Sistemas_Lineares_11_RespFreq_DiagramadeBode

November 19, 2024

1 Resposta Em Frequência

1.1 Decibel

O decibel é uma medida de ganho em escala logarítmica. Em um sistema com entrada V_i e saída V_o,, a potência de entrada P_i é proporcional ao quadrado da tensão de entrada, assim como a potência de saída P_o é proporcional ao quadrado da tensão de saída. O ganho de potência é definido como

$$G = \frac{P_o}{P_i}$$

e o ganho em decibéis é

$$G(dB) = 10\log\frac{P_o}{P_i}$$

O Ganho em tensão é definido como

$$G_V(dB) = 20\log\frac{V_o}{V_i}$$

1.2 Diagramas de Bode

Diagramas de Bode são gráficos de ganho e fase em função da frequência, em escala logarítmica. O ganho é dado em decibéis

$$G_V(dB) = 20\log\|H(j\omega)\|$$

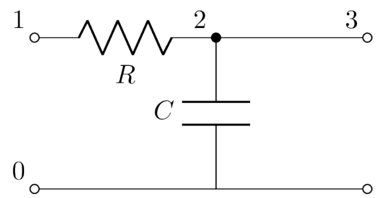
enquanto o gráfico de fase mostra a variação do ângulo em graus ou radianos, segundo a frequência.

Exemplo neste primeiro exemplo analisamos a resposta em frequência de um filtro RC passa baixas de primeira ordem incluindo os diagramas de Bode:

[1]:
```
from lcapy import *
a=Circuit("""
P1 1 0; down
R 1 2 ; right=1.2
C 2 0_2 ; down
W 0 0_2; right
```

```
W 2 3; right
W 0_2 0_3; right
P2 3 0_3; down""")
```

[2]:
```
a.draw()
```



[3]:
```
H = a.transfer(1, 0, 3, 0)
H
```

[3]:

$$\frac{1}{CRs+1}$$

[4]:
```
Hw=H(jomega)
Hw
```

[4]:

$$\frac{1}{\mathrm{j}CR\omega+1}$$

onde $\tau = RC$ é a constante de tempo. Vamos analisar a resposta em frequência.

[5]:
```
Hm=abs(Hw)
Hm
```

[5]:

$$\frac{1}{\sqrt{C^2R^2\omega^2+1}}$$

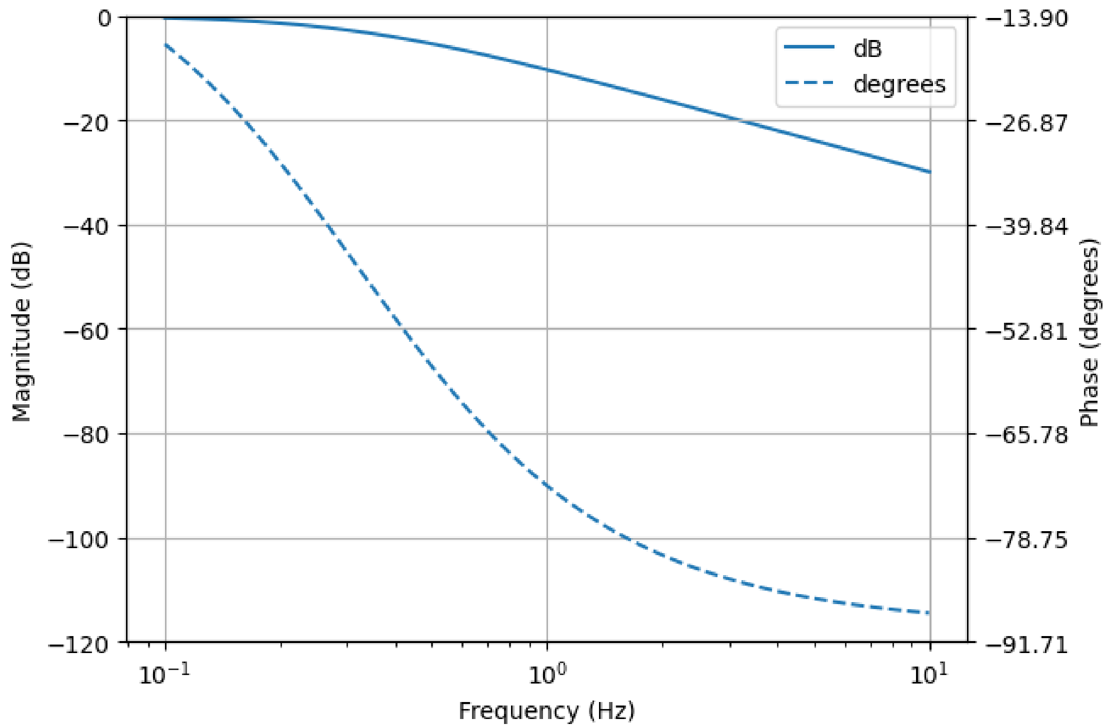
Substituindo $R = 2\ \Omega$ e $C = \frac{1}{4}$ farads, podemos fazer o gráfico dos diagramas de Bode de módulo e fase da função de transferência.

[6]:
```
Hr=H.subs({'R':2,'C':0.25}).simplify()
Hr
```

[6]:

$$\frac{2}{s+2}$$

[7]:
```
Hr(f).bode_plot((0, 10), plot_type='dB-degrees');
```



[8]:
```
Hm.subs({'R':2,'C':0.25,'omega':2}).simplify()
```

[8]:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Um filtro composto de elementos passivos não contém elementos amplificadores e não tem ganho de sinal. Assim o módulo da máxima resposta em frequência é 1, que em decibéis corresponde a 0 dB. Em $\omega = 2\ \frac{rad}{s}$, ou $f \approx 0.32\ Hz$, $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e portanto o ganho em potência do filtro é $\frac{1}{2}$, ou seja, a potência de saída é a metade da potência de entrada. Por este motivo, esta frequência é denominada como frequência de corte ω_c, ou f_c. Além disso, a frequência de corte corresponde ao polo da função de transferência. A faixa de frequências inferiores a frequência de corte é a banda passante do filtro. O ganho em decibéis na frequëncia de corte é $20 \log \frac{1}{2} = -3dB$.

Considere a função de transferência de um sistema de primeira ordem com ganho unitário, isto é

$$H(s) = \frac{1}{1+\tau s} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s+\frac{1}{\tau}}. \tag{1}$$

A resposta em frequência é então dada por

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{\tau}}{j\omega+\frac{1}{\tau}}, \tag{2}$$

cujo módulo é

$$\|H(j\omega)\| = \frac{\frac{1}{\tau}}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}}, \tag{3}$$

e por isso, para $\omega = \frac{1}{\tau}$ teremos $\|H(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Daí, $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_c$ é a frequência de corte do sistema. Para o filtro RC acima (out[5]) o módulo da resposta em frequência é

$$\|H(j\omega)\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}},$$

e portanto

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau},$$

e a resposta em frequência pode ser escrita como

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}.$$

Para uma frequência muito maior que a frequência de corte, como $\omega = 10\ \omega_c = \frac{10}{RC}$, o ganho em decibéis será

$$20 \log \|\frac{1}{1 + j10}\| = -20 \log \|1 + j10\| \approx -20 log(10) = -20 dB$$

O filtro de primeira ordem (na verdade, isso vale para todo sistema com polo de primeira ordem) apresenta uma atenuação de aproximadamente 20 dB por década (Intervalo no qual a frequência superior é 10 vezes a frequência inferior). Da mesma forma se um sistema apresenta um zero de primeira ordem, a este zero corresponderá um crescimento de 20 DB por década. Além disso, a variação de fase do filtro (correspondente aquela de um polo de primeira ordem) é

$$\angle H(j\omega) = \arctan \frac{0}{1} - \arctan \frac{10}{1} = -84.29^0 \approx -90^o$$

o polo de primeira ordem causará um atraso de fase de aproximadamente 90^o por década (o zero de primeira ordem resultará em um avanço de fase de 90^0 por década).

Além disso, pode acontecer de a função de transferência possuir um polo de ordem zero, ou polo na origem (zero de na orígem). como em

$$H(s) = \frac{K}{s(s + a)} \tag{4}$$

com resposta em frequência de módulo

$$\|H(j\omega\| = 20 \log K + 20 \log \|\frac{1}{j\omega}\| + 20 \log \|\frac{1}{j\omega + a}\| \tag{5}$$

na expressão acima, o último termo corresponde ao polo de primeira ordem analisado anteriormente. O primeiro termo corresponde ao ganho máximo do sistema. Para *K=1* este ganho é de 0 dB. Para o segundo termo, ao qual corresponde um polo na origem, a amplitude do ganho correspondente é

$$20 \log \| \frac{1}{j\omega} \| = -20 \log(\omega) \tag{6}$$

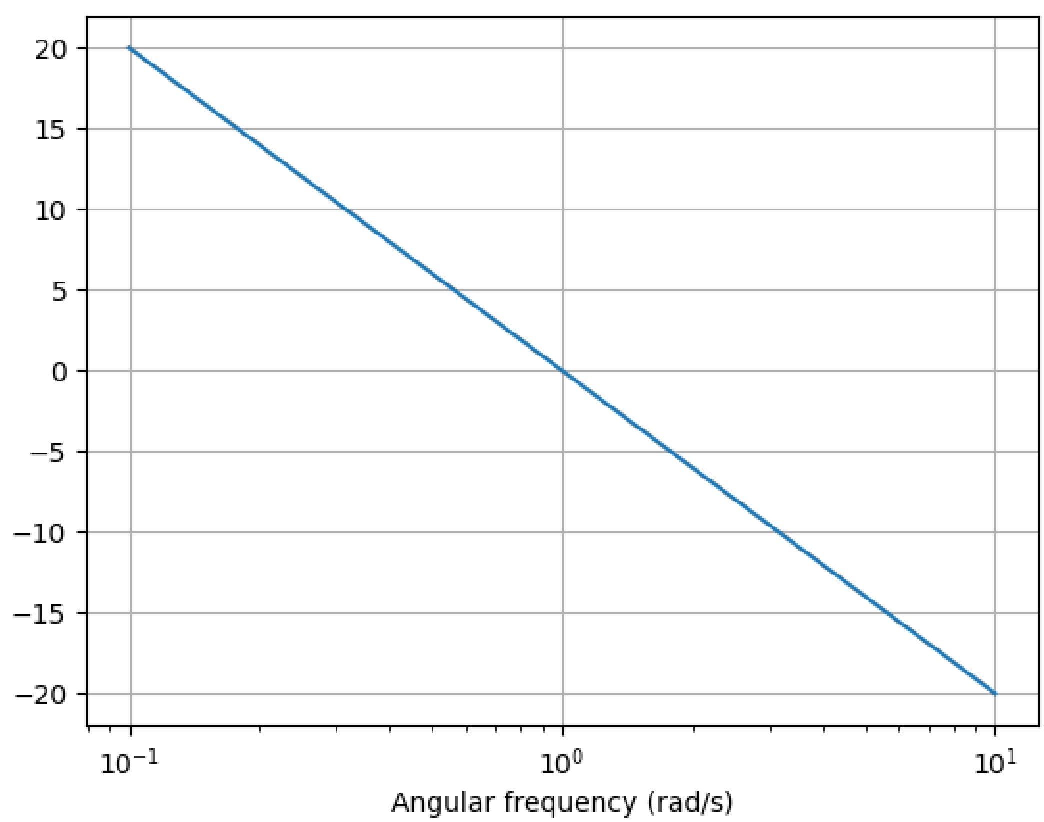
Para $\omega = 0.1$, $-20\log(\omega) = 20dB$, para $\omega = 0$, $-20\log(\omega) = 0dB$ e para $\omega = 10$, $-20\log(\omega) = -20dB$. Portanto a curva de ganho pode ser aproximada por uma reta ligando os pontos (0.1,20),(1,0) e (10,-20) no diagrama de Bode, uma reta de inclinação de -20 dB por década assim como uma defasagem constante de -90^o (para um zero na origem termeos uma reta com inclinação de $20dB$ com fase constante de 90^o). Veja o exemplo abaixo.

[83]:
```
H=tf(1,[1,0])
H
```

[83]:

$$\frac{1}{s}$$

[87]:
```
H(jw).dB.plot((0, 10), log_frequency=True);
```

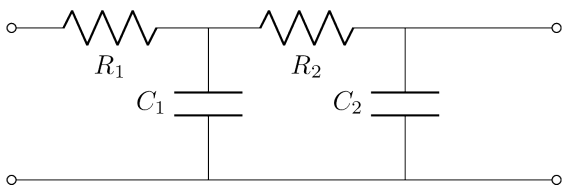


Exemplo Filtro *RC* passa-baixas de segunda ordem. O circuito utiliza dois estágios *RC* em cascata, para formar um sistema com polos de segunda ordem com uma atenuação mais rápida que o filtro do exemplo anterior.

[9]:
```
from lcapy import *

a=Circuit("""
P1 1 0; down
R1 1 2 ; right=1.3
C1 2 0a ; down
R2 2 3 ; right=1.3
C2 3 0b ; down
W 0 0a; right=1.3
W 0a 0b; right=1.3
W 3 3a; right
W 0b 0c;
P2 3a 0c; down
; draw_nodes=none, label_nodes=none""")
```

[10]:
```
a.draw()
```



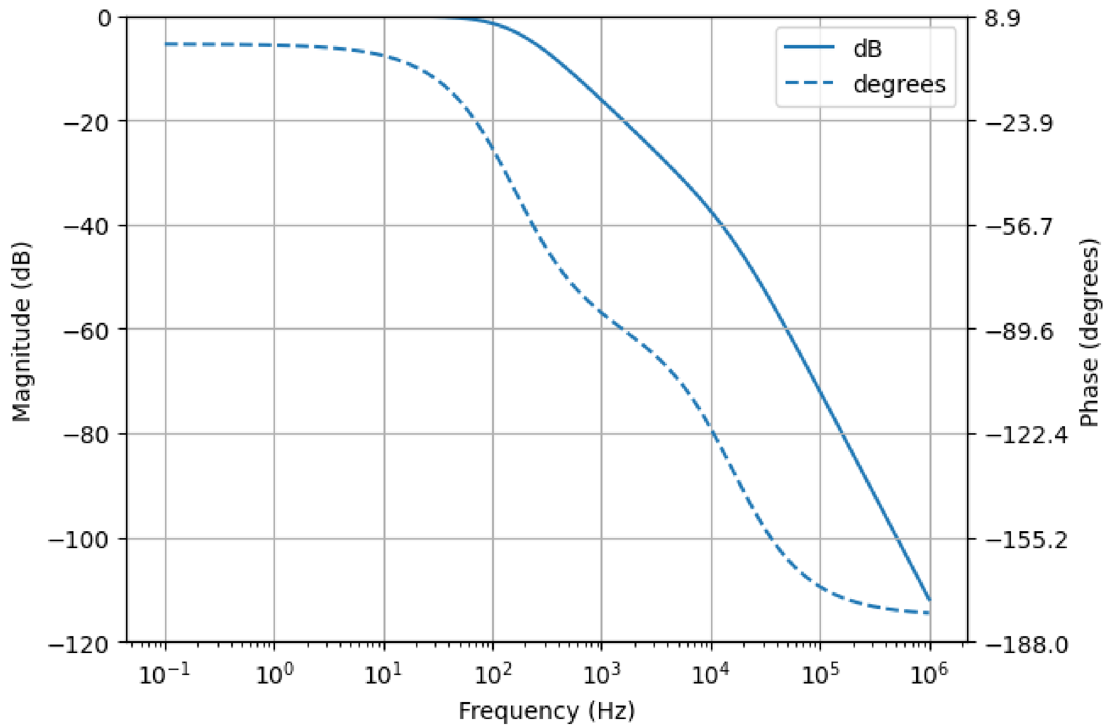
[11]:
```
H=a.transfer('P1','P2')
H.canonical()
```

[11]:

$$\frac{\frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{C_2} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}}{s^2 + \frac{s(C_1R_1+C_2R_1+C_2R_2)}{C_1C_2R_1R_2} + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}$$

[12]:
```
Hv = H.subs({'R1':10e3, 'C1':100e-9, 'R2':10e3, 'C2':1e-9})
```

[13]:
```
Hv(f).bode_plot((0, 1e6), plot_type='dB-degrees');
```



[14]:
```
Hv.poles()
```

[14]:

$$\left\{-51000 - 1000\sqrt{2501} : 1,\ -51000 + 1000\sqrt{2501} : 1\right\}$$

O par de polos corresponde às duas frequências de corte, `$f_{c1}=157.6 $` Hz e f_{c2} = 16.1 kHz. Estas frequências podem ser percebidas no diagrama acima, onde o amortecimento do filtro tem inclinação de -20 dB por década a partir de f_{c1}, e -40 dB por década a partir de f_{c2}. Para que o amortecimento com inclinação de -40 dB ocorra após a primeira frequência de corte, precisamos aproximar os dois polos de forma semelhante a uma função de transferência com um polo de segunda ordem. Isso pode ser feito com o aumento da capacitância de C_2 para 100nF, por exemplo:

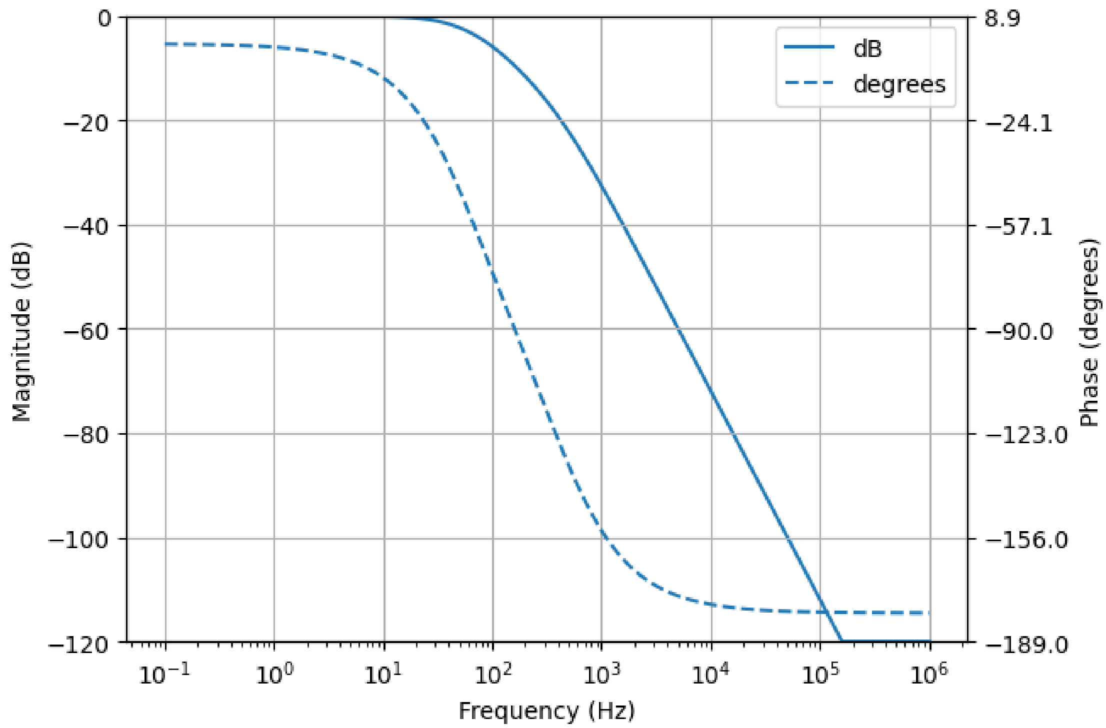
[15]:
```
Hv2 = H.subs({'R1':10e3, 'C1':100e-9, 'R2':10e3, 'C2':100e-9})
Hv2.poles()
```

[15]:

$$\left\{-1500 - 500\sqrt{5} : 1,\ -1500 + 500\sqrt{5} : 1\right\}$$

Os polos correspondem as frequências de 61 Hz e 417 Hz, suficientemente próximas para que o diagrama de Bode mostre uma curva suave com inclinação de aproximadamente 40 dB por década a partir da frequência de corte.

[16]:
```
Hv2(f).bode_plot((0, 1e6), plot_type='dB-degrees');
```



Para analisar o diagrama acima, vamos recordar a função de transferência geral do sistema de segunda ordem

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

e comparar com a função de transferência do filtro RC de segunda ordem

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2 + \frac{(C_1R_1+C_2R_1+C_2R_2)}{C_1C_2R_1R_2}s + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}$$

Desta forma, obtemos $K = 1$ e $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}$. O filtro tem ganho máximo igual a 1, como pode ser visto no diagrama de Bode em baixas frequências. Novamente, para a determinação da resposta em frequência podemos analisar a expressâo geral

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2(\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1)} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$$

Desta forma, substituindo $s = j\omega$,o ganho em decibéis é dado por

$$G_V(dB) = 20\log(1) - 20\log\|\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega + 1\|$$

Para $\omega = 10\omega_n$, o ganho é aproximadamente dado por

$$20\log\|H(j\omega)\| \approx -20\log\|\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\| = -20\log\left(\frac{10\omega_n}{\omega_n}\right)^2 = -40 \text{ dB}$$

e a fase é

$$\angle(H(j\omega)) = -\arctan(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2})$$

E para $\omega \gg \omega_n$ $(\omega = 10\omega_n)$,

$$\angle(H(j\omega)) \approx -180^o.$$

Concluimos que o filtro de segunda ordem tem um amortecimento com inclinação de -40 dB por década, além de apresentar um atraso de fase de 180^o por década. Esses resultados podem ser confirmados no diagrama de Bode mostrado acima. A frequência de corte é $\omega_c = \omega_n = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$. Substituindo os valores do último exemplo resulta em aproximadamente 160 Hz.

Exemplo neste último exemplo, vamos estudar o diagrama de Bode para um sistema representado pela função de transferência

$$H(s) = \frac{100}{s^2+2s+100}$$

[17]:
```
H=tf(100,[1,2,100])
H
```

[17]:

$$\frac{100}{s^2+2s+100}$$

[18]:
```
H.poles()
```

[18]:

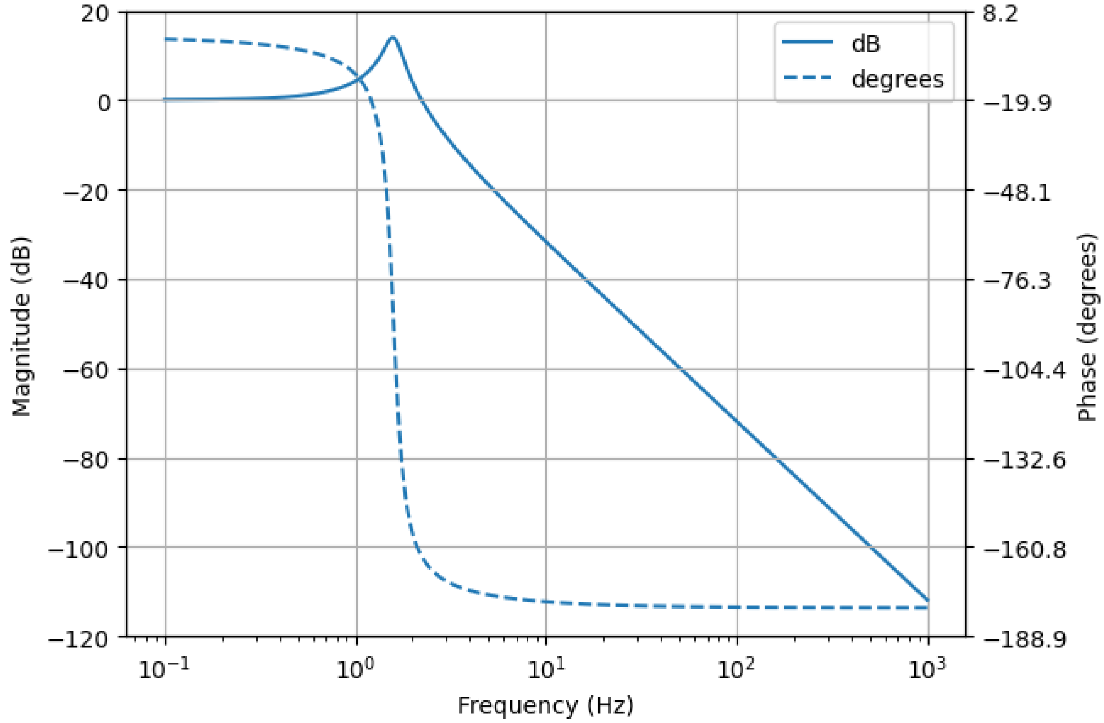
$$\left\{-1-3\sqrt{11}\mathrm{j} : 1,\ -1+3\sqrt{11}\mathrm{j} : 1\right\}$$

os polos são complexos, o que significa que o sistema é subamortecido e $\zeta < 1$. Comparando o denominador de $H(s)$ com o de um sistema de segunda ordem padrão,

$$s^2+2s+100 = s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2,$$

podemos verificar que $\omega_n = 10$ e $\zeta = 0,1$.

[19]:
```
H(f).bode_plot((0, 1e3), plot_type='dB-degrees');
```



Aumentando o valor de ζ, por exemplo, $\zeta = 1$,

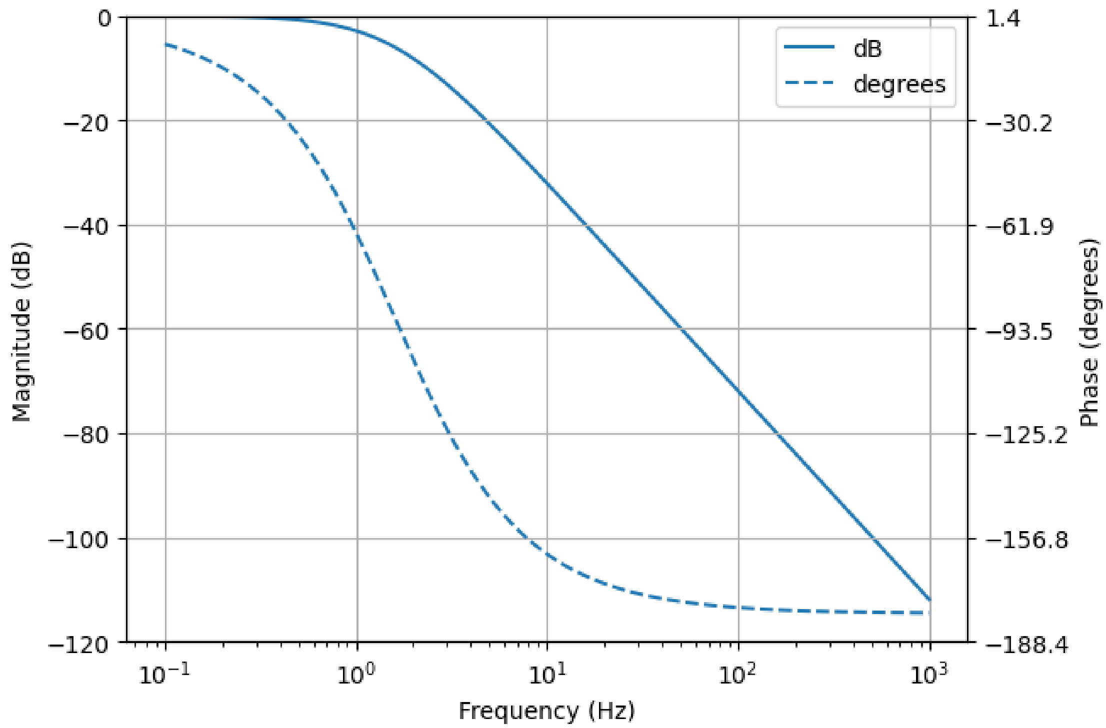
[20]:
```
H=tf(100,[1,20,100])
H.poles()
```

[20]:

$$\{-10 : 2\}$$

São dois polos iguais e o sistema é criticamente amortecido.

[21]:
```
H(f).bode_plot((0, 1e3), plot_type='dB-degrees');
```



Quando os polos são complexos, $\zeta < 1$, o módulo da resposta em frequência mostra oscilação em torno da frequência ω_n e o atraso de fase é abrupto. Para valores maiores de ζ as curvas são mais suaves.