

Sistemas Lineares-SCDLap_FunçãoTransfer

May 6, 2024

1 Análise de Sistemas em Tempo Contínuo com a Transformada de Laplace

1.1 Função de Transferência e Teorema da Convolução

Anteriormente vimos que para um sistema de estado nulo a equação entrada-saída pode ser escrita como

$$Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$$

Onde $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$ e $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$. A função racional

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

é a função de transferência do sistema, e além disso, $H(s) = \mathcal{L}(h(t))$. Considere um sistema S , com entrada $x(t)$ e saída $y(t)$, isto é:

$$x(t) \rightarrow S \rightarrow y(t) \tag{1}$$

e também sabemos que

$$y(t) = x(t) * h(t). \tag{2}$$

Da definição da função de transferência, podemos escrever que

$$Y(s) = H(s)X(s). \tag{3}$$

Se $x(t) = \delta(t)$, então $X(s) = 1$ e $Y(s) = H(s)$, de onde fica mostrado que, com efeito, a função de transferência é a transformada de Laplace da resposta ao impulso. Comparando agora as equações (2) e (3), podemos concluir que

$$\mathcal{L}(x(t) * h(t)) = H(s)X(s) \tag{4}$$

Este resultado, que pode ser aplicado a qualquer par de funções com Transformada de Laplace, é o *Teorema da Convolução*.

1.2 Teoremas dos Valores Inicial e Final

1.2.1 Teorema do Valor Inicial

Seja um sinal $x(t)$. A transformada de Laplace de sua derivada é

$$\mathcal{L}(x'(t)u(t)) = sX(s) - x(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} x'(t)e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt,$$

$$sX(s) - x(0^-) = x(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt = x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt \quad \text{e}$$

$$sX(s) = x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt.$$

Tomando o limite $s \rightarrow \infty$ na equação acima (desde que o limite exista), temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt + x(0^+).$$

Como o limite da integral na equação acima é nulo, o Teorema do Valor Inicial afirma que

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

Observação Importante Se $X(s)$ não é uma função racional estritamente própria ($N > M$), então o limite de $sX(s)$ não existe e o teorema não pode ser aplicado.

1.2.2 Teorema do Valor Final

Tomamos agora o limite quando $s \rightarrow 0$ na transformada de Laplace da derivada de $x(t)$, isto é

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt + x(0^-) = x(t)\Big|_{0^-}^{\infty} + x(0^-).$$

Portanto, o teorema do valor final afirma que

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

Exemplo Seja o sistema descrito pela função de transferência $H(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3}$ e entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

```
[1]: from lcopy import *
H=tf([1,5],[1,4,3])
H
```

[1]:

$$\frac{s+5}{s^2+4s+3}$$

```
[5]: v=exp(-2*t)
      X=v.LT()
      Y=H*X
      Y
```

[5]:

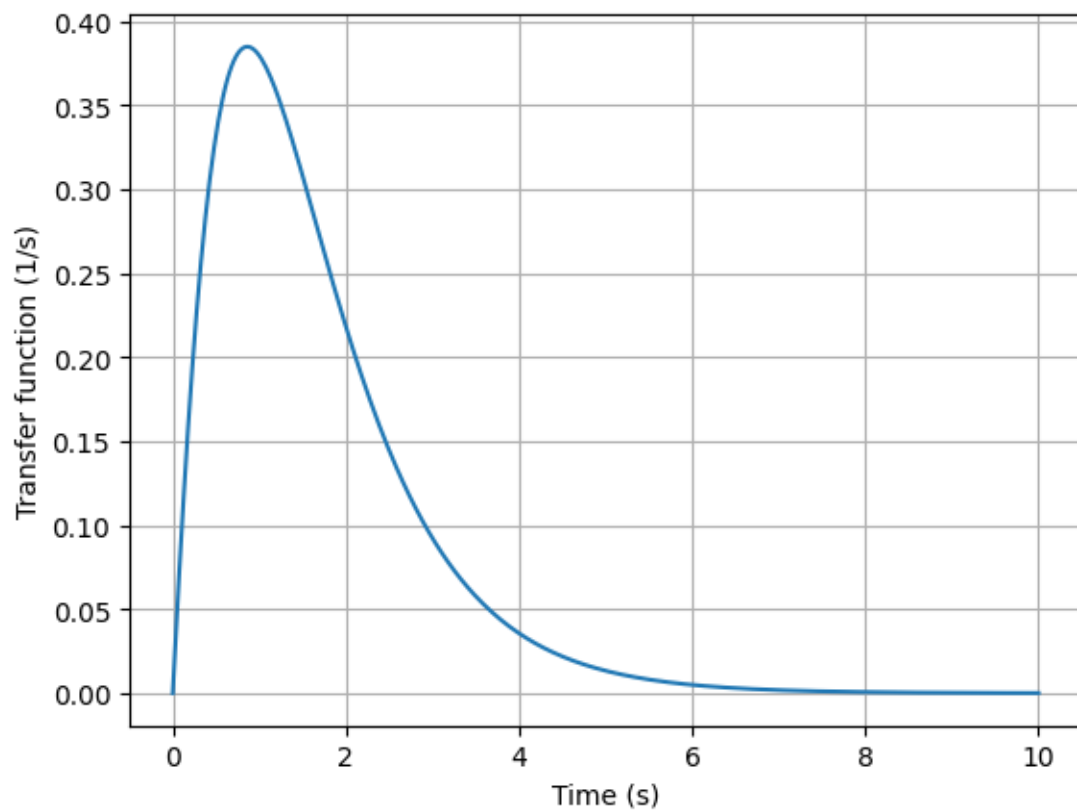
$$\frac{s+5}{(s+2)(s^2+4s+3)}$$

```
[3]: y=Y.ILT(causal=True)
      y
```

[3]:

$$(2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}) u(t)$$

```
[6]: y.plot((0,10));
```



A resposta inicia com valor nulo, e depois de uma oscilação transitória retorna à zero. Isto poderia ser visto diretamente com os teoremas do valor inicial e final, sem fazer a transformada inversa.

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s^2 + 5)}{(s^2 + 4s + 3)(s + 2)} = 0$$

e

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s^2 + 5)}{(s^2 + 4s + 3)(s + 2)} = 0$$

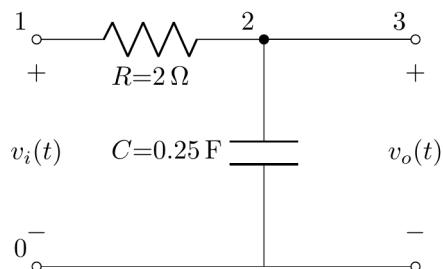
Exemplo Análise de Laplace de um filtro passa-baixas RC

A *netlist* abaixo descreve um filtro passa-baixas RC de primeira ordem.

```
[1]: from lcapy import Circuit,t,voltage,sin,u,s
```

```
a = Circuit("""
P1 1 0; down=1.5, v_=v_i(t)
R 1 2 2; right=1.5
C 2 0_2 {1/4}; down
W 0 0_2; right
W 2 3; right
W 0_2 0_3; right
P2 3 0_3; down, v^=v_o(t)""")

a.draw()
```



Onde $v_i(t)$ é a tensão de entrada e $v_o(t)$ é a tensão de saída. A função de transferência do filtro pode ser encontrada especificando os nós, ou seja,

```
[2]: H = a.transfer(1, 0, 3, 0)
H
```

[2]:

$$\frac{1}{\frac{s}{2} + 1}$$

A função de transferência também pode ser obtida especificando as componentes P1 e P2,

```
[3]: H = a.P1.transfer('P2')
```

```
H
```

```
[3]:
```

$$\frac{2}{s+2}$$

Vamos definir um sinal senoidal de entrada com frequência angular $\omega = 3\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, chaveado em $t = 0$.

```
[4]: v_i = voltage(sin(3 * t) * u(t))
```

A transformada de Laplace da tensão de entrada é obtida como:

```
[5]: V_i = v_i(s)
```

```
V_i
```

```
[5]:
```

$$\frac{3}{s^2+9}$$

A transformada de Laplace da saída é encontrada usando o teorema da convolução:

```
[6]: V_o = V_i * H
```

```
V_o
```

```
[6]:
```

$$\frac{6}{(s+2)(s^2+9)}$$

Esta função tem 3 polos, que podem ficar explícitos com a forma *zero-pole-gain* da resposta.

```
[7]: V_o.ZPK()
```

```
[7]:
```

$$\frac{6}{(s+2)(s-3j)(s+3j)}$$

A transformada inversa fornece a tensão de saída no domínio do tempo.

```
[8]: v_o = V_o(t)
```

```
v_o
```

```
[8]:
```

$$6 \cdot \left(\frac{2 \sin(3t)}{39} - \frac{\cos(3t)}{13} + \frac{(-2-3j)(-2+3j)e^{-2t}}{169} \right) u(t)$$

Este resultado pode ser simplificado com o método `simplify_terms`.

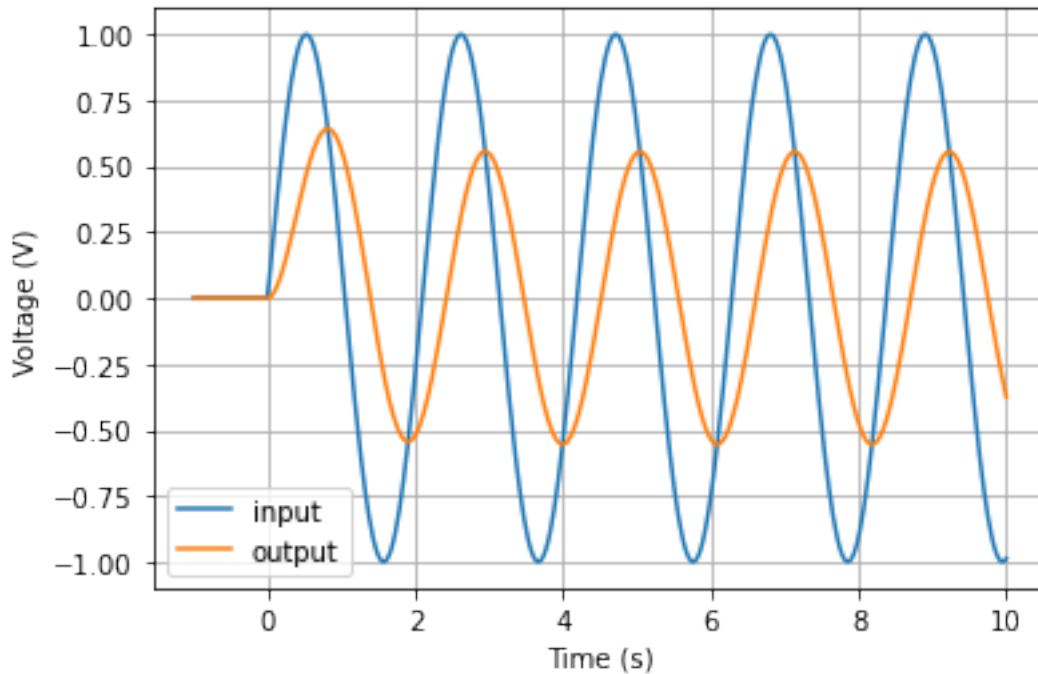
```
[9]: v_o.simplify_terms()
```

```
[9]:
```

$$\frac{2 \cdot (2e^{2t} \sin(3t) - 3e^{2t} \cos(3t) + 3) e^{-2t} u(t)}{13}$$

Finalmente, podemos fazer um gráfico dos sinais de entrada e saída.

```
[10]: ax = v_i.plot((-1, 10), label='input')
      ax = v_o.plot((-1, 10), axes=ax, label='output')
      ax.legend();
```



1.3 Estabilidade

Da equação $Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$ obtemos $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$. Qual a relação entre $Q(s)$ e $Q(\lambda)$? São iguais? $Q(\lambda)$ é o polinômio característico do sistema, e descreve os seus modos característicos. Daí, $Q(\lambda)$ é uma descrição interna do sistema. Já $H(s)$ é uma relação de entrada-saída, não considerando o sistema internamente. $H(s)$ fornece uma descrição externa do sistema. Entretanto, se ao montar a função de transferência, não houver cancelamentos entre polos e zeros iguais no numerador e denominador de $H(s)$, então deste caso, $Q(s) = Q(\lambda)$, e portanto de $Q(s)$ poderemos obter também informação sobre a estabilidade interna do sistema.

Assim, a princípio, podemos dizer que se todos polos de $H(s)$, ou as raízes de $Q(s)$, são negativos, ou complexos com parte real negativa (os polos estão no semiplano esquerdo do plano complexo), então, o sistema é BIBO estável. Pois $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s+a}\right) = Ae^{-at}$, de forma que a resposta ao impulso tende assintoticamente a zero sendo portanto absolutamente integrável.

Se a função de transferência não é própria, isso é, M , o grau $P(s)$, é maior que N , o grau de $Q(s)$, então o sistema é instável. Por exemplo, seja

$$H(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 4s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3s + 2}.$$

Note o termo s , o primeiro termo de $H(s)$. Se um degrau ($X(s) = \frac{1}{s}$) é aplicado à entrada, a saída conterá um impulso, sendo portanto ilimitada e BIBO instável.

Quando $Q(s) = Q(\lambda)$, então de $Q(s)$ podemos determinar a estabilidade quase da mesma forma que antes.

- Se os polos de $H(s)$ estão no semiplano complexo esquerdo, o sistema é assintoticamente estável.
- Se um ou mais polos estão no semi plano direito, ou ainda, existem polos repetidos com parte real nula, o sistema é internamente instável e daí também BIBO instável. Note que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = tu(t)$, instável.
- Se existem polos não repetidos com parte real nula, e nenhum polo no caso anterior, então o sistema é marginalmente estável e BIBO instável. Note que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = u(t)$.