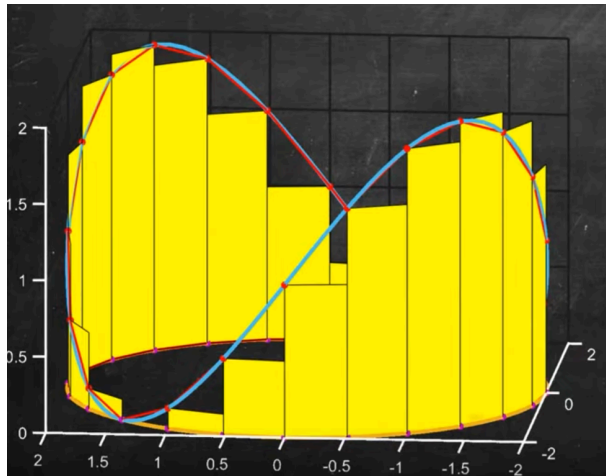
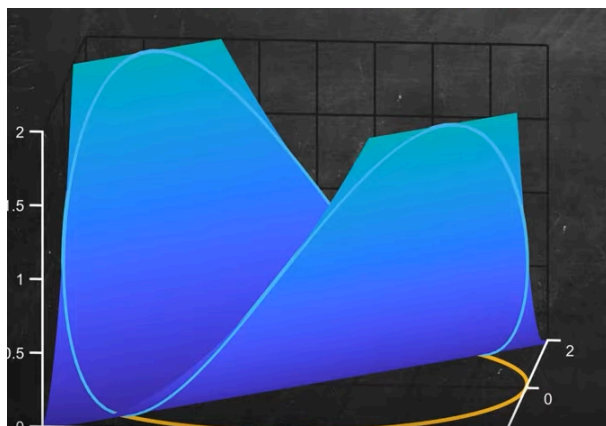


## Line integrals

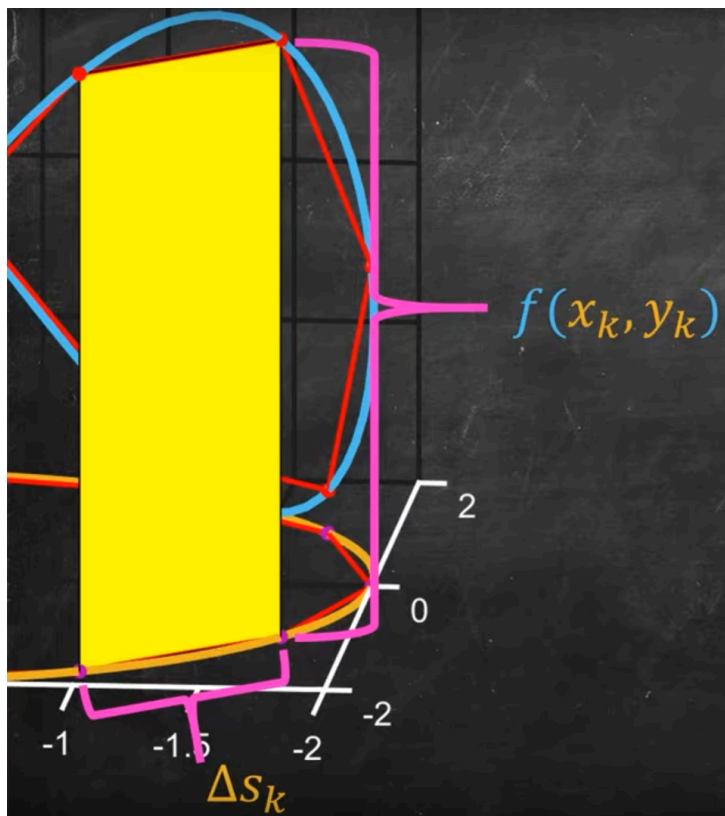
On veut intégrer  $f(x, y) = z$  (en bleu) selon le cercle, que l'on paramétrise comme  $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$ .



On peut d'abord réécrire notre fonction comme  $f(t) = f(g(t), h(t))$ . Pourquoi ? Parce que les seuls points qui nous intéressent sont ceux selon  $g(h), h(t)$  !



Notre fonction aurait pu être comme ça, mais on veut juste être sur les points du cercle.



Ici on veut l'aire donc

$$A_k = f(x_k, y_k) \Delta s_k$$

$$A_k = f(x_k, y_k) \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\Rightarrow dA = f(g(t), h(t)) \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dt$$

### Theorem (Gauss / Green)

Let  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  be as in the main auxiliary theorem

Let  $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  be a diff'able vector field. Then

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dl$$

Gauss theorem /  
divergence theorem

$$\iint_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial \Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl$$

Green theorem

ccw rotation by  $90^\circ$  :  $(-y, x)$

cw rotation by  $90^\circ$  :  $(y, -x)$

## Outlook

$$\boxed{2D} \quad \iint \operatorname{div} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \quad \iint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

area integral                      line integral                      area integral                      line integral

$$\boxed{3D} \quad \iiint \operatorname{div} \vec{F} = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}$$

volume integral                      surface integral

Similar in higher dimensions:  
hypervolume vs. hypersurface

$$\oiint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

surface integral                      line integral

Higher dimensions:  
so much more difficult

**Trouver un potentiel**

- compute  $\int_0^x F(t)dt$
- compute  $\int_x^y F(t)dt$
- sum them

**Calculer une intégrale avec le Green's theorem2**