投资组合与优化

核心问题

给定预期收益，如何最小化风险？

或

给定预期风险，如何最大化收益？

马科维茨的均值一方差组合模型

该理论依据以下几个假设:

- 投资者在考虑每一次投资选择时，其依据是某一持仓时间内的证券收益的概率分布。
- 投资者是根据证券的期望收益率估测证券组合的风险。
- 投资者的决定仅仅是依据证券的风险和收益。
- 在一定的风险水平上，投资者期望收益最大；相对应的是在一定的收益水平上，投资者希望风险最小。

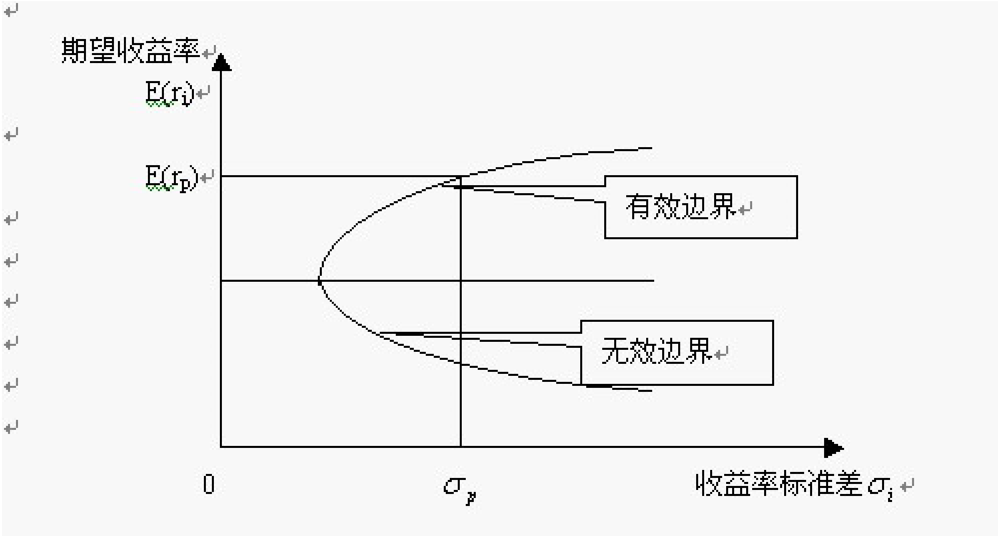
马科维茨投资组合理论的意义

- 揭示了组合资产风险的决定因素——收益率标准差；
- 资产期望收益由其自身风险大小所决定。

亦即，单个资产价格由其方差或标准差来决定，组合资产价格由其协方差来决定。

马科维茨投资组合理论的意义

马可维茨的风险定价思想在他创建的 “均值－标准差”二维空间中投资机会集的有效边界上表现得最清楚。



马克维茨法

通过历史收益率，求各项资产的标准差σ_i和资产之间的相关系数矩阵(ρ_{ij})，然后求解如下最优化问题：

$$\min \sigma_{R_p}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i\omega_j\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$$

相应约束条件为：

$$\sum_i \omega_i R_i = R_p,$$

$\sum_i \omega_i = 1$，且$\omega_i \geq 0$（不许卖空），

或 $\sum_i \omega_i = 1$（可卖空）。

问题的矩阵表述

- 给定预期收益时，最小化风险
- 目标函数为二次型 $\min_{\{w\}} 1/2 w^T V w$
- 约束为线性约束

$$w^T e = E\left[\tilde{r}_p\right]$$

$$w^T \mathrm{I} = 1$$

- 当不允许卖空时， $0 < w_i < 1$
- 当限制了某个资产投资份额，给定投资权重的上下界

$$L_i < w_i < U_i$$

允许卖空时投资组合优化

投资组合优化的矩阵表述

- 给定收益情况下风险最小化
- 风险采用方差来衡量
- 目标函数 $\min_{\{w\}} 1/2 w^T V w$
- 约束条件1 $w^T e = E\left[\tilde{r}_p\right]$
- 约束条件2

$$w^T \mathrm{I} = 1$$

投资组合优化的三维表述示例

- 其中，w 为N支股票权重的列向量，e表示N支股票的N维期望收益率向量，1为N维单位向量，V为投资组合的方差协方差矩阵,以三维为例

$$w=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad e=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

投资组合优化的三维表述示例

- 目标函数

$$1/2\, w'Vw = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1 w_2\sigma_{12} + 2w_1 w_3\sigma_{13} + 2w_2 w_3\sigma_{23}$$

- 约束条件1

$$w^T e = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3 = E\left[\tilde{r}_p\right]$$

- 约束条件2

$$w^T \mathrm{I} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

可卖空情形存在解析解

- 解法一：拉格朗日乘子法（后面将以此法为例）
- 解法二：特征向量法（下略）

权重向量 w 为协方差矩阵最小特征值所对应的特征向量，且满足

$$w^T \mathrm{I} = 1$$

拉格朗日乘子法求解

- 第一步，写出矩阵形式的拉格朗日函数

$$\min_{w.\lambda.\gamma} L = 1/2 w^T V w + \lambda(E[r_p] - w^T e) + \gamma(1 - w^T \mathrm{I})$$

- 第二步，求解一阶条件

$$\frac{\partial L}{\partial w} = V w_p - \lambda e - \gamma \mathrm{I} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E\left[\tilde{r}_p\right] - w_p^T e = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - w_P^T \mathrm{I} = 0$$

- 注：第一个等式实际上可以展开n个

拉格朗日乘子法求解

- 其中，0是三维零向量。由于V是正定矩阵，因此上述一阶条件也是全局优化的充分必要条件。
- 由上述方程可得

$$w_p = \lambda\left(V^{-1}e\right) + \gamma\left(V^{-1}\mathrm{I}\right)$$

$$E\left[\tilde{r}_p\right] = \lambda\left(e^T V^{-1} e\right) + \gamma\left(e^T V^{-1}\mathrm{I}\right)$$

$$1 = \lambda\left(\mathrm{I}^T V^{-1} e\right) + \gamma\left(\mathrm{I}^T V^{-1}\mathrm{I}\right)$$

拉格朗日乘子法求解

- 由上述方程可得，拉格朗日乘子

$$\lambda = \frac{CE\left[\tilde{r}_p\right] - A}{D}$$

$$\gamma = \frac{B - AE\left[\tilde{r}_p\right]}{D}$$

拉格朗日乘子法求解

- 由上述方程可求投资组合权重

$$A = \mathrm{I}^T V^{-1} e = e^T V^{-1}$$

$$B = e^T V^{-1} e$$

$$C = \mathrm{I}^T V^{-1} \mathrm{I}$$

$$D = BC - A^2$$

$$g = \frac{1}{D}\left[B(V^{-1}I) - A(V^{-1}e) \right]$$

$$h = \frac{1}{D}\left[C(V^{-1}e) - A(V^{-1}I) \right]$$

$$w_p = g + hE\left[\tilde{r}_p \right]$$

- 对应的方差

$$\sigma_p^2 = w_p^T V w_p$$

不允许卖空时投资组合优化

投资组合优化的数学表述

- 给定收益情况下风险最小化
- 风险采用方差来衡量
- 目标函数 $\min\limits_{\{w\}} 1/2 w^T V w$
- 约束条件1 $w^T e = E\left[\tilde{r}_p\right]$
- 约束条件2 $w^T \mathrm{I} = 1$
- 约束条件3 $0 < w_i$
- 采用数值算法求解

二次规划的一般形式

$$\min 1/2 x^T H x + f^T x$$

$$s.t. \quad Ax \le b$$

$$Aeqx = beq$$

$$lb \le x \le ub$$

其中H, A, Aeq为矩阵，f, b, beq, lb, ub和x为列向量

- Matlab的函数形式

```
>>x=quadprog(H,f,A,b,Aeq,Beq)
```

投资组合优化如何用Matlab二次优化函数

- Matlab的函数形式

x=quadprog(H,f,A,b,Aeq,Beq)

- 以三个资产为例

H=V; f=zeros(M,1)=(0 0 0)’，x=w

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Aw \leq 0 \Leftrightarrow -\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

投资组合优化如何用表示成二次优化函数

$$Aeq \cdot x = beq$$

$$w^T e = E\left[\tilde{r}_p\right] \qquad w^T \mathrm{I} = 1$$

- $$Aeq w = beq \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ E\left(r_p\right) \end{pmatrix}$$

对应于如下两个约束条件

$$Aeq = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \qquad beq = \begin{pmatrix} 1 \\ E\left(r_p\right) \end{pmatrix}$$

谢谢观看！