

# 2021 年全国硕士研究生招生考试

## 数 学 (一)

(科目代码:301)

一、选择题(1~10 小题,每小题 5 分,共 50 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母写在题后的括号内.)

(1) 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处( ).

(A) 连续且取得极大值

(B) 连续且取得极小值

(C) 可导且导数等于零

(D) 可导且导数不为零

(2) 设函数  $f(x, y)$  可微, 且  $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$ ,  $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$ , 则  $df(1, 1) = ( )$ .

(A)  $dx + dy$

(B)  $dx - dy$

(C)  $dy$

(D)  $-dy$

(3) 设函数  $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$  在  $x = 0$  处的 3 次泰勒多项式为  $ax + bx^2 + cx^3$ , 则( ).

(A)  $a = 1, b = 0, c = -\frac{7}{6}$

(B)  $a = 1, b = 0, c = \frac{7}{6}$

(C)  $a = -1, b = -1, c = -\frac{7}{6}$

(D)  $a = -1, b = -1, c = \frac{7}{6}$

(4) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 则  $\int_0^1 f(x) dx = ( )$ .

(A)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{2n}$

(B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(C)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right) \frac{1}{n}$

(D)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right) \frac{2}{n}$

(5) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_3 - x_1)^2$  的正惯性指数与负惯性指数依次为( ).

(A) 2, 0

(B) 1, 1

(C) 2, 1

(D) 1, 2

(6) 已知  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$ , 若  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  两两相交, 则  $l_1, l_2$  依次为( ).

(A)  $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

(B)  $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$

(C)  $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

(D)  $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$

7) 设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为  $n$  阶实矩阵, 下列结论不成立的是( ).

$$(A) r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{pmatrix} = 2r(\mathbf{A})$$

$$(B) r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{AB} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix} = 2r(\mathbf{A})$$

$$(C) r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BA} \\ \mathbf{O} & \mathbf{AA}^T \end{pmatrix} = 2r(\mathbf{A})$$

$$(D) r \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{BA} & \mathbf{A}^T \end{pmatrix} = 2r(\mathbf{A})$$

8) 设  $A, B$  为随机事件, 且  $0 < P(B) < 1$ , 下列命题中为假命题的是( ).

(A) 若  $P(A|B) = P(A)$ , 则  $P(A|\bar{B}) = P(A)$

(B) 若  $P(A|B) > P(A)$ , 则  $P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$

(C) 若  $P(A|B) > P(A|\bar{B})$ , 则  $P(A|B) > P(A)$

(D) 若  $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B)$ , 则  $P(A) > P(B)$

9) 设  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$  为来自总体  $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$  的简单随机样本,

令  $\theta = \mu_1 - \mu_2, \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \hat{\theta} = \bar{X} - \bar{Y}$ , 则( ).

(A)  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计,  $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$

(B)  $\hat{\theta}$  不是  $\theta$  的无偏估计,  $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}$

(C)  $\hat{\theta}$  是  $\theta$  的无偏估计,  $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

(D)  $\hat{\theta}$  不是  $\theta$  的无偏估计,  $D(\hat{\theta}) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$

10) 设  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  是来自总体  $N(\mu, 4)$  的简单随机样本, 考虑假设检验问题:  $H_0: \mu \leq 10$ ,

$H_1: \mu > 10$ ,  $\Phi(x)$  表示标准正态分布函数, 若该检验问题的拒绝域为  $W = \{\bar{X} \geq 11\}$ , 其

中  $\bar{X} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X_i$ , 则  $\mu = 11.5$  时, 该检验犯第二类错误的概率为( ).

(A)  $1 - \Phi(0.5)$

(B)  $1 - \Phi(1)$

(C)  $1 - \Phi(1.5)$

(D)  $1 - \Phi(2)$

二、填空题(11 ~ 16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在题中的横线上.)

11)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12) 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = 2e^t + t + 1, \\ y = 4(t-1)e^t + t^2 \end{cases}$  所确定, 则  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13) 欧拉方程  $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$  满足条件  $y(1) = 1, y'(1) = 2$  的解为  $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

14) 设  $\Sigma$  为空间区域  $\{(x, y, z) \mid x^2 + 4y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$  表面的外侧, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

15) 设  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  为 3 阶矩阵,  $A_{ij}$  为代数余子式, 若  $\mathbf{A}$  的每行元素之和均为 2, 且  $|\mathbf{A}| = 3$ ,

则  $A_{11} + A_{21} + A_{31} = \underline{\hspace{2cm}}.$

16) 甲、乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球, 先从甲盒中任取一球, 观察颜色后放入乙盒中, 再从乙盒中任取一球, 令  $X, Y$  分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数, 则  $X$  与  $Y$

的相关系数为\_\_\_\_\_.

三、解答题(17 ~ 22 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \int_0^x e^{t^2} dt}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

(18) (本题满分 12 分)

设  $u_n(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} (n=1, 2, \dots)$ , 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 12 分)

已知曲线  $C: \begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6, \\ 4x + 2y + z = 30, \end{cases}$  求  $C$  上的点到  $xOy$  坐标面距离的最大值.

(20) (本题满分 12 分)

设  $D \subset \mathbf{R}^2$  是有界单连通闭区域,  $I(D) = \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx dy$  取得最大值的积分区域为  $D_1$ .

(I) 求  $I(D_1)$  的值;

(II) 计算  $\int_{\partial D_1} \frac{(x e^{x^2+4y^2} + y) dx + (4y e^{x^2+4y^2} - x) dy}{x^2 + 4y^2}$ , 其中  $\partial D_1$  是  $D_1$  的正向边界.

(21) (本题满分 12 分)

已知  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ .

(I) 求正交矩阵  $\mathbf{P}$ , 使得  $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$  为对角矩阵;

(II) 求正定矩阵  $\mathbf{C}$ , 使得  $\mathbf{C}^2 = (a + 3)\mathbf{E} - \mathbf{A}$ .

(22) (本题满分 12 分)

在区间  $(0, 2)$  上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度为  $X$ , 较长一段的长度为  $Y$ , 令  $Z = \frac{Y}{X}$ .

(I) 求  $X$  的概率密度;

(II) 求  $Z$  的概率密度;

(III) 求  $E\left(\frac{X}{Y}\right)$ .