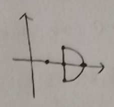
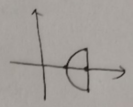
9. (1) 设 A 为曲线 $\{(x-2)^2+y^2=1,\ x\geq 2\} \cup \{x=2,\ -1\leq y\leq 1\}$；



设 B 为曲线 $\{(x-2)^2+y^2=1,\ x\leq 2\} \cup \{x=2,\ -1\leq y\leq 1\}$；



设 $\omega = \dfrac{2xy\,dx + \varphi(x)\,dy}{x^4+y^2}$

则 $\oint_{L^+}\omega = \oint_{A^+}\omega + \oint_{B^+}\omega$ （A^+、B^+ 分别为 A、B 的正向）

而 $\oint_{L^+}\omega = \oint_{A^+}\omega = \oint_{B^+}\omega$，故 $\oint_{L^+}\omega = 0$

(2) 由 (1) 知 $\oint_{C^+}\dfrac{2xy}{x^4+y^2}dx + \dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}dy = 0$ （C^+ 不含 $(0,0)$）

$\therefore \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2xy}{x^4+y^2}\right)$，即 $x^4\varphi'(x) - 4x^3\varphi(x) - 2x^5 = -y^2(\varphi'(x)+2x)$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^4\varphi'(x) - 4x^3\varphi(x) - 2x^5 = 0 \\ -y^2(\varphi'(x)+2x) = 0 \end{cases}$$

即解得 $\varphi(x) = -x^2$

(3) (1) 已经出来了 ✓

10. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 写成 (t,z) 参数：$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \\ z = z \end{cases}$ $(t、z \in \mathbb{R})$

$E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$

$F = \dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial x}{\partial z} + \dfrac{\partial y}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial z} + \dfrac{\partial z}{\partial t}\dfrac{\partial z}{\partial z} = 0$

$G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 1$

而 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \Rightarrow a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t + z^2 \leq a^2$

设 $D = \{0\leq t\leq 2\pi,\ |z| \leq a\sqrt{1-\cos^6 t - \sin^6 t}\}$

则面积 $= \iint_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = 3a\iint_D \cos^2 t\sin^2 t\,dt\,dz$

$= \int_0^{2\pi} 6a^2\cos^2 t\sin^2 t\sqrt{1-\cos^6 t-\sin^6 t}\,dt$

11. $z=0 \Rightarrow h(t)=\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$ ，即 $x^2+y^2=\frac{1}{2}h(t)^2$

$\therefore$ 面积 $S(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}h(t)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

$=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}h(t)^2}\sqrt{1+\frac{16}{h^2}(x^2+y^2)}\,dxdy$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-\frac{16}{h^2}r^2}\,r\,dr=\frac{13}{12}\pi h(t)^2$

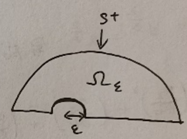
体积 $V(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le\frac{1}{2}h(t)^2}z\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}}r\left(h-\frac{2}{h}r^2\right)dr=\frac{\pi}{4}h(t)^3$

$\therefore -V'(t)=\frac{9}{10}\cdot S(t)$ ，即 $-\frac{3\pi}{4}h(t)^2h'(t)=\frac{9}{10}\frac{13}{12}\pi h(t)^2$

$\therefore h'(t)=-\frac{13}{10}$

设初始高度为 H ，则 $h(t)=H-\frac{13}{10}t$ ，时间 $T=\frac{10}{13}H$

12. 设 $\Omega_\varepsilon=\left\{0\le z\le 7\left(1-\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{16}\right)\right\}\setminus\left\{x^2+y^2+z^2<\varepsilon^2\right\}$:



设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，$\vec{F}(x,y,z)=\frac{1}{r^3}(x,y,z)$ ，则 $I=\iint_{S+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

Ω_ε 的边界有 3 个部分（边界法向朝外）：S^+、D、∂B_ε^- $\rightarrow \{x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2, z\ge 0\}$ 法向朝球 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 的内部

D：在 xy 平面内的部分

$\therefore I+\iint_D\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{\partial B_\varepsilon^-}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_{\Omega_\varepsilon}\nabla\cdot\vec{F}\,dV$

$\nabla\cdot\vec{F}=0$ ，故 $I=-\iint_D\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS-\iint_{\partial B_\varepsilon^-}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

而 D 在 xy 平面内，$\therefore \vec{F}$ 的 z 分量为 0 ，$\vec{n}$ 的 x,y 分量为 0 ，故 $\vec{F}\cdot\vec{n}=0$

∂B_ε^- 上 $r=\varepsilon$ ，$\vec{n}=-\frac{1}{\varepsilon}(x,y,z)$

$\therefore F\cdot\vec{n}=\frac{1}{r^3}(x,y,z)\cdot-\frac{1}{\varepsilon}(x,y,z)=-\frac{1}{\varepsilon^4}(x^2+y^2+z^2)=-\frac{1}{\varepsilon^2}$

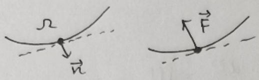
$\therefore I=-\iint_{\partial B_\varepsilon^-}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot(\partial B_\varepsilon^-\text{ 的面积})=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon^2=2\pi$

13. 设物体为 $\mathbb{R}^3$ 中的区域 Ω，边界为 $\partial\Omega$，取外法向 $\vec{n}$

设重力沿 z 轴，则 (x,y,z) 处的压强为 $p=\rho g(H-z)$ （$z=H$ 为水面，Ω 在其下方）

$\therefore$ $\partial\Omega$ 上 (x,y,z) 处的面积元 dS 的受力为 $p(x,y,z)\,dS=\rho g(H-z)\,dS$

其方向为 $-\vec{n}$



故 Ω 的总受力为 $\vec{F}=\iint_{\partial\Omega}\rho g(H-z)(-\vec{n})\,dS$ （向量的积分，对各个分量分别积分即可）

（例如：$\int_0^1 (x^2,x^3)\,dx=\left(\int_0^1 x^2dx,\ \int_0^1 x^3dx\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$）

设 $\vec{i}=(1,0,0)$

$\vec{j}=(0,1,0)$

$\vec{k}=(0,0,1)$

则 $\vec{F}\cdot\vec{i}=-\iint_{\partial\Omega}\rho g(H-z)\,\vec{n}\cdot\vec{i}\,dS=-\iint_{\partial\Omega}\rho g(H-z)\,\vec{i}\cdot d\vec{S}$

$$=-\iiint_{\Omega}\rho g\,\nabla\cdot\left((H-z)\vec{i}\right)dV$$

$(H-z)\vec{i}=(H-z,0,0)$，故 $\nabla\cdot\left((H-z)\vec{i}\right)=0$，即 $\vec{F}\cdot\vec{i}=0$

同理 $\vec{F}\cdot\vec{j}=0$，而 $(H-z)\vec{k}=(0,0,H-z)$，$\nabla\cdot\left((H-z)\vec{k}\right)=-1$

$\therefore$ $\vec{F}\cdot\vec{k}=-\iiint_{\Omega}\rho g\,\nabla\cdot\left((H-z)\vec{k}\right)dV=\iiint_{\Omega}\rho g\,dV=\rho gV$

$\therefore$ $\vec{F}\cdot\vec{i}=0$，$\vec{F}\cdot\vec{j}=0$，$\vec{F}\cdot\vec{k}=0$

即 $\vec{F}=(0,0,\rho gV)$

14. (1) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iint_S \nabla u \cdot \vec{n} dS = \iint_S \nabla u \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla u)\, dV = \iiint_V \Delta u\, dV$

$= \iiint_V 0\, dV = 0$

(2) $\iint_S u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = \iint_S u \nabla u \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S u \nabla u \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot (u \nabla u)\, dV$

而 $\nabla \cdot (f \vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f \nabla \cdot \vec{v}$ （f为标量，$\vec{v}$为向量）

$\therefore \nabla \cdot (u \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla u + u \nabla \cdot (\nabla u) = |\nabla u|^2 + \Delta u$

$\therefore$ 原式 $= \iiint_V |\nabla u|^2 dV + \iiint_V \Delta u\, dV = \iiint_V |\nabla u|^2 dV$