§9.1

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，$\forall b>a$，$f(x)\in R[a,b]$，对于无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$

若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则称其为绝对收敛。

若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散，而 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 则称其条件收敛。

下证：无穷积分绝对收敛蕴含收敛：由 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛知：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>a$ s.t. $b_1,b_2>M$ 时有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$$

又 $$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|\le\left|\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon$$

故由Cauchy收敛准则知：$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

2. I. Cauchy收敛准则：

注意到：$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\xLeftrightarrow{def}$ $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在

由函数极限的Cauchy收敛准则是显然的。

II. 有界判别法：

必要性：$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛 $\Rightarrow\exists A>a$ s.t. $\forall b\ge A$ 时有 $\left|\int_a^A f(x)dx\right|\le M_1$

又 $f(x)\in C[a,+\infty)$ $\Rightarrow$ ~~f(x)在~~ $|f(x)|\le M_2$ $\forall x\in[a,A]$

$\Rightarrow$ $\forall b\ge a$ $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\max\{M_1, M_2[A-a]\}$

$\triangleq M$.

充分性：令 $F(t)=\int_a^t f(x)dx$ 则 $F(t)$ 关于 t 单调递增

$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M\Rightarrow\sup\limits_{b>a}\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M$

$\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)\le\sup\limits_{b>a}\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M$

III. 比较判别法

不妨设 $0\le f(x)\le g(x)$，$\forall x\in[a,+\infty)$ 成立

① 由 $\int_a^{+\infty}f(x)dx\le\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 知结论显然。

②

IV. 比较判别法极限形式

只证(1)：$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ $\Rightarrow$ $\exists 0<k_1<k_2$. s.t. $k_1g(x)\le f(x)\le k_2g(x)$ $x>>1$，

$\Rightarrow$ 不妨，$k_1g(x)\le f(x)\le k_2g(x)$. $\forall x\ge a$.

$\Rightarrow\int_a^{+\infty}k_1g(x)dx\le\int_a^{+\infty}f(x)dx\le k_2\int_a^{+\infty}g(x)dx$.

从而结论是显然的

V、Dirichlet 判别法

由 lemma 9.1.1: ~~$\int_a^{+\infty}|f(x)g(x)|dx = |g(a)|\int_a^{\xi}|f(x)|dx$. ($\xi\in[a,b]$)~~

$\Rightarrow$ ~~$\left|\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx\right| \le M|g(a)|$~~

不妨 $g(x)$ 单调递减，否则考虑 $-g(x)$. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$；

$\forall \varepsilon>0$. $\exists B>a$ s.t. $|g(x)|<\varepsilon/M$, $\forall x>B$.

故对于上述 ε，$\forall b_1>b_2>B$. 有

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = |g(b_1)|\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon/M\cdot M = \varepsilon$$

由 Cauchy 准则知，$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

VI、Abel 判别法，

由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛知，$\forall\varepsilon>0$. $\exists B>a$. s.t. $\forall b_1,b_2>B$ 有.

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon/(2\max_{x\in[a,+\infty)}|g(x)|)$$

故
$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(a)\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx\right|$$
$$\le \max_{x\in[a,+\infty)}|g(x)|\cdot\left(\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)dx\right| + \left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)dx\right|\right) < \varepsilon$$

故由 Cauchy 准则知：$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛

3、略

4、在定积分的分部积分公式中令 $b\to+\infty$ 即可

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx = -\frac{\sin^2x}{x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx \overset{t=2x}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

5、略

6. (1) 由4. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$，（0不是瑕点。）

~~$\frac{1}{x}\to 0$~~ $\frac{1}{x}\downarrow 0$ $\left|\int_a^b \sin x dx\right| \le 2 \xRightarrow{\text{Abel}}$ 收敛

(2) 0不是瑕点。 $\frac{\ln(x^2+1)}{x}\Big/\frac{1}{x} \to +\infty$ ($x\to+\infty$)

故发散.

(3) $\frac{x\ln x}{(1-x^2)^2} \sim \frac{\ln x}{x^3}$ 故收敛

(4) $\sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}} \to 0$ ($x\to+\infty$) $\Rightarrow$ $\sqrt{x}e^{-x} < e^{-\frac{x}{2}}$ ($x>>1$) 故收敛.

(5) $\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\frac{1}{3}}}$ ($x\to\infty$) 故发散

(6) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{1}{x}\ln\ln x\,dx = \int_{2}^{+\infty}\ln t\,dt$ 发散

(7) a、b 为瑕点，$\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\right)\frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$ 收敛.

(8) 0处 $\sim \ln x$ 收敛

1处 $\sim \frac{\ln(1+x-1)}{2\sqrt{1-x}} \to 0\ (x\to 1)$ ~~同敛散~~ 非瑕点.

故 收敛

(9) $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} \sim \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}(1-x)^{\frac{5}{3}}}\ (x\to 1)$ 发散

(10) $\frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\ (x\to 0)$ 收敛

(11) $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\ (x\to 0)$ 收敛

(12) $\frac{1}{e^x-\cos x} \sim \frac{1}{x}\ (x\to 0)$ 发散

(13) ~~$\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+\sin x-1)}{\sqrt{x}}$~~

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{\sqrt{\arcsin t}} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ 收敛

(14) $\frac{\ln x}{x(x^2-1)} \sim \frac{\ln x}{x^3}\ (x\to\infty)$ 收敛

$\frac{\ln x}{x(x^2-1)} \sim \frac{\ln x}{2(x-1)} = \frac{\ln(1+x-1)}{2(x-1)}$ 收敛 ~~故发散~~ 故收敛

(15) $\frac{1}{\sqrt{\sin x}\cos x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\ (x\to 0)$ 收敛

$\frac{1}{\sqrt{\sin x}\cos x} \sim \frac{1}{\cos x}\ (x\to\frac{\pi}{2}) \sim \frac{1}{-\sin(x-\frac{\pi}{2})}$ 发散

故发散

(16) $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx = \int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^p}$ $p>1$ 收敛 $p\le 1$ 发散

(17) $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \sim x^{\alpha-1}\ (x\to 0)$ $\alpha-1>-1 \Rightarrow \alpha>0$ 收敛

$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \sim x^{\alpha-2}\ (x\to\infty)$ $\alpha-2<-1 \Rightarrow \alpha<1$ 收敛

$0<\alpha<1$ 收敛

(18) $\frac{\arctan x}{x^\mu} \sim \frac{1}{x^{\mu-1}}\ (x\to 0)$ $\mu-1<1$ 收敛 $\Rightarrow \mu<2$

$\frac{\arctan x}{x^{\mu}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\mu}}$ $(x\to+\infty)$ 故 $\mu>1$ 收敛

$\Rightarrow$ $1<\mu<2$ 时收敛

7. (1) $\frac{|\cos(1-2x)|}{\sqrt[3]{x^2+1}} \to 0$ $(x\to+\infty)$

故 $x>>1$ 时 $\frac{|\cos(1-2x)|}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ 故收敛

所以 绝对收敛

(2) $\frac{|\sin x|}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} \geq \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} = \frac{1-\cos 2x}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$ ~~收敛~~ 发散.

$\left|\int_1^b \cos 2x\,dx\right| \leq 2$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} \searrow 0$ $\xRightarrow{\text{Dirichlet}}$ $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$ 收敛

故 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$ 发散.

又 $\left|\int_0^b \sin x\,dx\right| \leq 2$ $\xRightarrow{\text{Dirichlet}}$ $\int_1^{b}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$ 收敛

又 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}} = 0$ 故 条件收敛

(3) $\int \frac{|\sin x|}{x\ln x} \geq \frac{\sin^2 x}{x\ln x} = \frac{1-\cos 2x}{2x\ln x}$

$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$ 发散. $\int_2^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x\ln x}dx$ 收敛 (Dirichlet 判别法)

故 $\int_2^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x\ln x}dx$ 发散

$\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}dx$ 收敛 (Dirichlet) 故条件收敛

(4) $\frac{|\sin x|}{x(1+\sqrt{x})}$ $\frac{|\sin x|}{x^{\frac{1}{4}}} \to 0$ $(x\to+\infty)$

$\Rightarrow$ $\frac{|\sin x|}{x(1+\sqrt{x})} < \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}(1+\sqrt{x})}$ $(x>>1)$

故 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x(1+\sqrt{x})}dx$ 收敛

$\frac{|\sin x|}{x(1+\sqrt{x})} \to 1$ $(x\to 0^+)$ 故 绝对收敛.

8. (1) 显然收敛

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

$$= \cancel{\int t^2\ln\frac{1}{t}}\ \int_{+\infty}^1\frac{\ln t^{-1}}{1+t^{-2}}\cdot\frac{-dt}{t^2} + \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$$

(2) $\int_0^1 \ln^n x\,dx \overset{x=e^t}{=} \int_{-\infty}^0 t^n e^t dt = (-1)^n\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (-1)^n\Gamma(n+1)$
$= (-1)^n n!$

(3) $\cancel{\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{\ln x}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\ln x\right) = 0$$

(4) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{x}{2}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$