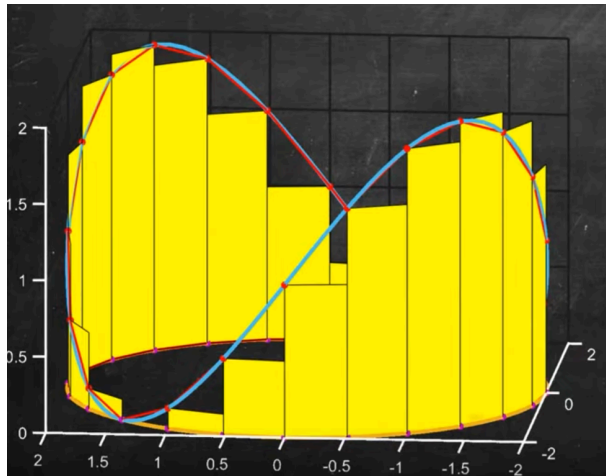
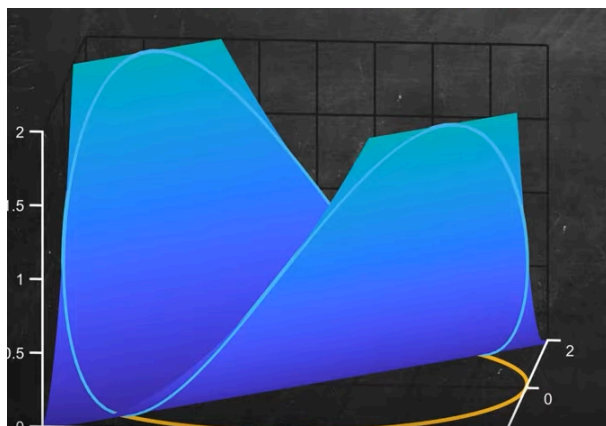


## Line integrals

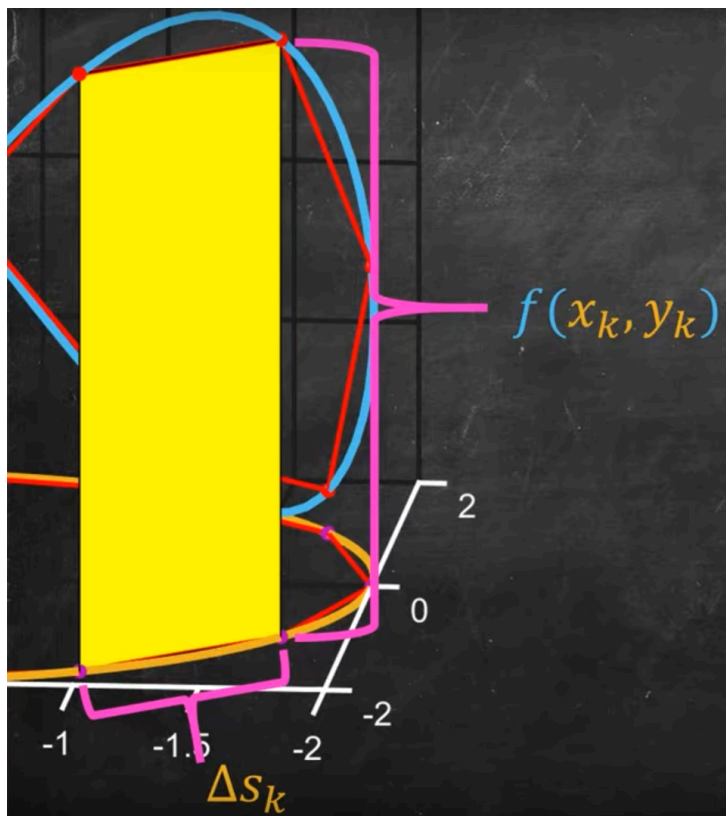
On veut intégrer  $f(x, y) = z$  (en bleu) selon le cercle, que l'on paramétrise comme  $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$ .



On peut d'abord réécrire notre fonction comme  $f(t) = f(g(t), h(t))$ . Pourquoi ? Parce que les seuls points qui nous intéressent sont ceux selon  $g(h), h(t)$  !



Notre fonction aurait pu être comme ça, mais on veut juste être sur les points du cercle.



Ici on veut l'aire donc

$$A_k = f(x_k, y_k) \Delta s_k$$

$$A_k = f(x_k, y_k) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\Rightarrow dA = f(g(t), h(t)) \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dt$$

### Theorem (Gauss / Green)

Let  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  be as in the main auxiliary theorem

Let  $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a diff'able vector field. Then

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dl$$

Gauss theorem /  
divergence theorem

$$\iint_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl$$

Green theorem

ccw rotation by  $90^\circ$  :  $(-y, x)$

cw rotation by  $90^\circ$  :  $(y, -x)$

## Outlook

$$\boxed{2D} \quad \iint \operatorname{div} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \quad \iint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

area integral                      line integral                      area integral                      line integral

$$\boxed{3D} \quad \iiint \operatorname{div} \vec{F} = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

volume integral                      surface integral

Similar in higher dimensions:  
hypervolume vs. hypersurface

$$\oiint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

surface integral                      line integral

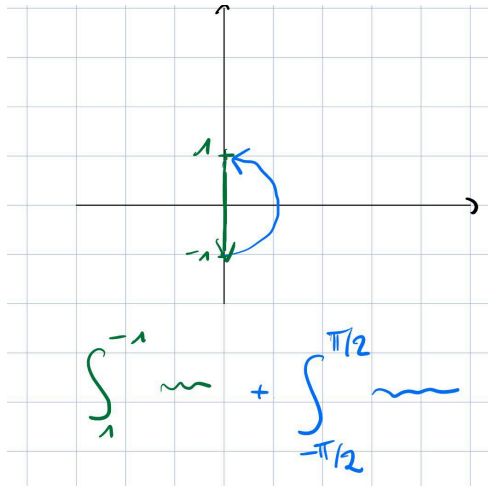
Higher dimensions:  
so much more difficult

## Trouver un potentiel

- compute  $\int_0^x F(t)dt$
- compute  $\int_x^y F(t)dt$
- sum them

## Calculer une intégrale avec le Green's theorem

- bien choisir un sens pour la bordure (par ex)



$$\bullet \int_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{s} = \int \int_{\omega} \text{div}(F) d\omega$$

## Calculer une aire d'un graph

par exemple,  $\Phi(t) = \sqrt{s^2 + t^2}$

on définit  $\vec{r} = (s, t, \Phi(t))$

Calculer l'aire du graphe de  $\Phi$  sur  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} 1 \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| ds dt$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{d\Phi}{ds} \\ 0 & 1 & \frac{d\Phi}{dt} \end{pmatrix} = \left( -\frac{d\Phi}{ds}, -\frac{d\Phi}{dt}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \text{(when taking the norm)} \int_{\omega} \sqrt{1 + \left( \frac{d\Phi}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2} ds dt$$

## Divergence Theorem

Il fonctionne en 2D et en 3D.

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\int \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F(\Phi(\vec{x}))} \cdot \vec{n} \cdot \left\| \overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi} \right\| d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

Avec  $\vec{n}$  le vecteur normal par rapport à la surface en chaque point.

On définit une paramétrisation du volume  $\varphi(x, y)$ , et  $\Phi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$ .

Note : on ajoute  $\|\overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi}\|$  comme on ajoute la dérivée, parce que comme  $s$  et  $t$  sont perpendiculaires, le cross-product  $\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\widehat{ab})$  avec  $\widehat{ab} = \frac{\pi}{2}$  donc juste  $\|\partial_s \Phi\| \cdot \|\partial_t \Phi\|$ .

Pour trouver le vecteur normal :

$$\vec{n} = \frac{\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\|}$$

$$\vec{n} = \frac{\partial_\varphi \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\|}$$

## Green's Theorem

Il fonctionne en 2D uniquement. On regarde sur la bordure comment ça tourne.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{J} dl = \int \int_{\Omega} \text{curl } \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

avec  $\vec{J}$  la dérivée de la

## Stoke's Theorem

Il fonctionne en 3D.

Soient  $M \in \mathbb{R}^3$  et  $F = (F_1, \dots, F_n) : M \mapsto \mathbb{R}^n$ .

Si  $n = 2$ , alors le **rotationnel** de  $F$  est donné par :

$$\text{rot } F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \in \mathbb{R}$$

Si  $n = 3$ , alors il est donné par :

$$\begin{aligned} \text{rot } F(x) &= "(\text{rot } F_{23}, \text{rot } F_{31}, \text{rot } F_{12})" \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right) \end{aligned}$$

## Déterminant Jacobienne

En coordonnées sphériques :

$$\det = r^2 \sin(\theta)$$

En coordonnées polaires

$$\det = r$$