9.2

1

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

令 $f(x,a)=\sqrt{x^2+a^2}$

$\varphi(a)\triangleq\int_{-1}^{1}f(x,a)\,dx$ 在 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 上连续

故由定理9.2.1知

$$\lim_{a\to 0}\varphi(a)=\int_{-1}^{1}\lim_{a\to 0}\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx=2\int_0^1 x\,dx$$
$$=1$$

(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\,dx$

令 $\psi(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\,dx$

$$|\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)|\le\left|\int_{\alpha}^{\alpha+\delta}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\,dx\right|+\left|\int_{1+\alpha}^{1+\alpha+\delta}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\,dx\right|$$

$$\le 2\delta$$

故 ψ 连续.

由定理9.2.2

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

2. 求 $F'(\alpha)$

(1) $F(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$

$$F'(\alpha)=\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx+e^{\alpha|\sin\alpha|}(-\sin\alpha)$$

$$-e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha$$

(2) $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$

$$F'(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{1}{x}\cos\alpha x\cdot x\,dx+\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}$$

$$-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}$$

3) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$

$$F'(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{1}{x}\frac{1}{1+\alpha x}\cdot x\,dx+\frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}$$

$$=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(4) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x+\alpha,\ x-\alpha)\,dx$

$F'=\int_0^{\alpha}(f_1-f_2)\,dx+f(2\alpha,0)$

3

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$

$\because a^2\sin^2x+b^2\cos^2x=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{a^2-b^2}{2}\cos2x$

记 $\alpha=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

原式 $=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1-\alpha\cos x)\,dx$

令 $I(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1-\alpha\cos x)\,dx$

$I'(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{-\cos x}{1-\alpha\cos x}\,dx\underset{\uparrow}{=}\frac{\pi}{\alpha}-\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$

万能公式

$I=\int_0^{\alpha}\left(\frac{\pi}{t}-\frac{\pi}{t\sqrt{1-t^2}}\right)dt=$

$=\pi\int_0^{\alpha}\frac{\sqrt{1-t^2}-1}{t\sqrt{1-t^2}}=\pi\int_0^{\alpha}\frac{-t\,dt}{\sqrt{1-t^2}\,(1+\sqrt{1-t^2})}$

$=\pi\int_0^{\alpha}d\ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{2}$

故 原式 $=\pi\ln\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right)=\pi\ln\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$

扫描全能王 创建

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(2) $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$

$$=\int_0^{\pi}\ln\left[(1+\alpha^2)\left(1-\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\cos x\right)\right]dx$$

$$=\pi\ln(1+\alpha^2)+\underbrace{\pi\ln\left[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2}\right)\right]}$$

这是由(1)得到的.

$$=\pi\ln(1+\alpha^2)+\pi\ln\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{|1-\alpha^2|}{1+\alpha^2}\right)\right]$$

$$=\pi\ln\left[\frac{1}{2}(1+\alpha^2)\left(1+\frac{|1-\alpha^2|}{1+\alpha^2}\right)\right].$$

$$=\begin{cases}0 & |\alpha|\le 1\\ 2\pi\ln\alpha & |\alpha|>1\end{cases}$$

(3) $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}dx$

令 $f(x,\alpha)=\dfrac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}$

$f'_\alpha(x,\alpha)=\dfrac{1}{1+\alpha^2\tan^2 x}$

故 $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$

$\Uparrow$

$a\geq 0$ 时，$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{1+\alpha^2\tan^2x}=\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}=\dfrac{\pi}{2(1+a)}$

$a<0$ 时 $I(\alpha)=-I(-\alpha)=\frac{\pi}{-2}\ln(1-\alpha)$

注：分类是因为计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}=\dfrac{\pi}{2(1+\alpha)}$. 时.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(4) $I'(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\right)' \frac{dx}{\cos x}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x}$

$\overset{t=\tan x}{=} \int_0^{\infty} \frac{2dt}{(1\cancel{t}-a^2)+t^2}$

$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \tan \cancel{t}\right)\Big|_0^{\infty}$

$= \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

故 $I(\alpha) = \pi \arcsin \alpha$.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

4. $y'(x) = \frac{1}{k}\int_c^x f(t)\cos k(x-t)\cdot k\,dt$

$= \int_c^x f(t)\cos k(x-t)\,dt + \cancel{f(x)}$

$y''(x) = \cancel{f'(x)} + \left(-\int_c^x f(t)\sin k(x-t)\,dt\cdot k + f(x)\right.$

故 $y''(x) + k^2 y = f(x)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

5. 设 $|k(x,y)| \leq M$. $|f(x)| \leq M$. 并令 $\varphi_1(x) = f(x)$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy \quad (n=2,3,\dots)$$

易知 $\varphi_n \in C([a,b])$ 此外

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = |\lambda \int_a^x k(x,y)\varphi_1(y)dy|$$

$$\leq |\lambda| |\int_a^x k(x,y)| |f(y)| dy$$

$$\leq |\lambda| M^2 (x-a)$$

依归纳法，有

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{M}{n!} |\lambda|^n M^n (x-a)^n$$

$\langle \varphi_n(x) \rangle$ 为 $[a,b]$ 上一致收敛到. 故存在性得证.

唯一性.

反证. 设 $\psi(x)$ 为另一解. 且 $\varphi \neq \psi$.

令 $g = \varphi - \psi$

则 $g(a) = 0$ $\quad g(x) = \lambda \int_a^x k(x,y) g(y) dy$

则 $|g(x)| \leq \frac{M}{n!} M^n |\lambda|^n (x-a)^n$

令 $n \to \infty \Rightarrow |g(x)| \equiv 0$. 矛盾!