中国科学技术大学 2010–2011 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题 (请给出必要的计算步骤，每题 5 分，共 30 分)

1 $\displaystyle\int x^2e^x\mathrm{d}x$

2 $\displaystyle\int_0^2|x^3-1|\mathrm{d}x$

3 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x$

4 $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ （根据瑕积分定义计算）

5 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin t^3\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

6 $\displaystyle\lim\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, p是正常数.

二、(本题 15分) 曲线$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$围城xOy平面上的一个封闭区域，

1 计算这个区域的周长；

2 计算这个区域的面积；

3 求该区域绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

三、(本题 18 分)

1 求解初值问题$2yy''=1+(y')^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$ 要求将解$y(x)$表示为x的显函数.

2 求微分方程$y''+y=e^{2x}$的通解.

四、(本题 5 分) $f(x)$是区间$[0,1]$上的可微函数，且满足$f(1)=\displaystyle\int_0^1e^{x-1}f(x)\mathrm{d}x$, 证明存在$\xi\in(0,1)$满足$f(\xi)+f'(\xi)=0$.

五、填空题 (每题 4 分，共 16 分)

1 积分$\displaystyle\int_0^\pi\sin^6x\mathrm{d}x$的值是__________；

2 积分$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$的值是__________；

3 已知方程$xy''-y=x^2$的解为多项式，其通解为____________________；

4 由曲线$y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$绕$x$轴一周得到的旋转面面积公式是_______________.

六、单项选择题 (每题 4 分，共 16 分)

1. 下列命题正确的是 (　　)

(A) 若函数黎曼可积 , 则其必有原函数 .

(B) 即使有限闭区间上的函数$f(x)$为某一函数的导数，但$f(x)$不一定黎曼可积 .

(C) 若函数$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上黎曼可积，则存在$\xi \in (a,b)$，使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

(D) 若函数$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上有定义，且只有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积.

2. 下列命题正确的是 (　　)

(A) 二阶齐次线性微分方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$不一定存在两个线性无关的解，其中$p(x), q(x)$为实轴上的连续函数.

(B) 微分方程$x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$满足$y(1) = 1$的特解在$x = 2$有定义.

(C) 积分$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛.

(D) 积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在当且仅当$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$都存在.

3. 对于定义在实轴上的函数$f(x) = \int_0^x (t-1)(t+2)^2\mathrm{d}t$, 关于其极大值点、极小值点和拐点描述正确的是 (　　)

(A) 极大值点：无；极小值点：1；拐点：-2和1.

(B) 极大值点：-2；极小值点：无；拐点：0和1.

(C) 极大值点：无；极小值点：1；拐点：-2和0.

(D) 极大值点：-2；极小值点：无；拐点：-2和1.

4. 在计算有理函数的不定积分过程中，下述四类函数中不可能遇到的是 (　　)

(A) 反正弦函数　(B) 反正切函数　(C) 对数函数　(D) 幂函数

中国科学技术大学 2011–2012 学年第 1 学期
《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题 (请给出必要的计算步骤，每题 8 分，共 40 分)

1 $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x$

2 $x>0$时，$f(\ln x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 求$\displaystyle\int_{-2}^{2} xf'(x)\mathrm{d}x$.

3 曲线$L\begin{cases} x(t)=2(\cos t+t\sin t) \\ y(t)=2(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $,t\in[0,2\pi]$, 求L的弧长.

4 设$f(x)$在区间$[0,1]$连续，且$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)=2$, 求$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)$.

5 求定解问题$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2012^{x+y} \\ y(0)=1\end{cases}$ 的解.

二、求极限(每题 6分，共 12分)

1 设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$连续且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$, 求$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)}{f(x)}$.

2 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

三、(本题 15 分) 求$y''+a^2y=8\cos bx$的通解，其中$a>0,b>0$为相同或不同的常数.

四、(本题 15 分) 求由圆盘$x^2+(y-R)^2\leqslant r^2(0<r<R)$,绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积 .

五、(本题 6 分) 设$f(x)$在区间$[a,b]$有连续导数，$a_n=\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k), n\in\mathbb{N}$, 其中$x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n},(k=1,2,\cdots,n)$, 证明：$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}na_n=\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$.

六、单项选择题 (每题 3 分，共 12 分)

1. 下列命题正确的是 (　　)

(A) 若f^2在$[a,b]$可积 , 则f在$[a,b]$可积 .

(B) $[a,b]$上的单调有界函数必可积 .

(C) 若函数$f(x)$在有界闭区间$[a,b]$上存在原函数，则f在$[a,b]$可积.

(D) 若$f(x)$在$[a,b]$可积，则f在$[a,b]$必存在原函数.

2. $f(x)=\begin{cases} x\ln^2 x, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$, 则$I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$是 ( )

(A) 黎曼积分且积分值为$\dfrac{1}{4}$. (B) 广义积分且发散.

(C) 黎曼积分且积分值为$\dfrac{1}{3}$. (D) 广义积分且积分值为$\dfrac{1}{2}$.

3. 函数$y_1(x),y_2(x),y_3(x)$线性无关，且都是二阶线性非齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解，其中$p(x),q(x),f(x)$均为连续函数， C_1,C_2是任意实数，则该方程的通解是 ( )

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$. (B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$. (D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

4. 函数$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$ ( )

(A) 恒为零. (B) 为正数. (C) 为负数 . (D) 不是常数.

中国科学技术大学 2012–2013 学年第 1 学期
《单变量微积分》期末考试试卷

一、求下列不定积分 (请给出必要的计算步骤，每题 5 分，共 20 分)

1. $\int x(x-1)^n \mathrm{d}x \ (n>0)$

2. $\int \sin 2x \cos^2 x \mathrm{d}x.$

3. $\int \sin\sqrt{x}\mathrm{d}x.$

4. $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x.$

二、计算下列积分(每题 5 分，共 20 分)

1. $\int_0^1 x^2 \arcsin x \mathrm{d}x \ (n>0)$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x.$

3. $\int_0^1 \frac{1+3x}{(x^2+1)(x+1)}\mathrm{d}x.$

4. $\int_0^{2\pi} \sqrt{|\cos x|}\sin^5 x \mathrm{d}x.$

三、(本题 14 分)求下列极限

$(a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4+|\sin x|}\int_0^{x^2} \frac{t^3}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$(b)\ \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}.$

四、(本题 20 分) 求下面微分方程的通解或初值问题.

$(a) y' - 3y' + 2y = 2x - 3$

$(b) y'' + (y')^2 = y', y(0) = y'(0) = 1.$

五、(本题 10 分)

设u是正常数，求曲边梯形$D: 0 \leqslant y \leqslant \frac{e^x+e^{-x}}{2}$,$0 \leqslant x \leqslant u$绕$x$轴旋转一种所得旋转体的体积和侧面积。

六、(本题 6 分) 设$f(x)$是$(0,1)$上的可微函数，且满足$f(0) = 0$和$f'(x) > 0$，对于$0<\alpha<\beta<1$,求证

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x.$$

七、(本题 10 分)

(a) 设$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续，令

$$g(x,y) = \int_0^x \big(f(t+y) - f(t)\big)\mathrm{d}t.$$

求证：　　$g(x,y) = g(y,x).$

(b)求在$\mathbb{R}$上连续且满足方程$f(x+y) - f(x) - f(y) = xy$及条件$f(1) = \frac{1}{2}$的函数$f(x)$.

中国科学技术大学 2013–2014 学年第 1 学期
《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题 (请给出必要的计算步骤，每题 8 分，共 40 分)

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int \max\{x^2, x^4\}\mathrm{d}x.$

5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1}+\frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+2}+\cdots+\frac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+n}\Big).$

二、(本题 10分)求$y''-2y'+y=xe^x$的通解.

三、(本题 10 分)设函数$f(x)$可微，且$\displaystyle\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x = x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$,求$f(x)$.

四、(本题 10 分) 计算定积分$I=\displaystyle\int_0^1\Big(\int_x^1 \arctan(t^2)\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x.$

五、(本题 10 分)

1.写出由方程$|\ln x|+|\ln y|=1$所表示的四条平面曲线；

2.求这四条平面曲线所围图形的面积.

六、(本题 10 分) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的可微函数，且有反函数，已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，求$\displaystyle\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x.$

七、(本题 6 分) 设$f(x)$是$[0,1]$上连续函数，且满足$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1, \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\alpha, \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\alpha^2$, 其中$\alpha$是常数. 证明存在$[0,1]$中的点$x_0$, 使得$f(x_0)=0$.

八、单项选择题 (每题 4 分，共 16 分)

1. 下列等式正确的是 (　　)

(A) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　　　(B) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$. (D) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)$.

2. 设$f(x)$在$[a,b]$黎曼可积，则 ( )

   (A) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上不一定连续. (B) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上可微.

   (C) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上不一定存在. (D) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上不一定可微.

3. 设$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则 ( )

   (A) $f(x)$在$[a,b]$黎曼可积. (B) $f(x)$在$[a,b]$不一定黎曼可积.

   (C) $f(x)$在$[a,b]$可微 . (D) $f(x)$在$[a,b]$不可微.

4. 函数$y_1(x), y_2(x), y_3(x)$是二阶线性非齐次微分方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$的三个不同的解，其中$p(x), q(x), f(x)$均为连续函数， c_1, c_2是任意实数，则 ( )

   (A) $c_1(y_2(x) - y_1(x)) + c_2(y_3(x) - y_1(x)) + y_1(x)$是该方程的通解.

   (B) $c_1(y_2(x) - y_1(x)) + c_2(y_3(x) - y_1(x)) + y_1(x)$不是该方程的通解.

   (C) $c_1(y_2(x) - y_1(x)) + c_2(y_3(x) - y_1(x)) + y_1(x)$是该方程的解.

   (D) $c_1(y_2(x) - y_1(x)) + c_2(y_3(x) - y_1(x)) + y_1(x)$不是该方程的解.

中国科学技术大学 2014–2015 学年第 1 学期
《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题 (请给出必要的计算步骤，每题 8 分，共 40 分)

1. $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{1+x^4}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\mathrm{d}x.$

4. $\displaystyle\int \ln|x|\mathrm{d}x.$

5. 已知$f(x)=e^{x^3}$, 求$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\big(f(1)f(2)\cdots f(n)\big)^{\frac{1}{n^4}}.$

二、(本题 10分)求$y''+y=\cos^2 x$的通解.

三、(本题 10 分)设曲线$y=a\sqrt{x}(a>0)$与$y=\ln\sqrt{x}$在(x_0,y_0)处有公共切线，求这两条曲线与x轴围城的平面图形绕x轴旋转而成的旋转体的体积.

四、(本题 10 分) 已知$f''(x)$连续，$f'(x)\neq 0$,求$\displaystyle\int\Big[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3}\Big]\mathrm{d}x.$

五、(本题 10 分) 已知$f'(x)$连续, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$, 求$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 f(x^2t)\mathrm{d}t}{x\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}.$

六、(本题 10 分) 计算$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sqrt{\tan x}}\mathrm{d}x.$

七、(本题 6 分) 设$f(x)$是$[0,1]$上非负连续函数，且满足$f^2(x)\leqslant 1+2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 证明$f(x)\leqslant 1+x$.

八、单项选择题 (每题 4 分，共 12 分)

1. 设$F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的一个原函数，则$f(x)+F(x)$在(a,b)上 (　　)

   (A) 可微.　(B) 连续.　(C) 有原函数.　(D) 是初等函数.

2. 设$f(x)$在$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$上非负是$\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上单调增加的 (　　)

   (A) 充分非必要条件.　(B) 必要非充分条件.

   (C) 充要条件.　(D) 即非充分又非必要条件.

3. 函数$f(x)$有下列4条性质：(1)$f(x)$在$[a,b]$连续，　(2)$f(x)$在$[a,b]$可积，　(3)$f(x)$在$[a,b]$有原函数，　(4)$f(x)$在$[a,b]$可导.若用$P \Longleftrightarrow Q$表示由性质P可以推出性质Q，则有 (　　)

(A) (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3).　　(B) (1) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4).

(C) (4) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (1).　　(D) (4) $\Longleftrightarrow$ (1) $\Longleftrightarrow$ (2).

4. 下列命题正确的是 (　　)

(A) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且为偶函数，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上全体原函数为奇函数.

(B) $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续且为奇函数，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上全体原函数为偶函数.

(C) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且为周期函数，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上全体原函数为周期函数.

(D) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且为偶函数，则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

中国科学技术大学 2015–2016 学年第 1 学期
《单变量微积分》期末考试试卷

一、(本题 10 分, 每小题 5 分) 求不定积分.

(1) $\displaystyle\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^4)}\mathrm{d}x$

二、(本题 20 分, 每小题 5 分) 求积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\mathrm{d}x$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^2e^x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{a^x+1}\mathrm{d}x \quad (a>0)$　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x$

三、(本题 10 分, 每小题 5 分) 求极限.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+k}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$

四、(本题 20 分) 求在 $[0,+\infty)$ 上的连续可微函数 $f(x)$, $f(0)=1$, 使得对任意 $t>0$, 曲线段 $L:\ y=f(x),\ x\in[0,t]$ 的弧长恰好等于 L 与两个坐标轴及垂直线 $x=t$ 所围成的区域的面积. 并求 L 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

五、(本题 20 分, 每小题 10 分) 求微分方程的通解

(1) $(\sin x)y''-(\cos x)y'=\sin^2 x+1.$

六、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且满足方程

$f(x+a)=-f(x).$　　求证: $\displaystyle\int_0^{2a} xf(x)\mathrm{d}x=-a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$

七、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $0\le f(x)\le 1$.

求证:　$\displaystyle 2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \ge \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$, 并求使上式成为等式的连续函数.

中国科学技术大学 2016–2017 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、计算题（每题 6分，共24分）

1. $\displaystyle\int x^2 \arctan x\, dx.$　　2. $\displaystyle\int \max\{x^2, x^5\}\mathrm{d}x.$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x.$　　4. $\displaystyle\int_0^1 \ln^n x\mathrm{d}x.$

二、求下列极限（每题 9分，共18分）

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}.$　　2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^4+x}\int_0^{x^2} t\arctan t\mathrm{d}t.\right)$

三、（每题 8分，共16分）

1. 求旋轮线一拱L：$x(t)=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t), t\in[0,2\pi]$,常数$a>0$与$x$轴所围图形的面积；

2. 求曲线L与x轴所围图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积.

四、(12分)求解微分方程 $y'+\cot xy = x^2\csc x.$

五、(12分)设函数$y=y(x)$满足微分方程$y''-3y'+2y=(3-4x)e^x$,且其图像在点$(0,1)$与曲线$y=x^2+3x+1$相切. 求函数$y=y(x)$.

六、(10分)设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的非负且单调递减函数，$a_n=\displaystyle\int_0^n f(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=1}^{n}f(i)$,判断$a_n$是否收敛，并说明原因.

七、(8分)设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续，而$f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为$\mathbb{R}$上单调递减函数. 证明：$f(x)$必为常值函数.

中国科学技术大学 2017–2018 学年第 1 学期

《单变量微积分》期末考试试卷

一、求下列各题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 计算积分$\displaystyle\int \max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$.　　　　2. 求不定积分$I=\displaystyle\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

3. 求不定积分$I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.　　　　4. 求解方程$y''+2y'+y=e^{-x}$.

5. 试求曲线$y=x^2$ 与直线$y=a^2$以及y轴所围成的平面图形绕y轴旋转一周所成的旋转体的体积($0\le x\le a$).

二、(本题 10 分) 设 $y(x)$ 是由 $x-\displaystyle\int_1^{x+y}e^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 确定的函数. 试求导数值 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

三、(本题 12分) 设对任意正数θ,积分$\displaystyle\int_\theta^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$收敛,其中$f(x)$为连续函数, $f(0)=A$.试证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x=A\ln\frac{\beta}{\alpha},\qquad(\alpha,\,\beta>0).$$

四、(本题 12 分) 计算定积分$I=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

五、(本题 12 分)求初值问题.$\begin{cases}yy''-(y')^2=y^4,\\ y(0)=y'(0)=1.\end{cases}$

六、(本题 12 分) 设$\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$,其中$f(x)$是已知的连续函数，且$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A\,(A$为常数).

1. (8分)求$\varphi'(x)$;

2. (4分)讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

七、(本题 12 分) 设$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$是连续正值函数,且$f(-t)=f(t)$,
设$g(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\mathrm{d}t$, $-a\le x\le a$, $a>0$.

1. (4分) 求证$g'(x)$是严格单调递增的;

2. (4分) 求出$g(x)$的最小值点;

3. (4分) 当$g(x)$的最小值等于$f(a)-a^2-1$时，求$f(t)$.