**1. Основные понятия (диф. уравнение, решен. диф. уравнения, общее решение).**

**Диф-ное ура.** – соотношение типа равенство, которое связывает значение независимой переменной $x$, соответствующее значение ф-и $y = y(x)$ и значения ее производных $y'(x)$, $y''(x)$,…, $y^n(x)$ Аналитическая запись: $F(x, y, y'(x), y''(x),…, y^n(x)) = 0$ (*)

**Решене ДУ** – ф-я $y=\varphi(x)$, определенная на некотором промежутке, такая, что $F(x, \varphi, \varphi'(x), \varphi''(x),…, \varphi^{n}(x))=0$. **Определение общего решения ДУ:** Функ-я $\varphi(x, c_1, c_2,…, c_n)$, зависящая от произвольных постоянных $c_1, c_2,…, c_n$, называется общим решением ур-я (*), если 1) при любых $c_1, c_2,…, c_n$ ф-ия $\varphi(x, c_1, c_2,…, c_n)$ является решением ур-ия (*); 2) для любого решения $\psi(x)$ ур-ия (*) найдутся $\widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}, …, \widetilde{c_n}$, что $\psi(x)= \varphi(x, \widetilde{c_1}, \widetilde{c_2}, …, \widetilde{c_n})$.

**2. Геометрическое представление скалярного диф. Уравнения**

$F(x,y,y')=0$ – уравнение 1-го порядка

$y'= f(x, y)$ – ду, разрешенное относительно производной (1)

**Задача Коши:** найти решение ду $y'= f(x, y)$, удовл. нач. условию: $y(x_0)=y_0$ *(2)*. **Теорема существования и единственности.** Если в области Г переменных $x$, $y$ ф-ия $f$ непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{df}{dy}$, то для любой точки $(x_0, y_0)$ *из Г* задача Коши (1)-(2) имеет единственное решение. Гео-ски: через каждую точку $(x_0, y_0)$ *из Г* проходит единственная интегральная кривая.

**3. Уравнения с разделяющимися переменными.**

1) $y'= f(x)$, $f(x)$ – известная функция

$y(x) = \int f(x)dx + c$ – общее решение уравнения

2) $y'= g(y)$, : $g(y) \neq 0$ , $\frac{y'}{g(y)} = 1$

$\int \frac{y'}{g(y)}dx = \int dx;\ y' = \frac{dy}{dx} => \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx;\ G(y) = x + c$ – общий интеграл $y = G^{-1}(x+c)$ – общее решение $y'= g(y)$ (*)

**Теорема.** Пусть функция $g(y)$ дифференцируема и ее производная ограничена, т.е. $|g'(y)|\leq M$ для $\forall\ y$, тогда общее решение $y'= g(y)$ — *объед.* формулы (*) и набора констант y, которые функцию $g(y)$ обращают в 0. *1)* $y'= f(x)g(y)$, : $g(y) \neq 0$; $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$

$\int \frac{y'}{g(y)}dx = \int f(x)dx;\quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx;\ G(y) = F(x) + c$

$y = G^{-1}(F(x) + c)$ – *общее решение уравнения* $y'= f(x)g(y)$ (**)

**Определение.** Ур-м с разделяющимися переменными называется ур-е вида $y'= f(x)g(y)$. **Теорема.** Пусть функция $g(y)$ дифференцируема и ее производная ограничена, т.е. $|g'(y)|\leq M$ для любых $y$, а $f(x)$ – непрерывна. Тогда общее решение ур-ия $y'= f(x)g(y)$ есть объединение формулы (**) и набора решений констант уравнения $g(y)=0$.

**4. Однородные уравнения.**

Фун.f(x,y) наз. однародный деф.ура. степени “к”, если для любого лямбда $\lambda > 0$, справидлива сотношиними. $F(\lambda x, \lambda y)= \lambda^k f(x,y)$.

**Определение.** Уравнения вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называются однородными, если ф-ии $M(x, y)$ и $N(x, y)$ явл. однородными ф-ми.

**Следствие.** Если уравнение $y'= f(x, y)$ является однородным, то его правую часть всегда можно представить в виде $g(\frac{y}{x})$, т.е. ур-ие $y'= f(x, y)$ можно записать как $y'= g(\frac{y}{x})$ (*)

**Метод решения:** Для этого выполним замену переменных: $z = \frac{y}{x},\ y = zx,\ y' = z'x + z$ Подставляем в одно р.уравнение (*): $z'x + z = g(z),\ z' = \frac{1}{x}(g(z) - z)$ – ур-ие с разделяющимися переменными, делим на $(g(z) - z) \neq 0$, $z' = \frac{dz}{dx}$ $\int \frac{dz}{g(z)-z} = \int \frac{1}{x}dx$, находим общее решение и добавляем решения $(g(z) - z) = 0$, возвращаемся к исходным переменным.

**5. Линейные однородные уравнения**

Линейное неоднородное называется однородным, если имеет вид $y' = a(x)y$ (1)

Общее реш. ур-я (1) представлено в виде $y = ce^{\int_{x_0}^{x} a(x)dx}$, (2)
1) $\forall c\ y(t)$ ….3 Реш. Этого уравн. Явл. Реше. Урав (1)
2) ф(x)- реш. (1) то всегда , $E\widetilde{c}$ такого что можно написат виде 3

**6. Линейные неоднородные уравнения. Формула для решения задачи Коши**

Линейное неодн-ое имеет сле-щий вид $x' = a(t)x + b(t)$ (1)
Для ур-я (1) решим задачу Коши. Найдем решение ур-я (1), удовл-е усл. $x(t_0) = x_0$. (4)
**Теорема.** Если функция a(t) и b(t) определены и непрерывны на промежутке $(r_1, r_2)$, то решение задачи Коши представлено в виде $x(t) = x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(r)dr} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(r)dr} b(s)ds$ (5)
**Док.**

**7. Уравнение Бернулли**

Урав. Бернулли наз. Ура. вида (1) $x' = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$, где a(t) и b(t) определены и непрерывны на промежутке $r_1 < t < r_2$

1. Если α = 0, то (1) — лин. неоднород.ур-е.
2. Если α = 1, то (1) — лин. однородное ур-е.
3. Если α != 0, 1, то данный случай явл-ся тривиальным, и их мы разберем подробно.

Разделим обе части ур-я (1) на $x^{\alpha}$ (положим, x не равен 0), получаем $\frac{x'}{x^{\alpha}} = a(t)x^{1-\alpha} + b(t)$ (2)
Заметим, что $\frac{x'}{x^{\alpha}}$ с точностью до постоянной равен производно от $x^{-\alpha+1}$. Поэтому введем новую фун-ю $y = x^{-\alpha+1}$ (3)
Замена (3) приведет ур-е (1) к лин. Урав. $y' = (1 - \alpha)x^{-\alpha} * x'$
Подставим (3) в (1) $\frac{1}{1-\alpha}y' = a(t)y + b(t)$. Умножим обе части на $(1 - \alpha)$ получаем $y' = (1 - \alpha)a(t)y + (1 - \alpha)b(t)$
А значит справедливо, что ур-е Бернулли интегрируемо в общем виде. Если $\alpha > 0$, то сущ-т еще одно решение x(t) ≡ 0.

**8. Уравнен. в полных дифференциалах, общий интеграл.**

Пусть задана фун 2-х переменных z = F(x, y)
**Полным диф-м** фун-и F(x, y) наз-ся правая часть след-й формулы $dz = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$
Сама же формула наз-ся **формулой полного диф-а.**
Уравнение $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ (1) наз-ся уравнением в полн-х диф-х, если сущ-т такая непрерывно-диф. функция F(t, x) что $\begin{cases} M(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial t} \\ N(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \end{cases}$ (2)
Т.е. левая часть этого урав-я явл-ся полным диф-м некоторой фун F(t, x).

**Теорема**

Если уравнение (1) явл-ся уравнением в полных диф-х, то его общий интеграл имеет вид F(t, x) = c(3)

Надо доказать два пункта:

1) любое решение $\varphi(t)$ уравнения (1) $F\big(t,\varphi(t)\big) \equiv c$;
2) если для некот-й функ. $\varphi(t)$ выпо-тся $F\big(t,\varphi(t)\big) \equiv c$, то $\varphi(t)$

**Док-во.**

1) Пусть $\varphi(t)$ — произвольное решение ур-я (1), тогда оно удовлт ур-ю:M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0 т.е. M(t, $\varphi(t)$) + N(t, $\varphi(t)$) $\varphi'^{(t)}$ = 0 (4)

Найдем $\frac{d}{dt}F\big(t,\varphi(t)\big) = \frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial \varphi}\varphi'^{(t)} == M\big(t,\varphi(t)\big) + N\big(t,\varphi(t)\big)\varphi'^{(t)} = 0$

*(Использовали (2), (4))* Значит $F\big(t,\varphi(t)\big) = const$

Пусть для какой-либо диф-мой функции $\varphi(t)$ и const c выполнено на нек-м прмежутке переменной t $F(t,\varphi(t)) \equiv c$, покажем, что тогда $\varphi(t)$ — частное решение ур-я (1).

Продиф-м равенство $F(t,\varphi(t)) \equiv c$ по t $\frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial F(t,\varphi(t))}{\partial \varphi}\varphi'^{(t)} \equiv 0$

воспользуемся (2) $M\big(t,\varphi(t)\big) + N\big(t,\varphi(t)\big)\varphi'^{(t)} \equiv 0$ т.е. $M\big(t,\varphi(t)\big)dt + N\big(t,\varphi(t)\big)d\varphi = 0$значит $\varphi(t)$ — реш. ур-я (1) чтд.

**9. Критерий для уравнений в полных дифференциалах.**

**Теорема.** Если в уравнении $M(x,y)dy + M(x,y)dx = 0$ (1) существуют непрерывные производные $\frac{dM(x,y)}{dy}$ и $\frac{dN(x,y)}{dx}$, то для того чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах необходимо и достаточно, чтобы выпо-ось условие $\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{dN(x,y)}{dx}$

Более того, функция $F(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy + \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + C$

**Док-во.**

**10. Теорема существования и единственности Коши-Липшица (формулировка).**

**Условие Липшица.** Пусть $f(x,y)$ определена в области Г. Говорят, что функция $f$ удовлетворяет условию Липшица по переменной $y$, если $\exists\, L > 0$, такая что выполнено условие: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ (1) $L$ – постоянная Липшица.

**Теорема.** Пусть $f(x,y)$ определена в области Г и непрерывна в ней. Кроме того, функция $f$ имеет непрерывную ограниченную частную производную по $y$, то есть $\forall (x,y) \epsilon$ Г: $\frac{df}{dy} \leq L\ \frac{df}{dy}$. Тогда $f(x,y)$ в области Г удовлетворяет условию Липшица по переменной $y$ с константой $L$.

**11. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Многочлен символа p и его свойства.**

Лоду n-го порядка с постоя-ми коэффи-ами называется уравнение вида $a_0y^n + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0(1)$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ – постоянные заданные числа. Причем $a_0 \neq 0$.

Введем символическое обозначение: $\frac{dy}{dx} =: py$ где p – символ диффере-ания по х.Тогда $\frac{d^2y}{dx} =: p^2y, \frac{d^3y}{dx} =: p^3y, \dots, \frac{d^ny}{dx} =: p^ny$

Перепишем левую часть уравнения (1): $a_0y^n + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = a_0p^ny + a_1p^{(n-1)}y + \dots + a_{n-1}py + a_ny = (a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n)y$

Пусть $L(p) = a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n$ это многочлен символа p или оператор дифференцирования.

С учетом введенного обозначения уравнение (1) будет иметь вид: $L(p)y = 0$ (2)

**Свойства многочлена символа p.**

Если есть два многочлена символа $p$ $L(p)$ и $N(p)$

1. $L(p)(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(p)y_1 + \beta L(p)y_2$
2. $\big(L(p) + M(p)\big)y = L(p)y + M(p)y$
3. $L(p)\big(M(p)y\big) = \big(L(p)M(p)\big)y$
4. $L(p)e^{\lambda x} = L(\gamma)e^{\lambda x}$

**Доказательство.**

1. $L(p)(\alpha y_1 + \beta y_2) = a_0p^n(\alpha y_1 + \beta y_2) + a_1p^{(n-1)}(\alpha y_1 + \beta y_2) + \dots + a_{n-1}p(\alpha y_1 + \beta y_2) + a_n(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\big(a_0p^ny_1 + a_1p^{(n-1)}y_1 + \dots + a_{n-1}py_1 + a_ny_1\big) + \beta\big(a_0p^ny_2 + a_1p^{(n-1)}y_2 + \dots + a_{n-1}py_2 + a_ny_2\big) = \alpha L(p)y_1 + \beta L(p)y_2$
2. $\big(L(p) + M(p)\big)y = (a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n + b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n)y = a_0p^ny + a_1p^{(n-1)}y + \dots + a_{n-1}py + a_ny + b_0p^ny + b_1p^{(n-1)}y + \dots + b_{n-1}py + b_ny = L(p)y + M(p)y$
3. $L(p)\big(M(p)y\big) = a_0p^n\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y + a_1p^{(n-1)}\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y + \dots + a_{n-1}p\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y + a_n\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y = \big(a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n\big)\big(b_0p^n + b_1p^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}p + b_n\big)y = \big(L(p)M(p)\big)y$
4. $pe^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x},\ p^2e^{\lambda x} = \lambda^2e^{\lambda x}\ \dots\ p^ne^{\lambda x} = \lambda^ne^{\lambda x}$

$$\begin{aligned} L(p)e^{\lambda x} &= \big(a_0p^n + a_1p^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}p + a_n\big)e^{\lambda x} \\ &= \big(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n\big)e^{\lambda x} \\ &= L(\gamma)e^{\lambda x} \end{aligned}$$

**12. Теорема об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней).**

**Утверждение.** Функция $e^{\lambda x}$ является решением уравнения $L(p)y = 0$ (1), тогда и только тогда, когда число $\lambda$ является корнем многочлена $L(p)$.

**Док-во.** *Необходимость.* Пусть $e^{\lambda x}$ является решением уравнения (1), т.е. $L(p)e^{\lambda x} = 0 \leftrightarrow\ L(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \to L(\lambda) = 0$. Данное равенство означает, что $\lambda$ явл корнем многочлена $L(p)$.

*Достаточность.* Пусть $\lambda$– корень многочлена $L(p)$, т.е. $L(\lambda) = 0$.

$L(p)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x} = 0 \to L(p)e^{\lambda x} = 0$. Данное равенство означает, что $e^{\lambda x}$ является решением уравнения (1).

**Теорема.** Пусть характеристический многочлен $L(P)$ ЛОДУ (1) имеет только простые корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Положим, $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$,…, $y_n(x) = e^{\lambda_n x}$ (2). Тогда $\forall c_1, c_2, \dots, c_n$ фун-я вида $y_{об}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$+….+$c_ny_n(x)$ (3) явл. общим решением уравнения (1).

**13. Теорема об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (случай кратных корней).**

ЛНДУ: $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0$

Если характеристический многочлен L(p) имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ соответственно кратности $k_1, k_2, .., k_s$, причем $\sum_{j=1}^{s} k_j = n$ (порядок уравнения), положим

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}, \dots,$ $y_{k1}(x) = x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$,

$y_{k1+1}(x) = e^{\lambda_2 x}, y_{k1+2}(x) = xe^{\lambda_2 x}, \dots., y_{k1+k2} = x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}$,…, $y_n(x) = x^{k_s-1}e^{\lambda_s x}$ (1).

Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$y_{об}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$, где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

**14. Выделение вещественных решений.**

Во многих заданиях необх. найти все вещес-ные корни уравнения.

**Утверждение**. Если корни характеристического многочлена L(p) вещественные, то для того чтобы, общее решение уравнения $y_{об}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$ (1) было вещественным, н. и д., чтобы в сумме (1) коэффициенты при комлексно-сопряженных фу-ях были комплкcно сопряженными, а коэффициенты при вещественных функциях — вещественными.

Практический способ. L(p)y = 0. Тогда предположим, $y_1(x) = u(x) + iv(x), y_2(x) = \overline{y_1(x)} = u(x) - iv(x)$. В силу утверждения, сумма $= c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ будет вещественной, только при условии, что $c_1$ и $c_2$ яв-ся комплексно сопряжёнными.

Пусть $c_1 = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta),\ c_2 = \overline{c_1} = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)$.

Тогда $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)\big(u(x) + iv(x)\big) + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\big(= u(x) - iv(x)\big) = \frac{1}{2}\alpha u(x) + \frac{1}{2}\alpha iv(x) - \frac{1}{2}i\beta u(x) + \frac{1}{2}\beta v(x) + \frac{1}{2}\alpha u(x) - \frac{1}{2}\alpha iv(x) + \frac{1}{2}i\beta u(x) + \frac{1}{2}\beta v(x) = \alpha u(x) + \beta v(x)$

Т.о., чтобы получить общее вещественное решение, нужно: 1) выписать общее комплексное решение 2) в полученном выражении каждую пару комплексно-сопряженных решений нужно заменить линейной комбинацией вещественной и мнимой части одного из них с вещественными коэффициентами, а вещественные решения нужно взять с вещественными коэффициентами.

**15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазимногочленов.**

**ЛНДУ**: $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$

Квазимногочлен — функция F(x), которую можно записать: $F(x) = f_1(x)e^{\lambda_1x} + f_2(x)e^{\lambda_2x} + \dots + f_n(x)e^{\lambda_nx}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — комплексные числа, а $f_1(x), f_2(x), \dots, f_3(x)$ — многочлены переменной x

**Утверждение 1**. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ решения соответствующих уравнений $L(p)y_i = f_j(x)\,e^{\lambda_jx}$ (1), где $j = 1, 2, \dots, n$, тогда функция $y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$ является решением уравнения L(p)y = F(x), где F(x) — квазимногочлен.

**Док-во.** Применим характеристический многочлен L(p) к сумме $y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$, получаем $L(p)\big(y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)\big) = L(p)y_1(x) + L(p)y_2(x) + \dots + L(p)y_n(x)$ = поскольку каждая из функций $y_j(x)$ является по условию утверждения решением уравнения (1), мы можем продолжить равенство = = $f_1(x)e^{\lambda_1x} + f_2(x)e^{\lambda_2x} + \dots + f_n(x)e^{\lambda_nx}$= F(x)**,** Т.о. мы показали, что сумма $y_1(x) + y_2(x) + \dots + y_n(x)$ является решением уравнения (2). ЧТД.

**16. Правило нахождения частного решения в нерезонансном случае (без док-ва).**

**Теорема**. Пусть λ не является корнем характеристического многочлена L(p). Тогда уравнение (3) имеет частное решение вида: $y_{чн}(x) = g(x)e^{\lambda x}$, где g(x) многочлен относительно переменной x степени равной степени многочлена f(x), причем его коэффициенты могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

**17. Правило нахождения частного решения в резонансном случае (без док-ва)**

**Теорема.** Пусть $\lambda$ — корень характеристического многочлена $L(p)$ кратности $k$. Тогда уравнение $L(p)y = f(x)e^{\lambda x}$ имеет частное решение вида $y_{чн}(x) = x^kg(x)e^{\lambda x}$, где $g(x)$ многочлен относительно переменной $x$ степени равной степени многочлена $f(x)$, причём его коэффициенты могут быть найдены методом неопределённых коэффициентов.

**18. Метод вариации произвольных постоянных**

**Теорема.** Если известно решение $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ **ЛОДУ** $L(p)y = 0$, то частное решение уравнения $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$ **(1)** может быть найдено в виде $y_{чн}(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$, **(2)** где функции $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ являются решениями следующей системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 + \dots + C_n'\varphi_n = 0 \\ C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' + \dots + C_n'\varphi_n' = 0 \\ \dots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)} + C_2'\varphi_2^{(n-2)} + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)} + C_2'\varphi_2^{(n-1)} + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0} \end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

**Док-во.** Продифференцируем формулу (2) с учётом 1-го уравнения системы (3)

$y_{чн}' = C_1'\varphi_1 + C_1\varphi_1' + C_2'\varphi_2 + C_2\varphi_2' + \dots + C_n'\varphi_n + C_n\varphi_n' = C_1\varphi_1' + C_2\varphi_2' + \dots + C_n\varphi_n'$

Найдём вторую производную с учётом 2-го уравнения системы (3)

$$y_{чн}'' = C_1\varphi_1'' + C_2\varphi_2'' + \dots + C_n\varphi_n''$$
$$\dots$$
$$y_{чн}^{(n-1)} = C_1\varphi_1^{(n-1)} + C_2\varphi_2^{(n-1)} + \dots + C_n\varphi_n^{(n-1)}$$
$$y_{чн}^{(n)} = \frac{f(x)}{a_0} + C_1\varphi_1^{(n)} + C_2\varphi_2^{(n)} + \dots + C_n\varphi_n^{(n)}$$

$$\begin{aligned} L(p)y_{чн} &= a_0y_{чн}^{(n)} + a_1y_{чн}^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y_{чн}' + a_ny_{чн} = \\ &= f(x) + a_0C_1\varphi_1^{(n)} + a_0C_2\varphi_2^{(n)} + \dots + a_0C_n\varphi_n^{(n)} + a_1C_1\varphi_1^{(n-1)} \\ &\quad + a_1C_2\varphi_2^{(n-1)} + \dots + a_1C_n\varphi_n^{(n-1)} + \\ &+ \dots + a_{n-1}C_1\varphi_1' + a_{n-1}C_2\varphi_2' + \dots + a_{n-1}C_n\varphi_n' + a_nC_1\varphi_1 + a_nC_2\varphi_2 \\ &\quad + \dots + a_nC_n\varphi_n = \\ &= f(x) + \underbrace{C_1(x)L(p)\varphi_1}_{=0} + \underbrace{C_2(x)L(p)\varphi_2}_{=0} + \dots + \underbrace{C_n(x)L(p)\varphi_n}_{=0} = f(x) \end{aligned}$$

$L(p)y_{чн} = f(x)$ Формула (2) действительно определяет реш. уравнения (1)

**19. Линейные дифф-ые ура-ия n-го порядка с переменными коэфф-ентами. Теорема о нулевом решении**

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами имеют вид $b_0(x)y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = f(x)$, **(1)** где $y(x)$ — вещественная искомая функция, $f(x), b_0(x), b_1(x), \dots, b_n(x)$ — непрерывные функции на некотором отрезке $r_1 \le x \le r_2$.

Если $b_0(x) \ne 0$, то уравнение (1) можно переписать в виде $L(p)y = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = g(x)$

Уравнение (1) наз-ся неоднородным уравнением с переменными коэффициентами, а уравнение $L(p)y = 0$ **(2)** — ЛОДУ с переменными коэффициентами.

**Теорема 1 о нулевом решении.** Если коэффициенты $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ определены и непрерывны на $r_1 < x < r_2$, $\varphi(x)$ — решение уравнения (2) такое, что выполнены условия $\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$, $x_0 \in (r_1, r_2)$, то $\varphi(x) \equiv 0\ x \in (r_1, r_2)$

**20. Линейно независимые системы функций. Определитель Вронского и его свойства**

Определение **1.** Говорят, что система (набор) функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ $\varphi_j: (r_1, r_2) \to \mathbb{C}$ является *линейно зависимой* на интервале $(r_1, r_2)$, если $\exists$ константы $C_1, C_2, \ldots, C_k$ такие, что

1. $|C_1| + |C_2| + \cdots + |C_k| \neq 0$
2. $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_k\varphi_k(x) = 0 \quad \forall x \in (r_1, r_2)$.

Определение **2.** Система (набор) функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ является *линейно независимой* на интервале $(r_1, r_2)$, если из $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_k\varphi_k(x) = 0$ на этом интервале следует тривиальность набора констант: т.е. все $C_i = 0$.

Определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_k(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_k'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(k-1)}(x) & \varphi_2^{(k-1)}(x) & \ldots & \varphi_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix} \quad \mathbf{(3)}$$

называется *определителем Вронского*, построенным по системе функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$.

**Теорема 2 (св-во 1).** Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ ЛЗ на интервале $(r_1, r_2)$, то определитель Вронского $W(x) \equiv 0$. **Док**

**Теорема 3 (св-во 2).** Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — ЛН система решения уравнения $L(p)y = 0$, то опр. Вронского нигде не обращается в нуль $W(x) \neq 0$, при $\forall\, x \in (r_1, r_2)$. **(док)**

**Следствие.** Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — реш. Урав. (2), то определитель Вронского, построенный по этой системе фун-ий, либо тождественно равен нулю, либо нигде в нуль не обращается. **Замечание.** Последняя теорема вообще говоря не верна, если фун. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ не явл. Реше. Ура. (2).

**21. Фундаментальная система решений. Теорема об общем решении.**

$L(p)y = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (1)$

где $y(x)$ — вещественная искомая функция

a1(x), …, an(x) — непре-ые фу-ци на некотором отрезке $r_1 \le x \le r_2$

Система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ из n штук линейно независимых решений уравнения (1) называется фундаментальной системой решений этого уравнения.

**Теорема 1** *(теорема об общем решении однородного уравнения)*

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — некоторая фундаментальная система решений уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид: $\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) \qquad (2)$

**22. Теорема о существовании фундаментальной системы решений.**

Если коэффициенты $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ в уравнении

(1) непрерывны на интервале $r_1 \le x \le r_2$, то фундаментальная система решения уравнения (1) существует.

**23. Теорема об однозначном определе. коэффициентов лин-ого дифф-ого ур. n-го порядка с переменными коэф-тами его фср.**

**Теорема 3.** Если уравнения

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (3)$ и

$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = 0, \qquad (3)$

где $a_i$ и $b_i$, i = 1, 2, …, n непрерывные функ. на интервале $r_1 \le x \le r_2$, имеют одну и ту же фундаментальную систему решений, то эти два уравнен. совпадают, т. е. $a_i(x) = b_i(x)$, i = 1, 2, …, n на $r_1 \le x \le r_2$

**Док-во.** Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — это фундаментальная система решений уравнения (3) и (4).

Вычитая из (3) почленно (4), получаем новое уравнение:

$(a_1(x) - b_1(x))y^{(n-1)} + \ldots + (a_{n-1}(x) - b_{n-1}(x))y' + (a_n(x) - b_n(x))y = 0, \qquad (5)$

решениями которого являются функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, удовлетворяющие одновр. уравнениям (3) и (4).

Уравнение (5) (n-1)-го порядка имеет n штук линейно независимых решений. Это противоречие. Такое возможно лишь в случае, когда все коэффициенты уравнения (5) равны нулю, т. е. $a_i(x)$ и $b_i(x)$, i = 1, 2, , n ЧТД

**24. Восстановление ДУ по известной фундаментальной системе решений.**

**Теорема 4.** Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ —фундам-ная система решений линейного однородного дифференциального ура-ия n-го порядка, то это уравнение может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n & y \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \ldots & \varphi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

**Док-во.** Покажем, что определитель задаёт лин-ное одно-ное дифференциальное уравнение n-го порядка.

Раскроем определитель по последнему столбцу, получаем: $y^{(n)}W(x) - y^{(n-1)}W_1(x) + \ldots + b_n(x)y = 0$,

т. к. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — фундаментальная система реш-й, тогда определитель Вронского $W(x) \neq 0$, а

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n & y \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & \ldots & \varphi_n^{(n-2)} & y^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \ldots & \varphi_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Дифференциальное уравнение можно переписать в виде:

$y^{(n)} - \frac{W_1(x)}{W(x)} y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \qquad (8)$ ЧТД

**25. Формула Остроградского-Лиувилля**

**Теорема:** Если $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – система решений линейного однородного дифференциального уравнения $L(p)y = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ (1) то для определителя Вронского, построенного по этой системе решений, справедлива формула $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ (2), где $x_0 \in (r_1, r_2)$ – произвольная точка.

**Лемма.** Производная определителя n-го порядка равна сумме n штук определителей n-го порядка, в которой j-е слагаемое равно определителю, полученному из исходного определителя дифференцированием j-й строки.

**Док-во теоремы:** Уравнение (1) можно переписать в следующем виде: $y^{(n)} - \frac{W_1(x)}{W_2(x)} y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0$.

Тогда коэффициент $a_1(x) = -\frac{W_1(x)}{W(x)}$. Найдем производную определителя Вронского: $\frac{d}{dt}W(x) =$

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \dots & \varphi_n'' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & \dots & \varphi_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \varphi_2^{(n-2)} & & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 + 0 + \dots + W_1(x) = W_1(x)$$

Следовательно $\frac{d}{dt}W(x) = W_1(x)$. Подставив это равенство в полученную формулу для $a_1(x)$, получим $a_1(x) = -\frac{\dot{W}(x)}{W(x)}$. В итоге мы имеем линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка: $W'(x) = -a_1(x)W(x)$. Найдём его решения, разделив переменные: $\frac{W'(x)}{W(x)} = -a_1(x)$ и проинтегрируем равенство по переменной x в пределах от $x_0$ до x $\ln W(x) - \ln W(x_0) = -\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds$, отсюда $\frac{W(x)}{W(x_0)} = e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds}$

Из последнего равенства получаем формулу (2). Теорема доказана.

**Замечание.** Приведенное доказательство справедливо только для случая, когда система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ является фундаментальной системой решения уравнения (1).

**26. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка.**

Краевые задачи (задачи выбора конкретного решения ДУ с помощью условий, задаваемых на концах некоторого отрезка) могут иметь одно решение, могут решений не иметь совсем, могут иметь много решений. - Краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид: $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (1)

Причем $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$, где $x \in R, a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ – заданные непрерывные функции, определенные на некотором заданном промежутке $[x_0, x_1]$, $x_0, x_1, y_0, y_1$ – заданные вещественные числа.

Условия $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ называются краевыми.

Положим $z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0$(2). Тогда, учитывая краевые условия, получим $y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$

Замена (2) позволяет свести краевые задачи с неоднородными (ненулевыми) краевыми условиями к краевой задачи с нулевыми краевыми условиями.

**27. Теорема о выражении решения неоднородной краевой задачи через функцию Грина**

**Теорема:** Если уравнение $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$(1) имеет решения $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, обладающие свойствами $\varphi_1(x_0) = 0, \varphi_2(x_0) \neq 0, \varphi_1(x_1) = 0, \varphi_2(x_1) \neq 0$(2), то краевая задача $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, $y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$ для любой непрерывной функции f(x) имеет единственное решение в виде $y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds$, где $G(x,s) =$

$$\begin{cases} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(s)}{a_0(s)W(s)}, & \text{при } x_0 \le s < x \\ \frac{\varphi_2(s)\varphi_1(x)}{a_0(s)W(s)}, & \text{при } x \le s < x_1 \end{cases}$$

**28. Свойства функции Грина.**

1.При фиксированном $s \neq t$ *G(x, s)* является решением уравнения $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

*2.G(x, s)* удовлетворяет условиям $y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$, т. е. $G(x_0, s) = 0, G(x_1, s) = 0$

*3.G(x, s)* непрерывная функция при $x_0 \le x, s \le x_1$

4. $G_x'(s+0,s) - G_x'(s-0,s) = \frac{1}{a_0(s)}$, производная $G_x'$ — разрывная ф-я в точке x=s (разрыв 2 рода)

Док-во. 2) Покажем, что $G(x_0, s) = 0, G(x_1, s) = 0$

$$G(x_0, s) = \frac{\varphi_2(s)\varphi_1(x_0)}{a_0(s)W(s)} = 0, \quad G(x_1, s) = \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x_1)}{a_0(s)W(s)} = 0$$

4) Покажем, что $G_x'(s+0,s) - G_x'(s-0,s) = \frac{1}{a_0(s)}$

$$G_x'(s+0,s) = \frac{\varphi_1(s)\varphi_2'(s)}{a_0(s)W(s)} \ (t = s+0, t > s)$$

$$G_x'(s-0,s) = \frac{\varphi_2(s)\varphi_1'(s)}{a_0(s)W(s)} \ (t = s-0, t < s)$$

$$G_x'(s+0,s) - G_x'(s-0,s) = \frac{\varphi_1(s)\varphi_2'(s) - \varphi_2(s)\varphi_1'(s)}{a_0(s)W(s)} = \frac{W(s)}{a_0(s)W(s)} = \frac{1}{a_0(s)}$$

**29. Теорема о разрешимости неоднородной краевой задачи.**

**Теорема:** Если однородная краевая задача *$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$, $y(x0)=0$, $y(x_1)=0$* (*) имеет только нулевое решение, то неоднородная краевая задача *$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$, $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, $z=y-\frac{(y1-y0)}{(x1-x0)}(x-x_0)-y0$, $y(x_0)=0$, $y(x_1)=0$* имеет !решение ∀ непрерывной *f(x)*, т.е. *∃G(x,s)*

**Док-во:** Покажем что *∃ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:*

*$\varphi_1(x_0)=0$, $\varphi_2(x_0) \neq 0$ ; $\varphi_1(x_1) \neq 0$, , $\varphi_2(x_1)=0$*

Пусть начальные условия *$\varphi_1(x_0)=0$, $\varphi_1'(x_0)=1$* (**)

Задача Коши для (*) и (**). По теореме ∃ и ! ∃! решение *$\varphi_1(x)$* для (*), удовлетворяющее (**)

Покажем, что *$\varphi_1(x_1) \neq 0$*.

П.п: *$\varphi_1(x)=0$*. Тогда *$\varphi_1(x)$* удовлетворяет краевым условиям (*) и по условию теоремы *$\varphi1(x) \equiv 0$*. Пришли к противоречию, т.к. в силу (**) *$\varphi_1'(x_0) =1$*.

Пусть теперь начальные условия

*$\varphi_2(x_1)=0$, ; $\varphi_2'(x_2)=1$* (***)

Задача Коши для (*) и (***). По теор ∃ и ! ∃! решение *$\varphi_2(x)$* для (*), удовлетворяющее (***)

Так же *$\varphi_2(x_0) \neq 0$*.

Более того, покажем, что *$\varphi_1$* и *$\varphi_2$* ЛН.

П.п: между *$\varphi_1$* и *$\varphi_2$* ∃ ЛЗ: *$\varphi_1(x)=c\varphi_2(x)$*. Но тогда *$\varphi_1(x_0)=0$, $\varphi_1'(x_1)= c\varphi_2(x)=0$*

Пришли к тому, что *$\varphi_1$* удовл-т (**) и по условию теоремы *$\varphi_1(x) \equiv 0$*. Противор с начальными условиями

**30.Линейная однородная система и ее свойства.**

Имеет вид *$x'=A(t)x$* (1)

Свойства : a) Если коэффициенты *A(t)* непрерывны на *(r1,r2)* то по теореме ∃ и ! уравнение (1) допускает ! решение, удовлетворяющее условию *$x(t_0)=x_0$*, определенное на *(r1,r2)*

b) Если решение *$\varphi(t)$* уравнения (1) обрщается в 0 при некотором t, т.е. *$\varphi(\tau)=0$*, то *$\varphi(t)=0$* **Док-во:** (1) имеет нулевое решение. Тогда в момент времени $\tau$ решение *$\varphi(t)$* и нулевое решение совпадают. Тогда по теореме ∃ и ! они совпадают на общем интервале определения, т.е. *$\varphi(t)=0$*

c) Если *$\varphi_1(t),\dots,\varphi_k(t)$* – решение (1), то ∀ *$c_1,\dots,c_k$* функция *$\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+\dots+c_k\varphi_k(t)$* тоже является решением (1)

**Док-во:** ∀ *$\varphi_j(t)$* справедливо *$\varphi_j'(t)=A(t)\ \varphi_j(t), j\in[1,k]$.*

*$\psi'(t)=c_1\varphi_1'(t)+\dots+c_1\varphi_k'(t)=c_1A(t)\varphi_1(t)+\dots+c_kA(t)\varphi_k(t) = A(t)(c_1\varphi_1(t)+\dots+c_k\varphi_k(t))=A(t)\psi(t)$*

**31.Линейная зависимость векторных фу-ий. Фундаментальная система решений.**

**Опр.** Векторные фу-и $\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ ЛЗ на $q1<t<q2$, если $\exists\ c_1, \dots, c_k$: 1) $|c_1|+\dots+|c_k|\neq 0$. 2) $c_1\varphi_1(t)+\dots+c_1\varphi_k(t)=0,\ \forall t\in(q1,q2)$

В противном случае функции ЛН

**Теорема 1:** если решения $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ ур-я $x'=A(t)x$ (1) ЛЗ в т. $t_0$, то они ЛЗ (т.е. если ЛЗ векторы $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$, то ЛЗ реш-я вект-е ф-и $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$) **Док-во:** пусть $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ ЛЗ то $\exists\ c_1,\dots,c_n$: 1) $|c_1|+\dots+|c_k|\neq 0$ 2) $c_1\varphi_1(t)+\dots+c_1\varphi_k(t)=0,\ \forall t\in(q1,q2)$

Пусть $\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+\dots+c_k\varphi_n(t)$. По св-ву с) $\psi(t)$ решение (1). Кроме того $\psi(t_0)=0$. По св-ву b) $\psi(t)=0$, что означает ЛЗ $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$

**Замечание:** если не предполагать, что $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ решения (1), теорема неверна.

**Опр.** n штук ЛН решений (1) наз-ся ФСР (1)

**Теорема 2:** если $A(t)$ непр-на на $q1<t<q2$, то на $(q1,q2)\ \exists$ ФСР

**Теорема 3:** если $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ – ФСР (1), то $\psi(t)=c1\ \varphi1(t)+\dots+cn\ \varphi n(t)$ (*) есть общее решение (1), $c_1, \dots, c_n$ – const **Док-во:** то, что (*) – решение (1) следует из св-ва с). $\forall$ решение можно записать в виде (*), перебрав $c_1, \dots, c_n$. Возьмем $t_0$. Векторы $\varphi_1(t_0),\dots,\varphi_n(t_0)$ ЛН $\rightarrow$ они образуют базис в $C^n$. Рассмотрим $x(t)$ – $\forall$ решение (1). Тогда вектор $x(t_0)$ можно разложить: $x(t_0) = c_1\varphi_1(t_0)+\dots+c_n\ \varphi_n(t_0)$, $c_1,\dots,c_n$ – специально выбранные числа. Т.о. в момент $t_0$ решение $x(t)$ записано в виде (*). По теореме $\exists$ и ! $x(t)= c_1\varphi_1(t)+\dots+c_n\varphi_n(t)$

**32. Определитель Вронского. Формула Лиувилля**

Пусть $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – n-мерные ф-и. Тогда определитель

$$W(t)=\begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \dots & & & \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

i-м столбцом к-го явл-ся $\varphi_i(t)$ решение $x'=A(t)x$, точнее его коорди-ты, наз-ся определителем Вронского сис-мы $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ если $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ ЛН, то $w(t)$ не обращ-ся в 0, и $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – ФСР. если $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ ЛЗ, то w(t)=0. **Теорема:** чтобы сис-ма $\varphi_1(t),\dots, \varphi_n(t)$ была фундаментальной, н. и д., чтобы ее $w(t)$ не обращался в 0. **Док-во:** Необходимость: пусть $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ – ФСР. Покажем, что $w(t)$ не обращается в 0.

П.п: $\exists\ t_0$: $w(t_0)=0$. Тогда векторы-столбцы $\varphi_1(t_0),\dots, \varphi_n(t_0)$ ЛЗ. По теореме 1: $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ ЛЗ $\rightarrow$ противоречит фундаментальности $\rightarrow$ предположение неверно

**Достаточность**: пусть $w(t)$ не обращается в 0. Тогда векторные ф-и $\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)$ ЛН как ЛН вектор-столбцы в $w(t)\rightarrow\ \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ ФСР. **Теорема:** для $w(t)$ сис-мы решений $x'=A(t)x$ справедлива формула $w(t)=w(t_0)e^{\int SpA(\tau)d\tau\ (от\ t0\ до\ t)}$, где $t_0$ – какое-то число, $SpA(\tau)$ след матрицы (сумма диагональных элементов)

**33. Матричные дифференциальные уравнения. Свойства фундаментальных матриц**

**Опр.** ур-е вида $x'=A(t)X$, (1) где $X$ – матрица порядка n*n называется матричным ДУ. **Опр.** решением (1) наз-ся матричная ф-я, определенная хотя бы на малом отрезке, подстановка к-й в (1) обращает его в тождество по t на некотором интервале

Если записать $X$ в виде $X=(x_1,\dots,x_n)$, где $x_i$ – вектор-столбец $X$, тогда (1): $(x_1',\dots,x_n')=A(t)(x_1,\dots,x_n)$

**Утверждение:** матрица $X(t)$ явл-ся решением (1) титтк все вект-е столбцы $x_i(t)$ этой матрицы явл-ся решениями (1)

**Док-во:** Необх-ость: пусть $X$ –реш.(1),тогда $(x_1',\dots,x_n')=A(t)(x_1,\dots x_n)$, приравнивая по координатам $x_1'=A(t)x_1, \dots, x_n'=A(t)x_n$, т.е. $x_1(t),\dots,x_n(t)$ – решения $x'=A(t)x$ достаточность: аналогично

**Опр.** Фундам-ная матрица Ф(t) сис-мы $x'=A(t)x$, удовлетворяющая $Ф(t_0)=I$ наз-ся фундаментальной матрицей, нормированной в $t_0$.

**Свойства: Теорема 1:** чтобы матр ф-я была фундаментальной, н. и д., чтобы она была решением $X'=A(t)X$ и ее $w(t)$ нигде не обращался в 0. **Док-во:** сис-ма фундаментальна $\leftrightarrow$ она явл-ся решением $x'=A(t)x$ и ее определитель нигде не обращается в 0

**Теорема 2:** если Ф(t) – фундаментальная матрица для $x'=A(t)x$, а C – произвольная невырожденная матрица n*n, то $\Phi(t)C=\psi(t)$ также фундаментальная матрица для $x'=A(t)x$

**Док-во:** $\psi'(t)=\Phi'(t)C=A(t)\ \Phi(t)C=A(t)\psi(t)$

$\psi(t)$ – невыр-я матрица $\forall t$, тк она есть произведение вырожденных матриц.

**34. Формула решения задачи Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений**

Задача Коши для $x'=A(t)x+b(t)$ (1), $x(t_0)=x_0$ (2), где $t\in R$, $x(t)\in C^n$, $b(t)\in C^n$, $A(t)\in R^{n*n}$

**Теорема:** если известна фундаментальная матрица $\Phi(t)$ сис-мы $x'=A(t)x$, то решение задачи (1)-(2) находится как $x(t)=\Phi(t)\ \Phi^{-1}(t_0)x_0+\int\Phi(t)\Phi^{-1}(s)b(s)ds$ (от $t_0$ до $t$) **Док-во:** метод вариаций произв-х постоянных: Запишем общее решение $x(t)=\Phi(t)c$, $c=(c_1,\dots c_n)$. Тогда частное решение имеет вид $x(t)=\Phi(t)c(t)$ (*), $c(t)$ – неизвестная векторная ф-я. Подставим в (1) $\Phi'(t)c(t)+\Phi(t)c'(t)=A(t)\ \ \Phi(t)c(t)+b(t)$. Тк $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица, то $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$, тогда $A(t)\Phi(t)c(t)+\Phi(t)\ c'(t)=A(t)\ \Phi(t)c(t)+b(t)$ Тк $\exists\ \Phi^{-1}(t)$ то $c'(t)=\Phi^{-1}(t)b(t)$ Тогда с помощью (2) и (*): $x(t_0)=\Phi(t_0)c(t_0)=x_0\rightarrow\ c(t_0)=\Phi^{-1}(t_0)x_0+\int\Phi^{-1}(t)b(s)ds$ (от $t_0$ до $t$) подставим в (*)

$x(t)=\Phi(t)\ \Phi^{-1}(t_0)x_0+\int\Phi(t)\ \Phi^{-1}(s)b(s)ds$ (от $t_0$ до $t$)

**35. Решение линейных однородных систем с постоянными коэффициентами (случай простых собственных значений).**

Линейная одно-ая сис-ма с постоянными коэффициентами: $x'=Ax$ (*), где $x\in Cn$, $A\in Rn*n$ $\det(A-\lambda I)=0$ – характеристическое ур-е $A$ и (*). Слева многочлен n степени – характеристический многочлен

**Опр.** если $\exists$ вектор $h\in C^n$, $h\neq 0$: $Ah=\lambda h$, $\lambda\in C$, то h -собственный вектор для $A$, отвечающий собственному значению $\lambda$

**Теорема:** чтобы векторная ф-я $e^{\lambda t}h$, $\lambda\in C$, $h\in C^n$, была реш-ем (*), необходимомо и достаточно чтобы $h$ был собственным вектором А, отвечающим собственному зн-ю $\lambda$

**Док-во:** чтобы ф-я была решением (*) н. и д. чтобы она удовлетворяла $\frac{d}{dt}e^{\lambda t}h=\lambda e^{\lambda t}h=Ae^{\lambda t}h$. Сократив на $e^{\lambda t}h$ получим $Ah=\lambda h$, что означает, что $h$ – собственный вектор А, отвечающий собственному зн-ю $\lambda$. **Следствие:** если А имеет только простые собственные значения $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ и $h_1,\dots,h_n$ соответс-щие им вектора, то ф-и $e^{\lambda 1t}h1,\dots, e^{\lambda nt}hn$ образуют ФСР

**Док-во:** все эти ф-и явл-ся решениями (*) $\rightarrow$ надо доказать что они независимы в момент $t_0$. Пусть $t_0=0$, тогда решения имеют вид $h_1,\dots,h_n$. Собственные вектора отвечающие собственным значениям ЛН $\rightarrow$ решения ЛН в момент t0 $\rightarrow$ они будут независимы в $\forall$ момент $t$.

**36. Основные понятия теории устойчивости (устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость).**

Пусть $x'=f(t,x)$ (1), $x(t_0)=x_0$ – н.у. (2) $\varphi(t)$ – решение з. Коши (1)-(2) **Опр.** Говорят, что $\varphi(t)$ – решение з. Коши (1)-(2) устойчиво по Ляпунову, если $\forall\varepsilon>0\ \exists$ такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что $\forall$ другого решения $x(t)$ ур-я (1), начальные условия которого удовлетворяют условию $||x(t0)- \varphi(t0)|| < \delta$. Справедливо, что при всех $t \geq t_0$ выполняется условия $|| x(t)- \varphi(t)|| < \varepsilon$.

**Опр.** Говорят, что $\varphi$(t) – решение з. Коши (1)-(2) наз-ся неуст-вым по Ляпунову, если $\exists\, \varepsilon > 0$: $\forall \delta > 0$ $\exists\, x(t)$ (1) н.у. к-го удовл-т $||x(t_0)- \varphi(t_0)|| < \delta$, но $\exists$ момент времени $t_1 > t_0$: $||x(t_1)- \varphi(t_1)|| > \varepsilon$

**Опр.** Говорят, что $\varphi$(t) – решение з. Коши (1)-(2) асимптотически устойчиво по Ляпунову, если 1. оно просто устойчиво по Ляпунову 2. $\exists$ такое $\delta_0 > 0$, что для любого другого решения $x(t)$ (1), н.у. которого удовлетворяют условию $||x(t_0)- \varphi(t_0)|| < \delta_0$ справедливо предельное отношение $lim\ ||x(t)- \varphi(t)|| =0$ при $t \to \infty$

**37. Устойчивость линейных систем с переменными коэфф-ами.**

Рассмотрим линейную неоднородную систему x ′ = A(t)x + b(t) (1) Будем предполагать, что матрица A(t) непрерывна при всех t ≥ 0.

**Теорема 1.** Для того чтобы любое решение линейной системы (1) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову н. и д., чтобы было устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову нулевое решение однородной системы x ′ = A(t)x. (2)

Док-во. Пусть x(t, $x_0$) произвольное решение системы (1). Сделаем замену переменных, положим y(t) = x − x(t, $x_0$) (3) где x – произвольная функция, являющаяся решением системы (1). Продифференцируем соотношением (3), получаем y ′ = x ′ − x ′ (t, $x_0$) = A(t)x + b(t) − A(t)x(t, $x_0$) − b(t) = A(t)(x − x(t, $x_0$)) = A(t)y. Для начальных условий справедливо y($t_0$) = x($t_0$) − x($t_0$, $x_0$) = 0. Таким образом замена (3) приводит к одноро-ой системе, а отсюда следует утверждение теоремы.

**Теорема 2.** Для того чтобы нулевое решение лин. Однородной системы (2) было устойчиво по Ляпунову н. и д., чтобы все решения этого уравнения были ограничены при t ≥ 0. Док-во. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть нулевое решение системы (2) устойчиво по Ляпунову, т.е. ∀ ε > 0 ∃ δ = δ(ε) > 0 ∀ ξ : ‖ξ‖ < δ ‖x(t, ξ)‖ < ε ∀ t ≥ 0. Покажем, что все решения системы (2) ограничены при t ≥ 0.

Предположим противное, т.е. существует решение φ(t) системы (2) не ограничено при t ≥ 0. Рассмотрим функцию $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\|\varphi(0)\|} * \frac{\delta}{2}$ – это решение уравнения (2). Кроме того $\|\psi(0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Так как ψ(t) – решение уравнения (2) из определение устойчивости нулевого решения следует, что ‖ψ(t)‖ < ε ∀t ≥ 0. 2 Однако мы предположили, что φ(t) не ограничено. Следовательно, неограничено и ψ(t) при t ≥ 0. Получили противоречие. Следовательно, все решения системы (2) ограничены.

**38. Необходимое и достаточное условие устойчивости линейных систем с постоянными матрицами.**

Рассмотрим линейную однородную систему вида x ′ = Ax, (1) где A – постоянная матрица порядка n × n , x ∈ $C^n$. **Теорема 3**. Для устойчивости линейной однородной системы с постоянной матрицей A н. и д., чтобы вещественные части всех собственных значений матрицы A были неположительны :Re λ ≤ 0, ∀ λ ∈ σ(A), а собственным значениям лежащим на мнимой оси должно отвечать столько собственных векторов какова кратность собственного значения, т.е. должны отсутствовать присоединенные вектора

Док-во. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть система (1) устойчива. Предположим, что теорема неверна. Тогда возможны 2 ситуации: 1. существует ∃ λ ∈ σ(A), такой что Re λ > 0, 2. существует ∃ λ ∈ σ(A), λ = iγ, такой что у него есть хотя бы один присоединенный вектор. Рассмотрим каждый случай отдельно: 1) Существует ∃ λ ∈ σ(A), такой что Re λ > 0. В этом случае система (1) имеет решение вида x(t) = $e^{\lambda t}$ h, h ≠ 0

причем ‖x(t)‖ = ‖$e^{\lambda t}$ h‖ = |$e^{\lambda t}$ | ‖h‖ = $e^{\mathrm{Re}\,\lambda t}$ ‖h‖ → ∞ при t → ∞ т.е. x(t) – неограниченное решение, это противоречит теореме 2.

2) Существует ∃ λ ∈ σ(A), λ = iγ, такой что у него есть хотя бы один присоединенный вектор. В этом случае решение имеет вид x(t) = $e^{i\gamma t}$ p(t), где p(t) – векторный многочлен, причем хотя бы одна его координата имеет степень не ниже 1. Тогда ‖x(t)‖ = ‖$e^{i\gamma t}$ p(t)‖ = |$e^{i\gamma t}$ | ‖p(t)‖ = ‖p(t)‖ → ∞ при t → ∞ т.е. x(t) – неограниченное решение, это противоречит теореме 2. Следовательно, теорема верна.

**39.Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости лине-ых систем с постоянными матрицами.**

Рассмотрим линейную однородную систему вида x ′ = Ax, (1) где A – постоянная матрица порядка n × n , x ∈ $C^n$

**Теорема 4.** Для того чтобы линейная однородная система (1) с постоянной матрицей A была асимптотически устойчива н. и д., чтобы вещественные части всех собственных значений матрицы A были отрицательны Re λ < 0, ∀ λ ∈ σ(A).

Док-во. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть система асимптотически устойчива, тогда по теореме об устойчивости линейных систем с постоянными матрицами имеем Re λ ≤ 0, ∀ λ ∈ σ(A), Надо показать, что Re λ≠0. Предположим противное, что существует λ = iγ ∈ σ(A). Тогда система (1) имеет решение вида x(t) = α$e^{i\gamma t}$h, где h – собственный вектор h ≠ 0 . Оценим норму этого решения ‖x(t)‖ = ‖α$e^{i\gamma t}$h‖ = |α| |$e^{i\gamma t}$| ‖h‖ = |α| ‖h‖ →/ 0 при t → +∞ Однако это противоречит асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1). Следовательно, Re λ < 0, ∀ λ ∈ σ(A).

**40.Фазовая плоскость однородной линейной системы 2-го порядка (узел, седло, фокус, центр).**

Автономная система второго порядка $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ (1)

Плоскость переменных x и y называется фазовой плоскостью. (x(t), y(t)) – фазовой траекторией. Совокупность всех фазовых траекторий на фазовой плоскости называется фазовый портрет.

Особой точкой системы (1) называется точка в которой $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$, Рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами вида: $\begin{cases} y' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ (2), где матрица A имеет вид A=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Найдем особые точки системы (2). Для этого нужно решить уравнение вида Ax = 0. Положим det A $\neq 0$ , тогда (0, 0) – единственная особая точка. 1) Пусть собственные значения матрицы A вещественные и различные: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Общее вещественное решение (2): $X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2$(3), где $h_1$ и $h_2$ — собственные векторы отвечающие $\lambda_1$ и $\lambda_2$ соответственно, $c_1$ и $c_2$ — действительные постоянные. $h_1$ и $h_2$ — ЛН=>(3) можно разложить по $h_1$ и $h_2$ как по базису: $X(t) = \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$. Тогда координаты фазовых траекторий: $\begin{cases} \xi_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ (4) — параметри-ое задание фазовых траекторий

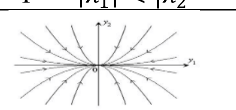
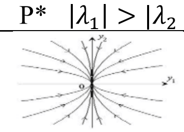
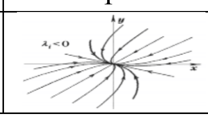
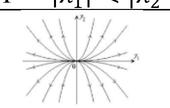
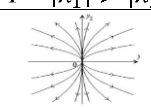
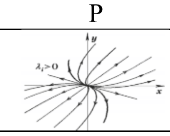
Наряду с фазовой плоскостью P будем рассматривать вспомогательную плоскость P*, в ней $h_1$ и $h_2$ — единичные ортогональные векторы, поэтому существует отображение, переводящее $h_1$ в $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а $h_2$ в $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

В плоскости P* имеются траектории, задаваемые уравнениями:$\begin{cases} \xi_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) = -c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ (5) и $\begin{cases} \xi_1(t) = -c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \xi_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ (6)

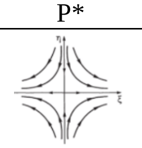
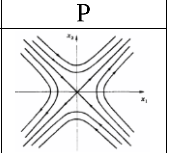
1 случай. Узел. $\lambda_1$и $\lambda_2$ вещественные и имеют один знак, т.е. $\lambda_1 * \lambda_2 > 0$

а) $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0; |\lambda_1| < |\lambda_2|$; б) $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0; |\lambda_1| < |\lambda_2|$

Если $c_1$=0 и $c_2 > 0$, то после подстановки в (4) получим положительную полуось ординат, если $c_1 > 0$ и $c_2 = 0$ — положительную полуось абсцисс. Если же $c_1 > 0, c_2 > 0$: $\frac{\xi_2(t)}{\xi_1(t)} = \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ и получаем параболоидные кривые. Движение в 1 четверти по траекториям состоит в асимптоматическом приближении точки к началу координат, траектории касаются оси абсцисс в начале координат

| Устойчивый: $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ | | | Неустойчивый: $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| P* $\lvert\lambda_1\rvert < \lvert\lambda_2$ | P* $\lvert\lambda_1\rvert > \lvert\lambda_2$ | P | P* $\lvert\lambda_1\rvert < \lvert\lambda_2$ | P* $\lvert\lambda_1\rvert > \lvert\lambda_2$ | P |
|  |  |  |  |  |  |

2 случай. Седло. $\lambda_1$и $\lambda_2$ вещественные и имеют противоположные знаки, т.е. $\lambda_1 * \lambda_2 < 0$. Для определённости будем считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Если $c_1$=0 и $c_2 > 0$, то после подстановки в (4) получим положительную полуось ординат, если $c_1 > 0$ и $c_2 = 0$ — положительную полуось абсцисс и двигаться по этим осям будем от начала координат. . Если же $c_1 > 0, c_2 > 0$, то траектории напоминают своим видом гиперболы, а движение по ним проходит в направлении к началу оси ординат, а затем от начала вдоль оси абсцисс.

| P* | P |
|---|---|
|  |  |

3 случай. Фокус. Пусть собственные значения матрицы A имеют вид $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha \neq 0$. Т.к. матрицу A с помощью линейного преобразования можно привести к виду $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, то систему (2) можно переписать: $\begin{cases} \tilde{x}' = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} \\ \tilde{y}' = -\beta\tilde{x} + \alpha\tilde{y} \end{cases}$ (7). Перейдём в P* к полярной системе координат: $\tilde{x} = r cos\varphi$, $\tilde{y} = r sin\varphi$ (8)

Подставим (8) в (7) и получим: $\begin{cases} r' cos\varphi - r\varphi' sin\varphi = \alpha r cos\varphi + \beta r sin\varphi \\ r' sin\varphi + r\varphi' cos\varphi = -\beta r cos\varphi + \alpha r sin\varphi \end{cases}$

Преобразуем систему: $\begin{cases} r' = \alpha r \\ \varphi' = -\beta \end{cases}$ и выпишем её решение явно $r = c exp r\{-\frac{\alpha}{\beta}\varphi\}$

Эта кривая — логарифмическая спираль

| Устойчивый фокус: $\alpha <$ 0, спираль закручивается | Неустойчивый фокус: $\alpha > 0$, спираль раскручивается |
|---|---|
|  |  |

4 случай. Центр. Пусть собственные значения матрицы A имеют вид $\lambda_{1,2} = \pm i\beta, \alpha = 0$. Тогда общее вещественное решение системы (2) имеет вид: $X(t) = c_1 cos\beta t h_1 + c_2 sin\beta t h_2$ (9). Разложим (9) по $h_1$ и $h_2$ как по базису: $X(t) = \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2$. Тогда координаты фазовых траекторий: $\begin{cases} \xi_1 = c_1 cos\beta t \\ \xi_2 = c_2 sin\beta t \end{cases}$.

Отсюда получаем, что фазовые траектории можно описать уравнением вида: $\xi_1^2 + \xi_2^2 = $ c. В этом случае каждая фазовая траектория, кроме особой точки (0;0) является замкнутой траекторией с центром в точке (0;0), направление определяется вектором скорости системы (2)

Замечание. Особые точки узел, седло и фокус устойчивы в смысле малого изменения коэффициентов системы (2), т.е. при малых изменениях тип особой точки сохраняется. Центр этим свойством не обладает, потому что условие $\alpha = 0$ может нарушиться и центр превратится в фокус.

1. Основные понятия (диф. уравнение, решен. диф. уравнения, общее решение).
2. Геометрическое представление скалярного диф. Уравнения
3. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Однородные уравнения.
5. Линейные однородные уравнения
6. Линейные неоднородные уравнения. Формула для решения задачи Коши
7. Уравнение Бернулли
8. Уравнен. в полных дифференциалах, общий интеграл.
9. Критерий для уравнений в полных дифференциалах.
10. Теорема существования и единственности Коши-Липшица (формулировка).
11. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Многочлен символа p и его свойства
12. Теорема об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней).
13. Теорема об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (случай кратных корней).
14. Выделение вещественных решений.
15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазимногочленов.
16. Правило нахождения частного решения в нерезонансном случае (без док-ва).
17. Правило нахождения частного решения в резонансном случае (без док-ва)
18. Метод вариации произвольных постоянных
19. Линейные дифф-ые ура-ия n-го порядка с переменными коэфф-ентами. Теорема о нулевом решении
20. Линейно независимые системы функций. Определитель Вронского и его свойства
21. Фундаментальная система решений. Теорема об общем решении.
22. Теорема о существовании фундаментальной системы решений.
23. Теорема об однозначном определе. коэффициентов лин-ого дифф-ого ур. n-го порядка с переменными коэф-тами его фср.
24. Восстановление ДУ по известной фундаментальной системе решений.
25. Формула Остроградского-Лиувилля
26. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка.
27. Теорема о выражении решения неоднородной краевой задачи через функцию Грина
28. Свойства функции Грина.
29. Теорема о разрешимости неоднородной краевой задачи.
30.Линейная однородная система и ее свойства.
31.Линейная зависимость векторных фу-ий. Фундаментальная система решений.
32. Определитель Вронского. Формула Лиувилля
33. Матричные дифференциальные уравнения. Свойства фундаментальных матриц
34. Формула решения задачи Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений
35. Решение линейных однородных систем с постоянными коэффициентами (случай простых собственных значений).
36. Основные понятия теории устойчивости (устойчивость, асимптотическая устойчивость, неустойчивость).
37. Устойчивость линейных систем с переменными коэфф-ами.
38. Необходимое и достаточное условие устойчивости линейных систем с постоянными матрицами.
39.Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости лине-ых систем с постоянными матрицами.
40.Фазовая плоскость однородной линейной системы 2-го порядка (узел, седло, фокус, центр).