Álgebra Linear

Prof. Marcelo G. Vanti

O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ no $\mathbb{R}^n$ é *linearmente dependente* (LD) se $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nem todos nulos, tal que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{1}$$

onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo. Neste caso, para algum $\alpha_i \neq 0$ pode-se escrever $\mathbf{v}_i$ como uma combinação linear de outros vetores do conjunto, ou

$$\mathbf{v}_i = -\frac{1}{\alpha_i}\sum_{k\neq i}\alpha_k\mathbf{v}_k.$$

Caso contrário, se $\alpha_i = 0\ \forall\ i$ é a única solução de (1), o conjunto é *linearmente independente* (LI).

Exemplo 2.1

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix};\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -3\\ \alpha_2 = 1\end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ \mathbf{v}_1\text{e } \mathbf{v}_2 \text{ são LD.}$$

Exemplo 2.2

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = -3 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \text{ e } \mathbf{v}_3 \text{ são LD.}$$

Exemplo 2.3

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}; \; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

Se α_i é uma função racional, então para $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = \frac{s+3}{s+2}$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são LD. Se $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são LI.

- O máximo número de vetores linearmente independentes em um espaço vetorial é a *dimensão* deste espaço.

Exemplo 2.4: No $\mathbb{R}^2$ qualquer par de vetores não colineares é LI. Qualquer vetor adicional pode ser escrito como uma combinação linear dos dois primeiros.

Exemplo 2.5: $\mathbb{C}(-\infty, \infty)$ é o espaço das funções contínuas com valores reais em $(-\infty, \infty)$, $f(x)$. O "vetor"nulo é a função $f(x) = 0 \;\forall\; x$ em $(-\infty, \infty)$. O conjunto

$$\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\right\} \in \mathbb{C}(-\infty, \infty)$$

é LI, pois $\sum_i \alpha_i x^i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\forall\; i$. O número de funções/"vetores" LI em $\mathbb{C}(-\infty, \infty)$ é infinito, portanto, a dimensão do espaço é infinita.

Base e Representação

Um conjunto de vetores em um espaço dado tal que qualquer outro vetor possa ser escrito como uma combinação linear dos vetores do conjunto é uma *base*. No $\mathbb{R}^n$ qualquer conjunto de n vetores LI constitui uma base.

Se $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{q}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{q}_n$, onde $\left\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots \mathbf{q}_n\right\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^n$, então

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \vdots \\ q_{n1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ \vdots \\ q_{n2} \end{bmatrix} + \ldots = \underbrace{\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} .$$

onde q_{ij} é a i-ésima componente do vetor $\mathbf{q}_j$, $\mathbf{Q}$ é matriz formada pelos vetores $\mathbf{q}_j$ que compõe a base, e $\boldsymbol{\alpha}$ é a representação de $\mathbf{v}$ na base formada pelas colunas de $\mathbf{Q}$.

Exemplo 2.6: A base ortonormal *canônica* associada com $\mathbb{R}^n$ é

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots \ \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Daí, um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é escrito na base ortonormal como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

A representação de um vetor na base canônica é igual a si próprio.

Exemplo 2.7: Seja o espaço dos polinômios de grau menor que 4. Uma base pode ser formada pelos vetores:

$$\mathbf{e}_1 = x^3;\ \mathbf{e}_2 = x^2;\ \mathbf{e}_3 = x\ e\ \mathbf{e}_4 = 1.$$

O conjunto b=$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ é linearmente independente e qualquer polinômio de grau ≤ 3 é uma combinação linear dos elementos do conjunto. Portanto, b é uma base.

Seja $f = 3x^3 + 2x^2 - 2x + 10$. f pode ser escrita como

$$f = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix},$$

e $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 10 \end{bmatrix}'$ é a representação de f na base b.

Considere uma nova base $\bar{b} = \begin{bmatrix} x^3 - x^2 & x^2 - x & x - 1 & 1 \end{bmatrix}$. Agora

$$f = 3(x^3 - x^2) + 5(x^2 - x) + 3(x - 1) + 13,$$

ou ainda

$$f = \begin{bmatrix} x^3 - x^2 & x^2 - x & x - 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

e $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 & 13 \end{bmatrix}'$ é a representação de f na base $\bar{b}$.

Exemplo 2.8: $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}'$ e $q=\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^2$ na qual $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}'$ e $\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}'$. A representação de $\mathbf{v}$ na base q é obtida como segue:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_q \Rightarrow \mathbf{v}_q = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.9: Sejam $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e as bases $q_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, e $q_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Assim,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ mas,}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}}$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{2}$$

onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{y}$ são respectivamente uma matriz m x n e um vetor m x 1, $\mathbf{x}$ é um vetor n x 1, é a representação de um sistema linear de m equações e n incógnitas, ou seja, o vetor $\mathbf{x} = [\; x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n \;]'$. Em (2), $\mathbf{A}$ pode ser escrita como $[\; \mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{a}_n \;]$, onde os vetores $\mathbf{a}_i$ são as colunas de $\mathbf{A}$. O produto $\mathbf{A}\mathbf{x}$ pode então ser escrito como

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{y}.$$

Como pode ser visto, $\mathbf{y}$ é uma combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$. O espaço dos vetores $\mathbf{y}$ é o espaço de todas combinações lineares de todas colunas da matriz $\mathbf{A}$, e é chamado de *Range*,ou $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, *contradomínio* de $\mathbf{A}$, ou ainda, *espaço coluna* de $\mathbf{A}$. O *posto* ou *rank* $\rho(\mathbf{A})$ é definido como a dimensão do espaço coluna, ou seja, o número de colunas linearmente independentes de $\mathbf{A}$.

O Posto de uma matriz pode ser alternativamente dado pelo número de linhas linearmente independentes, ou seja, pela dimensão do *espaço linha* da matriz.

Demonstração: Para demonstrar esta afirmação, considere $\mathbf{A}$ uma matriz n x n com r linhas linearmente independentes, $r \leq n$. Seja também $\{\mathbf{x}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$ uma base para o espaço linha de $\mathbf{A}$. Os vetores $\mathbf{Ax}_i$ são então linearmente independentes, pois , caso contrário, $\exists$ $\{\alpha_i\}$ não todos nulos tal que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{Ax}_i = \mathbf{A} \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Daí, se $\mathbf{v}$ é um vetor no espaço linha de $\mathbf{A}$, $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_r \mathbf{x}_r$, $\mathbf{Av}$=$\mathbf{0}$ e portanto $\mathbf{v}$ é ortogonal à cada linha de $\mathbf{A}$. *Ora, por um lado* $\mathbf{v}$ *pertence ao espaço linha de* $\mathbf{A}$*, por outro é ortogonal à todo outro vetor neste mesmo espaço*. Isto significa que $\mathbf{v}$ é o vetor nulo,ou $\mathbf{v}$=$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i$=$\mathbf{0}$, e como os vetores $\mathbf{x}_i$ são linearmente independentes, os α_i são todos nulos, e portanto o conjunto dos $\mathbf{Ax}_i$ também é linearmente independente.
Agora, cada vetor $\mathbf{Ax}_i$ está no espaço coluna de $\mathbf{A}$ e a dimensão do espaço coluna é no mínimo tão grande quanto r. Repetindo esta demonstração para a transposta de $\mathbf{A}$ finaliza a prova.

O *espaço nulo* de $\mathbf{A}$ é o conjunto $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ de todos *vetores nulos* de $\mathbf{A}$, ou seja, os vetores $\mathbf{x}$ para os quais $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$. A nulidade $\nu(\mathbf{A})$ é definida como o máximo número de vetores nulos linearmente independentes de $\mathbf{A}$ (ou a dimensão do espaço nulo), e pode ser calculado como

$$\nu(\mathbf{A}) = \text{número de colunas de } \mathbf{A} - \rho(\mathbf{A}) \tag{3}$$

Demonstração: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz m x n com r colunas linearmente independentes. Sejam as colunas arranjadas de forma que as colunas LI sejam as primeiras r colunas de $\mathbf{A}$. Então pode-se escrever

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ tem dimensões m x r e m x (n-r), respectivamente. Note que cada coluna de $\mathbf{A}_2$ é combinação linear das colunas de $\mathbf{A}_1$, portanto existe uma matriz $\mathbf{B}$ r x (n-r) tal que $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{B}$, e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

Seja a matriz n x (n-r) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{I} \end{bmatrix}'$, $\mathbf{I}$ de dimensão (n-r)x(n-r), e então $\mathbf{AX}$=$-\mathbf{A}_1\mathbf{B}+\mathbf{A}_1\mathbf{B} = \mathbf{0}$. Portanto, cada coluna $\mathbf{x}$ de $\mathbf{X}$ é uma solução particular de $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$. Além disso,

$$\mathbf{Xu} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{Bu} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

As colunas de $\mathbf{X}$ são linearmente independentes e constituem um conjunto de n-r soluções de $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{0}$. Falta mostrar que formam uma base para $\mathbf{N}(\mathbf{A})$.

Seja portanto $\mathbf{u}$=$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}'$ tal que $\mathbf{Au}$=$\mathbf{0}$. $\mathbf{A}_1\mathbf{x}$=$\mathbf{0}$ implica $\mathbf{x}$=$\mathbf{0}$, pois $\rho(\mathbf{A}_1) = r$. Então,

$$\mathbf{Au} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1(\mathbf{u}_1 + \mathbf{Bu}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}_1 = -\mathbf{Bu}_2.$$

$\mathbf{u}$=$\begin{bmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{I} \end{bmatrix}' \mathbf{u}_2 = \mathbf{Xu}_2$ é combinação linear das colunas de $\mathbf{X}$, que são linearmente independentes. Assim, as colunas de $\mathbf{X}$ constituem uma base para o espaço nulo de $\mathbf{A}$, finalizando a demonstração de (3).

Exemplo 2.10.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \mathbf{c}_4 & \mathbf{c}_5 \end{bmatrix}.$$

Ora, $\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_4 = 2\mathbf{c}_2$ e $\mathbf{c}_5 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$, somente $\mathbf{c}_1 e \mathbf{c}_2$ são linearmente independentes, $\rho(\mathbf{A})$=2 e $\nu(\mathbf{A})$=3. Seja $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}'$. Daí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_1 x_1 + \mathbf{c}_2 x_2 + \mathbf{c}_3 x_3 + \mathbf{c}_4 x_4 \\ &= (x_1 + x_3 + x_5)\mathbf{c}_1 + (x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5)\mathbf{c}_2. \end{aligned}$$

$\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ são linearmente independentes, e

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

O sistema (4) possui 2 equações e 5 incógnitas. Somente duas incógnitas podem ser determinadas a partir de outras 3 escolhidas convenientemente, ou seja, fazendo

$$x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -1$$
$$x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x2 = -2$$
$$x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

e daí o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ é uma base para } \mathbf{N}(\mathbf{A}).$$

- O sistema **Ax=y**, onde **A** é uma matriz m x n, **x** e **y** vetores n x 1 e m x 1, respectivamente, tem solução se e somente se $\rho(A) = m$;
- O sistema **Ax=y**, onde **A** é quadrada de ordem n, e **x** e **y** são vetores n x 1, tem solução única se **A** é não singular, ou $\rho(\mathbf{A}) = n$.

Transformação de Similaridade

Considere o sistema (2) onde $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada n x n e $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ podem ser representados na base$\{\mathbf{q}_i\}$ como

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{y}},$$

onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}.$$

Os vetores $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}$ são relacionados entre si como

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{y}} \Rightarrow \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}.$$

Comparando com (2) tem-se

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}, \text{ ou } \mathbf{A} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1} \tag{5}$$

ou ainda

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{A}} \tag{6}$$

As equações (5) e (6) descrevem a transformação de similaridade entre $\mathbf{A}$ e $\bar{\mathbf{A}}$. Ainda, (6) explicitamente mostra que cada coluna $\bar{\mathbf{a}}_i$ de $\bar{\mathbf{A}}$ é a representação de $\mathbf{A}\mathbf{q}_i$ com respeito à base $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{q}_1 & \mathbf{A}\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}\bar{\mathbf{a}}_1 & \mathbf{Q}\bar{\mathbf{a}}_2 & \cdots & \mathbf{Q}\bar{\mathbf{a}}_n \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Exemplo 2.11 Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

e o vetor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$,

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^2\mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{Ab}) = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^3\mathbf{b} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Os vetores $\mathbf{b}$, $\mathbf{Ab}$ e $\mathbf{A}^2\mathbf{b}$ são linearmente independentes, mas

$$\mathbf{A}^3\mathbf{b} = 17\mathbf{b} - 15\mathbf{Ab} + 5\mathbf{A}^2\mathbf{b}.$$

Será encontrada a representação de $\mathbf{A}$ com respeito à base $\{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}\}$, de acordo com (6) ou (7), onde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

É evidente que

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{Ab}) = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{b}) = \begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}^2\mathbf{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\-15\\5\end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 17\\1 & 0 & -15\\0 & 1 & 5\end{bmatrix} \text{ é a representação de } \mathbf{A} \text{ na base } \left\{\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}\right\}.$$

O resultado do último exemplo pode ser generalizado para uma matriz $\mathbf{A}$ nxn, se existe um vetor $\mathbf{b}$ nx1 tal que os vetores $\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$ são linearmente independentes e se

$$\mathbf{A}^n\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{b} + \beta_2\mathbf{Ab} + \ldots + \beta_n\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}.$$

Então, a representação da matriz $\mathbf{A}$ com respeito a base $\{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\}$ é

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

A representação (8) é conhecida como *forma companheira* de $\mathbf{A}$.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor da matriz *nxn* **A** se existe um vetor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Neste caso, **x** é um autovetor associado ao autovalor λ, $\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ix}$, e daí

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{9}$$

A equação (9) tem solução não trivial se e somente se a matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é singular, ou dito de outra forma

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{10}$$

$\Delta(\lambda)$ é o *polinômio característico* de grau n com coeficientes reais de **A**. Toda raiz de $\Delta(\lambda)$ é um autovalor de **A**.

Exemplo 2.12 Considere a Matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1$$

e a equação característica

$$\Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow = \pm\sqrt{-1} = \pm j.$$

Os autovalores de **A** são complexos.

- Os autovalores de $\mathbf{A}$ são todos distintos. Neste caso, o conjunto de autovetores é linearmente independente.

Demonstração: Se $\{\lambda_i\}$, $\{\mathbf{q}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são os distintos autovalores e autovetores associados de uma matriz $\mathbf{A}$, a independência linear do conjunto de autovetores permite escrever

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i \mathbf{q}_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i. \tag{11}$$

Suponha-se o contrário, isto é, $\exists\ \alpha_i$, nem todos nulos, tal que a somatória em (11) seja nula. Considere como hipótese $\alpha_1 \neq 0$ (se não for o caso, basta reordenar o conjunto). Então, pode-se escrever

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) \ldots (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \sum_{1}^{n} \alpha_i \mathbf{q}_i = 0.$$

esta última expressão pode ser estendida como

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\ldots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})\alpha_1\mathbf{q}_1\\
+&(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\ldots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})\sum_2^n \alpha_i\mathbf{q}_i = 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Por outro lado,

$$
(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})\mathbf{q}_i = \begin{cases} 0 \text{ se } i = j \\ \neq\ 0 \text{ se } i \neq\ j \end{cases}
$$

Portanto, o segundo termo do lado esquerdo de (12) é nulo, e daí

$$
(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\ldots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})\alpha_1\mathbf{q}_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0
$$

contradizendo a hipótese original, e $\{\mathbf{q}_i\}$ é linearmente independente.

Seja $\hat{\mathbf{A}}$ a representação de $\mathbf{A}$ na base formada pelo seu conjunto de autovetores, então a i-ésima coluna de $\hat{\mathbf{A}}$ é a representação de $\mathbf{A}\mathbf{q}_i$ com respeito a base $\{\mathbf{q}_i\}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_i & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \end{bmatrix}'$ é a i-ésima coluna de $\hat{\mathbf{A}}$. Seja $\mathbf{Q}$ a matriz formada pelos autovetores de $\mathbf{A}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}$$

Exemplo 2.13 Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

determine seus autovalores e autovetores associados.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Os autovalores são 1,2 e 3. Usando a equação (9) os autovetores podem ser encontrados.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \\ q_{32} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \; \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.14

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

Os autovalores são 1, com multiplicidade 2, e 2. substituindo $\lambda = 1$ em (9)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{3}1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Neste sistema, o posto da matriz $\rho(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 1$, $\nu(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 2$, e portanto existem duas soluções linearmente independentes, as quais são

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \ \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}'.$$

Substituindo $\lambda = 2$ em (9)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{13} \\ q_{23} \\ q_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.15

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2),$$

novamente, os autovalores de **A** são 1, com multiplicidade 2, e 2. Entretanto, substituindo $\lambda = 1$ em (9)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ q_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

$\rho(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 2$, $\nu(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 1$ e o sistema é capaz de fornecer apenas um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$.

- Se um autovalor de $\mathbf{A}$ tem multiplicidade 1, ele é chamado de *simples*. Caso contrário, é um autovalor *repetido*.
- Se $\mathbf{A}$ possui apenas autovalores simples, então existe uma representação na forma diagonal. Se $\mathbf{A}$ possui autovalores repetidos, então esta representação pode não existir, como no exemplo 2.15.

Seja um autovalor λ repetido com multiplicidade $n > 1$, por exemplo, n=4. Neste mesmo exemplo, considere a matriz 4x4 quadrada $\mathbf{A}$, tal que $\rho(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 3$, $\nu(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 1$. Então existe somente uma solução não trivial para o sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q} = \mathbf{0}$, e são necessários mais 3 vetores linearmente independentes para formar uma base para o $\mathbb{R}^4$. Agora, $\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ e $\mathbf{q}_4$ serão determinados de forma que

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{q}_2 &= \mathbf{0}\\(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3\mathbf{q}_3 &= \mathbf{0}\\(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^4\mathbf{q}_4 &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Para o caso geral, o n-ésimo autovetor, onde n é maior que $\nu(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$, deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n-1}\mathbf{q}_n &\neq \mathbf{0}\\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n}\mathbf{q}_n &= \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{13}$$

$\mathbf{q}_n$ como definido por (13) é um *autovetor generalizado* de grau n. Voltando ao exemplo onde n=4, onde $\mathbf{q}_1$ é a solução de $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{q}=\mathbf{0}$, um *autovetor ordinário*, teremos, a partir do autovetor generalizado $\mathbf{q}_4$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_3 &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_4\\ \mathbf{q}_2 &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_3 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{q}_4\\ \mathbf{q}_1 &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_2 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3\mathbf{q}_4.\end{aligned} \tag{14}$$

Assim, de $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$, pode-se escrever

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_1 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{q}_2 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3\mathbf{q}_3 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^4\mathbf{q}_4 = \mathbf{0}$$

A partir das equações recursivas (14), tem-se o os autovetores generalizados:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_1 &= \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{q}_1 = \lambda\mathbf{q}_1 \\
\mathbf{q}_1 &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_2 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \lambda\mathbf{q}_2 \\
\mathbf{q}_2 &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_3 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 + \lambda\mathbf{q}_3 \\
\mathbf{q}_3 &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q}_4 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{q}_4 = \mathbf{q}_3 + \lambda\mathbf{q}_4
\end{aligned}
$$

cuja independência linear será mostrada mais a frente. Pode-se portanto definir o *bloco de Jordan* de ordem 4

$$
\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},
$$

que satisfaz

$$
\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ}
$$

ou

$$\mathbf{AQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3 & \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \mathbf{QJ}$$

e

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}.$$

Finalmente, o conjunto formado pelo autovetor ordinário mais os autovetores generalizados é linearmente independente.

Demonstração: Considere a equação $\alpha_1\mathbf{q}_1 + \alpha_2\mathbf{q}_2 + \alpha_3\mathbf{q}_3 + \alpha_4\mathbf{q}_4 = \mathbf{0}$. Devemos mostrar que cada $\alpha_i = 0$. Para isto, fazendo $\mathbf{B} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ e multiplicando pela última equação tem-se

$$\alpha_1\mathbf{Bq}_1 + \alpha_2\mathbf{Bq}_2 + \alpha_3\mathbf{Bq}_3 + \alpha_4\mathbf{Bq}_4 = \mathbf{0}$$

O primeiro termo da soma acima é nulo. Repetindo o processo teremos

$$\alpha_2 \mathbf{B}^2 \mathbf{q}_2 + \alpha_3 \mathbf{B}^2 \mathbf{q}_3 + \alpha_4 \mathbf{B}^2 \mathbf{q}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_2 \mathbf{B}^2 \mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$$
$$\alpha_3 \mathbf{B}^3 \mathbf{q}_3 + \alpha_4 \mathbf{B}^3 \mathbf{q}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_3 \mathbf{B}^3 \mathbf{q}_3 = \mathbf{0}$$
$$\alpha_4 \mathbf{B}^3 \mathbf{q}_4 = \mathbf{0}$$

de onde juntamente com (13) se conclui que $\alpha_4 = 0$. Da mesma forma, por necessidade, $\alpha_3 = 0$, e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. O conjunto é linearmente independente.

- Sejam as matrizes $\mathbf{A}$ e sua forma similar diagonalizada $\hat{\mathbf{A}}$.

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1}| = |\mathbf{Q}||\mathbf{Q}^{-1}||\hat{\mathbf{A}}| = |\hat{\mathbf{A}}|$$

onde $|\cdot|$ indica o determinante. Como o determinante de $\hat{\mathbf{A}}$ é o produto de todos seus autovalores, e daí também $|\mathbf{A}|$, conclui-se que $\mathbf{A}$ é não singular se e somente se $\lambda_i \neq 0 \; \forall \, i$.

Exemplo 2.16 Seja a matriz 3x3 abaixo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ \det(\mathbf{A} - \lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2,$$

seus autovalores são 1, com multiplicidade 2 e 2. Substituindo $\lambda = 1$ em $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q} = 0$,

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{q}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 20 & -12 \end{bmatrix} \mathbf{q}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$$

A matriz $(\mathbf{A}\text{-}\lambda\mathbf{I})$ tem nulidade 1, e o autovetor ordinário associado ao autovalor $\lambda = 1$ é

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} \\ 1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Para completar a base calcula-se o autovetor generalizado com as equações recursivas (14),

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, substituindo $\lambda = 2$ em $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ fornece o terceiro autovetor

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{q}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{q}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_3 = \mathbf{0},$$

de onde $\mathbf{q}_3 = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, e finalmente obtêm-se a matriz $\hat{\mathbf{A}}$ na forma de Jordan:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.17 Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{A}$ tem dois autovalores iguais $\lambda = 1$, mas $\nu(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 1$ e portanto, o autovetor ordinário $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e o autovetor generalizado $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ são associados à λ. Daí, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é um bloco de Jordan de ordem 2.

- $\mathbf{A}^k := \overbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \ldots}^{k \text{ vezes}}$
- Seja $f(\lambda)$ um polinômio como $f(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6$. Então,

$$f(\mathbf{A}) := \mathbf{A}^3 + 2\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{I}.$$

- Se A é diagonal por blocos,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^k \end{bmatrix}, \ f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} f(\mathbf{A}_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & f(\mathbf{A}_2) \end{bmatrix}$$

- Se $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1}$, então

$$\mathbf{A}^k = \overbrace{(\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1})(\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1})(\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1})\ldots}^{k \text{ vezes}} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}^k\mathbf{Q}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{A}}^k = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{Q}, \ f(\mathbf{A}) = \mathbf{Q}f(\hat{\mathbf{A}})\mathbf{Q}^{-1}, \ f(\hat{\mathbf{A}}) = \mathbf{Q}^{-1}f(\mathbf{A})\mathbf{Q}$$

Funções e Polinômios de uma Matriz

- Polinômio mônico: primeiro coeficiente (grau + alto) =1.
- Polinômio mínimo de $\mathbf{A}$. É o polinômio mônico $\psi(\lambda)$ de menor grau tal que $\psi(\mathbf{A}) = 0$.
- $f(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow f(\hat{\mathbf{A}}) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ e $\hat{\mathbf{A}}$ tem os mesmos polinômios mínimos.
- Cálculo do polinômio mínimo de $\mathbf{A}$ pode não ser simples, ao contrário do de $\hat{\mathbf{A}}$.
- $\{\lambda_i\}$ são os autovalores de $\mathbf{A}$ com multiplicidade n_i, cada. Então

$$\Delta(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i}.$$

- Se para uma matriz $\mathbf{A}$ $\bar{n}_i$ é a ordem do maior bloco de Jordan associado com cada λ_i, o polinômio mínimo de $\mathbf{A}$ é dado por (ver a definição de matriz nilpotente abaixo):

$$\psi(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}.$$

Exemplo 2.18 Seja a matriz **A** e seu polinômio característico

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \ \Delta(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Sua forma de Jordan, e o polinômio mínimo são

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \psi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = \Delta(\lambda).$$

Exemplo 2.19 Considere as matrizes

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}}_5 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Os polinômios mínimos de $\hat{\mathbf{A}}_1, \hat{\mathbf{A}}_2, \hat{\mathbf{A}}_3, \hat{\mathbf{A}}_4$ e $\hat{\mathbf{A}}_5$ são

$$\begin{aligned}
\psi_1(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^4(\lambda - \lambda_2) \\
\psi_2(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_2) \\
\psi_3(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2) \\
\psi_4(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2) \\
\psi_5(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)
\end{aligned}$$

Para todas elas, entretanto, o polinômio característico é:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4(\lambda - \lambda_2) = \psi_1(\lambda)$$

Matriz Nilpotente: se $\mathbf{J}$ é um bloco de Jordan de ordem $\bar{n}_i$, então,

$$(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{\bar{n}_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.20

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \ (\mathbf{J}-\lambda_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\mathbf{J}-\lambda_1\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\mathbf{J}-\lambda_1\mathbf{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.21

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \ (\hat{\mathbf{A}} - \lambda_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{bmatrix}, (\hat{\mathbf{A}} - \lambda_1\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_2-\lambda_1)^2 \end{bmatrix},$$

$$(\hat{\mathbf{A}} - \lambda_1\mathbf{I})^2(\hat{\mathbf{A}} - \lambda_2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_2-\lambda_1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1-\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.22

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, (\hat{\mathbf{A}} - \lambda_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{bmatrix}, (\hat{\mathbf{A}} - \lambda_1\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_2-\lambda_1)^2 \end{bmatrix},$$

e

$$(\hat{\mathbf{A}} - \lambda_1 \mathbf{I})^2 (\hat{\mathbf{A}} - \lambda_2 \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2), \\ \psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2). \end{cases}$$

Funções e Polinômios de Uma Matriz

Teorema de Cayley-Hamilton

Seja $\Delta(\lambda) = j\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}j = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$ o polinômio característico de $\mathbf{A}$. Então $\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{A} + \alpha_n\mathbf{I} = 0$, ou seja, a matriz $\mathbf{A}$ satisfaz seu próprio polinômio característico.

Demonstração.

O polinômio característico contém o polinômio mínimo como um fator, ou seja, $\Delta(\lambda) = \psi(\lambda)h(\lambda)$, para algum polinômio $h(\lambda)$. Como $\psi(\mathbf{A}) = 0$, $\Delta(\mathbf{A}) = 0$, demonstrando o teorema. □

Pelo teorema, $\Delta(\mathbf{A}) = 0$, portanto pode-se escrever $\mathbf{A}^n$ como uma combinação linear de $\left\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\right\}$, e multiplicando $\Delta(\mathbf{A}) = 0$ por $\mathbf{A}$ dá

$$\mathbf{A}^{n+1} + \alpha_1 \mathbf{A}^n + \cdots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^2 + \alpha_n \mathbf{A} = 0$$

implicando que também $\mathbf{A}^{n+1}$ também pode ser escrito como combinação linear de $\left\{\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}, \mathbf{A}^n\right\}$, que pode ser , por sua vez, escrito como combinação linear de $\left\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\right\}$, e assim sucessivamente. Daí, para qualquer polinômio $f(\lambda)$, independente do grau, pode-se escrever

$$f(\mathbf{A}) = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A} + \cdots + \beta_{n-1} \mathbf{A}^{n-1}$$

Expressando $f(\lambda)$ como

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + h(\lambda)$$

onde $q(\lambda)$ é o quociente e $h(\lambda)$ é o resto de grau ¡ n e substituindo $\mathbf{A}$ no lugar de λ,

$$f(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A}) \overbrace{\Delta(\mathbf{A})}^{=\mathbf{0}} + h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}).$$

Seja

$$h(\lambda) := \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \cdots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} \tag{15}$$

com n incógnitas β_i a serem resolvidas. Para distintos autovalores, elas podem ser encontradas fazendo

$$f(\lambda_i) = q(\lambda_i)\Delta(\lambda_i) + h(\lambda_i) = h(\lambda_i),$$

o que fornece n equações. Se **A** tem autovalores com multiplicidade ¿1, $f(\lambda) = h(\lambda)$ pode ser diferenciada tantas vezes quanto necessário para fornecer as equações adicionais.

Seja $f(\lambda)$ e uma matriz n x n **A** com polinômio característico

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{m}(\lambda - \lambda_i)^{n_i}, \quad n = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

De (15), $h(\lambda)$ é um polinômio de grau n-1 com n incógnitas que podem ser determinadas com as n equações dadas por:

$$f^l(\lambda_i) := h^l(\lambda_i) := \left.\frac{d^l f(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i} \quad \text{para } l = 0, 1 \ldots, n_i - 1, \text{ e } i = 1, 2, \ldots, m$$

Daí, $f(\lambda_i) = h(\lambda_i)$ e $f(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$.

Exemplo 2.23 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A}^{100} =?$

$$f(\lambda) = \lambda^{100} \Rightarrow \ f(\mathbf{A}) =?$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \Rightarrow \ n_1 = 2 \Rightarrow \ h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda,$$

$$f'(\lambda) = 100\lambda^{99}, \ h'(\lambda) = \beta_1,$$

$$f(-1) = h(-1) = \beta_0 - \beta_1 = (-1)^{100},$$

$$f'(-1) = h'(-1) = \beta_1 = 100(-1)^{99} = -100 \Rightarrow \beta_1 = -100, \ \beta_0 = -99.$$

$$\mathbf{A}^{100} = \beta_0\mathbf{I} + \beta_1\mathbf{A} = -99\mathbf{I} - 100\mathbf{A}$$

$$= -99 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 100 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -99 & -100 \\ 100 & 101 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.24 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $e^{\mathbf{A}t} = ?$

$f(\lambda) = e^{\lambda t} \Rightarrow f(\mathbf{A}) = ?$

$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, 1 \\ \lambda_2 = 2. \end{cases}$

$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2$,

$$f(\lambda_1) = h(\lambda_1) = e^{\lambda_1 t} = e^t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \tag{16}$$

$$f'(\lambda_1) = h'(\lambda_1) = te^{\lambda_1 t} = te^t = \beta_1 + 2\beta_2 \tag{17}$$

$$f(\lambda_2) = h(\lambda_2) = e^{2t} = \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2. \tag{18}$$

De (18) – (16) $\Rightarrow \beta_1 = e^{2t} - e^t - 3\beta_2$, e de (17), $\beta_2 = -(1+t)e^t + e^{2t}$. Substituindo em β_1, $\beta_1 = 2e^t - 2e^{2t} + 3te^t$. Finalmente, substituindo β_1 e β_2 em (16) fornece $\beta_0 = e^{2t} - 2te^t$. Daí, com esses valores de β_0, β_1 e β_2 escreve-se

$$e^{\mathbf{A}t} = h(\mathbf{A}) = (e^{2t} - 2t^{t})\mathbf{I} + (2e^{t} - 2e^{2t} + 3te^{t})\mathbf{A} + (e^{2t} - e^{t} - te^{t})\mathbf{A}^2,$$

$$e^{\mathbf{A}t} = (e^{2t} - 2te^{t})\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (2e^{t} - 2e^{2t} + 3te^{t})\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$+ (e^{2t} - e^{t} - te^{t})\begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

e, finalmente,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{t} - e^{2t} & 0 & 2e^{t} - 2e^{2t} \\ 0 & e^{t} & 0 \\ e^{2t} - e^{t} & 0 & 2e^{2t} - e^{t} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.25 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $e^{\mathbf{A}t} = ?$

$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ é o mesmo polinômio característico do exemplo anterior, portanto, $h(\lambda)$ também é o mesmo. Daí, diretamente se obtém

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & 2te^t & 2e^t - 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^{2t} - e^t & -te^t & 2e^{2t} - e^t \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.26 $\hat{\mathbf{A}}$ é um bloco de Jordan de ordem 4, ou seja:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de $\hat{\mathbf{A}}$ é $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^4$. Além disso, $h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \beta_3\lambda^3$, que pode ser escrito alternativamente como:

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1(\lambda - \lambda_1) + \beta_2(\lambda - \lambda_1)^2 + \beta_3(\lambda - \lambda_1)^3.$$

Substituindo λ_1 em $f(\lambda)$ e $f'(\lambda)$,

$$f(\lambda_1) = h(\lambda_1) = \beta_0,$$
$$f'(\lambda) = h'(\lambda) = \beta_1 + 2\beta_2(\lambda - \lambda_1) + 3\beta_3(\lambda - \lambda_1)^2,$$
$$f'(\lambda_1) = h'(\lambda_1) = \beta_1,$$
$$f''(\lambda) = h''(\lambda) = 2\beta_2 + 6\beta_3(\lambda - \lambda_1),$$
$$f''(\lambda_1) = h''(\lambda_1) = 2\beta_2,$$

e

$$f'''(\lambda) = f'''(\lambda_1) = h'''(\lambda_1) = 6\beta_3.$$

Daí, $\beta_0 = f(\lambda_1)$, $\beta_1 = f'(\lambda_1)$, $\beta_2 = {}^{f''(\lambda_1)}/_2$, $\beta_3 = {}^{f'''(\lambda_1)}/_6$, e portanto,

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{A}}) &= f(\lambda_1)\mathbf{I} + f'(\lambda_1)(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) \\ &\qquad + \frac{f''(\lambda_1)}{2}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2 + \frac{f'''(\lambda_1)}{6}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{A}}) = f(\lambda_1) &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + f'(\lambda_1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \frac{f''(\lambda_1)}{2} &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{f'''(\lambda_1)}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(\hat{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \frac{f''(\lambda_1)}{2} & \frac{f'''(\lambda_1)}{6} \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \frac{f''(\lambda_1)}{2} \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_1) \end{bmatrix}.$$

Se $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, então,

$$e^{\hat{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda_1 t} \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.27 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, a qual é diagonal por blocos.

Se $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, então, $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$.

Se $f(\lambda) = (s-\lambda)^{-1}$,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-\lambda_1)} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-\lambda_1)} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_2)} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(s-\lambda_2)} \end{bmatrix}.$$

- Transformada de Laplace de $e^{\mathbf{A}t}$, $\mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}$.

Como $\frac{d(e^{\mathbf{A}t})}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \Rightarrow \mathscr{L}\{\frac{d(e^{\mathbf{A}t})}{dt}\} = s\mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} - e^{\mathbf{0}} = \mathbf{A}\mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\}$,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = \mathbf{I} \Rightarrow \boxed{\mathscr{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}}$$

Referências

Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Fourth Edition, 2013.

Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, First Edition,1984.

Banerjee, Sudipto; Roy, Anindya. *Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics*. Texts in Statistical Science 1st ed., Chapman and Hall/CRC, 2014