2022 年全国硕士研究生招生考试数学(一) 试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$,则(　　)

(A)$f(1)=0$.　　(B) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

(C)$f'(1)=1$.　　(D) $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$.

(2) 设$f(u)$可导,$z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$,若$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$,则(　　)

(A)$f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f'(1)=0$.　　(B)$f(1)=0$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

(C)$f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f'(1)=1$.　　(D)$f(1)=0$, $f'(1)=1$.

(3) 设数列$\{x_n\}$满足$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,则(　　)

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$存在,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$存在,则$\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$存在,但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不一定存在.

(4) 若$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x$,$I_2=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$,$I_3=\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$,则(　　)

(A)$I_1<I_2<I_3$.　　(B)$I_2<I_1<I_3$.

(C)$I_1<I_3<I_2$.　　(D)$I_3<I_2<I_1$.

(5) 下列 4 个条件中,3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的一个充分非必要条件是(　　)

(A)$\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值.

(B)$\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量.

(C)$\boldsymbol{A}$ 有 3 个两两线性无关的特征向量.

(D)$\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交.

(6) 设$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{E}$为 n 阶单位矩阵,若方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$同解,则(

(A)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$只有零解.

(B)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{AB}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$只有零解.

(C) $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$ 同解.

(D) $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y = \mathbf{0}$ 同解.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (\lambda,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,\lambda,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,\lambda)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,\lambda,\lambda^2)^{\mathrm{T}}$,若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价,则 λ 的取值范围是(　　)

(A) $\{0,1\}$.

(B) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -2\}$.

(C) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$.

(D) $\{\lambda \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq -1\}$.

(8) 设随机变量 X 服从区间 $(0,3)$ 上的均匀分布,随机变量 Y 服从参数为 2 的泊松分布,且 X 与 Y 的协方差为 -1,则 $D(2X-Y+1) =$ (　　)

(A)1.　　(B)5.　　(C)9.　　(D)12.

(9) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布,且 X_1 的4阶矩存在,$E(X_1^k) = \mu_k (k = 1,2,3,4)$,则根据切比雪夫不等式,对任意 $\varepsilon > 0$,都有 $P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu_2\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant$ (　　)

(A) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n\varepsilon^2}$.　　(B) $\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.　　(C) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{n\varepsilon^2}$.　　(D) $\frac{\mu_2 - \mu_1^2}{\sqrt{n}\varepsilon^2}$.

(10) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$,若在 $X = x$ 的条件下,随机变量 $Y \sim N(x,1)$,则 X 与 Y 的相关系数为(　　)

(A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分,把答案填在题中横线上.)

(11) 函数 $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ 在点 $(0,1)$ 处的最大方向导数为______.

(12) $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$ ______.

(13) 当 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 时,$x^2 + y^2 \leqslant k\mathrm{e}^{x+y}$ 恒成立,则 k 的取值范围是______.

(14) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为 $(a, +\infty)$,则 $a =$ ______.

(15) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵,若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $[\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} =$ ______.

(16) 设 A,B,C 为随机事件,且 A 与 B 互不相容,A 与 C 互不相容,B 与 C 相互独立,$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$,则 $P(B \cup C \mid A \cup B \cup C) =$ ______.

三、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = 2 + \sqrt{x}$ 的满足条件 $y(1) = 3$ 的解,求曲线 $y = y(x)$ 的渐近线.

(18)(本题满分 12 分)

已知平面区域 $D = \{(x,y) \mid y - 2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$,计算 $I = \iint\limits_D \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 12 分)

已知曲线 L 是曲面 $\Sigma: 4x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ 的边界,曲面 Σ 方向朝上,曲线 L 的方向和曲面 Σ 的方向符合右手法则,计算 $I = \oint_L (yz^2 - \cos z)\mathrm{d}x + 2xz^2\mathrm{d}y + (2xyz + x\sin z)\mathrm{d}z$.

(20)（本题满分 12 分）

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数，证明：$f''(x)\geqslant 0$的充分必要条件是对任意不同的实数a,b，都有$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$成立.

(21)（本题满分 12 分）

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}ijx_ix_j$.

（Ⅰ）写出$f(x_1,x_2,x_3)$对应的矩阵；

（Ⅱ）求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形；

（Ⅲ）求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

(22)（本题满分 12 分）

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自均值为θ的指数分布总体的简单随机样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自均值为2θ的指数分布总体的简单随机样本，且两样本相互独立，其中$\theta(\theta>0)$是未知参数. 利用样本$X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$，求$\theta$的最大似然估计量$\hat{\theta}$，并求$D(\hat{\theta})$.