

2023 年全国硕士研究生招生考试 (数学一) 试题

绝密 ★ 启用前

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 150 分

注意: 1. 所有答题都须写在试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、选择题: 1-10 题. (每题 10 分, 共 50 分)

1. 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x-1} \right)$ 的斜渐近线方程为 ()

- A. $y = x + e$ B. $y = x + \frac{1}{e}$ C. $y = x$ D. $y = x - \frac{1}{e}$

2. 若微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的解在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 则 ()

- A. $a < 0, b > 0$ B. $a > 0, b > 0$ C. $a = 0, b > 0$ D. $a = 0, b < 0$

3. 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = |t| \sin t \end{cases}$ 确定, 则 ()

- A. $f(x)$ 连续, $f'(0)$ 不存在.
B. $f'(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.
C. $f'(x)$ 连续, $f''(0)$ 不存在.
D. $f''(0)$ 存在, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

4. 已知 $a_n < b_n (n = 1, 2, \dots)$, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 则 “ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛” 是 “ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛” 的 ()

- A. 充分必要条件.
B. 充分不必要条件.
C. 必要不充分条件.
D. 既不充分也不必要条件.

5. 已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O, E$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵 $\begin{bmatrix} O & A \\ BC & E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} AB & C \\ O & E \end{bmatrix}$.
 $\begin{bmatrix} E & AB \\ AB & O \end{bmatrix}$ 的秩分别为 r_1, r_2, r_3 , 则 ()

- A. $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ B. $r_1 \leq r_3 \leq r_2$ C. $r_3 \leq r_2 \leq r_1$ D. $r_2 \leq r_1 \leq r_3$

6. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是 ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 γ 既可由 α_1, α_2 线性表示, 也可由 β_1, β_2 线性表示, 则 $\gamma = (\quad)$

A. $k \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$. B. $k \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$ C. $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$ D. $k \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, k \in \mathbf{R}$.

8. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(|X - EX|) = (\quad)$

A. $\frac{1}{e}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{e}$. D. 1.

9. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体的 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的简单随机样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_n 为来自总体的 $N(\mu_2, 2\sigma^2)$ 的简单随机样本, 且两样本相互独立, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i, S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2$$

则()

A. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$.
 B. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$.
 C. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n, m)$.
 D. $\frac{2S_1^2}{S_2^2} \sim F(n-1, m-1)$.

10. 设 X_1, X_2 为来自总体 (μ, σ^2) 的简单随机样本, 其中 $\sigma(\sigma > 0)$ 是未知参数, 若 $\hat{\sigma} = a|X_1 - X_2|$ 为 σ 的无偏估计, 则 $a = (\quad)$

A. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ C. $\sqrt{\pi}$ D. $\sqrt{2\pi}$

二、填空题: 11-16 题.(每题 5 分, 共 30 分)

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = ax + bx^2 + \ln(1+x)$ 与 $g(x) = e^{x^2} - \cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 曲面 $z = x + 2y + \ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的切平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = 1 - x, x \in [0, 1]$. 若 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

14. 设连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x+2) - f(x) = x$, $\int_0^2 f(x)dx = 0$, 则 $\int_1^3 f(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}$
15. 已知向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\gamma = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$. 若 $\gamma^\top \alpha_i = \beta^\top \alpha_i (i = 1, 2, 3)$, 则 $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B\left(1, \frac{1}{3}\right)$, $Y \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$, 则 $P\{X = Y\} = \underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 17-22 小题, 共 70 分.

17. (本小题满分 10 分) 设曲线 $y = y(x) (x > 0)$ 经过点 $(1, 2)$, 该曲线上任一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 求函数 $f(x) = \int_1^x y(t)dt$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ 的极值.

19. (本小题满分 12 分)

设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0$ 和 $x + z = 1$ 围成. Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧. 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2xzdydz + xz \cos y dzdx + 3yz \sin x dx dy.$$

20. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上具有 2 阶连续导数. 证明:

(1) 若 $f(0) = 0$, 则存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a) + f(-a)]$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a, a)$, 使得

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2}|f(a) - f(-a)|$$

21. (本小题满分 12 分)

已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3.$$

(1) 求可逆变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$;

(2) 是否存在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成 $g(y_1, y_2, y_3)$?

22. (本小题满分 12 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$, 求

- (1) 求 X 与 Y 的协方差;
- (2) X 与 Y 是否相互独立?
- (3) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度.