第八章知识点梳理和典型例题

内 部 资 料 请 勿 外 传 ， 有 任 何 问 题 和 建 议 请 联 系 pb161462@mail.ustc.edu.cn, dinggj@ustc.edu.cn

一、基本概念和基本规律

（1）玻色分布和费米分布

$$a_l = \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1}$$

其中“+”为费米分布，“-”为玻色分布。

- 适用范围：简并的玻色气体和费米气体
- 简并（**不是简并度**）：不满足经典极限条件 $e^{\alpha} >> 1 \Leftrightarrow n\lambda^3 << 1,\ \lambda \equiv \frac{h}{(2\pi mkT)^{1/2}}$。
- 强简并：$n\lambda^3 \gg 1$；弱简并：$n\lambda^3$ 小但不可忽略；非简并：$n\lambda^3 \ll 1$
- 总粒子数和内能

$$N = \sum_l \frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1}, \quad U = \sum_l \frac{\omega_l \varepsilon_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l} \pm 1}$$

在能级准连续的极限下，

$$N = \int_0^{+\infty} \frac{D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} \pm 1}, \quad U = \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} \pm 1}$$

（2）玻色、费米分布的巨配分函数

$$\Xi = \prod_l \Xi_l = \prod_l \left[1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right]^{\pm\omega_l}, \quad \ln\Xi = \sum_l \pm\omega_l \ln(1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l})$$

在能级准连续的极限下

$$\ln\Xi = \pm\int_0^{+\infty} \ln\left(1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right) D(\varepsilon) d\varepsilon$$

对于平动能级：$D(\varepsilon)d\varepsilon = g\dfrac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$

（3）热力学量的统计公式：

- 平均粒子数：$\overline{N} = -\dfrac{\partial \ln \Xi}{\partial \alpha}$
- 内能：$U = -\dfrac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta}$
- 广义力：$Y = -\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial \ln \Xi}{\partial y}$， $p = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial \ln \Xi}{\partial V}$
- 熵：

$$S = k\left(\ln \Xi - \alpha\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \alpha} - \beta\frac{\partial \ln \Xi}{\partial \beta}\right) = k\left(\ln \Xi + \alpha \bar{N} + \beta U\right)$$

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad \alpha = -\beta\mu = -\frac{\mu}{kT}$$

- 巨热力学势： $J = F - \mu\overline{N} = -kT\ln \Xi$

（4）玻尔兹曼关系： $S = k\ln \Omega$

（5）利用费米分布和玻色分布处理热力学问题的一般方法

①**配分函数法**：求解能级和能级简并度（或者态密度），计算配分函数，利用配分函数计算热力学量。

②**分布函数法**：求解能级和能级简并度（或者态密度），计算粒子数和能量，计算其他宏观热力学量。

无论哪种方法，最重要的都是求解系统的能级和能级简并度（或者态密度）。

（6）弱简并理想玻色气体和费米气体

- 分布函数方法：

$$N=\int_0^{+\infty}\frac{D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm1},\qquad D(\varepsilon)d\varepsilon\equiv g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

$$=g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm1}d\varepsilon$$

$$=g\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}kT\int_0^{+\infty}\frac{x^{3/2}}{e^{\alpha+x}\pm1}dx$$

$$\approx g\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha-x}(1\mp e^{-\alpha-x})x^{1/2}dx$$

$$=g\left(\frac{2m\pi kT}{h^2}\right)^{3/2}Ve^{-\alpha}\left[1\mp\frac{1}{2^{3/2}}e^{-\alpha}\right]$$

$$U=\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm1},\qquad D(\varepsilon)d\varepsilon\equiv g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

$$=g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}\pm1}d\varepsilon$$

$$=g\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}kT\int_0^{+\infty}\frac{x^{3/2}}{e^{\alpha+x}\pm1}dx$$

$$\approx g\frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}kT\int_0^{+\infty}e^{-\alpha-x}(1\mp e^{-\alpha-x})x^{3/2}dx$$

$$=\frac{3}{2}g\left(\frac{2m\pi kT}{h^2}\right)^{3/2}VkTe^{-\alpha}\left[1\mp\frac{1}{2^{5/2}}e^{-\alpha}\right]$$

内能和压强：$U\approx\frac{3}{2}NkT\left[1\pm\frac{1}{4\sqrt{2}g}n\lambda^3\right]$， $pV\approx NkT\left[1\pm\frac{1}{4\sqrt{2}g}n\lambda^3\right]$，这里第二项是由微观粒子全同性原理引起的量子统计关联所导致的附加内能和附加压强。量子统计关联使费米子间出现等效的排斥作用，玻色粒子间则出现等效的吸引作用。

- 配分函数方法

$$\ln\Xi = \pm\int_0^{+\infty}\ln\left(1\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)D(\varepsilon)d\varepsilon$$
$$=\pm g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{+\infty}\ln\left(1\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$
$$=\pm g\frac{2\pi V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty}\ln\left(1\pm e^{-\alpha-x}\right)x^{1/2}dx$$
$$=gV\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\mp 1)^{l-1}}{l^{5/2}}z^l,\quad z\equiv e^{-\alpha}$$

$$\bar{N}=-\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\alpha}=z\frac{\partial\ln\Xi}{\partial z}=gV\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\mp 1)^{l-1}}{l^{3/2}}z^l$$
$$U=-\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}=\frac{3}{2}kT\ln\Xi,\qquad p=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln\Xi}{\partial V}=\frac{kT}{V}\ln\Xi$$

（7）玻色爱因斯坦凝聚:当温度足够低时，将有宏观数量的粒子从激发态聚集到基态上，形成一个凝聚体，称为玻色-爱因斯坦凝聚。

- 处在任一能级上的粒子数都不能为负值 $a_l\geq 0$ 要求 $\varepsilon_l>\mu,\ \forall l$。如果以选取能低能级为能量的零点 $\varepsilon_0=0$，则要求 $\mu<0$。
- 化学势 μ 由粒子数守恒公式确定

$$N=\sum_l a_l=\sum_l\frac{\omega_l}{e^{\frac{\varepsilon_l-\mu}{kT}}-1}$$

在粒子数 N 给定的情况下，化学势随温度的降低而升高。当 $T\to 0K$ 时，化学势 $\mu\to 0-$。

- 化学势趋于零时的临界温度 T_c： 只考虑玻色粒子的平动

$$n=\frac{1}{V}\int_0^{\infty}\frac{D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT_c}}-1}=\frac{2\pi}{h^3}g(2m)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT_c}}-1}\Rightarrow\frac{2\pi}{h^3}g(2mkT_C)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}}{e^x-1}dx=n$$

可得临界温度 $T_C=\dfrac{h^2}{2\pi mk}\left(\dfrac{n}{2.612g}\right)^{2/3}$

- $T<T_c$ 时，最低能级 $\varepsilon_0=0$ 的粒子数密度： $n_0=n\left[1-(T/T_c)^{3/2}\right]$

➢ 玻色—爱因斯坦凝聚的形成条件：①玻色子　②化学势μ随温度降低趋向于 0。

➢ 凝聚体的微观状态完全确定，熵也为零。凝聚体中粒子的动量和能量为零，对压强没有贡献。

➢ $T<T_c$时玻色气体的内能和热容量

$$U=\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}=\frac{2\pi gV}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\varepsilon/kT}-1}d\varepsilon$$

$$=\frac{2\pi gV}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}(kT)^{\frac{5}{2}}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{e^x-1}$$

$$=0.770NkT\left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$$

定容热容量：$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\frac{5}{2}\frac{U}{T}=1.925Nk\left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$

相关习题：教材习题 8.4，8.5，8.6。

（8）光子气体

➢ 特点：光子数不守恒所以$\alpha=\mu=0$，内禀自由度$g=2$，能量$\varepsilon=\hbar\omega$

➢ 态密度：在$\omega\to\omega+d\omega$的频率范围内，光子可能的量子状态数为

$$D(\omega)d\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2d\omega$$

➢ 分布函数：$a_l=\frac{\omega_l}{e^{\alpha+\beta\varepsilon_l}-1}\to a_l=\frac{D(\omega)d\omega}{e^{\beta\varepsilon}-1}=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2}{e^{\hbar\omega/kT}-1}d\omega$

➢ 内能按频率分布（普朗克公式）：

$$U(\omega,T)d\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT}-1}d\omega$$

① 低频近似 $\hbar\omega<<kT$，$U(\omega,T)d\omega\approx\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2kTd\omega$（瑞利—金斯公

式）

② 高频近似 $\hbar\omega \gg kT,\ U(\omega,T)d\omega \approx \frac{V}{\pi^2 c^3}\hbar\omega^3 e^{-\hbar\omega/kT}d\omega$（维恩公式）

- 维恩位移定律：内能随频率的分布有一个极大值 ω_m，满足 $\frac{\hbar\omega_m}{kT} \approx 2.822$。
- 光子气体的总内能

$$U(T)=\int_0^\infty U(\omega,T)d\omega=\frac{V}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT}-1}d\omega=\frac{\pi^2k^4}{15c^3\hbar^3}VT^4$$

辐射通量密度：$J_u=\frac{1}{4}cu=\frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3}T^4=\sigma T^4$， $\sigma=\frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3}$

- 巨配分函数

$$\ln\Xi=-\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon}\right)D(\varepsilon)d\varepsilon$$

$$=-\frac{V}{\pi^2c^3}\frac{1}{(\beta\hbar)^3}\int_0^\infty x^2\ln(1-e^{-x})dx$$

$$=\frac{V}{3\pi^2c^3}\frac{1}{(\beta\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx$$

$$=\frac{V\pi^2}{45c^3(\beta\hbar)^3}$$

内能：$U=-\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}=\frac{\pi^2k^4V}{15c^3\hbar^3}T^4$

压强：$p=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln\Xi}{\partial V}=\frac{\pi^2k^4}{45c^3\hbar^3}T^4=\frac{1}{3}\frac{U}{V}$

定压热容量：$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\frac{4\pi^2k^4V}{15c^3\hbar^3}T^3$

熵：$S=k(\ln\Xi+\alpha\overline{N}+\beta U)=\frac{4\pi^2k^4}{45c^3\hbar^3}T^3V$

（9）金属中的自由电子气体

- 特点：费米子，内禀自由度 $g=2$，金属中的自由电子气体是强

简并的费米气体$n\lambda^3 >> 1$。

- 态密度：$D(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$
- 根据费米分布，温度为时处在能量为的一个量子态上的平均电子数为 $f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$。当$T=0K$时，$f = \begin{cases} 1, & \varepsilon < \mu(0) \\ 0, & \varepsilon > \mu(0) \end{cases}$，$\mu(0)$表示温度$T=0K$时的化学势。所以在$T=0K$时，电子从$\varepsilon=0$的状态起依次填充至$\varepsilon=\mu(0)$的状态，每个量子态一个电子。
- 费米能级：$\varepsilon_F = \mu(0) = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$

  费米动量：$p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F} = (3\pi^2 n)^{1/3}\hbar$

  费米速度：$v_F = p_F / m = (3\pi^2 n)^{1/3}\hbar / m$

  费米温度：$T_F = \varepsilon_F / k = \frac{\hbar^2}{2km}(3\pi^2 n)^{2/3}$，$T_F \approx 10^4 \sim 10^5 K$
- $T=0K$时电子气体的内能和压强

$$U(0) = \int fD(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\mu(0)} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{3N}{5}\mu(0)$$

$$p = \frac{2}{3}\frac{U(0)}{V} = \frac{2}{5}n\mu(0)$$

电子气体的压强常称为**简并压强**，这是一种与热运动无关的压强，是泡利不相容原理和电子气体高密度的结果。

- $T>0K$的费米系统：绝大多数状态的占据情况没有改变，只是在$\mu(0)$附近数量级为kT的能量范围内占据情况发生改变。化学势μ随着温度升高而降低。

总电子数：

$$
\begin{aligned}
N &= \int_0^{+\infty} \frac{D(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1} \\
&= \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}d\varepsilon \\
&\approx \frac{8\pi V}{3h^3}(2m\mu)^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right] \Rightarrow \mu \approx \mu(0)\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

总内能：

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^{+\infty} \frac{D(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1} \\
&= \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}d\varepsilon \\
&\approx \frac{8\pi V}{5h^3}(2m\mu)^{3/2}\mu\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right] \\
&\approx \frac{3}{5}N\mu(0)\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu(0)}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

定容热容量：$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = Nk\frac{\pi^2 kT}{2\mu(0)}$

二、典型例题

例题 1：磁学系统的低能激发可以用磁振子描述。磁振子是自旋为零的玻色子，其粒子数不守恒。动量为 $\bar{p}$ 的磁振子能量 $\varepsilon(\bar{p})=c\,|\,\bar{p}\,|^s$，其中 c 和 s 为常数，由磁有序类型决定。已知体系温度为 T，不考虑磁振子间的相互作用。

1. 求单位“体积”的 d 维材料里磁振子的单粒子态密度 $\Omega(\varepsilon)$。

2. 求单位“体积”的磁振子的平均粒子数。

3. 求单位“体积”的磁振子的平均能量。

4. 求单位“体积”的磁振子的热容。

【积分表达式$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x-1}dx=\Gamma(p)\zeta(p)$，其中是$\Gamma(p)$欧拉$\Gamma$函数，$\zeta(p)=\sum_{n=1}^\infty n^{-p}$是黎曼$\zeta$函数】

解：

1.

$$\Omega(\varepsilon)=\int\delta(\varepsilon-\varepsilon_p)\frac{d^dxd^dp}{h^d}=\frac{S_d}{h^d}\int\delta(\varepsilon-cp^s)p^{d-1}dp$$
$$=\frac{S_d}{h^d}\frac{p^{d-1}}{csp^{s-1}}\bigg|_{p=(\varepsilon/c)^{1/s}}=\frac{S_d}{csh^d}\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{d/s-1}=\frac{S_d}{sc^{d/s}h^d}\varepsilon^{d/s-1}$$

2.

$$N=\int_0^\infty\frac{\Omega(\varepsilon)}{e^{\beta\varepsilon}-1}d\varepsilon$$
$$=\frac{S_d}{sc^{d/s}h^d}\int_0^\infty\frac{\varepsilon^{d/s-1}}{e^{\beta\varepsilon}-1}d\varepsilon$$
$$=\frac{S_d(k_BT)^{d/s}}{sc^{d/s}h^d}\int_0^\infty\frac{x^{d/s-1}}{e^x-1}dx$$
$$=\frac{(k_BT)^{d/s}S_d\Gamma(d/s)\zeta(d/s)}{sc^{d/s}h^d}$$

3.

$$U=\int_0^\infty\frac{\varepsilon\Omega(\varepsilon)}{e^{\beta\varepsilon}-1}d\varepsilon=\frac{S_d(k_BT)^{d/s+1}}{sc^{d/s}h^d}\int_0^\infty\frac{x^{d/s}}{e^x-1}dx$$
$$=\frac{(k_BT)^{d/s+1}S_d\Gamma(d/s+1)\zeta(d/s+1)}{sc^{d/s}h^d}$$

4.

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\frac{d+s}{s}k_B\frac{(k_BT)^{d/s}S_d\Gamma(d/s+1)\zeta(d/s+1)}{sc^{d/s}h^d}$$

例题 2：极端相对论电子的能谱近似为$\varepsilon(\bar{p})=c|\bar{p}|$，其中 c 为光速，$\bar{p}$ 是电子动量。电子密度为 n，不考虑电子之间的相互作用。

1. 求费米能ε_F。

2. 求低温（$kT\ll\varepsilon_F$）时化学势和温度的关系，准确到温度的平方项。

3. 求系统的等容热容。

解：

1. 单位体积里的态密度

$$
\begin{aligned}
\Omega(\varepsilon) &= 2\int\delta(\varepsilon-cp)\frac{d^3xd^3p}{h^3}=\frac{8\pi V}{h^3}\int\delta(\varepsilon-cp)p^2dp=\frac{8\pi\varepsilon^2}{h^3c^3} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{\pi^2\hbar^3c^3} \\
n &= \int_0^{\varepsilon_F}\Omega(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{\varepsilon_F^3}{3\pi^2\hbar^3c^3} \\
\varepsilon_F &= c\hbar(3\pi^2n)^{1/3}
\end{aligned}
$$

2.由费米分布，单位体积内的电子数为

$$
n=\int_0^{+\infty}\frac{\Omega(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}=\frac{1}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}d\varepsilon
$$

利用 Sommerfeld 展开公式

$$
\int_0^{\infty}\frac{\eta(\varepsilon)}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}d\varepsilon=\int_0^{\mu}\eta(\varepsilon)d\varepsilon+\frac{\pi^2}{6}(kT)^2\eta'(\mu)+\cdots
$$

可得

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{1}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^2}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}d\varepsilon\approx\frac{1}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{\mu}\varepsilon^2d\varepsilon+\frac{\pi^2}{6}(kT)^2\frac{2\mu}{\pi^2\hbar^3c^3} \\
&\equiv \frac{1}{3\pi^2\hbar^3c^3}\left[\mu^3+(\pi kT)^2\mu\right] \\
&\equiv \frac{\mu^3}{3\pi^2\hbar^3c^3}\left[1+\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

所以化学势为

$$\mu = c\hbar(3\pi^2 n)^{1/3}\left[1+\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2\right]^{-1/3} = \varepsilon_F\left[1+\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2\right]^{-1/3}$$

在低温（$kT \ll \varepsilon_F$）时

$$\mu \approx \varepsilon_F\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

3.单位体积电子气的内能是

$$U=\int_0^{+\infty}\frac{\Omega(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}+1}=\frac{1}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{+\infty}\frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}d\varepsilon$$

$$\approx \frac{1}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{\mu}\varepsilon^3 d\varepsilon+\frac{\pi^2}{6}(kT)^2\frac{3\mu^2}{\pi^2\hbar^3c^3}$$

$$\approx \frac{\mu^4}{4\pi^2\hbar^3c^3}\left[1+2\left(\frac{\pi kT}{\mu}\right)^2\right]$$

$$\approx \frac{\varepsilon_F^4}{4\pi^2\hbar^3c^3}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]^4\left[1+2\left(\frac{\pi kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

$$\approx \frac{3}{4}n\varepsilon_F\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{\pi kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right]$$

所以系统的等容热容量是

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=\frac{\pi^2k^2n}{\varepsilon_F}T$$

例题 3：处于旋转约束势阱中的二维玻色子的有效能量为

$$\varepsilon(\vec{r},\vec{p})=\frac{\vec{p}^2}{2m}+V(|\vec{r}|)$$

$V(|\vec{r}|)$是粒子感受到的有效约束势，

$$V(|\vec{r}|)=\frac{1}{2}m(\omega^2-\Omega^2)r^2+\frac{1}{4}kr^4$$

其中 $\vec{p}$ 、$\vec{r}$ 和 m 分别是原子动量、位置和质量， $k>0$ 是一个小的常数。 旋转频率 Ω 大于势阱的约束频率 ω 。在这种情况下原子主要集中在一个环上而不是势阱中心。粒子之间的相互作用很弱，可以忽略不计。

1. 求发生玻色-爱因斯坦凝聚时体系的化学势。
2. 求系统的单粒子态密度。
3. 实验上能达到的构低温度为 T，求可以发生玻色—爱因斯坦凝聚时系统最少有多少个粒子？假设 $kT<<m^2(\Omega^2-\omega^2)^2/k$

解：

1. 发生凝聚时，化学势为能量的最低点，即动能为零、势能最小。

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_r V = m(\omega^2-\Omega^2)r+kr^3 \\
r_m^2 &= \frac{m(\Omega^2-\omega^2)}{k} \\
\mu &= E_m = V_m = V(r_m) \\
&= \frac{1}{2}m(\omega^2-\Omega^2)\frac{m(\Omega^2-\omega^2)}{k}+\frac{k}{4}\Big(\frac{m(\Omega^2-\omega^2)}{k}\Big)^2 \\
&= -\frac{m^2(\Omega^2-\omega^2)^2}{4k} \\
V(r) &= V_m+\frac{k}{4}(r^2-r_m^2)^2
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
g(\varepsilon) &= \int \delta[\varepsilon - V_m - p^2/2m - k(r^2 - r_m^2)^2/4] \frac{d^2 r d^2 p}{h^2} \\
&= \frac{m(2\pi)^2}{2h^2} \int \Theta[\varepsilon - V_m - k(r^2 - r_m^2)^2/4] dr^2
\end{aligned}
$$

积分区间为$r^2 > 0 \&\& -2\sqrt{(\varepsilon - V_m)/k} \le r^2 - r_m^2 \le 2\sqrt{(\varepsilon - V_m)/k}$,
即$\max(r_m^2 - 2\sqrt{(\varepsilon - V_m)/k}, 0) \le r^2 \le r_m^2 + 2\sqrt{(\varepsilon - V_m)/k}$

$$
g(\varepsilon) = \frac{m}{2\hbar^2} \begin{cases} 4\sqrt{(\varepsilon - V_m)/k} & \text{if } \varepsilon - V_m < |V_m| \\ r_m^2 + 2\sqrt{(\varepsilon - V_m)/k} & \text{if } \varepsilon - V_m > |V_m| \end{cases}
$$

3. 发生 BEC 时，体系处于激发态上的粒子数为

$$
\begin{aligned}
N_{ex} &= \int g(\varepsilon) \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} d\varepsilon \\
&= \int_{V_m}^{0} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{\sqrt{(\varepsilon - V_m)/k}}{e^{\beta(\varepsilon - V_m)} - 1} d\varepsilon + \int_0^{\infty} \frac{m}{4\hbar^2} \frac{r_m^2 + 2\sqrt{(\varepsilon - V_m)/k}}{e^{\beta(\varepsilon - V_m)} - 1} d\varepsilon \\
&= \frac{2m(k_B T)^{3/2}}{\hbar^2 \sqrt{k}} \int_0^{\frac{|V_m|}{k_B T}} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx + \frac{2m(k_B T)^{3/2}}{\hbar^2 \sqrt{k}} \int_{\frac{|V_m|}{k_B T}}^{\infty} \frac{\cdots}{e^x - 1} dx \\
&\simeq \frac{2m(k_B T)^{3/2}}{\hbar^2 \sqrt{k}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = \frac{2m(k_B T)^{3/2}}{\hbar^2 \sqrt{k}} \Gamma(3/2)\zeta(3/2)
\end{aligned}
$$

要实现 BEC 的话要求 $N > N_{ex}$。

例题 4: N 个无相互作用的自旋为$1/2$的费米子处在一个截面积为A，高度为L的柱形容器里。考虑重力场的作用，动量为$\vec{p}$位置在$\vec{r}$的粒子能量为$\varepsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p}^2/(2m) + mgz$，其中$m$为粒子质量，$g$为重力加速度，$0 < z < L$。

1. 求费米能ε_F，保留到mgL的最低非零项。

2. 求零温下的内能。

3. 求粒子数密度和高度z的关系$n(z)$。

解:

•

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p}) = mgz + \mathbf{p}^2/2m \\
N &= 2\int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})]\frac{d^3rd^3p}{h^3} \\
&= \frac{4\pi A(2m)^{3/2}}{mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r \int_0^{\varepsilon_p} d\varepsilon_p\sqrt{\varepsilon_p}\Theta(\varepsilon_F - \varepsilon_r - \varepsilon_p) \\
&= \frac{8\pi A(2m)^{3/2}}{3mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r\ (\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{3/2} \\
&= \frac{16\pi A(2m)^{3/2}}{15mgh^3}\Big[\varepsilon_F^{5/2} - (\varepsilon_F - mgL)^{5/2}\Big] \\
&= \frac{16\pi(2m)^{3/2}}{15mgh^3}\varepsilon_F^{5/2}\Big\{1 - \Big[1 - \frac{5}{2}\frac{mgL}{\varepsilon_F} + \frac{15}{8}\frac{(mgL)^2}{\varepsilon_F^2} + \cdots\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8\pi V(2m)^{3/2}}{3h^3}\varepsilon_F^{3/2}\Big[1 - \frac{3}{4}\frac{mgL}{\varepsilon_F}\Big] \\
\varepsilon_F^0 &= \frac{h^2}{2m}\Big(\frac{3n}{8\pi}\Big)^{2/3} \\
\varepsilon_F^0 &= \varepsilon_F\Big[1 - \frac{3mgL}{4\varepsilon_F}\Big]^{2/3} \simeq \varepsilon_F^0\Big[1 + \frac{\Delta\varepsilon_F}{\varepsilon_F^0}\Big]\Big[1 - \frac{mgL}{2\varepsilon_F^0}\Big] \\
\varepsilon_F &= \varepsilon_F^0 + mgL/2
\end{aligned}
$$

• 内能

$$
\begin{aligned}
U &= 2\int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})]\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})\frac{d^3rd^3p}{h^3} \\
&= \frac{4\pi A(2m)^{3/2}}{mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r \int_0^{\varepsilon_F - \varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_p}(\varepsilon_r + \varepsilon_p) \\
&= \frac{4\pi A(2m)^{3/2}}{mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r \Big[\frac{2}{3}\varepsilon_r(\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{3/2} + \frac{2}{5}(\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{5/2}\Big] \\
&= \frac{8\pi A(2m)^{3/2}}{3mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r \Big[\varepsilon_F(\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{3/2} - \frac{2}{5}(\varepsilon_F - \varepsilon_r)^{5/2}\Big] \\
&= \frac{8\pi A(2m)^{3/2}}{3mgh^3}\Big\{\frac{2}{5}\varepsilon_F[\varepsilon_F^{5/2} - (\varepsilon_F - mgL)^{5/2}] - \frac{4}{35}[\varepsilon_F^{7/2} - (\varepsilon_F - mgL)^{7/2}]\Big\} \\
&\simeq \frac{16\pi A(2m)^{3/2}}{15mgh^3}\varepsilon_F^{7/2}\Big\{\frac{5}{2}\frac{mgL}{\varepsilon_F} - \frac{15(mgL)^2}{8\varepsilon_F^2} - \frac{2}{7}\Big[\frac{7mgL}{2\varepsilon_F} - \frac{35(mgL)^2}{8\varepsilon_F^2}\Big]\Big\} \\
&= \frac{16\pi V(2m)^{3/2}}{15h^3}\varepsilon_F^{5/2}\Big[\frac{3}{2} - \frac{5mgL}{8\varepsilon_F}\Big] = \frac{3N\varepsilon_F^0}{5}\Big(\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_F^0}\Big)^{5/2}\Big[1 - \frac{5}{12}\frac{mgL}{\varepsilon_F^0}\Big] \\
&\simeq \frac{3}{5}N\varepsilon_F^0 + \frac{NmgL}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n(z) &= 2\int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(z,\mathbf{p})]d^3p/h^3 \\
&= \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\int \Theta(\varepsilon_F - mgz - \varepsilon_p)\varepsilon_p^{1/2}d\varepsilon_p \\
&= \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3h^3}(\varepsilon_F - mgz)^{3/2} = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3h^3}(\varepsilon_F^0)^{3/2}\left(\frac{\varepsilon_F - mgz}{\varepsilon_F^0}\right)^{3/2} \\
&\simeq \frac{N}{V}\left[1+\frac{mg(L/2-z)}{\varepsilon_F^0}\right]^{3/2} \\
&\simeq n\left[1+\frac{3mg(L/2-z)}{2\varepsilon_F^0}\right]
\end{aligned}
$$

例题 5：对于$e^{-\alpha} \ll 1$的气体是非简并气体，可用玻尔兹曼分布处理，得到$e^{-\alpha} = \frac{N}{Z_1} = \frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}$，对于弱简并的玻色气体，$e^{-\alpha}$虽然小，但分布函数$a_l$分母中的$-1$不能忽略，此时可将$z \equiv e^{-\alpha}$按$y \equiv \frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}$的幂次展成幂级数$z = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \cdots$，则

（1）试求前三项系数a_1, a_2, a_3；

（2）试计算内能E、压强p和熵S，将它们用T和$n = \frac{N}{V}$表示出来。

解：设玻色子的自旋为$s=0$，平动能级准连续，态密度为

$$D(\varepsilon)d\varepsilon \equiv \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

（1）巨配分函数为

$$
\begin{aligned}
\ln\Xi &= -\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)D(\varepsilon)d\varepsilon \\
&= -\frac{2\pi V}{h^3}\left(2m\right)^{3/2}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right)\varepsilon^{1/2}d\varepsilon \\
&= -\frac{2\pi V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty}\ln\left(1-e^{-\alpha-x}\right)x^{1/2}dx \\
&= \frac{2\pi V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_0^{+\infty}e^{-l(\alpha+x)}x^{1/2}dx \\
&= \frac{2\pi V}{h^3}\left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{-l\alpha}}{l^{5/2}}\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{1/2}dx \\
&= V\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{e^{-l\alpha}}{l^{5/2}} \\
&= V\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^{5/2}},\quad z\equiv e^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

粒子数N为

$$
N=-\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\alpha}=z\frac{\partial\ln\Xi}{\partial z}=V\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^{3/2}}
$$

可得

$$
\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^{3/2}}=\frac{N}{V}\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{3/2}=y
$$

将$z=a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\cdots$代入上式，考虑前三项

$$
\begin{aligned}
z+\frac{z^2}{2^{3/2}}+\frac{z^3}{3^{3/2}} &= a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\frac{1}{2^{3/2}}\left(a_1y+a_2y^2+a_3y^3\right)^2+\frac{a_1^3y^3}{3^{3/2}}+O(y^4) \\
&= a_1y+\left[a_2+\frac{a_1^2}{2^{3/2}}\right]y^2+\left[a_3+\frac{a_1a_2}{2^{1/2}}+\frac{a_1^3}{3^{3/2}}\right]y^3+O(y^4)
\end{aligned}
$$

所以有

$$
a_1=1,\ a_2+\frac{a_1^2}{2^{3/2}}=0,\ a_3+\frac{a_1a_2}{2^{1/2}}+\frac{a_1^3}{3^{3/2}}=0
$$

可解得

$$a_1=1,\ a_2=-\frac{1}{2^{3/2}},\ a_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}}$$

所以

$$z=y-\frac{1}{2^{3/2}}y^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}}\right)y^3+\cdots$$

$$\begin{aligned}\ln\Xi&=V\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{3/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{z^l}{l^{5/2}}=\frac{N}{y}\left[z+\frac{z^2}{2^{5/2}}+\frac{z^3}{3^{5/2}}\right]\\&=N\left[1-\frac{1}{2^{5/2}}y+\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{3^{5/2}}\right)y^2+O(y^3)\right]\end{aligned}$$

（2）气体的内能，压强和熵分别为

$$U=-\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}=\frac{3}{2\beta}\ln\Xi=\frac{3}{2}NkT\left[1-\frac{1}{2^{5/2}}y+\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{3^{5/2}}\right)y^2+O(y^3)\right]$$

$$p=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\ln\Xi}{\partial V}=\frac{1}{\beta V}\ln\Xi=\frac{NkT}{V}\left[1-\frac{1}{2^{5/2}}y+\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{3^{5/2}}\right)y^2+O(y^3)\right]$$

$$\begin{aligned}S&=k\left(\ln\Xi-\alpha\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\alpha}-\beta\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta}\right)=k\left(\ln\Xi+\alpha N+\beta U\right)\\&=\frac{5}{2}k\ln\Xi+\alpha kN=\frac{5}{2}k\ln\Xi-Nk\ln z\\&=\frac{5}{2}Nk\left[1-\frac{1}{2^{5/2}}y+\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{3^{5/2}}\right)y^2+O(y^3)\right]-Nk\ln\left[y-\frac{1}{2^{3/2}}y^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{3/2}}\right)y^3\right]\\&=Nk\left[-\ln y+\frac{5}{2}-\frac{1}{2^{7/2}}y+\left(\frac{1}{8}-\frac{2}{3^{5/2}}\right)y^2+O(y^3)\right]\end{aligned}$$

例题 6：（1）导出黑体辐射的辐射通量密度 $J(\lambda)$与波长 λ 的关系；

（2）导出黑体辐射通量密度 $J(\lambda)$的极大值的位置 λ_{max} 与温度 T 的关系；

（3）如果太阳像一个直径为 10^6km、温度为 6000K 的黑体，它在波长 3cm 处的单位频率带宽内发射的微波功率是多少？

解:光子的圆频率在$\omega\sim\omega+d\omega$范围内的状态数为

$$D(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$$

光子气体服从玻色分布，光子的化学势为$\mu = 0$，因此光子的圆频率在$\omega \sim \omega + d\omega$范围内的辐射能量为

$$U(T,\omega)d\omega = \hbar\omega \frac{D(\omega)d\omega}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = \frac{V}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}d\omega$$

（1）光子气体的辐射通量密度

$$J(T,\omega)d\omega = \frac{1}{4}\frac{c}{V}U(T,\omega)d\omega = \frac{1}{4\pi^2 c^2}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}d\omega$$

波长和圆频率之间的关系为$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$，因此辐射通量密度与波长的关系为

$$J(T,\lambda) = J(T,\omega)\left|\frac{d\omega}{d\lambda}\right| = \frac{1}{4\pi^2 c^2}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\frac{2\pi c}{\lambda^2} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}$$

（2）令$x = \frac{hc}{kT\lambda}$，则有

$$J(T,x) = \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3}\frac{x^5}{e^x - 1}$$

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3}\frac{5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x}{\left(e^x - 1\right)^2}$$

与波长极大值的位置λ_{max}对应的$x_m = \frac{hc}{kT\lambda_{\max}}$满足

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{2\pi k^5 T^5}{h^4 c^3}\frac{5x^4(e^x - 1) - x^5 e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = 0$$

即$5(1 - e^{-x}) - x = 0$，可解得

$$x = \mathbf{4.96511} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{hc}{\mathbf{4.96511}kT}$$

（3）由圆频率和频率之间的关系$\omega = 2\pi\nu$，可知

$$J(T,\nu)d\nu = J(T,\omega)\frac{d\omega}{d\nu}d\nu = 2\pi J(T,\omega)d\nu$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 c^2}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}d\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu$$

太阳在$\lambda = 3cm$微波段处$\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\frac{h\nu}{kT} = \frac{hc}{kT\lambda}$，辐射面积是

$$S = \pi d^2,\quad d = 10^6 km$$

所以在单位频率带宽内发射的微波功率为

$$SJ(T,\nu)d\nu = \pi d^2\frac{2\pi hc}{\lambda^3}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}d\nu = \frac{2\pi^2 hcd^2}{\lambda^3}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1} \approx \mathbf{1816.7873\ J/s},\quad d\nu = 1$$