Distributions

"distribution function" ≡ "cumulative distribution function"

Donc quand on nous demande la distribution function d'une variable c'est la fonction qui $\forall t$ donne $P(X \leq t)$.

Quand on demande la PDF souvent c'est plus simple de trouver la CDF puis de dériver.

Indicator function

$$I(\text{some expression}) = \begin{cases} 1 \text{ if the expression is true} \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Distribution Exponentielle et Poisson

Poisson est utilisé pour des variables aléatoires discrète. Il modélise la probabilité qu'un certain nombre d'évènements se produise durant une période de temps ou d'espace, à partir d'un taux λ.

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Poisson est une approximation de la loi binomiale pour un p très petit et un n très grand (on a $\lambda = np$).

Le temps entre deux occurences est modélisé par une distribution exponentielle. La distribution exponentielle est **memoryless**.

$$f_D(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Exemple

Si un client arrive toutes les 2 minutes, $\lambda = \frac{1}{2}$. La probabilité qu'un client arrive durant une période de 7 minutes est $1 - e^{-0.5 \cdot 7}$. La probabilité qu'un client arrive durant une période de 7 minutes **sachant que** 8 minutes se sont déjà écoulées est identique. Car les évènements sont **indépendants** entre eux (peu importe qui est venu avant au magasin).

Moments

- the rth moment of X is $E(X^r)$.

P.D.F ⟺ CDF

On a la P.D.F $f(x)$ et on veut la C.D.F $G(y)$, avec $Y = \frac{1}{X}$.

D'abord on définit nos fonctions pour passer de x à y :

$$r(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et } s(y) = \frac{1}{y}$$

$$G(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{y}\right)$$

$$G(y) = 1 - F\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{d\left(1 - F\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{dy}$$

$$g(y) = -\frac{dF}{dy}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot |-\frac{1}{y^2}| \text{ (on s'intéresse à la croissance, on enlève le signe -)}$$

$$g(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2}$$

Et ensuite pour trouver $G(y)$ on intègre.

Expected Value

Continue : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_D(x)xdx$

Attention, c'est la P.D.F. qu'on intègre, parfois il faut dériver la C.D.F.

Variance

$E(X^2) - E(X)^2$

donc, quand continue : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_D(x)x^2dx - E(X)^2$

Normal distribution

Impossible de calculer la CDF Φ ! c'est pour ça qu'il existe des tables

aussi appelée "courbe de Gauss", en cloche :

$$f_D(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

μ est la moyenne, l'espérance de la distribution
σ est l'écart-type

Standard Normal Distribution

$$f_D(x) = \varphi(x)$$

quand $\mu = 0$ (donc centré autour de 0), et que $\sigma = 1$.

$$\Phi(x) = \int f_D(x) \quad \text{(la cdf)}$$

Convertir en Standard Normal Distrib.

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Joint random variables

Conditional pdf (2 variables)

$$f_{X/Y}(x/y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)f_Y(y)dy$$