

中国科技大学

2015-2016 学年第一学期考试试卷

考试科目: 复变函数A (A卷)

得分: _____

学生所在系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

一. 基本知识(30 分, 每小题5 分)

1. 求满足下面二方程的复数:

$$\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}, \quad \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1.$$

2. 求下列值:

(1) $\sin(2i)$; (2) $\operatorname{Ln} i + 1^\pi$

3. 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 是区域 D 内的解析函数, 并且对于任何 $z \in D$ 满足 $u^2 + uv + v^2 = a$, (a 为常数). 请说明在 D 内 $f(z)$ 为常值函数.

4. 求函数 $\sin \frac{1}{\cos(\frac{1}{z})}$ 的全体孤立奇点(包括 ∞), 并且指出每个奇点的类型.

5. 函数 xy^2 能否成为一个解析函数的实部? 给出你的答案, 并给出理由.

⑩ 运用 Laplace 变换解下面方程:

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = 4 \sin t + 5 \cos 2t, \\ y(0) = -1, y'(0) = -2. \end{cases}$$

二. 计算题(40分)

1. (6 分) 将函数 $f(z) = \int_0^z e^{\xi^3} d\xi$ 在 $z=0$ 处幂级数展开, 并且求出所得幂级数的收敛半径.

2. (6 分) 试求级数 $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n!}$, ($t \in (0, 2\pi)$) 的和函数.

3. (8 分) 将函数 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)}$ 在区域 $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 3\}$ 内展成 Laurent 级数.

4. 计算积分(20 分): (本题涉及的闭曲线方向都是取曲线正向)

(1) $\int_{|z|=\pi} \frac{z^5}{1+z^6} dz.$

(2) $\int_{|z|=1} z \sin^2 \frac{1}{z} dz.$

(3) $I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos(nx) dx$, 其中 n 为自然数.

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - b^2 \sin ax}{x^2 + b^2} dx$, $a > 0, b > 0$. 留数.

三. 综合题 (30 分) $|z| \leq 1: |f(z)| = |-6z| = 6. |g(z)| = |z^4 + 3| \leq 4. \Rightarrow 1 \text{ 个根.}$

1. (5 分) 求方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在环域 $1 < |z| < 2$ 内根的个数(给出具体理由). $|z| = 2: |f(z)| = |z^4| = 16.$

2. (10 分) 求一保形变换 $w = f(z)$, 将区域 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z + \sqrt{3}| > 2\}$ 映为圆盘 $|w| < 1$. (画出必要的示意图)

$|g(z)| = |-6z + 3| \leq 15. \Rightarrow 4 \text{ 个根}$
 $\Rightarrow 3 \text{ 个根.}$

3. (7 分) 设 $f(z)$ 为 $|z| < 2$ 上的解析函数, 并且满足对任何 $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{((n+1)z-1)^2} dz = 0.$$

证明: f 为常值函数.

4. (8 分) 设 $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, 方向为正向. 设 $a \in \mathbb{C}$ 满足 $|a| \neq r$. 证明:

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi r}{||a|^2 - r^2|}.$$

