RespostaEmFrequência

May 6, 2024

1 Resposta Em Frequência

1.1 Resposta à Excitação Senoidal

A reposta de um sistema S à uma exponencial de duração infinita com frequência complexa s, e^{st}, é obtida através da integral de convolução

$$y(t) = e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s\tau} h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)}\, d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau}\, d\tau = e^{st} H(s)$$

onde $h(t)$ é a resposta ao impulso.

Podemos escrever simplesmente que

$$e^{st} \Rightarrow H(s) e^{st}$$

Agora, fazendo $s = j\omega$, teremos $H(s) = H(j\omega)$, e portanto

$$e^{j\omega t} \Rightarrow H(j\omega) e^{j\omega t}$$

onde $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$. Por isso, tomando apenas a parte real,

$$\Re(e^{j\omega t}) = \cos(\omega t) \Rightarrow \Re(H(j\omega) e^{j\omega t})$$

$H(j\omega) = \left|H(j\omega)\right| e^{j\angle H(j\omega)}$. Substituindo na expressão acima, temos

$$\Re(e^{j\omega t}) = \cos(\omega t) \Rightarrow \left|H(j\omega)\right| \Re(e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))}) = \left|H(j\omega)\right| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

onde $\left|H(j\omega)\right|$ é o ganho de amplitude, $\angle H(j\omega)$ é a resposta de fase e $H(j\omega)$ é a resposta em frequência do sistema.

Exemplo Seja um sistema com função de transferência $H(s) = \frac{s+0.1}{s+5}$, e uma entrada $x(t) = \cos(\omega t)$.

[1]:
```
from lcapy import *
H=transfer((s+0.1)/(s+5))
H
```

[1]:

$$\frac{s + \frac{1}{10}}{s + 5}$$

[2]:
```
Hr=H(jomega).val
Hr
```

[2]:

$$\frac{\mathrm{j}\omega + 0.1}{\mathrm{j}\omega + 5.0}$$

[3]:
```
Num=abs(Hr.numerator).val
Den=abs(Hr.denominator).val
Hm=Num/Den
Hm
```

[3]:

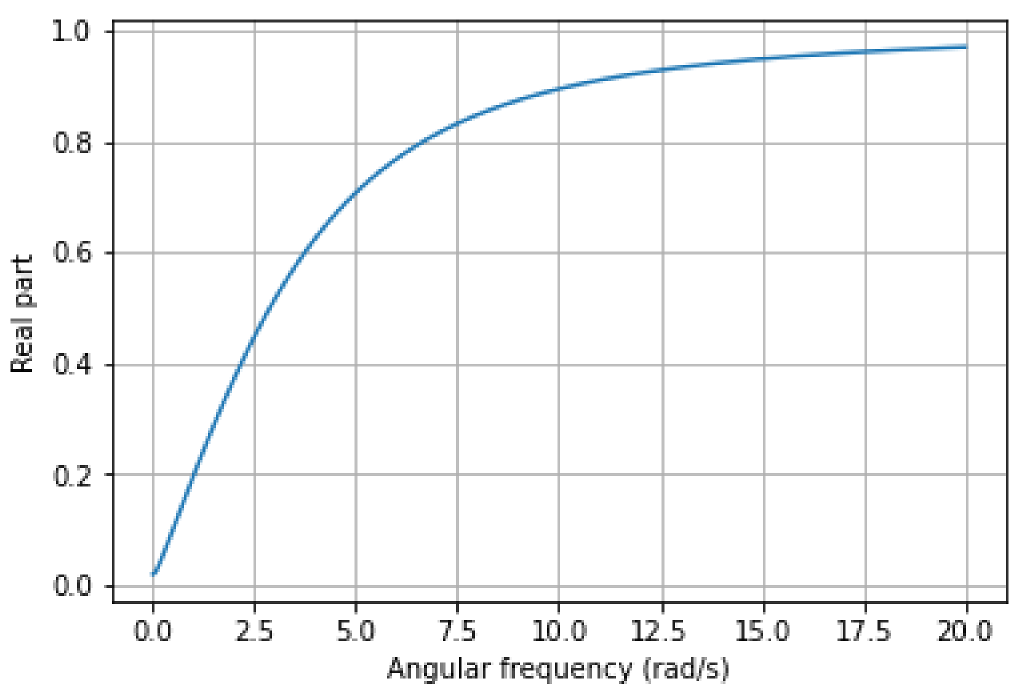
$$\frac{\left(\omega^2 + \frac{1}{100}\right)^{0.5}}{5\left(\frac{\omega^2}{25} + 1.0\right)^{0.5}}$$

[4]:
```
Hf=Hr.phase_degrees.val
Hf
```

[4]:

$$57.2957795130823 \operatorname{atan}\left(\frac{49.0\omega}{10.0\omega^2 + 5.0}\right)$$

[5]:
```
Hm.plot((0,20));
```



[6]:
```
Hm(2).val
```

[6]:

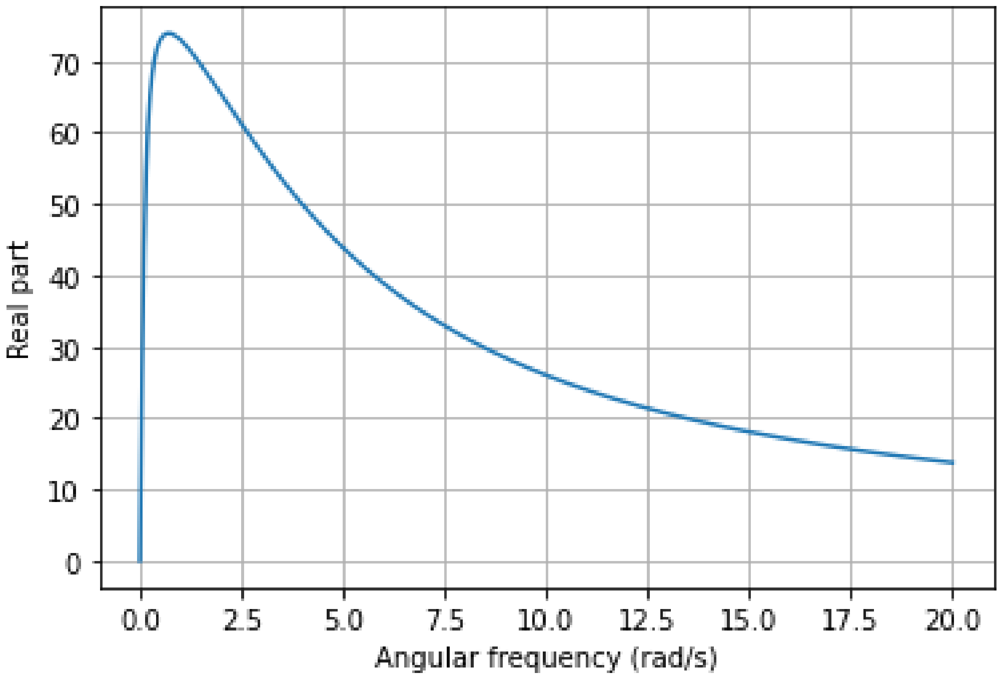
0.371854624912701

[7]:
```
Hm(10).val
```

[7]:

0.894471911241488

[8]:
```
Hf.plot((0,20));
```



[9]:
```
Hf(2).val
```

[9]:

65.3361852875364

[10]:
```
Hf(10).val
```

[10]:

25.9921124793945

Exemplo O atrasador ideal

Um atrasador ideal de T segundos é um sistema tal que $y(t) = x(t - T)$. Segundo a propriedade do deslocamento no tempo, $Y(s) = e^{-sT}X(s)$. Portanto, a função de transferência do atrasador ideal de T segundos é $H(s) = e^{-sT}$.

[11]:
```
T=symbol('T')
H=transfer(exp(-s*T))
Hr=H(jomega)
Hr
```

[11]:

$$e^{-\mathrm{j}T\omega}$$

[12]:
```
Hm=abs(Hr)
Hm
```

[12]:

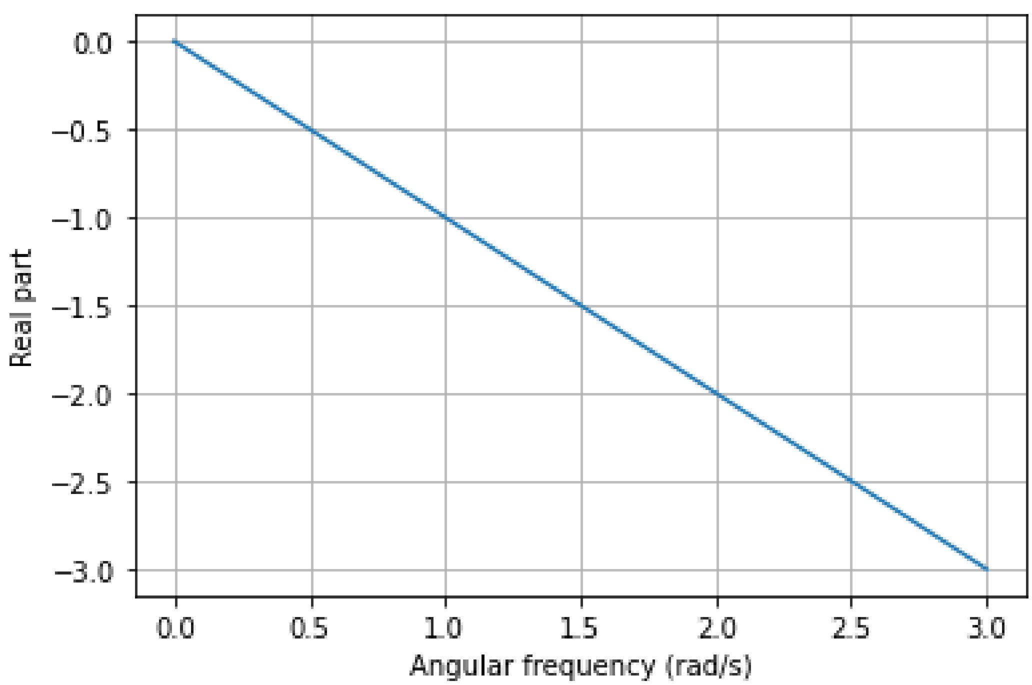
$$1$$

[13]:
```
Hf=Hr.angle
Hf
```

[13]:

$$\operatorname{atan}_2(-\sin(T\omega), \cos(T\omega))$$

[14]:
```
Hf.subs('T',1).plot((0,3));
```



Exemplo O diferenciador ideal

Um diferenciador ideal é um sistema tal que $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Segundo a propriedade da derivada temporal, $Y(s) = sX(s)$, e a função de transferência é $H(s) = s$.

[15]:
```
H=transfer(s)
Hr=H(jomega)
Hr
```

[15]:

$$j\omega$$

[16]:
```
Hm=abs(Hr)
Hm
```

[16]:

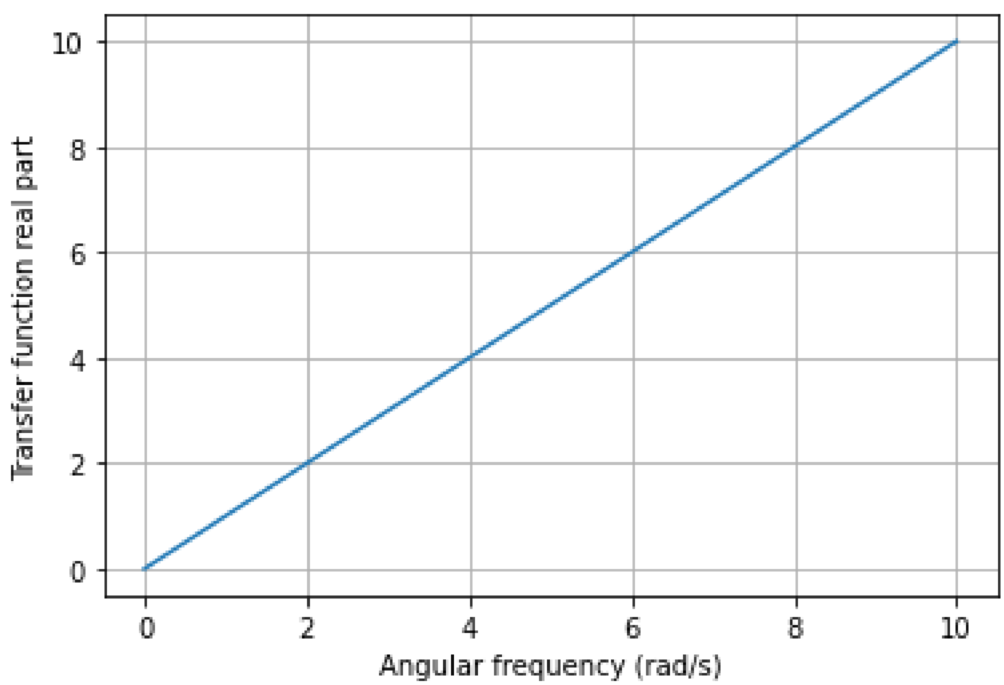
$$|\omega|$$

[17]:
```
Hf=Hr.phase
Hf(6)
```

[17]:

$$\frac{\pi}{2}$$

[18]:
```
Hm.plot((0,10));
```



Exemplo O integrador ideal

Para o integrador ideal, $y(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$, e daí, $Y(s) = \frac{X(s)}{s}$. A função de transferência é $H(s) = \frac{1}{s}$.

[19]:
```
H=transfer(1/s)
Hr=H(jomega)
Hr
```

[19]:

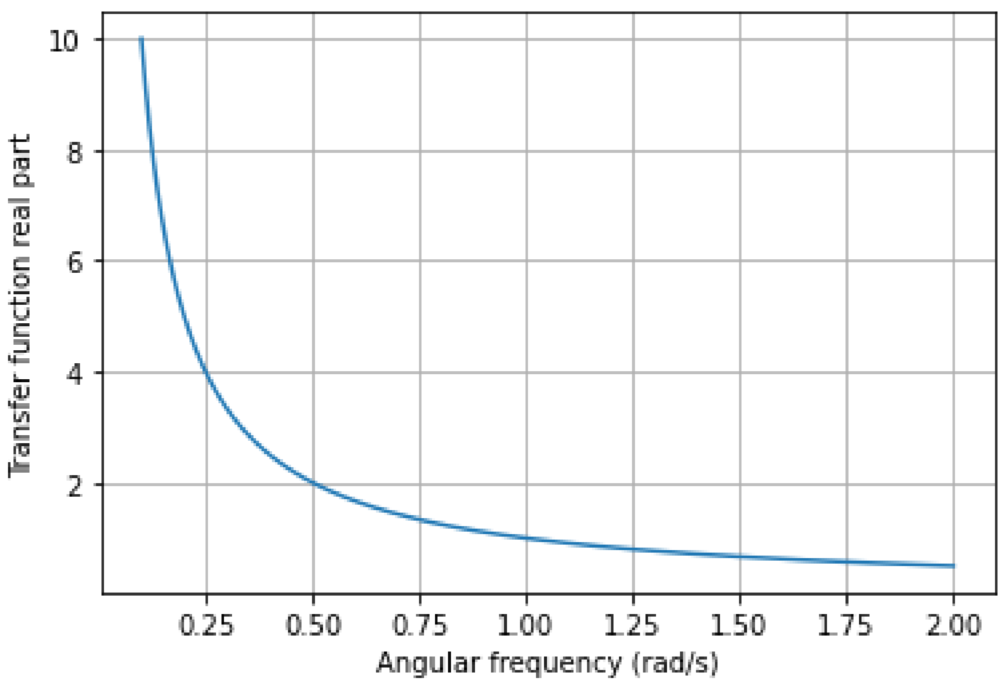
$$-\frac{\mathrm{j}}{\omega}$$

[20]:
```
Hm=abs(Hr)
Hm
```

[20]:

$$\frac{1}{\omega}$$

[21]:
```
Hm.plot((0.1,2));
```



[22]:
```
Hf=Hr.phase
Hf
```

[22]:

$$-\frac{\pi}{2}$$

1.1.1 A Resposta em Frequência Para Uma Entrada Senoidal Causal é a Resposta em Regime Permanente

Seja um sistema com função de transferência $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ e entrada $x(t) = e^{j\omega t}u(t)$. A resposta no domínio de Laplace é

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\frac{1}{s - j\omega}$$

Expandindo a resposta acima em frações parciais, teremos algo como

$$Y(s) = \frac{A_1}{s + s_1} + \frac{A_2}{s + s_2} + \cdots + \frac{A_N}{s + s_N} + \frac{A_\omega}{s - j\omega}$$

A transformada inversa de cada um dos primeiros N termos é $A_i e^{-s_i t}$, que amortecem assintoticamente para zero quando $t \to \infty$. Portanto, em regime permanente temos

$$Y(s) = \frac{A_\omega}{s - j\omega}$$

e finalmente,

$$A_\omega = (s - j\omega)H(s)\frac{1}{(s - j\omega)}\bigg|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

e

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$$