

Sistemas_Lineares_11_RespFreq_DiagramadeBode

November 14, 2024

1 Resposta Em Frequência

1.1 Decibel

O decibel é uma medida de ganho em escala logarítmica. Em um sistema com entrada V_i e saída V_o , a potência de entrada P_i é proporcional ao quadrado da tensão de entrada, assim como a potência de saída P_o é proporcional ao quadrado da tensão de saída. O ganho de potência é definido como

$$G = \frac{P_o}{P_i}$$

e o ganho em decibéis é

$$G(dB) = 10 \log \frac{P_o}{P_i}$$

O Ganho em tensão é definido como

$$G_V(dB) = 20 \log \frac{V_o}{V_i}$$

1.2 Diagramas de Bode

Diagramas de Bode são gráficos de ganho e fase em função da frequência, em escala logarítmica. O ganho é dado em decibéis

$$G_V(dB) = 20 \log \|H(j\omega)\|$$

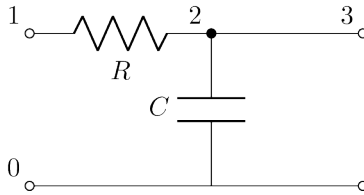
enquanto o gráfico de fase mostra a variação do ângulo em graus ou radianos, segundo a frequência.

Exemplo neste primeiro exemplo analisamos a resposta em frequência de um filtro RC passa baixas de primeira ordem incluindo os diagramas de Bode:

```
[1]: from lcapy import *
a=Circuit("""
P1 1 0; down
R 1 2 ; right=1.2
C 2 0_2 ; down
W 0 0_2; right
```

```
W 2 3; right
W 0_2 0_3; right
P2 3 0_3; down""")
```

```
[2]: a.draw()
```



```
[3]: H = a.transfer(1, 0, 3, 0)
H
```

```
[3]:
```

$$\frac{1}{CRs + 1}$$

```
[4]: Hw=H(jomega)
Hw
```

```
[4]:
```

$$\frac{1}{jCR\omega + 1}$$

$\tau = RC$. Vamos analisar a resposta em frequência.

```
[5]: Hm=abs(Hw)
Hm
```

```
[5]:
```

$$\frac{1}{\sqrt{C^2R^2\omega^2 + 1}}$$

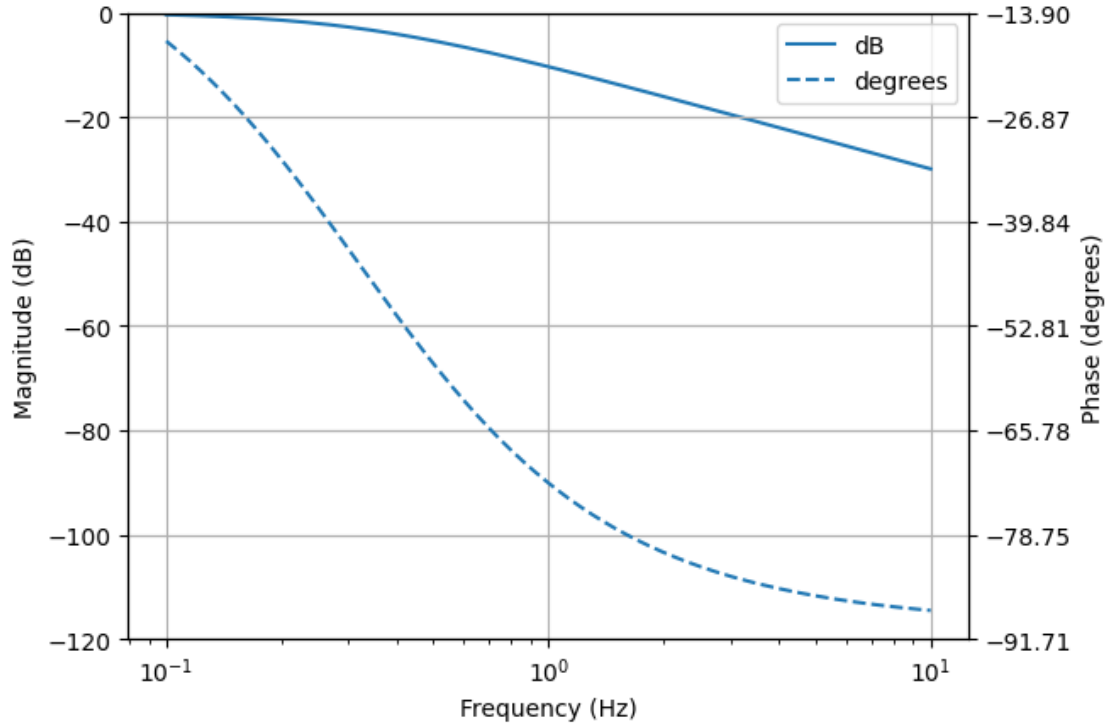
Substituindo $R = 2 \Omega$ e $C = \frac{1}{4}$ farads, podemos fazer o gráfico dos diagramas de Bode de módulo e fase da função de transferência.

```
[6]: Hr=H.subs({'R':2, 'C':0.25}).simplify()
Hr
```

```
[6]:
```

$$\frac{2}{s + 2}$$

```
[7]: Hr(f).bode_plot((0, 10), plot_type='dB-degrees');
```



```
[8]: Hm.subs({'R':2,'C':0.25,'omega':2}).simplify()
```

[8]:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Um filtro composto de elementos passivos não contém elementos amplificadores e não tem ganho de sinal. Assim o módulo da máxima resposta em frequência é 1, que em decibéis corresponde a 0 dB. Em $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, ou $f \approx 0.32 \text{ Hz}$, $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e portanto o ganho em potência do filtro é $\frac{1}{2}$, ou seja, a potência de saída é a metade da potência de entrada. Por este motivo, esta frequência é denominada como frequência de corte ω_c , ou f_c . Além disso, a frequência de corte corresponde ao polo da função de transferência. A faixa de frequências inferiores a frequência de corte é a banda passante do filtro. O ganho em decibéis na frequência de corte é $20 \log \frac{1}{2} = -3 \text{ dB}$.

Foi mostrado acima (out[4]) que o módulo da resposta em frequência é

$$\|H(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

e portanto

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

e a resposta em frequência pode ser escrita como

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Quando $\omega = \omega_c$, $H(j\omega) = \frac{1}{1+j}$ e $\|H(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, como discutido acima.

Além disso, para uma frequência $\omega = 10\omega_c = \frac{10}{RC}$ o ganho em decibéis será

$$20 \log \left\| \frac{1}{1 + j10} \right\| = -20 \log \|1 + j10\| \approx -20 \log(10) = -20dB$$

O filtro de primeira ordem (na verdade, isso vale para todo polo de primeira ordem) apresenta uma atenuação de aproximadamente 20 dB por década, como pode ser visto no diagrama acima. Além disso, a variação de fase do filtro (correspondente aquela de um polo de primeira ordem) é

$$\angle H(j\omega) = \arctan \frac{0}{1} - \arctan \frac{10}{1} = -84.29^\circ \approx -90^\circ$$

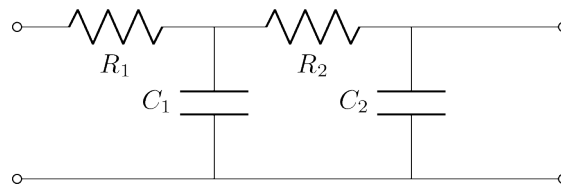
o polo de primeira ordem causará um atraso de fase de aproximadamente 90° por década.

Exemplo Filtro RC passa-baixas de segunda ordem. O circuito utiliza dois estágios RC em cascata, para formar um sistema com polos de segunda ordem com uma atenuação mais rápida que o filtro do exemplo anterior.

[9]: `from lcapy import *`

```
a=Circuit("""
P1 1 0; down
R1 1 2 ; right=1.3
C1 2 0a ; down
R2 2 3 ; right=1.3
C2 3 0b ; down
W 0 0a; right=1.3
W 0a 0b; right=1.3
W 3 3a; right
W 0b 0c;
P2 3a 0c; down
; draw_nodes=none, label_nodes=none""")
```

[10]: `a.draw()`



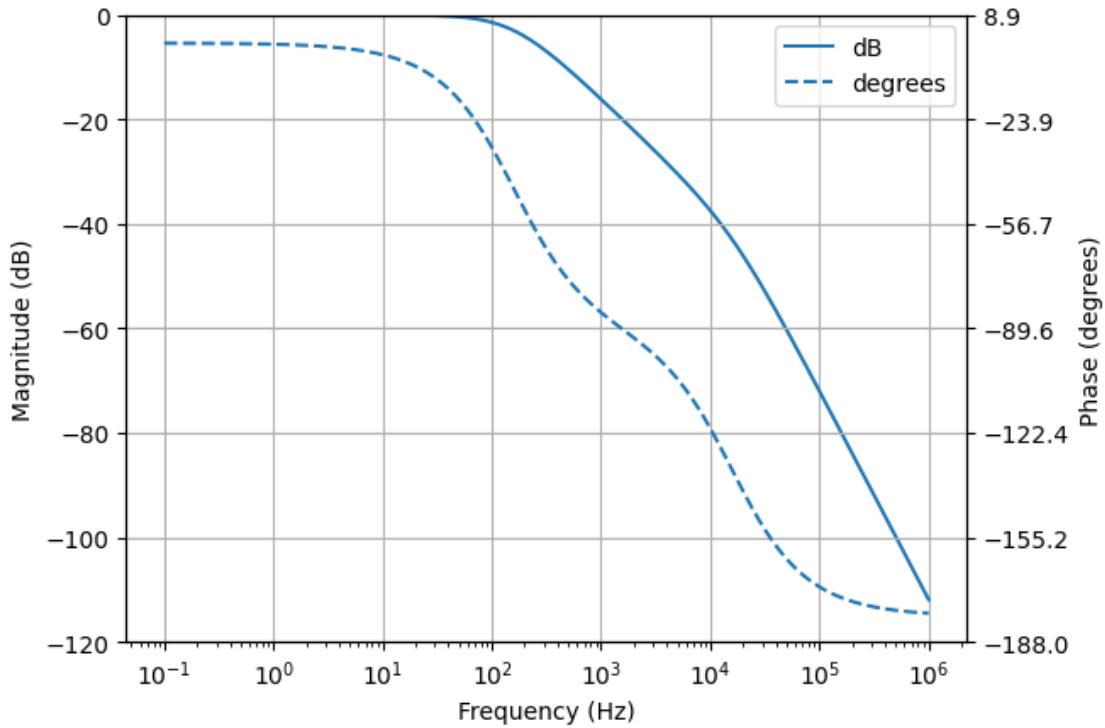
```
[11]: H=a.transfer('P1','P2')
      H.canonical()
```

[11]:

$$\frac{\frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{C_2} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}}{s^2 + \frac{s(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2)}{C_1 C_2 R_1 R_2} + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

```
[12]: Hv = H.subs({'R1':10e3, 'C1':100e-9, 'R2':10e3, 'C2':1e-9})
```

```
[13]: Hv(f).bode_plot((0, 1e6), plot_type='dB-degrees');
```



```
[14]: Hv.poles()
```

[14]:

$$\{-51000 - 1000\sqrt{2501} : 1, -51000 + 1000\sqrt{2501} : 1\}$$

O par de polos corresponde às duas frequências de corte, $f_{c1}=157.6$ Hz e $f_{c2} = 16.1$ kHz. Estas frequências podem ser percebidas no diagrama acima, onde o amortecimento do filtro tem inclinação de -20 dB por década a partir de f_{c1} , e -40 dB por década a partir de f_{c2} . Para que o amortecimento com inclinação de -40 dB ocorra após a primeira frequência de corte, precisamos aproximar os dois polos de forma semelhante a uma função de transferência com um polo de segunda ordem. Isso pode ser feito com o aumento da capacitância de C_2 para 100nF, por exemplo:

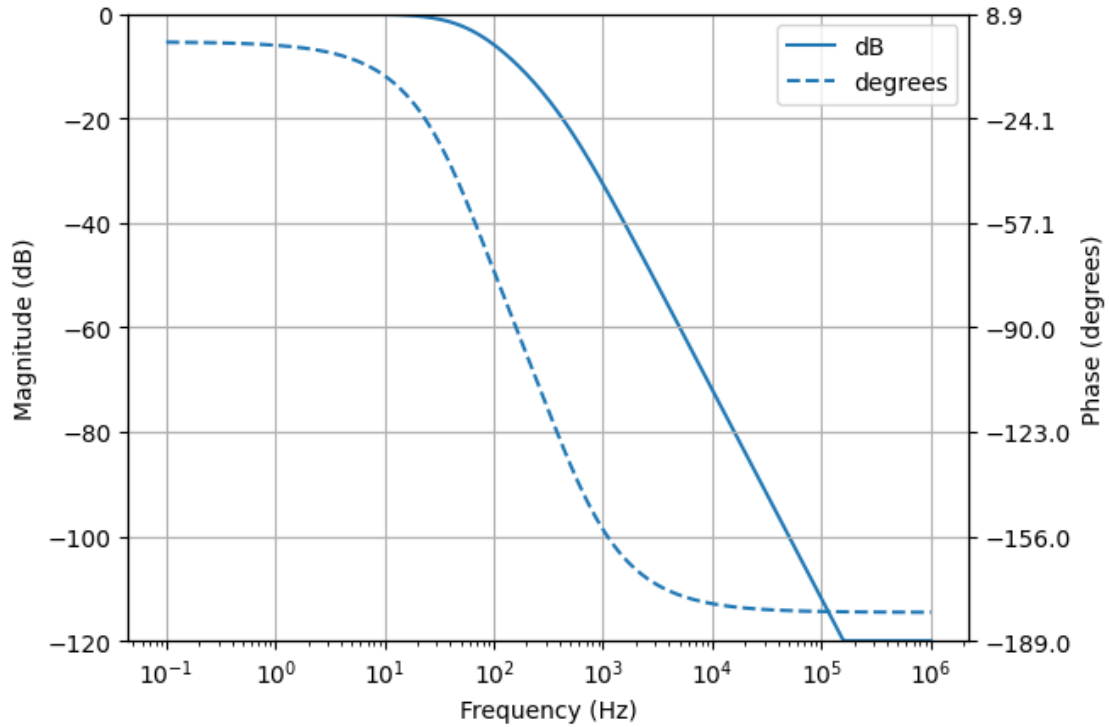
```
[15]: Hv2 = H.subs({'R1':10e3, 'C1':100e-9, 'R2':10e3, 'C2':100e-9})
      Hv2.poles()
```

[15]:

$$\{-1500 - 500\sqrt{5} : 1, -1500 + 500\sqrt{5} : 1\}$$

Os polos correspondem as frequências de 61 Hz e 417 Hz, suficientemente próximas para que o diagrama de Bode mostre uma curva suave com inclinação de aproximadamente 40 dB por década a partir da frequência de corte.

```
[16]: Hv2(f).bode_plot((0, 1e6), plot_type='dB-degrees');
```



Para analisar o diagrama acima, vamos recordar a função de transferência geral do sistema de segunda ordem

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

e comparar com a função de transferência do filtro RC de segunda ordem

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}{s^2 + \frac{(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2)}{C_1 C_2 R_1 R_2} s + \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

Desta forma, obtemos $K = 1$ e $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$. O filtro tem ganho máximo igual a 1, como pode ser visto no diagrama de Bode em baixas frequências. Novamente, para a determinação da resposta em frequência podemos analisar a expressão geral

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1}$$

Desta forma, substituindo $s = j\omega$, o ganho em decibéis é dado por

$$G_V(dB) = 20 \log(1) - 20 \log \left\| \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} j\omega + 1 \right\|$$

Para $\omega = 10\omega_n$, o ganho é aproximadamente dado por

$$20 \log \|H(j\omega)\| \approx -20 \log \left\| \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right\| = -20 \log \left(\frac{10\omega_n}{\omega_n} \right)^2 = -40 \text{ dB}$$

e a fase é

$$\angle(H(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

E para $\omega \gg \omega_n$ ($\omega = 10\omega_n$),

$$\angle(H(j\omega)) \approx -180^\circ.$$

Concluimos que o filtro de segunda ordem tem um amortecimento com inclinação de -40 dB por década, além de apresentar um atraso de fase de 180° por década. Esses resultados podem ser confirmados no diagrama de Bode mostrado acima. A frequência de corte é $\omega_c = \omega_n = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$. Substituindo os valores do último exemplo resulta em aproximadamente 160 Hz.

Exemplo neste último exemplo, vamos estudar o diagrama de Bode para um sistema representado pela função de transferência

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$$

```
[17]: H=tf(100,[1,2,100])
      H
```

[17]:

$$\frac{100}{s^2 + 2s + 100}$$

```
[18]: H.poles()
```

[18]:

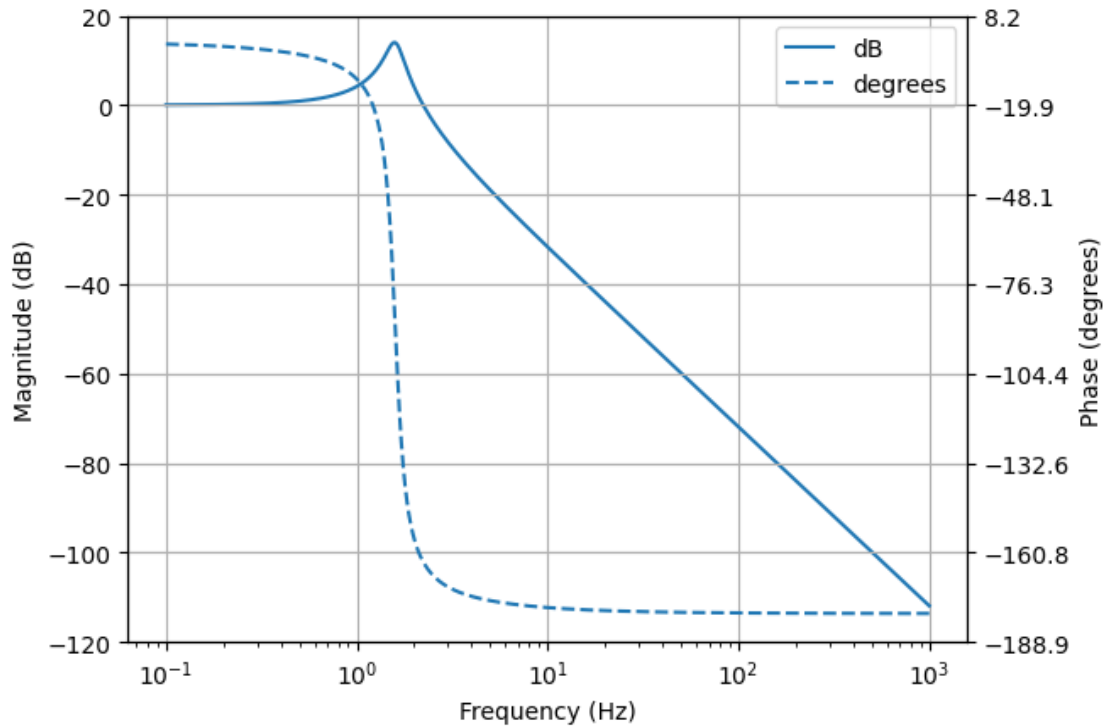
$$\{-1 - 3\sqrt{11}j : 1, -1 + 3\sqrt{11}j : 1\}$$

os polos são complexos, o que significa que o sistema é subamortecido e $\zeta < 1$. Comparando o denominador de $H(s)$ com o de um sistema de segunda ordem padrão,

$$s^2 + 2s + 100 = s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2,$$

podemos verificar que $\omega_n = 10$ e $\zeta = 0,1$.

```
[19]: H(f).bode_plot((0, 1e3), plot_type='dB-degrees');
```



Aumentando o valor de ζ , por exemplo, $\zeta = 1$,

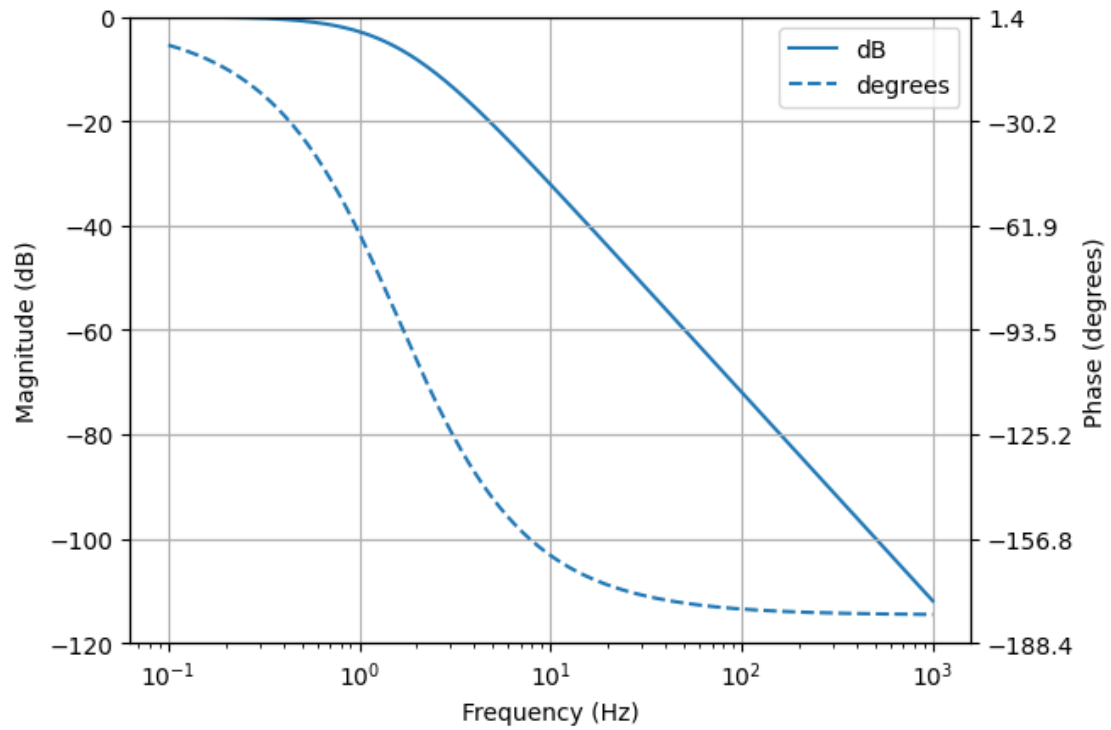
```
[20]: H=tf(100,[1,20,100])
      H.poles()
```

```
[20]:
```

$$\{-10 : 2\}$$

São dois polos iguais e o sistema é criticamente amortecido.

```
[21]: H(f).bode_plot((0, 1e3), plot_type='dB-degrees');
```

Quando os polos são complexos, $\zeta < 1$, o módulo da resposta em frequência mostra oscilação em torno da frequência ω_n e o atraso de fase é abrupto. Para valores maiores de ζ as curvas são mais suaves.