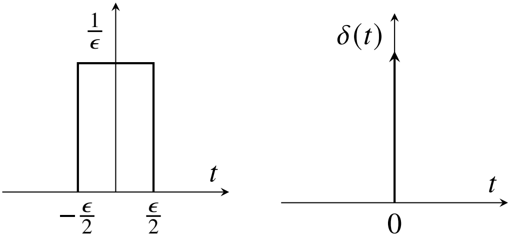
Descrição Matemática de Sistemas

Prof. Marcelo G. Vanti

- Delta de Dirac ou Impulso Unitário

$$\delta(t) := \begin{cases} \delta(t) = 0 \;\; \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt \;=\; 1 \end{cases}$$



(a) Pulso retangular (b) Impulso

Figura: O limite da sequencia de pulsos ($\epsilon \longrightarrow 0$) é o impulso unitário

Introdução

- Propriedade da amostragem do Impulso Unitário
  Multiplicando o impulso por uma função $\phi(t)$ contínua em $t = 0$ e lembrando que o impulso é nulo para $t \neq 0$,

  $$\phi(t)\delta(t) = \phi(0)\delta(t),$$

  e agora, integrando de $-\infty$ a ∞,

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t)dt \;=\; \phi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt \;=\; \phi(0).$$

- Interpretando como função generalizada, o Impulso é a derivada do degrau unitário

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dt}\phi(t)dt = u(t)\phi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\frac{d\phi(t)}{dt}dt = \phi(0),$$

  ou seja, a derivada do degrau opera sobre $\phi(t)$ exatamente como $\delta(t)$.

  $$\frac{du}{dt} = \delta(t)$$

Introdução

- $g(t, t_0)$ é a resposta ao impulso aplicado no instante $t = t_0$.
- Se o sistema é invariante no tempo, então

$$g(t, t_0) = g(t + T, t_0 + T) = g(t - t_0)$$

- Se o sistema é linear, então as propriedades da aditividade e homogeneidade devem ser satisfeitas, isto é, se $x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ e $x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$, então

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &\longrightarrow y_1(y) + y_2(t) \text{ (aditividade)} \\ Kx_1(t) &\longrightarrow Ky_1(t), \ \ ou \\ Kx_2(t) &\longrightarrow Ky_2(t) \text{ (homogeneidade).} \end{aligned}$$

- Se o sistema é causal, $g(t - t_0) = 0 \ \forall \ t < t_0$.

Introdução

- Seja um sistema linear, causal e invariante no tempo. Este sistema pode ser descrito pela equação diferencial

$$Ly(t) = x(t) \tag{1}$$

onde L é um operador de derivadas e/ou integrais em função do tempo (por exemplo, $L = y(t)'' + a_1 y'(t) + a_2 y(t)$) e $x(t)$ é a entrada. Se um impulso for aplicado a entrada em um instante τ, então (1) torna-se

$$Lg(t-\tau) = \delta(t-\tau) \tag{2}$$

Multiplicando-se ambos lados por $x(\tau)$ e integrando sobre τ, tem-se

$$L\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)x(\tau)d\tau = x(t)$$

por causa da propriedade da amostragem. Comparando com (1) mostra-se que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{3}$$

Introdução

- Em um sistema relaxado, seu estado em $t \leq t_0$ é nulo, ou seja, as condições iniciais são nulas e a saída depende unicamente da entrada $x(\tau)$ para $\tau \geq t_0$. Se o sistema é relaxado, a saída é dada pela equação da convolução (3). Se o sistema é causal, $g(t-\tau) = 0 \; \forall \; \tau > t$ e daí

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{4}$$

- Sistemas MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas)
A resposta de um sistema linear com p terminais de entrada e q terminais de saída é.

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{x}(\tau)d\tau$$

onde $\mathbf{y}$ é um vetor $q \, x \, 1$, $\mathbf{x}$ é um vetor de entradas $p \, x \, 1$ e $\mathbf{G}$ é a matriz de resposta ao impulso $q \, x \, p$, ou seja

$$\mathbf{G}(t-\tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t-\tau) & g_{12}(t-\tau) & \cdots & g_{1p}(t-\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{q1}(t-\tau) & g_{q2}(t-\tau) & \cdots & g_{qp}(t-\tau) \end{bmatrix}$$

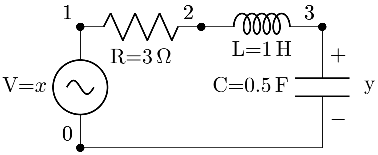
onde $g_{ij}(t-\tau)$ é a resposta no tempo t no i-ésimo terminal de saída devido à um impulso aplicado no instante τ no j-ésimo terminal entrada, todas as outras entradas sendo nulas.

- Equações de Espaço de Estados
  Todo sistema linear invariante no tempo com parâmetros concentrados pode ser descrito por um conjunto de equações da forma abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \qquad (5)$$

onde $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$, sendo $\mathbf{x}(t)$ o vetor de n variáveis de estado e $\mathbf{u}(t)$ o vetor de entradas. Para um sistema com p entradas e q saídas (vetor $\mathbf{y}(t)$), $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$,$\mathbf{D}$ são respectivamente matrizes constantes(sistemas invariantes no tempo) nxn,nxp,qxn e qxp.

Exemplo 1.1:



O comportamento do circuito exposto acima pode ser determinado unicamente se são conhecidas a corrente inicial no indutor e a tensão inicial no capacitor. Essas são as variáveis de estado do sistema.

Para $x(t) = 10e^{-kt}u(t)$ e valores iniciais $i_L(0^-) = 0$ e $v_C(0^-) = 5$, pode-se escrever a equação de malha no instante $t = 0^-$

$$i'(0^-) + 3i(0^-) + v_C(0^-) = 0$$

Como nem a tensão no capacitor nem a corrente no indutor podem variar instantaneamente, ou seja, $i(0) = i_L(0^-) = 0$ e $v_C(0) = v_C(0^-) = 5$,de $i'(0) + 3.0 + 5 = 0$ obtêm-se as condições iniciais $i(0) = 0$ e $i'(0) = -5$.

Transformada de Laplace - Revisão

- Transformada de Fourier

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6}$$

- Transformada Inversa de Fourier

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

- $s = \sigma + j\omega$ é a frequência complexa, onde σ representa o decaimento ou crescimento exponencial de uma função. Define-se então uma nova função $f(t) = e^{-\sigma t}v(t)$. Substituindo $f(t)$ em (6) dá

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-st}dt = V(s)$$

- Por outro lado, fazendo a transformação inversa fornece

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \rightarrow v(t) = e^{\sigma t}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(s)e^{st}d\omega$$

Como $ds = jd\omega$, a última equação fica

$$v(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} V(s) e^{st} ds$$

Portanto, o par de tranformadas unilaterais ($t \geq 0$) direta e inversa de Laplace é:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left\{v(t)\right\} = V(s) = \int_0^\infty v(t) e^{-st} dt \\ \mathscr{L}^{-1}\left\{V(s)\right\} = v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} e^{st} ds \end{aligned} \tag{7}$$

Transformada de Laplace-Revisão

- Propriedades e Transformadas de Algumas Funções Básicas

1. Degrau $u(t)$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

O par de Transformadas de Laplace é portanto

$$u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

2. Impulso $\delta(t)$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-t_0)dt = e^{-st_0}$$

$$\delta(t) \Longleftrightarrow e^{-st_0}$$

Transformada de Laplace-Revisão

Observação: note que para $t_0 = 0$ o par de transformadas fica $\delta(t) \Leftrightarrow 1$.

3. Função exponencial $e^{-\alpha t}$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-\alpha t}u(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}dt$$
$$= -\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$$

4. Derivada de uma função $v(t)$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \int_0^\infty s^{-st}\frac{dv}{dt}dt = sV(s) - v(0)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} \Longleftrightarrow sV(s) - v(0)$$

Transformada de Laplace-Revisão

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2v}{dt}\right\} \Longleftrightarrow s^2V(s) - sv(0) - v'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3v}{dt}\right\} \Longleftrightarrow s^3V(s) - s^2v(0) - sv'(0) - v''(0)$$

5. Integral de uma função $v(t)$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t v(x)dx\right\} = \int_0^\infty s^{-st}\left[\int_0^t v(x)dx\right]dt = \frac{V(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t v(x)dx\right\} \Longleftrightarrow \frac{V(s)}{s}$$

- Função de transferência para o exemplo 1.1 supondo que o circuito está relaxado ($y(0) = y'(0) = 0$).

$$Ri + L\frac{di}{dt} + y(t) = x(t)$$

Usando a transformada da derivada e considerando que $i(t) = C\frac{dy}{dt} \Longleftrightarrow I(s) = CsY(s)$

$$RCsY(s) + LCs^2Y(s) + Y(s) = X(s)$$

A função de transferência é a razão entre a saída e a entrada, portanto

$$\hat{g}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs + LCs^2 + 1}.$$

Substituindo os parâmetros usados no exemplo, tem-se então

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{{}^1\!/_2 s^2 + {}^3\!/_2 s + 1} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}.$$

onde -1 e -2 são as raízes do polinômio característico no denominador de $g(s)$.

Transformada de Laplace-Revisão

No caso geral, $\hat{g}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ onde $p(s)$ é um polinômio em s de grau M e $q(s)$ é o polinômio característico de grau N. As raizes de $p(s)$ e $q(s)$ são respectivamente os zeros e os polos da função de transferência. Em relação à M e N, $\hat{g}(s)$ pode ser classificada como

- $N \geq M \longrightarrow \hat{g}(s)$ é própria
- $N > M \longrightarrow \hat{g}(s)$ é estritamente própria
- $N < M \longrightarrow \hat{g}(s)$ é imprópria
- $N = M \longrightarrow \hat{g}(s)$ é biprópria

Se $\hat{g}(s)$ é própria e os polos são distintos, então $g(s)$ pode ser escrita como

$$\hat{g}(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{A_N}{s - s_N}$$

No exemplo 1.1, tem-se portanto $\hat{g}(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$ de onde $A_1 = 2$ e $A_2 = -2$ e $\hat{g}(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$

Tomando as transformadas inversas conhecidas, tem-se finalmente a resposta ao impulso para o circuito

$$g(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-2t}\right) u(t)$$

- Equações de Espaço de Estados & Função de Transferência
  As equações de espaço de estados (5) são repetidas abaixo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

  A primeira equação é uma equação diferencial vetorial de primeira ordem. Escrevendo a transformada de Laplace, tem-se

$$\begin{aligned}s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s)\\ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\,\hat{\mathbf{x}}(s) &= \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s)\\ \hat{\mathbf{x}}(s) &= [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s)\end{aligned}$$

  onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade nxn.

Substituindo na segunda equação do par (5)

$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \underbrace{\mathbf{C}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{x}(0)}_{\text{resposta de entrada nula}} + \underbrace{\mathbf{C}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(s))}_{\text{resposta de estado nulo}}$$

A resposta de um sistema linear invariante no tempo pode ser decomposta em uma resposta de entrada nula (devido somente às condições iniciais) e uma resposta de estado nulo (devido somente à entrada externa)!

Se as condições iniciais são nulas, então

$$\hat{\mathbf{g}}(s) = \mathbf{C}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Teorema da Convolução

A transformada de Laplace da saída $y(t)$ de uma sistema linear é dada pela transformada direta em (7). Substituindo $y(t)$ pela integral da convolução,

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty g(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\} e^{-st} dt$$

onde o limite superior da integral interna foi estendido ao infinito.

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty g(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\} e^{-st} e^{s\tau} e^{-s\tau} dt$$

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty g(t-\tau)u(\tau)d\tau \right\} e^{-s(t-\tau)} e^{-s\tau} dt$$

jogando o termo $e^{-s(t-\tau)}$ para dentro da integral interna e levando $u(\tau)$ para a externa, resulta em

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty g(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt \right\} u(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

Teorema da Convolução

Fazendo a substituição de variáveis $t' = t - \tau$, $dt' = dt$

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty \left\{ \int_{-\tau}^\infty g(t') e^{-st'} dt' \right\} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Pela causalidade, $\tau \leq t$ e portanto $t' = t - \tau \geq 0$, logo

$$\hat{y}(s) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty g(t') e^{-st'} dt' \right\} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \hat{g}(s) \int_0^\infty u(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Finalmente

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s)$$

Exemplo 1.2 - Sistema massa-mola

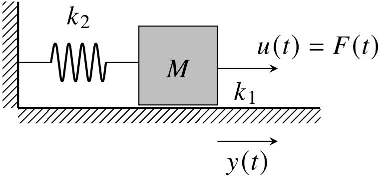


Figura: Sistema massa-mola

A figura acima mostra um sistema mecânico no qual uma massa M é ligada à uma parede vertical através de uma mola com constante k_2. O bloco de massa M escorrega sobre o plano inferior com um coeficiente de amortecimento k_1.

A força aplicada $u(t)$ tem que vencer a fricção $(k_1 {}^{dy}/_{dt})$ e a força de restauro da mola $(k_2 y)$. A aplicação da segunda lei de Newton fornecerá a equação que descreve o sistema (inicialmente relaxado):

$$u - k_1 \frac{dy(t)}{dt} - k_2 y(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

Fazendo a transformada de Laplace da última equação, tem-se

$$Ms^2\hat{y}(s) = \hat{u}(s) - k_1 s\hat{y}(s) - k_2\hat{y}(s)$$

ou ainda

$$\left[Ms^2 + k_1 s + k_2\right]\hat{y}(s) = \hat{u}(s).$$

Portanto.pode-se escrever a função de transferência

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{Ms^2 + k_1 s + k_2} \tag{8}$$

Com os valores $M = 1$,$k_1 = 3$ e $k_2 = 2$, (8) fica

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Assim, tomando a transformada inversa,

$$g(y) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\hat{g}(s)\right\} = e^{-t} - e^{-2t}$$
$$y(t) = \int_0^t \left(e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right)u(\tau)d\tau$$

Usando-se variáveis de estado, pode-se escolher $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1$ e assim, escrever o vetor de derivadas das variáveis de estado x_1 e x_2, ou seja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ M\dot{x}_2 &= u - k_1 x_2 - k_2 x_1 \end{aligned}$$

Pondo em uma expressão matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2/M & -k_1/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2/M & -k_1/M \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{e } d = 0.$$

com os valores usados anteriormente,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{e } d = 0.$$

As equações de estado poderiam ter sido obtidas primeiramente, e a função de transferência extraída como no *script* mostrado abaixo.

```
In [19]: a=[[0,1],[-2,-3]]

In [20]: b=[[0],[1]]

In [21]: c=[1,0]

In [22]: d=0

In [23]: sys=ss(a,b,c,d)

In [24]: ss2tf(sys)
Out[24]:
```

$$\frac{8.882 \times 10^{-16} s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

```
In [25]:
```

Figura: *script* Control/Python para obtenção de $\hat{g}(s)$

Exemplo 1.3 - Outro sistema massa-mola

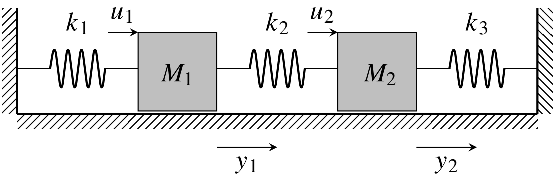


Figura: Sistema massa-mola

Neste exemplo, os coeficientes de amortecimento são nulos. As únicas forças de reação são as forças de restauração das molas. Neste sistema existem duas entradas,as forças u_1 e u_2, e duas saídas, os deslocamentos y_1 e y_2. Assim, o sistema é descrito pelo par de equações abaixo

$$\begin{aligned} M_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= u_1 - k_1y_1 - k_2(y_1 - y_2) \\ M_2\frac{d^2y_2}{dt^2} &= u_2 - k_2(y_2 - y_1) - k_3y_2 \end{aligned} \tag{9}$$

As equações acima podem ser re-escritas recombinando os termos

$$
\begin{aligned}
M_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= u_1 - (k_1 + k_2)\, y_1 + k_2 y_2 \\
M_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= u_2 + k_2 y_1 - (k_2 + k_3)\, y_2
\end{aligned}
$$

definindo as variáveis de estado

$$x_1 \coloneqq y_1, \quad x_2 \coloneqq \dot{y}_1, \quad x_3 \coloneqq y_2, \quad x_4 \coloneqq \dot{y}_2$$

Se pode escrever agora

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{y}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 &= \ddot{y}_2 = -\frac{(k_1 + k_2)}{M_1} x_1 + \frac{k_2}{M_1} x_3 + \frac{u_1}{M_1} \\
\dot{x}_3 &= \dot{y}_2 = x_4 \\
\dot{x}_4 &= \ddot{y}_2 = \frac{k_2}{M_2} x_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{M_2} x_3 + \frac{u_2}{M_2}
\end{aligned}
$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{M_1} & 0 & \frac{k_2}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{M_2} & 0 & \frac{-(k_2+k_3)}{M_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Para obter uma descrição entrada-saída, aplica-se a transformada de Laplace à (9) com condições iniciais nulas,

$$M_1 s^2 \hat{y}_1(s) + (k_1 + k_2)\,\hat{y}_1(s) - k_2 \hat{y}_2(s) = \hat{u}_1(s)$$
$$M_2 s^2 \hat{y}_2(s) - k_2 \hat{y}_1(s) + (k_2 + k_3)\,\hat{y}_2(s) = \hat{u}_2(s)$$

Destas equações pode se escrever

$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 & 0 \\ 0 & M_2 s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 s^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & M_2 s^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \end{bmatrix}$$

O determinante Δ da primeira matriz do lado esquerdo é $\left(M_1 s^2 + k_1 + k_2\right)\left(M_2 s^2 + k_2 + k_3\right) - k_2^2$. Daí tem-se que

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \hat{y}_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} M_2 s^2 + k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & M_1 s^2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \hat{u}_2(s) \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.4: Carro com pêndulo invertido

O carro mostrado na figura abaixo leva um pêndulo invertido de comprimento l que sustenta uma massa m na sua extremidade superior. Essa massa ao descer aplica uma força H sobre o pêndulo, o qual transmite ao carro, contrária à entrada u. As leis de Newton devem ser aplicadas ao movimento linear e ao movimento rotacional do pêndulo entorno da dobradiça.

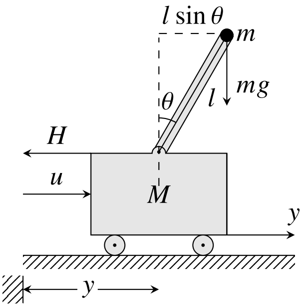


Figura: Carro com pêndulo invertido

A equação de Newton para o movimento linear é

$$M\ddot{y} = u - H$$

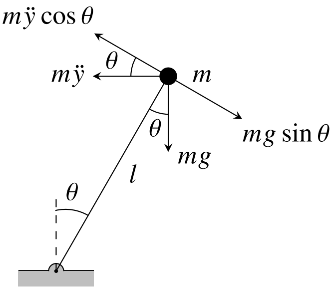
onde

$$H = m\frac{d^2\left(y + l\sin\theta\right)}{dt^2} = m\ddot{y} + ml\frac{d\left(\cos\theta\dot{\theta}\right)}{dt} = m\ddot{y} - ml\sin\theta\dot{\theta}^2 + ml\cos\theta\ddot{\theta}.$$

Para o movimento rotacional usa-se a equação do torque T em função da força f_t tangencial à trajetória circular percorrida pela massa m (ver figura na próxima página),

$$T = lf_t = l\left(m\dot{v}\right) = ml\frac{d\left(l\omega\right)}{dt} = ml^2\dot{\omega} = ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - m\ddot{y}l\cos\theta$$

onde v é a velocidade linear da massa m e a última igualdade se deve ao balanço de forças tangenciais sobre a massa como mostrado na próxima figura.



As equações acima são não lineares, mas para que o equilíbrio do pêndulo seja mantido é necessário que $\theta \ll 1$, de modo que $\theta^2 \approx \dot{\theta}\theta \approx \ddot{\theta}\theta \approx \dot{\theta}^2 \approx 0$, $\sin\theta \approx \theta$ e $\cos\theta \approx 1$. Substituindo nas equações de H e T resulta em

$$M\ddot{y} = u - H$$
$$H \approx m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}$$

$$u - m\ddot{y} - ml\ddot{\theta} = M\ddot{y}$$
$$(M+m)\,\ddot{y} = u - ml\ddot{\theta} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} T &= ml^2\ddot{\theta} \approx mgl\theta - m\ddot{y}l \\ l\ddot{\theta} &= g\theta - \ddot{y} \end{aligned} \tag{11}$$

De (10) e (11),

$$\begin{aligned} (M+m)\left(g\theta - l\ddot{\theta}\right) &= u - ml\ddot{\theta} \\ Mg\theta - Ml\ddot{\theta} + mg\theta &= u \end{aligned}$$

$$Ml\ddot{\theta} = (M+m)\,g\theta - u \tag{12}$$

substituindo em (11) em (10), $(M+m)\,\ddot{y} = u - m\,(g\theta - \ddot{y})$, e

$$M\ddot{y} = u - mg\theta \tag{13}$$

A relação entrada-saída é obtida através da aplicação da transformada de Laplace às equações (12) e (13)

$$Mls^2\hat{\theta}(s) = (M+m)\,g\hat{\theta}(s) - \hat{u}(s) \tag{14}$$

$$Ms^2\hat{y}(s) = \hat{u}(s) - mg\hat{\theta}(s) \tag{15}$$

De (14), $\hat{\theta}(s)\left[(M+m)g - Mls^2\right] = \hat{u}(s)$, e então

$$\hat{\theta}(s) = \frac{\hat{u}(s)}{(M+m)g - Mls^2}$$

a função de transferência relacionando a entrada u e a saída θ é

$$\hat{g}_{\theta u}(s) = \frac{-1}{Mls^2 - (M+m)g}$$

Por outro lado, substituindo $\hat{\theta}(s)$ em (15)

$$Ms^2\hat{y}(s) = \hat{u}(s) + \frac{mg}{Mls^2 - (M+m)g}\hat{u}(s) = \frac{ls^2 - g}{s^2\left[Mls^2 - (M+m)g\right]}\hat{u}(s)$$

a função de transferência relacionando u e y é

$$\hat{g}_{yu}(s) = \frac{ls^2 - g}{s^2\left[Mls^2 - (M+m)g\right]}$$

Para desenvolver as equações de estado, escolhe-se as variáveis como

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1,\ x_3 = \theta,\ x_4 = \dot{\theta} = \dot{x}_3$$

Com esta seleção de variáveis e das equações (12) e (13) se pode obter

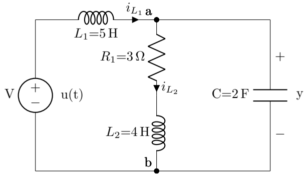
$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \ddot{y} = \frac{-mg}{M} x_3 + \frac{1}{M} \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \ddot{\theta} = \frac{(M+m)\,g}{Ml} x_3 - \frac{1}{Ml} u
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{Ml} \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Exemplo 1.5- Circuito RLC



Escolhe-se como variáveis de estado as correntes nos dois indutores e a tensão no capacitor, ou seja, as variáveis dos elementos armazenadores de energia do circuito,$x_1 = i_{L_1},\ x_2 = i_{L_2},\ x_3 = v_c$, e com estas escolhas pode-se escrever as derivadas das variáveis com as leis de tensão no indutor e corrente no capacitor, isto é

$$v_{L_1} = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} = L_1 \dot{x}_1 = 5\dot{x}_1$$

$$v_{L_2} = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} = L_2 \dot{x}_2 = 4\dot{x}_2$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = C\dot{x}_3 = 2\dot{x}_3$$

Aplicando a lai das tensões de kirchhoff à malha externa permite encontrar a equação para $\dot{x}_1$.

$$-u + v_{L_1} + v_c = 0 \rightarrow -u + 5\dot{x}_1 + x_3 = 0 \rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}u$$

Procedendo analogamente para a segunda malha interna,

$$-4\dot{x}_2 - 3x_2 + x_3 = 0 \rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_2.$$

Finalmente, aplicando a lei das corrente ao nó a permite escrever a equação para $\dot{x}_3$.

$$x_1 - x_2 = 2\dot{x}_3 \rightarrow \dot{x}_3 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

Além disso, $y = x_3$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -{}^1/_5 \\ 0 & -{}^3/_4 & {}^1/_4 \\ {}^1/_2 & -{}^1/_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^1/_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

A função de transferência do circuito pode ser obtida calculando-se inicialmente a impedância entre os nós a e b $Z_{ab}(s)$.

$$Z_{ab}(s) = \frac{(3+4s)\,{}^{1}\!/_{2s}}{3+4s+{}^{1}\!/_{2s}} = \frac{3+4s}{8s^2+6s+1}$$

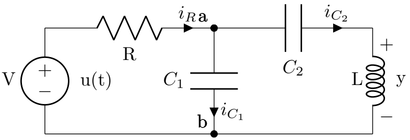
A tensão no capacitor $\hat{y}(s)$ é calculada com o divisor de tensão sobre a impedância $Z_{ab}(s)$

$$\hat{y}(s) = \frac{Z_{ab}(s)}{Z_{ab}(s)+5s}\hat{u}(s) = \frac{3+4s}{40s^3+30s^2+9s+3}\hat{u}(s)$$

onde a função de transferência $\hat{g}(s) = \frac{3+4s}{40s^3+30s^2+9s+3}$ pode alternativamente ser obtida de $\hat{g}(s) = \mathbf{C}\,[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B}+\mathbf{D}$, ou seja

$$\hat{g}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & {}^{1}\!/_{5} \\ 0 & s+4 & -{}^{1}\!/_{4} \\ -{}^{1}\!/_{2} & {}^{1}\!/_{2} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} {}^{1}\!/_{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3+4s}{40s^3+30s^2+9s+3}$$

Exemplo 1.6- Outro Circuito RLC



As variáveis de estado são $x_1 = v_{C_1}$, $x_2 = v_{C_2}$ e $x_3 = i_{C_2} = C_2\dot{x}_2$. Logo $\dot{x}_2 = {}^1/_{C_2} x_3$. Também $i_{C_1} = C_1\dot{x}_1$. Aplicando a LTK à segunda malha interna tem-se que $-x_1 + x_2 + y = 0 \longrightarrow y = -x_2 + x_1$, e combinando com o fato que $y = L\dot{x}_3$,

$$-x_1 + x_2 + L\dot{x}_3 = 0 \longrightarrow \dot{x}_3 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2.$$

A LTK aplicada à primeira malha interna fornece $-u + Ri_R + x_1 = 0 \longrightarrow i_R = {}^{(u-x_1)}/_R$. Combinando com a LCK no nó *a* tem-se finalmente

$$i_R = \frac{u - x_1}{R} = C_1\dot{x}_1 + x_3 \longrightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{RC_1}x_1 - \frac{1}{C_1}x_3 + \frac{1}{RC_1}u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/RC_1 & 0 & -1/C_1 \\ 0 & 0 & 1/C_2 \\ 1/L & -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/RC_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Referências

- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Fourth Edition, 2013.
- B.P. Lathi. *Sinais e Sistemas Lineares*. ARTMED editora, segunda edição, 2004.