地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

习题9.3

1

(1) $u<-1$，$\frac{1}{u}<-1 \Rightarrow \phi$ 即处处发散

(2) $\int_1^{+\infty} x^u \frac{x+\sin x}{x-\sin x} dx$

$= \int_1^{+\infty} x^u + \frac{x^u 2\sin x}{x-\sin x} dx$

$= \underbrace{\int_1^{+\infty} x^u dx}_{I_1} + 2\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{x^u \sin x}{x-\sin x} dx}_{I_2}$

$I_1<\infty \Leftrightarrow u<-1$

且当 $u<-1$ 时，$I_2<\infty$ （$\because$ x 充分大时 $\frac{\sin x}{x-\sin x}<1$）

故收敛域为 $u<-1$.

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^u \ln x} dx$

$u>1$ 时显然收敛. $u<1$ 时. $\exists u'$　$u<u'<1$ s.t.

$\frac{1}{x^u \ln x} > \frac{1}{x^{u'}}$　故 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^u \ln x} dx$ 不收敛

$u=1$ 时　$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x} dx = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x}$　不收敛

综上 $u>1$ 时收敛.

(4) $\int_0^{\pi} \frac{1}{\sin^u x} dx$

$\sin^u x \sim x^u$

故 $u < 1$

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^u(1+x)} dx$

$= \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^u(1+x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^u(1+x)} dx$

$= I_1 + I_2$

I_1 收敛 $\Leftrightarrow$ $u-2<1$

I_2 收敛 $\Leftrightarrow$ $\cancel{u-2<1}$ $u>0$

故 $0<u<3$

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^u} dx$

$= \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^u} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^u} dx$

$= I_1 + I_2$

$I_1 < \infty \Leftrightarrow u-2<1$

$I_2 < \infty \Leftrightarrow u>1$

综上 $1<u<3$.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(7) $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

$= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{e^t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t} dt$

$= I_1 + I_2$

$I_1 < \infty \Leftrightarrow x-1 > -1$

$I_2 < \infty$ $\left(\frac{t^{x-1}}{e^t} = e^{(x-1)\ln t - t} \right.$

当t充分大时 $\left. \frac{t^{x-1}}{e^t} < e^{-\frac{t}{2}} \right)$

故 $x > 0$

(8) $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

$x-1 > -1 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt < \infty$

$y-1 > -1 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt < \infty$.

故 $x, y > 0$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

2

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2}\,dx$$

$$\left|\frac{\cos ux}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

且 $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} < \infty$

故由定理9.3.2知，一致收敛.

地址:中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编: 230026
电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx$

(a) $0<\alpha_0<\alpha<+\infty$

$|e^{-\alpha x}\sin\beta x| \le e^{-\alpha_0 x}$

且 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}\,dx < +\infty$

故一致收敛

(b) $0<\alpha<\infty$

$$\int e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx=-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}[\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x]+C$$

故 $$\int_A^{\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{-\alpha A}}{\alpha^2+\beta^2}[\alpha\sin\beta A+\beta\cos\beta A]$$

取 $\alpha=\frac{1}{A}$

原式 $=\dfrac{e^{-1}}{(\frac{1}{A})^2+\beta^2}[\frac{1}{A}\sin\beta A+\beta\cos\beta A]\xrightarrow{A\to\infty}$ 不收敛.

故不一致收敛.

不一致收敛

(3) $J(A) \triangleq \int_A^{2A} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$

$$= \int_{\sqrt{\alpha}A}^{2\sqrt{\alpha}A} e^{-t^2} dt \geqslant \sqrt{\alpha} A e^{-2\alpha A^2}$$

取 $\alpha = \left(\frac{1}{A}\right)^2$，则 $J(A) \geqslant e^{-2}$ 证毕.

(4) $\alpha < 1$ 时

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\ln 2}{x^\alpha} dx = \infty$$ 不收敛.

故原积分不一致收敛.

(5) 由于 $\left|\int_1^A \cos x\,dx\right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2$

而当 $0 \leq \alpha < +\infty$ 时，函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x^p}$ 在 $x \geq 1$ 关于 x 递减

当关于 α 一致趋于 0.（$0 < \frac{e^{-\alpha x}}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$）

故由Dirichlet判别法知一致收敛

(6) 令 $f(x,p) = x\sin x^2$

$g(x,p) = \frac{1}{x(1+x^p)}$

则 $\left|\int_0^A f(x,p)\,dx\right| = \frac{1}{2}|\cos A^2 - \cos 1| \leq 1$

又 $g(x,p)$ 在 $[0,\infty)$ 上单减

$$\frac{1}{x(1+x^p)} \leq \frac{1}{x} \longrightarrow 0$$

故由Dirichlet判别法知，一致收敛.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(3) 反证：若积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上~~一~~一致收敛．

则对 $\forall\ \varepsilon>0$．$\exists X_0$ 使得

$\left|\int_{x'}^{x''} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(x', x'' \geq X_0,\ \alpha \leq y < \beta)$

$\left|\int_{x'}^{x''} (f(x,y)-f(x,\beta))dx\right|$

$\leq \int_{x'}^{x''} |f(x,y)-f(x,\beta)|\, dx$

$\exists\ \delta$ 使 $|y-\beta|<\delta$ 时 $|f(x,y)-f(x,\beta)| < \frac{\varepsilon/2}{x''-x'}$

$\left|\int_{x'}^{x''} f(x,\beta)\, dx\right| < \varepsilon$

与 $\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dx$ 发散 相矛盾!

故 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上不一致收敛．

扫描全能王 创建

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

4. 设 α_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内一点，

$M=\max(|a_0-1|,|a_0+1|)$ 则当 $x>M$，$\alpha\in(\alpha_0-1,\alpha_0+1)$

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right| \leq \frac{1}{1+(x-M)^2}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\right| = \left|\frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right| \leq \frac{2}{1+(x-M)^2}$$

由于积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x-M)^2}<\infty \quad (y=x-M)$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$ 与 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]dx$ 在

(α_0-1,α_0+1) 内一致收敛．由 α_0 任意性

故 $F(\alpha)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且可微．

5 (1)

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_\alpha^\beta \frac{e^{t\ln x}\ln x\,dt}{\ln x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_\alpha^\beta e^{t\ln x}\,dt\,dx$$

$$\overset{\Delta}{=} \int_\alpha^\beta \int_0^1 e^{t\ln x}\,dx\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_0^1 x^t\,dx\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{t+1} = \ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

Δ：可交换次序是因为 $f(x,t) = x^t$ 连续

且 $\int_0^1 f(x,t) = \frac{1}{t+1}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}\,dx \quad (\alpha > -1)$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{\alpha} \frac{e^{-tx}x\,dt}{xe^x}\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\alpha} e^{-(t+1)x}\,dt\,dx$$

$$\overset{\Delta}{=} \int_0^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-(t+1)x}\,dx\,dt$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+\alpha)$$

Δ：可交换积分次序是由于 $\int_0^{\infty} e^{-(t+1)x}dx = \frac{1}{1+t}$ 在 $[0,\alpha]$ 上一致收敛，由定理 9.3.5 可得.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha x^2}}{x^2}dx$

$\displaystyle = \int_0^{\infty}\int_0^{\alpha} \frac{x^2 e^{-tx^2}}{x^2}dt\,dx$

hm9.3.5 $\displaystyle = \int_0^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-tx^2}dx\,dt$

$\displaystyle = \int_0^{\alpha}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{\pi\alpha}$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$

$\displaystyle = \int_0^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} xe^{-tx^2}dt\,dx$

$\displaystyle = \int_{\alpha}^{\beta}\int_0^{\infty} xe^{-tx^2}dx\,dt$

$\displaystyle = \cancel{\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{t\cdot 2}}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$

可交换次序是因为 $f(x,t) = xe^{-tx^2}$ 连续且 $\int_0^{\infty} f(x,t)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} dx \quad (\alpha > 0)$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\alpha} \frac{1}{x(1+x^2)} \cdot \frac{x}{1+t^2x^2}\, dt\, dx$$

$$= \int_0^{\alpha}\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+t^2x^2)}\, dx\, dt$$

$$= \int_0^{\alpha}\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{t^2}{1+t^2x^2}\right) \frac{1}{1-t^2}\, dx\, dt$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{1}{1-t^2} \frac{\pi}{2} dt - t\int_0^{\alpha} \frac{1}{1-t^2} \frac{\pi}{2}\, dt$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+t} \frac{\pi}{2}\, dt = \frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$$

又 $a<0$ 时 原式 $= -\frac{\pi}{2}\ln(1-\alpha)$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

(6) $\int_0^{+\infty}\left[e^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2}-e^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\right]dx$

$=\int_0^{\infty}\left[\int_b^a d\left(e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^2}\right)\right]dx$

$=\int_0^{\infty}\int_b^a e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^2}\cdot -2\frac{t}{x^2}\,dt\,dx$

$\overset{\triangle}{=}\int_a^b\left(\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^2}\cdot\frac{2t}{x^2}dx\right)dt$

$=\int_a^b\left(\int_{\infty}^{0} 2e^{-y^2}dy\right)dt$

$=-\sqrt{\pi}(a-b)=\sqrt{\pi}(b-a)$

$\triangle$：交换次序是因为 $f(x,t)=e^{-\left(\frac{t}{x}\right)^2}\frac{2t}{x^2}$ 连续且

$\int_0^{\infty}f(x,t)\,dx=-\sqrt{\pi}$ 一致收敛.

扫描全能王 创建