Sistemas_Lineares_2-Sistemas

November 7, 2024

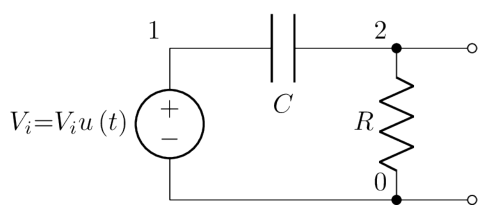
1 Sistemas

Sinais são processados por sistemas, ou seja, um sistema é alimentado por um ou mais sinais de entrada , realiza o processamento e libera como resultado um ou mais sinais de saída. Um típico sistema é o circuito elétrico. A entrada é definida como a fonte de alimentação, e a saída pode ser definida como a tensão sobre o resistor. No script abaixo, usamos o pacote computacional Lcapy para definir, desenhar e analisar um circuito RC simples.

[1]:
```
#!pip install lcapy
from lcapy import Circuit,t
```

[2]:
```
cct = Circuit("""
Vi 1 0_1 step; down
C 1 2; right=1.5
R 2 0; down
W 0_1 0; right
W 0 0_2; right=0.5
P1 2_2 0_2; down
W 2 2_2;right=0.5
;draw_nodes=connections""")

cct.draw()
```



A equação de malha é achada diretamente com os comandos abaixo:

[3]:
```
l=cct.mesh_analysis()
l.mesh_equations()
```

[3]:

$$\left\{ i_1(t) : -Ri_1(t) + V_i u(t) + \frac{\int\limits_{-\infty}^{t} (-i_1(\tau))\, d\tau}{C} = 0 \right\}$$

A tensão sobre o resistor (entre os nós 2 e 0) é achada como segue:

[4]:

```
cct.R.V(t)
```

[4]:

$$V_i e^{-\frac{t}{CR}} u(t)$$

1.1 Classificação de Sistemas

- Sistemas lineares e não lineares
- Sistemas invariantes ou variantes no tempo
- Sistemas causais ou não causais
- Sistemas contínuos ou discretos no tempo
- Sistemas analógicos ou digitais

1.1.1 Sistemas Lineares

Para um sistema ser linear ele deve satisfazer duas propriedades: aditividade e homogeneidade.

Aditividade Quando duas ou mais entradas estão atuando em um sistema linear, a saída equivale a soma das saídas resultantes caso cada entrada atuasse isoladamente no sistema. Ou seja, caso tenhamos duas entradas x_1 e x_2, sendo que y_1 e y_2 são as respectivas saídas quando as entradas atuam isoladamente, então a aditividade é satisfeita quando

$$x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$$

Homogeneidade Se a para uma determinada entrada x temos uma saída y, ou seja $x \to y$, então se x é multiplicada por número qualquer k, teremos na saída

$$kx \to ky.$$

Circuitos elétricos com redes passivas são exemplo de circuitos lineares. Em um circuito com duas fontes normalmente se utiliza da superposição onde a resposta é calculada para cada fonte isoladamente, curto-circuitando-se a outra, e somando-se as respostas obtidas. Isso nada mais é que a aplicação do conceito de aditividade.

Um exemplo simples de sistema não linear é aquele cuja saída é dada pelo quadrado da entrada, ou seja, $x \to x^2$. Neste caso, havendo duas entradas tais que $x_1 \to y_1 = x_1^2$ e $ x_2 →y_2=x_2^2$, para uma entrada $x_1 + x_2$ teremos na saída

$$x_1 + x_2 \to (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \neq y_1 + y_2$$

.

Esta situação ocorre circuitos envolvendo elementos semicondutores como diodos, por exemplo.

1.1.2 Sistemas Invariantes e Variantes no Tempo

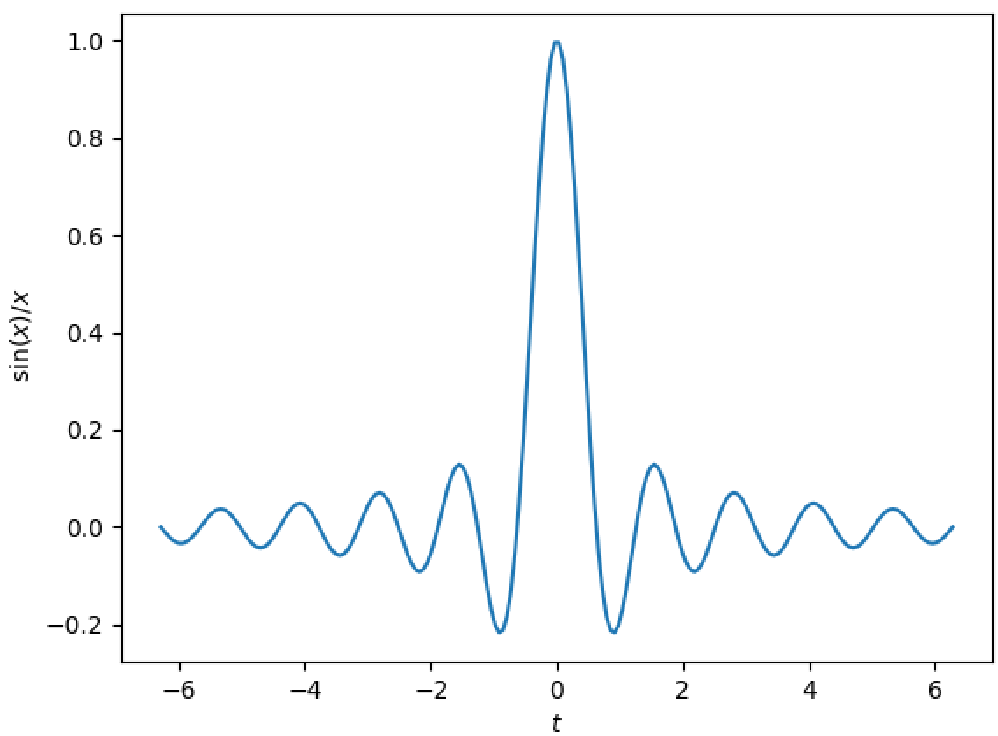
Sistemas com parâmetros constantes no tempo sao invariantes no tempo. em tais sistemas, se uma entrada $x(t)$ sofrer um atraso de T segundos, o mesmo ocorrerá com a saída, ou seja, a saída permanece a mesma mas também atrasada por T segundos,

$$x(t+T) \rightarrow y(t+T)$$

Caso a saída não seja uma cópia atrasada da entrada, então o sistema é variante no tempo.

1.1.3 Sistemas Causais e Não Causais

Em um sistema causal a saída depende exclusivamente da entrada $x(t)$ para $t \geq t_0$, onde t_0 é algum instante de tempo específico. Em um sistema não causal a saída presente no sistema depende também da entrada futura. Um exemplo de sistema não causal é um filtro ideal retangular no domínio da frequência. Este filtro remove completamente quaisquer componentes do sinal de entrada com frequência maior que uma frequência f_0, denominhada frequência de corte, enquanto componentntes com frequências menores são encaminhadas para saída sem sofrer alterações de amplitude. No domínio do tempo, o filtro é descrito pela função $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, que é a resposta ao impulso ocorrendo em $t = 0$ (ver figura abaixo). Note que a resposta ocorre antes da entrada no instante $t = 0$.



1.1.4 Sistemas em Tempo Contínuo e Tempo Discreto.

Sinais em tempo contínuo e tempo discreto foram mostrados no notebook anterior sobre sinais. Sistemas cujas entradas e saídas são sinais contínuos no tempo são sistemas contínuos, assim como sistemas cujas entrada e saídas sejam discretos no tempo são sistemas de tempo discreto. Um computador digital é um sistema de tempo discreto.

1.1.5 Sistemas Analógicos e Digitais

Sinais analógicos e digitais foram vistos no notebook anterior. Um sistema cujos sinais de entrada e saída sejam analógicos é um sistema analógico. Um amplificador de áudio analógico é um sistema deste tipo. Se os sinais de entrada e saída são digitais, entao o sistema é digital. Um computador digital é um sistema digital.

1.2 Modelo Entrada-Saída de um Sistema Linear

Vamos retomar a equação de malha do circuito RC acima:

[5]:
```
l=cct.mesh_analysis()
l.mesh_equations()
```

[5]:

$$\left\{ i_1(t) : -R i_1(t) + V_i u\left(t\right) + \frac{\int\limits_{-\infty}^{t} \left(- i_1(\tau)\right)\, d\tau}{C} = 0 \right\}$$

Para simplificar o processo de solução deste circuito, iremos utilizar o operador diferencial D para $\frac{d}{dt}$ nas equações diferenciais que descrevem o sistema dado.

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\frac{1}{D} = \int_{-\infty}^{0} dt$$

Assim, a equação de malha pode ser escrita como:

$$R i_1(t) + \frac{1}{CD} i_1(t) = V_i u(t)$$

Derivar a equação uma segunda vez em relação ao tempo equivale a multiplicá-la por D. Com isso elimina-se a integração.

$$DR i_1(t) + \frac{1}{C} i_1(t) = DV_i u(t)$$

$$(DR + \frac{1}{C}) i_1(t) = DV_i u(t)$$