylece son denklem v'nin bu değeriyle

$$u'.e^{-\arctan x}=\frac{\arctan x}{1+x^2} \Rightarrow \int du=\int \frac{\arctan x}{1+x^2}e^{+\arctan x}dx+c$$

$u=e^{\arctan x}(\arctan x-1)+c$ bulunur. Sonuçta çözüm,

$y=uv=\arctan x-1+ce^{-\arctan x}$ olarak yazılır.

Bernoulli Diferansiyel Denklemi

$p(x)$ ve $q(x)$ x'in integre edilebilir fonksiyonları ve $n\neq 1$ olmak üzere

$$y'+p(x)y=q(x)y^n \quad \text{---} \; (9)$$

formundadır. Denklem y^n ile bölünüp $\frac{1}{y^{n-1}}=z$ değişken değişimi yapılırsa $z'=(1-n)\frac{y'}{y^n}$ olup (9)

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)\frac{1}{y^{n-1}}=q(x) \Rightarrow \frac{z'}{1-n}+p(x)z=q(x) \Rightarrow$$

$z'+p(x)(1-n)z=q(x)(1-n)$ lineer dif. denklemi haline gelir.

ÖR3 $xy-\frac{dy}{dx}=y^3e^{-x^2}$ denkleminin genel çözümü?

Düzenlenirse $\frac{y'}{y^3}-\frac{x}{y^2}=-e^{-x^2}$ ve $z=\frac{1}{y^2} \Rightarrow z'=-\frac{2y'}{y^3}$ den

$-\frac{z'}{2}-xz=-e^{-x^2} \Rightarrow z'+2xz=2e^{-x^2}$ lineer denklemine indirgenir.

Buradan da $\lambda(x)=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$ yardımıyla

$$\frac{d}{dx}\left(z.e^{x^2}\right)=2e^{x^2}.e^{-x^2}=2 \Rightarrow ze^{x^2}=2x+c \Rightarrow z=(2x+c)e^{-x^2}=\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{e^{x^2}}{2x+c}$$ çözümü bulunur.

<u>Ör4</u> $xy'-2y=4x^3\sqrt{y}$ genel çözümü?

$$\frac{y'}{\sqrt{y}}-\frac{2\sqrt{y}}{x}=4x^2 \Rightarrow z=\sqrt{y} \Rightarrow z'=\frac{y'}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}}=2z'$$ çıkar.

Buradan $2z'-\frac{2z}{x}=4x^2 \Rightarrow z'-\frac{1}{x}z=2x^2$ lineer denklemine varırız. Bunun çözümü de

$$z=e^{-\int p(x)\,dx}\left\{\int e^{\int p(x)dx}.\,q(x)\,dx+c\right\}$$

formülünden

$$z=e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left\{\int e^{\int -\frac{1}{x}dx}.\,2x^2dx+c\right\}$$

$$=e^{\ln x}\left\{\int e^{-\ln x}.\,2x^2dx+c\right\}=x\left(\int 2x\,dx+c\right)$$

$$z=x\left(x^2+c\right)=\sqrt{y} \Rightarrow y=x^2(x^2+c)^2$$ bulunur.

<u>Problemler</u>

1) Aşağıdaki Bernoulli dif. denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz:

a) $y'\cos x+y\sin x=-y^2$

b) $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$

c) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$

d) $4y'+y\sin x=y^{-3}\sin x$

Riccati Diferansiyel Denklemi

$P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları, x'in integre edilebilir fonksiyonları ve $R(x) \neq 0$ olmak üzere

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \quad ---(1)$$

formundadır. Eğer y_1 bu denklemin bir özel çözümü ise $y = y_1 + \frac{1}{u}$ (ya da $y = y_1 - \frac{1}{u}$) dönüşümüyle lineer diferansiyel haline gelir:

$y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ olup denklemde yazılırsa

$$y_1' - \frac{u'}{u^2} = P(x) + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + R(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 \Rightarrow$$

$$0 \equiv y_1' - \left(P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2\right) = \frac{u'}{u^2} + \frac{Q(x)}{u} + R(x)\left(\frac{2y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u}\left(Q(x) + 2y_1R(x)\right) + \frac{R(x)}{u^2} = 0 \Rightarrow$$

$u' + u\left(Q(x) + 2y_1R(x)\right) = -R(x)$ ...(2) lineer denklemi elde edilir.

Ör1 $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$ denkleminin bir özel çözümü $y_1 = \sec x$ ise genel çözümünü bulalım:

$y = \sec x + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = \sec x . \tan x - \frac{u'}{u^2}$ den

$$\sec x \tan x - \frac{u'}{u^2} = 2\tan x \sec x - \sin x\left(\sec x + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$-\frac{u'}{u^2} = \cancel{\tan x . \sec x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}} - \frac{2\tan x}{u} - \frac{\sin x}{u^2} \Rightarrow$$

$$u' - 2u\tan x = \sin x \quad \text{(lineer dif. denklem)}$$

$$u = e^{2\int \tan x\,dx}\left(\int e^{-2\int \tan x\,dx} . \sin x\,dx + c\right) = e^{-2\ln|\cos x|}\left(\int e^{2\ln|\cos x|} . \sin x\,dx + c\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\left(\int \cos^2 x \sin x\,dx + c\right) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(-\frac{\cos^3 x}{3} + c\right) \Rightarrow$$

$$u^{-1}=\frac{3\cos^2 x}{3c-\cos^3 x}=\frac{1}{u} \text{ olup } y=\sec x+\frac{1}{u}=\boxed{\sec x+\frac{3\cos^2 x}{3c-\cos^3 x}=y}$$

elde edilir.

Örn $y'=x^3+\frac{2}{x}y-\frac{1}{x}y^2$ denkleminin bir çözümü $y_1=-x^2$ ise genel çözümü?

$$y=-x^2+\frac{1}{u} \Rightarrow y'=-2x-\frac{u'}{u^2} \Rightarrow$$

$$-2x-\frac{u'}{u^2}=x^3+\frac{2}{x}\left(-x^2+\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{x}\left(-x^2+\frac{1}{u}\right)^2$$

$$\cancel{-2x}-\frac{u'}{u^2}=\cancel{x^3}\cancel{-2x}+\frac{2}{ux}\cancel{-x^3}+\frac{2x}{u}-\frac{1}{u^2x} \Rightarrow$$

$$u'+\left(\frac{2}{x}+2x\right)u=\frac{1}{x} \quad \text{(lin. dif. denklemi)}$$

$$u=e^{-\int\left(\frac{2}{x}+2x\right)dx}\left\{\int e^{\int\left(\frac{2}{x}+2x\right)dx}\cdot\frac{1}{x}dx+c\right\}$$

$$=e^{-2\ln x-x^2}\left\{\int e^{\ln x^2+x^2}\cdot\frac{1}{x}dx+c\right\}=\frac{e^{-x^2}}{x^2}\left\{\int x^2e^{x^2}\frac{dx}{x}+c\right\}$$

$$=\frac{e^{-x^2}}{x^2}\left(\int xe^{x^2}dx+c\right)=\frac{e^{-x^2}}{x^2}\left(\frac{e^{x^2}}{2}+c\right)=\frac{1+2ce^{-x^2}}{2x^2}=u \Rightarrow$$

$$y=-x^2+\frac{2x^2e^{x^2}}{c+e^{x^2}} \text{ bulunur.}$$

Problemler

1) $y'=-e^x+3y-e^{-x}y^2$ denkleminin çözümü $y_1=e^x$ ise $y(x)=?$
2) $(1-x^3)y'-2x+x^2y+y^2=0$ d. " " $y_1=x^2$ ise $y(0)=1$ koşulunu sağlayan çözümü?
3) $y'+y^2-3y\tan x+\tan^2 x-1=0$, $y_1=\tan x \Rightarrow y(x)=?$