

# Chapitre 5

## Courant électrique, résistance, puissance et circuits DC



TABLE 19-1 Symbols for Circuit Elements

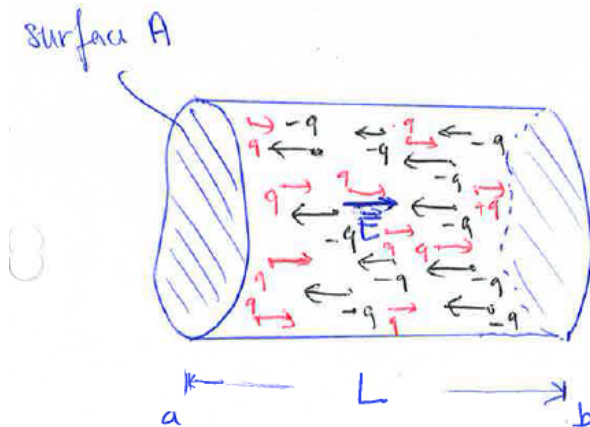
Symbol	Device
$\begin{array}{c}   \\ \text{---} \\   \end{array}$	Battery
$\begin{array}{c}    \\ \text{---} \end{array}$ or $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \end{array}$	Capacitor
$\sim \sim \sim$	Resistor
$\text{---}$	Wire with negligible resistance
$\text{---} \text{---}$	Switch
$\text{---} \text{---} \text{---}$ or $\downarrow$	Ground



## 5.1 Le courant électrique

Fin de l'électrostatique : dorénavant les charges peuvent bouger. L'argument utilisé pour conclure que  $\vec{E} = 0$  dans les conducteurs n'est plus valable.

Considérons un conducteur ( $\vec{E} \neq 0$ , et on permet aux charges de bouger...)



$$V_a - V_b = V \Rightarrow E = \frac{V}{L} \quad (5.1)$$

Déf. 'courant électrique' :  
quantité de charge nette qui  
passe à travers la surface A par  
unité de temps.

$$i = \frac{dQ}{dt}; \quad [i] = \frac{C}{s} = A \quad \text{"ampère"} \quad (5.2)$$

**Note 5.1.** Le courant électrique est une quantité scalaire, liée au conducteur spécifique que l'on considère.

**Note 5.2.** Le courant a un signe, donc une direction. La convention est que la direction du courant est celle du mouvement des charges positives (même si ce sont les électrons qui bougent!).

Deux conditions pour avoir un courant :

- (1) Porteurs de charge libres de bouger
- (2) Champ électrique (ou différence de potentiel)  $\neq 0$

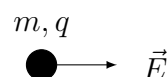
## 5.2 Résistivité et résistance électriques

Naturellement, le courant passe uniquement si on applique un champ  $\vec{E}$ , ou une différence de potentiel  $\Delta V$ . Mais combien de courant passe pour un  $E$  (ou un  $\Delta V$ ) donné ?

$\Rightarrow$  Résistivité et résistance

Analyse microscopique.

Charge  $q$ , avec masse  $m$



Équation du mouvement :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

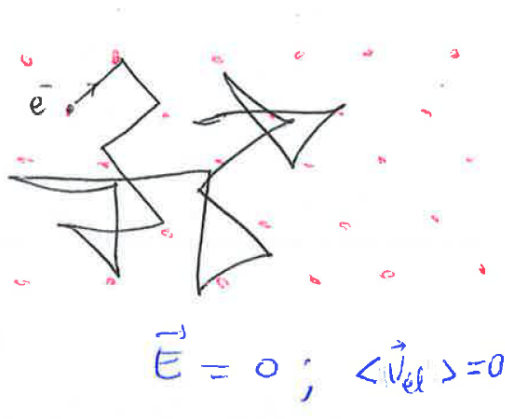
Si  $|\vec{E}| \neq 0$ ,  $|\vec{v}|$  augmente tout le temps :  $|\vec{v}| \rightarrow \infty$

Mais est-ce possible, en particulier si les charges sont dans un objet matériel ? Non, car il y a de la résistance !

Analogie avec la gravité : si on saute avec un parachute, on n'accélère pas à l'infini, car il y a le frottement de l'air, et on atteint une 'vitesse terminale'.

Quelle est l'origine du 'frottement' (résistance) pour les charges ?

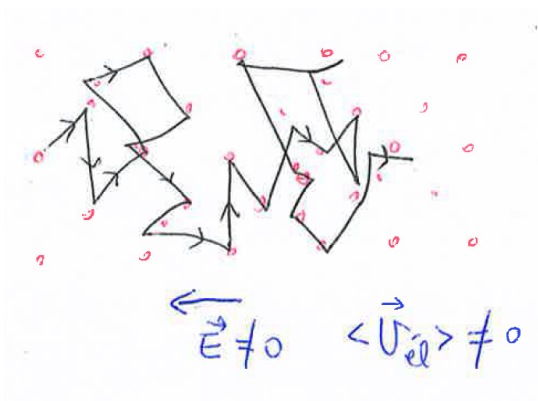
Métal : les atomes et ions forment un réseau qui vibre, mais en moyenne restent au même endroit. Par contre, un certain nombre d'électrons se déplacent librement.



La source du mouvement désordonné est la température. Les électrons sont beaucoup plus légers et mobiles, et leur mouvement thermique est bien plus significatif pour la même température. Ils rebondissent dans le réseau du métal, mais si  $E = 0$ , en moyenne  $\langle \vec{v}_{el} \rangle = 0$

**Note 5.3.**  $\langle \vec{v}_{el} \rangle = 0$ , mais  $v_{th,el.} \simeq 10^6 \frac{m}{s}$  à température ambiante  $\left[ v_{th,el} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \right]$

Si  $\vec{E} \neq 0$ , les électrons ont toujours un mouvement aléatoire très rapide, mais avec une moyenne  $\neq 0$ .



$$\langle \vec{v}_{el} \rangle \neq 0$$

On peut quantifier le terme de frottement contre les ions du réseau comme un terme de frottement classique, proportionnel à  $|\vec{v}|$ .

$$m \frac{d\vec{v}_d}{dt} = q\vec{E} - \underbrace{f\vec{v}_d}_{\text{frottement}} \quad (5.3)$$

équation du mvt. pour la vitesse ordonnée, "de dérive"

Etat stationnaire :

$$\frac{d\vec{v}_d}{dt} = 0 \quad (5.4)$$

(mais pas statique !  $\vec{v}_d \neq 0$ )

$$q\vec{E} = f\vec{v}_d, \quad \text{où } \vec{v}_d = \text{vitesse de dérive terminale} \quad (5.5)$$

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{f}; \quad \text{note } v_d \ll v_{\text{th, el.}}; \quad \text{typiquement, dans un métal } v_d \sim 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

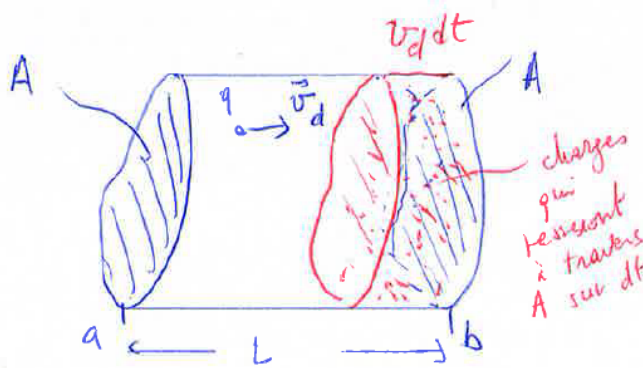
### Discussion.

Pourquoi quand on allume une lampe, on ne doit pas attendre le temps correspondant à  $\Delta t = \frac{\text{distance (lampe-interrupteur)}}{v_d}$  (qui serait assez long..)?

...c'est comme quand un peloton de soldats est mis en marche par l'ordre d'un sergent... tous les soldats commencent à marcher en même temps, les premiers n'ont pas besoin d'attendre que les derniers arrivent là où ils sont. La commande s'est propagée bien plus vite que la marche.

Dans notre cas la 'commande' est la différence de potentiel. A quelle vitesse pensez-vous que celle-ci se propage?

### Vision microscopique de notre conducteur



$$E = \frac{V_a - V_b}{L} = \frac{V}{L} \quad (5.6)$$

Quelles charges passent à travers A sur le temps  $dt$ ?

→ celles qui étaient à une distance de A inférieure ou égale à  $v_d dt$

Donc :

$$i = \frac{\text{charge à travers A sur } dt}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{q \times \# \text{charges dans volume } Av_d dt}{dt} = \quad (5.7)$$

$$= q \underbrace{n_q}_{\substack{\# \text{ de charges} \\ \text{volume}}} \underbrace{Av_d dt}_{\text{volume}} \frac{1}{dt} = nqv_d A; \quad (5.8)$$

Cette valeur dépend de A, donc de la géométrie du conducteur spécifique considéré.

Déf.

$$\vec{J} \quad \text{densité de courant} \quad [J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$\vec{J} \quad \text{est tel que } \vec{J} \cdot \vec{A} = i \quad [i \text{ est donc équivalent à un flux}]$$

$\vec{J}$  est une quantité locale qui décrit le flot de charge en général, indépendamment du conducteur spécifique.

$$\text{Comme } i = nqv_d A \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = n_q q \vec{v}_d$$

**Note 5.4.** Si on a plusieurs ( $N$ ) espèces de porteurs de charge (ex. ions et électrons), alors  $\vec{J} = \sum_{j=1}^N n_{q_j} q_j \vec{v}_{d_j}$

Maintenant, nous voulons revenir à l'estimation de la résistivité, pour laquelle on veut exprimer  $\vec{J}$  en fonction de  $\vec{E}$ .

Considérons, par simplicité, une seule espèce (typiquement les électrons)

$$\underbrace{\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}}{f}}_{\text{vitesse "terminale"}} \Rightarrow \vec{J} = n_q q \vec{v}_d = n_q q \frac{q\vec{E}}{f} = \underbrace{\left( \frac{n_q q^2}{f} \right)}_{\text{const.}} \vec{E} \stackrel{\text{déf.}}{=} \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{\rho = \text{résistivité}} \vec{E} \quad (5.9)$$

La résistivité  $\rho = \frac{f}{n_q q^2}$ , est donc une mesure de la friction : plus il y en a, moins de densité de courant sera générée par un  $E$  donné.

**Note 5.5.** Plus de porteurs de charge (on plus de charges par porteur), plus facile sera de faire passer un courant

$$[\rho] = \frac{\text{V m}^2}{\text{A}} = \text{m} \frac{\text{V}}{\text{A}} = \text{m}\Omega \quad \text{"ohm-mètre"} \quad (5.10)$$

$\rho$  dépend du matériau (isolant, semi-conducteur ou conducteur).

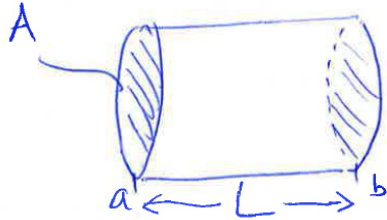
Question : si on applique une différence de potentiel sans augmenter la vitesse des porteurs de charges, où va notre 'travail', donc l'énergie ?

Ex. gravité : si on tombe avec un parachute, la force de gravitation fait un travail sur nous, mais une fois arrivés à notre vitesse terminale, nous n'accélérons plus. Où va le travail ?  
 → dans l'échauffement de l'air dû au frottement. Avec un parachute/ une personne on ne verra pas d'effet, mais avec  $\sim 10^{23}$  parachutes, on devrait voir un échauffement de l'air !  
 Le même concept s'applique au courant électrique : l'énergie va dans l'augmentation des oscillations du réseau avec lequel les électrons rentrent en collision.

Revenons à la résistivité : on veut passer de la propriété d'un matériau en général à celle d'un bout de conducteur "réel".

$$\rightarrow \textbf{Résistance} \quad \text{déf.} \quad R \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{V}{i} \quad \text{pour un objet donné}$$

$$[R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega \text{ "ohm"}; \quad \text{symbole} \quad \text{---}\omega\text{---}_R$$



$$V_a - V_b = V; \quad \vec{J} = \frac{1}{\rho} \vec{E}; \quad \vec{J} \cdot \vec{A} = JA$$

$$i = JA = \frac{1}{\rho} EA \underset{E=\frac{V}{L}}{=} \frac{1}{\rho} \frac{V}{L} A = \frac{A}{\rho L} V$$

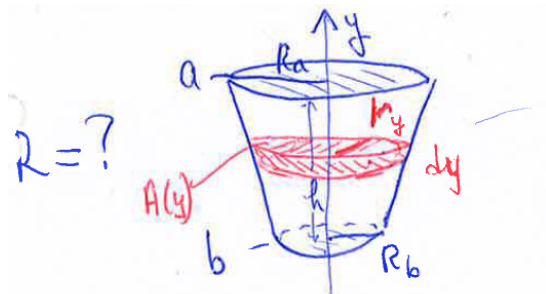
$$\Rightarrow R = \frac{V}{i} = \rho \frac{L}{A}$$

$\uparrow$   
 matériau  
 $\uparrow$   
 géométrie (cylindrique)

**Note 5.6.** En général, nous considérons dans ce cours  $\vec{J} \perp \vec{A}$ , donc  $\vec{J} \cdot \vec{A} = JA = i$ .

Pour résoudre les problèmes de calcul de résistance, on essaye toujours de se référer au cas du conducteur cylindrique (fil).

Ex. de calcul : quelle est la résistance entre les deux faces d'une tranche de cône de résistivité  $\rho$  ?

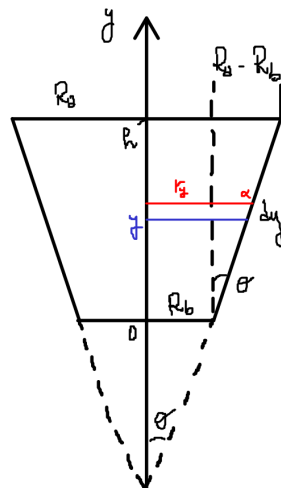


- on considère une couche d'épaisseur  $dy$  ;
- cette couche peut être considérée approximativement comme un cylindre ;
- résistance de la couche  $dR = \rho \frac{dy}{A(y)}$ .

La résistance totale sera, intuitivement, la somme des résistances de toutes les couches [on verra que cela est le cas en général pour les résistances en série, et les couches sont connectées en série].

$$R_{tot} = \int_0^h \rho \frac{dy}{A(y)} = \int_0^h \rho \frac{dy}{\pi r_y^2} \quad (5.11)$$

$$r_y = ?$$



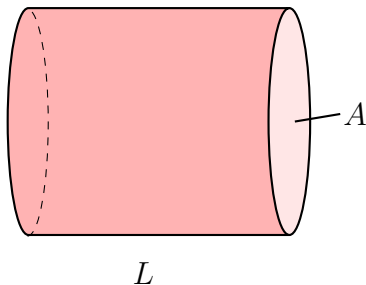
$$\begin{aligned}
 r_y &= R_b + \alpha = \\
 &= R_b + y \frac{R_a - R_b}{h} = \\
 &= R_b + y \frac{R_a - R_b}{h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{tot} &= \int_0^h \rho \frac{dy}{\pi \left[ R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y \right]^2}; & \xi &= R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y; & d\xi &= \frac{R_a - R_b}{h} dy \\
 \Rightarrow R_{tot} &= \int \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \frac{d\xi}{(\xi)^2} = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \left[ -\frac{1}{R_b + \frac{R_a - R_b}{h} y} \right]_0^h = \\
 &= \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a - R_b} \left[ \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_a} \right] = \frac{\rho}{\pi} \frac{h}{R_a R_b}
 \end{aligned}$$

**Note 5.7.** Si  $R_a = R_b = R_0 \Rightarrow R_{tot} = \frac{\rho h}{\pi R_0^2}$ , et on retrouve le résultat qu'on devrait avoir pour un cylindre.

### 5.3 Résistance électrique et loi d'Ohm

Reprenons notre “cas de base” : **conducteur cylindrique (fil)**



$$R = \rho \frac{L}{A} = \left( \frac{f}{n_q q^2} \right) \frac{L}{A} \quad (5.12)$$

La résistance est définie comme  $R = \frac{V}{i}$ , c'est à dire le facteur de proportionnalité entre différence de potentiel et courant.

Donc en général on mesure  $V = iR$ .

Mais, attention ⚡, la loi d'Ohm est  $V = iR$ , avec  $R$  indépendante de  $i$  et de  $V$ .

Si non, la relation entre  $i$  et  $V$  peut ne pas être de simple proportionnalité. Si  $R = R(i)$  ou  $R = R(V)$ , alors la loi d'Ohm perd son sens, et on parle de conducteur “non-ohmique”.

Pouvons-nous imaginer une situation dans laquelle  $R = R(i)$ , ou  $R = R(V)$  ?

On peut penser aux facteurs qui peuvent influencer la valeur de  $R = \frac{f}{n_q q^2} \frac{L}{A}$  (pour un conducteur cylindrique).

En effet, on peut penser de modifier le facteur  $f$ , qui quantifie le frottement, ou la difficulté des porteurs de charge à passer à travers le matériel (le réseau solide du métal par ex.).

Les oscillations du réseau sont déterminées par sa température. Si on le refroidit, on réduit les oscillations thermiques, en rendant plus facile le passage de charges. On devrait donc réduire  $f$ , et  $R$ . Vice versa, on augmente  $f$  et  $R$  quand on augmente la température.

Typiquement  $R = R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ , avec  $\alpha \simeq \text{const.}$ , paramètre qui dépend de la nature du matériau.

## 5.4 Puissance électrique

Si on fait passer un courant assez fort, on peut avoir  $R = R(i)$ , parce que  $T = T(i)$ . Ce serait un conducteur “non-ohmique”. Pour pouvoir calculer ce genre d’effet, et bien d’autres, liés au passage de courant dans un conducteur, on doit introduire le concept de **puissance électrique**.

Si on fait passer un courant dans un conducteur, on “force” les porteurs de charge à travers son réseau, et on transfère de l’énergie des porteurs de charge au réseau, par collisions. C’est comme ça qu’on maintient une vitesse de dérive (ordonnée) constante.

En effet la différence de potentiel ne peut pas accélérer les charges au-delà de leur vitesse de dérive “terminale”, et donc cette énergie doit être dissipée dans le réseau.

Dans l’unité de temps :

$$\text{puissance} = \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\text{travail fait par } V} = \frac{dq}{dt} V = iV = \begin{cases} (V = iR) & i^2 R \\ (i = \frac{V}{R}) & \frac{V^2}{R} \end{cases} \quad (5.13)$$

$$[P] = \text{Watt ou [V A]} \quad (5.14)$$

**Note 5.8.** Si  $T = T(\text{puissance}) = T(iV)$ , et  $R = R(T) \rightarrow R = R(iV)$  “non-ohmique”.

La puissance électrique dissipée dans un conducteur peut être utilisée pour :

- chauffer (chauffage électrique)
- faire de la lumière (ampoule à incandescence)
- fusibles (si trop de courant, chauffent et “sautent”, c’est-à-dire ouvrent le circuit)
- etc

Mais dans d’autres situations, elle est plutôt à éviter/minimiser, par ex. :

- chauffage des câbles/composants électriques
- pertes dans le transport de l’électricité.



Typiquement  $R = R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ , avec  $\alpha \simeq \text{const.}$ , paramètre qui dépend de la nature du matériau.

## 5.4 Puissance électrique

Si on fait passer un courant assez fort, on peut avoir  $R = R(i)$ , parce que  $T = T(i)$ . Ce serait un conducteur “non-ohmique”. Pour pouvoir calculer ce genre d’effet, et bien d’autres, liés au passage de courant dans un conducteur, on doit introduire le concept de **puissance électrique**.

Si on fait passer un courant dans un conducteur, on “force” les porteurs de charge à travers son réseau, et on transfère de l’énergie des porteurs de charge au réseau, par collisions. C’est comme ça qu’on maintient une vitesse de dérive (ordonnée) constante.

En effet la différence de potentiel ne peut pas accélérer les charges au-delà de leur vitesse de dérive “terminale”, et donc cette énergie doit être dissipée dans le réseau.

Dans l’unité de temps :

$$\text{puissance} = \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{\text{travail fait par } V} = \frac{dq}{dt} V = iV = \begin{cases} (V = iR) & i^2 R \\ (i = \frac{V}{R}) & \frac{V^2}{R} \end{cases} \quad (5.13)$$

$$[P] = \text{Watt ou [V A]} \quad (5.14)$$

**Note 5.8.** Si  $T = T(\text{puissance}) = T(iV)$ , et  $R = R(T) \rightarrow R = R(iV)$  “non-ohmique”.

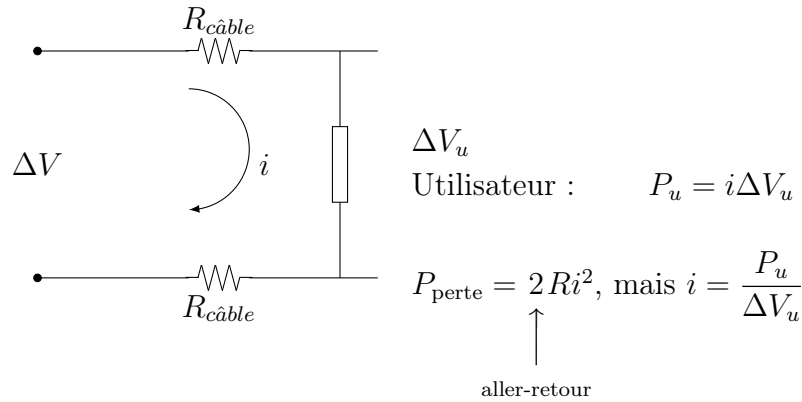
La puissance électrique dissipée dans un conducteur peut être utilisée pour :

- chauffer (chauffage électrique)
- faire de la lumière (ampoule à incandescence)
- fusibles (si trop de courant, chauffent et “sautent”, c’est-à-dire ouvrent le circuit)
- etc

Mais dans d’autres situations, elle est plutôt à éviter/minimiser, par ex. :

- chauffage des câbles/composants électriques
- pertes dans le transport de l’électricité.

**Ex. transport d'électricité.** Les câbles ont forcément une résistance  $\neq 0$ ,  $R_{\text{câble}}$ , qui amène une perte  $P_{\text{perte}}$ .



$$P_{\text{pertes}} = 2R \frac{P_u^2}{\Delta V_u^2} \quad (5.15)$$

Pour optimiser  $P_u$  et diminuer  $P_{\text{pertes}}$ , on augmente  $\Delta V_u$ .

**Note 5.9.** En réalité on transporte l'énergie en courant alternatif (AC), donc le calcul est légèrement différent...

Ex. numérique : ligne de 100 km,  $R_{\text{câble}} \sim 2 \Omega$ ,  $P_u \sim 400 \text{ MW}$ ,  $\Delta V_u \sim 200 \text{ kV}$

$$\Rightarrow P_{\text{pertes}} \sim 2 \times 2 \times \frac{(400 \times 10^6)^2}{(200 \times 10^3)^2} \text{ W} = \frac{4 \times 16^4 10^{16}}{4 \cdot 10^{10}} \text{ W} = 16 \text{ MW}$$

Mais si on utilise  $\Delta V_u \sim 400 \text{ kV}$

$$\Rightarrow P_{\text{pertes}} \sim 2 \times 2 \times \frac{(400 \times 10^6)^2}{(400 \times 10^3)^2} \text{ W} = 4 \text{ MW}$$

Pourquoi on n'augmente pas plus  $\Delta V_u$  (ou  $\Delta V$ ) ?  $\rightarrow$  **effet corona** [décharges !]

**Note 5.10.** La résistance de la peau humaine dépend du degré d'humidité,  $R_{\text{peau}} \sim 10 \text{ k}\Omega \div 1 \text{ M}\Omega$ .

Mais à l'intérieur de notre corps, le sang et les liquides interstitiels extracellulaires sont des électrolytes, donc conduisent assez bien l'électricité.

Si la peau est percée, et le courant passe "à l'intérieur", il peut attendre des valeurs importantes même avec des différences de potentiel modestes.

☞ **Électrocution** : le problème principal (parfois létal !) est le dérangement du fonctionnement du cœur. Le cœur n'est plus "contrôlé" s'il y a  $\sim 10 \text{ mA}$  qui circulent autour.

Donc, si on prend le cas plus pessimiste, avec  $R_{\text{peau}} \sim 10 \text{ k}\Omega$ , la tension maximale devrait être :

$$\Delta V_{\text{max}} = i_{\text{max}} R_{\text{peau}} \sim 10 \times 10^{-3} \times 10^4 \text{ V} = 100 \text{ V} \quad (5.16)$$

Typiquement, on considère pour la sécurité :

$$\begin{cases} \Delta V \leq 50 \text{ V} \\ i \leq 10 \text{ mA} \end{cases} \quad (5.17)$$

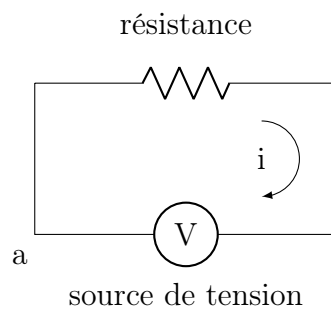
Donc on doit utiliser des transformateurs pour réduire la haute tension à laquelle on transporte l'électricité à des valeurs moins dangereuses.

Conseil : ne touchez jamais un système électrique avec les deux mains ! Si le courant passe entre les deux mains, il passe dans la région du coeur...



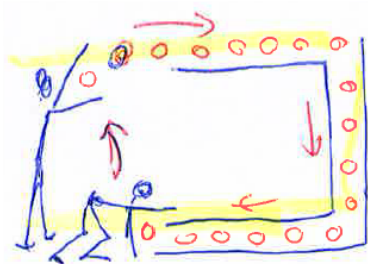
## 5.5 Force électromotrice

Circuit électrique simple



Si l'énergie n'était pas dissipée à cause du frottement ( $R = 0$ ), le potentiel serait le même sur tous les points du circuit :  $V = V_a$  partout.

Mais s'il y a dissipation, ce qui est le cas en général (sauf en situation de super-conductivité !), on doit continuer à fournir un travail pour faire circuler les charges.



on doit continuer à pousser les charges “en haut”, pour qu’elles puissent “tomber” en bas, en perdant de l’énergie potentielle, et continuer à bouger.

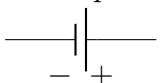
Déf. :

$$\frac{\text{travail fait sur la charge qui bouge sur circuit fermé}}{\text{charge}} = \mathcal{E}$$

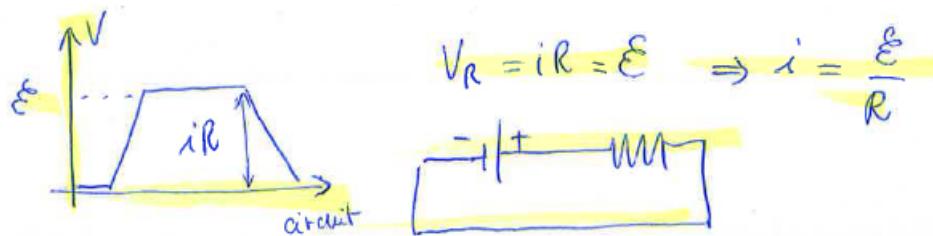
“force électro-motrice”; ou

“emf” (pour “electromotive force”)

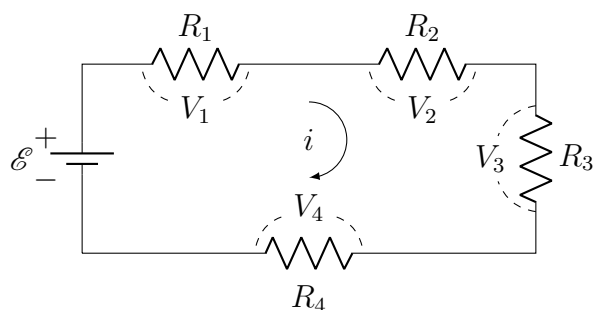
Note  $[\mathcal{E}] = V$  ;  $\mathcal{E}$  n'est pas une force !

Symbole :  batterie

Représentation utile :



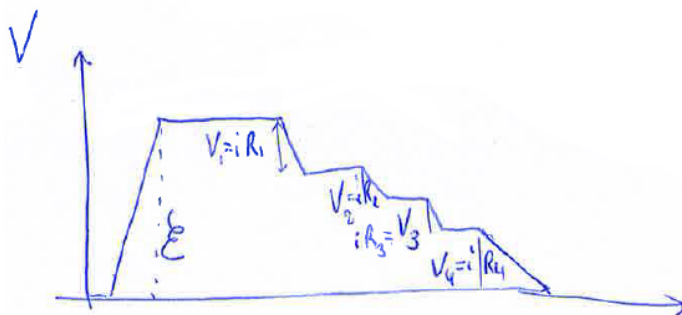
Dans un circuit avec plusieurs résistances en séries :



à travers chaque résistance

$$V_j = iR_j \text{ (i est le même)}$$

mais on doit toujours revenir au même niveau d'énergie, donc de potentiel, si on fait un tour complet.



Donc

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \mathcal{E} \quad (5.18)$$

ou, en général,  $\mathcal{E} = \sum_j V_j$ .

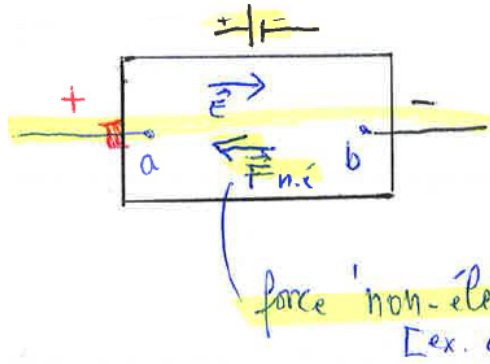
**Source idéale de emf :**

$$V = \mathcal{E} \quad \text{fixe, indépendante de } i$$

Ça n'existe pas dans la réalité! (on pourrait augmenter  $i \rightarrow \infty$ , et on fournirait une énergie infinie)

### Source réelle de emf (batterie) :

regardons à l'intérieur de la batterie

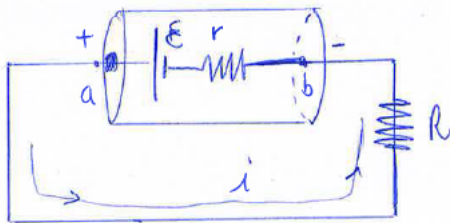


à l'intérieur il doit y avoir une force 'non-électrique',  $\vec{F}_{n-e}$ , qui pousse les charges contre le champ électrique.

Mais, naturellement, comme il y a du frottement pour "descendre" dans le sens du champ,  $\vec{E}$ , il y a du frottement pour "remonter" contre le champ  $\vec{E}$  [comme quand on prendre une remontée mécanique avec les skis...]

On appelle cette résistance à l'intérieur de la source de emf "**résistance interne,  $r$** ".

Représentation en circuit :



$$V_{ab} \neq \mathcal{E} \text{ si } i \neq 0, \text{ car} \quad (5.19)$$

$$V_{ab} = \mathcal{E} - ir \quad (5.20)$$

$$V_{ab} = iR \quad (5.21)$$

**Note 5.11.**  $V_{ab}$  devient très différent de  $\mathcal{E}$  lorsque  $r$  devient grande, ou lorsqu'on essaie d'extraire de la batterie un grand courant  $i$ .

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} - ir = iR \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}} \quad (5.22)$$

$\mathcal{E}$  est ce qui est spécifiée pour une batterie. Lorsque la batterie vieillie,  $\mathcal{E}$  reste la même, mais  $r$  augmente, donc la batterie n'arrive plus à faire passer le courant qu'on veut à travers  $R$ .

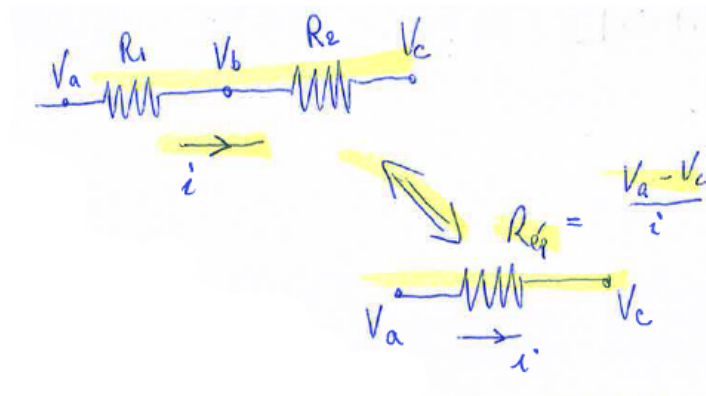
La même chose arrive à certaines batteries lorsqu'il fait très froid :  $r$  augmente dans le fluide électrolytique et on n'a plus assez de courant. Dans ces cas on mesure une grande différence entre tension à circuit ouvert ( $\mathcal{E}$ ) et tension à circuit fermé ( $\mathcal{E} - ir$ ).

## 5.6 Circuits électriques à courant continu (DC) et combinaisons de résistances

Courant continu : la direction du courant ne change pas.

## Combinaisons de résistances

### (1) Résistances en série



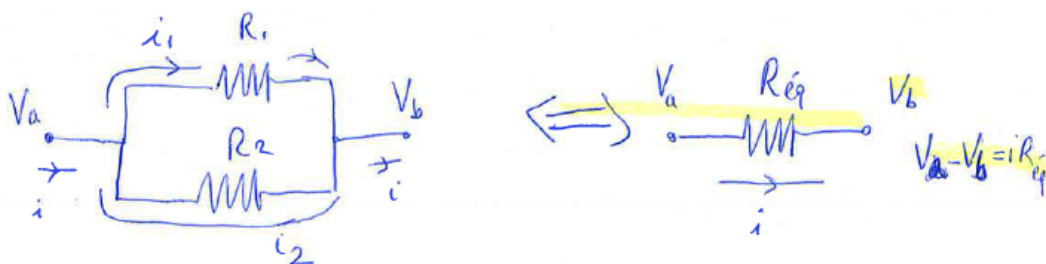
La charge est la même, le courant est le même

$$\begin{aligned} V_a - V_c &= (V_a - V_b) + (V_b - V_c) = \\ &= iR_1 + iR_2 = i\underbrace{(R_1 + R_2)}_{R_{\text{éq.}}} \Rightarrow \boxed{R_{\text{éq.}} = \frac{V_a - V_c}{i} = R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Pour plusieurs  $R'$ s :

$$\begin{array}{c} R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad \dots \quad R_N \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad \boxed{R_{\text{eq.}} = \sum_{j=1}^N R_j} \quad (5.24)$$

### (2) Résistances en parallèle

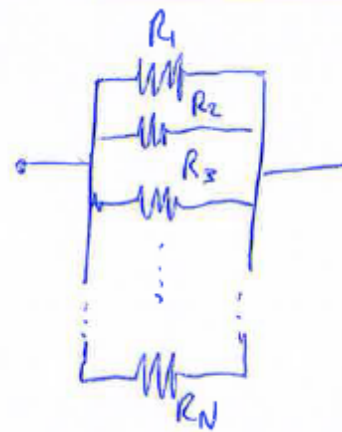


Ici la quantité commune à toutes les résistances est  $V_a - V_b$ .

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i & (\text{conservation de la charge}) \\ \frac{V_a - V_b}{R_1} + \frac{V_a - V_b}{R_2} = \frac{V_a - V_b}{R_{\text{éq.}}} \Rightarrow R_{\text{éq.}} = \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]^{-1} \end{cases} \quad (5.25)$$

Plusieurs résistances en parallèle

$$R_{\text{eq}} = \left[ \sum_{j=1}^N \frac{1}{R_j} \right]^{-1} \quad (5.26)$$



**Note 5.12.** Sur chaque branche du circuit, le courant est inversement proportionnel à la résistance  $i_j = \frac{V}{R_j}$  ; le courant “choisit” le chemin avec la moindre résistance.

## 5.7 Lois de Kirchhoff

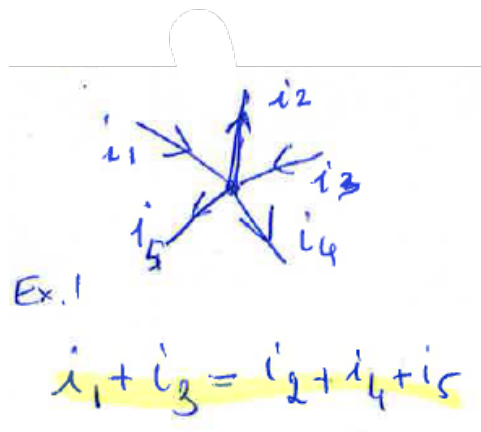
On peut résumer ces observations avec deux règles pratiques : **règles (ou lois) de Kirchhoff**

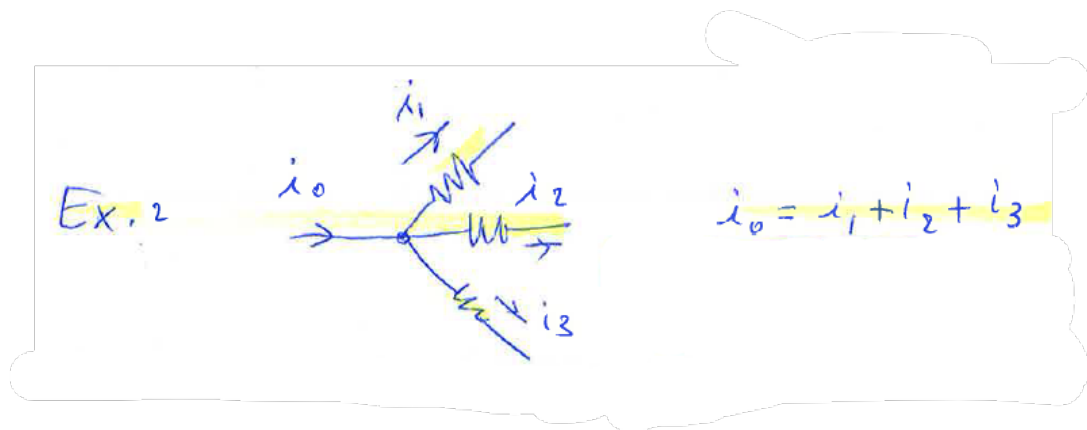
(1) **“Règle des nœuds”** (nœud  $\equiv$  intersection de fils)

conservation de la charge

La somme des intensités des courants arrivants est égale à celle des courants sortants.

$$\sum_j i_{j \text{ IN}} = \sum_h i_{h \text{ OUT}} \quad (5.27)$$



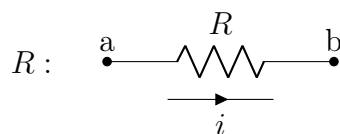


## (2) “Règle des mailles”

La somme algébrique des différences de potentiel électrique sur une maille fermée est nulle, pour n’importe quel circuit composé de mailles.

$$\sum_j \Delta V_j = 0 \quad \text{autour de chaque maille fermée}$$

**Note 5.13.** Les  $\Delta V_j$  sont toutes les emf et toutes les différences de potentiel à travers les résistances.

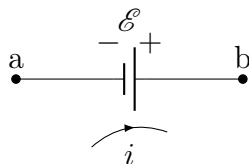


La seule difficulté... les signes !

Si on passe à travers  $R$  dans la direction du courant, la différence de potentiel est négative [c’est une “chute” à travers  $R$ ] :

$$V_b - V_a = V_R = -iR; \quad (5.28)$$

le potentiel est plus bas au point b.



Si on passe à travers une source de emf dans la même direction que l’emf :  $\Delta V = +\mathcal{E}$  (“uphill”), alors que en direction opposée :  $\Delta V = -\mathcal{E}$

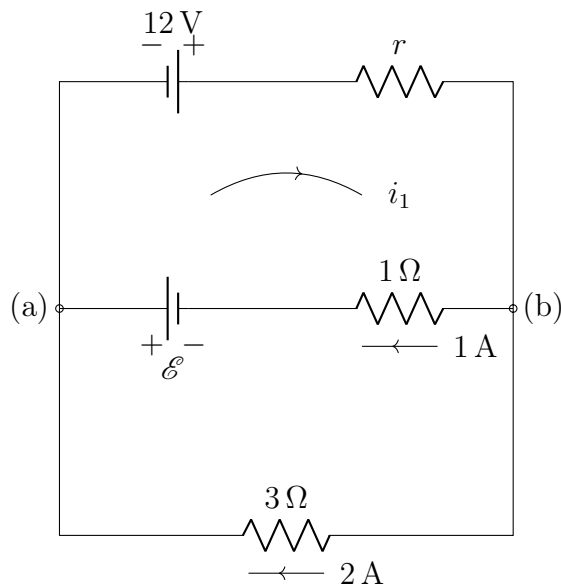
$$\Rightarrow V_b - V_a = +\mathcal{E}$$

Ces deux règles devraient permettre de résoudre les problèmes avec des circuits DC.



Exemples d'application des règles de Kirchhoff

**Chargement d'une vieille batterie.**



On cherche  $r = ?$

$i_1 = ?$

$\mathcal{E} = ?$

(1) On choisit (arbitrairement) les signes pour  $i$ ,  $\mathcal{E}$  (et on les change pas au milieu du calcul !)

(2) On applique la règle des noeuds à (a) et à (b)

(a)  $2\text{ A} = i_1 - 1\text{ A} \Rightarrow i_1 = 3\text{ A}$

(b)  $i_1 = 1\text{ A} + 2\text{ A} \Rightarrow i_1 = 3\text{ A}$  OK

(3) On applique la règle des mailles

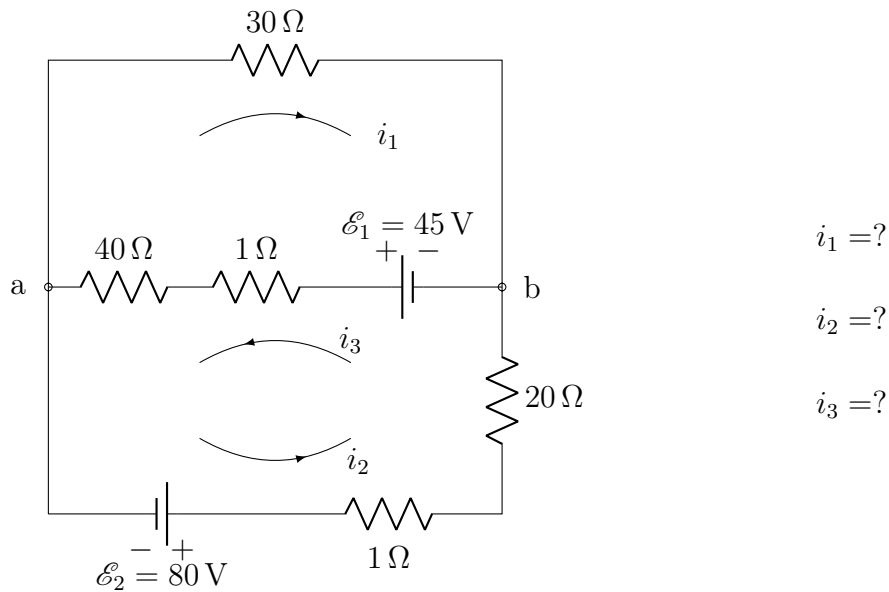
- à la maille en haut :  $12\text{ V} - \overbrace{(3\text{ A})}^{i_1} r - (1\text{ A})1\Omega + \mathcal{E} = 0$

- à la maille totale :  $12 - (3\text{ A})r - (2\text{ A})3\Omega = 0$

$$\rightarrow r = \frac{6}{3}\Omega = 2\Omega; \quad \mathcal{E} = (3 \times 2 + 1 - 12)\text{ V} = -5\text{ V}$$

$\Rightarrow$  Ceci veut dire que le dessin devrait être corrigé car la direction/polarité de l'emf et donc de la batterie est inversée.

On cherche la valeur des courants qui passent à travers tous les composants, donc  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ .



- On choisit un signe pour  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  et on dessine selon ce signe, puis bien entendu on calcule avec ce signe.

- Nœuds

$$(a) \quad -i_2 + i_3 = i_1 \quad i_3 = i_1 + i_2$$

$$(b) \quad i_1 + i_2 = i_3$$

- Maille supérieure (en sens horaire)

$$-i_1 \times 30 + 45 \text{ V} - i_3 \times 41 = 0 \quad \Rightarrow \quad 30i_1 + 41i_3 = 45$$

- Maille inférieure (en sens horaire)

$$+i_3 \times 41 - 45 \text{ V} + i_2 \times 20 + i_2 \times 1 - 80 \text{ V} = 0 \quad \Rightarrow \quad 21i_2 + 41i_3 = 125$$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ 30i_1 + 41i_3 = 45 \\ 21i_2 + 41i_3 = 125 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} i_1 = -0.9 \text{ A} \\ i_2 = 2.65 \text{ A} \\ i_3 = 1.76 \text{ A} \end{cases}$$