10.1 关联矩阵

- 有向图的关联矩阵:

  设 $D =< V, E >$ 是无环有向图，$V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$，$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$，令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{是}e_j\text{的始点}, \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}, \\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}, \end{cases}$$

  称 $[m_{ij_{m\times n}}]$ 为 D 的 关联矩阵，记作 $M(D)$.

$$M(D) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> 1. D每列元素之和 = 0 $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$，说明D中每条边关联两个顶点，一个始点，一个终点
> 2. 第i行元素绝对值之和 = $d(v_i)$，即$\sum_{j=1}^{m} |m_{ij}| = d(v_i)$，其中 1 的个数 等于 出度；-1 的个数等于入度
> 3. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$，即出度入度相等 = m，符合握手定理
> 4. 若$M(D)$中两列相同$\Longrightarrow$对应 的边是平行边

- 无向图的**关联矩阵**:

  设 $G =< V, E >$是无环有向图，$V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$，$E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$，令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{是}e_j\text{关联}, \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}, \end{cases}$$

  称 $[m_{ij_{m\times n}}]$ 为 G 的 关联矩阵，记作 $M(G)$.

> 1. $M(G)$中每列元素之和 = 2$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2$，说明G中每条边有唯一的两个端点
> 2. $M(G)$中第i行中 1 个数 = $\sum_{j=1}^{m} = d(v_i)$
> 3. $M(G)$中第i行中1对应的边组成的集合为v_i的关联集，其为G中一个断集，当v_i不是割点时，其为扇形割集
> 4. $M(G)$中若两列相同，则它们对应的边是平行边
> 5. 若G有$k(k \geq 2)$个连通分支，则G的关联矩阵$M(G)$有如下形式:
>
> $$M(G) = \begin{bmatrix} M(G_1) & & & \\ & M(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & M(G_k) \end{bmatrix}$$
>
> 其中$M(G_r)$是G中第 r 个联通分支的关联矩阵.

- **基本关联矩阵:**

  G的**基本关联矩阵**是有$M(G)$删除任意一行所得的矩阵，被删除行对应的顶点是**参考点**

- **定理 10.1:**

  n 阶无向连通图 G 的关联矩阵的秩 $r(M(G)) = n - 1$.

- **定理 10.2:**

n 阶无向连通图 G 的基本关联矩阵的秩 $r(M_f(G)) = n - 1.$

推论：

- 设n阶无向图G有p个连通分支，则$r(M(G)) = r(M_f(G)) = n - p$，其中$M_f(G)$是从$M(G)$的每个对角块中删除任意一行得到的矩阵。
- G是连通图 $\iff r(M(G)) = r(M_f(G)) = n - 1$

- **定理 10.3：**

  设

  - $M_f(G)$是 n 阶连通图 G 的一个基本关联矩阵
  - M'_f是$M_f(G)$中任意 $n-1$列组成的方阵

  则

  M'_f中各列所对应的边集$\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}}\}$的导出子图 $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}}\}]$是 G 的生成树 $\iff M'_f$的行列式 $|M'_f| \neq 0.$

10.2 邻接矩阵与相邻矩阵

- **邻接矩阵：**

  n阶标定 有向图 D 中，$V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，令$a_{ij}^{(1)}$为$v_1$邻接到$v_j$的边的条数。

  $[a_{ij}^{(1)}]_{n\times m}$是$D$的**邻接矩阵**，记作$A(D)$，简记 A。

性质：

- 第i行元素之和 = v_i的出度。

  A 中所有元素之和 = 各顶点出度之和 = 边数（m）

- 第j列元素之和 = v_j的入度

  A 中所有元素之和 = 各顶点入度之和 = 边数 (m)

- **定理 10.4**

  设 A 是 n 阶有向标定图的邻接矩阵，A 的$l(l \geq 2)$次幂$A^l = A^{l-1}$.

  - A 中元素 $a_{ij}^{(l)}$为v_i到v_j长度为l的**通路数**
  - $\sum_i \sum_j a_{ij}^{(l)}$ 是 D 中长度为 l 的**通路总数**
  - $\sum_i a_{ii}^{(l)}$ 是 D 中长度为 l 的**回路总数**

  推论：

  - 设 A 是 n 阶有向标定图的邻接矩阵，
    - B^r 中元素 $b_{ij}^{(r)}$ 为 v_i 到 v_j 长度 $\leq r$ 的**通路数**
    - $\sum_i \sum_j b_{ij}^{(r)}$ 是 D 中长度 $\leq r$ 的**通路总数**
    - $\sum_i b_{ii}^{(r)}$ 是 D 中长度 $\leq r$ 的 **回路数**

  > 对角线上的$b_{ii}^{(r)}$、$A_{ii}^{(l)}$ 是回路数

- **可达矩阵：**

  设 n 阶有向图 D 中，$V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

  $$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{可达}v_j, \\ 0, & v_j\text{不可达}v_j \end{cases}$$

  称 $[p_{ij}]_{n\times m}$ 是 D 的**可达矩阵**，记作 $P(D)$，简记 P.

性质：

1. $\because \forall v_i \in V(D), v_i可达v_j, \therefore p的主对角线元素全是1.$
2. 若 D 是强连通的，则 P 的全体元素均为 1.
3. 设 D 是具有$k(k \geq 2)$个连通分支$D_1, D_2, \ldots, D_k$的有向图，
   $D_i = D[\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{m_i}\}], i = 1, 2, \ldots, k$，则

$$P(D) = \begin{bmatrix} P(D_1) & & & & \\ & P(D_2) & & & \\ & & P(D_3) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & P(D_K) \end{bmatrix}$$

   其中 $P(D_i)$ 是 D_i 的可达矩阵。

$\forall v_i, v_j \in V(D)且v_i \neq v_j, \therefore p_{ij} = 1当且仅当 \quad b_{ij}^{(n-1)\neq 0}.$

- **相邻矩阵：**

  设 n 阶 无向简单图 G 中，$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$， $令 a_{ij}^{(1)} = 0, i = 1, 2, \ldots, n,$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1, & v_i与v_j相邻，i \neq j, \\ 0, & v_i与v_j不相邻，i = j, \end{cases}$$

  称 $[a_{ij}^{(1)}]_{n \times m}$ 是 G 的 **相邻矩阵**，记作$A(G)$，简记 A.

性质：

1. A 是 对称的
2. $\sum_j a_{ij}^{(1)} = d(v_1)$
3. $\sum_i \sum_j a_{ij}^{(1)} = \sum_i d(v_i) = 2m, 其中m是边数,也是G中长度为1的通路数$

- 设 $A^k = A^{k-1} \bullet A = [a_{ij}^k, \quad k = 2, 3, \ldots]$

  定理 10.5:

  设 n 阶 无相简单图 G 中，$V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$，A 是 G 的相邻矩阵.

  - A^k 中元素 $a_{ij}^{(k)} (= a_{ji}^{(k)})(i \neq j)$ 是 v_i到 $v_j(v_j到v_i)$长度为k 的 **通路数。**
  - $a_{ii}^{(k)}$ 是 v_i 到 v_i长度为k的**回路数**

  推论：

  1. $在A^2中，a_{ii}^{(2)} = d(v_i)$
  2. ？ 若G是连通图，对于$i \neq j, v_i, v_j$之间的距离$d(v_i, v_j)$ = 使A^k中元素$a_{ij}^{(k)} \neq$ 0的最小正整数 k.

- **连通矩阵：**

  设 n 阶 无相简单图 G 中，$V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$，令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i与v_j连通, \\ 0, & v_i与v_j不连通, \end{cases}$$

  称 $[p_{ij}]_{n \times m}$ 是 G 的连通图，记作$P(G)$，简记 P.

  性质：

  1. P 的主对角线元素均是 1
  2. 若 G 是连通图，则 P 中元素全是 1

3. 设 G 是具有$k(k \geq 2)$个连通分支$G_1, G_2, \ldots, G_k$的有向图，$G_i = G[\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{m_i}\}], i = 1, 2, \ldots, k$，则

$$P(G) = \begin{bmatrix} P(G_1) & & & & \\ & P(G_2) & & & \\ & & P(G_3) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & P(G_K) \end{bmatrix}$$

其中 $P(G_i)$ 是 G_i 的可达矩阵。