1. Формулировка задачи Коши для уравнения 1-го порядка

Для дифференциального уравнения первого порядка вида y′=f(x,y), задача Коши заключается в нахождении решения y=ϕ(x) удовлетворяющего начальному условию: $y(x_0)=y_0$,
где (x_0,y_0) — заданная точка в области определения фун-ии f(x,y).
Уточнение: Согласно теореме существования и единственности, если функция f(x,y) непрерывна в области G, содержащей точку (x_0,y_0), и имеет непрерывную частную производную ∂f/∂y, то задача Коши имеет единственное решение в некоторой окрестности точки x_0.

2. Критерий для уравнений в полных дифференциалах:

Для уравнения вида M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, где функции M(x,y) и N(x,y) имеют непрерывные частные производные ∂M/∂y и ∂N/∂x в некоторой области, уравнение является уравнением в полных дифференциалах **тогда и только тогда**, когда выполняется условие: ∂M/∂y=∂N/∂x.
Дополнительно: Если это условие выполнено, то существует функция F(x,y), такая что M(x,y)=∂F/∂x, N(x,y)=∂F/∂y, и общий интеграл уравнения имеет вид F(x,y)=c.
Функцию F(x,y), можно найти, например, интегрированием: F(x,y)=∫M(x,y) dx+ψ(y), где ψ(y) определяется из условия ∂F/∂y=N(x,y).

3. Определите тип дифференциального уравнения:

4. Какая система функций называется линейно зависимой?

Говорят, что система (набор) функций $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_k(x)$ $\varphi_j:(r_1,r_2)\to\mathbb{C}$ является *линейно зависимой* на интервале (r_1,r_2), если ∃ константы $C_1,C_2,\ldots,C_k$ такие, что:

1. $|C_1|+|C_2|+\cdots+|C_k|\neq 0$
2. $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_k\varphi_k(x)=0\quad\forall x\in(r_1,r_2)$.

5. Нахождение методом вариации произвольных постоянных частного решения уравнения L(P)z=f(t)

Теорема. Если известно решение $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ **ЛОДУ** $L(p)y=0$, то частное решение уравнения $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ **(1)** может быть найдено в виде $y_{\text{чн}}(x)=C_1(x)\varphi_1(x)+C_2(x)\varphi_2(x)+\cdots+C_n(x)\varphi_n(x)$, **(2)** где функции $C_1(x),C_2(x),\ldots,C_n(x)$ являются решениями следующей системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1+C_2'\varphi_2+\cdots+C_n'\varphi_n=0\\ C_1'\varphi_1'+C_2'\varphi_2'+\cdots+C_n'\varphi_n'=0\\ \ldots\\ C_1'\varphi_1^{(n-2)}+C_2'\varphi_2^{(n-2)}+\cdots+C_n'\varphi_n^{(n-2)}=0\\ C_1'\varphi_1^{(n-1)}+C_2'\varphi_2^{(n-1)}+\cdots+C_n'\varphi_n^{(n-1)}=\frac{f(x)}{a_0}\end{cases}\quad\textbf{(3)}$$

Док-во. Продифференцируем формулу (2) с учётом 1-го уравнения системы (3)

$y_{\text{чн}}'=C_1'\varphi_1+C_1\varphi_1'+C_2'\varphi_2+C_2\varphi_2'+\cdots+C_n'\varphi_n+C_n\varphi_n'=C_1\varphi_1'+C_2\varphi_2'+\cdots+C_n\varphi_n'$

Найдём вторую производную с учётом 2-го уравнения системы (3)

$$y_{\text{чн}}''=C_1\varphi_1''+C_2\varphi_2''+\cdots+C_n\varphi_n''$$
$$\ldots$$
$$y_{\text{чн}}^{(n-1)}=C_1\varphi_1^{(n-1)}+C_2\varphi_2^{(n-1)}+\cdots+C_n\varphi_n^{(n-1)}$$

$$y_{\text{чн}}^{(n)}=\frac{f(x)}{a_0}+C_1\varphi_1^{(n)}+C_2\varphi_2^{(n)}+\cdots+C_n\varphi_n^{(n)}$$

$$\begin{aligned}L(p)y_{\text{чн}}&=a_0y_{\text{чн}}^{(n)}+a_1y_{\text{чн}}^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_{\text{чн}}'+a_ny_{\text{чн}}=\\&=f(x)+a_0C_1\varphi_1^{(n)}+a_0C_2\varphi_2^{(n)}+\cdots+a_0C_n\varphi_n^{(n)}+a_1C_1\varphi_1^{(n-1)}\\&\quad+a_1C_2\varphi_2^{(n-1)}+\cdots+a_1C_n\varphi_n^{(n-1)}+\\&+\cdots+a_{n-1}C_1\varphi_1'+a_{n-1}C_2\varphi_2'+\cdots+a_{n-1}C_n\varphi_n'+a_nC_1\varphi_1+a_nC_2\varphi_2\\&\quad+\cdots+a_nC_n\varphi_n=\\&=f(x)+\underbrace{C_1(x)L(p)\varphi_1}_{=0}+\underbrace{C_2(x)L(p)\varphi_2}_{=0}+\cdots+\underbrace{C_n(x)L(p)\varphi_n}_{=0}=f(x)\end{aligned}$$

$L(p)y_{\text{чн}}=f(x)$ Формула (2) действительно определяет реш. уравнения (1)

6. Определить вид частного решения для уравнения:

7. Опр-ние решения системы дифференциальных ура-ий

Определение: Решением системы дифференциальных уран-й вида x′=A(t)x, где x(t)∈Rn— вектор-функция, A(t)— матрица n×n, непрерывная на интервале (r1,r2), называется вектор-функция x(t)=(φ1(t),φ2(t),…,φn(t)), которая:

1. Определена хотя бы на некотором подынтервале (r1,r2).
2. Дифференцируема на этом интервале.
3. При подстановке в систему x′=A(t)x обращает её в тождество, то есть: x′(t)=A(t)x(t) для всех t в области опре-ия.

Для неоднородной системы x′=A(t)x+b(t), где b(t)∈Rn— заданная вектор-функция, решение x(t)должно удовлетворять уравнению: x′(t)=A(t)x(t)+b(t). **Замечание**: Решение может быть общим (содержащим произвольные константы) или частным (удовлетворяющим конкретным начальным условиям, например, в задаче Коши $x(t_0)=x_0$.

8. Доказать, что e^(λt) является решением системы x = Ax тогда и только тогда, когда Ah = λh.

9. Необходимое и достаточное условие асимитотической устойчивости нулевого решения x = Ax.

Необходимое и достаточное условие асимптотич-ой устойчивости нулевого решения линейной однородной системы: $x'=Ax$ заключается в том, что **вещественные части всех собственных значений матрицы A отрицательны**, то есть: $\mathrm{Re}\,\lambda<0\ \forall\lambda \in \sigma(A)$, , где $\sigma(A)$— множество собственных значений матрицы A.

Доказательство: **Необходимость**

Предположим, что нулевое решение системы $x'=Ax$ асимптот-ески устойчиво. Это означает, что для любого решения $x(t)$ выпол-тся: $\lim t\to+\infty\|x(t)\|=0$.

По теореме об устойчивости, если система устойчива, то вещественные части всех собственных значений $\lambda\in\sigma(A)$ удовлетворяют: $\mathrm{Re}\,\lambda\leq0$.Докажем, что $\mathrm{Re}\,\lambda\neq0$. Предположим противное: существует собственное значение $\lambda=i\gamma$ ($\mathrm{Re}\,\lambda=0$), где $\gamma\in R$. Тогда система имеет решение вида: $x(t)=e^{i\gamma t}h$, где $h\neq0$— собственный вектор, соответствующий $\lambda=i\gamma$. Норма этого решения: $\|x(t)\|=\|ei\gamma th\|=|ei\gamma t|\|h\|=\|h\|$, так как $|ei\gamma t|=1$. Эта норма не стремится к нулю при $t\to+\infty$, что противоречит асимптотической устойчивости, поскольку $\|x(t)\|=\|h\|\neq0$.

Следовательно, не может быть собственных значений с $\mathrm{Re}\,\lambda=0$, и все собственные значения должны удовлетворять: $\mathrm{Re}\,\lambda<0$.

Достаточность: Предположим, что $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ для всех $\lambda\in\sigma(A)$. Тогда решения системы $x'=Ax$ имеют вид: $x(t)=e^{\lambda t}p(t)$, где $p(t)$ — векторный многочлен, а λ— собственное значение матрицы A.

Поскольку $\mathrm{Re}\,\lambda<0$, найдётся $\xi>0$, такое что $\mathrm{Re}\,\lambda+\xi<0$. Норма реш-оценивается: $\|x(t)\|=\|e^{\lambda t}p(t)\|=|e^{\lambda t}|\|p(t)\|=e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}\|p(t)\|$.

Так как $\mathrm{Re}\,\lambda<0$, то $e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}\to0$ при $t\to+\infty$. Поскольку $p(t)$-многочлен, его норма растёт не быстрее, чем полиномиально, и экспоненци-ое убывание $e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}$ доминирует. Таким образом: $\|x(t)\|\to0$ при $t\to+\infty$.

Это означает, что все реше-я системы стремятся к нулю, и нулевое решение асимптотически устойчиво.**Замечание**

- Если хотя бы одно собственное значение имеет $\mathrm{Re}\,\lambda\geq0$, асимптотическая устойчивость нарушается.
- Для практической проверки собственных значений с $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ можно использовать критерий Рауса-Гурвица, применяемый к характеристическому многочлену $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$.

Ответ: Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы $x'=Ax$ — это $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ для всех собственных значений λ матрицы A.

10. Определите тип особой точки и изобразите схематично фазовый портрет:

1.Опрелеление общего решения дифференциального уравн-ия.
Функ-я $\varphi(x, c_1, c_2,\dots, c_n)$, зависящая от произвольных постоянных $c_1, c_2,\dots, c_n$, называется общим решением ур-я (*), если 1) при любых $c_1, c_2,\dots, c_n$ ф-ия $\varphi(x, c_1, c_2,\dots, c_n)$ является решением ур-ия (*); 2) для любого решения $\psi(x)$ ур-ия (*) найдутся $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}, \dots, \widetilde{c_n}$, что $\psi(x)= \varphi(x, \widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}, \dots, \widetilde{c_n})$.

2. Теорема об общем интеграле уравнения в полных дифференциалах

Теорема: Если уравнение $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ (1)явл-ся урав-ем в полных диф-х, то его общий интеграл имеет вид F(t, x) = c(3)
Надо доказать два пункта:
1) любое решение $\varphi(t)$ уравнения (1) $F(t,\varphi(t)) \equiv c$;
2) если для некот-й функ. $\varphi(t)$ выпо-тся $F(t,\varphi(t)) \equiv c$, то $\varphi(t)$

Док-во.
1) Пусть $\varphi(t)$ — произвольное решение ур-я (1), тогда оно удовлт ур-ю:M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0 т.е. M(t, $\varphi(t)$) + N(t, $\varphi(t)$) $\varphi'^{(t)}$ = 0 (4)
Найдем $\frac{d}{dt}F(t,\varphi(t)) = \frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial \varphi}\varphi'^{(t)} == M(t,\varphi(t)) + N(t,\varphi(t))\varphi'^{(t)} = 0$, *(Использовали (2), (4))*
Значит $F(t,\varphi(t)) = const$
Пусть для какой-либо диф-мой функции $\varphi(t)$ и const c выполнено на нек-м прмежутке переменной t $F(t,\varphi(t)) \equiv c$, покажем, что тогда $\varphi(t)$ — частное решение ур-я (1).
Продиф-м равенство $F(t,\varphi(t)) \equiv c$ по t
$\frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial \varphi}\varphi'^{(t)} \equiv 0$ воспользуемся (2)
$M(t,\varphi(t)) + N(t,\varphi(t))\varphi'^{(t)} \equiv 0$ т.е.
$M(t,\varphi(t))dt + N(t,\varphi(t))d\varphi = 0$ значит $\varphi(t)$ — реш. ур-я (1) чтд.

3. Определите тип дифферениального уравнения:

4.Определение дифференциального уравнения n-го порядка.
формулируется следующим образом:
Дифференциальное уравнение n n n-го порядка — это уравнение вида:

F(x,y,y′,y′′,…,y(n))=0, где:

a) x — независимая переменная, b) y=y(x)— искомая функция,
c) y′,y′′,…,y(n) — прои-ые фу. y по x до n-го порядка включ-ино,
d) F — заданная функция, зависящая от x,y,y′,…,y(n).

Примечание:
1. Порядок уравнения определяется наивысшим порядком производной, входящей в уравнение.
2.Уравнение может быть явным (например, y(n)=f(x,y,y′,…,y(n−1)) или неявным (как в общем виде выше).

5. Теорема об однозначном определении коэффициентов ли-ого диффер-ного ур-ия n-го порядка с переме-ми коэф-ми ег Фер.
Теорема 3. Если уравнения
$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ (3) и
$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = 0$, (3)
где a_i и b_i, i = 1, 2, …, n непрерывные функ. на интервале $r_1 \le x \le r_2$, имеют одну и ту же фундаментальную систему решений, то эти два уравнен. совпадают, т. е. $a_i(x) = b_i(x)$, i = 1, 2, …, n на $r_1 \le x \le r_2$

Док-во. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ — это фундаме-ая система решений уравнения (3) и (4).
Вычитая из (3) почленно (4), получаем новое уравнение:
$(a_1(x) - b_1(x))y^{(n-1)} + \dots + (a_{n-1}(x) - b_{n-1}(x))y' + (a_n(x) - b_n(x))y = 0$, (5)
решениями которого являются функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, удовлетворяющие одновр. уравнениям (3) и (4).
Уравнение (5) (n-1)-го порядка имеет n штук линейно независимых решений. Это противоречие. Такое возможно лишь в случае, когда все коэффициенты уравнения (5) равны нулю, т. е. $a_i(x)$ и $b_i(x)$, i = 1, 2, , n ЧТД.

6. Определить вид частного решения для уравнения:

7. Определение фундаментальной системы решений системы: x'=A(t)x
Фундаме-ая система решений системы дифференциальных уравнений вида: x′=A(t)x ,где x(t)∈Rⁿ— вектор-функция, A(t)-матрица n×n, непрерывная на интервале (r1,r2), определяется следующим образом:**Фундаментальная система решений** — это набор из n линейно независимых вектор-функций φ1(t),φ2(t),…,φn(t), каждая из которых является решением системы x′=A(t)x, то есть: φi′(t)=A(t)φi(t), i=1,2,…,n,
и которые удовлетворяют условию линейной независимости на интервале (r1,r2). Линейная независимость означает, что не суще-ет набора констант c1,c2,…,cn, не все равных нулю, таких что: c1φ1(t)+c2φ2(t)+⋯+cnφn(t)=0 для всех t∈(r1,r2).
Примечание: a)Фундамента-ая система решений позволяет представить общее решение системы в виде:
x(t)=c1φ1(t)+c2φ2(t)+⋯+cnφn(t), где c1,c2,…,cn произвольные константы.
b) Линейная независимость φ1(t),…,φn(t) эквивалентна тому, что определитель матрицы, составленной из этих вектор-функций как столбцов (аналог Вронскиана для систем), не равен нулю на (r1,r2).

8. Теорема о выражении общего решения системы x' = A(t)x через его фср
Теорема: Пусть ϕ1(t),ϕ2(t),…,ϕn(t) – фундамент-ная система решений системы: x′=A(t)x, где $x(t) \in R^n$, A(t) - матрица n×n, непрерывная на интервале (r1,r2), а ϕ1(t),…,ϕn(t) - линейно независимые решения, удовлетворяющие $\phi_i'(t)=A(t)\phi_i(t)$.
Тогда **общее решение** системы имеет вид:
x(t)=c1ϕ1(t)+c2ϕ2(t)+⋯+cnϕn(t), где c1,c2,…,cn - произвольные конс-ты. **Доказательство:**
1.Достаточность: Проверим, что $x(t)=c_1\phi_1(t)+\dots+c_n\phi_n(t)$ является решением системы.
a)Подставим x(t) в уравнение x′=A(t)x:
$x'(t)=d/dt(c_1\phi_1(t)+\dots+c_n\phi_n(t))=c_1\phi_1'(t)+\dots+c_n\phi_n'(t)$.
b) Так как ϕi′(t)=A(t)ϕi(t) то:
$x'(t)=c_1A(t)\phi_1(t)+\dots+c_nA(t)\phi_n(t)=A(t)(c_1\phi_1(t)+\dots+c_n\phi_n(t))=A(t)x(t)$.
c)Таким образом, x(t) удовлетворяет системе x′=A(t)x.
2.Необходимость: Покажем, что любое решение системы можно представить в виде $x(t)=c_1\phi_1(t)+\dots+c_n\phi_n(t)$.
a)Пусть ψ(t) — произвольное решение системы, то есть ψ′(t)=A(t)ψ(t).
b)Так как $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$— фундаментальная система, они линейно независимы, и их Вронскиан (определитель матрицы, составленной из $\varphi_i(t)$ как столбцов) W(t)≠0.
c)Рассмотрим фундамента-ую матрицу Φ(t)=[φ1(t),…,φn(t)], где

столбцы — это $\varphi_i(t)$.Тогда $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$, и $\det\Phi(t)=W(t)\neq 0$, так что $\Phi(t)$обратима.
d)Любое решение ψ(t) \psi(t) ψ(t) можно выразить через фунда-ую матрицу. Для некоторого $t_0\in(r1,r2)$ зададим начальное условие $\psi(t0)=\psi 0$. Тогда:
1)$\psi(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\psi_0$.
E) Пусть $\Phi^{-1}(t_0)\psi_0=c=(c1,c2,\dots,cn)^T$. Тогда:
$\psi(t)=\Phi(t)c=c_1\varphi_1(t)+\dots+c_n\varphi_n(t)$.
F) Таким образом, ψ(t) выражается как линейная комбинация $\varphi 1(t),\dots,\varphi n(t)$ с некоторыми константами $c1,\dots,cn$.
3)**Полнота**: Поскольку фундаментальная система содержит n линейно независимых решений, а размерность пространства решений системы $x'=A(t)x$ равна n (по теореме о существовании и единственности, раздел 30), то любая линейная комбинация $c1\varphi 1(t)+\dots+cn\varphi n(t)$ охватывает все возможные решения.

9.Необходимое и достаточное условие устойчивости нулевого решения системы x'=A(t)x

необходимое и достаточное условие устойчивости нулевого реше. системы $x'=A(t)x$, где A(t) - матрица n×n с непреры-ми элементами на интервале $(r1,+\infty)$, формулируется следующим образом:
Теорема: Нулевое решение системы: $x'=A(t)x$
устойчиво тогда и только тогда, когда все решения этой системы **равномерно ограничены** на интервале $[t0,+\infty)$, то есть для любого реш-я x(t) существует константа M>0, зависящая от x(t), такая что: $\|x(t)\|\le M \forall t\ge t0$, где $t0\in(r1,+\infty)$, и ограниченность равномерна относительно начальных условий.
Пояснение: а) Устойчивость по Ляпунову: Нулевое реш. Уст-во, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое что из $\|x(t0)\|<\delta$ следует $\|x(t)\|<\varepsilon$ для всех $t\ge t_0$.
b)Условие равномерной ограниченности всех реш-й эквивалентно устойчивости, так как в линейной системе с переменными коэф-ми ограниченность реш-й гарантирует, что малые нача-ые возмуще-ия не приводят к значительным отклонениям.
c)Если хотя бы одно решение неограниченно (напр., $\|x(t)\|\to\infty$), то нулевое решение неустойчиво, так как можно выбрать начальные условия, приводящие к сколь угодно большим значениям $\|x(t)\|$.
Особый случай: постоянные коэффициенты
Для системы $x'=Ax$, где A — постоянная матрица, устойчивость нулевого решения определяется проще:
a)Необходимое и достаточное условие устойч-ти: все собственные значения λ матрицы A удовлетворяют Re $\lambda\le 0$, и для собственных значений с Re $\lambda=0$ (если они есть) соответствующие жордановы клетки имеют размер 1 (то есть кратность равна 1). Однако для общего случая с A(t) A(t) A(t) (переменные коэффициенты) теорема опирается на равномерную ограниченность решений.
Ответ: Необходимое и достаточное условие устойчив-ти нулевого решения системы $x'=A(t)x$ - равномерная ограниченность всех её решений на $[t0,+\infty)$.

10. Определите тип особой точки и изобразите схематично фазовый портрет:

.

1. Какое уравнение наз-ся уравн-ем в полных дифференциалах.
уравнение в полных дифференциалах определяется следующим образом: Уравнение вида: M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 ,где M(x,y) и N(x,y) непрерывные фун в некоторой области, назы-ся **уравнением в полных диффере-ах**, если оно является полным дифференциалом некоторой функции F(x,y), то есть: M(x,y)dx+N(x,y)dy=dF(x,y).
Это означает, что существуют непрерывно дифференци-ая функция F(x,y), такая что: M(x,y)=∂F/∂x,N(x,y)=∂F/∂y.
Критерий: Уравнение M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие:∂M/∂y=∂N/∂x,при условии, что частные производные ∂M/∂y и ∂N/∂x непрерывны в области определения.**Примечание**: Если уравнение является полным дифференциалом, его общий интеграл имеет вид F(x,y)=c, где c— произвольная постоянная.

2. Свойства функции Грина.
1.При фиксированном $s \neq t$ $G(x, s)$ является решением уравнения $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$
2.G(x, s) удовлетворяет условиям $y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$, т. е. $G(x_0, s) = 0, G(x_1, s) = 0$
3.G(x, s) непрерывная функция при $x_0 \leq x, s \leq x_1$
4. $G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{a_0(s)}$, производная G'_x — разрывная ф-я в точке x=s (разрыв 2 рода)
Док-во. 2) Покажем, что $G(x_0, s) = 0, G(x_1, s) = 0$
$$G(x_0, s) = \frac{\varphi_2(s)\varphi_1(x_0)}{a_0(s)W(s)} = 0, \quad G(x_1, s) = \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x_1)}{a_0(s)W(s)} = 0$$
4) Покажем, что $G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{a_0(s)}$
$$G'_x(s+0,s) = \frac{\varphi_1(s)\varphi'_2(s)}{a_0(s)W(s)} \ (t = s+0, t > s)$$
$$G'_x(s-0,s) = \frac{\varphi_2(s)\varphi'_1(s)}{a_0(s)W(s)} \ (t = s-0, t < s)$$
$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{\varphi_1(s)\varphi'_2(s) - \varphi_2(s)\varphi'_1(s)}{a_0(s)W(s)}$$
$$= \frac{W(s)}{a_0(s)W(s)} = \frac{1}{a_0(s)}$$

3. Определите тип дифференциального уравнения:

4. Постановка краевой задачи для лин-ого диффере-ного уравнения 2-го порядка.
постановка краевой задачи для ли-ого диффе-ого уравнения 2-го порядка формулируется следующим образом: Для ли-ого дифф-ого уравнения 2-го порядка вида: y′′+p(x)y′+q(x)y=f(x) , где p(x),q(x), и f(x)-непре-ые фун. на отрезке [a,b], краевая задача заключается в нахождении решения y(x), удовлетворяющего ур-ию на интервале (a,b) и заданным краевым условиям на концах отрезка [a,b].
Краевые условия обычно задаются в виде:
α1y(a)+α2y′(a)=A,β1y(b)+β2y′(b)=B, где:
а) α1,α2,β1,β2 - заданные константы, такие что $\alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2 \neq 0$ (чтобы условия были нетривиальными), A,B — заданные числа.
Примеры краевых условий
1. **Условия Дирихле**: y(a)=A, y(b)=B (т.е. α2=β2=0).
2. **Условия Неймана**: y′(a)=A, y′(b)=B (т.е. α1=β1=0).
3. **Смешанные условия**: Например, y(a)=A, y′(b)=B (т.е.).

Замечания
1)Реш. краевой задачи не всегда сущес-ет или единственно. Условия существования и единс-сти зависят от коэффици-ов p(x), q(x), функции f(x) и типа краевых условий.
b)Для анализа краевых задач часто используется фу-ия Грина, которая позволяет выразить реш. в интегральной форме.
Ответ: Краевая задача для линейного диффе-ого уравнения 2-го порядка y′′+p(x)y′+q(x)y=f(x) состоит в нахождении решения y(x) на [a,b], удовлетворяющего краевым условиям α_1y(a)+α2y′(a)=A, β1y(b)+β2y′(b)=B.

5.Чему равен определитель Вронского, построенный по линейно зависимой и линейно независимой системе реш?

Говорят, что система (набор) функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ $\varphi_j: (r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ является *линейно зависимой* на интервале (r_1, r_2), если ∃ конст-ы $C_1, C_2, \ldots, C_k$ такие, что1. $|C_1| + |C_2| + \cdots + |C_k| \neq 0$
2)$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_k\varphi_k(x) = 0 \ \ \forall x \in (r_1, r_2)$.
Определение **2.** Система (набор) функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ является *линейно независимой* на интервале (r_1, r_2), если из $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_k\varphi_k(x) = 0$ на этом интервале следует тривиальность набора констант: т.е. все $C_i = 0$.
Определитель вида
$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi'_1(x) & \varphi'_2(x) & \ldots & \varphi'_k(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \ldots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix} \quad \textbf{(3)}$$
называется *определителем Вронского*, построенным по системе функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$.
Теорема 2 (св-во 1). Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ ЛЗ на интервале (r_1, r_2), то определитель Вронского $W(x) \equiv 0$.
Док-во. Пусть функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ ЛЗ, тогда в силу определения 1 ∃ константы $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ($|C_1| + |C_2| + \cdots + |C_k| \neq 0$) такие, что $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_k\varphi_k(x) = 0$
Дифференцируем равенство по переменной x получаем, что $C_1\varphi'_1(x) + C_2\varphi'_2(x) + \cdots + C_k\varphi'_k(x) = 0$
Ещё раз дифференцируем последнее равенство $C_1\varphi''_1(x) + C_2\varphi''_2(x) + \cdots + C_k\varphi''_k(x) = 0$
Этот процесс продолжаем до тех пор, пока в равенстве не появится производные порядка $k-1$
$$C_1\varphi_1^{(k-1)}(x) + C_2\varphi_2^{(k-1)}(x) + \cdots + C_k\varphi_k^{(k-1)}(x) = 0$$
В итоге получили систему
$$\begin{cases} C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_k\varphi_k(x) = 0 \\ C_1\varphi'_1(x) + C_2\varphi'_2(x) + \cdots + C_k\varphi'_k(x) = 0 \\ \ldots \\ C_1\varphi_1^{(k-1)}(x) + C_2\varphi_2^{(k-1)}(x) + \cdots + C_k\varphi_k^{(k-1)}(x) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(4)}$$
При каждом фиксированном x полученная система (4) является линейной однородной системой относительно постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Данная система имеет нетривиальное решение (не все $C_i = 0$) по предположению теоремы. Тогда определитель системы (4), который является определителем Вронского (3), должен быть равен нулю в каждой точке $x \in (r_1, r_2)$ $\quad W(x) \equiv 0$.
Теорема 3 (св-во 2). Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — ЛН система решения уравнения $L(p)y = 0$, то опр. Вронского нигде не обращается в нуль $W(x) \neq 0$, при $\forall\, x \in (r_1, r_2)$.
Док-во. Мы хотим показать, что опр. Вронского $W(x)$ нигде не обращается в нуль. Предположим противное, что на интервале (r_1, r_2) ∃ точка x_0 такая, что $W(x) = 0$.
Рассмотрим систему уравнений
$$\begin{cases} C_1\varphi_1(x_0) + C_2\varphi_2(x_0) + \cdots + C_n\varphi_n(x_0) = 0 \\ C_1\varphi'_1(x_0) + C_2\varphi'_2(x_0) + \cdots + C_n\varphi'_n(x_0) = 0 \\ \ldots \\ C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + C_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(5)}$$

Система (5) является линейной однородной системой относительно постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$. Т.к. определитель этой системы, являющийся опр. Вронского $W(x_0)$, по предположению равен нулю, то система (5) имеет ненулевое решение $\widetilde{C_1}, \widetilde{C_2}, \dots, \widetilde{C_n}$.
Рассмотрим функцию $\psi(x) = \widetilde{C_1}\varphi_1(x) + \widetilde{C_2}\varphi_2(x) + \dots + \widetilde{C_n}\varphi_n(x)$. **(6)**
Поскольку ЛК решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ уравнения $L(p)y = 0$ также является решением этого уравнения, то функция (6) — решение ЛОДУ $L(p)y = 0$. Кроме того система (5) эквивалентна начальным условиям $\psi(x_0) = 0, \psi'(x_0) = 0, \dots, \psi^{(n-1)}(x_0) = 0$
Но тогда в силу теоремы 1 функция $\psi(x) \equiv 0$. А это означает ЛЗ системы функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, что противоречит условию теоремы. А значит определитель Вронского $W(x)$ нигде не обращается в нуль $W(x) \neq 0$, при $\forall\, x \in (r_1, r_2)$.

6. Определить вид частного решения для уравнения: x'''+x=t

7. Перейти от уравнения n-го порядка к системе уравнений 1 порядка.

рассматриваются системы дифференциальных уравнений. Этот метод применим к уравнениям вида:
$y(n)+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(t)y'+a_n(t)y=f(t)$, где $a_i(t)$ - непрерывные функции, f(t) - заданная фун-ия, а y(t) — искомая функция.

Шаг 1: Общая постановка

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка:
$y(n)=-a_1(t)y^{(n-1)}-a_2(t)y^{(n-2)}-\dots-a_{n-1}(t)y'-an(t)y+f(t)$.
Чтобы свести это уравнение к системе первого порядка, введем новые переменные, представляющие производные функции y до порядка n-1: $x_1=y$, $x_2=y'$, $x_3=y''$,…, $x_n=y^{(n-1)}$. Тогда производные этих переменных выражаются следующим образом:

$x_1'=y'=x_2$, $x_2'=y''=x_3$, ….. $x_{n-1}'=y^{(n-1)}=x_n$;
$x_n'=y^{(n)}=-a1(t)y^{(n-1)}-a_2(t)y^{(n-2)}-\dots-a_{n-1}(t)y'-a_n(t)y+f(t)$.

Подставляя $y=x_1$, $y'=x_2$, …, $y^{(n-1)}=x_n$, получаем:
$x_n'=-a_1(t)x_n-a_2(t)x_{n-1}-\dots-a_{n-1}(t)x_2-an(t)x_1+f(t)$.

Шаг 2: Система уравнений

Таким образом, уравнение n n n-го порядка преобразуется в систему n n n дифференциальных уравнений первого порядка:

Шаг 3: Матричная форма
Систему можно записать в матричной форме $x'=A(t)x+f(t)$, где:

8. Доказать, что e^(λt) является решением системы x = Ax тогда и только тогда, когда Ah = λh.

9.Опред-ие устойчивого реш. по Ляпунову и его геометрическая трактовка.

Определение устойчивого решения по Ляпунову:
Решение ξ(t) системы дифференциальных уравнений $x'=f(t,x)$, где $x\in R^n$ f(t,x) — непрерывная функция, определённая на $[t0,+\infty)\times R^n$, называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого ε>0 существует δ(ε)>0, такое что для любого другого решения x(t), удовлетворяющего начальному условию: $\|x(t0)-\xi(t0)\|<\delta$, выполняется:
$\|x(t)-\xi(t)\|<\varepsilon \quad \forall t\geq t0$. **Дополнительно**:
a)Решение ξ(t) называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $\delta_0>0$, такое что для любого решения x(t) с $\|x(t0)-\xi(t0)\|<\delta 0$ выполняется:
$\lim_{t\to+\infty}\|x(t)-\xi(t)\|=0$.
b)Если указанные условия не выполняются, решение ξ(t) называется **неустойчивым**.

Геометрическая трактовка устойчивости по Ляпунову

На фазовом портрете:
1)Устойчивая точка — если траектории, начатые близко к особой точке, остаются в её окрестности.
2)Асимптотически устойчивая — если траектории спиралевидно или напрямую стремятся к особой точке.
3)Неустойчивая — если траектории уходят от особой точки даже при сколь угодно малом отклонении начальных условий.

Узел (все λ < 0)	Все траектории стремятся к нулю	Асимптотически устойчива
Фокус (Re(λ) < 0)	Спирали к центру	Асимптотически устойчива
Центр (λ чисто мнимые)	Замкнутые орбиты	Устойчива (не асимптотич.)
Седло (λ разного знака)	Траектории расходятся	Неустойчива

10. Определите тип особой точки и изобразите схематично фазовый портрет:

1. Формулировка задачи Коши для уравнения 1-го порядка

Для дифференциального уравнения первого порядка вида y′=f(x,y), задача Коши заключается в нахождении решения y=ϕ(x) удовлетворяющего начальному условию: $y(x_0)=y_0$,
где (x_0,y_0) — заданная точка в области определения фун-ии f(x,y).
Уточнение: Согласно теореме существования и единственности, если функция f(x,y) непрерывна в области G, содержащей точку (x_0,y_0), и имеет непрерывную частную производную ∂f/∂y, то задача Коши имеет единственное решение в некоторой окрестности точки x_0.

2. **Уравнения с разделяющимися переменными.**

1) *y'= f(x), f(x)* – известная функция
y(x) = $\int f(x)dx + c$ – общее решение уравнения
2) y'= g(y), : g(y) ≠0 , $\frac{y'}{g(y)} = 1$
$\int \frac{y'}{g(y)} dx = \int dx;$ $y' = \frac{dy}{dx} => \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx;$ $G(y) = x + c$ – общий интеграл *y = G*$^{-1}$*(x+c)* – общее решение *y'= g(y) (*)*
Теорема. Пусть функция *g(y)* дифференцируема и ее производная ограничена, т.е. |*g'(y)*|≤ *M* для ∀ *y*, тогда общее решение *y'= g(y)* — *объед.* формулы (*) и набора констант y, которые функцию *g(y)* обращают в 0. *1)* *y′= f(x)g(y), : g(y) ≠0;* $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$
$\int \frac{y'}{g(y)} dx = \int f(x)dx;$ $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx;$ *G(y) = F(x) + c*
y = G^{-1}*(F(x) + c) – общее решение уравнения y'= f(x)g(y) (**)*
Определение. Ур-м с разделяющимися переменными называется ур-е вида *y'= f(x)g(y)*. **Теорема.** Пусть функция *g(y)* дифференцируема и ее производная ограничена, т.е. |*g'(y)*|≤ *M* для любых *y,* а *f(x)* – непрерывна. Тогда общее решение ур-ия *y'= f(x)g(y)* есть объединение формулы *(**)* и набора решений констант уравнения *g(y)=0*.

3. Определикте тип дифференциального уравнения:

4. Что можно сказать о решении уравн-я …..удовлетворяющего начальным условиям …. Ответ обосновать.
Рассмотрим дифференциальное уравнение:
$$z^n + a_1(t)z^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)z + a_n(t)z = 0$$
и начальные условия в точке t_0:
$$\varphi(t_0) = 0, \varphi(t_0) = 0, \dots . \varphi^{n-1}(t_0) = 0?$$
Система:a) Линейное **однородное** дифференциальное уравнение **n-го порядка**.
b)Начальные условия говорят, что функция и все её производные до порядка n−1 включительно равны нулю в точке t_0
Теорема единственности для ОДУ
Согласно **теореме существов-ия и един-сти** реш-ий ли-ых ОДУ: Для лине-го однородного ур-ия с непрерывными коэффиц-ми, если заданы начальные условия на функцию и её производные до порядка n−1, то существует **единственное решение**.
В нашем случае: a)Начальные данные — все нули.
b)Следовательно, **нулевая функция** φ(t)≡0— решение.
Но по теореме: **решение единственно**, значит:
φ(t)≡0 для всех t

5. Продолжите свойство многочлена символа p L(p) $e^{\lambda x}$

Лоду n-го порядка с постоя-ми коэффи-ами называется уравнение вида $a_0y^n + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 (1)$
где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – постоянные заданные числа. Причем $a_0 \neq 0$.
Введем символическое обозначение: $\frac{dy}{dx} =: py$ где p – символ диффере-ания по x.Тогда $\frac{d^2y}{dx} =: p^2y, \frac{d^3y}{dx} =: p^3y, \dots, \frac{d^ny}{dx} =: p^ny$
Перепишем левую часть уравнения (1): $a_0y^n + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = a_0p^ny + a_1p^{(n-1)}y + \dots + a_{n-1}py + a_ny = (a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n)y$
Пусть $L(p) = a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n$ это многочлен символа p или оператор дифференцирования. С учетом введенного обозначения уравнение (1) будет иметь вид: $L(p)y = 0$ (2)

Свойства многочлена символа p.

Если есть два многочлена символа p $L(p)$ и $N(p)$
1. $L(p)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(p)y_1 + \beta L(p)y_2$
2. $\big(L(p) + M(p)\big)y = L(p)y + M(p)y$
3. $L(p)\big(M(p)y\big) = \big(L(p)M(p)\big)y$
4. $L(p)e^{\lambda x} = L(\gamma)e^{\lambda x}$

Доказательство.

1. $L(p)(\alpha y_1 + \beta y_2) = a_0p^n(\alpha y_1 + \beta y_2) + a_1p^{(n-1)}(\alpha y_1 + \beta y_2) + \dots + a_{n-1}p(\alpha y_1 + \beta y_2) + a_n(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\big(a_0p^ny_1 + a_1p^{(n-1)}y_1 + \dots + a_{n-1}py_1 + a_ny_1\big) + \beta\big(a_0p^ny_2 + a_1p^{(n-1)}y_2 + \dots + a_{n-1}py_2 + a_ny_2\big) = \alpha L(p)y_1 + \beta L(p)y_2$
2. $\big(L(p) + M(p)\big)y = (a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n + b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n)y = a_0p^ny + a_1p^{(n-1)}y + \dots + a_{n-1}py + a_ny + b_0p^ny + b_1p^{(n-1)}y + \dots + b_{n-1}py + b_ny = L(p)y + M(p)y$
3. $L(p)(M(p)y) = a_0p^n\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y + a_1p^{(n-1)}\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y + \dots + a_{n-1}p\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y + a_n\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y = \big(a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n\big)\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y = \big(L(p)M(p)\big)y$
4. $pe^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$, $p^2e^{\lambda x} = \lambda^2e^{\lambda x}$ … $p^ne^{\lambda x} = \lambda^ne^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} L(p)e^{\lambda x} &= \big(a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n\big)e^{\lambda x} \\ &= \big(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n\big)e^{\lambda x} \\ &= L(\gamma)e^{\lambda x} \end{aligned}$$

6.

7. Определение фундаментальной матрицы.

Фундаментальная матрица системы x′=A(t)x, где x(t)∈Rn, а A(t) — матрица n×n с непрерывными элементами на интервале (r1,r2) — это матрица Φ(t) размера n×n столбцы которой образуют фундамент-ую систему решений системы x′=A(t)x. То есть:
1)Φ(t)=[φ1(t),φ2(t),…,φn(t)], где φ1(t),φ2(t),…,φn(t) —n линейно независимых решений системы x′=A(t)x, удовлетворяющих: φi′(t)=A(t)φi(t),i=1,2,…,n. Фундаментальная матрица удовлетворяет матричной дифференциальной уравнению:
Φ′(t)=A(t)Φ(t).
2)Определитель матрицы Φ(t), называемый **Вронскианом** системы, W(t)=detΦ(t), не равен нулю на интервале (r1,r2), что гарантирует линейную независимость столбцов φi(t).

8. Верно ли утверждение: «Если векто-ые фу. Линейно зависимы в точке го, то линейно зависимы вектора при всех значениях 2». Ответ обосновать.

Это утверждение **неверно**.

Линейная **зависимость в одной точке** означает, что векторы $\varphi 1(t0),\ldots,\varphi n(t0)\in R^m$ (значения функций в этой точке) линейно зависимы как набор векторов**.**

-- Это — алгебраическая зависимость значений векторов в точке, а не функций на всём интервале.

9. Необходимое и достаточное условие устойчивости решения системы: x'=A(t)x+b(t)

Для анализа устойчивости решения системы дифферен-ных уравнений: $x'=A(t)x+b(t)$, где $x(t)\in R^n$ $A(t)$ — матрица $n\times n$ с непреры-ми элементами на интервале $[t0,+\infty)$, $b(t)\in R^n$— непрерывная вектор-функция, рассмотрим устойчивость по Ляпунову какого-либо решения $\xi(t)$. Обычно в контексте таких задач подразумевается устойчивость либо нулевого решения (если оно существует), либо частного реш-я. Поскольку система неоднородная, сначала уточним, о каком решении идёт речь, опираясь на разделы **36** и **37** документа. **Шаг 1: Уточнение задачи**

Система $x'=A(t)x+b(t)$— линейная неоднородная. Нулевое решение $x(t)=0$ возможно только если $b(t)=0$, что превращает систему в однородную $x'=A(t)x$. Для неоднородной системы нулевое решение, как правило, не является решением, поэтому предположим, что речь идёт о **устойчивости частного решения** $\xi(t)$, удовлетворяющего системе:$\xi'(t)=A(t)\xi(t)+b(t)$.

Устойчивость решения $\xi(t)$ по Ляпунову означает, что для любого $\varepsilon>0$ Существ-т $\delta(\varepsilon)>0$, такое что для любого другого решения $x(t)$ с начальным условием $\|x(t0)-\xi(t0)\|<\delta$ выполняется:$\|x(t)-\xi(t)\|<\varepsilon\ \forall\ t\geq t0$.

Шаг 2: Преобразование системы

Чтобы изучить устойчивость решения $\xi(t)$ сделаем замену переменных $z(t)=x(t)-\xi(t)$

Тогда:$z'(t)=x'(t)-\xi'(t)=[A(t)x(t)+b(t)]-[A(t)\xi(t)+b(t)]=A(t)[x(t)-\xi(t)]=A(t)z(t)$.

Таким образом, устойчивость решения $x(t)=\xi(t)$ системы $x'=A(t)x+b(t)$ эквивалентна устойч-ти **нулевого решения** $z(t)=0$ однородной системы: $z'=A(t)z$.

Шаг 3: Необходимое и достаточное условие устойчивости

Согласно теореме из раздела **37** для однородной системы $z'=A(t)z$ нулевое решение устойчиво тогда и только тогда, когда **все решения системы равномерно ограничены** на интервале $[t0,+\infty)$. Это означает, что для любого решения $z(t)$ существует константа $M>0$, зависящая от $z(t)$, такая что: $\|z(t)\|\leq M\ \forall t\geq t0$.

Поскольку $z(t)=x(t)-\xi(t)$, ограниченность $z(t)$ эквивалентна тому, что Траектории $x(t)$, начинающиеся близко к $\xi(t0)$, остаются вблизи $\xi(t)$ для всех $t\geq t0$, что соответствует определению устойчивости по Ляпунову.

Шаг 4: Интерпретация для неоднородной системы

Для исходной системы $x'=A(t)x+b(t)$ устойчивость частного решения $\xi(t)$ определяется поведением решений соответствующей однородной системы $x'=A(t)x$. Если все реше-я однородной системы ограничены, то отклонения $x(t)-\xi(t)$ не растут неограниченно, обеспечивая устойчивость $\xi(t)$.

Ответ

Необходимое и достаточное условие устойчивости решения $\xi(t)$ системы $x'=A(t)x+b(t)$ состоит в том, что все решения соответствующей однородной системы $z'=A(t)z$ **равномерно ограничены** на $[t0,+\infty)$, то есть для любого решения $z(t)$ существует $M>0$, такое что $\|z(t)\|\leq M$ для всех $t\geq t0$. Для случая постоянной матрицы A, это эквивалентно тому, что все собственные значения λ матрицы A имеют $\mathrm{Re}\ \lambda\leq 0$, и для $\mathrm{Re}\ \lambda=0$ жордановы клетки тривиальны.

10. Определите тип особой точки и изобразите схематично фазовый портрет:

1.Сформулируйте теорему существования и единственности для Уравнения 1-го порядка.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши)
Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка: $y'=f(x,y)$,
с начальным условием: $y(x0)=y0$, где $f(x,y)$— функция, определённая в некоторой области $D\subset R^2$, содержащей точку $(x0,y0)$

Утверждение: Если функция $f(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям в области D :1)f(x,y) **непрерывна**,2) f(x,y) удовлетворяет **условию Липшица по у** , то есть существует константа $L>0$, такая что:
$|f(x,y1)-f(x,y2)|\le L|y1-y2|\ \forall(x,y1),\ (x,y2)\in D$
то существует **единственное решение** $y=\varphi(x)$ уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x0)=y0$, определённое на некотором интервале $(x0-h,x0+h)$, где $h>0$.

2. Теорема об общем интеграле уравнения в полных дифференциалах

Теорема: Если уравнение $M(t,x)dt+N(t,x)dx=0$ (1)явл-ся урав-ем в полных диф-х, то его общий интеграл имеет вид F(t, x) = c(3)
Надо доказать два пункта:

1) любое решение $\varphi(t)$ уравнения (1) $F(t,\varphi(t))\equiv c$;
2) если для некот-й функ. $\varphi(t)$ выпо-тся $F(t,\varphi(t))\equiv c$, то $\varphi(t)$

Док-во.
1) Пусть $\varphi(t)$ — произвольное решение ур-я (1), тогда оно удовлт ур-ю:M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0 т.е. $M(t,\varphi(t))+N(t,\varphi(t))\varphi'^{(t)}=0$ (4)

Найдем $\frac{d}{dt}F(t,\varphi(t))=\frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial t}+\frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial\varphi}\varphi'^{(t)}==M(t,\varphi(t))+N(t,\varphi(t))\varphi'^{(t)}=0$, *(Использовали (2), (4))*

Значит $F(t,\varphi(t))=const$

Пусть для какой-либо диф-мой функции $\varphi(t)$ и const c выполнено на нек-м прмежутке переменной t $F(t,\varphi(t))\equiv c$, покажем, что тогда $\varphi(t)$ — частное решение ур-я (1).
Продиф-м равенство $F(t,\varphi(t))\equiv c$ по t

$\frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial t}+\frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial\varphi}\varphi'^{(t)}\equiv 0$ воспользуемся (2)

$M(t,\varphi(t))+N(t,\varphi(t))\varphi'^{(t)}\equiv 0$ т.е.

$M(t,\varphi(t))dt+N(t,\varphi(t))d\varphi=0$ значит $\varphi(t)$ — реш. ур-я (1) чтд.

3. Определите тип дифференциального уравнения:

4. Определение квазимногочлена.

Квазимногочлен — это функция вида: $f(t)=e^{\lambda t}P(t)$, где:
1)$\lambda\in C$ — комплексное число (вещественное или комплексное),
2) P(t) — многочлен степени m с комплексными коэффициентами, то есть: $P(t)=a_mt^m+a_{m-1}t^{m-1}+\dots+a_1t+a_0, a_i\in C$.
Квазимногочлен — это функция вида $f(t)=e^{\lambda t}P(t)$, где $\lambda\in C$. aP(t)-многочлен степени m m m с комплексными коэффициентами.

5. Формула Остроградского-Лиувилля

Для линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка: $y(n)+a1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(t)y'+an(t)y=0$, где коэффициенты $a_i(t)$ непрерывны на интервале (r1,r2), пусть $\varphi1(t),\varphi2(t),\dots,\varphi n(t)$— фундаментальная система решений. Тогда Вронскиан W(t) этой системы, определённый как:

$$W(x)=det\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_k(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_k'(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \dots & \varphi_k^{(k-1)}(x)\end{vmatrix}$$

удовлетворяет формуле:

$W(t)=W(t0)\exp(-\int_{t0}^{t}a1(s)ds$ где $t0\in(r1,r2)$ - фиксированная точка, а $a_1(t)$ - коэффициент при $y^{(n-1)}$.

6.Определить вид частного решения для уравнения:

7.Перейти от уравнения n-го порядка к системе уравнений 1 порядка.

рассматриваются системы дифференциальных уравнений.
Этот метод применим к уравнениям вида:
$y(n)+a_1(t)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(t)y'+a_n(t)y=f(t)$, где $a_i(t)$ - непрерывные функции, f(t) - заданная фун-ия, а y(t) — искомая функция.

Шаг 1: Общая постановка

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка:
$y(n)=-a_1(t)y^{(n-1)}-a_2(t)y^{(n-2)}-\dots-a_{n-1}(t)y'-an(t)y+f(t)$.
Чтобы свести это уравнение к системе первого порядка, введем новые переменные, представляющие производные функции y до порядка n-1: $x_1=y$, $x_2=y'$, $x_3=y''$,…, $x_n=y^{(n-1)}$.
Тогда производные этих переменных выражаются следующим образом:
$x_1'=y'=x_2$, $x_2'=y''=x_3$, ….. $x_{n-1}'=y^{(n-1)}=x_n$;
,$x_n'=y^{(n)}=-a1(t)y^{(n-1)}-a_2(t)y^{(n-2)}-\dots-a_{n-1}(t)y'-a_n(t)y+f(t)$.
Подставляя $y=x_1$, $y'=x_2$, …, $y^{(n-1)}=x_n$, получаем:
$x_n'=-a_1(t)x_n-a_2(t)x_{n-1}-\dots-a_{n-1}(t)x_2-an(t)x_1+f(t)$.

Шаг 2: Система уравнений

Таким образом, уравнение n n n-го порядка преобразуется в систему n n n дифференциальных уравнений первого порядка:

Шаг 3: Матричная форма
Систему можно записать в матричной форме $x'=A(t)x+f(t)$, где:

8. Свойства системы x'=A(t)x

Имеет вид *x'=A(t)x* (1)
Свойства : a) Если коэффициенты *A(t)* непрерывны на *(r1,r2)* то по теореме ∃ и ! уравнение (1) допускает ! решение, удовлетворяющее условию $x(t_0)=x_0$, определенное на *(r1,r2)*
b) Если решение $\varphi(t)$ уравнения (1) обрщается в 0 при некотором t, т.е. $\varphi(\tau)=0$, то $\varphi(t)=0$ **Док-во:** (1) имеет нулевое решение. Тогда в момент времени τ решение $\varphi(t)$ и нулевое решение совпадают. Тогда по теореме ∃ и ! они совпадают на общем интервале определения, т.е. $\varphi(t)=0$

c) Если $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_k(t)$ – решение (1), то $\forall c_1,\ldots,c_k$ функция $\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+\ldots+c_k\varphi_k(t)$ тоже является решением (1)

Док-во: $\forall \varphi_j(t)$ справедливо $\varphi_j'(t)=A(t)\,\varphi_j(t), j\in[1,k]$.

$\psi'(t)=c_1\varphi_1'(t)+\ldots+c_1\varphi_k'(t)=c_1A(t)\varphi_1(t)+\ldots+c_kA(t)\varphi_k(t) = A(t)(c_1\varphi_1(t)+\ldots+c_k\varphi_k(t))=A(t)\psi(t)$

9. Теорема об устойчивости нулевого решения системы X = Ax.

Утверждение: Нулевое решение системы x′=Ax устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда:

a)Все собственные знач-ия λi матрицы A удовлет-яют условию Re $\lambda i \le 0$. Для всех собственных значений λi с Re $\lambda i=0$ соответств-ие жордановы клетки в жордановой форме матрицы A имеют размер 1 (то есть кратность каждого такого собственного значения равна 1 в смысле размерности жордановых блоков).

10 Определите тип особой точки и изобразите схематично фазовый портрет:

(10 var) 1. Определение скалярного дифференциального. уравнения и разрешенного относительно производной скалярного диффе-ого уравнения 1-го порядка.

Определение скалярного дифференциального уравнения

Скалярное дифференциальное уравнение — это уравнение, связывающее скалярную функцию y(x)б её производные до некоторого порядка n и независимую переменную x. В общем виде оно записывается как:F(x,y,y′,y″,…,y(n))=0, где:

a)x — независимая переменная, b)y=y(x)— искомая скалярная функция, c)y′,y″,…,y(n) — производные функции y по x до порядка n, d)F — заданная функция, определяющая связь между x,y и производными.

2. Определение разрешённого относительно производной скалярного дифференциального уравнения первого порядка

Разрешённое относительно производной скалярное дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение вида: y′=f(x,y) где: 1)y′=dy/dx - первая производная функции y(x), 2)f(x,y)- заданная функция, зависящая от x и y, определённая в некоторой области $D\subset R^2$.

7. Уравнение Бернулли

Урав. Бернулли наз. Ура. вида (1) $x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$, где a(t) и b(t) определены и непрерывны на промежутке $r_1 < t < r_2$

1. Если α = 0, то (1) — лин. неоднород.ур-е.
2. Если α = 1, то (1) — лин. однородное ур-е.
3. Если α != 0, 1, то данный случай явл-ся тривиальным, и их мы разберем подробно.

Разделим обе части ур-я (1) на x^{α} (положим, x не равен 0), получаем $\frac{x\prime}{x^{\alpha}} = a(t)x^{1-\alpha} + b(t)$ (2)

Заметим, что $\frac{x\prime}{x^{\alpha}}$ с точностью до постоянной равен производно от $x^{-\alpha+1}$. Поэтому введем новую фун-ю $y = x^{-\alpha+1}$ (3)

Замена (3) приведет ур-е (1) к лин. Урав. $y' = (1-\alpha)x^{-\alpha} * x'$

Подставим (3) в (1) $\frac{1}{1-\alpha}y' = a(t)y + b(t)$. Умножим обе части на $(1-\ \alpha)$ получаем $y' = (1-\ \alpha)a(t)y + (1-\ \alpha)b(t)$

А значит справедливо, что ур-е Бернулли интегрируемо в общем виде. Если $\alpha > 0$, то сущ-т еще одно решение x(t) ≡ 0.

3. Определите тип дифференциального уравнения:

4. Дайте определение определителя Вронского

Определитель Вронского для набора n функций φ1(t),φ2(t),…,φn(t) каждая из которых имеет производные до порядка n−1 на интервале (r1,r2) - это определитель матрицы, составленной из этих функций и их производных:

$$W(x) = det\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_k'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \ldots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, чтобы общее решение уравнения L(p)z = 0 с вещественными коэффициентами было вещественным.

Рассмотрим линейное однородное дифференци-ое уравнение n-го порядка с постоянными вещественными коэффицие-ми:

$L(p)z=z(n)+a_1z^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}z'+a_nz=0$, где a1,a2,…,an - вещественные числа, а $L(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n$ –характ-ий многочлен.

Необходимо сформулировать необходимое и достаточное условие того, чтобы общее решение этого уравнения было вещественным.

Шаг 1: Общее решение уравнения

Общее решение уравнения $L(p)z=0$ зависит от корней характеристич-ого многочлена $L(p)=0$. Поскольку коэффициенты ai вещественные, корни многочлена $L(p)$ могут быть либо вещественными, либо комплексными, причём комплексные корни появляются парами: если $\lambda=\alpha+i\beta$ —корень, то $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$ также корень, с той же кратностью.

Шаг 2: Вещественность решения

Общее решение $z(t)$ будет вещественным, если для любого выбора произвольных констант (в пределах их множества, вещественных или комплексных) функция $z(t)$ принимает вещественные значения для всех вещественных t t t. Рассмотрим, что это означает:

1)Если характеристический многочлен имеет только вещественные корни, то решение состоит из членов вида $t^j e^{\lambda t}$, которые вещественны при вещественных константах ci. Таким образом, общее решение будет вещественным.

2)Если есть комплексные корни $\lambda=\alpha+i\beta$, $\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$, то в фундаментальной системе решений появляются комплексные функции $e^{(\alpha+i\beta)t}$, $e^{(\alpha-i\beta)t}$. Однако для вещественного уравнения можно построить вещественную фундаментальную систему, комбинируя эти решения. Например, для простого корня (k=1): $e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t))$ $e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos(\beta t)+i\sin(\beta t))$

6. Определить вид частного решения для уравнения:

7. Опр-ние решения системы дифференциальных ура-ий

Определение: Решением системы дифференциальных уран-й вида $x'=A(t)x$, где $x(t)\in Rn$— вектор-функция, $A(t)$— матрица $n\times n$, непрерывная на интервале (r1,r2), называется вектор-функция $x(t)=(\varphi 1(t),\varphi 2(t),\dots,\varphi n(t))$, которая:

1.Определена хотя бы на некотором подынтервале (r1,r2).

2.Дифференцируема на этом интервале.

3.При подстановке в систему $x'=A(t)x$ обращает её в тождество, то есть: $x'(t)=A(t)x(t)$ для всех t в области опре-ия.

Для неоднородной системы $x'=A(t)x+b(t)$, где $b(t)\in Rn$— заданная вектор-функция, решение $x(t)$должно удовлетворять уравнению: $x'(t)=A(t)x(t)+b(t)$. **Замечание**: Решение может быть общим (содержащим произвольные константы) или частным (удовлетворяющим конкретным начальным условиям, например, в задаче Коши $x(t_0)=x_0$.

8. Доказать, что e^(λt) является решением системы x = Ax тогда и только тогда, когда Ah = λh.

9.Опред-ие устойчивого реш. по Ляпунову и его геометрическая трактовка.

Определение устойчивого решения по Ляпунову:

Решение $\xi(t)$ системы дифференциальных уравнений $x'=f(t,x)$, где $x\in R^n$ $f(t,x)$ — непрерывная функция, определённая на $[t0,+\infty)\times R^n$, называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое что для любого другого решения $x(t)$, удовлетворяющего начальному условию: $\|x(t0)-\xi(t0)\|<\delta$, выполняется:

$\|x(t)-\xi(t)\|<\varepsilon \quad \forall t\geq t0$. **Дополнительно**:

a)Решение $\xi(t)$ называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $\delta_0>0$, такое что для любого решения $x(t)$ с $\|x(t0)-\xi(t0)\|<\delta 0$ выполняется:

$\lim_{t\to+\infty}\|x(t)-\xi(t)\|=0$.

b)Если указанные условия не выполняются, решение $\xi(t)$ называется **неустойчивым**.

Геометрическая трактовка устойчивости по Ляпунову

На фазовом портрете:

1)Устойчивая точка — если траектории, начатые близко к особой точке, остаются в её окрестности.

2)Асимптотически устойчивая — если траектории спиралевидно или напрямую стремятся к особой точке.

3)Неустойчивая — если траектории уходят от особой точки даже при сколь угодно малом отклонении начальных условий.

Узел (все $\lambda < 0$)	Все траектории стремятся к нулю	Асимптотически устойчива
Фокус ($Re(\lambda) < 0$)	Спирали к центру	Асимптотически устойчива
Центр (λ чисто мнимые)	Замкнутые орбиты	Устойчива (не асимптотич.)
Седло (λ разного знака)	Траектории расходятся	Неустойчива

10. Определите тип особой точки и изобразите схематично фазовый портрет:

(11 var) 1. Сформулируйте определения поля направления и изоклины.

Определение поля направления: Поле направления дифференциального уравнения первого порядка, заданного в разрешённой форме: $y'=f(x,y)$, где $f(x,y)$— функция, определённая в области $D\subset R^2$— это множество отрезков (векторов) на плоскости (x,y), которые в каждой точке $(x,y)\in D$ указывают направление интегральной кривой, проходящей через эту точку. Направление определяется угловым коэффиц-ом $y'=f(x,y)$

Определение изоклины: Изоклина дифференциального уравн-ия $y'=f(x,y)$ — это множество точек $(x,y)\in D$, в которых поле направления имеет одинаковый угловой коэффиц-нт, то есть: $f(x,y)=c$, где c — фиксированная константа, задающая наклон касательных к интегральным кривым в этих точках.

2. Уравнения с разделяющимися переменными.

1) $y'= f(x)$, $f(x)$ – известная функция

$y(x) = \int f(x)dx + c$ – общее решение уравнения

2) $y'= g(y)$, : $g(y) \neq 0$, $\frac{y'}{g(y)} = 1$

$\int \frac{y'}{g(y)}dx = \int dx$; $y' = \frac{dy}{dx} => \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx$; $G(y) = x + c$ – общий интеграл $y = G^{-1}(x+c)$ – общее решение $y'= g(y)$ (*)

Теорема. Пусть функция $g(y)$ дифференцируема и ее производная ограничена, т.е. $|g'(y)|\leq M$ для $\forall y$, тогда общее решение $y'= g(y)$ — *объед.* формулы (*) и набора констант y, которые функцию $g(y)$ обращают в 0. *1)*

$y'= f(x)g(y)$, : $g(y) \neq 0$; $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$

$\int \frac{y'}{g(y)}dx = \int f(x)dx$; $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$; $G(y) = F(x) + c$

$y = G^{-1}(F(x) + c)$ – *общее решение уравнения* $y'= f(x)g(y)$ (**)

Определение. Ур-м с разделяющимися переменными называется ур-е вида $y'= f(x)g(y)$. **Теорема.** Пусть функция $g(y)$ дифференцируема и ее производная ограничена, т.е. $|g'(y)|\leq M$ для любых y, а $f(x)$ – непрерывна. Тогда общее решение ур-ия $y'= f(x)g(y)$ есть объединение формулы *(**)* и набора решений констант уравнения $g(y)=0$.

3.

4.Определение фундаментальной системы решений

фундаментальная система решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$x'=A(t)x$, где $x(t)\in R^n$ $A(t)$ — матрица $n\times n$ с непрерывными элементами на интервале (r1,r2), определяется следующим образом: **Фундаментальная система решений** — это набор из n линейно независимых вектор-функций $\varphi 1(t),\varphi 2(t),\dots,\varphi n(t)$, каждая из которых является решением системы, то есть: $\varphi i'(t)=A(t)\varphi i(t)$, $i=1,2,\dots,n$, и которые удовлетворяют условию линейной независимости на интервале (r1,r2). Линейная независимость означает, что не существует набора констант $c1,c2,\dots,cn$ не все равных нулю, таких что: $c1\varphi 1(t)+c2\varphi 2(t)+\dots+cn\varphi n(t)=0$ $\forall t\in(r1,r2)$.

5. Восстановление дифференциального уравнения по известной фундаментальной системе решений

Восстановление дифференциального уравнения по фундаментальной системе решений $\phi 1(t),\dots,\phi n(t)$ заключается в нахождении коэффициентов $a1(t),\dots,an(t)$ уравнения $y(n)+a1(t)y(n-1)+\dots+an(t)y=0$. путём решения системы линейных уравнений, полученной подстановкой $\phi i(t)$ в уравнение. Коэффициенты находятся как решение системы с матрицей Вронского, а уравнение формируется с найденными $ai(t)$.

6. Определить вид частного решения для уравнения:

Метод восстановления

1 **Подстановка решений в уравнение:**

Поскольку каждая функция $\varphi_i(t)$ является решением уравнения, она удовлетворяет:

$$\varphi_i^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\varphi_i'(t) + a_n(t)\varphi_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это даёт систему из n уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\varphi_1'(t) + a_n(t)\varphi_1(t) = 0, \\ \varphi_2^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi_2^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\varphi_2'(t) + a_n(t)\varphi_2(t) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi_n^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\varphi_n'(t) + a_n(t)\varphi_n(t) = 0. \end{cases}$$

2 **Переписывание системы:**

Перенесём $\varphi_i^{(n)}(t)$ в правую часть:

$$\varphi_i^{(n)}(t) = -a_1(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) - a_2(t)\varphi_i^{(n-2)}(t) - \dots - a_{n-1}(t)\varphi_i'(t) - a_n(t)\varphi_i(t).$$

В матричной форме система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_1^{(n-1)}(t) \\ \varphi_2(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_2^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(t) & \varphi_n'(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(t) \\ a_{n-1}(t) \\ \vdots \\ a_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_1^{(n)}(t) \\ -\varphi_2^{(n)}(t) \\ \vdots \\ -\varphi_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}.$$

Матрица системы — это матрица Вронского $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t)$, транспонированная с перестановкой строк:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ — фундаментальная система, $\det W(t) \neq 0$, и система уравнений имеет единственное решение для $a_1(t), \dots, a_n(t)$.

7. Постановка задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим лине-ую систему диффере-ых ура-ий: $x'=A(t)x+b(t)$, где:

1) $x(t)\in R^n$— вектор-функция, искомое решение,

2)$A(t)$ — матрица $n\times n$ с непрерывными элементами на интервале (r1,r2).

3)$b(t)\in R^n$ — вектор-функция, непрерывная на (r1,r2),

4)$x'=dx/dt$ — производная вектора $x(t)$ по времени t .

Задача Коши заключается в нахождении решения $x(t)$ системы, удовлетворяющего начальному условию: $x(t0)=x0$, где:

1)$t0\in(r1,r2)$ — заданная начальная точка,

2)$x0\in Rn$— заданный начальный вектор.

8. Доказать, что e^(λt) является решением системы x = Ax тогда и только тогда, когда Ah = λh.

9. Критерий Гурвица.

Формулировка критерия Гурвица: Рассмотрим характеристический многочлен лин-й системы $x'=Ax$. $L(p)=pn+a$、手$1p^{n-1}+\dots+a_{n-1}p+an=0$, где $a1,a2,\dots,an$ — вещественные коэффициенты. Нулевое решение системы устойчиво по Ляпунову, если все корни $L(p)$ имеют вещественные части $\mathrm{Re}\, pi\leq 0$, и асимптотически устойчиво, если $\mathrm{Re}\, pi<0$ для всех I. **Критерий Гурвица**: Все корни характерис-ого многочлена $L(p)$ имеют отрицательные вещественные части ($\mathrm{Re}\, pi<0$ тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы Гурвица Δi (определённые ниже) положительны: $\Delta 1>0,\Delta 2>0,\dots,\Delta n>0$, где матрица Гурвица для многочлена $L(p)$ задаётся как:

$$H = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_{2n-1} \dots 0 & 0 \\ 1 & a2 & a_{2n-2} \dots a_{2n} & 0 \\ 0 & a1 & a_{2n-3} \dots a_{2n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots \quad a_{n-2} & an \end{vmatrix}$$

причём $a_k=0$, если $k>n$, а главные миноры Δi — это определители первых i строк и столбцов матрицы H.

10. Определите тип особой точки и изобразите схематично фазовый портрет:

(12 var)

1.Опрелеление общего решения дифференциального уравн-ия.

Функ-я $\varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, зависящая от произвольных постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$, называется общим решением ур-я (*), если 1) при любых $c_1, c_2, \dots, c_n$ ф-ия $\varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ является решением ур-ия (*); 2) для любого решения $\psi(x)$ ур-ия (*) найдутся $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}, \dots, \widetilde{c_n}$, что $\psi(x) = \varphi(x, \widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}, \dots, \widetilde{c_n})$.

2. Уравнение Бернулли

Урав. Бернулли наз. Ура. вида (1) $x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$, где a(t) и b(t) определены и непрерывны на промежутке $r_1 < t < r_2$

1. Если α = 0, то (1) — лин. неоднород.ур-е.
2. Если α = 1, то (1) — лин. однородное ур-е.
3. Если α != 0, 1, то данный случай явл-ся тривиальным, и их мы разберем подробно.

Разделим обе части ур-я (1) на x^{α} (положим, x не равен 0), получаем $\frac{x'}{x^{\alpha}} = a(t)x^{1-\alpha} + b(t)$ (2)

Заметим, что $\frac{x'}{x^{\alpha}}$ с точностью до постоянной равен производно от $x^{-\alpha+1}$. Поэтому введем новую фун-ю $y = x^{-\alpha+1}$ (3)

Замена (3) приведет ур-е (1) к лин. Урав. $y' = (1-\alpha)x^{-\alpha} * x'$

Подставим (3) в (1) $\frac{1}{1-\alpha}y' = a(t)y + b(t)$. Умножим обе части на $(1-\alpha)$ получаем $y' = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t)$

А значит справедливо, что ур-е Бернулли интегрируемо в общем виде. Если $\alpha > 0$, то сущ-т еще одно решение x(t) ≡ 0.

3. Определите тип дифференциального уравнения

4. Постановка краевой задачи для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

постановка краевой задачи для ли-ого диффе-ого уравнения 2-го порядка формулируется следующим образом: Для ли-ого дифф-ого уравнения 2-го порядка вида: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, где p(x),q(x), и f(x)-непре-ые фун. на отрезке [a,b], краевая задача заключается в нахождении решения y(x), удовлетворяющего ур-ию на интервале (a,b) и заданным краевым условиям на концах отрезка [a,b].

Краевые условия обычно задаются в виде:

$\alpha 1y(a)+\alpha 2y'(a)=A, \beta 1y(b)+\beta 2y'(b)=B$, где:

a) α1,α2,β1,β2 - заданные константы, такие что $\alpha_1^2+\alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2 \neq 0$ (чтобы условия были нетривиальными), A,B — заданные числа.

Примеры краевых условий

1. **Условия Дирихле**: y(a)=A, y(b)=B (т.е. α2=β2=0).
2. **Условия Неймана**: y′(a)=A, y′(b)=B (т.е. α1=β1=0).
3. **Смешанные условия**: Например, y(a)=A, y′(b)=B (т.е.).

Замечания

1)Реш. краевой задачи не всегда сущес-ет или единственно. Условия существования и единс-сти зависят от коэффици-ов p(x), q(x), функции f(x) и типа краевых условий.

b)Для анализа краевых задач часто используется фу-ия Грина, которая позволяет выразить реш. в интегральной форме.

Ответ: Краевая задача для линейного диффе-ого уравнения 2-го порядка $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ состоит в нахождении решения y(x) на [a,b], удовлетворяющего краевым условиям $\alpha_1 y(a)+\alpha 2y'(a)=A$, $\beta 1y(b)+\beta 2y'(b)=B$.

5. Необходимое и достаточное условие того, чтобы функ-я e^(λx) её являлась решением уравнения L(p)z=0

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$L(p)z=z(n)+a1z^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}z'+a_nz=0$, где $L(p)=pn+a1p^{n-1}+\dots+a_{n-1}p+an$ — характеристический многочлен, а a1,…,an— вещественные или комплексные константы. Требуется найти необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $z(x)=e^{\lambda x}$ была решением этого уравнения. **Шаг 1: Подстановка функции $e^{\lambda x}$**

Предположим, что $z(x)=e^{\lambda x}$ – реш. уравн. Вычислим производные: $z'(x)=\lambda e^{\lambda x}, z''(x)=\lambda^2e^{\lambda x},\dots,z^{(k)}(x)=\lambda^k e^{\lambda x}$. Подставим $z(x)=e^{\lambda x}$в уравнение L(p)z=0

z(n)+a1z(n−1)+⋯+an−1z′+anz=λneλx+a1λn−1eλx+⋯+an−1λeλx+aneλx =0.z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0.z(n)+a1z(n−1)+⋯+an−1 z′+anz=λneλx+a1λn−1eλx+⋯+an−1λeλx+aneλx=0.

Выносим eλx e^{\lambda x} eλx за скобки (так как eλx≠0 e^{\lambda x} \neq 0 eλx□=0):

eλx(λn+a1λn−1+⋯+an−1λ+an)=0.e^{\lambda x} \left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \right) = 0.eλx(λn+a1 λn−1+⋯+an−1λ+an)=0.

Это равенство выполняется, если:

λn+a1λn−1+⋯+an−1λ+an=L(λ)=0.\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = L(\lambda) = 0.λn+a1λn−1+⋯+an−1 λ+an=L(λ)=0.

Таким образом, z(x)=eλx z(x) = e^{\lambda x} z(x)=eλx является решением уравнения, если λ \lambda λ — корень характеристического многочлена L(p) L(p) L(p).

Шаг 2: Необходимое условие

Если z(x)=eλx z(x) = e^{\lambda x} z(x)=eλx — решение уравнения L(p)z=0 L(p)z = 0 L(p)z=0, то подстановка показывает, что L(λ)=0 L(\lambda) = 0 L(λ)=0. То есть λ \lambda λ должен быть корнем характеристического уравнения:

L(λ)=λn+a1λn−1+⋯+an−1λ+an=0.L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.L(λ)=λn+a1 λn−1+⋯+an−1λ+an=0.

Это необходимое условие, так как в противном случае eλx e^{\lambda x} eλx не удовлетворяет уравнению.

Шаг 3: Достаточное условие

Теперь проверим, достаточно ли условия L(λ)=0 L(\lambda) = 0 L(λ)=0, чтобы e.seedλx e.seed^{\lambda x} e.seedλx было решением.

Если λ \lambda λ — корень характеристического многочлена, то есть L(λ)=0 L(\lambda) = 0 L(λ)=0, то подстановка z(x)=eλx z(x) = e^{\lambda x} z(x)=eλx в уравнение даёт:

L(p)eλx=eλxL(λ)=eλx⋅0=0.L(p) e^{\lambda x} = e^{\lambda x} L(\lambda) = e^{\lambda x} \cdot 0 = 0.L(p)eλx=eλxL(λ)=eλx⋅0=0.

Следовательно, z(x)=eλx z(x) = e^{\lambda x} z(x)=eλx удовлетворяет уравнению. Таким образом, L(λ)=0 L(\lambda) = 0 L(λ)=0 также является достаточным условием.

Шаг 4: Учёт кратности корней

Если λ \lambda λ — корень характеристического многочлена кратности k≥1 k \geq 1 k≥1, то, согласно разделу **14**, решениями уравнения будут не только eλx e^{\lambda x} eλx, но и функции вида xeλx,x2eλx,…,xk−1eλx x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x} xeλx,x2eλx,…,xk−1eλx. Однако в данном вопросе речь идёт именно о функции eλx e^{\lambda x} eλx, которая соответствует корню кратности k≥1 k \geq 1 k≥1. Условие L(λ)=0 L(\lambda) = 0 L(λ)=0 охватывает этот случай, так как eλx e^{\lambda x} eλx всегда является решением для любого корня λ \lambda λ.

Шаг 5: Вывод

Необходимое и достаточное условие того, чтобы функция z(x)=eλx z(x) = e^{\lambda x} z(x)=eλx была решением уравнения L(p)z=0 L(p)z = 0 L(p)z=0, состоит в том, что λ \lambda λ является корнем характеристического многочлена L(p) L(p) L(p):

L(λ)=λn+a1λn−1+⋯+an−1λ+an=0.L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.L(λ)=λn+a1 λn−1+⋯+an−1λ+an=0.

Ответ: Необходимое и достаточное условие: λ \lambda λ — корень характеристического уравнения L(λ)=0 L(\lambda) = 0 L(λ)=0.

6.

7. Определение фундаментальной системы решений системы: x'=A(t)x

Фундаме-ая система решений системы дифференциальных уравнений вида: $x'=A(t)x$,где $x(t)\in R^n$— вектор-функция, A(t)-матрица n×n, непрерывная на интервале (r1,r2), определяется следующим образом:**Фундаментальная система решений** — это набор из n линейно независимых вектор-функций φ1(t),φ2(t),…,φn(t), каждая из которых является решением системы x′=A(t)x, то есть: φi′(t)=A(t)φi(t), i=1,2,…,n, и которые удовлетворяют условию линейной независимости на интервале (r1,r2). Линейная независимость означает, что не суще-ет набора констант c1,c2,…,cn, не все равных нулю, таких что: c1φ1(t)+c2φ2(t)+⋯+cnφn(t)=0 для всех t∈(r1,r2).

Примечание: a)Фундамента-ая система решений позволяет представить общее решение системы в виде:

x(t)=c1φ1(t)+c2φ2(t)+⋯+cnφn(t), где c1,c2,…,cn произвольные константы.

b) Линейная независимость φ1(t),…,φn(t) эквивалентна тому, что определитель матрицы, составленной из этих вектор-функций как столбцов (аналог Вронскиана для систем), не равен нулю на (r1,r2).

8. Свойства системы x'=A(t)x

Имеет вид $x'=A(t)x$ (1)

Свойства : a) Если коэффициенты $A(t)$ непрерывны на $(r1,r2)$ то по теореме ∃ и ! уравнение (1) допускает ! решение, удовлетворяющее условию $x(t_0)=x_0$, определенное на $(r1,r2)$

b) Если решение $\varphi(t)$ уравнения (1) обрщается в 0 при некотором t, т.е. $\varphi(\tau)=0$, то $\varphi(t)=0$ **Док-во:** (1) имеет нулевое решение. Тогда в момент времени τ решение $\varphi(t)$ и нулевое решение совпадают. Тогда по теореме ∃ и ! они совпадают на общем интервале определения, т.е. $\varphi(t)=0$

c) Если $\varphi_1(t),\dots,\varphi_k(t)$ – решение (1), то $\forall c_1,\dots,c_k$ функция $\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+\dots+c_k\varphi_k(t)$ тоже является решением (1)

Док-во: $\forall \varphi_j(t)$ справедливо $\varphi_j'(t)=A(t)\ \varphi_j(t),\ j\in[1,k]$.

$\psi'(t)=c_1\varphi_1'(t)+\dots+c_1\varphi_k'(t)=c_1A(t)\varphi_1(t)+\dots+c_kA(t)\varphi_k(t) = A(t)(c_1\varphi_1(t)+\dots+c_k\varphi_k(t))=A(t)\psi(t)$

9. Определение асимптотической устойчивости решения и его геометрическая трактовка.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений: $x'=f(t,x)$,где $x(t)\in R^n$, f(t,x) — непрерывная функция, определённая на $[t0,+\infty)\times R^n$, удовлетворяющая условиям, гарантирующим существование и единственность решений (например, условие Липшица по x).

Решение ξ(t) системы называется **асимптотически устойчивым** по Ляпунову, если:

1.Оно **устойчиво по Ляпунову**, то есть для любого ε>0 существует δ(ε)>0, такое что для любого решения x(t) с начальным условием ‖x(t0)−ξ(t0)‖<δ выполняется: ‖x(t)−ξ(t)‖<ε ∀t≥t0.

2.Оно **притягивающее**, то есть существует δ0>0, такое что для любого решения x(t) с начальным условием ‖x(t0)−ξ(t0)‖<δ0 выполняется: limt→+∞‖x(t)−ξ(t)‖=0.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$x'=f(t,x)$, где $x(t)\in R^n$, f(t,x) — непрерывная функция, определённая на $[t0,+\infty)\times R^n$, удовлетво-ая условиям, гарантирующим существование и единственность решений (например, условие Липшица по x).

Решение ξ(t) системы называется **асимптотически устойчивым** по Ляпунову, если:

1Оно **устойчиво по Ляпунову**, то есть для любого ε>0 существует δ(ε)>0, такое что для любого решения x(t) с начальным условием ‖x(t0)−ξ(t0)‖<δ выполняется: ‖x(t)−ξ(t)‖<ε ∀ t ≥t0.

Оно **притягивающее**, то есть существует δ0>0, такое что для любого решения x(t) с начальным условием ‖x(t0)−ξ(t0)‖<δ0 выполняется:limt→+∞‖x(t)−ξ(t)‖=0.

Геометрическая трактовка

Геометри-ая интерпретация асимптотической устойчивости решения ξ(t) описывает поведение траекторий в фазовом пространстве R^n:

1.Устойчивость:

a)В фазовом пространстве траектория ξ(t) устойчива, если для любого ε>0 существует окрестность радиуса δ вокруг точки ξ(t0), такая что траектории x(t), начинающиеся в этой δ окрестности (‖x(t0)−ξ(t0)‖<δ, остаются в ε \varepsilon ε-окрестности траектории ξ(t) для всех t≥t0 .

b)Если ξ(t) — равновесие (например, ξ(t)=0, траектории остаются в заданной окрестности точки равновесия.

c)Если ξ(t)— непостоянное решение (например, периодическая орбита), траектории остаются в трубчатой окрестности этой орбиты.

2.Асимптотическая сходимость:

a)Траектории, начинающиеся в δ0-окрестности ξ(t), не только остаются вблизи ξ(t), но и **сходятся** к ней при t→+∞

10