Sistemas Lineares 9_Classificação de Sistemas

November 5, 2024

1 Classificação de Sistemas Segundo a Ordem de Sua Equação Diferencial

1.1 Sistemas de Primeira Ordem

$$H(s) = \frac{K}{1 + s\tau}$$

Na função de transferência acima, K é o ganho estático do sistema e τ é a constante de tempo.

A resposta ao impulso é obtida através da Transformada Inversa de Laplace. Podemos fazer isso usando Lcapy

[1]:
```
from lcapy import *
K,tau=symbols('K tau')

H=K/(1+tau*s)
h=H.ILT(causal=True)
h
```

[1]:

$$\frac{Ke^{-\frac{t}{\tau}}u\left(t\right)}{\tau}$$

Como exemplo, considere o ganho =5 e a constante de tempo = 2. A resposta à entrada degrau pode ser encontrada como mostrado abaixo:

[2]:
```
Y=H.subs({'K':5,'tau':2})*(1/s)
Y
```

[2]:

$$\frac{5}{s\left(2s+1\right)}$$

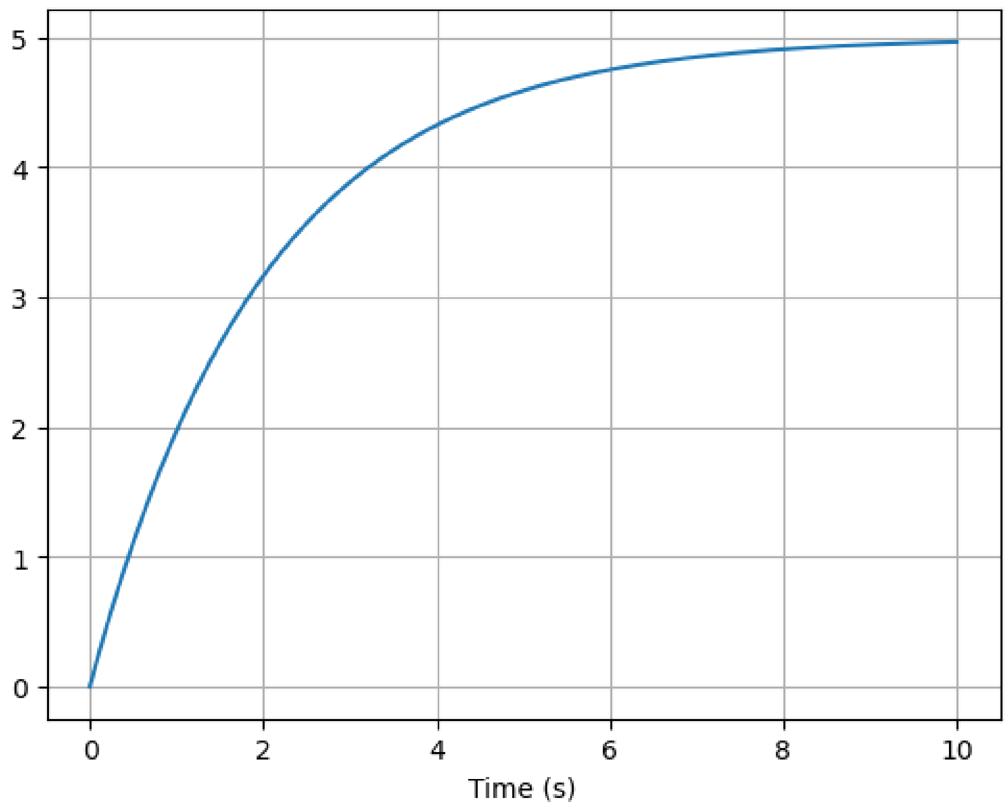
[3]:
```
y=Y.ILT(causal=True)
y
```

[3]:

$$5\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right)u\left(t\right)$$

O gráfico da resposta pode ser obtido como:

[4]:
```
y.plot((0,10));
```



quando t atinge a constante de tempo, a saída é 63,2% ($(1 - e^{-1}) \times 100\%$) do valor final em estado estacionário, o qual neste caso é 3,16.

[5]:
```
y(2).val
```

[5]:

$$3.16060279414279$$

O *tempo de resposta* t_r mede o intervalo necessário para que a resposta atinja 0,95 do seu valor final. No exemplo acima, é o tempo para que $1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.95$, ou seja, $t_r \approx 3\tau$.

O teorema do valor final permite calcular a resposta em regime estatcionário, a qual é 5. Usando Lcapy obtemos o mesmo resultado, ou seja o valor final é o Ganho da função de transferência.

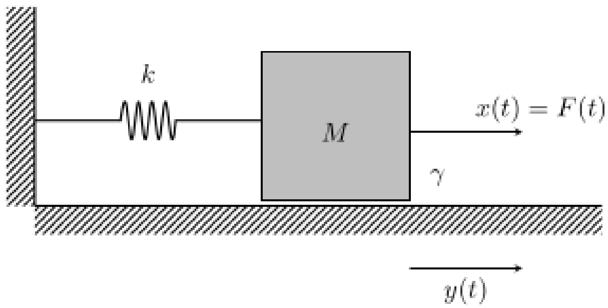
[6]:
```
y.final_value()
```

[6]:

$$5$$

1.2 Sistemas de Segunda Ordem

O sistema massa-mola é um exemplo típico de sistemas de segunda ordem:



No desenho acima, γ é o coeficiente de atrito viscoso e k é a constante da mola. Nesta análise o comportamento da mola será considerado linear. Usando a segunda lei de forças de Newton para modelar o sistema, escrevemos

$$My''(t) = F(t) - \gamma y'(t) - ky(t)$$

onde $F(t)$ é a força aplicada. Dividindo a equação acima por M e isolando o termo contendo $F(t)$,

$$y''(t) + \frac{\gamma}{M}y'(t) + \frac{k}{M}y(t) = \frac{F(t)}{M}$$

A quantidade $\sqrt{\frac{k}{M}}$ é a *frequência natural não amortecida* ω_n do sistema. Com efeito, se $F(t) = 0$ e o sistema é não amortecido ($\gamma = 0$), a solução da equação é $y(t) = y_0 e^{j\sqrt{\frac{k}{M}}t} = y_0(t)e^{j\omega_n t}$.

Definimos agora o fator de amortecimento $\zeta = \frac{\gamma}{2M\omega_n}$ e o ganho dos sistema como $K = \frac{1}{k}$. Daí, $\frac{1}{M} = \frac{\omega_n^2}{k} = K\omega_n^2$ e podemos escrever que (usando $x(t) = F(t)$)

$$y''(t) + 2\zeta\omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 x(t).$$

Aplicando a transformada de Laplace e assumindo condições iniciais nulas resulta em

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Y(s) = K\omega_n^2 X(s)$$

Portanto a função de transferência do sistema é

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

cujos polos são $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$. Note que para uma entrada degrau $\frac{E}{s}$ o teorema do valor final diz que a resposta em regime do sistema será $y(\infty) = \lim_{s\to 0} EH(s) = EK$. A resposta de um sistema de segunda ordem à uma entrada degrau pode ser classificada em três categorias distintas, dependendo se $\zeta^2 - 1$ é negativo, nulo ou positivo.

Exemplos

- $H(s) = \frac{3}{4s^2+12s+1}$, onde $K = 3$, $\omega_n = \frac{1}{2}$ e $\zeta = 3$.

[7]:
```python
from lcapy import *
H=tf(3,[4,12,1])
H
```

[7]:

$$\frac{3}{4s^2 + 12s + 1}$$

[8]:
```python
H.poles()
```

[8]:

$$\left\{-\frac{3}{2} - \sqrt{2} : 1,\ -\frac{3}{2} + \sqrt{2} : 1\right\}$$

- $H(s) = \frac{3}{2s^2+2s+2}$, onde $K = \frac{3}{2}$, $\omega_n = 1$ e $\zeta = \frac{1}{2}$.

[9]:
```python
H=tf(3,[2,2,2])
H.canonical()
```

[9]:

$$\frac{3}{2\left(s^2 + s + 1\right)}$$

[10]:
```python
H.poles()
```

[10]:

$$\left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\mathrm{j}}{2} : 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\mathrm{j}}{2} : 1\right\}$$

- $H(s) = \frac{3}{s^2+s+0.25}$, onde $K = 12$, $\omega_n = \frac{1}{2}$ e $\zeta = 1$.

[11]:
```python
H=tf(3,[1,1,expr(1/4)])
H
```

[11]:

$$\frac{3}{s^2 + s + \frac{1}{4}}$$

[12]:
```python
H.poles()
```

[12]:

$$\left\{-\frac{1}{2} : 2\right\}$$

1.2.1 Resposta Subamortecida ($\zeta^2 < 1$)

Quando $\zeta < 1$ os polos são complexos

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

onde $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ é a *frequência natural amortecida* ω_d. A função de transferência fatorada é

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

A resposta à entrada degrau com amplitude E pode ser obtida com auxílio de Lcapy, para simplificar as transformadas de Laplace inversas. Portanto, de início definimos a função de transferência e a resposta ao degrau.

[13]:
```
from lcapy import *
K,zeta,omega_n,omega_d,E=symbols('K zeta omega_n omega_d E')

Y=K*E*(omega_n)**2/(s*((s+zeta*omega_n)**2+(omega_d)**2))
Y
```

[13]:

$$\frac{EK\omega_n^2}{s\left(\omega_d^2 + (\omega_n\zeta + s)^2\right)}$$

Em seguida obtemos a transformada inversa e simplificamos a expressão resultante.

[14]:
```
y=Y.ILT(causal=True).simplify_sin_cos()
y
```

[14]:

$$\frac{EK\omega_n^2 u(t)}{\omega_d^2 + \omega_n^2\zeta^2} - EK\sqrt{\frac{\omega_n^6\zeta^2}{\left(\omega_d^3 e^{\omega_n t\zeta} + \omega_d\omega_n^2\zeta^2 e^{\omega_n t\zeta}\right)^2} + \frac{\omega_n^4}{\left(\omega_d^2 e^{\omega_n t\zeta} + \omega_n^2\zeta^2 e^{\omega_n t\zeta}\right)^2}}\cos\left(\omega_d t - \operatorname{atan}\left(\frac{\omega_n\zeta\left(\omega_d^2 e^{\omega_n t\zeta} + \omega_n^2\zeta^2 e^{\omega_n}\right.}{\omega_d^3 e^{\omega_n t\zeta} + \omega_d\omega_n^2\zeta^2 e^{\omega_n}}\right.\right.$$

[15]:
```
y=y.subs('omega_d',omega_n*sqrt(1-zeta**2)).simplify_terms()
y
```

[15]:

$$-EK\sqrt{-\frac{1}{\zeta^2-1}}e^{-\omega_n t\zeta}\cos\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2} - \operatorname{atan}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right)u(t) + EKu(t)$$

A resposta do sistema subamortecido é

$$y(t) = EK\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\left(\omega_d t - \phi\right)\right]u(t)$$

onde $\phi = \arctan\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ (e portanto, $\sin(\phi) = \zeta$ e $\cos(\phi) = \sqrt{1-\zeta^2}$).

Exemplo Neste exemplo são comparadas duas respostas à uma entrada degrau unitário para valores de $\zeta = \frac{1}{2}$ e $\zeta = \frac{1}{4}$. Ainda, usamos $K = 1$ e $\omega_n = 1$:

[16]:
```
y1=y.subs({'E':1,'K':1.5,'zeta': 0.5,'omega_n':1})
y1
```

[16]:

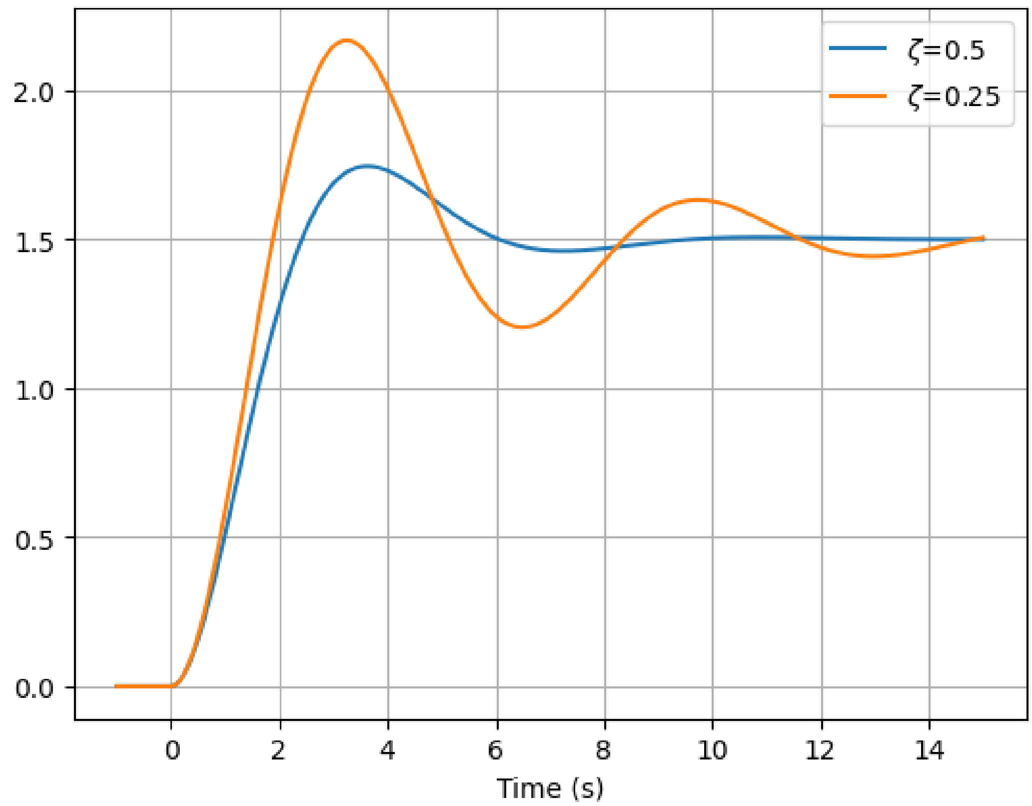
$$\frac{3u\left(t\right)}{2} - \sqrt{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{\pi}{3}\right)u\left(t\right)$$

[17]:
```
y2=y.subs({'E':1,'K':1.5,'zeta': 0.25,'omega_n':1})
y2
```

[17]:

$$\frac{3u\left(t\right)}{2} - \frac{2\sqrt{15}e^{-\frac{t}{4}}\cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4} - \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right)u\left(t\right)}{5}$$

[18]:
```
ax=y1.plot((-1,15),label='$\zeta$=0.5');
ax=y2.plot((-1,15),axes=ax,label='$\zeta$=0.25')
ax.legend();
```



Tempo de Pico, Máximo Sobresinal e Tempo de Resposta O tempo de pico é o o instante no qual a resposta atinge o seu máximo valor. O máximo sobresinal é a diferença entre a resposta em regime e o seu valor de pico.

O tempo de pico é encontrado derivando a resposta $y(t)$ com respeito ao tempo e igualando a zero, e é dado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}.$$

Substituindo t= tempo de pico em $y(t)$, temos

$$y(t_p) = KE\left[1 + e^{-\zeta\omega_n t_p}\right]$$

de onde pode-se escrever

$$M_p = \frac{y(t_p) - KE}{KE} = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-\zeta\omega_n t_p}$$

A constante de tempo é $\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$, a partir da inspeção do termo exponencial na resposta $y(t)$. Portanto, o tempo de resposta é

$$t_r = 3\tau = \frac{3}{\zeta\omega_n}.$$

1.2.2 Resposta Criticamente Amortecida (ζ=1)

Quando o fator de amortecimento é 1, os polos do sistema de segunda ordem são $s_{1,2} = -\zeta\omega_n$, 2 polos reais negativos e idênticos. A função de transferência é

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n)^2}$$

A reposta à uma entrada degrau com amplitude E é obtida com auxílio de Lcapy. A reposta no domínio de Laplace é inicialmente definida.

[19]:
```
Y=K*E*(omega_n)**2/(s*(s+zeta*omega_n)**2)
Y
```

[19]:

$$\frac{EK\omega_n^2}{s\left(\omega_n\zeta+s\right)^2}$$

Em seguida a transformada inversa de Laplace é obtida e simplificada:

[20]:
```
y=Y.ILT(causal=True)
y=y.subs('zeta',1).simplify_terms()
y
```

[20]:

$$EK\left(-\omega_n t + e^{\omega_n t} - 1\right)e^{-\omega_n t}u\left(t\right)$$

Ou seja,

$$y(t) = EK\left(1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}\right)u(t)$$

A resposta criticamente amortecida atinge o estado de estabilidade no menor tempo possível sem ultrapassar o valor de estacionário, ou seja, sem sobresinal.

1.2.3 Resposta Sobreamortecida ($\zeta > 1$)

Os polos para $\zeta > 1$ são $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$. São dois polos reais distintos e negativos. Para uma entrada degrau de amplitude E, a resposta no domínio do tempo é:

[21]:
```
from lcapy import *
K,zeta,omega_n,s_1,s_2,E=symbols('K zeta omega_n s_1 s_2 E')
Y=K*E*(omega_n)**2/(s*(s+s_1)*(s+s_2))
Y
```

[21]:

$$\frac{EK\omega_n^2}{s\left(s+s_1\right)\left(s+s_2\right)}$$

[22]:
```python
y=Y.ILT(causal=True)
y
```

[22]:

$$EK\omega_n^2\left(-\frac{e^{-s_2t}}{s_2\left(s_1-s_2\right)}-\frac{e^{-s_1t}}{s_1\left(-s_1+s_2\right)}+\frac{1}{s_1s_2}\right)u\left(t\right)$$

A expressão acima é simplificada substituindo $s_1-s_2=2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ e $s_1s_2=\omega_n^2$. Desta forma temos que

$$y(t)=KE\left[1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-s_1t}}{s_1}-\frac{e^{-s_2t}}{s_2}\right)\right]u(t)$$

Como será mostrado abaixo, a resposta sobreamortecida leva muito tempo para atingir o estado estacionário em comparação a resposta criticamente amortecida.

Exemplo Vamos estudar a resposta à entrada degrau unitário de um sistema onde $K=3$, $\omega_n=1$, para alguns valores de ζ.

- $\zeta<1$

[23]:
```python
from lcapy import *
H=tf(3,[1,expr(1/4),1])
H.ZPK()
```

[23]:

$$\frac{3}{\left(s+\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{7}\mathrm{j}}{8}\right)\left(s+\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{7}\mathrm{j}}{8}\right)}$$

[24]:
```python
Y=H*(1/s)
y1=Y.ILT(causal=True)
```

- $\zeta=1$

[25]:
```python
H=tf(3,[1,2,1])
H.ZPK()
```

[25]:

$$\frac{3}{\left(s+1\right)^2}$$

[26]:
```python
Y=H*(1/s)
y2=Y.ILT(causal=True)
```

- $\zeta>1$

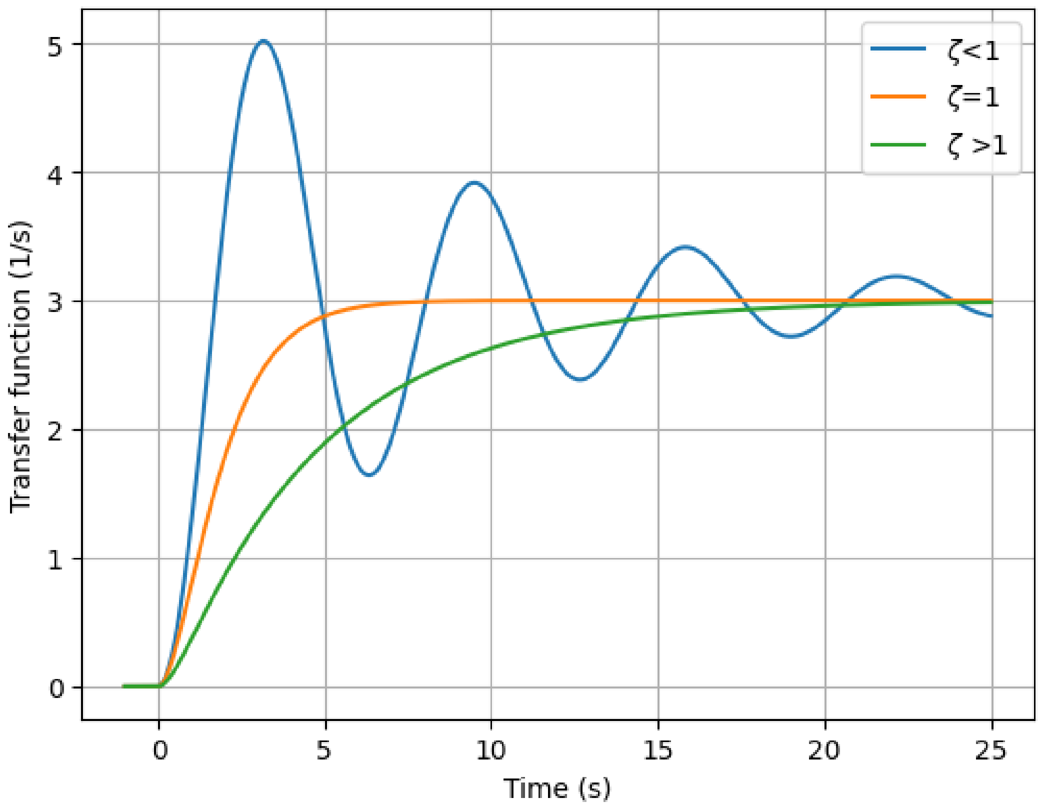
[27]:
```python
H=tf(3,[2,5,1])
H.ZPK()
```

[27]:

$$\frac{3}{2\left(s - \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{5}{4}\right)\left(s + \frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{5}{4}\right)}$$

[28]:
```
Y=H*(1/s)
y3=Y.ILT(causal=True)
```

[29]:
```
ax=y1.plot((-1,25),label='$\zeta$<1');
ax=y2.plot((-1,25),axes=ax,label='$\zeta$=1')
ax=y3.plot((-1,25),axes=ax,label='$\zeta$ >1')
ax.legend();
```

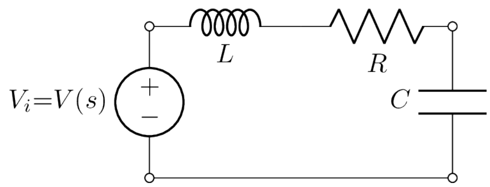


1.2.4 Analogia entre o Sistema Massa-Mola e o Circuito RLC série

Seja um circuito RLC série como o descrito abaixo:

[30]:
```
from lcapy import *
cct = Circuit("""
P1 1 0; down
Vi 1 0 {V(s)}; down
L 1 2; right
```

```
R 2 3; right
C 3 0_1; down
W 0 0_1;right
P2 3 0_1; down
;draw_nodes=none, label_nodes=none""")
cct.draw()
```



A função de transferência para este circuito pode ser obtida através da razão entre a tensão sobre o capacitor de saída para a tensão entre os nós 1 e 0.

[31]:
```
H=cct[3].V(s)/cct[1].V(s)
H.canonical()
```

[31]:

$$\frac{\frac{1}{C}\frac{1}{L}}{s^2 + \frac{Rs}{L} + \frac{1}{CL}}$$

Vamos comparar esta função de transferência (onde $K = 1$) para aquela deduzida no sistema massa-mola.

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Claramente vemos algumas equivalências

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \frac{k}{M} = \frac{1}{LC} \tag{1}$$

Por outro lado,

$$2\zeta\omega_n = 2\frac{\gamma}{2M\omega_n}\omega_n = \frac{\gamma}{M} = \frac{R}{L} \tag{2}$$

Através das equivalências (1) e (2) vemos que a Massa de um sistema mecânico corresponde a Indutância de um sistema elétrico série, o coeficiente de atrito corresponde a resistência elétrica e a constante da mola corresponde ao inverso da capacitância elétrica.