ÖR 8 $6xy\,dx+(9x^2+4y)\,dy=0$ denkleminin integrasyon çarpanını bulalım:

$$P_y-Q_x=6x-18x=-12x \Rightarrow \frac{P_y-Q_x}{-P}=\frac{-12x}{-6xy}=\frac{2}{y}=g(y) \Rightarrow$$

$$\lambda=e^{\int \frac{2}{y}dy}=e^{2\ln y}=y^2 \text{ dir.}$$

c) (1) denklemi homogen diferansiyel denklem ise integrasyon çarpanı $\lambda(x,y)=\dfrac{1}{xP+yQ}$ şeklindedir.

ÖR 9 $(x+2y)\,dx+(y-3x)\,dy=0$ homogen dif. denkleminin integrasyon çarpanını bulalım:

$$\lambda=\frac{1}{xP+yQ}=\frac{1}{x(x+2y)+y\cdot(y-3x)}=\frac{1}{x^2+y^2-xy} \text{ dir.}$$

Gerçekten ; λ ile çarpıldığında denklem;

$$\frac{x+2y}{x^2+y^2-xy}dx+\frac{y-3x}{x^2+y^2-xy}dy=0 \text{ olup}$$

$$P_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+2y}{x^2+y^2-xy}\right)=\frac{2(x^2+y^2-xy)-(x+2y)(2y-x)}{(x^2+y^2-xy)^2}$$

$$=\frac{3x^2-2y^2-2xy}{(x^2+y^2-xy)^2} \quad \text{ve}$$

$$Q_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-3x}{x^2+y^2-xy}\right)=\frac{-3(x^2+y^2-xy)-(y-3x)(2x-y)}{(x^2+y^2-xy)^2}$$

$$=\frac{3x^2-2y^2-2xy}{(x^2+y^2-xy)^2} \quad \text{olup } P_y=Q_x \text{ sağlanır.}$$

ÖR 10 $\left(4+\frac{3}{xy^2}\right)dx+\left(\frac{2x}{y}-\frac{3}{y^3}\right)dy=0$ denkleminin $\lambda=\lambda(xy)$ formunda integrasyon çarpanını bulalım:

$\lambda(xy)$ ile denklem çarpılırsa;

$\lambda(xy)\left(4+\frac{3}{xy^2}\right)dx+\lambda(xy)\left(\frac{2x}{y}-\frac{3}{y^3}\right)dy=0$ olur. Tam dif. olma koşulundan

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(xy)\left(4+\frac{3}{xy^2}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(xy)\left(\frac{2x}{y}-\frac{3}{y^3}\right)\right] \text{ yazılır.} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\lambda(xy)}{\partial y}\left(4+\frac{3}{xy^2}\right)+\lambda(xy)\left(-\frac{6}{xy^3}\right)=\frac{\partial\lambda(xy)}{\partial x}\left(\frac{2x}{y}-\frac{3}{y^3}\right)+\lambda(xy)\left(\frac{2}{y}\right) \Rightarrow$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada $u=xy$ ataması yapılırsa $\lambda=\lambda(u)$ olacağından

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\lambda(xy)}{\partial y}&=\frac{d\lambda}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=x.\lambda'\\ \frac{\partial\lambda(xy)}{\partial x}&=\frac{d\lambda}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=y.\lambda'\end{aligned}\right\}$$ çıkar. Son eşitlikte yazılırsa

$$x\lambda'\left(4+\frac{3}{xy^2}\right)-\frac{6\lambda}{xy^3}=y.\lambda'\left(\frac{2x}{y}-\frac{3}{y^3}\right)+\frac{2\lambda}{y} \Rightarrow$$

$$\lambda'\left(\cancel{4x}+\frac{3x}{xy^2}-2x+\frac{3}{y^2}\right)=\lambda\left(\frac{2}{y}+\frac{6}{xy^3}\right)=\left(2x+\frac{6}{y^2}\right)\frac{d\lambda}{du} \Rightarrow$$

$$\lambda\left(\frac{2}{y}+\frac{6}{xy^3}\right)=xy\left(\frac{2}{y}+\frac{6}{xy^3}\right)\frac{d\lambda}{du} \Rightarrow \lambda=u.\frac{d\lambda}{du} \Rightarrow$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{du}{u} \Rightarrow \ln\lambda=\ln u \Rightarrow \lambda=u=xy \text{ elde edilir.}$$

Sonuçta denklemin xy'nin fonksiyonu olan integrasyon çarpanı $\lambda(xy)=xy$ dir.