# 中国科学技术大学数学科学学院

## 2016—2017学年第一学期考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称　复变函数(A)　　课程编号　001505

考试时间　2016年12月　　考试形式　闭卷

姓名＿＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿＿　学院＿＿＿＿＿＿

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | | |

一. 填空题(30 分, 每个空格3 分)

1. 方程 $z^3 = -i$ 的解为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

2. 设 $\alpha \neq 0$ 是复常数，$c$ 是实常数，那么方程 $\alpha\bar{z} + \bar{\alpha}z = c$ 对应的图形是＿＿＿＿＿＿＿＿.

3. 设 $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ 是区域 $D$ 内的复变函数，那么 $f(z)$ 在 $D$ 内解析的充分必要条件是：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

4. 函数 $\dfrac{(\sin z)^2}{(z-3)^2 z^2 (z+1)^3}$ 的全体孤立奇点（不包括 $\infty$ ）是（并且指出每个奇点的类型）
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

5. $\mathrm{Res}\left(\dfrac{z^3 \sin z}{(1-e^{3z})^5}, 0\right) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿　$\mathrm{Res}\left(z^{2016}\sin(2-\dfrac{1}{z}), 0\right) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

6. 对函数 $f(t)$, 记 $F(p) = L[f(t)]$ 为它的 Laplace 变换，并且记 $f(t) = L^{-1}[F(p)]$.
$L\left[\dfrac{d^2}{dt^2}(e^{-t}\sin t)\right] =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿　$L^{-1}\left[\dfrac{1}{p(p-2)^2}\right] =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

7. 在点 $z = 0$ 解析，且满足条件 $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{3n+1}$, $(n = 1,2,\ldots)$ 的函数 $f(z)$ 是否存在？答：＿＿＿＿＿＿（填写"存在"或"不存在"）

8. 设 $f(z) = \cos z$. 那么在圆周 $|z| = 1$ 上＿＿＿＿＿＿（填写"存在"或"不存在"）点 $z$ 使得 $|\cos z| > 1$.

二. 级数展开(15分)

1. (7 分) 求函数 $f(z) = \dfrac{z^3}{(1-z^2)^2}$ 在 $z = 0$ 处泰勒 (Taylor) 展开, 并且给出所得幂级数的收敛半径.

2. (8 分) 将函数 $f(z) = \dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ 在区域 $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < +\infty\}$ 内展成罗朗 (Laurent) 级数.

装订线　答题时不要超过此线

~~三~~. 计算积分(24 分, 每小题6 分): (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) 计算积分 $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\bar{z}}\,dz$, 其中 $\gamma$ 为区域 $D = \{z : 1 < |z| < 2, \mathrm{Im}z > 0\}$ 的边界.　$z = re^{i\theta}$ 代换.

(2) $\displaystyle\int_{|z-1|=1.5} \frac{dz}{z^5\cos z}$.

(3) 用留数定理计算定积分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2}$.　$\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$. 留数定理.

(4) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+1)}\,dx$.　分子拆分 含 $\sin x$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{z^3(z^2+1)}dz$

四. (6 分) 设 $u(x,y)$ 是定义在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的调和函数，并且 $u^2(x,y)$ 也是调和函数。请给出所有满足以上条件的调和函数 $u(x,y)$.

~~五~~. (10 分) 求一保形变换 $w = f(z)$, 将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 1, |z| < 2\}$ 映为单位圆盘 $|w| < 1$. (请画出必要的示意图)

六. (7 分) 设 $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 为 $n$ 次多项式, 其中 $n \geq 1$ 为自然数，$a_1, \ldots, a_n$ 为复数, 且 $a_n \neq 0$. 并且当 $|z| \leq 1$ 时，$|P_n(z)| \leq M$. 设 $R > 1$. 证明：当 $|z| \leq R$ 时，

$$|P_n(z)| \leq MR^n.$$

七. (8 分) 设 $n$ 是自然数，$a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b$ 为复数, 并且 $|a_k| < 1, k = 1,2,\ldots,n$. 设

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z} = \frac{z-a_1}{1-\overline{a_1}z}\cdot\frac{z-a_2}{1-\overline{a_2}z}\cdots\cdots\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}.$$

证明：(1) 如果 $|b| < 1$, 那么方程 $f(z) = b$ 在区域 $|z| < 1$ 内恰有 $n$ 个根；

(2) 如果 $|b| > 1$, 那么方程 $f(z) = b$ 在区域 $|z| > 1$ 内恰有 $n$ 个根。