Математический анализ
Sokolnikov Alex
2025 — 2026

Содержание

1. Множества

1.1. Примеры

Множество - совокупность каких-то элементов.

Описание свойств множества для его задания иногда приводит к парадоксам. Например множество можно построить с помощью аксиом Цермело-Френкеля (можно прочитать в Куратовский, Мостовский “Основы теории множеств”)

Обозначаем так: $A = \{x, y, z\}$. Принадлежность элемента — $x \in A$.

Мощность множества — аналог количества для бесконечных множеств.

Основные числовые множества:

- $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Начинаем с 1. (подробно почитать можно в книжке Э. Ландау)
- $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел.
- $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел.

  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

  Но есть проблема с $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \cdots$

  Поэтому $a \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1$
- $\mathbb{I}$ — множество всех иррациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.2. Функции

Определение 1.1: Декартово произведение

Декартово произведение множеств X и Y обозначается $X \times Y$ и является множеством всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X, y \in Y$.

Определение 1.2: Функция

Подмножество f декартова произведения $X \times Y$ называется функцией из X в Y $(f : X \to Y)$, если $\forall x \in X\ \exists!\ (x, y) \in f$

$y = f(x)$.
x — прообраз y, y — образ x.
X — область определения, Y — область значений.

Определение 1.3: Сюръекция

f — сюръекция (накрытие) множества X на множество Y, если

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$$

Определение 1.4: Инъекция

f — инъекция (вложение) множества X на множество Y, если

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Определение 1.5: Биекция

f — биекция множества X на множество Y, если она является и сюръекцией, и инъекцией.

Примеры:

- $y = x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — биекция
- $y = x^2$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $y = x^2$, $\mathbb{R} \to [0; +\infty)$ — сюръекция
- $y = x^2$, $[0; +\infty) \to [0; +\infty)$ — биекция

Определение 1.6: Равномощность

Множества равномощны, если между их элементами можно сделать биекцию.

Теорема 1.7

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

1.3. Принцип полноты

Определение 1.8

Говорят, что числовое множество A лежит левее числового множества B, если
$\forall a \in A, \ b \in B \ a \leq b$
Обозначается: $A \leq B$

Определение 1.9: Полнота

Числовое множество C обладает свойстом полноты, если

$$\forall A, B \subset C : A, B - \text{не пустые}, \ A \le B$$
$$\exists c \in C : \forall a \in A, \ b \in B \ a \le c \le b$$

$\mathbb{N}$ обладает свойством полноты, а $\mathbb{Q}$ — нет.
Пусть $A = \{a \in \mathbb{Q} : a > 0, a^2 < 2\}$, а $B = \{b \in \mathbb{Q} : b > 0, b^2 > 2\}$.
$0 < b^2 - a^2 = (b-a)(b+a), \ b + a > 0 \Rightarrow a \le b$.
Пусть наш разделитель — c

1. $c^2 < 2$

   Возьмем $c' = c + \frac{2-c^2}{5}$.

$$(c')^2 = c^2 + 2c \cdot \frac{2-c^2}{5} + \left(\frac{2-c^2}{5}\right)^2 < c^2 + 4 \cdot \frac{2-c^2}{5} + \frac{2-c^2}{5} = 2$$

2. $c^2 > 2$

   Возьмем $c' = c - \frac{c^2-2}{4}$.

$$(c')^2 = c^2 - 2c \cdot \frac{c^2-2}{4} + \left(\frac{c^2-2}{4}\right)^2 > c^2 - 4 \cdot \frac{c^2-2}{4} = 2$$

Вышеописанные неравенства верны для $c < 2$, но мы можем считать, что это верно, так как можно рассматривать эти неравенства только для c, довольно близких к $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ — разделяющий элемент множеств A, B, но $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. Вещественные числа

2.1. Определение

Пусть числовое множество R удовлетворяет следующим свойствам:

0. Замкнутость относительно основных арифметических операций.
1. $\forall a, b, c \in R \ a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $\forall a, b \in R \ a + b = b + a$
3. $\exists 0 \in R : a + 0 = a$
4. $\forall a \in R \ \exists b \in R : a + b = 0$
5. $\forall a, b, c \in R \ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $\forall a, b \in R \ a \cdot b = b \cdot a$
7. $\exists 1 \in R, 1 \neq 0 : 1 \cdot a = a$
8. $\forall a \in R, a \neq 0 \ \exists b \in R, b \neq 0 : a \cdot b = 1$
9. $\forall a, b, c \in R \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
10. $\forall a, b \in R \ a \leq b \vee b \leq a$

    $a \leq b, \forall c \in R \ a + c \leq b + c$

    $a \leq b, \forall c \in R, c \geq 0 \ a \cdot c \leq b \cdot c$
11. На R выполнено свойство полноты.

(Подробнее можно почитать Колмогоров, Фомин "Элементы теории функций и функционального анализа")

Чтобы закончить введение вещественных чисел, нужно привести пример. Мы будем использовать бесконечные десятичные дроби. Но в них возможна неоднозначность при построении периода. Можно приближать число либо слева, либо справа, поэтому получится неоднозначность вида $0.(9) = 1.(0)$. Поэтому просто запретим периоды из 9. Любая бесконечная десятичная дробь нами будет записывать так $a = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, где $a_0 \in \mathbb{N} \cup 0 = \mathbb{N}_0$, а $a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Тогда $0 = \pm 0, (0)$

$a \leq b \Leftrightarrow a = b \vee \exists k \in \mathbb{N} : a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k < b_k$

Два числа можно сложить, пользуясь принципом полноты (по сути сечения Додекинда).

Теорема 2.1

На множестве всех бесконечных десятичных дробей с введённым отношением порядке выполняется свойство полноты.

Пусть A, B — два непустых подмножества и $A \leq B$.

Если A состоит из неположительных чисел, а B — из неотрицательных, то 0 — разделитель.

Если в B все числа неотрицательные, то возьмём все дроби, где b_0 минимально (можем это сделать, так как в любом непустом подмножестве $\mathbb{N}$ есть минимум). Среди этих дробей возьмём все дроби с минимальным b_1. Среди дробей с началом b_0, b_1, возьмем все дроби с минимальным b_2. И так далее.

Получим число $c = c_0, c_1 c_2 c_3 \ldots$

Покажем, что это разделитель. По построению $\forall b \in B \ c \leq b$.

Если $\exists a \in A : c < a$, то $\exists k \in \mathbb{N} : a_k > c_k = b_k \Rightarrow \exists a \in A, b \in B : a > b$.

Если $\exists b \in B : b < 0$, то нужно повторить рассуждения, но искать супремум A.

Следствие 2.2: Аксиома Архимеда

$\forall a \in \mathbb{R}, a > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : na > 1$.

Т.к. $a > 0$, то $\exists k \in \mathbb{N} : a_k > 0$, где $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$. Тогда $n = 10^{k+1}$ подойдет.

Следствие 2.3

Между любыми двумя вещественными числами есть рациональное и иррациональное число.
$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$

1. $\exists c \in \mathbb{Q} : a < c < b$

   $b - a > 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : k(b-a) > 1 \Rightarrow 2k(b-a) > 2 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : a < \frac{m}{2k} < b$

2. $\exists c \in \mathbb{I} : a < c < b$

   По первому пункту: $\exists \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : \frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow \exists c = \frac{m}{\sqrt{2}n} \in \mathbb{I} : a < c < b$

Определение 2.4: Отрезок

Пусть $a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ — называется отрезком $\mathbb{R}$.

Лемма 2.5: Лемма о стягивающихся отрезках

Определение 2.6: Система вложенных отрезков

Множество отрезков M называется системой вложенных отрезков, если для любых отрезков I_1, I_2 верно $I_1 \subset I_2$ или $I_2 \subset I_1$.

Определение 2.7: Последовательность вложенных отрезков

Система вложенных отрезков M называется последовательностью вложенных отрезков, если отрезки пронумерованы и для любых двух отрезков отрезок с меньшим номером включает в себя отрезок с большим номером.

Определение 2.8: Последовательность стягивающихся отрезков

Последовательность вложенных отрезков M называется последовательностью стягивающихся отрезков, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : |I_n| < \varepsilon$

1. Если M — система вложенных отрезков, то они имеют общую точку.
2. Если M — последовательность стягивающихся отрезков, то общая точка единственна.

Доказательство:

1. Пусть $I_n = [l_n, r_n]$. Возьмем $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots\}$, $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$. Тогда $L \leq R \Rightarrow$ по свойству полноты существует разделитель c — искомая общая точка.
2. Пусть есть общие точки $c \neq c'$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ c', c \in I_n \to |I_n| \geq |c' - c|$. Но тогда неверно утверждение, что существует отрезок сколь угодно малой длины.

2.2. Ассоциация вещественных чисел с прямой

Сначала определим положительные числа, Давайте сделаем последовательность стягивающихся отрезков:

$$[a_0, a_0 + 1], [a_0 + a_1, a_0 + a_1 + 0.1], \ldots$$

Их общая точка и будет числом a.

Отрицательные числа — положительные, отражённые относительно 0.

Определение 2.9: Окрестность

Окрестностью точки c называется любой интервал (a, b) такой, что $c \in (a, b)$.
U_c — окрестность точки c
$\mathring{U} = U' = (a, c) \cup (c, b)$ — проколотая окрестность точки c
$U_\varepsilon = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ — ε-окрестность точки c
$\mathring{U}_\varepsilon = U'_\varepsilon = (c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon)$ — проколотая ε-окрестность точки c

3. Последовательности

Определение 3.1: Последовательность

Последовательность — это $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
$f(n)$ обозначается a_n
Сама последовательность обозначается $\{a_n\}$

Примеры:

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $F_1 = F_2 = 1,\ \ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$
- $a_1 = 1,\ \ a_n = \frac{1}{a_{n-1}+1}$
- $a_1 = 1, a_2 = 1.4, a_3 = 1.41, \ldots$ — десятичное приближение числа

Из последнего примера видно, что $\mathbb{Q}$ всюду плотно.

3.1. Предел

Определение 3.2: Предел 0

Последовательность $\{a_n\}$ стремится к A, если

$$\forall U(A)\ \exists N : \forall n > N\ a_n \in U(A)$$

Определение 3.3: Предел 1

Последовательность $\{a_n\}$ стремится к A, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ a_n \in U_\varepsilon(A)$$

Определение 3.4: Отсутствие предела

A не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N : \exists n > N\ a_n \notin U_\varepsilon(A)$$

Чтобы получить отсутствие предела, нужно добавить в начало $\forall A$

Пример 3.5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Доказательство:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

Пример 3.6

$b_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ не имеет предела

Доказательство:
Пусть $A_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |b_n - A| < \varepsilon$
Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$|b_n - b_{n+1}| \leq |b_n - A| + |A - b_{n+1}| < 2\varepsilon = 1$$
$$\left|(-1)^n + \frac{1}{n} - (-1)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\pm 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| > 1$$

Основные свойства пределов:

1. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Тогда A единственно.

   Доказательство:

   Пусть $\exists B \neq A : B = \lim\limits_{n\to\infty}$

   $\forall\varepsilon > 0 :$

$$\exists N_1 : \forall n > N_1\ |a_n - A| < \varepsilon$$
$$\exists N_2 : \forall n > N_1\ |a_n - B| < \varepsilon$$

   Получим противоречие:

$$\varepsilon = \frac{|B - A|}{2},\ N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow$$
$$\forall n > N 2\varepsilon = |B - A| = |B - a_n| + |a_n - A| < 2\varepsilon$$

2. **Лемма 3.7: Лемме об отделимости**

   Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ A \neq 0 \Rightarrow \exists N : \forall n > N\ |a_n| > \frac{|A|}{2}$

   Доказательство:

   Возьмём $\varepsilon = \frac{|A|}{2} \Rightarrow \exists N : \forall n > N\ |a_n - A| < \frac{|A|}{2}$

Определение 3.8: Ограниченная последовательность

Последовательность $\{a_n\}$ ограничена, если

$$\exists c, C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ c < a_n < C$$

или

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leq M$$

Лемма 3.9

$\{a_n\}$ имеет предел $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ является ограниченной

Доказательство: тривиально

Теорема 3.10: Арифметика пределов

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$
3. Если $\forall n\ b_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{b} = \frac{A}{B}$

Доказательство:
$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} \wedge \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall l > N_1, \forall k > N_2\ |a_l - A| < \varepsilon_1, |b_k - B| < \varepsilon_1$

1.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N |\alpha a_n + \beta b_n - \alpha A - \beta B| < \varepsilon$$
$$\text{Пусть } N = \max\{N_1, N_2\}$$
$$|\alpha a_n + \beta b_n - \alpha A - \beta B| \leq |\alpha a_n - \alpha A| + |\beta b_n - \beta B| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon_1$$

Если $|\alpha| + |\beta| = 0$, то очевидно, иначе положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\alpha|+|\beta|}$

2.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N |a_n b_n - AB| < \varepsilon$$
$$\text{Пусть } N = \max\{N_1, N_2\}$$
$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| \leq |b_n||a_n - A| + |A||b_n - B| <$$
$$< (|b_n| + |A|)\varepsilon_1$$

Так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то $\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |b_n| \leq C$.

Тогда $|a_n b_n - AB| < (C + |A|)\varepsilon_1$. Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{C+|A|}$.

3. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$

   Так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, то $\exists N' \; \forall n > N' \; |b_n| > \frac{|B|}{2}$.

   Пусть $N = \max\{N_2, N'\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon$$
$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - b_n|}{|B||b_n|} < \frac{\varepsilon_1}{|B||b_n|} < \frac{2\varepsilon_1}{|B|^2}$$

   Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{B^2}{2\varepsilon}$

   Тогда
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{A}{B}$$

Теорема 3.11: Предельный переход в неравенствах

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$
$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \; a_n \leq b_n \Rightarrow A \leq B$

Доказательство:
Пусть $A > B \Rightarrow A - B = \varepsilon > 0$.
Возьмем $U_{\frac{\varepsilon}{3}}(A), U_{\frac{\varepsilon}{3}}(B)$.

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \; a_n \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(A)$$
$$\exists N_2 : \forall n > N_2 \; b_n \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(B)$$

Тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\} \; a_n > b_n$ — противоречие.

Теорема 3.12: Теорема о двух милиционерах

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$
Пусть $\exists n_0 : \forall n > n_0 \; a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$

Доказательство:

$$\forall \varepsilon > 0$$
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \; |a_n - A| < \varepsilon$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \; |b_n - A| < \varepsilon$$
$$N = \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall n > N \; A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon$$

3.2. Бесконечные малые последовательности

Определение 3.13: Бесконечно малая последовательность

$$\{a_n\} - \text{БМП, если } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Определение 3.14: Предел 2

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B \Leftrightarrow \exists \text{ БМП } \{a_n\} : b_n = B + a_n$$

Лемма 3.15

Все определения пределов равносильны

Доказательство:
В эту сторону очевидно, в эту сторону тривиально.

Определение 3.16: Верхние и нижние грани

Пусть $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$.
Если существует $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ a \leq C$, то C называется верхней гранью множества A.
Если существует $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ a \geq c$, то c называется нижней гранью множества A.
Наименьшая из верхних граней множества A называется точной верхней гранью и обозначается sup.
Наибольшая из нижних граней множества A называется точной нижней гранью и обозначается inf.

Определение 3.17: Супремум

$C = \sup A$, если:

- $\forall a \in A\ a \leq C$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : a > C - \varepsilon$

Определение 3.18: Инфимум

$c = \inf A$, если:

- $\forall a \in A\ a \geq c$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : a < c + \varepsilon$

Теорема 3.19

$$A \in \mathbb{R}, A \neq \varnothing, \exists \text{ верхняя грань } C \Rightarrow \exists \sup A$$

Доказательство:

Пусть B — множество всех верхних граней A. Так как $C \in B$, то $B \neq \varnothing$. Поскольку $A \leq B$, по принципу полноты существует разделяющий элемент c — нетрудно убедиться, что он будет единственным и что он будет точной верхней гранью.

Определение 3.20: Монотонная последовательность

Если $\forall n \in N$ $a_n \leq a_{n+1}$, то $\{a_n\}$ называется неубывающей, если $a_n < a_{n+1}$ — возрастающей.
Если $\forall n \in N$ $a_n \geq a_{n+1}$, то $\{a_n\}$ называется невозрастающей, если $a_n > a_{n+1}$ — убывающей.

Будем обозначать убывающую $\downarrow\downarrow$, невозрастающую $\downarrow$. Аналогично возрастающую $\uparrow\uparrow$ и неубывающую $\uparrow$.

Теорема 3.21: Теорема Вейерштрасса

Если $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, то у нее есть предел.

Доказательство:

Не умаляя общности, $\{a_n\} \uparrow$.

$$\exists \sup\{a_n\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \sup\{a_n\} - \varepsilon < a_{n_0} \leq \sup\{a_n\} < \sup\{a_n\} + \varepsilon$$

Но последовательность не убывает, поэтому

$$\forall n \geq n_0 \; |a_n - \sup\{a_n\}| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n$$

Если $\{a_n\} \downarrow$, рассмотрим $\{-a_n\}$

Пример 3.22

$c > 0, a_1 = 1, a_n = \sqrt{c + a_{n-1}}$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c + a_{n-1}} = \sqrt{c + A}$$

$$A = \sqrt{c + A}$$

$$\begin{cases} A^2 - A - C = 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

Докажем, что $\exists A$.

1. $a_1 = 1 < \sqrt{c + 1} = a_2$

   $a_{n-1} < a_n$

   $a_n = \sqrt{c + a_{n-1}} < \sqrt{c + a_n} = a_{n-1}$

2. $a_1 \leq 10 + 2c$

   $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} \leq \sqrt{c + 10 + 2c} < 10 + 2c$

Пример 3.23

$$a_1 = a > 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$$

1.
$$a_{n+1} \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{a}{a_n}} = \sqrt{a}$$

2. Теперь сделаем предельный переход:
$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) \Leftrightarrow A^2 = a \Rightarrow A = \sqrt{a}$$

3.
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = a_n$$

Оценим скорость сходимости:

$$\{a_n\} \downarrow$$
$$|a_{n+1} \pm \sqrt{a}| = \frac{|a_n^2 + a \pm 2\sqrt{a}a_n|}{2a_n} = \frac{|a_n \pm \sqrt{a}|^2}{2a_n}$$
$$\frac{a_1 - \sqrt{a}}{a_1 + \sqrt{a}} = q, 0 < q < 1$$
$$\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = q^{2^{n-1}} \Leftrightarrow a_n = \frac{\sqrt{a}(q^{2^{n-1}} + 1)}{1 - q^{2^{n-1}}}$$
$$|a_n - \sqrt{a}| = \sqrt{a}\frac{2q^{2^{n-1}}}{1 - q^{2^{n-1}}}$$

Это называется “Итерационная формула Герона”.

3.3. Число e

Теорема 3.24: Число e

Существует предел этой последовательности:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- $a_n < 3$ — доказано в ДЗ

- Покажем возрастание

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$
$$< 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) <$$
$$< a_{n+1}$$

Определение 3.25: Число e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Определение 3.26

$$\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M\ \exists N : \forall n > N\ p_n > M$$

Лемма 3.27

$$\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} q_n = -\infty$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$$

1. Пусть $n_k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n_k = +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$$
$$\exists K : \forall k > K\ n_k > N \Rightarrow \left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^n_k - e\right| < \varepsilon$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$, существует последовательность

$$\{n_k\} : n_k \leq p_k < n_k + 1$$

.

Тогда

$$\forall k > K$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}} \le \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} \le \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \cdot \left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

По теорема о зажатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$

2. $\exists N_1 : \forall n > N_1\ q_n < -1$

   Пусть $q_n = -\beta_n, \beta_n > 1\ \forall n > N_1$

$$\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = \left(1-\frac{1}{\beta_n}\right)^{-\beta_n} = \left(\frac{\beta_n}{\beta_n-1}\right)^{\beta_n} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{\beta_n-1}\right)^{\beta_n-1}\left(1+\frac{1}{\beta_n-1}\right) \to e$$

3.4. Подпоследовательности и частичные пределы

Определение 3.28: Подпоследовательность

Пусть $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — последовательность натуральных чисел и $\lim\limits_{n\to\infty} n_k = +\infty$

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность, тогда последовательность $b_k = a_{n_k}$ называют подпоследовательностью $\{a_n\}$

Определение 3.29: Частичный предел

Число B называют частичным пределом, если $\exists b_k = a_{n_k} : \lim\limits_{n\to\infty} b_k = b$

Лемма 3.30

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \forall\{b_k\} \lim_{n\to\infty} b_k = A$$

Доказательство:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N |a_n - A| < \varepsilon$$
$$\{n_k\} \uparrow\uparrow \Rightarrow \exists K : \forall k > K\ n_k > N \Rightarrow \forall k > K\ |b_k - A| < \varepsilon$$

Теорема 3.31: Теорема Больцано-Вейерштрасса

Если $\{a_n\}$ ограничена, то у нее есть частичный предел.

Доказательство:

$$\exists c > 0 : \forall n \in N \ |a_n| \leq C$$
$$I_1 = [-C, C]$$

Разобьем отрезок пополам, в какой-то половине будет бесконечное число элементов последовательности. Не умаляя общности это правая половина.

$$I_2 = [0, C]$$
$$I_3 = \left[0, \frac{C}{2}\right] \vee I_3 = \left[\frac{C}{2}, C\right]$$
$$\vdots$$

Продолжим так деление, получим последовательность стягивающихся отрезков, так как $|I_n| = \frac{|I_1|}{2^{n-1}}$

Значит $\exists! b : \forall n \in N \ b \in I_n$.

Выберем элементы из $\{a_n\}$ из полученных отрезков, предел такой подпоследовательности будет b.

Определение 3.32: Верхний и нижний пределы

Пусть $\{a_n\}$ ограничена. $M_n = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$.
Очевидно, что $\{M_n\} \downarrow$ и $M_n \geq \inf\{a_n\}$. Значит у $\{M_n\}$ есть предел.
$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$ называется верхним пределом последовательности $\{a_n\}$
Аналогично $m_n = \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} m_n = m$ называется нижним пределом последовательности $\{a_n\}$

Теорема 3.33

Пусть $\{a_n\}$ ограничена.
Тогда m, M — частичные пределы $\{a_n\}$.
Если b — частичный предел, то $b \in [m, M]$

Доказательство:

Пусть

$$\exists n_1 : M_1 - 1 < a_{n_1} \leq M_1$$
$$\exists n_2 > n_1 : M_{n_1} + \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq M_{n_1}$$

Продолжим:

$$\exists n_{k+1} > n_k : M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \le M_{n_k}$$

Получаем $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$

$$b_k = a_{n_k} \Rightarrow M_{n_k} - \frac{1}{k+1} < b_{k+1} \le M_{n_k}$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M = \lim_{n\to\infty} M_{n_k}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(M_{n_k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{k\to\infty} b_{k+1} = \lim_{k\to\infty} M_{n_k}$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k = M$$

Для нижнего предела аналогично.
Пусть $\lim\limits_{l\to\infty} a_{n_l} = a$.

$$m_{n_l-1} \le a_{n_l} \le M_{n_l-1}$$

$$\Downarrow$$

$$m \le a \le M$$

Теорема 3.34

Ограниченная последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $\Leftrightarrow m = M$

- $\Rightarrow$

  Уже доказано

- $\Leftarrow$

$$m_n \le a_{n+1} \le M_n$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n = m = M = \lim_{n\to\infty} M_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = M$$

Пример 3.35

1. $a_n = n$

   $m = M = +\infty$

2. $a_n = (-1)^n n$

   $m = -\infty$

   $M = +\infty$

Определение 3.36: Фундаментальная последовательность

$\{a_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Теорема 3.37: Критерий Коши

$\{a_n\}$ имеет предел $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ — фундаментальная

Доказательство:

- $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall m, n > N\ |a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \varepsilon$$

- $\Leftarrow$

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists N : \forall n > N |a_{N+1} - a_n| < 1$$
$$\Downarrow$$
$$a_{N+1} - 1 < a_n < A_{N+1} + 1$$

Значит $\{a_n\}$ — ограниченная.

Значит по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists \{a_{n_k}\} : \lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = A$

Проверим, что это предел всей последовательности.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K : \forall k > K\ |a_{n_k} - A| < \varepsilon$$
$$\exists N_1 : \forall n, m > N_1\ |a_m - a_n| < \varepsilon$$
$$M = \max\{N_1, K\}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall n, k > M\ |a_n - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Пример 3.38

1. $a_1 = 1, a_n = 1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}$
2. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq 1$$
$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{4}$$
$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_n - a_{n-1}|}{4} \leq \frac{|a_{n-1} - a_{n-2}|}{4^2} \leq \frac{|a_1 - a_2|}{4^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$$
$$m > n$$
$$\Downarrow$$
$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2} + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^{m-2}} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4^n}$$
$$\frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{1+3n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

2.

Покажем, что критерий Коши не выполняется.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N\ \exists n, m > N : |a_n - a_m| \geq \varepsilon$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2}, n = N + 1, m = 2N + 2 = 2n$$
$$|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

4. Числовые ряды

4.1. Что это такое?

Определение 4.1

Пусть дана $\{a_n\}$.

Формальная сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}$ называется числовым рядом.

Последовательность $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ называется последовательностью частичных сумм ряда.

Элементы последовательности $\{a_n\}$ называются элементами ряда.

Если $\exists S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$, то S называется суммой ряда и если S существует, то говорят, что ряд сходится.

Пример 4.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

1. $q = 0$

   $S = 0$ (тут считаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$

2. $q = 1$

   $S_N = N + 1 \to +\infty$

3. $S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$

   - $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{1-q}$
   - $|q| > 1 \Rightarrow$ расходится
   - $q = -1 \Rightarrow$ предела тоже нет

Пример 4.3

$$\sum_{n=2}^{\infty} = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Суммирование по Чезаро:

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}$$

По такому суммированию

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}=(-1)^n=-\frac{1}{2}$$

Суммирование по Пуассону-Абелю:

$$S=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

По такому суммированию

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$$

S_n имеет предел $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:\forall n,m>N\ |S_n-S_m|<\varepsilon$

$$m=n+p,p\in\mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$$

Теорема 4.4: Критерий Коши

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall n>N,p\in\mathbb{N}\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$$

Пример 4.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^3}$$

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\arctan n}{n^3} < \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{n^3} < \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{n^2} <$$
$$< \frac{\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

$N_\varepsilon = \left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$

Пример 4.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N, p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \geq \varepsilon$$

Пусть $n = N + 1, p = 2n$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} < n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$$

Предложение 4.7

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Пусть $S_0 = 0$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

Пример 4.8

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n+10}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+10}{n+10}-\frac{5}{n+10}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+10}{5}}\right)^{\left(\frac{n+10}{5}\right)(-5)-10}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+10}{5}}\right)^{\left(\frac{n+10}{5}\right)(-5)}\cdot\left(1+\frac{1}{-\frac{n+10}{5}}\right)^{-10}=\frac{1}{e^5}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e^5}$$

Значит ряд расходится.

Теорема 4.9: Критерий сходимости ряда с неотрицательными слагаемыми

Ряд сходится $\Leftrightarrow S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ — огр

Доказательство тривиально (по теореме Вейерштрасса).

Предложение 4.10: Признак сравнения

Пусть $\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n>n_0\ 0\le a_n\le b_n$, где a_n — элементы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, а b_n — элементы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Тогда если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

если же $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ расходится.

Доказательство:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится $\Rightarrow S_n^{(b)}$ ограничено $\Rightarrow S_n^{(a)}$ ограничено $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.

В другую сторону аналогично.

Пример 4.11

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}}, \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Пример 4.12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

При $n > 1$:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ сходится, значит сходится и наш.

Предложение 4.13: Признак разрежения Коши

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\{a_n\}$ не возрастает.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$

Доказательство:

$$2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \ldots \leq a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^n}$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^n} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}}$$

Отсюда нетрудно доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Аналогично $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_k$ расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 4.14

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Теорема 4.15: Признак сравнения в предельной форме

Пусть

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \; a_n \geq 0, b_n > 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in (0, +\infty)$$

Тогда либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство:
Не умаляя общности условия выполняются с $n = 1$.

$$\varepsilon = \frac{A}{2} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N$$
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} b_n < a_n < \frac{3A}{2} b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3A}{2} b_n \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{сх. по признаку сравнения}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2} b_n \text{ расх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{расх. по признаку сравнения}$$

4.2. Абсолютная и условная сходимость ряда

Определение 4.16: Абсолютная сходимость

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютной сходящейся, если сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Определение 4.17: Условная сходимость

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но расходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Теорема 4.18: Мажорантный признак Вейерштрасса

Пусть $\forall n > N \; |a_n| \leq b_n$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пример 4.19

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

1. Оценим модуль сверху $\frac{1}{n\sqrt{n}}$

2.
   - $|x| \le 1 \Rightarrow \frac{x^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$
   - $|x| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n^2} = \infty$

Теорема 4.20: Признак Д'аламбера

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$.
Тогда

1. $q < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2. $q > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

3. $q = 1 \Rightarrow$ может быть что угодно

1. $q < 1$

$$\exists \alpha < 1 : q < \alpha$$
$$\exists N : \forall n > N \ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \alpha$$
$$|a_n| = |a_1| \cdot \left|\frac{a_2}{a_1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| < |a_1|\alpha^{n-1}$$
$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \text{ сх.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сх.}$$

2. $q > 1$

   $\exists N : \forall n > N \ |a_{n+1}| > |a_n| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

3. Пристально смотрим на

   - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
   - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Пример 4.21

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \neq 0$$

(на самом деле это экспонента)

Теорема 4.22: Радикальный признак Коши

Пусть дан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

Тогда

1. $q < 1 \Rightarrow$ сходится
2. $q > 1 \Rightarrow$ расходится
3. $q = 1 \Rightarrow$ что угодно

1. $q < 1$

$$\exists \alpha : q < \alpha < 1$$
$$\exists N : \forall n > N \; |a_n| < \alpha^n$$

2. $q > 1$

   $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \exists$ бесконечно много $a_n : |a_n| > 1$

3. Вновь пристально смотрим на

   - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
   - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Пример 4.23

$$a_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \Downarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$$

Значит из применимости Д'аламбера следует применимость Коши

Пример 4.24

Пусть $\tau(n)$ — количество делителей

Исследовать на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n\ x > 0$

Понятно, что по Д'аламберу проверить нереально.
Проверим по Коши:

$$x \le \sqrt[n]{\tau(n)} x \le \sqrt[n]{n} x$$

Штука посередине сходится к x.
Значит если $x < 1$, ряд сходится, если $x > 1$, то расходится, а в случае $x = 1$ очевидно не сходится.

Теорема 4.25: Признак Гаусса

Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $a_n \ge 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

Пусть

$$\exists \delta > 0 : \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \gamma_n \cdot \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

причем γ_n — ограниченная последовательность.

1. $\alpha < 1 \Rightarrow$ расходится
2. $\alpha > 1 \Rightarrow$ сходится
3. $\alpha = 1$
   (a) $\beta > 1 \Rightarrow$ сходится
   (b) $\beta \le 1 \Rightarrow$ расходится

Пример 4.26

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
  $$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + 0$$
  $$\alpha = 1,\ \beta = 1 \Rightarrow \text{ расходится}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$
  $$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$$
  $$\alpha = 1,\ \beta = 2 \Rightarrow \text{ сходится}$$

Упражнение 4.27

$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — перестановка

1. Теорема Дирихле

   Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно. Тогда для любой σ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится абсолютно к тому же пределу

2. Теорема Римана

   Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Тогда $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists sigma : \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = A$. A может быть равно $\pm\infty, \infty$. Так же можно переставить так, чтобы конечно суммы не было.

5. Топология прямой

5.1. Покрытие и предельные точки

Определение 5.1

Система множеств $S = \{U_\alpha\}$ называется покрытием множества A, если $A \subseteq \bigcup\limits_{U_\alpha \in S} U_\alpha$

Теорема 5.2: Принцип Бореля-Лебега

Из любого покрытия отрезка $[a, b]$ системы интервалов $S = \{J_\alpha\}$ можно выбрать подсистему в S, состоющую ищ конечного числа интервалов и покрывающую $[a, b]$.

Доказательство:

Предположим обратное.

Делим $[a, b]$ пополам и выбираем половину, которую нельзя покрыть конечным числом интервалов из S. Обозначим ее за I_1. Продолжаем так деление. Получаем последовательность вложенных отрезков, имеющих ровно одну общую точку c.

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$$
$$c \in [a, b] \Rightarrow \exists J_\alpha : c \in J_\alpha$$

Пусть $|J_\alpha| = \varepsilon$.

Пусть $J_\alpha = (\beta, \gamma)$, сделаем $\varepsilon = \min\{\frac{c-\beta}{2}, \frac{\gamma-c}{2}\}$ $\exists k : |I_k| < \varepsilon \Rightarrow I_k \subset J_\alpha$ — противоречие

Определение 5.3: Предельная точка 1

Пусть дано множество A.
Тогда a называется предельной точной множества A, если $\forall \mathring{U}(a)$ $\exists b \in A : b \in \mathring{U}(a)$

Определение 5.4: Предельная точка 2

Пусть дано множество A. Тогда a называется предельной точной множества A, если $\forall U(a)$ существует бесконечно много элементов из A, лежащих в $U(a)$

Упражнение 5.5

Два определения выше равносильны

Частичный предел не всегда является предельной точкой множества значений последовательности.

Пример 5.6

Пусть $A = (0, 1)$
Тогда множество предельных точек $A' = [0, 1]$

Теорема 5.7: Принцип Больцано-Вейерштрасса

Пусть A — бесконечное множество (бесконечное число элементов), причем ограниченное (то есть $\exists C > 0 : \forall a \in A\ |a| \leq C$
Тогда существует хотя бы одна предельная точка множества A

Доказательство:
Пусть нет ни одной предельной точки.
Для любой точки a отрезка $[-c, c]$ $\exists U(a)$, в которой лежит конечное число элементов A.
Значит $[-c, c] \subseteq \bigcup\limits_{a \in [-c,c]} U(a)$
Выделим конечное подпокрытие. В каждом интервале оттуда конечное число элементов из A, а значит и в $[-c, c]$ тоже — проиворечие.

Предложение 5.8

Пусть A — бесконечное несчетное множество.
Тогда у A есть предельная точка.

Доказательство:
Разобием прямую на отрезки $[n, n+1]$. В каком-то отрезке будет хотя бы счетное число элементов. Применим к нему принцип Больцано-Вейерштрасса — доказали.

5.2. Открытые и замкнутые множества

Определение 5.9

Если $a \in A$ и $\exists U(a) : U(a) \subset A$, то a — внутренняя точка множества A.
Если $\forall U(b)$ $\exists$ точки из A и точки из $\mathbb{R} \setminus A$, лежащие в $U(b)$, то b называется граничной точкой множества A.
Если $c \in A$ и $\exists U(c) : U(c) \cap A = c$, то c называется изолированной.

Пример 5.10

$$A = [0, 1] \cup (2, 3) \cup 4, 5$$

Тогда $A' = [0, 1] \cup [2, 3]$ Граничные точки $\delta A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ Изолированные точки: $\{4, 5\}$

Определение 5.11

Открытое множество — это такое множество A, что любая его точка внутренняя.

Пример 5.12

$$(0, 1)$$

Пример 5.13

Множество B замкнутое, если $\mathbb{R} \setminus B$ — открыто.

Упражнение 5.14

1. Пусть $t \in T$ и $\forall t \in T$ U_t — открытое множество $\Rightarrow \bigcup\limits_{t \in T} U_t$ открыто.
2. $\bigcap\limits_{n=1}^{m} U_m$ открыто, если $U_1, \ldots, U_m$ — открытые
3. Если V_t — замкнутые множество, то $\bigcap\limits_{t \in T} V_t$ — замкнутое общество
4. $\bigcup\limits_{n=1}^{m} V_m$ замкнуто, если $V_1, \ldots, V_m$ — замкнутые
5. Любое открытое множество на прямой можно представить в виде не больше чем счетного объединения интервалов (возможно бесконечных)
6. Не существует открытых множеств U_1, U_2 таких, что

$$U_1, U_2 \neq \mathbb{R}, U_1, U_2 \neq \varnothing, U_1 \cap U_2 = \varnothing$$
$$U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$$

   (Лобода говорит, что это односвязность, Тимофей, что связность)

7. То же верно и для замкнутых V_1, V_2

8. Единственные открытые и замкнутые множества на прямой — $\varnothing$ и $\mathbb{R}$

Теорема 5.15

Множество B замкнуто тогда и только тогда, когда $B' \subseteq B$

Доказательство:

- $\Rightarrow$

  $\mathbb{R} \setminus B$ — открыто, поэтому все элементы $\mathbb{R}$ B внутренние $\Rightarrow$ не являются предельной точкой $B \Rightarrow$ все предельные лежат в B

- $\Leftarrow$

  Все предельные точки лежат в B, поэтому каждая точка $\mathbb{R} \setminus B$ содержит окрестность, в которой нет точек B. Значит $\mathbb{R} \setminus B$ открыто, а значит B замкнуто.

Теорема 5.16

Множества частичных пределов ограниченной последовательности $\{a_n\}$ замкнуто.

Обозначим множество частичных пределов через B. Пусть a — предельная точка $B \Rightarrow \forall U(a)$ существует бесконечно много точек из B. Значит $\forall V(a)$ существует бесконечно много точек $\{a_n\}$. Если $V(b)$ достаточно мала, то $V(b) \subseteq U(a)$, так как $U(a)$ — открытое. Это означает, что внутри $U(a)$ бесконечно много точек из $\{a_n\}$, значит a — частичный предел.

5.3. Компакты

Определение 5.17

Множество $K \subset \mathbb{R}$ называется компактом, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Теорема 5.18

K — компакт на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из из условий:

1. K ограничено и замкнуто
2. Любое бесконечное подмножество K имеет предельную точку, которая принадлежит K

6. Предел функции

6.1. Определение

Определение 6.1: Предел функции по Коши

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$.
Пусть $a \in E$. Тогда $\lim\limits_{x(\in E)\to a} f(x) = A$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : x \in E \land 0 < |x-a| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Через окрестности:

$$\forall V_\varepsilon(A)\ \exists \mathring{U}_\delta(a) : \forall x \in E \cap \mathring{U}_\delta(a)\ f(x) \in V_\varepsilon(A)$$

Определение 6.2: Предел функции по Гейне

$$\lim_{x(\in E)\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{a_n\} \in E : (\lim_{n\to\infty} a_n = a \land a_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N})\ \lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$$

Пример 6.3

$\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta |x-a| < \varepsilon$$
$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a| < \delta|x - a + 2a| < \delta(\delta + 2|a|) < \varepsilon$$

Последнее неравенство очевидно имеет положительные корни.

Пример 6.4: Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Не имеет предела ни в какой точке.

Теорема 6.5

Определение по Коши $\Leftrightarrow$ определение по Гейне

- $\Rightarrow$

  Рассмотрим $\forall$-ю $\{a_n\} : a_n \neq a \ \forall n \in \mathbb{N}$ и $a_n \to a$

  Тогда $\forall \mathring{U}_\varepsilon(a) \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ a_n \in \mathring{U}_\varepsilon(a) \Rightarrow f(a_n) \in V_\varepsilon(A)$

- $\Leftarrow$

  От противного

  $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x : 0 < |x - a| < \varepsilon \wedge |f(x) - A| \geq \varepsilon$

  При $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}} : |f(a_n) - A| \geq \varepsilon$

  Имеем $\{x_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a \ \forall n \in \mathbb{N}$.

  Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, но $0 = \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - A| \geq eps > 0$

Теорема 6.6: Свойства пределов

Пусть $f, g, h : E \to \mathbb{R}$.
$a \in E, \lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to b} g(x) = B$.
Тогда

1. A — единственный предел функции f
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$
4. Пусть $B \neq 0, g(x) \neq 0 \ \forall x \in E \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$
5. $\exists \mathring{U}(a) : \forall x \in \mathring{U}(a) \ f(x) \leq g(x) \Rightarrow A \leq B$
6. $\exists C > 0, \mathring{U}(a) : \forall x \in \mathring{U}(a) \ |f(x)| \leq C$
7. Если $\exists \mathring{U}(a) : \forall x \in \mathring{U}(a) \ f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ и $A = B$, то $\lim\limits_{x\to a} = h(x) = A = B$
8. Если $B \neq 0$, то $\exists \mathring{U}(a) : \forall x \in \mathring{U}(a) \ |g(x)| \geq \frac{|B|}{2}$

$1 - 5, 7$ следуют из свойств пределов последовательности и определения по Гейне

$6, 8$ следуют из определения по Коши

Теорема 6.7

$$g : D \to \mathbb{R}, b \in D$$
$$f : E \to D, a \in E$$
$$\exists \mathring{U}(a) : \forall x \in \mathring{U}(a) \ f(x) \neq b$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \lim_{y \to b} g(y) = c \Rightarrow \lim_{x \to a} g(f(x)) = c$$

$\forall \{a_n\} \subset E : a_n \to a, a_n \neq a \ \forall n \in \mathbb{N} \ f(a_n) \to b, f(a_n) \neq b \ \forall n \in \mathbb{N}$ при достаточно больших n

Можно считать, что $\forall n \in \mathbb{N} \ f(a_n) \neq b$

Тогда $g(f(a_n)) \to c$ верно по определению по Гейне

Ну по Коши там тоже чето получится.

Пример 6.8

$$\lim_{y \to \infty} g(y) = A, f(x) = \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x \to 0+} g\left(\frac{1}{x}\right) = A$$

Теорема 6.9: Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство:

Покажем, что

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \ x \cos x \leq \sin x \leq x$$

Длина окружности — супремум длин вписанных в нее ломанных. Длина ломанной больше или равна длины хорды, стягивающей дугу. Отсюда длина дуги (x) больше или равна хорды, которая больше равна $\sin(x)$.

Тогда $2 \tan x \geq 2x$

$0 < \sin x \leq x \Rightarrow$ по лемме о зажатом пределе $\lim\limits_{x \to 0+} \sin x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0+} \cos x = \lim\limits_{x \to 0+} (1 - 2 \sin \frac{x}{2}) = 1$

$$x \cos x \leq \sin x \leq x$$
$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Возьмем $\lim\limits_{x\to 0+}$, по лемме о зажатом пределе получим $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$
Для отрицательных x верно в силу четности всех функций.

Пример 6.10

1. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

   $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{x} = 7$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = \begin{bmatrix} \arctan x = t \\ x = \tan t \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\tan t} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \begin{bmatrix} \arcsin x = t \\ x = \sin t \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sin t} = 1$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}$

Определение 6.11

Функция f эквивалентна функции g, если $\exists \gamma$: при $x \to a$ верно $f(x) = \gamma(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} \gamma(x) = 1$

При $g(x) \neq 0$ при $x \to a$ это равносильно $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Пример 6.12

При $x \to 0$:

$$\tan x \sim \sin x \sim x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

Теперь можем посчитать:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\arctan 10x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{10x}=\frac{3}{10}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}$$

Важно: во втором пределе нельзя заменить $\tan x$ и $\sin x$ на x — получится бред.

Теорема 6.13: Второй замечательный предел

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Доказательство:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=e$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:$$
$$\left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}-e\right|<\varepsilon$$
$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right|<\varepsilon$$

Пусть $x>N+100$

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Пусть $x\to-\infty$, сделаем $t=-x, t\to+\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t$$

Пример 6.14

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\begin{bmatrix} e^x-1=t \\ x=\ln(1+t) \\ t\to 0\end{bmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=$$
$$=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}=\alpha\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\alpha$$

6.2. Асимптотика

Определение 6.15

Пусть $f,g:E\to\mathbb{R}$ и a — предельная точка E и существует $\mathring{U}(a):\forall x\in\mathring{U}(a)\cap E\ f(x)=h(x)\cdot g(x)$, где $h:\mathring{U}(a)\cap E\to\mathbb{R}$
Тогда:

1. Если $h(x)\to 1$ при $x\to a$, то $f\sim g, x\to a$
2. Если $\lim\limits_{x\to a}h(x)=0$, то $f=o(g), x\to a$
3. Если h ограничено на $\mathring{U}(a)\cap E$, то $f=O(g)$

Если в $\mathring{U}(a)\cap E\ g(x)\neq 0$, то

1. $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$
2. $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
3. $\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ — ограниченная функция в $\mathring{U}(a)\cap E$

Пример 6.16

$f \sim g, x \to a \Leftrightarrow f - g = o(f), f - g = o(g), x \to a$

- $\Rightarrow$

$$f\ g, x \to a \Rightarrow f(x) = h(x) \cdot g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = (h(x) - 1) \cdot g(x)$$
$$\lim_{x \to a} h(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to a} (h(x) - 1) = 0$$

- $\Leftarrow$

$$f - g = o(g), x \to a \Rightarrow f(x) - g(x) = h(x) \cdot g(x) \Rightarrow f(x) = (h(x) + 1) \cdot g(x)$$
$$\lim_{x \to a} h(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} (h(x) + 1) = 1$$

Пример 6.17

Пусть $m > n > 0$

1. $x \to 0 \Rightarrow x^m = o(x^n)$
2. $x \to +\infty \Rightarrow x^n = o(x^m)$
3. $f(x) = x + \sin x = O(x), x \to +\infty$
4. $f(x) = x + \sin x = O(x), x \to 0$

   Так как $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Определение 6.18

Бесконечно малая функция при $x \to a$ обозначается $o(1)$
Ограниченная функция при $x \to a$ (в $\mathring{U}(a)$) обозначается $O(1)$

Асимптотические равенства:

1. $\sin x = x + o(x),\ x \to 0$
2. $\tan x = x + o(x),\ x \to 0$
3. $\arctan x = x + o(x),\ x \to 0$
4. $\arcsin x = x + o(x),\ x \to 0$
5. $\ln(1+x) = x + o(x),\ x \to 0$
6. $e^x = 1 + x + o(x),\ x \to 0$
7. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x),\ x \to 0$
8. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x),\ x \to 0$

Пример 6.19

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{e^{\sin^2 x} - 1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{e^{\sin^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Также можно использовать точные равенства:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{e^{\sin^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \frac{x^2}{2} + o(x))}{e^{(x+o(x))^2} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x) + o(\frac{x^2}{2} + o(x))}{(x+o(x))^2 + o((x+o(x))^2)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-\frac{1}{2} + o(1) + o(-\frac{1}{2} + o(1))}{x^2(1 + 2o(1) + (o(1)^2) + o(1 + 2o(1) + (o(1))^2)} = -\frac{1}{2}$$

Пример 6.20

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3}$$

Формулы Тейлора при $x \to 0$:

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$

2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$

3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{x^k}{k} + o(x^n)$

5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

Теперь можем решить тот предел.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(-\frac{1}{6} + o(1))}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Например, из
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$
понятно, что $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$
(кажется нам просто этот предел дали, или я что-то пропустил)

6.3. Важные теоремы

Теорема 6.21: Критерий Коши

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

- $\Rightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall x_1, x_2 \in \mathring{U}_\delta(a)\ |f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- $\Leftarrow$

  Пусть $\{a_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{f(a_n)\}$ — фундаментальная. Значит $\exists B = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.

  Пусть $\{b_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a,\ b_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$. По аналогичным рассуждениям $\exists C = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

  Аналогично для
$$c_n = \begin{cases} a_k, n = 2k - 1 \\ b_k, n = 2k \end{cases}$$

  Откуда получим, что $B = C$

Определение 6.22

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2$

1. $f(x_1) \le f(x_2) \Rightarrow f \uparrow$
2. $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow\uparrow$
3. $f(x_1) \ge f(x_2) \Rightarrow f \downarrow$
4. $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow\downarrow$

Определение 6.23

$$E_a^+ = \{x \in E : x > a\}$$
$$E_a^- = \{x \in E : x < a\}$$

Если смотреть пределы для a на таких областях, получим предел сверху / снизу

Теорема 6.24: Теорема Вейерштрасса

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$

1. Если $f \uparrow$ и ограничена сверху на E_a^-, а a — предельная точка E_a^-, то $\exists \lim\limits_{x \to a-} f(x)$
2. Если $f \downarrow$ и ограничена снизу E_a^+, а a — предельная точка E_a^+, то $\exists \lim\limits_{x \to a+} f(x)$

Доказательство:
Пусть $f \downarrow$ и ограниченно снизу на E_a^+.
Значит

$$\exists \inf_{x \in E_a^+} f(x) = A$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in E_a^+ : \forall x < x_0 \land x \in E_a^+ \ A \le f(f)x < A + \varepsilon$$

6.4. Предел по базе

Определение 6.25: База

Пусть E — область определения функции, а $B = \{b\}$ — бесконечная система непустых подмножеств E и $\forall b_1, b_2 \in B$ и $b_1 \cap b_2 = \varnothing \ \exists b_3 \in B : b_3 \subset b_1 \cap b_2$.
Тогда B называется базой множеств множества E.
b — окончание базы B.

Определение 6.26

Пусть B — база множеств на E

$$\lim_B f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in B : \forall x \in b \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

6.5. Непрерывность

Определение 6.27: Непрерывность

Дана $f : E \to \mathbb{R}$

1. $f \in C(a) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta,\ x \in E\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
2. $f \in C(a) \Leftrightarrow a$ — изолированная точка или a — предельная точка и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
3. $f \in C(a) \Leftrightarrow a$ — изолированная точка или a — предельная точка и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$
4. $f \in C(a) \Leftrightarrow a$ — изолированная точка или a — предельная точка и $\exists \alpha : E \to \mathbb{R} : f(x) = f(a) + \alpha(x)$
5. $f \in C(a) \Leftrightarrow a$ — изолированная точка или a — предельная точка и $\forall V(f(a))\ \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap E\ f(x) \in V(f(a))$
6. $f \in C(a) \Leftrightarrow \forall \{a_n\} \subset E,\ a_n \to a,\ f(a_n) \to f(a)$

Упражнение 6.28

Пусть a — предельная точка E.
$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A$
$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = B$
$f \in C(a) \Leftrightarrow A = B$

Пусть $f, g \in C(a)$. Тогда

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \alpha f(x) + \beta g(x) \in C(a)$
2. $f(x)g(x) \in C(a)$
3. Если $g(x) \neq 0$ $(x \in E)$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \in C(a)$
4. $\exists C > 0,\ \exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap E\ |f(x)| \leq C$
5. Если $f(a) \neq 0$, то $\exists U(a) : \forall x \in U(a)\ |f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}$

Если a — изолированная точка, то очевидно.
Иначе a — предельная точка. Вышеописанные свойства следуют из ранее доказанных свойств пределов.

Теорема 6.29: Непрерывность композиции

Пусть $f : E \to D,\ a \in E, f \in C(a)$
Пусть $g : D \to \mathbb{R},\ g \in C(f(a))$
Тогда $g(f(a)) \in C(a)$.

Доказательство:
$\{a_n\} \subset E,\ a_n \to a$.
Тогда $f(a_n) \to f(a)$.
$g \in C(f(a)) \Rightarrow g(f(a_n)) \to g(f(a))$

Пример 6.30

- $\sqrt{y} \in C(1)$
- $\sin x \in C\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Следствие:
$\sqrt{\sin x} \in C\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$

Определение 6.31: Функция, непрерывная на множестве

$f \in C(E) \Leftrightarrow \forall x \in E\ f \in C(x)$

Теорема 6.32

Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Тогда $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$

Доказательство:
Пусть $I_0 = [a, b]$. Поделим $[a, b]$ пополам.
Если в точке $\frac{a+b}{2}$ функция принимает нулевое значение, то нашли корень.
Иначе либо на $[a, \frac{a+b}{2}]$, либо на $[\frac{a+b}{2}, b]$ функция принимает разные значения на концах. Пусть это $I_1 = [a_1, b_1]$. Тогда $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.
Поделим I_1 пополам и продолжаем процедуру.
Либо найдем корень, либо построим последовательность стягивающихся отрезков $\{I_n\}$. Значит $\exists c = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c)$$
$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$$

По предельному переходу в неравенстве:

$$f^2(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \le 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

Пример 6.33

Докажите, что $x^3 - 3x + 1$ имеет 3 действительных корня.

$f(x) = x^3 - 3x + 1 \in C(\mathbb{R})$
$f(2) < 0, f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0.$
Значит $\exists c_1 \in (-2, 0), c_2 \in (0, 1), c_3 \in (1, 2) : f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0.$

Теорема 6.34: Первая теорема Вейерштрасса

$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ ограничена на $[a, b]$.

Доказательство:
Пусть f неограничена на $[a, b]$.
Тогда $\exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n.$
$\{x_n\} \in [a, b] \Rightarrow$ по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$.
$f \in C[a, b] \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$.
Но $|f(x_{n_k})| > n_k \Rightarrow \nexists \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ — противоречие.
Значит f ограничена на $[a, b]$

Теорема 6.35: Вторая теорема Вейерштрасса

Пусть $f \in C[a, b]$.
Тогда

$$\exists x_1 \in [a, b] : \inf_{[a,b]} f(x) = f(x_1)$$
$$\exists x_2 \in [a, b] : \sup_{[a,b]} f(x) = f(x_2)$$

Доказательство:
Пусть, например, $\nexists x_2$.
По первой теореме Вейерштрасса $\exists C : \forall x \in [a, b]\ |f(x)| < C \Rightarrow \exists M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$
Но x_2 не существует, значит $M > f(x)\ \forall x \in [a, b]$.
$M - f(x) > 0\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \in C[a, b] \Rightarrow g$ ограничена на $[a, b]$.
Но $\forall \varepsilon > 0\ \exists x : M - f(x) < \varepsilon \Rightarrow g$ неограничена на $[a, b]$ — противоречие.
Значит x_2 существует, для x_1 аналогично.

Упражнение 6.36

Доказать эти две теоремы для компактов.

Теорема 6.37: Теорема Больцано-Коши

Пусть $f \in C[a,b]$, $M = \max\limits_{[a,b]} f(x), m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$

Тогда $\forall C \in [m, M]\ \exists c \in [a,b] : f(c) = C$

Доказательство:

Если $C = m$ или $C = M$, то уже доказали (вторая теорема Вейерштрасса).

Иначе по второй теореме Вейерштрасса найдем x_1, x_2. Введем $g(x) = f(x) - C$.

Получим, что $g(x_1) = f(x_1) - C < 0$, $g(x_2) = f(x_2) - C > 0$. Ранее доказали, что у такой функции существует корень $c \in [a,b]$.

$g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - C = 0 \Rightarrow f(c) = C$.

Определение 6.38: Точка разрыва

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и a — предельная точка E, $a \in E$.
Тогда a — точка разрыва f, если $f \notin C(a)$

Пример 6.39

$f(x) = \frac{1}{x} \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$
Но если определить в 0, то $f \notin C(\mathbb{R})$

Определение 6.40: Точка устранимого разрыва

Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} \neq f(a)$.

Тогда a — точка устранимого разрыва f, если $f \notin C(a)$

Пример 6.41

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

Определение 6.42: Точка разрыва I рода (скачок)

Пусть a — предельная точка E_a^- и E_a^+.
Если $A = \lim\limits_{x \to a-} \neq \lim\limits_{x \to a+} = B$, то a — точка устранимого разрыва.

Пример 6.43

$$f(x) = \begin{cases} -1, x \leq 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

Определение 6.44: Точка разрыва II рода

Пусть a — предельная точка E_a^+ или E_a^-, и не существует соответствующего одностороннего предела.
Тогда a — точка разрыва II рода.

Пример 6.45

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 2025, x = 0 \end{cases}$$

Теорема 6.46

Пусть f монотонна и ограничена на (a, b).
Тогда f имеет не более чем счетное множество точек разрыва, причем все они I рода.

Доказательство:
$c \in (a, b) \Rightarrow c$ — предельная точка (a, b).
По теореме Вейрштрасса для функций $\exists A = \lim\limits_{x \to c-} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to c+} f(x)$.

Если $A = B$, то $f \in C(c)$. В противном случае c — точка разрыва первого рода по определению.

Но тогда каждой точке разрыва можно сопоставить интервал (A, B). В силу монотонности интервалы не пересекаются, поэтому их счетно (в каждом можно выбрать уникальную рациональную точку)

Определение 6.47: Равномерная непрерывность

$f \in UC(E) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Пример 6.48

$$\frac{\sin x}{x} \notin UC(0, 1)$$

Теорема 6.49: Теорема Гейне-Кантора

$$f \in C[a,b] \Rightarrow f \in UC[a,b]$$

Доказательство:

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \forall x \in [a,b]\ \exists U_{\delta(x)}(x) : \forall x', x'' \in U_{\delta(x)}(x)\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

для какого-то заранее заданного ε.

$U_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)$ — окрестности все еще покрывают весь отрезок, поэтому по принципу Бореля-Лебега существует конечное подпокрытие $U_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$.

Присвоим $\delta = \min\left\{\frac{\delta(x_i)}{2} \,\middle|\, i = 1, \ldots, n\right\}$
Докажем, что $\forall x', x'' \in [a,b] : |x' - x''| < \delta\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.
$\exists k : x' \in U_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k)$.

Поэтому $|x'' - x_k| \leq |x'' - x'| + |x' - x_k| < \delta + \frac{\delta(x_k)}{2} \leq \delta(x_k)$

Упражнение 6.50

- Обобщить на компакты.
- Верна ли обратная теорема?

6.6. Обратная функция

Определение 6.51: Обратная функция

Пусть $f : E \to D$ — биекция.
Это значит, что $\forall y \in D\ \exists! x \in E : f(x) = y$.
Поэтому $\exists g : D \to E : \forall x \in E\ \exists! y \in D : g(y) = x$.
g — обратная к f функция, обозначается $g = f^{-1}$

Теорема 6.52

Пусть f монотонна на отрезке $[a,b]$.
Тогда $f \in C[a,b] \Leftrightarrow f([a,b])$ — это отрезок.

Доказательство:

- $\Rightarrow$

  f принимает все значения на отрезке $[f(a), f(b)]$ по теореме Больцано-Коши.

- $\Leftarrow$

  Пусть $f([a,b])$ — отрезок, но $f \notin C[a,b]$.

Пусть $c \in [a, b]$ — точка разрыва.

Если $c \in (a, b)$, то это разрыв I рода и весь интервал с концами $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ пересекается со значениями функции не более чем по одной точке.

Если $c = a$, то $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a+} f(x)$.

Значит интервал с концами $f(a)$ и $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ не пересекается с $f[a, b]$.

$c = b$ аналогично.

Теорема 6.53: Теорема об обратной функции

Пусть $f \in C[a, b]$, а также $\upuparrows$ или $\downdownarrows$.
Тогда $\exists f^{-1}$ на отрезке $[f(a), f(b)]$, а также либо $f^{-1} \upuparrows$, либо $f^{-1} \downdownarrows$.

Доказательство:
f — биекция $[a, b]$ на $[f(a), f(b)]$, так как она является строго монотонной.
Поэтому существует f^{-1}.
$f^{-1}([f(a), f(b)]) = [a, b]$.
$f^{-1} \upuparrows$, если $f \upuparrows$, так как $f^{-1}(f(x_1)) = x_1 < x_2 = f^{-1}(f(x_2))$
Получили, что образ f^{-1} — $[a, b]$, f^{-1} строго монотонна, а также $f^{-1} \in C[f(a), f(b)]$

7. Элементарные функции

7.1. Что это

1. Полиномы
2. Рациональные функции (отношение полиномов)
3. Показательные функции
4. Логарифмические функции
5. $x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$
6. Тригонометрические функции
7. Композиция вышеперечисленных функций

7.2. Определение экспоненты

$$f(x) = x \Rightarrow f(x) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow x^n \in C(\mathbb{R})$$
$$x \geq 0 \Rightarrow x^n \uparrow\uparrow$$
$$f(x) = x^n \in [0, +\infty),\ f(x) \uparrow\uparrow \Rightarrow \exists f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$
$$r = \frac{a}{b},\ r_1 = \frac{a_1}{b_1}$$
$$x^{\frac{1}{bb_1}} = d$$
$$x^r = d^{ab_1},\ x^{r_1} = d^{a_1 b}$$
$$x^r \cdot x^{r_1} = d^{ab_1 + a_1 b} = x^{r + r_1}$$
$$(x^r)^{r_1} = (d^{ab_1})^{\frac{a_1}{b_1}} = d^{aa_1} = x^{\frac{aa_1}{bb_1}} = x^{r \cdot r_1}$$
$$x^n \uparrow\uparrow \text{ на } [0, +\infty)$$
$$r > r_1 \Rightarrow x^r = d^{ab_1} > d_{a_1 b} = x^{r_1}$$
$$x^{-r} = \frac{1}{x_r}$$

Предложение 7.1

$$\forall r \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\ e^r < 1 + \frac{r}{1-r}$$

$$\forall b \geq 1\ \left(1+\frac{1}{b}\right)^b < e < \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1} \Rightarrow e^{\frac{1}{b+1}} < 1 + \frac{1}{b} < e^{\frac{1}{b}}$$

$$e^{\frac{1}{b+1}} < \frac{b+1}{b} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{b+1}} > \frac{b}{b+1} = 1 - \frac{1}{b+1}$$

Если $b = 0$, то неравенство верно $\Rightarrow e^{\pm\frac{1}{b}} > 1 \pm \frac{1}{b}$

Пусть $r = \pm\frac{|m|}{n}$ и $|m| < n$.

$$\left(e^{\pm\frac{1}{n}}\right)^m > \left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^{|m|} \geq 1 \pm \frac{|m|}{n}$$

$$e^{\pm\frac{|m|}{n}} > 1 \pm \frac{|m|}{n}$$

$$e^{r_1} > 1 + r_1$$

$$r_1 = -r$$

$$e^{-r} > 1 - r$$

$$e^r < \frac{1}{1-r} = 1 + \frac{r}{1-r}$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$M_1 = \{e^{r_1} \mid r_1 \in \mathbb{Q} \cap r_1 < \alpha\}$

$M_2 = \{e^{r_2} \mid r_2 \in \mathbb{Q} \cap r_2 > \alpha\}$

M_1 ограничено сверху любым элементом M_2, а M_2 ограничено снизу любым элементом M_1.

Значит $\exists \gamma_1 = \sup M_1,\ \gamma_2 = \inf M_2$.

Очевидно, что $\gamma_1 \leq \gamma_2$.

Пусть $[\alpha] < r_1 < \alpha < r_2 < [\alpha] + 1$

$0 \leq \gamma_2 - \gamma_1 \leq e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}(e^{r_2 - r_1} - 1) < e^{[\alpha]+1} \cdot \frac{r_2 - r_1}{1-(r_2-r_1)}$

$\frac{r_2-r_1}{1-(r_2-r_1)}$ может быть сделано меньше любого $\varepsilon > 0$, $\Rightarrow \gamma_2 - \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$.

Определим $e^\alpha = \gamma_1 = \gamma_2$.

Теорема 7.2

1. $f(x) = e^x \uparrow\uparrow$ на $\mathbb{R}$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ e^{\alpha+\beta} = e^\alpha \cdot e^\beta$

1. Рассмотрим $x_1 < x_2$.

   $\exists r \in \mathbb{Q} : x_1 < r < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^r < e^{x_2}$

   Для рациональных чисел мы показали возрастание, а в случае иррационального x_1 или x_2 r будет находиться в M_1 или M_2, поэтому неравенство выше будет верно.

2. $\alpha + \beta = \mu$

   $\exists r_1 \in \mathbb{Q} : e^{r_1} < e^\mu$

   $\exists r_2 \in \mathbb{Q} : e^{r_2} > e^\mu$

   Пусть $r_1 = r_1' + r_2' : r_1' < \alpha,\ r_2' < \beta$

   А $r_2 = r_1'' + r_2'' : r_1'' > \alpha,\ r_2'' > \beta$

   Тогда $e^{r_1'}e^{r_2'} < e^\alpha e^\beta < e^{r_1''}e^{r_2''} \Rightarrow e^{r_1} < e^\mu < e^{r_2}$

   $|e^\alpha e^\beta - e^\mu| < e^{r_2} - e^{r_1} < e^{r_1} \cdot \frac{r_2 - r_1}{1-(r_2-r_1)} < \varepsilon$

Поскольку $e^x \uparrow\uparrow$, существует обратная $f(x) = \ln x$.
$e^{\ln y_1 y_2} = y_1 y_2 = e^{\ln y_1} e^{\ln y_2} = e^{\ln y_1 + \ln y_2}$
Поэтому можем ввести $a^x = e^{x \ln a}\ \forall a > 0, a \neq 1$
Если $a > 1$, то $a^x = e^{x \ln a}$, иначе $0 < a < 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b} \Rightarrow a^x = \frac{1}{b^x} = \frac{1}{e^{x \ln b}}$

Теорема 7.3

$$a > 1, x \in \mathbb{R}\ f(x) = a^x \in C(\mathbb{R})$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\ |x - x_0| < \delta\ |a^x - a^{x_0}| < \varepsilon \Leftrightarrow |a^{x-x_0} - 1| < a^{-x_0} \cdot \varepsilon = \varepsilon_1$$

Сразу считаем, что $\varepsilon_1 < 1$

$$1 - \varepsilon_1 < a^{x-x_0} < 1 + \varepsilon_1 \Leftrightarrow 1 - \varepsilon_1 < a^{-\delta} < a_{x-x_0} < a^\delta < 1 + \varepsilon_1$$
$$a^\delta < 1 + \varepsilon_1$$
$$a^{-\delta} > 1 - \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1} > 1 - \varepsilon_1$$

Пусть $N = \left[\frac{1}{\delta}\right]$

$$N \leq \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \frac{1}{N} \geq \delta$$
$$a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon_1 \Leftrightarrow a < (1 + \varepsilon_1)^N$$
$$a < 1 + N\varepsilon_1 \Rightarrow N = \left]\frac{a}{\varepsilon_1}\right[$$

Значит $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1 \Rightarrow a^x \in C(\mathbb{R})$

Теорема 7.4

$\cos x, \sin x \in C(\mathbb{R})$
$\tan x, \cot x$ непрерывны там, где $\sin x$ или $\cos x \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ |\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq |x - x_0| < \delta$$

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x \in C(\mathbb{R})$
$\tan x, \cot x$ непрерывны по композиции непрерывных функций.

8. Дифференциал и производная

8.1. Определение и связь

Определение 8.1

Функция дифферинцируема ($\in D(a)$), если $\exists \mathring{U}(a),\ \alpha : \mathring{U}(0) : \lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$ и $\exists A \in \mathbb{R} : f(a+h) - f(a) = Ah + h\alpha(h)\ \forall h \in \mathring{U}(0)$

Определение 8.2: Дифференциал

$df(a)(h) = Ah$ — дифференциал f в точке a

Тогда $\forall h_1, h_2 \in \mathbb{R} : df(a)(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha df(a)(h_1) + \beta df(a)(h_2)$
Иными словами, $df(a)$ — линейная функция.

Пример 8.3

- $f(x) = x$

  $f(a+h) - f(a) = (a+h) - a = 1 \cdot h + 0 \cdot h \Rightarrow A = 1,\ \alpha(h) = 0$

  $df(a)(h) = h\ \forall h \in \mathbb{R}$, поэтому такой дифференциал обозначают dx

- $f(x) = x$

  $f(a+h) - f(a) = (a+h)^3 - a^3 = 3a^2 \cdot h + h(3ah + h^2)$

Определение 8.4: Производная

Если $\exists \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, то он называется производной в f в точке a и обозначается $f'(a)$

Теорема 8.5

$$f \in D(a) \Leftrightarrow \exists f'(a)$$

- $\Rightarrow$

  $f(a+h) - f(a) = h(A + \alpha(h)) \Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A + \alpha(h) \to A$ при $h \to 0$

- $\Leftarrow$

  $f'(a) + \alpha(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Rightarrow f(a+h) - f(h) = f'(a)h + \alpha(h) \cdot h$

Определение 8.6: Касательная 1

Пусть $f \in D(a)$(, тогда $y = f'(x-a)+f(a)$ — касательная к графику $y = f(x)$ в точке a

Определение 8.7: Касательная 2

Если $\exists U(a) \ : \ \forall x \in U(a) \ f(x) - (A(x-a) + f(a)) = o(x-a), x \to a$, то $y = A(x-a) + f(a)$ называется касательной в точке a

Теорема 8.8

$$f \in D(a) \Rightarrow f \in C(a)$$

$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h \cdot \alpha(h) \to f(a)$ при $h \to 0$

Пример 8.9

В обратную сторону неверно: $f(x) = |x|$
$\nexists f(0) \Rightarrow f \notin D(0)$

Получим производную, как отношение двух дифференциалов:

$$df(a)(h) = f'(a)h$$
$$f'(a)dx(\cdot) = df(a)(\cdot)$$
$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a)$$

8.2. Равномерная сходимость

Пример 8.10

1.

$$f_n(x) = x^n$$
$$x \in (-1,1] : \lim_{x\to 0} = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

2.

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$
$$x \in [0,1] : \left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{1}{n}$$

Определение 8.11: Равномерная сходимость

Пусть $\{f_n(x)\}$ сходится на X, то есть $\forall x \in X\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \wedge x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Тогда говорят, что f_n равномерно сходятся к f на множестве X и обозначают это так $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$

Теорема 8.12

Пусть $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на X к $f(x)$
Пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \in C(x_0), x_0 \in X \Rightarrow f \in C(x_0)$

Упражнение 8.13

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$
$$f_n(x) \underset{\mathbb{R}}{\not\rightrightarrows} 0$$

(сходится, но неравномерно)

Пример, который недифференцируем в множестве точек, однако непрерывен.

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2x)}{n^2}$$

8.3. Производная

Пусть $f, g \in D(a)$, тогда:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ (\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
2. $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. $g(a) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Пример 8.14

- $(e^x)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$
- $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2\sin\frac{h}{2}\cos(a+\frac{h}{2})}{h} = \cos x$
- $(\tan x)'$

Теорема 8.15

Пусть $f \in D(a),\ g \in D(f(a))$, тогда $(g \cdot f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f(a)$

Неправильно, потому что $f(a+h)$ может быть $f(a)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h}$$

Правильно:
$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \alpha(h)h$ и $\alpha(h) \to 0,\ h \to 0$
$g(f(a)+q) - g(f(a)) = g'(f(a))q + \beta(q)q$ и $\beta(q) \to 0,\ q \to 0$
Доопределим $\beta(0) = 0$
$q = f(a+h) - f(a)$

$$\begin{gathered} g(f(a+h) - f(a)) \\ = g'(f(a))(f'(a)h + \alpha(h)h) + \beta(f'(a)h + \alpha(h)h)(f'(a)h + \alpha(h)h) = \\ = g'(f(a))f'(a)h + \gamma(h) \end{gathered}$$

Отсюда $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.
Инвариантность формы 1-го дифференциала:

$$\begin{gathered} dg(y) = g'(y)dy \\ dg(f(x)) = g'(f(x))f'(x)dx = g'(f(x))df \end{gathered}$$

Пример 8.16

1. $(a^x)' = e^{x\ln a} = e^y y' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$
2. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

   Тогда $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

   $arsh\ x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

   $arch\ x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ x \geq 1$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$
$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

Теорема 8.17

Пусть $\exists U(a) : f$ строго монотонна и непрерывна на $U(a)$.
Пусть $f \in D(a)$ и $f'(a) \neq 0$
Тогда $f^{-1} \in D(a)$ и $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

Доказательство:
На $f(U(a))$ существует f^{-1}

$$\lim_{q\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+q) - f^{-1}(f(a))}{q} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+f(a+h)-f(a)) - f^{-1}(f(a))}{f(a+h)-f(a)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{a+h-a}{f(a+h)-f(a)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{f(a+h)-f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

8.4. Таблица производных

1. $C' = 0$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(e^x)' = e^x$
4. $(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0)$
6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a > 0, a \neq 1, x > 0)$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
10. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = 1 - \cot^2 x$
11.

8.5. IDK

Определение 8.18

Пусть $f : E \to R$, $a \in E$
Если $\exists U(a) : \forall x \in U(a) \cap E\ f(x) \geq f(a)$, то a называется точкой локального минимума.
(Аналогично для максимума)

Теорема 8.19: Теорема Ферма

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, $f \in D(c)$, c — локальный экстремум.
Тогда $f'(c) = 0$.

Доказательство:
Пусть $x_1 < c$, $x_1 \in (a, b)$.
Тогда $\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c} \geq 0$ (если c — точка локального максимума).
Аналогично для $x_2 > c$, $x_2 \in (a, b)$: $\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} \leq 0$
Отсюда очевидно, что $f'(c) = 0$.

Теорема 8.20: Теорема Ролля

Пусть $f \in C[a, b], D(a, b)$ и $f(a) = f(b)$
Тогда $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Доказательство:
Либо функция — константа на отрезке, либо на (a, b) есть локальный экстремум $\Rightarrow$ в нем производная 0.

Теорема 8.21

Пусть $f \in C[a, b]$ и $f \in D(a, b)$
Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

[TODO]

Следствие 8.22

Пусть $f(c) \in D(a, b)$ и $\forall c \in (a, b)\ f'(c) = 0 \Rightarrow f(x) = C\ \forall x \in (a, b)$

Пусть $x_1, x_2 \in (a, b) \Rightarrow f \in C[x_1, x_2]$.
$f \in D(x_1, x_2) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$

Следствие 8.23

Пусть $f \in D(a, b)$
Тогда $f \uparrow$ на $(a, b) \Leftrightarrow \forall c \in (a, b)\ f'(c) \geq 0$

- Пусть $x_1 > x_2 \in (a, b)$.

  Тогда $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$

  Значит $f'(x_2) = \lim\limits_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$

- Пусть $x_1, x_2 \in (a, b) \Rightarrow f \in C[x_1, x_2]$.

  По теореме Лагранжа $f \in D(x_1, x_2) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Теорема 8.24: Теорема Коши

Пусть

1. $f, g \in C[a, b]$
2. $f, g \in D(a, b)$
3. $\forall x \in (a, b)\ g'(x) \neq 0$

Тогда $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

$g(a) \neq g(b)$, так как иначе $\exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$ — противоречие третьему пункту.

Рассмотрим $F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$.

$F(a) = F(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$

Получаем:

$$F'(c) = 0$$
$$(g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c) = 0$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Геометрический смысл: $\begin{pmatrix} f(b) - f(a) \\ g(b) - g(a) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f'(c) \\ g'(c) \end{pmatrix}$ коллинеарны.

Либо же при перемещении в какой-то момент скорость будет коллинеарна вектору перемещения.

Теорема работает только в плоском пространстве: в трехмерном, например, есть контрпример — винтовое движение по цилиндру.

8.6. Раскрытие неопределенностей

Теорема 8.25: Первое правило Лопиталя

Пусть

1. $f, g \in D(a, b)$
2. $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to b-} g(x) = 0$
3. $\forall \xi \in (a, b)\ g'(\xi) \neq 0$
4. Существует бесконечный или конечный предел $\lim\limits_{x \to b'} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Пусть $a < x < y < b \Rightarrow$ на (x, y) f, g удовлетворяют теореме Коши.

$$\exists c \in (x, y) : \frac{-f(y) + f(x)}{-g(y) + g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Пусть $\lim\limits_{t \to b-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = A$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \cdot \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists a < x < y < b : \forall c \in (x, b) \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon$

Зафиксируем x. $\exists y_0 \in (x, b) : \forall y \in (y_0, b)\ \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon, \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon$

Получаем:
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \varepsilon + C\varepsilon + \varepsilon = (C + 2)\varepsilon$$

Значит $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Теорема 8.26: Второе правило Лопиталя

Пусть

1. $f, g \in D(a, b)$
2. $\lim\limits_{x \to b-} g(x) = \infty$
3. $\forall \xi \in (a, b)\ g'(\xi) \neq 0$
4. Существует бесконечный или конечный предел $\lim\limits_{x \to b'} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда $\lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Здесь наоборот $y < x$ и мы фиксируем y достаточно близкий к b:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \cdot \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

Пример 8.27

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

Пример 8.28

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0$$

Пример 8.29

$$\lim_{x \to 0+} x^x$$

$$\lim_{x \to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x} = e^{\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0+} -x} = e^0 = 1$$

Теорема 8.30: Обобщенное правило Лейбница

Вид k-й производной произведения
[TODO]

Пример 8.31

$$f(x) = (x^2 + x)e^{2x}$$
$$f^{(2026)}(0) = ?$$

$$f^{(2026)}(x) = 2^{2026}e^{2x}(x^2 + x) + 2^{2025}e^{2x} \cdot 2026(2x + 1) + 2^{2024}e^{2x} \cdot 2025 \cdot 2026$$
$$f^{(2026)}(0) = 2^{2025} \cdot 1 + 2^{2024} \cdot 2025 \cdot 2026$$

8.7. Формула Тейлора

Определение 8.32: Многочлен Тейлора

Пусть $f \in D^n(a)$

Многочлен $T_n(x, f, a) = \sum\limits_{k=0}^{n} = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ называется многочленом Тейлора функции f в точке a

Упражнение 8.33

$$\forall l \in \{0, \dots, n\}\ f^{(l)}(a) = T_n^{(l)}(a)$$

Теорема 8.34

$$f \in D^n(a) \Rightarrow f(x) - T_n(x) = o((x - a)^n),\ x \to a$$

Хотим $0 = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n}$.
По правилу Лопиталя $= \frac{f'(x) - T_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}}$.
Сделаем так еще $n - 2$ раза:

$$= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2(x - a)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x - a)}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2(x - a)}$$

Больше дифференцировать не можем, потому что не в точке a $f^{(n)}$ может не существовать. Исправим проблему так:

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x \to a} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}}{x - a} - f^{(n)}(a) \right) = 0$$

Получили $f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n$ — формула в форме Пеано.

Пример 8.35

$a = 0$

- $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
- $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
- $\ln x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} + o(x^n)$

Теорема 8.36: Формула Тейлора с остатком в общей форме

Пусть $f \in D^n[a,x]$, $f \in D^{n+1}(a,x)$, $g \in C[a,x]$, $g \in D(a,x)$, $\forall t \in (a,x)\ g'(t) \neq 0$
Тогда для некоторой точки $c \in (a,x)$

$$f(x) - T_n(x,f,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!g'(c)}(g(x) - g(c))(x-c)^{n+1}$$

$$T_n(x, f, a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$G(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(t)}{k!}(x-t)^k,\ t \in (a, x)$$

$$G'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

$$G'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$\frac{G(x)-G(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{G'(c)}{g'(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!g'(c)}(x-c)^n$$

$$G(x) = f(x),\ G(a) = T_n(x, f, a)$$

9. Интерполяция

9.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$Q_k(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)Q_k(x)$$

Пример 9.1

$$f(x) = \sin \pi x$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = \frac{1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)}{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}\cdot 0 + \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{6}-0\right)\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}\cdot 1$$

$$P_3(x) = (?) - 3x^2 + \frac{7}{2}x$$

9.2. Интерполяционный многочлен Ньютона

$$P_n(x) = P_1(x) + \sum_{k=2}^{n} P_k(x) - P_{k-1}(x)$$

$$P_k(x) - P_{k-1}(x) = A_k(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})$$

$$A_k == \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_k)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_1-x_k)} +$$

$$+\dots+\frac{f(x_k)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})}$$

$$A_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) - \text{разделенная разность}$$

Определение 9.2

$$P_n(x) = f_1(x_1) + f_2(x_1, x_2)(x_2-x_1) + \dots +$$

$$+ f_n(x_1, \dots, x_n)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1}) = N_n(x)$$

$N_n(x)$ — интерполяционный многочлен Ньютона

В точке x_n верно $f(x_n) = P(x_n)$

$$f(x_n) = f(x_1) + (x_n - x_1) \cdot f_2(x_1, x_2) + \ldots + (x_n - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

x_n — любое число, давайте заменим на x:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot f_2(x_1, x_2) + \ldots + (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$$

Теперь выпишем то же самое для $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x$:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \cdot f_2(x_1, x_2) + \ldots + (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-2}) \cdot f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, x)$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$\begin{gathered} 0 = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) + \\ + (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-2}) \cdot f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) - \\ - (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-2}) \cdot f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, x) \end{gathered}$$

Разделив обе части на $(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$, получим:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, x) - f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})}{x - x_{n-1}}$$

Таким образом с помощью реккурентных соотношений научились вычислять разделенные разности.

Теорема 9.3

Пусть $f \in C[a, b], f \in D^n(a, b)$, $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Тогда $\exists c \in (a, b) : f(b) - P_n(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} (b - x_k)$

Доказательство:

$R_n(x) = f(x) - P_n(x) - B \prod\limits_{k=1}^{n} (x - x_k)$, хотим $B = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

$R_n(x_k) = 0, k = 1, \ldots, n$. Пусть еще $R_n(b) = 0$

По теореме Ролля $\exists c_1' \in (x_1, x_2), \ldots, c_n' \in (x_n, b) : R_n'(c_k') = 0, k = 1, \ldots, n$

Вновь по теореме Ролля $\exists c_1'', c_{n-1}'' \in (a, b) : R_n''(c_k''), k = 1, \ldots, n - 1$

Продолжаем так, получим $c : R_n^{(n)}(c) = 0$

То есть $f^{(n)}(c) - n!B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$

Если взять не b, а $x_0 \in (a,b)$, $x_0 \neq x_k$, то $f(x_0) - P_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(c_0)}{n!} \cdot \prod\limits_{k=1}^{n}(x_0 - x_k)$

Пример 9.4

$$\left| f(x_0) - \left(-3x_0^2 + \frac{7}{2}\right) \right| = \left| \frac{\sin''' c_0}{6}(x_0 - 0)\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)\left(x_0 - \frac{1}{6}\right) \right| \leq$$
$$\leq \left| \frac{1}{6}(x_0 - 0)\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)\left(x_0 - \frac{1}{6}\right) \right| = \frac{1}{6}g(x_0)$$

Проверьте, что $\max\limits_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} g(x_0) = 0.1$

10. Первообразная

Определение 10.1

Пусть $F, f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и $\forall x \in (a, b) F'(x) = f(x)$
Тогда F называют (точной) первообразной f на (a, b)
Если равенство $F'(x) = f(x)$ не выполнено для конечного числа точек интервала (a, b), то F называют (обобщенной) первообразной f на (a, b)
$(F \in C(a, b))$

Теорема 10.2

Пусть F_1, F_2 — две обобщенные первообразные для f на (a, b), тогда $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in (a, b) F_1(x) = F_2(x) + C$

Доказательство:

Пусть $c_1 c_2, \ldots, c_n \in (a, b)$ — точки, в которых равенство либо $\nexists F_1'$, либо $\nexists F_2'$, либо $F_1'(c_i) \neq f(c_i)$, либо $F_2'(c_i) \neq f(c_i)$.

Пусть $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$.

Значит на $(a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, b)$ F_1, F_2 — точные первообразные.

Поэтому на этих точках $F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Поэтому на каждом интервале $F_1(x) - F_2(x) = const$. Поскольку разность функций тоже непрерывна, константы должны совпасть, поэтому $F_1 = F_2 + C$

Определение 10.3: Неопределенный интеграл

Произвольная первообразная f на на (a, b) называется неопределенным интегралом f на (a, b) и обозначается $\displaystyle\int f(x)dx$
Если известно, что F — точная первообразная f на (a, b), то $\exists C \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$

Fun facts:

1. $$\int dF(x) = F(x) + C$$

2. $$d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = f(x)dx$$

3. $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$