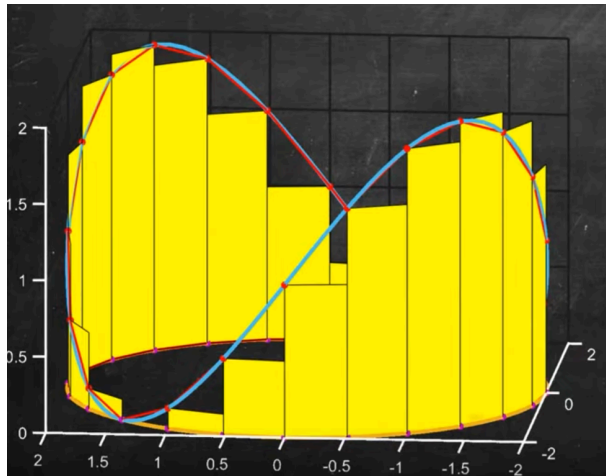
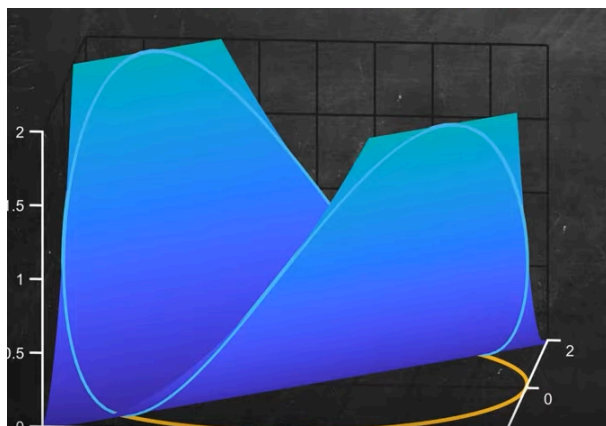


Line integrals

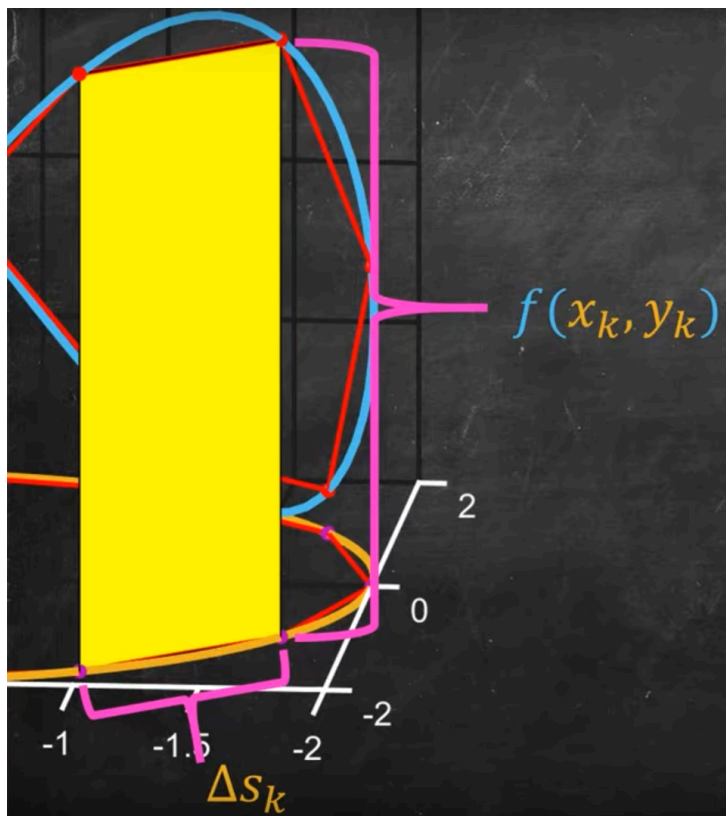
On veut intégrer $f(x, y) = z$ (en bleu) selon le cercle, que l'on paramétrise comme $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$.



On peut d'abord réécrire notre fonction comme $f(t) = f(g(t), h(t))$. Pourquoi ? Parce que les seuls points qui nous intéressent sont ceux selon $g(h), h(t)$!



Notre fonction aurait pu être comme ça, mais on veut juste être sur les points du cercle.



Ici on veut l'aire donc

$$A_k = f(x_k, y_k) \Delta s_k$$

$$A_k = f(x_k, y_k) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\Rightarrow dA = f(g(t), h(t)) \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dt$$

Theorem (Gauss / Green)

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ be as in the main auxiliary theorem

Let $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a diff'able vector field. Then

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dl$$

Gauss theorem /
divergence theorem

$$\iint_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl$$

Green theorem

ccw rotation by 90° : $(-y, x)$

cw rotation by 90° : $(y, -x)$

Outlook

$$\boxed{2D} \quad \iint \operatorname{div} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \quad \iint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{t}$$

area integral line integral area integral line integral

$$\boxed{3D} \quad \iiint \operatorname{div} \vec{F} = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

volume integral surface integral

Similar in higher dimensions:
hypervolume vs. hypersurface

$$\oiint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{t}$$

surface integral line integral

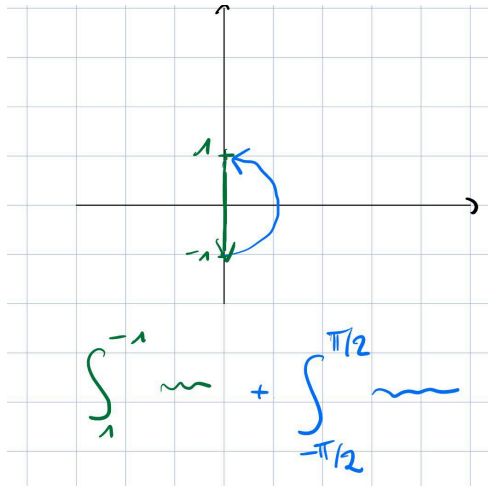
Higher dimensions:
so much more difficult

Trouver un potentiel

- compute $\int_0^x F(t)dt$
- compute $\int_x^y F(t)dt$
- sum them

Calculer une intégrale avec le Green's theorem

- bien choisir un sens pour la bordure (par ex)



$$\bullet \int_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{s} = \int \int_{\omega} \text{div}(F) d\omega$$

Calculer une aire d'un graph

par exemple, $\Phi(t) = \sqrt{s^2 + t^2}$

on définit $\vec{r} = (s, t, \Phi(t))$

Calculer l'aire du graphe de Φ sur Ω :

$$\int_{\Omega} 1 \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| ds dt$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{d\Phi}{ds} \\ 0 & 1 & \frac{d\Phi}{dt} \end{pmatrix} = \left(-\frac{d\Phi}{ds}, -\frac{d\Phi}{dt}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \text{(when taking the norm)} \int_{\omega} \sqrt{1 + \left(\frac{d\Phi}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)^2} ds dt$$

Divergence Theorem

Il fonctionne en 2D et en 3D.

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\int \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F(\Phi(\vec{x}))} \cdot \vec{n} \cdot \left\| \overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi} \right\| d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

Avec \vec{n} le vecteur normal par rapport à la surface en chaque point.

On définit une paramétrisation du volume $\varphi(x, y)$, et $\Phi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$.

Note : on ajoute $\|\overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi}\|$ comme on ajoute la dérivée, parce que comme s et t sont perpendiculaires, le cross-product $\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\widehat{ab})$ avec $\widehat{ab} = \frac{\pi}{2}$ donc juste $\|\partial_s \Phi\| \cdot \|\partial_t \Phi\|$.

Pour trouver le vecteur normal :

$$\vec{n} = \frac{\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\|}$$

$$\vec{n} = \frac{\partial_\varphi \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\|}$$

Green's Theorem

Il fonctionne en 2D uniquement. On regarde sur la bordure comment ça tourne.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{J} dl = \int \int_{\Omega} \text{curl } \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

avec \vec{J} la dérivée de la

Stoke's Theorem

Il fonctionne en 3D.

Soient $M \in \mathbb{R}^3$ et $F = (F_1, \dots, F_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Si $n = 2$, alors le **rotationnel** de F est donné par :

$$\text{rot } F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \in \mathbb{R}$$

Si $n = 3$, alors il est donné par :

$$\begin{aligned} \text{rot } F(x) &= "(\text{rot } F_{23}, \text{rot } F_{31}, \text{rot } F_{12})" \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right) \end{aligned}$$

Déterminant Jacobienne

En coordonnées sphériques :

$$\det = r^2 \sin(\theta)$$

En coordonnées polaires

$$\det = r$$

Distributions

D c'est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables (lisses) dont le support est contenu dans un certain intervalle.

montrer que T est finie :

$$\forall \varphi \in D : |T(\varphi)| < \infty$$

montrer que T est continue :

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R} \exists C > 0 \text{ (peut dépendre de } a, b) \text{ t.q. } \forall \varphi \in D \text{ t.q. } \text{supp}(\varphi) \subset [a, b] :$$

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^i \varphi(x)|$$

Pour montrer ça on peut par exemple prendre $i = 0$ et si ça suffit on peut s'arrêter là.

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \int_a^b 1 dx = (b - a) \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \\ &\leq (b - a) \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^i \varphi(x)| \end{aligned}$$

Note : le support c'est le domaine de la fonction n'est pas zéro.

Note 2 : T peut être négative et φ aussi.

Le produit scalaire mesure à quel point deux vecteurs vont dans la même direction :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=0}^n x_i y_i$$

Généralisation pour les fonctions continues :

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \int_a^b F_1(x) F_2(x) dx$$

Distribution derivative :

$$\langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle = - \int f(x) \varphi'(x) dx$$

$$= -[f(x)\varphi(x)]_0^\infty + \int \varphi(x) dx \text{ or } \varphi(\infty) = 0 \text{ (TODO je crois que c'est parce qu'il est def en 0 en dehors de } [a, b])$$

$$= \int \varphi(x) dx$$