2025 年全国硕士研究生招生考试(数学一)试题

1. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t dt, g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$, 则（ ）
   (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 也是 $g(x)$ 的极值点
   (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点
   (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
   (D) $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点
2. 已知级数: ① $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^3\pi}{n^2+1}$; ② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}-\tan\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$, 则（ ）
   (A) ①与②均条件收敛
   (B) ①条件收敛, ②绝对收敛
   (C) ①绝对收敛, ②条件收敛
   (D) ①与②均绝对收敛
3. 设数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导, 则（ ）
   (A) 当 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在时, $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在
   (B) 当 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在
   (C) 当 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在时, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在
   (D) 当 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在时, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在
4. 设函数 $f(x,y)$ 连续, 则 $\int_{-2}^2 dx\int_{4-x^2}^4 f(x,y)dy=$（ ）
   (A) $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)dx\right]dy$
   (B) $\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)dx\right]dy$
   (C) $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)dx+\int_2^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx\right]dy$
   (D) $2\int_0^4 dy\left[\int_{\sqrt{4-y}}^2 f(x,y)dx\right]$
5. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 的正惯性指数为（ ）
   (A) 0
   (B) 1
   (C) 2
   (D) 3
6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 n 维向量, α_1,α_2 线性无关, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 且 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=0$, 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 关于 x,y,z 的方程组 $x\alpha_1+y\alpha_2+z\alpha_3=\alpha_4$ 的几何图形是（ ）
   (A) 过原点的一个平面
   (B) 过原点的一条直线
   (C) 不过原点的一个平面
   (D) 不过原点的一条直线
7. 设 n 阶矩阵 A,B,C 满足 $r(A)+r(B)+r(B)=r(ABC)+2n$, 给出下列四个结论: ① $r(ABC)+n=r(AB)+r(C)$; ② $r(AB)+n=r(A)+r(B)$; ③ $r(A)=r(B)=r(C)=n$; ④ $r(AB)=r(BC)=n$, 其中正确的选项是（ ）
   (A) ①②
   (B) ①③
   (C) ②④
   (D) ③④
8. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(0,0;1,1;\rho)$, 其中 $\rho\in(-1,1)$, 若 a,b 为满足 $a^2+b^2=1$ 的任意实数, 则 $D(aX+bY)$ 的最大值为（ ）
   (A) 1
   (B) 2

(C) $1+|\rho|$

(D) $1+\rho^2$

9. 设 $X_1,X_2,...,X_{20}$ 是来自总体 $B(1,0.1)$ 的简单随机样本, 令 $T=\sum_{i=1}^{20}X_i$, 利用泊松分布近似表示二项分布的方法可得 （ ） $P\{T\leq 1\}\approx$

(A) $\frac{1}{e^2}$

(B) $\frac{2}{e^2}$

(C) $\frac{3}{e^2}$

(D) $\frac{4}{e^2}$

二、填空题：11-16题(每题5分，共30分)

10. 设 $x_1,x_2,...,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,2)$ 的简单随机样本, 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, Z_α 表示标准正态分布的上侧 α 分位数, 假设检验问题: $H_0:\mu\leq 1,H_1:\mu>1$ 的显著性水平为 α 的检验的拒绝域为（ ）

(A) $\left\{(x_1,x_2,...,x_n)|\overline{X}>1+\frac{2}{n}Z_\alpha\right\}$

(B) $\left\{(x_1,x_2,...,x_n)|\overline{X}>1+\frac{\sqrt{2}}{n}Z_\alpha\right\}$

(C) $\left\{(x_1,x_2,...,x_n)|\overline{X}>1+\frac{2}{\sqrt{n}}Z_\alpha\right\}$

(D) $\left\{(x_1,x_2,...,x_n)|\overline{X}>1+\sqrt{\frac{2}{n}}Z_\alpha\right\}$

11. $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=$ _____

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x<\frac{1}{2}\\ x^2, & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$ 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$ 的和函数, 则 $S(-\frac{7}{2})=$ _____.

13. 已知函数 $U(x,y,z)=xy^2z^3$, 向量 $n=(2,2,-1)$, 则 $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{(1,1,1)}=$ _____.

14. 已知有向曲线 L 是沿抛物线 $y=1-x^2$ 从点 $(1,0)$ 到 $(-1,0)$ 的段, 则曲线积分 $\int_L(y+\cos x)dx+(2x+\cos y)dy=$ ___.

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ a & 3 & -4\\ b & 5 & -7\end{pmatrix}$, 若方程组 $A^2x=0$ 与 $Ax=0$ 不同解, 则 $a-b=$ _____.

16. 设 A,B 为两个不同随机事件, 且相互独立, 已知 $P(A)=2P(B),P(A\cup B)=\frac{5}{8}$, 则 A,B 中至少有一个发生的条件下, A,B 中恰好有一个发生的概率为 _____.

三、解答题：17-22 小题，共 70 分

17. (本题满分 10 分) 计算 $\int_0^1\frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}dx$.

18. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数, 记 $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$, 若 $g(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$, 且 $g(x,x)=1$, $\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$, 求 $f(u)$.

19. (本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导, 证明: 导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加的充分必要条件是: 对 (a,b) 内任意的 x_1,x_2,x_3, 当 $x_1<x_2<x_3$ 时, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

20. (本题满分 12 分) 设 Σ 是由直线 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 绕直线 $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t\end{cases}$ (t 为参数) 旋转一周得到的曲面, Σ_1 是 Σ 介于平面 $x+y+z=0$ 与 $x+y+z=1$ 之间部分的外侧, 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma_1} xdydz+(y+1)dzdx+(z+2)dxdy$.

21. (本题满分 12 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&0&2\\-1&-1&a\end{pmatrix}$, 已知 A 的特征多项式的重根.

(1) 求 a 的值.

(2) 求所有满足 $A\alpha=\alpha+\beta$, $A^2\alpha=\alpha+2\beta$ 的非零列向量 α, β.

22. (本题满分 12 分) 投保人的损失事件发生时, 保险公司赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为 $Y=\begin{cases}0, X\le 100\\X-100, X>100\end{cases}$. 设损失事件发生时, 投保人的损失额 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{2\times 100^2}{(100+x)^3}, x>0\\0, x\le 0\end{cases}$.

(1) 求 $P\{Y>0\}$ 及 $E(Y)$.

(2) 这种损失事件在一年内发生的次数记为 N, 保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M, 假设 N 服从参数为 8 的泊松分布, 在 $N=n(n\ge 1)$ 的条件下, M 服从二项分布 $B(n,P)$, 其中 $P=P\{Y>0\}$, 求 M 的概率分布.