(a) Dersom X er antall ganger hun vinner i de 24 rulett-spillene, vil X være binomisk fordelt ettersom eksperimentet følger disse 4 reglene:

1. The experiment consists of a sequence of n smaller experiments called *trials*, where n is fixed in advance of the experiment.
2. Each trial can result in one of the same two possible outcomes (dichotomous trials), which we denote by success (S) or failure (F).
3. The trials are independent, so that the outcome on any particular trial does not influence the outcome on any other trial.
4. The probability of success is constant from trial to trial; we denote this probability by p.

Her vil trial tilsvare et spill, hvor n = 24 spill. Hvert spill kan ende i enten Success (vinn), eller Failure (tap). Det er også klart her at hvert rulett spill ikke påvirker sannsynlighetene for neste spin. Og ettersom spilleren satser påhspace.5mm totalt 18 av 37 mulige felt, vil sannsynligheten for Success være

$$p = \frac{18}{37}$$

Ettersom X er et binomisk forsøk, vil

$$E(X) = n \cdot p$$

altså

$$E(X) = 24 \cdot \frac{18}{37} = 11.67$$

og

$$V(X) = np(1-p) = 5.99$$

Som videre gir en standard deviation

$$SD(X) = \sqrt{V(X)} = 2.45$$

(b) La Y være den samlede nettogevinsten til kvinnen i de 24 spillene. Da vil Y kunne utrykkes som

$$Y = 25 \cdot \frac{36}{k} X - 25n$$

hvor X = antall ganger hun vinner, k = 18 og n = 24. Dette gir videre

$$E(Y) = 25 \cdot \frac{36}{k} E(X) - 25n$$

$$E(Y) = -\frac{25}{37}n \approx -16.22$$

og

$$V(Y) = \left(25 \cdot \frac{36}{k}\right)^2 \cdot V(X)$$
$$V(Y) \approx 14975$$

som gir

$$SD(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 122.37$$

(c) Hva er sannsynligheten for at hun vinner minst 300 kroner i løpet av kvelden? Her antar jeg at med "vinner" så er det snakk om nettogevinst. En annen observasjon her er at dersom kvinnen vinner, så vil hun vinne

$$25 \cdot \frac{36}{k} = 50$$

altsåvil inkrementene hun kan vinne være på 50 kroner. Derfor vil

$$P(Y \geq 300) = 1 - P(Y \leq 250)$$

Vi må nå finne hvor mange ganger hun må vinne for å få en nettogevinst på 250 kroner. Dette kan gjøres ved å ta vår funksjon for Nettogevinst,

$$Y = 25 \cdot \frac{36}{k}X - 25n$$

Løser vi for Y = 250, k = 18 og n = 24 får vi:

$$X = \frac{250 + 25n}{25 \cdot \frac{36}{k}} \Rightarrow X = 17$$

Til slutt har vi altså at sannsynligheten for at hun vinner minst 300 kroner er:

$$P(Y \geq 300) = 1 - B(x; n, p) \approx 0.0079$$
$$P(Y \geq 300) = 0.79\%$$

La oss nå finne $P(Y \leq -300)$, igjen må vi løse ligningen for nettogevinst gitt Y = -300.

$$X = \frac{-300 + 25n}{25 \cdot \frac{36}{k}} \Rightarrow X = 6$$

$$B(x; n, p) \approx 0.0158 \Rightarrow P(Y \leq -300) \approx 1.58\%$$

(d) Vi skal nå betrakte en mann som er med i 24 spilleomganger og hver gang satser 25 kroner på seks innsatsfelt. Denne gangen inkrementeres nettogevinsten med $25 \cdot \dfrac{37}{k} = 150$. Sannsynligheten for at han vinner minst 300 kroner blir $P(Y \geq 300) = 1 - P(Y \leq 150)$. Igjen må vi finne X-antall seiere som tilsvarer 150 kroner nettogevinst.

$$Y = 25 \cdot \frac{36}{k} X - 25n \xrightarrow{Y=150, k=6, n=24} X = 5$$

Sannsynligheten er derfor

$$P(Y \geq 300) = 1 - P(Y \leq 150) \approx 0.1666$$

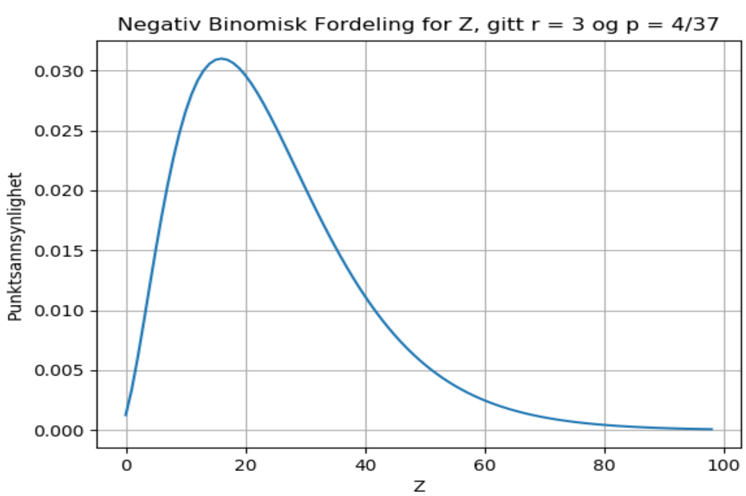
$$P(Y \geq 300) \approx 1.666\%$$

Tilsvarende fremgangsmåte for å finne sannsynligheten for at mannen taper minst 300 kroner, $P(Y \leq -300)$ gir:

$$B(x; n, p) \xrightarrow{x=2} 0.245$$

$$P(Y \leq -300) \approx 24.58\%$$

(e) Endelig betrakter vi en kvinne som gjentatte ganger satser 25 kroner på fire innsatsfelt. Hun spiller helt til hun vinner for tredje gang, og da stopper hun å spille. Her er Y = Z + 3 hvor Z er en negativ binomisk fordeling med $r = 3$ og $p = \dfrac{4}{37}$. Punktsannsynligheten for Z gir denne grafen:



Vi kan også finne forventet antall spill før hun vinner tre ganger,

$$E(Y) = E(X+3) = E(X) + 3$$

hvor

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$$

altså

$$E(Y) = \frac{3(1-\frac{4}{37})}{\frac{4}{37}} + 3 = 27.75$$

Så hun bør forvente å spille 27-28 ganger før hun har vunnet tre runder.

(f) Hva er sannsynligheten for at hun vinner minst 300 kroner? For å finne nettogevinst-inkremmentene denne gangen ser vi at best-case kan kvinnen vinne $25 \cdot \dfrac{36}{k} \cdot (3) - 25 \cdot (3) = 600$. Videre vil kvinnen miste 25 kroner fra dette beløpet for hvert spill hun ikke vinner. Derfor ønsker vi å finne hvor mange spill tilsvarer en fortjeneste på 300 kroner ?

Dette kan vi bruke funksjonen for nettogevinst for å finne ut.

$$Y = 25 \cdot \frac{36}{k} X - 25n.$$

som gir

$$n = \frac{25 \cdot \frac{36}{k} \cdot X - Y}{25} \xrightarrow{Y=300, k=4, X=3} n = 15.$$

Altså må hun spille maks 15 spill for å tjene 300 + kroner. Sannsynligheten for at det tar maks 15 spill før hun vinner 3 ganger kan finnes ved

$$\sum_{x=0}^{15-3} nb(x; r, p) \approx 0.2161$$

Altså:

$$P(Y \geq 300) \approx 21.61\%.$$

For å finne sannsynligheten for at hun taper minst 300 kroner finner vi først hva n = antall spill må være for at nettogevinst blir -300 kroner. Samme regning som over gir

$$\Rightarrow n = \frac{25 \cdot \frac{36}{k} \cdot X - Y}{25} \xrightarrow{Y=-300, k=4, X=3} n = 39.$$

Dette betyr at hvis kvinnen spiller 39 eller flere ganger, vil hun tape mer enn 300 kroner. Vi har derfor:

$$P(Y \leq -300) = \sum_{x=39-3}^{\infty} nb(x;r,p) = 1 - \sum_{x=0}^{39-3} nb(x;r,p) \approx 0.1917$$

$$P(Y \leq -300) \approx 19.17\%.$$

Oppgave 2 - Privat Pensjonforsikring

(a) Vi skal i denne oppgaven ta for oss sannsynligheten for at en 35 år gammel mann kommer til å dø i løpet av x år, og komme frem til den kumulative fordelingsfunksjonen til X gitt ved

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \prod_{y=0}^{x}(1 - q_{35+y})$$

Hvor X representerer mannens *gjenstående leveår* og q_k representerer sannsynligheten for at en k år gammel mann dør i løpet av ett år. Først observerer vi at $P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$, hvor $P(X > x) = S(x) = Produktsetningen$. La oss så betrakte situasjonen $P(X > 2)$, altså sannsynligheten for at en mann har mer enn to år igjen å leve. Dette kan løses ved produktsetningen:

$$P(X > x) = S(x), \quad x \in \{2\}$$

$$S(2) = P(X > 0) \cdot P(X > 1|X > 0) \cdot P(X > 2|X > 1)$$

$$S(2) = (1 - q_{35}) \cdot (1 - q_{35+1}) \cdot (1 - q_{35+2})$$

Til slutt ser vi at

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - S(x)$$

$$F(x) = 1 - \prod_{y=0}^{x}(1 - q_{35+y}) \quad \square$$

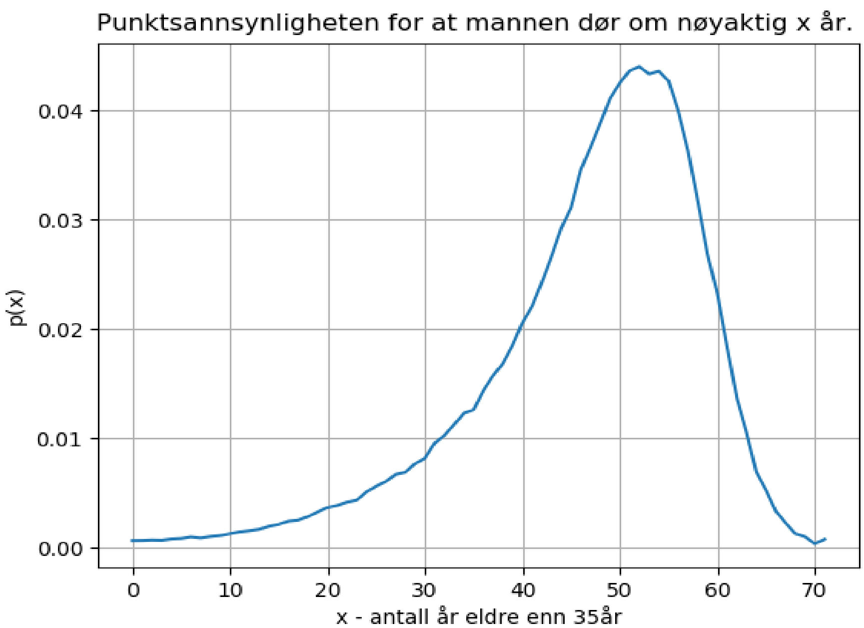
(b) La oss nå undersøke hva punktsannsynligheten $p(x) = P(X = x)$ blir. Punktsannsynligheten tilsvarer sannsynligheten for at antall år mannen har igjen å leve er nøyaktig x år. Intuitivt har vi at

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X \leq x - 1) \quad x \in [0, 71]$$

når vi regner med 106 år som den høyeste mulige levealder. Ved å bruke den kumulative fordelingsfunksjonen til X får vi

$$p(x) = F(x) - F(x - 1) \quad x \in [0, 71] \quad \square \quad (1)$$

(c) Her ser vi en fremstilling av punktsannsynligheten, $p(x)$.



(d) La oss undersøke hva nåverdien til mannen blir dersom han ønsker å få utbetalt 100 000 i pensjon i året. Dersom forsikringsselskapet benytter en rentefot på 3 % pro anno må blir mannens nåverdi $\frac{100\,000}{1.03^k}$ for pengene som blir utbetalt om k år. Så hva blir nåverdien av mannens samlede pensjonsutbetalinger, $h(X)$?

Først observerer vi at mannen kun får utbetalt pensjon dersom han fyller 70 år. Det vil si $h(X) = 0$ for $X \leq 34$. Dersom mannen blir eldre enn 70 år vil den samlede nåverdien tilsvare summen av alle utbetalinger frem til han dør. Derfor har vi at

$$h(X) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{for } X \leq 34 \\ \sum_{k=35}^{x} \frac{100\,000}{1.03^k}, & \text{for } X \geq 35 \end{array} \right\}$$

Altså:

$$h(X) = \sum_{k=35}^{X} \frac{100\,000}{1.03^k} = \frac{100\,000}{1.03^{35}} \cdot \frac{1-(1/1.03)^{X-34}}{1-1/1.03} \quad \square \qquad (2)$$

(e) For å finne forventet nåverdi bruker vi at forventningen for en funksjon av X er

$$E\left[h(X)\right] = \sum_{x \in 71} h(x)p(x)$$

Vi vet allerede at $h(X) = 0$ for $X \leq 34$. Derfor trenger vi kun å regne ut for $35 \leq X \leq 71$.

$$E\left[h(X)\right] = \sum_{k=35}^{71} \frac{100\,000}{1.03^k} \cdot p(x)$$

Putter vi inn resultatet (2) og erstatter $\dfrac{P(100\%)}{1-1/1.03}$ med $\dfrac{P(X \geq 35)}{1-1/1.03}$ får vi:

$$E\left[h(X)\right] = \frac{100\,000}{1.03^{35}} \cdot \frac{P(X \geq 35) - \sum_{x=35}^{71} (1/1.03)^{x-34} p(x)}{1-1/1.03} \quad \square \qquad (3)$$

(f) Ved å bruke formelen for forventet nåverdi av pensjonsutbetalingene (3) og formelen for punktsannsynligheten (1), får vi

$$E\left[h(X)\right] = \sum_{x=0}^{71} h(x)p(x) \approx 366\,483$$

(g) Nåverdien av B kroner som betales om k år er gitt ved $\dfrac{B}{1.03^k}$. Vi har at mannen betaler premieinnbetalinger frem til han fyller 69 år. Nåverdien av mannens samlede premieinnbetalinger kan derfor skrives som summen av alle årene han betaler, altså $K \cdot g(X)$, hvor K tilsvarer antall kroner, og der

$$g(X) = \sum_{k=0}^{min(X,34)} \frac{1}{1.03^k} \quad \square$$

(h) Forventet nåverdi av mannen samlede premieinnbetalinger kan gis som $K \cdot E[g(X)]$. Her vil

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{71} g(x)p(x)$$

Bruker vi at summen av en geometrisk rekke er gitt ved

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Får vi at

$$g(X) = \frac{1-(1/1.03)^{min(X,34)+1}}{1-1/1.03} \qquad (4)$$

Hvis vi nå bruker dette videre har vi at

$$E[g(X)] = \frac{\sum_{x=0}^{71} p(x) - \sum_{x=0}^{34}(1/1.03)^{x+1}p(x) - \sum_{x=35}^{71}(1/1.03)^{34+1}p(x)}{1-1/1.03}$$

$$E[g(X)] = \frac{1-\sum_{x=0}^{34}(1/1.03)^{x+1}p(x) - (1/1.03)^{35}P(X \geq 35)}{1-1/1.03} \quad \square$$

(i) Ved å regne ut $E[g(X)]$ får jeg at

$$E[g(X)] = \sum_{x=0}^{71} g(x)p(x) \approx 21.16.$$

(j) Den årlige premien K bestemmes slik at forventet nåverdi av premieinnbetalingene blir lik forventet nåverdi av pensjonssutbealingene. Altså har vi at

$$K \cdot E[g(X)] = E[h(X)]$$

$$K = \frac{E[h(X)]}{E[g(X)]}$$

$$K \approx 17\,315.60$$