

## Algorithme PageRank et Chaines de Markov

---

L'objectif de ce TP est de programmer les algorithmes dit "Power Methods" (PM, reduced PM et GooglePage Rank) pour calculer les probabilités stationnaires des chaines de Markov à temps discret.

### 1 Simulation d'une marche aléatoire

1. Simulation d'une marche aléatoire sur une ligne avec probabilité  $p$  d'aller à droite et  $1 - p$  d'aller à gauche (Attention aux états de bords). L'intervalle de la marche sera borné  $\{-N, \dots, 0, \dots, M\}$ . Le processus part de l'état initial 0.
2. Implémenter un simulateur d'une marche aléatoire en 1 dimension
3. Dessinez l'évolution de la marche au cours du temps
4. Calculer l'évolution temporel du vecteur de la proportion de temps passé par la chaine de Markov dans chaque état.

### 2 Power method

L'algorithme "Power Method" (PM) [1] se base sur la multiplication successive du vecteur de probabilité par la matrice de transition afin de calculer le vecteur  $\pi$  des probabilités stationnaires de la chaine de Markov (sous l'hypothèse de son existence).

L'algorithme est le suivant :

1.  $x(0)$  vecteur état initial,
2. Répéter sur  $k = 1, 2, \dots$  jusqu'à la condition d'arrêt,
3.  $x(k) = x(k-1)P$ ,
4. Si  $\|x(k) - x(k-1)\| \leq \epsilon$  alors STOP, sinon refaire à partir de l'étape 3.

Implémenter cet algorithme et calculer la métrique suivante

$$\bar{x}(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N+1} x(k)$$

sur l'exemple de la marche aléatoire précédente. Faites également une graphique de l'évolution temporel de  $\bar{x}(N)$  en fonction de  $N$ .

### 3 GooglePage Rank

L'algorithme initial de "GooglePage Rank" (GPR) [2] est exactement l'algorithme PM avec la matrice suivante :

$$A_\alpha = (1 - \alpha)A + \alpha e^T x(0),$$

---

et  $e = (1, 1, \dots)$ .

Utiliser l'algorithme GPR sur un graphe de votre choix (qui représente le lien entre des pages web comme l'exemple ci-dessous) tout en supposant qu'il est toujours possible de revenir à la page d'accueil de google à partir de n'importe quelle page. Dans la version initiale de l'algorithme, le paramètre  $\alpha = 0.15$ .

A partir de la convergence de l'algorithme, déterminer le rang des noeuds de votre graphe (pages web).

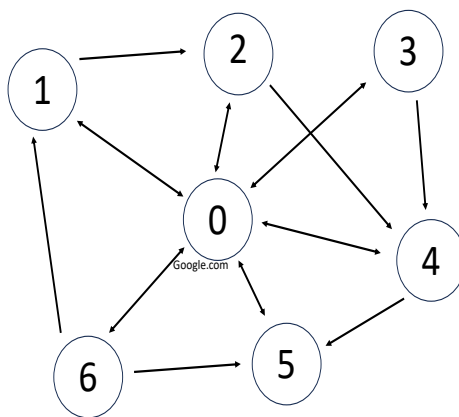


FIGURE 1 – Exemple de graphe de type Web

## Références

- [1] Y. Nesterov, A. Nemirovski, *Finding the stationary states of Markov chains by iterative methods*, Applied Mathematics and Computation, vol. 255, 2015.
- [2] S. Brin, L. Page, *The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine*. Computer Networks and ISDN systems, vol. 30, 1998.