（装订线内不要答题）

中国科学技术大学物理学院
2018～2019 学年第 2 学期考试试卷

课程名称：热力学与统计物理（A）　　课程代码：________

开课院系：物理学院　　考试形式：闭卷

姓名：________　学号：________　专业：________

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						
阅卷人						

一、　以外磁场 H，温度 T 为自变量，石墨烯的摩尔自由能为

$$F(T,H) = -N_A k_B T \ln\left[\frac{1}{2} + \frac{k_B^2 T^2 + \lambda_R^2}{\hbar^2 \omega_D^2}\right] - N_A k_B T \ \ln\left[\cosh\frac{\lambda_R}{k_B T}\right]$$

其中 $\omega_D = v_F\sqrt{eH/\hbar}$ 是回旋频率，v_F, λ_R 分别是石墨烯的 Fermi 速度和 Rashba 作用强度，$e, N_A, k_B, \hbar$ 则分别是电子电荷，Avogadro，Boltzmann 以及 Planck 常数。

1. 求系统的内能$U = F + TS$。
2. 求系统的熵。
3. 求等场热容C_H，并写出高低温极限。

$$
\begin{aligned}
S = -\Big(\frac{\partial F}{\partial T}\Big)_H &= N_A k_B \ln\Big[\frac{1}{2} + \frac{k_B^2 T^2 + \lambda_R^2}{\hbar^2\omega_D^2}\Big] \\
&+ N_A k_B T \frac{2k_B^2 T/(\hbar\omega_D)^2}{1/2 + (k_B^2 T^2 + \lambda_R^2)/(\hbar\omega_D)^2} \\
&+ N_A k_B \ln\Big[\cosh\frac{\lambda_R}{k_B T}\Big] + N_A k_B T \frac{\sinh \lambda_R/k_B T}{\cosh \lambda_R/k_B T}\Big(-\frac{\lambda_R}{k_B T^2}\Big) \\
&= N_A k_B \ln\Big[\frac{1}{2} + \frac{k_B^2 T^2 + \lambda_R^2}{\hbar^2\omega_D^2}\Big] + N_A k_B \ln\Big[\cosh\frac{\lambda_R}{k_B T}\Big] \\
&+ \frac{4N_A k_B^3 T^2}{(\hbar\omega_D)^2 + 2(k_B^2 T^2 + \lambda_R^2)} - \frac{N_A\lambda_R}{T}\tanh\frac{\lambda_R}{k_B T} \\
U = F + TS &= \frac{4N_A k_B^3 T^3}{(\hbar\omega_D)^2 + 2(k_B^2 T^2 + \lambda_R^2)} - N_A\lambda_R \tanh\frac{\lambda_R}{k_B T} \\
C = \Big(\frac{\partial U}{\partial T}\Big)_H &= \frac{12N_A k_B^3 T^2}{(\hbar\omega_D)^2 + 2(k_B^2 T^2 + \lambda_R^2)} - \frac{16N_A k_B^5 T^4}{[(\hbar\omega_D)^2 + 2(k_B^2 T^2 + \lambda_R^2)]^2} \\
&+ \frac{N_A\lambda_R^2}{k_B T^2}\frac{1}{\cosh^2\frac{\lambda_R}{k_B T}}
\end{aligned}
$$

低温时，$C_H \simeq 12N_A k_B^2 T^2/[(\hbar\omega_D)^2 + 2\lambda_R^2]$。高温下，$C_H \simeq 2N_A k_B$。

二、 涡轮机的工作过程是 Brayton 循环。这一循环由四个过程构成：等压膨胀（压强为 p_1），绝热膨胀，等压压缩（压强为 p_2）和绝热压缩。假设工作气体为理想气体，其 $C_p/C_v=\gamma$ 是常数，且工作过程是可逆的。

1. 在 $p-V$ 图上画出工作过程。
2. 计算每个过程的吸热和对外做功。
3. 计算该热机的工作效率。

- 略
- 等压膨胀理想气体绝热过程$pV^\gamma=const$,

$$
\begin{aligned}
&Q_{12}=\int_{T_1}^{T_2}C_pdT=C_p(T_2-T_1)\\
&W_{12}=\int_{V_1}^{V_2}pdV=p_1(V_2-V_1)=NR(T_2-T_1)\\
&Q_{23}=0\\
&W_{23}=\int_{V_2}^{V_3}pdV=\int_{V_2}^{V_3}\frac{C}{V^\gamma}dV=\frac{1}{\gamma-1}\Big[\frac{C}{V_2^{\gamma-1}}-\frac{C}{V_3^{\gamma_1}}\Big]=\frac{NR(T_2-T_3)}{\gamma-1}\\
&Q_{34}=-C_p(T_3-T_4)\\
&W_{34}=p_2(V_4-V_3)=NR(T_4-T_3)\\
&Q_{41}=0\\
&W_{41}=\frac{NR(T_4-T_1)}{\gamma-1}
\end{aligned}
$$

- 总功

$$
\begin{aligned}
W&=W_{12}+W_{23}+W_{34}+W_{41}=NR\Big[T_2-T_1+\frac{T_2-T_3}{\gamma-1}+(T_4-T_3)+\frac{T_4-T_1}{\gamma-1}\Big]\\
&=\frac{NR\gamma}{\gamma-1}[T_2-T_1+T_4-T_3]=C_p(T_2-T_1+T_4-T_3)
\end{aligned}
$$

绝热过程

$$
\begin{aligned}
&C=pV^\gamma\Rightarrow C=p^{\frac{1}{\gamma}}V=p^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}T\Rightarrow T=Cp^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\\
&T_2=C_2p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\qquad T_3=C_2p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\\
&T_1=C_1p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\qquad T_4=C_1p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\\
&W=C_p[C_2p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-C_1p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}+C_1p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-C_2p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]\\
&\quad=C_p(C_2-C_1)[p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]\\
&\eta=\frac{W}{Q_{12}}=1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}
\end{aligned}
$$

三、 一弹性棒在外力 F，温度 T 下的伸长长度 l 为

$$\mu_0[1+\beta(T-T_0)]l = \alpha(T-T_0)+F,$$

其中 α,β,μ_0 和 T_0 为大于零的常数。保持长度不变的等长热容 $C_l(l,T)=A(l)T$。当 $l=0$ 时，$A(0)=A_0$。

1. 求等长热容 $C_l(l,T)$ 中 的$A(l)$。
2. 求温度从 T_0 变为 T，伸长长度从 0 变为 l 时的熵改变。
3. 求外力为零时的等力热容 C_F。
4. 求绝热条件下温度弹性系数 μ_s，即棒绝热伸长一个单位长度导致的温度变化量。

1.

$$\begin{aligned}
dF &= -SdT + Fdl \\
C_l &= T\Big(\frac{\partial S}{\partial T}\Big)_l \\
\Big(\frac{\partial C_l}{\partial l}\Big)_T &= T\frac{\partial^2 S}{\partial l \partial T} = T\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial l} = -T\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Big)_l = 0 \\
&= \frac{dA(l)}{dl}T \Rightarrow A(l) = A_0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial S}{\partial T}\Big)_l &= \frac{C_l(l,T)}{T} = A_0 \\
\Big(\frac{\partial S}{\partial l}\Big)_T &= -\Big(\frac{\partial F}{\partial T}\Big)_l = -\Big(\frac{\partial[-\alpha(T-T_0)+\mu_0 l+\mu_0\beta l(T-T_0)]}{\partial T}\Big)_l = -\mu_0\beta l + \alpha \\
\Delta S &= \int_{T_0,0}^{T_0,l}\Big(\frac{\partial S}{\partial l}\Big)_T dl + \int_{T_0,l}^{T,l}\Big(\frac{\partial S}{\partial T}\Big)_l dT = -\frac{\mu_0\beta l^2}{2} + \alpha l + A_0(T-T_0)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial S}{\partial T}\Big)_F &= \frac{\partial(S,F)}{\partial(T,F)} = \frac{\partial(S,F)}{\partial(T,l)}\frac{\partial(T,l)}{\partial(T,F)} \\
&= \Big(\frac{\partial S}{\partial T}\Big)_l - \Big(\frac{\partial S}{\partial l}\Big)_T\Big(\frac{\partial F}{\partial T}\Big)_l \Big/ \Big(\frac{\partial F}{\partial l}\Big)_T \\
C_F = T\Big(\frac{\partial S}{\partial T}\Big)_F &= C_l + T\Big(\frac{\partial F}{\partial T}\Big)_l^2 \Big/ \Big(\frac{\partial F}{\partial l}\Big)_T \\
&= A_0 T + \frac{(\mu_0\beta l-\alpha)^2}{\mu_0[1+\beta(T-T_0)]}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mu_S &= \Big(\frac{\partial T}{\partial l}\Big)_S = \frac{\partial(T,S)}{\partial(l,S)} = \frac{\partial(T,S)}{\partial(l,T)}\frac{\partial(l,T)}{\partial(l,S)} = -T\Big(\frac{\partial S}{\partial l}\Big)_T/C_l = T\Big(\frac{\partial F}{\partial T}\Big)_l/C_l \\
&= \frac{\mu_0\beta l-\alpha}{A_0}
\end{aligned}$$

四、 假设某物质在临界点附近有$-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = A(T-T_c)+B(V-V_c)^2$，其中$T_c$和$V_c$ 分别是该物质的临界点的温度和摩尔体积，A, B 是常数。

1. 请问 A 和 B 应该是大于零还是小于零？并给出理由。
2. 当温度 T 低于 T_c 时，物质可以处于气相或者液相。求温度非常接近于T_c 时这两相的摩尔体积 V_g 和 V_l 和温度的关系。
3. 由于重力作用，气体内部的压强不再是一个常数，而是高度的函数。因此相应物理量也是高度函数。求温度为 T 时，摩尔体积随高度的变化率。
4. 在一般情况下，重力对热力学性质几乎没有作用。但是在非常靠近临界点时，重力会有重要影响。请解释这个现象。

- 体系处于单相的平衡态时，稳定时应该有$\kappa_T = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T > 0$。而在$T > T_c$ 时，体系只有一个稳定相，因此$A > 0$，$B > 0$。
-

$$
\begin{aligned}
d\mu &= -sdT + vdp \\
\Delta\mu_l &= \int_{T,V_c}^{T,V_l} V dp = \int_{T,V_c}^{T,V_l} V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV = -\int_{T,V_c}^{T,V_l} V[A(T-T_c)+B(V-V_c)^2]dV \\
&= -\Big[\frac{A(T-T_c)}{2}(V_l^2-V_c^2)+\frac{BV_c}{3}(V_l-V_c)^3+\frac{B}{4}(V_l-V_c)^4\Big] \\
&\simeq -\frac{(V_l-V_c)V_c}{3}[3A(T-T_c)+B(V_l-V_c)^2+\cdots] \\
\Delta\mu_g &= -\Big[\frac{A(T-T_c)}{2}(V_g^2-V_c^2)+\frac{BV_c}{3}(V_g-V_c)^3+\frac{B}{4}(V_g-V_c)^4\Big] \\
&\simeq -\frac{(V_g-V_c)V_c}{3}[3A(T-T_c)+B(V_g-V_c)^2+\cdots]
\end{aligned}
$$

平衡时两项化学势相等，因此有$\Delta\mu_l = \Delta\mu_g$。并且在稳定时要求$\kappa_T > 0$，因此要求$(V_{l/g}-V_c)^2 > A(T-T_c)/B$。在$T$ 非常接近于T_c 时，有解$(V_l-V_c)^2 = (V_g-V_c)^2 = 3A(T_c-T)/B$。

- 在重力场中，达到平衡时，不同位置的

$$
\begin{aligned}
\frac{dp(z)}{dz} &= \rho(z)g = \frac{mg}{v} \\
\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T\frac{dv}{dz} &= \frac{mg}{v} \\
\frac{dv}{dz} &= \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T mg = -mg\kappa_T
\end{aligned}
$$

- 一般情况下，$mg\kappa_T$ 很小，dv/dz 很小，因此重力对物理量影响不大。但是在临界点附近，κ_T 发散，导致dv/dz 发散。所以在临界点附近重力场作用很大。

五、 太阳辐射可以近似地看成是理想黑体辐射，已知太阳半径为 $R_s \simeq 7 \times 10^5$ km。

1. 平衡时，内能密度 $u = u(T)$ 只和温度有关，黑体辐射压强 $p = u/3$，辐射能流密度是$J = cu/4$，其中c 是光速。求黑体辐射的能流密度和温度的关系。
2. 把小行星当成一个半径为 r 的理想黑体。当 r 很小时，可以假设小行星处于热力学平衡态。求小行星的温度和它环绕太阳运动的轨道半径 R 的关系（$R \gg R_s \gg r$）。
3. 地球轨道半径大约为 1.5×10^8 km，请估计太阳表面温度T_s。
4. 太阳辐射会对小行星产生一个向外的推力。当小行星的半径 r 比较大时，这个推力远小于引力。但随着 r 减小，辐射推力的作用相对变大。假设小行星质量密度为ρ，估计轨道半径为 R 时辐射推力和引力抵消时的 r。已知太阳质量为M_s。

- $$\begin{aligned}
dF &= -SdT - pdV \\
U(T,V) &= u(T)V = F + TS \\
u(T) &= \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T + T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\
&= -\frac{u}{3} + \frac{T}{3}\frac{du}{dT} \\
\frac{du}{u} &= 4\frac{dT}{T} \\
u &= aT^4 \\
J &= \frac{cu}{4} = \frac{ac}{4}T^4 = \sigma T^4
\end{aligned}$$
- 小行星吸收太阳辐射面积为πr^2，发射面积为$4\pi r^2$。吸收和发射相等时，达到平衡。假设太阳表面温度为T_s，
$$\begin{aligned}
\frac{4\pi R_s^2 \sigma T_s^4}{4\pi R^2}\pi r^2 &= 4\pi r^2 \sigma T^4 \\
T^4 &= \frac{R_s^2}{4R^2}T_s^4
\end{aligned}$$
- 地球表面温度大约为$T_E = 300$ K，因此$T_s = \sqrt{\frac{2R}{R_s}}T_E \simeq 6200$ K。
- 令太阳质量为M_s，引力常数G，
$$\begin{aligned}
F &= pA = \frac{u}{3}\pi r^2 = \frac{1}{3}\frac{4\pi R_s^2 \sigma T_s^4}{4\pi R^2}\frac{4}{c}\pi r^2 = \frac{4\pi r^2 R_s^2}{3cR^2}\sigma T_s^4 \\
F_G &= \frac{GM_s}{R^2}\rho\frac{4\pi r^3}{3} \\
F = F_G &\Rightarrow r = \frac{R_s^2 \sigma T_s^4}{GM_s c\rho}
\end{aligned}$$