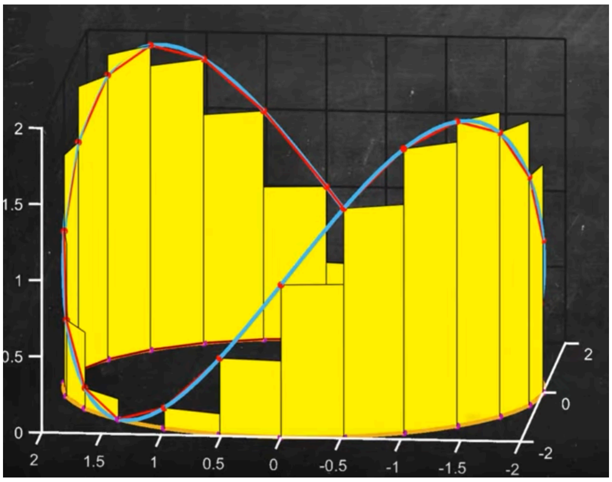
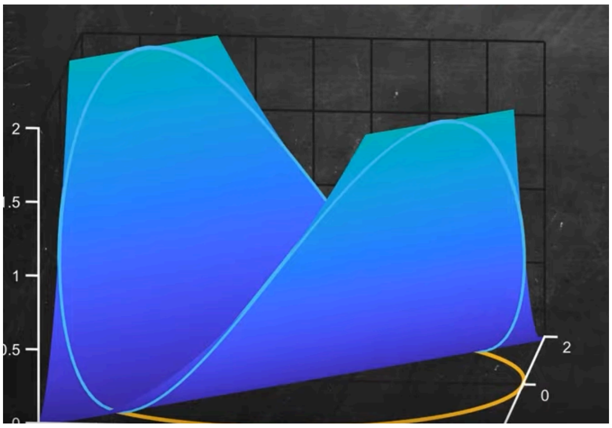
Line integrals

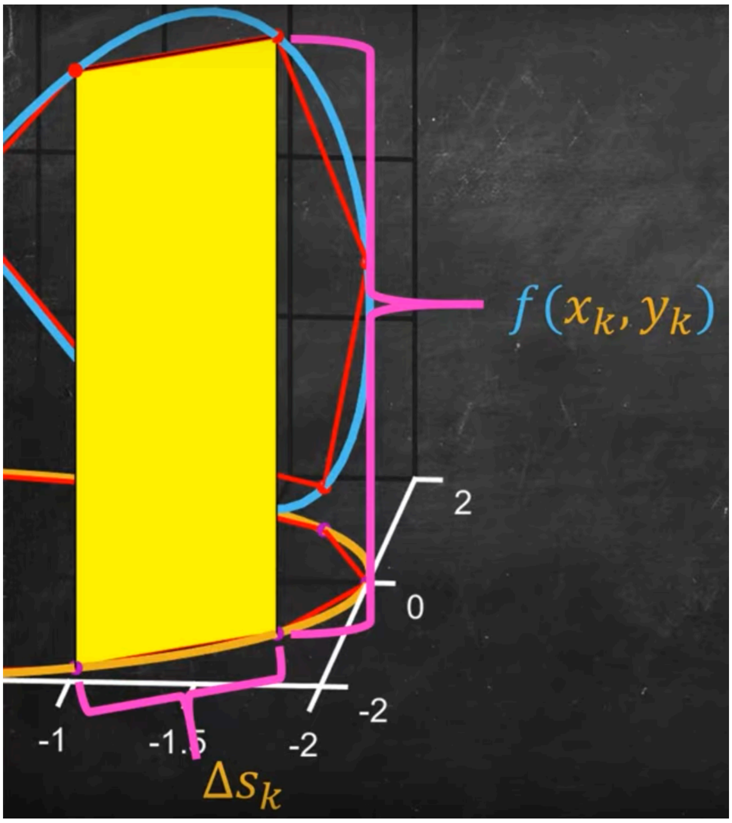
On veut intégrer $f(x, y) = z$ (en bleu) selon le cercle, que l'on paramétrise comme $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$.



On peut d'abord réécrire notre fonction comme $f(t) = f(g(t), h(t))$. Pourquoi ? Parce que les seuls points qui nous intéressent sont ceux selon $g(h), h(t)$!



Notre fonction aurait pu être comme ça, mais on veut juste être sur les points du cercle.



Ici on veut l'aire donc

$$A_k = f(x_k, y_k)\Delta s_k$$

$$A_k = f(x_k, y_k)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\Rightarrow dA = f(g(t), h(t))\sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}dt$$

<u>Theorem</u> (Gauss / Green)

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ be as in the main auxiliary theorem

Let $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be a diff'able vector field. Then

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dl$$

Gauss theorem / divergence theorem

$$\iint_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{F}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, dl$$

Green theorem

ccw rotation by $90°$: $(-y, x)$

cw rotation by $90°$: $(y, -x)$

Outlook

2D

$\iint \operatorname{div} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}$

area integral — line integral

$\iint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \vec{T}$

area integral — line integral

3D

$\iiint \operatorname{div} \vec{F} = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}$

volume integral — surface integral

Similar in higher dimensions:
hypervolume vs. hypersurface

$\oiint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \vec{T}$

surface integral — line integral

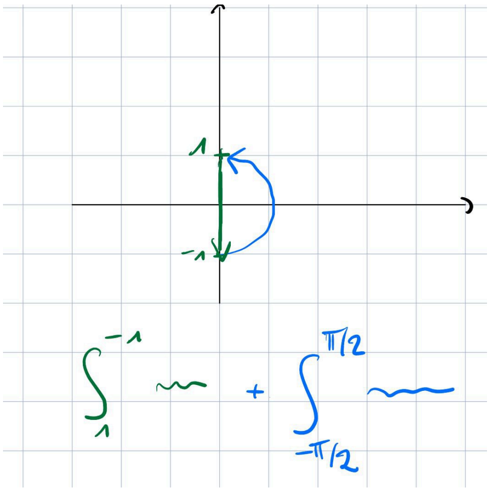
Higher dimensions:
so much more difficult

Trouver un potentiel

- compute $\int_0^x F(t)dt$
- compute $\int_x^y F(t)dt$
- sum them

Calculer une intégrale avec le Green's theorem

- bien choisir un sens pour la bordure (par ex)



- $$\int_{\delta\Omega} F \cdot d\vec{s} = \int \int_{\omega} \operatorname{div}(F) d\omega$$

Calculer une aire d'un graph

$$\text{par exemple, } \Phi(t) = \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$\text{on définit } \vec{r} = (s, t, \Phi(t))$$

Calculer l'aire du graphe de Φ sur Ω:

$$\int_{\Omega} 1 \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dsdt$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{d\Phi}{ds} \\ 0 & 1 & \frac{d\Phi}{dt} \end{pmatrix} = \left(-\frac{d\Phi}{ds}, -\frac{d\Phi}{dt}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \quad \text{(when taking the norm)} \int_{\omega} \sqrt{1 + \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2} dsdt$$

Divergence Theorem

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \; d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\int \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F(\Phi(\vec{x}))} \cdot \vec{n} \cdot \left\| \overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi} \right\| \; d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

On définit une paramétrisation du volume $\varphi(x, y)$, et $\Phi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$.

Pour trouver le vecteur normal :

$$\vec{n} = \frac{\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\left\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\right\|}$$

$$\vec{n} = \frac{\partial_\varphi \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\left\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\right\|}$$

Déterminant Jacobienne

En coordonnées sphériques :

$\det = r^2 \sin(\theta)$

En coordonées polaires

$\det = r$