（装订线内不要答题）

中国科学技术大学物理学院
2018～2019 学年第 2 学期考试试卷

课程名称：热力学与统计物理（A）　　课程代码：________

开课院系：物理学院　　考试形式：闭卷

姓名：________　学号：________　专业：________

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						
阅卷人						

【答题中可能用到的数学关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}\ ;\qquad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\ ;\qquad \int_0^{\infty} x^p e^{-x}dx = \Gamma(p+1);$$

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}\ln[1\pm\lambda e^{-x}]dx = \pm\Gamma(p)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+1)}(\mp\lambda)^n;$$

其中 $\Gamma(p)$ 是欧拉 Γ 函数。$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$；当 p 是整数时 $\Gamma(p+1)=p!$；$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$。物理常数：电子电荷 $e=1.602\times10^{-19}$ 库仑；Boltzmann 常数 $k_B=1.3806\times10^{-23}$ J/K。】

一、　考虑恒星里的中性碳原子。碳原子的电子基态能量为零，简并度为 9；第一激发态能量 $\varepsilon=0.82$ eV，简并度为 5。更高能级的能量太大，可以忽略不计。恒星里的碳原子粒子数密度比较小，相互作用以及全同性不重要。

1. 求恒星的温度为 T 时，碳原子的单粒子配分函数。
2. 求温度为 T 时处于基态和第一激发态时的碳原子数目之比。

3. 通过光谱测量，发现某个恒星有 10% 的碳原子处于第一激发态，求该恒星的温度。

$$
\begin{aligned}
&z=\sum_l \omega_l e^{-\beta\omega_l}=9+5e^{-\beta\varepsilon}\\
&\frac{a_1}{a_0}=\frac{5}{9}e^{-\beta\varepsilon}\\
&\frac{\varepsilon}{k_BT}=-\ln\frac{9a_1}{5a_0}\\
&T=-\frac{\varepsilon}{k_B\ln(9a_1/5a_0)}=5.5\times10^3\ \mathrm{K}
\end{aligned}
$$

二、 N 个质量为 m 的原子处于约束势$V(\mathbf{r})=a|\mathbf{r}|$ 中，其中 $\mathbf{r}$ 是原子位置，$a>0$ 是约束强度。不考虑原子之间的相互作用。

1. 求温度为 T 时单粒子配分函数。
2. 求温度为 T 时的内能和热容。
3. 绝热地把约束强度 a 减低到 a'，求末态的最低温度 T'。

- $$
\begin{aligned}
\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})&=\mathbf{p}^2/2m+V(\mathbf{r})\\
z&=\int e^{-\beta\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})}\frac{d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}}{h^3}\\
&=\frac{(4\pi)^2}{h^3}\int e^{-\beta p^2/(2m)}p^2dp\int e^{-\beta ar}r^2dr\\
&=\frac{(4\pi)^2}{h^3}(2mk_BT)^{3/2}\left(\frac{k_BT}{a}\right)^3\int e^{-p^2}p^2dp\int e^{-r}r^2dr\\
&=\frac{24\pi}{a^3}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(k_BT)^{9/2}
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
U&=Nk_BT^2\frac{\partial\ln z}{\partial T}=\frac{9Nk_BT}{2}\\
C&=\frac{9Nk_B}{2}
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
S&=Nk_B\ln z+\frac{U}{T}-k_B\ln N!\\
&=Nk_B\ln\left[\frac{24\pi}{a^3}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(k_BT)^{9/2}\right]+\frac{9Nk_B}{2}-k_B\ln N!\\
&=Nk_B\ln\left[\frac{24\pi}{a'^3}\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(k_BT')^{9/2}\right]+\frac{9Nk_B}{2}-k_B\ln N!\\
\frac{T'}{T}&=\left(\frac{a'}{a}\right)^{2/3}
\end{aligned}
$$

三、 处于磁场 B 中自旋为 1 的玻色子能量为 $\varepsilon_s(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - \mu_B Bs$，其中 m 是粒子质量，μ_B 是 Bohr 磁矩，s 是自旋量子数，可能取值为 $0, \pm 1$。假设粒子数密度为 n，且粒子间的相互作用很弱。

1. 求高温下单位体积内磁矩 $\bar{M} = n\mu\langle s\rangle$ 和线性磁化率 $\chi = \lim_{B\to 0}\dfrac{\bar{M}}{B}$。
2. 外磁场比较小的情况下（$\mu_B B \ll k_B T$）发生玻色–爱因斯坦凝聚的温度 T_c。
3. 求低温下（$T < T_c$）的单位体积磁矩。

- $$\begin{aligned}
\mu &\le -\mu_B B \\
\lambda_s &= e^{-\beta(-s\mu_B B-\mu)} = e^{\beta(s\mu_B B+\mu)} = \lambda e^{\beta s\mu_B B} \le 1 \\
\ln\Xi &= -\sum_s \ln[1 - e^{-\beta[\varepsilon_s(\mathbf{p})-\mu]}]\frac{d^3r d^3p}{h^3} - \ln[1-\lambda_1] \\
&= -\frac{4\pi(2m)^{3/2}V}{h^3}\int\sum_s \ln[1-\lambda_s e^{-\beta\varepsilon}]\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon - \ln[1-\lambda_1] \\
&= V\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\sum_s F_{5/2}(\lambda_s) - \ln[1-\lambda_1] \\
F_\nu(\lambda) &= \sum_l \frac{\lambda^l}{l^\nu}
\end{aligned}$$

  高温时 $\lambda_s \ll 1$，

  $$\begin{aligned}
\ln\Xi &= V\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\sum_s F_{5/2}(\lambda_s) \simeq V\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\sum_s \lambda_s \\
&= V\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu}[1+2\cosh\beta\mu_B B] \\
N &= \lambda\frac{\partial\ln\Xi}{\partial\lambda} = V\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\sum_s F_{3/2}(\lambda_s) \\
&\simeq V\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\sum_s e^{\beta\mu+\beta\mu_B Bs} \\
&= V\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{\beta\mu}[1+2\cosh\beta\mu_B B]
\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}
M &= \frac{\partial\ln\Xi}{\partial\beta\mu_B B} = \frac{N}{V}\frac{2\sinh(\beta\mu_B B)}{1+2\cosh(\beta\mu_B B)} \simeq \frac{2N}{3V}\frac{\mu_B B}{k_B T} \\
\chi &= \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{2N}{3V}\frac{\mu_B}{k_B T}
\end{aligned}$$

- 磁场很弱时发生 BEC，$\lambda_s \simeq 1$，

  $$\begin{aligned}
N &= V\left(\frac{2\pi m k_B T_c}{h^2}\right)^{3/2} 3F_{3/2}(1) \\
T_c &= \frac{h^2}{2\pi m k_B}\left[\frac{n}{3F_{3/2}(1)}\right]^{2/3}
\end{aligned}$$

- 发生 BEC 后，处于自旋 s 激发态上的粒子数密度为

$$\begin{aligned} n_{s,ex} &\simeq \Big(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\Big)^{3/2} F_{3/2}(1) \\ &= \Big(\frac{2\pi m k_B T_c}{h^2}\Big)^{3/2} F_{3/2}(1) \Big(\frac{T}{T_c}\Big)^3 \\ &= \frac{n}{3}\Big(\frac{T}{T_c}\Big)^{3/2} \end{aligned}$$

处于 $s=1$ 基态上的粒子数密度

$$n_1 = n - \sum_s n_{s,ex} = n\big[1-(T/T_c)^{3/2}\big]$$

由于处在激发态上的三种粒子数近乎相同，对磁矩贡献为零。只有处于 $s=1$ 基态上的粒子对磁矩有贡献，因此磁矩密度为

$$M = n_1 \mu_B = n\mu_B\big[1-(T/T_c)^{3/2}\big]$$

四、 N 个无相互作用的自旋为 $1/2$ 的费米子处在一个截面积为 A，高度为 L 的柱形容器里。考虑重力场的作用，动量为 $\mathbf{p}$ 位置在 $\mathbf{r}$ 的粒子能量为 $\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m + mgz$，其中 m 为粒子质量，g 为重力加速度，$0 < z < L$。

1. 求费米能 ε_F，保留到 mgL 的最低非零项。
2. 求零温下的内能。
3. 求粒子数密度和高度 z 的关系 $n(z)$。

-

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p}) &= mgz + \mathbf{p}^2/2m \\ N &= 2\int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})]\frac{d^3r d^3p}{h^3} \\ &= \frac{4\pi A(2m)^{3/2}}{mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r \int_0^{\varepsilon_p} d\varepsilon_p \sqrt{\varepsilon_p}\,\Theta(\varepsilon_F-\varepsilon_r-\varepsilon_p) \\ &= \frac{8\pi A(2m)^{3/2}}{3mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r\ (\varepsilon_F-\varepsilon_r)^{3/2} \\ &= \frac{16\pi A(2m)^{3/2}}{15mgh^3}\Big[\varepsilon_F^{5/2} - (\varepsilon_F - mgL)^{5/2}\Big] \\ &= \frac{16\pi(2m)^{3/2}}{15mgh^3}\varepsilon_F^{5/2}\Big\{1-\Big[1-\frac{5}{2}\frac{mgL}{\varepsilon_F}+\frac{15}{8}\frac{(mgL)^2}{\varepsilon_F^2}+\cdots\Big]\Big\} \\ &= \frac{8\pi V(2m)^{3/2}}{3h^3}\varepsilon_F^{3/2}\Big[1-\frac{3}{4}\frac{mgL}{\varepsilon_F}\Big] \\ \varepsilon_F^0 &= \frac{h^2}{2m}\Big(\frac{3n}{8\pi}\Big)^{2/3} \\ \varepsilon_F^0 &= \varepsilon_F\Big[1-\frac{3mgL}{4\varepsilon_F}\Big]^{2/3} \simeq \varepsilon_F^0\Big[1+\frac{\Delta\varepsilon_F}{\varepsilon_F^0}\Big]\Big[1-\frac{mgL}{2\varepsilon_F^0}\Big] \\ \varepsilon_F &= \varepsilon_F^0 + mgL/2 \end{aligned}$$

- 内能

$$
\begin{aligned}
U &= 2\int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})]\varepsilon(\mathbf{r},\mathbf{p})\frac{d^3rd^3p}{h^3} \\
&= \frac{4\pi A(2m)^{3/2}}{mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r \int_0^{\varepsilon_F-\varepsilon_r} \sqrt{\varepsilon_p}(\varepsilon_r+\varepsilon_p) \\
&= \frac{4\pi A(2m)^{3/2}}{mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r \Big[\frac{2}{3}\varepsilon_r(\varepsilon_F-\varepsilon_r)^{3/2}+\frac{2}{5}(\varepsilon_F-\varepsilon_r)^{5/2}\Big] \\
&= \frac{8\pi A(2m)^{3/2}}{3mgh^3}\int_0^{mgL} d\varepsilon_r \Big[\varepsilon_F(\varepsilon_F-\varepsilon_r)^{3/2}-\frac{2}{5}(\varepsilon_F-\varepsilon_r)^{5/2}\Big] \\
&= \frac{8\pi A(2m)^{3/2}}{3mgh^3}\Big\{\frac{2}{5}\varepsilon_F[\varepsilon_F^{5/2}-(\varepsilon_F-mgL)^{5/2}]-\frac{4}{35}[\varepsilon_F^{7/2}-(\varepsilon_F-mgL)^{7/2}]\Big\} \\
&\simeq \frac{16\pi A(2m)^{3/2}}{15mgh^3}\varepsilon_F^{7/2}\Big\{\frac{5}{2}\frac{mgL}{\varepsilon_F}-\frac{15(mgL)^2}{8\varepsilon_F^2}-\frac{2}{7}\Big[\frac{7mgL}{2\varepsilon_F}-\frac{35(mgL)^2}{8\varepsilon_F^2}\Big]\Big\} \\
&= \frac{16\pi V(2m)^{3/2}}{15h^3}\varepsilon_F^{5/2}\Big[\frac{3}{2}-\frac{5mgL}{8\varepsilon_F}\Big] = \frac{3N\varepsilon_F^0}{5}\Big(\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_F^0}\Big)^{5/2}\Big[1-\frac{5}{12}\frac{mgL}{\varepsilon_F^0}\Big] \\
&\simeq \frac{3}{5}N\varepsilon_F^0 + \frac{NmgL}{2}
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
n(z) &= 2\int \Theta[\varepsilon_F - \varepsilon(z,\mathbf{p})]d^3p/h^3 \\
&= \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\int \Theta(\varepsilon_F - mgz - \varepsilon_p)\varepsilon_p^{1/2}d\varepsilon_p \\
&= \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3h^3}(\varepsilon_F-mgz)^{3/2} = \frac{8\pi(2m)^{3/2}}{3h^3}(\varepsilon_F^0)^{3/2}\Big(\frac{\varepsilon_F-mgz}{\varepsilon_F^0}\Big)^{3/2} \\
&\simeq \frac{N}{V}\Big[1+\frac{mg(L/2-z)}{\varepsilon_F^0}\Big]^{3/2} \\
&\simeq n\Big[1+\frac{3mg(L/2-z)}{2\varepsilon_F^0}\Big]
\end{aligned}
$$

五、 用如下简化模型考虑 DNA。一条 DNA 由 N 对碱基组成，它只能从一头打开，即只有前面的 $p-1$ 个碱基对相继打开后，第 p 个才能打开。碱基对只能以一种方式结合在一起，此时能量为零；打开一个碱基对需要消耗能量 ε（>0），打开后每个碱基可能处于 G（$G>1$） 个不同的状态。

1. 求打开 p 个碱基对时需要的能量 E_p 和简并度 Ω_p。
2. 求温度为 T 时，DNA 的正则配分函数。
3. 求打开的碱基对的平均个数 $\bar{p}$ 和涨落。
4. 在热力学极限下，即 $N\to\infty$，体系能否发生相变？如果可以发生相变，求发生相变的温度 T_c 和相变潜热。

- $$E_p = p\varepsilon$$
$$\Omega_p = G^{2p}$$

- $$Z = \sum_p \Omega_p e^{-\beta E_p} = \sum_{p=0}^{N} G^{2p} e^{-\beta p\varepsilon} = \sum_{p=0}^{N} \lambda^p \qquad \lambda = G^2 e^{-\beta\varepsilon}$$
$$= \frac{1-\lambda^{N+1}}{1-\lambda}$$

- $$\begin{aligned}\overline{p} &= \frac{1}{Z}\sum_{p=0}^{N} p\lambda^p = \frac{1}{Z}\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{p=0}^{N}\lambda^p \\ &= \frac{1}{Z}\lambda\frac{\partial Z}{\partial\lambda} = \lambda\frac{\partial \ln Z}{\partial\lambda} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \ln\lambda} \\ &= (N+1)\frac{\lambda^{N+1}}{\lambda^{N+1}-1} - \frac{\lambda}{\lambda-1} \\ \overline{p^2} &= \frac{1}{Z}\sum_{p=0}^{N} p^2\lambda^p = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial(\ln\lambda)^2} \\ &= \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial(\ln\lambda)^2} + \overline{p}^2 \\ \Delta p^2 &= \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial(\ln\lambda)^2} = \lambda\frac{\partial\overline{p}}{\partial\lambda} \\ &= -(N+1)^2\frac{\lambda^{N+1}}{(\lambda^{N+1}-1)^2} + \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\end{aligned}$$

- $$\overline{p} = \begin{cases} N - 1/(\lambda-1) \simeq N & \lambda > 1 \\ \\ \lambda/(1-\lambda) \simeq 0 & \lambda < 1 \end{cases}$$

因此相变温度在 $1 = \lambda_c = G^2 e^{-\varepsilon/(k_B T_c)}$，$T_c = \dfrac{\varepsilon}{2k_B \ln G}$。

$$\begin{aligned}S/k_B &= \ln Z + \beta U = \ln Z + \beta\overline{p}\varepsilon \\ &= \ln\frac{1-\lambda^{N+1}}{1-\lambda} + \beta\varepsilon\Big[(N+1)\frac{\lambda^{N+1}}{\lambda^{N+1}-1} - \frac{\lambda}{\lambda-1}\Big] \\ &= \begin{cases} N\ln\lambda + N\beta\varepsilon = 2N\ln G & \lambda > 1 \\ 0 & \lambda < 1 \end{cases} \\ L &= T\Delta S = 2Nk_B T_c \ln G = N\varepsilon\end{aligned}$$