Distributions

"distribution function" ≡ "cumulative distribution function"

Donc quand on nous demande la distribution function d'une variable c'est la fonction qui $\forall t$ donne $P(X \leq t)$.

Quand on demande la PDF souvent c'est plus simple de trouver la CDF puis de dériver.

Indicator function

$$I(\text{some expression}) = \begin{cases} 1 \text{ if the expression is true} \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

Distribution Exponentielle et Poisson

Poisson est utilisé pour des variables aléatoires discrète. Il modélise la probabilité qu'un certain nombre d'évènements se produise durant une période de temps ou d'espace, à partir d'un taux λ.

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Poisson est une approximation de la loi binomiale pour un p très petit et un n très grand (on a $\lambda = np$).

Le temps entre deux occurences est modélisé par une distribution exponentielle. La distribution exponentielle est **memoryless**.

$$f_D(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Exemple

Si un client arrive toutes les 2 minutes, $\lambda = \frac{1}{2}$. La probabilité qu'un client arrive durant une période de 7 minutes est $1 - e^{-0.5 \cdot 7}$. La probabilité qu'un client arrive durant une période de 7 minutes **sachant que** 8 minutes se sont déjà écoulées est identique. Car les évènements sont **indépendants** entre eux (peu importe qui est venu avant au magasin).

Moments

- the rth moment of X is $E(X^r)$.

P.D.F ⟺ CDF

On a la P.D.F $f(x)$ et on veut la C.D.F $G(y)$, avec $Y = \frac{1}{X}$.

D'abord on définit nos fonctions pour passer de x à y :

$$r(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad s(y) = \frac{1}{y}$$

$$G(y) = F(s(y)) = F\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{d\left(F\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{dy}$$

$$g(y) = \frac{dF}{dy}\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left|-\frac{1}{y^2}\right| \text{ (on s'intéresse à la vitesse, on enlève le signe -)}$$

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2}$$

Et ensuite pour trouver $G(y)$ on intègre.

Expected Value

Continue : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_D(x) x dx$

Attention, c'est la P.D.F. qu'on intègre, parfois il faut dériver la C.D.F.

Variance

$E(X^2) - E(X)^2$

donc, quand continue : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_D(x) x^2 dx - E(X)^2$