

## 1-й модуль

### 1. Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция? Ответ пояснить.

Произведением матриц  $A_{n \times p}$  и  $B_{p \times k}$  называется матрица  $C$  типа  $n \times k$ , где  $c_{ij} = \sum_{l=1}^p a_{il} \cdot b_{lj}$ . Умножение матриц, не коммутативно, то есть  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2. Дать определение ступенчатого вида матрицы и канонического вида матрицы.

Матрица  $M$  имеет *ступенчатый вид*, если номера первых ненулевых элементов всех строк (такие элементы называют ведущими) возрастают, а нулевые строки стоят внизу матрицы.

Матрица  $M$  имеет *канонический вид*, если  $M$  уже имеет ступенчатый вид, причем все ведущие элементы равны 1 и в любом столбце, содержащем ведущий элемент, выше и ниже него стоят 0.

### 3. Перечислить элементарные преобразования строк.

Пусть  $(i)$  –  $i$ -тая строка матрицы  $A$ .

Тогда элементарные преобразования:

- 1)  $(i) \rightarrow \lambda \cdot (i)$ ,  $\lambda \neq 0$  – умножили  $i$  – тую строку на число  $\lambda$
- 2)  $(i) \leftrightarrow (j)$  – поменяли местами  $i$ -тую и  $j$ -тую строки
- 3)  $(i) \rightarrow (i) + \lambda \cdot (k)$  – число  $i$ -тая строка заменяется на сумму  $i$ -той строки и  $k$ -той строки  $\cdot$  число  $\lambda$

### 4. Сформулировать теорему о методе Гаусса (алгоритм приводить не нужно).

Любую конечную матрицу  $A$  можно привести элементарными преобразованиями к ступенчатому (каноническому) виду.

### 5. Дать определения перестановки и подстановки.

Всякое расположение чисел от 1 до  $n$  в определенном порядке называют *перестановкой*.

Подстановка  $\sigma \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$  – отображение множества  $1, \dots, n$  в себя. Это отображение должно быть биективным.

### 6. Дать определение знака и четности подстановки.

Знак подстановки  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$  равен  $(-1)^a$ , где  $a$  – число инверсий в строке  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$ . Если знак равен 1, то подстановка четна, если -1 – нечетна.

### 7. Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \quad (\text{сумма по всем подстановкам}).$$

### 8. Выписать формулы для разложения определителя по строке и столбцу.

Определитель матрицы  $A$  равен сумме произведений элементов  $i$ -той строки ( $j$ -того столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

**9. Что такое фальшивое разложение?**

Элементы строки при умножении на алгебраические дополнения к элементу другой строки дают после суммирования 0.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{kj} = 0, \text{ если } k \neq i$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ik} = 0, \text{ если } k \neq j$$

**10. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка.**

Пусть  $A \cdot x = b$  – совместная СЛАН. Тогда  $\Delta_j = x_j \cdot \det(A_1, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_{j-1}, b, A_{j+1}, \dots, A_n)$

Если  $\Delta \equiv \det A \neq 0$ , то  $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1, n}$

**11. Что такое дополняющий минор и что такое алгебраическое дополнение?**

В матрице  $A_{n \times n}$  вычеркнем  $i$ -тую строку и  $j$ -тый столбец. Определитель получившейся матрицы называется *дополняющим минором* элемента  $a_{ij}$ .

*Алгебраическим дополнением* элемента  $a_{ij}$  называется число  $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = A_{ij}$

**12. Дать определение союзной матрицы.**

*Союзная матрица* – транспонированная матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы  $A$ .

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

**13. Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий ее существования.**

Матрица  $B \in M_n(\mathbb{R})$  называется *обратной* к матрице  $A$ , если  $B \cdot A = E = A \cdot B$ .

Матрица  $A \in M_n(\mathbb{R})$  имеет обратную (обратима)  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$  (она невырождена).

**14. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы.**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}, \text{ где } \tilde{A} \text{ – союзная матрица.}$$

**15. Дать определение минора.**

Минором  $k$ -го порядка матрицы  $A$  называют определитель матрицы, составленной из элементов, стоящих на пересечениях произвольных  $k$  строк и  $k$  столбцов.

**16. Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными?**

Любой отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу, называется *базисным минором* матрицы.

Строки, попавшие в фиксированный базисный минор, называются *базисными*.

**17. Дать определение ранга матрицы.**

Рангом матрицы называют наибольший порядок отличного от 0 минора.

**18. Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация?**

Линейной комбинацией строк (столбцов)  $a_1, \dots, a_s$  одинаковой длины (высоты) называют выражение вида  $\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_s \cdot a_s$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  – некоторые числа.

Линейная комбинация называется *нетривиальной*, если  $\exists \lambda_i \neq 0$ .

**19. Дать определение линейной зависимости строк матрицы.**

Строки  $a_1, \dots, a_s$  называют *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация  $\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_s \cdot a_s = 0$ .

**20. Дать определение линейно независимых столбцов матрицы.**

Если равенство  $\lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_k \cdot a_k = 0$  возможно только при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ , то говорят, что столбцы  $a_1, \dots, a_k$  *линейно независимы* (л.н.з.).

**21. Сформулировать критерий линейной зависимости.**

Строки  $a_1, \dots, a_k$  линейно зависимы  $\Leftrightarrow$  хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных.

**22. Сформулировать теорему о базисном миноре.**

- 1) Базисные строки (столбцы), соответствующие любому базисному минору  $M$  матрицы  $A$  л.н.з.
- 2) Строки (столбцы) матрицы  $A$ , не входящие в  $M$ , являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

**23. Сформулировать теорему о ранге матрицы.**

Ранг матрицы равен максимальному числу ее л.н.з. строк (столбцов).

**24. Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы.**

Рассмотрим матрицу  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\det A \neq 0$
- 2)  $RgA = n$
- 3) все строки  $A$  л.н.з.

## 2-й модуль

**1. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.**

СЛАУ  $A \cdot x = b$  совместна  $\Leftrightarrow RgA = Rg(A|b)$ .

**2. Сформулируйте критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей.**

Однородная СЛАУ  $A \cdot x = 0$  имеет ненулевое решение  $\Leftrightarrow$  Матрица  $A$  вырождена, то есть  $\det A = 0$ .

**3. Дайте определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ.**

Любые  $n - r$  линейно независимых столбцов, являющихся решениями однородной СЛАУ  $A \cdot x = 0$ , где  $n$  – число неизвестных, а  $r = RgA$ , называют *фундаментальной системой решений* (ФСР) однородной СЛАУ  $A \cdot x = 0$ .

#### 4. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Пусть  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – ФСР однородной СЛАУ  $A \cdot x = 0$ . Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде  $x = c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k$ , где  $c_1, \dots, c_k$  – некоторые постоянные.

#### 5. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть известно частное решение  $\tilde{x}$  СЛАУ  $A \cdot x = b$ . Тогда любое решение этой СЛАУ можно представить в виде  $x = \tilde{x} + c_1 \cdot \Phi_1 + \dots + c_k \cdot \Phi_k$ , где  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  – ФСР соответствующей однородной СЛАУ, а  $c_1, \dots, c_k$  – некоторые постоянные.

#### 6. Что такое алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексного числа?

Пусть  $z \in \mathbb{C}$ . Тогда:

- $z = x + iy$  – алгебраическая форма записи, где  $x, y \in \mathbb{R}$
- $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  – тригонометрическая форма записи, где  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$

#### 7. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа?

Модуль комплексного числа  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Аргумент комплексного числа – угол между положительным направлением вещественной оси и радиус-вектором этой точки:

$$\phi = \text{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$\arg z \in [0, 2\pi)$  или  $\arg z \in (-\pi, \pi]$  – главное значение аргумента.

#### 8. Сложение, умножение комплексных чисел. Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и делении?

**Сложение:**  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

**Умножение:**  $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$ .

При умножении модули комплексных чисел перемножаются, а аргументы складываются. Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей, а аргумент – разности аргументов делимого и делителя.

#### 9. Что такое комплексное сопряжение? Как можно делить комплексные числа в алгебраической форме?

**Комплексное сопряжение:**  $\bar{z} = \overline{a + b \cdot i} = a - b \cdot i$

Пусть  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  и  $z_2 \neq 0$ . Тогда:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

#### 10. Выпишите формулу Муавра.

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi), n \in \mathbb{N}$$

**11. Как найти комплексные корни  $n$ -ой степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него.**

Дано число  $w = \rho \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$  и число  $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{w} = \left\{ z = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left( \cos \frac{\psi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\psi + 2\pi k}{n} \right), k = \overline{0, n-1} \right\}$$

$\sqrt[6]{1}$ :

complex\_roots.png

**12. Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу.**

**Основная теорема алгебры:**  $\forall$  многочлена  $f(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_0 \cdot z^0$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 0$   $\exists$  корень  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

**Теорема Безу:** Остаток от деления многочлена  $f(x)$  на  $x - c$  равен  $f(c)$ .

**13. Выпишите формулу Эйлера. Выпишите выражения для синуса и косинуса через экспоненту.**

**Формула Эйлера:**  $\cos \phi + i \cdot \sin \phi = e^{i\phi}$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$

$$\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$

**14. Какие многочлены называются неприводимыми?**

Многочлен называется *приводимым*, если  $\exists$  нетривиальное разложение  $f = g \cdot h$  и *неприводимым* в противном случае.

**15. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над комплексными числами.**

$\forall$  многочлен степени  $n > 0$  разлагается в произведение неприводимых многочленов.

**16. Дайте определение векторного произведения векторов в трехмерном пространстве.**

Вектор  $\vec{c}$  называют *векторным произведением* векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если:

1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi$  - угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

2)  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$

3) тройка  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  - правая

**17. Сформулируйте три алгебраических свойства векторного произведения.**

- 1)  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$  (антикоммутативность)
- 2)  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$  (дистрибутивность)

**18. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.**

Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – правый ортонормированный базис,  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ . Тогда:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

**19. Сформулируйте критерий коллинеарности двух векторов с помощью векторного произведения.**

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны  $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

**20. Дайте определение смешанного произведения векторов. Как вычислить объем тетраэдра с помощью смешанного произведения?**

Смешанным произведением векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называют число  $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ .

Объем тетраэдра, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  равен  $V_T = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ .

**21. Выпишите формулу для вычисления смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.**

Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – правый ортонормированный базис,  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ ,  $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ . Тогда:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

**22. Сформулируйте критерий компланарности трех векторов с помощью смешанного произведения.**

Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  компланарны  $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ .

**23. Дайте определение прямоугольной декартовой системы координат.**

Прямоугольной декартовой системой координат называют пару, состоящую из точки  $O$  и ортонормированного базиса.

**24. Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ?**

Уравнение  $F(x, y, z) = 0$  называют *уравнением поверхности*  $S$ , если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на поверхности.

При этом поверхность  $S$  называют *геометрическим образом* уравнения  $F(x, y, z) = 0$ .

**25. Сформулируйте теорему о том, что задает любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве.**

Любое уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ , определяет в пространстве плоскость.

## 26. Что такое нормаль к плоскости?

Пусть  $Ax + By + Cz + D = 0$  – уравнение плоскости. Тогда вектор  $\vec{n} = (A, B, C)$  перпендикулярен плоскости и называется нормалью к этой плоскости.

## 27. Выпишите формулу расстояния от точки до плоскости.

Рассмотрим плоскость  $L : Ax + By + Cz + D = 0$  и точку  $M(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда:

$$\rho(M, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## 28. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой.

- $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$  – общее уравнение прямой
- Векторное уравнение прямой:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$ , где  $\vec{r}_0$  – радиус-вектор некоторой точки прямой,  $\vec{s}$  – направляющий вектор прямой
- Параметрическое уравнение:  $\begin{cases} x - x_0 = tl \\ y - y_0 = tm \\ z - z_0 = tn \end{cases}$ , где  $\vec{p}(l, m, n)$  – направляющий вектор прямой,  
 $M(x_0, y_0, z_0)$  – точка прямой
- Каноническое уравнение прямой:  $t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

## 29. Сформулируйте критерий принадлежности двух прямых одной плоскости.

Пусть  $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$ . Тогда  $L_1$  и  $L_2$  в одной плоскости  $\Leftrightarrow \vec{s}_1, \vec{s}_2$  и  $\overrightarrow{M_1M_2}$  компланарны, где  $\vec{s}_1, \vec{s}_2$  – направляющие вектора прямых  $L_1$  и  $L_2$  соответственно.

## 30. Выпишите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.

Рассмотрим точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и прямую  $L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ . Пусть  $\vec{s} = (l, m, n)$ ,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда:

$$\rho(M_1, L) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

## 31. Выпишите формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

Рассмотрим скрещивающиеся прямые  $L_1$  и  $L_2$ ,  $s_1$  и  $s_2$  – их направляющие векторы и точки  $M_1 \in L_1$ ,  $M_2 \in L_2$ . Тогда:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{|\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

## 32. Какие бинарные операции называются ассоциативными, а какие коммутативными?

Бинарная операция  $\times$  называется *ассоциативной*, если  $\forall a, b, c \in X : a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ .

Бинарная операция  $*$  называется *коммутативной*, если  $\forall a, b \in X : a * b = b * a$ .

**33. Дайте определение полугруппы и моноида. Приведите примеры.**

Множество с заданной на нем ассоциативной бинарной операцией называется *полугруппой*. **Пример:**  $(\mathbb{N}, +)$ .

Полугруппа, в которой есть нейтральный элемент, называется *моноидом*. **Пример:**  $(\mathbb{N}, \cdot)$  – моноид,  $e = 1$ .

**34. Сформулируйте определение группы. Приведите пример.**

Моноид  $G$ , все элементы которого обратимы, называется *группой*. **Пример:** множество всех невырожденных ( $\det A \neq 0$ ) матриц  $A_{n \times n}$  с операцией матричного умножения.

**35. Что такое симметрическая группа? Укажите число элементов в ней.**

*Симметрическая группа*  $S_n$  – множество всех подстановок длины  $n$   $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ l_1 & \dots & l_n \end{pmatrix}$  с операцией композиции. В ней  $n!$  элементов.

**36. Что такое общая линейная и специальная линейная группы?**

Множество всех невырожденных ( $\det A \neq 0$ ) матриц  $A_{n \times n}$  с операцией матричного умножения –  $GL_n(\mathbb{R})$  – *общая линейная группа*.

$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$  – *специальная линейная группа*.

**37. Сформулируйте определение абелевой группы. Приведите пример.**

Группа с коммутативной операцией называется *абелевой*. **Пример:**  $(\mathbb{Z}, +)$  – абелева группа.

**38. Дайте определение подгруппы. Приведите пример группы и ее подгруппы.**

Подмножество  $H \subseteq G$  называется *подгруппой* в группе  $G$ , если:

- 1)  $e \in H$
- 2)  $\forall h_1, h_2 \in H : h_1 \cdot h_2 \in H$
- 3)  $\forall h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$

**Пример:**  $SL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$

**39. Дайте определение гомоморфизма групп. Приведите пример.**

Отображение  $f : G \rightarrow G'$  группы  $(G, *)$  в группу  $(G', \circ)$  называется *гомоморфизмом*, если  $\forall a, b \in G : f(a * b) = f(a) \circ f(b)$ .

**Пример:**  $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$  ( $\mathbb{R}^*$  – это  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  с операцией умножения). Это гомоморфизм, так как  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ .

**40. Дайте определение изоморфизма групп. Приведите пример.**

*Изоморфизм* – это биективный гомоморфизм.

**Пример:**  $(\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}^+, \cdot)$  посредством изоморфизма  $f(x) = e^x$ .

**41. Дайте определение порядка элемента**

*Порядок элемента*  $a \in G$  – наименьшее натуральное число  $p$  такое, что  $a^p = e$ .



### 3-й модуль

**1. Что такое ядро гомоморфизма групп? Приведите пример.**

*Ядро гомоморфизма  $f: G \rightarrow F$   $\text{Ker } f = \{g \in G \mid f(g) = e_F\}$  ( $e_F$  – нейтральный элемент в  $F$ ).*

**Пример:** В гомоморфизме  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  с  $h(u) = u \bmod 3$  ядро состоит из целых чисел, делящихся на 3.

**2. Сформулируйте определение циклической группы. Приведите пример.**

*Если  $\forall$  элемент  $g \in G$  имеет вид  $g = a^n = a \times a \times \dots \times a$  ( $n$  раз), где  $a \in G$ , то  $G$  – циклическая группа.*

**Пример:**  $(\mathbb{Z}, +)$  – циклическая группа, порожденная 1.

**3. Сколько существует, с точностью до изоморфизма, циклических групп данного порядка?**

*Существует ровно одна циклическая группа данного порядка с точностью до изоморфизма.*

**4. Что такое группа диэдра? Что такое знакопеременная группа? Укажите число элементов в них.**

*Группа диэдра ( $D_n$ ) – это группа симметрии правильного  $n$ -угольника,  $|D_n| = 2n$ .*

*$A_n$  – знакопеременная группа, то есть множество всех четных подстановок,  $|A_n| = \frac{n!}{2}$ .*

**5. Сформулируйте утверждение о связи порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы.**

*Пусть  $G$  – группа и  $g \in G$ , тогда  $\text{ord}(g) = |\langle g \rangle|$ .*

**6. Сформулируйте утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.**

*$\forall$  подгруппа в  $(\mathbb{Z}, +)$  имеет вид  $k\mathbb{Z}$  для некоторых  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .*

**7. Дайте определение левого смежного класса по некоторой подгруппе.**

*Пусть  $G$  – группа,  $H \subseteq G$  – подгруппа и  $g \in G$ . Тогда левым смежным классом элемента  $g$  по подгруппе  $H$  называется множество  $gH = \{gh \mid h \in H\}$ .*

**8. Дайте определение нормальной подгруппы.**

*Подгруппа  $H$  называется нормальной, если  $gH = Hg$ ,  $\forall g \in G$  (равенство правых и левых смежных классов).*

**9. Что такое индекс подгруппы?**

*Индексом подгруппы  $H$  в группе  $G$  называется число левых смежных классов  $G$  по  $H$ .*

**10. Сформулируйте теорему Лагранжа.**

*Пусть  $G$  – конечная группа и  $H \subseteq G$  – подгруппа. Тогда  $|G| = |H| \cdot [G : H]$ .*

**11. Сформулируйте две леммы, которые нужны для доказательства теоремы Лагранжа.**

**Лемма 1:**  $\forall g_1, g_2 \in G$  либо  $g_1H = g_2H$ , либо  $g_1H \cap g_2H = \emptyset$ .

**Лемма 2:**  $|gH| = |H| \quad \forall g \in G$ ,  $\forall$  конечной подгруппы  $H$ .

**12. Сформулируйте три следствия из теоремы Лагранжа.**

**Следствие 1:** Пусть  $G$  – конечная группа и  $g \in G$ . Тогда  $\text{ord}(g)$  делит  $|G|$ .

**Следствие 2:** Пусть  $G$  – конечная группа. Тогда  $g^{|G|} = e$ .

**Следствие 3 (малая теорема Ферма):** Пусть  $\bar{a}$  – ненулевой вычет по простому модулю  $p$ . Тогда  $\bar{a}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**13. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.**

Пусть  $H \subseteq G$  – подгруппа в группе  $G$ . Тогда 3 условия эквивалентны:

- 1)  $H$  нормальна
- 2)  $\forall g \in G \ gHg^{-1} \subseteq H \ (gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\})$
- 3)  $\forall g \in G \ gHg^{-1} = H$

**14. Дайте определение факторгруппы.**

Пусть  $H$  – нормальная подгруппа. Тогда  $G/H$  – множество левых смежных классов по  $H$  с операцией умножения:  $(g_1H) \cdot (g_2H) = g_1 \cdot g_2H$  называется *факторгруппой*  $G$  по  $H$ .

**15. Что такое естественный гомоморфизм?**

Отображение  $\varepsilon : G \rightarrow G/H$ , сопоставляющее каждому элементу  $a \in G$  его класс смежности  $aH$ , называется *естественным гомоморфизмом*.

**16. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.**

$H$  – нормальная подгруппа  $\Leftrightarrow H = \text{Ker } f$ , где  $f$  – некоторый гомоморфизм.

**17. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп. Приведите пример.**

Пусть  $f : G \rightarrow F$  – гомоморфизм групп. Тогда группа  $\text{Im } f = \{a \in F | \exists g \in G, f(g) = a\}$  изоморфна факторгруппе  $G/\text{Ker } f$ ,  $\text{Ker } f = \{g \in G | f(g) = e_F\}$  ( $\text{Ker } f$  – ядро гомоморфизма).

$$G/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f$$

**Пример:**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$   $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, \forall$  целому числу сопоставляем его остаток от деления на  $n$  –  $\text{Ker } f = n\mathbb{Z}$ .

**18. Что такое прямое произведение групп?**

*Прямое произведение групп*  $(G, +) \times (D, \star)$  – это группа из всех пар элементов с операцией поэлементного умножения:

$$(g_1, d_1) \times (g_2, d_2) = (g_1 + g_2, d_1 \star d_2)$$

**19. Сформулируйте определение автоморфизма и внутреннего автоморфизма.**

*Аutomорфизм* – это изоморфизм из  $G$  в  $G$ .

*Внутренний автоморфизм* – это отображение  $I_a : g \mapsto aga^{-1}$ .

**20. Что такое центр группы? Что можно сказать о его свойствах?**

Центр группы  $G$  – это множество  $Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \ \forall b \in G\}$ .  $G$  – абелева  $\Leftrightarrow Z(G) = G$ .  $Z(G)$  является нормальной подгруппой  $G$ .

**21. Чему изоморфна факторгруппа группы по ее центру?**

$G/Z(G) \simeq Inn(G)$  ( $Inn$  – подгруппа, которую образуют все внутренние автоморфизмы группы  $Aut(G)$ ).

**22. Сформулируйте теорему Кэли.**

$\forall$  конечная группа порядка  $n$  изоморфна некоторой подгруппе группы  $S_n$ .

**23. Дайте определение кольца.**

Пусть  $K \neq \emptyset$  – множество, на котором заданы две бинарные операции  $+$  и  $\cdot$ , такие, что:

- 1)  $(K, +)$  – абелева группа (это аддитивная группа кольца)
  - 2)  $(K, \cdot)$  – полугруппа (это мультипликативная полугруппа кольца)
  - 3) Умножение дистрибутивно относительно сложения:  $\forall a, b, c \in K : c(a + b) = ca + cb, (a + b)c = ac + bc$
- Тогда  $(K, +, \cdot)$  – *кольцо*.

**24. Что такое коммутативное кольцо? приведите примеры коммутативного и некоммутативного колец.**

Если  $\forall x, y \in K \ xy = yx$ , то кольцо называется *коммутативным*.

**Пример 1:**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  – является коммутативным кольцом.

**Пример 2:**  $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  – полное матричное кольцо над  $\mathbb{R}$  – некоммутативное.

**25. Дайте определение делителей нуля.**

Если  $a \cdot b = 0$ , при  $a \neq 0, b \neq 0$  в кольце  $K$ , то  $a$  называется *левым делителем нуля*, а  $b$  – *правым делителем нуля*.

**26. Дайте определение целостного кольца. Приведите пример.**

Коммутативное кольцо с единицей ( $\neq 0$ ) и без делителей нуля называется *целостным кольцом*. **Пример:**  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

**27. Сформулируйте критерий целостности для нетривиального коммутативного кольца с единицей.**

Нетривиальное коммутативное кольцо с единицей является целостным  $\Leftrightarrow$  в нем выполняется закон сокращения, то есть из  $a \cdot b = a \cdot c$  при условии  $a \neq 0 \Rightarrow b = c \ \forall a, b, c \in K$ .

**28. Какие элементы кольца называются обратимыми?**

Элемент коммутативного кольца  $a$  называется *обратимым*, если  $\exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$ .

**29. Дайте определение поля. Приведите три примера.**

*Поле*  $P$  – это коммутативное кольцо с единицей ( $\neq 0$ ), в котором каждый элемент  $a \neq 0$  обратим. **Пример:**  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ .

**30. Дайте определение подполя. Привести пример пары: поле и его подполе.**

*Подполе* – это подмножество поля, которое само является полем относительно тех же операций. **Пример:**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**31. Дайте определение характеристики поля. Привести примеры: поля конечной положительной характеристики и поля нулевой характеристики.**

Пусть  $P$  – поле. *Характеристикой* поля  $P$  ( $\text{char } P$ ) называется наименьшее  $q \in \mathbb{N} : \underbrace{1 + \dots + 1}_q = 0$ . Если такого  $q$  не существует, то  $\text{char } P = 0$ .

**Пример:**  $\text{char } \mathbb{R} = 0$ ,  $\text{char } \mathbb{Z}_p = p$ ,  $p$  – простое.

**32. Сформулируйте утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.**

Пусть  $F$  – поле.  $F_0$  – его простое подполе. Тогда:

- 1) если  $\text{char } F = p > 0$ , то  $F_0 \simeq \mathbb{Z}_p$
- 2) если  $\text{char } F = 0$ , то  $F_0 \simeq \mathbb{Q}$

**33. Дайте определение идеала. Что такое главный идеал?**

Подмножество  $I$  кольца называется *идеалом*, если:

1. оно является подгруппой по сложению
2.  $\forall a \in I, \forall r \in K \quad r \cdot a$  и  $a \cdot r \in I$

Идеал называется *главным*, если  $\exists a \in K : I = \langle a \rangle$ .

**34. Сформулируйте определение гомоморфизма колец.**

$\varphi : K_1 \rightarrow K_2$  – *гомоморфизм колец*, если  $\forall a, b \in K_1 : \begin{cases} \varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b) \\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b) \end{cases}$

**35. Сформулируйте теорему о гомоморфизме колец. Приведите пример.**

Пусть  $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$  – гомоморфизм колец. Тогда  $K_1 / \text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$ .

**Пример:**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$   $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $\forall$  целому числу сопоставляем его остаток от деления на  $n$ ,  $\text{Ker } \varphi = n\mathbb{Z}$ .

**36. Сформулируйте теорему о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем.**

Факторкольцо  $F[x] / \langle f(x) \rangle$  является полем  $\Leftrightarrow f(x)$  неприводим над  $F$ .

**37. Сформулируйте критерий того, что кольцо вычетов по модулю  $p$  является полем.**

$\mathbb{Z}_p$  – поле  $\Leftrightarrow p$  – простое.

**38. Дайте определение алгебраического элемента над полем.**

Элемент  $\alpha \in F_2$  называется *алгебраическим* над полем  $F_1$ , если  $\exists f(x) \neq 0$  (0 как функция), что  $f(x) \in F_1[x]$ , для которого  $f(\alpha) = 0$ .

**39. Что такое поле рациональных дробей?**

Пусть  $F$  – поле. Рассмотрим поле рациональных функций (частных) с коэффициентами из  $F$ . То есть элементы этого множества – дроби  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , где  $f, g \in F[x]$ ,  $g \neq 0$ .

**40. Сформулируйте утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по некоторому идеалу.**

$\forall$  конечное поле  $F_q$ , где  $q = p^n$ ,  $p$  – простое, можно реализовать в виде  $\mathbb{Z}_p[x]/\langle h(x) \rangle$ , где  $h(x)$  – неприводимый многочлен степени  $n$  над  $\mathbb{Z}_p$ .

**41. Сформулируйте китайскую теорему об остатках (через изоморфизм колец).**

Пусть  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n = n_1 \cdot \dots \cdot n_m$ , где  $n_i$  – взаимно просты. Тогда кольцо  $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_m}$ .

**42. Сформулируйте утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле.**

Число элементов конечного поля всегда  $p^n$ , где  $p$  – простое,  $n \in \mathbb{N}$ .

**43. Дайте определение линейного (векторного) пространства.**

Пусть  $F$  – поле. Пусть  $V$  – произвольное множество, на котором заданы две операции: сложение и умножение на число. Множество  $V$  называется *линейным (векторным) пространством*, если  $\forall x, y, z \in V, \forall \lambda, \mu \in F$  выполнены следующие 8 свойств:

- 1)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  – ассоциативность сложения
- 2)  $\exists$  нейтральный элемент по сложению:  $\exists 0 \in V : \forall x \in V \ x + 0 = 0 + x = x$
- 3)  $\exists$  противоположный элемент по сложению:  $\forall x \in V \ \exists (-x) \in V : x + (-x) = 0$
- 4)  $x + y = y + x$  – коммутативность сложения
- 5)  $\forall x \in V \ 1 \cdot x = x$  – нейтральность  $1 \in F$
- 6) ассоциативность умножения на число:  $\mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x$
- 7)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$  – дистрибутивность относительно умножения на вектор
- 8)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  – дистрибутивность относительно умножения на число

**44. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства.**

Базисом линейного пространства  $V$  называется система векторов  $b_1, \dots, b_n$ , такая, что:

- а)  $b_1, \dots, b_n$  – л.н.з.
- б) любой вектор из  $V$  представляется в виде линейной комбинации  $b_1, \dots, b_n \ \forall x \in V \ x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n, \ x_i \in F$

**45. Что такое размерность пространства?**

Максимальное количество л.н.з. векторов в данном линейном пространстве  $V$  называется *размерностью пространства  $V$* .

**46. Дайте определение матрицы перехода от старого базиса линейного пространства к новому.**

*Матрицей перехода* от базиса  $A$  к базису  $B$  называется матрица

$$T_{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $t_{1i}, \dots, t_{ni}$  – координаты  $b_i$  в базисе  $A$ .

**47. Выпишите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.**

Пусть  $x \in V$ ,  $A$  и  $B$  – базисы в  $V$ .  $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_n^a \end{pmatrix}$  – столбец координат вектора  $x$  в базисе  $A$ ,

$x^b = \begin{pmatrix} x_1^b \\ \vdots \\ x_n^b \end{pmatrix}$  – столбец координат вектора  $x$  в базисе  $B$ . Тогда:

$$x^b = T_{A \rightarrow B}^{-1} \cdot x^a$$

**48. Дайте определение подпространства в линейном пространстве.**

Подмножество  $W$  векторного пространства  $V$  называется *подпространством*, если оно само является пространством относительно операций в  $V$ .

**49. Дайте определения линейной оболочки конечного набора векторов и ранга системы векторов.**

Множество  $L(a_1, \dots, a_k) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k | \lambda_i \in F\}$  – множество всех линейных комбинаций векторов  $a_1, \dots, a_k$  называется *линейной оболочкой* системы  $a_1, \dots, a_k$

*Рангом* системы векторов  $a_1, \dots, a_k$  в линейном пространстве называется размерность линейной оболочки этой системы  $Rg(a_1, \dots, a_k) = \dim L(a_1, \dots, a_k)$ .

**50. Дайте определения суммы и прямой суммы подпространств.**

$H_1 + H_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in H_1, x_2 \in H_2\}$  называется *суммой* подпространств  $H_1$  и  $H_2$ .

$H_1 + H_2$  называется *прямой суммой* (и обозначается  $H_1 \oplus H_2$ ), если  $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ , то есть тривиально.

**51. Сформулируйте утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.**

Пусть  $H_1$  и  $H_2$  – подпространства. Тогда  $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$ .

**52. Дайте определение билинейной формы.**

Функцию  $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ( $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{R}$ ) называют *билинейной формой*, если  $\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

- 1)  $b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$
- 2)  $b(x, \alpha y + \beta z) = \alpha b(x, y) + \beta b(x, z)$

**53. Дайте определение квадратичной формы.**

Однородный многочлен второй степени от  $n$  переменных, то есть:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

называют *квадратичной формой*.

**54. Дайте определения положительной и отрицательной определенности квадратичной формы.**

Квадратичную форму  $Q(x)$  называют:

- *положительно определенной*, если  $\forall x \neq 0 \quad Q(x) > 0$
- *отрицательно определенной*, если  $\forall x \neq 0 \quad Q(x) < 0$

### 55. Какую квадратичную форму называют знакопеременной?

Квадратичную форму  $Q(x)$  называют *знакопеременной*, если  $\exists x, y \in V \quad Q(y) < 0 < Q(x)$ .

### 56. Дайте определения канонического и нормального вида квадратичной формы.

Квадратичную форму  $Q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R} \quad i = \overline{1, n}$  (то есть не имеющую попарных произведений переменных) называют квадратичной формой *канонического вида*.

Если  $\alpha_i \in \{1, -1, 0\}$ , то канонический вид называется *нормальным*.

### 57. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса?

Пусть  $U$  – матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $f$ . Пусть  $B_e$  – матрица билинейной формы в базисе  $e$ ,  $B_f$  – матрица билинейной формы в базисе  $f$ . Тогда:

$$B_f = U^T B_e U$$

При переходе от базиса  $e$  к базису  $e'$  линейного пространства  $V$  матрица квадратичной формы меняется следующим образом:

$$A' = S^T A S$$

где  $S$  – матрица перехода от  $e$  к  $e'$ .

### 58. Сформулируйте критерий Сильвестра и его следствие.

Квадратичная форма  $Q(x)$  от  $n$  переменных  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  положительно определена  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \vdots \\ \Delta_n > 0 \end{cases}$ . Здесь  $Q(x) = x^T A x$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = \det A$$

то есть последовательность главных угловых миноров положительна.

**Следствие:**  $Q(x)$  отрицательно определена  $\Leftrightarrow \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$  (Знаки главных угловых миноров чередуются, начиная с минуса).

### 59. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм. Что такое индексы инерции?

Для любых двух канонических видов одной и той квадратичной формы

$$Q_1(y_1, \dots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2, \lambda_i \neq 0, i = \overline{1, m}$$

$$Q_2(z_1, \dots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_k z_k^2, \mu_j \neq 0, j = \overline{1, k}$$

1)  $m = k = \operatorname{Rg} A$  – рангу квадратичной формы

2) количество положительных  $\lambda_i$  = количеству положительных  $\mu_j = i_+$  – *положительный индекс инерции*. Количество отрицательных  $\lambda_i$  = количеству отрицательных  $\mu_j = i_-$  – *отрицательный индекс инерции*.

**60. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример.**

Отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  называется *линейным*, если:

- 1)  $\forall u, v \in V_1, \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
- 2)  $\forall u \in V_1, \forall \lambda \in F \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$

**Пример:** В линейном пространстве  $m \times n$  матриц существует линейное отображение умножения слева на фиксированную матрицу  $A_{l \times m} : \varphi : X \rightarrow A \cdot X$ .

**61. Дайте определение матрицы линейного отображения.**

Матрица линейного отображения – это матрица  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , где по столбцам стоят координаты образов

векторов базиса  $V_1$  в базисе  $V_2$ .

**62. Выпишите формулу преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса. Как выглядит формула в случае линейного оператора?**

Пусть  $\varphi$  – линейное отображение из линейного пространства  $V_1$  в линейное пространство  $V_2$ . Пусть  $A_{e_1 e_2}$  – матрица линейного отображения в паре базисов:  $e_1$  в пространстве  $V_1$  и  $e_2$  в пространстве  $V_2$  и пусть  $T_1$  – матрица перехода от  $e_1$  к  $e'_1$ ,  $T_2$  – матрица перехода от  $e_2$  к  $e'_2$ . Тогда:

$$A_{e'_1 e'_2} = T_2^{-1} A_{e_1 e_2} T_1$$

Формула для линейных операторов:

$$A_{E'} = T^{-1} A_E T$$

## 4-й модуль

**1. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.**

Число  $\lambda$  называется *собственным числом* или *собственным значением* линейного оператора  $A : V \rightarrow V$ , если существует вектор  $v \in V, v \neq 0$ , такой, что  $Av = \lambda v$ . При этом вектор  $v$  называется *собственным вектором*, отвечающим за собственное значение  $\lambda$ .

**2. Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.**

Для произвольной квадратной матрицы  $A$  определитель  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$  называют *характеристическим многочленом* матрицы  $A$ . *Характеристическое уравнение* – уравнение вида  $\det(A - \lambda E) = 0$ .

**3. Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.**

$\lambda$  принадлежит спектру линейного оператора  $\Leftrightarrow \lambda$  – корень характеристического уравнения (над алгебраически замкнутым полем).

**4. Дайте определение собственного подпространства.**

Пусть  $A : V \rightarrow V$  – линейный оператор,  $\lambda$  – собственное значение  $A$ . Тогда множество  $V_\lambda = \{v \in V | Av = \lambda v\}$  – подпространство в  $V$ , называемое *собственным подпространством*, отвечающим  $\lambda$ .



**5. Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?**

Алгебраической кратностью  $\lambda$  называется кратность  $\lambda$  как корня характеристического уравнения. Размерность подпространства  $V_\lambda$  называется геометрической кратностью собственного значения  $\lambda$ . Геометрическая кратность собственного значения не превышает его алгебраической кратности.

**6. Дайте определение следа матрицы. Как меняется след матрицы оператора при замене базиса.**

Следом матрицы  $A$  называется сумма ее диагональных элементов:  $\text{tr} A = \sum a_{ii}$ . След матрицы не зависит от выбора базиса.

**7. Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям.**

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  - собственные значения линейного оператора  $A$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , а  $v_1, \dots, v_k$  - соответствующие собственные векторы. Тогда  $v_1, \dots, v_k$  - линейно независимые, т.е. собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

**8. Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.**

Матрица линейного оператора является диагональной в этом базисе  $\Leftrightarrow$  все векторы этого базиса являются собственными векторами для  $A$ .

**9. Сформулируйте критерий диагонализруемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.**

Матрицы линейного оператора приводится к диагональному виду  $\Leftrightarrow$  все корни характеристического многочлена являются собственными значениями оператора и геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности

**10. Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора.**

Жорданова клетка размера  $m \times m$  - это матрица вида:

$$J_m(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$\forall A \in Mn(\mathbb{F})$  приводится заменой базиса к ЖНФ над алгебраически замкнутым полем (например  $\mathbb{C}$ ). Иными словами  $\exists C \in Mn(\mathbb{F})$  и  $\det C \neq 0$ , что  $A = CJC^{-1}$ , где  $J$  - ЖНФ.

**11. Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера.**

$h_k(\lambda_i) = \rho_{k+1} - 2\rho_k + \rho_{k-1}$  - количество жордановых клеток с  $\lambda_i$  на диагонали размера  $k \times k$  ( $\rho_j = \text{Rg}(A - \lambda_i E)^j$ ,  $\rho_0 = n$ ).

**12. Сформулируйте теорему Гамильтона-Кэли.**

Если  $A$  - квадратная матрица и  $\chi(\lambda)$  её характеристический многочлен, то  $\chi(A) = 0$ .

**13. Дайте определение корневого подпространства.**

Корневое подпространство:  $K_i = \text{Ker}(A - \lambda_i E)^{m_i}$ , где  $m_i$  - алгебраическая кратность  $\lambda_i$ .

**14. Дайте определение минимального многочлена линейного оператора.**

Для матрицы  $A$  многочлен  $\mu(x)$  называется *минимальным*, если  $\mu(A) = 0$  и  $\forall f : f(A) = 0, \deg(f) \geq \deg(\mu)$ .

**15. Дайте определение инвариантного подпространства.**

Подпространство  $L$  векторного пространства  $V$  называется *инвариантным* относительно оператора  $\varphi$ , если  $\varphi(x) \in L \forall x \in L$ .

**16. Дайте определение евклидова пространства.**

*Евклидово пространство* - это пара  $V$  - линейное пространство над  $\mathbb{R}$  и скалярное  $g(x, y)$ , то есть симметричная положительно определенная билинейная форма.

$$\mathbb{E} = (V, g(x, y)) \text{ и } \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}:$$

- $g(x, y) = g(y, x)$
- $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$
- $g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y)$
- $g(x, x) \geq 0$  и  $g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**17. Выпишите неравенство Коши-Буняковского и треугольника.**

Неравенство Коши-Буняковского:  $\forall x, y \in \mathbb{E} \quad \|(x + y)\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Неравенство треугольника:  $\forall x, y \in \mathbb{E} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**18. Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов.**

Базис называют *ортогональным*, если он составлен из попарно ортогональных векторов.

*Ортонормированным*, если все его элементы нормированны.

**19. Опишите алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта.**

Пусть имеется система линейно независимых векторов  $(a_1, \dots, a_n)$ . Определим оператор проекции следующим образом:  $proj_b a = \frac{(a, b)}{(b, b)} b$ . Этот оператор проецирует вектор  $a$  коллинеарно вектору  $b$ .

Классический процесс Грама — Шмидта выполняется следующим образом:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 \\ b_2 &= a_2 - proj_{b_1} a_2 \\ &\vdots \\ b_n &= a_n - \sum_{j=1}^{n-1} proj_{b_j} a_n \end{aligned}$$

В результате получим систему ортогональных векторов  $(b_1, \dots, b_n)$ .

**20. Дайте определение матрицы Грама.**

*Матрицей Грама* системы векторов  $(e_1, \dots, e_n)$  называется квадратная матрица, состоящая из всевозможных скалярных произведений этих векторов:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \cdots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \cdots & (e_2, e_n) \\ \vdots & & & \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \cdots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

**21. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису.**

Матрицы Грама двух базисов  $e$  и  $e'$  связаны соотношением  $\Gamma' = U^T \Gamma U$ , где  $U$  - матрица перехода от  $e$  к  $e'$ .

**22. Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.**

Система векторов  $e_1, \dots, e_n$  линейно зависима  $\Leftrightarrow$  определитель матрицы Грама этой системы равен нулю.

**23. Дайте определение ортогонального дополнения.**

Пусть  $H \subseteq V$ . Множество  $H^\perp = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in H\}$  называется *ортогональным дополнением*.

**24. Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей.**

Пусть  $L$  - линейное подпространство евклидова пространства  $\mathbb{E}$ ,  $a$  - произвольный вектор пространства  $\mathbb{E}$ . Если  $a = b + c$ , причём  $b \in L, c \in L^\perp$ , то  $b$  называется *ортогональной проекцией* вектора  $a$  на подпространство  $L$  ( $proj_L a$ ), а  $c$  - *ортогональной составляющей* при (ортогональном) проектировании вектора  $a$  на подпространство ( $ort_L a$ ).

**25. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов.**

Пусть  $L = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Тогда  $proj_L x = A(A^T A)^{-1} A^T x$ , где  $A$  - матрица, составленная из столбцов  $a_1, \dots, a_n$ .

**26. Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама.**

Пусть  $S \subset \mathbb{E}$  - подпространство,  $x \in \mathbb{E}, (e_1, \dots, e_n)$  - базис  $S$ . Тогда:

$$(p(x, S))^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_n, x)}{\det G(e_1, \dots, e_n)}$$

**27. Дайте определение сопряженного пространства.**

Пространством сопряженным к линейному пространству  $L$  называется множество всех линейных форм на нем с операциями:

$$\forall x \in L \ (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{F} \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Обозначение:  $L^* \subseteq Hom(L, \mathbb{F})$ .

**28. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.**

Пусть  $L^*$  - сопряженное пространство. Если записывать координаты элементов по столбцам, то при переходе к другому базису они будут преобразовываться по формуле:

$$[f]_g^{ct} = T_{e \rightarrow g}^T \cdot [f]_e^{ct}$$

**29. Дайте определение взаимных базисов.**

Базис  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в линейном пространстве  $L$  и базис  $f = (f_1, \dots, f_n)$  в сопряженном пространстве  $L^*$  называют *взаимными*, если:

$$(e_i, f^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

**30. Дайте определение биортогонального базиса.**

Если  $L = L^*$ , то взаимный к данному базис называется *биортогональным*.

**31. Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.**

Линейный оператор  $\mathcal{A}^*$  называется *сопряженным* к линейному оператору  $\mathcal{A}$ , если  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно, что  $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$ .

**32. Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора.**

Линейный оператор  $\mathcal{A}$  называется *самосопряженным (симметричным)*, если  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно, что  $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ , т.е.  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ .

**33. Дайте определение ортогонального оператора.**

Линейный оператор  $\mathcal{A}$  называется *ортогональным*, если  $\forall x, y \in \mathbb{E}$  верно, что  $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ , т.е. оператор сохраняет скалярное произведение, и значит, он сохраняет длины сторон и углы между ними.

**34. Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе?**

Пусть  $\mathfrak{e} = (e_1, \dots, e_n)$  - базис в  $\mathbb{E}$ ,  $\Gamma$  - матрица Грама,  $\mathcal{A}$  - матрица линейного оператора. Тогда матрица сопряженного линейного оператора выражается как:

$$\mathcal{A}^* = \Gamma^{-1} \mathcal{A}^T \Gamma$$

**35. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора?**

Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

**36. Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям?**

Собственные векторы, принадлежащие различным собственным значениям самосопряженного преобразования, ортогональны.

**37. Сформулируйте определение ортогональной матрицы.**

Матрица  $C \in Mat_n(\mathbb{R})$  называется *ортогональной*, если  $C^T C = E$ .

**38. Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.**

Матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  в ОНБ ортогональна  $\Leftrightarrow \mathcal{A}$  - ортогональный оператор.

### 39. Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера.

Для любого ортогонального оператора  $\mathcal{A}$  существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет следующий вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \Pi(\alpha_k) & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

**Теорема Эйлера.** В трехмерном евклидовом пространстве любое ортогональное отображение  $\mathcal{A}$ , не меняющее ориентацию, является вращением относительно некоторой оси.

### 40. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов.

Для всякого самосопряженного преобразования  $\mathcal{A}$  существует ортонормированный базис из собственных векторов, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид.

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - собственные значения преобразования  $\mathcal{A}$ , повторенные в соответствии с их кратностью.

### 41. Сформулируйте теорему о сингулярном разложении.

Для любой матрицы  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  существуют ортогональные матрицы  $V \in M_m(\mathbb{R})$  и  $W \in M_n(\mathbb{R})$  и диагональная матрица  $\Sigma \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , такие что:

$$A = V \Sigma W^T, \text{ где } \Sigma = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{array} \right), \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

### 42. Сформулируйте утверждение о QR-разложении.

### 43. Сформулируйте утверждение о полярном разложении.

### 44. Что можно сказать про ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора?

### 45. Сформулируйте теорему Фредгольма и альтернативу Фредгольма.

### 46. Дайте определение алгебры над полем. Приведите два примера.