ÖR12 $2xyy'-1-y^2=0$ denklemini çözelim:

Denklem düzenlenirse $2xy\frac{dy}{dx}=1+y^2 \Rightarrow \frac{2y\,dy}{1+y^2}=\frac{dx}{x}$ haline gelir. Buradan da

$$\int\frac{2y\,dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{x}+\ln c \Rightarrow \ln(1+y^2)=\ln x+\ln c \Rightarrow 1+y^2=xc$$

$\Rightarrow y=\mp\sqrt{cx-1}$ genel çözümü bulunur.

ÖR13 $(1+x^2+x^2y^2+y^2)\,dy=y^2dx$, $y(0)=1$ BDP ni çözelim:

$$(1+x^2+x^2y^2+y^2)dy=(1+x^2)(1+y^2)\,dy=y^2dx \Rightarrow \frac{1+y^2}{y^2}dy=\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{y^2}+1\right)dy=\int\frac{dx}{1+x^2}+c \Rightarrow y-\frac{1}{y}=\arctan x+c \Rightarrow$$

$y(0)=1 \Rightarrow 1-\frac{1}{1}=\arctan 0+c \Rightarrow c=0$ bulunur. Dolayısıyla problemin çözümü $y-\frac{1}{y}=\arctan x$ kapalı formundadır.

PR1 $y'=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$ genel çözümü?

PR2 $(x+\sqrt{x})y'=y+\sqrt{y}$ "

PR3 $y'=\left(\frac{2y+3}{4x+5}\right)^2$ "

PR4 $(y^2-1)x\,dx-(x^2-1)y\,dy=0$ "

PR5 $y'-y^2=-9$, $y(0)=0$ BDP nin çözümü?

PR6 $x^2y'=y-xy$, $y(-1)=1$ " "

PR7 $y\,dx+\cot x\,dy=0$, $y(0)=2$ " "

Homogen Diferansiyel Denklemler

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ sayısı için $f(x\lambda, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ özelliğini sağlıyorsa f ye n. dereceden homogen fonksiyon denir. Eğer $n=0$ olması halinde yani, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ ise f ye sıfırıncı dereceden ya da sadece homogen fonksiyon denir.

ÖR1 $f(x,y) = x^2 - 4xy + 3y^2$ fonksiyonu 2. dereceden homogendir. Zira $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - 4(\lambda x)(\lambda y) + 3(\lambda y)^2 = \lambda^2(x^2 - 4xy + 3y^2) = \lambda^2 f(x,y)$ sağlar.

Şimdi $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ....(1)

1. mertebeden denklemini ele alalım. Şayet P ve Q fonksiyonları aynı dereceden homogen fonksiyonlar ise bu dif. denklem $y=ux$ değişken değiştirmesiyle değişkenlerine ayrılabilir bir denkleme dönüşebilir;

Gerçekten de P ve Q mesela n. dereceden homogen fonksiyonlar ise $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x,y)$ ve $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x,y)$ eşitliklerini sağlar. Bu aynı zamanda P ve Q nun

$$\left.\begin{aligned} P(x,y) &= x^n P(1, \tfrac{y}{x}) \\ Q(x,y) &= x^n Q(1, \tfrac{y}{x}) \end{aligned}\right\}$$

eşitliklerini sağladığı anlamına gelir. Böylece $y=ux \Rightarrow dy = udx + xdu$ (1) de yazılırsa

$$P(x,ux)dx + Q(x,ux)(udx + xdu) = 0 \Rightarrow$$

$$x^n P(1,u)dx + x^n Q(1,u)(udx + xdu) = 0 \Rightarrow$$

$$\big(P(1,u) + uQ(1,u)\big)dx + xQ(1,u)du = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{Q(1,u)\,du}{P(1,u)+uQ(1,u)}=0 \quad \cdots (2)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. Buradan da integralle genel çözüm elde edilir.

(1) denklemi

$y'=f(x,y)$ şeklinde yazıldığında f nin y/x in bir fonksiyonu olması halinde de homogen dif. denklem olduğu söylenebilir: $y'=f(x,y)=F\left(\frac{y}{x}\right)$ ise.

<u>Ör 2</u> $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy}$ nin genel çözümü?

$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=F\left(\frac{y}{x}\right)$ olduğu kolayca görülür.

Buradan $y=ux$ dönüşümü yapılırsa; $dy=u\,dx+x\,du \Rightarrow$

$$\frac{u\,dx+x\,du}{dx}=\frac{x^2+u^2x^2}{x.ux}=\frac{1+u^2}{u}=\frac{1}{u}+\cancel{u}=\cancel{u}+x\frac{du}{dx} \Rightarrow$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u} \Rightarrow u\,du-\frac{dx}{x}=0 \Rightarrow \frac{u^2}{2}-\ln x=\ln c \Rightarrow u=\frac{y}{x}$$

konursa $\frac{y^2}{2x^2}=\ln cx \Rightarrow y^2=2x^2\ln cx$ bulunur.

<u>Ör 3</u> $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-x\,dy=0$ genel çözüm?

Denklemin 1. dereceden homogen dif. denklem olduğu kolayca gösterilebilir. $y=ux \Rightarrow dy=u\,dx+x\,du$ den

$$\left(ux+\sqrt{x^2+u^2x^2}\right)dx-x(u\,dx+x\,du)=0 \Rightarrow$$

$$x\left[\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)dx-u\,dx-x\,du\right]=0 \Rightarrow$$

$u+$