目 录

勘 误 辑 录

高等数学

第 0 章 零基础

1.″$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$″是″$\sin\alpha+\cos\beta=0$″的(　　).

(A)充分非必要条件　　(B)必要非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分又非必要条件

2. 证明:对任意正整数 n, 均有 $2^n+2>n^2$.

3. 设实数 $a\in(0,1)$. 数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0=1$, 且对任意正整数 n, 均有 $x_n=\dfrac{1}{x_{n-1}}+a$. 证明:对任意正整数 n, 有 $x_n>1$.

4. $\left(2a^3+ab^2+b^3\right)\left(a^2b-ab^2\right)=$_____.

5. 设 $\lambda \neq 0,2$，则 $\dfrac{\lambda^4-3\lambda^3-6\lambda^2+16\lambda}{\lambda^2-2\lambda}=$_____.

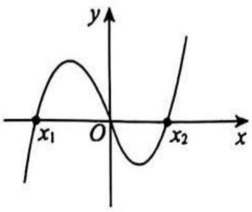
6. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$_____.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，$f(0)=f(1)$，且对任意 $x_1,x_2\in[0,1]$，均有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$. 当 $a,b\in[0,1]$ 时，证明：$|f(a)-f(b)|\leqslant\frac{1}{2}$.

8. 设 $x>0$，求函数 $y=x+\frac{4}{x^2}$ 的最小值.

9. 设实数 x, y 满足 $3x^2+2y^2=6$，求 $2x+y$ 的最大值.

10. 函数 $f(x)=ax^3+bx^2-2x(a,b\in\mathbf{R},ab\neq 0)$ 的图像如图所示，且 $x_1+x_2<0$，则有（　　）.



(A) $a>0,b>0$　　(B) $a<0,b<0$

(C) $a<0,b>0$　　(D) $a>0,b<0$

11. 设函数 $f(x)$ 满足 $af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$，其中 $x\neq 0, a^2\neq 1$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

12. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{12}-\theta\right)=\frac{1}{3}$，则 $\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\theta\right)$ 的值为_____.

13. 已知 $|x_1-3|<1$，$|x_2-3|<1$. 求证：

(1) $4<x_1+x_2<8$，$|x_1-x_2|<2$；

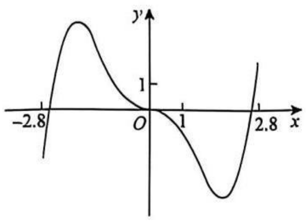
(2) 若 $f(x)=x^2-x+1$，则 $|x_1-x_2|<|f(x_1)-f(x_2)|<7|x_1-x_2|$.

14. 已知等差数列$\{a_n\}$满足$(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_{n+1})=2n(n+1)(n\in N^*)$.

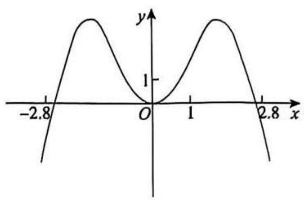
(1) 数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$的前$n$项和$S_n$.

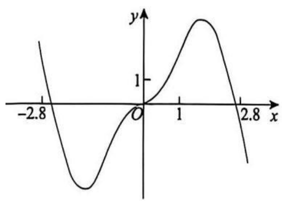
15. 函数$y=-x^2+(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\sin x$在区间$[-2.8,2.8]$的图像大致为（　　）.



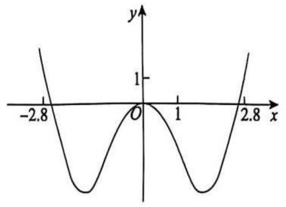
(A)



(B)



(C)



(D)

16. 已知曲线 C 的极坐标方程是 $r=1$, 以极点为原点, 极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\dfrac{t}{2}, \\ y=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数）.

(1) 写出直线 l 与曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 设曲线 C 经过伸缩变换 $\begin{cases} x'=3x, \\ y'=y \end{cases}$ 得到曲线 C', 设曲线 C' 上任一点为 $M(x,y)$, 求 $\dfrac{x}{3}+\sqrt{3}y$ 的最小值.

第 1 章 函数极限与连续

1.函数 $f(x)=x^2\tan x\mathrm{e}^{\cos x}$ 是（　　）.

(A)有界函数　(B)单调函数　(C)周期函数　(D)奇函数

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=-\frac{1}{2}f(x+2)$. 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且 $f(x)=x, x\in[0,\pi)$, 求 $f(x)$ 在 $[\pi,3\pi)$ 上的表达式.

5. 当 $x\to 0$ 时, $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}$ 是 $\sqrt[3]{1+x^2}-1$ 的(　　).

(A)高阶无穷小　　(B)低阶无穷小

(C)同阶但非等价无穷小　　(D)等价无穷小

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-f(x-1)-1}{\ln x}=1$, 则以下结论:

① $f(0)=0$；　② $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$；　③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$；

④当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的高阶无穷小.

所有正确结论的序号为(　　).

(A)①②　　(B)②④　　(C)③④　　(D)②③

7. 已知当 $x \to 0$ 时，ax^3 与 $\sqrt{1+x^2} - x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + b$ 为等价无穷小，则 $ab =$_____.

8. 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x + xf\left(x\right)}{x^3} = 1$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x + f\left(x\right)}{x^2} =$ (　　).

(A) 0　　(B) $-\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{4}{3}$　　(D) ∞

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x - x\arctan x}{\mathrm{e}^x + x} =$ (　　).

(A) 1　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) 0　　(D) 不存在

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}}\right)=$______.

11. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\left(x-\dfrac{5}{2}x^2\right)}{x^2}=$______.

12. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$______.

13. 已知 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+ax^2-3x+6}{x+2}=b$，则 $ab=$______.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}=$______.

15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=$______.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$______.

17. $f\left(x\right)=\dfrac{\tan x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为______.

18. 已知 $\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)$ 存在, 且 $f\left(x\right)=x^2+\mathrm{e}^x\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)$, 则 $f\left(x\right)=$______.

19. 设 $f\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处连续, 则应补充 $f\left(0\right)=$______.

20. 设 $f\left(x\right)=\dfrac{1-x\cdot 2^{1-x}}{\left(2-x\right)\left(1-x\right)}\left(x\neq 1,2\right)$, 若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,2\right]$ 上连续, 则 $f\left(1\right)f\left(2\right)=$______.

21. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x\right|^{x}-1}{x\left(x+1\right)\ln\left|x\right|}$ 的可去间断点的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

22. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left|1-x\right|}{\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(x+2\right)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）.

(A) 0　　　(B) 1　　　(C) 2　　　(D) 3

23. 设 $f\left(x\right)=\lim\limits_{1\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{u}}{1+\mathrm{e}^{ux}}$，则 $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的（　　）.

(A) 可去间断点　　　(B) 跳跃间断点　　　(C) 振荡间断点　　　(D) 无穷间断点

第 2 章 数列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{\pi}\arctan\frac{n}{n+1}\right)^n=$（　　）.

(A) $e^{-\frac{2}{\pi}}$　　(B) $e^{-\frac{\pi}{2}}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{2}{\pi}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^{100}-(n-1)^{100}}=$______.

3. 设 $\{a_n\}$ 非负有界，$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a_n+n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=$______.

4. 设 $x_0>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)(n=0,1,2,\cdots)$, 且 $a>0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求此极限.

5. 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}=$______.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=$______.

7. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\ln x_n+1, x_n>0, n=1,2,\cdots$，则 $\{x_n\}$ (　　).

(A)单调不减　　(B)单调不增　　(C)严格单增　　(D)严格单减

8. 若对于数列 $\{x_n\}$，存在常数 $k\,(0<k<1)$，使得 $|x_{n+1}-a|\leqslant k|x_n-a|, n=1,2,\cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

9. 若对于数列$\{x_n\}, x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\cdots$, $f(x)$可导, a是$f(x)=x$的唯一解, 且对任意的$x\in\mathbf{R}$, 有$|f'(x)|\leqslant k<1$. 证明$\{x_n\}$收敛于a.

10. 设$a_n>0, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 且$\mathrm{e}^{a_n}+a_n=\mathrm{e}^{b_n}, n=1,2,\cdots$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

11. 设 $c=2\ln(1+b), b>a>0$，且 a 是方程 $x-2\ln(1+x)=0$ 的唯一非零解，证明 $c>a$.

12. 设单调递减数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=2\ln(1+x_n), n=1,2,\cdots, x_1>a>0$，且 a 是 $x-2\ln(1+x)=0$ 的唯一非零解，证明 $\{x_n\}$ 收敛.

第 3 章 一元函数微分学的概念

1.设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\ln(1-x\sin x)}=$______.

2. 设 $F(x)=g(x)\varphi(x),\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续但不可导，$g(x)$ 在 $x=a$ 处可导，$F(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则一定有（　　）.

(A) $g(a)=0$　　(B) $g(a)\neq 0$

(C) $g'(a)=0$　　(D) $g(a)$ 可以为任意实数

3. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{f(3-x)}=2$，且 $f(1)=0$，则 $f'(1)$ 的值为（　　）.

(A) 2　　(B) -2　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $-\dfrac{1}{2}$

4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=f'(0)=\sqrt{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)-2}{x}=$______.

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{(n+1)^2}<x\leqslant\dfrac{1}{n^2},n=1,2,\cdots,f(0)=0$，则 $f'_+(0)=$______.

6. 设可导函数 $f(x)>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)}{f(0)}=$______.

7. 设函数 $f(x)$ 可导, $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处不可导, 则(　　).

(A) $f(0)=0, f'(0)=0$　　(B) $f(0)=0, f'(0)\neq 0$

(C) $f(0)\neq 0, f'(0)=0$　　(D) $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$

8. 设函数 $f(x)$ 连续, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{\ln x}=2$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为_____.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $\Delta f(1)$ 是 $f(x)$ 在增量为 Δx 时的函数值增量, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)-\mathrm{d}f(1)}{\Delta x}=$ (　　)

(A) $f'(1)$　　(B) 1　　(C) ∞　　(D) 0

10. 设 $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x^2, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　）.

(A) 不连续　　(B) 连续, 但不可导

(C) 可导, 但导函数不连续　　(D) 可导, 且导函数连续

11. 设 $\varphi(x)$ 具有一阶连续导数，$f(x)=\varphi(x)\left[1+\left|\ln(1+x)\right|\right]$, 则 $\varphi(0)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　）.

(A) 充分必要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

12. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，$x_n=\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f(x_0-x_n)}{\sin\dfrac{1}{n}}=$______.

13. 设 $f(x)$ 为在 $x=0$ 处可导的奇函数, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(tx)-5f(x)}{x}=$_____.

14. 设 $f(x)=\max\left\{2x,x^2\right\},x\in(0,4)$, 且 $f'(a)$ 不存在, $a\in(0,4)$, 则 $a=$_____.

15. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{5+\mathrm{e}^{n(x-1)}}$, 求 $f(x)$ 并讨论 $f(x)$ 的连续性及可导性与 a,b 的关系.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+b, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+ax), & x>0\end{cases}$ 处处可导, 试确定常数 a 和 b 的值, 并求出 $f'(x)$.

第 4 章 一元函数微分学的计算

1.设 $f(x)=x^2, h(x)=f[1+g(x)]$，其中 $g(x)$ 可导，且 $g'(1)=h'(1)=2$，则 $g(1)=($　　$)$.

(A) -2　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) 0　　(D) 2

2. 设 $f(x)=(\ln x-1)(\ln^2 x-2)\cdots(\ln^n x-n), n\geqslant 2$，则 $f'(\mathrm{e})=$_____.

3. 设函数 $f(x)$ 可导，$f(0)=-1, f'(0)=1$，若 $y(x)=|f(x-1)|$，则 $y'(1)=$_____.

4. 设函数 $f(x)$ 可导，$f(1)=f'(1)=\dfrac{1}{4}$，若 $y(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{f(2x-1)}}$，则 $y'(1)=$（　　）.

(A) $\sqrt{\mathrm{e}}$　　(B) $\dfrac{1}{4}\sqrt{\mathrm{e}}$　　(C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$　　(D) $2\sqrt{\mathrm{e}}$

5. 已知函数 $y=y(x)$ 满足 $\left(x+y^2\right)y'=1, y(-1)=0$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=$______.

6. 设 $y=f(x)$ 由方程 $|x|y^3+y-1=0$ 确定，求 $y=f(x)$ 的极大值.

7. 设 $\begin{cases} x = t - t^2, \\ te^y + y + 1 = 0, \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0} =$ ______.

8. 设函数 $y = f(x)$ 由 $\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = |t|\tan t \end{cases}$ 所确定, 则在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内(　　).

(A) $f(x)$ 连续，$f'(0)$ 不存在

(B) $f'(0)$ 存在，$f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续

(C) $f'(x)$ 连续，$f''(0)$ 不存在

(D) $f''(0)$ 存在，$f''(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续

9. 设可导的奇函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f^2(x)$, 且 $f(-1) = 1$, 则 $f'''(1) =$ ______.

10. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=f^2(x)$，且 $f(0)=-1$，则在 $x=0$ 处的三阶导数 $f'''(0)=$（　）.

(A) -6　　(B) -4　　(C) 4　　(D) 6

11. 已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$，则当 $n\geqslant 3$ 时，$f^{(n)}(0)=$_____.

12. 设 $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos t\cdot\left(\dfrac{n+t}{n-t}\right)^n$，则 $f'(0)=$_____.

13. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t\sin x}$，则 $f'(x)=$_____.

14. 设 $f(x)=\max\left\{x,x^2\right\},0<x<2$，则 $f'(x)=$_____.

15. 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t,\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在对应 $t=0$ 处的点的切线方程为_____.

16. 设 $f\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，则 $f^{(n)}\left(x\right)=$（　　）.

(A) $\left(n-1\right)!\left[\frac{1}{\left(1+x\right)^{n}}-\frac{1}{\left(1-x\right)^{n}}\right]$

(B) $\left(n-1\right)!\left[\frac{1}{\left(1+x\right)^{n}}+\frac{1}{\left(1-x\right)^{n}}\right]$

(C) $\left(n-1\right)!\left[\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(1+x\right)^{n}}-\frac{1}{\left(1-x\right)^{n}}\right]$

(D) $\left(n-1\right)!\left[\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(1+x\right)^{n}}+\frac{1}{\left(1-x\right)^{n}}\right]$

第 5 章 一元函数微分学的应用(一)——几何应用

1.函数 $y=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 的最小值为_____.

2. 若函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}x$ 的极值点小于零, 则常数 a 的取值范围为_____.

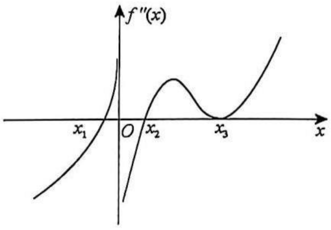
3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos|x|-1, & x\leqslant 0,\\ x\ln x, & x>0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 可导点, 极值点　　(B) 不可导点, 极值点

(C) 可导点, 非极值点　　(D) 不可导点, 非极值点

4. 已知 $x^2+ax^{-3}\geqslant\frac{10}{3}\left(x>0\right)$ 恒成立, 则 a 的取值范围为_____.

5. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 连续, 其二阶导函数的图像如图所示, 则曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点个数为(　　).



(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

6. 设函数 $f\left(x\right)>0$ 且二阶可导, 曲线 $y=\sqrt{f\left(x\right)}$ 有拐点 $\left(1,\sqrt{2}\right)$, $f'\left(1\right)=2$, 则 $f''\left(1\right)=$_____.

7. 曲线 $y(x)=\ln\left|e^{2x}-1\right|$ 的斜渐近线为（　）.

（A）$y=2x+\frac{1}{e}$ （B）$y=2x$ （C）$y=-2x+\frac{1}{e}$ （D）$y=-2x$

8. 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线为（　）.

（A）$y=x+e$ （B）$y=x-e$ （C）$y=x+\frac{1}{e}$ （D）$y=x-\frac{1}{e}$

9. 曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率为_____.

10. 已知曲线 $y=f(x)$ 在其点(0, 1)处的曲率圆方程为 $(x-1)^2+y^2=2$，且当 $x\to 0$ 时，二阶可导函数 $f(x)$ 与 $a+bx+cx^2$ 的差为 $o(x^2)$，则（　　）.

(A) $a=0,b=1,c=\frac{3}{2}$　　(B) $a=1,b=0,c=1$

(C) $a=1,b=1,c=-1$　　(D) $a=1,b=0,c=-1$

11. 设在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$f''(x)<0, f(0)\geq 0$，则函数 $\frac{f(x)}{x}$（　　）.

(A) 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

(B) 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单调减少

(C) 在 $(-\infty,0)$ 内单调增加，在 $(0,+\infty)$ 内单调减少

(D) 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单调增加

12. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=k\,(k<0)$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）.

(A) 导数不存在　　(B) 导数存在，且 $f'(0)\neq 0$

(C) 取得极小值　　(D) 取得极大值

13. 设 $M=\max\left\{1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n}\right\}(n>4)$, 则 $M=$（　　）.

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt[3]{3}$　　(C) $\sqrt[4]{4}$　　(D) $\sqrt[n]{n}$

14. 设函数 $f(x)=n^2\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-(1+n)x$, 若 $f(x)$ 在 $x=\xi_n$ 处取得极值, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=$_____.

15. 函数 $f(x)$ 对于一切实数 x 满足微分方程 $xf''(x)+5x^2\left[f'(x)\right]^2=2\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

(1) 若 $x=\alpha(\alpha\neq 0)$ 时，$f(x)$ 取极值, 判别其是极大值还是极小值；

(2) 若 $x=0$ 时，$f(x)$ 取极值, 判别其为极大值还是极小值.

16. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，$f(x)$ 具有一阶连续导数, 且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=-3$,

$f'(x)=\ln\left(1+x^2\right)-x\int_0^1 g(xt)\mathrm{d}t$, 则(　　).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点　　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D) 以上结论均不正确

17. 已知函数 $y=f(x)$, 对一切 x 满足 $\sqrt[3]{x}f''(x)+xf'(x)=\mathrm{e}^{-x}-1$, 若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$, 则(　　).

(A) $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　(B) $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　　(D) 以上结论均不正确

18. 已知函数 $f(x)=ax^3+x^2+2$ 在 $x=0$ 和 $x=-1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的增减区间、极大值、极小值和拐点.

19. 设 $f(x)=nx(1-x)^n\left(n\in N^*\right)$，且记 $M(n)=\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$，则必有（　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)=\mathrm{e}$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)=0$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)=\infty$

20. 曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的渐近线的条数为（　）.

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

21. 曲线 $y=\dfrac{2+\mathrm{e}^{-x^4}}{1-\mathrm{e}^{-x^4}}$（　）.

(A) 仅有斜渐近线

(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线

(D) 既有水平渐近线，又有铅直渐近线

22. 曲线 $y=(4+5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线是_____.

23. 曲线 $y=x^2+x$ 在点 $(-1,0)$ 的曲率是_____.

第 6 章 一元函数微分学的应用(二)——中值定理、微分等式与微分不等式

1.设函数 $f(x)=x(2x-3)(4x-5)$，则方程 $f'(x)=0$ 的实根个数为（ ）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 若方程 $x-\mathrm{e}\ln x-k=0$ 在 $(0,1]$ 上有解，则 k 的最小值为（ ）.

(A) -1　　(B) $\frac{1}{\mathrm{e}}$　　(C) 1　　(D) e

3. 设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{x}-bx(a>0)$ 有两个零点，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是（ ）.

(A) $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　(B) $(0,\mathrm{e})$　　(C) $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　(D) $(\mathrm{e},+\infty)$

4. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+a(x>0)$ 有两个零点, 则 a 的取值范围是(　　).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(-\infty,0)$　　(D) $(0,+\infty)$

5. 设存在 $0<\theta<1$, 使得 $\arcsin x=\dfrac{x}{\sqrt{1-(\theta x)^2}}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$_____.

6. 设 $x>0$, 证明 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

7. 设 $x>0$, 证明 $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$.

8. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $\left|f'(x)\right|\leqslant 1, f(0)=1$, 证明 $\left|f(x)\right|\leqslant 1+x, 0<x<1$.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一阶导数连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，则（　）.

（A）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(2x)+f(x)\right]=0$　　（B）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(2x)-f(x)\right]=0$

（C）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=0$　　（D）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)+f(x)\right]=0$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处一阶导数连续，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{\ln x}=$_____.

11. 设 $f'(1)=2$，计算 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{\ln x}$，并指出与第 10 题的区别.

12. (1)将 $\sin x$ 在 $x=0$ 处展开成一阶带拉格朗日余项的泰勒公式;

(2)证明 $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| \leq \frac{1}{2}|x|, x \neq 0$.

13. 求曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ 与曲线 $y=x^{3}-3x$ 的交点个数.

14. 设 $f(x)$ 是连续可导函数，当 $0<a<x<b$ 时，恒有 $xf'(x)<f(x)$，则（　）.

(A) $af(x)>xf(a)$　　(B) $bf(x)>xf(b)$

(C) $xf(x)>bf(b)$　　(D) $xf(x)<af(a)$

15. 方程 $x^4+4x+b=0$ 有两个不等的实根，则 b 的取值满足（　）.

(A) $b<3$　　(B) $b>3$　　(C) $b<-3$　　(D) $b>-3$

16. 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的间断点个数为（　）.

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

17. 设 $f(x),g(x)$ 为恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x)<f(x)g'(x)$, 则当 $a<x<b$ 时, 下列不等式恒成立的是(　　).

(A) $f(a)g(x)>f(x)g(b)$　　(B) $f(x)g(a)>f(b)g(x)$

(C) $f(a)g(b)>f(b)g(x)$　　(D) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$

18. 设 $0\leqslant x\leqslant 1, p>1$, 证明 $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$.

19. 对于 k 的不同取值情况, 确定方程 $x^3-3x+k=0$ 实根的个数, 并证明你的结论.

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导 $(a>0)$, 证明: 在 (a,b) 内 $2x[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(x)$ 至少有一个实根.

21. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0(a_i$ 为实数, $i=0,1,2,\cdots,n)$, 则在区间(0, 1)内, 方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$（　）.

(A)没有实根　　(B)至少有一个实根

(C)仅有一个实根　　(D)是否有实根不能判定

22. 设 $f(x),g(x)$ 为恒大于零的可导函数, 且 $[\ln f(x)]'<[\ln g(x)]'$, 则当 $a<x<b$ 时, 必有（　）.

(A) $\frac{f(x)}{f(b)}>\frac{g(x)}{g(b)}$　　(B) $\frac{f(x)}{f(a)}>\frac{g(x)}{g(a)}$

(C) $\frac{f(x)}{f(b)}>\frac{g(b)}{g(x)}$　　(D) $\frac{f(x)}{f(a)}>\frac{g(a)}{g(x)}$

第 7 章 一元函数微分学的应用(三)——物理应用

1. 一动点 P 在曲线 $9y=4x^2$ 上运动，设坐标轴的单位长度是 $1\ \mathrm{cm}$，若点 P 横坐标的变化率是 $30\ \mathrm{cm/s}$，则当点 P 经过点 $(3,4)$ 时，点 P 到原点距离的变化率为_____.

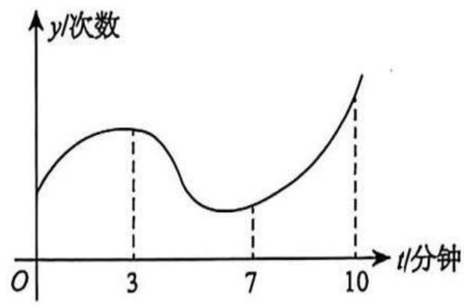
2. 设二阶可导函数 $y=f(t)$ 表示某人在 10 分钟内心跳次数的变化曲线，如图所示. 则关于此人心跳次数的增长速度，说法正确的是（　）.

(A) $0\sim3$ 分钟增速变小；$7\sim10$ 分钟增速变大

(B) $0\sim3$ 分钟增速变大；$7\sim10$ 分钟增速变小

(C) $0\sim3$ 分钟增速变大；$7\sim10$ 分钟增速变大

(D) $0\sim3$ 分钟增速变小；$7\sim10$ 分钟增速变小



3. 已知一容器中水增加的速率为$1\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$，且水的体积$V$与水面高度$y$满足$V=\dfrac{\pi}{2}y^2$，当水面上升到高为$1\,\mathrm{m}$时，求水面高度上升的速率.

4. 已知某圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为$2\,\mathrm{cm/s},-3\,\mathrm{cm/s}$，且圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为$-100\pi\mathrm{cm}^3/\mathrm{s},40\pi\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$，则圆柱体的底面半径与高分别为（　）.

(A) $5\,\mathrm{cm},5\,\mathrm{cm}$　　(B) $10\,\mathrm{cm},5\,\mathrm{cm}$

(C) $5\,\mathrm{cm},10\,\mathrm{cm}$　　(D) $10\,\mathrm{cm},10\,\mathrm{cm}$

5. 一物体在距离同一水平面上的地面观测器$10\,\mathrm{m}$处离地匀速铅直上升，其速度为$a\,\mathrm{m/s}$. 若该物体上升到离地$20\,\mathrm{m}$时，观测器视线倾角的变化率为$\dfrac{1}{10}$，则$a=$（　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 5

第 8 章 一元函数积分学的概念与性质

1.设函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续, 则 $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k-1}{3n}\right)\frac{1}{3n}$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k-1}{3n}\right)\frac{1}{n}$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n} f\left(\frac{k-1}{3n}\right)\frac{1}{n}$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n} f\left(\frac{k}{3n}\right)\frac{3}{n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\ln\left(3n-2i\right)-\ln\left(n+2i\right)\right]=$ ______.

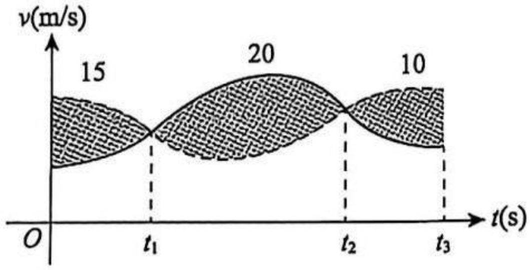
3. 甲、乙两人赛跑, 图中实线和虚线分别为甲和乙的速度曲线(单位:m/s), 三块阴影部分面积依次为 15, 20, 10, 且当 $t=0$ 时, 甲在乙前面 10 m 处, 则在 $\left[0,t_3\right]$ 上, 甲、乙相遇的次数为(　　).

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4



4. 设 $M=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x, N=\int_0^1\frac{(1+x)\ln^2(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x, K=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x$，则（　）.

(A) $M>N>K$　　(B) $N>K>M$　　(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

5. 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 内的正值连续函数，且 $f'(x)<0, g(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $g\left(\frac{1}{2}\right)$ 和 $g\left(\frac{3}{2}\right)$ 的可能取值是（　）.

(A) $-2, 1$　　(B) $-2, 3$　　(C) $2,-1$　　(D) $2,-3$

6. 设 $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0, \\ x^2+x, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,(a<b)$ 取得最小值，则 $(a,b)=$（　）.

(A) $(-1, 1)$　　(B) $(-1, 2)$　　(C) $(0, 1)$　　(D) $(1, 2)$

7. 设函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 若在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内 $g'(x)\geqslant 0$, 则对任意的 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 有(　　).

(A) $\int_x^{\frac{\pi}{2}}g(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_x^{\frac{\pi}{2}}g(\sin t)\mathrm{d}t$

(B) $\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_x^1 g(\sin t)\mathrm{d}t$

(C) $\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_x^1 g(\sin t)\mathrm{d}t$

(D) $\int_x^{\frac{\pi}{2}}g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{\frac{\pi}{2}}g(\sin t)\mathrm{d}t$

8. 若 $\sqrt{1-x^2}$ 是 $xf(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$(　　).

(A) -1　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $-\frac{\pi}{4}$　(D) 1

9. 已知函数 f 是 $\int_1^{e^x}\frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t$ 的反函数, 则 $f'(0)=$_____.

10. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上可导的奇函数, 任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$, 均有 $f(x+1)-f(x)=f(1), f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, 则以下是偶函数的是（　）.

(A) $\int_0^x[\sin f(t)+f(t+1)]\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x[\sin f'(t)+f'(t+1)]\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x[\cos f(t)+f(t+2)]\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x[\cos f'(t)+f'(t+2)]\mathrm{d}t$

11. 设 $f(x)$ 是实数集上连续的偶函数, 在 $(-\infty,0)$ 上有唯一零点 $x_0=-1$, 且 $f'(x_0)=1$, 则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的严格单调增区间是（　）.

(A) $(-\infty,-1)$　　(B) $(-1,+\infty)$　　(C) $(-1,1)$　　(D) $(1,+\infty)$

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调连续，$f(0)=1, f(2)=2$, 且对任意 $x_1,x_2\in[0,2]$ 总有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，$P=\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$, 则（　）.

(A) $3<P<4$　　(B) $2<P<3$　　(C) $1<P<2$　　(D) $0<P<1$

13. 下列反常积分中, 发散的是(　　).

(A) $\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$　(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$　(C) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$　(D) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

14. 若反常积分 $\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)x^{1-p}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则(　　)

(A) $p<1$　(B) $p>1$　(C) $0<p<1$　(D) $0\leqslant p<1$

15. 下列反常积分收敛的是(　　).

(A) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$　(B) $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$　(C) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$　(D) $\int_{0}^{1} \frac{x}{\ln^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]=$______.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+9i^2}=$______.

18. 定积分 $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值满足（　　）.

(A) $0\leqslant I\leqslant\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}\leqslant I\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant I\leqslant 1$　　(D) $1\leqslant I\leqslant 2\sqrt{2}$

19. 设 $f(x)\not\equiv 0$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上可导的奇函数, 则下列函数为奇函数的是（　）.

(A) $x^3\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x f(-t)\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x [f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t$

20. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+x^2}\cos^5 x\,\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2\sin x+\sin^2 x\cos x\right)\mathrm{d}x, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^3 x-\cos^4 x\right)\mathrm{d}x$, 则有（　）.

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$　　(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

21. 已知 $x^2\mathrm{e}^x$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一个原函数, 则 $\int f(\ln x)\mathrm{d}x=$_____.

22. 设 $F(x)=\int_0^x (t-[t])\mathrm{d}t$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $F'_-(1)-F'_+(1)=$______.

23. 下列命题中不成立的是（　　）.

(A) 若 $f(x)$ 连续，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 必为 $f(x)$ 的原函数

(B) 若 $f(x)$ 可积，$x\in[a,b]$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在原函数

(C) 若 $f(x)$ 连续，且为奇函数，$x\in[-a,a]$，则 $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$

(D) 若 $f(x)$ 连续，T 为其周期，则 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$

24. 设 $f(x-5)=\dfrac{4}{x^2-10x}$，则 $\int_0^4 f(2x+1)\mathrm{d}x$（　　）.

(A) 为反常积分，且发散

(B) 为反常积分，且收敛

(C) 不是反常积分，且其值为 10

(D) 不是反常积分，且其值为 $\dfrac{\pi}{4}$

25. 下列表达式中正确的是（　　）.

(A) $\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\pi}^{2\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$

(B) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x < \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

(C) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_c^d f(x)\mathrm{d}x,[a,b]\subset[c,d], f(x)$ 连续，$x\in[c,d]$

(D) $\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x = 2\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x, f(x)$ 连续，$x\in[-1,1]$

第 9 章 一元函数积分学的计算

1.计算下列不定积分.

(1) $\int \cos^3 x \, dx$；

(2) $\int \sin^3 x \, dx$；

(3) $\int \sec x \, dx$；

(4) $\int \sec^3 x \, dx$；

(5) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx \left(a \neq 0\right)$；

(6) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx \left(a \neq 0\right)$；

(7) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\left(a\neq 0\right)$；

(8) $\int \frac{1}{a^2+\left(x+b\right)^2}\mathrm{d}x\left(a\neq 0\right)$；

(9) $\int \frac{1}{a^2-\left(x+b\right)^2}\mathrm{d}x\left(a>0\right)$；

(10) $\int \frac{1}{\left(x+b\right)^2-a^2}\mathrm{d}x\left(a>0\right)$；

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x\left(a>0\right)$；

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\left(a>0\right)$；

(13) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$；

(14) $\int \csc^3 x\,\mathrm{d}x$；

(15) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$；

(16) $\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x$；

(17) $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$；

(18) $\int \cot^3 x\,\mathrm{d}x$；

（19）$\int \frac{\cos x}{1+\sin x} \mathrm{d}x$；

（20）$\int \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} \mathrm{d}x$；

（21）$\int \frac{1}{\sin 2x} \mathrm{d}x$；

（22）$\int \frac{1}{\cos 2x} \mathrm{d}x$；

（23）$\int \frac{1}{a+b\cos x} \mathrm{d}x\left(a>0,b>0\right)$；

（24）$\int \frac{1}{a+b\sin x} \mathrm{d}x\left(a>0,b>0\right)$.

2. 计算不定积分 $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

3. 计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \left(x > 0\right)$.

4. 计算不定积分 $\int e^{2x} \arctan\sqrt{e^x - 1}\, dx$.

5. 定积分 $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx =$ (　　).

(A) 2　　(B) $2-\dfrac{4}{e}$　　(C) $1-\dfrac{2}{e}$　　(D) $1-\dfrac{1}{e}$

6. $\int_0^1 \dfrac{4x-3}{x^2-x+1}\,dx =$ ______.

7. $\int_0^1 \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx =$ ______.

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta \mathrm{d}\theta =$_____.

9. 设连续函数 $f(x)$ 满足：$f(x+1)-f(x)=x\ln x, \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=$_____.

10. 设 $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} xy\,\mathrm{d}y=$_____.

11. 若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}f(\ln x)\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $-\frac{1}{4}$　　(B) -1　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) 1

12. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, $g(x)=\int_0^{2x}f\left(x+\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$, 则当 $x\to 0^+$ 时, $g(x)$ 是 $\sqrt{x}$ 的（　　）.

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价无穷小

13. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0,\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导但 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续　　(D) 可导且 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

14. 若连续周期函数 $y=f(x)$ (不恒为常数), 对任何 x 恒有 $\int_{-1}^{x+6} f(t)\mathrm{d}t+\int_{x-3}^{4} f(t)\mathrm{d}t=14$ 成立, 则 $f(x)$ 的周期是( ).

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 10

15. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是连续的偶函数, $a>0, g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|\cdot f(t)\mathrm{d}t$, 则在 $[-a,a]$ 上( ).

(A) $g(x)$ 是单调递增函数　　(B) $g(x)$ 是单调递减函数

(C) $g(x)$ 是偶函数　　(D) $g(x)$ 是奇函数

16. 若 $F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}|x-t|\sin t\,\mathrm{d}t$, 则 $F'(0)=$ ( ).

(A) −4　　(B) −2　　(C) 2　　(D) 4

17. 若函数 $y(x)=\int_{2}^{x^2}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\left[y(x)\right]}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=-1}=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) $4\mathrm{e}^{-1}$　　(D) $4\mathrm{e}$

18. 已知函数 $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt{1+t^3}\,\mathrm{d}t$，则 $\int_{0}^{1}xf(x)\mathrm{d}x=$_____.

19. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=x\mathrm{e}^{x}$，则 $\int_{1}^{\mathrm{e}}\dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$_____.

20. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\left(n=0,1,2,\cdots\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n-2}}\right)^n=$______.

21. $\int_{\sqrt{5}}^{5}\dfrac{1}{\sqrt{\left|x^2-9\right|}}\mathrm{d}x=$______.

22. $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x\right|\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=$______.

23. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a$，则 a 等于（　　）.

(A) 2　　(B) 1　　(C) 0　　(D) -1

24. $\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)'\mathrm{d}x=$_____.

25. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{|x|(\arcsin x+\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$_____.

26. 积分 $I=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x=$_____.

27. 若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$_____.

28. $\int_{-1}^{1}\left[x^3\cos x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]\mathrm{d}x=$_____.

29. 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $-\frac{\pi}{4}$　(B) $-\arctan\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{4}$　(D) $\arctan\frac{\pi}{4}$

30. 设 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}+\frac{1}{x(1+x)}\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $\frac{1}{1-\ln 2}$　(B) $\frac{1}{\ln 2}$　(C) $\frac{\mathrm{e}}{1-\ln 2}$　(D) $\frac{1}{(1-\ln 2)\mathrm{e}}$

31. 设 $\alpha(x)=\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,\beta(x)=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t, f(x)>0$，且 $f'(x)=o(x)(x\to 0^+)$，则当 $x\to 0^+$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的（　　）.

(A) 高阶无穷小　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　(D) 同阶但非等价无穷小

32. 设函数 $f(x)$ 及其反函数 $f^{-1}(x)$ 都可导, 且有 $\int_{2}^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}-9$, 则 $f(x)=$（　　）.

(A) $\sqrt{x}-1$　　(B) $\sqrt{x}+1$　　(C) $2\sqrt{x}-1$　　(D) $2\sqrt{x}+1$

33. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续的导数, 则 $\lim\limits_{a\to0^{+}}\frac{1}{4a^{2}}\int_{-a}^{a}\left[f(t+a)-f(t-a)\right]\mathrm{d}t=$（　　）.

(A) 0　　(B) $f'(0)$　　(C) $\frac{1}{4}f'(0)$　　(D) 不存在

34. 设 $f(x)=\int_{1}^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-t^{2}}\,\mathrm{d}t$, 求 $I=\int_{0}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

35. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{2}+2x-1}}=$______.

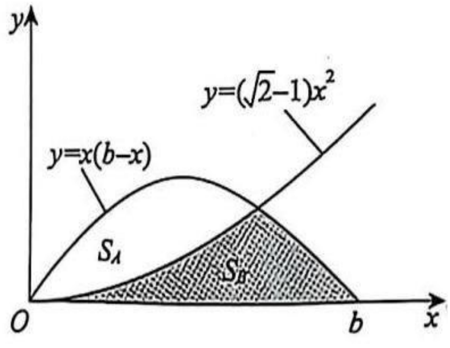
36. $\int_{0}^{+\infty}\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)^{2}\mathrm{d}x=$______.

第 10 章 一元函数积分学的应用(一)——几何应用

1.曲线 $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上与 x 轴所围成图形的面积为_____.

2. 曲线 $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $\left[1,\mathrm{e}^2\right]$ 上与 x 轴所围图形的面积是_____.

3. 如图所示, 抛物线 $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x^2$ 把 $y=x\left(b-x\right)\left(b>0\right)$ 与 x 轴所围成的闭区域分为面积为 S_A 与 S_B 的两部分, 则(　　).



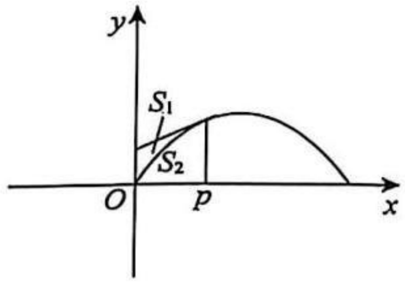
(A) $S_A<S_B$

(B) $S_A=S_B$

(C) $S_A>S_B$

(D) S_A 与 S_B 大小关系与 b 的数值有关

4. 过点 $(p,\sin p)$ 作曲线 $y=\sin x$ 的切线(见图)，设该曲线与切线及 y 轴所围成图形的面积为 S_1，曲线与直线 $x=p$ 及 x 轴所围成图形的面积为 S_2，则(　　).



(A) $\lim\limits_{p\to0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=\dfrac{1}{3}$　　(B) $\lim\limits_{p\to0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=\dfrac{1}{2}$

(C) $\lim\limits_{p\to0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=\dfrac{2}{3}$　　(D) $\lim\limits_{p\to0^+}\dfrac{S_2}{S_1+S_2}=1$

5. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，若曲线 $y_1=f(x)$ 过点 $(0,0)$，且与曲线 $y_2=a^x\,(a>1)$ 在点 $(1,a)$ 处相切，$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=2\ln2-2$，则 $a=$_____.

6. 设平面区域 D 由曲线段 $y=\sin\pi x\,(0\leqslant x\leqslant1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积为_____.

7. 已知函数 $f(x)=x\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t}\,dt$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的平均值为_____.

8. 已知曲线 $L: y=e^{-x}(x\geqslant 0)$，设 P 是 L 上的动点，V 是 L 上从点 $A(0,1)$ 到点 P 的一段弧绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积，当 P 运动到点 $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ 时，沿 x 轴正向的速度为 1，求此时 V 关于时间 t 的变化率.

9. 曲线 $y=\ln\sin x\left(\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$ 的弧长为_____.

10. 曲线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 从 $\theta=0$ 到 $\theta=1$ 的弧长为_____.

11. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^4-6xy+3=0(1\leqslant y\leqslant 2)$ 所确定, 则曲线 $y=y(x)$ 从点 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 到点 $\left(\frac{19}{12},2\right)$ 的长度为_____.

12. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与其过原点的切线及 y 轴所围图形的面积为（　）.

(A) $\int_0^1(\ln y-y\ln y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\mathrm{d}x$

(C) $\int_1^{\mathrm{e}}(\ln y-y\ln y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_1^{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

13. 曲线 $y=x^2\mathrm{e}^{-x}\,(0\leqslant x<+\infty)$ 绕 x 轴旋转一周所得延展到无穷远的旋转体的体积为_____.

14. $f(x)=x\ln x\,(0<x\leqslant 2)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为_____.

15. 曲线 $y=\frac{1}{2}x^2\left(x\in[0,1]\right)$ 的长度为_____.

16. 设平面 D 是由 $y=\ln x, x=1, y=1$ 围成的第一象限的有界区域, 记 D 绕 x 轴与绕 $y=1$ 旋转一周所得旋转体的体积分别为 V_1,V_2, 则（　　）.

(A) $V_1>\frac{\pi}{2}>V_2$　　(B) $V_2>\frac{\pi}{2}>V_1$　　(C) $\frac{\pi}{2}>V_1>V_2$　　(D) $\frac{\pi}{2}>V_2>V_1$

17. 曲线 $y=x^2$ 从点 (1, 1) 到点 (2, 4) 的一段弧绕 y 轴旋转一周所得旋转体的侧面积为_____.

18. 函数 $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $[0,1]$ 的平均值为_____.

19. 设 P 为曲线 $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=2\sin^2 t, \end{cases} t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的一点, 该曲线与直线 OP 及 x 轴所围图形的面积为 S , 求函数 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 取得最大值时点 P 的坐标.

20. 求常数 $a\left(a>0\right)$, 使曲线 $y=a\left(1-x^2\right)$ 与其在 $(-1,0)$ 及 $(1,0)$ 两点处的法线所围成图形的面积最小.

第 11 章 一元函数积分学的应用(二)——积分等式与积分不等式

1.设 $a>0$，则在 $[0,a]$ 上方程 $\int_0^x \sqrt{4a^2-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_a^x \frac{1}{\sqrt{4a^2-t^2}}\,\mathrm{d}t=0$ 根的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2. 当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 可导，有反函数 $g(x)$，且恒等式 $\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=x^2-1$ 成立，则函数 $f(x)=$ (　　).

(A) $2x+1$　　(B) $2x-1$　　(C) x^2+1　　(D) x^2

3. 设 $S(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)=\left|\arcsin(\sin x)\right|$.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的表达式；

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. 设 $f(x)$ 连续，证明：$\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t$.

5. 设 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 连续，$x\in\left[a,b\right]$，证明至少存在一点 $\xi\in\left(a,b\right)$，使 $f\left(\xi\right)\int_{\xi}^{b}g\left(x\right)\mathrm{d}x=g\left(\xi\right)\int_{a}^{\xi}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

6.证明：$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

7. 已知函数 $f(x), g(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0, g'(x) < 0$, 则(　　).

(A) $\int_{-1}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{-1}^{0} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} |f(x)g(x)|\mathrm{d}x$

(C) $\int_{-1}^{0} f[g(x)]\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} f[g(x)]\mathrm{d}x$　　(D) $\int_{-1}^{0} f[f(x)]\mathrm{d}x > \int_{0}^{1} g[g(x)]\mathrm{d}x$

8. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则使得 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x \int_{0}^{1} g(x)\mathrm{d}x \geq \int_{0}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 成立的条件是: $[0,1]$ 上(　　).

(A) $f(x), g(x)$ 均为增函数　　(B) $f(x), g(x)$ 均为减函数

(C) $f(x)$ 为减函数, $g(x)$ 为增函数　　(D) $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数

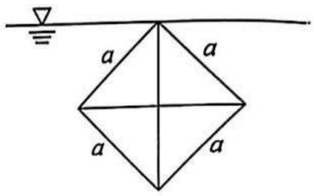
9. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 当 $x \in (a,b)$ 时, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{a}^{b} |f'(x)|\mathrm{d}x$

10.设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0$，证明：$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{2}$ 其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|f'(x)\right|$.

11. 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin u^2\,\mathrm{d}u$，证明：当 $x>0$ 时，有 $\left|f(x)\right| \leqslant \frac{1}{x}$.

第 12 章 一元函数积分学的应用(三)——物理应用

1.设沿 y 轴上的区间 $[0,1]$ 放置一长度为 1 且线密度为 ρ 的均匀细杆, 在 x 轴上 $x=1$ 处有一单位质点, 则该细杆对此质点的引力（G 为引力常量）沿 x 轴正向的分力为_____.



2. 边长为 a 的正方形平板置于水面下, 且一个顶点与水面相齐, 其中一条对角线与水面垂直, 如图所示. 记水的密度为 ρ , 重力加速度为 g , 则其一侧所受的静水压力为_____.

3. 将地面上质量为 1 的物体铅直向上举高, 记地球半径为 R , 质量为 M , 引力常数为 G , 则物体摆脱地球引力至少需做功_____.

4. 有一内表面为旋转抛物面的水缸，其深为 a（单位：米），缸口直径为 $2a$（单位：米），缸内盛满了水，设水的密度为 ρ（单位：千克/立方米）. 若以每秒 Q 立方米的速率将缸中的水全部抽出，问：

(1) 共需多少时间？

(2) 需做多少功？

5. 在一个高为 $1\,\mathrm{m}$ 的圆柱形容器内储存某种液体，并将容器横放. 底面圆的方程为 $x^2+y^2=1$（单位：m）. 如果容器内存满了液体后，以 $0.2\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的速率将液体从容器顶端抽出.

(1) 当液面在 $y=0$ 时，求液面下降的速率；

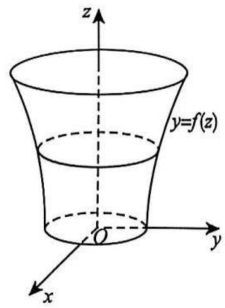
(2) 如果 $1\,\mathrm{m}^3$ 液体所受重力为 $1\,\mathrm{N}$，求抽完全部液体需做多少功？

6. 设有一个内表面为旋转抛物面的容器, 其深为 a 米, 容器口直径为 $2a$ 米, 若以每秒 Q 立方米的速率往容器内注水, 求:

(1) 容器的容积及内表面的面积;

(2) 当容器中水深为 $\frac{1}{2}a$ 米时, 水面上升的速率.

7. 以 yOz 面上的平面曲线段 $y=f(z)(z\geq 0)$ 绕 z 轴旋转一周所成旋转曲面与 xOy 面围成一个无上盖容器(见图), 现以 $3\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的速率把水注入容器内, 水面的面积以 $\pi\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ 的速率增大. 已知容器底面积为 $16\pi\mathrm{cm}^2$, 求曲线 $y=f(z)$ 的方程.



8. 设长轴与短轴分别为 $2a$ 及 $2b$ 的半椭圆形薄板铅直沉入水中, 其短轴与水面平行且位于水面下 c 处, 记水的密度为 ρ, 重力加速度为 g. 求水对薄板的压力.

第 13 章 多元函数微分学

1.设 $z=\arctan\left[xy+\cos(x+y)\right]$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$______.

2. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\cos y-\cos x)+xy$，则 $\dfrac{1}{\sin x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\sin y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

3. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf\left(x^{y^2}\right)$，则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

4. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+2y\ln z-\arctan(xy)=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$______.

5. 设 $F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}=$______.

6. 设函数 $f(x,\sin x)=x+\sin x$, $f_x'(x,y)=1+2\cos x$，则 $\left.f_y'(x,y)\right|_{y=\sin x}=$______.

7. 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2[f(x,y)]}{\partial x\partial y}=1, f(0,y)=\sin y, f(x,0)=\sin x$, 则 $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=$_____.

8. 设 $f\left(x+y,\frac{x}{y}\right)=x^2-xy+y^2$, 则 $f'_x(x,y)=$_____.

9. 设函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 求 $\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial x}$.

10. 设 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}, y>0, P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是某二元函数的全微分，则 $P(x,y)$ 可取为（　）.

(A) $y^2-\dfrac{x^2}{y^3}$　　(B) $x^2-\dfrac{1}{y}$　　(C) $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{x^2}{y^3}$　　(D) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y}$

11. 函数 $z=x^y$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分为 $\mathrm{d}z=$______.

12. 设 f 具有二阶连续偏导数，且 $u=f\left(x^2+y, xy\right)$，则 $u''_{xy}=$______.

13. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x,y)=xy-f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$, 求 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

14.设函数 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 $f(u)$ 可导, 且满足 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$, 求:

(1) $f(x)$ 的表达式;

(2) $f(x)$ 与 x 轴所围图形的面积及该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

15. 设 $f\left(u\right)=\ln u,u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\frac{\partial^2\left[f\left(u\right)\right]}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left[f\left(u\right)\right]}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left[f\left(u\right)\right]}{\partial z^2}$.

16. 设函数 $u=f\left(x,y\right)$ 具有二阶连续偏导数, 作变量代换 $\xi=x,\eta=y-x$，将方程

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为以 ξ,η 为自变量的方程.

17. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 且 $F(u,v)$ 具有连续偏导数, 求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

18. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内有一阶偏导数. 若 $f(x,y)$ 在 D 的边界 ∂D 上的值均为 0, 且 $\dfrac{\partial\left[f(x,y)\right]}{\partial x}+\dfrac{\partial\left[f(x,y)\right]}{\partial y}=f(x,y)$, 则 $f(x,y)$（　　）.

(A) 在 D 内有正的最大值

(B) 在 D 内有负的最小值

(C) 只在 D 的边界 ∂D 上取到最大值

(D) 在 D 的边界 ∂D 上可以取到最小值

19. 设 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}>0$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 则

(　　).

(A) $f(x,y)$ 的最小值点和最大值点都在 D 的内部

(B) $f(x,y)$ 的最小值点和最大值点都在 D 的边界上

(C) $f(x,y)$ 的最小值点在 D 的内部, 最大值点在 D 的边界上

(D) $f(x,y)$ 的最大值点在 D 的内部, 最小值点在 D 的边界上

20. 设 $f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$, 且 (1, 1) 与 (−1, −1) 为函数 $f(x,y)$ 的两个驻点则(　　).

(A) $f(1,1)$ 与 $f(-1,-1)$ 都是极大值　　(B) $f(1,1)$ 与 $f(-1,-1)$ 都是极小值

(C) $f(1,1)$ 是极大值, $f(-1,-1)$ 是极小值　　(D) $f(1,1)$ 是极小值, $f(-1,-1)$ 是极大值

21. 设 $\mathrm{e}^x+y^2+|z|=3$, 其中 x,y,z 为实数, 若 $\mathrm{e}^x y^2|z| \leqslant k$ 恒成立, 则 k 的取值范围是_____.

22. 求函数 $f(x,y)=(y-x)(y-x^2)$ 的极值.

23. 求函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的极值.

24. 求函数 $f(x,y)=x^3-3xy-y^2-y-9$ 的极值.

25. 求函数 $f(x,y)=xy$ 在约束条件 $x+y=2$ 下的极值.

26. 求 $f(x,y)=x^4-\dfrac{1}{12}x^6-2x^2y-\dfrac{1}{2}y^2$ 的极值点.

27. 设 $\frac{\partial f}{\partial x}=\left(x^2+y^2-4x+4\right)\mathrm{e}^x, \frac{\partial f}{\partial y}=2y\mathrm{e}^x, f\left(0,0\right)=0$，求：

(1) $f\left(x,y\right)$ 的表达式；

(2) $f\left(x,y\right)$ 的极值.

第 14 章 二重积分

1.设 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$，曲线 $l_1: x^2+y^2-xy=1, l_2: x^2+y^2-xy=2$，直线 $l_3: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, l_4: y=\sqrt{3}x$. 区域 D_1 由 66 $l_1, l_2, x=0, y=0$ 围成，D_2 由 $l_1, l_2, l_3, y=0$ 围成，D_3 由 $l_1, l_2, l_4, x=0$ 围成，则对于 $I_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{y-x}\,\mathrm{d}\sigma$ $(i=1,2,3)$，有（　　）.

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_1<I_2$

(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

2. $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) πr^2　　(D) $\frac{1}{\pi r^2}$

3. 设 $D=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\right\}, I_i=\iint\limits_{D}f_i(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, f_i(x,y)=(x+y)^i\ (i=1,2,3)$，则 I_1,I_2,I_3 之间的大小顺序为（　　）.

(A) $I_3<I_2<I_1$　　(B) $I_2<I_3<I_1$　　(C) $I_1<I_3<I_2$　　(D) $I_1<I_2<I_3$

4. 设 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma, J=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma, K=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$，则 I,J,K 的大小关系是(　　).

(A) $I<J<K$　(B) $J<K<I$　(C) $K<I<J$　(D) $K<J<I$

5. 设 $D=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 2\right\}$，则 $\iint\limits_{D}(x-y)^2\left[\tan(x-y)+\sin(x-y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

6. $I=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y\int_0^{\ln y}f(x,y)\mathrm{d}x$ (其中 $f(x,y)$ 连续)，交换积分次序得(　　).

(A) $I=\int_0^{\ln y}\mathrm{d}x\int_1^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}y$　(B) $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $I=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln y}f(x,y)\mathrm{d}y$　(D) $I=\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$

7. $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_2^y \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} \mathrm{d}x =$______.

8. $\int_0^t \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{t}} \sqrt{1+x^3} \mathrm{d}x =$______.

9. 已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2} \mathrm{d}x \int_t^{\sqrt{x}} \sin\frac{x}{y} \mathrm{d}y$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$______.

10. 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta\left(0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{3}\right)$, D 为曲线 L 围成的区域, 则 $\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

11. 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqslant y,\left(x^2+y^2\right)^3\leqslant y^4\right\}$, 则 $\iint\limits_{D}\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

12. 设 D 是第一象限内由三条曲线 $y=x^2, y^2=x, x^2+y^2=1$ 所围成的以原点为一个顶点的曲边三角形, 化二重积分为累次积分(先积 y, 后积 x), 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

13. 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴所围成. 计算二重积分 $\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

14.设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D \frac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

15.设 D 是由 $y=|x|$ 及 $y=1$ 围成的有界区域, 计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2-x\cos y-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

16.计算二重积分 $\iint\limits_{D}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y\right\}$.

17. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^3\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\right\}$, $f(x)$ 是定义在 $[-a,a]\,(a\geqslant 1)$ 上的任意连续函数,

求 $\iint\limits_{D}\left[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)\right]\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

18. 计算 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2y-y^2}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}x$.

19. 计算 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \geqslant 2x\right\}$, $f(x,y)=\begin{cases} y, & 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

20.设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D \frac{\mathrm{e}^{-(x+y)}}{\sqrt{xy}}\,\mathrm{d}\sigma$.

21. 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1\right\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D \left(x^2-3y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

22. 计算二重积分 $\iint\limits_{D}\left(x+y^{2}\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y) \mid x^{2}+y^{2} \leqslant x+y\right\}$.

23. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D} x\left[1+yf\left(x^{2}+y^{2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $y=x^{3}$ 及直线 $y=1, x=-1$ 围成，$f(u)$ 为连续函数.

24. 计算 $\iint\limits_{D}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆 $x^2+y^2=1$ 所包围的在第一象限内的区域.

第 15 章 微分方程

1.若 $f'(x)-f(x)=2xe^{x}$ 的积分曲线没有极值点，但有拐点，则 $f(x)=$（　　）.

(A) $e^{x}(x+C),1\leqslant C<2$　　(B) $e^{x}(x^{2}+C),1\leqslant C<2$

(C) $e^{x}(x^{2}+C),0\leqslant C<1$　　(D) $e^{x}(x+C),0\leqslant C<1$

2. 设一曲线过点(e, 1)，且此曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的法线斜率为 $\frac{-x\ln x}{x+y\ln x}$，则此曲线方程为（　　）.

(A) $y=\frac{x}{e}+x\ln(\ln x)$　　(B) $y=\frac{x}{e}+\ln(\ln x)$

(C) $y=\frac{x}{e}+x\ln x$　　(D) $y=ex+x\ln(\ln x)$

3. 微分方程 $y'\sec^{2}y-\sec^{2}y-1=0$ 的通解是_____.

4. 求微分方程 $\left(2x-3xy^2-y^3\right)y'+y^3=0$ 的通解.

5. 求微分方程 $\left(1+y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x-\arctan y\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

6. 设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{x^2}y=2e^{\frac{1}{x}}$ 满足 $y\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 的解.

(1) 求 $y=y(x)$ 的表达式；

(2) 求曲线 $y(x)$ 的斜渐近线.

7. 已知微分方程 $e^y=t+\frac{1}{y'}$ 满足 $y(0)=0$.

(1) 求该微分方程的特解 $y=y(t)$；

(2) 设 $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}, \\ y=y(t), \end{cases}$ 计算 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

8. 设曲线 L 过点 $(1,1)$，L 上任一点 $P(x,y)$ 处的切线交 x 轴于点 T，且 $|PT|=|OT|$，求曲线 L 的方程.

9. 设 $f(x)$ 有连续导数，$x\in[0,+\infty)$，且满足方程 $\int_0^x (x-1)f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=x$，求函数 $f(x)$.

10. 设 $\varphi(x)$ 为连续函数, $|\varphi(x)|\leqslant k$ (k为常数), 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\varphi(x)$ 满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解 $y(x)$, 并证明当 $x\geqslant 0$ 时, 有 $|y(x)|\leqslant k\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

11. 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$ 满足条件 $y(1)=\frac{1}{4}$ 的解, 求曲线 $y=y(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上的平均值.

12. 设曲线 $y=y(x)(x>0)$ 经过点 $(1,0)$, 该曲线上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距, 求 $y(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上与 x 轴所围平面图形的面积.

13. 设曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(0,4)$ 处的切线垂直于直线 $x-2y+5=0$, 且该曲线满足微分方程 $y''+2y'+y=0$, 则此曲线方程为（　）.

(A) $y=\dfrac{9}{2}xe^{-x}$

(B) $y=\left(4+\dfrac{9}{2}x\right)e^{-x}$

(C) $y=(C_1x+C_2)e^{-x}$

(D) $y=2(x+2)e^{-x}$

14. 设曲线 $y=y(x)$ 经过原点, 且在原点处的切线与直线 $2x+y+6=0$ 平行, 而 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-2y'+5y=0$, 则此曲线的方程为(　　).

(A) $y=\mathrm{e}^{x}\sin 2x$　　(B) $y=-\mathrm{e}^{x}\sin 2x$

(C) $y=\mathrm{e}^{x}(\cos 2x-\sin 2x)$　　(D) $y=\mathrm{e}^{x}(\sin 2x-\cos 2x)$

15. 设 $y=y(x)$ 满足 $y''-2y'+y=0$, 且 $y(0)=0, y'(0)=1$, 则 $\int_{-\infty}^{0} y(x)\mathrm{d}x=$______.

16. 已知某常系数齐次线性微分方程的通解为 $y=C_1+\mathrm{e}^{x}(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$, 则该微分方程为______.

17. 微分方程 $4y''-12y'+9y=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}\left(3x^2+2\right)$ 的特解形式为（　　）.

(A) $Ax^2+Bx+C+D\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$

(B) $\left(Ax^2+Bx+C\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$

(C) $x\left(Ax^2+Bx+C\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$

(D) $x^2\left(Ax^2+Bx+C\right)\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$

18. 已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}, y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}, y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则此微分方程为_____.

19. 求微分方程 $y''-2y'+y=2\left(3x^2-2\right)\mathrm{e}^x$ 的通解.

20. 求微分方程 $y'' + 4y' + 5y = 8\cos x$，当 $x \to -\infty$ 时为有界的特解.

21. 欧拉方程 $x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0$ 满足条件 $y(1) = 0, y'(1) = \sqrt{2}$ 的解为 $y =$______.

第 16 章 无穷级数

1.设正项数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$，则“$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{c_n}$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{b_n}$均收敛”是“$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛”的（　）.

(A)充分必要条件　　(B)充分非必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分又非必要条件

2. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}\right)$的敛散性.

3. 若$\sum_{n=1}^{\infty}nu_n$绝对收敛，则（　）.

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$绝对收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n+(-1)^n\right]$条件收敛　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n+(-1)^n\right]$绝对收敛

4. 以下结论正确的是(　　).

(A) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ 收敛

(B) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ 发散, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ 发散

(C) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ 收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$ 收敛

(D) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ 发散, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$ 发散

5. 设 $u_n=\sqrt{\arctan(n+k)-\arctan n}$, k 为正常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ (　　).

(A) 绝对收敛

(B) 条件收敛

(C) 发散

(D) 敛散性与 k 有关

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 收敛, 则下列级数中收敛的是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_{n+1}^2-u_n^2\right)$

7. 设函数 $y=y(x)$ 满足 $(1-x)y'+2y=0, y(0)=1, a_n(x)=\int_0^x y(t)\sin^n t\,\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots$.

(1) 求 $y(x)$ 的表达式；

(2) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1)$ 收敛.

8. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x+1)^n$ 的收敛区间为 $(-3,1)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^{2n}$ 的收敛区间为_____.

9. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$ 的收敛域为_____.

10. 设函数 $f\left(x\right)=\frac{x^2-x-1}{x^2\left(x+1\right)}$ 的幂级数展开式为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n,x\in\left(0,2\right)$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-1\right)^n a_n}{\sqrt{n^2+1}}=$_____.

11. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\cdot\frac{x^{\frac{n}{2}}}{n}$ 在 $\left(0,1\right]$ 内的和函数 $S\left(x\right)=$_____.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n}}=$______.

13. 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n}+2}{2^{n}(2n+1)}x^{2n}$的收敛域及和函数$S(x)$.

14. 设$f(x)=\begin{cases}x^{2}, & 0\le x\le \frac{1}{2},\\ x-1, & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{n}\sin n\pi x$，其中$b_{n}=2\int_{0}^{1}f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\,(n=1,2,\cdots)$，则$S\left(-\frac{5}{2}\right)=$（　）.

(A) $\frac{1}{8}$　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $-\frac{1}{8}$　(D) $-\frac{1}{4}$

15. 设 $f(x)=\sin x$，若 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, x\in[0,\pi]$，则 $\lim_{n\to\infty}n^2\ln(1+a_{2n})=$______.

16. 已知 $f(x)=|x|,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

(1) 将 $f(x)$ 展开成余弦级数；

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

17. 设级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$在收敛区间(-R, R)内的和函数是微分方程$y'-\frac{y}{6}=\frac{xy'}{6}$的一个解, 求该级数的和函数.

第 17 章 多元函数积分学的预备知识

1.已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f(0,0)=0$, $f'_x(0,0)=1$, $f'_y(0,0)=-1$, 且 $n=(-1,1,1)$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x,y,f(x,y)\right)\cdot n}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1}=\_\_\_\_\_.$$

2. 设可微函数 $z=f(x,y)$ 的图形与 xOy 面的交线方程为 $y=\int_0^x e^{t^2}\,dt+x$, 且 $f'_x(0,0)=1$, 则 $f'_y(0,0)=$ _____.

3. 过点 $(1,0,1)$ 与 $(0,1,1)$ 且与曲面 $z=1+x^2+y^2$ 相切的平面为_____.

4. 曲面 $z=2x+y+\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的切平面方程为_____.

5. 曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 $P\left(1,1,2\right)$ 处的切平面方程为_____.

6. 已知曲面 $z=f\left(x,y\right)$ 由方程 $z-x\ln\left(1+z^2\right)+\mathrm{e}^y=0$ 所确定, 则该曲面在点 $(0, 0, -1)$ 处的切平面方程为_____.

7. 求以 $M_0(1,1,1)$ 为顶点, 以曲线 C(C是平面$z=0$上 $y^2=x$ 被 $x=1$截下的有限部分) 为准线的锥面方程.

8. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点(0, 0)处沿 $l=(1,1)$ 的方向导数是_____.

9. 函数 $f(x,y)=2x^2+y^2$ 在点(0, 1)的最大方向导数为_____.

10. 设 $f\left(x,y,z\right)=x^2\mathrm{e}^{yz^2}$，则 $f\left(x,y,z\right)$ 在点 $(-1,0,1)$ 处的方向导数的最小值为_____.

11. 设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(1,2)$ 处的方向导数中，沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大，最大值为 10. 求 a,b.

12. 设 $g\left(x,y\right)$ 是函数 $f\left(x,y\right)=x+2y+xy$ 在点 (x,y) 处的最大方向导数.

(1) 求 $g\left(x,y\right)$ 的表达式；

(2) 求 $g\left(x,y\right)$ 在曲线 $C:x^2+y^2=5$ 上的最大值.

13. 设可微函数 $z=z(x,y)$ 在平面上任一点 (x,y) 处沿 x 轴正向 i 与 y 轴正向 j 的方向导数分别为 $\left[\mathrm{e}^{-x}-f(x)\right]y$ 与 $f(x)$，其中 $f(x)$ 的一阶导数连续，且 $f(0)=1$.

(1) 求 $z(x,y)$ 的表达式；

(2) 判断 $z(x,y)$ 是否有极值，若有，求之，若无，说明理由.

14. 设 $F(x,y,z)=xyi-y\cos zj+z\sin xk$，则 $\mathrm{rot}F\big|_{(1,1,0)}=$______.

第 18 章 多元函数积分学

1.设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\right\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$______.

2. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2\leqslant y\leqslant x,0\leqslant z\leqslant 2-x-y\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{e}^{y+z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$______.

3. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L (x+z)y\,\mathrm{d}s=$（　　）.

(A) 2π　　(B) $-\pi$　　(C) $-\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $-\dfrac{2\pi}{3}$

4. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被抛物柱面 $z^2=2x$ 截下的曲面的面积为_____.

5. 设 a,b 为实数, 函数 $z=1+ax^2+by^2$ 在点 $(1,1)$ 处的方向导数中, 沿方向 $l=2i+4j$ 的方导数最大, 且最大值为 $2\sqrt{5}$.

(1) 求 a,b;

(2) 求曲面 $z=1+ax^2+by^2$ 被曲面 $z=2\left(x^2+3y^2\right)$ 所截部分的面积.

6. 设平面曲线 $L: f(x,y)=1$ 过第一象限的点 A 和第三象限的点 B, $f(x,y)$ 有一阶连续偏导数 Γ 为 L 上从点 A 到点 B 的一段弧, 设 $I_1=\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x, I_2=\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s, I_3=\int_\Gamma f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y$, 则(　　).

(A) $I_1>I_3>I_2$　　(B) $I_2>I_3>I_1$　　(C) $I_3>I_1>I_2$　　(D) $I_3>I_2>I_1$

7. 使得 $\oint_L(2y^3-3y)\mathrm{d}x-x^3\mathrm{d}y$ 的值最大的平面正向边界曲线 L 为(　　).

(A) $3x^2+y^2=1$　　(B) $2x^2+y^2=1$

(C) $x^2+3y^2=1$　　(D) $x^2+2y^2=1$

8. 设 $x>0, I=\int_L x(1+y\sin x)\mathrm{d}x+\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$ 与路径 L 无关, $f(x)$ 有连续导数且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. ! L 是从点 $A\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 到点 $B(\pi,0)$ 的任一曲线时, $I=$_____.

9. 设 $D\subset \mathbf{R}^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D\left(1-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 取得最大值的积分域记为 D_1

(1) 求 $I\left(D_1\right)$ 的值；

(2) 计算 $\oint_{\partial D_1}\dfrac{\left(x\mathrm{e}^{x^2+2y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(2y\mathrm{e}^{x^2+2y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+2y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

10. 设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(x^3+2\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

11.设Σ为空间区域$\left\{(x,y,z)\mid x^2+2y^2\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1\right\}$表面的外侧, 则曲面积分

$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

12. 设Σ为曲面$x^2+y^2+2z^2=1(z\geq 0)$的上侧, 则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{1-x^2-2z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

13. 设Σ为平面$x-y+z=1$介于三坐标平面间的有限部分, 法向量与z轴正向夹角为锐角，$f(x)$连续, 则$\iint\limits_{\Sigma}\left[f(xz)+x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[2f(xz)+y\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[f(xz)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

14. 计算曲线积分 $I=\oint_{\Gamma} yz\,\mathrm{d}x-zx\,\mathrm{d}y+3xy\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2-2y=0, \\ 2y-z+1=0, \end{cases}$ 从 z 轴正向往下看，Γ 为逆时针方向.

15. 设曲面 Σ 是由直线段 $L:\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \left(t\in[0,1]\right) \\ z=t \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而得. Ω 是 Σ 与平面 $z=0, z=1$ 所围成的立体，其体密度为 $\mu(x,y,z)=\dfrac{z}{1+x^2+y^2}$，求：

(1) 曲面 Σ 的直角坐标方程；

(2) Ω 的质量.

线性代数

第 1 章 行列式

1. 设 a,b,c 是方程 $x^3-2x+4=0$ 的三个根, 则行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ 的值等于(　　).

(A) 1　　(B) 0　　(C) −1　　(D) −2

2. 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ 展开式中的常数项为(　　).

(A) 4　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

3. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 2x & -x \\ 2 & x & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -x & -1 \\ -1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$ 的常数项为(　　).

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

4. 不恒为零的函数 $f(x)=\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+x & c_1+x \\ a_2+x & b_2+x & c_2+x \\ a_3+x & b_3+x & c_3+x \end{vmatrix}$(　　).

(A)没有零点　　(B)至多有 1 个零点

(C)恰有 2 个零点　　(D)恰有 3 个零点

5. 若 $f(x)=\begin{vmatrix} 3x+1 & x+11 & x-2 \\ x+1 & x+4 & -1 \\ x & 7 & x-1 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的极点为(　　).

(A)(1, 7)　　(B)(-1, -1)　　(C)(0, 0)　　(D)(-2, -2)

6. 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 9 & -6 & 7 \end{vmatrix}$, M_{3j} 表示 D 中第 3 行第 j 列元素的余子式 $(j=1,2,3,4)$, 则

$M_{31}+3M_{32}-2M_{33}+2M_{34}=$(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)-2　　(D)-3

7. 计算行列式：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & a & b \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$_________.

8. 已知行列式：$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & a \end{vmatrix}$, A_{ij}表示元素$a_{ij}\ (i, j = 1,2,3,4)$的代数余子式.若 $A_{11} - A_{21} + A_{41} = 4$, 则

$a =$__________.

9. 设 $\boldsymbol{x} \neq 0$, 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1+2x & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 2+3x & 3x \\ 0 & 0 & 3 & 3+4x \end{vmatrix}$.

10. 设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维线性无关列向量, 且满足 $A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$,

$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$, $A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, 则 $|A|=$ ________.

第 2 章 矩阵

1. 已知矩阵方程 $A=BC$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ 则 B,C 可以是（　　）.

(A) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{3}&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，则 $A^{13}=$__________.

3. 设 $B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $A=E+B+B^2+B^3$, 则 $A^{-1}=$________.

4. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&0\end{bmatrix}$, 若 $(PA)^2=PA$, P 为可逆矩阵, 则 $P=$________.

5. 设 A,B 都是 3 阶矩阵, 若 $|A|=-3$, $|B|=4$, $C=\begin{bmatrix}2A^* & (AB)^*\\ O & B^{-1}\end{bmatrix}$, 则 $|C|=$________.

6. 设 A 为 2 阶方阵，B 为 3 阶方阵，$|A|=2,|B|=3,C=\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$，则 $C^*=$（　　）.

(A) $\begin{bmatrix} O & -3A^* \\ -2B^* & O \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} O & -2B^* \\ -3A^* & O \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{bmatrix}$

7. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\left|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}\right|=$______.

8. 设 A,B 为 3 阶矩阵，且 $AB=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则必有（　　）.

(A) 互换矩阵 A^{-1} 的第 1, 2 行得矩阵 B.

(B) 互换矩阵 A^{-1} 的第 1, 2 列得矩阵 B^{-1}.

(C) 互换矩阵 A 的第 1, 2 行得矩阵 B^{-1}.

(D) 互换矩阵 A 的第 1, 2 列得矩阵 B^{-1}.

9. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 1 行加到第 2 行得到 B, 再将 B 的第 2 列的-1 倍加到第 1 列得到 C, 记 $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 则 $C=$(　　).

(A) $P^{-1}AP$　　(B) PAP^{-1}　　(C) $P^{T}AP$　　(D) $P^{T}A\left(P^{T}\right)^{-1}$

10. 设 3 阶矩阵 A 与 B 等价, 则下列结论正确的是(　　).

(A)存在可逆矩阵 P, 使得 $PA=B$　　(B)存在可逆矩阵 Q, 使得 $AQ=B$

(C)若 $r(A)=2$, A 可经初等行变换化为矩阵 B　　(D)若 $r(A)=3$, A 可经初等列变换化为矩阵 B

11. 将 3 阶方阵 A 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到矩阵 B, 将 3 阶方阵 C 的第 3 列的-3 倍加到第 1 列得到矩阵 D. 若 $BD=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, 则 $AC=$(　　).

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\-9&0&3\end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\9&0&3\end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix}-3&0&0\\-6&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$

12. 设 A,B 是 3 阶矩阵，A 是非零矩阵，且满足 $AB=O, B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2a & 1-a & 2a\\ a & -a & a^2-2\end{bmatrix}$，则（　　）.

(A) $a=-1$，必有 $r(A)=1$

(B) $a=2$，必有 $r(A)=2$

(C) $a=-1$，必有 $r(A)=2$

(D) $a=2$，必有 $r(A)=1$

13. 设 A,B,C 均是 3 阶方阵，满足 $AB=C$，其中 $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ -2 & -1 & a\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则必有（　　）.

(A) $a=-1$时，$r(A)=1$

(B) $a=-1$时，$r(A)=2$

(C) $a\neq-1$时，$r(A)=1$

(D) $a\neq-1$时，$r(A)=2$

14. 设 2 阶正交矩阵 A 的主对角线元素满足 $a_{11}+2=a_{22}$，则 $A=$_____.

15. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $(A-E)^5=O$, 则 $A^{-1}=$_____.

16. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $A^2=A$, 则 $(A-2E)^3-3A=$_____.

17. 设 A 是 4 阶矩阵, 满足 $A^2=O$, 则 $r(A^*)=$_____.

第 3 章 向量组

1. 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$. 对 A 分别以列和行分块, 记为 $A=\left[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right]=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$, 其中

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}\neq 0,$

则以下结论中:

①$r(A)=2$；　②α_2,α_4线性无关；　③β_1,β_2,β_3线性相关；④$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

所有正确结论的序号是(　　).

(A)①③　　(B)②③　　(C)①④　　(D)②④

2. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 若向量$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 而向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示, 则必有(　　).

(A)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$线性相关　　(B)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$线性无关

(C)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$线性相关　　(D)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\beta_2$线性无关

3. 设 $x_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-4\end{bmatrix},x_2=\begin{bmatrix}1\\k\\-1\\-4\end{bmatrix},x_3=\begin{bmatrix}-1\\-3\\1\\k+6\end{bmatrix}$, 则（　　）.

(A)对任意常数 k,x_1,x_2,x_3 线性无关

(B)当 $k=3$ 时，x_1,x_2,x_3 线性相关

(C)当 $k=-2$ 时，x_1,x_2,x_3 线性相关

(D) $k\neq 3$ 且 $k\neq -2$ 是 x_1,x_2,x_3 线性无关的充要条件

4. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-2\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\k\\-2\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\-3\\2\\k+4\end{bmatrix}$, 则（　　）.

(A)对任意常数 $k,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

(B)当 $k=3$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

(C)当 $k=-4$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关

(D) $k\neq 3$ 且 $k\neq -4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的充要条件

5. 已知向量组α,β,γ线性无关, 则$k\neq 1$是向量组$\alpha+k\beta,\beta+k\gamma,\alpha-\gamma$线性无关的(　　).

(A)充分必要条件　　(B)充分非必要条件

(C)必要非充分条件　　(D)既非充分又非必要条件

6. 若向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\a\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\a\\4\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\a\\5\\-6\end{bmatrix}$线性相关, 则$a=$(　　).

(A)-1　　(B)3　　(C)-3　　(D)5

7. n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$线性无关, $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$, 其中$k_1,k_2,\ldots,k_s$全不为零, 则(　　).

(A)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{s-1},\beta$线性相关　　(B)向量组$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta$线性无关

(C)向量组$\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_s,\beta$线性相关　　(D)向量组$\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_s$线性无关

8. 设向量$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\a\\4\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}a\\3\\6\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}0\\2\\2a\end{bmatrix}$, 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不等价, 则$a=$ (　　).

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 6

9. 已知向量组$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\-3\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-15\end{bmatrix}$与向量组$\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}3\\a\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}1\\1\\b\end{bmatrix}$等价, 求$a,b$的值分别为(　　).

(A) -4, 2　　(B) 4, -2　　(C) -4, -2　　(D) 4, 2

10. 设$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$, 记$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-k_1\beta_1,\beta_3=\alpha_3-k_2\beta_1-k_3\beta_2$, 若$\beta_1,\beta_2,\beta_3$为正交向量组, 则$k_1,k_2,k_3$依次为(　　).

(A) $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$　　(B) $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$

11. 设 $\mathbf{R}^3$ 中的两个基 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 与 $\beta_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$，由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为_____.

第 4 章 线性方程组

1. 方程组 $\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=1, \\ x+y+az=-2, \end{cases}$ 有无穷多解, 则 $a=$______.

2. 设 3 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, k,l 均为非零常数, $\beta_1=k\alpha_1+l\alpha_2$, $\beta_2=k\alpha_2+l\alpha_3$, $\beta_3=k\alpha_3+l\alpha_1$, 记 $B=\left[\beta_1,\beta_2,\beta_3\right]$, 则齐次线性方程组 $Bx=0$ 有非零解的充分必要条件为(　　).

(A) $k-l=0$　　(B) $k+l=0$　　(C) $k-l\neq 0$　　(D) $k+l\neq 0$

3. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, 则(　　).

(A) 当 $m>n$ 时, 必有 $|AB|=0$　　(B) 当 $m>n$ 时, AB 必可逆

(C) 当 $n>m$ 时, $ABx=0$ 有唯一零解　　(D) 当 $n>m$ 时, $r(AB)<m$

4. 设 A 为 $n\times n(n>2)$ 阶方阵，$r\left(A^{*}\right)=1,\alpha_1,\alpha_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同解，k 为任意常数，则方程组 $Ax=b$ 的通解为（　　）.

(A) $(k-1)\alpha_1+k\alpha_2$　　(B) $(k-1)\alpha_1-k\alpha_2$

(C) $(k+1)\alpha_1-k\alpha_2$　　(D) $(k+1)\alpha_1+k\alpha_2$

5. 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1,\end{cases}$ 有 3 个线性无关的解. 记该方程组的系数矩阵为 A.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 求该方程组的通解；

(3) 求齐次线性方程组 $A^TAx=0$ 的通解.

6. 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]$, 经过若干次初等行变换得 $B=[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n]$, 则 A 与 B（　）.

(A)对应的任何部分行向量组具有相同的线性相关性

(B)对应的任何部分列向量组具有相同的线性相关性

(C)对应的任何 k 阶子式同时为零或同时不为零

(D)对应的非齐次线性方程组 $Ax=b$ 和 $Bx=b$ 是同解方程组

7. 设 A 是 3 阶非零矩阵, 满足 $A^2=O$, 若非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解, 则其线性无关解向量的个数为（　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

8. 已知线性方程组 $Ax=k\beta_1+\beta_2$ 有解, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&-2&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$, $\beta_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}$, 则 k 等于（　）.

(A) 1　　(B) −1　　(C) 2　　(D) −2

9. 已知 A 是 3 阶矩阵，A 的每行元素之和为 3，且齐次线性方程组 $Ax=0$ 有通解 $k_1\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$，$\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 其中 k_1,k_2 是任意常数.

(1) 证明：对任意的一个 3 维列向量 β，向量 $A\beta$ 和 α 线性相关；

(2) 若 $\beta=\begin{bmatrix}3\\6\\-3\end{bmatrix}$，求 $A\beta$.

10. 设 3 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_1,β_2,β_3 等价，记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，则下列结论：

① $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解；　　② $A^Tx=0$ 与 $B^Tx=0$ 同解；

③ $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=0$ 与 $Ax=0$ 同解；　　④ $\begin{bmatrix}A^T\\B^T\end{bmatrix}x=0$ 与 $A^Tx=0$ 同解.

所有正确结论的序号是(　　).

(A) ①②　　(B) ①③　　(C) ②④　　(D) ①②③④

11. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $e=[1,1,\dots,1]^T$. 若方程组 $Ay=e$ 有解, 则对于(I) $A^T x=0$,(II) $\begin{cases} A^T x=0 \\ e^T x=0 \end{cases}$, 说法正确的是(　　).

(A)(I)的解都是(II)的解, 但(II)的解未必是(I)的解

(B)(II)的解都是(I)的解, 但(I)的解未必是(II)的解

(C)(I)的解不是(II)的解, 且(II)的解也不是(I)的解

(D)(I)的解都是(II)的解, 且(II)的解也是(I)的解

12. 设齐次线性方程组(I) $\begin{cases} x_1+3x_3+5x_4=0, \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$ 在线性方程组(I)的基础上增添一个方程 $ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0$, 得(II) $\begin{cases} x_1+3x_3+5x_4=0, \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0, \\ ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0. \end{cases}$ 问 a,b,c,d 满足什么条件时, 方程组(I),(II)是同解方程组?并求出此时方程组(II)的通解.

13. 设平面 $\pi_1: x+ay=a, \pi_2: ax+z=1, \pi_3: ay+z=1$, 已知这三个平面没有公共交点, 则 $a=$______.

14. 设 B 是 3 阶矩阵, 齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解空间的维数为 2, $A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\4&a&3\\3&-1&1\end{bmatrix}$, 若 $AB=O$, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间的维数为(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

第 5 章 特征值与特征向量

1. 设 n 阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，对应的特征向量分别是 ξ_1,ξ_2,k 是任意常数，则(　　).

(A) $k\xi_1$ 仍是 A 对应 $\lambda=1$ 的特征向量

(B) $\xi_1+\xi_2$ 是 A 对应 $\lambda=0$ 的特征向量

(C) $\xi_1-\xi_2$ 是 A 对应 $\lambda=2$ 的特征向量

(D) $\xi_1+\xi_2$ 是 A^2 对应 $\lambda=1$ 的特征向量

2. 设 $A=\begin{bmatrix}3&-4&0\\4&-5&0\\a&2&-1\end{bmatrix}$ 若 A 的三重特征值 λ 对应两个线性无关的特征向量，则 $a=$(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) −1　　(D) −2

3. 已知 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，$\alpha_1$ 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量，α_2,α_3 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda=3$ 的线性无关的特征向量，则矩阵 P 不可能是(　　).

(A) $[\alpha_1,-2\alpha_2,\alpha_3]$

(B) $[\alpha_1,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2-2\alpha_3]$

(C) $[\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2]$

(D) $[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3]$

4. $\lambda=-1$ 是 A 的特征值的充分必要条件为（　　）.

(A) $A^2=E$　　(B) $r(A+E)<n$

(C) A 中每行元素之和为-1　　(D) $A^T=-A,|E-A|=0$

5. 设 A,P 都是 n 阶可逆矩阵, λ,ξ 分别是 A 的特征值和对应的特征向量, 则 $P^{-1}AP$ 的特征值和对应的特征向量分别是（　　）.

(A) $\frac{|A|}{\lambda},P^{-1}\xi$　　(B) $\frac{|A|}{\lambda},\xi$　　(C) $\frac{1}{\lambda},P\xi$　　(D) $\frac{1}{\lambda},P^{-1}\xi$

6. 设 A 是 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 3 列得矩阵 B, 再将 B 的第 3 行的-1 倍加到第 2 行得

$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&2&a\end{bmatrix}$, 其中 a 为常数, 则 A 的特征值为（　　）.

(A) $1,2,a$　　(B) $1,2,-2$　　(C) $1,-1,2$　　(D) $1,a,-a$

7. 下列矩阵中，不能相似对角化的是（　）

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

8. 设 A 为 2 阶矩阵, $\alpha=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是方程组 $Ax=0$ 的解, $\beta=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 是方程组 $Ax=\beta$ 的解, 则矩阵 $A=$_______.

9. 已知 A 为 2 阶方阵, 可逆矩阵 $P=[\alpha,\beta]$ 使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $Q=[\beta,\alpha]$, 则 $Q^{-1}A^{*}Q=$_____.

10. 设 1 与−1 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -a & -1 & a \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$的特征值, 若矩阵 A 可相似对角化, 则 $a=($　　$)$.

(A)−1　　(B)0　　(C)1　　(D)2

11. 已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & a & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 的特征值 λ, 并讨论 A 是否可相似对角化.

12. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 已知 A 的每行元素之和为 3, 且有二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$. 求 A 的全部特征值、特征向量, 并求 A^n.

13. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 满足 $A+A^2+\frac{1}{2}A^3=O$, 则 $r(A)=$_____.

14. (1) 设 A,B 是 n 阶矩阵, A 有特征值 $\lambda=1,2,\ldots,n$. 证明 AB 和 BA 有相同的特征值, 且 $AB\sim BA$;

(2) 对一般的 n 阶矩阵 A,B, 是否必有 $AB\sim BA$, 说明理由.

15. 已知 $A=\begin{bmatrix}3 & a & 4\\ 2 & -1 & a\\ -2 & -a & -3\end{bmatrix}$, 求 A 的特征值 λ, 问 a 为何值时, A 不能相似于对角矩阵; a 为何值时, A 相似于对角矩阵, 并求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$.

16. 已知 3 阶矩阵 A 有三个特征值 $\lambda=-1,2,\frac{1}{3}$, 对应的特征向量分别是 ξ_1,ξ_2,ξ_3, 取 $P=\left[2\xi_2,-\xi_1,3\xi_3\right]$ 则 $P^{-1}AP=$_____.

17. 已知 A 是 3 阶矩阵, $r\left(A\right)=1,\lambda=0$ 是 A 的特征值, 其重数(　　).

(A) 必为 2

(B) 可能为 2 或 3

(C) 可能为 1 或 2

(D) 可能为 1, 2 或 3

18. 已知 A 是 2 阶矩阵, 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2, f\left(x\right)=x^2-3x+3$, 则 $f\left(A\right)=$_____.

19. 设 A,B 是 n 阶可逆矩阵，且 $A\sim B$，则以下结论中：

① $A^{-1}\sim B^{-1}$；　② $A^T\sim B^T$；　③ $A^*\sim B^*$；　④ $AB\sim BA$.

正确结论的个数是(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

20. 设 $A=E-\dfrac{3}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，$\alpha=\left[a_1,a_2,\ldots,a_n\right]^T\neq 0$.

(1) 计算 A^2，并求 A^{-1}；

(2) 验证 α 是 A 的特征向量，并求 A 的对应于 α 的特征值 λ.

21. 设 A 是 3 阶矩阵，λ_0 是 A 的特征值，对应的特征向量为 $\xi=[1,1,1]^T$，且 $|A|=1$，A^* 是 A 的伴随矩阵，

$A^*=\begin{bmatrix} -a & 1 & -2 \\ -1 & b & -\frac{7}{2} \\ 2 & -3 & a \end{bmatrix}$，求参数 a,b 及 λ_0.

22. 设 A 是 3 阶矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 的三个不同的特征值，对应的特征向量分别是 ξ_1,ξ_2,ξ_3，令 $\beta=\xi_1+\xi_2+\xi_3$ 证明：

(1) β 不是 A 的特征向量；

(2) 向量组 $\beta,A\beta,A^2\beta$ 线性无关.

第 6 章 二次型

1. $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1x_2-2x_2x_3+6x_3x_3$ 的正惯性指数为（　　）.

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

2. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2-ax_3)^2+(ax_3+x_1)^2$ 的秩为 2, 求 $a=$______.

3. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+4(x_1x_2+x_2x_3)$ 经正交变换可化为标准形

$f=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$，则 $a=$（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=\left[x_1+(a-2)x_2-2x_3\right]^2+(x_1+ax_2+x_3)^2+\left[x_1+ax_2+(a-2)x_3\right]^2$. 求:

(1) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解;

(2) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

5. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 对应的矩阵为 A, 且其在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

(1) 求 a 的值和正交矩阵 Q;

(2) 设矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&0&0\\c&b&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}$, 若 A 与 B 相似, 求 b,c 的值. 在此情况下, 是否存在正交矩阵 P, 使 $P^TAP=B$?若存在, 求 P;若不存在, 请说明理由.

6. 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$, 则 A 和 B (　　).

(A) 不相似且不合同　　(B) 相似但不合同

(C) 不相似但合同　　(D) 相似且合同

7. 设 A 为 $n(n>1)$ 阶方阵, $i,j=1,2,\ldots,n,i\neq j$, 互换 A 的第 i 列与第 j 列得到矩阵 C, 再互换 B 的第 i 行与第 j 行得到矩阵 C, 则 A 与 C (　　).

(A) 等价, 相似但合同　　(B) 等价, 合同但不相似

(C) 合同, 相似但不等价　　(D) 等价, 相似但不合同

8. 下列矩阵中的正定矩阵是 (　　).

(A) $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&1&2\\1&2&0\end{bmatrix}$　(B) $B=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&2\\1&2&5\end{bmatrix}$　(C) $C=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&1\\2&1&-1\end{bmatrix}$　(D) $D=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&5&-3\\-1&-3&2\end{bmatrix}$

9. 已知 A 为 3 阶矩阵，E 为 3 阶单位矩阵，且 $(aE+A)^2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$\operatorname{tr}(A)=2\sqrt{2}-3a$，$a$ 为常数.

(1) 求矩阵 A；

(2) 若 A 正定，求 a 的取值范围.

10. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，向量 $\beta=\begin{bmatrix}1\\1\\a\end{bmatrix}$，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 的线性无关解向量的个数为 1.

(1) 求常数 a 的值及非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的解；

(2) 求一个正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f(x)=x^TAx$ 化为标准形，并写出该标准形.

11. 设 $A=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0&3&0\\3&0&0\\0&0&k\end{bmatrix}$, 若 A 与 B 合同但不相似, 则常数 k 的取值范围为(　　).

(A) $k>0$ 且 $k\neq 2$

(B) $k>0$ 且 $k\neq 3$

(C) $k<0$ 且 $k\neq -2$

(D) $k<0$ 且 $k\neq -3$

12. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 2, 其主对角线元素之和为 $5, r(A)=2$, 则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax$ 满足条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 的最大值为(　　).

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 2

(D) 3

13. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a+2 & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$, 若二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^T Ax$ 的规范形为 $z_1^2+z_2^2$, 求 a 的值并将其化为规范形的可逆线性变换.

14. 设 α,β 为 n 维列向量, $P=[\alpha,\beta],Q=[\alpha+\beta,2\alpha]$. 若矩阵 A 使得 $P^T AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 则 $Q^T AQ=$ (　　).

(A) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

15. 已知 $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix},\Lambda=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, 求可逆矩阵 C , 使得 $C^{T}AC=\Lambda$.

16. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+ax_2^2+bx_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2cx_2x_3$ 经正交变换 $x=Qy$ 可化为标准形 $-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$, 求：

(1) 常数 a,b,c 的值；

(2) 所用正交变换.

17. 设 3 维列向量 $\alpha=[1,1,1]^{\top}$，矩阵 $A=\alpha\alpha^{T}$.

(1) 求 A 的特征值与全部特征向量；

(2) 求方程组 $(A+kE)x=0$（k 为常数）的通解；

(3) 求一个正交变换 $x=Qy$，将二次型 $f=x^{\top}Ax$ 化为标准形.

18. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2$ 的矩阵为 A，则与 A^2 既相似又合同的矩阵是（　　）.

(A) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

19. 下列二次型中, 是正定二次型的是(　　).

(A) $f_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2$

(B) $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

(C) $f_3(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

(D) $f_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_1)^2$

20. (1) 设一次型 $f(x,y,z)=y^2+2xz$, 用正交变换 $x=Qy$ 将其化为标准形, 并写出 Q;

(2) 求函数 $g(x,y,z)=\dfrac{y^2+2xz}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2+y^2+z^2\neq 0\right)$ 的最大值, 并求出一个最大值点.

21. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T Ax$ 通过正交变换化成 $2y_1^2+2y_2^2$，方程组 $Ax=0$ 有解 $\xi=[1,0,1]^T$，求正交变换及二次型矩阵 A.

22. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & s\\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & s^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & s^{n-1}\end{bmatrix}$, 其中 s,n 是正整数, 证明 $A^T A$ 是实对称矩阵, 并就正整数 s,n 的情况讨论矩阵 $A^T A$ 的正定性.

23. $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=-2x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3=0$ 是（　　）.

(A)柱面　　(B)单叶双曲面　　(C)双叶双曲面　　(D)锥面

24. 已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2+x_2^2+ax_3^2-2x_1x_3$，且二次曲面 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=1$ 是柱面.

(1)求 a 的值；

(2)用正交变换将二次型 f 化为标准形，并求所用的正交变换；

(3)求此柱面母线的方向向量.

概率论

第 1 章 随机事件与概率

1. 对任意事件 A,B，下列结论正确的是（　　）.

(A) $P(A)P(B) \geqslant P(A \cup B)P(AB)$

(B) $P(A)+P(B) \leqslant 2P(AB)$

(C) $P(A)+P(B) \geqslant P(A \cup B)$

(D) $P(A)+P(B) \leqslant P(A \cup B)P(AB)$

2. 对于任意事件 A，"$P(A)=P(\overline{A})$"是"$P(A)=\frac{1}{4}+[P(A)]^2$"的（　　）.

(A)充分非必要条件

(B)必要非充分条件

(C)充分必要条件

(D)既非充分又非必要条件

3. 一平面原点从原点出发，每次走一个单位，只有向上、向右两种走法，且向上走的概率为 $p(0<p<1)$，现原点走到了点 $(3,2)$，则按 5 步按照：右、上、右、上、右的方式走的概率为（　　）.

(A) $\frac{3}{20}$

(B) $\frac{1}{13}$

(C) $\frac{1}{20}$

(D) $\frac{1}{10}$

4. 甲、乙两个篮球队进行比赛，假设有三种可能的结局：甲胜、乙胜与平局，考虑事件 $A=\{$甲胜而乙负$\}$，则 $\overline{A}=($　　$)$.

(A) $B_1=\{$甲负而乙胜$\}$

(B) $B_2=\{$平局$\}$

(C) $B_3=\{$甲胜或平局$\}$

(D) $B_4=\{$乙胜或平局$\}$

5. 设事件 A,B 满足 $P(A|B)=P(B|A)=\frac{1}{3},P(A-B)=\frac{1}{6}$，则 $P(\overline{A}\overline{B})=$_____.

6. 设 A,B 为随机事件，$0<P(A)<1,0<P(B)<1$，且 $P(A-B)=0$，则（　　）.

(A) $\overline{A}\supset\overline{B}$

(B) $P(\overline{A})<P(\overline{B})$

(C) $P(\overline{B}|\overline{A})=0$

(D) $P(\overline{A}|\overline{B})=1$

7. 对于任意事件 A,B,C，若 $\overline{A+B}\supset C$，则(　　).

(A) $\overline{A}+\overline{B}\supset\overline{C}$　　(B) $\overline{A}\overline{B}\supset\overline{C}$　　(C) $A+B\subset\overline{C}$　　(D) $AB\subset C$

8. 从数 1, 2, 3, 4 中有放回地取两次，每次取一个数，得到的两个数为 X_1, X_2，记 $X=\min\{X_1,X_2\}$，则 $PX=2=$_____.

9. 设口袋中有 10 个球，其中 6 个红球，4 个白球，每次不放回地从中任取一个，取两次，若取出的两个球中有 1 个是白球，则两个都是白球的概率为(　　).

(A) $\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{5}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{6}$

10. 设 $P\left[A|\left(A\cup BC\right)\right]=\frac{1}{2},P\left(B\right)=P\left(C\right)=\frac{1}{2}$，其中 A,B 互不相容，B,C 相互独立，则 $P\left(A\right)=$（　　）.

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

11. 设 A,B,C 是 3 个随机事件，其中 A 与 B 相互独立，A 与 C 互不相容，$P\left(A\right)=\frac{1}{2}$，$P\left(B\right)=\frac{1}{3}$，$P\left(C\right)=\frac{1}{4}$，$P\left(B|C\right)=\frac{1}{8}$，则 $P\left(C|A\cup B\right)=$_____.

12. 设事件 A 和 B 互不相容，$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 也互不相容，则 A 和 B 为_____.

13. 设 A 和 B 是概率不等于 0 和 1 的任意两个事件, 且满足 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$, 则事件 A 和 B 一定______.

第 2 章 一维随机变量及其分布

1. 设 X 是连续型随机变量, C 是常数, 则随机变量 $Y = X + C$ 的分布函数间断点个数为_____.

2. 设随机变量 $X \sim B\left(n,\frac{1}{3}\right), Y \sim B\left(2n,\frac{1}{3}\right)$, 若 $P\left\{X \geqslant 1\right\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\left\{Y \geqslant 1\right\} =$ (　　).

(A) $\frac{5}{27}$　　(B) $\frac{16}{81}$　　(C) $\frac{64}{81}$　　(D) $\frac{65}{81}$

3. 设 $X \sim N(0,1), Y = X + |X|$, 则 $P\{Y > 1\} =$ (　　).

(A) $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$　　(B) $1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$　　(C) $\Phi(1)$　　(D) $1-\Phi(1)$

4. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 $X+Y$ 服从（　）.

(A) $B\left(2,\frac{1}{3}\right)$　(B) $B\left(2,\frac{2}{3}\right)$　(C) $B\left(4,\frac{1}{3}\right)$　(D) $B\left(4,\frac{2}{3}\right)$

5. 设随机变量 X,Y 分别服从正态分布 $N(\mu,9), N(\mu,4)$，记 $p_1=P\{X\leqslant\mu-3\}$，$p_2=P\{Y\geqslant\mu+4\}$，则（　）.

(A) 对于任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$

(B) 对于任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$

(C) 对于任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$

(D) 对于 μ 的个别值，有 $p_1=p_2$

6. 设随机变量 X 服从正态分布，其概率密度 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有驻点，且 $f(1)=1$，则 X 服从分布（　）.

(A) $N(1,1)$　(B) $N\left(1,\frac{1}{2\pi}\right)$　(C) $N\left(1,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$　(D) $N(0,1)$

7. 设随机变量 X 服从(0, 1)上的均匀分布，则 $Y=-\ln X$ 服从(　　).

(A)几何分布　(B)标准正态分布　(C) t 分布　(D)指数分布

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,2)$，其分布函数和概率密度分别记作 $F(x)$ 和 $f(x)$，则下列各选项的性质中错误的是(　　).

(A) $f(x)$ 的曲线关于直线 $x=1$ 对称

(B) $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,x)$ 上的积分

(C) $F(x)$ 在 $x=0$ 处的值等于 0.5

(D)概率密度 $f(x)$ 的最大值等于 $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

9. 设 $X \sim f_X(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},-\infty<x<+\infty$，令 $Y=\arctan X$，则 $f_Y(y)=$_____.

10. 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为 $F(t)=\begin{cases}1-e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 θ,m 为大于零的参数. 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t|\ T>s\}$，其中 $s>0,t>0$.

11. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求 $Y=X^2+1$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

第 3 章 多维随机变量及其分布

1. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且服从分布：$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}(p+q=1)$ 则下列随机变量服从二项分布的是(　　).

(A) $X+Y$　　(B) $\dfrac{X+Y}{2}+1$　　(C) $X-Y$　　(D) $\dfrac{X-Y}{2}-1$

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B\left(1,\dfrac{1}{2}\right), Y \sim N(0,1)$, 则 $P\{XY \leqslant 0\}=$(　　).

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $\dfrac{3}{4}$

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从二项分布 $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, Y 服从指数分布 $E(1)$, 则 $P\{X+Y \geqslant 1\}=$(　　).

(A) $1+e^{-1}$　　(B) $1-e^{-1}$　　(C) $\dfrac{1}{2}\left(1+e^{-1}\right)$　　(D) $\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$

4. 设随机变量 X 服从区间 $[-3,2]$ 上的均匀分布, 令 $Y=\begin{cases}-1, & X\leqslant -1,\\ 1, & X>-1,\end{cases}$ $Z=\begin{cases}-1, & X\leqslant 1,\\ 1, & X>1,\end{cases}$ 则 $P\{Y+Z=0\}=$______.

5. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 均服从二项分布 $B\left(1,\frac{1}{2}\right)$, 则 $P\{X\geqslant Y\}=$______.

6. 设离散型随机变量 X 和 Y 独立同分布: $P\{X=x_k\}=P\{Y=x_k\}=p_k, k=1,2,\ldots$, 则 $P\{X=Y\}=$______.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从正态分布 $N\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 记随机变量 $Z=|X-Y|$ 的概率密度为 $f(z)$, 则(　　).

(A) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},-\infty<z<+\infty$

(B) $f(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},-\infty<z<+\infty$

(C) $f(z)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$

(D) $f(z)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0\end{cases}$

8. 设随机变量 X 在区间 (a,b) 上随机取值, 当观察到 $X=x\left(a<x<b\right)$ 时, 随机变量 Y 在区间 (x,b) 上随机取值, 求:

(1) Y 的概率密度;

(2) $P\{X+Y<a+b\}$.

9. 某系统由两个相互独立工作的元件串联而成, 只要有一个元件不工作, 系统就不工作. 设第 i 个元件的工作寿命为 X_i , 已知 $X_i \sim E\left(\lambda_i\right), \lambda_i > 0, i=1,2$.

(1) 求该系统的工作寿命 X 的概率密度 $f\left(x\right)$;

(2) 证明: 对任意的 $t,s>0$, 有 $P\{X>t+s \mid X>t\}=P\{X>s\}$.

10. 已知二维随机变量 (X,Y) 在以点 $(0,0),(1,-1),(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布.

(1) 求边缘概率密度 $f_X\left(x\right), f_Y\left(y\right)$ 及条件概率密度 $f_{X\mid Y}\left(x \mid y\right), f_{Y\mid X}\left(y \mid x\right)$, 并判断 X 与 Y 是否相互独立;

(2) 计算概率 $P\left\{X>\frac{1}{2} \mid Y>0\right\}, P\left\{X>\frac{1}{2} \mid Y=\frac{1}{4}\right\}$.

11. 已知二维随机变量(X, Y)的概率密度为$f\left(x,y\right)=\begin{cases}2e^{-\left(x+y\right)}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$求$(X,Y)$的分布函数$F\left(x,y\right)$.

12. 设二维随机变量(X, Y)在矩形区域$D=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\right\}$上服从均匀分布，求$Z=XY$的概率密度.

13. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从二项分布 $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$,$Y$ 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$, 求:

(1) $P\left\{Z\leqslant\frac{5}{2}\middle| X>1\right\}$;

(2) Z 的概率密度.

14. 设随机变量 X,Y 相互独立, 且 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ Y 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}e^{ay}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 a 的值;

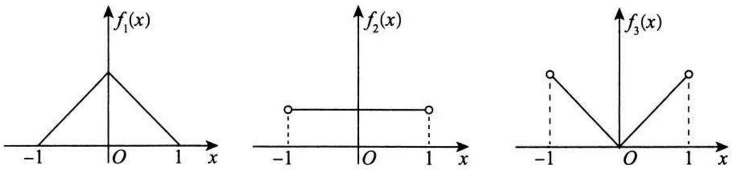
(2) 若 $Z=2X+aY$, 求 Z 的概率密度.

第 4 章 随机变量的数字特征

1. 设随机变量 $X \sim E(1)$, 记 $Y=\max\{X,1\}$, 则 $E(Y)=$_____.

(A) 1　　(B) $1-e^{-1}$　　(C) $1+e^{-1}$　　(D) e^{-1}

2. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 的概率密度图像分别如图(a) ~ 图(c)所示, 则(　　).



(a)　　(b)　　(c)

(A) $D(X_1)<D(X_2)<D(X_3)$　　(B) $D(X_1)<D(X_3)<D(X_2)$

(C) $D(X_2)<D(X_1)<D(X_3)$　　(D) $D(X_2)<D(X_3)<D(X_1)$

3. 设随机变量 X 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的几何分布, 则 $E\left(\frac{1}{X}\right)=$(　　).

(A) $p(1-p)$　　(B) $-p\ln p$　　(C) $-(1-p)\ln p$　　(D) $-\frac{p\ln p}{1-p}$

4. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda=2$ 的泊松分布, 则 $P\{X>D(X)\}=$_____.

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数, $E(X)$ 为 X 的数学期望, 则 $P\{F(X)>E(X)\}=$_____.

6. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布, 则 X 落在数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 之间的概率为_____.

7. 在 $(0,1)$ 线段上随机找掷两点，该两点的距离为 X，求：

(1) X 的分布函数 $F(x)$ 和概率密度 $f(x)$；

(2) X 的数学期望 $E(X)$.

8. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=Ae^{x(B-x)}(-\infty<x<+\infty)$, $E(X)=2D(X)$，求：

(1) 常数 A,B 的值；

(2) $E\left(X^2+e^X\right)$ 的值；

(3) $Y=\left|\sqrt{2}(X-1)\right|$ 的分布函数 $F(y)$.

9. 设 X,Y 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量，则随机变量 $|X-Y|$ 的数学期望 $E\left(|X-Y|\right)=$（　　）.

(A) $\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$　(B) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$　(C) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$　(D) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

10. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且都服从参数为 1 的指数分布. 若 $Z=\begin{cases}2X, & X\geqslant Y,\\ Y-1, & X<Y,\end{cases}$ 则 $E(Z)=$（　　）.

(A) $\frac{2}{7}$　(B) $\frac{7}{2}$　(C) $\frac{7}{4}$　(D) $\frac{4}{7}$

11. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）.

(A) $-\frac{1}{2}$　(B) $-\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{1}{2}$

12. 设随机变量 X 和 Y 的方差存在，则 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ 是 X 和 Y（　　）.

(A)不相关的充分非必要条件　　(B)不相关的充分必要条件

(C)独立的充分非必要条件　　(D)独立的充分必要条件

13. 已知随机变量 $X\sim U(0,4)$，实数 $c\in[0,4]$，且 X 与 $|X-c|$ 不相关，则 $c=$（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

14. 设随机变量 X,Y 独立同分布于 $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$Z_1=XY, Z_2=\frac{X}{Y}$，则（　　）.

(A) X,Y,Z_1 相互独立　　(B) Y,Z_1,Z_2 相互独立

(C) X,Z_1,Z_2 两两独立　　(D) X,Y,Z_2 不相互独立

15. 对于任意随机变量 X 和 Y，如果 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则（ ）.

(A) X 和 Y 相互独立

(B) $D(XY)=D(X)D(Y)$

(C) X 和 Y 相关

(D) $E(XY)=E(X)E(Y)$

16. 设随机变量 X,Y 均服从参数为 λ 的泊松分布，且 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}, U=2X+Y$，则 U 与 X 的相关系数为（ ）.

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{4}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{2}$

17. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且服从相同的分布，$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$, $p+q=1, 0< p<1$, 又

$$Z=\begin{cases} 1, & X+Y\text{为奇数}, \\ 0, & X+Y\text{为偶数}. \end{cases}$$

(1) 求 XZ 的分布律；

(2) p 取何值时，X 和 Z 相关?说明理由.

18. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的分布列为: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}$, Y 服从参数为 1 的指数分布, 令 $Z=XY$, 若 Y 与 Z 既不相关, 也不独立, 求:

(1) $Z(Z\neq 0)$ 的概率密度；

(2) p 的值.

19. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为:

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.2

(1)求 X 和 Y 的相关系数 ρ；

(2)求 X^2 和 Y^2 的协方差 $\mathrm{Cov}\left(X^2,Y^2\right)$；

(3)问 X 和 Y 以及 X^2 和 Y^2 是否相关？是否独立？

第 5 章 大数定律与中心极限定理

1. 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布, $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于_____.

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是来自总体 X 的简单随机样本, X 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布, 记 $Y_k=\cos(kX_k), k=1,2,\cdots,n$, 则 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k^2$ 依概率收敛于_____.

3. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立且均服从 $U[1,4]$, $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{n}X_i-5n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=(\quad)$.

(A) $\Phi(x)$　　(B) $\Phi(\sqrt{3}x)$　　(C) $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$　　(D) $\Phi\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)$

4. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n},\cdots$ 相互独立, 且均服从二项分布 $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, 若根据中心极限定理, 有

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{a\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_{2i}-X_{2i-1}\right)\le\sqrt{n}x\right\}=\Phi\left(x\right)$, 其中 $\Phi\left(x\right)$ 为标准正态分布函数, 则 $a=$_____.

5. 某保险公司接受了 10, 000 辆汽车的保险, 每辆汽车每年的保费为 1. 2 万元. 若汽车丢失, 则车主获得赔偿 100 万元. 设汽车的丢失率为 0. 006, 对于此项业务, 利用中心极限定理, 则保险公司一年所获利润不小于 6, 000 万元的概率为_____.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\left(n>2\right)$ 是来自总体 $X\sim N\left(0,1\right)$ 的简单随机样本, 由切比雪夫不等式得

$P\left\{0<\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2<2n\right\}$ 不小于_____.

第 6 章 数理统计

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 是来自正态总体 $X \sim N\left(0,\sigma^2\right)(\sigma>0)$ 的简单随机样本, $Y^2=\frac{1}{9}\sum_{i=2}^{10}X_i^2$, 则(　　).

(A) $X_1^2 \sim \chi^2(1)$　　(B) $Y^2 \sim \chi^2(9)$　　(C) $\frac{X_1}{Y} \sim t(9)$　　(D) $\frac{X_1^2}{Y^2} \sim F(9,1)$

2. 设总体 X 和 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N\left(0,\sigma^2\right)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是来自总体 X 和 Y 且容量都为 n 的两个简单随机样本, 样本均值、样本方差分别为 $\overline{X}, S_X^2$ 和 $\overline{Y}, S_Y^2$, 则(　　).

(A) $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(0,\sigma^2\right)$

(B) $S_X^2+S_Y^2 \sim \chi^2(2n-2)$

(C) $\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{S_X^2+S_Y^2}} \sim t(2n-2)$

(D) $\frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n-1,n-1)$

3. 设随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$, 则_____.

(A) $X+Y$ 服从正态分布

(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

(C) X^2/Y^2 服从 F 分布

(D) X^2 和 Y^2 服从 χ^2 分布

4. 设 n 为正整数, 随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=\dfrac{2}{5}$, 则 $P\left\{Y \leqslant c^2\right\}=$ (　　).

(A) $\dfrac{1}{5}$　　(B) $\dfrac{2}{5}$　　(C) $\dfrac{3}{5}$　　(D) $\dfrac{4}{5}$

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n \geqslant 2)$ 为来自标准正态总体 X 的简单随机样本, 记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2, Y=\overline{X}-S$, 则 $E\left(Y^2\right)=$ (　　).

(A) $1-\dfrac{1}{n}$　　(B) $1+\dfrac{1}{n}$　　(C) $1-\dfrac{1}{n-1}$　　(D) $1+\dfrac{1}{n-1}$

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{\sigma}}, & x>0,\\ 0, & x \leqslant 0,\end{cases}$ 其中 σ 为大于零的未知参数, 已知

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则 σ 的最大似然估计量为(　　).

(A) $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　(B) $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$　　(C) $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　　(D) $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

7. 设某个试验有三种可能结果, 其发生的概率分别为 $p_1=\lambda^2$, $p_2=(1-\lambda)^2$, $p_3=2\lambda(1-\lambda)$, 其中参数 λ 未知, $0<\lambda<1$. 现做了 n 次独立重复试验, 观察到三种结果发生的次数分别为 n_1,n_2,n_3 $(n_1+n_2+n_3=n)$, 则 λ 的最大似然估计值为_____.

8. 设二维总体 (X, Y) 的概率密度为 $f(x,y;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x+y}{\lambda}}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ λ 为大于 0 的参数, $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体的简单随机样本, 则 λ 的最大似然估计量为_____.

9. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则未知参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=$_____.

10. 设总体 $X \sim U[\theta,\theta+1], X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求:

(1) 参数 θ 的矩估计量;

(2) 参数 θ 的最大似然估计量.

11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}$,

$-\infty < x < +\infty, \lambda > 0$, 求:

(1) λ 的矩估计量;

(2) λ 的最大似然估计量.

12. 设连续型总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x^{\sqrt{\theta}}, & 0<x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数, 且 $\theta>0$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的矩估计量与最大似然估计量.

13. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $\theta>0$, 求 θ 的最大似然估计量.

14. 设某元件的使用寿命T的分布函数$F(t)$满足微分方程$F'(t)+\frac{2t}{\theta^2}\left[F(t)-1\right]=0, t\geqslant 0, \theta$为大于 0 的常数，$F(0)=0$，且该元件性能$Q(\theta)=\theta^2\left(\frac{\ln\theta}{2}-\frac{3}{4}\right)+\theta$. 任取$n$个此种元件做寿命试验，测得值分别为$t_1,t_2,\cdots,t_n$.

(1)求θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$；

(2)求该元件性能Q的最大似然估计值$\hat{Q}$.

15. 设总体X的数学期望$E(X)=0$，方差$D(X)=\sigma^2$，而$X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>2)$是来自总体$X$的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$，则下列属于$\sigma^2$的无偏估计量的是（　　）.

(A) $n\overline{X}^2+S^2$　　(B) $\frac{1}{2}\left(n\overline{X}^2+S^2\right)$　　(C) $\frac{1}{3}\left(n\overline{X}^2+S^2\right)$　　(D) $\frac{1}{4}\left(n\overline{X}^2+S^2\right)$

16. 设 μ 是总体 X 的数学期望，σ 是总体 X 的标准差，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则总体方差 σ^2 的无偏估计量是(　　).

(A) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$, μ 未知

(B) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$, μ 未知

(C) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$, μ 已知

(D) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$, μ 已知

17. 设 σ 是总体 X 的标准差，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则样本标准差 S 是总体标准差 σ 的(　　).

(A)无偏估计量　　(B)最大似然估计量

(C)相合估计量　　(D)最小方差估计量

18. 设 X_1 是来自正态总体 $X\sim N\left(0,\sigma^2\right)(\sigma>0)$ 的一个简单随机样本，x_1 为其样本值，则 σ^2 的一个无偏估计量为_____.

19. 设总体 X 的概率分布为:

X	0	1	2	3
P	θ^3	$3\theta^2(1-\theta)$	$3\theta(1-\theta)^2$	$(1-\theta)^3$

其中 $0<\theta<1, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 求 θ 的最大似然估计量, 并判定它是否为 θ 的无偏估计量, 说明理由.

20. 设一批零件的长度服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 其中 σ^2 已知, μ 未知. 现从中随机抽取 n 个零件, 测得样本均值为 $\bar{x}$, 则当置信度为 0. 90 时, μ 大于 μ_0 的接受条件为(　　).

(A) $\bar{x}>\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.10}$

(B) $\bar{x}>\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.05}$

(C) $\bar{x}>\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.10}$

(D) $\bar{x}>\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.05}$

21. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，$E(X)=\theta$. 检验 $H_0:\theta=0; H_1:\theta\neq 0$, 且拒绝域 $W_1=\{|\overline{X}|>1\}$ 和 $W_2=\{|\overline{X}|>2\}$ 分别对应显著性水平 α_1 和 α_2, 则（　　）.

(A) $\alpha_1=\alpha_2$

(B) $\alpha_1>\alpha_2$

(C) $\alpha_1<\alpha_2$

(D) α_1 和 α_2 的大小关系不确定

22. 设 X_1, X_2 是来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本, 并设原假设 $H_0:\mu=2$, 备择假设 $H_1:\mu=4$. 若拒绝域为 $W=\{\overline{X}>3\}, \overline{X}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}X_i$, 记 α,β 分别为犯第一类错误和第二类错误的概率, 则（　　）.

(A) $\alpha=\beta=1-\Phi\left(\sqrt{2}\right)$

(B) $\alpha=1-\Phi\left(\sqrt{2}\right), \beta=\Phi\left(\sqrt{2}\right)$

(C) $\alpha=\Phi\left(\sqrt{2}\right), \beta=1-\Phi\left(\sqrt{2}\right)$

(D) $\alpha=\beta=\Phi\left(\sqrt{2}\right)$

23. 设总体 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & (1-\theta)^2 \end{pmatrix}$, 作检验 $H_0:\theta=0.1; H_1:\theta=0.9$, 抽取 3 个样本, 取拒绝域 $W=\{X_1=1, X_2=1, X_3=1\}$, 则犯第二类错误的概率为_____.

24. 假设无线电测距仪无系统误差, 其测量的随机误差服从正态分布, 已知随机测量的绝对误差不大于 20 米的概率为 0.95, 则随机测量的标准差 $\sigma=$_____(保留两位小数)