Линейная алгебра

Sokolnikov Alex

2025-2026

Содержание

1. Оценка

$O_{\text{линал}} = 0.7 \cdot O_{\text{накоп}} + 0.3 \cdot O_{\text{экз}}$

$O_{\text{накоп}} = 0.36 \cdot O_{\text{коллок}} + 0.25 \cdot O_{\text{кр}} + 0.25 \cdot O_{\text{БДЗ}} + 0.14 \cdot O_{\text{сем}} + 0.1 \cdot O_{\text{листочки}}$

2. Система линейных уравнений

2.1. Как выглядит

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Система линейных уравнений называется однородной, если $\forall i \; b_i = 0$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} - \text{решение}$$

Решение - какой-то столбец из $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$

Пример:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

Будем записывать СЛУ так:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Может иметь:

- 1 решение:

  $x = 1$

- 0 решений:

  $0 \cdot x = 1$

- ∞ решений:

  $0 \cdot x = 0$

2.2. Как решать

$$\Sigma \to \Sigma_1 \to \Sigma_2 \to \dots \to \Sigma_k - \text{хорошая}$$

Какие преобразования можно делать?

- Умножить строчку на ненулевое число

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \lambda \cdot a_{i2} & \dots & \lambda \cdot a_{in} & \lambda \cdot b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right), \lambda \neq 0$$

- Поменять две строки местами

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

- Прибавить строчку к другой

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + a_{j,1} & a_{i2} + a_{j2} & \dots & a_{in} + a_{jn} & b_i + b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} & b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

Очевидно, что такие преобразования не уменьшают множество решений. Так как можем сделать обратные преобразования, СЛУ равносильны.

2.3. Алгоритм Гаусса

- Прямой ход:

  Приводим матрицу к ступенчатому виду с помощью преобразований

- Обратный ход:

  Сделать все лидеры равными 1

  Поднимаемся снизу вверх, зануляя все над лидером

3. Матрицы

Матрица - это таблица с числами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

В данном случае $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ — множество матриц $m \times n$ с числами из $\mathbb{R}$
$M_n(\mathbb{R})$ — множество квадратных матриц $n \times n$ с числами из $\mathbb{R}$

Операции, которые можно делать с матрицами:

- Сложение / вычитание:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

- Умножение на число

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Транспонирование

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  Иными словами, отражаем относительно главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Умножение на матрицу Пусть $A \in M_{nm}(\mathbb{R}), B \in M_{mk}(\mathbb{R})$.

  Тогда $AB \in M_{nk}(\mathbb{R})$, причем $AB_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{m} A_{ir}B_{rj}$

Некоторые матрицы:

- Нулевая матрица

  A – нулевая матрица, если $\forall i, j \ A_{ij} = 0$

  Если известны размеры, то можно просто написать $A = 0$

- Единичная матрица

  Матрица, в которой на диагонали стоят 1, а остальные числа равны 0

  $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица $n \times n$

  Называется так, потому что $AE = EA = A$

Тогда с точки зрения матриц, СЛУ можно записать так:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

Если СЛУ однородная, то $Ax = 0$

Полезные свойства операций над матрицами:

- Ассоциативность

  $(AB)C = A(BC)$

- Дистрибутивность относительно сложения

  $(A + B)C = AC + BC$

Связь СЛУ и ОСЛУ:
$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^n : Ax_0 = b$
Тогда:
$E_b = \{z \in \mathbb{R}^n \mid Az = b\}, E_0 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\} \Rightarrow E_b = x_0 + E_0$
Если в A нулевая строка, то в AB та же строка будет нулевой. Аналогично, если в B есть нулевой столбец.

Замечание 3.1

$$(AB)^T = B^T A^T$$

3.1. Дефекты матричных операций

1. Произведение не коммутативно.

   Если матрицы не квадратные, то произведение BA либо не существует, либо имеет отличные от AB размеры.

   В случае квадратных, например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Есть делители нуля.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Диагональные матрицы ведут себя как функции на конечном множестве, поэтому если что-то можно получить с такими функциями, то и с матрицами скорее всего тоже.

   Благодаря этому у ОСЛУ могут быть ненулевые решения.

3. Нильпотенты.

   $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ — нильпотентна, если $\exists N : A^N = 0$

   Например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2. Деление

В силу некоммутативности нам нужно деление слева и деление справа. Но тогда придется доказывать совместимость со всеми остальными операциями. Поэтому вместо деления принято говорить про обратимые матрицы.

Определение 3.2

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R}), B \in M_{nm}(\mathbb{R})$$

1. Правая обратная, если $AB = E_m$
2. Левая обратная, если $BA = E_n$

3. Обратная, если верны (1) и (2)

Определение 3.3: След матрицы

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

$\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$

1. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$
2. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
3. $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji}$$
$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} B_{ij} A_{ji}$$

Лемма 3.4

$$A \in M_{mn}(\mathbb{R})$$
$$\exists L - \text{любой левый обратный}$$
$$\exists R - \text{любой правый обратный}$$

Тогда:

1. $n = m$
2. $L = R \Rightarrow$ существует единственный обратный.

Докажем второе:

$$LA = E$$
$$AR = E$$
$$(LA)R = L(AR)$$
$$ER = LE$$
$$R = L$$

Теперь первое:

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(E_m) = m$$
$$\operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(E_n) = n$$
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \Rightarrow m = n$$

Определение 3.5: Обратная матрица

$$A \in M_n(\mathbb{R}), B - \text{обратный} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = E \\ BA = E \end{cases}$$

Тогда $B = A^{-1}$.

Примеры:

1. Матрица с нулевой строчкой или столбцом необратима.
2. Диагональная матрица с ненулевыми элементами обратима:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = E_n$$

3.3. Элементарные матрицы

1. Как прибавить строчку j, умноженную на λ, к строчке i?

   Нужно умножить слева на матрицу:

   $$S_{ij}(\lambda) = \begin{cases} (S_{ij}(\lambda))_{xy} = \lambda, (x, y) = (i, j) \\ (S_{ij}(\lambda))_{xy} = (E_n)_{xy}, \text{иначе} \end{cases}$$

   Если умножить на такую матрицу справа, то к j столбцу прибавится столбец i, умноженный на λ

2. Как поменять две строчки местами?

   Умножить слева на матрицу:

   $$U_{ij} = \begin{cases} (U_{ij})_{xy} = 1, (x = y \neq i, j) \vee ((x, y) \in \{(i, j), (j, i)\}) \\ (U_{ij})_{xy} = 0, \text{иначе} \end{cases}$$

   Если умножить справа, то поменяются местами столбцы.

3. Как умножить строчку i на λ ?

   Умножить слева на матрицу:

$$D_{ij}(\lambda) = \begin{cases} (D_{ij})_{xy} = \lambda, x = y = i \\ (D_{ij})_{xy} = (E_n)_{xy}, \text{иначе} \end{cases}$$

Если умножить справа, то умножится i-й столбец.

Очевидно, все элементарные матрицы обратимы.

Замечание 3.6

$$A, B \in M_n(\mathbb{R}), \exists A^{-1}, B^{-1} \Rightarrow \exists (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Теорема 3.7

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

Следующие утверждения эквивалентны:

1. $Ax = 0 \Rightarrow !x$
2. $A^T y = 0 \Rightarrow !y$
3. $A = U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_k$, U_i — элементарная
4. $\exists A^{-1}$
5. $\exists L \in M_n(\mathbb{R}) : LA = E$
6. $\exists R \in M_n(\mathbb{R}) : AR = E$

Будем доказывать через два цикла:
$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1$, $2 \to 3 \to 4 \to 6 \to 2$
$3 \to 4$, $4 \to 5$, $5 \to 1$ очевидны.
$1 \to 3$:

Приведем Гауссом к улучшенному ступенчатому виду. Одно решение, значит у нас n ступенек. Так как матрица квадратная, значит у нас в каждом столбце и каждой строчке есть лидер, то есть улучшенный ступенчатый вид — это E_n. Все преобразования — умножения на элементарную матрицу. Возьмем обратные матрицы (тоже элементарные), умножим на них обратно. Получим A.

Второй цикл аналогично.

Тогда как искать обратную матрицу? Нужно решить $AX = E$.

3.4. Блочные умножения

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX + BZ & AY + BN \\ CX + DZ & CY + DW \end{pmatrix}$$

Примеры:

1.

$$\left(\begin{array}{c} \quad A \quad \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} B_1 & \cdots & B_n \end{array}\right) =$$
$$= (A)\begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_n \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 & \cdots & AB_n \end{pmatrix}$$

2.

$$\left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline \vdots \\ \hline X_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} Y_1 & \cdots & Y_n \end{array}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 & \cdots & Y_n \end{pmatrix} =$$
$$= X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n$$

3.5. Единственность УСВ для ОСЛУ

Теорема 3.8

Для $Ax = 0$ существует только один улучшенный ступенчатый вид.

Пусть

$$P_k(A) = (\forall x : Ax = 0 \ \wedge \ (x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0) \Rightarrow x_k = 0)$$

Лемма 3.9

Дана ступенчатая матрица A

$$P_k(A) = true \Leftrightarrow x_k - \text{главная}$$

Доказательство:

- $\Rightarrow$

  Пусть x_k не является главной. Но тогда мы можем назначить ей абсолютно любое значение и $P_k(A)$ не будет верно.

- $\Leftarrow$

  x_k главная $\Rightarrow$ однозначно восстанавливается по $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Нетрудно убедиться, что если $x_{k+1} = \ldots = x_n$, то $x_k = 0$.

Лемма 3.10

Пусть $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$
Приведём их к ступенчатым видам S_A, S_B
Тогда (главные для S_A) $\Leftrightarrow$ (главные для S_B)

Доказательство Очевидно, что у ступенчатого вида такие же решения, как и у изначальной матрицы. Но тогда

$$P_k(S_A) = P_k(A) = P_k(B) = P_k(S_B)$$

Так как верно 3.9, это доказывает лемму.

Из 3.10 следует, что ступенчатый вид матрицы всегда выглядит одинаково.

Осталось показать, что совпадают УСВ.

Единственная проблема может возникнуть в каком-то столбце, где нет лидера.

Сделаем решение A, где у всех свободных переменных кроме одной значение 0, а у оставшейся 1. Тогда главные примут значений столбца этой переменной с минусом. Подставим в B. Поскольку системы эквивалентны, а главные переменные совпадают, главные в B должны совпадать с столбцом той свободной переменной, умноженному на -1. Но это значит, что столбцы этой переменной в A и B равны. Проделаем такое для всех переменных $\Rightarrow$ УСВ A и B совпадают.

Теорема 3.11

Пусть $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$
Следующие утверждения равносильны:

1. $Ax = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$
2. A можно элементарными операциями превратить в B
3. $\exists$ обратимая $C \in M_m(\mathbb{R}) : B = CA$
4. $\text{УСВ}_A = \text{УСВ}_B$

Доказательство:

- $2 \to 1, 2 \to 3$ очевидны
- $1 \to 4$ доказано выше
- $3 \to 2$ следует из 3.7
- $4 \to 2$

  Приведем A к УСВ_A, B к УСВ_B. Они равны. Сделаем обратные элементарные преобразования.

3.6. Полиномиальное исчисление

Пусть есть

$$f = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m, A \in M_n(\mathbb{R})$$

Подставим туда A

$$f(A) = a_0 + a_1A + \ldots + a_mA^m$$

Имеется проблема a_0 — число, а все остальные слагаемые — матрицы. На самом деле при a_0 стоит x^0. Поэтому на самом деле все будет так

$$f = a_0E + a_1A + \ldots + a_mA^m$$

Лемма 3.12

$$A \in M_n(\mathbb{R}), f, g \in \mathbb{R}[x]$$

Тогда:

1. $$(f + g)(A) = f(A) + g(A)$$
2. $$(f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A)$$
3. $$f(\lambda E) = f(\lambda)E$$
4. $$C \in M_n(\mathbb{R}) : \exists C^{-1}$$ $$f(C^{-1}AC) = C^{-1}f(A)C^1$$

Лемма 3.13

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$
$$\Downarrow$$
$$\exists f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n^2 \ (\deg f \leq n), f(A) = 0$$

Доказательство:
Рассмотрим

$$f = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n^2}x^{n^2}$$

Подставим туда A

$$f(A) = a_0E + a_1A + \ldots + a_{n^2}A^{n^2} = 0$$

Напишем равенство для каждого элемента. Получится ОСЛУ на n^2+1 и n^2 уравнений. А значит существует ненулевое решение $\Rightarrow$ есть подходящий многочлен.

Пример 3.14

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Зануляющий многочлен:

$$f = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

Интересный факт:
Числа над диагональю могут быть любыми, но многочлен все еще будет зануляять.

3.7. Спектр

Определение 3.15

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$
$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A - \lambda E - \text{необратима}\}$$

Пример 3.16

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Пример 3.17

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Доказательство:

Если после сдвига на λE на диагонали нет нулевого элемента, то у нее, очевидно, n лидеров $\Rightarrow$ она обратима. А если есть, то у нее $< n$ лидеров $\Rightarrow$ элементарными преобразованиями можно получить нулевую строку, поэтому матрица необратима.

Лемма 3.18

$$A \in M_n(\mathbb{R}), g \in \mathbb{R}[x] : g(A) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A \subseteq \text{корни } g \text{ в } \mathbb{R}$$

Аналогично $\operatorname{spec}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq$ корни g в $\mathbb{C}$

Доказательство:

Будем доказывать $\lambda \neq 0, g(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \lambda \notin \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A$.

Покажем, что $A - \lambda E$ обратима.

$$x = \lambda \Rightarrow g = q \cdot (x - \lambda) + r$$
$$g = q \cdot (x - \lambda) + g(\lambda)$$
$$\text{Подставим сюда } A$$
$$0 = g(A) = q(A)(A - \lambda E) + g(\lambda)E$$
$$-g(\lambda)E = q(A)(A - \lambda E)$$
$$E = (A - \lambda E)\frac{q(A)}{-g(\lambda)}$$

Определение 3.19: Минимальный многочлен

$$A \in M_n(\mathbb{R}), 0 \neq h \in \mathbb{R}[x]$$

h называется минимальным, если

- $h(A) = 0$
- $\deg h \to \min$
- Старший коэффициент h равен 1

Лемма 3.20

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

1. Минимальный многочлен h единственный.

2. $\forall g \in \mathbb{R}[x] : g(A) = 0$ верно $f_{min} | g$
3. $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A =$ корни f_{min} в $\mathbb{R}$

Доказательство:

1. Пусть есть $h1, h2$. Тогда $h1 - h2$ тоже зануляющий многочлен, причем степени меньше n (так как старшие члены равны 1). Получается, что этот многочлен должен быть нулевым, а значит $h1 = h2$.

2.
$$g = q \cdot f_{min} + r$$
$$\deg r < \deg f_{min}$$
$$g(A) = q(A) \cdot f_{min}(A) + r(A)$$
$$0 = 0 + r(A)$$
$$r(A) = 0$$

3. Будем доказывать, что $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A \supseteq$ корни f_{min} в $\mathbb{R}$

   Докажем от противного.

$$f_{min}(\lambda) = 0$$
$$f_{min}(\lambda) = (x - \lambda)h(x)$$
$$0 = f_{min}(A) = (A - \lambda E)h(A)$$

   Если $A - \lambda E$ обратима, то $h(A)$ тоже является зануляющим, причем степени на 1 меньше — противоречие. Значит $A - \lambda E$ необратима $\Rightarrow \lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A$.

Пример 3.21

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

В таком случае $h(x) = x^2 + 1$ является зануляющим.
У него нет вещественных корней, а значит $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A = \varnothing$.

4. Перестановки

4.1. Что это вообще такое

Определение 4.1

$$\sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$$
$$S_n = \{\sigma - \text{перестановка на } \{1, \dots, n\}\}$$

4.1.1. Способы задания

- Явно задать отображения
- Нарисовать табличкой
  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
- Нарисовать стрелки между точками на плоскости

4.1.2. Операция

Перестановки можно перемножать.

4.1.3. Свойства

1. Ассоциативность
   $\sigma, \tau, p \in S_n$
   $\sigma \circ (\tau \circ p) = (\sigma \circ \tau) \circ p$
2. $id : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$
   $$k \mapsto k$$
   $$\sigma \circ id = id \circ \sigma = \sigma$$
3. $\sigma \circ \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \circ \sigma$

4.1.4. Переименование

Переименуем $i \mapsto \tau_i$
$\sigma_{\text{нов}} = \tau\sigma\tau^{-1}$

4.1.5. Циклы

Определение 4.2: Цикл

$$\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_k\} \sqcup \{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \ |i| \geq 2$$
$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{k-1} & i_k & j_1 & j_2 & \cdots j_{n-k} \\ i_2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_k & i_1 & j_1 & j_2 & \cdots j_{n-k} \end{pmatrix}$$

Краткая запись: $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k, i_1)$

Определение 4.3: Транспозиция

$\sigma = (i, j)$ — транспозиция

Определение 4.4: Независимые циклы

Циклы $\{i_1, \dots, i_k\}, \{j_1, \dots, j_l\}$ являются независимыми, если $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \varnothing$

Замечание 4.5

p_1, p_2 — независимые циклы $\Rightarrow p_1p_2 = p_2p_1$

По сути композиция двух независимых циклов просто делает перестановку, в которой у нас два "цикла", если рисовать стрелочками.

Лемма 4.6

1. $\sigma = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ — независимые циклы, причем разложение единственно с точностью до порядка

2. p — цикл $p = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_{k-1}$, где τ_i — транспозиция.

4.2. Знак перестановки

Хотим чтобы было так:
$$\begin{cases} \text{Ч} \cdot \text{Ч} = \text{Ч} \\ \text{Ч} \cdot \text{Н} = \text{Н} \\ \text{Н} \cdot \text{Ч} = \text{Н} \\ \text{Н} \cdot \text{Н} = \text{Ч} \end{cases}$$

$\phi : S_n \to \{\pm 1\}$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) \\ \phi \not\equiv 1 \end{cases}$$

Теорема 4.7

$\exists! \phi : S_n \to \{\pm 1\} :$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) \\ \phi \not\equiv 1 \end{cases}$$

Доказательство:
Сначала покажем существование:
$d_{ij}(\sigma)$ — правда ли, что (i, j) — инверсия.
Пусть $d(\sigma)$ — количество инверсий $(i < j : \sigma(i) > \sigma(j))$ σ.
Возьмем $\phi = (-1)^(d(\sigma))$
Нужно показать, что $d(\sigma\tau) = d(\sigma) + d(\tau) \mod 2$.
Нетрудно убедиться, что $d_{ij}(\tau) + d_{\tau(i)\tau(j)} = d_{ij}(\sigma\tau)$

Теорема 4.8: Единственность знака

$\phi : S_n \to \{\pm 1\}$

$$\begin{cases} \phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma)\phi(\tau) \\ \phi \not\equiv 1 \end{cases} \quad \text{Тогда}$$

1. $\phi(id) = 1$
2. $\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma)^{-1} = \phi(\sigma)$
3. $\phi(\tau\sigma\tau^{-1}) = \phi(\sigma)$
4. $\phi((i, j)) = -1, \forall i, j$
5. $\phi!$

Доказательство:

1. $id \circ id = id$
   $\phi(id \circ id) = \phi(id)$
   $\phi(id)^2 = \phi(id)$
   $\phi(id) = 1$

2. $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$
   $\phi(\sigma)\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma\sigma^{-1}) = \phi(id) = 1$
   $\phi(\sigma^{-1}) = \phi(\sigma)^{-1} = \phi(\sigma)$

3. $\phi(\tau\sigma\tau^{-1}) = \phi(\tau)\phi(\sigma)\phi(\tau^{-1}) = \phi(\tau)\phi(\sigma)\phi(\tau)^{-1} = \phi(\sigma)$

4. $(i, j) = \tau(1, 2)\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2))$

   Значит все транспозиции имеют один и тот же знак.

   Перестановка раскладывается в произведение циклов, а цикл в произведение транспозиций. Значит перестановка — это произведение транспозиций. Если знак всех транспозиций равен 1, то знак всех перестановок равен 1 — противоречие. Значит знак всех перестановок равен -1.

5. Пусть есть ϕ, ϕ'.

$$\phi(\sigma) = \phi(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_k) = \phi(\tau_1)\phi(\tau_2)\ldots\phi(\tau_k) =$$
$$= (-1)^k =$$
$$= \phi'(\tau_1)\phi'(\tau_2)\ldots\phi'(\tau_k) = \phi'(\tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \ldots \cdot \tau_k) = \phi'(\sigma)$$

5. Определители

Идея: считать ориентированный объем (длину / площадь)

Существует несколько способов задать определитель. Мы приведем 3 и докажем их равносильность. Будем доказывать равносильность так: $1 \to 2 \to 3, 2 \to 1$

Определение 5.1: Определитель

Опишем 3 способа задания:

1. Явная формула

   $A \in M_n(\mathbb{R}), \det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

   $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$

2. Полилинейная кососимметрическая функция (можно и по строкам)

   $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

   $A = (A_1| \ldots |A_n)$

   $\phi(A) = \phi(A_1, \ldots A_n)$

   - Полилинейность

   $$\begin{gathered}\phi(A_1, \ldots, A_i + A_i', \ldots A_n) = \\ = \phi(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \phi(A_1, \ldots, A_i', \ldots, A_n) \\ \phi(A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_n) = \lambda \phi(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)\end{gathered}$$

   - Кососимметричность

   $$\phi(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots A_n) = -\phi(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots A_n)$$

   - $\phi(E) = 1$

3. Мультипликативная функция

   $\Psi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

   - $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$
   - $\Psi \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d$

Пример 5.2

Из первого определения:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Пример 5.3

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Лемма 5.4

$A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A^T = \det A$

Доказательство:

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(A^T)_{1\sigma(1)} \ldots (A^T)_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} =$$
$$\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\rho \in S_n} sgn(\rho^{-1}) a_{1\rho(1)} \ldots a_{n\rho(n)} = \det A$$

Лемма 5.5

Определитель — полилинейный кососимметрический по строкам (столбцам)

Доказательство:
Полилинейность:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot (a_{i\sigma(i)} + a'_{i\sigma(i)}) \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$
$$=$$
$$\sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Кососимметричность:
Вместо суммы по σ, будет сумма по $\sigma(i, j)$. Но $sgn(\sigma(i, j)) = -sgn(\sigma)$
$\det E = 1$ (очевидно)

Лемма 5.6

$\phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
ϕ — полинейная + кососимметрическая по строкам
Тогда

1. Прибавление строки к другой не меняет ϕ
2. Если поменять две строки местами, ϕ поменяет знак
3. Можно выность коэффициент строки за ϕ

Последние два следуют из полилинейности и кососимметричности. Покажем выполнение первого:

$$\phi(A') = \phi\begin{pmatrix} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_j + \lambda A_i \\ \hline \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_i \\ \hline \end{pmatrix} + \lambda\phi\begin{pmatrix} \hline A_i \\ \hline \\ \hline A_i \\ \hline \end{pmatrix} = \phi(A)$$

По кососимметричности у матрицы с двумя равными строками $\phi = 0$, так как при их смене должен поменяться знак ϕ, но сама матрица не меняется, а значит и ϕ тоже.

Замечание 5.7

- $\det S_{ij} = 1$
- $\det U_{ij} = -1$
- $\det D_i(\lambda) = \lambda$

Лемма 5.8

$\phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
Тогда:

1. $\phi(UX) = \det(U)\phi(X)$
   $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \forall U$ — элементарная
2. $\phi(AX) = \det(A)\phi(X)$
   $\forall X \in M_n(\mathbb{R}), \forall A \in M_n(\mathbb{R})$ — элементарная

Доказательство:
Первое очевидно.
Второе:
Пусть A — невырожденная.
Тогда $A = U_1 \dots U_k$.
det тоже кососимметрическая и полилинейная функция, поэтому:

$$\det(A) = \det(AE) = \det(U_1) \dots \det(U_k) \det(E) = \det(U_1) \dots \det(U_k)$$

Но тогда:

$$\phi(AX) = \det(U_1) \dots \det(U_k) \phi(X) = \det(A) \phi(X)$$

A — вырожденная $\Rightarrow$ AX — вырожденная. Просто приведем к улучшенному ступенчатому виду, там будет нулевая строка $\Rightarrow \det = \phi = 0$.

Следствия:

1. $B = E$ $\phi(A) = \det(A)\phi(E)$ $\phi(A) = C \det(A)$
2. $\phi(E) = 1 \Rightarrow \phi(A) = \det(a)$
3. $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ — полилинейная кососимметрическая функция
   $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
   $\det \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d$
   Значит доказали $2 \to 3$

Покажем, что определитель блочной верхнетреугольной матрицы — произведение определителей диагональных блоков.

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
$$\det D = \det A \cdot \det C$$

$$\phi_1 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$X \to \det \begin{pmatrix} X & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

ϕ_1 — полилинейная кососимметрическая функция по столбцам, так как можно спокойно менять местами и складывать любые два столбца X. Также несложно доказать, что можно выносить константу из столбца.

$$\phi_1(X) = \det(X)\phi_1(E)$$
$$\phi_1(A) = \det(A) \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Аналогично рассмотрим

$$\phi_2 : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$y \to \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & y \end{pmatrix}$$
$$\phi_2(C) = \det C \det \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det C$$

$$\det D = \phi_1(A) = \det(A)\phi_2(C) = \det(A)\det(C)$$

Давайте теперь доказывать $3 \to 1$ $\Psi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

1. $\Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$
2. $\Psi \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix} = d, \forall d \in \mathbb{R}, d \neq 0$

Замечание 5.9

1. $\Psi(E) = 1$
2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ — обратима $\Rightarrow \Psi(A^{-1}) = \Psi(A)^{-1}$

Давайте докажем, что

1. $\Psi(S_{ij}(\lambda)) = 1$

2. $\Psi(D_i(\lambda) = \lambda$

3. $\Psi(U_{ij}) = -1$

1. Давайте попытаемся представить $S_{ij}(\lambda)$ в виде $S_{ij} = ABA^{-1}B$.
   Тогда $\Psi(S_{ij}(\lambda)) = \Psi(A)\Psi(B)\Psi(A^{-1})\Psi(B^{-1}) = 1$
   Покажем на примере 2×2
   $$S_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   В общем случае $S_{ij}(\lambda) = D_i(\lambda) \cdot S_{12}(\lambda) \cdot D_i^{-1}(\lambda) \cdot S_{ij}^{-1}(\lambda)$

2. $\Psi(D_n(\lambda)) = \lambda$. Постараемся найти разложение $D_i(\lambda) = A \cdot D_n(\lambda) \cdot A^{-1}$.
   Так совпало, что $D_i(\lambda) = U_{in} D_n(\lambda) U_{in}^{-1}$.
   Тогда $\Psi(D_i(\lambda)) = \Psi(U_{in})\Psi(D_n(\lambda))\Psi(U_{in}^{-1}) = \Psi(D_n(\lambda)) = \lambda$

3. Опять разберем на примере 2×2
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$U_{12} = D_1(-1) \cdot S_{21}(1) \cdot S_{12}(-1) \cdot S_{21}(1)$$
   $$U_{ij} = D_i(-1) \cdot S_{ji}(1) \cdot S_{ij}(-1) \cdot S_{ji}(1)$$

Теорема 5.10

1. $\Psi(E) = 1$

2. $A \in M_n(\mathbb{R})$ — обратима $\Rightarrow \Psi(A^{-1}) = \Psi(A)^{-1}$

Тогда $\Psi(A) = \det(A)$

- A — невырожденная

  Поскольку Ψ уважает умножение, а так же совпадет с определителем на элементарных функциях:
  $$\Psi(A) = \Psi(U_1) \dots \Psi(U_k) = \det(U_1) \dots \det(U_k) = \det A$$

- A — вырожденная

  Надо показать, что $\Psi(A) = 0$.

  Пусть A' — ступенчатый вид A

  $\Psi(A) = \Psi(U_1)\dots\Psi(U_2)\Psi(A')$

  Покажем, что $\Psi(A') = 0$

  В ней мы можем умножить последнюю строчку на 2, и матрица не поменяется, поэтому

$$A' = D_n(2)\cdot A' \Rightarrow \Psi(A') = \Psi(D_n(2))\Psi(A')$$
$$\Psi(A') = 2\Psi(A')$$
$$\Psi(A') = 0$$

5.1. Миноры

M_{ij} — определитель матрицы, если в ней выкинуть i-й столбец и j-ю строку
$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ — алгебраическое дополнение.

Лемма 5.11

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$
$$\det A = a_{i1}\mathcal{A}_{i1} + a_{i2}\mathcal{A}_{i2} + \ldots + a_{in}\mathcal{A}_{in}$$
$$\det A = a_{1i}\mathcal{A}_{1i} + a_{2i}\mathcal{A}_{2i} + \ldots + a_{ni}\mathcal{A}_{ni}$$

Называется разложению по строке (столбцу)

Для доказательства через полилинейность сделаем кучу матриц, где в i-й строке есть только a_{ij}. Потом свапами загоним a_{ij} на позицию $1,1$. Получится блочная нижнетреугольная матрица. Теперь определитель этой матрицы — $\det(a_{ij})\det M_{ij}$. Но свапы дали знак $(-1)^{(i-1)+(j-1)} = (-1)^{i+j}$. Значит суммируем $(-1)^{i+j}\cdot\det(a_{ij})\det M_{ij} = a_{ij}\mathcal{A}_{ij}$.

Пусть есть $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Заменим элементы $A : a_{ij} \to \mathcal{A}_{ij}$. Назовем полученную матрицу A^*.

$\widehat{A} = (A^*)^T$ — присоединенная матрица ($\widehat{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji}$)

Лемма 5.12

$A \in M_n(\mathbb{R})$
Тогда $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det(A)\cdot E$

Следствие 5.13

Если A невырожденная, то $A^{-1} = \frac{\widehat{A}}{\det(A)}$

Покажем, что $A\widehat{A} = \det(A)E$

$$(A\widehat{A})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\widehat{A}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathcal{A}_{ij} = \det(A)$$

$$i \neq j : (A\widehat{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\widehat{A}_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ik}\mathcal{A}_{jk}$$

Давайте заметим, что это определитель матрицы (разложили по j-й строке):

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

Но он равен 0, так как в A' есть две равные строчки.

5.2. Формула Крамера

$$A \in M_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow x = A^{-1}b = \frac{\widehat{A}}{\det A}b$$

Лемма 5.14: Формула Крамера

$$A \in M_n(\mathbb{R})\ x, b \in \mathbb{R}^n Ax = b \Rightarrow \Delta \cdot x_i = \Delta_i$$

Где $\Delta = \det A$, а Δ_i — определитель A, если в ней поменять i-й столбец на b

Доказательство:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = b$$

Тогда

$$\Delta_i = \det\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ & \sum\limits_{j=1}^{n} x_jA_j & \\ & & \end{array}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \det\left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ & A_j & \\ & & \end{array}\right) =$$

При $i \neq j$ A_j так же будет стоять в другом месте, поэтому определитель равен 0, значит все кроме одного слагаемых равно 0. Итого:

$$\Delta_i = x_i \det \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ & A_i & \\ & & \end{array} \right) = x_i \det A = x_i \Delta$$

5.3. Характеристический многочлен

Определение 5.15: Характеристический многочлен

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$
$$\det(\lambda E - A) = \mathcal{X}_A$$

Замечание 5.16

$$\mathcal{X}_A = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$$

Fun fact: $a_0 = \det(0 \cdot E - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$
Степень $n-1$ можно достать только из $(\lambda - a_{11}) \ldots (\lambda - a_{nn})$
Поэтому $a_{n-1} = -\operatorname{tr} A$

Замечание 5.17

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$
$$\lambda \in \operatorname{spec}_{\mathbb{R}} A \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}\ A - \lambda E - \text{необратима} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}\ \det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda - \text{корень } \mathcal{X}_A \text{ в } \mathbb{R}$$

Лемма 5.18

$R_{i_1,\ldots,i_k}$ — матрица A, если из нее вычеркнуть столбцы и строки $i_1, \ldots, i_k$
Тогда

$$a_k = (-1)^{n-k} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \det R_{i_1,\ldots,i_k}$$
$$a_k = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \det(-R_{i_1,\ldots,i_k})$$

Доказываем:

Надо раскрыть скобки. Тогда получим матрицу со столбцами либо λE_i, либо $-A_i$. Разложим по очереди по столбцам, где находятся λE_i. Получим $\lambda^k \det(-R_{i_1,\dots,i_k})$. Остается сложить такое по всем слагаемым.

Теорема 5.19

$$\mathcal{X}_A - \text{зануляющий для } A$$

Для это выйдем из $\mathbb{R}[\lambda]$ в $M_n(\mathbb{R})[\lambda]$. Произведение/сумму там опеределим как и в обычном умножении.

Fun fuct:

$$\mathbb{R}[t] \subseteq M_n(\mathbb{R})[t]$$
$$\sum_k a_k t^k \mapsto \sum_k a_k E t^k$$

Определим левую и правую подстановку:

$$D \in M_n(\mathbb{R}) f(D) = \sum_{k=0}^{n} A_k D^k (D) f = \sum_{k=0}^{n} D^k A_n$$

Свойства:

$$f, g \in M_n(\mathbb{R})[t] D \in M_n(\mathbb{R})$$

1. $(f+g)(D) = f(D) + g(D)$
2. Чаще всего $(f \cdot g)(D) \neq f(D) \cdot g(D)$
   $BD \neq DB, f = t, g = B$
   $(f \cdot g)(B) = B \cdot D \neq D \cdot B = f(D) \cdot g(D)$
3. D коммутирует с коэффициентами $g \Rightarrow (f \cdot g)(D) = f(D) \cdot g(D)$

Лемма 5.20

$\mathcal{X}_A(A) = 0$ в $M_n(\mathbb{R})$

План:

$$\mathcal{X}_A \in M_n(\mathbb{R})[t]$$
$$\mathcal{X}_A = f(t) \cdot g(t)$$

1. A коммутирует с коэффициентами g
2. $g(A) = 0$

$\widehat{tE-A} = R(t)$. Нетрудно понять, что $R(t) \in M_n(\mathbb{R}[t])$. Тогда

$$R(t) = R_k t^k + \ldots + R_0$$

$$(tE-A)(\widehat{tE-A}) = \det(tE-A) \cdot E$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{X}_A(t) \cdot E = R(t)(tE-A)$$

Нетрудно видеть, что такое разбиение на множители подходит.

6. Комплексные числа

6.1. Определение

[TODO] 05.11 Lection

6.2. Алгебраическая замкнутость

Теорема 6.1

$\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.
$(\forall f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} : f(\alpha) = 0)$

Доказательство:
Шаг 1:

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$z \to |f(z)|$$

Хотим $\exists z_0 \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} \varphi(z_0) \leq \varphi(z)$.

Лемма 6.2

$f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$
$\forall C > 0 \ \exists R > 0 : (|z| > R \Rightarrow |f(z)| > C)$

Зафиксируем $C > 0$ и f.

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right) = a_n x^n (1 + \omega(x))$$
$$|f(z)| = |a_n||z^n||1 + \omega(z)| \geq |a_n| R^n (1 - |\omega(z)|)$$
$$|\omega(z)| = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n}\right| \leq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \cdot \frac{1}{|z|} + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \cdot \frac{1}{|z|^n}$$

Будем, считать, что $|z| > 1$. Тогда

$$|\omega(z)| \leq \left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right) \cdot \frac{1}{|z|} \leq \left(\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right) \cdot \frac{1}{R}$$

Последнее можно оценить как $\frac{1}{2}$ при достаточно большом R.
Вернемся к оценке $|f(z)|$:

$$|f(z)| \geq |a_n| R^n (1 - |\omega(z)|) \geq |a_n| \frac{R^n}{2}$$

Получили несколько ограничений снизу на R, выберем максимальное.

Вернемся к шагу 1.

Покажем, что если мы нашли минимум внутри диска для $C = |f(0)|$, то он будет минимумом на всей плоскости.

И правда, пусть минимум в z_0. Тогда $f(z_0) \leq f(0) = C \leq f(z)$ для любого числа z вне диска.

Остается найти минимум внутри диска (обозначим диск $D(R)$).

Заметим, что $|f(z)| \geq 0$, поэтому у $|f(z)|$ есть инфимум внутри диска. $a = \inf\limits_{z \in D(R)} |f(z)|$ Он является предельной точкой, поэтому $\exists \{z_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = a$.

Если последовательность комплексных чисел ограничена диском, то у нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность: $z_n = a_n + b_n \cdot i$ — давайте проредим так, чтобы a_n сходились, а потом полученную последовательность проредим еще раз, чтобы теперь и b_n сходились. Мы можем так сделать, потому что $a_n, b_n \in [-R, R]$.

Давайте проредим нашу $\{z_n\}$ так, чтобы она сходилась к какому-то z_0.

Получим $\{z'_n\}$

$a = \lim\limits_{n\to\infty} |f(z'_n)| = |f(\lim\limits_{n\to\infty} z'_n)| = |f(z_0)|$

Шаг 2:

Есть $f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ Уже знаем, что $\exists z_0 \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C}\ |f(z_0)| \leq |f(z)|$.

Если $|f(z_0)| = 0$, то мы нашли корень — это z_0.

Иначе $|f(z_0)| > 0$. Покажем, что такое невозможно.

Сделаем замену $f(z) \to f(z + z_0)$. Теперь минимальный модуль достигается в точке 0, поэтому можно считать, что $z_0 = 0$.

$f(z_0) = f(0) = a_0 \neq 0$.

Поделим многочлен на $a_0 : f \to \frac{f}{a_0}$.

Тогда $f = 1 + a_k z^k + \ldots + a_n z^n$, где a_k — первая ненулевой коэффициент после 1. $|f(z)| \geq |f(z_0)| = |f(0)| = 1$.

Сделаем замену $z \to \alpha z$, где α — какое-то комплексное число.

Теперь $f = 1 + a_k \alpha^k z^k + \ldots + a_n \alpha^n z^n$.

Хотим, чтобы $a_k \alpha^k = -1$.

Но мы точно можем такое сделать, потому что $\alpha^k = -\frac{1}{a_k}$, очевидно, решается (корень можно найти через тригонометрическую форму).

Теперь $f(z) = 1 - z^k + a_{k+1} z^{k+1} + a_n z^n$ ($\{a_n\}$ — это уже новые коэффициенты).

Заметим, что последняя замена не сдвигает 0 и является биективной, поэтому все еще $|f(z)| \geq |f(0)| = 1$.

$$f(z) = 1 - z^k + z^{k+1}(a_{k+1} + \ldots + a_n z^{n-k-1}) = 1 - z^k + z^{k+1}\omega(z)$$
$$f(z) = 1 - z^k(1 - 2\omega(z))$$

Если бы не последнее слагаемое, то мы бы смогли получить $|f(z)| < 1$ с помощью любого $z \in \mathbb{R} : 0 < |z| < 1$.

Покажем, что мы можем сделать последнюю скобку $< \varepsilon$ с помощью таких z.

$$|z\omega(z)| = |z(a_{k+1} + \ldots + a_n z^{n-k+1})| \leq |z|(|a_{k+1}| + \ldots + |a_n z^{n-k+1}|) \leq |z|(|a_{k+1}| + \ldots + |a_n|)$$

Последнее может быть сколь угодно малым при $0 < |z| < 1$.
Но тогда $f(z) = 1 - z^k(1 - z\omega(z))$ может быть меньше 1 — противоречие.

7. Векторные пространства

7.1. Определение

F — поле.

- Структура:

  1. V — множество
  2. $+ : V \times V \to V$
  3. $\cdot : F \times V \to V$

- Аксиомы:

  4. $(v+u)+w = v+(u+w)$
  5. $\exists! 0 \in V : v+0 = 0+v = v$
  6. $\forall v \in V \ \exists! -v : v+(-v) = (-v)+v = 0$
  7. $v+u = u+v$
  8. $\lambda \cdot (v+u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u$
  9. $(\lambda+\mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
  10. $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
  11. $1 \cdot v = v$

Пример 7.1

- $\mathbb{R}^n$ (на самом деле F^n)
- $M_{mn}(F)$
- $F[x]$
- $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Замечание 7.2

1. $0 \in F, v \in V \Rightarrow 0 \cdot v = 0 \in V$
2. $\alpha \in F, 0 \in V \Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0 \in V$
3. $-1 \in F, v \in V \Rightarrow (-1) \cdot v = -v$

7.2. Подпространство

V — векторное пространство над F
Если выполнено:

- $U \subseteq V$
- $\forall u_1, u_2 \in U \; u_1 + u_2 \in U$
- $\begin{cases} \lambda \in F \\ u \in U \end{cases} \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$

Пример 7.3

1. $V = F^n$ и $A \in M_m n(F)$
   $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$
2. $U = 0$
   $U = V$
   (тривиальные подпространства)
3. $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$
   $U = R[x]$

7.3. Линейные комбинации

$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \in V$ — линейная комбинация.
Если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k$, комбинация называется тривиальной.

Определение 7.4

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$

1. Если $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0 : \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$, то вектора называют линейно зависимыми.
2. Вектора называют линейно независимыми (ЛНЗ), если $(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$

Определение 7.5

$E \subseteq V$

1. E — линейно зависимо, если существует конечный набор линейно зависимых векторов из E.

2. E — ЛНЗ, если любой конечный набор векторов из E — ЛНЗ.

Пример 7.6

$V = \mathbb{R}[x]$
$E = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ — ЛНЗ

Определение 7.7

- $v_1, \ldots, v_k \in V$ порождают V, если $\forall v \in V\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k : v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$

- $E \subseteq V$ — порождающее, если $\forall v \in V\ \exists v_1, \ldots, v_k \in E : \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k : v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$

Определение 7.8

- $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$

  Линейная оболочка $< v_1, \ldots, v_k >$

- $E \subseteq V$

  Линейная оболочка $< E >= \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \mid \forall v_1, \ldots, v_k \in E,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$

Замечание 7.9

Линейная оболочка является векторным подпространством

Теорема 7.10

V — векторное пространство над F
$E \subseteq V$
Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1. E — максимальное ЛНЗ (нельзя добавить еще вектор с сохранением ЛНЗ).

2. E — минимальное порождающее (нельзя убрать вектора).

3. E — ЛНЗ и порождающее.

Определение 7.11: Базис

Если E удовлетворяет свойствам выше, его называют базисом V.

- $(1) \Rightarrow (3)$

  Рассмотрим $v \in V$

  1. $v \in E \Rightarrow$ можем получить v линейной комбинацией из E
  2. $v \notin E \Rightarrow E \cup \{v\}$ — линейно зависимо. Тогда существует конечная линейная комбинация векторов из E, равная 0, где участвует v:

  $$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha v = 0$$

  Если $\alpha = 0$, то E было линейно зависимым — противоречие.
  Значит $v = \dfrac{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k}{-\alpha}$.

  Значит E — порождающее, что и требовалось доказать.

- $(3) \Rightarrow (1)$

  V — порождающее $\Rightarrow$ существует конечная линейная комбинация, равная $v \in V$. Поэтому $E \cup \{v\}$ — линейно зависимое.

- $(2) \Rightarrow (3)$

  Пусть E — линейно зависимое. Тогда $\exists v_1, \ldots, v_k \in E,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0$.

  Не умаляя общности, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $v_1 = \dfrac{\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k}{-\alpha_1}$

  Давайте заменим v_1 во всех комбинациях на линейную комбинацию выше. Тогда $E \setminus \{v_1\}$ — тоже порождающее — противоречие.

  Значит E — ЛНЗ, что и требовалось доказать.

- $(3) \Rightarrow (2)$

  Пусть E — не минимальное порождающее.

  Значит $\exists v \in V : E \setminus \{v\}$ — тоже порождающее.

  Тогда v можно представить линейной комбинацией из $E \setminus \{v\}$.

  Но тогда $E = (E \setminus \{v\}) \cup \{v\}$ — линейно зависимо — противоречие.

Замечание 7.12

Как быстро записывать линейные комбинации:

$$v = \big(v_1, \ldots, v_k\big) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k = v \cdot \alpha$$

7.4. Базис

V — векторное пространство.
Вопросы:

1. Существует ли базис?
2. Существует ли конечный базис?
3. e и f — базисы.

   Правда ли, что $|e| = |f|$?

Ответы:

1. Если вы верите в аксиому выбора, то можно показать существование базиса в любом векторном пространстве. Если же нет, то в некоторых пространствах нельзя ни доказать, ни опровергнуть существование базиса:

   $$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

2. Если V имеет конечный базис, то и $U \subseteq V$ тоже имеет конечный базис.
3. Это правда, но докажем только для конечных базисов.

Доказательство последнего:

1. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — порождающее V. Тогда $u_1, \ldots, u_{k+1} \in V$ — линейно зависимые.
2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис.

   Тогда $E \subseteq V$ базис $\Rightarrow |E| < \infty,\ |E| = n$

$$u_i = (v_1, \dots, v_k) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1, \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

$$(u_1, \dots, u_{k+1}) = (v_1, \dots, v_k) \begin{pmatrix} \alpha_{1\,1} & \dots & \alpha_{1\,k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k\,1} & \dots & \alpha_{k\,k+1} \end{pmatrix}$$

Назовем матрицу A. Давайте найдем ненулевое решение $Ax = 0$ (такое есть, потому A — широкая).

Умножим последнее равенство на x справа. Тогда справа получится 0, а слева ux.

Но это значит, что u — линейно зависимое.

Теперь пусть у нас есть базисы e и f, причем e конечный. По предыдущему утверждению $|f| \leq |e|$, то есть f тоже конечный. Но тогда аналогично $|e| \leq |f|$. Значит $|e| = |f|$.

Определение 7.13

V — векторное пространство над F.
$\dim V = |E|$, где E — базис.

Лемма 7.14

V — векторное пространство над F, причем $\dim V < \infty$.
$U \subseteq V$ — подпространство.
Тогда

1. $\dim U < \dim V$
2. $U = V \Leftrightarrow \dim U = \dim V$

Рассмотрим E — базис U. E — ЛНЗ в $V \Rightarrow |E| \leq \dim V$. Но $\dim U = |E|$.

Докажем вторую часть утверждения.

Слева направо очевидно.

Пусть $\dim U = \dim V = n$. Теперь рассмотрим $e_1, \dots, e_n$ — базис U. Тогда $U =< e_1, \dots, e_n >$. Но с другой стороны E — максимальное ЛНЗ в V, поэтому E является и базисом V. Но тогда $V =< e_1, \dots, e_n >= U$.

7.5. Координаты

V — векторное пространство над F.

$e_1, \ldots, e_n$ — базис (фиксированный)

Пусть $v \in V$

$v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, тогда $x_1, \ldots, x_n$ определяются однозначно.

Иначе $y_1e_1 + \ldots + y_ne_n = v = x_1e_1 + \ldots + x_nv_n \Rightarrow (x_1 - y_1)v_1 + \ldots (x_n - y_n)v_n = 0$ откуда по линейной независимости базиса получаем, что $x_i = y_i$.

Тогда $x_1, \ldots, x_n$ — координаты v в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Теперь можно заменить V на F^n

Пусть есть базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$

$(e_1, \ldots, e_n)x = v = (f_1, \ldots, f_n)y$, $x, y \in F^n$.

Для того, чтобы понять, как меняются координаты, нужно понять как связаны два базиса. В этом поможет матрица перехода:

$$f_1 = \big(e_1, \ldots, e_n\big) \begin{pmatrix} c_{1\,1} \\ \vdots \\ c_{n\,1} \end{pmatrix} \quad \ldots \quad f_n = \big(e_1, \ldots, e_n\big) \begin{pmatrix} c_{1\,n} \\ \vdots \\ c_{n\,n} \end{pmatrix}$$

Теперь объединим это все в одну матрицу:

$$\big(f_1, \ldots, f_n\big) = \big(e_1, \ldots, e_n\big) \begin{pmatrix} c_{1\,1} & \ldots & c_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n\,1} & \ldots & c_{n\,n} \end{pmatrix}$$

$$\big(f_1, \ldots, f_n\big) = \big(e_1, \ldots, e_n\big)\, C$$

Покажем, что C — невырожденная.

Аналогично можем получить $\big(e_1, \ldots, e_n\big) = \big(f_1, \ldots, f_n\big)\, D$

Значит $\big(e_1, \ldots, e_n\big) = \big(e_1, \ldots, e_n\big)\, CD \Rightarrow \big(e_1, \ldots, e_n\big)\, (E - CD) = 0$

В силу линейной независимости $e_1, \ldots, e_n$, каждый столбец $E - CD$ является нулевым. Значит C имеет обратную справа, а значит является обратимой.

Отсюда можно получить, что при умножении базиса на обратимую матрицу получается другой базис.

Пусть $\big(e_1, \ldots, e_n\big)\, C = \big(f_1, \ldots, f_n\big)$

Покажем, что $f_1, \ldots, f_n$ — ЛНЗ.

Пусть $\big(f_1, \ldots, f_n\big)\, x = 0 \Rightarrow \big(e_1, \ldots, e_n\big)\, Cx = 0$

По аналогичным рассуждениям (как с $E - CD$), $Cx = 0$. Но C — обратимая, значит $x = 0$.

Теперь наконец-то научимся менять координаты:

$$\big(e_1, \ldots, e_n\big)\, C = \big(f_1, \ldots, f_n\big)$$

$$\big(e_1, \ldots, e_n\big)\, x = v = \big(f_1, \ldots, f_n\big)\, y = \big(e_1, \ldots, e_n\big)\, Cy$$

Поскольку координаты определяются однозначно, $x = Cy$.

Определение 7.15

Фундаментальная система решений — максимальный набор ЛНЗ решений системы $Ay = 0$
Иначе говоря, базис $u = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$

Как искать ФСР?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0$$

$$\begin{array}{lccccccc} x_1 & = & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & = & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & = & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & = & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Нетрудно видеть, что такие решения линейно-независимы (потому что для каждой свободной переменной только одно решение имеет ненулевое коэффициент).

Почему оно порождающее?

Очевидно, что в силу построения такого решения мы можем получить решение с любым набором свободных коэффициентов. А если у решений совпадают все свободные, то и все главные тоже равны.

7.6. Ранг матрицы

Определение 7.16: Столбцовый ранг

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$
$$rk_{\text{столб}}\, A = \dim < A_1, \dots, A_n >$$

Определение 7.17: Строчной ранг

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$
$$rk_{\text{строч}}\, A = \dim < A_1, \dots, A_n >$$

Определение 7.18: Факториальный ранг

Пусть A — матрица $m \times n$.
Рассмотрим все возможные разбиения A на множители размерами $m \times k$, $k \times n$. Среди всех таких выберем наименьшее k — это rk_Φ.
Для нулевой матрицы: $rk_\Phi\, 0 = 0$

Определение 7.19: Тензорный ранг

Пусть A — матрица $m \times n$.
$rk_T A = \{k \mid A = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n,\ x_i \in F^m, y_i^T \in F^n\}$
Для нулевой матрицы: $rk_T\, 0 = 0$

Определение 7.20: Минорный ранг

Квадратная подматрица — элементы на пересечении k столбцов и k строк.
$rk_M\ A$ = размер максимальной (именно максимальной, а не наибольшей) невырожденной квадратной подматрицы.

Замечание 7.21

В силу блочного умножения $rk_\Phi = rk_T$.

Лемма 7.22

$A \in M_{mn}(F)$
$C \in M_m(F)$ — невырожденная
$D \in M_n(F)$ — невырожденная
Покажем, что $rk_* A = rk_* (CAD)$ для $* =$ столб, строк, Ф, Т

Поскольку $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строч}} A^T$, можем доказывать только для столбцового.

- $A \mapsto CA = B$

  $A = \big(A_1, \ldots, A_n\big) \quad B = \big(B_1, \ldots, B_n\big)$

  Столбцы — координаты в базисе, умножение на C — смена координат.

  Поэтому $\dim < A_1, \ldots, A_n >= \dim < B_1, \ldots, B_n >$

- $A \mapsto AD = B$

  $A = \big(A_1, \ldots, A_n\big) \quad B = \big(B_1, \ldots, B_n\big)$

  Заметим, что B_i — линейная комбинация $A_1, \ldots, A_n$.

  Поэтому $< B_1, \ldots, B_n > \subseteq < A_1, \ldots, A_n >$.

  С другой стороны $A = D^{-1}B \Rightarrow$ включение верно в другую сторону, а значит линейные оболочки равны, откуда и следует нужное.

Теперь докажем для факториального.
Пусть $A = B_1 \cdot B_2$ и на этом достигается ранг.
Но тогда $B = CAD = (CB_1) \cdot (B_2 D)$, а значит $rk_\Phi A \geq rk_\Phi B$.
Но $A = C^{-1}BD^{-1}$, а значит равенство верно и в другую сторону. Значит $rk_\Phi A = rk_\Phi CAD$

Лемма 7.23

$A \in M_{mn}(F)$
Тогда $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строк}} A = rk_\Phi A = rk_T A$

Давайте элементарными преобразованиями приведем A к виду $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

В силу предыдущей леммы можно доказывать равенство рангов на этой матрице. Пусть размеры $E - r \times r$.
Очевидно, что $rk_{\text{столб}} A = rk_{\text{строч}} A = r$
$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix}$
Причем размеры множителей $n \times r$ и $r \times m$
Значит $rk_\Phi \leq rk_{\text{столб}}$
Теперь покажем, что $rk_\Phi \geq rk_{\text{столб}}$.

Рассмотрим разбиения на множители, где достигается факториальный ранг $A = BC$, и размер $B - m \times k$, а $C - k \times n$

$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} C$$

A_i — линейная комбинация $B_1, \dots, B_k \Rightarrow < A_1, \dots, A_n > \subseteq < B_1, \dots, B_k >$.

Но тогда $rk_{\text{столб}} \dim < A_1, \dots, A_n > \leq k = rk_{\Phi}$.

Выше показали, что неравенство верно и в другую сторону, поэтому $rk_{\Phi} = rk_{\text{столб}}$

Лемма 7.24

Пусть B максимальная по включению невырожденная квадратная подматрица размера r.
Тогда $r = rk_{\text{столб}}\, A = rk_{\text{строч}}\, A = rk_{\Phi}\, A = rk_T\, A$

Для начала приведем приведем матрицу A к виду $\begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix}$

Заметим, что элементарные преобразования над первыми r строками оставляют B максимальной невырожденной подматрицей:

- Невырожденность B не меняется (так как элементарные преобразования сохраняют ее)
- Если при расширении матрицы мы нашли большую невырожденную, то обратными элементарными преобразованиями получим, что B была не максимальной.

Теперь приведем матрицу B к виду $\begin{pmatrix} E & * \\ * & * \end{pmatrix}$

По аналогичным причинам мы можем прибавлять первые r строк к любым, сохраняя условие леммы. Значит мы можем занулить в первом столбце все кроме первых r строк. Точно так же мы можем занулить и все в первых r строках, кроме первых r столбцов.

Привели B к виду $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$

Теперь будем доказывать для такой матрицы. Предположим, что в $*$ есть ненулевой элемент. Но тогда мы можем расширить E до другой невырожденной квадратной подматрицы — противоречие.

Но тогда на самом деле у B такой вид: $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Но это значит, что r совпал со всеми ранними рангами.

7.7. Линейные отображения

7.7.1. Определение

Определение 7.25: Линейное отображение

V, U — векторные пространства над F
$\varphi : V \to U$

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$

В случае выполнения этих свойств φ — линейное отображение.
Если верно еще и

3. φ — биективное

тогда φ — изоморфизм.

Пример 7.26

- $\varphi : F^n \to F^m$
  $\varphi(x) = Ax$
- $\varphi = 0$
- $id(x) = x$
- $D[0,1] = \{f[0,1] \to \mathbb{R} \mid \exists f'\}$
  $F[0,1] = \{f[0,1] \to \mathbb{R}\}$
  $\varphi : D[0,1] \to F[0,1]$
  $\varphi(f) = f'$
- $\varphi : C[0,1] \to D[0,1]$
  $\varphi(f) = \hat{f}(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$
- $\varphi : M_n(F) \to M_n(F)$
  $\varphi(X) = X^T$

$\hom_F(v, u) = \{\varphi \mid \varphi - F\text{-линейно}\}$

Замечание 7.27

$(\hom_F(v,u),+,\cdot)$ — векторное пространство.

Очевидно, что для задания линейного отображения нужно задать его на базисных векторах, причем если у двух отображения совпадают значения на базисе, то они совпадают везде.

7.7.2. Матрица линейного отображения

Сделаем аналог координат.
Идея:
$\Phi_{\text{коорд}} F^n \to F^m$
$\Phi(x) = Ax$
$\Phi : V \to U$
$e_1, \dots, e_n$ — базис V
$f_1, \dots, f_m$ — базис U

Сделаем
$$\begin{cases} \Phi(e_1) = u_1 \in U \\ \vdots \\ \Phi(e_n) = u_n \in U \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = a_{1\,1} f_1 + a_{2\,1} f_2 + \dots + a_{m\,1} f_m \\ \vdots \\ u_n = a_{1\,n} f_1 + a_{2\,n} f_2 + \dots + a_{m\,n} f_m \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{1\,1} & & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & & a_{2\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\,1} & & a_{m\,n} \end{array}\right)$$

Получаем $\Phi(e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_m)A$ (чтобы нормально определить такое равенство, считаем, что Φ — матрица 1×1 с элементом равным линейному отображению)

Остается понять, как с помощью матрицы задать линейное отображение для любого вектора:

$$v = (e_1, \dots, e_n)x \quad x \in F^n$$
$$\Phi(v) = \Phi((e_1, \dots, e_n)x) = \Phi(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 \Phi(e_1) + \dots + x_n \Phi(e_n) =$$
$$= (\Phi(e_1, \dots, e_n))x = (f_1, \dots, f_n)Ax$$

7.7.3. Смена координат

Что такое смена координат?

$$\Phi(e_1, \ldots, e_n) = (f_1, \ldots, f_m)A$$
$$\Phi(e'_1, \ldots, e'_n) = (f'_1, \ldots, f'_m)A'$$
$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$$
$$(f'_1, \ldots, f'_m) = (f_1, \ldots, f_m)D$$
$$\Phi(e_1, \ldots, e_n)C = (f_1, \ldots, f_m)DA'$$
$$\Phi(e_1, \ldots, e_n) = (f_1, \ldots, f_m)DA'C^{-1}$$
$$A = DA'C^{-1}$$
$$A' = D^{-1}AC$$

Но сделаем D^{-1} и C элементарными преобразованиями над строками и столбцами. Тогда A можно привести к виду $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7.8. Ядро и образ

Определение 7.28: Ядро

$\ker \Phi = \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$

Определение 7.29: Образ

$Im\, \Phi = \{\Phi(v) \in U \mid v \in V\} = \Phi(V)$

Замечание 7.30

$\ker \Phi \subseteq V$ — подпространство
$Im\, \Phi \subseteq U$ — подпространство

Пример 7.31

$\Phi : F^n \to F^m$
$\Phi(x) = Ax$
$A \in M_{mn}(F)$
$\ker \Phi = \{x \in F^n \mid Ax = 0\}$
$Im\, \Phi = \{Ax \in F^m \mid x_i \in F\} =< A_1, \ldots, A_n >$
(A_i — столбцы A)

Замечание 7.32

$\dim Im\,\Phi = rk\ A$
$\dim \ker \Phi = n - rk\ A$

Лемма 7.33

$\Phi : V \to U$ — линейное отображение
Тогда

1. Φ инъективно $\Leftrightarrow \ker \Phi = 0$
2. Φ сюръективно $\Leftrightarrow Im\,\Phi = U$
3. $\dim \ker \Phi + \dim Im\,\Phi = \dim V$

Второе очевидно, третье следует из замечания выше.
Докажем первое:

- $\Rightarrow$

  Очевидно

- $\Leftarrow$

  $\Phi(v_1) = \Phi(v_2) \Rightarrow \Phi(v_1) - \Phi(v_2) = 0 \Rightarrow \Phi(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$