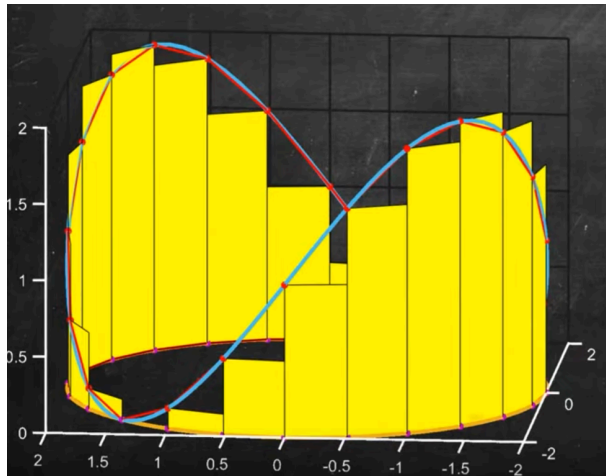
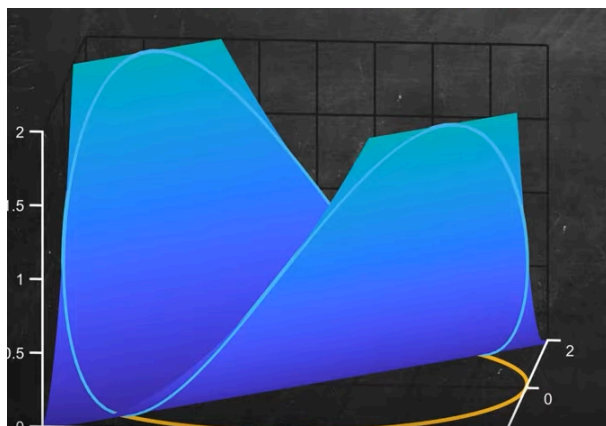


## Line integrals

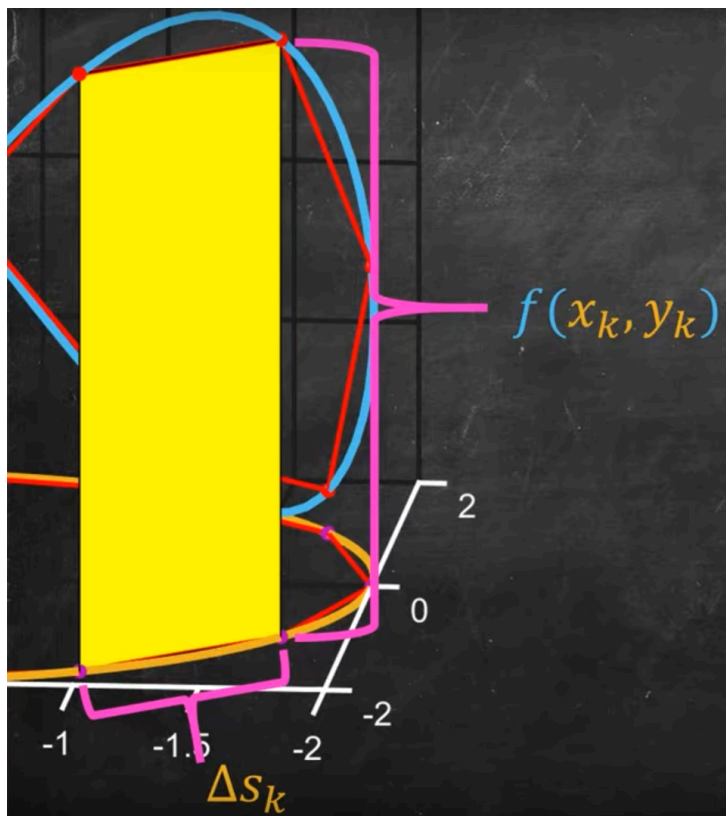
On veut intégrer  $f(x, y) = z$  (en bleu) selon le cercle, que l'on paramétrise comme  $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$ .



On peut d'abord réécrire notre fonction comme  $f(t) = f(g(t), h(t))$ . Pourquoi ? Parce que les seuls points qui nous intéressent sont ceux selon  $g(h), h(t)$  !



Notre fonction aurait pu être comme ça, mais on veut juste être sur les points du cercle.



Ici on veut l'aire donc

$$A_k = f(x_k, y_k) \Delta s_k$$

$$A_k = f(x_k, y_k) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\Rightarrow dA = f(g(t), h(t)) \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dt$$

### Theorem (Gauss / Green)

Let  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  be as in the main auxiliary theorem

Let  $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a diff'able vector field. Then

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dl$$

Gauss theorem /  
divergence theorem

$$\iint_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl$$

Green theorem

ccw rotation by  $90^\circ$  :  $(-y, x)$

cw rotation by  $90^\circ$  :  $(y, -x)$

## Outlook

$$\boxed{2D} \quad \iint \operatorname{div} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \quad \iint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

area integral                      line integral                      area integral                      line integral

$$\boxed{3D} \quad \iiint \operatorname{div} \vec{F} = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

volume integral                      surface integral

Similar in higher dimensions:  
hypervolume vs. hypersurface

$$\oiint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

surface integral                      line integral

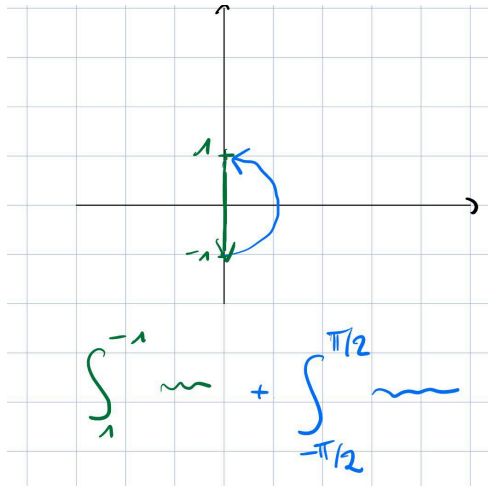
Higher dimensions:  
so much more difficult

## Trouver un potentiel

- compute  $\int_0^x F(t)dt$
- compute  $\int_x^y F(t)dt$
- sum them

## Calculer une intégrale avec le Green's theorem

- bien choisir un sens pour la bordure (par ex)



$$\bullet \int_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{s} = \int \int_{\omega} \text{div}(F) d\omega$$

## Calculer une aire d'un graph

par exemple,  $\Phi(t) = \sqrt{s^2 + t^2}$

on définit  $\vec{r} = (s, t, \Phi(t))$

Calculer l'aire du graphe de  $\Phi$  sur  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} 1 \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| ds dt$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{d\Phi}{ds} \\ 0 & 1 & \frac{d\Phi}{dt} \end{pmatrix} = \left( -\frac{d\Phi}{ds}, -\frac{d\Phi}{dt}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \text{(when taking the norm)} \int_{\omega} \sqrt{1 + \left( \frac{d\Phi}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)^2} ds dt$$

## Divergence Theorem

Il fonctionne en 2D et en 3D.

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\int \int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F(\Phi(\vec{x}))} \cdot \vec{n} \cdot \left\| \overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi} \right\| d\vec{S} = \int \int \int_{\Omega} \text{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

Avec  $\vec{n}$  le vecteur normal par rapport à la surface en chaque point.

On définit une paramétrisation du volume  $\varphi(x, y)$ , et  $\Phi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$ .

Note : on ajoute  $\|\overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi}\|$  comme on ajoute la dérivée, parce que comme  $s$  et  $t$  sont perpendiculaires, le cross-product  $\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\widehat{ab})$  avec  $\widehat{ab} = \frac{\pi}{2}$  donc juste  $\|\partial_s \Phi\| \cdot \|\partial_t \Phi\|$ .

Pour trouver le vecteur normal :

$$\vec{n} = \frac{\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\|}$$

$$\vec{n} = \frac{\partial_\varphi \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\|}$$

## Green's Theorem

Il fonctionne en 2D uniquement. On regarde sur la bordure comment ça tourne.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{J} dl = \int \int_{\Omega} \text{curl } \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

avec  $\vec{J}$  la dérivée de la

## Stoke's Theorem

Il fonctionne en 3D.

Soient  $M \in \mathbb{R}^3$  et  $F = (F_1, \dots, F_n) : M \mapsto \mathbb{R}^n$ .

Si  $n = 2$ , alors le **rotationnel** de  $F$  est donné par :

$$\text{rot } F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \in \mathbb{R}$$

Si  $n = 3$ , alors il est donné par :

$$\begin{aligned} \text{rot } F(x) &= "(\text{rot } F_{23}, \text{rot } F_{31}, \text{rot } F_{12})" \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right) \end{aligned}$$

## Déterminant Jacobienne

En coordonnées sphériques :

$$\det = r^2 \sin(\theta)$$

En coordonnées polaires

$$\det = r$$

## Distributions

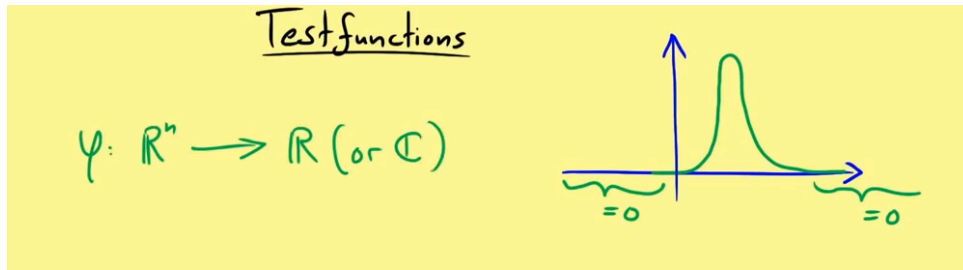
La dérivée est trop “forte” pour considérer les fonctions avec des pics, mais alors comment dériver ces fonctions ?

### Dirac H

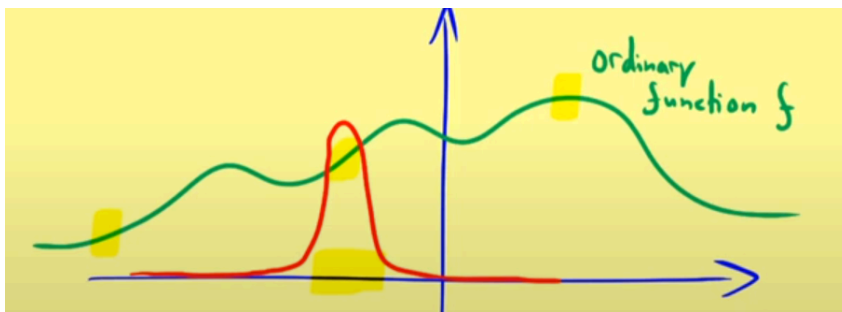
Par exemple, la Heaviside function :  $H(x) = 1$  if  $x \geq 0$  else 0

La dérivée  $H'(x) = \varepsilon(x)$  sera quasiment partout 0 sauf en un point (le jump). Comment avoir une fonction  $H'$  comme ça ? En fait on peut considérer cette fonction comme une distribution.

On utilise ensuite une **test function** pour obtenir la densité entre deux points.



$$\varphi \rightarrow \int f(x)\varphi(x)dx$$



$D$  c'est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables (lisses) dont le support est contenu dans un certain intervalle.

### Montrer que $T$ est une distribution

- montrer que  $T$  est finie :

$$\forall \varphi \in D : |T(\varphi)| < \infty$$

- montrer que  $T$  est continue :

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R} \exists C > 0 \text{ (peut dépendre de } a, b) \text{ t.q. } \forall \varphi \in D \text{ t.q. } \text{supp}(\varphi) \subset [a, b] :$$

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^i \varphi(x)|$$

Pour montrer ça on peut par exemple prendre  $i = 0$  et si ça suffit on peut s'arrêter là.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right| = \left| \int_a^b \varphi(x) dx \right|$$

$$\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \int_a^b 1 dx = (b-a) \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

$$\leq (b-a) \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^i \varphi(x)|$$

Note : le support c'est le domaine de la fonction n'est pas zéro.

Note 2 :  $T$  peut être négative et  $\varphi$  aussi.

## Distribution derivative

Le produit scalaire mesure à quel point deux vecteurs vont dans la même direction :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=0}^n x_i y_i$$

Généralisation pour les fonctions continues :

$$\langle F_1, F_2 \rangle = \int_b^a F_1(x) F_2(x) dx$$

Distribution derivative :

$$\langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle = - \int f(x) \varphi'(x) dx$$

$$= -[f(x)\varphi(x)]_0^\infty + \int \varphi(x) dx \quad \text{or } \varphi(\infty) = 0 \quad (\text{une test function vaut 0 en l'infini})$$

$$= \int \varphi(x) dx$$

## Fourier series

Parseval's theorem :

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

## Dirichet

Dirichlet conditions (general version) : the Fourier series at  $x$  converges whenever  $f(x)$  is continuous at  $x$ .

$$Ff(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(x_0 + h) + f(x_0 - h))$$

## Coefficients

Pour trouver les coefficients :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) dx$$

parce que ça se simplifie quand on multiplie :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} mx\right) dx \\ &= \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} mx\right) dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{if } n = m \end{cases} \end{aligned}$$

## Complex Fourier series

instead of cos and sin we use  $e^{ix}$  and  $e^{-ix}$ .

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\frac{2\pi}{T} nx} f(x) dx$$

Liens entre  $a_n$  et  $b_n$  et  $c_n$  :

$$c_n = a_n - ib_n$$

$$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{2}$$

$$b_n = \frac{c_n - c_{-n}}{2i}$$

## Transformations de Fourier

Soit  $f(x)$  une série de Fourier de coefficient  $c_n$  pour une fonction de période  $T$ . Si on a une forme similaire, l'objectif c'est de toujours trouver une fonction  $g(x)$  qui s'exprime en fonction de  $f$ .

Par exemple si on a :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 < x < 0.5 \\ 2 - 2x & \text{if } 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x < \pi \\ 2\pi - x & \text{if } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Là on peut trouver que  $g(x) = \pi \cdot f\left(\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\pi}\right)$ .

Le  $\frac{1}{2\pi}$  c'est pour que la période soit  $2\pi$ .

Multiplier par  $\pi$  parce qu'on veut que ça aille pas de zero à 1 mais de 0 à pi.

Et on voit qu'en fait seule la multiplication par une constante change les coefficients de Fourier.

## Fourier Transform

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$



Inverse :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

(the only change is the sign in the exponent)

En fait dans un sens on décompose notre fonction  $f$  en une somme de fonctions périodiques avec des fréquences différentes (et on obtient une fonction  $\mathcal{F}[f](\alpha)$  qui nous donne les coefficients de Fourier de ces fonctions périodiques en fonction de la fréquence). Et dans l'autre sens on reconstruit notre fonction  $f$  en sommant ces fonctions périodiques.

## Dérivée

Transformée de Fourier à condition que  $f$  tendent à 0 en l'infini (la preuve utilise l'intégration par partie et on utilise que  $f(\infty) = f(-\infty) = 0$ ).

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = i\alpha \mathcal{F}[f](\alpha)$$

## Modulation

### Scale in/out

$$g(t) = e^{-ibt} f(at)$$

$$\rightarrow \hat{g}(\alpha) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha + b}{a}\right)$$

### Intuition

Si on connaît  $\mathcal{F}[f](\alpha)$ . Soit  $g(x) = f(2x)$ .

$$\mathcal{F}[g(x)](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(2x) e^{-i\alpha x} dx$$

On pose  $y = 2x$  donc  $x = \frac{y}{2}$  et  $dx = \frac{1}{2} dy$ .

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha \frac{y}{2}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha \frac{y}{2}} dy$$

donc  $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$  et on multiplie par  $\frac{1}{|a|}$ .

Si on a  $g(x) = f(x - b)$  alors  $\alpha' = \alpha$  et on multiplie par  $e^{-ib\alpha}$ .

### Décalage

$$g(x) = f(x - b)$$

$$\rightarrow \hat{g}(\alpha) = e^{-ib\alpha} \hat{f}(\alpha)$$

### Intuition

$$\mathcal{F}[f(x - b)](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - b) e^{-i\alpha x} dx$$

On pose  $y = x - b$  donc  $x = y + b$  et  $dx = dy$ .

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha(y+b)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ib\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha y} dy$$

Transformée de Fourier :

F	$\hat{f}$
$\frac{1}{t^2 + \omega^2}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega  \alpha }$
$\frac{e^{-\omega  t }}{\omega}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} \right)$
$\frac{\sin(\omega t)}{t}$	$\hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{if }  \alpha  < \omega \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
$\begin{cases} 1 & \text{if }  t  < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(b\alpha)}{\alpha}$
$e^{-\omega^2 t^2}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega}}$
$te^{-\omega^2 t^2}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{-i\alpha}{2\sqrt{2}\omega^3} e^{-\frac{\alpha^2}{4\omega}}$
$\frac{4t^2}{(\omega^2 + t^2)^2}$	$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{2\pi} \left( \frac{1}{\omega} -  \alpha  \right) e^{-\omega  \alpha }$
$\begin{cases} 1 & \text{if } b < t < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{e^{-ib\alpha} - e^{-ic\alpha}}{i\alpha\sqrt{2\pi}}$
$\begin{cases} e^{-\omega t} & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega + i\alpha}$
$\begin{cases} e^{-\omega t} & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\omega + i\alpha)} (\exp(-(\omega + i\alpha)b) - \exp(-(\omega + i\alpha)c))$
$\begin{cases} e^{-i\omega t} & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}(\omega + i\alpha)} (\exp(-i(\omega + i\alpha)b) - \exp(-i(\omega + i\alpha)c))$

Poisson problem :  $-\Delta u = f$  with  $a < x < b$  and  $u(a) = g_a$  and  $u(b) = g_b$ .

Two auxiliary problems :

- $-\Delta u^g(x) = 0$  with  $u^g(a) = g_a$  and  $u^g(b) = g_b$ . Le rôle de cette équation est de satisfaire les conditions limites. (I)
- $-\Delta u^f(x) = f(x)$  with  $u^f(a) = 0$  and  $u^f(b) = 0$ . Le rôle de cette équation est de satisfaire  $-\Delta u = f$  sans modifier les conditions limites. (II)

If we solve these two problems, we can find the solution to the Poisson problem by

$$u(x) = u^g(x) + u^f(x)$$

.

(I) We know  $-u''(x) = 0$  for all  $x$  in  $[a, b]$ . So  $u'(x) = c_1$  and  $u^g(x) = c_1x + c_2$ . We can find  $c_1$  and  $c_2$  by the boundary conditions.

$$g_a = C_1a + C_2 \text{ and } g_b = C_1b + C_2.$$

(II) We use the Fourier series to solve this! For simplicity assume  $[a, b] = [0, L]$  we extend  $F$  to an odd period function with period  $T = 2L$ . Odd periodic  $\rightarrow$  only has sine terms. So we can write  $f(x) = \sum_{n \geq 1} b_n \sin(2\pi n \frac{x}{T})$ . Useful because odd function automatically satisfies  $u^f(0) = u^f(L) = 0$ . (because  $\sin(0) = 0$  and  $\sin(n\pi) = 0$ ).