אותות ומשתנים אקראיים 67652

עבודת MATLAB #2

פרק 1 - שערוך בערוץ תקשורת עם הפרעות

יהא $\underline{\mathrm{X}}$ וקטור אקראי בגודל 4×1 כך שאיבריו מפולגים i.i.d. כך ש-X_i מקבל ערכים ± 1 בהסתברות שווה. כל איבר בוקטור הוא למעשה שידור של ביט מידע יחיד. וקטור אקראי זה עובר דרך ערוץ לינארי דטרמיניסטי, שימודל על ידי מכפלה במטריצה $\mathbf{H}$ בגודל 4×4, ובמוצא הערוץ מתווסף רעש גאוסי $\underline{\mathrm{N}}$ שאיבריו מפולגים i.i.d. עם הפילוג

$$\underline{\mathrm{N}} \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2 \mathbf{I}_4\right)$$

$\underline{\mathrm{X}}$ ו-$\underline{\mathrm{N}}$ בלתי תלויים סטטיסטית. נסמן את מוצא המערכת ב-$\underline{\mathrm{Y}}$ כאשר מתקיים

$$\underline{\mathrm{Y}} = \mathbf{H}\underline{\mathrm{X}} + \underline{\mathrm{N}}$$

בתרגיל נבחן דרכים שונות לשערוך המידע המשודר בערוץ ($\underline{\mathrm{X}}$).

חלק 1 - שערוך לינארי אופטימלי

1) מצאו ביטוי אנליטי למשערך ה-LMMSE של $\underline{\mathrm{X}}$ מתוך $\underline{\mathrm{Y}}$ (בטאו תשובתכם במונחי $\underline{\mathrm{Y}}$, $\mathbf{H}$ ו-σ^2).

2) מצאו ביטוי אנליטי למטריצת קוואריאנס שגיאת משערך ה-LMMSE $\underline{\mathrm{Y}}$ (בטאו תשובתכם במונחי $\mathbf{H}$ ו-σ^2).

3) בסעיף זה נתון כי:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0.01 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(א) בתת סעיף זה הניחו כי $\sigma^2 = 1$. בצעו סימולציית מונטה־קרלו למשערך ה־LMMSE של $\underline{X}$ מתוך $\underline{Y}$ כדי לשערך את מטריצת קוואריאנס שגיאת השערוך. חשבו את הקוואריאנס המתקבל במקרה זה מהפיתוח האנליטי וביצעו השוואה של התוצאה עם תוצאת הסימולציה.

הנחיות לביצוע תת הסעיף:

- לצורך שערוך מטריצת קוואריאנס השגיאה, בצעו מיצוע של מטריצות השגיאות האמפיריות. אם ביצעת m ניסויים, ובניסוי ה־$1 \le i \le m$ התקבל וקטור שגיאה $\underline{E}^{(i)}$, אזי מטריצת השגיאה האמפירית בניסוי ה־i הוא
$$\mathbf{C}_i = \underline{E}^{(i)} \cdot \left(\underline{E}^{(i)}\right)^T$$
השיערוך המבוקש הוא לפיכך $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{C}_i$.
- כדי להגריל את הוקטור $\underline{X}$ ניתן להעזר בפקודה RANDSRC.
- כדי להגריל את הרעש הגאוסי $\underline{N}$ היעזרו בפקודה RANDN.

(ב) בצעו סימולציית מונטה־קרלו למשערך של $\underline{X}$ מתוך $\underline{Y}$ והפעילו על המשערך את כלל ההחלטה לביט המתואר בכדי לשערך את הסתברות השגיאה הממוצעת לביט כפונקציה של יחס האות לרעש שיוגדר באופן הבא:

$$\mathrm{SNR} = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \quad [\mathrm{dB}]$$

את התוצאה יש להציג על גבי גרף חצי לוגריתמי ב־MATLAB. לצורך פענוח הביטים ב־$\underline{X}$ נגדיר את כלל ההחלטה לביט באופן הבא:

$$\hat{X}_i = \begin{cases} 1 & , \text{if } \hat{X}_{LMMSE,i} \ge 0 \\ -1 & , \text{else} \end{cases}$$

כאשר $\hat{X}_{LMMSE,i}$ הינו האיבר ה־i במשערך ה־LMMSE ואילו $\hat{X}_i$ הינו ההחלטה על הביט ה־i ששודר ב־$\underline{\mathrm{X}}$.

שימו לב: הסתברות השגיאה הממוצעת לביט הינה

$$\mathbb{P}\left(\text{error}\right)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\mathbb{P}\left(\hat{X}_i\neq X_i\right).$$

הנחיות לביצוע תת הסעיף:

- בחרו את ה־SNR להיות בתחום $[0,40]$ dB (היעזרו בפקודה LINSPACE).
- בצעו לפחות 2000 הרצות לכל SNR בכדי לשערך את הסתברות השגיאה.
- את גרף הסתברות השגיאה כתלות ב־SNR יש להציג בסקאלה חצי לוגריתמית. לצורך כך העזר בפקודה SEMILOGY.

4) חזרו על סעיף 3), כאשר כעת נתון כי:

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0.7&0&0\\0&0&0.25&0\\0&0&0&0.1\end{pmatrix}.$$

5) חזור על סעיף 3), כאשר כעת נתון כי:

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0.5&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

האם ניתן לבצע את השערוך? נמקו את תשובתכם.

פרק 2 - תהליך Autoregressive (AR) ליניארי

נתון תהליך אקראי AR ליניארי מסדר 1 המוגדר על ידי:

$$X[n]=\frac{1}{2}X[n-1]+W[n],\quad n\geq 1$$

כאשר $X[0]=0$ ועבור כל $n\geq 1$, $W[n]$ משתנה אקראי בדיד המקבל ערכים $\{-1,1\}$ בהסתברות שווה, בלתי תלוי סטטיסטית ב־$X[n]$.

1) חשבו את הפילוגים של $X[1]$ ושל $X[2]$.

2) הוכיחו כי לכל $n\geq 1$, $X[n]$ מתפלג אחיד בקבוצה הבדידה

$$\mathcal{S}_n=\{-a_n,-a_n+\Delta_n,-a_n+2\Delta_n,\ldots,a_n-\Delta_n,a_n\}$$

וחשבו את Δ_n, a_n לכל n. רמז : העזרו בסעיף 1 כדי למצוא ניחוש ל־Δ_n, a_n. את שאר הטענה ניתן להוכיח באינדוקציה.

3) הראו כי:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n &= 2\\ \lim_{n\to\infty}\Delta_n &= 0\end{aligned}$$

לרשותכם באתר הקורס קובץ ה genAR.m שמאפשר לייצר פונקציות מדגם של תהליך אקראי AR. שימו לב שאפשר גם להשתמש בו וקטורית (אבל לא מוכרחים) .

4) בעזרת MATLAB ציירו שש פונקציות מדגם של $X[n]$ בתחום $1\leq n\leq 200$

5) בצעו סימולציית מונטה־קרלו עבור הפונקצית צפיפות של הדגימות הבאות של $X[n]$ (לקבלת תוצאות טובות כדאי לקחת דגימות מאוחרות יחסית):

$$X[1],X[2],X[3],X[n_1],X[n_2],X[n_3],\quad 3<n_1<n_2<n_3$$

6) מתוך התבוננות הסימולציה, לאיזה פילוג רציף מתקרב הפילוג של $X[n]$ כאשר $n\to\infty$? הסבירו זאת לאור ממצאכם בסעיף 2 ו־3.

7) כעת נרצה לחקור את ההתנהגות הסטטיסטית של התהליך, כאשר $X[0]$ הוא משתנה אקראי (במקום $X[0]=0$). ניקח את הפילוג הרציף $X[0] \sim \mathrm{U}[2,3]$ (פילוג אחיד רציף בין 2 לבין 3). חזרו על סעיפים 5 ו־6 עבור תנאי התחלה זה. נסו להסביר את הדמיון בתוצאות. (רמז: כדאי להציג את $X[n]$ כסכום של שני תהליכים אקראיים).