Sistemas_Lineares_7_0-SCDLap_TransformadaLaplace

November 7, 2024

1 Análise de Sistemas em Tempo Contínuo com a Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma ferramenta importante no estudo de sistemas lineares invariantes no tempo. É frequentemente utilizada ao resolver equações diferenciais ou sistemas de equações diferenciais, determinar a estabilidade, controlabilidade e observabilidade de sistemas, etc.

1.1 A Transformada de Laplace

Seja uma função $f(t)$. A Transformada de Fourier de $f(t)$ descreve o conteúdo espectral no domínio da frequência e é dada por

$$F(j\omega) = \mathscr{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

Definimos uma nova função derivada de $f(t)$ como

$$f_s(t) = e^{-\sigma t} f(t)$$

onde σ representa a taxa na qual o sinal é amortecido no tempo. Portanto,

$$\mathscr{F}(f_s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt.$$

Na equação acima $s = \sigma + j\omega$ é denominada frequência complexa, e a ultima integral à direita é a transformada de Laplace de $f(t)$, escrita como

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt. \tag{1}$$

Por outro lado, a transformada de Fourier inversa de $F(s)$ é

$$f_s(t) = e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

Como $ds = jd\omega$ (σ é constante), da última igualdade acima escrevemos a Transformada Inversa de Laplace como

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\,ds. \tag{2}$$

A equação (1) é a transformada de Laplace bilateral. Para sistemas causais, $f(t) = 0$ para $t < 0$, daí o limite inferior agora é 0^-, e portanto,

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \tag{3}$$

a qual é a transformada de Laplace unilateral.

Exemplo Seja $f(t) = \delta(t)$. A transformada do impulso é

$$\int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$$

usando a priopriedade da amostragem do impulso. Portanto, temos o par de transformadas

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1.$$

Exemplo $f(t) = u(t)$, o degrau unitário ou função passo de heaviside. A transformada de Laplace desta função é

$$\mathcal{L}(u(t)) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}$$

O par transformado é

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$$

Exemplo Seja a função exponencial e^{-at}. A Transformada de Laplace de $e^{-at}u(t)$ é

$$\mathcal{L}(e^{-at}u(t)) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)}t\,dt = \frac{1}{s+a}$$

O par transformado é

$$e^{-at} \Leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

Exemplo Transformadas de outras funções básicas. Usaremos agora a biblioteca simbólica SymPy para fazer uma tabela de transformadas básicas: inicialmente definimos um lista básica de funções.

[1]:
```
#!pip install sympy
import sympy as sp
sp.init_printing()
```

```python
t, s = sp.symbols('t, s')
omega = sp.Symbol('omega', real=True)
a = sp.symbols('a', real=True, positive=True)
exp = sp.exp
sin = sp.sin
cos = sp.cos
functions = [1,
         t,
         exp(-a*t),
         t*exp(-a*t),
         t**2*exp(-a*t),
         sin(omega*t),
         cos(omega*t)
         ]
functions
```

[1]: $[1,\ t,\ e^{-at},\ te^{-at},\ t^2e^{-at},\ \sin(\omega t),\ \cos(\omega t)]$

Em seguida definimos uma função para determinação da lista de transformadas, usando a função laplace_transform(f, t, s, noconds=True). "noconds=True" diz à rotina que queremos apenas a transformada, sem condições de convergência.

[2]:
```python
def L(f):
    return sp.laplace_transform(f, t, s, noconds=True)
```

[3]:
```python
Fs = [L(f) for f in functions]
Fs
```

[3]: $$\left[\frac{1}{s},\ \frac{1}{s^2},\ \frac{1}{a+s},\ \frac{1}{(a+s)^2},\ \frac{2}{(a+s)^3},\ \frac{\omega}{\omega^2+s^2},\ \frac{s}{\omega^2+s^2}\right]$$

[4]:
```python
#!pip install pandas
from pandas import DataFrame
```

[5]:
```python
def makelatex(args):
    return ["$${}$$".format(sp.latex(a)) for a in args]
```

[6]:
```python
DataFrame(list(zip(makelatex(functions), makelatex(Fs))))
```

[6]:

	0	1
0	$$1$$	$$\frac{1}{s}$$
1	$$t$$	$$\frac{1}{s^{2}}$$
2	$$e^{- a t}$$	$$\frac{1}{a + s}$$
3	$$t e^{- a t}$$	$$\frac{1}{\left(a + s\right)^{2}}$$
4	$$t^{2} e^{- a t}$$	$$\frac{2}{\left(a + s\right)^{3}}$$
5	$$\sin{\left(\omega t \right)}$$	$$\frac{\omega}{\omega^{2} + s^{2}}$$
6	$$\cos{\left(\omega t \right)}$$	$$\frac{s}{\omega^{2} + s^{2}}$$

1.1.1 A transformada da derivada

$$\mathcal{L}(f'(t)u(t)) = \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st}\, dt$$

Integrando por partes, temos

$$\mathcal{L}(f'(t)u(t)) = f(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

O primeiro termo do lado direito é $-f(0^-)$(porque $e^{-st} \to \infty$ quando $t \to \infty$) e a integral é simplemente a transformada de $f(t)$, ou seja, $F(s)$, e portanto

$$\mathcal{L}(f'(t)u(t)) = sF(s) - f(0^-)$$

analogamente,

$$\mathcal{L}(f''(t)u(t)) = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

e

$$\mathcal{L}(f'''(t)u(t)) = s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$$

e assim, sucessivamente.

1.1.2 A transformada de uma integral

$$\mathcal{L}\left(\left\{\int_{0^-}^{t} f(\tau)\, d\tau u(t)\right\}\right) = \int_{0^-}^{\infty}\left(\int f(\tau)\, d\tau\right)e^{-st}\, dt$$

novamente, integrando por partes,

$$\mathcal{L}\left(\left\{\int_{0^-}^{t} f(\tau)\, d\tau u(t)\right\}\right) = \frac{-1}{s}\int_{0^-}^{t} f(\tau)\, d\tau\, e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

O primeiro termo do lado direito é nulo, enquanto a segunda integral é a transformada de Laplace de $f(t)$, portanto

$$\mathcal{L}\left(\left\{\int_{0^-}^{t} f(\tau)\, d\tau u(t)\right\}\right) = \frac{F(s)}{s}$$

1.1.3 A transformada inversa: expansão em frações parciais

A transformada inversa formal é obtida através da integral (2), que é uma integral de caminho no plano complexo. Para se obter uma solução de forma mais direta, podemos usar nosso conhecimento dos pares de transformadas como os vistos acima. Entretanto, frequentemente a transformada é uma função racional $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinomios de s. As raízes de $P(s)$ são denominadas de zeros de $F(s)$ e as de $Q(s)$ são os polos de $F(s)$. Neste caso, a expansão em frações parciais leva à decomposição de $F(s)$ em termos mais simples, com fácil identificação de seus pares transformados. Dois casos são considerados:

a) polos distintos.

Seja $F(s) = \frac{7s-6}{s^2-s-6} = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)}$. Podemos expandir $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s-3}.$$

Para encontrar A_1, simplesmente multiplicamos a equação acima por $s+2$, e depois fazemos $s = -2$ na equação resultante, isso é

$$(s+2)F(s) = \frac{7s-6}{s-3} = A_1 + A_2\frac{s+2}{s-3}$$

$$A_1 = \left.\frac{7s-6}{s-3}\right|_{s=-2} = 4$$

Analogamente, para A_2 temos

$$A_2 = (s-3)F(s) = \left.\frac{7s-6}{s+2}\right|_{s=3} = 3.$$

Portanto, $F(s) = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$, e daí, consultando os pares de transformada podemos encontrar $f(t)$:

$$f(t) = \left(4e^{-2t} + 3e^{3t}\right) u(t).$$

b)polos repetidos

seja agora $F(s) = \frac{3s-1}{s(s-1)^3}$. Como antes expandimos em frações parciais como segue:

$$F(s) = \frac{3s-1}{s(s-1)^3} = \frac{A_1}{s} + \frac{B_1}{(s-1)^3} + \frac{B_2}{(s-1)^2} + \frac{B_3}{s-1}. \tag{4}$$

para encontrar A_1, fazemos como anteriormente, isto é:

$$A_1 = sF(s) = \left.\frac{3s-1}{(s-1)^3}\right|_{s=0} = 1.$$

Já para determinação dos B_is, começamos por multiplicar a equação (4) por $(s-1)^3$

$$\frac{3s-1}{s} = (s-1)^3 \frac{A_1}{s} + B_1 + B_2(s-1) + B_3(s-1)^2, \tag{5}$$

e B_1 é obtido como:

$$B_1 = \left. \frac{3s-1}{s} \right|_{s=1} = 2.$$

Para determinação de B_2, diferenciamos (5) em função de s,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{3s-1}{s}\right) = \frac{1}{s^2} = B_2 + 2(s-1)B_3 + \frac{d}{ds}\left((s-1)^3 \frac{A_1}{s}\right), \tag{6}$$

e fazendo $s = 1$ obtemos B_2 como

$$B_2 = \left. \frac{1}{s^2} \right|_{s=1} = 1.$$

Finalmente, diferenciamos novamente (6) para encontrar B_3.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{-2}{s^3} = 2B_3 \to B_3 = \left. \frac{-1}{s^3} \right|_{s=1} = -1,$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1}.$$

Com os pares 0,2,3 e 4 da tabela, encontramos $f(t)$:

$$f(t) = (1 + t^2 e^t + te^t - e^t)u(t)$$

1.1.4 Propriedade do deslocamento no tempo:

Considere o par transformado \$f(t) F(s) \$. A transformada de $f(t-t_0)$ é encontrada por simples substituição $t' = t - t_0$:

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)) = \int_{0^-}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t')e^{-s(t'+t_0)}\, dt' = e^{-st_o} \int_{0^-}^{\infty} f(t')e^{-st'}\, dt' = e^{-st_0}F(s).$$

1.1.5 Propriedade do deslocamento na frequência:

Para uma dada função $f(t)$ com transformada $F(s)$, a transformada de $e^{at}f(t)$ é

$$\mathcal{L}(e^{at}F(s)) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{at}e^{-st}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}\, dt = F(s-a)$$

1.1.6 Aplicação à Análise de Sistemas

Exemplo Seja o sistema representado pela equação $(D^2 + 5D + 6)y(t) = (D + 1)x(t)$, com as condições iniciais $y(0^-) = 2$ e $y'(0^-) = 1$, alimentado pela entrada $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Iniciamos fazendo a transformada da equação diferencial usando a propriedade da transformada das derivadas, e inserido as condições iniciais, isto é:

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5sY(s) - 5y(0^-) + 6Y(s) = (s + 1)X(s),$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$ e $\mathcal{L}(x(t)) = X(s) = \frac{1}{s+4}$. Assim,

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = (s + 1)X(s) + 2s + 11$$

podemos escrever a equação acima como

$$Q(s)Y(s) = P(s)X(s) + 2s + 11.$$

E a resposta no domínio de Laplace, $Y(s)$, é dada por

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}X(s) + \frac{2s + 11}{Q(s)}.$$

$2s + 11$ é o termo devido às condições iniciais, portanto, o primeiro termo do lado direito da equação acima é a resposta de estado nulo do sistema, quando o sistema está relaxado (basta anular o segundo termo) enquanto que o segundo termo é a resposta de entrada nula (fazendo $X(s) = 0$). Por superposição, a transformada inversa leva a resposta total no domínio do tempo.

Voltando ao exemplo, $Q(s) = (s+2)(s+3)$, substituindo $Q(s)$ *e* $X(s)$ na equação acima resulta em

$$Y(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s + 3)} \frac{1}{(s + 4)} + \frac{2s + 11}{(s + 2)(s + 3)},$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s + 2)(s + 3)(s + 4)} = \frac{A_1}{s + 2} + \frac{A_2}{s + 3} + \frac{A_3}{s + 4},$$

de onde determinamos que $A_1 = \frac{13}{2}$, $A_2 = -3$ e $A_3 = \frac{-3}{2}$. A resposta no domínio de Laplace é

$$Y(s) = \frac{13}{2}\frac{1}{s + 2} - \frac{3}{s + 3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s + 4}.$$

A resposta no domínio do tempo é encontrada com as transformadas inversas dos termos do lado direito.

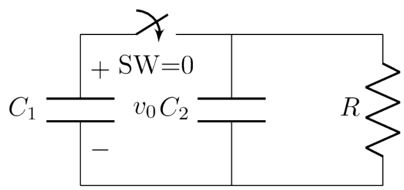
$$y(t) = \left(\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right) u(t).$$

1.1.7 Aplicação ao Estudo de Transitórios

Exemplo Neste primeiro exemplo iremos considerar a situação em que um capacitor com uma tensão inicial v_0 é conectado em $t = 0$ à um segundo capacitor com carga nula em paralelo com um resistor. O fato dos dois capacitores estarem em paralelo indica que as tensões devem ser as mesmas em ambos, o que exige que uma corrente impulsiva esteja presente para forçar o carregamento instantâneo do segundo capacitor.

[7]:
```
import lcapy as lc
s=lc.s
t=lc.t
cct=lc.Circuit("""
C1 1 0 C1 v0;down, v=v_0
SW 1 2 no;right
C2 2 0_2 C2 ;down
W 2 3;right
R 3 0_3 R;down
W 0 0_2;right
W 0_2 0_3;right
;draw_nodes=none,  label_nodes=none""")

cct.draw()
```



Inicialmente faremos a análise do circuito usando a transformada de Laplace, e para torna-la mais simples iremos considerar os dois capacitores idênticos, $C_1 = C_2 = C$. Podemos agora obter obter a impedância equivalente para a associação em paralelo do segundo capacitor e resistor, isto é:

$$Z_p = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

No estudo em regime permanente normalmente usa-se $s = j\omega$, e substituindo na expressão acima temos

$$Z_p = \frac{R}{1 + sRC}$$

O capacitor inicialmente carregado pode ser modelado como sua impedância em série com uma fonte fonte de tensão v_o. A equação transformada da malha resultante é (lembrando que o acionamento da chave pode ser associado á um degrau unitário $v_0 u(t)$)

$$I(s)(\frac{1}{sC} + Z_p) - \frac{V_0}{s} = 0$$

$$I(s)\left(\frac{1}{sC}+\frac{R}{1+sRC}\right)=\frac{V_0}{s}$$

$$I(s)\left(\frac{1+s2RC}{sC(1+sRC)}\right)=\frac{V_0}{s}$$

$$I(s)=V_0C\frac{1+sRC}{1+s2RC}$$

O denominador e numerador de $I(s)$ possuem o mesmo grau (1) e portanto ainda não podem ser expandidos em frações parciais. Antes, é necessário fazer a divisão polinomial, de forma que

$$\frac{1+sRC}{1+s2RC}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{1+s2RC}$$

Substituindo este resultado na equação de $I(s)$, temos

$$I(s)=\frac{V_0C}{2}\left(1+\frac{1}{1+s2RC}\right)=\frac{V_0C}{2}\left(1+\frac{\frac{1}{2RC}}{s+\frac{1}{2RC}}\right)$$

de forma que a corrente $i(t)$ é:

$$i(t)=\frac{v_0C}{2}\left(\delta(t)+\frac{1}{2RC}e^{-\frac{t}{2RC}}\right)$$

onde a parcela impulsiva da corrente é responsável pela transferência instantânea da metade da carga do capacitor C_1 para o capacitor C_2, equalizando suas tensões a partir do momento que o circuito é chaveado, como será mostrado ao final deste exemplo.

Vamos agora refazer a análise com o programa *Lcapy*, mantendo inicialmente a generalidade do circuito original.

[8]:
```
cct_ivp=cct.convert_IVP(0);
```

```
C:\Users\Master\Desktop\WPy64-31180\python-3.11.8.amd64\Lib\site-
packages\lcapy\netlist.py:80: UserWarning: Missing initial conditions for C2
  warn('Missing initial conditions for %s' %
```

[9]:
```
I=cct_ivp.C1.i(s).simplify().ZPK()
I
```

[9]:

$$\frac{-\frac{C_1C_2v_0}{C_1+C_2}\left(s+\frac{1}{C_2R}\right)}{s+\frac{1}{R(C_1+C_2)}}$$

[10]:
```
I(t)
```

[10]:

$$-\frac{C_1 C_2 v_0 \left(\frac{C_1 e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}}{C_1 C_2 R + C_2^2 R} + \delta(t)\right)}{C_1 + C_2} \quad \text{for } t \geq 0$$

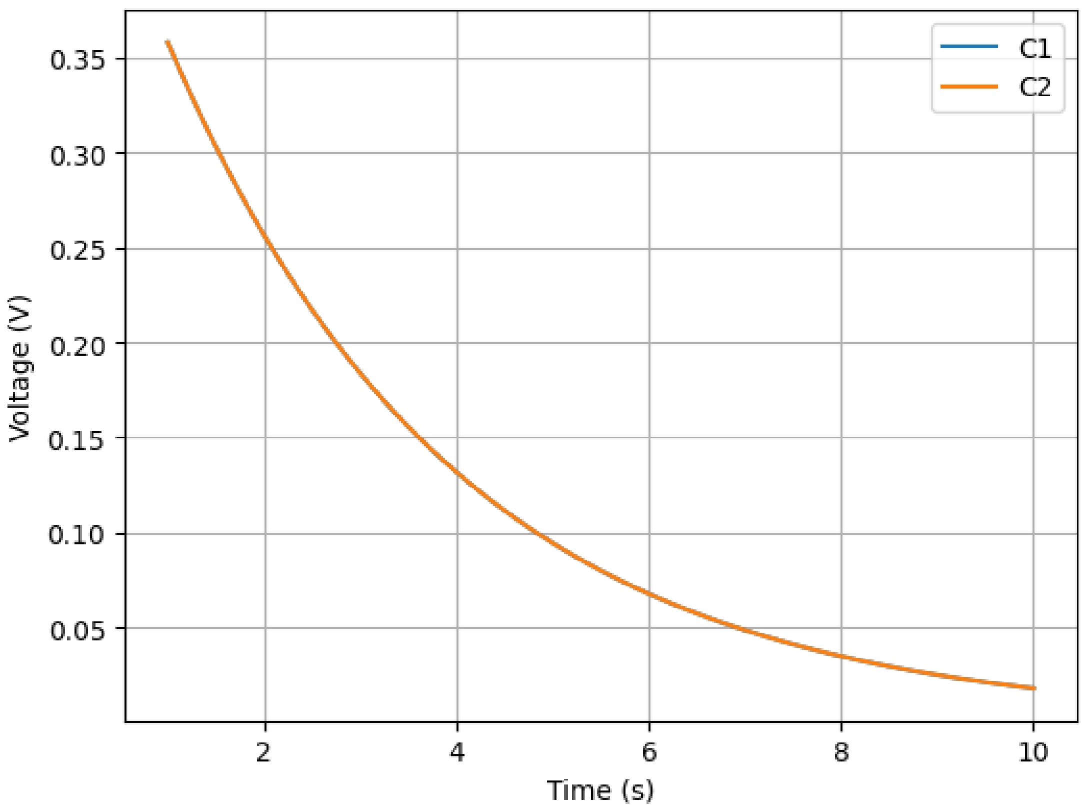
Fazendo $C_1 = C_2 = C$ a expressão acima é idêntica a resultante de nossa análise anterior. A tensão sobre o capacitor C_2 é

[11]:
```
cct_ivp.C2.v
```

[11]:

$$\frac{C_1 v_0 e^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}}{C_1 + C_2} \quad \text{for } t \geq 0$$

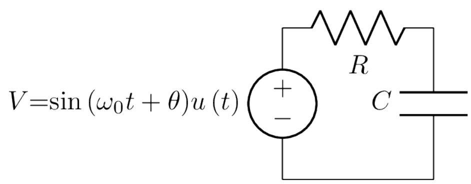
[12]:
```
ax=cct_ivp.C1.v.subs({'C1':0.5,'C2': 0.5, 'R':3, 'v0': 1}).
↪plot((1,10),label='C1')
ax=cct_ivp.C2.v.subs({'C1':0.5,'C2': 0.5, 'R':3, 'v0': 1}).
↪plot((1,10),axes=ax,label='C2')
ax.legend();
```



O capacitor C_1, no gráfico acima possui uma tensão inicial de 1 V, enquanto que C_2 está inicialmente descarregado, e portanto, com tensão inicial nula sobre ele. Quando a chave é fechada a metade da carga de C_1 é instantaneamente transferida para C_2, de forma que em $t = 0$ ambos os capacitores possuem 0.5 V sobre eles, tensão esta que decai exponencialmente a partir deste momento.

Exemplo Neste segundo exemplo iremos usar o programa *Lcapy* para simular um circuito *RC* série conectado em $t = 0$ à uma fonte de tensão senoidal. O programa permite que o chaveamento seja modelado multiplicando a fonte pela função degrau, ao invés de uma chave, como mostrado abaixo.

[13]:
```
import lcapy as lc
s=lc.s
t=lc.t
cct=lc.Circuit("""
V 1 0 {sin(omega_0*t+theta)*u(t)};down
R 1 2 R;right
C 2 0_2 C;down
W 0 0_2;right
; draw_nodes=none,  label_nodes=none""")
cct.draw()
```



[14]:
```
cct.R.i(s).simplify().ZPK()
```

[14]:

$$\frac{s\frac{\sin(\theta)}{R}\left(\frac{\omega_0}{\tan(\theta)} + s\right)}{\left(s + \frac{1}{CR}\right)\left(-\mathrm{j}\omega_0 + s\right)\left(\mathrm{j}\omega_0 + s\right)}$$

[15]:
```
cct.R.i.simplify()
```

[15]:

$$\frac{\left(C^2R^2\omega_0^2 e^{\frac{t}{CR}}\sin(\omega_0 t + \theta) + CR\omega_0 e^{\frac{t}{CR}}\cos(\omega_0 t + \theta) - CR\omega_0\cos(\theta) + \sin(\theta)\right)e^{-\frac{t}{CR}}u(t)}{R\left(C^2R^2\omega_0^2 + 1\right)}$$

A resposta acima terá um período transitório, indicado no termo exponencial, e será estabilizada em regime em uma função senoidal. Por outro lado, se o ângulo de fase θ é escolhido de forma que $\frac{\omega_0}{\tan(\theta)} = \frac{1}{CR}$, o zero da na expressão da corrente $I(s)$ será igual à um dos polos, cancelando-se mutuamente, e a resposta agora será uma senoide pura, sem o termo transitório, como mostrado abaixo (para ω=100 rad/s).

[16]:
```
I=lc.current(s*lc.sin('theta')/'R')/(s**2+100**2)
I
```

[16]:

$$\frac{s\sin(\theta)}{R\left(s^2 + 10000\right)}$$

[17]:
```
I.ILT()
```

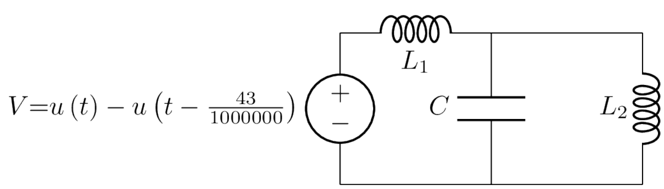
[17]:

$$\frac{\sin(\theta)\cos(100t)}{R} \quad \text{for } t \geq 0$$

Exemplo Neste último exemplo um circuito LC é composto de dois indutores e um capacitor. A fonte é conectada ao circuito através de uma chave que fecha em $t = 0$ e portanto inicialmente não existe corrente circulando. A a chave é aberta em seguida, de foma que a alimentação consiste de um pulso retangular isolado de tensão. O pulso, com duração de $43\mu s$, é descrito por meio de duas funções degrau como mostrado abaixo. A resposta é a tensâo sobre o indutor L_2 de saída.

[18]:
```
import lcapy as lc
s=lc.s
t=lc.t
cct = lc.Circuit("""
V 1 0 {u(t)-u(t-43e-6)}; down
L1 1 2 ; right
C 2 0_2; down
W 2 3; right
L2 3 0_3;down
W 0 0_2;right
W 0_2 0_3;right
;draw_nodes=none,  label_nodes=none""")

cct.draw()
```



[19]:
```
cct.L2.v(s).simplify()
```

[19]:

$$\frac{L_2\left(e^{\frac{43s}{1000000}} - 1\right)e^{-\frac{43s}{1000000}}}{s\left(CL_1L_2s^2 + L_1 + L_2\right)}$$

[20]:
```
cct.L2.v.simplify()
```

[20]:

$$\frac{L_2\left(-\cos\left(\frac{t\sqrt{L_1+L_2}}{\sqrt{C}\sqrt{L_1}\sqrt{L_2}}\right)u(t) + \cos\left(\frac{\sqrt{L_1+L_2}\left(t-\frac{43}{1000000}\right)}{\sqrt{C}\sqrt{L_1}\sqrt{L_2}}\right)u\left(t-\frac{43}{1000000}\right) + u(t) - u\left(t-\frac{43}{1000000}\right)\right)}{L_1+L_2}$$

Do resultado acima podemos inferir que o circuito funciona como um oscilador com frequência dada por

$$\omega_0^2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}$$

Usando valores $L_1 = 40\, mH$, $L_2 = 5\, mH$ e $ C=0.01 F$, a frequência de oscilação é $\omega_0 = 150000\, rad/s$ com período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 41,9\,\mu s.$$

[21]:
```
cct_num=cct.subs({'L1':40e-3,'L2':5e-3,'C':0.01e-6})
```

[22]:
```
cct_num.L2.v.simplify_terms()
```

[22]:

$$\frac{(1 - \cos(150000t))\, u(t)}{9} + \frac{\left(\cos\left(150000t - \frac{129}{20}\right) - 1\right) u\left(t - \frac{43}{1000000}\right)}{9}$$

[23]:
```
cct_num.L2.v.plot((0,150e-6));
```