Sistemas_Lineares_8-SCDLap_FunçãoTransfer

November 7, 2024

1 Análise de Sistemas em Tempo Contínuo com a Transformada de Laplace

1.1 Função de Transferência e Teorema da Convolução

Anteriormente vimos que para um sistema de estado nulo a equação entrada-saída pode ser escrita como

$$Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$$

Onde $X(s) = \mathcal{L}(x(t))$ e $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$. A função racional

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

é a função de transferência do sistema, e além disso, $H(s) = \mathcal{L}(h(t))$. Considere um sistema S, com entrada $x(t)$ e saída $y(t)$, isto é:

$$x(t) \to \ S \ \to y(t) \tag{1}$$

e também sabemos que

$$y(t) = x(t) * h(t). \tag{2}$$

Da definição da função de transferência, podemos escrever que

$$Y(s) = H(s)X(s). \tag{3}$$

Se $x(t) = \delta(t)$, então $X(s) = 1$, $y(t) = h(t)$ e finalmente $Y(s) = H(s)$, de onde fica mostrado que, com efeito, a função de transferência é a transformada de Laplace da resposta ao impulso. Comparando agora as equações (2) e (3), podemos concluir que

$$\mathcal{L}(x(t) * h(t)) = H(s)X(s) \tag{4}$$

Este resultado, que pode ser aplicado a qualquer par de funções com Transformada de laplace, é o *Teorema da Convolução.*

1.2 Teoremas dos Valores Inicial e Final

1.2.1 Teorema do Valor Inicial

Seja um sinal $x(t)$. A transformada de Laplace de sua derivada é

$$\mathcal{L}(x'(t)u(t)) = sX(s) - x(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{0^+} x'(t)e^{-st}\,dt + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt,$$

$$sX(s) - x(0^-) = x(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt = x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt \quad \text{e}$$

$$sX(s) = x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt.$$

Tomando o limite $s \to \infty$ na equação acima (desde que o limite exista), temos

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \int_{0^+}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt + x(0^+).$$

Como o limite da integral na equação acima é nulo, o Teorema do Valor Inicial afirma que

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

Observação Importante Se $X(s)$ não é uma função racional estritamente própria ($N > M$), então o limite de $sX(s)$ não existe e o teorema não pode ser aplicado.

1.2.2 Teorema do Valor Final

Tomamos agora o limite quando $s \to 0$ na transformada de Laplace da derivada de $x(t)$, isto é

$$\lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st}\,dt + x(0^-) = x(t)\Big|_{0^-}^{\infty} + x(0^-).$$

Portanto, o teorema do valor final afirma que

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s).$$

Exemplo Seja o sistema descrito pela função de transferência $H(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+3}$ e entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

[1]:
```
from lcapy import *
H=tf([1,5],[1,4,3])
H
```

[1]:

$$\frac{s + 5}{s^{2} + 4s + 3}$$

[2]:

```
v=exp(-2*t)
X=v.LT()
Y=H*X
Y
```

[2]:

$$\frac{s + 5}{\left(s + 2\right)\left(s^{2} + 4s + 3\right)}$$

[3]:

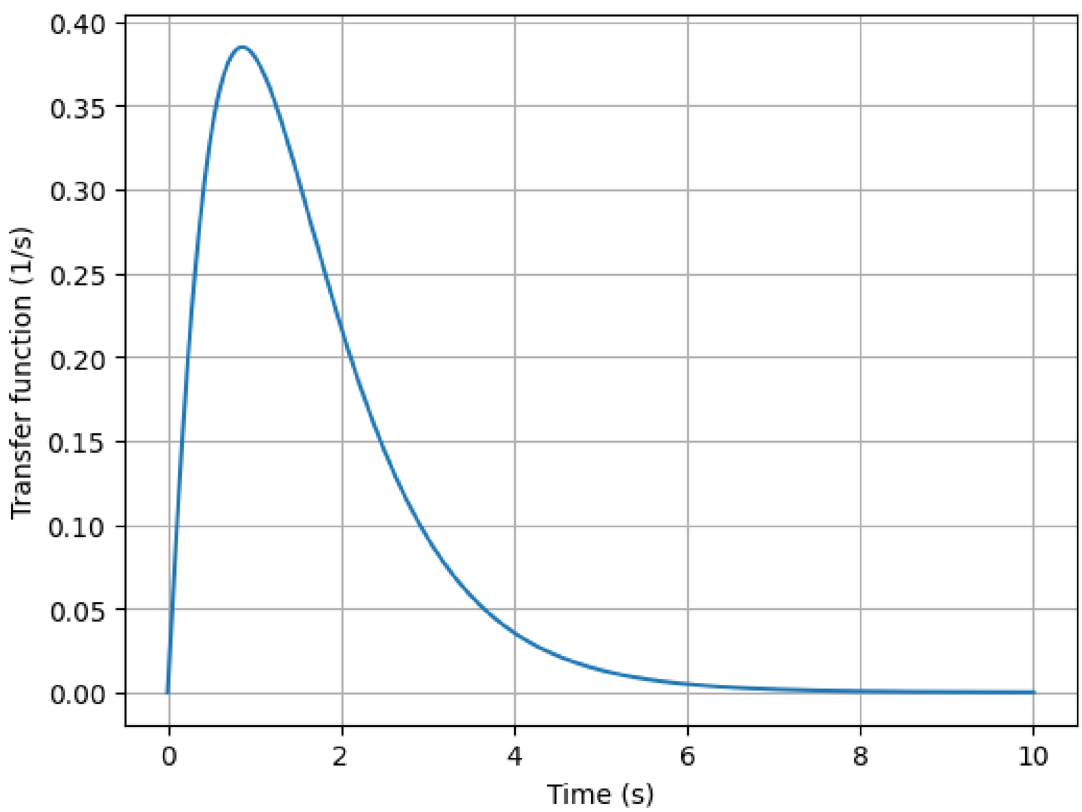
```
y=Y.ILT(causal=True)
y
```

[3]:

$$\left(2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}\right) u\left(t\right)$$

[4]:

```
y.plot((0,10));
```



A reposta inicia com valor nulo, e depois de uma oscilação transitória retorna à zero. Isto poderia ser visto diretamente com os teoremas do valor inicial e final, sem fazer a transformada inversa.

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(s+5)}{(s^2+4s+3)(s+2)} = 0$$

e

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+5)}{(s^2+4s+3)(s+2)} = 0$$

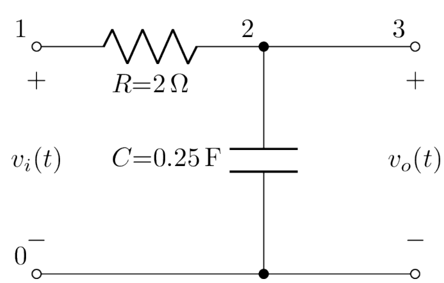
Exemplo Análise de Laplace de um filtro passa-baixas RC

A *netlist* abaixo descreve um filtro passa-baixas RC de primeira ordem.

[5]:
```
from lcapy import Circuit,t,voltage,sin,u,s

a = Circuit("""
P1 1 0; down=1.5, v_=v_i(t)
R 1 2 2; right=1.5
C 2 0_2 {1/4}; down
W 0 0_2; right
W 2 3; right
W 0_2 0_3; right
P2 3 0_3; down, v^=v_o(t)
;draw_nodes=connections""")

a.draw()
```



Onde $v_i(t)$ é a tensão de entrada e $v_0(t)$ é a tensão de saída. A função de transferência do filtro pode ser encontrada especificando os nós, ou seja,

[6]:
```
H = a.transfer(1, 0, 3, 0)
H
```

[6]:

$$\frac{1}{\frac{s}{2}+1}$$

A função de transferência também pode ser obtida especificando as componentes P1 e P2,

[7]:
```
H = a.P1.transfer('P2')

H
```
[7]:

$$\frac{2}{s + 2} \cdot 1$$

Vamos definir um sinal senoidal de entrada com frequência angular $\omega = 3\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, chaveado em $t = 0$.

[8]:
```
v_i = voltage(sin(3 * t) * u(t))
```
A transformada de Laplace da tensão de entrada é obtida como:

[9]:
```
V_i = v_i(s)

V_i
```
[9]:

$$\frac{3}{s^2 + 9}$$

A transformada de Laplace da saída é encontrada usando o teorema da convolução:

[10]:
```
V_o = V_i * H
V_o
```
[10]:

$$\frac{6}{(s + 2)(s^2 + 9)}$$

Esta função tem 3 polos, que podem ficar explícitos com a forrma *zero-pole-gain* da resposta.

[11]:
```
V_o.ZPK()
```
[11]:

$$\frac{6}{(s + 2)(s - 3\mathrm{j})(s + 3\mathrm{j})}$$

A transformada inversa fornece a tensão de saída no domínio do tempo.

[12]:
```
v_o = V_o(t)
v_o
```
[12]:

$$6 \cdot \left(\frac{2 \sin(3t)}{39} - \frac{\cos(3t)}{13} + \frac{(-2 - 3\mathrm{j})(-2 + 3\mathrm{j})\, e^{-2t}}{169} \right) u(t)$$

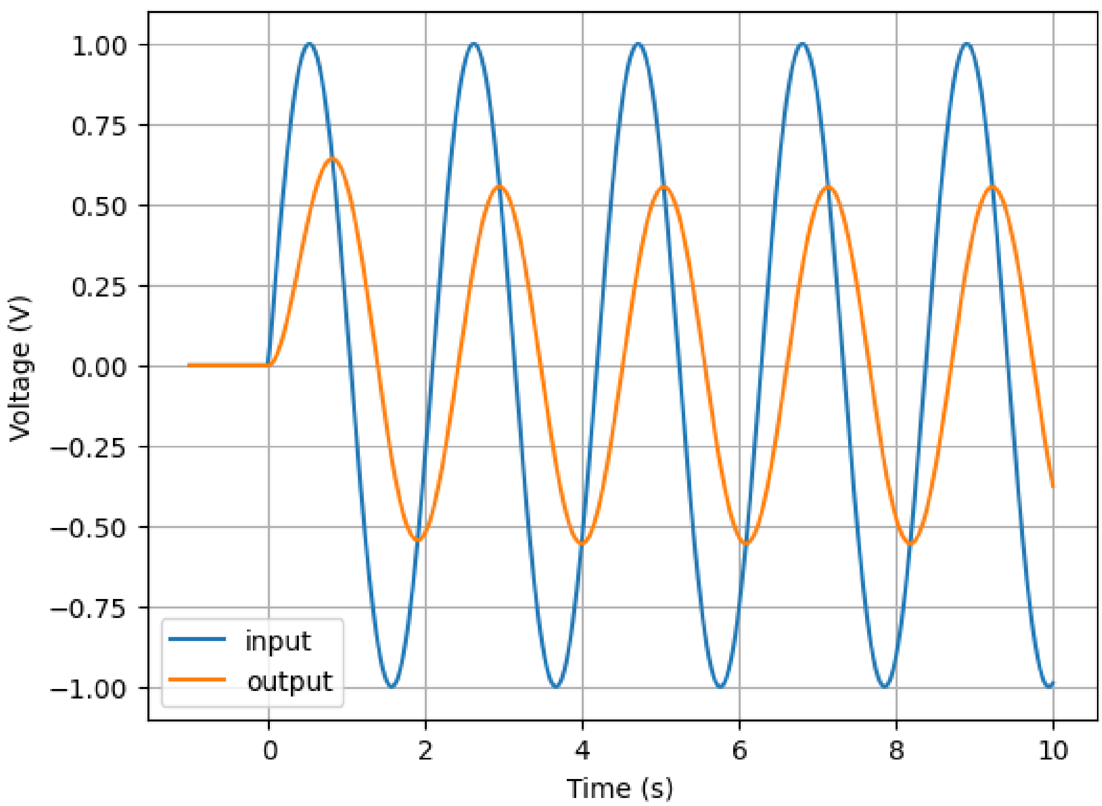
Este resultado pode ser simplificado com o método simplify_terms.

[13]:
```
v_o.simplify_terms()
```
[13]:

$$\frac{2 \cdot \left(2 e^{2t} \sin\left(3t\right) - 3 e^{2t} \cos\left(3t\right) + 3\right) e^{-2t} u\left(t\right)}{13}$$

Finalmente, podemos fazer um gráfico dos sinais de entrada e saída.

[14]:
```
ax = v_i.plot((-1, 10), label='input')
ax = v_o.plot((-1, 10), axes=ax, label='output')
ax.legend();
```



1.3 Estabilidade

Da equação $Q(s)Y(s) = P(s)X(s)$ obtemos $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$. Qual a relação entre $Q(s)$ e $Q(\lambda)$? São iguais? $Q(\lambda)$ é o polinômio característico do sistema, e descreve os seus modos característicos. Daí, $Q(\lambda)$ é uma descrição interna do sistema. Já $H(s)$ é uma relação de entrada-saída, não considerando o sistema internamente. $H(s)$ fornece uma descrição externa do sistema. Entretanto, se ao montar a função de transferência, não houver cancelamentos entre polos e zeros iguais no numerador e denominador de $H(s)$, então deste caso, $Q(s) = Q(\lambda)$, e portanto de Q(s) poderemos obter também informação sobre a estabilidade interna do sistema.

Assim, a princípio, podemos dizer que se todos polos de $H(s)$, ou as raízes de $Q(s)$, são negativos, ou complexos com parte real negativa (os polos estão no semiplano esquerdo do plano complexo), então, o sistema é BIBO estável. Pois $\mathcal{L}^{-1}(\frac{A}{s+a}) = Ae^{-at}$, de forma que a resposta ao impulso tende assintóticamente a zero sendo portanto absolutamente integrável.

Se a função de transfererência não é própria, isso é, M, o grau $P(s)$, é maior que N, o grau de $Q(s)$, então o sistema é instável. Por exemplo, seja

$$H(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 4s + 5}{s^2 + 3s + 2} = s + \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2 + 3s + 2}.$$

Note o termo s, o primneiro termo de $H(s)$. Se um degrau ($X(s) = \frac{1}{s}$) é aplicado à entrada, a saída conterá um impulso, sendo portanto ilimitada e BIBO instável.

Quando $Q(s) = Q(\lambda)$, então de $Q(s)$ podemos determinar a estabilidade quase da mesma forma que antes.

- Se os polos de $H(s)$ estão no semiplano complexo esquerdo, o sistema é assintoticamente estável.
- Se um ou mais polos estão no semi plano direito, ou ainda, existem polos repetidos com parte real nula, o sistema é internamente instável e daí também BIBO instável. Note que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = tu(t)$, instável.
- Se existem polos não repetidos com parte real nula, e nenhum polo no caso anterior, então o sistema é marginalmente estável e BIBO instável. Mote que $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}) = u(t)$.