Sistemas_Lineares_1-Sinais

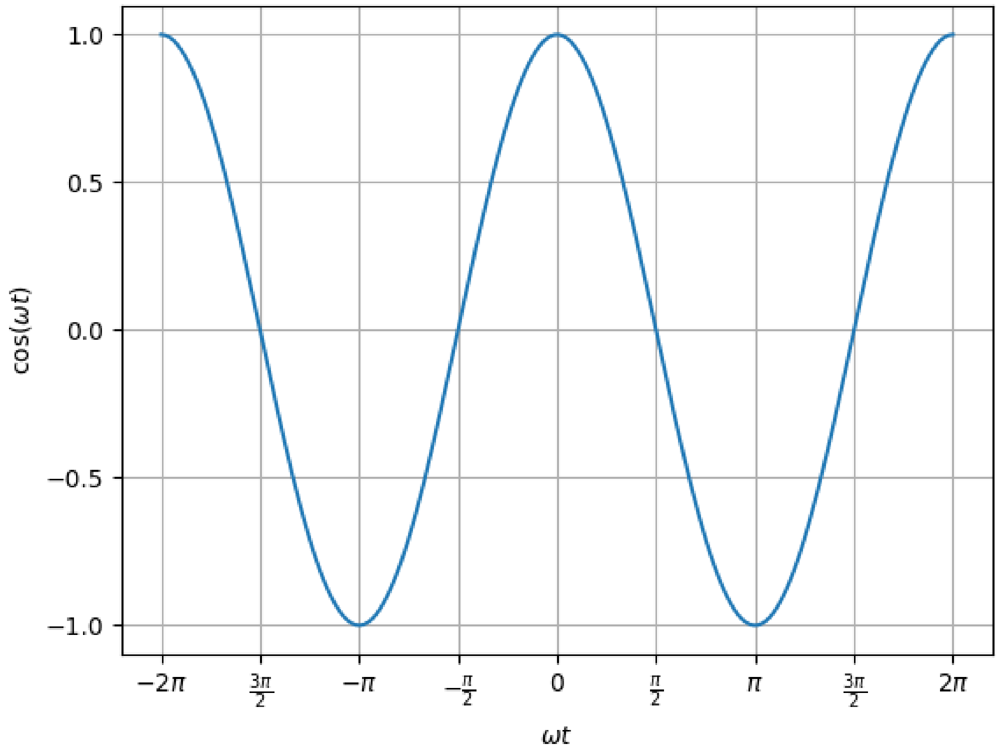
November 7, 2024

1 Sinais

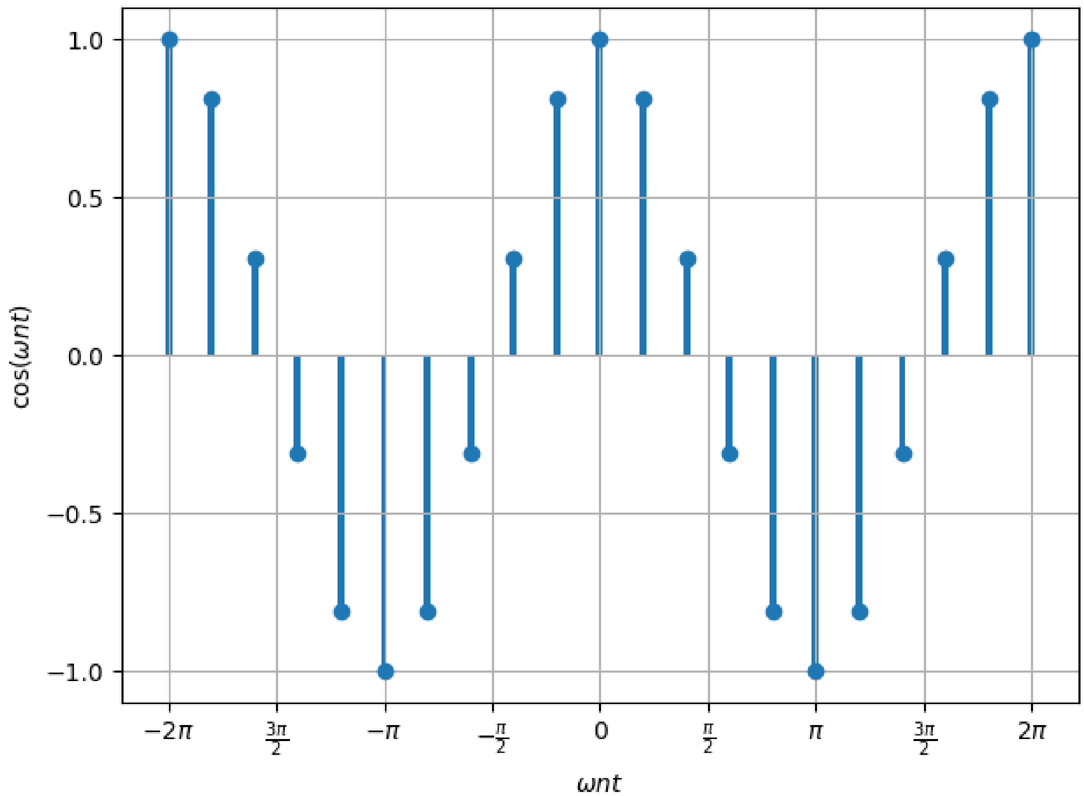
Um sinal é um conjunto de dados descrevendo um fenômeno físico, como um sinal de áudio ou de comunicação, e são parametrizados em função de uma ou mais variáveis independentes. Em sinais contínuos na análise de sistemas lineares o tempo é normalmente a variável independente. Em um sinal de tempo discreto um intervalo de tempo é dividido em nT_s intervalos discretos onde n é um número inteiro, T_s é o intervalo entre amostras e a variável independente é n.

1.1 Classificação de Sinais

- Quando um sinal é repetido em intervalos regulares T de tempo, o sinal é dito periódico com período T. O menor valor de T para o qual a repetição do sinal ocorre é chamado de período fundamental T_0. Como exemplo, a senoide $\cos(\omega t)$ é um sinal que se repete com período $k\frac{2\pi}{\omega}$ onde k é um valor inteiro, ou seja o sinal é repetido após qualquer múltiplo de $\frac{2\pi}{\omega}$, e este último é o período fundamental T_0. Sinais que não se repetem com períodos definidos são ditos não periódicos.
- Um sinal especificado para valores contínuos de tempo é um sinal contínuo no tempo. Um exemplo de um sinal contínuo no tempo é o sinal decrito pela função $A\cos(\omega t)$ que decreve um sinal de amplitude A, oscilando periodicamente com frequência angular $\omega = 2\pi f$.



- Um sinal especificado em valores discretos de t é um sinal discreto no tempo. A função $x(t) = A\cos(\omega t)$ amostrada em 20 pontos com período de amostragem $T_s = \frac{\pi}{5}$ pode ser escrita como $x[n] = A\cos(\omega n T_s)$ e é mostrada na figura abaixo:



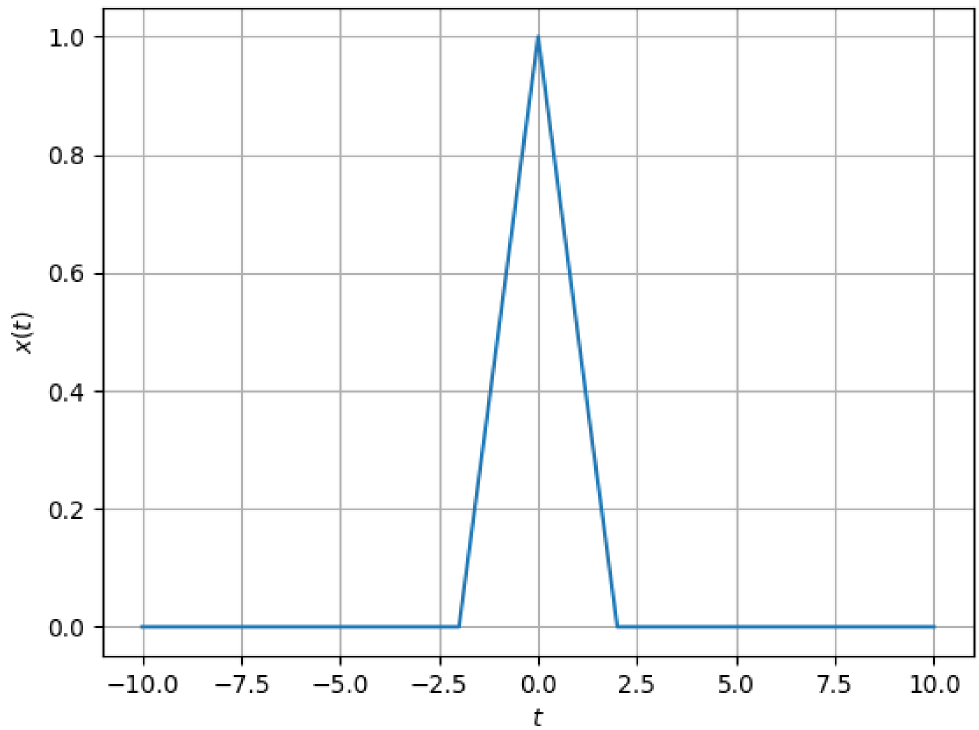
- Um sinal cuja amplitude pode assumir qualquer valor em uma faixa contínua é um sinal analógico. Um sinal analógico pode assumir um número infinito de valores.
- Um sinal cujas amplitudes podem ter apenas um número finito de valores é um sinal digital. Por exemplo, um sinal armazenado em um registrador de 3 bits pode assumir $2^3 = 8$ valores distintos.

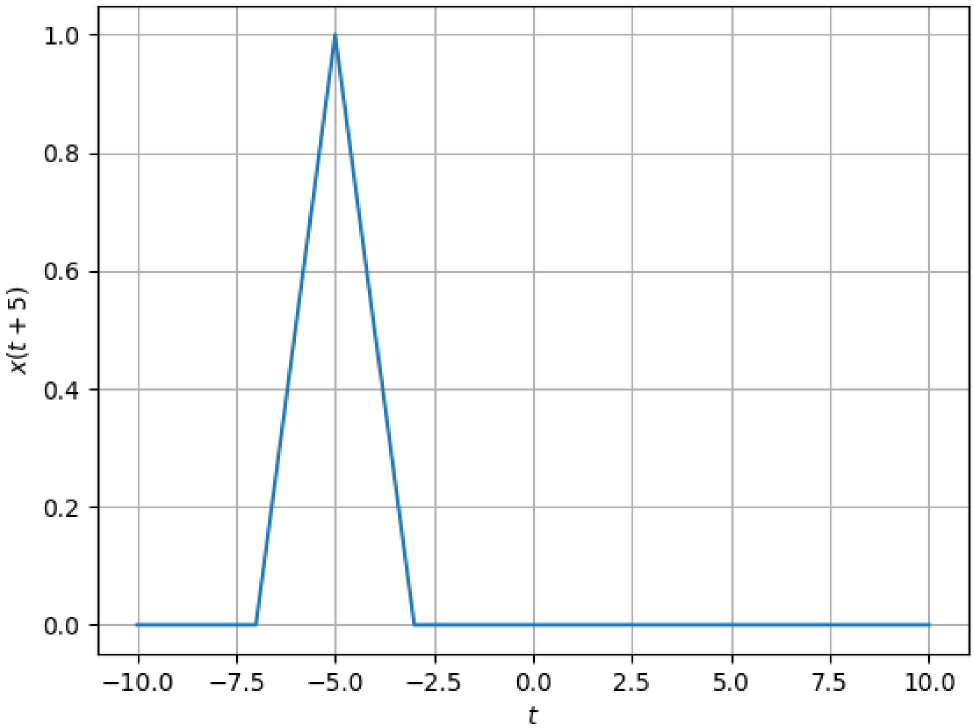
É importante que sinais analógicos não sejam confundidos com sinais contínuos, assim como sinais discretos não sejam confundidos com sinais digitais. Ao realizar a amostragem de um sinal de áudio, por exemplo, o amostrador registra o nível do sinal em cada instante de amostragem, e o resultado é um sinal representado por um conjunto discreto de valores. O sinal entretanto, ainda é um sinal analógico, e a conversão para o domínio digital ocorrerá apenas quando os valores assumirem níveis discretos em uma escala de M valores possíveis.

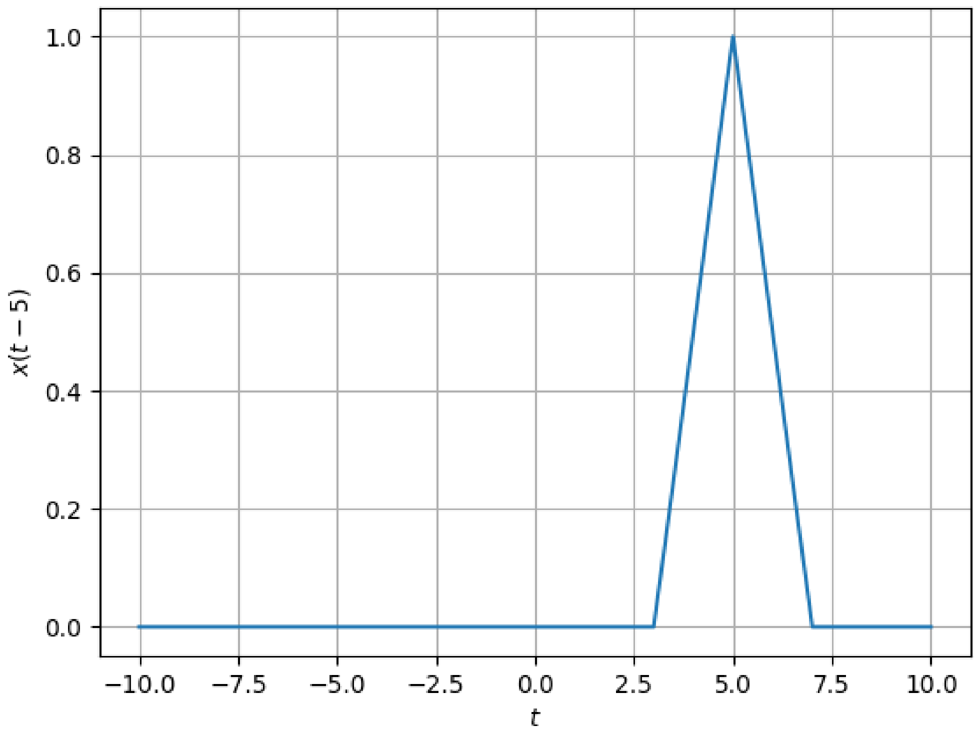
1.2 Algumas Operações Envolvendo Sinais

1.2.1 Deslocamento no Tempo

Seja um sinal $x(t)$ e uma cópia deste atrasada no tempo por T segundos. A cópia atrasada sera descrita por $x(t - T)$, assim como sua cópia adiantada pelo mesmo intervalo será descrita por $x(t + T)$ (ver figuras abaixo para $T = 5$)

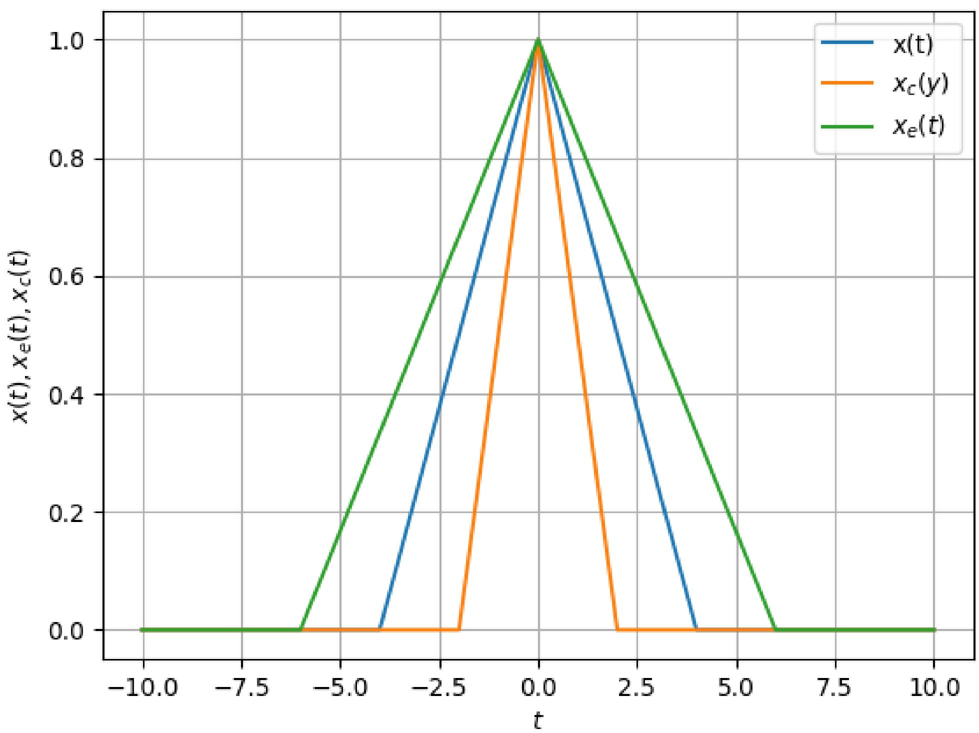

1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x(t)
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
t


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x(t + 5)
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
t



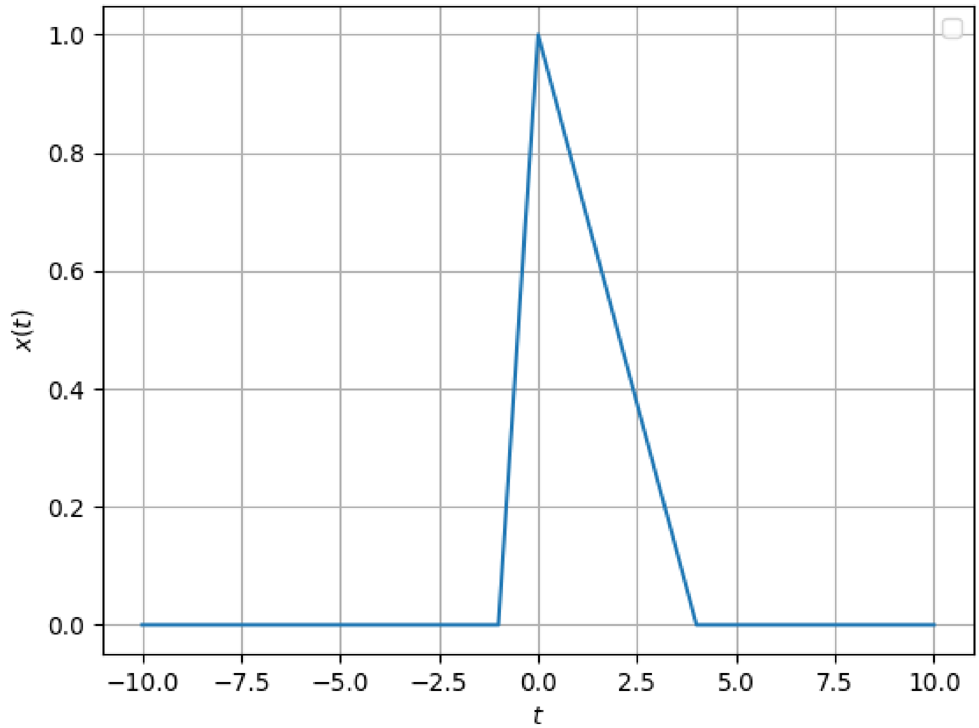
1.2.2 Escalonamento no Tempo

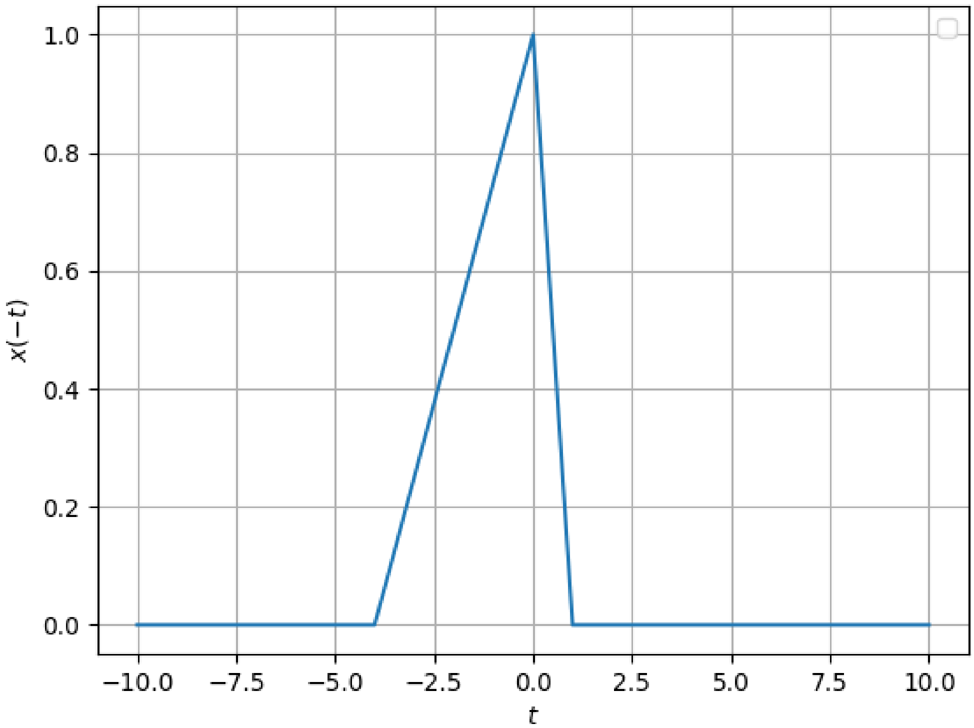
- Compressão no tempo: Seja o mesmo sinal $x(t)$ como anteriormente. o sinal $x_c(t)$ será uma cópia comprimida por um fator de 2 se $x_c(t) = x(2t)$.
- Expansão no tempo: O sinal $x_e(t)$ será uma cópia expandida por um fator de 2 se $x_e(t) = x(\frac{t}{2})$.



1.2.3 Reversão no tempo

Um sinal $x(t)$ será reverso no tempo se houver uma rotação de 180^o em torno do eixo verical, ou seja, se $x_r(t) = x(-t)$. As próximas duas figuras ilustram um exemplo para um sinal $x(t)$ e sua cópia reversa $x_r(t)$.


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
x(t)
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
t



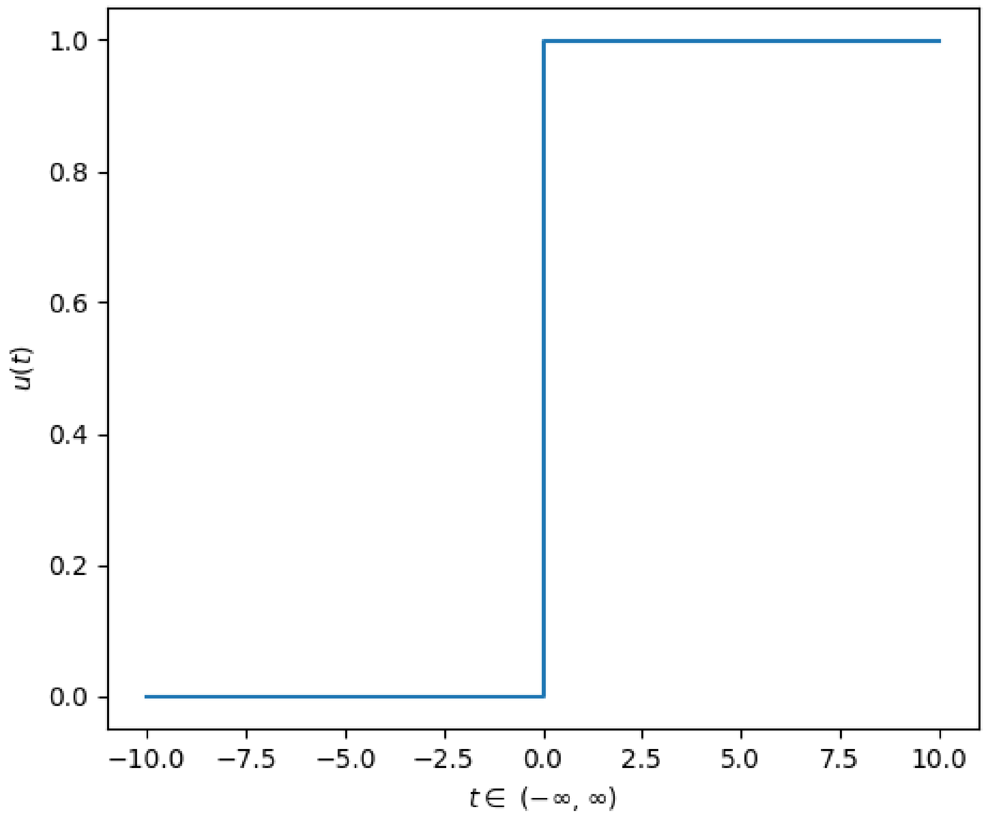
1.3 Alguns Sinais Importantes em Sistemas Lineares

1.3.1 A Função Degrau Unitário ou Função Passo de Heaviside

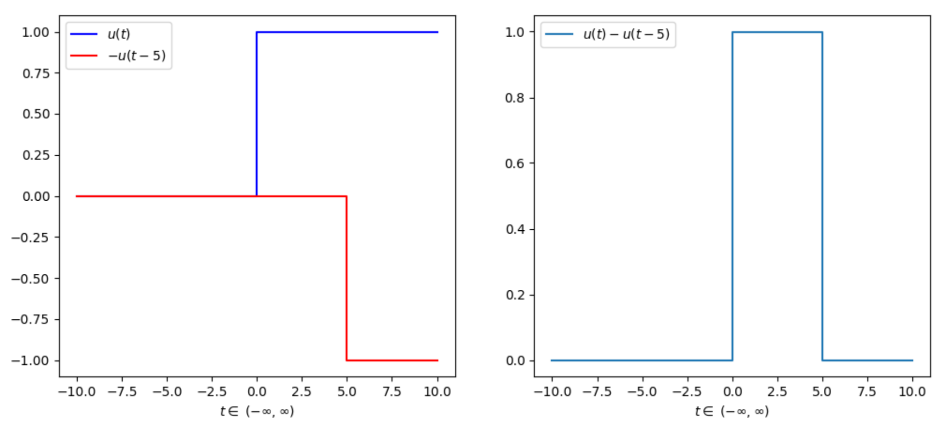
Na descrição matemática de sistemas físicos frequentemente é necessário modelar-se um processo existente a partir de um instante inicial. Por exemplo, em um circuito elétrico uma fonte de tensão senoidal é acoplada à rede no instante $t = 0$. Isto pode ser realizado utilizando-se uma função definida como:

$$u(t) := \begin{cases} 0 & \forall \ t \ < 0 \\ 1 & \forall \ t \ > 0 \end{cases}$$

de forma que se $V(t)$ é uma fonte de tensão senoidal, então $V(t)u(t)$ representa a fonte aplicada em $t = 0$. A função degrau unitário é mostrada na figura abaixo:



O degrau unitário pode ser usado para descrição de outras funções definidas por intervalos, como por exemplo, um pulso de amplitude unitária entre os instantes $t = 0$ s e $t = 5$ s pode ser convenientemente descrito como $u(t) - u(t-5)$, como mostrado na próxima figura:

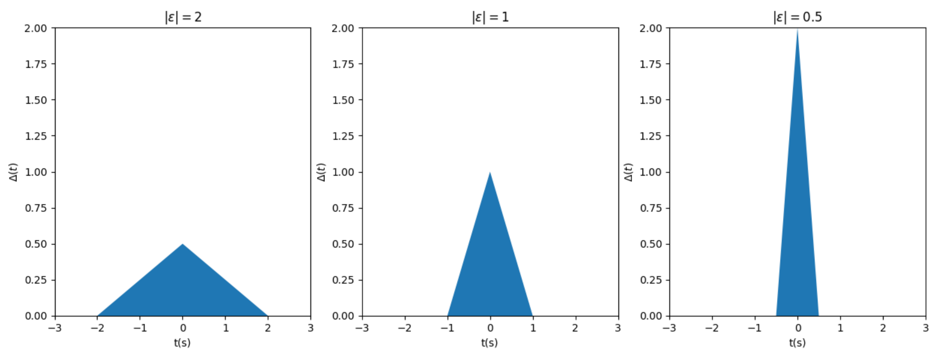


1.3.2 O Impulso Unitário, ou Delta de Dirac

O Impulso unitário $\delta(t)$ é uma "função" muito importante para o estudo de sistemas físicos em geral, e foi definida por Paul Dirac como:

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta(t) = 0 \ \ \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt \ = \ 1 \end{cases}$$

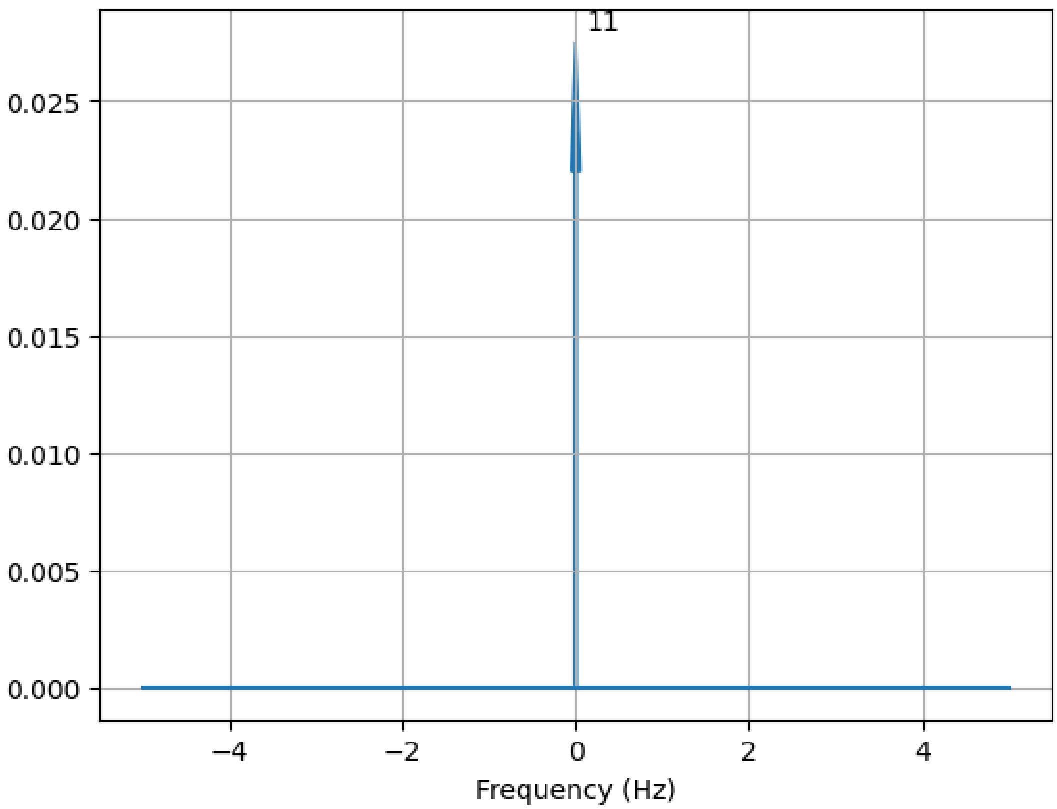
e intuitivamente representa um impulso (força, ou carga) aplicado no instante $t = 0$. É importante notar que o impulso não é, ele próprio, definido neste instante, ele é nulo para todo $t \neq 0$ e seu valor médio é 1, de onde deriva o seu nome. Por isso, o impulso unitário não pode ser considerado como uma função, no sentido próprio do termo, mas ele é claramente o limite de uma sequência de funções pulso ou triangulares (ou outras dunções tais como o pulso gaussiano) cuja base tenda para zero e mantenha sua área com valor constante unitário (ver figura abaixo). Na figura, a função triangular $\Delta(t)$ é definida de tal forma que sua base tem comprimento 2ϵ e sua altura seja igual a $\frac{1}{\epsilon}$, de forma que sua área total seja sempre unitária. Quando $\epsilon \to 0$, a amplitude da função triangular cresce rapidamente pois $\frac{1}{\epsilon} \to \infty$.



Aqui usamos uma biblioteca, lcapy, para plotar um impulso.

[2]:
```
from matplotlib.pyplot import savefig
from lcapy import *

nexpr(1).DTFT().remove_images((-5, 5)).subs(dt, 1).plot((-5, 5));
```



Algumas propriedades do Impulso são muito importantes e possuem muitas aplicações no estudo de sistemas lineares:

- Propriedade da amostragem: multiplicando o impulso por uma função $\phi(t)$ contínua em $t = 0$ e lembrando que o impulso é nulo para $t \neq 0$,

$$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t) \ ,$$

e portanto, integrando de $-\infty$ a ∞,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt \ = \ \phi(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt \ = \ \phi(0).$$

Portanto, a área do produto de uma função com um impulso $\delta(t)$ é igual ao valor dessa função no instante em que o impulso unitário está localizado.

- Considerado como uma Função Generalizada, o impulso é a própria derivada da função degrau unitário, pois, tomando-se a integral por partes da derivada de uma função contínua obtem-se a mesma propriedade da amostragem acima, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dt}\phi(t)dt = u(t)\phi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\frac{d\phi(t)}{dt}dt = \phi(0),$$

,

ou seja, a derivada do degrau opera sobre $\phi(t)$ exatamente como $\delta(t)$,

$$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

1.3.3 A Função Exponencial

Finalmente, outra função muito importante em teoria de sistemas lineares é a função exponencial e^{st}, onde s é , no caso geral, uma varável complexa, $s = \sigma + j\omega$. Portanto, pode-se escrever, usando a identidade de Euler,

$$e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t),$$

da qual tomando a parte real resulta $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ou seja, uma função senoidal com amplitude constante quando $\sigma = 0$, uma função exponencial pura (crescente ou decrescente) quando $\omega = 0$, ou finalmente uma senoide com amplitude crescente ou decrescente, com frequência ω e $\sigma > 0$ ou $\sigma < 0$, respectivamente.