denklemine tam diferansiyel denklem denir.

Ör 2 $\left(e^{xy}+xye^{xy}\right)dx+\left(1+x^2e^{xy}\right)dy=0$ denklemi bir tam dif. denklemdir:

$$\left(e^{xy}+xye^{xy}\right)dx+\left(1+x^2e^{xy}\right)dy=d\left(y+xe^{xy}\right) \quad \text{olur.}$$

Teorem 1 P ve Q, dikdörtgensel bir Ω bölgesinde C^1 sınıfından fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0 \quad \text{---}\ (3)$$

denkleminin Ω da tam olması için gerek ve yeter koşul,

$$\forall (x,y)\in\Omega \text{ için } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{---}\ (4) \quad \text{olmasıdır.}$$

İspat: Bakınız Adi diferansiyel Denklemler, M. Çağlıyan.

F fonksiyonunun elde edilmesi için (2) denklemlerinden biriyle başlanabilir. Her iki denklemden yararlanarak bulunur.

Ör 3 $(3x^2y+2xy)dx+(x^3+x^2+2y)dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulalım:

$$\left.\begin{aligned} P(x,y)&=3x^2y+2xy \\ Q(x,y)&=x^3+x^2+2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2x=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{olduğundan}$$

tam dif. denklemdir. O halde buradan

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2y+2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=x^3+x^2+2y \quad \text{denklemlerini}$$

sağlayan bir $F(x,y)$ fonksiyonu vardır. İlk denklemi ele alırsak; $\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2y+2xy \Rightarrow \int\frac{\partial F}{\partial x}dx=\int(3x^2y+2xy)dx$

$$+g(y)) \Rightarrow$$

$F(x,y) = x^3y + x^2y + g(y)$ bulunur. Bulunan F ikinci denklemde yazılırsa;

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + x^2 + 2y \Rightarrow x^3 + x^2 + g'(y) = x^3 + x^2 + 2y \Rightarrow$$

$g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 + c$ çıkar ki buradan da

$F(x,y) = x^3y + x^2y + y^2 + c$ bulunur.

Ör4 $\frac{y}{x}dy - \left(\frac{y^2}{2x^2} + x\right)dx = 0$ denkleminin tam dif. denklem olduğunu gösterip çözelim:

$$\left.\begin{array}{l} Q(x,y) = \frac{y}{x} \\ P(x,y) = -\frac{y^2}{2x^2} - x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{2x^2} = -\frac{y}{x^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ old. tam dif. dir.

$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y^2}{2x^2} - x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{x}$ eşitlikleri yazılır. 2. yi kullanarak başlayalım:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{\partial F}{\partial y}dy = \int \frac{y}{x}dy + g(x) \Rightarrow$$

$$F(x,y) = \frac{y^2}{2x} + g(x) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y^2}{2x^2} - x \text{ old.}$$

$$-\frac{y^2}{2x^2} + g'(x) = -\frac{y^2}{2x^2} - x \Rightarrow g'(x) = -x \Rightarrow g(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

Sonuçta çözüm, $F(x,y) = \frac{y^2}{2x} - \frac{x^2}{2} + c$ olur.

Ör5 $(\cos x \cos y + 2x)dx - (\sin x \sin y + 2y)dy = 0$ genel çözüm?

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = \cos x \cos y + 2x \Rightarrow P_y = -\cos x \sin y \\ Q(x,y) = -\sin x \sin y - 2y \Rightarrow Q_x = -\cos x . \sin y \end{array}\right\} \Rightarrow P_y = Q_x$$ yani tam dif. denklem.

$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \cos y + 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin x \sin y - 2y$ dir. ilkinden

$\int \frac{\partial F}{\partial x} dy = \int \cos x \cos y\, dx + \int 2x\, dx + g(y) = \sin x \cos y + x^2 + g(y)$ dir.

$F(x,y) = \sin x \cos y + x^2 + g(y)$ çıkar. 2. sinden de

$\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin x \sin y - 2y \Rightarrow -\sin x \sin y + g'(y) = -\sin x \sin y - 2y \Rightarrow$

$g'(y) = -2y \Rightarrow g(y) = -y^2 + c$ olur ki $F(x,y)$;

$F(x,y) = \sin x \cos y + x^2 - y^2 + c$ bulunur.

Problemler

1) $(6x^2 + 4xy + y^2)\,dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)\,dy = 0$ genel çözümü?

2) $2x(ye^{x^2} - 1)\,dx + e^{x^2}\,dy = 0$ için " "

3) $\left(\frac{x}{y}\right) dy + (1 + \ln y)\,dx = 0$ " "

4) $(2x + y + 1)\,dx + (x + 3y + 2)\,dy = 0$, $y(0) = 0 \Rightarrow y(x) = ?$

5) $\left(ye^{xy} - \frac{1}{y}\right) dx + \left(xe^{xy} + \frac{x}{y^2}\right) dy = 0 \Rightarrow$ genel çözüm?

6) $(\tan y - 2)\,dx + \left(x \sec^2 y + \frac{1}{y}\right) dy = 0$, $y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = ?$

Tam Diferansiyel Hale Getirilebilen Denklemler

Eğer $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ --- (1)

denklemi tam dif. değilse bazen uygun bir $\lambda(x,y)$ fonksiyonu ile çarpılarak tam dif. hale getirilebilir.

Bu durumda $\lambda(x,y)P(x,y)\,dx + \lambda(x,y)Q(x,y) = 0$

denklemi tam dif. olur ki bu λ fonksiyonuna denklemin integrasyon çarpanı denir.

<u>ÖR6</u> $\lambda = xy^2$ fonksiyonunun $(2y-6x)\,dx + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)dy = 0$, denkleminin bir integral çarpanı olduğunu gösterelim:

Bu λ ile çarpılırsa denklem,

$$xy^2(2y-6x)\,dx + xy^2\left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)dy = (2xy^3 - 6x^2y^2)\,dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)\,dy$$

olup

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - 6x^2y^2) = 6xy^2 - 12x^2y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4x^3y) = 6xy^2 - 12x^2y \end{aligned}\right\} \text{denklem tam diferansiyeldir.}$$

İntegrasyon Çarpanının Bulunması

$\lambda(x,y)$ (1) denkleminin bir integrasyon çarpanı olsun. Bu durumda $\lambda P(x,y)\,dx + \lambda Q(x,y)\,dy = 0$ denklemi tam dif. bir denklemdir, yani

$$\frac{\partial(\lambda P(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q(x,y))}{\partial x}$$ ya da daha açık olarak

$$\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} - P\frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad \text{---}(5)$$

elde edilir. Bu λ bilinmeyenine göre bir kısmi dif. denklemdir ve genellikle denklemi çözmekten daha zor olabilir. Yalnız bazı hallerde (5) denklemi bir adi dif. denkleme indirgenebilir ve λ kolayca bulunabilir.

a) λ, sadece x'in bir fonksiyonu ise:

Bu halde $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dx}$ ve $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0$ olup (5) denklemi

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\lambda$$ şeklinde yazılabilir ki buradan

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$$ sadece x'in fonksiyonu olduğu yazılır.

Sonuçta integral almakla;

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx \Rightarrow \ln\lambda = \int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx}}$$ fonksiyonuna ulaşılır.

<u>Ör 7</u> $(x - x^2 - y^2)dx + y\,dy = 0$ denkleminin bir integrasyon çarpanını bulalım:

$$P_y - Q_x = -2y - 0 = -2y \Rightarrow \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-2y}{y} = -2 = f(x) \text{ dir.}$$

Buradan da $\lambda = e^{\int -2dx} = e^{-2x}$ aranan integrasyon çarpanı olacaktır.

b) λ, sadece y'nin fonksiyonu ise:

Bu halde de $\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dy}$ olup (5) denklemi,

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{P_y - Q_x}{-P}\lambda$$ haline gelir, $\frac{P_y - Q_x}{-P}$ fonksiyonu da yalnızca y'ye bağlı bir fonksiyon olduğundan integral alarak;

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{-P}dy \Rightarrow \ln\lambda = \int \frac{P_y - Q_x}{-P}dy \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda(y) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{-P}dy}}$$ bulunur.