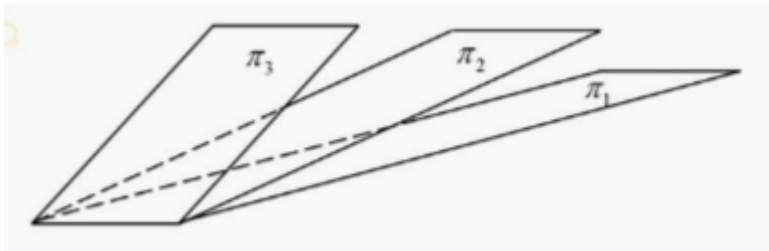


2024 年全国硕士研究生招生考试(数学一)试题

一、选择题1-10题 (每题5分, 共50分)

1. 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$, $g(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, 则 ()。
- A. $f(x)$ 为奇函数, $g(x)$ 为偶函数
B. $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数
C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为奇函数
D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为周期函数
2. 设 $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ 均为连续函数, Σ 为曲面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ($x \geq 0, y \geq 0$) 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx =$ ()。
- A. $\iint_{\Sigma} \left(\frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy$
B. $\iint_{\Sigma} \left(-\frac{x}{z} P + \frac{y}{z} Q \right) dx dy$
C. $\iint_{\Sigma} \left(\frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy$
D. $\iint_{\Sigma} \left(-\frac{x}{z} P - \frac{y}{z} Q \right) dx dy$
3. 已知幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} =$ ()。
- A. $-\frac{1}{6}$
B. $-\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{6}$
D. $\frac{1}{3}$
4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内有定义, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 则 ()。
- A. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = m$ 时, $f'(0) = m$
B. 当 $f'(0) = m$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = m$
C. 当 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m$ 时, $f'(0) = m$
D. 当 $f'(0) = m$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m$
5. 在空间直角坐标系 $O - xyz$ 中, 三张平面 $\pi_i: a_i x + b_i y + c_i z = d_i$ ($i = 1, 2, 3$) 位置关系如图所示, 记 $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)$, $\beta_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, 若 $r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = m$, $r \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = n$, 则 ()。



- A. $n = 1, n = 2$
B. $m = n = 2$
C. $m = 2, n = 3$
D. $m = n = 3$

6. 设向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \\ a \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且其中任意两个

向量均线性无关, 则 ()。

- A. $a = 1, b \neq -1$
- B. $a = 1, b = -1$
- C. $a \neq -2, b = 2$
- D. $a = -2, b = 2$

7. 3阶矩阵 A 的秩为2, 非零向量 α 满足 $A\alpha = 0$, 任意向量 β , 使得 $\beta^T \alpha = 0$, 且 $A\beta = \beta$, 则下列结论正确的是 ()。

- A. A^3 的迹为2
- B. A^3 的迹为5
- C. A^5 的迹为7
- D. A^5 的迹为9

8. 设随机变量 X 与 Y 独立, X 服从 $N(0, 2)$ 的正态分布, Y 服从 $N(-2, 2)$ 的正态分布, 若 $P\{2X + Y < a\} = P\{X > Y\}$, 则 $a =$ ()。

- A. $-2 - \sqrt{10}$
- B. $-2 + \sqrt{10}$
- C. $-2 - \sqrt{6}$
- D. $-2 + \sqrt{6}$

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, Y 在区间 $(x, 1)$ 上服从均匀分布, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ ()。

- A. $-\frac{1}{36}$
- B. $-\frac{1}{72}$
- C. $\frac{1}{72}$
- D. $\frac{1}{36}$

二、填空题: 11-16题(每题5分, 共30分)

10. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布, 令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量与 Z 同分布的是 ()。

- A. $X + Y$
- B. $\frac{X+Y}{2}$
- C. $2X$
- D. X

11. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\sin x} - 1}{x^3} = 6$, 则 $a =$ _____

12. $z = f(u, v)$ 有二阶连续导数, $df|_{(1,1)} = 3du + 4dv$, $y = f(\cos x, 1 + x^2)$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} =$ _____

13. 若函数 $f(x) = x + 1$, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$, $x \in [0, \pi]$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^x \sin a_{2n-1} =$ _____

14. 微分方程 $y' = \frac{1}{(x+y)^2}$, 满足条件 $y(1) = 0$ 的解为 _____

15. 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$, 若对任意实向量 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $(\alpha^T A \beta)^2 \leq \alpha^T A \alpha \cdot \beta^T A \beta$ 都成立, 则 a 的取值范围是 _____

16. 随机试验每次成功的概率为 P , 现进行三次独立重复实验, 已知至少成功一次的条件下全部成功概率为 $\frac{4}{13}$, 则 $P =$ _____

三、解答题: 17-22 小题, 共 70 分

17. 已知平面区域 $D = \{(x, y) | \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, 计算 $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma$
18. 设 $f(x, y) = x^3 + y^3 - (x + y)^2 + 3$, 曲面 $z = f(x, y)$ 在 $(1, 1, 1)$ 处的切平面为 T , T 与三个坐标面所围有界区域在 xoy 面的投影为 D
- (1) 求 T 的方程
- (2) 求 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值和最小值
19. 设 $f(x)$ 二阶可导, $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$, 证明:
- 1) 当 $x \in (0, 1)$ 时 $|f(x) - f(0)(1 - x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$
- 2) $\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$
20. 已知有向曲线 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ 与平面 $2x - z - 1 = 0$ 的交线从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 计算曲线积分 $\int_L (6xyz - yz^2)dx + 2x^2zdy + xyzdz$
21. 已知数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足 $x_0 = -1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$, 且
- $$\begin{cases} x_n = -2x_{n-1} + 2z_{n-1} \\ y_n = -2y_{n-1} - 2z_{n-1} \\ z_n = -6x_{n-1} - 3y_{n-1} + 3z_{n-1} \end{cases}$$
- 记 $\alpha_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, 写出满足 $\alpha_n = A\alpha_{n-1}$ 的矩阵 A , 并求 A^n 及 $x_n, y_n, z_n (n = 1, 2, \dots)$

22. 设总体 $X \sim U[0, \theta]$ 上的均匀分布, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 简单随机样本, $X(n) = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $T_c = cX(n)$
- (1) 求 c 时, 使得 T_c 为 θ 的无偏估计
- (2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $h(c)$ 最小