2021春

多变量微积分答案

6.1节

欧阳康博

March 20, 2021

Problem 1

a.设A,B为R^n中的两个开集，只需证$A \cap B$为开集

$$\forall x \in A \cap B, \exists r_1, r_2 > 0 s.t. B(x, r_1) \subset A, B(x, r_2) \subset B$$

令$r = min\{r_1, r_2\}$,则$B(x, r) \subset A \cap B$
b.设A,B为R^n中的两个开集，只需证$A \cup B$为开集
$\forall x \in A \cup B$, 不妨$x \in A$, 则$\exists r > 0 s.t. B(x, r) \subset A$ 则$B(x, r) \subset A \cup B$
c.若A,B为闭集

$$\because A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, A \cup B = ((A^c \cap B^c)^c$$

故结论对闭集成立。
注：Problem 1实际上是对一般拓扑空间中开集的定义中的一条。欧式空间实际上是度量空间，因此书上其实是用了一种等价的，更容易理解的定义方式。

Problem 2

设$\{x_n\}$为R^2中一列收敛点列, 设极限为x。则

$$\forall \epsilon > 0, \exists N s.t. \forall n \geq N, d(x_n, x) < \epsilon$$

考虑$R = max\{\epsilon, d(x, x_1), ..., d(x, x_N)\}$,则$\forall k \in N_+, x_k \in B(x, R)$ 故$\{x_n\}$有界。

Problem 3

设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R^2$为有界点列，不妨$x_n \in B(0, R)$。下证明$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$有子列收敛。
反证，假设不存在收敛子列。则对$\forall y \in R^2, \exists \delta_y s.t. B(y, \delta_y)$中仅有有限多个$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 因为$\overline{B(0, R)}$是紧的,且$\overline{B(0, R)} \subset \cup_{y \in B(0,R)} B(y, \delta_y)$故存在有限开覆盖$\overline{B(0, R)} \subset \cup_{i=1}^{N} B(y_i, \delta_{y_i})$
则$\cup_{i=1}^{N} B(y_i, \delta_{y_i}) \cap \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$仅有有限个，矛盾！
注：在欧式空间中，列紧集，紧集和有界闭集三者是等价的。

Problem 4

(1)闭区域

(2)都不是

(3)区域

(4)区域

(5)都不是

(6)闭区域

Problem 5

令$a = x + y, b = \frac{y}{x}$,则有

$$x = \frac{a}{b+1}, y = \frac{ab}{b+1}$$

故$f(a, b) = \frac{a^2(1+b)^2}{(b+1)^2}$

Problem 6

$cost \geq sint \iff tant \leq 1$

故$F(t) = 1 \iff t \in [-\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}], k \in Z$

Problem 7

(1)$f(\phi(x, y), \psi(x, y)) = (x + y)^{(x-y)}$

(2)$\phi(f(x, y), \psi(x, y)) = x^y + x - y$

(3)$\psi(\phi(x, y), f(x, y)) = x + y - x^y$

Problem 8

1

$\because x^2+y^2 \le (|x|+|y|)^2$且$\lim\limits_{x,y\to 0}(|x|+|y|)=0 \therefore \lim\limits_{x,y\to 0}\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}=0$

2

$\because \frac{sinxy}{x}=\frac{sinxy-sinax}{x}+\frac{sinax}{x}$且$\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{sinax}{x}=a$

因此只需证明$\lim\limits_{x\to 0,y\to a}\frac{sinxy-sinax}{x}=0$

$\because |\frac{sinxy-sinax}{x}|=|\frac{2cos(\frac{xy+ax}{2})sin(\frac{xy-ax}{2})}{x}| \le |\frac{2sin(\frac{xy-ax}{2})}{x}| \le \frac{|(xy-ax)|}{|x|}\to 0$

3

$\because 2xy \le x^2+y^2 \therefore \frac{xy}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$ 所以$\lim\limits_{x,y\to+\infty}(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}=0$

4

$\because (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}=(1+\frac{1}{x})^{x-\frac{xy}{x+y}}$且$\lim\limits_{x\to\infty,y\to a}(1+\frac{1}{x})^{\frac{xy}{x+y}}=0$ 故$\lim\limits_{x\to\infty,y\to a}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}=e$

5

$|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}|=\frac{|x+y||x^2-xy+y^2|}{x^2+y^2}\le 2|x+y|$,最后一步是因为$x^2-xy+y^2\le 2(x^2+y^2)$

故$\lim\limits_{x,y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$

6

$\because (x^2+y^2)^2 \le 2(x^4+y^4)$

$\therefore \lim\limits_{x,y\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0$

7

令$t=x+y$ 则$(x^2+y^2)e^{-(x+y)} \le t^2e^{-t}$

$\because \lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t}=0$ $\therefore \lim\limits_{x,y\to+\infty}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$

8

直接计算可知$\lim\limits_{x\to1,y\to0} \frac{ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = ln2$

9

$\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = \sqrt{xy+1}+1 \to 2$

10

$\because xy+1 \le (\frac{xy}{2}+1)^2$令 $y=-x+kx^2$则$\lim\limits_{x,y\to0}\frac{xy}{x+y} = -\frac{1}{k}$

故原式极限不存在。

11

令y=x$\because \frac{1-cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \frac{2sin(x^2)}{(x^2+x^2)x^4}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2sin(x^2)}{2x^6} = \infty$ 故原式极限不存在。

12

$(1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = exp\{\frac{1}{x+y}log(1+xy)\}$

$\therefore \lim_{x,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = \lim_{x,y\to 0} exp\{\frac{xy}{x+y}\}$ 由第十题知，极限不存在。

Problem 9

1

原式极限存在 $\iff cos^2(\phi)<sin^2(\phi) \iff \phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

2

(1)若$sin2xy \neq 0$

(i)$cos^2(\phi) = sin^2(\phi) exp\{x^2+y^2\}sin2xy = sin(2\rho^2 cos(\phi)sin(\phi))$故极限不存在

(ii)$cos^2(\phi)>sin^2(\phi)$极限不存在

(iii)$cos^2(\phi)<sin^2(\phi)$

$\lim_{\rho\to+\infty} exp\{x^2+y^2\}sin2xy = \lim_{\rho\to+\infty} exp\{2\rho^2(cos^2(\phi)-sin^2(\phi))\}sin(2\rho^2 cos(\phi)sin(\phi)) = 0$

(2)若$sin2xy = 0$

则极限存在。

Problem 10

1

$\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$ 故两个累次极限都为0

注:令$y = kx^2$则 $\lim_{x\to 0} f(x,kx^2) = \frac{k}{1+k^2}$

故重极限不存在。

2

$\lim_{x\to 0} xsin(\frac{1}{x})sin(\frac{1}{y}) = 0, \lim_{x\to 0} ysin(\frac{1}{x})sin(\frac{1}{y})$不存在，由对称性知，该函数在原点的两个累次极限均不存在。

$\because |f(x,y)-0| \leq |x+y| \therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

注：累次极限和重极限没有必然联系。重极限存在，累次极限未必存在。两个累次极限存在，重极限也不一定存在。

(i)$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 在原点的两个累次极限存在但不相等。重极限不存在。

(ii)$f(x,y) = xsin(\frac{1}{xy})$在原点仅存在一个累次极限。重极限存在。

(iii)$f(x,y) = xsin(\frac{1}{y}) + ysin(\frac{1}{x})$在原点两个累次极限都不存在，但重极限存在。

但是，如果重极限和一个累次极限都存在，那么它们一定相等。进一步，如果重极限和两个累次极限都存在，那么它们三者相等。简单的推论，如果两个累次极限存在但不相等，那么重极限必然不存在。

Problem 11

1

由第八题的第十小问知，f(x,y)不连续。

2

$\because |f(x,y)| \leq |x| \therefore \lim_{x,y\to 0} f(x,y) = 0$ 故f(x,y)连续。

3

$\because |\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \leq |y| \therefore \lim_{x,y\to 0} f(x,y) = 0$ 故f(x,y)连续。

4

令$x = 2y$ 则 $\lim_{y\to 0} f(x,y) = \frac{1}{3}$故f(x,y)不连续。

Problem 12

(i)$\lim\limits_{t\to 0} f(tcos\alpha, tsin\alpha) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3cos^2\alpha sin\alpha}{t^4cos^4\alpha+t^2sin^2\alpha} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{tcos^2\alpha sin\alpha}{t^2cos^4\alpha+sin^2\alpha} = 0$
(ii)令$y = kx^2$ 则 $f(x, y) = \frac{k}{1+k^2}$故此函数在点（0,0）处并不连续。