Controlabilidade e Observabilidade de Sistemas LIT

Prof. Marcelo G. Vanti

Introdução

Controlabilidade é a propriedade de um sistema segundo a qual as variáveis de estado podem ou não ser controladas a partir da entrada, enquanto observabilidade mede se variáveis de estado podem ou não ser observadas a partir da saída. Controlabilidade e observabilidade são conceitos duais. Considere o circuito mostrado na figura abaixo:

- a entrada u não tem controle sobre x_2;
- a reposta excitada por x_1 não tem efeito sobre y (não pode ser observada), e portanto,
- a rede não é observável nem controlável.

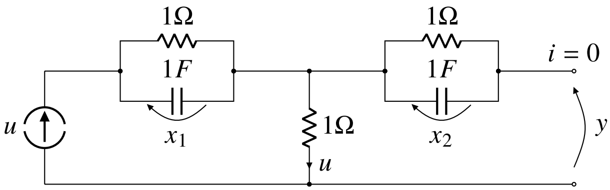

Figura: rede não controlável nem observável

A equação de estado $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ é controlável se é possível transferir $\mathbf{x}(t)$ de um estado inicial $\mathbf{x}(0)$ para um outro estado determinado $\mathbf{x}(t_1)$ em tempo finito, por meio da entrada $u(t)$.

Exemplo 5.1 Considere as redes mostradas abaixo:

1. ***a***:

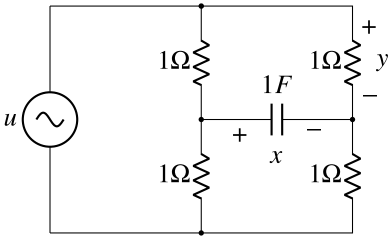

Figura: circuito não controlável

Devido à simetria existente, a tensão nos terminais no capacitor (x) independe da fonte, apenas de seu valor no instante $t = 0$, e por isso o circuito é não controlável.

2. b:

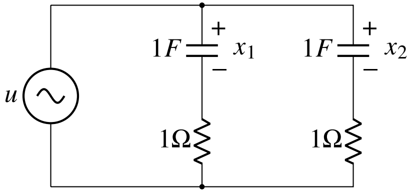

Figura: circuito não controlável

Neste circuito, x_1 ou x_2 pode ser controlado pela fonte, ou seja, ter seu estado transferido para qualquer valor em tempo finito. Entretanto, quando uma váriável de estado (x_1 ou x_2) for controlada, seu comportamento será acompanhado pela outra, e é impossível controlar as duas independentemente.

Seja a equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

e sua solução dada por (capitulo 4)

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau,$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz n x n, $\mathbf{B}$ é n x p, $\mathbf{u}$ é p x 1 e $\mathbf{x}$ é n x 1. Ou seja, existem p entradas e n variáveis de estado.

Supondo que $\mathbf{x}(t)$ deva ser transferido para $\mathbf{x}(t_1) = 0$, então

$$0 = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad \text{de onde pode-se escrever}$$

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Como $e^{-\mathbf{A}t} = \beta_0\mathbf{I} + \beta_1\mathbf{A} + \beta_2\mathbf{A}^2 + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\mathbf{A}^k$ (capítulo 3), substituindo na equação para $\mathbf{x}(0)$,

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \beta_k \mathbf{u}(\tau) d\tau. \qquad (2)$$

Em (2), fazendo $\boldsymbol{\alpha}_k = \int \beta_k \mathbf{u}(\tau) d\tau$, um vetor p x 1,

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}_k. \qquad (3)$$

Escrevendo (3) na forma matricial, tem-se

$$\mathbf{x}(0)_{nx1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{AB} & \vdots & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \vdots & \dots & \vdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_0 \\ \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1} \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

onde C é *matriz de controlabilidade* de dimensão n x np.

Para que exista uma solução para o sistema (4), deve haver n equações independentes, isto é, a *matriz de controlabilidade* $\mathcal{C}$ deve ter posto n. Esta é a condição necessária para que o par $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ seja controlável.

Exemplo 5.2

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

A dimensão de $\mathbf{A}$ é $n = 2$. A matriz de controlabilidade deve ter posto $\rho = 2$. Mas,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ cujo posto é 1.}$$

A equação de estado é não controlável. Analisando por outro meio, a forma diagonalizada de $\mathbf{A}$ é

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}, \text{ onde } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e daí } \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

$\dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_1(t) + u(t)$, enquanto que $\dot{\hat{x}}_2(t) = -\hat{x}_2(t)$, e como pode ser visto, $\hat{x}_2(t)$ está desacoplada direta ou indiretamente da entrada, e portanto, não pode ser controlável.

Exemplo 5.3

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

A dimensão de $\mathbf{A}$ é $n = 2$.

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \vdots & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ cujo posto é 2.}$$

A equação de estado é controlável.

Novamente, calculando o cálculo da matriz de autovetores $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{A}$ fornece

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \end{bmatrix} \text{ e daí } \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.288 \\ 0.288 \end{bmatrix}.$$

As duas variáveis de estado estão diretamente conectadas à entrada. Portanto, conclui-se novamente que o sistema é controlável.

Definição 5.1: Se

$$\mathbf{W}_C(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'\tau}d\tau \qquad (5)$$

é uma matriz n x n não singular, então C tem posto completo e o par ($\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$) é controlável. $\mathbf{W}_C(t=\infty)$ é a matriz *Grammiana* de controlabilidade.

Controlabilidade

Suponha que se deseje fazer a transição do vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ de $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ para $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$: Então, substituindo $t = t_1$ em (3.3):

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Para fazer a transferência entre os dois estados, a entrada pode ser controlada como

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'(t_1-t)}\mathbf{W}_C^{-1}(t_1)\left[e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\right], \tag{6}$$

pois, substituindo (6) na eq. para $\mathbf{x}(t_1)$, se obtêm:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_1) &= e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 - \left[\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'(t_1-\tau)}d\tau\right]\mathbf{W}_C^{-1}(t_1)\left[e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\right] \\ &= e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{W}_C(t_1)\mathbf{W}_C^{-1}(t_1)\left[e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\right] = \mathbf{x}_1.\end{aligned}$$

Isso mostra que se $\mathbf{W}_C$ é uma matriz não singular, inversível, então $\mathbf{u}(t)$ como dada por (6) faz a transferência desejada.

A entrada $\mathbf{u}(t)$ como dada pela equação (6) é também chamada de controle de mínima energia, pois pode ser mostrado que para qualquer outra entrada $\bar{\mathbf{u}}(t)$, realizando a mesma transferência,

$$\int_0^{t_1} \bar{\mathbf{u}}'(t)\bar{\mathbf{u}}(t)dt \geq \int_0^{t_1} \mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)dt.$$

Exemplo 5.4. O desenho abaixo ilustra uma plataforma suportada por um sistema de suspensão contendo molas e amortecimento viscoso. A massa m da plataforma é considerada nula. Os dois sistemas de amortecimento das duas extremidades são independentes, e portanto, metade da força é aplicada à cada um.

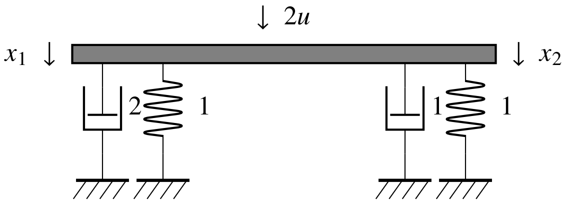

Figura: Sistema de amortecimento

Controlabilidade

As variáveis de estado x_1 e x_2 são os deslocamentos das duas extremidades da plataforma, a partir da posição de equilíbrio. Em cada sistema são dados a constantes de amortecimento γ e da mola k. Então, lembrando que $m = 0$,

$$u(t) - 2\dot{x}_1(t) - x_1(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -\frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}u(t);$$

$$u(t) - \dot{x}_2(t) - x_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

A matriz de *controlabilidade* $C = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tem $\rho = 2$.

O sistema é controlável. Observe que as duas variáveis de estado são acopladas à entrada, ou seja, são diretamente controladas por ela.

Controlabilidade

Sejam $x_1(0)$ e $x_2(0)$ deslocamentos iniciais na ausência de uma força externa. A plataforma então retorna à sua posição de equilíbrio exponencialmente, em tese precisando de um tempo infinito para retornar a posição de equilíbrio, com $x_1 = x_2 = 0$.

Considere, por exemplo, $x_1(0) = 10,\ x_2(0) = -1$ e o problema de determinar a força necessária para levar o sistema ao estado de repouso em $2s$. Então,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-0.5t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_C(2) &= \int_0^2 \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \\ &= \int_0^2 \begin{bmatrix} 0.25e^{-\tau} & 0.5e^{-1.5\tau} \\ -0.5e^{-1.5\tau} & e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 0.2162 & 0.3167 \\ 0.3167 & 0.491 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.5(2-t)} & 0 \\ 0 & e^{-(2-t)} \end{bmatrix} \mathbf{W}_C^{-1}(2) \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$u(t) = -58.82e^{0.5t} + 27.96e^{t}.$$

```
In [37]: a=np.array([-0.5,0,0,-1]).reshape(2,2)

In [38]: b=np.array([0.5,1]).reshape(2,1)

In [39]: c=np.array([1,0])

In [40]: d=0

In [41]: sys=ss(a,b,c,d)

In [42]: t=np.linspace(0,2,100)

In [43]: u=-58.82*np.exp(0.5*t)+27.96*np.exp(t)

In [44]: x0=np.array([10,-1])

In [45]: y,t,x=lsim(sys,u,t,x0)
```

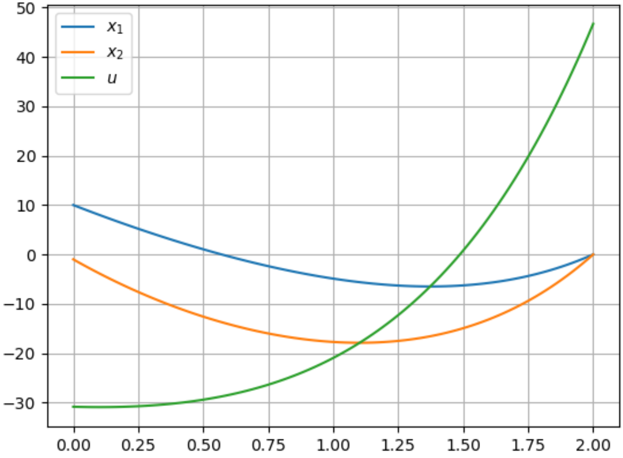

Figura: Transferência de [10,-1] para[0,0] em 2s

Observabilidade

Se o vetor de estados $\mathbf{x}(t_0)$ pode ser determinado a partir da observação da saída em um tempo finito, o sistema é então observável.

Exemplo 5.5 Considere o circuito abaixo:

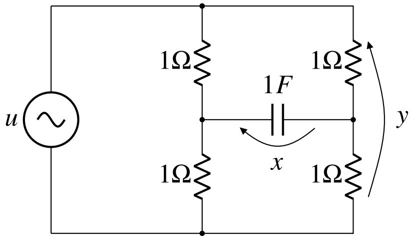

Figura: circuito não observável

A saída segue a entrada independente da tensão no capacitor. Portanto, o estado x não pode ser determinado à partir da observação de y. O circuito não é observável.

A observabilidade é uma propriedade que permite a reconstrução de variáveis de estado não mensuráveis diretamente pela observação da saída, ou a *estimação de estados*.

Observabilidade

A solução de um sistema de espaço de estados é dada pelas equações (3.3) e (3.4),

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau;$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

Como **u**, **A**, **B**, **C** e **D** são todos conhecidos, pode-se definir uma nova variável $\bar{\mathbf{y}}(t)$ como

$$\bar{\mathbf{y}}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau - \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

e assim,

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0). \tag{7}$$

Para que $\mathbf{x}(0)$ possa ser determinado por $\bar{\mathbf{y}}(t)$, $\bar{\mathbf{y}}(0) = 0$ se e somente se $\mathbf{x}(0) = 0$, implicando na não singularidade de $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$.

Observabilidade

Ora, lembrando que $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \mathbf{A}^k$ então,

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \beta_0\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \beta_1\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \beta_2\mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \ldots + \beta_{n-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0). \quad (8)$$

Define-se a matriz de observabilidade $\mathcal{O}_{qnxn}$ (para q saídas) como

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \ldots \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \ldots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \ldots \\ \vdots \\ \ldots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

O sistema $\mathcal{O}\mathbf{x}(0) = 0$ deve ter como única solução $\mathbf{x}(0) = 0$. Caso contrário, será satisfeito por pelo menos um $\mathbf{x}'(0)$ não nulo. Para este vetor, cada $\beta_k\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}'(0) = \mathbf{0}$, $\forall k$, em (8) e daí $\bar{\mathbf{y}}(t) = 0$ em (7).

Para que o sistema de equações (7) não seja singular, a *matriz de observabilidade* $\mathcal{O}$ deve ter posto n. Esta é a condição necessária para que o par $(\mathbf{A},\mathbf{C})$ seja observável.

Se o par $(\mathbf{A},\mathbf{C})$ é observável, pode-se pré multiplicar (7) por $e^{\mathbf{A}'t}\mathbf{C}'$ e integrar a equação resultante de 0 a t_1,

$$\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}'t}\mathbf{C}'\bar{\mathbf{y}}(t)dt = \underbrace{\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}'t}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}dy}_{\mathbf{W}_{\mathcal{O}}(t)}\ \mathbf{x}(0)$$

e finalmente,

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{W}_{\mathcal{O}}^{-1}(t)\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}'t}\mathbf{C}'\bar{\mathbf{y}}(t)dt \tag{9}$$

Definição 5.2: Se

$$\mathbf{W}_{\mathcal{O}}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}d\tau \tag{10}$$

é uma matriz n x n não singular, então $\mathcal{O}$ tem posto completo e o par ($\mathbf{A}$,$\mathbf{C}$) é observável(veja (9)). $\mathbf{W}_{\mathcal{O}}(t=\infty)$ é a matriz *Grammiana* de observabilidade.

Exemplo 5.6 Seja o sistema abaixo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

$$\rho(\mathcal{C}) = \rho\left(\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \vdots & \mathbf{AB}\end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2 \Rightarrow \text{Controlável.}$$

$$\rho(\mathcal{O}) = \rho\left(\begin{bmatrix}\mathbf{C} \\ \cdots \\ \mathbf{CA}\end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \Rightarrow \text{Observável.}$$

Exemplo 5.7 Seja o circuito abaixo:

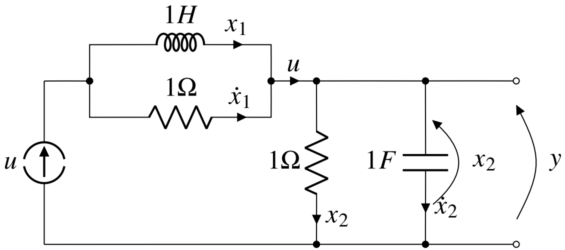

Figura: exemplo 5.7

$$u(t) = x_1(t) + \dot{x}_1(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t)$$
$$u(t) = x_2(t) + \dot{x}_2(t) \Rightarrow \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t).$$

Observabilidade

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

$$\rho(\mathcal{O}) = \rho\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \cdots \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}\right) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 \Rightarrow \text{Não observável.}$$

Observe que $y(t) = x_2(t)$, independente do valor de $x_1(t)$. Além disso, o sistema é não controlável. Por inspeção da equação de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ pode-se verificar que as duas variáveis de estado não podem ser independentemente controladas.

Observação: na prática, a controlabilidade (observabilidade) será determinada pelo cálculo do posto das matriz de controlabilidade (observabilidade), ou ainda, das matriz *Grammiana* de controlabilidade (observabilidade), através por exemplo, da decomposição em valores singulares.

Referências

- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Fourth Edition, 2013.
- B.P.Lathi. *Sinais e Sistemas Lineares*. Bookman, Segunda Edição,2004.
- Chi-Tsong Chen. *Signals and Systems: A Fresh Look*. Stony Brook University, 2009.
  `http://www.ctchen.me/`
- Katsuhiko Ogata. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Education do Brasil, 5º Edição, 2011.