6.2

1. 若可微，则 ∃A,B 使 $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|st|}-As-Bt}{\sqrt{s^2+t^2}}=0$ ……①

由 $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)}$ 的定义知 (s,t) 按任意方式趋于 $(0,0)$ 时极限都存在且为 0

故可令 $t=0$（即在 s 轴上趋于 $(0,0)$），即 $\lim\limits_{s\to0}\frac{0-As-0}{\sqrt{s^2}}=0$，即 $A\lim\limits_{s\to0}\frac{s}{|s|}=0$ $\left(\frac{s}{|s|}=\begin{cases}-1, & s<0\\ 1, & s>0\end{cases}\right)$

因此必有 $A=0$，同理 $B=0$

但 (s,t) 沿 $s=kt$ 直线趋于 $(0,0)$ 时有：$\frac{\sqrt{|kt\cdot t|}-0-0}{\sqrt{k^2t^2+t^2}}=\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$

不同的 k 此值不同，与①中极限的存在性矛盾

2. (1) $\frac{\partial f}{\partial x}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\frac{\partial f}{\partial x}(3,4)=\frac{2}{5}$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos(x^2y)\cdot 2xy$，$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi)=-2\pi$

(3)（注意到 $f(x,y)$ 是对称的）$\frac{\partial f}{\partial x}=-y\cdot\frac{1}{\sqrt{xy}}\frac{1}{(1-\sqrt{xy})^{\frac12}(1+\sqrt{xy})^{\frac32}}$

(4) 还是对称的，且令 $g(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})$ 则 $f(x,y)=g(xy^2+yx^2)$

$g'(t)=\frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，$\frac{\partial f}{\partial x}=g'(xy^2+yx^2)(y^2+2xy)$

3. (1) $z_x=\frac{e^y}{y^2}$ $z_y=-2\frac{x}{y^3}e^y+x\frac{e^y}{y^2}$ (2) $z_x=3^{-\frac{x}{y}}\ln3\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)$ $z_y=3^{-\frac{x}{y}}\ln3\cdot\frac{x}{y^2}$

(3) $z_x=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\sin\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right)$ z_y 同理

(4) $z_x=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$z_y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(5) $u_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}$，$u_y$ 同理

(6) $u_x=e^{x(x^2+y^2+z^2)}\cdot(3x^2+y^2+z^2)$，$u_y=e^{x(x^2+y^2+z^2)}\cdot 2xy$，$u_z$ 与 u_y 同理

(7) $u_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (8) $u=e^{z(\ln x+\ln y)}$，$u_z=u\cdot(\ln x+\ln y)$，$u_x=u\cdot\frac{z}{x}$

(9) $u_x=y^z\cdot x^{y^z-1}$，$u_y=x^{y^z}\ln x\cdot(zy^{z-1})$，$u_z=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y$

4. 设 $g(u)=\int_1^u \frac{\sin t}{t}dt$ 则 $g'(u)=\frac{\sin u}{u}$ ， $g(1)=0$

$f(x,y)=g(x^2y)$ ，故 $f_x=g'(x^2y)\cdot 2xy = 2xy\frac{\sin x^2y}{x^2y}=\frac{2}{x}\sin x^2y$

$f_y=g'(x^2y)\cdot x^2=\frac{1}{y}\sin x^2y$

5. $f(0,y)=y\sin\frac{1}{y^2}$ ， $f(x,0)=0$

$f_y(0,0)=(y\sin\frac{1}{y^2})'|_{y=0}=$ 不存在 ， $f_x(0,0)=0'|_{x=0}=0$

6. $z(0,0)=0$ ，而 $\forall\varepsilon>0$ ，取 $\delta=\varepsilon$ ，则 $(x,y)\in B(0,\delta)=\{(a,b)|\sqrt{a^2+b^2}<\delta\}$ 时 $|z(x,y)-0|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} z(x,y)=0$ ， $\therefore z$ 连续

$z(x,0)=|x|$ 不可导， $\therefore$ $z_x'(0,0)$ 不存在

7. 令 $x=t$，则线上 $y=4$ ， $z=\frac{x^2+y^2}{4}=\frac{x^2}{4}+4$ ，即 $\vec{r}=(t,4,4+\frac{t^2}{4})$

$\vec{r}'(t)=(1,0,\frac{t}{2})$ ，而 $(2,4,5)$ 处 $t=2$ ， $\vec{r}'(2)=(1,0,1)$ ，即与 x 轴夹角 45°

8. 令 $y=t$ ，则线上 $x=1$ ， $z=\sqrt{x^2+y^2+1}=\sqrt{t^2+2}$ ，即 $\vec{r}=(1,t,\sqrt{t^2+2})$

$\vec{r}'(t)=(0,1,\frac{t}{\sqrt{t^2+2}})$ ，而 $(1,1,\sqrt{3})$ 处 $t=1$ ， $\vec{r}'(1)=(0,1,\frac{1}{\sqrt{3}})$

即与 x 轴夹 90° ，y 轴 30° ，z 轴 60°

9. 这种题 本质是求偏导！ (2)(3)与(1)同理，求偏导再套公式即可

(1) $z_x=2xy^3$ ， $z_y=3x^2y^2$ ，故 $(2,-1)$ 处 $z_x=-4$ ， $z_y=12$

$\therefore dz=-4dx+12dy$ ， $\Delta z=-4\Delta x+12\Delta y=-0.2$

10. 与 9 一样

(1) $z_x=4x^3-8xy^2$ ， $z_y=4y^3-8x^2y$

$\therefore dz=(4x^3-8xy^2)dx+(4y^3-8x^2y)dy$ ，代入 $(0,0)$、$(1,1)$ 即可

(2) 同理

11.

11. (1) $z_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $z_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$, $\therefore dz=\frac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$

(2) $z_x=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $z_y=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $dz=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}(xdy-ydx)$

(3) $u_s=-\frac{2t}{(s-t)^2}$, $u_t=\frac{2s}{(s-t)^2}$, $\therefore \frac{2}{(s-t)^2}(sdt-tds)=du$

(4) $u_x=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $u_y=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$

$\therefore du=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

(5) $z_x=y\cos xy$, $z_y=x\cos xy$, $\therefore dz=(ydx+xdy)\cos xy$

(6) $z=x^{yz}=e^{yz\ln x}$

$\therefore z'_x=(e^{yz\ln x})'_x=e^{yz\ln x}(yz'_x\ln x+yz\cdot\frac{1}{x})$

即 $z'_x=\frac{yz}{(x^{-yz}-y\ln x)x}$,

$z'_y=(x^{yz})'_y=x^{yz}\ln x\cdot(z+yz'_y)$

即 $z'_y=\frac{zx^{yz}\ln x}{1-yx^{yz}\ln x}$

$\therefore dz=\frac{yz}{x(x^{-yz}-y\ln x)}dx+\frac{zx^{yz}\ln x}{1-yx^{yz}\ln x}dy$

13. 连续显然：$f(x,y)=g(x^2+y^2)$, $g(t)=t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{t\to0}g(t)$

$f(x,0)=x^2\sin\frac{1}{|x|}$, 而 $x^2\sin\frac{1}{|x|}$ 在 $x=0$ 处可导 ($\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{|x|}}{x}$ 存在)

$\therefore f'_x(0,0)$ 存在

$x>0$ 时 $f(x,0)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $f'_x(x,0)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$x<0$ 时 $f(x,0)=-x^2\sin\frac{1}{x}$, $f'_x(x,0)=-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$

$\therefore f'_x(x,0)$ 在 $x=0$ 处不连续 ($\lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在)

要证 f 可微，需证 $\exists A,B\in\mathbb{R}$ 使 $f(x,y)-f(0,0)=Ax+By+o(\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y)\to(0,0))$

而取 $A=B=0$, $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\rho\sin\frac{1}{\rho}$, $\lim\limits_{\rho\to0}\rho\sin\frac{1}{\rho}=0$

$\therefore f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ $((x,y)\to(0,0))$

$\therefore$ f 可微 (在(0,0))

12. $|f(x,y)-f(0,0)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} \le |y|$ ，而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y| \to 0$ ，∴ f 连续

$f(x,0)=0$ ，当然对 x 可导 ， $f(0,y)=0$ ，当然对 y 可导

∴ $f'_x(0,0)$ 、 $f'_y(0,0)$ 存在

假设 f 可微，则 ∃A, B 使 $f(x,y)-f(0,0) = Ax+By+o(\sqrt{x^2+y^2})$ …… ①

把 y=0 代入① 得： $f(x,0)-f(0,0) = Ax + o(x)$ ，即 $A = \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

同理，$B = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

∴ $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$ ， 即 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

但 (x,y) 沿着 y=kx 趋于 (0,0) 时 ， $\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$

k 不同的时候 $\frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ 也不同，且不一定为 0 ，矛盾！

14. $u_t = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}} + t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\cdot\frac{x^2}{4t^2} = \left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}t^{-\frac{5}{2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}$

$u_x = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\cdot\left(-\frac{x}{2t}\right) = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}xe^{-\frac{x^2}{4t}}$

$u_{xx} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{4t}} + xe^{-\frac{x^2}{4t}}\cdot\frac{-x}{2t}\right) = \left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}t^{-\frac{5}{2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}$

15. (1) $z_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$ ， $z_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$

$z_{xx} = -4\frac{y}{(x+y)^3}$ ， $z_{yy} = 4\frac{x}{(x+y)^3}$ ， $z_{xy} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$

(2) $z_x = \frac{1}{x^2+1}$ ， $z_y = \frac{1}{y^2+1}$ ， $z_{xx} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ ， $z_{yy} = -\frac{2y}{(y^2+1)^2}$ ， $z_{xy} = 0$

(3) $z_x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ， $z_y = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z_{xx} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ， $z_{xy} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ， $z_{yy} = \frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$

(4) $z_x = 2\sin(ax+by)\cdot a\cdot\cos(ax+by) = a\sin(2ax+2by)$

$z_{xx} = 2a^2\cos(2ax+2by)$ ， $z_{xy} = 2ab\sin(2ax+2by)$ ， $z_y = b\sin(2ax+2by)$ ， $z_{yy} = 2b^2\sin(2ax+2by)$

(5) $z = e^{\ln y\cdot\ln x}$ ， $z_x = \frac{\ln y}{x}e^{\ln y\cdot\ln x}$ ， $z_y = \frac{\ln x}{y}e^{\ln y\cdot\ln x}$

$z_{xx} = \left(\frac{\ln y}{x}\right)^2 e^{\ln y\cdot\ln x} - \frac{\ln y}{x^2}e^{\ln y\cdot\ln x} = \frac{(\ln y-1)\ln y}{x^2}e^{\ln y\cdot\ln x}$ ， $z_{xy} = \frac{1}{xy}e^{\ln y\cdot\ln x} + \frac{\ln x\ln y}{xy}e^{\ln y\cdot\ln x}$

(6) $z_x = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ ， $z_y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$ ， $z_{xx} = \frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ， $z_{yy} = \frac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$z_{xy} = \frac{1}{(1-x^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$

16. $u=e^{xyz}$, $u_x = yz e^{xyz}$, $u_{xy} = ze^{xyz} + yz \cdot xz e^{xyz} = z(1+xyz)e^{xyz}$

$u_{xyz} = (1+xyz)e^{xyz} + z \cdot xy \cdot e^{xyz} + z(1+xyz)\,xy\,e^{xyz}$

$u_{xyy} = z \cdot xz \cdot e^{xyz} + z(1+xyz) \cdot xz e^{xyz}$

17. (1) $r_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $r_{xx} = \dfrac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{r^2-x^2}{r^3}$

由对称性，$r_{yy} = \dfrac{r^2-y^2}{r^3}$, $r_{zz} = \dfrac{r^2-z^2}{r^3}$

(2) $\ln r = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$, $\dfrac{\partial \ln r}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = \dfrac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \dfrac{r^2-2x^2}{r^4}$

由对称性，$\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = \dfrac{r^2-2y^2}{r^4}$, $\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2} = \dfrac{r^2-2z^2}{r^4}$

(3) 设 $u = \dfrac{1}{r}$, $u_x = -\dfrac{r_x}{r^2} = -\dfrac{x}{r^3}$, $u_{xx} = -\dfrac{1}{r^3} + 3\dfrac{xr_x}{r^4} = -\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3x^2}{r^5} = \dfrac{3x^2-r^2}{r^5}$

由对称性，$u_{yy} = \dfrac{3y^2-r^2}{r^5}$, $u_{zz} = \dfrac{3z^2-r^2}{r^5}$

18. $(x,y)\neq(0,0)$ 时 $f'_x(x,y) = y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$, $f'_y(x,y) = x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$

$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

$f'_x(x,0) = 0$, $f'_x(0,y) = -y$, $f'_y(x,0) = x$, $f'_y(0,y) = 0$

$\therefore$ 可知 $f''_{xx}(0,0) = 0$, $f''_{xy}(0,0) = -1$, $f''_{yx}(0,0) = 1$, $f''_{yy}(0,0) = 0$

又算得 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$f''_{xx}(x,y) = -\dfrac{4xy^3(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ $\quad f''_{xy}(x,y) = \dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}$

$f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$ $\quad f''_{yy}(x,y) = \dfrac{4x^3y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}$

19. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$

$\dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \quad \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$