Soluções por Espaço de Estados de Sistemas LIT

Prof. Marcelo G. Vanti

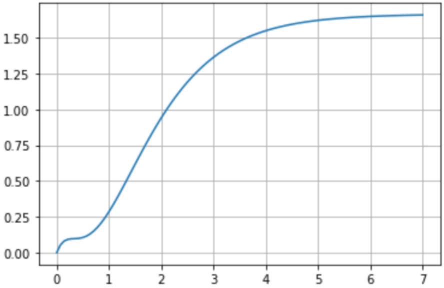
Introdução

```
In [9]: import control

In [10]: from control.matlab import *

In [11]: import matplotlib.pyplot as plt

In [12]: num=[1,-2,10]

In [13]: den=[1,6,11,6]

In [14]: sys=tf(num,den)

In [15]: sys
Out[15]:
```

$$\frac{s^2 - 2s + 10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

```
In [16]: y,t=step(sys)

In [17]: plt.plot(t,y)
    ...: plt.grid(True)
```

(a) script



(b) resposta

Figura: resposta ao degrau de um sistema LIT

Observações

- Os dados de entrada para a simulação são os coeficientes do numerador e do denominador da função de transferência $\hat{g}(s)$. Apesar disso, a resposta não é calculada resolvendo

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s) \tag{1}$$

- A resolução de (1) exige o cálculo dos polos de $\hat{g}(s)$, a expansão em frações parciais e busca da resposta em tabelas, sendo portanto inapropriada para implementação em algoritmos de simulação. Além disso, o cálculo das raízes de um polinômio são sensíveis à pequenas variações de parâmetros (variações de 0.1% nos coeficientes podem levar à erros da ordem de 10% nas raízes), o que não é desejável em simulação computacional.

Introdução

- Assim, equações de espaço de estado são utilizadas em simulações no lugar de equações de funções de transferência. Pacotes como MATLAB e Python Control Systems Library usam este método, mesmo que os dados tenham sido fornecidos na forma de função de transferência como mostrado acima.
- Além de ser usadas em simulação, equações em espaço de estado também podem ser usadas em computação em tempo real, o que não é possível de se fazer com funções de transferência. O motivo é que a transformada de Laplace da entrada só pode ser calculada após todos os valores desta em $[0, \infty]$ estarem disponíveis.
- Equações de espaço de estado também podem ser usadas em realizações de sistemas com amplificadores operacionais, como será visto neste capítulo.

Solução Geral de Equações de Estados de Sistemas LTI

Seja o sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t\end{aligned} \tag{2}$$

Considerando que $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$, multiplicando a primeira equação em (2) por $e^{-\mathbf{A}t}$,

$$\begin{aligned}e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

De onde pode-se escrever que $\frac{d}{dt}(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$. Integrando de 0 a t, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{d\tau}(e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{x}(\tau))d\tau &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{I}\mathbf{x}(0) &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Assim, pode-se escrever

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

ou

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{3}$$

e

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{4}$$

onde (3) e (4) são as soluções para $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ em (2). Essas equações também implicam que $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são completamente determinados pelo estado no sistema no instante $t = 0$ e pela entrada $\mathbf{u}(\tau)$ de 0 a t. $e^{\mathbf{A}t}$ é a *matriz de transição de estados*.

A integral do lado direito em (4) é claramente a convolução entre $e^{\mathbf{A}t}$ e $\mathbf{u}$(t) (**B** é uma matriz de coeficientes constantes), e portanto,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\left[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{u}(t)\right] + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Como $\delta(t) * u(t) = u(t)$, pode-se definir uma matriz diagonal $\boldsymbol{\delta}(t)$ onde os termos da diagonal são impulsos unitários. Assim, a última equação é reescrita como

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)}_{\text{entrada nula}} + \underbrace{\left[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t)\right] * \mathbf{u}(t)}_{\text{estado nulo}}. \tag{5}$$

Em (5) $\mathbf{g}(t) = \left[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t)\right]$ é a matriz de resposta ao impulso, cuja transformada de laplace é $\hat{\mathbf{G}}(s)$.

Por outro lado, aplicando à transformada de Laplace ao sistema (2)

$$s\hat{\mathbf{x}}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s)$$
$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(s) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(s)$$

e

$$\hat{\mathbf{x}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s)]$$
$$\hat{\mathbf{y}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(s)] + \mathbf{D}\hat{\mathbf{u}}(s)$$

Exemplo 3.1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = ?$$

Serão utilizados três métodos para solução:

1.

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

2.

$$\Delta(\lambda) = -\lambda(-2-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$$

$$\Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$f(\lambda) = (s-\lambda)^{-1} = h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda$$

$$f(-1) = \frac{1}{s+1} = \beta_0 - \beta_1$$

$$f'(\lambda) = (s-\lambda)^{-2} = h'(\lambda) = \beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$$

$$\beta_1 = f'(-1) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow \beta_0 = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \beta_0\mathbf{I} + \beta_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{(s+1)^2} \end{bmatrix} + \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

3

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{q}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow q_1 = [1 \quad 1]^T$$

$\nu(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) = 1,$ portanto,

$$\mathbf{q}_1 = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{q}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}_2 = [2 \quad 1]^T$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

A *matriz de transição de estados* $e^{\mathbf{A}t}$ pode ser calculada fazendo a transformada inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ ou diretamente, como em

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{Q}\, e^{\hat{\mathbf{A}}t}\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2. Escreva a solução para o vetor $\mathbf{x}$(t) para o sistema abaixo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} (t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

Solução Geral de Equações de Estados de Sistemas LTI

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} (t+1)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix} -\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \int_0^t (1-(t-\tau))e^{-(t-\tau)}\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.3.Considere o circuito mostrado abaixo:

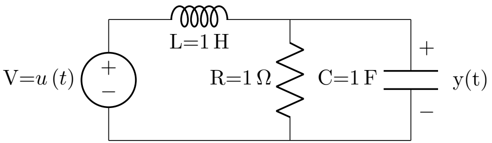


Figura: Circuito para o exemplo 3.3

Escolhendo a corrente sobre o indutor como x_1 e a tensão no capacitor como x_2, e aplicando a lei das tensões de Kirchhoff na malha esquerda resulta na primeira equação de estado

$$-u + \dot{x}_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_2 + u$$

A corrente no resistor do ramo central é ${}^{v_c}/_{R} = x_2$, e assim a corrente no capacitor é $\dot{x}_2 = x_1 - x_2$, daí

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Alternativamente, o sistema (6) pode ser obtido com ajuda computacional, como segue:

```
In [289]: from lcapy import *

In [290]: cct=Circuit("""
    ...: V 1  0 {u(t)};down
    ...: L 1 2 1; right=1.5
    ...: R 2 0_2 1;down
    ...: W 2 3;right
    ...: C 3 0_3 1;down, v={y}(t)
    ...: W 0 0_2;right
    ...: W 0_2 0_3; right""")

In [291]: sys=cct.ss

In [292]: sys.state_equations()
Out[292]:
```

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_L(t) \\ \frac{d}{dt} v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

```
In [293]: sys.output_equations()
Out[293]:
```

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ i_V(t) \\ i_L(t) \\ i_R(t) \\ i_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

Nas equações de saída acima, $y(t)$ corresponde a tensão sobre o nó 2, $v_2(t)$, ou seja, sobre o resistor, que é a mesma sobre o o capacitor.

Por outro lado, escolhendo as correntes de malha como variáveis de estado $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$, as novas equações de estado são obtidas como segue: aplicando a LKT à malha esquerda leva a $-u + \dot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0$, ou

$$\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + u. \tag{7}$$

A corrente sobre o capacitor é $\bar{x}_2 = {}^{dv_c}/_{dt} = \dot{\bar{x}}_1 - \dot{\bar{x}}_2$, de forma que se obtêm substituindo a eq. (7)

$$\dot{\bar{x}}_2 = -\bar{x}_1 + u.$$

Portanto, o circuito pode ser alternativamente descrito pelo sistema abaixo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Equivalência de Equações de Espaço de Estados

Os sistemas de equações de estado (6) e (8) descrevem o mesmo circuito, e devem ser relacionados de alguma forma, ou seja, devem ser equivalentes. Para discutir esta equivalência, considere-se um sistema LIT geral (2)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

Seja também $\mathbf{Q}$ uma matriz n x n tal que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t)$, onde $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n\end{bmatrix}$ cujas colunas formam a base na qual $\bar{\mathbf{x}}(t)$ é a representação de $\mathbf{x}(t)$. Então, pode-se escrever

- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \Rightarrow \mathbf{Q}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t) \Rightarrow \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$.
- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \Rightarrow \mathbf{Q}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \Rightarrow \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \Rightarrow \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}$.
- $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}(t) \Rightarrow \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{Q}$.
- $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$.

Equivalência de Equações de Espaço de Estados

Com as transformações acima, o sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}u(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t)
\end{aligned} \tag{9}
$$

é algebricamente equivalente ao sistema (2). Além disso, os dois sistemas compartilham o mesmo conjunto de autovalores, visto que:

$$
\begin{aligned}
\bar{\Delta}(\lambda) &= \left|\bar{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{I}\right| = \left|\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\right| = \left|\mathbf{Q}^{-1}\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{Q}\right| = \left|\mathbf{Q}^{-1}\right|\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right|\left|\mathbf{Q}\right| \\
&= \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = \Delta(\lambda).
\end{aligned}
$$

As Funções de transferência do dos sistemas também são as mesmas

$$
\begin{aligned}
\hat{\bar{\mathbf{G}}}(s) &= \bar{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}\right)^{-1}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{C}\mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^{-1}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\
&= \mathbf{C}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \hat{\mathbf{G}}(s).
\end{aligned}
$$

Nos dois sistemas (6) e (8) do exemplo discutido acima $x_1 = \bar{x}_1$. A corrente no resistor de ramo central é $^{x_2}/_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$. Portanto,

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}
$$

ou

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

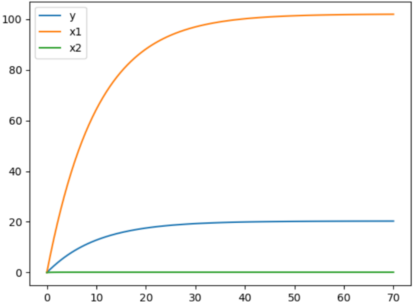
Exercício 3.1 . Verifique que (6) e (8) são relacionados pela transformação de equivalência (10).

Exemplo 3.4: seja o seguinte sistema de equações de estados:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -0.1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 10 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0.2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{11}$$

A entrada é uma função passo com várias amplitudes possíveis, e o sistema é implementado usando um circuito com amplificadores operacionais nos quais a amplitude dos sinais deve ser limitada a ± 10.

```
In [196]: a=np.array([-0.1,2,0,-1]).reshape(2,2)

In [197]: b=np.array([10,0.1]).reshape(2,1)

In [198]: c=np.array([0.2,-1])

In [199]: d=0

In [200]: sys=ss(a,b,c,d)

In [201]: y,t,x=step(sys,return_x=True)
```



Equivalência de Equações de Espaço de Estados

Como pode ser visto na figura anterior, x_1 estabiliza em 100, portanto, se um degrau de amplitude 1 é aplicado o circuito irá saturar.

Para que não haja saturação, a amplitude da entrada deve ser tal que $|u|_{max} \leq 0.1$. Esta condição pode ser relaxada através de uma transformação de equivalência adequada. A transformação de equivalência não afeta a relação entre a entrada e a saída, mas pode ser selecionada de forma que $|x_i(t)| \leq |y|_{max}$. Neste caso, para uma entrada com valor máximo igual a 0.5 o circuito não saturará. Os valores máximos de x_1, x_2 e y são 100, 0.1 e 20 e as novas variáveis de estado podem ser obtidas por normalização com estes valores máximos, ou seja,

$$\bar{x}_1 = \frac{20}{100}x_1 = 0.2x_1, \quad \bar{x}_2 = \frac{20}{0.1}x_2 = 200x_2.$$

Estas transformações mantém inalterada a resposta do sistema, mas limitam a amplitude de x_1 e x_2 em 20, o valor máximo de y. A transformação pode ser realizada com as matrizes

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0.005 \end{bmatrix}$$

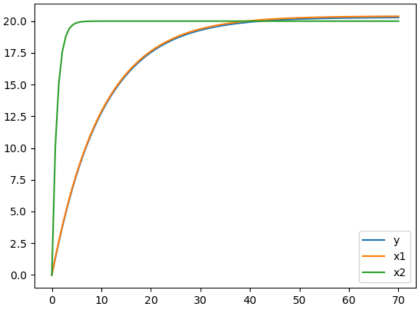
Equivalência de Equações de Espaço de Estados

Com as transformações de equivalência, obtêm-se o sistema abaixo

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.002 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 20 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0.005 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t).$$

A resposta ao degrau unitário pode ser conferida na figura a seguir. Conclui-se que para um degrau com amplitude 0.5 todos sinais são limitados em 10.



Realizações

Um sistema SISO linear invariante no tempo pode ser descrito pela equação (1)

$$\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s).$$

Se o sistema é baseado em parâmetros concentrados (sistemas distribuídos possuem matriz de transferência, mas não são realizáveis), então, também pode ser descrito por equações de espaço de estados

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Como o sistema tem uma entrada e uma saída, em (12) $y(t)$, $u(t)$ são escalares, e **b**, **c** são unidimensionais, ou vetores.

O problema de realização de um sistema linear consiste em encontrar as equações de espaço de estados à partir da função de transferência. Se o sistema é realizável, então existem **A**,**b**,**c**,d tais que

$$\hat{g}(s) = \mathbf{c}\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{b} + d \tag{13}$$

Além disso, se o sistema é realizável então (13) é uma função racional própria.

Se **A** é uma matriz n x n, então em

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}.$$

Cada termo da adjunta de (s**I**-**A**) é formado pelo determinante de submatrizes (n-1) x (n-1), e tem por isso no máximo grau n-1. Suas combinações lineares , a pré e pós multiplicação pelos vetores **c** e **b**, também terão no máximo grau n-1, e finalmente, o deteminante de (s**I**-**A**) possui grau n. Portanto, o primeiro termo do lado direito de (13) é uma função racional estritamente própria. Se $d \neq 0$, então (13) é própria.

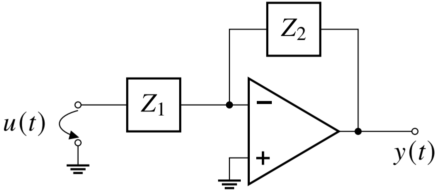
Exemplo 3.5:

```
In [12]: from control.matlab import *

In [13]: num=[4,3]

In [14]: den=[40,30,9,3]

In [15]: sys1=tf(num,den)

In [16]: sys1
Out[16]:
```

$$\frac{4s+3}{40s^3+30s^2+9s+3}$$

```
In [17]: sys2=tf2ss(sys1)

In [18]: sys2
Out[18]:
A = [[-7.50000000e-01  2.25000000e-01  7.50000000e-02]
 [-1.00000000e+00 -3.09299275e-16  3.64413773e-16]
 [ 0.00000000e+00  1.00000000e+00  4.44089210e-16]]

B = [[-1.]
 [ 0.]
 [ 0.]]

C = [[0.    0.1   0.075]]

D = [[0.]]
```

- Realizações : *implementação com amplificadores operacionais*

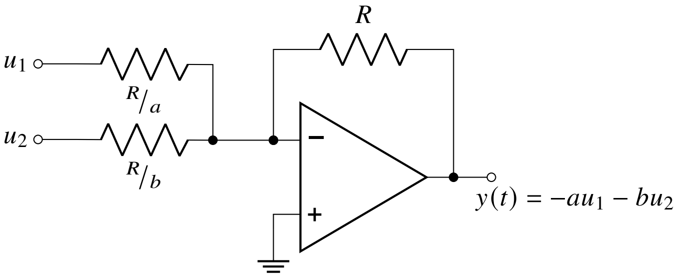


$$-u(t) + Z_1 I = 0 \Rightarrow I = \frac{u(t)}{Z_1}$$

$$Z_2 I + y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = -Z_2 I = -\frac{Z_2}{Z_1} u(t)$$

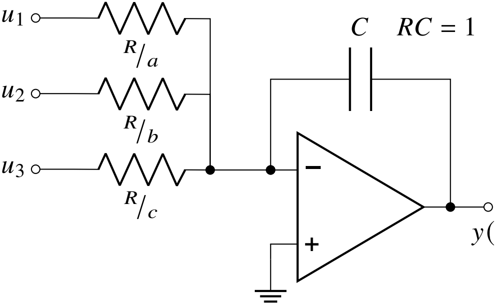
Realizações

- Realizações: *somador*



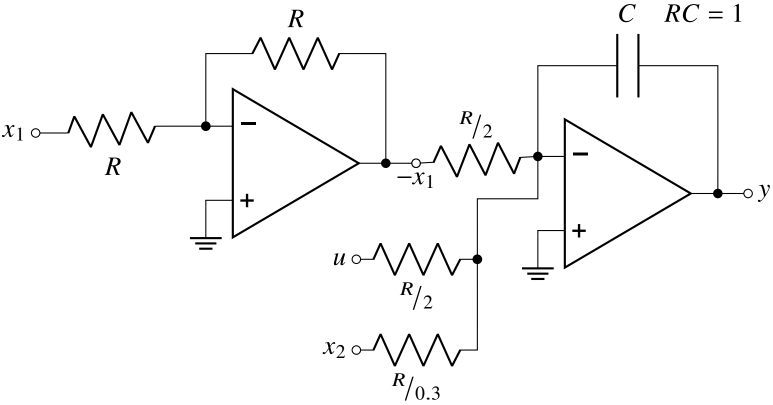
Realizações

- Realizações: *integrador*



$$y(t) = -\frac{1}{s}(au_1 + bu_2 + cu_3)$$

Exemplo 3.6: $\dot{x}_1 = 2x_1 - 0.3x_2 - 2u$



$$y = \frac{1}{s}\underbrace{(2x_1 - 0.3x_2 - 2u)}_{\dot{x}_1} = \frac{\dot{x}_1}{s} = x_1$$

Realizações

- Realizações: *Realização canônica*

Inicialmente considere-se $\hat{g}(s)$ uma função racional estritamente própria, como por exemplo

$$\hat{g}(s) = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

Dividindo $\hat{g}(s)$ por s^3,

$$\hat{g}(s) = \frac{\frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} = \left(\frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}}\right)\left(\frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right) = \hat{g}_1(s)\hat{g}_2(s)$$

$$\xrightarrow{\hat{u}(s)} \boxed{\hat{g}_1(s)} \xrightarrow{\hat{v}(s)} \boxed{\hat{g}_2(s)} \xrightarrow{\hat{y}(s)}$$

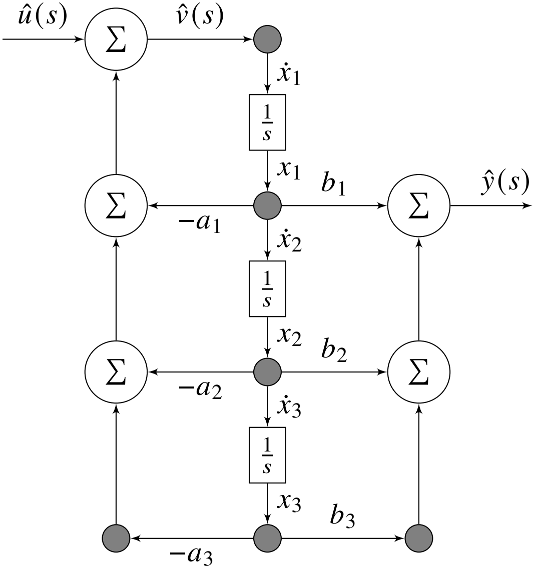
$$\boxed{\hat{y}(s) = \left(\frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right)\hat{v}(s)} \qquad (14)$$

Realizações

$$\hat{v}(s) = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} \hat{u}(s) \Rightarrow \hat{u}(s) = \hat{v}(s) + \left(\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right) \hat{v}(s)$$

$$\boxed{\hat{v}(s) = \hat{u}(s) - \left(\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right) \hat{v}(s)} \qquad (15)$$

Em uma equação diferencial com ordem N são necessários no mínimo N integradores em sua implementação. Uma realização é denominada *canônica* quando o número de integradores utilizados em sua realização é igual à ordem da eq. diferencial, ou do denominador da função de transferência. A realização canônica não possui integradores redundantes. No caso em estudo, a realização canônica deve ter apenas 3 integradores, o que pode ser verificado na implementação do gráfico de fluxo de sinal das equações (14) e (15).


$\hat{u}(s)$
$\hat{v}(s)$
Σ
$\dot{x}_1$
$\frac{1}{s}$
x_1
b_1
$\hat{y}(s)$
$-a_1$
$\dot{x}_2$
x_2
b_2
$-a_2$
$\dot{x}_3$
x_3
b_3
$-a_3$

As saídas dos integradores são naturalmente escolhidas como variáveis de estado naturais, onde normalmente são colocadas as condições iniciais. Isso pode ser visto no diagrama acima, e portanto, as equações de estado podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -a_1 x_1(t) - a_2 x_2(t) - a_3 x_3(t) + u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= x_1(t) \\
\dot{x}_3(t) &= x_2(t) \\
y(t) &= b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t) + b_3 x_3(t)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{16}$$

Considerando agora $\hat{g}(s)$ biprópria, ou seja, a ordem do numerador e denominador são iguais como na função

$$\hat{g}(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3},$$

onde o denominador é um polinômio mônico ($a_0 = 1$). Caso contrário, divide-se $\hat{g}(s)$ por a_0. Para obter uma fração racional estritamente própria, deve-se realizar a divisão de polinômios em $\hat{g}(s)$,

$$\begin{array}{cccc|cccc}
b_0 s^3 & +b_1 s^2 & +b_2 s & +b_3 & s^3 & +a_1 s^2 & +a_2 s & +a_3 \\ \cline{5-8}
b_0 s^3 & +b_0 a_1 s^2 & +b_0 a_2 s & +b_0 a_3 & b_0 & & & \\ \cline{1-4}
 & (b_1 - b_0 a_1) s^2 & (b_2 - b_0 a_2) s & (b_3 - b_0 a_3) & & & &
\end{array}$$

e assim $\hat{g}(s)$ assume a forma (13) discutida anteriormente.

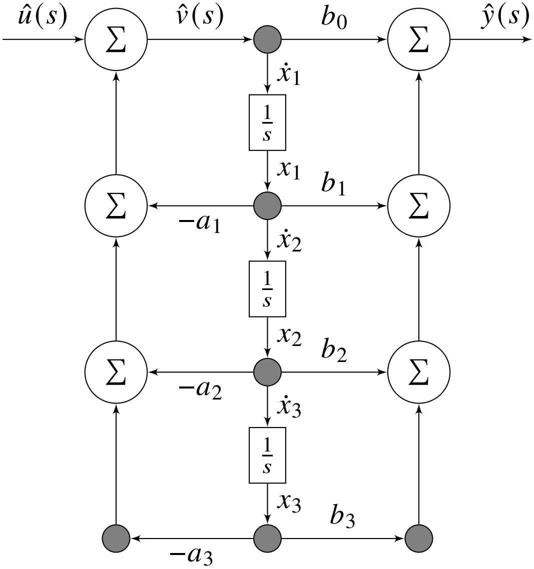
$$\hat{g}(s) = \frac{\overbrace{(b_1 - b_0 a_1)}^{b'_1} s^2 + \overbrace{(b_2 - b_0 a_2)}^{b'_2} s + \overbrace{(b_3 - b_0 a_3)}^{b'_3}}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} + b_0$$

$$\hat{g}(s) = \frac{b_1' s^2 + b_2' s + b_3'}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} + b_0 = \frac{\frac{b_1'}{s} + \frac{b_2'}{s^2} + \frac{b_3'}{s^3}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} + b_0. \tag{17}$$

A função racional do primeiro termo o lado direito de (33) é estritamente própria. Usando o procedimento anterior pode-se escrever

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= \left(\frac{b_1'}{s} + \frac{b_2'}{s^2} + \frac{b_3'}{s^3}\right)\hat{v}(s) + b_0\hat{u}(s) \\ \hat{v}(s) &= \hat{u}(s) - \left(\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right)\hat{v}(s) \end{aligned} \tag{18}$$

O diagrama de (18) é mostrado abaixo.


$\hat{u}(s)$
$\hat{v}(s)$
b_0
$\hat{y}(s)$
Σ
$\dot{x}_1$
$\frac{1}{s}$
x_1
b_1
$-a_1$
$\dot{x}_2$
x_2
b_2
$-a_2$
$\dot{x}_3$
x_3
b_3
$-a_3$

Realizações

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \begin{bmatrix} b_1' & b_2' & b_3' \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + b_0 u(t) \\
&= \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & b_3 - a_3 b_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + b_0 u(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} b_1' & b_2' & b_3' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + b_0 u(t)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Observa-se que, ao comparar as realizações acima, se $\hat{g}(s)$ é estritamente própria, d=0, e não há transmissão direta entre a entrada e a saída.

Exemplo 3.7:

$$\hat{g}(s) = \frac{3s^4 + 5s^3 + 24s^2 + 23s - 5}{2s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 12s + 5}$$

é biprópria e o denominador não é mônico. Dividindo o numerador e o denominador por 2 fornece

$$\begin{aligned}\hat{g}(s) &= \frac{1.5s^4 + 2.5s^3 + 12s^2 + 11.5s - 2.5}{s^4 + 3s^3 + 7.5s^2 + 6s + 2.5} \\ &= \frac{-2s^3 + 0.75s^2 + 2.5s - 6.25}{s^4 + 3s^3 + 7.5s^2 + 6s + 2.5} + 1.5\end{aligned}$$

onde o numerador foi dividido pelo denominador. Repetindo o procedimento usado anteriormente,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -7.5 & -6 & -2.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0.75 & 2.5 & -6.25 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + 1.5u(t)$$

Exemplo 3.8:

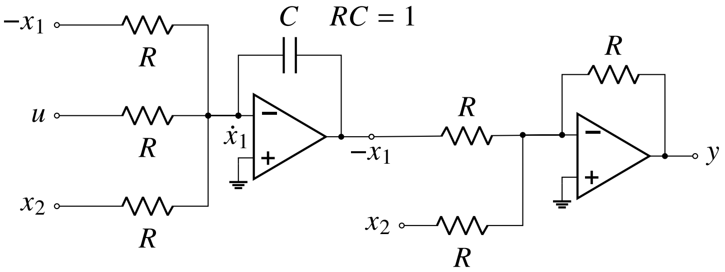
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

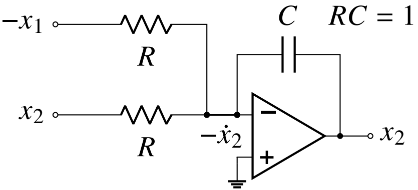
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Este sistema usa dois integradores e um inversor, como mostrado na próxima figura, pois

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \\ y &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Realizações





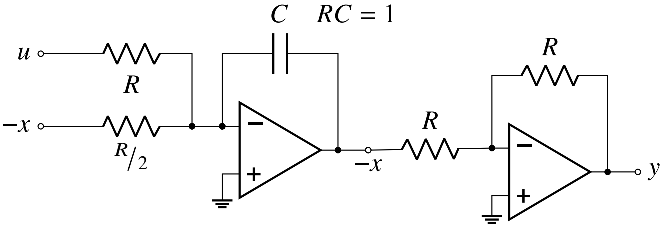
Por outro lado, a função de transferência para este sistema é (mostre):

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s+2}$$

onde $b_1 = 1$, e $a_1 = 2$. Logo, a realização canônica é (segundo (16) ou (19))

$$\dot{x} = -2x + u$$
$$y = x$$

com implementação mostrada abaixo (um integrador e um inversor):



Referências

- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Fourth Edition, 2013.
- B.P.Lathi. *Sinais e Sistemas Lineares*. Bookman, Segunda Edição,2004.
- Chi-Tsong Chen. *Signals and Systems: A Fresh Look*. Stony Brook University, 2009.
  http://www.ctchen.me/
- Hayes M. *Lcapy: symbolic linear circuit analysis with Python*. PeerJ Computer Science, 2022.
- python-control. *Python Control Systems Library*.
  http://python-control.org/
- L. A. Zadeh. *From Circuit Theory to System Theory*. Proceedings of the IRE, 1962.
- J.R.Ragazzini;R.H.Randall;F.A.Russell. *Analysis of Problems in Dynamics by Electronic Circuits*. Proceedings of the IRE, 1946.