

# Линейная алгебра

Sokolnikov Alex

2025-2026

## Содержание

|                                      |           |
|--------------------------------------|-----------|
| <b>1. Оценка</b>                     | <b>3</b>  |
| <b>2. Система линейных уравнений</b> | <b>4</b>  |
| 2.1. Как выглядит                    | 4         |
| 2.2. Как решать                      | 5         |
| 2.3. Алгоритм Гаусса                 | 5         |
| <b>3. Матрицы</b>                    | <b>6</b>  |
| 3.1. Дефекты матричных операций      | 8         |
| 3.2. Деление                         | 8         |
| 3.3. Элементарные матрицы            | 10        |
| 3.4. Блочные умножения               | 11        |
| 3.5. Единственность УСВ для ОСЛУ     | 12        |
| 3.6. Полиномиальное исчисление       | 14        |
| 3.7. Спектр                          | 15        |
| <b>4. Перестановки</b>               | <b>18</b> |
| 4.1. Что это вообще такое            | 18        |
| 4.1.1. Способы задания               | 18        |
| 4.1.2. Операция                      | 18        |
| 4.1.3. Свойства                      | 18        |
| 4.1.4. Переименование                | 19        |
| 4.1.5. Циклы                         | 19        |
| 4.2. Знак перестановки               | 19        |
| <b>5. Определители</b>               | <b>22</b> |
| 5.1. Миноры                          | 28        |
| 5.2. Формула Крамера                 | 29        |

|   |           |
|---|-----------|
| 5.3. Характеристический многочлен . . . . .                 | 30        |
| <b>6. Комплексные числа . . . . .</b>                       | <b>33</b> |
| 6.1. Определение . . . . .                                  | 33        |
| 6.2. Алгебраическая замкнутость . . . . .                   | 33        |
| <b>7. Векторные пространства . . . . .</b>                  | <b>36</b> |
| 7.1. Определение . . . . .                                  | 36        |
| 7.2. Подпространство . . . . .                              | 37        |
| 7.3. Линейные комбинации . . . . .                          | 37        |
| 7.4. Базис . . . . .  | 40        |
| 7.5. Координаты . . . . .                                   | 42        |
| 7.6. Ранг матрицы . . . . .                                 | 44        |
| 7.7. Линейные отображения . . . . .                         | 47        |
| 7.7.1. Определение . . . . .                                | 47        |
| 7.7.2. Матрица линейного отображения . . . . .              | 48        |
| 7.7.3. Смена координат . . . . .                            | 49        |
| 7.8. Ядро и образ . . . . .                                 | 49        |
| 7.9. Неравенства на ранги . . . . .                         | 50        |
| 7.9.1. Сумма . . . . .                                      | 50        |
| 7.9.2. Произведение . . . . .                               | 51        |
| 7.10. Суммы и пересечения . . . . .                         | 52        |
| <b>8. Линейные операторы . . . . .</b>                      | <b>55</b> |
| 8.1. Определение . . . . .                                  | 55        |
| 8.2. Смена координат . . . . .                              | 56        |
| 8.3. Матричные характеристики . . . . .                     | 56        |
| 8.4. . . . .  | 57        |
| 8.5. $\Phi$ -инвариантные подпространства . . . . .         | 57        |
| 8.6. Какие-то фокусы с многочленами и операторами . . . . . | 59        |
| <b>9. Функционалы . . . . .</b>                             | <b>65</b> |

---

# 1. Оценка

$$O_{\text{линал}} = 0.7 \cdot O_{\text{накоп}} + 0.3 \cdot O_{\text{экз}}$$

$$O_{\text{накоп}} = 0.36 \cdot O_{\text{коллек}} + 0.25 \cdot O_{\text{кр}} + 0.25 \cdot O_{\text{БДЗ}} + 0.14 \cdot O_{\text{сем}} + 0.1 \cdot O_{\text{листочки}}$$

---

## 2. Система линейных уравнений

### 2.1. Как выглядит

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система линейных уравнений называется однородной, если  $\forall i \ b_i = 0$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} - \text{решение}$$

Решение - какой-то столбец из  $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Пример:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

Будем записывать СЛУ так:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Может иметь:

- 1 решение:

$$x = 1$$

- 0 решений:

$$0 \cdot x = 1$$

- $\infty$  решений:

$$0 \cdot x = 0$$

## 2.2. Как решать

$\Sigma \rightarrow \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \Sigma_k$  — хорошая

Какие преобразования можно делать?

- Умножить строчку на ненулевое число

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \lambda \cdot a_{i2} & \dots & \lambda \cdot a_{in} & \lambda \cdot b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right), \lambda \neq 0$$

- Поменять две строки местами

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$$

- Прибавить строчку к другой

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \dots & a_{in} + a_{jn} & b_i + b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right)$$

Очевидно, что такие преобразования не уменьшают множество решений. Так как можем сделать обратные преобразования, СЛУ равносильны.

## 2.3. Алгоритм Гаусса

- Прямой ход:

Приводим матрицу к ступенчатому виду с помощью преобразований

- Обратный ход:

Сделать все лидеры равными 1

Поднимаемся снизу вверх, зануляя все над лидером

---

### 3. Матрицы

Матрица - это таблица с числами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

В данном случае  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  — множество матриц  $m \times n$  с числами из  $\mathbb{R}$   
 $M_n(\mathbb{R})$  — множество квадратных матриц  $n \times n$  с числами из  $\mathbb{R}$

Операции, которые можно делать с матрицами:

- Сложение / вычитание:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

- Умножение на число

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Транспонирование

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Иными словами, отражаем относительно главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Умножение на матрицу Пусть  $A \in M_{nm}(\mathbb{R}), B \in M_{mk}(\mathbb{R})$ .

Тогда  $AB \in M_{nk}(\mathbb{R})$ , причем  $AB_{ij} = \sum_{r=1}^m A_{ir}B_{rj}$

Некоторые матрицы:

- Нулевая матрица

$A$  – нулевая матрица, если  $\forall i, j \ A_{ij} = 0$

Если известны размеры, то можно просто написать  $A = 0$

- Единичная матрица

Матрица, в которой на диагонали стоят 1, а остальные числа равны 0

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица } n \times n$$

Называется так, потому что  $AE = EA = A$

Тогда с точки зрения матриц, СЛУ можно записать так:

$$A = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

Если СЛУ однородная, то  $Ax = 0$

Полезные свойства операций над матрицами:

- Ассоциативность

$$(AB)C = A(BC)$$

- Дистрибутивность относительно сложения

$$(A + B)C = AC + BC$$

Связь СЛУ и ОСЛУ:

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n : Ax_0 = b$$

Тогда:

$$E_b = \{z \in \mathbb{R}^n \mid Az = b\}, E_0 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\} \Rightarrow E_b = x_0 + E_0$$

Если в  $A$  нулевая строка, то в  $AB$  та же строка будет нулевой. Аналогично, если в  $B$  есть нулевой столбец.

### Замечание 3.1

$$(AB)^T = B^T A^T$$

### 3.1. Дефекты матричных операций

1. Произведение не коммутативно.

Если матрицы не квадратные, то произведение  $BA$  либо не существует, либо имеет отличные от  $AB$  размеры.

В случае квадратных, например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Есть делители нуля.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Диагональные матрицы ведут себя как функции на конечном множестве, поэтому если что-то можно получить с такими функциями, то и с матрицами скорее всего тоже.

Благодаря этому у ОСЛУ могут быть ненулевые решения.

3. Нильпотенты.

$A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  — нильпотентна, если  $\exists N : A^N = 0$

Например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.2. Деление

В силу некоммутативности нам нужно деление слева и деление справа. Но тогда придется доказывать совместимость со всеми остальными операциями. Поэтому вместо деления принято говорить про обратимые матрицы.

#### Определение 3.2

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nm}(\mathbb{R})$$

1. Правая обратная, если  $AB = E_m$
2. Левая обратная, если  $BA = E_n$

3. Обратная, если верны (1) и (2)

### Определение 3.3: След матрицы

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

1.  $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$
2.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
3.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^m (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} \\ \text{tr}(BA) &= \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{ij} A_{ji} \end{aligned}$$

### Лемма 3.4

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R})$$

$\exists L$  — любой левый обратный

$\exists R$  — любой правый обратный

Тогда:

1.  $n = m$
2.  $L = R \Rightarrow$  существует единственный обратный.

Докажем второе:

$$\begin{aligned} LA &= E \\ AR &= E \\ (LA)R &= L(AR) \\ ER &= LE \\ R &= L \end{aligned}$$

Теперь первое:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(E_m) = m \\ \operatorname{tr}(BA) &= \operatorname{tr}(E_n) = n \\ \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(BA) \Rightarrow m = n\end{aligned}$$

### Определение 3.5: Обратная матрица

$$A \in M_n(\mathbb{R}), B - \text{обратный} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = E \\ BA = E \end{cases}$$

Тогда  $B = A^{-1}$ .

Примеры:

1. Матрица с нулевой строчкой или столбцом необратима.
2. Диагональная матрица с ненулевыми элементами обратима:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = E_n$$

### 3.3. Элементарные матрицы

1. Как прибавить строчку  $j$ , умноженную на  $\lambda$ , к строчке  $i$ ?

Нужно умножить слева на матрицу:

$$S_{ij}(\lambda) = \begin{cases} (S_{ij}(\lambda))_{xy} = \lambda, (x, y) = (i, j) \\ (S_{ij}(\lambda))_{xy} = (E_n)_{xy}, \text{ иначе} \end{cases}$$

Если умножить на такую матрицу справа, то к  $j$  столбцу прибавится столбец  $i$ , умноженный на  $\lambda$

2. Как поменять две строчки местами?

Умножить слева на матрицу:

$$U_{ij} = \begin{cases} (U_{ij})_{xy} = 1, (x = y \neq i, j) \vee ((x, y) \in \{(i, j), (j, i)\}) \\ (U_{ij})_{xy} = 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Если умножить справа, то поменяются местами столбцы.

3. Как умножить строчку  $i$  на  $\lambda$  ?

Умножить слева на матрицу:

$$D_{ij}(\lambda) = \begin{cases} (D_{ij})_{xy} = \lambda, x = y = i \\ (D_{ij})_{xy} = (E_n)_{xy}, \text{ иначе} \end{cases}$$

Если умножить справа, то умножится  $i$ -й столбец.

Очевидно, все элементарные матрицы обратимы.

### Замечание 3.6

$$A, B \in M_n(\mathbb{R}), \exists A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow \exists (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

### Теорема 3.7

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $Ax = 0 \Rightarrow !x$
2.  $A^T y = 0 \Rightarrow !y$
3.  $A = U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_k$ ,  $U_i$  — элементарная
4.  $\exists A^{-1}$
5.  $\exists L \in M_n(\mathbb{R}) : LA = E$
6.  $\exists R \in M_n(\mathbb{R}) : AR = E$

Будем доказывать через два цикла:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2$$

$$3 \rightarrow 4, \quad 4 \rightarrow 5, \quad 5 \rightarrow 1 \text{ очевидны.}$$

$$1 \rightarrow 3:$$

Приведем Гауссом к улучшенному ступенчатому виду. Одно решение, значит у нас  $n$  ступенек. Так как матрица квадратная, значит у нас в каждом столбце и каждой строчке есть лидер, то есть улучшенный ступенчатый вид — это  $E_n$ . Все преобразования — умножения на элементарную матрицу. Возьмем обратные матрицы (тоже элементарные), умножим на них обратно. Получим  $A$ .

Второй цикл аналогично.

Тогда как искать обратную матрицу? Нужно решить  $AX = E$ .

## 3.4. Блочные умножения

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix}$$

Примеры:

1.

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} A \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c|c} B_1 & \cdots & B_n \end{array} \right) = \\ = (A) (B_1 \cdots B_n) = \\ = (AB_1 \ AB_2 \ \cdots \ AB_n) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c|c} Y_1 & \cdots & Y_n \end{array} \right) = \\ = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} (Y_1 \ \cdots \ Y_n) = \\ = X_1 Y_1 + \cdots + X_n Y_n \end{aligned}$$

### 3.5. Единственность УСВ для ОСЛУ

#### Теорема 3.8

Для  $Ax = 0$  существует только один улучшенный ступенчатый вид.

Пусть

$$P_k(A) = (\forall x : Ax = 0 \wedge (x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0) \Rightarrow x_k = 0)$$

#### Лемма 3.9

Дана ступенчатая матрица  $A$

$$P_k(A) = true \Leftrightarrow x_k - \text{главная}$$

Доказательство:

•  $\Rightarrow$

Пусть  $x_k$  не является главной. Но тогда мы можем назначить ей абсолютно любое значение и  $P_k(A)$  не будет верно.

•  $\Leftarrow$

$x_k$  главная  $\Rightarrow$  однозначно восстанавливается по  $x_{k+1}, \dots, x_n$ . Нетрудно убедиться, что если  $x_{k+1} = \dots = x_n$ , то  $x_k = 0$ .

**Лемма 3.10**

Пусть  $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$

Приведём их к ступенчатым видам  $S_A, S_B$

Тогда (главные для  $S_A$ )  $\Leftrightarrow$  (главные для  $S_B$ )

Доказательство Очевидно, что у ступенчатого вида такие же решения, как и у изначальной матрицы. Но тогда

$$P_k(S_A) = P_k(A) = P_k(B) = P_k(S_B)$$

Так как верно 3.9, это доказывает лемму.

Из 3.10 следует, что ступенчатый вид матрицы всегда выглядит одинаково.

Осталось показать, что совпадают УСВ.

Единственная проблема может возникнуть в каком-то столбце, где нет лидера.

Сделаем решение  $A$ , где у всех свободных переменных кроме одной значение 0, а у оставшейся 1. Тогда главные примут значений столбца этой переменной с минусом. Подставим в  $B$ . Поскольку системы эквивалентны, а главные переменные совпадают, главные в  $B$  должны совпадать с столбцом той свободной переменной, умноженному на  $-1$ . Но это значит, что столбцы этой переменной в  $A$  и  $B$  равны. Прделаем такое для всех переменных  $\Rightarrow$  УСВ  $A$  и  $B$  совпадают.

**Теорема 3.11**

Пусть  $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$

Следующие утверждения равносильны:

1.  $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$
2.  $A$  можно элементарными операциями превратить в  $B$
3.  $\exists$  обратимая  $C \in M_m(\mathbb{R}) : B = CA$
4.  $УСВ_A = УСВ_B$

Доказательство:

- $2 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3$  очевидны
- $1 \rightarrow 4$  доказано выше
- $3 \rightarrow 2$  следует из 3.7
- $4 \rightarrow 2$

Приведем  $A$  к  $УСВ_A$ ,  $B$  к  $УСВ_B$ . Они равны. Сделаем обратные элементарные преобразования.

### 3.6. Полиномиальное исчисление

Пусть есть

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m, A \in M_n(\mathbb{R})$$

Подставим туда  $A$

$$f(A) = a_0 + a_1A + \dots + a_mA^m$$

Имеется проблема  $a_0$  — число, а все остальные слагаемые — матрицы. На самом деле при  $a_0$  стоит  $x^0$ . Поэтому на самом деле все будет так

$$f = a_0E + a_1A + \dots + a_mA^m$$

#### Лемма 3.12

$$A \in M_n(\mathbb{R}), f, g \in \mathbb{R}[x]$$

Тогда:

1.

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A)$$

2.

$$(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$$

3.

$$f(\lambda E) = f(\lambda)E$$

4.

$$C \in M_n(\mathbb{R}) : \exists C^{-1} \\ f(C^{-1}AC) = C^{-1}f(A)C$$

#### Лемма 3.13

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$\Downarrow$

$$\exists f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n^2 \text{ (} \deg f \leq n \text{)}, f(A) = 0$$

Доказательство:

Рассмотрим

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_{n^2}x^{n^2}$$

Подставим туда  $A$

$$f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_{n^2}A^{n^2} = 0$$

Напишем равенство для каждого элемента. Получится ОСЛУ на  $n^2 + 1$  и  $n^2$  уравнений. А значит существует ненулевое решение  $\Rightarrow$  есть подходящий многочлен.

**Пример 3.14**

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Зануляющий многочлен:

$$f = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$$

Интересный факт:

Числа над диагональю могут быть любыми, но многочлен все еще будет занулять.

**3.7. Спектр****Определение 3.15**

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\text{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda E - \text{необратима}\}$$

**Пример 3.16**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

**Пример 3.17**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Доказательство:

Если после сдвига на  $\lambda E$  на диагонали нет нулевого элемента, то у нее, очевидно,  $n$  лидеров  $\Rightarrow$  она обратима. А если есть, то у нее  $< n$  лидеров  $\Rightarrow$  элементарными преобразованиями можно получить нулевую строку, поэтому матрица необратима.

### Лемма 3.18

$$A \in M_n(\mathbb{R}), g \in \mathbb{R}[x] : g(A) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\text{spec}_{\mathbb{R}} A \subseteq \text{корни } g \text{ в } \mathbb{R}$$

Аналогично  $\text{spec}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \text{корни } g \text{ в } \mathbb{C}$

Доказательство:

Будем доказывать  $\lambda \neq 0, g(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda \notin \text{spec}_{\mathbb{R}} A$ .

Покажем, что  $A - \lambda E$  обратима.

$$x = \lambda \Rightarrow g = q \cdot (x - \lambda) + r$$

$$g = q \cdot (x - \lambda) + g(\lambda)$$

Подставим сюда  $A$

$$0 = g(A) = q(A)(A - \lambda E) + g(\lambda)E$$

$$-g(\lambda)E = q(A)(A - \lambda E)$$

$$E = (A - \lambda E) \frac{q(A)}{-g(\lambda)}$$

### Определение 3.19: Минимальный многочлен

$$A \in M_n(\mathbb{R}), 0 \neq h \in \mathbb{R}[x]$$

$h$  называется минимальным, если

- $h(A) = 0$
- $\deg h \rightarrow \min$
- Старший коэффициент  $h$  равен 1

### Лемма 3.20

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

1. Минимальный многочлен  $h$  единственный.

2.  $\forall g \in \mathbb{R}[x] : g(A) = 0$  верно  $f_{\min} | g$

3.  $\text{спес}_{\mathbb{R}} A = \text{корни } f_{\min} \text{ в } \mathbb{R}$

Доказательство:

1. Пусть есть  $h_1, h_2$ . Тогда  $h_1 - h_2$  тоже зануляющий многочлен, причем степени меньше  $n$  (так как старшие члены равны 1). Получается, что этот многочлен должен быть нулевым, а значит  $h_1 = h_2$ .

2.

$$\begin{aligned} g &= q \cdot f_{\min} + r \\ \deg r &< \deg f_{\min} \\ g(A) &= q(A) \cdot f_{\min}(A) + r(A) \\ 0 &= 0 + r(A) \\ r(A) &= 0 \end{aligned}$$

3. Будем доказывать, что  $\text{спес}_{\mathbb{R}} A \supseteq \text{корни } f_{\min} \text{ в } \mathbb{R}$

Докажем от противного.

$$\begin{aligned} f_{\min}(\lambda) &= 0 \\ f_{\min}(\lambda) &= (x - \lambda)h(x) \\ 0 &= f_{\min}(A) = (A - \lambda E)h(A) \end{aligned}$$

Если  $A - \lambda E$  обратима, то  $h(A)$  тоже является зануляющим, причем степени на 1 меньше — противоречие. Значит  $A - \lambda E$  необратима  $\Rightarrow \lambda \in \text{спес}_{\mathbb{R}} A$ .

### Пример 3.21

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \end{aligned}$$

В таком случае  $h(x) = x^2 + 1$  является зануляющим.

У него нет вещественных корней, а значит  $\text{спес}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$ .

## 4. Перестановки

### 4.1. Что это вообще такое

#### Определение 4.1

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$$
$$S_n = \{\sigma - \text{перестановка на } \{1, \dots, n\}\}$$

#### 4.1.1. Способы задания

- Явно задать отображения
- Нарисовать табличкой
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
- Нарисовать стрелки между точками на плоскости

#### 4.1.2. Операция

Перестановки можно перемножать.

#### 4.1.3. Свойства

1. Ассоциативность

$$\sigma, \tau, p \in S_n$$

$$\sigma \circ (\tau \circ p) = (\sigma \circ \tau) \circ p$$

2.  $id : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$

$$k \mapsto k$$

$$\sigma \circ id = id \circ \sigma = \sigma$$

3.  $\sigma \circ \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \circ \sigma$

## 4.1.4. Переименование

Переименуем  $i \mapsto \tau_i$   
 $\sigma_{\text{нов}} = \tau \sigma \tau^{-1}$

## 4.1.5. Циклы

**Определение 4.2: Цикл**

$$\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_k\} \sqcup \{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \quad |i| \geq 2$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{k-1} & i_k & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-k} \\ i_2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_k & i_1 & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-k} \end{pmatrix}$$

Краткая запись:  $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1)$

**Определение 4.3: Транспозиция**

$\sigma = (i, j)$  — транспозиция

**Определение 4.4: Независимые циклы**

Циклы  $\{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_l\}$  являются независимыми, если  $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$

**Замечание 4.5**

$p_1, p_2$  — независимые циклы  $\Rightarrow p_1 p_2 = p_2 p_1$

По сути композиция двух независимых циклов просто делает перестановку, в которой у нас два “цикла”, если рисовать стрелочками.

**Лемма 4.6**

1.  $\sigma = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$  — независимые циклы, причем разложение единственно с точностью до порядка
2.  $p$  — цикл  $p = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_{k-1}$ , где  $\tau_i$  — транспозиция.

## 4.2. Знак перестановки

Хотим чтобы было так:

$$\begin{cases} \text{Ч} \cdot \text{Ч} = \text{Ч} \\ \text{Ч} \cdot \text{Н} = \text{Н} \\ \text{Н} \cdot \text{Ч} = \text{Н} \\ \text{Н} \cdot \text{Н} = \text{Ч} \end{cases}$$

$$\phi : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) \\ \phi \neq 1 \end{cases}$$

**Теорема 4.7**

$$\exists! \phi : S_n \rightarrow \{\pm 1\} :$$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) \\ \phi \neq 1 \end{cases}$$

Доказательство:

Сначала покажем существование:

$d_{ij}(\sigma)$  — правда ли, что  $(i, j)$  — инверсия.

Пусть  $d(\sigma)$  — количество инверсий  $(i < j : \sigma(i) > \sigma(j))$   $\sigma$ .

Возьмем  $\phi = (-1)^{d(\sigma)}$

Нужно показать, что  $d(\sigma\tau) = d(\sigma) + d(\tau) \pmod 2$ .

Нетрудно убедиться, что  $d_{ij}(\tau) + d_{\tau(i)\tau(j)} = d_{ij}(\sigma\tau)$

**Теорема 4.8: Единственность знака**

$$\phi : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) & \text{Тогда} \\ \phi \neq 1 \end{cases}$$

1.  $\phi(id) = 1$
2.  $\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma)^{-1} = \phi(\sigma)$
3.  $\phi(\tau\sigma\tau^{-1}) = \phi(\sigma)$
4.  $\phi((i, j)) = -1, \forall i, j$
5.  $\phi!$

Доказательство:

1.  
 $id \circ id = id$   
 $\phi(id \circ id) = \phi(id)$   
 $\phi(id)^2 = \phi(id)$   
 $\phi(id) = 1$
2.  
 $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$   
 $\phi(\sigma)\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma\sigma^{-1}) = \phi(id) = 1$   
 $\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma)^{-1} = \phi(\sigma)$
3.  $\phi(\tau\sigma\tau^{-1}) = \phi(\tau)\phi(\sigma)\phi(\tau^{-1}) = \phi(\tau)\phi(\sigma)\phi(\tau)^{-1} = \phi(\sigma)$
4.  $(i, j) = \tau(1, 2)\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2))$

Значит все транспозиции имеют один и тот же знак.

Перестановка раскладывается в произведение циклов, а цикл в произведение транспозиций. Значит перестановка — это произведение транспозиций. Если знак всех транспозиций равен 1, то знак всех перестановок равен 1 — противоречие. Значит знак всех перестановок равен  $-1$ .

5. Пусть есть  $\phi, \phi'$ .

$$\begin{aligned}\phi(\sigma) &= \phi(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k) = \phi(\tau_1)\phi(\tau_2) \dots \phi(\tau_k) = \\ &= (-1)^k = \\ &= \phi'(\tau_1)\phi'(\tau_2) \dots \phi'(\tau_k) = \phi'(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \dots \cdot \tau_k) = \phi'(\sigma)\end{aligned}$$

## 5. Определители

Идея: считать ориентированный объем (длину / площадь)

Существует несколько способов задать определитель. Мы приведем 3 и докажем их равносильность. Будем доказывать равносильность так:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1$

### Определение 5.1: Определитель

Опишем 3 способа задания:

1. Явная формула

$$A \in M_n(\mathbb{R}), \det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

2. Полилинейная кососимметрическая функция (можно и по строкам)

$$\phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = (A_1 | \dots | A_n)$$

$$\phi(A) = \phi(A_1, \dots, A_n)$$

- Полилинейность

$$\begin{aligned} \phi(A_1, \dots, A_i + A'_i, \dots, A_n) &= \\ &= \phi(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \phi(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) \\ \phi(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) &= \lambda \phi(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) \end{aligned}$$

- Кососимметричность

$$\phi(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\phi(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

- $\phi(E) = 1$

3. Мультипликативная функция

$$\Psi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

- $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$

- $\Psi \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d$

### Пример 5.2

Из первого определения:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

### Пример 5.3

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

### Лемма 5.4

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A^T = \det A$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (A^T)_{1\sigma(1)} \dots (A^T)_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) a_{1\rho(1)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A \end{aligned}$$

### Лемма 5.5

Определитель — полилинейный кососимметрический по строкам (столбцам)

Доказательство:

Полилинейность:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots \cdot (a_{i\sigma(i)} + a'_{i\sigma(i)}) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \\ &= \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots \cdot a'_{i\sigma(i)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

Кососимметричность:

Вместо суммы по  $\sigma$ , будет сумма по  $\sigma(i, j)$ . Но  $\operatorname{sgn}(\sigma(i, j)) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$   
 $\det E = 1$  (очевидно)

### Лемма 5.6

$\phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$\phi$  — полилинейная + кососимметрическая по строкам

Тогда

1. Прибавление строки к другой не меняет  $\phi$
2. Если поменять две строки местами,  $\phi$  меняет знак
3. Можно выносить коэффициент строки за  $\phi$

Последние два следуют из полилинейности и кососимметричности. Покажем выполнение первого:

$$\phi(A') = \phi \left( \begin{array}{c} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_j + \lambda A_i \\ \hline \end{array} \right) = \phi \left( \begin{array}{c} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_i \\ \hline \end{array} \right) + \lambda \phi \left( \begin{array}{c} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_i \\ \hline \end{array} \right) = \phi(A)$$

По кососимметричности у матрицы с двумя равными строками  $\phi = 0$ , так как при их смене должен поменяться знак  $\phi$ , но сама матрица не меняется, а значит и  $\phi$  тоже.

### Замечание 5.7

- $\det S_{ij} = 1$
- $\det U_{ij} = -1$
- $\det D_i(\lambda) = \lambda$

### Лемма 5.8

$\phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда:

1.  $\phi(UX) = \det(U)\phi(X)$   
 $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \forall U$  — элементарная
2.  $\phi(AX) = \det(A)\phi(X)$   
 $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \forall A \in M_n(\mathbb{R})$  — элементарная

---

Доказательство:

Первое очевидно.

Второе:

Пусть  $A$  — невырожденная.

Тогда  $A = U_1 \dots U_k$ .

$\det$  тоже кососимметрическая и полилинейная функция, поэтому:

$$\det(A) = \det(AE) = \det(U_1) \dots \det(U_k) \det(E) = \det(U_1) \dots \det(U_k)$$

Но тогда:

$$\phi(AX) = \det(U_1) \dots \det(U_k) \phi(X) = \det(A) \phi(X)$$

$A$  — вырожденная  $\Rightarrow AX$  — вырожденная. Просто приведем к улучшенному ступенчатому виду, там будет нулевая строка  $\Rightarrow \det = \phi = 0$ .

Следствия:

1.  $B = E \quad \phi(A) = \det(A) \phi(E) \quad \phi(A) = C \det(A)$
2.  $\phi(E) = 1 \Rightarrow \phi(A) = \det(a)$
3.  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  — полилинейная кососимметрическая функция

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d$$

Значит доказали  $2 \rightarrow 3$

Покажем, что определитель блочной верхнетреугольной матрицы — произведение определителей диагональных блоков.

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
$$\det D = \det A \cdot \det C$$

$$\begin{aligned}\phi_1 : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \det \begin{pmatrix} X & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\phi_1$  — полилинейная кососимметрическая функция по столбцам, так как можно спокойно менять местами и складывать любые два столбца  $X$ . Также несложно доказать, что можно выносить константу из столбца.

$$\begin{aligned}\phi_1(X) &= \det(X) \phi_1(E) \\ \phi_1(A) &= \det(A) \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Аналогично рассмотрим

$$\begin{aligned}\phi_2 : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ \phi_2(C) &= \det C \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det C\end{aligned}$$

$$\det D = \phi_1(A) = \det(A) \phi_2(C) = \det(A) \det(C)$$

Давайте теперь доказывать  $3 \rightarrow 1$   $\Psi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$1. \Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$$

$$2. \Psi \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d, \forall d \in \mathbb{R}, d \neq 0$$

#### Замечание 5.9

$$1. \Psi(E) = 1$$

$$2. A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ — обратима} \Rightarrow \Psi(A^{-1}) = \Psi(A)^{-1}$$

Давайте докажем, что

1.  $\Psi(S_{ij}(\lambda)) = 1$

2.  $\Psi(D_i(\lambda)) = \lambda$

3.  $\Psi(U_{ij}) = -1$

1. Давайте попытаемся представить  $S_{ij}(\lambda)$  в виде  $S_{ij} = ABA^{-1}B$ .

Тогда  $\Psi(S_{ij}(\lambda)) = \Psi(A)\Psi(B)\Psi(A^{-1})\Psi(B^{-1}) = 1$

Покажем на примере  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} S_{12}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

В общем случае  $S_{ij}(\lambda) = D_i(\lambda) \cdot S_{12}(\lambda) \cdot D_i^{-1}(\lambda) \cdot S_{ij}^{-1}(\lambda)$

2.  $\Psi(D_n(\lambda)) = \lambda$ . Постараемся найти разложение  $D_i(\lambda) = A \cdot D_n(\lambda) \cdot A^{-1}$ .

Так совпало, что  $D_i(\lambda) = U_{in}D_n(\lambda)U_{in}^{-1}$ .

Тогда  $\Psi(D_i(\lambda)) = \Psi(U_{in})\Psi(D_n(\lambda))\Psi(U_{in}^{-1}) = \Psi(D_n(\lambda)) = \lambda$

3. Опять разберем на примере  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ U_{12} &= D_1(-1) \cdot S_{21}(1) \cdot S_{12}(-1) \cdot S_{21}(1) \\ U_{ij} &= D_i(-1) \cdot S_{ji}(1) \cdot S_{ij}(-1) \cdot S_{ji}(1) \end{aligned}$$

### Теорема 5.10

1.  $\Psi(E) = 1$

2.  $A \in M_n(\mathbb{R})$  — обратима  $\Rightarrow \Psi(A^{-1}) = \Psi(A)^{-1}$

Тогда  $\Psi(A) = \det(A)$

- $A$  — невырожденная

Поскольку  $\Psi$  уважает умножение, а так же совпадает с определителем на элементарных функциях:

$$\Psi(A) = \Psi(U_1) \dots \Psi(U_k) = \det(U_1) \dots \det(U_k) = \det A$$

- $A$  — вырожденная

Надо показать, что  $\Psi(A) = 0$ .

Пусть  $A'$  — ступенчатый вид  $A$

$$\Psi(A) = \Psi(U_1) \dots \Psi(U_2) \Psi(A')$$

Покажем, что  $\Psi(A') = 0$

В ней мы можем умножить последнюю строчку на 2, и матрица не поменяется, поэтому

$$\begin{aligned} A' &= D_n(2) \cdot A' \Rightarrow \Psi(A') = \Psi(D_n(2))\Psi(A') \\ \Psi(A') &= 2\Psi(A') \\ \Psi(A') &= 0 \end{aligned}$$

## 5.1. Миноры

$M_{ij}$  — определитель матрицы, если в ней выкинуть  $i$ -й столбец и  $j$ -ю строку  
 $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  — алгебраическое дополнение.

### Лемма 5.11

$$\begin{aligned} A &\in M_n(\mathbb{R}) \\ \det A &= a_{i1}\mathcal{A}_{i1} + a_{i2}\mathcal{A}_{i2} + \dots + a_{in}\mathcal{A}_{in} \\ \det A &= a_{1i}\mathcal{A}_{1i} + a_{2i}\mathcal{A}_{2i} + \dots + a_{ni}\mathcal{A}_{ni} \end{aligned}$$

Называется разложению по строке (столбцу)

Для доказательства через полилинейность сделаем кучу матриц, где в  $i$ -й строке есть только  $a_{ij}$ . Потом свапами загоним  $a_{ij}$  на позицию 1, 1. Получится блочная нижнетреугольная матрица. Теперь определитель этой матрицы —  $\det(a_{ij}) \det M_{ij}$ . Но свапы дали знак  $(-1)^{(i-1)+(j-1)} = (-1)^{i+j}$ . Значит суммируем  $(-1)^{i+j} \cdot \det(a_{ij}) \det M_{ij} = a_{ij}\mathcal{A}_{ij}$ .

Пусть есть  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

Заменим элементы  $A : a_{ij} \rightarrow \mathcal{A}_{ij}$ . Назовем полученную матрицу  $A^*$ .

$\hat{A} = (A^*)^T$  — присоединенная матрица ( $\hat{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji}$ )

### Лемма 5.12

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\text{Тогда } A\hat{A} = \hat{A}A = \det(A) \cdot E$$

**Следствие 5.13**

Если  $A$  невырожденная, то  $A^{-1} = \frac{\hat{A}}{\det(A)}$

Покажем, что  $A\hat{A} = \det(A)E$

$$(A\hat{A})_{ii} = \sum_{j=1}^n A_{ij}\hat{A}_{ji} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij} = \det(A)$$

$$i \neq j : (A\hat{A})_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}\hat{A}_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}$$

Давайте заметим, что это определитель матрицы (разложили по  $j$ -й строке):

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

Но он равен 0, так как в  $A'$  есть две равные строки.

**5.2. Формула Крамера**

$$A \in M_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{\hat{A}}{\det A}b$$

**Лемма 5.14: Формула Крамера**

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \quad x, b \in \mathbb{R}^n \quad Ax = b \Rightarrow \Delta \cdot x_i = \Delta_i$$

Где  $\Delta = \det A$ , а  $\Delta_i$  — определитель  $A$ , если в ней поменять  $i$ -й столбец на  $b$

Доказательство:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n = b$$

Тогда

$$\Delta_i = \det \left( \begin{array}{c|c} & \sum_{j=1}^n x_j A_j \end{array} \right) = \sum_{j=1}^n x_j \det \left( \begin{array}{c|c} & A_j \end{array} \right) =$$

При  $i \neq j$   $A_j$  так же будет стоять в другом месте, поэтому определитель равен 0, значит все кроме одного слагаемых равно 0. Итого:

$$\Delta_i = x_i \det \left( \begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & A_i & \\ \hline & & \end{array} \right) = x_i \det A = x_i \Delta$$

### 5.3. Характеристический многочлен

#### Определение 5.15: Характеристический многочлен

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\det(\lambda E - A) = \mathcal{X}_A$$

#### Замечание 5.16

$$\mathcal{X}_A = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

Fun fact:  $a_0 = \det(0 \cdot E - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$

Степень  $n - 1$  можно достать только из  $(\lambda - a_{11}) \dots (\lambda - a_{nn})$

Поэтому  $a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$

#### Замечание 5.17

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad A - \lambda E - \text{необратима} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda - \text{корень } \mathcal{X}_A \text{ в } \mathbb{R}$$

#### Лемма 5.18

$R_{i_1, \dots, i_k}$  — матрица  $A$ , если из нее вычеркнуть столбцы и строки  $i_1, \dots, i_k$   
Тогда

$$a_k = (-1)^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det R_{i_1, \dots, i_k}$$

$$a_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det(-R_{i_1, \dots, i_k})$$

Доказываем:

Надо раскрыть скобки. Тогда получим матрицу со столбцами либо  $\lambda E_i$ , либо  $-A_i$ . Разложим по очереди по столбцам, где находятся  $\lambda E_i$ . Получим  $\lambda^k \det(-R_{i_1, \dots, i_k})$ . Остается сложить такое по всем слагаемым.

### Теорема 5.19

$\mathcal{X}_A$  — зануляющий для  $A$

Для это выйдем из  $\mathbb{R}[\lambda]$  в  $M_n(\mathbb{R})[\lambda]$ . Произведение/сумму там определим как и в обычном умножении.

Fun fuct:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[t] &\subseteq M_n(\mathbb{R})[t] \\ \sum_k a_k t^k &\mapsto \sum_k a_k E t^k \end{aligned}$$

Определим левую и правую подстановку:

$$D \in M_n(\mathbb{R}) f(D) = \sum_{k=0}^n A_k D^k (D) f = \sum_{k=0}^n D^k A_n$$

Свойства:

$$f, g \in M_n(\mathbb{R})[t] D \in M_n(\mathbb{R})$$

1.  $(f + g)(D) = f(D) + g(D)$
2. Чаще всего  $(f \cdot g)(D) \neq f(D) \cdot g(D)$   
 $BD \neq DB, f = t, g = B$   
 $(f \cdot g)(B) = B \cdot D \neq D \cdot B = f(D) \cdot g(D)$
3.  $D$  коммутирует с коэффициентами  $g \Rightarrow (f \cdot g)(D) = f(D) \cdot g(D)$

### Лемма 5.20

$$\mathcal{X}_A(A) = 0 \text{ в } M_n(\mathbb{R})$$

План:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A &\in M_n(\mathbb{R})[t] \\ \mathcal{X}_A &= f(t) \cdot g(t) \end{aligned}$$

1.  $A$  коммутирует с коэффициентами  $g$
2.  $g(A) = 0$

$\widehat{tE - A} = R(t)$ . Нетрудно понять, что  $R(t) \in M_n(\mathbb{R}[t])$ . Тогда

$$R(t) = R_k t^k + \dots + R_0$$

$$(tE - A)(\widehat{tE - A}) = \det(tE - A) \cdot E$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{X}_A(t) \cdot E = R(t)(tE - A)$$

Нетрудно видеть, что такое разбиение на множители подходит.

## 6. Комплексные числа

### 6.1. Определение

[TODO] 05.11 Lektion

### 6.2. Алгебраическая замкнутость

#### Теорема 6.1

$\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто.

$$(\forall f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0)$$

Доказательство:

Шаг 1:

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \rightarrow |f(z)|$$

Хотим  $\exists z_0 \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} \varphi(z_0) \leq \varphi(z)$ .

#### Лемма 6.2

$$f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$$

$$\forall C > 0 \exists R > 0 : (|z| > R \Rightarrow |f(z)| > C)$$

Зафиксируем  $C > 0$  и  $f$ .

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_nx^n \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} \right) = a_nx^n(1 + \omega(x))$$

$$|f(z)| = |a_n||z^n||1 + \omega(z)| \geq |a_n|R^n(1 - |\omega(z)|)$$

$$|\omega(z)| = \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n} \right| \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{|z|} + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \cdot \frac{1}{|z|^n}$$

Будем считать, что  $|z| > 1$ . Тогда

$$|\omega(z)| \leq \left( \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right) \cdot \frac{1}{|z|} \leq \left( \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right) \cdot \frac{1}{R}$$

Последнее можно оценить как  $\frac{1}{2}$  при достаточно большом  $R$ .

Вернемся к оценке  $|f(z)|$ :

$$|f(z)| \geq |a_n|R^n(1 - |\omega(z)|) \geq |a_n|\frac{R^n}{2}$$

Получили несколько ограничений снизу на  $R$ , выберем максимальное.

Вернемся к шагу 1.

Покажем, что если мы нашли минимум внутри диска для  $C = |f(0)|$ , то он будет минимумом на всей плоскости.

И правда, пусть минимум в  $z_0$ . Тогда  $f(z_0) \leq f(0) = C \leq f(z)$  для любого числа  $z$  вне диска.

Остается найти минимум внутри диска (обозначим диск  $D(R)$ ).

Заметим, что  $|f(z)| \geq 0$ , поэтому у  $|f(z)|$  есть инфимум внутри диска.  $a = \inf_{z \in D(R)} |f(z)|$  Он является предельной точкой, поэтому  $\exists \{z_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = a$ .

Если последовательность комплексных чисел ограничена диском, то у нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность:  $z_n = a_n + b_n \cdot i$  — давайте проредим так, чтобы  $a_n$  сходились, а потом полученную последовательность проредим еще раз, чтобы теперь и  $b_n$  сходились. Мы можем так сделать, потому что  $a_n, b_n \in [-R, R]$ .

Давайте проредим нашу  $\{z_n\}$  так, чтобы она сходилась к какому-то  $z_0$ .

Получим  $\{z'_n\}$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(z'_n)| = |f(\lim_{n \rightarrow \infty} z'_n)| = |f(z_0)|$$

Шаг 2:

Есть  $f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$  Уже знаем, что  $\exists z_0 \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} |f(z_0)| \leq |f(z)|$ .

Если  $|f(z_0)| = 0$ , то мы нашли корень — это  $z_0$ .

Иначе  $|f(z_0)| > 0$ . Покажем, что такое невозможно.

Сделаем замену  $f(z) \rightarrow f(z + z_0)$ . Теперь минимальный модуль достигается в точке 0, поэтому можно считать, что  $z_0 = 0$ .

$$f(z_0) = f(0) = a_0 \neq 0.$$

Поделим многочлен на  $a_0 : f \rightarrow \frac{f}{a_0}$ .

Тогда  $f = 1 + a_k z^k + \dots + a_n z^n$ , где  $a_k$  — первая ненулевой коэффициент после

$$1. |f(z)| \geq |f(z_0)| = |f(0)| = 1.$$

Сделаем замену  $z \rightarrow \alpha z$ , где  $\alpha$  — какое-то комплексное число.

$$\text{Теперь } f = 1 + a_k \alpha^k z^k + \dots + a_n \alpha^n z^n.$$

$$\text{Хотим, чтобы } a_k \alpha^k = -1.$$

Но мы точно можем такое сделать, потому что  $\alpha^k = -\frac{1}{a_k}$ , очевидно, решается (корень можно найти через тригонометрическую форму).

$$\text{Теперь } f(z) = 1 - z^k + a_{k+1} z^{k+1} + a_n z^n \quad (\{a_n\} \text{ — это уже новые коэффициенты}).$$

Заметим, что последняя замена не сдвигает 0 и является биективной, поэтому все еще  $|f(z)| \geq |f(0)| = 1$ .

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - z^k + z^{k+1}(a_{k+1} + \dots + a_n z^{n-k-1}) = 1 - z^k + z^{k+1} \omega(z) \\ f(z) &= 1 - z^k (1 - 2\omega(z)) \end{aligned}$$

Если бы не последнее слагаемое, то мы бы смогли получить  $|f(z)| < 1$  с помощью любого  $z \in \mathbb{R} : 0 < |z| < 1$ .

Покажем, что мы можем сделать последнюю скобку  $< \varepsilon$  с помощью таких  $z$ .

$$|z\omega(z)| = |z(a_{k+1} + \dots + a_n z^{n-k+1})| \leq |z|(|a_{k+1}| + \dots + |a_n| z^{n-k+1}) \leq |z|(|a_{k+1}| + \dots + |a_n|)$$

Последнее может быть сколь угодно малым при  $0 < |z| < 1$ .

Но тогда  $f(z) = 1 - z^k(1 - z\omega(z))$  может быть меньше 1 — противоречие.

# 7. Векторные пространства

## 7.1. Определение

$F$  — поле.

- Структура:

1.  $V$  — множество
2.  $+: V \times V \rightarrow V$
3.  $\cdot: F \times V \rightarrow V$

- Аксиомы:

4.  $(v + u) + w = v + (u + w)$
5.  $\exists! 0 \in V : v + 0 = 0 + v = v$
6.  $\forall v \in V \exists! -v : v + (-v) = (-v) + v = 0$
7.  $v + u = u + v$
8.  $\lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u$
9.  $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
10.  $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
11.  $1 \cdot v = v$

### Пример 7.1

- $\mathbb{R}^n$  (на самом деле  $F^n$ )
- $M_{mn}(F)$
- $F[x]$
- $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$

### Замечание 7.2

1.  $0 \in F, v \in V \Rightarrow 0 \cdot v = 0 \in V$
2.  $\alpha \in F, 0 \in V \Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0 \in V$
3.  $-1 \in F, v \in V \Rightarrow (-1) \cdot v = -v$

## 7.2. Подпространство

$V$  — векторное пространство над  $F$

Если выполнено:

- $U \subseteq V$
- $\forall u_1, u_2 \in U \quad u_1 + u_2 \in U$
- $\begin{cases} \lambda \in F \\ u \in U \end{cases} \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$

### Пример 7.3

1.  $V = F^n$  и  $A \in M_m n(F)$   
 $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$
2.  $U = 0$   
 $U = V$   
 (тривиальные подпространства)
3.  $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$   
 $U = R[x]$

## 7.3. Линейные комбинации

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in V$  — линейная комбинация.

Если  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k$ , комбинация называется тривиальной.

### Определение 7.4

$v_1, v_2, \dots, v_k \in V$

1. Если  $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq 0 : \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ , то вектора называют линейно зависимыми.
2. Вектора называют линейно независимыми (ЛНЗ), если  $(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

**Определение 7.5**

$$E \subseteq V$$

1.  $E$  — линейно зависимо, если существует конечный набор линейно зависимых векторов из  $E$ .
2.  $E$  — ЛНЗ, если любой конечный набор векторов из  $E$  — ЛНЗ.

**Пример 7.6**

$$V = \mathbb{R}[x]$$

$$E = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \text{ — ЛНЗ}$$

**Определение 7.7**

- $v_1, \dots, v_k \in V$  порождают  $V$ , если  $\forall v \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$
- $E \subseteq V$  — порождающее, если  $\forall v \in V \exists v_1, \dots, v_k \in E : \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k : v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

**Определение 7.8**

- $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$   
Линейная оболочка  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$
- $E \subseteq V$   
Линейная оболочка  $\langle E \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \forall v_1, \dots, v_k \in E, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in F \}$

**Замечание 7.9**

Линейная оболочка является векторным подпространством

**Теорема 7.10**

$V$  — векторное пространство над  $F$

$$E \subseteq V$$

Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1.  $E$  — максимальное ЛНЗ (нельзя добавить еще вектор с сохранением ЛНЗ).
2.  $E$  — минимальное порождающее (нельзя убрать вектора).
3.  $E$  — ЛНЗ и порождающее.

**Определение 7.11: Базис**

Если  $E$  удовлетворяет свойствам выше, его называют базисом  $V$ .

- (1)  $\Rightarrow$  (3)

Рассмотрим  $v \in V$

1.  $v \in E \Rightarrow$  можем получить  $v$  линейной комбинацией из  $E$
2.  $v \notin E \Rightarrow E \cup \{v\}$  — линейно зависимо. Тогда существует конечная линейная комбинация векторов из  $E$ , равная 0, где участвует  $v$ :

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha v = 0$$

Если  $\alpha = 0$ , то  $E$  было линейно зависимым — противоречие.

$$\text{Значит } v = \frac{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k}{-\alpha}.$$

Значит  $E$  — порождающее, что и требовалось доказать.

- (3)  $\Rightarrow$  (1)

$V$  — порождающее  $\Rightarrow$  существует конечная линейная комбинация, равная  $v \in V$ . Поэтому  $E \cup \{v\}$  — линейно зависимо.

- (2)  $\Rightarrow$  (3)

Пусть  $E$  — линейно зависимо. Тогда  $\exists v_1, \dots, v_k \in E, (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq 0$ .

Не умаляя общности,  $\alpha_1 \neq 0$ . Тогда  $v_1 = \frac{\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k}{-\alpha_1}$

Давайте заменим  $v_1$  во всех комбинациях на линейную комбинацию выше. Тогда  $E \setminus \{v_1\}$  — тоже порождающее — противоречие.

Значит  $E$  — ЛНЗ, что и требовалось доказать.

- (3)  $\Rightarrow$  (2)

Пусть  $E$  — не минимальное порождающее.

Значит  $\exists v \in V : E \setminus \{v\}$  — тоже порождающее.

Тогда  $v$  можно представить линейной комбинацией из  $E \setminus \{v\}$ .

Но тогда  $E = (E \setminus \{v\}) \cup \{v\}$  — линейно зависимо — противоречие.

**Замечание 7.12**

Как быстро записывать линейные комбинации:

$$v = (v_1, \dots, v_k) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = v \cdot \alpha$$

**7.4. Базис**

$V$  — векторное пространство.

Вопросы:

1. Существует ли базис?
2. Существует ли конечный базис?
3.  $e$  и  $f$  — базисы.

Правда ли, что  $|e| = |f|$ ?

Ответы:

1. Если вы верите в аксиому выбора, то можно показать существование базиса в любом векторном пространстве. Если же нет, то в некоторых пространствах нельзя ни доказать, ни опровергнуть существование базиса:

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

2. Если  $V$  имеет конечный базис, то и  $U \subseteq V$  тоже имеет конечный базис.
3. Это правда, но докажем только для конечных базисов.

Доказательство последнего:

1. Пусть  $v_1, \dots, v_k$  — порождающее  $V$ . Тогда  $u_1, \dots, u_{k+1} \in V$  — линейно зависимые.
2. Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис.

Тогда  $E \subseteq V$  базис  $\Rightarrow |E| < \infty, |E| = n$

$$u_i = (v_1, \dots, v_k) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1, \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$(u_1, \dots, u_{k+1}) = (v_1, \dots, v_k) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\ k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{k\ k+1} \end{pmatrix}$$

Назовем матрицу  $A$ . Давайте найдем ненулевое решение  $Ax = 0$  (такое есть, потому  $A$  — широкая).

Умножим последнее равенство на  $x$  справа. Тогда справа получится 0, а слева  $ux$ .

Но это значит, что  $u$  — линейно зависимое.

Теперь пусть у нас есть базисы  $e$  и  $f$ , причем  $e$  конечный. По предыдущему утверждению  $|f| \leq |e|$ , то есть  $f$  тоже конечный. Но тогда аналогично  $|e| \leq |f|$ . Значит  $|e| = |f|$ .

### Определение 7.13

$V$  — векторное пространство над  $F$ .  
 $\dim V = |E|$ , где  $E$  — базис.

### Лемма 7.14

$V$  — векторное пространство над  $F$ , причем  $\dim V < \infty$ .  
 $U \subseteq V$  — подпространство.  
Тогда

1.  $\dim U < \dim V$
2.  $U = V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$

Рассмотрим  $E$  — базис  $U$ .  $E$  — ЛНЗ в  $V \Rightarrow |E| \leq \dim V$ . Но  $\dim U = |E|$ .

Докажем вторую часть утверждения.

Слева направо очевидно.

Пусть  $\dim U = \dim V = n$ . Теперь рассмотрим  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $U$ . Тогда  $U = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ . Но с другой стороны  $E$  — максимальное ЛНЗ в  $V$ , поэтому  $E$  является и базисом  $V$ . Но тогда  $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = U$ .

## 7.5. Координаты

$V$  — векторное пространство над  $F$ .

$e_1, \dots, e_n$  — базис (фиксированный)

Пусть  $v \in V$

$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ , тогда  $x_1, \dots, x_n$  определяются однозначно.

Иначе  $y_1 e_1 + \dots + y_n e_n = v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow (x_1 - y_1) e_1 + \dots + (x_n - y_n) e_n = 0$  откуда по линейной независимости базиса получаем, что  $x_i = y_i$ .

Тогда  $x_1, \dots, x_n$  — координаты  $v$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$ .

Теперь можно заменить  $V$  на  $F^n$

Пусть есть базисы  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_n$

$(e_1, \dots, e_n)x = v = (f_1, \dots, f_n)y$ ,  $x, y \in F^n$ .

Для того, чтобы понять, как меняются координаты, нужно понять как связаны два базиса. В этом поможет матрица перехода:

$$f_1 = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad f_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$

Теперь объединим это все в одну матрицу:

$$(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n) C$$

Покажем, что  $C$  — невырожденная.

Аналогично можем получить  $(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_n) D$

Значит  $(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) CD \Rightarrow (e_1, \dots, e_n) (E - CD) = 0$

В силу линейной независимости  $e_1, \dots, e_n$ , каждый столбец  $E - CD$  является нулевым. Значит  $C$  имеет обратную справа, а значит является обратимой.

Отсюда можно получить, что при умножении базиса на обратимую матрицу получается другой базис.

Пусть  $(e_1, \dots, e_n) C = (f_1, \dots, f_n)$

Покажем, что  $f_1, \dots, f_n$  — ЛНЗ.

Пусть  $(f_1, \dots, f_n) x = 0 \Rightarrow (e_1, \dots, e_n) Cx = 0$

По аналогичным рассуждениям (как с  $E - CD$ ),  $Cx = 0$ . Но  $C$  — обратимая, значит  $x = 0$ .

Теперь наконец-то научимся менять координаты:

$$(e_1, \dots, e_n) C = (f_1, \dots, f_n)$$

$$(e_1, \dots, e_n) x = v = (f_1, \dots, f_n) y = (e_1, \dots, e_n) Cy$$

Поскольку координаты определяются однозначно,  $x = Cy$ .

### Определение 7.15

Фундаментальная система решений — максимальный набор ЛНЗ решений системы  $Ay = 0$

Иначе говоря, базис  $u = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$

Как искать ФСР?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 &= -4 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 &= 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_4 &= 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что такие решения линейно-независимы (потому что для каждой свободной переменной только одно решение имеет ненулевой коэффициент).

Почему оно порождающее?

Очевидно, что в силу построения такого решения мы можем получить решение с любым набором свободных коэффициентов. А если у решений совпадают все свободные, то и все главные тоже равны.

## 7.6. Ранг матрицы

### Определение 7.16: Столбцовый ранг

$$rk_{\text{столб}} A = \dim \langle A_1, \dots, A_n \rangle$$

### Определение 7.17: Строчной ранг

$$rk_{\text{строч}} A = \dim \left( \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \right)$$

### Определение 7.18: Факториальный ранг

Пусть  $A$  — матрица  $m \times n$ .

Рассмотрим все возможные разбиения  $A$  на множители размерами  $m \times k$ ,  $k \times n$ . Среди всех таких выберем наименьшее  $k$  — это  $rk_{\Phi}$ .

Для нулевой матрицы:  $rk_{\Phi} 0 = 0$

### Определение 7.19: Тензорный ранг

Пусть  $A$  — матрица  $m \times n$ .

$$rk_T A = \{k \mid A = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, x_i \in F^m, y_i^T \in F^n\}$$

Для нулевой матрицы:  $rk_T 0 = 0$

### Определение 7.20: Минорный ранг

Квадратная подматрица — элементы на пересечении  $k$  столбцов и  $k$  строк.

$rk_M A$  = размер максимальной (именно максимальной, а не наибольшей) невырожденной квадратной подматрицы.

### Замечание 7.21

В силу блочного умножения  $rk_{\Phi} = rk_T$ .

**Лемма 7.22**

$$A \in M_{mn}(F)$$

$C \in M_m(F)$  — невырожденная

$D \in M_n(F)$  — невырожденная

Покажем, что  $rk_* A = rk_*(CAD)$  для  $*$  = столб, строк,  $\Phi$ ,  $T$

Поскольку  $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строк}} A^T$ , можем доказывать только для столбцового.

$$\bullet A \mapsto CA = B$$

$$A = (A_1, \dots, A_n) \quad B = (B_1, \dots, B_n)$$

Столбцы — координаты в базисе, умножение на  $C$  — смена координат.

$$\text{Поэтому } \dim \langle A_1, \dots, A_n \rangle = \dim \langle B_1, \dots, B_n \rangle$$

$$\bullet A \mapsto AD = B$$

$$A = (A_1, \dots, A_n) \quad B = (B_1, \dots, B_n)$$

Заметим, что  $B_i$  — линейная комбинация  $A_1, \dots, A_n$ .

$$\text{Поэтому } \langle B_1, \dots, B_n \rangle \subseteq \langle A_1, \dots, A_n \rangle.$$

С другой стороны  $A = D^{-1}B \Rightarrow$  включение верно в другую сторону, а значит линейные оболочки равны, откуда и следует нужное.

Теперь докажем для факториального.

Пусть  $A = B_1 \cdot B_2$  и на этом достигается ранг.

Но тогда  $B = CAD = (CB_1) \cdot (B_2D)$ , а значит  $rk_{\Phi} A \geq rk_{\Phi} B$ .

Но  $A = C^{-1}BD^{-1}$ , а значит равенство верно и в другую сторону. Значит  $rk_{\Phi} A = rk_{\Phi} CAD$

**Лемма 7.23**

$$A \in M_{mn}(F)$$

Тогда  $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строк}} A = rk_{\Phi} A = rk_T A$

Давайте элементарными преобразованиями приведем  $A$  к виду  $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

В силу предыдущей леммы можно доказывать равенство рангов на этой матрице. Пусть размеры  $E = r \times r$ .

Очевидно, что  $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строк}} A = r$

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} (E \ 0)$$

Причем размеры множителей  $n \times r$  и  $r \times m$

Значит  $rk_{\Phi} \leq rk_{\text{столб}}$

Теперь покажем, что  $rk_{\Phi} \geq rk_{\text{столб}}$ .

Рассмотрим разбиения на множители, где достигается факториальный ранг  $A = BC$ , и размер  $B = m \times k$ , а  $C = k \times n$

$$(A_1 \ \dots \ A_n) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix} C$$

$A_i$  — линейная комбинация  $B_1, \dots, B_k \Rightarrow \langle A_1, \dots, A_n \rangle \subseteq \langle B_1, \dots, B_k \rangle$ .

Но тогда  $rk_{\text{столб}} \dim \langle A_1, \dots, A_n \rangle \leq k = rk_{\Phi}$ .

Выше показали, что неравенство верно и в другую сторону, поэтому  $rk_{\Phi} = rk_{\text{столб}}$

### Лемма 7.24

Пусть  $B$  максимальная по включению невырожденная квадратная подматрица размера  $r$ .

Тогда  $r = rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строч}} A = rk_{\Phi} A = rk_T A$

Для начала приведем матрицу  $A$  к виду  $\begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix}$

Заметим, что элементарные преобразования над первыми  $r$  строками оставляют  $B$  максимальной невырожденной подматрицей:

- Невырожденность  $B$  не меняется (так как элементарные преобразования сохраняют ее)
- Если при расширении матрицы мы нашли большую невырожденную, то обратными элементарными преобразованиями получим, что  $B$  была не максимальной.

Теперь приведем матрицу  $B$  к виду  $\begin{pmatrix} E & * \\ * & * \end{pmatrix}$

По аналогичным причинам мы можем прибавлять первые  $r$  строк к любым, сохраняя условие леммы. Значит мы можем занулить в первом столбце все кроме первых  $r$  строк. Точно так же мы можем занулить и все в первых  $r$  строках, кроме первых  $r$  столбцов.

Привели  $B$  к виду  $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$

Теперь будем доказывать для такой матрицы. Предположим, что в  $*$  есть ненулевой элемент. Но тогда мы можем расширить  $E$  до другой невырожденной квадратной подматрицы — противоречие.

Но тогда на самом деле у  $B$  такой вид:  $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Но это значит, что  $r$  совпал со всеми рангами.

## 7.7. Линейные отображения

### 7.7.1. Определение

#### Определение 7.25: Линейное отображение

$V, U$  — векторные пространства над  $F$

$$\varphi : V \rightarrow U$$

1.  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2.  $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

В случае выполнения этих свойств  $\varphi$  — линейное отображение.  
Если верно еще и

3.  $\varphi$  — биективное

тогда  $\varphi$  — изоморфизм.

#### Пример 7.26

- $\varphi : F^n \rightarrow F^m$   
 $\varphi(x) = Ax$
- $\varphi = 0$
- $id(x) = x$
- $D[0, 1] = \{f[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists f'\}$   
 $F[0, 1] = \{f[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$   
 $\varphi : D[0, 1] \rightarrow F[0, 1]$   
 $\varphi(f) = f'$
- $\varphi : C[0, 1] \rightarrow D[0, 1]$   
 $\varphi(f) = \hat{f}(x) = \int_0^x f(t)dt$
- $\varphi : M_n(F) \rightarrow M_n(F)$   
 $\varphi(X) = X^T$

$$\text{hom}_F(v, u) = \{\varphi \mid \varphi - F\text{-линейно}\}$$

**Замечание 7.27**

$(\text{hom}_F(v, u), +, \cdot)$  — векторное пространство.

Очевидно, что для задания линейного отображения нужно задать его на базисных векторах, причем если у двух отображения совпадают значения на базисе, то они совпадают везде.

**7.7.2. Матрица линейного отображения**

Сделаем аналог координат.

Идея:

$$\Phi_{\text{коорд}} F^n \rightarrow F^m$$

$$\Phi(x) = Ax$$

$$\Phi : V \rightarrow U$$

$e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$

$f_1, \dots, f_m$  — базис  $U$

Сделаем

$$\begin{cases} \Phi(e_1) = u_1 \in U \\ \vdots \\ \Phi(e_n) = u_n \in U \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \dots + a_{m1}f_m \\ \vdots \\ u_n = a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \dots + a_{mn}f_m \end{cases}$$

$$A = \left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix} \end{array} \right)$$

Получаем  $\Phi(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_m)A$  (чтобы нормально определить такое равенство, считаем, что  $\Phi$  — матрица  $1 \times 1$  с элементом равным линейному отображению)

Остается понять, как с помощью матрицы задать линейное отображение для любого вектора:

$$v = (e_1, \dots, e_n)x \quad x \in F^n$$

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \Phi((e_1, \dots, e_n)x) = \Phi(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\Phi(e_1) + \dots + x_n\Phi(e_n) = \\ &= (\Phi(e_1, \dots, e_n))x = (f_1, \dots, f_n)Ax \end{aligned}$$

## 7.7.3. Смена координат

Что такое смена координат?

$$\begin{aligned}
 \Phi(e_1, \dots, e_n) &= (f_1, \dots, f_m)A \\
 \Phi(e'_1, \dots, e'_n) &= (f'_1, \dots, f'_m)A' \\
 (e'_1, \dots, e'_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \\
 (f'_1, \dots, f'_m) &= (f_1, \dots, f_m)D \\
 \Phi(e_1, \dots, e_n)C &= (f_1, \dots, f_m)DA' \\
 \Phi(e_1, \dots, e_n) &= (f_1, \dots, f_m)DA'C^{-1} \\
 A &= DA'C^{-1} \\
 A' &= D^{-1}AC
 \end{aligned}$$

Но сделаем  $D^{-1}$  и  $C$  элементарными преобразованиями над строками и столбцами. Тогда  $A$  можно привести к виду  $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

## 7.8. Ядро и образ

**Определение 7.28: Ядро**

$$\ker \Phi = \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$$

**Определение 7.29: Образ**

$$\operatorname{Im} \Phi = \{\Phi(v) \in U \mid v \in V\} = \Phi(V)$$

**Замечание 7.30**

$\ker \Phi \subseteq V$  — подпространство

$\operatorname{Im} \Phi \subseteq U$  — подпространство

**Пример 7.31**

$$\Phi : F^n \rightarrow F^m$$

$$\Phi(x) = Ax$$

$$A \in M_{mn}(F)$$

$$\ker \Phi = \{x \in F^n \mid Ax = 0\}$$

$$\operatorname{Im} \Phi = \{Ax \in F^m \mid x_i \in F\} = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$$

( $A_i$  — столбцы  $A$ )

**Замечание 7.32**

$$\dim \operatorname{Im} \Phi = \operatorname{rk} A$$

$$\dim \ker \Phi = n - \operatorname{rk} A$$

**Лемма 7.33**

$\Phi : V \rightarrow U$  — линейное отображение

Тогда

1.  $\Phi$  инъективно  $\Leftrightarrow \ker \Phi = 0$
2.  $\Phi$  сюръективно  $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \Phi = U$
3.  $\dim \ker \Phi + \dim \operatorname{Im} \Phi = \dim V$

Второе очевидно, третье следует из замечания выше.

Докажем первое:

•  $\Rightarrow$

Очевидно

•  $\Leftarrow$

$$\Phi(v_1) = \Phi(v_2) \Rightarrow \Phi(v_1) - \Phi(v_2) = 0 \Rightarrow \Phi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

## 7.9. Неравенства на ранги

### 7.9.1. Сумма

**Лемма 7.34**

$$A, B \in M_{mn}(F)$$

$$\text{Тогда } |\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B| \leq \operatorname{rk} (A + B) \leq \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Пусть  $\operatorname{rk} A = r, \operatorname{rk} B = d$ .

Заметим, что из тензорного ранга сразу следует, что  $A + B$  можно представить в нужной форме из  $r + d$  слагаемых, поэтому  $\operatorname{rk} (A + B) \leq r + d = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$

Для другого неравенства воспользуемся трюком:

$$\operatorname{rk} ((A + B) - (-B)) \leq \operatorname{rk} (A + B) + \operatorname{rk} (-B)$$

$$\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} (A + B) + \operatorname{rk} B$$

$$\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B \leq \operatorname{rk} (A + B)$$

Сделав такое же неравенство на  $\operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A$  получим желаемое.

## 7.9.2. Произведение

**Лемма 7.35**

$A \in M_{mk}(F)$ ,  $B \in M_{kn}(F)$

Тогда  $rk A + rk B - k \leq rk(AB) \leq \min(rk A, rk B)$

$rk A = r$

Тогда  $A = A_1 \cdot A_2$  и  $A_1 \in M_{mr}(F)$

Значит  $AB = A_1 \cdot (A_2 B) \Rightarrow rk AB \leq r = rk A$ .

Аналогично можно получить неравенство с  $rk B$

Для оценки снизу рассмотрим линейные отображения:

$$1. B : F^n \rightarrow F^k$$

$$x \mapsto Bx$$

$$2. A : F^k \rightarrow F^m$$

$$x \mapsto Ax$$

$$3. AB : F^n \rightarrow F^m$$

$$x \mapsto ABx$$

$Im A = \langle \text{столбцы } A \rangle$

$\ker A = \{x \in F^k \mid x \in F^k\}$

$Im A = \{Ax \in F^m \mid x \in F^k\}$

Поэтому  $rk A = \dim Im A$

Хотим доказать:

$$\dim Im A + \dim Im B - k \leq \dim Im AB$$

Рассмотрим  $A|_{Im B}$ . Оно переводит вектор из  $Im B$  в  $F^m$ , причем:

$$Im A|_{Im B} = Im AB$$

Из суммы размерностей ядра и образа:

$$\dim Im A|_{Im B} + \dim \ker A|_{Im B} = \dim Im B$$

Из соображений здравого смысла:

$$\ker A|_{Im B} = Im B \cap \ker A \subseteq \ker A$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \ker A|_{Im B} \leq \dim \ker A$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} A|_{\operatorname{Im} B} + \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} &= \dim \operatorname{Im} B \\ \dim \operatorname{Im} AB + \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} &= \dim \operatorname{Im} B \\ \dim \operatorname{Im} AB &= \dim \operatorname{Im} B - \dim \ker A|_{\operatorname{Im} B} \leq \dim \operatorname{Im} B - \dim \ker A = \\ &= \dim \operatorname{Im} B - (k - \dim \operatorname{Im} A) = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Im} B - k\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

## 7.10. Суммы и пересечения

$V$  — векторное пространство над  $F$

$U, W \subseteq V$  — подпространства.

Очевидно, что  $U \cap W$  — тоже подпространство.

К сожалению про  $U \cup W$  такого мы сказать не можем, поэтому определим сумму:  $U + W$  — наименьшее векторное подпространство  $V$ , содержащие  $U$ , и  $W$ . Иными словами:

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Отсюда следует, что такие штуки тоже векторные подпространства:

$$\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$$

$$\sum_{\alpha \in A} U_\alpha = \{u_{\alpha_1} + \dots + u_{\alpha_k} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A\}$$

### Лемма 7.36

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

Рассмотрим  $e_1, \dots, e_k \in U \cap W$  — базис. Его можно дополнить до базиса  $U$  векторами  $f_1, \dots, f_s$

Аналогично можно дополнить до базиса  $W$  векторами  $g_1, \dots, g_t$

Если мы докажем, что  $e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t$  — базис  $U + W$ , то докажем и равенство. В силу определения  $U + W$ , такой набор векторов является порождающим. Значит нужно показать линейную независимость:

$$\begin{aligned}\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i + \sum \gamma_i g_i &= 0 \\ \sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i &= -\sum \gamma_i g_i = z \in U \cap W\end{aligned}$$

Значит  $z = \sum \delta_i e_i$

$$\begin{aligned}-\sum \gamma_i g_i &= \sum \delta_i e_i \\ \sum \delta_i e_i + \sum \gamma_i g_i &= 0\end{aligned}$$

Но это базис  $W$ , поэтому  $\gamma_i = 0$ , вернемся к изначальному равенству:

$$\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_i f_i = 0$$

Но это базис  $U$ , поэтому  $e_i = 0$  и  $f_i = 0$ . Что и требовалось доказать.

### Определение 7.37

$V$  — векторное пространство над  $F$ .

$U_1, \dots, U_k \subseteq V$  — подпространства.

$U_1, \dots, U_k$  — ЛНЗ, если  $\forall u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k$  выполнено:

$$u_1 + \dots + u_k = 0 \Leftrightarrow u_1 = \dots = u_k = 0$$

### Пример 7.38

Если в  $\mathbb{R}^3$  взять базис  $e_1, e_2, e_3$ , то  $\langle e_1, e_2 \rangle$  и  $\langle e_3 \rangle$  — ЛНЗ.

### Теорема 7.39

$V$  — векторное пространство над  $F$

$U_1, \dots, U_k \subseteq V$

Тогда эквивалентны:

1.  $U_1, \dots, U_k$  — ЛНЗ
2.  $\forall v \in U_1 + \dots + U_k \exists! v = u_1 + \dots + u_k$
3.  $U_i = \langle e_i \rangle$  (базис)  $\Rightarrow e_i \cap e_j = \emptyset$  и  $\bigcup e_i$  — базис  $U_1 + \dots + U_k$
4.  $\sum_{i=1}^k \dim U_i = \dim(U_1 + \dots + U_k)$
5.  $\forall i : U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = 0$
6.  $U_1 \times \dots \times U_k \rightarrow U_1 + \dots + U_k$   
 $(u_1, \dots, u_k) \mapsto u_1 + \dots + u_k$  — изоморфизм  
 Иными словами  $U_1 \oplus \dots \oplus U_k = U_1 + \dots + U_k$

- (1)  $\Rightarrow$  (2)

Очевидно

- (2)  $\Rightarrow$  (3)

Если бы в каких-то базисах был общий элемент, то 0 можно было бы получить более чем одним способом — противоречие. Значит осталось доказать

то, что объединение базисов — базис суммы. Понятно, что он порождающий, значит нужно показать что он ЛНЗ. Рассмотрим  $e_1\alpha_1 + \dots + e_k\alpha_k = 0$ . Так как  $e_i\alpha_i$  лежит в  $U_i$ , каждое такое слагаемое должно быть нулем из (2). Но также  $e_i$  — базис, поэтому  $\alpha_i = 0$

- (3)  $\Rightarrow$  (4)

Очевидно

- (4)  $\Rightarrow$  (5)

- (5)  $\Rightarrow$  (1)

$$u_1 + \dots + u_k = 0$$

$$u_2 + \dots + u_k = -u_1 \in U_1$$

$$u_1 \in U_1 \cap (U_2 + \dots + U_k) = 0 \Rightarrow u_1 = 0$$

Аналогично для всех остальных получим  $u_i = 0$

- (6)

Такое отображение является сюръективным и линейным по определению. Значит остается доказать инъективность. Но мы знаем, что это равносильно тому, что ядро равно нулю.

Но это просто переформулировка первого пункта.

## 8. Линейные операторы

### 8.1. Определение

#### Определение 8.1

Пусть  $V$  — векторное пространство над  $F$ .

Линейное отображение  $\Phi : V \rightarrow V$  называется линейным оператором.

#### Пример 8.2

- $\Phi(v) = 0$
- $\Phi(v) = v$
- Поворот вектора на  $\varphi$  против часовой:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $U, W \subseteq V$   
$$\begin{cases} U \cap W = 0 \\ U + W = V \end{cases}$$
$$V = U \oplus W$$
$$v = u + w$$
$$\Phi(v) = u \text{ — проектирование на } U \text{ вдоль } W$$

$V$  — векторное пространство с базисом  $(e_1, \dots, e_n) = e$

Тогда  $v = (e_1 \ \dots \ e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , и можно перейти от  $V$  к  $F^n$ . Тогда хотелось бы

по линейному оператору в  $V$  получить линейный оператор в  $F^n$ . Для этого есть матрица линейного отображения (зависит от базиса):

$$\Phi(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} & \\ & A \\ & \end{pmatrix}$$

Получаем, что  $\Phi$  делает 
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

## 8.2. Смена координат

Если для базисов верно  $(e_1, \dots, e_n)C = (e'_1, \dots, e'_n)$ , то для координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \Phi(e_1, \dots, e_n) &= (e_1, \dots, e_n)A \\ \Phi(e'_1, \dots, e'_n) &= (e'_1, \dots, e'_n)A' \\ A' &= C^{-1}AC \\ x' &= C^{-1}x \end{aligned}$$

## 8.3. Матричные характеристики

Хотелось бы найти для нашего линейного оператора характеристику, которая бы вне зависимости от выбора базиса для матрицы перехода давали одно и то же число:

- След

$$\text{tr}(A') = \text{tr}(C^{-1} \cdot AC) = \text{tr}(AC \cdot C^{-1}) = \text{tr}(A)$$

- Определитель

$$\det(A') = \det(C^{-1}AC) = \det(A)$$

- Ранг

$$\text{rk}(A') = \text{rk } A$$

- Характеристический многочлен

$$\mathcal{X}_{A'}(t) = \mathcal{X}_A(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{A'}(t) &= \det(tE - A') = \det(tC^{-1}C) = \\ &= \det(C^{-1}(tE - A)C) = \det(tE - A) = \mathcal{X}_A(t) \end{aligned}$$

- $f_{\min A'} = f_{\min A}$

$$f_{\min A}(C^{-1}AC) = C^{-1}f_{\min A}(A)C = 0 \Rightarrow f_{\min A'} \mid f_{\min A}$$

Повторив аналогично в другую сторону, получим искомое.

Заодно можем определить  $f(\Phi) = a_n\Phi^n + \dots + a_1\Phi + a_0id$

- $\text{spec}_F A = \text{spec}_F A'$

## 8.4.

Еще можно вспомнить, что  $\dim \ker \Phi + \dim \operatorname{Im} \Phi = \dim V$ . Отсюда получим прикольный факт.

**Лемма 8.3**

$\Phi : V \rightarrow V$  — линейный оператор

Тогда эквиваленты следующие утверждения:

1.  $\Phi$  — обратимо
2.  $\ker \Phi = 0$
3.  $\operatorname{Im} \Phi = V$

Причем если  $x \mapsto Ax$ , то такие утверждения равносильны:

1.  $A$  — обратима
2.  $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
3.  $Ax = b$  имеет решение  $\forall b$

**Пример 8.4**

Рассмотрим поворот на плоскости на  $\alpha \neq \pi k$

Никакая прямая тогда не перейдет в себя  $\Rightarrow$  это не линейный оператор на них.

8.5.  $\Phi$ -инвариантные подпространства**Определение 8.5**

$U \subseteq V$  —  $\Phi$ -инвариантное подпространство, если  $\Phi(U) \subseteq U$

Тогда можно рассматривать  $\Phi|_U : u \mapsto \Phi(u)$

Пусть  $V = U \oplus W$  и  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $U$ , а  $e_{k+1}, \dots, e_n$  — базис  $W$

$$\Phi(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Если  $U$  —  $\Phi$ -инвариантное, то  $\Phi(e_i) \in U$ . Но если рассмотреть, куда переходит  $(e_1, \dots, e_k)$ , то мы получим, что  $C = 0$ . Аналогично, если  $W$  —  $\Phi$ -инвариантное, то  $B = 0$

Инвариантная прямая:

$$\Phi : V \rightarrow V$$

$$U = \langle v \rangle, v \neq 0$$

$$\begin{aligned}\Phi(U) &\subseteq U \\ \Phi(v) &\in U \\ \Phi(v) &= \lambda v \\ \text{TODO (21.01)}\end{aligned}$$

**Лемма 8.6**

$$\Phi : V \rightarrow V$$

Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $\Phi$  — диагонализируем
2. Существует базис из собственных векторов
3.  $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$
4. а)  $\mathcal{X}(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s}$   
 б)  $\dim V_{\lambda_i} = k_i$

- (1)  $\rightarrow$  (2) и (2)  $\rightarrow$  (1) очевидно

- (2)  $\rightarrow$  (3)

Рассмотрим базис  $e_1, \dots, e_n$  и разобьем на части: все из  $V_{\lambda_1}$ ,  $\dots$ , все из  $V_{\lambda_s}$ .

Если сложить линейные оболочки из каждой группы, то мы, очевидно, получим  $V$ . Значит сумма “больших” подпространств тем более дает  $V$  (ранее доказывали, что прямая сумма собственных подпространств лежит в  $V$ )

- (3)  $\rightarrow$  (2)

Возьмем базисы для каждого  $V_{\lambda_i}$ , они собственные по определению. Объединим их, получим базис  $V$ .

- (1, 2, 3)  $\rightarrow$  (4)

Пункт а) следует из диагонализируемости оператора, причем степень  $k_i$  — это сколько раз  $\lambda_i$  встречается на диагонали.

Давайте решим  $(A_\Phi - \lambda_i E)X = 0$ . Ядро этого оператора —  $V_{\lambda_i}$ , но в такой системе уравнений у нас диагональная матрица с  $k_i$  нулями на ней — то есть размерность ядра равна  $k_i$ .

- (4)  $\rightarrow$  (3)

Знаем, что  $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} \subseteq V$ . Хотим убедиться, что сумма размерностей пространств слева равна размерности справа. Но  $k_1 + \dots + k_s = n$  — доказали.

## 8.6. Какие-то фокусы с многочленами и операторами

### Лемма 8.7

$$\Phi : V \rightarrow V/F$$

$$p, q \in F[t], (p, q) = 1.$$

Тогда:

1.  $\ker p(\Phi) \cap \ker q(\Phi) = 0$
2.  $\ker q(\Phi)$  является  $p(\Phi)$ -инвариантным  
 $p(\Phi)|_{\ker q(\Phi)}$  — обратимый

$$(p, q) = 1 \Rightarrow \exists u, v \in F[t]$$

$$1 = u(t)p(t) + v(t)q(t)$$

$$id = u(\Phi)p(\Phi) + v(\Phi)q(\Phi)$$

$$z \in \ker p(\Phi) \cap \ker q(\Phi)$$

$$z = u(\Phi)p(\Phi)(z) + v(\Phi)q(\Phi)(z) = u(\Phi)(0) + v(\Phi)(0) = 0$$

$p(\Phi)$  и  $q(\Phi)$  коммутируют, значит  $\ker q(\Phi)$  является  $p(\Phi)$  инвариантным. Поэтому можем ограничить  $p(\Phi)$  на  $\ker q(\Phi)$ .

Ранее выясняли, что для проверки обратимости оператора достаточно убедиться, что его ядро равно 0. Но по определению ядро этого оператора равно  $\ker p(\Phi) \cap \ker q(\Phi)$ . Что и требовалось доказать.

### Лемма 8.8

$$\Phi : V \rightarrow V/F$$

$$p, q \in F[t], (p, q) = 1$$

$$f = p \cdot q \text{ и } f(\Phi) = 0$$

Тогда:

1.  $\text{Im } p(\Phi) = \ker q(\Phi)$   
 $\text{Im } q(\Phi) = \ker p(\Phi)$
2.  $V = \ker p(\Phi) \oplus \ker q(\Phi)$
3.  $U \subseteq V$  — подпространство  
 $U_1 = U \cap \ker p(\Phi)$   
 $U_2 = U \cap \ker q(\Phi)$

Если  $U$  —  $\Phi$ -инвариантно, то  $U_1$  и  $U_2$  тоже, причем  $U = U_1 \oplus U_2$

Если дополнительно известно, что  $f = f_{\min \Phi}$ , то:

- $p = f_{\min \Phi}|_{\ker p(\Phi)}$
- $q = f_{\min \Phi}|_{\ker q(\Phi)}$

**Первое:**

$$\begin{aligned}(p, q) &= 1 \\ 1 &= u(t)p(t) + v(t)q(t) \\ id &= u(\Phi)p(\Phi) + v(\Phi)q(\Phi) \\ 0 &= p(\Phi)q(\Phi) = q(\Phi)p(\Phi)\end{aligned}$$

Если  $qp = 0$ , то  $\text{Im } p(\Phi) \subseteq \ker q(\Phi)$ . Докажем в обратную сторону. Возьмем  $z \in \ker q(\Phi)$ :

$$\begin{aligned}z &= u(\Phi)p(\Phi)(z) + v(\Phi)q(\Phi)(z) \\ z &= u(\Phi)p(\Phi)(z) + v(\Phi)(0) \\ z &= u(\Phi)p(\Phi)(z) \\ z &= p(\Phi)u(\Phi)(z)\end{aligned}$$

Представили  $z$  в виде  $p(\Phi)(v)$ .

**Второе:**

Нужно доказать, что:

$$\begin{cases} 0 = \ker p(\Phi) \cap \ker q(\Phi) \\ V = \ker p(\Phi) \cup \ker q(\Phi) \end{cases}$$

Первое знаем из факта ранее, а для доказательства второго нужно проверить равенство размерностей. Заменим  $\ker q(\Phi)$  на  $\text{Im } p(\Phi)$ , получим искомое.

**Третье:**

$$\begin{aligned}V &= \ker p(\Phi) \oplus \ker q(\Phi) \\ U_1 &= U \cap \ker p(\Phi) \\ U_2 &= U \cap \ker q(\Phi)\end{aligned}$$

Поскольку изначально ядра пересекаются по нулю, получаем, что  $U_1 \oplus U_2 \subseteq U$ . Осталось доказать равенство.

$$z = u(\Phi)p(\Phi)(z) + v(\Phi)q(\Phi)(z)$$

Заметим, что  $u(\Phi)p(\Phi)(z) \in \operatorname{Im} p(\Phi) = \ker q(\Phi)$ . То есть по сути умеем находить разложение вида  $z = x + y$ , где  $x \in \ker p(\Phi)$ , а  $y \in \ker q(\Phi)$ . Но  $U$  является  $\Phi$ -инвариантным, поэтому  $u(\Phi)p(\Phi)(z) \in U$ . Но это значит, что  $u(\Phi)p(\Phi)(z) \in U \cap \ker q(\Phi)$ , то есть оно принадлежит  $U_2$ . Аналогично показывается, что второе слагаемое лежит в  $U_1$ . Значит доказали равенство.

**Четвертое:**

$$V = \ker p(\Phi) \oplus \ker q(\Phi)$$

Очевидно, что  $\Phi|_{\ker p(\Phi)}$  является зануляющим. Значит  $p(t)$  — зануляющий для него. Мы хотели бы доказать, что если  $f$  — минимальный, то и  $p$  тоже минимальный для такого множества. Доказывается от противного: пусть есть  $p_0$  меньшей степени, тогда  $f_0 = p_0 \cdot q$  тоже зануляет  $\Phi$ .

### Лемма 8.9

$$\Phi : V \rightarrow V$$

$$f_{\min} = (t - \lambda)^k g(t), g(\lambda) \neq 0$$

Тогда верно

$$0 \subsetneq \ker(\Phi - \lambda id) \subsetneq \ker(\Phi - \lambda id)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(\Phi - \lambda id)^k = \ker(\Phi - \lambda id)^{k+1} = \dots$$

### Замечание 8.10

$$\text{То есть } V^\lambda = \ker(\Phi - \lambda id)^k$$

1. Покажем, что  $V^\lambda \subseteq \ker(\Phi - \lambda id)^k$ .

$$f_{\min \Phi}(\Phi) : V^\lambda \rightarrow V^\lambda$$

$$(\Phi - \lambda id)^k \cdot g(\Phi)(v) = 0$$

Заметим, что на  $g(\Phi)$  можно сократить (доказывали для взаимнопростых многочленов на прошлой лекции), поэтому вложение верно.

Поскольку верно вложение в обратную сторону, получили  $V^\lambda = \ker(\Phi - \lambda id)^k$

2. Покажем, что степень  $k$  нельзя понизить.

Покажем от противного, пусть можно понизить. Но тогда  $(\Phi - \lambda id)^{k_0} g(\Phi)$  тоже зануляет — противоречие.

[TODO]

**Лемма 8.11**

$$\begin{aligned}\Phi : V &\rightarrow V/F \\ \Phi^m = 0 &\Rightarrow \mathcal{X}_\Phi(t) = t^{\dim V}\end{aligned}$$

Знаем, что  $t^m$  — зануляющий.

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_\Phi(\Phi) &= t^k \cdot g(t), (t, g) = 1 \\ V &= \ker \Phi^k \oplus \ker g(\Phi)\end{aligned}$$

Значит  $\Phi^k$  обратим на  $g(\Phi)$  — такое может быть только если пространство нулевое. Это прикольно, но нам не поможет.

**Короткий, но не до конца доказанный путь**

Давайте вложим  $F$  в алгебраически замкнутое поле  $L$  (самое нетривиальное — понять, что такое есть). Поскольку матрица оператора не изменилась, наш характеристический многочлен не поменялся, и все еще  $\Phi^m = 0$ . В нашем новом поле  $\mathcal{X}_\Phi(t) : f_{\min \Phi}$ , то есть  $\mathcal{X}_\Phi(t) = t^k$ .

**Кустарные методы****Лемма 8.12**

$$\begin{aligned}\Phi : V &\rightarrow V \\ f_{\min \Phi} &= (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s}\end{aligned}$$

Тогда существует базис  $e_1, \dots, e_n$  такой, что в нем матрица многочлена является верхнетреугольной, а на ее диагонали стоят корни минимального зануляющего.

$\lambda_1$  — корень  $f_{\min}$ .

$\lambda_1 \in \text{спес}_F \Phi =$  собственные значения

$\exists e_1 \in V : \Phi e_1 = \lambda_1 e_1$ .

Значит справились сделать такое:

$$\Phi(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

На матричном языке это означает, что

$$\exists C : C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Хочетс воспользоваться индукцией.

Заметим, что если записать в многочлен верхнетреугольную матрицу, то на диагонали к элементам просто применится многочлен + что-то произойдет с оставшимися элементами.

$$f_{\min A} = (C^{-1}AC) = C^{-1}f_{\min A}(A)C = C^{-1} \cdot 0 \cdot C = 0$$

Но тогда по предыдущему утверждению  $f_{\min A}(B) = 0 \Rightarrow f_{\min A} : f_{\min B}$ .

Тогда индукцией по размеру  $\exists T \in M_{n-1}(F) : T^{-1}BT$  — верхнетреугольная матрица нужного нам вида.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} C^{-1}AC \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & TBT^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Победа.

### Следствие 8.13

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi}(t) &= (t - \lambda_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{d_s} \\ k_1 &\leq d_1, \dots, k_s \leq d_s \\ \sum d_i &= \dim V \end{aligned}$$

### Теорема 8.14

$$\Phi : V \rightarrow V/F$$

$$\lambda \in \text{spec}_F \Phi$$

$$f_{\min} = (t - \lambda)^k \cdot g(t), \quad g(\lambda) \neq 0$$

$$\chi_{\Phi} = (t - \lambda)^d \cdot h(t), \quad h(\lambda) \neq 0$$

Тогда

1.  $V^{\lambda} = \ker(\Phi - \lambda id)^k$   
 $V^{\lambda} \not\subseteq \ker(\Phi - \lambda id)^{k-1}$
2.  $d = \dim V$

я ничего не понимаю

### Лемма 8.15

$$\Phi : V \rightarrow V/F$$

$$f_{\min \Phi} = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s}$$

Тогда  $V = V^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}$  и  $V^{\lambda_i} = \ker(\Phi - \lambda_i id)^{k_i}$

## 9. Функционалы

### Определение 9.1

$V$  — векторное пространство над  $F$

$V^* = \{\xi : V \rightarrow F \mid \xi \text{ — линейное}\} = \text{hom}_F(V, F)$  — двойственное пространство

$V^*$  — тоже векторное пространство

$\xi : V \rightarrow F, \eta : V \rightarrow F, \lambda \in F$

- $(\xi + \eta)(v) = \xi(v) + \eta(v)$
- $(\lambda \cdot \xi)(v) = \lambda \cdot \xi(v)$

### Пример 9.2

1.  $(\mathbb{R}^n)^*$  — пространство строк

2.  $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$f \mapsto f(\lambda)$$

3.  $C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

4.  $M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$A \mapsto \text{tr}(A)$$

### Лемма 9.3

$V$  — векторное пространство над  $F$

$e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$

Тогда:

1.  $\exists! \xi_1, \dots, \xi_n \in V^*$

$$\xi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — базис

3.  $\xi \in V^* \quad \xi = \xi(e_1)\xi_1 + \dots + \xi(e_n)\xi_n$

$$v \in V$$

$$v = \xi_1(v)e_1 + \dots + \xi_n(v)e_n$$

## Определение 9.4

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$  — двойственный базис к  $(e_1, \dots, e_n)$ .

1. Мы знаем, что базисный набор можно отправить куда угодно, причем будет существовать единственное линейное отображение с таким свойством. Отсюда сразу вытекает существование и единственность  $\xi_i$
2. Проверим, что наш набор является ЛНЗ порождающим.

- ЛНЗ:

$$\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n = 0 \text{ (в } V^*)$$

$$\forall v \in V:$$

$$(\lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_n \xi_n)(v) = 0(v) \text{ (в } F)$$

Преобразуем обе части:

$$\lambda_1 \xi_1(v) + \dots + \lambda_n \xi_n(v) = 0$$

Подставим  $e_i$ , получим:

$$\lambda_i \cdot 1 = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$$

- Порождающий:

Возьмем  $\xi \in V^*$

Покажем, что  $\xi = \xi(e_1) \cdot \xi_1 + \dots + \xi(e_n) \cdot \xi_n$  (в  $V^*$ )

$$\xi(v) = (\xi(e_1) \cdot \xi_1 + \dots + \xi(e_n) \cdot \xi_n)(v)$$

$$\xi(v) = \xi(e_1) \cdot \xi_1(v) + \dots + \xi(e_n) \cdot \xi_n(v)$$

Поскольку у нас линейные функции, достаточно проверить только на базисных векторах:

$$\xi(e_i) = \xi(e_1) \cdot \xi_1(e_i) + \dots + \xi(e_n) \cdot \xi_n(e_i)$$

$$\xi(e_i) = \xi(e_i) \cdot 1 \text{ — ура, сошлось}$$

3. Проверим в лоб:

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

$$\xi_i(v) = \xi_i(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)$$

$$\xi_i(v) = \lambda_1 \xi_i(e_1) + \dots + \lambda_n \xi_i(e_n)$$

$$\xi_i(v) = \lambda_i \cdot 1 \text{ — ура, доказали, что } \xi_i(v) = \lambda_i$$

## Следствие 9.5

Если  $\dim V = n < \infty$ , то  $\dim V^* = n < \infty$ .

Если же  $\dim V = \infty$ , то если вы верите в аксиому выбора, то  $\dim V^* > \dim V$ , а если не верите, то данный результат нельзя ни доказать, ни опровергнуть.