期中考试练习题 I

一 (1)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, 1, 3, -1)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (3, -1, 2, 0)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (4, 2, 6, -2)^\mathsf{T}$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (4, -3, 1, 1)^\mathsf{T}$, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) =$ __________.

一 (2)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\det(\boldsymbol{AB}) =$ __________.

一 (3)

方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的第 4 行的各元素的余子式之和等于 ____________.

一 (4)

记实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$. 设 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & -1 & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$, 则

$\boldsymbol{A} =$ __________.

一 (5)

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a, 0, c)$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (b, c, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, a, b)$ 线性无关, 则 a, b, c 必须满足 ____________.

二 (1)

判断命题是否正确: 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = 3$, 则存在向量 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ 使得方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 只有唯一解.

二 (2)

判断命题是否正确: 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且有 $\mathrm{tr}((\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathsf{T}}) = 0$, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

二 (3)

判断命题是否正确: 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r$, 且 $\lambda_i \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

二 (4)

判断命题是否正确: 已知 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, 则 $\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{BA})$.

三

已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - \ x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 3 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - \ x_4 = -5 \\ bx_1 \qquad - x_3 - 2x_4 = -3 \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 1 - c \end{cases}$$

同解，求 a, b, c 的值.

四

设 $n > 1$, 对于 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $\det(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

五

设 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 是所有 2 阶实方阵对于矩阵的线性运算构成的实数域上的线性空间.

1. 证明: $S: \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ 构成 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的一组基.
2. 求基 S 到自然基 $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$.
3. 求 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标.

六

设 $\boldsymbol{A} \in F^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in F^{n\times m}$. 证明: $n+\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}_m - \boldsymbol{AB}) = m+\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA})$.