

# Вопросы с доказательством для подготовки к КОЛЛОКВИУМУ

2018-2019-й учебный год

## 1-й модуль

1) Что происходит с произведением матриц при транспонировании? Ответ обосновать.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

□

$$[(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji} = \sum_{r=1}^n [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} = \sum_{r=1}^n [A^T]_{rj} \cdot [B^T]_{ir} = [B^T \cdot A^T]_{ij}$$

■

2) Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом? Ответ обоснуйте для матриц второго порядка.

Произвольная линейная по столбцам кососимметрическая функция от матрицы с условием  $f(E_n) = 1$ , является определителем

□

( $n = 2$ )

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= f \left( a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_{12} \right) = \\ &= a_{11} \cdot f \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + a_{21} \cdot f \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot f \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + a_{21} \cdot f \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \det A \end{aligned}$$

■

3) Чему равен определитель произведения двух квадратных матриц? Ответ обоснуйте.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad \square$$

Рассмотрим функцию  $f(B) = \det(A \cdot B)$ . Покажем, что для  $f(B)$  выполнены свойства 2 и 4б

1) Если столбцы матрицы  $B$   $i$  и  $j$  одинаковы, то и в матрице  $A \cdot B$  столбцы  $i$  и  $j$  тоже одинаковы  $\Rightarrow$  выполняется свойство 4б

2) Если в матрице  $B$   $i$ -тый столбец имеет вид  $\alpha \cdot a + \mu \cdot b \Rightarrow$  в  $A \cdot B$  он будет иметь вид  $\alpha \cdot a \cdot A + \mu \cdot A \cdot b \Rightarrow$  выполнено свойство 2.

Следовательно,  $f(B) = \det B \cdot f(E_n)$ . Возьмем и вычислим  $f(E_n) = \det(A \cdot E_n) = \det E_n \cdot f(E_n) = 1 \cdot f(E_n)$

$$\det(A \cdot E_n) = \det A$$

$$\Rightarrow f(E_n) = \det A \Rightarrow f(B) = \det A \cdot \det B = \det A \cdot B$$

■

4) **Выпишите формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и докажите их.**

Правило Крамера

Пусть  $A \cdot x = b$  – совместная СЛАУ.

Тогда  $x_j \cdot \det(A_1, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \dots, A_n) = \Delta_j$

Если  $\Delta \equiv \det A \neq 0$ , то

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n} - \text{формула Крамера}$$

□

$$\det(A_1, \dots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{j-1}, \sum_{k=1}^n x_k \cdot A_k, A_{j+1}, \dots, A_n) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n)$$

$$x_1 \cdot \det(A_1, \dots, A_1, \dots, A_n) +$$

$$+ \dots + x_j \cdot \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n) + \dots = x_j \cdot \det A$$

■

5) **Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости.**

Строки  $a_1, \dots, a_k$  линейно зависимы  $\Leftrightarrow$  хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных

□

Дано:  $a_1, \dots, a_k$  – л.з.

Доказать: хотя бы одна из них – л.к. остальных

По определению линейной зависимости:

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ , не все равные нулю, такие, что  $\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_k \cdot a_k = 0$

Пусть  $\lambda_1 \neq 0$ , тогда  $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot a_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \cdot a_k$  – это л.к. остальных

Дано: Пусть  $a_1 = \beta_2 \cdot a_2 + \dots + \beta_k \cdot a_k$

Доказать:  $a_1, \dots, a_k$  – л.з.

$$0 \neq 1 \cdot a_1 - \beta_2 \cdot a_2 - \dots - \beta_k \cdot a_k = 0$$

не все коэффициенты этой л.к. равны 0  $\Rightarrow$  по определению  $a_1, \dots, a_k$  – л.з.

■

6) **Как связан ранг транспонированной матрицы с рангом исходной матрицы? Ответ обоснуйте.**

$$RgA^T = RgA$$

□

Докажем, что  $RgA^T \geq RgA$

Пусть  $RgA = r \Rightarrow \exists$  минор  $M_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} \neq 0$

В матрице  $A^T$  есть минор  $N_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$ , получающийся из  $M_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$  транспонированием  $\Rightarrow N_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \neq 0$  (это свойство 1 определителя)  $\Rightarrow RgA^T \geq r = RgA$

Таким образом,  $RgA \leq RgA^T \leq Rg(A^T)^T = RgA \Rightarrow RgA = RgA^T$

■

7) **Сформулируйте и докажите теорему о базисном миноре.**

1) Базисные строки (столбцы), соответствующие любому базисному минору  $M$  матрицы  $A$  л.н.з.

2) Строки матрицы  $A$ , не входящие в  $M$ , являются линейными комбинациями базисных строк

□

1) (от противного)

Предположим, что одна из них является линейной комбинацией остальных  $\Rightarrow M = 0$  (по свойству определителя). А это противоречит определению базисного минора.

2) Будем считать (без ограничения общности), что базисный минор  $M$  расположен в левом верхнем углу матрицы

Пусть  $RgA = r$

$$\left( \begin{array}{c|ccc} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{r+11} & \dots & \dots & a_{r+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

Возьмем строку  $a_k, k > r$

Покажем, что  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$ :

$a_k = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_r \cdot a_r$ , где  $a_1, \dots, a_r$  – базисные строки

Составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}$$

, получающийся добавлением к  $M$   $k$ -той строки и  $j$ -того столбца,  $j = \overline{1, n}$

Покажем, что  $\Delta = 0$

Если  $j \leq r$ , то в  $\Delta$  два одинаковых столбца  $\Rightarrow$  по свойству определителя  $\Delta = 0$

Если  $j > r$ , то  $\Delta$  – минор матрицы  $A$  порядка  $r+1 \Rightarrow$  по определению ранга матрицы  $\Delta = 0$

Разложим  $\Delta$  по последнему столбцу  $a_{1j} \cdot A_1 + \dots + a_{rj} \cdot A_r + a_{kj} \cdot A_k = 0$ , где  $A_1, \dots, A_k$  – алгебраическое дополнение соответствующих элементов, причем  $A_k = \pm M \neq 0 \Rightarrow a_{kj} = \frac{A_1}{A_k} \cdot$

$a_{1j} - \dots - \frac{A_r}{A_k} \cdot a_{rj}, j = \overline{1, n}, k > r$

то есть  $a_{kj} = \lambda_1 \cdot a_{1j} + \dots + \lambda_r \cdot a_{rj} \Rightarrow (a_{k1}, \dots, a_{kn}) = \lambda_1 \cdot (a_{11}, \dots, a_{1n}) + \dots + \lambda_r \cdot (a_{r1}, \dots, a_{rn})$

ч.т.д

■

## 8) Сформулируйте и докажите следствие теоремы о базисном миноре для квадратных матриц (критерий невырожденности).

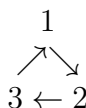
Рассмотрим матрицу  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Следующие условия эквивалентны:

1)  $\det A \neq 0$

2)  $RgA = n$

3) все строки  $A$  л.н.з.

□



$1 \Rightarrow 2$ : Пусть  $\det A \neq 0 \Rightarrow$  в  $A$  есть минор  $n$ -го порядка  $\neq 0 \Rightarrow$  по определению  $RgA = n$

$2 \Rightarrow 3$ : Пусть  $RgA = n \Rightarrow$  Все строки базисны  $\Rightarrow$  по теореме они все л.н.з. (по теореме о базисном миноре)

$3 \Rightarrow 1$ : Пусть все строки  $A$  л.н.з. Предположим, что  $\det A = 0 \Rightarrow RgA < n \Rightarrow$  по крайней мере одна из строк является линейной комбинацией остальных  $\Rightarrow$  по критерию линейной зависимости строки являются л.з. – противоречие

■

## 9) Сформулируйте и докажите критерий существования обратной матрицы (свойства определителя предполагаются известными). Единственна ли обратная матрица? Ответ обоснуйте.

Матрица  $A \in M_n(\mathbb{R})$  имеет обратную (обратима)  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$  (она невырождена)

□

Необходимость

Дано:  $\exists A^{-1}$

Доказать:  $\det A \neq 0$

По определению обратной:  $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

Достаточность

Дано:  $\det A \neq 0$

Доказать:  $\exists A^{-1}$

Рассмотрим матрицу  $B = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$

$\tilde{A}$  – союзная матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

– транспонированная матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы  $A$

Покажем, что  $B = A^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } A \cdot B : [A \cdot B]_{ij} &= \sum_{r=1}^n [A]_{ir} \cdot [B]_{rj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot [\tilde{A}]_{rj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot A_{jr} = \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{cases} \det A, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = [E]_{ij} \end{aligned}$$

■

Если обратная матрица существует, то она единственная.

□

Предположим противоположное:  $\exists B_1$  и  $B_2$  – обратные к  $A$ .

По определению  $B_i \cdot A = A \cdot B_i = E, i = 1, 2$ .

$$B_1 = B_1 \cdot E = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$$

■

## 10) Сформулируйте и докажите теорему о ранге матрицы (теорема о базисном миноре предполагается известной)

Ранг матрицы = максимальному числу ее л.н.з. строк (столбцов)

□

Пусть  $RgA = r$ , максимальное число л.н.з. строк =  $k$

Покажем, что  $k = r$

1) Так как в  $A$  есть  $r$  л.н.з. строк (так как  $RgA = r$ , это базисные строки)

$k \geq r$  2) Вычеркнем в  $A$  все строки, кроме  $k$  л.н.з.  $\Rightarrow$  получим матрицу  $A_1$ . В ней  $k$  строк.

При этом  $RgA_1 = k$  (так как если бы  $RgA_1$  был бы  $< k$ , то среди этих  $k$  строк только часть была бы базисными и какая-то одна строка была бы л.к. остальных  $\Rightarrow$  строки были бы л.з.)

Базисный минор  $A_1$  имеет порядок  $k$  и является не равным 0 минором порядка  $k$  исходной матрицы  $\Rightarrow k \leq r$

Следовательно,  $k = r$

■

## 2-й модуль

### 1) Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли и докажите ее.

СЛАУ  $A \cdot x = b$  совместна  $\Leftrightarrow RgA = Rg(A|b)$

□

Дано: СЛАУ совместна

Доказать:  $RgA = Rg(A|b)$

$$\text{Слау совместна} \Rightarrow \exists x^0 \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} : A \cdot x^0 = b \Leftrightarrow x_1^0 \cdot A_1 + \dots + x_n^0 \cdot A_n = b$$

$A_j$  –  $j$ -тый столбец матрицы  $A$

$\Rightarrow$  столбцы  $A_1, \dots, A_r$  – базисные

столбцы  $A_{r+1}, \dots, A_n$  – их линейные комбинации

$$A_{r+1} = \lambda_{1r+1} \cdot A_1 + \dots + \lambda_{rr+1} \cdot A_r$$

$$A_n = \lambda_{1n} \cdot A_1 + \dots + \lambda_{rn} \cdot A_r$$

$$\Rightarrow b = x_1^0 \cdot A_1 + \dots + x_r^0 \cdot A_r + x_{r+1}^0 \cdot (\lambda_{1r+1} \cdot A_1 + \dots + \lambda_{rr+1} \cdot A_r) + \dots + x_n^0 \cdot (\lambda_{1n} \cdot A_1 + \dots + \lambda_{rn} \cdot A_r) = (x_1^0 + x_{r+1}^0 \cdot \lambda_{1r+1} + \dots + x_n^0 \cdot \lambda_{1n}) \cdot A_1 + \dots + (x_r^0 + x_{r+1}^0 \cdot \lambda_{rr+1} + \dots + x_n^0 \cdot \lambda_{rn}) \cdot A_r$$

то есть  $b$  является линейной комбинацией столбцов  $A_1, \dots, A_r \Rightarrow M$  (базисный минор в матрице  $A$ ) является базисным минором и в  $(A|b) \Rightarrow RgA = Rg(A|b)$  так как

1. он не является нулевым

2. все окаймляющие его миноры = 0, так как из них один из столбцов является линейной комбинацией  $A_1, \dots, A_r$  (для  $A_{r+1}, \dots, A_n$  по определению базисного минора, а для  $b$  показали)

Дано:  $RgA = Rg(A|b)$

Доказать: СЛАУ совместна

Пусть  $RgA = r$ . Пусть  $M$  – базисный минор, расположенный в левом верхнем углу матрицы.

По теореме о базисном миноре столбец  $b$  является линейной комбинацией столбцов  $A_1, \dots, A_r$ .

То есть  $\exists$  числа  $y_1^0, \dots, y_r^0 : b = y_1^0 \cdot A_1 + \dots + y_r^0 \cdot A_r$ .

$$\text{Тогда } y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_r^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \text{решение СЛАУ } A \cdot x = b$$

■

### 2) Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Докажите теорему о существовании ФСР.

Любые  $n - r$  линейно независимых столбцов, являющихся решениями однородной СЛАУ  $A \cdot x = 0$ , где  $n$  – число неизвестных, а  $r = RgA$ , называют фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ  $A \cdot x = 0$

Теорема о существовании ФСР

Рассмотрим СЛАУ  $A \cdot x = 0$

У нее существует  $n - r$  линейно независимых решений, где  $n$  – число неизвестных, а  $r = RgA$

□

Предположим, что базисный минор матрицы  $A$  расположен в левом верхнем углу. Тогда строки  $A_1, \dots, A_r$  – базисные, а  $A_{r+1}, \dots, A_m$  – их линейные комбинации

$$\begin{cases} A_{r+1} = \lambda_1 \cdot A_1 + \dots + \lambda_r \cdot A_r \\ \vdots \\ A_m = \mu_1 \cdot A_1 + \dots + \mu_r \cdot A_r \end{cases}$$

Сделаем элементарные преобразования

$$\begin{cases} A_{r+1} - (\lambda_1 \cdot A_1 + \dots + \lambda_r \cdot A_r) \rightarrow \\ \vdots \\ A_m - (\mu_1 \cdot A_1 + \dots + \mu_r \cdot A_r) \rightarrow \end{cases}$$

Получим матрицу, у которой последние  $m - r$  строк нулевые.

Элементарным преобразованиям строк соответствуют элементарные преобразования уравнений  $\Rightarrow$ СЛАУ эквивалентна.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1r} \cdot x_r = -a_{1r+1} \cdot x_{r+1} - \dots - a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{r1} \cdot x_1 + \dots + a_{rr} \cdot x_r = -a_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \dots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases}$$

Переменные  $x_1, \dots, x_r$ , отвечающие базисным строкам, называют главными (базисными), а

$x_{r+1}, \dots, x_n$  – свободными. (Система уравнений выше – это выражение главных переменных через свободные)

Придадим свободным переменным следующий набор значений:

Первый набор	Второй набор	$(n - r)$ -й набор
$x_{r+1} = 1$	$x_{r+1} = 0$	$x_{r+1} = 0$
$x_{r+2} = 0$	$x_{r+2} = 1$	$x_{r+2} = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n = 0$	$x_n = 0$	$x_n = 1$

Для каждого набора решим СЛАУ относительно  $x_1, \dots, x_r$

Она всегда имеет единственное решение, так как ее определитель  $= M \neq 0$  (базисный минор матрицы  $A$ )

Получим следующие решения:

Для первого набора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \end{pmatrix}$$

Для второго набора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{2r} \end{pmatrix}$$

Для  $(n - r)$ -го набора  $(n - r = k)$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \end{pmatrix}$$

Тогда столбцы:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \Phi_k = \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются решениями исходной СЛАУ

Покажем, что они л.н.з.

Рассмотрим равенство:  $\alpha_1 \cdot \Phi_1 + \dots + \alpha_k \cdot \Phi_k = 0$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k \cdot \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \text{ и это должно быть } = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

По определению  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – л.н.з.  $\Rightarrow$  они образуют ФСР ОСЛАУ  $A \cdot x = 0$

■

**3) Сформулируйте критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей и докажите его.**

Однородная СЛАУ  $A \cdot x = 0$  имеет ненулевое решение  $\Leftrightarrow$  Матрица  $A$  вырождена, то есть  $\det A = 0$

□

Дано:  $A \cdot x = 0$  имеет решение  $x \neq 0$

Доказать:  $\det A = 0$

Предположим противное  $\Rightarrow$  по формуле Крамера СЛАУ имеет единственное решение  $= 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow$  противоречие

Дано:  $\det A = 0$

Доказать:  $\exists$  ненулевое решение СЛАУ  $A \cdot x = 0$

Пусть  $\det A = 0 \Rightarrow \text{Rg} A < n \Rightarrow n - r = k > 0$

По теореме о существовании ФСР  $\exists k$  л.н.з. решений СЛАУ  $A \cdot x = 0$ . Это и есть ненулевое решение.

■

**4) Докажите теорему о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений, то есть о том, что произвольное решение однородной СЛАУ может быть представлено в виде линейной комбинации элементов ФСР.**

Пусть  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – ФСР однородной СЛАУ  $A \cdot x = 0$ . Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде

$x = c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k$ , где  $c_1, \dots, c_k$  – некоторые постоянные

□

Пусть  $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$  – произвольное решение ОСЛАУ  $A \cdot x = 0$

Предположим, что базисный минор матрицы  $A$  расположен в левом верхнем углу матрицы  $A$ . Тогда, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы о существовании ФСР,

получим, что  $A \cdot x = 0$  эквивалентна

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1r} \cdot x_r = -a_{1r+1} \cdot x_{r+1} - \dots - a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{r1} \cdot x_1 + \dots + a_{rr} \cdot x_r = -a_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \dots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases}$$

Решим ее относительно главных (базисных) неизвестных  $x_1, \dots, x_r$  (по формулам Крамера)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ x_r = \alpha_{rr+1} \cdot x_{r+1} + \dots + \alpha_{rn} \cdot x_n \end{cases} \quad (9.1)$$

$\alpha_{ij}$  – некоторые числа

Составим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} x_1^0 & \phi_{11} & \dots & \phi_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^0 & \phi_{1r} & \dots & \phi_{kr} \\ x_{r+1}^0 & \phi_{1r+1} & \dots & \phi_{kr+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & \phi_{1n} & \dots & \phi_{kn} \end{pmatrix}$$

Покажем, что  $RgD = k$

1.  $RgD \geq k$ , так как  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  л.н.з. (это ФСР), а  $RgD =$  максимальному числу л.н.з. столбцов (по теореме о ранге матрицы)

2. Покажем, что  $RgD \leq k$

Столбцы  $x^0, \Phi_1, \dots, \Phi_k$  – решения СЛАУ  $A \cdot x = 0 \Rightarrow$  из (9.1) получаем, что

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \alpha_{1r+1} \cdot x_{r+1}^0 + \dots + \alpha_{1n} \cdot x_n^0 \\ \phi_{11} &= \alpha_{1r+1} \cdot \phi_{1r+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot \phi_{1n} \\ &\vdots \\ \phi_{k1} &= \alpha_{1r+1} \cdot \phi_{kr+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot \phi_{kn} \end{aligned}$$

то есть первая строка  $d_1$  матрицы  $D$  – линейная комбинация строк  $d_{r+1}, \dots, d_n$ :

$$d_1 = \alpha_{1r+1} \cdot d_{r+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot d_n$$

Аналогично с остальными строками вплоть до  $r$ -той:

$$d_r = \alpha_{rr+1} \cdot d_{r+1} + \dots + \alpha_{rn} \cdot d_n$$

Сделаем элементарные преобразования:

$$\begin{cases} d_1 - (\alpha_{1r+1} \cdot d_{r+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot d_n) \rightarrow d_1 \\ \vdots \\ d_r - (\alpha_{rr+1} \cdot d_{r+1} + \dots + \alpha_{rn} \cdot d_n) \rightarrow d_r \end{cases}$$

Получим матрицу  $D_1$ , у которой первые  $r$  строк нулевые.

$$D \sim D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ x_{r+1}^0 \cdot \phi_{1r+1} & \dots & \phi_{kr+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 \cdot \phi_{1n} & \dots & \phi_{kn} \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow RgD_1 \leq n - r = k$$

При элементарных преобразованиях ранг не меняется  $\Rightarrow RgD \leq k$

Мы доказали, что  $RgD = k \Rightarrow$  столбцы  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – базисные (они л.н.з.)  $\Rightarrow$  по теореме о базисном миноре столбец  $x^0$  – их линейная комбинация, то есть существуют числа  $c_1, \dots, c_k$  :  
 $x^0 = c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k$

■

**5) Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и доказите ее (теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений предполагается известной).**

Пусть известно частное решение  $\tilde{x}$  СЛАУ  $A \cdot x = b$ . Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде  $x = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k$ , где  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – ФСР соответствующей однородной СЛАУ, а  $c_1, \dots, c_k$  – некоторые постоянные

□

Пусть  $x^0$  – произвольное решение СЛАУ  $A \cdot x = b \Rightarrow (x^0 - \tilde{x})$  – по свойствам решений решение однородной СЛАУ  $A \cdot x = 0 \Rightarrow$  по теореме о структуре общего решения однородной СЛАУ  $\exists$  постоянные  $c_1, \dots, c_n$ ,

$$x^0 - \tilde{x} = c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k \Rightarrow x^0 = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + c_k \cdot \Phi_k$$

■

**6) Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе трехмерного пространства, и приведите ее вывод.**

Пусть  $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ ,  $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$  – разложение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  по базису. Тогда их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

□

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \\ &= (a_1 \vec{e}_1, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) + (a_2 \vec{e}_2, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) + (a_3 \vec{e}_3, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \\ &= (a_1 \vec{e}_1, b_1 \vec{e}_1) + (a_1 \vec{e}_1, b_2 \vec{e}_2) + (a_1 \vec{e}_1, b_3 \vec{e}_3) + (a_2 \vec{e}_2, b_1 \vec{e}_1) + (a_2 \vec{e}_2, b_2 \vec{e}_2) + (a_2 \vec{e}_2, b_3 \vec{e}_3) + (a_3 \vec{e}_3, b_1 \vec{e}_1) + \\ &+ (a_3 \vec{e}_3, b_2 \vec{e}_2) + (a_3 \vec{e}_3, b_3 \vec{e}_3) = \\ &= a_1, b_1 (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_1, b_2 (\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_1, b_3 (\vec{e}_1, \vec{e}_3) + a_2, b_1 (\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_2, b_2 (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + a_2, b_3 (\vec{e}_2, \vec{e}_3) + a_3, b_1 (\vec{e}_3, \vec{e}_1) + \\ &+ a_3, b_2 (\vec{e}_3, \vec{e}_2) + a_3, b_3 (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = \\ &= (a_1 \ a_2 \ a_3) \cdot \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

**7) Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трехмерного пространства и приведите ее вывод.**

Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – правый ортонормированный базис,  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ,  
 $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ .

$$\text{Тогда } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} (a_y b_z - b_y a_z) + \vec{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} (a_x b_y - a_y b_x)$$

□

Так как  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – правый ортонормированный базис, то

$$\begin{aligned}
\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \\
\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\
\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\
&= a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{k} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{i} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} = \\
&= \vec{i} (a_y b_z - b_y a_z) + \vec{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} (a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

■

**8) Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве задает плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.**

1. Любая плоскость в пространстве определяется уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A, B, C, D$  – некоторые числа

2. Любое уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ , определяет в пространстве плоскость

□

1. Рассмотрим плоскость  $\pi$ . Пусть точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ей принадлежит. Рассмотрим вектор  $\vec{n} \perp \pi$ . Пусть  $\vec{n} = (A, B, C)$ .

$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ , то есть  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ . Таким образом, координаты точки  $M$  удовлетворяют уравнению  $Ax + By + Cz + D = 0$

2. Рассмотрим уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ . Оно имеет хотя бы одно решение (например, если  $A \neq 0$ , то  $x_0 = -\frac{D}{A}, y_0 = z_0 = 0$ ). Обозначим за  $M_0$  точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . Пусть точка  $M(x, y, z)$  удовлетворяет уравнению  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Вычтем из него равенство  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ :  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ , где  $\vec{n} = (A, B, C) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$  точка  $M$  лежит в плоскости, проходящей через  $M_0$  и перпендикулярной вектору  $\vec{n} \Rightarrow$  уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$  определяет плоскость

■

**9) Выпишите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости и приведите ее вывод.**

Рассмотрим плоскость  $P: Ax + By + Cz + D = 0$  и точку  $M(x_0, y_0, z_0)$ . Найдем  $\rho(M, L)$  – расстояние от точки  $M$  до плоскости  $P$ . Пусть  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  – произвольная точка плоскости.

$$\begin{aligned}
\text{Тогда } \rho(M, P) &= |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M}| = \frac{|(\overrightarrow{M_1M}, \vec{n})|}{|\vec{n}|} = (\text{в ОНБ}) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\
&= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ так как } M_1 \in P \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D
\end{aligned}$$

**10) Выпишите формулу Муавра и докажите ее.**

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i \cdot \sin n\phi), n \in \mathbb{N}$$

□

$n = 2$  – база индукции

$$z^2 = z \cdot z = r \cdot r \cdot (\cos(\phi + \phi) + i \cdot \sin(\phi + \phi)) = r^2 \cdot (\cos 2\phi + i \cdot \sin 2\phi)$$

Пусть для  $n = k$  это верно, тогда:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k \cdot r \cdot (\cos k\phi + i \cdot \sin k\phi) \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi) = r^{k+1} \cdot (\cos k\phi \cdot \cos \phi - \sin k\phi \cdot \sin \phi + i \cdot \cos k\phi \cdot \sin \phi + i \cdot \sin k\phi \cdot \cos \phi) = r^{k+1} \cdot (\cos(k+1)\phi + i \cdot \sin(k+1)\phi)$$

$\Rightarrow$  по принципу математической индукции формула Муавра верна  $\forall n \in \mathbb{N}$

■

### 3-й модуль

1) Сформулируйте и докажите утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.

$\forall$  подгруппа в  $(\mathbb{Z}, +)$  имеет вид  $k\mathbb{Z}$  для некоторых  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

□

Если  $H = \{0\}$ , то положим  $k = 0$ . Иначе:  $k = \min(H \cap \mathbb{N}) \rightarrow$  и очевидно, что  $k\mathbb{Z} \subseteq H$ . Если возьмем  $a \in H$  и разделим  $a$  на  $k$  с остатком:  $a = qk + r$ , где  $0 \leq r < k \Rightarrow r = a - q \cdot k \in H \Rightarrow r = 0 \Rightarrow a = q \cdot k$ , то есть всегда  $H = k\mathbb{Z}$

■

2) Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа (включая доказательство лемм). Сформулируйте три следствия из теоремы Лагранжа.

Лемма 1:  $\forall g_1, g_2 \in G$  либо  $g_1H = g_2H$ , либо  $g_1H \cap g_2H = \emptyset$

□

Если  $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$ , то  $g_1H = g_2h_2h_1^{-1}H \subseteq g_2H$  и аналогично в обратную сторону

$\exists h_1, h_2 : g_1h_1 = g_2h_2$ , так как пересечение не пусто  $\Rightarrow g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$

■

Лемма 2:  $|gH| = |H| \forall g \in G, \forall$  конечной подгруппы  $H$

□

$|gH| \leq |H|$ , так как  $gH = \{gh | h \in H\}$

Если  $gh_1 = gh_2 \Rightarrow g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow$  нет совпадений и  $|gH| = |H|$

■

Теорема Лагранжа:

Пусть  $G$  – конечная группа и  $H \subseteq G$  – подгруппа. Тогда  $|G| = |H| \cdot [G : H]$

□

$\forall$  элемент группы  $G$  лежит в своем левом смежном классе по  $H$  и смежные классы не пересекаются (по лемме 1) и  $\forall$  из них содержит  $|H|$  элементов (по лемме 2)

■

Следствие 1: Пусть  $G$  – конечная группа и  $g \in G$ . Тогда  $\text{ord}(g)$  делит  $|G|$

Следствие 2: Пусть  $G$  – конечная группа. Тогда  $g^{|G|} = e$

Следствие 3 (малая теорема Ферма): Пусть  $\bar{a}$  – ненулевой вычет по простому модулю  $p$ .

Тогда  $\bar{a}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

3) Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.

Пусть  $H \subseteq G$  – подгруппа в группе  $G$ . Тогда 3 условия эквивалентны:

1.  $H$  нормальна

2.  $\forall g \in G \ gHg^{-1} \subseteq H$  ( $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$ )

3.  $\forall g \in G \ gHg^{-1} = H$

□

Схема: 
$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 3 & \leftarrow & 2 \end{array}$$

$\boxed{1 \rightarrow 2}$  Пусть  $h \in H$  и  $g \in G$ . Из определения  $\Rightarrow \exists h', h'' \in H : gh = h'g$

$ghg^{-1} = h' \in H$ , то есть  $gHg^{-1} \subseteq H$

$\boxed{2 \rightarrow 3}$  Остается показать, что  $H \subseteq gHg^{-1}$ . Для  $h \in H$  имеем  $h = gg^{-1}hgg^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$ , так как  $g^{-1}hg \in H$  (вместо  $g$  взяли  $g^{-1}$ )

$\boxed{3 \rightarrow 1} \quad \forall g \in G$  по пункту 3  $gH = gHg^{-1}g \subseteq Hg$ . Аналогично  $Hg \subseteq gH \Rightarrow Hg = gH$  – по определению это нормальность. ■

**4) Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.**

$H$  – нормальная подгруппа  $\Leftrightarrow H = \text{Ker } f$ , где  $f$  – некоторый гомоморфизм

□

Необходимость

Дано:  $H$  – нормальная подгруппа

Нужно доказать:  $\exists f$  – гомоморфизм:  $H = \text{Ker } f$

Это естественный гомоморфизм, сопоставляющий  $\forall$  элементу  $a \in G$  его смежный класс  $aH$

$\varepsilon : G \rightarrow G/H$

Тогда  $\text{Ker } \varepsilon = eH = H$

Достаточность

$H = \text{Ker } f$

Ранее показали, что  $\text{Ker } f$  – подгруппа.

Покажем, что  $\text{Ker } f$  – нормальная подгруппа. Пусть  $f : G \rightarrow F$  – гомоморфизм и  $z \in \text{Ker } f$ .

Тогда  $f(g^{-1}zg) = f(g^{-1})f(z)f(g) = f(g^{-1})ef(g) = f(g^{-1}g) = f(e_G) = e_F$ . То есть  $\forall g \in G : g^{-1}Hg \subseteq H$ , где  $H = \text{Ker } f \Rightarrow$  по критерию  $H = \text{Ker } f$  – нормальна ■

**5) Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме групп.**

Пусть  $f : G \rightarrow F$  – гомоморфизм групп. Тогда группа  $\text{Im } f = \{a \in F | \exists g \in G, f(g) = a\}$  изоморфна фактор-группе  $G/\text{Ker } f$

$\text{Ker } f = \{g \in G | f(g) = e_F\}$  ( $\text{Ker } f$  – ядро гомоморфизма)

$\boxed{G/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f}$

□

Рассмотрим  $\tau : G/\text{Ker } f \rightarrow F$ , заданное формулой  $\tau(g\text{Ker}(f)) = f(g) \in F$

$(g\text{Ker}(f) = gH, \text{ где } H = \text{Ker } f)$

Проверим корректность:

$\forall h_1, h_2 \in \text{Ker } f$

$f(gh_1) = f(g)f(h_1) = f(g)e_F = f(g) = f(g)f(h_2) = f(gh_2)$ , то есть значения  $\tau$  не зависят от выбора представителя смежного класса.

Отображение  $\tau$  сюръективно по построению и инъективно в силу того, что

$f(g) = e_F \Leftrightarrow g \in \text{Ker } f$  (то есть  $g\text{Ker } f = \text{Ker } f$ )

Остается проверить, что  $\tau$  – гомоморфизм

$\tau((g\text{Ker } f) \cdot (g'\text{Ker } f)) = \tau(gg'\text{Ker } f) = f(gg') = f(g) \cdot f(g') = \tau(g\text{Ker } f) \cdot \tau(g'\text{Ker } f)$  ■

**6) Докажите, что центр группы является ее нормальной подгруппой.**

$Z(G)$  является нормальной подгруппой  $G$

□

1. Покажем, что  $Z(G)$  – подгруппа, то есть  $\forall a, b \in Z(G) a \cdot b^{-1} \in Z(G)$

$ab^{-1}g = ab^{-1}(g^{-1})^{-1} = a(g^{-1}b)^{-1} = a(bg^{-1})^{-1} = a(g^{-1})^{-1}b^{-1} = agb^{-1} = gab^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \in Z(G)$

2. Если  $a \in Z(G)$  и  $g, b \in G$

$g^{-1}agb = g^{-1}gab = ab = ba = bag^{-1}g = bg^{-1}ag$ , то есть если элемент  $a \in Z(G)$ , то  $g^{-1}ag$  тоже  $\in Z(G)$ .

А это по критерию означает нормальность. ■

7) Сформулируйте и докажите утверждение о том, чему изоморфна факторгруппа группы по ее центру.

$$G/Z(G) \simeq Inn(G)$$

□

Рассмотрим отображение  $f : G \rightarrow Aut(G)$ , которое задается формулой  $\phi_g(h) = ghg^{-1}$ . Тогда  $Im f = Inn(G)$  по определению.  $Ker f = Z(G)$ , так как  $ghg^{-1} = ehe^{-1} = h \Leftrightarrow gh = hg$   
 $\Rightarrow$  по теореме о гомоморфизме  $G/Ker f \simeq Im f$ , то есть  $G/Z(G) \simeq Inn(G)$

■

8) Сформулируйте и докажите теорему Кэли.

$\forall$  конечная группа порядка  $n$  изоморфна некоторой подгруппе группы  $S_n$

□

Пусть  $|G| = n$ .  $\forall a \in G$  рассмотрим отображение  $L_a : G \rightarrow G$  по формуле:  $L_a(g) = a \cdot g$

Пусть  $e, g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$  – элементы группы. Тогда  $a, ag_1, ag_2, \dots, ag_{n-1}$  – те же элементы, но в другом порядке (если  $ag_i = ag_j \Rightarrow g_i = g_j$ , так как  $\exists a^{-1} \forall a \in G$ )

$\Rightarrow L_a$  – биективное отображение  $G$  в себя (то есть перестановка элементов  $g$ )

Эти отображения можно умножать (взяв композицию)

Есть единичный элемент:  $L_e$

Обратным элементом к  $L_a$  является  $L_{a^{-1}}$

Из ассоциативности в  $G \Rightarrow L_{ab}(g) = (a \cdot b)g = a(b \cdot g) = L_a(L_b(g)) \Rightarrow$  множество  $L_e, L_{g_1}, L_{g_2}, \dots, L_{g_{n-1}}$  образует подгруппу  $H$  в множестве всех биективных отображений  $G$  в себя, то есть  $S(G)$

А изоморфизм устроен так:  $a \mapsto L_a \in H$  это биекция и гомоморфизм

■

9) Сформулируйте и докажите лемму о том, чем является ядро гомоморфизма колец.

$Ker \phi$  – идеал в  $K_1$

□

$\phi$  – гомоморфизм групп (по сложению)  $(K_1, +)$  и  $(K_2, +) \Rightarrow (Ker \phi, +)$  – нормальная подгруппа

Покажем, что  $ra \in Ker \phi, ar \in Ker \phi$

$\forall a \in Ker \phi, \forall r \in K_1$

$$\phi(ra) = \phi(r)\phi(a) = \phi(r) \cdot 0 = 0 \Rightarrow ra \in Ker \phi$$

Аналогично с  $ar$

■

10) Сформулируйте и докажите критерий того, что кольцо вычетов по модулю  $p$  является полем.

$\mathbb{Z}_k$  – поле  $\Leftrightarrow k$  – простое

□

$\mathbb{Z}_k$  – коммутативное кольцо с 1.

Если  $k = p$  – простое, то в  $\mathbb{Z}_p^*$  (то есть  $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$  с операцией умножения) все элементы обратимы.

Рассмотрим  $\overline{1}, \dots, \overline{p-1}$

Возьмем остаток  $\overline{s}$  и докажем, что  $\exists \overline{s}^{-1}$

Рассмотрим  $\{\overline{s}, \overline{s} \cdot \overline{2}, \overline{s} \cdot \overline{3}, \dots, \overline{s} \cdot \overline{p-1}\} = A$ . Если  $\overline{s} \neq 0 \Rightarrow \overline{k} \cdot \overline{s} \neq 0 \pmod p \Rightarrow$  в  $A$  нет нуля. Более того, это те же элементы, но в другом порядке. Если  $\overline{k} \cdot \overline{s} = \overline{q} \cdot \overline{s} \Rightarrow (\overline{k} - \overline{q}) \cdot \overline{s} = \overline{0} \Rightarrow \overline{k} - \overline{q} = \overline{0} \Rightarrow$  в наборе  $\overline{s}, \overline{s} \cdot \overline{2}, \overline{s} \cdot \overline{3}, \dots, \overline{s} \cdot \overline{p-1}$  найдется  $1 \Rightarrow \overline{s} \cdot \overline{s}' = 1$ , то есть  $\overline{s}$  обратим

■

**11) Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.**

Пусть  $F$  – поле.  $F_0$  – его простое подполе. Тогда:

1. Если  $\text{char} F = p > 0$ , то  $F_0 \simeq \mathbb{Z}_p$
2. Если  $\text{char} F = 0$ , то  $F_0 \simeq \mathbb{Q}$

□

$\langle 1 \rangle \subseteq (F, +)$ , где  $\langle 1 \rangle$  – циклическая подгруппа по сложению, порожденная 1 (то есть нейтральным элементом по умножению)

$|\langle 1 \rangle| = \text{char} F$

$\langle 1 \rangle$  – подкольцо в  $F$ . Так как  $\forall$  подполе  $F$  содержит 1  $\Rightarrow$  оно содержит и  $\langle 1 \rangle \subseteq F_0$

1. Если  $\text{char} F = p > 0$ , то  $\langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_p$  – поле  $\Rightarrow F_0 = \langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_p$
2. Если  $\text{char} F = 0$ , то  $\langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}$  – не поле. Но  $F_0$  содержит и все дроби вида  $\frac{a}{b}$ , где  $a, b \in \langle 1 \rangle$ ,  $b \neq 0$  и они образуют поле, изоморфное  $\mathbb{Q}$  ( $\mathbb{Q}$  – поле частных для кольца  $\mathbb{Z}$ )

■

**12) Выпишите и докажите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.**

Пусть  $x \in V$ ,  $A$  и  $B$  – базисы в  $V$ .  $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix}$  – столбец координат вектора  $x$  в базисе  $A$ ,

$x^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ \vdots \\ x_n^b \end{pmatrix}$  – столбец координат вектора  $x$  в базисе  $B$ . Тогда  $x^b = T_{A \rightarrow B}^{-1} \cdot x^a$

□

Докажем, что  $x^a = T_{A \rightarrow B} \cdot x^b$

$$x = \mathbb{A} \cdot x^a = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix} = \mathbb{B} \cdot x^b$$

$\mathbb{B} = \mathbb{A} \cdot T_{A \rightarrow B}$  – определение матрицы перехода в матричной форме

$\mathbb{A} \cdot x^a = \mathbb{A} \cdot T_{A \rightarrow B} \cdot x^b \Rightarrow$  так как разложение по базису единственно, то  $x^a = T_{A \rightarrow B} x^b$

■

**13) Что такое сумма и прямая сумма подпространств? Сформулируйте и докажите критерий того, что сумма подпространств является прямой.**

$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$  называется суммой подпространств  $H_1$  и  $H_2$

$H_1 + H_2$  называется прямой суммой (и обозначается  $H_1 \oplus H_2$ ), если  $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ , то есть тривиально

$H_1 + H_2$  является прямой  $\Leftrightarrow \forall x \in H_1 + H_2$  его представление в виде  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$ , единственно

□

$\Rightarrow$  Пусть сумма прямая, то есть  $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ . Предположим, что  $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$  – 2 разных разложения. Тогда  $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$  (так как пересечение тривиально)

$\Leftarrow$  Пусть представление единственно:  $x = x_1 + x_2$ . Если мы предположим, что  $\exists x \neq 0 : x \in$

$H_1 \cap H_2$ , то  $\forall \lambda \in F \lambda x \in H_1$  и  $\lambda x \in H_2$ .  $\forall \beta \in F x = \overbrace{(1-\beta)x}^{\in H_1} + \underbrace{\beta x}_{\in H_2} \Rightarrow$  представление не

единственно

■

**14) Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.**

Пусть  $H_1$  и  $H_2$  – подпространства. Тогда

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

□

Базис  $H_1 \cap H_2$  можно дополнить как до базиса  $H_1$ , так и до базиса  $H_2$ . Пусть  $\dim H_1 = n$ ,  $\dim H_2 = m$ ,  $\dim H_1 \cap H_2 = r$ . Тогда

$$\underbrace{e_1, \dots, e_2}_{\text{базис } H_1 \cap H_2}, \quad \underbrace{\nu_1, \dots, \nu_{n-r}}_{\text{дополнение до базиса в } H_1}, \quad \underbrace{w_1, \dots, w_{m-r}}_{\text{дополнение до базиса в } H_2} \quad - \text{ базис в } H_1 + H_2$$

базис  $H_1 \cap H_2$  дополнение до базиса в  $H_1$  дополнение до базиса в  $H_2$

$$\Rightarrow \dim(H_1 + H_2) = r + (n - r) + (m - r) = n + m - r = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

■

**15) Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса? Ответ обоснуйте.**

Пусть  $U$  – матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $f$ . Пусть  $B_e$  – матрица билинейной формы в базисе  $e$ ,  $B_f$  – матрица билинейной формы в базисе  $f$ . Тогда:  $B_f = U^T B_e U$

□

$$b(x, y) = (x^e)^T B_e y_e = (Ux^f)^T B_e (Uy^f) = (x^f)^T \underbrace{U^T B_e U}_{B_f} y^f = (x^f)^T B_f y^f \quad (\text{где } x^e - \text{столбец координат } x \text{ в базисе } e)$$

$$\Rightarrow B_f = U^T B_e U \quad (\text{подставляем все базисные векторы})$$

■

При переходе от базиса  $e$  к базису  $e'$  линейного пространства  $V$  матрица квадратичной формы меняется следующим образом:  $A' = S^T A S$ , где  $S$  – матрица перехода от  $e$  к  $e'$

□

$$x = Sx' \quad (\text{так как } x' = S^{-1}x)$$

$$Q(x) = x^T A x = (Sx')^T A (Sx') = (x')^T (S^T A S) x' = (x')^T A' x' \Rightarrow A' = S^T A S \quad (\text{так как вместо } x \text{ можно брать все элементы базиса})$$

■

**16) Сформулируйте и докажите (включая лемму) теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы.**

Лемма: Пусть  $A, S \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $\det S \neq 0$ . Тогда  $RgAS = RgA = RgSA$

□

$RgAS \leq RgA$ , так как столбцы матрицы  $AS$  – это линейная композиция столбцов матрицы  $A$ ,  $\text{ранг} = \text{максимальному количеству л.н.з. столбцов}$

$$RgA = RgA \cdot S \cdot S^{-1} \leq RgAS \Rightarrow RgA = RgAS$$

■

Теорема об инвариантности ранга:

Пусть  $Q$  – квадратичная форма на линейном пространстве  $V$ ;  $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $b = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Пусть  $A$  – матрица  $Q$  в базисе  $a$ ,  $B$  – матрица  $Q$  в базисе  $b$ . Тогда  $RgA = RgB$

□

$$B = S^T A S, \quad S - \text{матрица перехода от } a \text{ к } b$$

$S$  – невырождена  $\Rightarrow$  по лемме при умножении на невырожденные матрицы  $S$  и  $S^T$  ранг не меняется  $\Rightarrow RgA = RgB$

■

**17) Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса и докажите ее.**

Пусть  $\varphi$  – линейное отображение из линейного пространства  $V_1$  в линейное пространство  $V_2$ . Пусть  $A_{E_1 E_2}$  – матрица линейного отображения в паре базисов:  $E_1$  в пространстве  $V_1$  и  $E_2$  в пространстве  $V_2$  и пусть  $T_1$  – матрица перехода от  $E_1$  к  $E'_1$ ,  $T_2$  – матрица перехода от  $E_2$  к  $E'_2$ . Тогда  $A_{E'_1 E'_2} = T_2^{-1} A_{E_1 E_2} T_1$

□

$$X^{E'_1} = T_1^{-1} x^{E_1}; Y^{E'_2} = T_2^{-1} x^{E_2}$$

Пусть  $y$  – образ  $x$  под действием  $\varphi$ . Тогда

$$Y^{E_2} = A_{E_1 E_2} X^{E_1} \text{ и } Y^{E'_2} = A_{E'_1 E'_2} X^{E'_1} \Rightarrow T_2^{-1} Y^{E_2} = A_{E'_1 E'_2} T_1^{-1} X^{E_1} \Rightarrow Y^{E_2} = \underbrace{T_2 A_{E'_1 E'_2} T_1^{-1}}_{A_{E_1 E_2}} X^{E_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{E_1 E_2} = T_2 A_{E'_1 E'_2} T_1^{-1}$$

■

**18) Сформулируйте и докажите теорему о том, что действие линейного оператора в конечномерном пространстве полностью определяется матрицей линейного оператора.**

Пусть  $\varphi$  – линейный оператор в пространстве  $V$ ,  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  – базис в  $V$ ,  $x \in V$  и  $x^e = (x_1, \dots, x_n)^T$  – столбец координат вектора  $x$  в базисе  $e$ . Пусть  $A_e$  – матрица оператора  $\varphi$  в базисе  $e$ .  $(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e$

□

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) + \dots + x_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) e_1 + \dots + (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) e_n$$

$$\Rightarrow (\varphi(x))^e = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n \end{pmatrix} = (\text{по матричному умножению}) = A_e x^e$$

■

**19) Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.**

Пусть  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  – линейное отображение. Тогда  $\dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi = \dim V_2 = n$

□

Выберем базис в  $V_1 : e = \{e_1, \dots, e_m\}$ .  $\forall x \in V_1$  представляется в виде  $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$

$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_m \varphi(e_m)$ .  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)$  – столбцы матрицы  $A$  линейного отображения.

То есть  $\text{Im} \varphi = L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m))$

$$\Rightarrow \dim \text{Im} \varphi = \text{Rg} A$$

Ядро  $\varphi$  описывается системой  $Ax = 0$ . Это однородная СЛАУ и размерность пространства ее решений (число элементов ФСР) равна  $n - \text{Rg} A = n - \dim \text{Im} \varphi = \dim \text{Ker} \varphi$

■



#### 4-й модуль

### 1) Сформулируйте и докажите утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

$\lambda$  – собственное значение линейного оператора  $\Leftrightarrow \lambda$  – корень характеристического уравнения (над алгебраически замкнутым полем)

□

Необходимость

Дано:  $\lambda \in \text{спектру}$

Доказать:  $\lambda$  – корень  $\chi_A(\lambda) = 0$

$\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$ , то есть  $Ax = \lambda Ix$ , где  $I$  – тождественный оператор

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (1)$$

Запишем равенство (1) в некотором базисе:  $(A_e - \lambda E)x^e = 0$

Эта однородная СЛАУ имеет ненулевое решение  $\Rightarrow \det(A_e - \lambda E) = 0$

А это и есть  $\chi_A(\lambda) = 0$ , то есть  $\lambda$  – корень характеристического уравнения

Достаточность

Дано:  $\lambda$  – корень  $\chi_A(\lambda) = 0$

Доказать:  $\lambda$  – собственное значение  $A$

Если  $\lambda$  – корень, то в заданном базисе выписывается равенство  $\det(A_e - \lambda E) = 0$

$\Rightarrow$  соответствующая СЛАУ с матрицей  $A_e - \lambda E$  имеет ненулевое решение  $x^e$ . Это решение – набор координат некоторого вектора, для которого выполняется (1) и, соответственно,

$Ax = \lambda x, x \neq 0$ , то есть  $x$  – собственный вектор, а  $\lambda$  – собственное значение

■

### 2) Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям.

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  – собственные значения линейного оператора  $A, \lambda_i \neq \lambda_j$ , а  $v_1, \dots, v_k$  – соответствующие собственные векторы. Тогда  $v_1, \dots, v_k$  – л.н.з., то есть собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, л.н.з.

□

Применим принцип математической индукции. При  $k = 1$  – верно, так как собственный вектор по определению  $\neq 0$  и, соответственно, л.н.з.

Пусть утверждение верно для  $k = m$

Добавим еще один собственный вектор  $e_{m+1}$ , отвечающий  $\lambda_{m+1}$ . Докажем, что система  $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}$  осталась л.н.з. Рассмотрим равенство: (2)  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} e_{m+1} = 0$ . К (2) применим

оператор  $A : \alpha_1 A e_1 + \dots + \alpha_m A e_m + \alpha_{m+1} A e_{m+1} = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m e_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} e_{m+1} \quad (3)$$

Умножим (2) на  $\lambda_{m+1}$  и вычтем из (3):

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) e_1 + \dots + \alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) e_m = 0$$

так как  $\lambda_i$  все различны, а  $e_1, \dots, e_m$  – л.н.з.

$$\begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ можно записать в виде } \alpha_{m+1} e_{m+1} = 0, \text{ а так как}$$

$e_{m+1}$  – собственный вектор, то  $e_{m+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$  по определению линейной независимости  $e_1, \dots, e_{m+1}$  – л.н.з.

■

### 3) Сформулируйте и докажите критерий диагональности матрицы оператора.

Матрица линейного оператора  $A$  является диагональной в данном базисе  $\Leftrightarrow$  все векторы этого базиса являются собственными векторами для  $A$

□

Необходимость

Дано:  $A_e$  – диагональная

Доказать:  $e$  состоит из собственных векторов  $A$

Пусть  $A_e$  – матрица  $A$ . По определению в  $j$ -м столбце  $A_e$  стоят координаты вектора  $A(e_j)$ . Если матрица диагональна, то  $j$ -й столбец имеет вид  $(0, \dots, \lambda_j, 0, \dots, 0)^T$ , то есть

$A_{e_j} = 0 + \dots + 0 + \lambda_j e_j + 0 + \dots + 0$ , то есть по определению  $e_j$  – собственный вектор с собственным значением  $= \lambda_j$ .  $e_j \neq 0$ , так как он в базисе

$\Rightarrow$  все  $e_j$  – базисные, а на диагонали – собственные значения

Достаточность

Дано:  $\{e_1, \dots, e_n\}$  – состоит из собственных векторов

Доказать:  $A_e$  – диагональна

$A_{e_j} = \lambda_j e_j \Rightarrow$  в матрице линейного оператора по определению все элементы матрицы линейного оператора равны 0, кроме диагональных

■

**4) Каким свойством обладает оператор в  $n$ -мерном вещественном пространстве, у которого есть  $n$  различных действительных корней? Ответ обоснуйте.**

Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в  $V$ ,

$\dim V = n$ , имеет  $n$  попарно различных корней, лежащих в поле, над которым рассматривается  $V$ , то оператор диагонализирuem

□

Если  $\lambda_i \in \mathbb{F}$ , то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор  $v_i$ . Система векторов  $v_1, \dots, v_n$  будет л.н.з., а их число  $= \dim V \Rightarrow$  они образуют базис в  $V$  из собственных векторов  $\Rightarrow$  по критерию оператор диагонализирuem

■

**5) Выпишите и докажите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.**

Пусть  $e$  и  $g$  – два базиса в  $V$ . Тогда  $[f]_g = [f]_e T_{e \rightarrow g}$

□

$[f]_g x_g = [f]_e x_e$ . Но  $x_g = T_{e \rightarrow g}^{-1} x_e$ , то есть  $x_e = T_{e \rightarrow g} x_g \Rightarrow [f]_g x_g = [f]_e T_{e \rightarrow g} x_g$ . Разложение по базису единственно  $\Rightarrow [f]_g = [f]_e T_{e \rightarrow g}$

■

**6) Выпишите и докажите неравенство Коши-Буняковского. Выпишите и докажите неравенство треугольника.**

Теорема Коши-Буняковского

$\forall x, y \in E$  справедливо неравенство  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

□

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda(x, \lambda x - y) - (y, \lambda x - y) = \\ = \lambda^2(x, x) - \lambda(x, y) - \lambda(y, x) + (y, y) = \lambda^2\|x\|^2 - 2(x, y)\lambda + \|y\|^2$$

$\forall \lambda \Rightarrow D \leq 0$

$$D = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

$$(x, y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

■

Неравенство треугольника

$$\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|x\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \text{ и норма всегда } \geq 0$$

■

**7) Докажите теорему о том, что евклидово пространство можно представить в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения**

$H^\perp$  является линейным подпространством в  $V$  и  $V = H \oplus H^\perp$

$$(\Rightarrow \dim V = \dim H + \dim H^\perp)$$

□

$$\forall x, y \in H^\perp \quad \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad h \in H$$

$$(x + y, h) = (x, h) + (y, h) = 0 + 0 \Rightarrow x + y \in H^\perp$$

$$(\alpha x, h) = \alpha(x, h) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x \in H^\perp$$

$\Rightarrow H^\perp$  является подпространством  $\Rightarrow$  можно рассматривать  $H + H^\perp$

Сумма прямая, так как если  $x \in H \cap H^\perp \Rightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , то есть  $H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow$  сумма прямая

Пусть  $f_1, \dots, f_m$  – ОНБ в  $H$ , дополним его до ОНБ в  $V$  векторами  $f_{m+1}, \dots, f_n$ . Применим ортогонализацию Грама-Шмидта:

$$f_1, \dots, f_m, e_{m+1}, \dots, e_n \quad (e_{m+1}, \dots, e_n \text{ ортогональны каждому вектору } f_1, \dots, f_m)$$

$$\Rightarrow e_{m+1}, \dots, e_n \text{ ортогональны всему } H$$

$\forall x \in V$  можно представить в виде:

$$x = \underbrace{x_1 f_1 + \dots + x_m f_m}_{y \in H} + \underbrace{x_{m+1} e_{m+1} + \dots + x_n e_n}_{z \in H^\perp}$$

то есть  $\forall x \in V : x = y + z, y \in H, z \in H^\perp$ , то есть  $V = H \oplus H^\perp$

■

**8) Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису и докажите ее. Что происходит с определителем матрицы Грама при применении процесса ортогонализации Грама-Шмидта? Что можно сказать про знак определителя матрицы Грама? Ответ обоснуйте.**

Матрицы Грама двух базисов  $e$  и  $e'$  связаны следующим соотношением:  $\Gamma' = U^T \Gamma U$ , где  $U$  – матрица перехода от  $e$  к  $e'$ . Верно, так как  $\Gamma$  – матрица билинейной формы

Определитель матрицы Грама (грамиан) не изменяется при применении процесса ортогонализации Грама-Шмидта, то есть  $Gr(a_1, \dots, a_n) = \det \Gamma = (b_1, b_1) \dots (b_n, b_n) = \|b_1\|^2 \dots \|b_n\|^2$

□

$$a_1 = b_1$$

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

$$\Rightarrow \text{матрица } V_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det V_{a \rightarrow b} = 1 \Rightarrow \det \Gamma'_b = \det(U^T \Gamma U) = \det U^T \det \Gamma \det U = \det \Gamma$$

■

$$\det \Gamma > 0$$

□

$\det \Gamma' = \det \Gamma \overbrace{(\det U)^2}^{>0}$ . Перейдем в ОНБ. В нем  $\Gamma' = E$ . Тогда  $\det E = 1 = \det \Gamma \cdot \underbrace{(\det U)^2}_{>0} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \det \Gamma > 0$

■

**9) Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости набора векторов с помощью матрицы Грама.**

Векторы  $a_1, \dots, a_k \in E$  – л.н.з.  $\Leftrightarrow \det \Gamma_{k \times k} \neq 0$

□

Пусть  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$ . Умножим скалярно на векторы  $a_1, \dots, a_k$

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

то есть  $\Gamma_{k \times k} \cdot \alpha = 0$ , где  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

Это однородная СЛАУ с квадратной матрицей. У нее не существует нетривиального решения (тогда векторы л.н.з.)  $\Leftrightarrow \det \Gamma_{k \times k} \neq 0$

■

**10) Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов, и докажите ее.**

Пусть  $H = \underbrace{\langle a_1, \dots, a_k \rangle}_{\text{л.н.з.}}$ . Тогда  $\text{пр}_H x = A(A^T A)^{-1} A^T x$ , где  $A$  – матрица, составленная из столбцов

$$a_1, \dots, a_k$$

□

$$n = \text{пр}_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \in H \quad (\text{то есть } x = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k}_h + h^\perp)$$

Последовательно умножим скалярно на  $a_1, \dots, a_k$ . Заметим, что  $(a_i, h^\perp) = 0 \Rightarrow$  получаем СЛАУ относительно  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ :

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = (a_1, x) \\ \dots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a_k, x) \end{cases}$$

В матричной форме:  $\underbrace{A^T A}_{\Gamma_{k \times k}} \cdot \alpha = A^T x, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

Так как  $a_1, \dots, a_k$  л.н.з.  $\Rightarrow \det \underbrace{A^T A}_{\Gamma_{k \times k}} \neq 0 \Rightarrow \exists (A^T A)^{-1} \Rightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T x$

$$\text{пр}_H x = A \cdot \alpha = a_1 \alpha_1 + \dots + a_k \alpha_k \Rightarrow \text{пр}_H x = A(A^T A)^{-1} A^T x$$

■

**11) Докажите что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор.**

$\forall$  линейного оператора  $A : E \rightarrow E$   $\exists!$  сопряженный оператор  $A^* : E \rightarrow E$ , причем его матрицей будет матрица  $(A^*)_b = \Gamma^{-1}(A)_b^T \Gamma$ , где  $\Gamma$  – матрица Грама базиса  $b$ .

□

Покажем, что линейный оператор с матрицей  $B = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$  ( $= A^T$  для ОНБ) является сопряженным к данному линейному оператору  $A$ . Для этого проверим выполнение равенства:

$$(Ax, y) = (x, By) \quad \forall x, y \in E$$

Пусть  $x^b, y^b$  – столбцы координат векторов  $x$  и  $y$  в базисе  $b$ . Тогда по теореме  $(A_x)^b = A_b \cdot x^b \Rightarrow ((Ax)^b)^T \cdot \Gamma \cdot y^b = (x^b)^T \cdot \Gamma \cdot (By)^b \leftarrow$  матричная форма скалярного произведения

$$(x^b)^T A_b^T \Gamma y^b = (x^b)^T \Gamma B_b y^b$$

По лемме  $\Gamma B_b = A_b^T \Gamma$

Так как базис состоит из л.н.з. векторов, то  $\exists \Gamma^{-1}$  и  $\Rightarrow B = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$

■

## 12) Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих $p$ разным собственным значениям.

Собственные векторы самосопряженного линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны

□

Пусть:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad x_1 \neq 0$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad x_2 \neq 0$$

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2)$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$$

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2), \text{ так как } A \text{ самосопряжен}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0 \Rightarrow \text{они ортогональны}$$

■

## 13) Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора? Ответ обоснуйте.

Все собственные значения самосопряженного оператора являются действительными числами

□

Пусть  $\lambda \in \mathbb{C}$  – корень  $\chi_A(\lambda) = 0$ , то есть  $\det(a - \lambda E) = 0$ . Тогда СЛАУ  $(A - \lambda E)x = 0$  (1) имеет ненулевое решение  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , состоящее из  $x_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$ . Рассмотрим  $\bar{x}$  – столбец, состоящий из  $\bar{x}_k$ . Умножим (1) на  $\bar{x}^T = x^*$  слева:

$$\bar{x}^T (A - \lambda_i E)x = 0$$

$$\bar{x}^T Ax = \lambda_i \bar{x}^T x$$

$$\bar{x}^T x = \bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n = \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{\in \mathbb{R}} > 0, \text{ так как решение ненулевое}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \frac{\bar{x}^T Ax}{\bar{x}^T x}. \text{ Возьмем } w = \bar{x}^T Ax$$

$$w = w^T = (\bar{x}^T Ax)^T = x^T A^T (\bar{x}^T)^T = x^T A \bar{x}$$

$$\bar{w} = \overline{\bar{x}^T Ax} = \bar{\bar{x}}^T \bar{A} \bar{x} = x^T A \bar{x} \Rightarrow w = \bar{w}, \text{ то есть } w \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_i \text{ тоже является вещественным числом}$$

■

## 14) Что можно сказать про ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора? Ответ обоснуйте. Сформулируйте и докажите теорему Фредгольма.

Пусть линейный оператор  $A: E \rightarrow E$ . Тогда  $E = \text{Ker} A \oplus \text{Im} A^*$

□

Докажем, что  $\text{Ker} A = (\text{Im} A^*)^\perp$  (Тогда из  $E = H \oplus H^\perp = (\text{Im} A^*)^\perp \oplus \text{Im} A^*$  будет следовать утверждение)

Рассмотрим ОНБ в  $E$ . Пусть  $x \in \text{Ker} A$ , тогда  $\forall y \in E$  в матричной записи:

$$0 = y^T Ax = (A^T y)^T x = (A^* y, x) \Rightarrow x \perp \text{Im} A^* \Rightarrow \text{Ker} A \subseteq (\text{Im} A^*)^\perp$$

Пусть теперь  $x \in (Im A^*)^\perp$ . Тогда  $(x, A^*y) = (y, Ax) = 0 \forall y \in E$ . Положив  $y = Ax$ , получаем  $(y, Ax) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$ , то есть  $x \in Ker A$ , то есть  $(Im A^*)^\perp \subseteq Ker A$

■

Теорема Фредгольма

$Ax = b$  совместна  $\Leftrightarrow$  вектор  $b \perp$  всем решениям однородной СЛАУ  $A^T y = 0$  – это  $Ker A^*$

□

$Ax = b$  совместна  $\Leftrightarrow b \in Im A$ . А по теореме  $E = Im A \oplus Ker A^*$

■

**15) Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратное? Ответ обоснуйте.**

Пусть  $A : E \rightarrow E$ . Тогда  $A$  – ортогональный линейный оператор  $\Leftrightarrow$  ОНБ  $e_1, \dots, e_n$  переводит в ОНБ  $Ae_1, \dots, Ae_n$

□

Необходимость

Дано:  $e_1, \dots, e_n$  – ОНБ,  $A$  – ортогональный линейный оператор

Доказать:  $Ae_1, \dots, Ae_n$  – ОНБ

$$(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

То есть система  $\{Ae_j\}$  состоит из ненулевых векторов и ориентирована  $\Rightarrow$  он л.н.з. и так как  $\dim E = n$ , то это ОНБ

Достаточность

Дано:  $e_1, \dots, e_n \setminus$  ОНБ  
 $Ae_1, \dots, Ae_n /$

Доказать:  $A$  – ортогональный линейный оператор

$x \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$

Тогда  $Ax \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$  в  $Ae_1, \dots, Ae_n$ , так как  $Ax = A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 Ae_1 + \dots + x_n Ae_n \Rightarrow \forall x, y \in E (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  (мы в ОНБ). Так же выражается  $(Ax, Ay)$  в базисе  $\{Ae_j\} \Rightarrow$  соотношение  $(Ax, Ay) = (x, y)$  верно  $\forall x, y \in E$

■

**16) Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.**

Матрица линейного оператора  $A$  в ОНБ ортогональна  $\Leftrightarrow A$  – ортогональный оператор

□

Необходимость

$A_e$  – ортогональная матрица. доказать, что  $A$  – ортогональный линейный оператор

$A_e^T A_e = E \Rightarrow \forall x, y \in E x^T (A_e^T) y = x^T E y \Leftrightarrow (A_e x)^T A_e y = x^T y \leftarrow$  матричная запись скалярного произведения в ОНБ

$(Ax, Ay) = (x, y) \Rightarrow A$  – ортогональный линейный оператор по определению

Достаточность

$A$  – ортогональный линейный оператор. Доказать, что  $A_e^T A_e = E$

$\forall x, y \in E (Ax, Ay) = (x, y)$

$(A_e x)^T (A_e y) = x^T y$

$x^T A_e^T A_e y = x^T E y \Rightarrow$  по лемме  $A_e^T A_e = E$

■

**17) Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений.**

Для  $\forall$  самосопряженного линейного оператора  $A : E \rightarrow E, \dim E = n, \exists$  ОНБ, состоящий из собственных векторов  $A$ .

□

По утверждению об ортогональности собственных векторов самосопряженного линейного оператора система из собственных векторов будет ортогональной  $\Rightarrow$  по теореме она л.н.з. и в ней  $n$  векторов  $\Rightarrow$  она является базисом. Этот базис является ортогональным. ОНБ получим, разделив  $e_i$  на  $\|e_i\|$ . Итак,  $\exists$  ОНБ из собственных векторов.

■

**18) Сформулируйте и докажите утверждение о QR-разложении.**

Пусть  $A \in M_m(\mathbb{R})$  и столбцы  $A_1, \dots, A_m$  л.н.з. Тогда  $\exists Q$  и  $R : A = QR$ , причем  $Q$  – ортогональная матрица,  $R$  – верхнетреугольная матрица

□

Применим к  $A_1, \dots, A_m$  процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Получим столбцы  $Q_1, \dots, Q_m$  – ОНБ в  $Im A$ .  $A_k \in L(Q_1, \dots, Q_k), k = \overline{1, m}$  (по формулам Грама-Шмидта)  $\Rightarrow A_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} Q_i, k =$

$\overline{1, m}$  или в матричной форме  $A = Q \cdot R$ , где  $Q = (Q_1 | \dots | Q_m), R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & r_{mm} \end{pmatrix}$ .  $Q$  является

ортогональной, так как  $Q_i$  образуют ОНБ

■

**19) Сформулируйте и докажите теорему о сингулярном разложении.**

$\forall$  матрицы  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  справедливо сингулярное:  $A = V \cdot \Sigma \cdot U^T, U \in O_n(\mathbb{R}), V \in O_m(\mathbb{R}), \Sigma \in M_{mn}(\mathbb{R})$  и  $\Sigma$  является диагональной с числами  $\sigma_i \geq 0$  на диагонали ( $\sigma_i$  – сингулярные числа).

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

$A^T A$  – матрица Грама столбцов матрицы  $A$ . Она симметрична и соответствующая квадратичная форма неотрицательно определена.

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

$Q(x) = x^T A^T A x = (Ax)^T A x = (Ax, Ax) = |Ax|^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$  все собственные значения  $A^T A$  вещественны (так как линейный оператор с  $A^T A$  является самосопряженным) и они все  $\geq 0$

Запишем собственные значения  $A^T A$  в виде  $\sigma_i^2$  (то есть  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$ ) Их нумеруем по невозрастанию:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$ . Так как  $A^T A$  – самосопряжен, то для

него  $\exists$  ОНБ из собственных векторов (собственных векторов  $A^T A$ ).  $A^T A u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, 1 \leq i \leq r \\ 0, r+1 \leq i \leq n \end{cases}$ .

Положим  $v_i = \frac{A u_i}{\sigma_i}$  для  $1 \leq i \leq r$ . Тогда  $(v_i, v_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ . Дополним  $v_1, \dots, v_r$  векто-

рами  $v_{r+1}, \dots, v_m$  до ОНБ в  $\mathbb{R}^m$ . В итоге:  $A \underbrace{[u_1, \dots, u_n]}_U = \underbrace{[v_1, \dots, v_n]}_V \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

где  $[u_1, \dots, u_n]$  и  $[v_1, \dots, v_n]$  соответственно правые сингулярные векторы и левые сингулярные векторы

$$A \cdot U = V \cdot \Sigma \Rightarrow \text{так как } U \text{ и } V \text{ ортогональны} \Rightarrow A = V \Sigma U^T$$

■