

Вопросы с доказательством для подготовки к КОЛЛОКВИУМУ

2018-2019-й учебный год

1-й модуль

1) Что происходит с произведением матриц при транспонировании? Ответ обосновать.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

□

$$[(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji} = \sum_{r=1}^n [A]_{jr} \cdot [B]_{ri} = \sum_{r=1}^n [A^T]_{rj} \cdot [B^T]_{ir} = [B^T \cdot A^T]_{ij}$$

■

2) Какие три условия достаточно наложить на функцию от столбцов матрицы, чтобы она обязательно была детерминантом? Ответ обоснуйте для матриц второго порядка.

Произвольная линейная по столбцам кососимметрическая функция от матрицы с условием $f(E_n) = 1$, является определителем

□

($n = 2$)

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= f \left(a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_{12} \right) = \\ &= a_{11} \cdot f \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} + a_{21} \cdot f \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + a_{21} \cdot f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \det A \end{aligned}$$

■

3) Чему равен определитель произведения двух квадратных матриц? Ответ обоснуйте.

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \quad \square$$

Рассмотрим функцию $f(B) = \det(A \cdot B)$. Покажем, что для $f(B)$ выполнены свойства 2 и 4б

1) Если столбцы матрицы B i и j одинаковы, то и в матрице $A \cdot B$ столбцы i и j тоже одинаковы \Rightarrow выполняется свойство 4б

2) Если в матрице B i -тый столбец имеет вид $\alpha \cdot a + \mu \cdot b \Rightarrow$ в $A \cdot B$ он будет иметь вид $\alpha \cdot A \cdot a + \mu \cdot A \cdot b \Rightarrow$ выполнено свойство 2.

Следовательно, $f(B) = \det B \cdot f(E_n)$. Возьмем и вычислим $f(E_n) = \det(A \cdot E_n) = \det E_n \cdot f(E_n) = 1 \cdot f(E_n)$

$$\det(A \cdot E_n) = \det A$$

$$\Rightarrow f(E_n) = \det A \Rightarrow f(B) = \det A \cdot \det B = \det A \cdot B$$

■

4) **Выпишите формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка и докажите их.**

Правило Крамера

Пусть $A \cdot x = b$ – совместная СЛАУ.

Тогда $x_j \cdot \det(A_1, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \dots, A_n) = \Delta_j$

Если $\Delta \equiv \det A \neq 0$, то

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n} - \text{формула Крамера}$$

□

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \dots, A_n) &= \det(A_1, \dots, A_{j-1}, \sum_{k=1}^n x_k \cdot A_k, A_{j+1}, \dots, A_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \cdot \det(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n) = x_1 \cdot \det(A_1, \dots, A_1, \dots, A_n) + \\ &+ \dots + x_j \cdot \det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n) + \dots = x_j \cdot \det A \end{aligned}$$

■

5) **Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости.**

Строки a_1, \dots, a_k линейно зависимы \Leftrightarrow хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных

□

Дано: a_1, \dots, a_k – л.з.

Доказать: хотя бы одна из них – л.к. остальных

По определению линейной зависимости:

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_k \cdot a_k = 0$

Пусть $\lambda_1 \neq 0$, тогда $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot a_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \cdot a_k$ – это л.к. остальных

Дано: Пусть $a_1 = \beta_2 \cdot a_2 + \dots + \beta_k \cdot a_k$

Доказать: a_1, \dots, a_k – л.з.

$$\underbrace{1 \cdot a_1 - \beta_2 \cdot a_2 - \dots - \beta_k \cdot a_k}_{\neq 0} = 0$$

не все коэффициенты этой л.к. равны 0 \Rightarrow по определению a_1, \dots, a_k – л.з.

■

6) **Как связан ранг транспонированной матрицы с рангом исходной матрицы? Ответ обоснуйте.**

$$RgA^T = RgA$$

□

Докажем, что $RgA^T \geq RgA$

Пусть $RgA = r \Rightarrow \exists$ минор $M_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} \neq 0$

В матрице A^T есть минор $N_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$, получающийся из $M_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ транспонированием $\Rightarrow N_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \neq 0$ (это свойство 1 определителя) $\Rightarrow RgA^T \geq r = RgA$

Таким образом, $RgA \leq RgA^T \leq Rg(A^T)^T = RgA \Rightarrow RgA = RgA^T$

■

7) **Сформулируйте и докажите теорему о базисном миноре.**

1) Базисные строки (столбцы), соответствующие любому базисному минору M матрицы A л.н.з.

2) Строки матрицы A , не входящие в M , являются линейными комбинациями базисных строк

□

1) (от противного)

Предположим, что одна из них является линейной комбинацией остальных $\Rightarrow M = 0$ (по свойству определителя). А это противоречит определению базисного минора.

2) Будем считать (без ограничения общности), что базисный минор M расположен в левом

верхнем углу матрицы

Пусть $RgA = r$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{rr+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{r+11} & \dots & \dots & a_{r+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

Возьмем строку $a_k, k > r$

Покажем, что $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$:

$a_k = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_r \cdot a_r$, где a_1, \dots, a_r – базисные строки

Составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix}$$

, получающийся добавлением к M k -той строки и j -того столбца, $j = \overline{1, n}$

Покажем, что $\Delta = 0$

Если $j \leq r$, то в Δ два одинаковых столбца \Rightarrow по свойству определителя $\Delta = 0$

Если $j > r$, то Δ – минор матрицы A порядка $r+1 \Rightarrow$ по определению ранга матрицы $\Delta = 0$

Разложим Δ по последнему столбцу $a_{1j} \cdot A_1 + \dots + a_{rj} \cdot A_r + a_{kj} \cdot A_k = 0$, где A_1, \dots, A_k – алгебраическое дополнение соответствующих элементов, причем $A_k = \pm M \neq 0 \Rightarrow a_{kj} - \frac{A_1}{A_k} \cdot$

$a_{1j} - \dots - \frac{A_r}{A_k} \cdot a_{rj}, j = \overline{1, n}, k > r$

то есть $a_{kj} = \lambda_1 \cdot a_{1j} + \dots + \lambda_r \cdot a_{rj} \Rightarrow (a_{k1}, \dots, a_{kn}) = \lambda_1 \cdot (a_{11}, \dots, a_{1n}) + \dots + \lambda_r \cdot (a_{r1}, \dots, a_{rn})$

ч.т.д

■

8) Сформулируйте и докажите следствие теоремы о базисном миноре для квадратных матриц (критерий невырожденности).

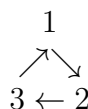
Рассмотрим матрицу $A \in M_n(\mathbb{R})$. Следующие условия эквивалентны:

1) $\det A \neq 0$

2) $RgA = n$

3) все строки A л.н.з.

□



$1 \Rightarrow 2$: Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow$ в A есть минор n -го порядка $\neq 0 \Rightarrow$ по определению $RgA = n$

$2 \Rightarrow 3$: Пусть $RgA = n \Rightarrow$ Все строки базисны \Rightarrow по теореме они все л.н.з. (по теореме о базисном миноре)

$3 \Rightarrow 1$: Пусть все строки A л.н.з. Предположим, что $\det A = 0 \Rightarrow RgA < n \Rightarrow$ по крайней мере одна из строк является линейной комбинацией остальных \Rightarrow по критерию линейной зависимости строки являются л.з. – противоречие

■

9) Сформулируйте и докажите критерий существования обратной матрицы (свойства определителя предполагаются известными). Единственна ли обратная матрица? Ответ обоснуйте.

Матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ имеет обратную (обратима) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ (она невырождена)

□

Необходимость

Дано: $\exists A^{-1}$

Доказать: $\det A \neq 0$

По определению обратной: $A \cdot A^{-1} = E \Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = \det(A \cdot A^{-1}) = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

Достаточность

Дано: $\det A \neq 0$

Доказать: $\exists A^{-1}$

Рассмотрим матрицу $B = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$

\tilde{A} – союзная матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

– транспонированная матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы A

Покажем, что $B = A^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } A \cdot B : [A \cdot B]_{ij} &= \sum_{r=1}^n [A]_{ir} \cdot [B]_{rj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot [\tilde{A}]_{rj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot A_{jr} = \\ &= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{cases} \det A, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = [E]_{ij} \end{aligned}$$

■

Если обратная матрица существует, то она единственная.

□

Предположим противоположное: $\exists B_1$ и B_2 – обратные к A .

По определению $B_i \cdot A = A \cdot B_i = E, i = 1, 2$.

$$B_1 = B_1 \cdot E = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$$

■

10) Сформулируйте и докажите теорему о ранге матрицы (теорема о базисном миноре предполагается известной)

Ранг матрицы = максимальному числу ее л.н.з. строк (столбцов)

□

Пусть $RgA = r$, максимальное число л.н.з. строк = k

Покажем, что $k = r$

1) Так как в A есть r л.н.з. строк (так как $RgA = r$, это базисные строки)

$k \geq r$ 2) Вычеркнем в A все строки, кроме k л.н.з. \Rightarrow получим матрицу A_1 . В ней k строк.

При этом $RgA_1 = k$ (так как если бы RgA_1 был бы $< k$, то среди этих k строк только часть была бы базисными и какая-то одна строка была бы л.к. остальных \Rightarrow строки были бы л.з.)

Базисный минор A_1 имеет порядок k и является не равным 0 минором порядка k исходной матрицы $\Rightarrow k \leq r$

Следовательно, $k = r$

■

2-й модуль

1) Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли и докажите ее.

СЛАУ $A \cdot x = b$ совместна $\Leftrightarrow RgA = Rg(A|b)$

□

Дано: СЛАУ совместна

Доказать: $RgA = Rg(A|b)$

$$\text{Слау совместна} \Rightarrow \exists x^0 \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} : A \cdot x^0 = b \Leftrightarrow x_1^0 \cdot A_1 + \dots + x_n^0 \cdot A_n = b$$

A_j – j -тый столбец матрицы A

\Rightarrow столбцы A_1, \dots, A_r – базисные

столбцы A_{r+1}, \dots, A_n – их линейные комбинации

$$A_{r+1} = \lambda_{1r+1} \cdot A_1 + \dots + \lambda_{rr+1} \cdot A_r$$

$$A_n = \lambda_{1n} \cdot A_1 + \dots + \lambda_{rn} \cdot A_r$$

$$\Rightarrow b = x_1^0 \cdot A_1 + \dots + x_r^0 \cdot A_r + x_{r+1}^0 \cdot (\lambda_{1r+1} \cdot A_1 + \dots + \lambda_{rr+1} \cdot A_r) + \dots + x_n^0 \cdot (\lambda_{1n} \cdot A_1 + \dots + \lambda_{rn} \cdot A_r) = (x_1^0 + x_{r+1}^0 \cdot \lambda_{1r+1} + \dots + x_n^0 \cdot \lambda_{1n}) \cdot A_1 + \dots + (x_r^0 + x_{r+1}^0 \cdot \lambda_{rr+1} + \dots + x_n^0 \cdot \lambda_{rn}) \cdot A_r$$

то есть b является линейной комбинацией столбцов $A_1, \dots, A_r \Rightarrow M$ (базисный минор в матрице A) является базисным минором и в $(A|b) \Rightarrow RgA = Rg(A|b)$ так как

1. он не является нулевым

2. все окаймляющие его миноры = 0, так как из них один из столбцов является линейной комбинацией A_1, \dots, A_r (для A_{r+1}, \dots, A_n по определению базисного минора, а для b показали)

Дано: $RgA = Rg(A|b)$

Доказать: СЛАУ совместна

Пусть $RgA = r$. Пусть M – базисный минор, расположенный в левом верхнем углу матрицы.

По теореме о базисном миноре столбец b является линейной комбинацией столбцов A_1, \dots, A_r .

То есть \exists числа $y_1^0, \dots, y_r^0 : b = y_1^0 \cdot A_1 + \dots + y_r^0 \cdot A_r$.

$$\text{Тогда } y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_r^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \text{решение СЛАУ } A \cdot x = b$$

■

2) Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Докажите теорему о существовании ФСР.

Любые $n - r$ линейно независимых столбцов, являющихся решениями однородной СЛАУ $A \cdot x = 0$, где n – число неизвестных, а $r = RgA$, называют фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ $A \cdot x = 0$

Теорема о существовании ФСР

Рассмотрим СЛАУ $A \cdot x = 0$

У нее существует $n - r$ линейно независимых решений, где n – число неизвестных, а $r = RgA$

□

Предположим, что базисный минор матрицы A расположен в левом верхнем углу. Тогда строки A_1, \dots, A_r – базисные, а A_{r+1}, \dots, A_m – их линейные комбинации

$$\begin{cases} A_{r+1} = \lambda_1 \cdot A_1 + \dots + \lambda_r \cdot A_r \\ \vdots \\ A_m = \mu_1 \cdot A_1 + \dots + \mu_r \cdot A_r \end{cases}$$

Сделаем элементарные преобразования

$$\begin{cases} A_{r+1} - (\lambda_1 \cdot A_1 + \dots + \lambda_r \cdot A_r) \rightarrow A_{r+1} \\ \vdots \\ A_m - (\mu_1 \cdot A_1 + \dots + \mu_r \cdot A_r) \rightarrow A_m \end{cases}$$

Получим матрицу, у которой последние $m - r$ строк нулевые.

Элементарным преобразованиям строк соответствуют элементарные преобразования уравнений \Rightarrow СЛАУ эквивалентна.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1r} \cdot x_r = -a_{1r+1} \cdot x_{r+1} - \dots - a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{r1} \cdot x_1 + \dots + a_{rr} \cdot x_r = -a_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \dots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases}$$

Переменные x_1, \dots, x_r , отвечающие базисным строкам, называют главными (базисными), а

x_{r+1}, \dots, x_n – свободными. (Система уравнений выше – это выражение главных переменных через свободные)

Придадим свободным переменным следующий набор значений:

Первый набор	Второй набор	$(n - r)$ -й набор
$x_{r+1} = 1$	$x_{r+1} = 0$	$x_{r+1} = 0$
$x_{r+2} = 0$	$x_{r+2} = 1$	$x_{r+2} = 0$
\vdots	\vdots	\vdots
$x_n = 0$	$x_n = 0$	$x_n = 1$

Для каждого набора решим СЛАУ относительно x_1, \dots, x_r

Она всегда имеет единственное решение, так как ее определитель $= M \neq 0$ (базисный минор матрицы A)

Получим следующие решения:

Для первого набора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \end{pmatrix}$$

Для второго набора:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{2r} \end{pmatrix}$$

Для $(n - r)$ -го набора $(n - r = k)$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \end{pmatrix}$$

Тогда столбцы:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \Phi_k = \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются решениями исходной СЛАУ

Покажем, что они л.н.з.

Рассмотрим равенство: $\alpha_1 \cdot \Phi_1 + \dots + \alpha_k \cdot \Phi_k = 0$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \vdots \\ \phi_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_k \cdot \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \vdots \\ \phi_{kr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \text{ и это должно быть } = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

По определению Φ_1, \dots, Φ_k – л.н.з. \Rightarrow они образуют ФСР ОСЛАУ $A \cdot x = 0$

■

3) Сформулируйте критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей и докажите его.

Однородная СЛАУ $A \cdot x = 0$ имеет ненулевое решение \Leftrightarrow Матрица A вырождена, то есть $\det A = 0$

□

Дано: $A \cdot x = 0$ имеет решение $x \neq 0$

Доказать: $\det A = 0$

Предположим противное \Rightarrow по формуле Крамера СЛАУ имеет единственное решение $= 0 \rightarrow$
 \rightarrow противоречие

Дано: $\det A = 0$

Доказать: \exists ненулевое решение СЛАУ $A \cdot x = 0$

Пусть $\det A = 0 \Rightarrow \text{Rg} A < n \Rightarrow n - r = k > 0$

По теореме о существовании ФСР $\exists k$ л.н.з. решений СЛАУ $A \cdot x = 0$. Это и есть ненулевое решение.

■

4) Докажите теорему о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений, то есть о том, что произвольное решение однородной СЛАУ может быть представлено в виде линейной комбинации элементов ФСР.

Пусть Φ_1, \dots, Φ_k – ФСР однородной СЛАУ $A \cdot x = 0$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде

$x = c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k$, где c_1, \dots, c_k – некоторые постоянные

□

Пусть $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ – произвольное решение ОСЛАУ $A \cdot x = 0$

Предположим, что базисный минор матрицы A расположен в левом верхнем углу матрицы A . Тогда, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы о существовании ФСР,

получим, что $A \cdot x = 0$ эквивалентна

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1r} \cdot x_r = -a_{1r+1} \cdot x_{r+1} - \dots - a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{r1} \cdot x_1 + \dots + a_{rr} \cdot x_r = -a_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \dots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases}$$

Решим ее относительно главных (базисных) неизвестных x_1, \dots, x_r (по формулам Крамера)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1} \cdot x_{r+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ x_r = \alpha_{rr+1} \cdot x_{r+1} + \dots + \alpha_{rn} \cdot x_n \end{cases} \quad (9.1)$$

α_{ij} – некоторые числа

Составим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} x_1^0 & \phi_{11} & \dots & \phi_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r^0 & \phi_{1r} & \dots & \phi_{kr} \\ x_{r+1}^0 & \phi_{1r+1} & \dots & \phi_{kr+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & \phi_{1n} & \dots & \phi_{kn} \end{pmatrix}$$

Покажем, что $RgD = k$

1. $RgD \geq k$, так как Φ_1, \dots, Φ_k л.н.з. (это ФСР), а $RgD =$ максимальному числу л.н.з. столбцов (по теореме о ранге матрицы)

2. Покажем, что $RgD \leq k$

Столбцы $x^0, \Phi_1, \dots, \Phi_k$ – решения СЛАУ $A \cdot x = 0 \Rightarrow$ из (9.1) получаем, что

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \alpha_{1r+1} \cdot x_{r+1}^0 + \dots + \alpha_{1n} \cdot x_n^0 \\ \phi_{11} &= \alpha_{1r+1} \cdot \phi_{1r+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot \phi_{1n} \\ &\vdots \\ \phi_{k1} &= \alpha_{1r+1} \cdot \phi_{kr+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot \phi_{kn} \end{aligned}$$

то есть первая строка d_1 матрицы D – линейная комбинация строк d_{r+1}, \dots, d_n :

$$d_1 = \alpha_{1r+1} \cdot d_{r+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot d_n$$

Аналогично с остальными строками вплоть до r -той:

$$d_r = \alpha_{rr+1} \cdot d_{r+1} + \dots + \alpha_{rn} \cdot d_n$$

Сделаем элементарные преобразования:

$$\begin{cases} d_1 - (\alpha_{1r+1} \cdot d_{r+1} + \dots + \alpha_{1n} \cdot d_n) \rightarrow d_1 \\ \vdots \\ d_r - (\alpha_{rr+1} \cdot d_{r+1} + \dots + \alpha_{rn} \cdot d_n) \rightarrow d_r \end{cases}$$

Получим матрицу D_1 , у которой первые r строк нулевые.

$$D \sim D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ x_{r+1}^0 \cdot \phi_{1r+1} & \dots & \phi_{kr+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 \cdot \phi_{1n} & \dots & \phi_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow RgD_1 \leq n - r = k$$

При элементарных преобразованиях ранг не меняется $\Rightarrow RgD \leq k$

Мы доказали, что $RgD = k \Rightarrow$ столбцы Φ_1, \dots, Φ_k – базисные (они л.н.з.) \Rightarrow по теореме о базисном миноре столбец x^0 – их линейная комбинация, то есть существуют числа c_1, \dots, c_k :
 $x^0 = c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k$

■

5) Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений и докажите ее (теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений предполагается известной).

Пусть известно частное решение \tilde{x} СЛАУ $A \cdot x = b$. Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде $x = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k$, где Φ_1, \dots, Φ_k – ФСР соответствующей однородной СЛАУ, а c_1, \dots, c_k – некоторые постоянные

□

Пусть x^0 – произвольное решение СЛАУ $A \cdot x = b \Rightarrow (x^0 - \tilde{x})$ – по свойствам решений решение однородной СЛАУ $A \cdot x = 0 \Rightarrow$ по теореме о структуре общего решения однородной СЛАУ \exists постоянные c_1, \dots, c_n ,

$$x^0 - \tilde{x} = c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k \Rightarrow x^0 = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + c_k \cdot \Phi_k$$

■

6) Выпишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в произвольном базисе трехмерного пространства, и приведите ее вывод.

Пусть $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ – разложение векторов \vec{a} и \vec{b} по базису. Тогда их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

□

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \\ &= (a_1 \vec{e}_1, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) + (a_2 \vec{e}_2, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) + (a_3 \vec{e}_3, b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) = \\ &= (a_1 \vec{e}_1, b_1 \vec{e}_1) + (a_1 \vec{e}_1, b_2 \vec{e}_2) + (a_1 \vec{e}_1, b_3 \vec{e}_3) + (a_2 \vec{e}_2, b_1 \vec{e}_1) + (a_2 \vec{e}_2, b_2 \vec{e}_2) + (a_2 \vec{e}_2, b_3 \vec{e}_3) + \\ &+ (a_3 \vec{e}_3, b_1 \vec{e}_1) + (a_3 \vec{e}_3, b_2 \vec{e}_2) + (a_3 \vec{e}_3, b_3 \vec{e}_3) = \\ &= a_1 \cdot b_1 (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + a_1 \cdot b_2 (\vec{e}_1, \vec{e}_2) + a_1 \cdot b_3 (\vec{e}_1, \vec{e}_3) + a_2 \cdot b_1 (\vec{e}_2, \vec{e}_1) + a_2 \cdot b_2 (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + \\ &+ a_2 \cdot b_3 (\vec{e}_2, \vec{e}_3) + a_3 \cdot b_1 (\vec{e}_3, \vec{e}_1) + a_3 \cdot b_2 (\vec{e}_3, \vec{e}_2) + a_3 \cdot b_3 (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

7) Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в правом ортонормированном базисе трехмерного пространства и приведите ее вывод.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – правый ортонормированный базис, $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$,
 $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

$$\text{Тогда } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} (a_y b_z - b_y a_z) + \vec{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} (a_x b_y - a_y b_x)$$

□

Так как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – правый ортонормированный базис, то

$$\begin{aligned}
\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \\
\vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\
\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\
&= a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{k} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{i} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} = \\
&= \vec{i} (a_y b_z - b_y a_z) + \vec{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k} (a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

8) Докажите теорему о том, что любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве задает плоскость и что любая плоскость определяется линейным уравнением.

1. Любая плоскость в пространстве определяется уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – некоторые числа

2. Любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, определяет в пространстве плоскость

□

1. Рассмотрим плоскость π . Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ей принадлежит. Рассмотрим вектор $\vec{n} \perp \pi$. Пусть $\vec{n} = (A, B, C)$.

$M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, то есть $Ax + By + Cz + D = 0$, где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Таким образом, координаты точки M удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$

2. Рассмотрим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Оно имеет хотя бы одно решение (например, если $A \neq 0$, то $x_0 = -\frac{D}{A}, y_0 = z_0 = 0$). Обозначим за M_0 точку (x_0, y_0, z_0) . Пусть точка $M(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$. Вычтем из него равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow (\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$, где $\vec{n} = (A, B, C) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$ точка M лежит в плоскости, проходящей через M_0 и перпендикулярной вектору $\vec{n} \Rightarrow$ уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость

9) Выпишите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости и приведите ее вывод.

Рассмотрим плоскость $P : Ax + By + Cz + D = 0$ и точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Найдем $\rho(M, L)$ – расстояние от точки M до плоскости P . Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости.

$$\begin{aligned}
\text{Тогда } \rho(M, P) &= |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1M}| = \frac{|(\overrightarrow{M_1M}, \vec{n})|}{|\vec{n}|} = (\text{в ОНБ}) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\
&= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ так как } M_1 \in P \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D
\end{aligned}$$

10) Выпишите формулу Муавра и докажите ее.

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\phi + i \cdot \sin n\phi), n \in \mathbb{N}$$

□

$n = 2$ – база индукции

$$z^2 = z \cdot z = r \cdot r \cdot (\cos(\phi + \phi) + i \cdot \sin(\phi + \phi)) = r^2 \cdot (\cos 2\phi + i \cdot \sin 2\phi)$$

Пусть для $n = k$ это верно, тогда:

$$z^{k+1} = z^k \cdot z = r^k \cdot r \cdot (\cos k\phi + i \cdot \sin k\phi) \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi) = r^{k+1} \cdot (\cos k\phi \cdot \cos \phi - \sin k\phi \cdot \sin \phi + i \cdot \cos k\phi \cdot \sin \phi + i \cdot \sin k\phi \cdot \cos \phi) = r^{k+1} \cdot (\cos(k+1)\phi + i \cdot \sin(k+1)\phi)$$

\Rightarrow по принципу математической индукции формула Муавра верна $\forall n \in \mathbb{N}$

3-й модуль

1) Сформулируйте и докажите утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.

\forall подгруппа в $(\mathbb{Z}, +)$ имеет вид $k\mathbb{Z}$ для некоторых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

□

Если $H = \{0\}$, то положим $k = 0$. Иначе: $k = \min(H \cap \mathbb{N}) \rightarrow$ и очевидно, что $k\mathbb{Z} \subseteq H$. Если возьмем $a \in H$ и разделим a на k с остатком: $a = qk + r$, где $0 \leq r < k \Rightarrow r = a - q \cdot k \in H \Rightarrow r = 0 \Rightarrow a = q \cdot k$, то есть всегда $H = k\mathbb{Z}$

■

2) Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа (включая доказательство лемм). Сформулируйте три следствия из теоремы Лагранжа.

Лемма 1: $\forall g_1, g_2 \in G$ либо $g_1H = g_2H$, либо $g_1H \cap g_2H = \emptyset$

□

Если $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$, то $g_1H = g_2h_2h_1^{-1}H \subseteq g_2H$ и аналогично в обратную сторону

$\exists h_1, h_2 : g_1h_1 = g_2h_2$, так как пересечение не пусто $\Rightarrow g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$

■

Лемма 2: $|gH| = |H| \forall g \in G, \forall$ конечной подгруппы H

□

$|gH| \leq |H|$, так как $gH = \{gh | h \in H\}$

Если $gh_1 = gh_2 \Rightarrow g^{-1}gh_1 = g^{-1}gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2 \Rightarrow$ нет совпадений и $|gH| = |H|$

■

Теорема Лагранжа:

Пусть G – конечная группа и $H \subseteq G$ – подгруппа. Тогда $|G| = |H| \cdot [G : H]$

□

\forall элемент группы G лежит в своем левом смежном классе по H и смежные классы не пересекаются (по лемме 1) и \forall из них содержит $|H|$ элементов (по лемме 2)

■

Следствие 1: Пусть G – конечная группа и $g \in G$. Тогда $\text{ord}(g)$ делит $|G|$

Следствие 2: Пусть G – конечная группа. Тогда $g^{|G|} = e$

Следствие 3 (малая теорема Ферма): Пусть \bar{a} – ненулевой вычет по простому модулю p .

Тогда $\bar{a}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

3) Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.

Пусть $H \subseteq G$ – подгруппа в группе G . Тогда 3 условия эквивалентны:

1. H нормальна

2. $\forall g \in G \ gHg^{-1} \subseteq H$ ($gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$)

3. $\forall g \in G \ gHg^{-1} = H$

□

Схема:
$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 3 & \leftarrow & 2 \end{array}$$

$\boxed{1 \rightarrow 2}$ Пусть $h \in H$ и $g \in G$. Из определения $\Rightarrow \exists h, h' \in H : gh = h'g$

$ghg^{-1} = h' \in H$, то есть $gHg^{-1} \subseteq H$

$\boxed{2 \rightarrow 3}$ Остается показать, что $H \subseteq gHg^{-1}$. Для $h \in H$ имеем $h = gg^{-1}hgg^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$, так как $g^{-1}hg \in H$ (вместо g взяли g^{-1})

$\boxed{3 \rightarrow 1} \quad \forall g \in G$ по пункту 3 $gH = gHg^{-1}g \subseteq Hg$. Аналогично $Hg \subseteq gH \Rightarrow Hg = gH$ – по определению это нормальность. ■

4) Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.

H – нормальная подгруппа $\Leftrightarrow H = \text{Ker } f$, где f – некоторый гомоморфизм

□

Необходимость

Дано: H – нормальная подгруппа

Нужно доказать: $\exists f$ – гомоморфизм: $H = \text{Ker } f$

Это естественный гомоморфизм, сопоставляющий \forall элементу $a \in G$ его смежный класс aH

$\varepsilon : G \rightarrow G/H$

Тогда $\text{Ker } \varepsilon = eH = H$

Достаточность

$H = \text{Ker } f$

Ранее показали, что $\text{Ker } f$ – подгруппа.

Покажем, что $\text{Ker } f$ – нормальная подгруппа. Пусть $f : G \rightarrow F$ – гомоморфизм и $z \in \text{Ker } f$.

Тогда $f(g^{-1}zg) = f(g^{-1})f(z)f(g) = f(g^{-1})ef(g) = f(g^{-1}g) = f(e_G) = e_F$. То есть $\forall g \in G : g^{-1}Hg \subseteq H$, где $H = \text{Ker } f \Rightarrow$ по критерию $H = \text{Ker } f$ – нормальна ■

5) Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме групп.

Пусть $f : G \rightarrow F$ – гомоморфизм групп. Тогда группа $\text{Im } f = \{a \in F | \exists g \in G, f(g) = a\}$ изоморфна фактор-группе $G/\text{Ker } f$

$\text{Ker } f = \{g \in G | f(g) = e_F\}$ ($\text{Ker } f$ – ядро гомоморфизма)

$\boxed{G/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f}$

□

Рассмотрим $\tau : G/\text{Ker } f \rightarrow F$, заданное формулой $\tau(g\text{Ker}(f)) = f(g) \in F$

($g\text{Ker}(f) = gH$, где $H = \text{Ker } f$)

Проверим корректность:

$\forall h_1, h_2 \in \text{Ker } f$

$f(gh_1) = f(g)f(h_1) = f(g)e_F = f(g) = f(g)f(h_2) = f(gh_2)$, то есть значения τ не зависят от выбора представителя смежного класса.

Отображение τ сюръективно по построению и инъективно в силу того, что

$f(g) = e_F \Leftrightarrow g \in \text{Ker } f$ (то есть $g\text{Ker } f = \text{Ker } f$)

Остается проверить, что τ – гомоморфизм

$\tau((g\text{Ker } f) \cdot (g'\text{Ker } f)) = \tau(gg'\text{Ker } f) = f(gg') = f(g) \cdot f(g') = \tau(g\text{Ker } f) \cdot \tau(g'\text{Ker } f)$ ■

6) Докажите, что центр группы является ее нормальной подгруппой.

$Z(G)$ является нормальной подгруппой G

□

1. Покажем, что $Z(G)$ – подгруппа, то есть $\forall a, b \in Z(G) a \cdot b^{-1} \in Z(G)$

$ab^{-1}g = ab^{-1}(g^{-1})^{-1} = a(g^{-1}b)^{-1} = a(bg^{-1})^{-1} = a(g^{-1})^{-1}b^{-1} = agb^{-1} = gab^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \in Z(G)$

2. Если $a \in Z(G)$ и $g, b \in G$

$g^{-1}agb = g^{-1}gab = ab = ba = bag^{-1}g = bg^{-1}ag$, то есть если элемент $a \in Z(G)$, то $g^{-1}ag$ тоже $\in Z(G)$.

А это по критерию означает нормальность. ■

7) Сформулируйте и докажите утверждение о том, чему изоморфна факторгруппа группы по ее центру.

$$G/Z(G) \simeq Inn(G)$$

□

Рассмотрим отображение $f : G \rightarrow Aut(G)$, которое задается формулой $\phi_g(h) = ghg^{-1}$. Тогда $Im f = Inn(G)$ по определению. $Ker f = Z(G)$, так как $ghg^{-1} = ehe^{-1} = h \Leftrightarrow gh = hg$
 \Rightarrow по теореме о гомоморфизме $G/Ker f \simeq Im f$, то есть $G/Z(G) \simeq Inn(G)$

■

8) Сформулируйте и докажите теорему Кэли.

\forall конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы S_n

□

Пусть $|G| = n$. $\forall a \in G$ рассмотрим отображение $L_a : G \rightarrow G$ по формуле: $L_a(g) = a \cdot g$

Пусть $e, g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ – элементы группы. Тогда $a, ag_1, ag_2, \dots, ag_{n-1}$ – те же элементы, но в другом порядке (если $ag_i = ag_j \Rightarrow g_i = g_j$, так как $\exists a^{-1} \forall a \in G$)

$\Rightarrow L_a$ – биективное отображение G в себя (то есть перестановка элементов g)

Эти отображения можно умножать (взяв композицию)

Есть единичный элемент: L_e

Обратным элементом к L_a является $L_{a^{-1}}$

Из ассоциативности в $G \Rightarrow L_{ab}(g) = (a \cdot b)g = a(b \cdot g) = L_a(L_b(g)) \Rightarrow$ множество $L_e, L_{g_1}, L_{g_2}, \dots, L_{g_{n-1}}$ образует подгруппу H в множестве всех биективных отображений G в себя, то есть $S(G)$

А изоморфизм устроен так: $a \mapsto L_a \in H$ это биекция и гомоморфизм

■

9) Сформулируйте и докажите лемму о том, чем является ядро гомоморфизма колец.

$Ker \phi$ – идеал в K_1

□

ϕ – гомоморфизм групп (по сложению) $(K_1, +)$ и $(K_2, +) \Rightarrow (Ker \phi, +)$ – нормальная подгруппа

Покажем, что $ra \in Ker \phi, ar \in Ker \phi$

$\forall a \in Ker \phi, \forall r \in K_1$

$$\phi(ra) = \phi(r)\phi(a) = \phi(r) \cdot 0 = 0 \Rightarrow ra \in Ker \phi$$

Аналогично с ar

■

10) Сформулируйте и докажите критерий того, что кольцо вычетов по модулю p является полем.

\mathbb{Z}_k – поле $\Leftrightarrow k$ – простое

□

\mathbb{Z}_k – коммутативное кольцо с 1.

Если $k = p$ – простое, то в \mathbb{Z}_p^* (то есть $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ с операцией умножения) все элементы обратимы.

Рассмотрим $\overline{1}, \dots, \overline{p-1}$

Возьмем остаток \overline{s} и докажем, что $\exists \overline{s}^{-1}$

Рассмотрим $\{\overline{s}, \overline{s} \cdot \overline{2}, \overline{s} \cdot \overline{3}, \dots, \overline{s} \cdot \overline{p-1}\} = A$. Если $\overline{s} \neq 0 \Rightarrow \overline{k} \cdot \overline{s} \neq 0 \pmod p \Rightarrow$ в A нет нуля. Более того, это те же элементы, но в другом порядке. Если $\overline{k} \cdot \overline{s} = \overline{q} \cdot \overline{s} \Rightarrow (\overline{k} - \overline{q}) \cdot \overline{s} = \overline{0} \Rightarrow \overline{k} - \overline{q} = \overline{0} \Rightarrow$ в наборе $\overline{s}, \overline{s} \cdot \overline{2}, \overline{s} \cdot \overline{3}, \dots, \overline{s} \cdot \overline{p-1}$ найдется $1 \Rightarrow \overline{s} \cdot \overline{s}' = 1$, то есть \overline{s} обратим

■

11) Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.

Пусть F – поле. F_0 – его простое подполе. Тогда:

1. Если $\text{char} F = p > 0$, то $F_0 \simeq \mathbb{Z}_p$
2. Если $\text{char} F = 0$, то $F_0 \simeq \mathbb{Q}$

□

$\langle 1 \rangle \subseteq (F, +)$, где $\langle 1 \rangle$ – циклическая подгруппа по сложению, порожденная 1 (то есть нейтральным элементом по умножению)

$$|\langle 1 \rangle| = \text{char} F$$

$\langle 1 \rangle$ – подкольцо в F . Так как \forall подполе F содержит $1 \Rightarrow$ оно содержит и $\langle 1 \rangle \subseteq F_0$

1. Если $\text{char} F = p > 0$, то $\langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_p$ – поле $\Rightarrow F_0 = \langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_p$
2. Если $\text{char} F = 0$, то $\langle 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}$ – не поле. Но F_0 содержит и все дроби вида $\frac{a}{b}$, где $a, b \in \langle 1 \rangle, b \neq 0$ и они образуют поле, изоморфное \mathbb{Q} (\mathbb{Q} – поле частных для кольца \mathbb{Z})

■

12) Выпишите и докажите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.

Пусть $x \in V, A$ и B – базисы в V . $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе A ,

$x^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ \vdots \\ x_n^b \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора x в базисе B . Тогда $x^b = T_{A \rightarrow B}^{-1} \cdot x^a$

□

Докажем, что $x^a = T_{A \rightarrow B} \cdot x^b$

$$x = \mathbb{A} \cdot x^a = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix} = \mathbb{B} \cdot x^b$$

$\mathbb{B} = \mathbb{A} \cdot T_{A \rightarrow B}$ – определение матрицы перехода в матричной форме

$\mathbb{A} \cdot x^a = \mathbb{A} \cdot T_{A \rightarrow B} \cdot x^b \Rightarrow$ так как разложение по базису единственно, то $x^a = T_{A \rightarrow B} x^b$

■

13) Что такое сумма и прямая сумма подпространств? Сформулируйте и докажите критерий того, что сумма подпространств является прямой.

$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$ называется суммой подпространств H_1 и H_2

$H_1 + H_2$ называется прямой суммой (и обозначается $H_1 \oplus H_2$), если $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, то есть тривиально

$H_1 + H_2$ является прямой $\Leftrightarrow \forall x \in H_1 + H_2$ его представление в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$, единственно

□

\Rightarrow Пусть сумма прямая, то есть $H_1 \cap H_2 = \{0\}$. Предположим, что $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ – 2 разных разложения. Тогда $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$ (так как пересечение тривиально)

\Leftarrow Пусть представление единственно: $x = x_1 + x_2$. Если мы предположим, что $\exists x \neq 0 : x \in$

$H_1 \cap H_2$, то $\forall \lambda \in F \lambda x \in H_1$ и $\lambda x \in H_2$. $\forall \beta \in F x = \overbrace{(1 - \beta)x}^{\in H_1} + \underbrace{\beta x}_{\in H_2} \Rightarrow$ представление не

единственно

■

14) Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.

Пусть H_1 и H_2 – подпространства. Тогда

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

□

Базис $H_1 \cap H_2$ можно дополнить как до базиса H_1 , так и до базиса H_2 . Пусть $\dim H_1 = n$, $\dim H_2 = m$, $\dim H_1 \cap H_2 = r$. Тогда

$$\underbrace{e_1, \dots, e_2}_{\text{базис } H_1 \cap H_2}, \quad \underbrace{\nu_1, \dots, \nu_{n-r}}_{\text{дополнение до базиса в } H_1}, \quad \underbrace{w_1, \dots, w_{m-r}}_{\text{дополнение до базиса в } H_2} \quad - \text{ базис в } H_1 + H_2$$

базис $H_1 \cap H_2$ дополнение до базиса в H_1 дополнение до базиса в H_2

$$\Rightarrow \dim(H_1 + H_2) = r + (n - r) + (m - r) = n + m - r = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

■

15) Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса? Ответ обоснуйте.

Пусть U – матрица перехода от базиса e к базису f . Пусть B_e – матрица билинейной формы в базисе e , B_f – матрица билинейной формы в базисе f . Тогда: $B_f = U^T B_e U$

□

$$b(x, y) = (x^e)^T B_e y_e = (Ux^f)^T B_e (Uy^f) = (x^f)^T \underbrace{U^T B_e U}_{B_f} y^f = (x^f)^T B_f y^f \quad (\text{где } x^e - \text{столбец координат } x \text{ в базисе } e)$$

$$\Rightarrow B_f = U^T B_e U \quad (\text{подставляем все базисные векторы})$$

■

При переходе от базиса e к базису e' линейного пространства V матрица квадратичной формы меняется следующим образом: $A' = S^T A S$, где S – матрица перехода от e к e'

□

$$x = Sx' \quad (\text{так как } x' = S^{-1}x)$$

$$Q(x) = x^T A x = (Sx')^T A (Sx') = (x')^T (S^T A S) x' = (x')^T A' x' \Rightarrow A' = S^T A S \quad (\text{так как вместо } x \text{ можно брать все элементы базиса})$$

■

16) Сформулируйте и докажите (включая лемму) теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы.

Лемма: Пусть $A, S \in M_n(\mathbb{R})$, $\det S \neq 0$. Тогда $RgAS = RgA = RgSA$

□

$RgAS \leq RgA$, так как столбцы матрицы AS – это линейная композиция столбцов матрицы A , $\text{ранг} = \text{максимальному количеству л.н.з. столбцов}$

$$RgA = RgA \cdot S \cdot S^{-1} \leq RgAS \Rightarrow RgA = RgAS$$

■

Теорема об инвариантности ранга:

Пусть Q – квадратичная форма на линейном пространстве V ; $a = \{a_1, \dots, a_n\}$, $b = \{b_1, \dots, b_n\}$. Пусть A – матрица Q в базисе a , B – матрица Q в базисе b . Тогда $RgA = RgB$

□

$$B = S^T A S, \quad S - \text{матрица перехода от } a \text{ к } b$$

S – невырождена \Rightarrow по лемме при умножении на невырожденные матрицы S и S^T ранг не меняется $\Rightarrow RgA = RgB$

■

17) Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса и докажите ее.

Пусть φ – линейное отображение из линейного пространства V_1 в линейное пространство V_2 . Пусть $A_{E_1 E_2}$ – матрица линейного отображения в паре базисов: E_1 в пространстве V_1 и E_2 в пространстве V_2 и пусть T_1 – матрица перехода от E_1 к E'_1 , T_2 – матрица перехода от E_2 к E'_2 . Тогда $A_{E'_1 E'_2} = T_2^{-1} A_{E_1 E_2} T_1$

□

$$X^{E'_1} = T_1^{-1} x^{E_1}; Y^{E'_2} = T_2^{-1} x^{E_2}$$

Пусть y – образ x под действием φ . Тогда

$$Y^{E_2} = A_{E_1 E_2} X^{E_1} \text{ и } Y^{E'_2} = A_{E'_1 E'_2} X^{E'_1} \Rightarrow T_2^{-1} Y^{E_2} = A_{E'_1 E'_2} T_1^{-1} X^{E_1} \Rightarrow Y^{E_2} = \underbrace{T_2 A_{E'_1 E'_2} T_1^{-1}}_{A_{E_1 E_2}} X^{E_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{E_1 E_2} = T_2 A_{E'_1 E'_2} T_1^{-1}$$

■

18) Сформулируйте и докажите теорему о том, что действие линейного оператора в конечномерном пространстве полностью определяется матрицей линейного оператора.

Пусть φ – линейный оператор в пространстве V , $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V , $x \in V$ и $x^e = (x_1, \dots, x_n)^T$ – столбец координат вектора x в базисе e . Пусть A_e – матрица оператора φ в базисе e . $(\varphi(x))^e = A_e \cdot x^e$

□

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n) + \dots + x_n (a_{1n} e_1 + a_{2n} e_2 + \dots + a_{nn} e_n) = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) e_1 + \dots + (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) e_n$$

$$\Rightarrow (\varphi(x))^e = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n \end{pmatrix} = (\text{по матричному умножению}) = A_e x^e$$

■

19) Сформулируйте и докажите утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.

Пусть $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ – линейное отображение. Тогда $\dim \text{Ker} \varphi + \dim \text{Im} \varphi = \dim V_2 = n$

□

Выберем базис в $V_1 : e = \{e_1, \dots, e_m\}$. $\forall x \in V_1$ представляется в виде $x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$

$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_m \varphi(e_m)$. $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)$ – столбцы матрицы A линейного отображения.

То есть $\text{Im} \varphi = L(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m))$

$$\Rightarrow \dim \text{Im} \varphi = \text{Rg} A$$

Ядро φ описывается системой $Ax = 0$. Это однородная СЛАУ и размерность пространства ее решений (число элементов ФСР) равна $n - \text{Rg} A = n - \dim \text{Im} \varphi = \dim \text{Ker} \varphi$

■

4-й модуль

1) Сформулируйте и докажите утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

λ – собственное значение линейного оператора $\Leftrightarrow \lambda$ – корень характеристического уравнения (над алгебраически замкнутым полем)

□

Необходимость

Дано: $\lambda \in \text{спектру}$

Доказать: λ – корень $\chi_A(\lambda) = 0$

$\exists x \neq 0 : Ax = \lambda x$, то есть $Ax = \lambda Ix$, где I – тождественный оператор

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (1)$$

Запишем равенство (1) в некотором базисе: $(A_e - \lambda E)x^e = 0$

Эта однородная СЛАУ имеет ненулевое решение $\Rightarrow \det(A_e - \lambda E) = 0$

А это и есть $\chi_A(\lambda) = 0$, то есть λ – корень характеристического уравнения

Достаточность

Дано: λ – корень $\chi_A(\lambda) = 0$

Доказать: λ – собственное значение A

Если λ – корень, то в заданном базисе выписывается равенство $\det(A_e - \lambda E) = 0$

\Rightarrow соответствующая СЛАУ с матрицей $A_e - \lambda E$ имеет ненулевое решение x^e . Это решение – набор координат некоторого вектора, для которого выполняется (1) и, соответственно,

$Ax = \lambda x, x \neq 0$, то есть x – собственный вектор, а λ – собственное значение

■

2) Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – собственные значения линейного оператора $A, \lambda_i \neq \lambda_j$, а v_1, \dots, v_k – соответствующие собственные векторы. Тогда v_1, \dots, v_k – л.н.з., то есть собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям, л.н.з.

□

Применим принцип математической индукции. При $k = 1$ – верно, так как собственный вектор по определению $\neq 0$ и, соответственно, л.н.з.

Пусть утверждение верно для $k = m$

Добавим еще один собственный вектор e_{m+1} , отвечающий λ_{m+1} . Докажем, что система e_1, \dots, e_m, e_{m+1} осталась л.н.з. Рассмотрим равенство: (2) $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m + \alpha_{m+1} e_{m+1} = 0$. К (2) применим оператор $A : \alpha_1 A e_1 + \dots + \alpha_m A e_m + \alpha_{m+1} A e_{m+1} = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m e_m + \alpha_{m+1} \lambda_{m+1} e_{m+1} \quad (3)$$

Умножим (2) на λ_{m+1} и вычтем из (3):

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) e_1 + \dots + \alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) e_m = 0$$

так как λ_i все различны, а e_1, \dots, e_m – л.н.з.

$$\begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \dots \\ \alpha_m = 0 \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ можно записать в виде } \alpha_{m+1} e_{m+1} = 0, \text{ а так как}$$

e_{m+1} – собственный вектор, то $e_{m+1} \neq 0 \Rightarrow \alpha_{m+1} = 0 \Rightarrow$ по определению линейной независимости e_1, \dots, e_{m+1} – л.н.з.

■

3) Сформулируйте и докажите критерий диагональности матрицы оператора.

Матрица линейного оператора A является диагональной в данном базисе \Leftrightarrow все векторы этого базиса являются собственными векторами для A

□

Необходимость

Дано: A_e – диагональная

Доказать: e состоит из собственных векторов A

Пусть A_e – матрица A в базисе e . По определению в j -м столбце A_e стоят координаты вектора $A(e_j)$. Если матрица диагональна, то j -й столбец имеет вид $(0, \dots, \lambda_j, 0, \dots, 0)^T$, то есть

$Ae_j = 0 + \dots + 0 + \lambda_j e_j + 0 + \dots + 0$, то есть по определению e_j – собственный вектор с собственным значением $= \lambda_j$. $e_j \neq 0$, так как он в базисе

\Rightarrow все e_j – базисные, а на диагонали – собственные значения

Достаточность

Дано: $\{e_1, \dots, e_n\}$ – состоит из собственных векторов

Доказать: A_e – диагональна

$Ae_j = \lambda_j e_j \Rightarrow$ в матрице линейного оператора по определению все элементы матрицы линейного оператора равны 0, кроме диагональных

■

4) Каким свойством обладает оператор в n -мерном вещественном пространстве, у которого есть n различных действительных корней? Ответ обоснуйте.

Если характеристическое уравнение линейного оператора, действующего в V ,

$\dim V = n$, имеет n попарно различных корней, лежащих в поле, над которым рассматривается V , то оператор диагонализирuem

□

Если $\lambda_i \in \mathbb{F}$, то ему можно сопоставить хотя бы один собственный вектор v_i . Система векторов v_1, \dots, v_n будет л.н.з., а их число $= \dim V \Rightarrow$ они образуют базис в V из собственных векторов \Rightarrow по критерию оператор диагонализирuem

■

5) Выпишите и докажите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

Пусть e и g – два базиса в V . Тогда $[f]_g = [f]_e T_{e \rightarrow g}$

□

$[f]_g x_g = [f]_e x_e$. Но $x_g = T_{e \rightarrow g}^{-1} x_e$, то есть $x_e = T_{e \rightarrow g} x_g \Rightarrow [f]_g x_g = [f]_e T_{e \rightarrow g} x_g$. Разложение по базису единственно $\Rightarrow [f]_g = [f]_e T_{e \rightarrow g}$

■

6) Выпишите и докажите неравенство Коши-Буняковского. Выпишите и докажите неравенство треугольника.

Теорема Коши-Буняковского

$\forall x, y \in E$ справедливо неравенство $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

□

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$0 \leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda(x, \lambda x - y) - (y, \lambda x - y) =$
 $= \lambda^2(x, x) - \lambda(x, y) - \lambda(y, x) + (y, y) = \lambda^2\|x\|^2 - 2(x, y)\lambda + \|y\|^2$

$\forall \lambda \Rightarrow D \leq 0$

$D = 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$

$(x, y)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

■

Неравенство треугольника

$$\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

□

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|x\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \text{ и норма всегда } \geq 0$$

■

7) Докажите теорему о том, что евклидово пространство можно представить в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения

H^\perp является линейным подпространством в V и $V = H \oplus H^\perp$

$$(\Rightarrow \dim V = \dim H + \dim H^\perp)$$

□

$$\forall x, y \in H^\perp \quad \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad h \in H$$

$$(x + y, h) = (x, h) + (y, h) = 0 + 0 \Rightarrow x + y \in H^\perp$$

$$(\alpha x, h) = \alpha(x, h) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x \in H^\perp$$

$\Rightarrow H^\perp$ является подпространством \Rightarrow можно рассматривать $H + H^\perp$

Сумма прямая, так как если $x \in H \cap H^\perp \Rightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, то есть $H \cap H^\perp = \{0\} \Rightarrow$ сумма прямая

Пусть f_1, \dots, f_m – ОНБ в H , дополним его до ОНБ в V векторами f_{m+1}, \dots, f_n . Применим ортогонализацию Грама-Шмидта:

$$f_1, \dots, f_m, e_{m+1}, \dots, e_n \quad (e_{m+1}, \dots, e_n \text{ ортогональны каждому вектору } f_1, \dots, f_m)$$

$$\Rightarrow e_{m+1}, \dots, e_n \text{ ортогональны всему } H$$

$\forall x \in V$ можно представить в виде:

$$x = \underbrace{x_1 f_1 + \dots + x_m f_m}_{y \in H} + \underbrace{x_{m+1} e_{m+1} + \dots + x_n e_n}_{z \in H^\perp}$$

то есть $\forall x \in V : x = y + z, y \in H, z \in H^\perp$, то есть $V = H \oplus H^\perp$

■

8) Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису и докажите ее. Что происходит с определителем матрицы Грама при применении процесса ортогонализации Грама-Шмидта? Что можно сказать про знак определителя матрицы Грама? Ответ обоснуйте.

Матрицы Грама двух базисов e и e' связаны следующим соотношением: $\Gamma' = U^T \Gamma U$, где U – матрица перехода от e к e' . Верно, так как Γ – матрица билинейной формы

Определитель матрицы Грама (грамиан) не изменяется при применении процесса ортогонализации Грама-Шмидта, то есть $Gr(a_1, \dots, a_n) = \det \Gamma = (b_1, b_1) \dots (b_n, b_n) = \|b_1\|^2 \dots \|b_n\|^2$

□

$$a_1 = b_1$$

$$b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(a_{k+1}, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

$$\Rightarrow \text{матрица } V_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det V_{a \rightarrow b} = 1 \Rightarrow \det \Gamma'_b = \det(U^T \Gamma U) = \det U^T \det \Gamma \det U = \det \Gamma$$

■

$$\det \Gamma > 0$$

□

$\det \Gamma' = \det \Gamma \overbrace{(\det U)^2}^{>0}$. Перейдем в ОНБ. В нем $\Gamma' = E$. Тогда $\det E = 1 = \det \Gamma \cdot \underbrace{(\det U)^2}_{>0} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \det \Gamma > 0$

■

9) Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости набора векторов с помощью матрицы Грама.

Векторы $a_1, \dots, a_k \in E$ – л.н.з. $\Leftrightarrow \det \Gamma_{k \times k} \neq 0$

□

Пусть $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = 0$. Умножим скалярно на векторы a_1, \dots, a_k

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases}$$

то есть $\Gamma_{k \times k} \cdot \alpha = 0$, где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

Это однородная СЛАУ с квадратной матрицей. У нее не существует нетривиального решения (тогда векторы л.н.з.) $\Leftrightarrow \det \Gamma_{k \times k} \neq 0$

■

10) Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов, и докажите ее.

Пусть $H = \underbrace{\langle a_1, \dots, a_k \rangle}_{\text{л.н.з.}}$. Тогда $\text{пр}_H x = A(A^T A)^{-1} A^T x$, где A – матрица, составленная из столбцов

$$a_1, \dots, a_k$$

□

$$n = \text{пр}_H x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \in H \quad (\text{то есть } x = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k}_h + h^\perp)$$

Последовательно умножим скалярно на a_1, \dots, a_k . Заметим, что $(a_i, h^\perp) = 0 \Rightarrow$ получаем СЛАУ относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_k$:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_k(a_1, a_k) = (a_1, x) \\ \dots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \dots + \alpha_k(a_k, a_k) = (a_k, x) \end{cases}$$

В матричной форме: $\underbrace{A^T A}_{\Gamma_{k \times k}} \cdot \alpha = A^T x, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

Так как a_1, \dots, a_k л.н.з. $\Rightarrow \det \underbrace{A^T A}_{\Gamma_{k \times k}} \neq 0 \Rightarrow \exists (A^T A)^{-1} \Rightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T x$

$$\text{пр}_H x = A \cdot \alpha = a_1 \alpha_1 + \dots + a_k \alpha_k \Rightarrow \text{пр}_H x = A(A^T A)^{-1} A^T x$$

■

11) Докажите что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор.

\forall линейного оператора $A : E \rightarrow E$ $\exists!$ сопряженный оператор $A^* : E \rightarrow E$, причем его матрицей будет матрица $(A^*)_b = \Gamma^{-1}(A)_b^T \Gamma$, где Γ – матрица Грама базиса b .

□

Покажем, что линейный оператор с матрицей $B = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$ ($= A^T$ для ОНБ) является сопряженным к данному линейному оператору A . Для этого проверим выполнение равенства:

$$(Ax, y) = (x, By) \quad \forall x, y \in E$$

Пусть x^b, y^b – столбцы координат векторов x и y в базисе b . Тогда по теореме $(Ax)^b = A_b \cdot x^b \Rightarrow ((Ax)^b)^T \cdot \Gamma \cdot y^b = (x^b)^T \cdot \Gamma \cdot (By)^b \leftarrow$ матричная форма скалярного произведения

$$(x^b)^T A_b^T \Gamma y^b = (x^b)^T \Gamma B_b y^b$$

По лемме $\Gamma B_b = A_b^T \Gamma$

Так как базис состоит из л.н.з. векторов, то $\exists \Gamma^{-1}$ и $\Rightarrow B = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$

■

12) Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих p разным собственным значениям.

Собственные векторы самосопряженного линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны

□

Пусть:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad x_1 \neq 0$$

$$Ax_2 = \lambda_2 x_2 \quad x_2 \neq 0$$

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2)$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$$

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2), \text{ так как } A \text{ самосопряжен}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (x_1, x_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = 0 \Rightarrow \text{они ортогональны}$$

■

13) Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора? Ответ обоснуйте.

Все собственные значения самосопряженного оператора являются действительными числами

□

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ – корень $\chi_A(\lambda) = 0$, то есть $\det(a - \lambda E) = 0$. Тогда СЛАУ $(A - \lambda E)x = 0$ (1) имеет ненулевое решение $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, состоящее из $x_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1, n}$. Рассмотрим \bar{x} – столбец, состоящий из \bar{x}_k . Умножим (1) на $\bar{x}^T = x^*$ слева:

$$\bar{x}^T (A - \lambda_i E)x = 0$$

$$\bar{x}^T Ax = \lambda_i \bar{x}^T x$$

$$\bar{x}^T x = \bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n = \underbrace{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}_{\in \mathbb{R}} > 0, \text{ так как решение ненулевое}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \frac{\bar{x}^T Ax}{\bar{x}^T x}. \text{ Возьмем } w = \bar{x}^T Ax$$

$$w = w^T = (\bar{x}^T Ax)^T = x^T A^T (\bar{x}^T)^T = x^T A \bar{x}$$

$$\bar{w} = \overline{\bar{x}^T Ax} = \bar{x}^T \bar{A} \bar{x} = x^T A \bar{x} \Rightarrow w = \bar{w}, \text{ то есть } w \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_i \text{ тоже является вещественным числом}$$

■

14) Что можно сказать про ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора? Ответ обоснуйте. Сформулируйте и докажите теорему Фредгольма.

Пусть линейный оператор $A: E \rightarrow E$. Тогда $E = \text{Ker} A \oplus \text{Im} A^*$

□

Докажем, что $\text{Ker} A = (\text{Im} A^*)^\perp$ (Тогда из $E = H \oplus H^\perp = (\text{Im} A^*)^\perp \oplus \text{Im} A^*$ будет следовать утверждение)

Рассмотрим ОНБ в E . Пусть $x \in \text{Ker} A$, тогда $\forall y \in E$ в матричной записи:

$$0 = y^T Ax = (A^T y)^T x = (A^* y, x) \Rightarrow x \perp \text{Im} A^* \Rightarrow \text{Ker} A \subseteq (\text{Im} A^*)^\perp$$

Пусть теперь $x \in (Im A^*)^\perp$. Тогда $(x, A^*y) = (y, Ax) = 0 \forall y \in E$. Положив $y = Ax$, получаем $(y, Ax) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$, то есть $x \in Ker A$, то есть $(Im A^*)^\perp \subseteq Ker A$

■

Теорема Фредгольма

$Ax = b$ совместна \Leftrightarrow вектор $b \perp$ всем решениям однородной СЛАУ $A^T y = 0$ – это $Ker A^*$

□

$Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow b \in Im A$. А по теореме $E = Im A \oplus Ker A^*$

■

15) Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратное? Ответ обоснуйте.

Пусть $A : E \rightarrow E$. Тогда A – ортогональный линейный оператор \Leftrightarrow ОНБ e_1, \dots, e_n переводит в ОНБ Ae_1, \dots, Ae_n

□

Необходимость

Дано: e_1, \dots, e_n – ОНБ, A – ортогональный линейный оператор

Доказать: Ae_1, \dots, Ae_n – ОНБ

$$(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

То есть система $\{Ae_j\}$ состоит из ненулевых векторов и ориентирована \Rightarrow он л.н.з. и так как $\dim E = n$, то это ОНБ

Достаточность

Дано: $e_1, \dots, e_n \setminus$ ОНБ
 $Ae_1, \dots, Ae_n /$

Доказать: A – ортогональный линейный оператор

$x \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$ в базисе e_1, \dots, e_n

Тогда $Ax \mapsto (x_1, \dots, x_n)^T$ в Ae_1, \dots, Ae_n , так как $Ax = A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 Ae_1 + \dots + x_n Ae_n \Rightarrow \forall x, y \in E (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ (мы в ОНБ). Так же выражается (Ax, Ay) в базисе $\{Ae_j\} \Rightarrow$ соотношение $(Ax, Ay) = (x, y)$ верно $\forall x, y \in E$

■

16) Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.

Матрица линейного оператора A в ОНБ ортогональна $\Leftrightarrow A$ – ортогональный оператор

□

Необходимость

A_e – ортогональная матрица. доказать, что A – ортогональный линейный оператор

$A_e^T A_e = E \Rightarrow \forall x, y \in E x^T (A_e^T A_e) y = x^T E y \Leftrightarrow (A_e x)^T A_e y = x^T y \leftarrow$ матричная запись скалярного произведения в ОНБ

$(Ax, Ay) = (x, y) \Rightarrow A$ – ортогональный линейный оператор по определению

Достаточность

A – ортогональный линейный оператор. Доказать, что $A_e^T A_e = E$

$\forall x, y \in E (Ax, Ay) = (x, y)$

$(A_e x)^T (A_e y) = x^T y$

$x^T A_e^T A_e y = x^T E y \Rightarrow$ по лемме $A_e^T A_e = E$

■

17) Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений.

Для \forall самосопряженного линейного оператора $A : E \rightarrow E, \dim E = n, \exists$ ОНБ, состоящий из собственных векторов A .

□

По утверждению об ортогональности собственных векторов самосопряженного линейного оператора система из собственных векторов будет ортогональной \Rightarrow по теореме она л.н.з. и в ней n векторов \Rightarrow она является базисом. Этот базис является ортогональным. ОНБ получим, разделив e_i на $\|e_i\|$. Итак, \exists ОНБ из собственных векторов.

■

18) Сформулируйте и докажите утверждение о QR-разложении.

Пусть $A \in M_m(\mathbb{R})$ и столбцы A_1, \dots, A_m л.н.з. Тогда $\exists Q$ и $R : A = QR$, причем Q – ортогональная матрица, R – верхнетреугольная матрица

□

Применим к A_1, \dots, A_m процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Получим столбцы Q_1, \dots, Q_m – ОНБ в $Im A$. $A_k \in L(Q_1, \dots, Q_k), k = \overline{1, m}$ (по формулам Грама-Шмидта) $\Rightarrow A_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} Q_i, k =$

$\overline{1, m}$ или в матричной форме $A = Q \cdot R$, где $Q = (Q_1 | \dots | Q_m), R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & r_{mm} \end{pmatrix}$. Q является

ортогональной, так как Q_i образуют ОНБ

■

19) Сформулируйте и докажите теорему о сингулярном разложении.

\forall матрицы $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ справедливо сингулярное: $A = V \cdot \Sigma \cdot U^T, U \in O_n(\mathbb{R}), V \in O_m(\mathbb{R}), \Sigma \in M_{mn}(\mathbb{R})$ и Σ является диагональной с числами $\sigma_i \geq 0$ на диагонали (σ_i – сингулярные числа).

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

$A^T A$ – матрица Грама столбцов матрицы A . Она симметрична и соответствующая квадратичная форма неотрицательно определена.

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

$Q(x) = x^T A^T A x = (Ax)^T A x = (Ax, Ax) = |Ax|^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ все собственные значения $A^T A$ вещественны (так как линейный оператор с $A^T A$ является самосопряженным) и они все ≥ 0

Запишем собственные значения $A^T A$ в виде σ_i^2 (то есть $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$) Их нумеруем по невозрастанию: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$. Так как $A^T A$ – самосопряжен, то для

него \exists ОНБ из собственных векторов (собственных векторов $A^T A$). $A^T A u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, 1 \leq i \leq r \\ 0, r+1 \leq i \leq n \end{cases}$.

Положим $v_i = \frac{A u_i}{\sigma_i}$ для $1 \leq i \leq r$. Тогда $(v_i, v_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$. Дополним v_1, \dots, v_r векто-

рами v_{r+1}, \dots, v_m до ОНБ в \mathbb{R}^m . В итоге: $A \underbrace{[u_1, \dots, u_n]}_U = \underbrace{[v_1, \dots, v_m]}_V \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

где $[u_1, \dots, u_n]$ и $[v_1, \dots, v_m]$ соответственно правые сингулярные векторы и левые сингулярные векторы

$A \cdot U = V \cdot \Sigma \Rightarrow$ так как U и V ортогональны $\Rightarrow A = V \Sigma U^T$

■

20) Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

\forall квадратичную форму можно ортогональным преобразованием привести к каноническому виду

□

Матрица квадратичной формы является симметрической. Рассмотрим n -мерное евклидово пространство E (n – число переменных в Q) и некоторый ОНБ в нем. Тогда матрица квадратичной формы A является матрицей некоторого самосопряженного оператора B в данном базисе. По теореме о \exists ОНБ из собственных векторов для самосопряженного оператора \Rightarrow найдется ОНБ из собственных векторов оператора B . И матрица линейного оператора в этом базисе будет диагональной: $B' = U^{-1}BU$, где U – матрица перехода от исходного базиса. Но оба базиса являются ОНБ $\Rightarrow U^{-1} = U^T$ (то есть U – ортогональная). Матрица квадратичной формы преобразовывается по формуле: $A' = U^T A U \Rightarrow$ матрица квадратичной формы тоже совпадает с матрицей линейного оператора $A' = B'$ и является диагональной \Rightarrow это канонический вид

■