Sayısal Analiz

İletişim :

yyurtay@sakarya.edu.tr
www.cs.sakarya.edu.tr/yyurtay
(264) 295 58 99

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Ders İçeriği

- Ters Matris Yöntemi
- LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi
- Jacobi yineleme (iterasyon) Yöntemi
- GAUSS-SEIDEL yöntemi
- Aitken İterasyon yöntemi
- Örnekler

Ters Matris Alarak,

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$
.
.
.
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m$

olsun, denklem takımını matris formunda yeniden düzenleyecek olursak ;

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i, = \quad (i = 1,2,\ldots,m)$ veya kısaca **A X = B** formundadır.

A matrisi katsayılar matrisidir.

$A^{-1}\,\mathbf{A}\ \mathbf{X} = A^{-1}\,\mathbf{B}$
$I\ X = A^{-1}B$
$X = A^{-1}B$ elde edilir.

Burada A^{-1} in $A^{-1} = \dfrac{AdjA}{|A|}$ ile bulunabileceğini hatırlamak gerekir.

Örnek 1 :

$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 8$

$3x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$ denklem sistemini katsayı matrisinin tersini alarak bulalım.

Katsayı matrisi $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ Buradan bu matrisin determinantı ve ek matrisi alarak ters matrisi bulduğumuzda ;

$|A| = -5$, Adj $A = \begin{bmatrix} -5 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 6 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \dfrac{Adj\,A}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & -0.8 \\ 1 & 1.6 & -1.2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}.B \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & -0.8 \\ 1 & 1.6 & -1.2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

bulunur.

```
>> A=[2 -3 2;1 1 -2;3 -2 -1]
     A =
         2    -3     2
         1     1    -2
         3    -2    -1
>>B=[-11  8 -1]'
     -11
       8
      -1
>> AT=inv(A)
     AT =
         1.0000    1.4000   -0.8000
         1.0000    1.6000   -1.2000
         1.0000    1.0000   -1.0000
>>I=AT*A
     I =
         1.0000    0.0000    0.0000
         0.0000    1.0000    0.0000
         0.0000    0.0000    1.0000

>>X=AT*B
     X=
          1
          3
         -2
```

Matlab'ta Ters
Matris yardımıyla
Lin.Denk.Çözümü

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : A=L.U

Ayrıştırma Yöntemi

AX=B ve A=L.U => LUX=B şeklinde bir düzenleme ile…

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11} \ , \ u_{12} = a_{12} \ , \ u_{13} = a_{13} \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \ , \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}\,.u_{12} \ , \ u_{23} = a_{23} - l_{21}\,.u_{13}$$

$$l_{32} = [a_{32} - l_{31}\,.u_{12}]/u_{22} \ , \ u_{33} = a_{33} - l_{31}\,.u_{13} - l_{32}\,.u_{23}$$

L ve **U** matrisleri elde edilmiş olur.

BSM

5. Hafta

Ayrıştırma Yöntemi

BSM

5. Hafta

7. Sayfa

LU (Ayrıştırma, Cholesky) Yöntemi : A=L.U

A.X=B sisteminde **A'** nın ayrıştırılması ile
L.U.X=B şeklini gelir. İfadeye
U.X =Z dönüşümü yapılarak
L.Z=B şeklinde yeni bir denklem sistemi elde edilmiş olur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

buradan $z_1 = b_1$, $z_2 = b_2 - l_{21} . z_1$, $z_3 = b_3 - l_{31} . z_1 - l_{32} . z_2$

sonuçları elde edilir, bu değerleri ;

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

denkleminde yerine yazılarak ,

$$x_1 = \frac{z_1 - u_{12} . x_2 - u_{13} . x_3}{u_{11}} = \frac{b_1 - u_{21} . x_2 - u_{13} . x_3}{u_{11}}$$

$$x_2 = \frac{z_2 - u_{32} . x_3}{u_{22}} = \frac{b_2 - l_{21} . z_1 - u_{23} . x_2}{u_{22}}$$

$$x_3 = \frac{z_3}{u_{33}} = \frac{b_3 - l_{31} . z_1 - l_{32} . z_2}{u_{33}}$$

Ayrıştırma Yöntemi

ÖRNEK

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

şeklinde verilen denklem sistemini LU yöntemi kullanarak çözünüz.

Çözüm: Bu denklem sistemini çözmede öncelikle A katsayılar matrisi, X bilinmeyenler matrisi ve Y değerler matrisini oluştururuz.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \; ; \; X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; ; \; Y=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

Burada A katsayılar matrisini A=L.U şeklinde ifade edecek olursak

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 1.5 & -0{,}2 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; U=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}6 \end{bmatrix}$$

Bir önceki örnekle katsayılar aynı alındığından L ve U'nun yandaki değerleri aldığını hesaplamıştık.

L ve U yukarıdaki gibi hesaplandıktan sonra

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

BSM

5. Hafta

8. Sayfa

Ayrıştırma Yöntemi

$z_1 = y_1 = 4$;

$z_2 = y_2 - z_1.l_{2,1} = 6\text{-}4.(\text{-}0{,}5) = 8$ ve

$z_3 = y_3 - z_1.l_{3,1} - z_2.l_{3,2} = 6\text{-}4.(1{,}5)\text{-}8.(\text{-}0{,}2) = 1{,}6$

olmak üzere Z matrisi oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

eşitliğindende

$$x_3 = \frac{z_3}{u_{3,3}} = \frac{y_3 - z_1.l_{3,1} - z_2.l_{3,2}}{u_{3,3}} = \frac{6 - 4.1{,}5 - 8}{1{,}6} = 1$$

$$x_2 = \frac{z_2 - u_{2,3}.x_3}{u_{2,2}} = \frac{y_2 - z_1.l_{2,1} - u_{2,3}.x_3}{u_{2,2}} = \frac{6 - 4.(-0{,}5) - 0{,}5.1}{2{,}5} = 3$$

$$x_1 = \frac{z_1 - u_{1,2}.x_2 - u_{1,3}.x_3}{u_{1,1}} = \frac{y_1 - u_{1,2}.x_2 - u_{1,3}.x_3}{u_{1,1}} = \frac{4 - 1.3 - (-3).1}{2} = 2$$

$x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 1$

şeklinde denklem sistemi çözülmüş olunur.

BSM

5. Hafta

9. Sayfa

Uygulama :

Ayrıştırma Yöntemi

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Çözümünü Ayrıştırma yöntemi ile bulunuz ?

…

Uygulama :

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 5$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Çözümünü Ayrıştırma yöntemi ile bulunuz ?

…

```
>> A=[1,-1,1;1,1,-1;-1,1,1]

       1    -1     1
A =    1     1    -1
      -1     1     1

>> B=[3,5,1]'

       3
B =    5
       1
>> [l,u]=lu(A)

       1     0     0
l =    1     1     0
      -1     0     1

       1    -1     1
u =    0     2    -2
       0     0     2

>> z=inv(l)*B

      3
z =   2
      4

>> x=inv(u)*z
      4
x =   3
      2
```

Uygulama :

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 7$$

Çözümünü Ayrıştırma yöntemi ile bulunuz ?

…

Matlab Çözümü

```
>> A=[4,1,1;2,-1,1;2,1,1]

A =     4     1     1
        2    -1     1
        2     1     1

>> B=[9,3,7]'

B =     9
        3
        7
>> [l,u]=lu(A)

l =   1.0000         0         0
      0.5000    1.0000         0
      0.5000   -0.3333    1.0000

u =   4.0000    1.0000    1.0000
           0   -1.5000    0.5000
           0         0    0.6667

>> z=inv(l)*B

z =   9.0000
     -1.5000
      2.0000
>> x=inv(u)*z

x =   1.0000
      2.0000
      3.0000
```

Uygulama :

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5 \\
-x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\
-2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -5
\end{aligned}
$$

Çözümünü ayrıştırma yöntemi ile bulunuz ?

…

Uygulama :

Ayrıştırma Yöntemi

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\
2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\
x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + x_3 &= -4
\end{aligned}
$$

Çözümünü Choleski yöntemi ile bulunuz ?

…

Ayrıştırma Yöntemi

Uygulama :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Çözümünü Choleski yöntemi ile bulunuz ?

```
>> A=[1 1 -1 1;0 2 1 -1;1 0 -1 1;-1 -1 1 0]
A =

     1     1    -1     1
     0     2     1    -1
     1     0    -1     1
    -1    -1     1     0

>> B=[2 5 0 -4]'

B =
     2
     5
     0
    -4
```

```
>> [l,u]=lu(A)
l =
   1.0000        0        0        0
        0   1.0000        0        0
   1.0000  -0.5000   1.0000        0
  -1.0000        0        0   1.0000
u =
   1.0000   1.0000  -1.0000   1.0000
        0   2.0000   1.0000  -1.0000
        0        0   0.5000  -0.5000
        0        0        0   1.0000
>> z=inv(l)*B
z =
   2.0000
   5.0000
   0.5000
  -2.0000
```

```
>> x=inv(u)*z
x =
     1
     2
    -1
    -2
```

BSM

5. Hafta

Uygulama :

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 - x_3 \quad &= 0 \\
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -5 \\
2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= -5 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 + 6x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -6 \\
-2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -10 \\
2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 &= 5 \\
-x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

(x1, x2, x3, x4) = (? , ? , ? , ?)

Çözümünü Choleski yöntemi ile bulunuz ?

…

Jacobi basit iterasyon yöntemi:

$\mathbf{X_1}=Ax_o + C$

İşlemiyle bulunur ve işleme

$\mathbf{X_2}=Ax_1 + C$

...

$\mathbf{X_k}=Ax_{k}-1 + C$

olarak devam ettirilir. X_k bilinmeyen vektör elemanları

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + c_i \,, \qquad \mathrm{i = 1 : n}$$

$$\max_{i \le i \ge n} \frac{\left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|}{x_i^k}$$ Yakınsaklık kriteri ile belirlenir.

Jacobi basit iterasyon yöntemi:

Örnek:

$x + y = 3$

$2x - y = 3$

Denklem sistemini İterasyon Yöntemi ile çözünüz.
Sistemini iterasyon yapılabilecek forma getirelim.

x = (3+y)/2, **y** = 3 – x

Jacobi İterasyon Yöntemi

x	y
1,5	1,5
2,25	0,75
1,875	1,125
2,0625	0,9375
1,96875	1,03125
2,015625	0,984375
1,992188	1,007813
2,003906	0,996094
1,998047	1,001953
2,000977	0,999023

Başlangıç değerleri **x=0 veya y=0** vererek hesaplayalım.

İterasyonları gerçekleştirirsek;

x(1) = (3+**0**)/2 =1.5,   y(1) = 3 – **1.5** = 1.5

x(2) = (3+**1.5**)/2 = 2.25,   y(2) = 3 – **2.25** = 0.75

…

Devam eden iterasyon değerleri tabloda verilmiştir.

Dolayısı ile kökler   **x = 2, y = 1**   değerlerine yakınsamaktadır.

Bu yöntem üzerinde çözüm yapılırken yakınsama gözleniyorsa çözüme ulaşılmış demektir.

Her zaman yakınsaklık söz konusu olmaz.

Jacobi basit iterasyon yöntemi:

Büyük katsayılar matrisi içeren lineer denklem sistemlerinin eliminasyon yöntemleriyle çözümü çoğu zaman ekonomik olmaz. Bu gibi durumlarda iteratif yöntemler seçilir. Bunlardan en kolay olanlardan biriside Jacobi yöntemidir.

$A \cdot X = B$ lineer denklem takımı, A katsayılar matrisi $A = L + D + U$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde üç matrisin toplamı olmak üzere

$L \cdot X + D \cdot X + U \cdot X = B \quad \rightarrow \quad X = D^{-1} \cdot [B - L \cdot X - U \cdot X]$ şekline getirilebilir.

Bu durumda x_i *bilinmeyenleri için uygun seçilecek başlangıç değerleri bulunan eşitliklerde* kullanılarak yeni x_i *değerleri hesaplanabileceği ve bu işlemlerin iteratif olarak devam* ettirilebileceği görülmektedir. Jacobi basit iterasyon yöntemi olarak bilinen bu yöntemin herhangi bir iterasyon adımı için kapalı formda

BSM

5. Hafta

Jacobi basit iterasyon yöntemi:

$$X^{(k+1)} = D^{-1}\cdot\left[B - L\cdot X^{(k)} - U\cdot X^{(k)}\right]$$ veya açık biçimde

$$\begin{Bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ \cdots \\ x_N^{(k+1)} \end{Bmatrix} = D^{-1}\cdot\left(\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_N \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \cdots \\ x_N^{(k)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \cdots \\ x_N^{(k)} \end{Bmatrix}\right)$$

yazılabilir. D diyagonal matrisinin tersinin

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{NN} \end{bmatrix}$$

Şeklinde olacağı gösterilebilir. Bu durumda eşitliğin herhangi bir i 'inci satırı için

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}\cdot x_j^{(k)}}{a_{ii}} \quad ; \quad i = 1,2,\ldots.N}$$

yazılarak iterasyon algoritması açık biçimde elde edilebilir.

Jacobi basit iterasyon yöntemi:

Örnek:

$$Ax=b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{x}=?$$

Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü x=[0.1667 0.4167 -0.0833 0.1667] dir. Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini JACOBI iterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1=\frac{1}{4}(1-x_2-x_3) \quad , \quad x_2=\frac{1}{4}(2-x_1-x_4) \quad , \quad x_3=\frac{1}{4}(-x_1-x_4) \quad , \quad x_4=\frac{1}{4}(1-x_2-x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyenin k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. ε=0.0001 seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ alalım.

BSM

5. Hafta

Jacobi basit iterasyon yöntemi:

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.5000	0	0.2500
2	0.1250	0.3750	-0.1250	0.1250
3	0.1875	0.4375	-0.0625	0.1875
4	0.1563	0.4063	-0.0938	0.1563
5	0.1719	0.4219	-0.0782	0.1719
6	0.1641	0.4141	-0.0860	0.1641
7	0.1680	0.4180	-0.0821	0.1680
8	0.1660	0.4160	-0.0840	0.1660
9	0.1670	0.4170	-0.0830	0.1670
10	0.1665	0.4165	-0.0835	0.1665
11	0.1668	0.4168	-0.0833	0.1667
12	0.1666	0.4166	-0.0834	0.1666
13	0.1667	0.4167	-0.0833	0.1667

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_4^2 - x_4^1| = |0.1250 - 0.2500| = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1875 - 0.1250| = 0.0625 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1660 - 0.1680| = 0.0020 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1668 - 0.1665| = 0.0003 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyon durduruldu**

İterasyon no

13. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm: $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0833 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel Yöntemi

BSM

5. Hafta

24. Sayfa

İterasyona başlamadan önce,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \quad \rightarrow \text{A x=b}$$
$$.$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

denklem sistemi diyagonal elemanları a_{ii}=0 olacak şekilde düzenlenir. Bunun için gerekirse satırların yerleri değiştirilir. Bu sistemden x_1, x_2, …, x_n çekilerek

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n)$$
$$.$$
$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \ldots)$$

Şeklinde yazılır

Gauss-Seidel Yöntemi

İterasyona x_1, x_2, x_3, …, xn bilinmeyenleri için, fiziksel anlamına göre, bir başlangıç değeri tahmin edilerek başlanır. Herhangi bir tahmin yapılamıyorsa $x_1= x_2= \ldots = x_n=0$ veya

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}, \ldots, x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

alınabilir.

x_i değerleri çekilen denklemlerde 1. denkleminin sağ tarafında yerine konur, x_1 in yeni değeri bulunur.

x_1 in yeni değeri ve x_3, x_4, …, x_n nin önceki değerleri 2. denklemin sağ tarafında yerine konur, x_2 nin yeni değeri bulunur.

x_1 ve x_2 nin yeni değeri ile x_4, …, x_n nin önceki değerleri 3. denklemin sağ tarafında yerine konur, x_3 ün yeni değeri bulunur. … x_1, x_2, …, x_{n-1} in yeni değerleri n. denklemin sağ tarafında yerine konur, x_n nin yeni değeri bulunur.

İterasyonu sonlandırma koşulu kontrol edilir, sağlanıyorsa iterasyon sonlandırılır. Sağlanmıyorsa son x_i değerleri ile işlem tekrarlanır.

GAUSS-SEIDEL metodu ile JACOBI metodu temelde aynıdır.
Sadece GAUSS-SEIDEL metodunda x_i nin her yeni değeri hemen kullanılır.

Gauss-Seidel Yöntemi

Örnek:

$$Ax=b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{x} = ?$$

Denklem sisteminin direkt yöntemlerle çözümü x=[0.1667 0.4167 -0.0833 0.1667] dir. Çözümde ondalık sayıdan sonra 4 hane verilmiştir. Aynı denklem sistemini GAUSS-SEIDELiterasyonu ile çözelim. Denklem sistemini

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3) \;,\; x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4) \;,\; x_3 = \frac{1}{4}(-x_1 - x_4) \;,\; x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

şeklinde yazalım. i. bilinmeyenin k. Ve k-1. adımda hesaplanan iki değerinin farkı $x_i^k - x_i^{k-1}$ olmak üzere, $Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| \le \varepsilon$ koşulu **sağlanınca iterasyonu durduralım**. ε=0.0001 seçelim. Çözümde 4 ondalık hane kullanalım. Başlangıç için $x = x^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ alalım.

Gauss-Seidel Yöntemi

Örnek:

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.4375	-0.0625	0.1563
2	0.1563	0.4219	-0.0782	0.1641
3	0.1641	0.4180	-0.0821	0.1660
4	0.1660	0.4170	-0.0830	0.1665
5	0.1665	0.4168	-0.0833	0.1666
6	0.1666	0.4167	-0.0833	0.1667
7	0.1667	0.4167	-0.0834	0.1667

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |x_1^2 - x_1^2| = |0.1563 - 0.2500| = 0.0937 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan **iterasyona devam!**

$|0.1641 - 0.1563| = 0.0078 > \varepsilon = 0.0001$, **iterasyona devam!**

$|0.1667 - 0.1666| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$, **iterasyonu durdur!**

İterasyon adımları

7. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Çözüm: $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.4167 \\ -0.0834 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

BSM

5. Hafta

Aitken İterasyon yöntemi

Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi, iterasyon gerçek çözüme oldukça yavaş yakınsamaktadır. JACOBI ve GAUSS-SEIDEL iterasyonları doğrusal yaklaşım sergilerler. Doğrusal yaklaşımlı iterasyon metotlarında AITKEN yöntemi kullanılarak iterasyon hızlandırılabilir. Herhangi bir xi bilinmeyenin birbirini izleyen üç İterasyon adımı sonunda bulunan

$$x_i^{k-2}, x_i^{k-1}, x_i^k$$

değerleri kullanılarak x_i^k nın değeri iyileştirilebilir. AITKEN'e göre x_i^k nın iyileştirilmiş değeri

$$x_i^k = x_i^k - \frac{(x_i^k - x_i^{k-1})^2}{x_i^k - 2x_i^{k-1} + x_i^{k-2}}$$

Formülü kullanarak aşağıdaki örneği JACOBI metodu ile çözümleyelim

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x} = ?$$

$$x_1 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3), \quad x_2 = \frac{1}{4}(2 - x_1 - x_4), \quad x_3 = \frac{1}{4}(-x_1 - x_4), \quad x_4 = \frac{1}{4}(1 - x_2 - x_3)$$

Aitken İterasyon yöntemi

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0.2500	0.5000	0	0.2500
2	0.1250	0.3750	-0.1250	0.1250
3	0.1875 **(0.1667)**	0.4375 **(0.4167)**	-0.0625 **(-0.0833)**	0.1875 **(0.1667)**
4	0.1563 **(0.1667)**	0.4063 **(0.4167)**	-0.0938 **(-0.0834)**	0.1563 **(0.1667)**

Başlangıç değerleri

$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| = |0.1250 - 0.2500| = 0.1250 > \varepsilon = 0.0001$ olduğundan iterasyona devam!

Aitken

$$0.1875 - \frac{(0.1875-0.1250)^2}{0.1875 - 2\cdot 0.1250 + 0.2500} = 0.1667$$

$|-0.0834 - (-0.0833)| = 0.0001 = \varepsilon = 0.0001$ iterasyonu durdur!

İterasyon adımları

4. iterasyon sonunda bulunan çözüm

Parantez içinde koyu yazılmış değerler AITKEN formülü ile iyileştirilmiş değerlerdir.

Görüldüğü gibi yakınsama hızlanmış, 13 iterasyon yerine sadece 4 iterasyon yeterli olmuştur.

AITKEN yöntemi, formülün yapısı gereği, en erken 3. adım sonunda uygulanabilir. Ancak, ilk adımlarda değerler çok kaba olduğundan, büyük denklem sistemlerinde 5.-10. adımdan sonra uygulanması daha uygun olur.

(İterasyonun son adımlarında da yarar sağlamaz, çünkü sadece son hanelerde çok küçük değişiklikler olmaktadır.

$$Max\,|x_i^k - x_i^{k-1}| \leq 10\cdot\varepsilon$$

olduğunda AITKEN yönteminin kullanılmaması uygun olur.)

$$\begin{aligned} 3x - y - z &= 2 \\ x + 4y + z &= -1 \\ x - y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

denklem sistemi versilsin. Sistemin çözümü için

$\mathbf{x}^{(1)} = [x_1, y_1, z_1] = [1\ 1\ 1]^T$

alarak Gauss-Jacobi yöntemiyle $x^{(2)}, x^{(3)}$ *yaklaşımlarını belirleyiniz.*

Çözüm. $\mathbf{x}^{(1)} = [x_1, y_1, z_1] = [1\ 1\ 1]^T$

Yukarıda belirtilen prosedürü takip ederek,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(2 + y + z) \\ y &= \frac{1}{4}(-1 - x - z) \\ z &= \frac{1}{3}(8 - x + y) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde Gauss-Jacobi iterasyonlarını

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{3}(2 + y_k + z_k) \\ y_{k+1} &= \frac{1}{4}(-1 - x_k - z_k) \\ z_{k+1} &= \frac{1}{3}(8 - x_k + y_k) \end{aligned}$$

olarak tanımlarız. Başlangıç tahminini kullanmak suretiyle

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3}(2 + y_1 + z_1) = \frac{4}{3} \\ y_2 &= \frac{1}{4}(-1 - x_1 - z_1) = -\frac{3}{4} \\ z_2 &= \frac{1}{3}(8 - x_1 + y_1) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $\mathbf{x}^{(2)} = [4/3 - 3/4\ 8/3]^T$ olarak elde edilir. Virgülden sonra dört basamağa kadar yuvarlatılarak sunulan yaklaşımlar aşağıdaki gibidir. Sonuçlandırma kriteri olarak

$||\mathbf{x}^{(n+1)} - \mathbf{x}^{(n)}||_2 < 10^{-4}$ kriterini kullanıyoruz.

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{x}^{(1)} & & \mathbf{x}^{(2)} & & \mathbf{x}^{(3)} & & \mathbf{x}^{(4)} & & \mathbf{x}^{(17)} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 1.3333 \\ -0.7500 \\ 2.6667 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 1.3056 \\ -1.2500 \\ 1.9722 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} 0.9074 \\ -1.0694 \\ 1.8148 \end{bmatrix}, & \cdots, & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Yukarıda elde edilen yaklaşımların $[1 - 1\ 2]^T$ gerçek çözümüne yakınsadığına dikkat edelim.

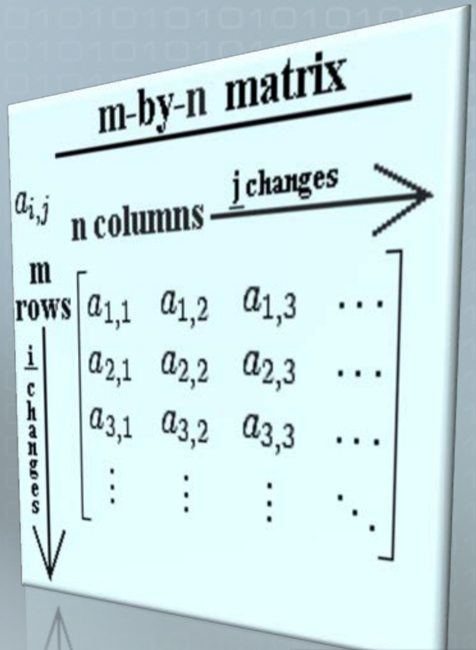
Kaynak

Karadeniz Teknik Matematik, erhan@ktu.edu.tr

Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar

A.Topçu, (Bilgisayar Destekli Nümerik Analiz, OGÜ)



Sonraki Hafta :

Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin Çözümleri…