（装 订 线 内 不 要 答 题）

中国科学技术大学物理学院
2017～2018 学年第 2 学期中考试卷

课程名称：热力学与统计物理　　　　课程代码：________

开课院系：物理学院　　　　考试形式：闭卷

姓名：________　学号：________　专业：________

题 号	一	二	三	四	五	总 分
得 分						

一、　有一体积为 $2V$ 的容器，容器被一传热很慢并且可以自由移动的挡板分成左右两个部分。这两部分均有 N 摩尔理想气体，其温度分别保持在 T_L 和 T_R 不变。由于挡板传热很慢，两部分气体内部可以近似处于各自的平衡态。

1. 求左右两部分气体的压强。
2. 求左右两部分气体的密度（即气体摩尔数/占据体积）。
3. 单位时间里通过挡板从左向右传到的热量为 $\kappa(T_L - T_R)$，求熵产生率。

$$
\begin{aligned}
pV_L &= NRT_L \to V_L = NRT_L/p \qquad pV_R = NRT_R \to V_R = NRT_R/p \\
2V &= V_L + V_R = NR(T_L + T_R)/p \\
p &= NR(T_L + T_R)/(2V) \\
\rho_L &= N/V_L = p/RT_L = \frac{N(T_L + T_R)}{2VT_L} \qquad \rho_R = \frac{N(T_L + T_R)}{2VT_R} \\
\dot{S}_e &= \frac{-\dot{Q}_L}{T_L} + \frac{\dot{Q}_R}{T_R} = \kappa\Big(-\frac{T_L - T_R}{T_L} + \frac{T_L - T_R}{T_R}\Big) \\
&= \kappa\Big(\frac{T_L}{T_R} + \frac{T_R}{T_L} - 2\Big)
\end{aligned}
$$

二、 利用 Debye 模型，一固体的摩尔等容热容$C_V(T,V) = C(\Theta_D/T)$，其中 Debye 温度 $\Theta_D = \Theta_D(V)$ 只依赖于体积。在温度 $T \gg \Theta_D$ 时，$C \simeq 3R$；$T \ll \Theta_D$ 时，$C \simeq (12\pi^4 R/5)(T/\Theta_D)^3$。

1. 利用热力学第三定律，求一摩尔该固体的绝对熵 $S(T,V)$。
2. 求该固体的等容压力系数 $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$。
3. 实验发现该固体的等温压缩系数 $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ 和温度无关，求等压膨胀系数 $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ 对温度的依赖关系。

1.

$$\begin{aligned}
S(T,V) &= S(0,V) + \int_0^T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V d\tau \\
&= 0 + \int_0^T \frac{C_v(\tau,V)}{\tau} d\tau \\
&= \int_0^T \frac{C(\Theta_D/\tau)}{\tau} d\tau
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T \int_0^T \frac{C(\Theta_D/\tau)}{\tau} d\tau \\
&= \int_0^T \frac{C'(\Theta_D/\tau)}{\tau^2}\frac{d\Theta_D}{dV} d\tau \\
&= -\frac{1}{\Theta_D}\frac{d\Theta_D}{dV}\int_0^T C'(\Theta_D/\tau) d(\Theta_D/\tau) \\
&= -\frac{1}{\Theta_D}\frac{d\Theta_D}{dV} C(\Theta_D/T) \\
&= -\frac{d\ln\Theta_D}{dV} C_V(T,V)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p &= \frac{1}{V}\frac{\partial(V,p)}{\partial(T,p)} = \frac{1}{V}\frac{\partial(V,p)}{\partial(V,T)}\frac{\partial(V,T)}{\partial(T,p)} \\
&= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \kappa_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\
&= -\frac{d\ln\Theta_D}{dV}\kappa_T C_V(T,V)
\end{aligned}$$

因为 $d\ln\Theta_D/dV$ 和 κ_T 与温度无关，因此 α 对温度的依赖关系和热容相同。即在高温时为常数，低温时和 T^3 成正比。

三、 在 10 到 500 mK 区间，^{3}He 有液态和固态两个相。由于自旋的贡献，一摩尔固态 ^{3}He 在这个温度区间的熵近似为 $R\ln 2 \simeq 0.69\ R$。液态 ^{3}He 的摩尔等容热容和温度的关系为 $C_V = RT/T_0$，其中 $T_0 \simeq 300$ mK 与体积几乎无关。液态和固态 ^{3}He 的摩尔体积分别是 v^l 和 v^s；二者可近似为常数，且 $v^l > v^s$。

1. 0 K 时，液态 ^{3}He 的熵为零；求温度为 T 时液态 ^{3}He 的摩尔熵。
2. 请判断相同温度，压强大时哪个相更稳定，并说明理由。
3. 请定性画出这个区间的相图，并说明理由。

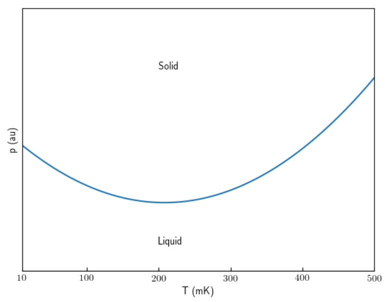
1.

$$
\begin{aligned}
s_l &= s_l(0, v_l) + \int_0^R \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_V dT = 0 + \int_0^R \frac{c_V}{T} dT \\
&= RT/T_0
\end{aligned}
$$

2. 从稳定性条件，压强增大时体积减小。所以固体相更加稳定。

$$
\frac{dp}{dT} = \frac{s_s - s_l}{v_s - v_l}
$$

3. 由于 $v_s - v_l < 0$，低温下 $T < T_0 \ln 2 \simeq 200$ mK 时，固态摩尔熵大于液态摩尔熵，因此共存线斜率小于零；高温 $T > T_0 \ln 2 \simeq 200$ mK 时，液态摩尔熵大于固态摩尔熵，共存线斜率大于零。又因为，高压下固态更稳定，因此相图如图。



四、 在有外电场时，某气体的压强可以表示为$p = RT\rho + \sum_{n>1} B_n \rho^n$，其中 $\rho = N/V$ 是密度，R，N 和 V 分别是理想气体常数，气体的摩尔数和体积。n 阶维理系数 $B_n = B_n(T,E)$ 依赖于温度 T 和外电场 E。【提示：总电偶极矩 $\mathcal{P}_d$ 改变时，系统对外做功的元功表达式为 $đW = -Ed\mathcal{P}_d$。】

1. 请写出该系统可逆元过程内能改变量的完整表达式。
2. 请证明单位体积的电偶极矩 $P_d = \mathcal{P}_d/V$ 只依赖于温度 T，密度 ρ 以及电场 E。
3. 在该气体密度趋于零时，总电偶极矩为 $\mathcal{P}_{d0} = NP_{d0}$，其中 $P_{d0} = P_{d0}(T,E)$ 只依赖于温度和电场。求状态方程 $P_d(T,\rho,E)$。
4. 求该气体的电致伸缩系数 $\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_{T,p}$。

$$dU = TdS - pdV + Ed\mathcal{P}_d$$
$$d\tilde{F} = -SdT - pdV - \mathcal{P}_d dE$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{P}_d}{\partial V}\right)_{N,T,E} = \left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)_{N,T,V} = \sum_{n>1} \partial_E B_n \rho^n = \sum_{n>1} \frac{N^n \partial_E B_n}{V^n}$$
$$\int_\infty^V \left(\frac{\partial \mathcal{P}_d}{\partial V}\right)_{N,T,E} dV = \int_\infty^V \Big[\sum_{n>1} \frac{N^n \partial_E B_n}{V^n}\Big] dV$$
$$\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_{d0} = -\sum_{n>1} \frac{N^n (\partial_E B_n)}{(n-1)V^{n-1}}$$
$$\mathcal{P}_d = NP_{d0} - V\sum_{n>1} \frac{(\partial_E B_n)}{n-1}\rho^n$$
$$P_d(T,E,\rho) = \frac{\mathcal{P}_d}{V} = P_{d0}\rho - \sum_{n>1} \frac{(\partial_E B_n)}{n-1}\rho^n$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{N,T,E} = -\frac{NRT}{V^2} - \sum_{n>1} \frac{nN^n B_n}{V^{n+1}} = -\frac{1}{V}\big[RT\rho + \sum_{n>1} nB_n\rho^n\big]$$
$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial E}\right)_{N,T,p} = \frac{1}{V}\frac{\partial(V,p)}{\partial(E,p)} = \frac{1}{V}\frac{\partial(V,E)}{\partial(E,p)}\frac{\partial(V,p)}{\partial(V,E)}$$
$$= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)_{T,V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,E} = \frac{-1}{V}\left(\frac{\partial p}{\partial E}\right)_{T,V} \Big/ \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T,E}$$
$$= \frac{\sum_{n>1}(\partial_E B_n)\rho^n}{RT\rho + \sum_{n>1} nB_n\rho^n}$$

五、 黑洞是广义相对论预言的最奇特的天体，它的引力强大到逃逸速度超过光速。由于相对论效应，在经典物理里任何物质（包括电磁波）都无法脱离黑洞视界。因此，黑洞是“黑”的，我们无法直接“看”到它。但是 Hawking 发现，考虑量子效应后黑洞可以向外辐射电磁波。这种辐射可以等价为在黑洞视界上的黑体辐射。用如下模型考虑黑洞的 Hawking 辐射问题：黑洞的宏观性质由其质量 M，角动量 J 和电荷 Q 完全决定。黑洞热力学基本关系为 $dU = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ$，其中 Ω 为角速度，Φ 为静电势。质量为 M、$J = 0$、$Q = 0$ 的黑洞视界半径 $r = 2GM/c^2$，内能 $U = Mc^2$，熵 $S = k_B Ac^3/(4G\hbar)$，$A = 4\pi r^2$ 是黑洞视界的面积。其中 $c, \hbar, k_B$ 和 G 分别是光速、约化 Planck 常数、Boltzmann 常数和重力常数；Stephen—Boltzmann 常数 $\sigma = \pi^2 k_B^4/(60\hbar^3 c^2)$。

1. 请写出 $J = 0$，$Q = 0$ 时的特性函数 $S(U, J, Q)$。
2. 求质量为 M 的黑洞的温度 T。
3. 由于黑洞温度不为零，在其表面（即黑洞视界）有热辐射。黑洞的 Hawking 辐射可以等价为温度为 T 的理想黑体辐射，求 Hawking 辐射功率和黑洞质量 M 的关系。
4. 由于辐射，黑洞能量将减小。从质能关系 $U = Mc^2$，这意味着黑洞质量随时间降低。不考虑其它因素，求该黑洞因为辐射而消失所需要的时间。

$$
\begin{aligned}
&U = Mc^2 \to M = U/c^2 \\
&r = 2GM/c^2 = 2GU/c^4 \\
&A = 4\pi r^2 = 4\pi(2GU/c^4)^2 = \frac{16\pi G^2 U^2}{c^4} \\
&S = k_B Ac^3/(4G\hbar) = \frac{k_B c^3}{4G\hbar}\frac{16\pi G^2 U^2}{c^4} \\
&\quad = \frac{4\pi k_B G}{\hbar c} U^2 \\
&\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{J,Q} = \frac{8\pi k_B G}{\hbar c} U = \frac{8\pi k_B G}{\hbar c^3} M
\end{aligned}
$$

辐射功率

$$
\begin{aligned}
P = A\sigma T^4 &= \sigma 4\pi\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2\left(\frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}\right)^4 \\
&= \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}\frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}\frac{\hbar^4 c^{12}}{8^4\pi^2 G^4 k_B^4 M^4} \\
&= \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2} \\
-\frac{d(Mc^2)}{dt} &= P = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 M^2} \\
\frac{dM}{dt} &= -\frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2 M^2} = -\frac{K_{ev}}{M^2} \\
\int_{M_0}^{0} M^2 dM &= -\int_0^{\tau_{ev}} K_{ev} dt \\
\tau_{ev} &= \frac{M_0^3}{3K_{ev}} = \frac{5120\pi G^2}{\hbar c^4} M_0^3
\end{aligned}
$$