Introdução ao Estudo de Realizações Mínimas e Frações Coprimas

Prof. Marcelo G. Vanti

Introdução

Uma função de transferência $\hat{g}(s)$ de um sistema SISO é realizável se existe uma ou mais equações de espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t)$$

Lembre que $\hat{g}(s)$ é realizável se e somente se é uma função racional própria. Equações em espaço de estados são importantes porque

- São apropriadas para simulação computacional de sistemas dinâmicos;
- Através das equações de estado uma função de transferência pode ser implementada usando-se amplificadores operacionais.

Se $\hat{g}(s)$ é realizável, infinitas realizações são possíveis. Isto levanta o problema de se encontrar a *realização mínima*, com o menor número de amplificadores operacionais em sua implementação.

Como visto nos capítulo 1 e 3, para uma dada realização, a função de transferência pode ser determinada como

$$\hat{g}(s) = \mathbf{c}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{b} + d. \tag{1}$$

onde $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{Adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{|s\mathbf{I}-\mathbf{A}|}$ é estritamente própria, e se $\hat{g}(s)$ é biprópria, então, $d \neq 0$ é uma constante responsável pela conexão direta entre a entrada e a saída, ou

$$\hat{g}(s) = \hat{g}_{ep}(s) + \hat{g}(\infty)$$

onde $\hat{g}_{ep}(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ é a parcela estritamente própria da função de transferência. O termo $\hat{g}(\infty) = d$ é irrelevante no estudo deste capítulo, e não será considerado.

Realizações Controláveis & Realizações Observáveis

Considere a função de transferência:

$$\hat{g}(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{s^3 + 3s^2 + 5s + 3}$$

1. Escreva as equações de estado (realização) na forma canônica, como visto no capítulo 3.
2. Mostre que a realização canônica é controlável. Com efeito, *toda realização na forma canônica é controlável*.
3. verifique se o par $(\mathbf{A},\mathbf{c})$ é observável.
4. Obtenha a realização $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}, \tilde{d}\,)$ da transposta de $\hat{g}(s)$, ou seja, $\hat{g}(s)' = [\mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}]' = \mathbf{b}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A}')^{-1}\mathbf{c}' = \tilde{\mathbf{c}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$, e perceba que $\hat{g}(s)' = \hat{g}(s)$.
5. Mostre que o par $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{c}})$ observável. Com efeito, esta realização é a forma canônica observável do sistema de equações de estado para uma dada função de transferência.

6. verifique se o par $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$ é controlável.
7. As formas obtidas em (1) e (4) são, seja controlável, seja observável, mas não ambas. Agora, cancele as raízes comuns do numerador e do denominador de $\hat{g}(s)$ até que não existam mais raízes comuns, ou seja, o numerador e o denominador sejam *coprimos*.
8. Agora $\hat{g}(s)$ é uma fração *coprima* e como é uma fração própria, seu grau é o grau do denominador. Encontre a realização canônica controlável para $\hat{g}(s)$ coprima.
9. Mostre que o par $(\mathbf{A}, b)$ é controlável e simultaneamente $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ é observável. Verifique que $\dim(\mathbf{A}) = \mathrm{grau}(\hat{g}(s))$ coprima.
10. Implemente a realização mínima obtida em (8) com amplificadores operacionais.

Realizações Mínimas: Conclusões

- Com os resultados acima pode-se perceber que uma realização é mínima quando ela é controlável e observável.
- Quando a a função de transferência é uma fração coprima, sua realização será controlável e observável. Neste caso, qualquer raiz do denominador será um polo da função de transferência.
- Quando $\hat{g}(s)$ é uma fração própria e coprima, o grau $\hat{g}(s)$ = grau do denominador = dim $(\mathbf{A})$.
- Toda função de transferência pode ser reduzida à uma fração coprima cuja realização por variáveis de estado será controlável e observável, ou seja, será uma realização mínima.
- Um sistema é *completamente caracterizado* por sua função de transferência se o número de elementos armazenadores de energia iguala o grau de $\hat{g}(s)$, ou a dimensão de $\mathbf{A}$ em uma realização mínima. Neste caso, não há elementos redundantes no sistema e não existe diferença entre função de transferência ou equações de estado na descrição dos sistema.

Realizações Mínimas: Conclusões

- Em um sistema que é *completamente caracterizado* todas características internas do sistema aparecerão na função de transferência. Mesmo a resposta de um conjunto de condições iniciais pode ser reproduzida usando-se uma entrada apropriada.

Referências

Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Fourth Edition, 2013.

Chi-Tsong Chen. *Signals and Systems: A Fresh Look*. Stony Brook University, 2009.
`http://www.ctchen.me/`