期中考试练习题 II

一 (1)

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$, 再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得到矩阵 $\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系为 ____________（矩阵等式）.

一 (2)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3), \\ \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 9\boldsymbol{\alpha}_3) \end{aligned}$$

如果 $|\boldsymbol{A}| = 1$, 则 $|\boldsymbol{B}| =$ ________.

一 (3)

设矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆，则其逆矩阵为 ______________________

一 (4)

从 $\mathbb{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 __________.

一 (5)

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, -1, 0)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 1, 0, 2)^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (2, 1, 1, a)^{\mathsf{T}}$, 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 所生成的向量空间的维数为 2, 则 $a =$ ____________.

二 (1)

判断命题是否正确: 解线性方程组 Cramer 法则适用的情形是方程组有唯一解.

二 (2)

判断命题是否正确: 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{C}$ 的行向量与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量等价.

二 (3)

判断命题是否正确: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 生成的子空间维数比向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t$ 生成的子空间维数小, 则 $s \leq t$.

二 (4)

判断命题是否正确: V 是 $\mathbb{R}$ 上所有 n 阶奇异方阵的全体, 在 V 上定义加法为矩阵的加法, 数乘为矩阵的数乘. 则 V 可构成线性空间.

三

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&3\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式和逆矩阵.

四

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}$, $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$.

1. 求满足 $\boldsymbol{A}\xi_2=\xi_1$, $\boldsymbol{A}^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3;
2. 对 (1) 中的任意向量 ξ_2,ξ_3, 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

五

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的三个线性无关的解. 求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解.

六

A 为 n 阶方阵. 证明：$\mathrm{rank}(A) = 1$ 当且仅当存在 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 使得 $A = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathsf{T}}$.

七

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}$ 都是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶方阵, $\{\lambda_i\}_{1\le i\le n}$ 两两不等. $V = \{\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}\}$.

1. 证明: V 构成 $\mathbb{R}$ 上线性空间 (加法与数乘分别是矩阵的加法与数乘).
2. 求 V 的一组基与维数.