

Analyse III

Rédigé par Alissa Doggwiler

2023-2024

Table des matières

Préface	1
1 Notations	2
2 Analyse Vectorielle	3
2.1 Les opérateurs différentiels de la physique	3
2.1.1 Le gradient	3
2.1.2 La divergence	4
2.1.3 Le rotationnel	5
2.1.4 Le laplacien	6
2.1.5 Formules de différentiations	7
2.2 Intégrales curvilignes, champs qui dérivent d'un potentiel	9
2.2.1 Courbes dans \mathbb{R}^n	9
2.2.2 Intégrales curvilignes	13
2.2.3 Champs qui dérivent d'un potentiel	15
2.2.4 Théorème de Green	24
2.2.5 Les corollaires du Théorème de Green	28
2.3 Intégrales de surface, le Théorème de la Divergence dans l'espace et le Théorème de Stokes	34
2.3.1 Intégrales de surface	34
2.3.2 Théorème de la Divergence dans l'espace	37
2.3.3 Théorème de Stokes	39
3 Analyse de Fourier	42
3.4 Séries de Fourier	42
3.4.1 Motivation, rappels et résultats préliminaires	42
3.4.2 Définition et convergence des séries de Fourier	43
3.4.3 Propriétés des séries des Fourier	48
3.5 Transformée de Fourier	56
3.4.1 Définition et inversion	56
3.4.2 Propriétés des transformées de Fourier	57
3.5 Quelques applications de l'analyse de Fourier	63
3.5.1 Introduction	63
3.5.2 Application des séries de Fourier	63
3.5.3 Applications de la transformée de Fourier	64
3.5.4 Incompatibilité des deux méthodes	66

Préface

La rédaction de ce polycopié est le travail de Mme Alyssa Doggwiller, étudiante en mathématiques, que la SMA tient à remercier vivement. Il se base sur le cours d'analyse III donné par David Strütt lors du semestre d'automne 2023.

Le but de ce polycopié est d'aider les étudiant·e en sections d'ingénierie pour leur cours d'analyse III de deuxième année. Il ne représente néanmoins pas une alternative au cours ni une garantie de couvrir toute la matière d'un cours d'analyse III. Il convient de toujours se référer au matériel de cours donné par les enseignant·es.

Cet ouvrage n'a pas encore fait l'objet d'un travail de relecture, nous invitons donc les étudiant·es qui l'utiliseraient à s'équiper du scepticisme scientifique adéquat dans leur lecture.

Chapitre 1

Notations

Avant de plonger dans le vif du sujet, voici d'abord un ensemble de notations qui seront utilisées pendant le semestre :

1. On note \mathbb{N} l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et on notera parfois $\mathbb{N}_{\geq k} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$.
2. On note \mathbb{Z} l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
3. On note \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.
4. On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.
5. On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$.
6. Pour $n \geq 2$ on note $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}} = \{(x_1, \dots, x_n) : \forall 1 \leq i \leq n, x_i \in \mathbb{R}\}$.

Si $n = 2$ on écrit $(x_1, x_2) = (x, y)$ et si $n = 3$ on écrit $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$. Dans ces cas x n'est pas un vecteur, mais la première composante d'un vecteur.

7. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, alors une fonction f de Ω à valeur dans \mathbb{R} $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est appelé un champ scalaire. Ω est le domaine de f , \mathbb{R} est son codomaine. L'image de f notée $\text{Im}(f)$ est l'ensemble $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \Omega \text{ tel que } f(x) = y\} = f(\Omega)$.
Si Ω est ouvert, on écrit $f \in C^0(\Omega)$ si f est continue sur Ω . C'est-à-dire que f est continue en chaque point de Ω . Pour $k \geq 1$ on écrit $f \in C^k(\Omega)$ si toutes les dérivées d'ordre plus petit ou égal à k existent et sont continues.

8. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, alors une fonction F de Ω à valeur dans \mathbb{R}^n $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé un champ vectoriel. On écrit alors $F = (F_1, \dots, F_n)$ avec $F_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ω est le domaine de F et \mathbb{R}^n son codomaine.

L'image de F notée $\text{Im}(F)$ est l'ensemble $\text{Im}(F) = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \exists x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } F(x) = y\} = F(\Omega)$.

Si Ω est ouvert et qu'on choisit $k \in \mathbb{N}$, on écrit $F \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ si $F_i \in C^k(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

9. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ dénote la norme euclidienne standard, c'est-à-dire $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Chapitre 2

Analyse Vectorielle

2.1 Les opérateurs différentiels de la physique

2.1.1 Le gradient

Définition 1 (Le gradient)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in C^1(\Omega)$. Nous écrivons $f = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$. Alors le gradient de f noté $\text{grad} f$, ∇f ou Df est le champ vectoriel $\nabla f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Remarque 2 (Nabla)

On écrit $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ qu'on appelle nabla pour que ∇f se comporte comme une "multiplication par un scalaire" du "vecteur" ∇ avec le scalaire f . On interprète alors $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Exemple 3

Dans cet exemple nous voulons calculer le gradient de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0)\}$ définie par $f(x, y, z) = \frac{GmM}{r(x, y, z)}$ telle que $r(x, y, z) = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et G, m, M sont des constantes réelles. Pour cela nous devons calculer successivement $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$. Comme G, m, M sont des constantes nous obtenons les résultats suivants

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = GmM \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r(x, y, z)} \right]$
2. $\frac{\partial f}{\partial y} = GmM \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{r(x, y, z)} \right]$
3. $\frac{\partial f}{\partial z} = GmM \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r(x, y, z)} \right]$

Ainsi, nous ne devons plus que calculer les dérivées partielles de $\frac{1}{r(x, y, z)}$ qui sont les suivantes

1. $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r(x, y, z)} \right] = \frac{-1}{r(x, y, z)^2} \frac{\partial r}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-x}{r(x, y, z)^3}$
2. $\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{r(x, y, z)} \right] = \frac{-y}{r(x, y, z)^3}$

$$3. \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r(x,y,z)} \right] = \frac{-z}{r(x,y,z)^3}$$

Donc nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{GmMx}{r(x,y,z)^3} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{GmMy}{r(x,y,z)^3} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{GmMz}{r(x,y,z)^3}$$

Ce qui nous donne

$$\nabla f(x) = \left(-\frac{GmMx}{r(x,y,z)^3}, -\frac{GmMy}{r(x,y,z)^3}, -\frac{GmMz}{r(x,y,z)^3} \right) = -\frac{GmM}{r(x,y,z)^3} \cdot (x,y,z)$$

L'idée derrière le gradient d'une fonction, c'est qu'en tout point il indique la direction dans laquelle f grandit le plus. D'où l'importance que ce soit un vecteur quand la fonction est définie dans un espace à plus d'une dimension.

Passons maintenant à l'étude du prochain opérateur différentiel.

2.1.2 La divergence

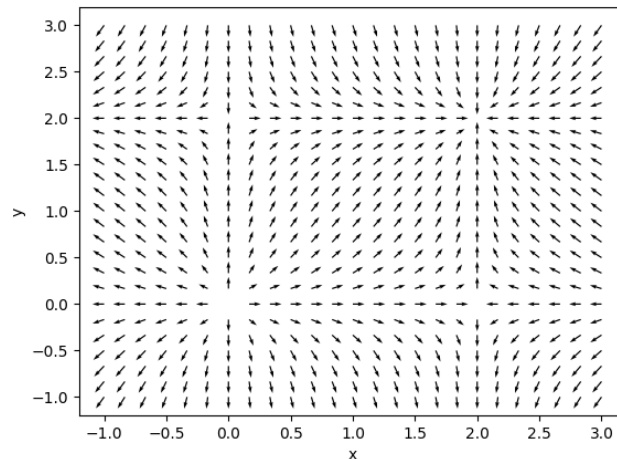
Définition 4 (La divergence)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. La divergence de F notée $\text{div}F$, $\nabla \bullet F$ ou encore $\langle \nabla, F \rangle$ est le champ scalaire $\text{div}F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\text{div}F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)$$

Exemple 5

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $F(x,y) = (-x^2 + 2x, -y^2 + 2y)$. Alors sa divergence est $\text{div}F(x,y) = -2x + 2 - 2y + 2 = -2(x+y) + 4$. La figure suivante illustre F en tant que champ vectoriel normalisé.



L'idée derrière la divergence d'une fonction est qu'elle représente en tout point, si F se comporte plus comme une source, lorsque sa divergence est positive, ou comme un puit, lorsque sa divergence est négative. En d'autres mots, si les lignes de champ partent du point ou si elles y convergent.

2.1.3 Le rotationnel

Définition 6 (Le rotationnel)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Le rotationnel de F noté $\text{rot}F$ est

- pour $n = 2$: le champ scalaire $\text{rot}F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $\text{rot}F(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)$.
- pour $n = 3$: le champ vectoriel $\text{rot}F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$\text{rot}F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

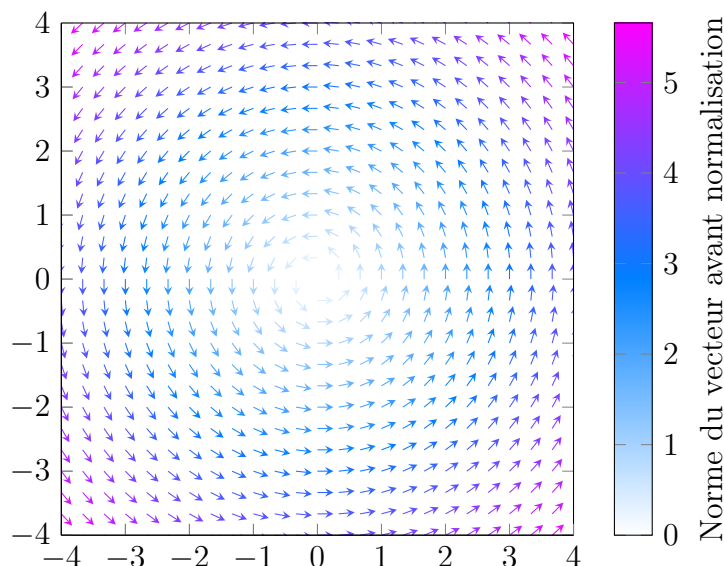
Notons que dans ce cas, on peut voir $\text{rot}F$ aussi comme le produit vectoriel $\nabla \times F$.

- pour $n \geq 4$: des formules existent pour définir $\text{rot}F$, mais on ne les verra pas dans ce cours.

Exemple 7

Utilisons ces exemples pour mieux comprendre ce que représente le rotationnel d'une fonction.

1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $(x, y) \mapsto (-y, x)$. Alors $\text{rot}F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}[x] - \frac{\partial}{\partial y}[-y] = 2$. La figure suivante illustre F en tant que champ vectoriel normalisé.



Dans ce cas et de manière générale pour une fonction F définie sur un espace à deux dimensions, le rotationnel indique à quel point le champ vectoriel tourne.

2. Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $(x, y) \mapsto (x^2 - e^y, \sin(z), y^2 + z)$. Alors $\text{rot}F(x, y) = (2y - \cos(z), 0, e^y)$. Dans ce cas et de manière générale pour une fonction F définie sur un

espace à trois dimensions, la première coordonnée du rotationnel indique l'intensité de la rotation au tour de l'axe x , la deuxième coordonnée indique l'intensité de la rotation au tour de l'axe y et de même pour la troisième coordonnée.

Analysons à présent le dernier opérateur différentiel de ce chapitre.

2.1.4 Le laplacien

Définition 8 (Le laplacien)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in C^2(\Omega)$. Le laplacien de f noté Δf est le champ scalaire $\Delta f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$

Exemple 9

Utilisons ces exemples pour mieux comprendre ce qu'est le laplacien d'une fonction. En effet l'idée est que le laplacien d'une fonction mesure en tout point x la différence entre $f(x)$ et la valeur moyenne de f dans un voisinage de x . En d'autres mots, si le laplacien est strictement négatif, alors $f(x)$ est plus grande que sa valeur moyenne au tour de x , si le laplacien est strictement positif, alors $f(x)$ est plus petite que sa moyenne.

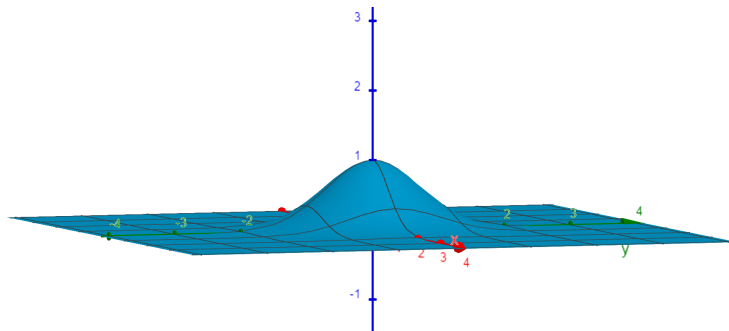
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = a + bx + cy$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$. Aussi $\frac{\partial f}{\partial y} = b$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Ainsi $\Delta f(x, y) = 0$.

Comme cette fonction est linéaire, il est clair que la valeur moyenne de f au tour de n'importe quel point x sera exactement $f(x)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Alors pour calculer le laplacien de f nous avons besoin de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xe^{-(x^2+y^2)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (4x^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)}$.
- Similairement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2 - 2)e^{-(x^2+y^2)}$

Ainsi $\Delta f(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 1)e^{-(x^2+y^2)}$. La figure suivante représente f dans un voisinage de $(0, 0)$.



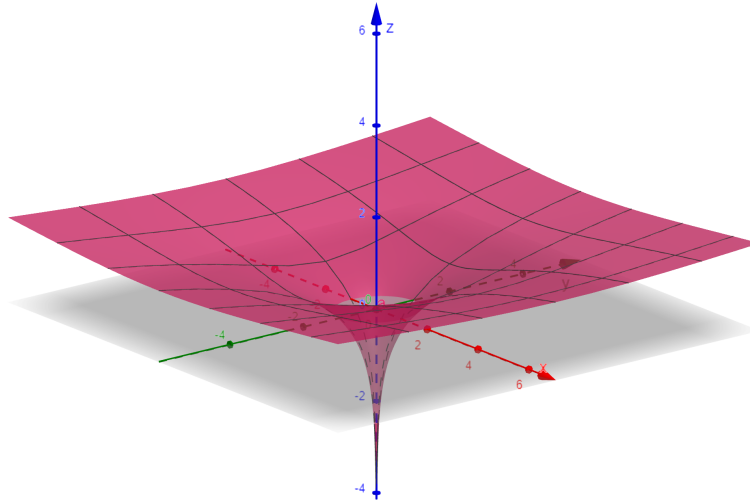
Graphes de $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

A l'aide de $\Delta f(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 1)e^{-(x^2+y^2)}$ on voit donc que si $x^2 + y^2 < 1$ on a $\Delta f(x, y) < 0$, ce qui correspond bien visuellement au fait toutes les valeurs de f dans un voisinage de $(0, 0)$ sont effectivement plus basses que la valeur de f en $(0, 0)$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$. Alors

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$
- Similairement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Ainsi $\Delta f(x, y) = 0$.



Graphe de $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

2.1.5 Formules de différentiations

Cette section regroupe quelques formules utiles utilisant les notions vues précédemment.

Théorème 10

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^2(\Omega)$ et $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Alors

1. $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$.
2. $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$
3. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Preuve :

1. On se rappelle que

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Ainsi on obtient

$$\operatorname{div}(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(x) = \Delta f$$

2. Il nous faut distinguer deux cas

- (a) Si $n = 2$: alors $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. Ainsi, en utilisant que les dérivées partielles commutent car f est C^2 , on obtient

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

- (b) Si $n = 3$: alors $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$. Ainsi on obtient pour $\operatorname{rot}(\nabla f)$ coordonnée par coordonnée :

- i. $\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]$
- ii. $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right]$
- iii. $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]$

En utilisant que les dérivées partielles commutent car f est C^2 on a bien $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$.

3. Par définition nous avons que $\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$. Ainsi pour calculer $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)$ nous allons calculer les dérivées partielles coordonnée par coordonnée

- (a) $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right] = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}$
- (b) $\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x}$
- (c) $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] = \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}$

En utilisant que les dérivées partielles commutent car F est C^2 , nous voyons qu'en sommant les termes de (a)-(c) nous obtenons bien $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

□

Remarque 11

D'autres formules se trouvent dans la série 2. Parmi elles on compte par exemple $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$ pour $f, g \in C^1(\Omega)$.

Ceci termine ce chapitre et nous pouvons passer à présent à l'étude d'intégrales curvilignes et de champs dérivant d'un potentiel.

2.2 Intégrales curvilignes, champs qui dérivent d'un potentiel

Commençons tout d'abord par introduire la notion fondamentale de courbe dans un espace réel.

2.2.1 Courbes dans \mathbb{R}^n

Définition 12 (Courbe régulière, courbe simple régulière, paramétrisation)

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ est une courbe régulière s'il existe un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ et

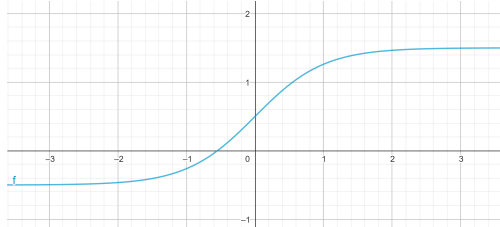
1. $\gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] \text{ tel que } \gamma(t) = x\} = \Gamma$
2. $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$
3. $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

On dit alors que γ est une paramétrisation de Γ .

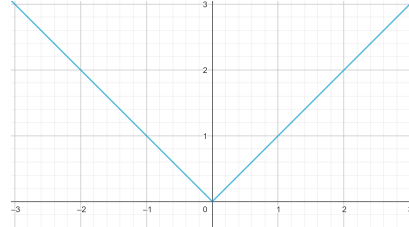
Si de plus il existe une paramétrisation de Γ telle que γ est injective sur $[a, b]$, i.e. $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ tel que $t_1 \neq t_2$ on a $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, alors Γ est appelée une courbe simple.

Finalement on dit que Γ est une courbe fermée si elle est régulière et que toutes les paramétrisations de Γ vérifient $\gamma(a) = \gamma(b)$.

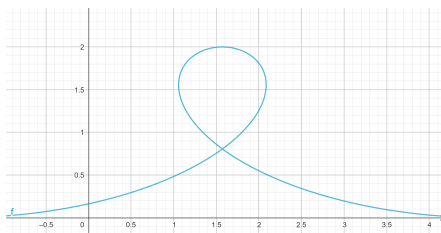
Ci-dessous se trouvent différents exemples de courbes :



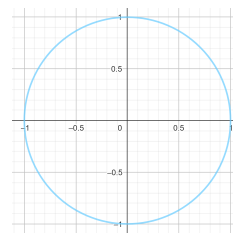
Courbe régulière, simple, pas fermée



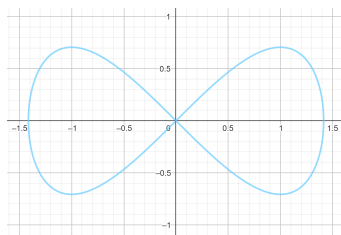
Courbe pas régulière



Courbe régulière, pas simple, pas fermée



Courbe régulière, simple, fermée



Courbe régulière, pas simple, fermée

On dit que Γ est une courbe régulière par morceaux s'il existe $k \in \mathbb{N}_{>0}$ et $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ des courbes régulières telles que $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$.

Remarque 13

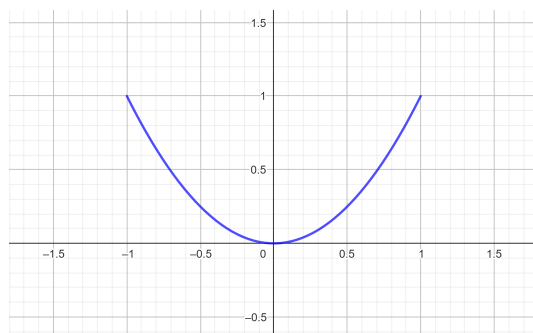
On interprète souvent $\gamma(t)$ comme la position au temps t , $\gamma'(t)$ la vitesse au temps t et $|\gamma'(t)|$ la vitesse scalaire.

Exemple 14

Dans cet exemple nous allons regarder comment, pour des ensembles Γ donnés, nous pouvons leur assigner une paramétrisation.

1. Graphe de fonctions : Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2, y \leq 1\}$. Posons $\gamma_1(t) = t = x$ et $\gamma_2(t) = t^2 = x^2 = y$. Il nous manque l'intervalle pour les valeurs de t . Nous voulons que $y \leq 1$. Or cela nous revient à la condition $t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t \in [-1, 1]$. Ainsi nous définissons la courbe suivante

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \gamma(t) = (t, t^2)$$



Graphe de $\gamma(t) = (t, t^2)$

2. Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, 0 \leq x, y \leq 2\}$. Pour créer la paramétrisation associée à Γ nous avons deux possibilités à partir de la condition $xy = 1$:
 - (a) $y = \frac{1}{x}$. Ce qui nous donne le graphe d'une fonction qui dépend de x . Nous posons donc $\gamma_1(t) = t = x$ et $\gamma_2(t) = \frac{1}{t} = y$. Trouvons le domaine associé à γ . Nous avons les conditions suivantes

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{t} \leq 2 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la paramétrisation de Γ

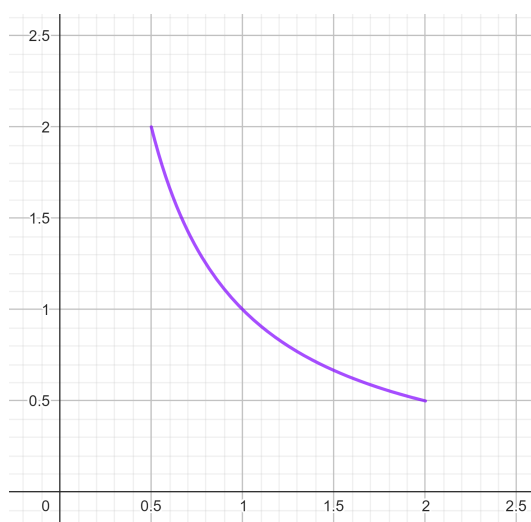
$$\gamma : \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \gamma(t) = \left(t, \frac{1}{t}\right)$$

- (b) L'autre égalité que nous aurions pu poser est $x = \frac{1}{y}$. Ainsi nous avons le graphe d'une fonction qui dépend de y . Donc nous obtenons $\gamma_2(t) = t = y$ et $\gamma_1(t) = \frac{1}{t} = x$. Trouvons le domaine associé à γ . Nous avons les conditions suivantes

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2 &\Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq 2 &\Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2 \end{aligned}$$

Nous obtenons la paramétrisation de Γ

$$\gamma : \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \gamma(t) = \left(\frac{1}{t}, t\right)$$



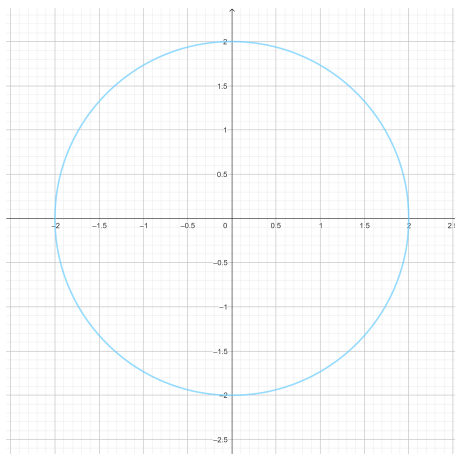
Graphe de $\gamma(t) = \left(\frac{1}{t}, t\right)$

3. Changement de coordonnées : Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$. Nous voudrions trouver sa paramétrisation en utilisant les coordonnées polaires. Posons donc $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Nous avons par définition de Γ :

$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = 4 \Leftrightarrow r^2 = 4 \xLeftrightarrow[r \geq 0] r = 2$$

Comme ceci était la seule condition de Γ , cela nous donne la paramétrisation suivante

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tel que } t \mapsto \gamma(t) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta))$$



Graphe de $\gamma(t) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta))$

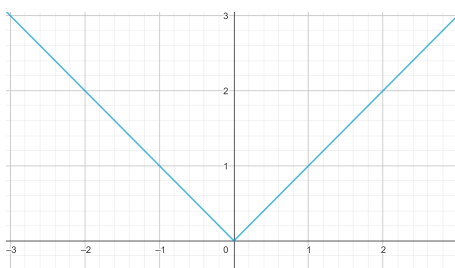
4. Pourquoi avons nous besoin de la condition $|\gamma'(t)| \neq 0$? Prenons $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|, y \leq 1\}$. Alors nous obtenons la courbe suivante

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \gamma(t) = (t, |t|)$$

Or attention $|t|$ n'est pas une fonction de t qui est C^1 , donc γ n'est pas une paramétrisation de Γ . Nous pourrions changer notre paramétrisation en

$$\tilde{\gamma} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \tilde{\gamma}(t) = (t^3, |t|^2)$$

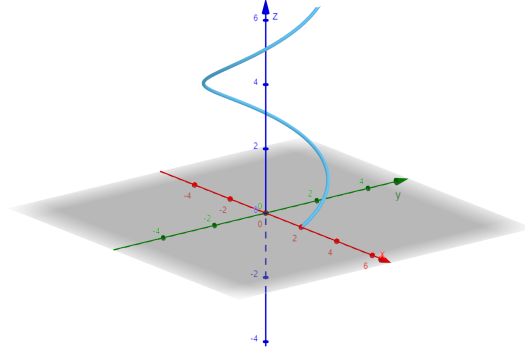
Cette fois-ci $|t|^2$ est bien une fonction C^1 . Or cela ne change pas le fait que Γ possède un point problématique en $(0, 0)$. Nous aimerions éviter que nos domaines aient des "angles". Ainsi nous rajoutons la condition $|\gamma'(t)| \neq 0$. Comme $\tilde{\gamma}'(0) = 0$ nous voyons que $\tilde{\gamma}$ n'est pas non plus une paramétrisation de Γ .



5. Soit $\Gamma = \{(2 \cos(t), 2 \sin(t), t) : t \in [0, 4\pi]\}$. Nous avons alors la paramétrisation

$$\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), t)$$

Alors nous avons $\gamma'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t), 1)$ et donc $|\gamma'(t)| = \sqrt{4 \sin^2(t) + 4 \cos^2(t) + 1} = \sqrt{5} \neq 0$.



Graphes de $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), t)$

Donc Γ est bien une courbe régulière.

2.2.2 Intégrales curvilignes

Définition 15 (Intégrale curviligne)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\Gamma \subseteq \Omega$ une courbe régulière de paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$. Si $f \in C^0(\Omega)$, on définit l'intégrale curviligne de f le long de Γ par

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \in \mathbb{R}$$

Si $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ on définit l'intégrale curviligne de F le long de Γ dans le sens donné par γ par

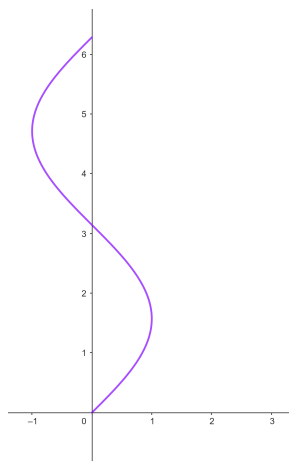
$$\int_{\Gamma} F \bullet dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt \in \mathbb{R}$$

Si $\Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$ est une courbe régulière par morceaux avec Γ_i régulière, alors on définit

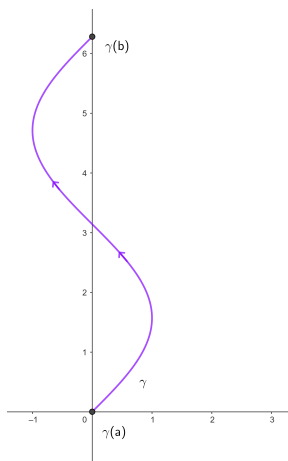
$$\int_{\Gamma} f dl = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f dl \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma} F \bullet dl = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \bullet dl$$

Remarque 16 (Sens et longueur)

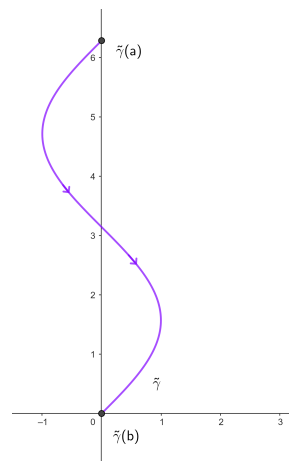
1. Pour $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ une courbe régulière, on définit sa longueur par $\text{long}(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 dl$.
2. Si f est un champ scalaire, alors $\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$ est indépendant du choix de γ . Notons que le terme $|\gamma'(t)| dt$ fait entre guillemets office de Jacobien.
3. Si F est un champ vectoriel, $|\int_{\Gamma} F \bullet dl|$ ne dépend pas du choix de γ . Le signe de $\int_{\Gamma} F \bullet dl$ dépend du sens de parcours défini par γ .



Espace Γ



Paramétrisation γ



γ dans le sens contraire

En effet, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ est une paramétrisation de Γ on peut construire $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Gamma$ définie par $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$. On a $\tilde{\gamma}(a) = \gamma(b)$ et $\tilde{\gamma}(b) = \gamma(a)$. De plus $\tilde{\gamma}'(t) = -\gamma'(a + b - t)$. Ainsi en posant $s = a + b - t \Rightarrow dt = -ds$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle F(\tilde{\gamma}(t)); \tilde{\gamma}'(t) \rangle dt &= \int_a^b \langle F(\gamma(a + b - t)); -\gamma'(a + b - t) \rangle dt \\ &= \int_{\textcolor{red}{b}}^{\textcolor{red}{a}} \langle F(\gamma(s)); -\gamma'(s) \rangle (-1) ds = - \int_a^b \langle F(\gamma(s)); \gamma'(s) \rangle ds \end{aligned}$$

Exemple 17

Dans cet exemple nous allons calculer quelques intégrales curvilignes

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 1 - y^2$. Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. Nous choisissons la paramétrisation $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Nous voulons calculer $\int_{\Gamma} f dl = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$. Pour cela nous avons besoin de $|\gamma'(t)|$: $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ et $|\gamma'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$. Ainsi

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2(t)) \cdot 1 dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt$$

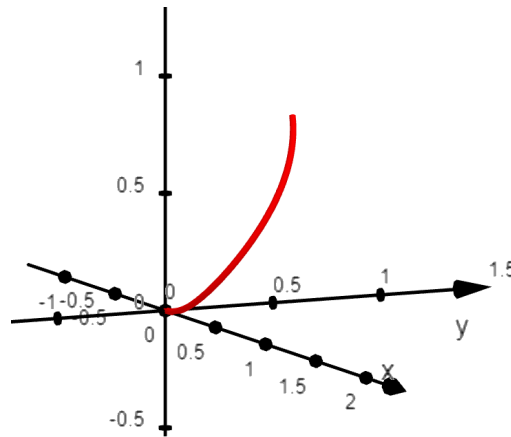
Pour calculer cette intégrale, nous utilisons l'identité : $\cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)$ ce qui nous donne

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos(2t) + 1) dt = \left[-\frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (-y, x)$ et prenons à nouveau $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Nous voulons calculer l'intégrale suivante

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F \bullet dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\cos(t), \sin(t)), (-\sin(t), \cos(t)) \rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin(t), \cos(t)), (-\sin(t), \cos(t)) \rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin(t)^2 + \cos(t)^2) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi
\end{aligned}$$

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \sqrt{1 + |x + 2y - z|}$. Prenons $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1, x = z = \sqrt{y}\}$.



Représentation de Γ

Quelle est la paramétrisation associée à Γ ? Posons $t = x = z \Rightarrow y = t^2$ et $t \in [0, 1]$. Alors nous avons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\gamma(t) = (t, t^2, t)$. Nous aimerions bien calculer $\int_{\Gamma} f dl = \int_0^1 f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$, ainsi nous avons encore besoin de calculer $|\gamma'(t)| : \gamma'(t) = (1, 2t, 1) \Rightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{2 + 4t^2} = \sqrt{2} \sqrt{2t^2 + 1}$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} f dl &= \int_0^1 f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 f(t, t^2, t) \sqrt{2} \sqrt{2t^2 + 1} dt \\
&= \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 2t^2} \sqrt{1 + 2t^2} dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = \sqrt{2} \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

2.2.3 Champs qui dérivent d'un potentiel

Définition 18 (Champ qui dérive d'un potentiel)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$. On dit que F dérive d'un potentiel sur Ω si $\exists f \in C^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = F$ dans Ω .

Proposition 19

Soit $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel qui dérive d'un potentiel $f \in C^1(\Omega)$ et $\Gamma \subseteq \Omega$ une courbe régulière de paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$. Alors

$$\int_{\Gamma} F \bullet dl = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Preuve : On a les égalités suivantes

$$\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) = \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))]$$

La première égalité vient du fait que F est un champ vectoriel qui dérive d'un potentiel. La deuxième vient de la définition du produit scalaire. Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \bullet dl &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] dt \\ &= \left[f(\gamma(t)) \right]_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \end{aligned}$$

□

Remarque 20

Si le potentiel existe, il en existe une infinité : si $c \in \mathbb{R}$ est une constante et $\nabla f = F$ on a également $\nabla[f + c] = F$.

Théorème 21

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Alors

1. Condition nécessaire : Si F dérive d'un potentiel sur Ω , on a

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, \forall x \in \Omega : \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$$

2. Condition suffisante : Si Ω est convexe et $\forall 1 \leq i, j \leq n, \forall x \in \Omega$ on a $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$, alors F dérive d'un potentiel sur Ω .

Preuve :

1. Nous observons les égalités suivantes

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

La première égalité vient du fait que $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ et la deuxième utilise la propriété que $f \in C^2$.

2. Soit $x_0 \in \Omega$. Définissons $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ en utilisant la convexité de Ω :

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0)), (x - x_0) \rangle dt = \int_{[x_0, x]} F \bullet dl$$

Alors on peut montrer (voir série)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t \cdot F_i(x_0 + t(x - x_0))] dt = \left[t \cdot F_i(x_0 + t(x - x_0)) \right]_0^1 = F_i(x)$$

Ce qui conclut la preuve.

□

Remarque 22

1. La condition nécessaire décrite dans la première partie n'est pas une condition suffisante. Pour qu'elle le devienne il nous faut une hypothèse supplémentaire sur Ω .
2. La condition de convexité sur Ω n'est pas optimale. En réalité la condition de simple connexité est suffisante.
3. Si $n = 2$ ou 3 la condition nécessaire décrite dans la première partie est équivalente à $\text{rot} F = 0$.

Théorème 23

Soit Ω un ouvert et $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un champ vectoriel. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes

1. F dérive d'un potentiel sur Ω .
2. $\forall A, B \in \Omega$ et $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Omega$ deux courbes régulières joignant A à B , on a

$$\int_{\Gamma_1} F \bullet dl = \int_{\Gamma_2} F \bullet dl$$



3. $\forall \Gamma \subseteq \Omega$ courbe régulière fermée, on a

$$\int_{\Gamma} F \bullet dl = 0$$

Preuve :

On a bien que le premier point implique les deux autres en utilisant la Proposition 19.

ii) \Rightarrow iii) :

Soit $\Gamma \subseteq \Omega$ une courbe régulière fermée. Soient A et B deux points non égaux sur cette courbe. Alors nous définissons Γ_1 comme étant une partie de Γ joignant A et B et nous définissons Γ_2 comme étant l'autre partie de Γ . Nous paramétrisons Γ_1 et Γ_2 pour qu'elles aillent des deux de A vers B .

Nous voulons montrer que

$$\int_{\Gamma} F \bullet dl = 0$$

Pour cela nous voyons que nous pouvons récrire l'intégrale comme

$$\int_{\Gamma} F \bullet dl = \int_{\Gamma_1} F \bullet dl - \int_{\Gamma_2} F \bullet dl$$

Nous concluons en utilisant l'hypothèse ii) qui nous dit que

$$\int_{\Gamma_1} F \bullet dl = \int_{\Gamma_2} F \bullet dl$$

iii) \Rightarrow ii) :

Soient A et B deux points de Ω . Soient Γ_1 et Γ_2 deux courbes joignant A à B . Nous voulons montrer que

$$\int_{\Gamma_1} F \bullet dl = \int_{\Gamma_2} F \bullet dl$$

Pour cela nous définissons la courbe fermée $\Gamma = \Gamma_1 \cup -\Gamma_2$ où nous rappelons que $-\Gamma_2$ est la courbe Γ_2 mais parcourue dans le sens opposé. Alors en utilisant l'hypothèse iii) nous avons les égalités suivantes

$$0 = \int_{\Gamma} F \bullet dl = \int_{\Gamma_1} F \bullet dl + \int_{-\Gamma_2} F \bullet dl = \int_{\Gamma_1} F \bullet dl - \int_{\Gamma_2} F \bullet dl$$

Ainsi nous avons bien

$$\int_{\Gamma_1} F \bullet dl = \int_{\Gamma_2} F \bullet dl$$

ii) \Rightarrow i) :

Nous voulons montrer que F dérive d'un potentiel sur Ω . Ainsi nous voulons trouver $f \in C^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = F$. Pour simplifier, nous supposons Ω connecté, mais ce raisonnement est en réalité généralisable à un espace non-connecté.

Soit $x_0 \in \Omega$ quelconque et $\forall x \in \Omega$ soit Γ_x une courbe régulière joignant x_0 à x . Posons $f(x) = \int_{\Gamma_x} F \bullet dl$. Alors nous voyons que f est un potentiel de F .

□

Remarque 24

Comment déterminer si F dérive d'un potentiel ou non ? Pour aider à répondre à cette question, voici une petite marche-à-suivre :

Etape 1 : Calculer $\text{rot}F$

Si $\text{rot}F \neq 0$ alors par le Théorème 21 F ne peut pas dériver d'un potentiel. Si $\text{rot}F = 0$ alors passons à la deuxième étape de la marche-à-suivre.

Etape 2 : Est-ce que Ω est simplement connexe ?

Si oui, alors par le Théorème 21 F dérive d'un potentiel. Si non, alors passons à la troisième étape.

Etape 3 : Choisir entre les deux méthodes selon l'intuition

1. Intégrer

$$f(x, y, z) = \int^x F_1(t, y, z) dt + \alpha(y, z)$$

en essayant d'ajuster α pour que $\nabla f = F$. Si on y arrive, alors la réponse est que F dérive bien d'un potentiel, sinon passer à la deuxième méthode.

2. Choisir $\Gamma \subseteq \Omega$ une courbe régulière fermée qui entoure exactement un trou de Ω et calculer

$$\int_{\Gamma} F \bullet dl$$

Si le résultat de cette intégrale est non nul, alors F ne dérive pas d'un potentiel. Si le résultat est nul, alors il faut choisir une autre courbe Γ qui entoure un autre trou du domaine. Si en essayant avec chaque trou du domaine l'intégrale est nulle, il faut changer de méthode.

Remarque 25

Pourquoi est-il important que Γ n'entoure qu'un trou ?

Dans le cas où Γ n'entoure aucun trou, on peut restreindre F à un domaine $\Gamma \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$ plus petit et simplement connexe. Sur ce domaine, on en conclut que F dérive d'un potentiel car $\text{rot}F = 0$. Ainsi par le Théorème 23

$$\int_{\Gamma} F \bullet dl = 0$$

Ce qui ne nous permet pas de conclure que F dérive d'un potentiel sur tout le domaine Ω .

Dans le cas où Γ entoure plus d'un trou, on peut se ramener à l'étude d'une courbe qui n'entoure qu'un seul trou en subdivisant notre courbe Γ en une somme de courbes fermées qui entourent chacune un des trous.

Finalement, on peut se demander pourquoi il est suffisant d'étudier qu'une seule courbe par trou. La raison est la suivante : soient deux courbes Γ_1 et Γ_2 qui entourent le même

trou. Alors à partir de ces deux courbes nous pouvons construire Γ_a et Γ_b telles qu'elles n'entourent aucun trou. Ainsi, comme discuté dans le premier point de cette remarque

$$\int_{\Gamma_a} F \bullet dl = 0 \qquad \int_{\Gamma_b} F \bullet dl = 0$$

Donc

$$\int_{\Gamma_1} F \bullet dl - \int_{\Gamma_2} F \bullet dl = \int_{\Gamma_a} F \bullet dl + \int_{\Gamma_b} F \bullet dl = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_1} F \bullet dl = \int_{\Gamma_2} F \bullet dl$$

Ainsi il est suffisant de ne considérer qu'une seule courbe au tour de chaque trou.

Exemple 26

Utilisons ces exemples pour tester notre marche-à-suivre.

1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$. Est-ce que F dérive d'un potentiel? Utilisons notre marche-à-suivre :

Etape 1 : Calculer $\text{rot} F$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{-y}{x^2 + y^2} \right] = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ainsi $\text{rot} F = 0$ et nous ne pouvons rien conclure. Passons donc à l'étape suivante.

Etape 2 : A quoi ressemble le domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Il possède un trou en $(0,0)$ et ainsi il n'est pas simplement connexe. Nous devons alors passer à la troisième étape de la marche-à-suivre.

Etape 3 : Nous choisissons la deuxième méthode

Comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ne possède qu'un trou en $(0,0)$ nous posons Γ le cercle unité qui entoure ce trou. Soit $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ telle que $t \in [0, 2\pi]$. C'est la paramétrisation associée à Γ et $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. Nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \bullet dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2}, \frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} \right); (-\sin(t), \cos(t)) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Donc F ne dérive pas d'un potentiel.

Maintenant, si on avait appliqué la première méthode et cherché directement un potentiel, que serait-il arrivé?

Pour cela, nous devons calculer l'intégrale suivante et chercher une fonction α pratique

$$\begin{aligned} \int^x -\frac{y}{t^2 + y^2} dt + \alpha(y) &\stackrel{y \neq 0}{=} \int^x -\frac{y}{t^2 + y^2} \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^2}} dt + \alpha(y) = \int^x \frac{1}{(\frac{t}{y})^2 + 1} \left(-\frac{1}{y}\right) dt + \alpha(y) \\ &= -\int^{\frac{x}{y}} \frac{1}{s^2 + 1} ds + \alpha(y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \alpha(y) \end{aligned}$$

Maintenant, rappelons nous que nous voulons ajuster α pour que nous ayons l'égalité suivante

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \alpha(y) \right] = -\frac{1}{(\frac{x}{y})^2 + 1} \frac{-x}{y^2} + \alpha'(y)$$

Ceci implique directement que $\alpha' \equiv 0$ et ainsi α est une constante. Comme nous avons supposé $y \neq 0$, f est définie comme

$$f(x, y) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c_1 & \text{si } y > 0 \\ -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c_2 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Nous devons trouver des constantes c_1 et c_2 réelles telles que lorsque $y \rightarrow 0_+$ et $y \rightarrow 0_-$ nous avons continuité. Or ceci est en réalité impossible. Il est possible de trouver des constantes c_1 et c_2 lorsque $x < 0$. Or elles ne seront plus valables lorsque $x > 0$. Il en est de même dans le cas contraire. Ainsi on ne peut pas trouver de potentiel pour F . Ce cas est assez unique et vient surtout du fait que la fonction f que nous avons trouvée n'est définie que sur une partie du domaine de F .

2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} + 1\right)$. Est-ce que F dérive d'un potentiel? Procédons en utilisant notre marche-à-suivre :

Etape 1 : Calculer $\text{rot} F$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Donc $\text{rot} F = 0$.

Etape 2 : A quoi ressemble le domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Il possède un trou en $(0, 0)$ et ainsi il n'est pas simplement connexe. Nous devons alors passer à la troisième étape de la marche-à-suivre.

Etape 3 : Nous choisissons la deuxième méthode

Comme Ω ne possède qu'un trou en $(0, 0)$ nous posons Γ le cercle unité qui entoure ce trou. Alors définissons la paramétrisation $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ telle que $t \in [0, 2\pi]$ et $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. Nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F \bullet dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{\cos(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2}, \frac{\sin(t)}{\cos(t)^2 + \sin(t)^2} + 1 \right); (-\sin(t), \cos(t)) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin(t) \cos(t) + \sin(t) \cos(t) + \cos(t)) dt = \left[\sin(t) \right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

Comme il n'y a pas d'autre trou dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nous sommes obligés de changer de méthode pour savoir si F dérive ou non d'un potentiel.

Cherchons f telle que $\nabla f = F$:

$$\int_0^x \frac{t}{t^2 + y^2} dt + \alpha(y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \alpha(y)$$

Alors il nous faut $\alpha(y)$ telle que

$$\frac{y}{x^2 + y^2} + 1 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \alpha(y) \right] = \frac{y}{x^2 + y^2} + \alpha'(y) \Rightarrow \alpha'(y) = 1 \Rightarrow \alpha(y) = y + c$$

Donc on peut poser $f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + y + c$ un potentiel de F .

3. Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$. Nous définissons $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $F(x, y, z) = \left(\frac{zx-y}{x^2+y^2}, \frac{zy+x}{x^2+y^2}, z^2 + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \right)$. Est-ce que F dérive d'un potentiel ?

Procédons en utilisant notre marche-à-suivre :

Etape 1 : Calculer $\text{rot} F$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow (\text{rot} F)_1 = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow (\text{rot} F)_2 = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y^2 - 2xyz - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y^2 - 2xyz - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow (\text{rot} F)_3 = 0$$

Etape 2 : A quoi ressemble le domaine Ω ? Il n'est pas simplement connexe.

Etape 3 : Nous choisissons la deuxième méthode

Posons $\Gamma = \{(x, y, z) \in \Omega : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Alors définissons la paramétrisation $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ telle que $t \in [0, 2\pi]$ et $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$. Alors nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F \bullet dl &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-\sin(t)}{1}, \frac{\cos(t)}{1}, \frac{1}{2} \log(1) \right); (-\sin(t), \cos(t), 0) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin(t)^2 + \cos(t)^2) dt = 2\pi \neq 0
\end{aligned}$$

Ainsi F ne dérive pas d'un potentiel.

4. Soit $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0, x^2 + z^2 \neq 0, y^2 + z^2 \neq 0\}$. Posons $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{(x^2+z^2)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{(z^2+y^2)^2}, \frac{z}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z}{(z^2+y^2)^2} \right)$.

Etape 1 : Calculer $\text{rot} F$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = \frac{-4yz}{(z^2 + y^2)^3} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{-4yz}{(z^2 + y^2)^3}$$

Ainsi $(\text{rot} F)_1 = 0$.

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-4xz}{(x^2 + z^2)^3} \quad \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{-4xz}{(x^2 + z^2)^3}$$

Ainsi $(\text{rot} F)_2 = 0$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^3} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^3}$$

Ainsi $(\text{rot} F)_3 = 0$.

Etape 2 : A quoi ressemble le domaine Ω ? Il n'est pas simplement connexe.

Etape 3 : Première méthode

Comme dans Ω il y a beaucoup de trous différents, il est préférable d'essayer de calculer directement un potentiel pour F :

$$f(x, y, z) = \int^x \left(\frac{t}{(t^2 + y^2)^2} + \frac{t}{(t^2 + z^2)^2} \right) dt + \alpha(y, z) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + z^2} + \alpha(y, z)$$

Maintenant nous voulons vérifier les égalités suivantes et de trouver un α correspondant

$$\frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{(z^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y, z)$$

Ceci implique

$$\alpha(y, z) = \int^y \frac{t}{(z^2 + t^2)^2} dt + \beta(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 + z^2} + \beta(z)$$

Maintenant trouvons β :

$$\begin{aligned} \frac{z}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{z}{(z^2 + y^2)^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 + z^2} + \beta(z) \right] \\ &= \frac{z}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{z}{(z^2 + y^2)^2} + \beta'(z) \end{aligned}$$

Ceci implique que β est une fonction constante. Ainsi

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 + z^2} + c$$

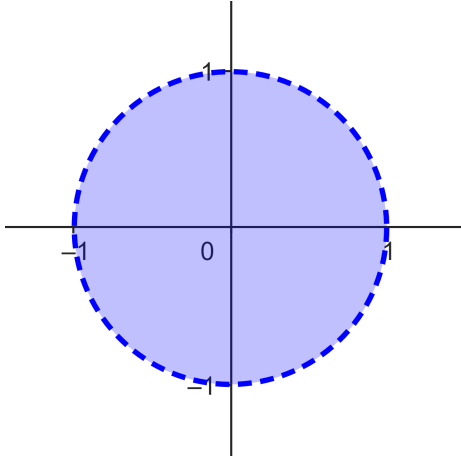
est un potentiel de F .

2.2.4 Théorème de Green

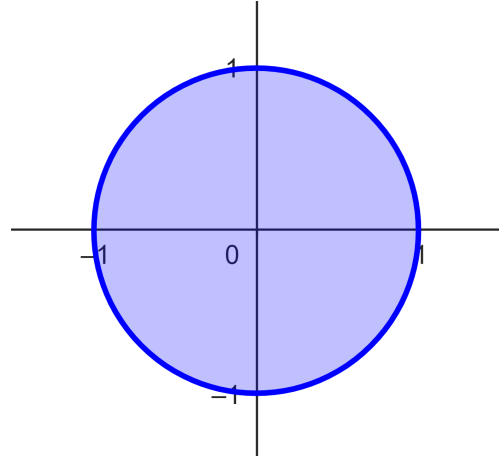
Définition 27 (Bord, bord d'adhérence, bord orienté positivement et négativement, domaine régulier)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Le bord de Ω noté $\partial\Omega$ est défini comme $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } B_\epsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}$ où $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \epsilon\}$.

On note $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ l'adhérence de Ω .

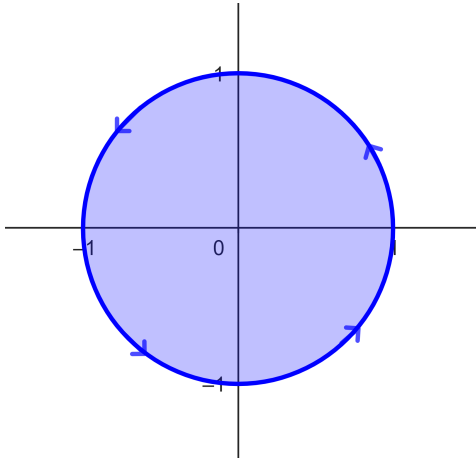


Exemple d'un ouvert de \mathbb{R}^2

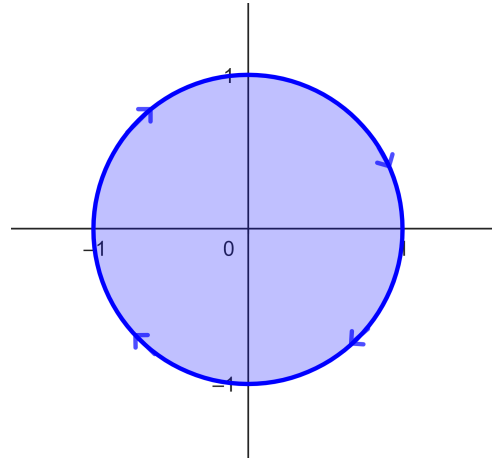


Adhérence de cet ouvert

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que $\partial\Omega$ est une courbe simple fermée régulière. Le bord est orienté positivement si on le paramétrise avec γ dont le sens de parcours laisse le domaine à gauche. Si le sens de parcours laisse le domaine à droite, il est orienté négativement.



Orientation positive



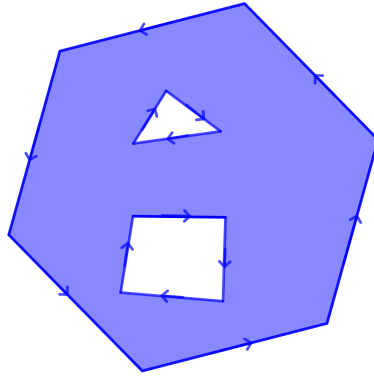
Orientation négative

Attention, la notion d'orientation positive et négative d'une courbe Γ n'a de sens que si Γ est le bord d'un domaine Ω . Si Γ est juste une courbe, l'orientation positive ou négative n'a pas de sens.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné. Il est appelé domaine régulier s'il existe un entier naturel n et $\Omega_0, \dots, \Omega_n$ des ouverts bornés tels que

1. $\forall 1 \leq j \leq n : \overline{\Omega_j} \subseteq \Omega_0$.
2. $\forall 1 \leq i \neq j \leq n : \overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_i} = \emptyset$.
3. $\Omega = \Omega_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n \overline{\Omega_i}\right)$
4. $\forall 0 \leq j \leq n, \partial\Omega_j = \Gamma_j$ est une courbe simple, fermée, régulière.

Le bord $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_n$ est orienté positivement si chaque sens de parcours laisse le domaine à gauche.



Exemple de domaine régulier avec bord orienté positivement

Théorème 28 (Théorème de Green)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement et $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Alors

$$\iint_{\Omega} \text{rot} F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} F \bullet dl$$

Remarque 29

1. On retrouve la structure

$$\int_{\text{domaine}} \text{dérivées} = \int_{\text{bord}} \text{fonction}$$

qu'on a dans le théorème fondamental du calcul intégral

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

2. Si F dérive d'un potentiel sur Ω le théorème se lit $0 = 0$.
3. Le théorème est vrai uniquement si le bord est orienté positivement.

Exemple 30

Utilisons ces exemples pour vérifier le Théorème de Green.

1. Soient $\Omega = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $F(x, y) = (-y, x)$. Nous voulons vérifier le résultat du Théorème de Green. Pour cela nous voulons comparer

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} F dx dy \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} F \bullet dl$$

Commençons par calculer l'intégrale de gauche. Pour cela nous avons besoin du rotationnel de F :

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$

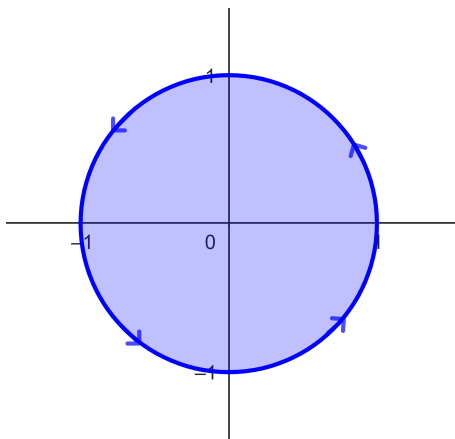
De plus, pour faciliter l'intégration, nous exprimons Ω en coordonnées polaires :

$$x = r \cos(\theta) \text{ et } y = r \sin(\theta) \text{ tels que } 0 \leq r < 1 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]$$

Dans cette situation le Jacobien est r et nous obtenons les égalités suivantes

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} F dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr d\theta = 2\pi \left[r^2 \right]_0^1 = 2\pi$$

Calculons l'autre intégrale. Pour cela nous avons besoin d'une paramétrisation de $\partial\Omega$. Posons $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ et $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ telle que $t \in [0, 2\pi]$. Nous voyons que $\partial\Omega$ est bien orienté positivement.



Ainsi l'intégrale nous donne

$$\int_{\partial\Omega} F \bullet dl = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin(t), \cos(t)); (-\sin(t), \cos(t)) \rangle dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Ceci confirme bien le Théorème de Green.

2. Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0 \text{ et } 4 < x^2 + y^2 < 9\}$ et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2+y^2} \right)$. Commençons par calculer $\int_{\Omega} \operatorname{rot} F dx dy$. Pour cela nous avons besoin du rotationnel de F :

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{x^2 + y^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = \frac{2xy - 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

De plus, pour faciliter l'intégration, nous exprimons Ω en coordonnées polaires :

$$x = r \cos(\theta) \text{ et } y = r \sin(\theta) \text{ tel que } 2 < r < 3 \text{ et } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Dans cette situation le Jacobien est r et nous obtenons les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} F dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \operatorname{rot} F(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \frac{2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) - 2r \cos(\theta)}{r^4} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \left(\frac{2}{r} \cos(\theta) \sin(\theta) - \frac{2}{r^2} \cos(\theta) \right) dr d\theta \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale de $\cos(\theta) \sin(\theta)$ nous utilisons l'identité $\cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ qui vient des égalités suivantes

$$\cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2} \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{rot} F dx dy &= \int_2^3 \left(\frac{2}{r} \left[-\frac{1}{4} \cos(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{r^2} \left[\sin(\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) dr \\ &= \int_2^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{2}{r^2} \right) dr = \left[\log(r) + \frac{2}{r} \right]_2^3 = -\frac{1}{3} + \log\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Maintenant, calculons l'autre intégrale. Pour cela nous avons besoin d'une paramétrisation de $\partial\Omega$. Nous aurons besoin de quatre courbes différentes :

- (a) $\Gamma_1 : \gamma_1(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t))$ et donc $\gamma_1'(t) = (-3 \sin(t), 3 \cos(t))$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- (b) $\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (0, t)$ et donc $\gamma_2'(t) = (0, 1)$ pour $t \in [2, 3]$.
- (c) $\Gamma_3 : \gamma_3(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ et donc $\gamma_3'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t))$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- (d) $\Gamma_4 : \gamma_4(t) = (t, 0)$ et donc $\gamma_4'(t) = (1, 0)$ pour $t \in [2, 3]$.

$\partial\Omega$ est bien orienté positivement. Ainsi l'intégrale nous donne, en faisant attention à la position du domaine (gauche ou droite) :

$$\int_{\partial\Omega} F \bullet dl = \int_{\Gamma_1} F \bullet dl - \int_{\Gamma_2} F \bullet dl - \int_{\Gamma_3} F \bullet dl + \int_{\Gamma_4} F \bullet dl$$

Calculons à présent individuellement chaque intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} F \bullet dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \left(\frac{3 \cos(t)}{9}, \frac{1}{9} \right); (-3 \sin(t), 3 \cos(t)) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t) \cos(t) + \frac{1}{3} \cos(t)) dt \\
&= \left[\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{3} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \bullet dl = \int_2^3 \left\langle \left(0, \frac{1}{t^2} \right); (0, 1) \right\rangle dt = \int_2^3 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_2^3 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_3} F \bullet dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \left(\frac{2 \cos(t)}{4}, \frac{1}{4} \right); (-2 \sin(t), 2 \cos(t)) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin(t) \cos(t) + \frac{1}{2} \cos(t)) dt \\
&= \left[\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \sin(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_4} F \bullet dl = \int_2^3 \left\langle \left(\frac{t}{t^2}, \frac{1}{t^2} \right); (1, 0) \right\rangle dt = \int_2^3 \frac{1}{t} dt = \left[\log(t) \right]_2^3 = \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

Donc nous obtenons bien

$$\int_{\partial\Omega} F \bullet dl = -\frac{1}{3} + \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ce qui confirme le théorème de Green.

2.2.5 Les corollaires du Théorème de Green

Définition 31 (La normale extérieure)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier et $x_0 \in \partial\Omega$. Alors $\nu_{x_0} \in \mathbb{R}^2$ est la normale extérieure unité à Ω au point x_0 si

1. $|\nu_{x_0}| = 1$
2. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation du bord et que $t_0 \in [a, b]$ est tel que $\gamma(t_0) = x_0$ alors $\langle \gamma'(t_0), \nu_{x_0} \rangle = 0$ (ils sont perpendiculaires)
3. $\exists \epsilon_0 > 0$ tel que $\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$ on a $x_0 + \epsilon \nu_{x_0} \notin \Omega$
Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation de $\partial\Omega$ qui laisse le domaine à gauche (γ est orienté positivement) alors

$$\nu_{\gamma(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$$

Corollary 32 (Théorème de la Divergence dans le plan)
Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier et $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Alors

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle dl$$

Exemple 33

Notre but est de vérifier le Théorème de Divergence grâce à quelques exemples. Pour cela nous voulons montrer

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle dl$$

1. Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 < y < 1\}$ et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $F(x, y) = (xy, x^2)$.

Commençons par calculer $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy$. Pour cela nous avons tout d'abord besoin de la divergence de F

$$\operatorname{div} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [xy] + \frac{\partial}{\partial y} [x^2] = y$$

Exprimons Ω en coordonnées carthésiennes. Cela nous donne $x \in]-1, 1[$ et $y \in]x^2, 1[$. On obtient alors comme intégrale

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} \operatorname{div} F(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 y dy dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left[y^2 \right]_{x^2}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} \right] dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^5}{10} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

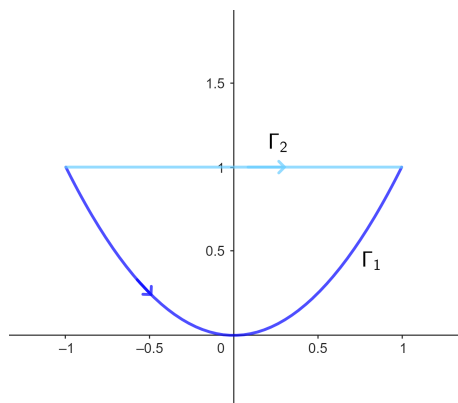
Maintenant calculons l'autre intégrale. Pour cela nous avons besoin d'une paramétrisation de $\partial\Omega$. Nous allons décomposer l'ensemble en deux courbes

- (a) $\Gamma_1 : \gamma_1(t) = (t, t^2)$ telle que $t \in [-1, 1]$. Alors $\gamma_1'(t) = (1, 2t)$ et

$$\nu_{\gamma_1(t)} = \frac{((\gamma_1')_2(t), -(\gamma_1')_1(t))}{|\gamma_1'(t)|} = \frac{(2t, -1)}{\sqrt{1+4t^2}}$$

Testons en $t = 0 : \nu_{\gamma_1(0)} = (0, -1)$: sa direction est extérieure

- (b) $\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (t, 1)$ et $\gamma_2'(t) = (1, 0)$ telles que $t \in [-1, 1]$. Alors $\nu_{\gamma_2(t)} = (0, -1)$ qui est donc cette fois dirigé vers l'intérieur du domaine.



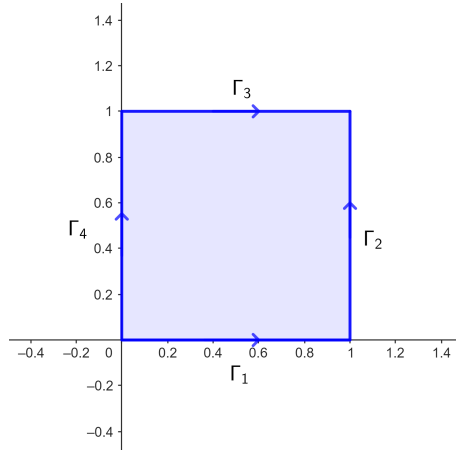
En calculant l'intégrale nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle dl &= \int_{-1}^1 \langle F(\gamma_1(t)); \nu_{\gamma_1(t)} \rangle |\gamma_1'(t)| dt - \int_{-1}^1 \langle F(\gamma_2(t)); \nu_{\gamma_2(t)} \rangle |\gamma_2'(t)| dt \\
&= \int_{-1}^1 \langle (t^3, t^2); \left(\frac{(2t, -1)}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \rangle \sqrt{1+4t^2} dt - \int_{-1}^1 \langle (t, t^2); (0, -1) \rangle dt \\
&= \int_{-1}^1 (2t^4 - t^2 + t^2) dt = \left[\frac{2}{5} t^5 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

2. Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $F(x, y) = (xy, x^2)$. Commençons par calculer $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy$. Comme avant nous avons $\operatorname{div} F = y$. Nous choisissons les coordonnées carthésiennes pour paramétriser Ω . Cela nous donne

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 y dx dy = \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Maintenant vérifions que ce résultat est bien égal à $\int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle dl$. Pour cela, commençons par paramétriser $\partial\Omega$:



Nous voyons que $\partial\Omega$ peut être exprimé en fonction de quatre courbes

- (a) $\Gamma_1 : \gamma_1(t) = (t, 0)$ telle que $t \in [0, 1]$. Ainsi $\gamma_1'(t) = (1, 0)$, $|\gamma_1'(t)| = 1$ et $\nu_{\gamma_1(t)} = (0, -1)$ qui est bien dirigée en dehors du domaine Ω .
- (b) $\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (1, t)$ telle que $t \in [0, 1]$. Ainsi $\gamma_2'(t) = (0, 1)$ et $|\gamma_2'(t)| = 1$ et $\nu_{\gamma_2(t)} = (1, 0)$ qui est bien dirigée en dehors de Ω .
- (c) $\Gamma_3 : \gamma_3(t) = (t, 1)$ telle que $t \in [0, 1]$. Ainsi $\gamma_3'(t) = (-1, 0)$ et $|\gamma_3'(t)| = 1$ et $\nu_{\gamma_3(t)} = (0, 1)$ qui est bien dirigée en dehors de Ω .
- (d) $\Gamma_4 : \gamma_4(t) = (0, t)$ telle que $t \in [0, 1]$. Ainsi $\gamma_4'(t) = (0, 1)$ et $|\gamma_4'(t)| = 1$ et $\nu_{\gamma_4(t)} = (-1, 0)$ qui est bien dirigée en dehors de Ω .

Ainsi nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle dl = \int_{\Gamma_1} \langle F; \nu \rangle dl + \int_{\Gamma_2} \langle F; \nu \rangle dl + \int_{\Gamma_3} \langle F; \nu \rangle dl + \int_{\Gamma_4} \langle F; \nu \rangle dl$$

Pour calculer ces intégrales il est plus simple de les calculer séparément. Cela nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \langle F; \nu \rangle dl &= \int_{\Gamma_1} \langle (xy, x^2); (0, -1) \rangle dl = \int_0^1 -t^2 dt = -\frac{1}{3} \\
\int_{\Gamma_2} \langle F; \nu \rangle dl &= \int_{\Gamma_2} \langle (xy, x^2); (1, 0) \rangle dl = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\
\int_{\Gamma_3} \langle F; \nu \rangle dl &= \int_{\Gamma_3} \langle (xy, x^2); (0, 1) \rangle dl = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \\
\int_{\Gamma_4} \langle F; \nu \rangle dl &= \int_{\Gamma_4} \langle (xy, x^2); (-1, 0) \rangle dl = \int_0^1 0 dt = 0
\end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle dl = \frac{1}{2}$$

Remarque 34

1. Si Γ est une partie du bord orienté positivement par $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ on a

$$\int_{\Gamma} \langle F, \nu \rangle dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \frac{(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))}{|\gamma'(t)|} \rangle |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \rangle dt$$

2. Si on connaît ν sans connaître γ alors on peut calculer directement

$$\int_{\Gamma} \langle F(x, y); \nu_{(x, y)} \rangle dl$$

3. On peut aussi calculer directement

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \rangle$$

en changeant de signe si $(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$ pointe vers l'intérieur du domaine.

4. On peut calculer directement

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \rangle$$

en changeant de signe si γ laisse le domaine à droite.

Attention, les deux dernières techniques sont à éviter.

Corollary 35 (Formules d'aire)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier et soient F, G et $H \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ définies par

$$F(x, y) = (-y, x) \quad G(x, y) = (-y, 0) \quad H(x, y) = (0, x)$$

Alors

$$\text{Aire}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \bullet dl = \int_{\partial\Omega} G \bullet dl = \int_{\partial\Omega} H \bullet dl$$

Corollary 36 (Identités de Green dans \mathbb{R}^2)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier, ν sa normale extérieure unitaire et $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Alors on a les égalités suivantes

1. $\iint_{\Omega} \Delta u dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u; \nu \rangle dl$
2. $\iint_{\Omega} (v \Delta u + \langle \nabla u; \nabla v \rangle) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle v \cdot \nabla u; \nu \rangle dl$
3. $\iint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle u \nabla v - v \nabla u; \nu \rangle dl$

2.3 Intégrales de surface, le Théorème de la Divergence dans l'espace et le Théorème de Stokes

2.3.1 Intégrales de surface

Notation 37

Durant ce chapitre on se permettra d'écrire les composantes de nos champs vectoriels avec des indices en haut

$$g = (g^1, g^2, \dots, g^n)$$

On écrira aussi pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \quad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Définition 38 (Surface régulière)

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ est appelée une surface régulière si

1. $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que ∂A est une courbe régulière par morceaux simple et fermée et $\exists \sigma : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\sigma \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^3)$, $\sigma(\bar{A}) = \Sigma$ et σ est injective sur A .

2. De plus $\sigma_u \wedge \sigma_v = (\sigma_u^1, \sigma_u^2, \sigma_u^3) \wedge (\sigma_v^1, \sigma_v^2, \sigma_v^3) = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_v^2 \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 \sigma_u^3 - \sigma_u^1 \sigma_v^3 \\ \sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_v^1 \sigma_u^2 \end{pmatrix}$ est tel que $|\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0$ sur A .

σ est alors une paramétrisation régulière de Σ et $\frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|} = \nu_{(u,v)}$ est une normale unité au point $\sigma(u, v)$.

Définition 39 (Surface régulière par morceaux)

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ est appelée une surface régulière par morceaux s'il existe k un entier et $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ des surfaces régulières telles que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$.

Exemple 40

Dans cet exemple regardons si $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, z \geq 0\}$ est une surface régulière.

Pour cela, commençons d'abord par exprimer les points de cet exemple en coordonnées cylindriques (ici on peut hésiter avec les coordonnées sphériques, mais nous aurons tendance à choisir les coordonnées cylindriques par simplicité) :

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

En utilisant que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geq 0$ nous obtenons $z = \sqrt{1 - r^2}$. De plus, la condition $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$ nous donne la restriction $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Prenons donc l'ouvert borné $A =]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[\times]0, 2\pi[$ ce qui nous donne $\bar{A} = [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \times [0, 2\pi]$.

Nous choisissons $\sigma : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\sigma(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \sqrt{1 - r^2})$.

Il nous reste à calculer $\sigma_r \wedge \sigma_\theta : \sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \cos(\theta) \\ \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \sin(\theta) \\ r \end{pmatrix}$ qui est bel et bien non-nul.

Ainsi Σ est bien une surface régulière. Notons qu'ici nous n'avons pas vérifié l'injectivité de σ sur A ni le fait qu'elle soit C^1 , mais ceci découle assez rapidement du fait que nous travaillons avec des coordonnées cylindriques.

Définition 41 (Surface orientable)

Une surface régulière $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ est orientable s'il existe un champ de vecteurs normaux unitaires et continus $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$. La donnée d'un tel champ est appelée une orientation de Σ .

Remarque 42

Les problèmes avec la continuité de ν peuvent survenir aux "recolllements", i.e. sur les parties de ∂A où σ n'est pas injective.

Définition 43 (Intégrale de surface)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert, $f \in C^0(\Omega)$, $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $\Sigma \subseteq \Omega$ une surface régulière orientable paramétrée par $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$. Alors nous définissons

1. l'intégrale de f sur Σ par

$$\iint_{\Sigma} f ds = \iint_A f(\sigma(u, v)) \cdot |\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)| du dv$$

2. l'intégrale de F sur Σ par

$$\iint_{\Sigma} F \bullet ds = \iint_A \langle F(\sigma(u, v)); \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \rangle du dv$$

Si de manière plus générale Σ est une surface régulière par morceaux telle que $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$ avec Σ_i régulière orientable, alors les intégrales de f et F sur Σ sont respectivement

$$\iint_{\Sigma} f ds = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} f ds \quad \text{et} \quad \iint_{\Sigma} F \bullet ds = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} F \bullet ds$$

Remarque 44

1. Si l'on compare ces définitions avec l'intégrale curviligne, nous remarquons que ce qui change essentiellement est le fait que $\gamma(t)$ soit remplacée par $\sigma(u, v)$ et $\gamma'(t)$ soit remplacée par $\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)$.
2. L'intégrale de surface d'un champ scalaire ne dépend pas du choix de la paramétrisation. Pour un champ vectoriel F , $|\iint_{\Sigma} F \bullet ds|$ ne dépend pas du choix de la paramétrisation, mais le signe de $\iint_{\Sigma} F \bullet ds$ dépend du choix de l'orientation de Σ .

Exemple 45

Utilisons cet exemple pour calculer diverses intégrales de surfaces.

1. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x^2 + y^2) = (2 - z)^2, 0 \leq z \leq 2, 0 \leq x\}$. De plus, posons $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y, z) = xy$. Cherchons d'abord à montrer que Σ est une surface régulière et donc par la même occasion cherchons A et σ . Ainsi nous

pourrions calculer l'intégrale de f sur Σ .

Considérons une paramétrisation en coordonnées cylindriques des éléments de Σ :

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

Alors la condition $4(x^2 + y^2) = (2 - z)^2$ combinée au fait que $0 \leq z \leq 2$ nous donne bien

$$4(x^2 + y^2) = (2 - z)^2 \Leftrightarrow 4r^2 = (2 - z)^2 \Leftrightarrow 2r = 2 - z \Leftrightarrow r = 1 - \frac{z}{2}$$

De plus, la condition $x \geq 0$ nous donne bien que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi nous définissons

$$\sigma : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2] \text{ telle que } (\theta, z) \mapsto \left(\left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos(\theta), \left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin(\theta), z\right)$$

Vérifions à présent que $|\sigma_\theta \wedge \sigma_z| \neq 0$:

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos(\theta) \\ \left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2}\right) \end{pmatrix} \Rightarrow |\sigma_\theta \wedge \sigma_z| = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right)$$

Ainsi par définition nous obtenons

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f ds &= \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma(\theta, z)) |\sigma_\theta \wedge \sigma_z| d\theta dz \\ &= \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos(\theta) \left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin(\theta) \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right) d\theta dz = 0 \end{aligned}$$

en utilisant l'identité $\cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$.

2. Reprenons le domaine Σ d'avant, mais maintenant nous désirons calculer l'intégrale de surface de $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $F(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$. Pour cela, nous pouvons reprendre la même fonction σ qu'avant, c'est-à-dire : $\sigma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2]$ telle que $\sigma(\theta, z) = \left(\left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos(\theta), \left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin(\theta), z\right)$ avec $\sigma_\theta \wedge \sigma_z = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{z}{2}\right) \cos(\theta) \\ \left(1 - \frac{z}{2}\right) \sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2}\right) \end{pmatrix}$

Ainsi nous obtenons l'intégrale suivante

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} F \bullet ds &= \iint_A \langle F(\sigma(u, v)); \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \rangle dudv \\ &= \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{z}{2}\right) \left\langle \left(\left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 \sin^2(\theta), \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 \cos^2(\theta), z\right); \left(\cos(\theta), \sin(\theta), \frac{1}{2}\right) \right\rangle d\theta dz \\ &= \int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(1 - \frac{z}{2}\right)^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) + \left(1 - \frac{z}{2}\right)^3 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \frac{z}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right) \right) d\theta dz \\ &= \int_0^2 \left(\left(1 - \frac{z}{2}\right)^3 \left[\frac{1}{3} \sin^3(\theta) - \frac{1}{3} \cos^3(\theta) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi \frac{z}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right) \right) dz \\ &= \int_0^2 \left(\frac{2}{3} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^3 + \frac{\pi}{2} \left(z - \frac{z^2}{4}\right) \right) dz = \left[-\frac{1}{3} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^4 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{6} z^3\right) \right]_0^2 = \frac{\pi + 1}{3} \end{aligned}$$

2.3.2 Théorème de la Divergence dans l'espace

Définition 46 (Domaine régulier de \mathbb{R}^3)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert borné. Ω est un domaine régulier s'il existe un entier m et $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ des ouverts tels que

- $\forall 1 \leq j \leq m : \overline{\Omega_j} \subseteq \Omega_0$.
- $\forall 1 \leq i \neq j \leq m : \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset$.
- $\Omega = \Omega_0 \setminus [\bigcup_{i=1}^m \overline{\Omega_i}]$.
- $\forall 0 \leq i \leq m$ on a $\partial\Omega_i = \Sigma_i$ est une surface orientable régulière par morceaux.

Théorème 47 (Théorème de la Divergence)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier, $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu et $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$. Alors

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds$$

Exemple 48

Dans cet exemple nous voulons vérifier le Théorème de la Divergence. Pour cela, considérons $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$ et $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $F(x, y, z) = (x^2, 0, 0)$. Commençons d'abord par calculer

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz$$

Nous obtenons $\operatorname{div} F = 2x$. De plus, nous choisissons les coordonnées cylindriques pour paramétriser le domaine Ω . Rappelons que le Jacobien de ces coordonnées est r . Alors nous obtenons

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

En utilisant l'identité $x^2 + y^2 < 1$ et le fait que $r > 0$ nous voyons que $0 < r < 1$. Ainsi nous obtenons

$$\phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \overline{\Omega} \text{ telle que } (r, \theta, z) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

Ainsi nous obtenons

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r \cos(\theta) r d\theta dr dz = \left[\frac{2}{3} r^3 \right]_0^1 \left[-\sin(\theta) \right]_0^{2\pi} = 0$$

Maintenant pour calculer $\int \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds$ nous avons besoin tout d'abord d'une paramétrisation de $\partial\Omega$: pour cela nous allons prendre trois surfaces régulières orientables :

1. $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ à ceci correspond $\sigma^1 : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \Sigma_1$ telle que $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 1)$. De plus $\sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1 = (0, 0, r)$ et l'orientation est vers l'extérieur du domaine.

2. $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ à ceci correspond $\sigma^2 : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_2$ telle que $(\theta, z) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$. De plus $\sigma_\theta^2 \wedge \sigma_z^2 = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$ et on trouve que l'orientation est vers l'extérieur du domaine en évaluant le tout en $\theta = 0$ et $z = \frac{1}{2}$ par exemple.
3. $\Sigma_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ à ceci correspond $\sigma^3 : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \Sigma_3$ telle que $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0)$. De plus $\sigma_r^3 \wedge \sigma_\theta^3 = (0, 0, r)$ et l'orientation est vers l'intérieur du domaine.

Ainsi pour calculer $\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds$ nous avons besoin des résultats des trois intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} \langle F; \nu \rangle ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (r^2 \cos(\theta)^2, 0, 0); \sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1 \rangle d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (r^2 \cos(\theta)^2, 0, 0); (0, 0, r) \rangle d\theta dr = 0 \\
\iint_{\Sigma_2} \langle F; \nu \rangle ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (\cos(\theta)^2, 0, 0); \sigma_\theta^2 \wedge \sigma_r^2 \rangle d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (\cos(\theta)^2, 0, 0); (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \rangle d\theta dr = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^3 d\theta \\
&= \left[-\frac{1}{12} \sin(3\theta) - \frac{3}{4} \sin(\theta) \right]_0^{2\pi} = 0 \\
\iint_{\Sigma_3} \langle F; \nu \rangle ds &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (r^2 \cos(\theta)^2, 0, 0); (0, 0, r) \rangle d\theta dr = 0
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = 0 + 0 + 0 = 0$$

Remarque 49

Comme pour le Théorème de la Divergence dans le plan, on a une formule pour $\iint_{\Sigma} \langle F; \nu \rangle ds$ où Σ est un bout du bord

$$\iint_{\Sigma} \langle F; \nu \rangle ds = \pm \iint_A \langle F(\sigma(u, v)); \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \rangle dudv = \pm \iint_{\Sigma} F ds$$

où \pm est là pour se rappeler du changement de signe si $\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)$ pointe vers l'intérieur ou l'extérieur du domaine.

Corollary 50 (Formules de volumes)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu. Soit les champs vectoriels

$$F(x, y, z) = (x, y, z) \quad G_1(x, y, z) = (x, 0, 0) \quad G_2(x, y, z) = (0, y, 0) \quad G_3(x, y, z) = (0, 0, z)$$

Alors

$$\text{Volume}(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle ds = \iint_{\partial\Omega} \langle G_i, \nu \rangle ds \quad \forall 1 \leq i \leq 3$$

Corollary 51 (Identités de Green)

Soit Ω, ν comme dans le corollaire précédent. Soient $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$. Alors

1. $\iiint_{\Omega} (f \nabla g + \langle \nabla f; \nabla g \rangle) dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} \langle f \nabla g; \nu \rangle ds$
2. $\iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} \langle f \nabla g - g \nabla f; \nu \rangle ds$
3. $\iiint_{\Omega} \Delta f dx dy dz = \iint_{\partial \Omega} \langle \nabla f; \nu \rangle ds$

2.3.3 Théorème de Stokes**Définition 52**

Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière orientable, $\sigma : \overline{A} \rightarrow \Sigma$ une paramétrisation (rappelons que ∂A est une courbe simple, fermée, régulière par morceaux). Le bord de Σ noté $\partial \Sigma$ est donné par $\sigma(\partial A)$ dont on enlève

- Les courbes qui sont parcourues dans deux sens opposés.
- Les parties qui sont réduites à un point.

Le choix d'un sens de parcours sur ∂A induit un sens de parcours sur $\partial \Sigma$ par composition avec σ . En d'autres mots si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation (d'un bout) de ∂A (et donc un choix de sens de parcours), alors $\sigma \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation (d'un bout) de $\partial \Sigma$ et donc un choix de sens de parcours de $\partial \Sigma$. Le sens de parcours de $\sigma \circ \gamma$ est appelé le sens de parcours induit par σ .

Exemple 53

Illustrons la définition ci-dessus grâce aux exemples suivants

1. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$. Par des calculs antérieurs nous avons trouvé $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ telle que $\sigma(\theta, z) = (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$. Alors l'idée va donc être que nous paramétrisons le bord de $[0, 2\pi] \times [0, 1]$ à l'aide de courbes, ce que va nous donner une paramétrisation du bord de Σ . Nous trouvons
 - (a) $\Gamma_1 : \gamma_1(t) = (t, 0)$ tel que $t \in [0, 2\pi]$, alors $\sigma(\gamma_1(t)) = (\cos(t), \sin(t), 0)$.
 - (b) $\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (2\pi, t)$ tel que $t \in [0, 1]$, alors $\sigma(\gamma_2(t)) = (1, 0, t)$.
 - (c) $\Gamma_3 : \gamma_3(t) = (2\pi - t, 1)$ tel que $t \in [0, 2\pi]$, alors $\sigma(\gamma_3(t)) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t), 1)$.
 - (d) $\Gamma_4 : \gamma_4(t) = (0, 1 - t)$ tel que $t \in [0, 1]$, alors $\sigma(\gamma_4(t)) = (1, 0, 1 - t)$.

Or nous voyons que $\partial \Sigma = \sigma(\Gamma_1) \cup \sigma(\Gamma_3)$. De plus, on a bien que $\sigma(\Gamma_4)$ est $\sigma(\Gamma_2)$ parcourue dans le sens opposé. Ainsi donc pas besoin de $\sigma(\Gamma_2)$ ni $\sigma(\Gamma_4)$.

2. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ pour un réel R . Associé à ce domaine nous avons

$$\sigma : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \Sigma \text{ telle que } (\theta, \phi) \mapsto R(\cos(\theta) \sin(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\phi))$$

Nous obtenons les courbes suivantes pour la paramétrisation du bord de $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$:

- (a) $\Gamma_1 : \gamma_1(t) = (t, 0)$ tel que $t \in [0, 2\pi]$, alors $\sigma(\gamma_1(t)) = R(0, 0, 1)$ ce qui représente un point, donc on ne le considère pas.
- (b) $\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (2\pi, t)$ tel que $t \in [0, \pi]$, alors $\sigma(\gamma_2(t)) = R(\sin(t), 0, \cos(t))$.
- (c) $\Gamma_3 : \gamma_3(t) = (2\pi - t, \pi)$ tel que $t \in [0, 2\pi]$, alors $\sigma(\gamma_3(t)) = R(0, 0, -1)$ ce qui représente un point, donc on ne le considère pas

- (d) $\Gamma_4 : \gamma_4(t) = (0, \pi - t)$ tel que $t \in [0, \pi]$, alors $\sigma(\gamma_4(t)) = R(\sin(\pi - t), 0, \cos(\pi - t))$ qui n'est que $\sigma(\Gamma_2(t))$ mais parcouru dans le sens opposé, donc on les enlève les deux

Ainsi $\partial\Sigma = \emptyset$.

Théorème 54 (Théorème de Stokes)

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert, $\Sigma \subseteq \Omega$ une surface orientable régulière par morceaux, $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors

$$\iint_{\Sigma} \text{rot} F ds = \int_{\partial\Sigma} F \bullet dl$$

Remarque 55

1. Le signe de $\iint_{\Sigma} \text{rot} F ds$ dépend de l'orientation de Σ et le signe de $\int_{\partial\Sigma} F \bullet dl$ dépend du sens de parcours de $\partial\Sigma$. Comment être sûr de choisir des signes compatibles ?
Si $\sigma : \overline{A} \rightarrow \Sigma$ est une paramétrisation de Σ , alors on fixe qui est la première et qui la deuxième variable. Puis on choisit l'orientation de ∂A qui laisse le domaine à gauche et pour $\partial\Sigma$ on choisit l'orientation induite par σ . Pour la normale, si nous avons décidé que u est la première variable et v la deuxième, alors on prend $\sigma_u \wedge \sigma_v$ (et non $\sigma_v \wedge \sigma_u$).
2. Fun fact : Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier, alors $\partial\partial\Omega = \emptyset \Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \text{rot} F ds = \int_{\emptyset} F \bullet dl = 0$.

Exemple 56

Dans cet exemple, nous aimerions vérifier le Théorème de Stokes. Pour cela, considérons le domaine $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ et $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $F(x, y, z) = (0, -z^2, 0)$.

Commençons par calculer $\iint_{\Sigma} \text{rot} F ds$: $\text{rot} F = (2x, 0, 0)$. De plus, pour paramétriser Σ nous allons choisir les coordonnées sphériques. Pour cela, posons donc $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$ et $z = r \cos(\phi)$. La condition $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nous donne $r = 2$. De plus la condition $z \geq 0$ nous donne $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi nous avons

$$\sigma : [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \Sigma \text{ telle que } (\theta, \phi) \mapsto (2 \cos(\theta) \sin(\phi), 2 \sin(\theta) \sin(\phi), 2 \cos(\phi))$$

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_{\phi} = \begin{pmatrix} -4 \cos(\theta) \sin(\phi)^2 \\ -4 \sin(\theta) \sin(\phi)^2 \\ -4 \sin(\phi) \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Ici nous avons fixé θ comme première variable et ϕ comme deuxième variable. L'intégrale nous donne

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle (4 \cos(\phi), 0, 0); (-4 \cos(\theta) \sin(\phi)^2, -4 \sin(\theta) \sin(\phi)^2, -4 \sin(\phi) \cos(\phi)) \rangle d\phi d\theta \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-16 \cos(\theta) \sin(\phi)^2 \cos(\phi)) d\phi d\theta = -16 \left[\sin(\theta) \right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \sin(\phi)^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{aligned}$$

A présent pour calculer $\int_{\partial\Sigma} F \bullet dl$ nous avons besoin d'une paramétrisation de $\partial\Sigma$: Nous allons la donner à l'aide de la paramétrisation de $[0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$:

1. $\Gamma_1 : \gamma_1(t) = (t, 0)$ tel que $t \in [0, 2\pi]$, alors $\sigma(\gamma_1(t)) = (0, 0, 2)$ ce qui représente un point, donc on ne le considère pas.
2. $\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (2\pi, t)$ tel que $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\sigma(\gamma_2(t)) = (2\sin(t), 0, 2\cos(t))$ ce qui est orienté vers l'extérieur.
3. $\Gamma_3 : \gamma_3(t) = (t, \frac{\pi}{2})$ tel que $t \in [0, 2\pi]$, alors $\sigma(\gamma_3(t)) = (2\cos(t), 2\sin(t), 0)$ ce qui est orienté vers l'intérieur
4. $\Gamma_4 : \gamma_4(t) = (0, t)$ tel que $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\sigma(\gamma_4(t)) = (2\sin(t), 0, 2\cos(t))$ qui n'est que $\sigma(\Gamma_2(t))$ mais parcouru dans le sens opposé, donc on les enlève les deux courbes

Ainsi $\partial\Sigma = \sigma(\Gamma_3)$ et

$$\int_{\partial\Sigma} F \bullet dl = - \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma(\gamma_3(t))); (\sigma \circ \gamma_3)'(t) \rangle dt = - \int_0^{2\pi} \langle (0, 0, 0); (\sigma \circ \gamma_3)'(t) \rangle dt = 0$$

Remarque 57

Que se passe-t-il si l'on oublie d'enlever les courbes non-nécessaires ?

Si la courbe se réduit à un point, alors $(\sigma \circ \gamma)'(t) = 0$.

Si on a deux fois la même courbe parcourue dans les deux sens (par exemple $\sigma \circ \gamma_2$ et $\sigma \circ \gamma_4$ comme ci-dessus) alors on aura bien

$$\int_{\sigma(\Gamma_2)} F \bullet dl + \int_{\sigma(\Gamma_4)} F \bullet dl = 0$$

Chapitre 3

Analyse de Fourier

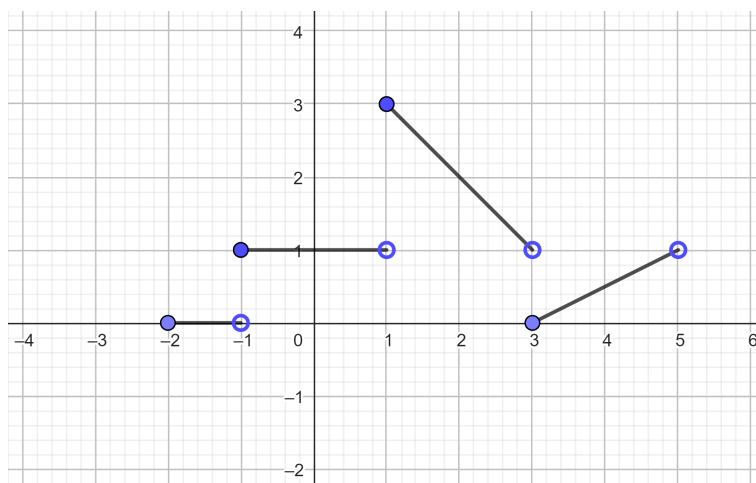
3.4 Séries de Fourier

3.4.1 Motivation, rappels et résultats préliminaires

Définition 58 (Continuité par morceaux, C^1 par morceaux)

Soient $a < b$ deux réels, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux, notée $f \in C_{\text{morc}}^0([a, b])$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tels que $f \in C^0(]a_{i-1}, a_i[)$ pour $i = 1, \dots, n$ et tels que $\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$ existent et sont finies.

Si de plus, $f \in C^1(]a_{i-1}, a_i[)$, $\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f'(x)$ existent et sont finies, alors on dit que f est C^1 par morceaux et on note $f \in C_{\text{morc}}^1([a, b])$.



Fonction continue par morceaux

Proposition 59

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$, alors

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}mx\right) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}mx\right) dx = 0$$

Preuve : L'idée est d'utiliser les identités

- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$

Remarque 60

Soit $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^\infty(\mathbb{R}), f \in C^1_{\text{morc}}([0, 2\pi]), f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$ est un espace vectoriel. On le munit du produit scalaire :

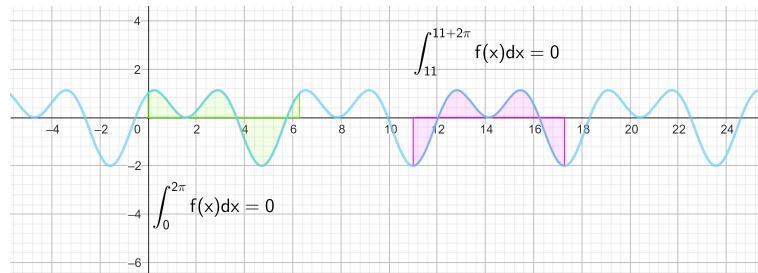
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx$$

La proposition précédente nous dit que l'espace $L = \{\sin(nx) : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\cos(nx) : n \in \mathbb{N}^*\}$ est orthogonal et donc linéairement indépendant. Cependant, est-ce une base de V ? En fait, il s'avère que oui! Et la suite du chapitre va nous montrer ça.

Proposition 61

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et continue par morceaux. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$



Intuition du résultat

3.4.2 Définition et convergence des séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique. Si je peux écrire $f(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)]$ comment trouver α_k et β_k ?

On choisit

$$\alpha_k = \langle f, \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx$$

$$\beta_k = \langle f, \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) dx$$

Définition 62 (Coefficients de Fourier réels, somme partielle de Fourier, série de Fourier)
 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et continue par morceaux. Les coefficients de Fourier réels de f sont définis par

$$\forall n \geq 0 : a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx \text{ et } b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx$$

La somme partielle de Fourier de f d'ordre N est

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right]$$

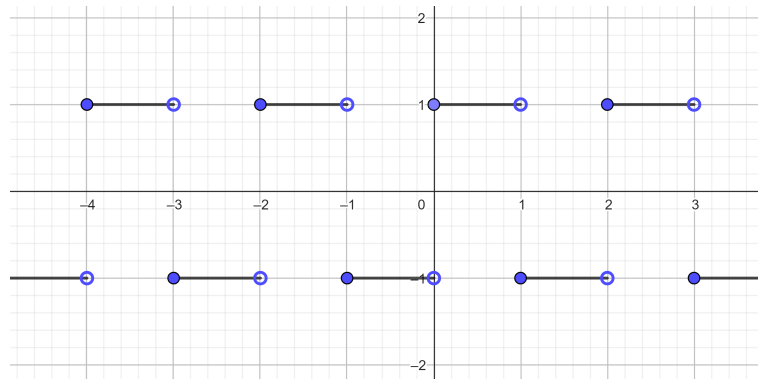
La série de Fourier de f est

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right]$$

si elle *converge*.

Exemple 63

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$ étendue par 2-périodicité sur tout \mathbb{R} .



Représentation de f

Calculons les coefficients de Fourier réels en utilisant la Proposition 61

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 -1 dx + \int_0^1 1 dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx = \int_{-1}^0 -\cos(\pi nx) dx + \int_0^1 \cos(\pi nx) dx \\ &= \left[-\frac{\sin(\pi nx)}{\pi n} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{\sin(\pi nx)}{\pi n} \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx = \int_{-1}^0 -\sin(\pi nx) dx + \int_0^1 \sin(\pi nx) dx \\
&= \left[\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n} \right]_0^1 = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos(\pi n)) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons comme série de Fourier

$$Ff(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\pi x)$$

On peut se demander maintenant si cette série converge et si oui, vers quoi ?

Théorème 64 (Théorème de Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et C^1 par morceaux. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$Ff(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2}$$

Remarque 65

1. En réalité l'hypothèse du théorème est plus faible que ça.
2. Cela nous donne un outil très puissant pour approximer une fonction avec des fonctions C^∞ et pour calculer des séries.

Exemple 66

Le but des prochains exemples est de calculer les séries de Fourier en utilisant le résultat du Théorème de Dirichlet

$$Ff(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2}$$

1. On reprend l'exemple d'avant avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$ étendue par 2-périodicité sur tout \mathbb{R} . On a vu que

$$Ff(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi x)}{(2k+1)}$$

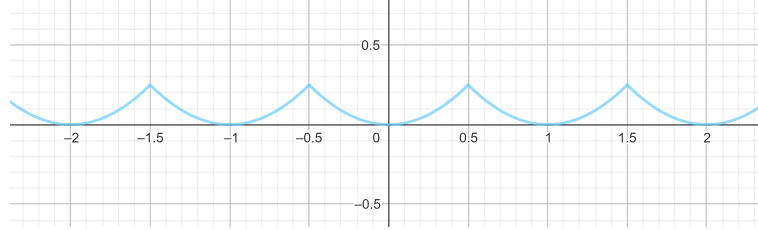
De plus, f est C^1 par morceaux, ainsi on obtient

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi x)}{2k+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \text{ ou } 0 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Un résultat étendu par 2-périodicité. Ainsi l'on voit que par exemple si on prend $x = \frac{1}{2}$ alors

$$1 = Ff\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et étendue par 1-périodicité.



Représentation de f

Calculons les coefficients de Fourier réels en utilisant la Proposition 61

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{2}{3} [x^3]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \cos(2\pi n x) dx \stackrel{\text{IPP}}{=} 2 \left[x^2 \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2x \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{4} \frac{\sin(\pi n)}{2\pi n} - \frac{1}{4} \frac{\sin(-\pi n)}{2\pi n} \right) - \frac{2}{n\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \sin(2\pi n x) dx \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} -\frac{2}{\pi n} \left[-x \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\pi n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{-\cos(2\pi n x)}{2\pi n} dx \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{2} \cos(\pi n) - \frac{-1}{2} \cos(-\pi n) \right) - \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi n x) dx \\ &= \frac{1}{(n\pi)^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(-1)^n}{(4\pi)^2} \end{aligned}$$

Pour passer à la deuxième égalité nous utilisons l'intégration par parties en posant

$$u = x^2 \rightarrow u' = 2x \text{ et } v = \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} \rightarrow v' = \cos(2\pi n x)$$

Nous appliquons la même stratégie pour passer à la quatrième égalité avec

$$u = x \Rightarrow u' = 1 \text{ et } v = \frac{-\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \Rightarrow v' = \sin(2\pi n x)$$

Maintenant pour les autres coefficients nous avons

$$b_n = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 \sin(2\pi nx) dx = 0$$

car on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique centré en 0. Ainsi on obtient la série de Fourier suivante

$$Ff(x) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(2\pi nx)$$

Maintenant on rappelle que f est C^1 par morceaux mais également continue (pas par morceaux), ainsi par le théorème de Dirichlet on obtient

$$Ff(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} = f(x)$$

Par exemple en 0 nous avons

$$0 = f(0) = Ff(0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Ou en $\frac{1}{2}$ on a

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Définition 67 (Coefficient de Fourier complexe)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier complexes par

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

où pour une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on a

$$\int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(\phi(x)) dx + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(\phi(x)) dx$$

Proposition 68

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et continue par morceaux. Alors

1. $\forall n \geq 1$ on a $c_n = \frac{a_n - i \cdot b_n}{2}$ et $\forall n \leq -1$ on a $c_n = \frac{a_{-n} + i \cdot b_{-n}}{2}$ et finalement $c_0 = \frac{a_0}{2}$.
2. $\forall n \geq 1$ $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $a_0 = 2c_0$.
3. $F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx}$ et $Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx}$

Preuve :

1.

$$\begin{aligned}\frac{a_n - ib_n}{2} &= \frac{1}{2T} \left[\int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx - i \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{T}nx\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{T}nx\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dx = c_n\end{aligned}$$

2. $c_n + c_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2} + \frac{a_n + ib_n}{2} = a_n$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} &= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} + \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} = c_0 + \sum_{n=1}^N \left(c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} + c_{-n} e^{i\frac{2\pi}{T}(-n)x} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{2\pi}{T}nx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{i\frac{2\pi}{T}(-n)x} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_n + ib_n}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right] = F_N f(x)\end{aligned}$$

3.4.3 Propriétés des séries des Fourier

Proposition 69

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique et continue par morceaux. Alors

1. La série de Fourier de f est T -périodique.
2. Si f est paire, i.e. $f(x) = f(-x)$ alors
 - $\forall n \geq 1 \ b_n = 0$
 - $Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$
3. Si f est impaire, i.e. $f(-x) = -f(x)$, alors
 - $\forall n \geq 0$ on a $a_n = 0$
 - $Ff(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$

Proposition 70 (Série de Fourier en cos)

Soient $L > 0$, $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 par morceaux et la série de Fourier en cos suivante

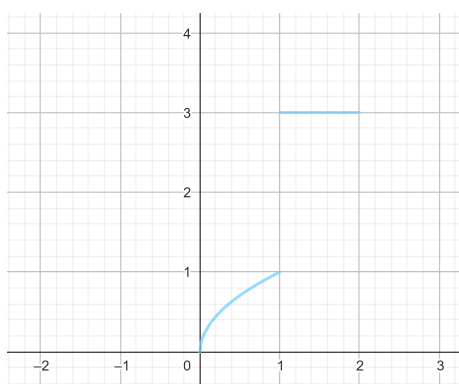
$$F_c f(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) \quad \text{où} \quad \tilde{a}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx$$

Alors $F_c f$ converge vers

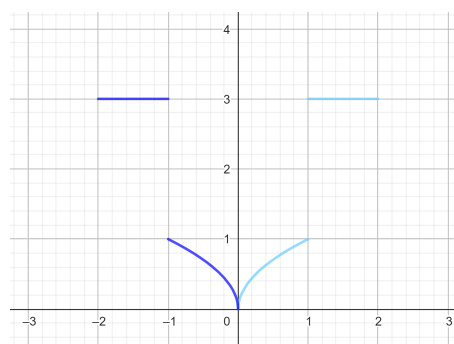
$$F_c f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} & \text{si } x \in]0, L[\\ \lim_{t \rightarrow 0} f(0+t) & \text{si } x = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(L-t) & \text{si } x = L \end{cases}$$

Preuve : On définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

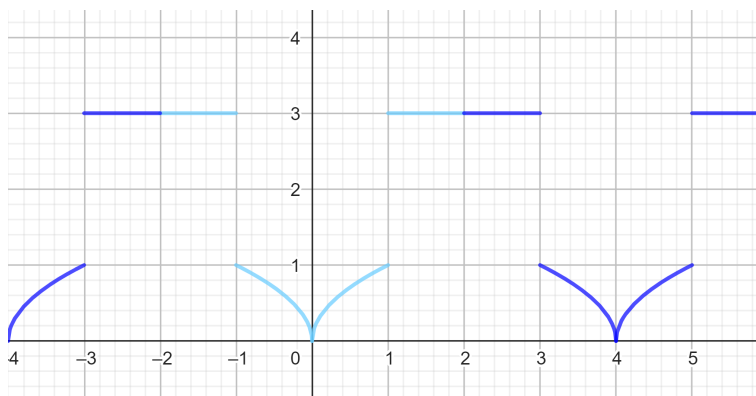
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ f(-x) & \text{si } x \in]-L, 0[\end{cases} \quad \text{étendue par } 2L - \text{périodicité sur tout } \mathbb{R}$$



Exemple de f



Définition de \tilde{f}



Extension de \tilde{f}

Alors \tilde{f} est paire et C^1 par morceaux. Si \tilde{a}_n et \tilde{b}_n sont les coefficients de Fourier de \tilde{f} , on a $\tilde{b}_n = 0 \forall n \geq 1$. De plus on a en utilisant la parité de $\tilde{f}(x) \cos\left(\frac{2\pi}{2L}nx\right)$:

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{2\pi}{2L}nx\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx$$

On obtient bien les coefficients de l'énoncé. Puis, en utilisant le Théorème de Dirichlet on a

$$F_c f(x) = F_c \tilde{f}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(x-t) + \tilde{f}(x+t)}{2}$$

Or si $x \in]0, L[$ on a bien, à partir d'un t suffisamment petit, égalité entre $\tilde{f}(x-t) = f(x-t)$ et $\tilde{f}(x+t) = f(x+t)$. De plus, on a $\tilde{f}(-t) = f(t)$, $\tilde{f}(t) = f(t)$, $\tilde{f}(L-t) = f(L-t)$ et $\tilde{f}(L+t) = f(L-t)$. On en conclut

$$F_c f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} & \text{si } x \in]0, L[\\ \lim_{t \rightarrow 0} f(0+t) & \text{si } x = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(L-t) & \text{si } x = L \end{cases}$$

□

Proposition 71 (Série de Fourier en sin)

Soient $L > 0$, $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 par morceaux et la série de Fourier en sin suivante

$$F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) \quad \text{où } \tilde{b}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

Alors $F_s f$ converge vers

$$F_s f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} & \text{si } x \in]0, L[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \end{cases}$$

Début de preuve : On définit $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0, L[\\ f(-x) & \text{si } x \in]-L, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0, L \end{cases} \quad \text{étendue par } 2L - \text{périodicité sur tout } \mathbb{R}$$

Exemple 72

Dans cet exemple nous allons calculer successivement la série de Fourier en cosinus et en sinus de la fonction suivante : $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Commençons par calculer celle en cosinus :

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x dx = 1$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 x \cos\left(\frac{\pi}{1}nx\right) dx = 2 \left[x \frac{\sin(\pi nx)}{\pi n} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(\pi nx)}{\pi n} dx \\
&= \frac{-2}{\pi n} \left[-\frac{\cos(\pi nx)}{\pi n} \right]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{-4}{\pi^2 (2k-1)^2} & \text{si } n = 2k-1, k \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F_c f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos(\pi(2k-1)x)$$

Maintenant pour la série de Fourier en sinus nous avons besoin des coefficients suivants

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi}{1}nx\right) dx = -2 \left[x \frac{\cos(\pi nx)}{\pi n} \right]_0^1 + \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \cos(\pi nx) dx \\
&= -\frac{2}{\pi n} (-1)^n + \frac{2}{\pi^2 n^2} \left[\sin(\pi nx) \right]_0^1 = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(\pi nx)$$

Remarque 73

Si on considère $f \in C^0([0, L])$, que l'on prend son extension paire, puis on l'étend de manière $2L$ -périodique sur tout \mathbb{R} , alors f est une fonction continue. Or si on fait son extension impaire, alors son extension $2L$ -périodique sur tout \mathbb{R} est continue si et seulement si $f(0) = f(L)$.

Théorème 74 (Identité de Parseval)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 par morceaux et T -périodique. Alors

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier réels de F et c_n sont les coefficients de Fourier complexes.

Remarque 75

1. Le théorème reste vrai sous l'hypothèse que $|f|$ et f^2 doivent être intégrables sur $[0, T]$.

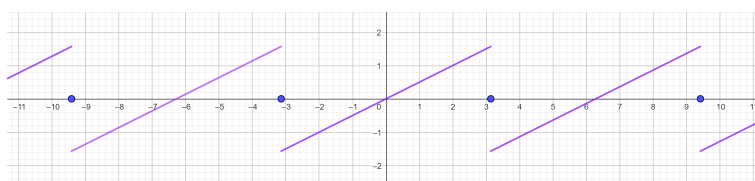
2. Le théorème nous donne une deuxième méthode pour calculer des valeurs de séries, en plus du Théorème de Dirichlet.

Exemple 76

Utilisons l'Identité de Parseval pour calculer de nouvelles séries : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -\pi \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \in]-\pi, \pi[\\ 0 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

que nous étendons à tout \mathbb{R} .



Représentation de f

Comme f est impaire, cela implique que $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$. Il nous suffit ainsi de calculer b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \sin(nx) dx = \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Ainsi

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

De plus

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Par l'Identité de Parseval

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque 77

Un exercice typique serait : étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique

1. Calculer la série de Fourier de f .

2. En déduire la valeur d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ pour certains termes g_n .

Une question fait alors surface : comment choisir entre Dirichlet et Parseval ?

- Si l'ordre de a_n et de b_n est le même que celui de g_n , alors on choisit Dirichlet.
- Si l'ordre de a_n et de b_n est la moitié de celui de g_n , alors on choisit Parseval.

Proposition 78 (Dérivation terme à terme des séries de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique, continue sur \mathbb{R} et C^1 par morceaux telle que f' est aussi C^1 par morceaux. Soient a_n et b_n les coefficients de Fourier réels de f . Alors

$$Ff'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{T} n \left(-a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x-t) + f'(x+t)}{2}$$

Remarque 79

1. f' n'est en fait pas définie partout, en effet ce sont les points isolés où f n'est pas dérivable. Ceci n'est pas contre pas un problème, car
 - (a) Si je calcule les coefficients de Fourier de f' , je calcule des intégrales. Ainsi ce qu'il se passe en un point isolé est négligeable.
 - (b) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x-t) + f'(x+t)}{2}$ est définie partout.
2. La continuité de f sur \mathbb{R} est importante. Par exemple si on pose $a_0 = -\frac{T}{2}$, $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{T}{2}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique telle que $f \in C^1(]a_0, a_1[)$ et $f \in C^1(]a_1, a_2[)$ alors les limites suivantes existent et sont finies

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} f(a_0 + t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f'(a_0 + t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(a_1 - t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f'(a_1 - t) \\ & \lim_{t \rightarrow 0} f(a_1 + t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f'(a_1 + t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(a_2 - t) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f'(a_2 - t) \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons en utilisant l'intégration par parties

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 f'(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \\ &+ \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f'(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{2}{T} \left[f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx \left(-\frac{2\pi}{T} n\right)\right) dx \\ &+ \frac{2}{T} \left[f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx \left(-\frac{2\pi}{T} n\right)\right) dx \\ &= \frac{2\pi}{T} n \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \\ &+ \frac{2}{T} \left(\cos(n\pi) \left(\lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{T}{2} - t\right) - \lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{T}{2} + t\right) \right) + \left(\lim_{t \rightarrow 0} f(0 - t) - \lim_{t \rightarrow 0} f(0 + t) \right) \right) \end{aligned}$$

On voit donc bien le fait qu'on ait besoin de la continuité de f en a_0, a_1 et a_2 . Ainsi donc la continuité de f sur tout \mathbb{R} .

Proposition 80 (Derivation terme à terme des séries de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique, continue sur \mathbb{R} , C^1 par morceaux telle que f' est C^1 par morceaux et soient a_n, b_n les coefficients de Fourier réels de f . Alors

$$F f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{T} n \left(-a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right) = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} f'(0-t) + \lim_{t \rightarrow 0} f'(0+t)}{2}$$

Remarque 81

1. Qu'en est-il d'intégrer une série de Fourier terme à terme ? Si on a

$$F f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right)$$

Alors l'intégrale donnerait

$$\frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{2\pi n} \left(a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) - b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right) + c$$

La présence du terme $\frac{a_0}{2}x$ nous indique que la somme n'est pas une série de Fourier. Supposons que $f \in C^1_{\text{morc}}$ est donnée. Posons ϕ une primitive de f , donc $\phi' = f$. Pour appliquer le théorème on a besoin du fait que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, C^1 par morceaux et T -périodique. Vu que $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt + c$ c'est forcément une fonction continue et C^1 par morceaux.

Est-elle T -périodique ?

$$\phi(x+T) - \phi(x) = \int_a^{x+T} f(t)dt + c - \int_a^x f(t)dt - c = \int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt = \frac{T}{2} a_0$$

Plus généralement f dérivable T -périodique implique que f' est T -périodique. De plus si f est continue par morceaux et périodique alors $\int_a^x f(t)dt$ est T -périodique si et seulement si $\int_0^T f(t)dt = 0$.

Donc en résumé : soit f T -périodique et C^1 par morceaux. Alors

- Pour dériver sa série de Fourier terme à terme on a besoin que f soit continue et f' C^1 par morceaux.
- Pour intégrer terme à terme on a besoin de $\int_0^T f(t)dt = 0$.

Exemple 82

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $|x|$ sur $] -1, 1]$ étendue par 2-périodicité. Alors on a

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{étendue par 2-périodicité}$$

On a vu à l'exemple 4.6 que la série de Fourier de f' est donnée par

$$Ff'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x)$$

Vu que f est continue et que $\int_{-1}^1 f'(t)dt = 0$ on a

$$Ff(x) = c + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(-\frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)\pi} \right) = c - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x)$$

où donc $c = \frac{a_0}{2}$ tel que $a_0 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx = 1$. Ce qui nous donne

$$Ff(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x)$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad \text{étendue par 2-périodicité sur tout } \mathbb{R}$$

Donc f est C^1 par morceaux et

$$Ff(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\pi x)$$

On a que $f'(x) = 0 \forall x \notin \mathbb{Z}$. Vu que f n'est pas continue sur \mathbb{R} la Proposition 80 ne garantit pas qu'on puisse dériver la série terme à terme. Essayons quand-même :

$$Ff'(x) \stackrel{?}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi(2k+1)}{2k+1} \cos((2k+1)\pi x) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \cos((2k+1)\pi x)$$

ça ne marche pas !

3.5 Transformée de Fourier

3.4.1 Définition et inversion

Définition 83 (Transformée de Fourier, Transformée de Fourier inverse)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

La transformée de Fourier de f notée $\mathcal{F}[f]$ ou \hat{f} est définie par

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ telle que } \mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\alpha)| d\alpha < +\infty$$

La transformée de Fourier inverse de ϕ notée $\mathcal{F}^{-1}[\phi]$ est définie par

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ telle que } \mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Théorème 84 (Formules d'inversion)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < +\infty$$

Alors $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = f(x)$.

Exemple 85

Dans cet exemple nous allons calculer des transformées de Fourier de diverses fonctions

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \gamma & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où } \gamma \in \mathbb{R}, -\infty < a < b < +\infty$$

Alors

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \gamma e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{-i\alpha} e^{-i\alpha x} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi} i \alpha} (e^{-i\alpha a} - e^{-i\alpha b}) \end{aligned}$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{-|x|}$. Alors

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{x(1-i\alpha)} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\alpha)} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{1}{1-i\alpha} e^{x(1-i\alpha)} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{-1}{1+i\alpha} e^{-x(1+i\alpha)} \right]_0^{+\infty} \right)\end{aligned}$$

Remarquons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ainsi on obtient en utilisant que les termes en cos et sin sont forcément bornés :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x(1-i\alpha)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (\cos(-\alpha x) + i \sin(-\alpha x)) = 0$$

Il en est de même pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x(1+i\alpha)} = 0$. Donc

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1+i\alpha + 1-i\alpha}{1+\alpha^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Remarquons que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha < +\infty$. Ainsi par le Théorème 84 on a

$$\begin{aligned}e^{-|x|} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{1+\alpha^2} d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} (\pi e^{-|x|}) + 0\end{aligned}$$

Remarque 86

En général calculer une transformée de Fourier est difficile. Pour pouvoir calculer ça, on a besoin de l'analyse complexe (qui est donc le cours d'Analyse IV). Donc en attendant, on utilisera les tables de transformées.

3.4.2 Propriétés des transformées de Fourier

Proposition 87 (Continuité, linéarité, composition avec des fonctions affines, décalage)
Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty$$

Alors

1. \hat{f} est continue.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{F}[a \cdot f + b \cdot g] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$
3. Si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $g(x) = f(ax + b)$ alors

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{e^{i\frac{b}{a}\alpha}}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

4. Si $g(x) = e^{-ibx}f(x)$ alors $\hat{g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha + b)$

Preuve :

1. *Idée :* utiliser la continuité de la fonction $\alpha \mapsto e^{-i\alpha x}$
2. On utilise directement la linéarité de l'intégrale.
3. Considérons les égalités suivantes en posant $ax + b = y$:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax + b) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha \frac{y-b}{a}} \frac{1}{|a|} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\frac{\alpha}{a}y} dy \cdot \frac{e^{i\frac{b}{a}\alpha}}{|a|} = \frac{e^{i\frac{b}{a}\alpha}}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right) \end{aligned}$$

4. On utilise les égalités suivantes

$$\hat{g}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ibx} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\alpha+b)x} dx = \hat{f}(\alpha + b)$$

□

Théorème 88 (Identité de Plancherel)

Soit f continue par morceaux telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha$$

Proposition 89 (Transformée de Fourier de la dérivée et dérivée de la transformée de Fourier)

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$, alors

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = i\alpha \mathcal{F}[f]$$

Plus généralement, si de plus pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)| dx < +\infty$, alors

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\alpha) = (i\alpha)^n \mathcal{F}[f]$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $h(x) = xf(x)$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dx < +\infty$, alors

$$\hat{f}'(\alpha) = -i\hat{h}(\alpha)$$

Plus généralement si $h_k(x) = x^k f(x)$ et que pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_k(x)| dx < +\infty$, alors

$$\frac{d^n \hat{f}}{d\alpha^n}(\alpha) = (-i)^n \mathcal{F}[h_n](\alpha)$$

Preuve :

1. En utilisant l'intégration par parties en posant $u = e^{-i\alpha x} \rightarrow u' = (-i\alpha)e^{-i\alpha x}$ et $v = f \rightarrow v' = f'$ on obtient :

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-i\alpha x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-i\alpha) e^{-i\alpha x} dx$$

En sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty$ cela nous donne que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Ainsi

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = i\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \mathcal{F}[f](\alpha)$$

2. Considérons les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\alpha) &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d}{d\alpha} [e^{-i\alpha x}] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-ix) e^{-i\alpha x} dx = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) e^{-i\alpha x} dx \\ &= -i \mathcal{F}[h](\alpha) \end{aligned}$$

Les généralisations s'obtiennent par un raisonnement par récurrence. □

Exemple 90

Considérons l'exemple suivant : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 par morceaux et 2π -périodique. Admettons que nous voulions trouver $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique telle que

$$u'(x) - u(x) = f(x)$$

Vu qu'on cherche u 2π -périodique on la cherche sous la forme d'une série de Fourier. Posons

$$u(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)$$

Par la Proposition 80 on a

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cos(nx) - nA_n \sin(nx)$$

Si a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f on veut

$$-\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (nB_n - A_n) \cos(nx) + (-nA_n - B_n) \sin(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Ces deux séries de Fourier sont égales si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux un à un. Ainsi on a

$$A_0 = -a_0 \text{ et } \begin{cases} nB_n - A_n = a_n \\ -nA_n - B_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_n = \frac{-a_n - nb_n}{1+n^2} \\ B_n = \frac{-b_n + na_n}{1+n^2} \end{cases}$$

Ce qui nous donne notre fonction u .

Par exemple si on pose $f(x) = 2 - \cos(x) + 2 \sin(x) + \sin(2x) - 2 \cos(3x)$, alors on a

$$A_0 = -4 \quad A_1 = -\frac{1}{2} \quad B_1 = -\frac{3}{2} \quad A_2 = -\frac{2}{5} \quad B_2 = -\frac{1}{5} \quad A_3 = \frac{1}{5} \quad B_3 = -\frac{3}{5}$$

De plus $\forall n \geq 4$ on a $A_n, B_n = 0$. Donc

$$u(x) = -2 - \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{3}{2} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(2x) - \frac{1}{5} \sin(2x) + \frac{1}{5} \cos(3x) - \frac{3}{5} \sin(3x)$$

Exemple 91 (Un point fixe de \mathcal{F})

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On pose $h(x) = xf(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dx < +\infty$. Par la Proposition 89 \hat{f} est dérivable et $\hat{f}'(\alpha) = -i\hat{h}(\alpha)$. Remarquons de plus que $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -h(x)$. Donc

$$\hat{f}'(\alpha) = -i\hat{h}(\alpha) = i\mathcal{F}[-h](\alpha) = i\mathcal{F}[f'](\alpha) = i\alpha\hat{f}(\alpha) = -\alpha\hat{f}(\alpha)$$

De plus, $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$. On en conclut que \hat{f} est solution de

$$\begin{cases} g'(\alpha) = -\alpha g(\alpha) \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Or on peut voir que l'unique solution de ce problème est $g(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. En effet

$$\frac{d}{d\alpha} \left[g(\alpha) e^{\frac{\alpha^2}{2}} \right] = g'(\alpha) e^{\frac{\alpha^2}{2}} + g(\alpha) \alpha e^{\frac{\alpha^2}{2}} = -\alpha g(\alpha) e^{\frac{\alpha^2}{2}} + g(\alpha) \alpha e^{\frac{\alpha^2}{2}} = 0$$

Ainsi $g(\alpha) e^{\frac{\alpha^2}{2}} = c \Rightarrow g(\alpha) = c e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ pour c une constante. En évaluant en 0 on a $1 = g(0) = c$ et ainsi \hat{f} est bien l'unique solution de ce système.

Proposition 92 (\mathcal{F} en sinus et cosinus)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, alors

1. si f est paire, on a

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$$

2. si f est impaire, on a

$$\hat{f}(\alpha) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

Preuve : On ne fait que le deuxième point

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\alpha x} dx + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{+\infty} f(-y) e^{i\alpha y} dy + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{+\infty} f(x) (-e^{i\alpha x}) dx + \int_0^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) (e^{-i\alpha x} - e^{i\alpha x}) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2i \int_0^{+\infty} f(x) \frac{e^{-i\alpha x} - e^{i\alpha x}}{2i} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2i \int_0^{+\infty} f(x) (-\sin(\alpha x)) dx \\ &= -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx \end{aligned}$$

□

Remarque 93

1. A partir des formules, on a f paire/impair implique que \hat{f} est paire/impair également.

2. Ceci nous donne un outil pour définir une transformée de Fourier pour des fonctions $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en les étendant par (im)parité à \mathbb{R} .

Définition 94 (Produit de convolution)

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$. Le produit de convolution de f et g est défini par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Proposition 95 (Transformée de $f * g$)

Soient f et g continues par morceaux sur \mathbb{R} telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)|dx < +\infty \text{ et } \mathcal{F}[f * g](\alpha) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\alpha) \cdot \hat{g}(\alpha)$$

Preuve : Voici une idée de preuve

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt e^{-i\alpha x} dx \\ &\stackrel{e^{-i\alpha x} = e^{-i\alpha t} e^{-i\alpha(x-t)}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{-i\alpha(x-t)} dx dt \\ &\stackrel{x-t=y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy dt \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\alpha t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{g}(\alpha) \hat{f}(\alpha) \end{aligned}$$

3.5 Quelques applications de l'analyse de Fourier

3.5.1 Introduction

Formellement une équation différentielles ordinaire ou un système de telles équations est la donnée d'un intervalle $]a, b[$ et d'une fonction

$$F :]a, b[\times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \dots \times \mathbb{R}^n}_{m+1 \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

et consiste à trouver $u :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $F(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(m)}(t)) = 0$. Si $N = 1$ on parle d'équation différentielle ordinaire (EDO), si $N \geq 2$ on parle de système d'EDO.

Généralement il existe beaucoup de solutions pour un tel système ou pour une telle équation. On y ajoute souvent des données supplémentaires pour réduire le nombre de solutions. Voici quelques problèmes connus

$$\text{Problème de Cauchy : } \begin{cases} u''(t) + u'(t) + u(t) = 1 \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases} \quad \text{EDO avec des conditions initiales}$$

$$\text{Problème de Sturm-Liouville : on cherche } u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

$$\text{On recherche } u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \begin{cases} u' + u * g = f \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| dx < +\infty \end{cases}$$

3.5.2 Application des séries de Fourier

Exemple 96

1. Soient $\alpha \neq \pm 1$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ et 2π -périodique. Trouver $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} u(t) + \alpha u(t - \pi) = f(t) \text{ tel que } t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \end{cases}$$

On cherche une solution sous forme de série de Fourier :

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt) \right)$$
$$u(t - \pi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n (-1)^n \cos(nt) + B_n (-1)^n \sin(nt) \right)$$

Ainsi

$$u(t) + \alpha u(t - \pi) = (1 + \alpha) \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((A_n + \alpha(-1)^n A_n) \cos(nt) + (B_n + \alpha(-1)^n B_n) \sin(nt) \right)$$

Donc si

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right)$$

On doit avoir les correspondances suivantes

$$\begin{cases} (1 + \alpha) \frac{A_0}{2} = \frac{a_0}{2} \\ A_n + \alpha(-1)^n A_n = a_n \text{ pour } n \geq 1 \\ B_n + \alpha(-1)^n B_n = b_n \text{ pour } n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{a_0}{1 + \alpha} \\ A_n = \frac{a_n}{1 + (-1)^n \alpha} \text{ pour } n \geq 1 \\ B_n = \frac{b_n}{1 + (-1)^n \alpha} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Donc si par exemple $f(t) = \cos(t) + 3 \sin(2t) + 4 \cos(5t)$ on a $u(t) = \frac{\cos(t)}{1 + \alpha} + \frac{3}{1 + \alpha} \sin(2t) + \frac{4}{1 + \alpha} \cos(5t)$.

Si par contre $\alpha = 1$ le système devient

$$\begin{cases} A_0 = \frac{a_0}{2} \\ A_n + (-1)^n A_n = a_n \text{ pour } n \geq 1 \\ B_n + (-1)^n B_n = b_n \text{ pour } n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A_n = a_n \text{ si } n \text{ pair} \\ 2B_n = b_n \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 = a_n \text{ si } n \text{ impair} \\ 0 = b_n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc on obtient une condition nécessaire sur f sans quoi impossible de trouver une solution au système. On a besoin que $\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ impair} : a_n = b_n = 0$.

De plus, on obtient une infinité de solutions pour u , en effet $\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ impair} : A_n$ et B_n sont des paramètres libres.

3.5.3 Applications de la transformée de Fourier

Exemple 97

1. On veut trouver $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de

$$u''(x) + 2u(x) = x^2 e^{-x^2}$$

On voit que

$$\mathcal{F}[u'' + 2u] = \mathcal{F}[u''] + 2\hat{u} = (i\alpha)^2 \hat{u} + 2\hat{u}$$

Et

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \left[x \cdot (xe^{-x^2}) \right] &= i \frac{d}{d\alpha} \left[\mathcal{F} \left[xe^{-x^2} \right] (\alpha) \right] \\
 &= i \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \right] = i \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} - \frac{i\alpha}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}
 \end{aligned}$$

Ainsi on recherche \hat{u} telle que

$$(2 - \alpha^2) \hat{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \frac{1}{2} (2 - \alpha^2) \Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} = \frac{1}{4} \mathcal{F} \left[e^{-x^2} \right]$$

Ainsi $u(x) = \frac{1}{4} e^{-x^2}$. On vérifie que u est bel et bien une solution de notre système :

$$u'(x) = -\frac{x}{2} e^{-x^2} \qquad u''(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}$$

Donc

$$u''(x) + 2u(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2}$$

2. On veut trouver $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de

$$9u(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} 8u(t) e^{-|x-t|} dt = e^{-|x|}$$

Soit $f(x) = e^{-|x|}$. On a alors $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2}$ et l'équation à résoudre s'écrit $9u + 8u * f = f$. On a alors les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[9u + 8u * f](\alpha) &= \hat{f}(\alpha) \\
\Leftrightarrow 9\hat{u}(\alpha) + 8\mathcal{F}[u * f](\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \alpha^2} \\
\Leftrightarrow 9\hat{u}(\alpha) + 8\sqrt{2\pi}\hat{u}(\alpha)\hat{f}(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \alpha^2} \\
\Leftrightarrow 9\hat{u}(\alpha) + 8\sqrt{2\pi}\hat{u}(\alpha)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \alpha^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \alpha^2} \\
\Leftrightarrow \hat{u}(\alpha) \left(9 + 16 \frac{1}{1 + \alpha^2} \right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \alpha^2} \\
\Leftrightarrow \hat{u}(\alpha) \frac{9 + 9\alpha^2 + 16}{1 + \alpha^2} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \alpha^2} \\
\Leftrightarrow \hat{u}(\alpha)(25 + 9\alpha^2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\hat{u}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{25 + 9\alpha^2} = \frac{1}{9} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \alpha^2} = \frac{1}{9} \mathcal{F} \left[\frac{e^{-\frac{5}{3}|x|}}{\frac{5}{3}} \right]$$

Ainsi

$$u(x) = \frac{1}{9} \frac{3}{5} e^{-\frac{5}{3}|x|} = \frac{1}{15} e^{-\frac{5}{3}|x|}$$

3.5.4 Incompatibilité des deux méthodes

Il n'existe pas de problème où ces deux méthodes s'appliquent. En effet pour la première, on a besoin d'une fonction u T -périodique et continue par morceaux, pour la deuxième on a besoin que $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| dx < +\infty$. Or sous cette hypothèse, on voit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{nT}^{nT+T} |u(x)| dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_T^T |u(x)| dx = \begin{cases} 0 & \text{si } \int_T^T |u(x)| dx = 0 \\ +\infty & \text{si } \int_T^T |u(x)| dx > 0 \end{cases}$$

Ainsi $|u(x)| = 0$ pour tout $x \in [0, T]$. Donc $u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.