

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dy}{(x_0^2 + y^2)^{3/2}} = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{d \underbrace{(y/x_0)}_{=\xi}}{x_0^2 (1 + (y/x_0)^2)^{3/2}} = \frac{1}{x_0^2} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \right]_{\frac{-L}{2x_0}}^{\frac{L}{2x_0}} = \\
 &= \frac{1}{x_0^2} \left[\frac{\frac{L}{2x_0}}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{4x_0^2}}} + \frac{\frac{L}{2x_0}}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{4x_0^2}}} \right] = \frac{1}{x_0^2} \frac{L}{\sqrt{x_0^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_{tot_x}}_{=F_{tot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{L} Qq_0 \frac{1}{x_0^2} \frac{L}{\sqrt{x_0^2 + \frac{L^2}{4}}} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_0 \sqrt{x_0^2 + \frac{L^2}{4}}} \quad (1.20)$$

Limite des grandes distances (auxquelles la tige “devient” comme un point) :

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} F_{tot} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_0^2} \quad \text{OK, comme la loi de Coulomb pour deux charges ponctuelles.}$$

Limite petites distances (auxquelles la tige est comme “infinie”) :

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} F_{tot} = \frac{Qq_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cancel{L}}{Lx_0} \quad \text{mais } \frac{Q}{L} = \lambda \text{ (densité linéaire de charge), } F_{tot} = \frac{\lambda q_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_0}$$

1.7 Le champ électrique

Nous avons appris à calculer la force produite par une ou plusieurs charges (distribuées de façon discrète ou continue) sur une autre charge. La force agit entre charges. On peut la calculer pour chaque paire de charges, puis faire la somme, en appliquant le principe de superposition.

Elle agit sur une distance (en termes modernes, à travers son propagateur, le photon).

Pour la charge qui ‘subit’ la force, c’est comme si les autres charges (ou distributions de charges) modifiaient l’espace autour d’elles. Et c’est comme ça que la petite charge ‘sait’ que les autres sont là, à travers la force. Supposons que vous soyez chargés, et moi j’ai aussi une petite charge nette. Si j’arrive dans la salle, je ressens une force due à votre présence. Je ne ressentais pas grande chose quand j’étais loin...

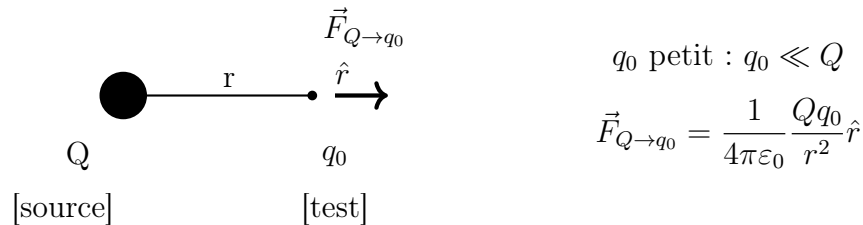
Donc la force dépend du fait que je suis dans la salle. Si je pars, la force n’est plus là, mais la distribution des charges qui l’a générée oui. Donc la source de la force est encore là.

Si je reviens avec une charge différente dans la main, je ressens une force différente même si je ne bouge pas, car l’espace autour de vous a été modifié par votre présence [vous êtes chargés!], et cette modification reste.

On aimerait décrire cette modification de l’espace, de façon à être prêt à calculer la force pour n’importe quelle charge qui y rentrerait, sans devoir calculer chaque fois toutes les forces entre paires de charges et les additionner.

Idée : séparer $\begin{cases} \text{modification de l'espace (source) : champ} \\ \text{force agissant sur la charge placée dans cet espace (charge 'test')} \end{cases}$

Ex.

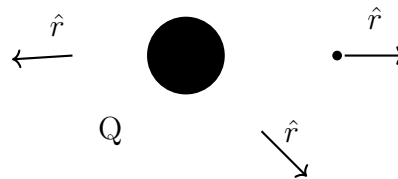


Déf. champ électrique produit par Q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{Q \rightarrow q_0}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad [E] = \frac{N}{C} \quad (1.21)$$

(on l'imagine comme $\lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{Q \rightarrow q_0}}{q_0}$) $\hat{r} = ?$

\hat{r} est le vecteur unitaire dirigé radialement, sortant de la source.



\vec{E} est “prêt” à agir sur toute charge qui serait insérée dans l'espace.

Note 1.10. $\vec{F}_{sur\ q_0} = q_0 \vec{E}$ pour n'importe quelle q_0 .
Si $\vec{E} \neq 0$, $\vec{F}_{sur\ q_0} \neq 0$ (si $q_0 \neq 0$, bien entendu !)

Le champ électrique est une quantité mesurable, avec des charges ‘de test’ q_0 . Une fois que \vec{E} est connu, c'est trivial de calculer la force sur une charge.

Donc le problème dans l'électrostatique est en général le calcul de \vec{E} .

\vec{E} est une propriété de l'espace, et est en général une fonction de la position : $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$

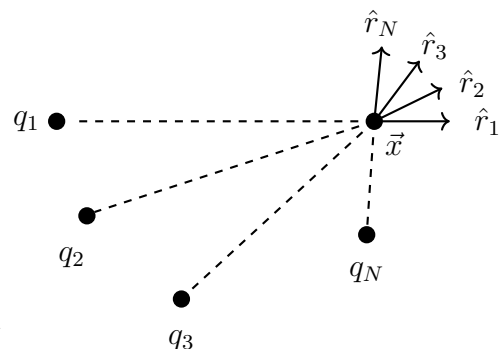
Avec plusieurs charges comme sources, on applique le principe de superposition comme pour la force (de laquelle le champ est tiré).

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j \hat{r}_j}{r_j^2}$$

q_j : sources

\vec{x} : point de l'espace considéré

\hat{r}_j : vecteur unitaire de source q_j au point \vec{x}

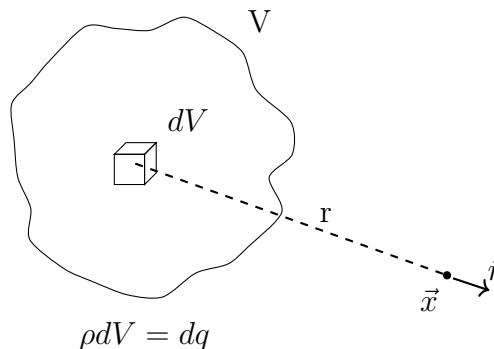


Pour une distribution continue :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_{\text{dist. des charges}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1.22)$$

Par ex. pour une distribution volumique :

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1.23)$$



\vec{E} est un champ vectoriel.

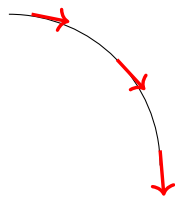
Pour ressentir une force à une certaine distance, il faut $\left\{ \begin{array}{l} \text{source} \\ \text{charge 'test'} \end{array} \right.$

Ex. requin : on dit que le requin 'sent' l'odeur du sang. En effet une blessure sur notre corps produit un champ électrique dans l'eau, qui est détecté à distance par le requin. Pour ça, le requin a un récepteur avec des charges de test qui ressentent une force s'il y a un champ électrique. Il sent les odeurs et entend les sons à grandes distances, mais il compte principalement sur les senseurs de champ électrique à petites distances pour mieux cerner et attaquer la proie.
Comment représenter un champ ?

Lignes de champ (Faraday, ~ 1830)

L'idée est d'utiliser la même représentation qu'un flot d'un fluide (même si rien ne s'écoule physiquement dans ce cas).

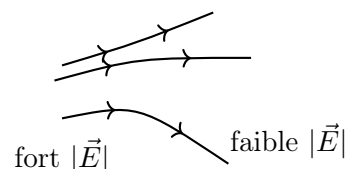
Direction



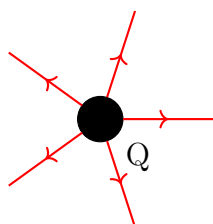
- la ligne suit la direction de \vec{E} ;
- \vec{E} est tangent à la ligne à chaque point ;
- la ligne indique la direction de la force sur une charge positive.

Intensité

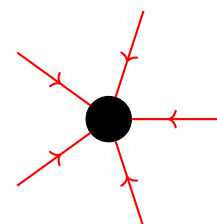
densité des lignes



Ex. $Q > 0$

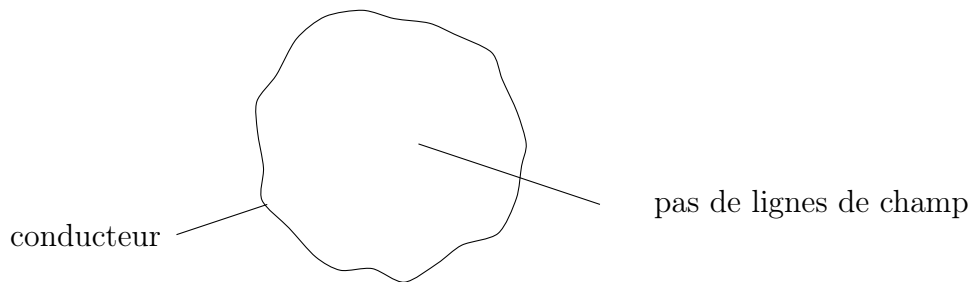


$Q < 0$



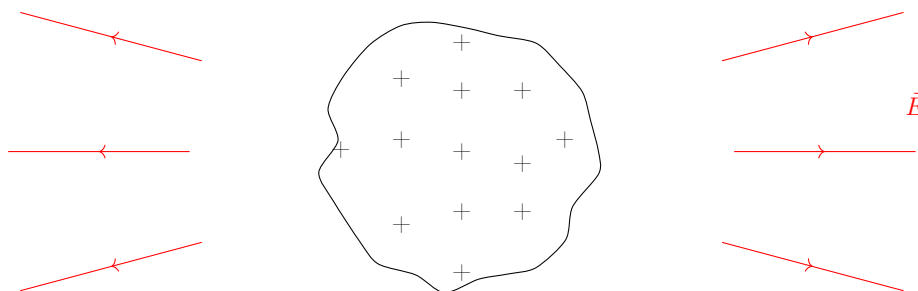
Règles pour les lignes de champ :

(1) $\vec{E} = 0$ à l'intérieur des conducteurs (en électrostatique) \rightarrow pas de lignes de champ du tout. Comme les charges sont libres de bouger, si $\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \vec{F} \neq 0$, et les charges bougeraient.

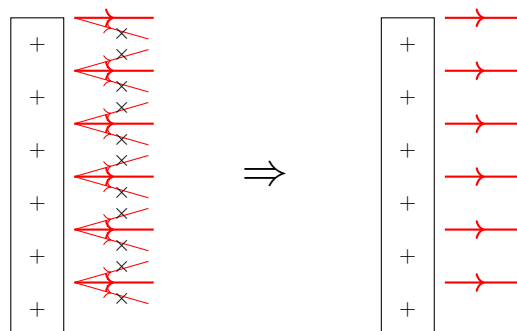


(2) Les lignes de champ vont de $+$ à $-$;

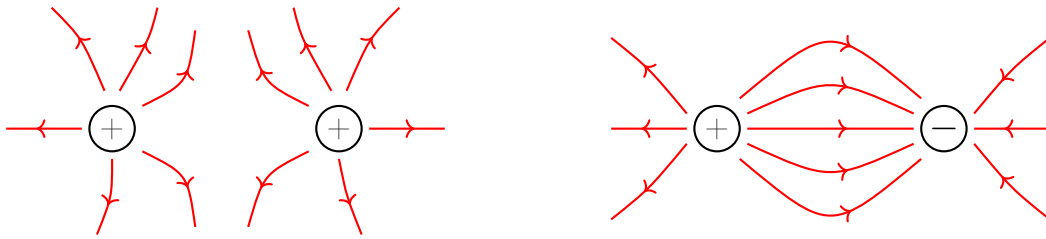
(3) A grandes distances, toute distribution de charges apparaît comme un point ;



(4) A petites distances, toute distribution de charges apparaît comme plane. Et pour un plan, les lignes de champ sont \perp à la surface, car toutes les autres composantes s'annulent.



On peut visualiser diverses structures, et diverses formes de lignes dans une expérience.



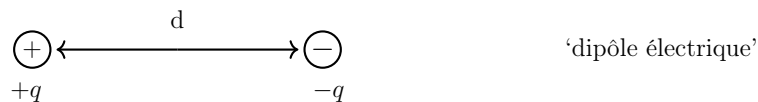
etc...

Cette expérience montre très bien la structure des lignes de champ, mais comment fonctionne-t-elle ? Comment est-ce que ça traduit un concept si abstrait en quelque chose de visible ?

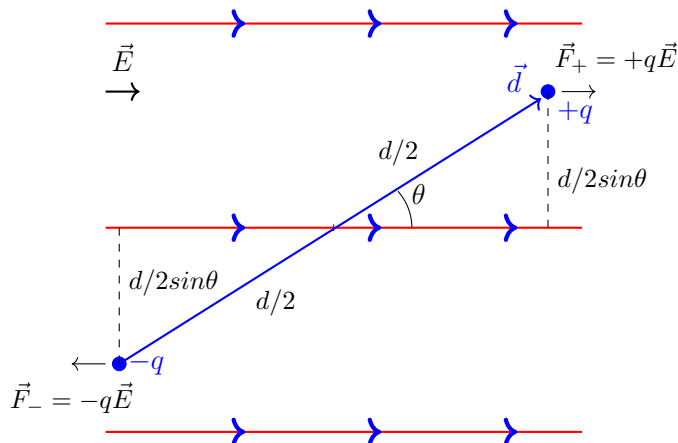
⇒ **Dipôles électriques**

1.8 La polarisation et les dipôles électriques

Considérons deux charges égales mais de signe opposé, à distance d , considérée constante.



Que se passe-t-il si je place le dipôle dans un champ électrique uniforme ?



$\vec{F}_{tot} = +q\vec{E} - q\vec{E} = 0$
 Mais les deux forces n'agissent pas sur la même direction
 → **moment de force**/ couple

$$|\vec{\tau}| = qE \left[\frac{d}{2} \sin \theta \right] + qE \left[\frac{d}{2} \sin \theta \right] = qEd \sin \theta$$

Déf. “moment de dipôle” ou “moment dipolaire”

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d} \quad [p] = \text{Cm}} \quad (1.24)$$

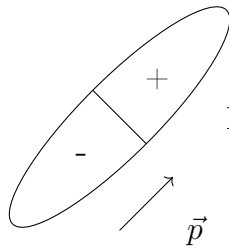
$$|\vec{d}| = d; \quad \text{direction de } -q \text{ à } +q$$

$$\vec{\tau} \text{ est un vecteur : } |\vec{\tau}| = |\vec{p}| |\vec{E}| \sin \theta \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

Ceci veut dire qu'un dipôle sera forcé à tourner jusqu'à ce qu'il soit aligné avec le champ \vec{E}

Si $\vec{p} \parallel \vec{E} \Rightarrow \theta = 0$ et $\vec{\tau} = 0$

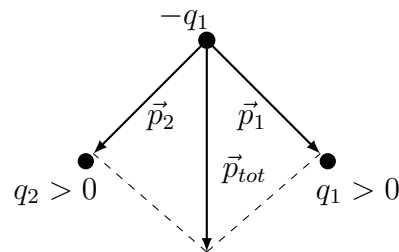
Ceci est le principe de la manipulation qui visualise les lignes de champ. Elle contient des graines de semoule qui sont électriquement neutres, mais qui ont un grand moment de dipôle \vec{p} .



Dans \vec{E} , les mini dipôles s'orientent le long des lignes de force

Moment dipolaire de plusieurs charges.

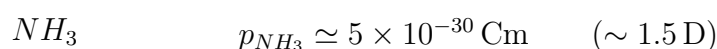
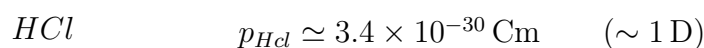
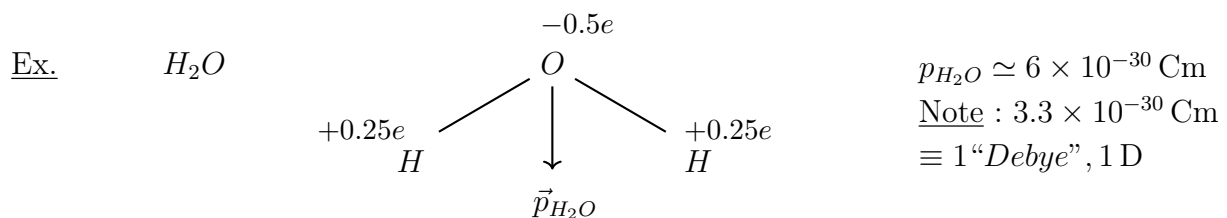
Ex. 3 charges
(=deux 'couples'
= deux dipôles)



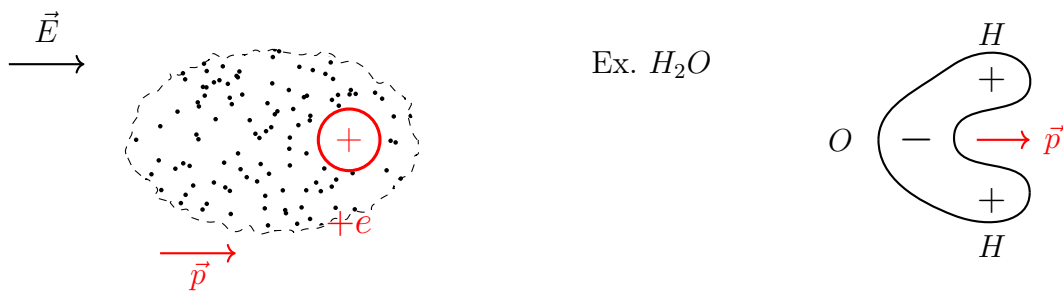
Les moments dipolaires se somment comme des vecteurs, et donnent lieu au moment dipolaire total, \vec{p}_{tot} .

Au niveau moléculaire, les charges sont de l'ordre de 'e', et les distances de l'ordre de 1 Å ($= 10^{-10}$ m).

Donc $p_{mol} \sim 10^{-10} \text{ m} \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \simeq 1.6 \times 10^{-29} \text{ Cm}$

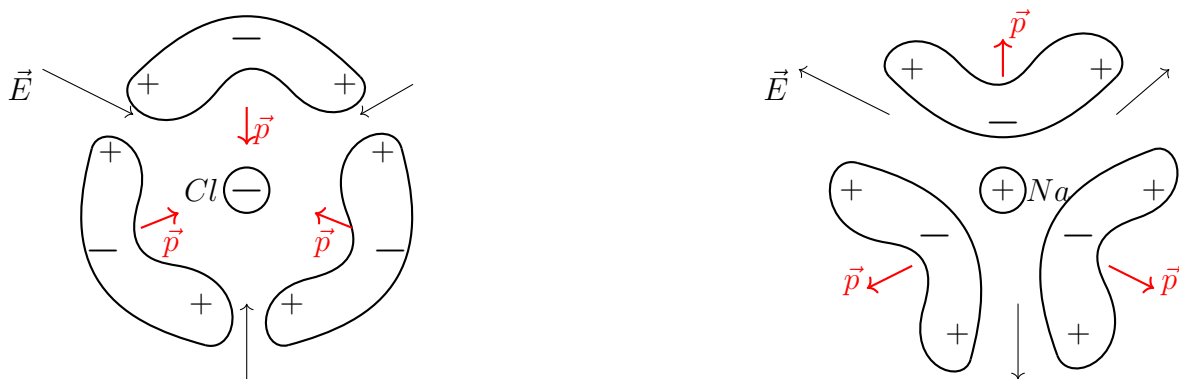


Note 1.11. Le moment dipolaire se forme car le nuage d'électrons est 'déplacé' par rapport au noyau.



Qu'est-ce qu'il se passe si on a des ions libres dans l'eau ? Comment s'orientent les molécules ?

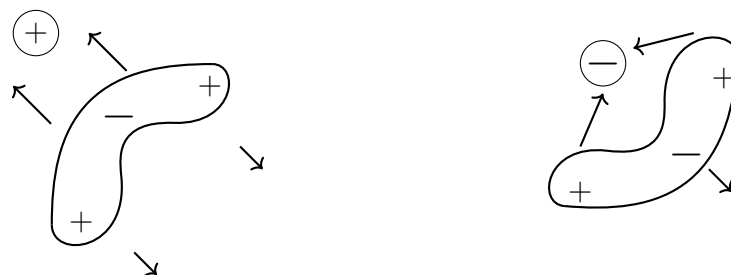
Ex. Solution saline de NaCl, qui dans l'eau se sépare en Na^+ , Cl^-



Naturellement, cette tendance à s'orienter dans le champ électrique est contrastée par l'agitation thermique. Il faudra comparer les énergies en jeu pour prévoir la situation ($k_B T$ vs. l'énergie du dipôle dans \vec{E}).

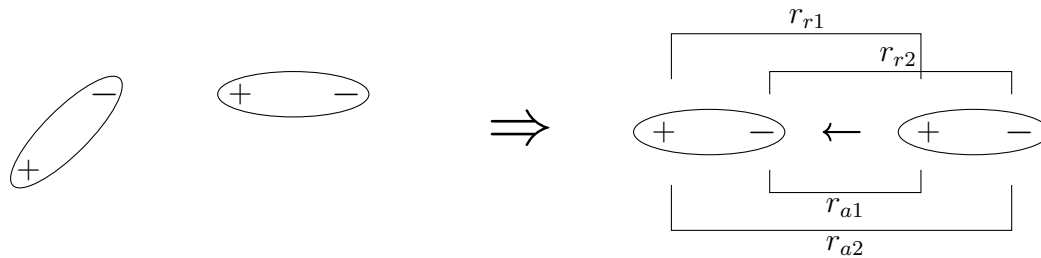
Interaction ion-eau

Comme le dipôle s'oriente le long du champ électrique, un ion générera toujours une force d'attraction sur la molécule d'eau (car la charge du signe opposé est plus proche).



Il aura donc la formation de 1-2 couches de molécules d'eau autour du ion, qui le rendront moins mobile (donc conductivité plus petite ou coefficient de diffusion plus petit). C'est comme si le "rayon" effectif du ion était augmenté en solution.

Interaction entre deux dipôles.

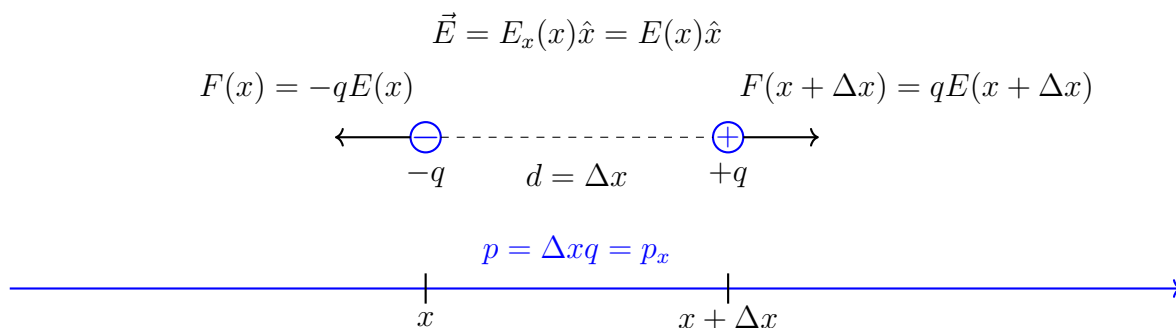


comme $F \sim 1/r^2$, l'attraction domine

Entre deux molécules avec dipôle, comme celles de l'eau, il y a donc attraction (faible, mais non nulle) \rightarrow force de Van der Waals.

🧐 Question 'piège' : on avait dit qu'il n'y aurait pas de force nette sur un dipôle ! Pourquoi y a-t-il une force entre deux dipôles ?

En effet, ces phénomènes sont la conséquence de la **force nette** qui se met en place lorsqu'un **dipôle él. est placé dans un champ non-uniforme**. Calculons-la dans le cas simple à 1-dimension.



Force nette sur dipôle

$$F = q[E(x + \Delta x)] - q[E(x)] = \underbrace{q\Delta x}_p \left[\frac{E(x + \Delta x) - E(x)}{\Delta x} \right] \underset{\text{si } \Delta x \rightarrow 0}{=} p \frac{dE}{dx} \quad \left(= p_x \frac{dE}{dx} \right) \quad (1.25)$$

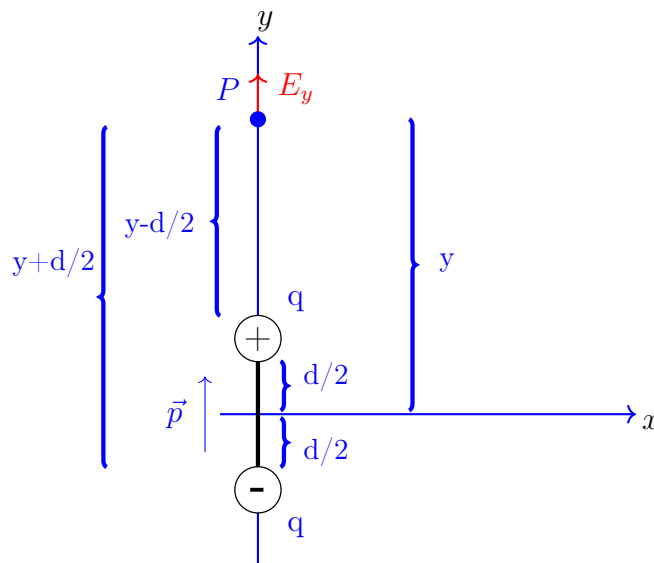
En général,

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} \quad (1.26)$$

Donc la force est présente uniquement en présence d'un champ non-uniforme.

Exemple de calcul de E : champ produit par un dipôle.

Un dipôle peut être vu comme source de champ électrique (par ex. une molécule d'eau produit un petit champ E). On veut calculer E_y au point P, avec $y \gg d$, sur l'axe y.



$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[\left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \right] \quad (1.27)$$

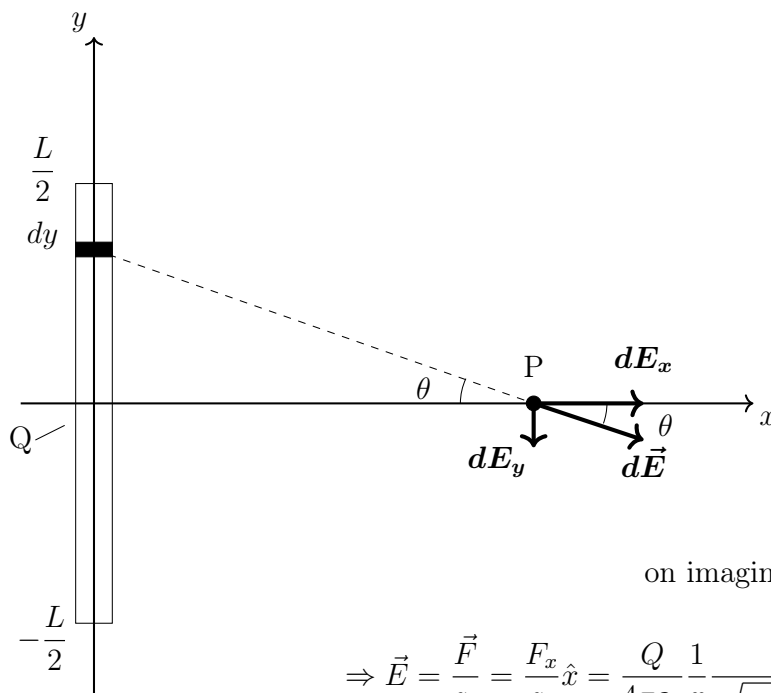
$$\begin{aligned} \text{Mais } \frac{d}{2y} \ll 1 &\Rightarrow \left(1 - \frac{d}{2y}\right)^{-2} \simeq 1 + 2\frac{d}{2y} = 1 + \frac{d}{y} \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{d}{2y}\right)^{-2} \simeq 1 - 2\frac{d}{2y} = 1 - \frac{d}{y} \\ &\Rightarrow E_y \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \left[1 + \frac{d}{y} - 1 + \frac{d}{y} \right] = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{y^3} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Note 1.12. $E \simeq \frac{1}{(\text{distance})^3}$

Note 1.13. $E \propto p$: si on mesure E on ne peut pas avoir d'informations indépendantes sur q ou d .

Note 1.14. La dépendance de la distance est $E \propto \frac{1}{(\text{distance})^3}$ même pour les points qui ne sont pas sur l'axe du dipôle.

Si on reprend la distribution linéaire de charge finie que nous avons vue pour le calcul de la force, et on interprète le résultat en termes de champ :



$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

E au point P ?
on imagine la charge-test q_0 au point P :

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{F_x}{q_0} \hat{x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}} \hat{x}$$

Si $x \gg L$, $E \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$ → si le point P est très loin du bâton (par rapport à la longueur), \vec{E} est le même que pour une charge ponctuelle.

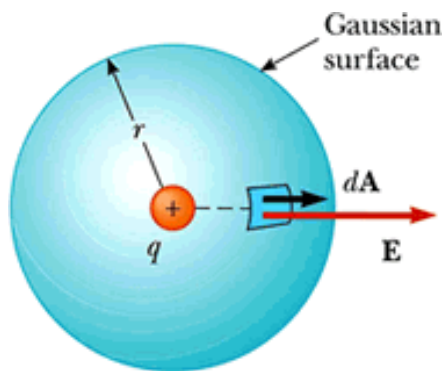
Si $x \ll L$, au contraire, $E \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \frac{1}{L} \stackrel{Q/L=\lambda}{=} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{x} \hat{x}$

⇒ Nous avons trouvé 3 dépendances du champ de la distance

- | | | |
|--------------------------------------|--|--|
| 1. Ligne de charge infiniment longue | | $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\text{distance}}$ |
| 2. Charge ponctuelle | | $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\text{distance}^2}$ |
| 3. Dipôle | | $E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\text{distance}^3}$ |

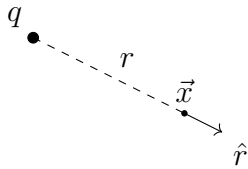
Chapitre 2

Loi de Gauss et ses conséquences

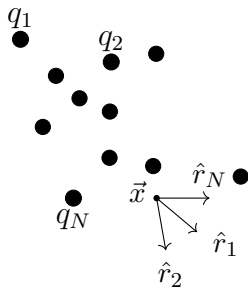


2.1 Le flux électrique

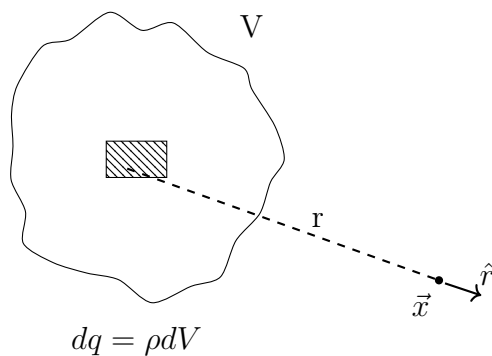
Rappel champ électrique



$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2.1)$$



$$\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_j}{r_j^2} \quad (2.2)$$



$$\vec{E}(\vec{x}) = \int_V \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (2.3)$$

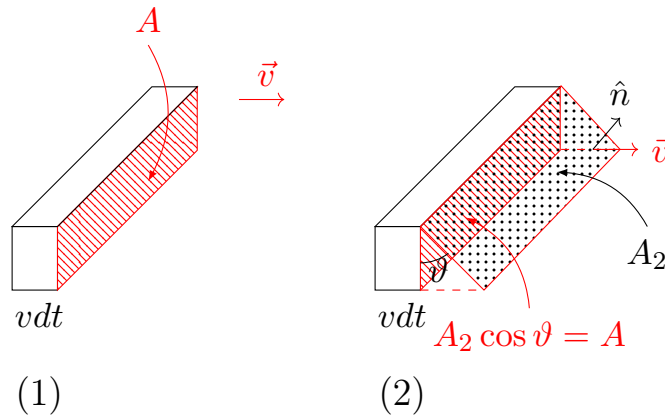
Nous avons progressé en électro-statique sur la base d'observations, par ex. l'existence de la charge et la force de Coulomb $\propto 1/r^2$.

Nous avons introduit le concept de champ pour séparer la source de la charge-test et calculer la “perturbation” de l'espace que la source produit, “prête” à exercer une force sur la charge.

Maintenant nous allons développer une méthode qui permet de calculer \vec{E} sans devoir partir de la définition pour une charge et faire une somme (ou une intégrale). De plus, en regardant les propriétés mathématiques de \vec{E} , on peut découvrir des nouvelles propriétés de \vec{E} .

Considérons l'eau qui s'écoule dans les océans. On y place un objet, par ex. un filet pour pêcher des petits poissons.

Question : quelle est la quantité d'eau qui passe à travers la surface A dans l'unité de temps ?



Volume qui passe dans l'unité de temps dt à travers A_1 :

$$(1) \quad dV = \underbrace{vdt}_{\text{longueur}} A \quad (2.4)$$

$$(2) \quad dV = vdt \underbrace{A_2 \cos \vartheta}_{\text{surface efficace}} = A \quad (2.5)$$

Si on définit le vecteur surface $\vec{A} = A\hat{n}$ (\hat{n} : vecteur normal unitaire), $dV = (\vec{v}dt) \cdot \vec{A}$, ou $\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$. C'est le flux d'eau, c'est-à-dire quantité d'eau qui passe à travers le filet en dt .

Note 2.1. $\frac{dV}{dt}$ (le *flux*) est une quantité scalaire.

Par analogie, on définit le flux électrique

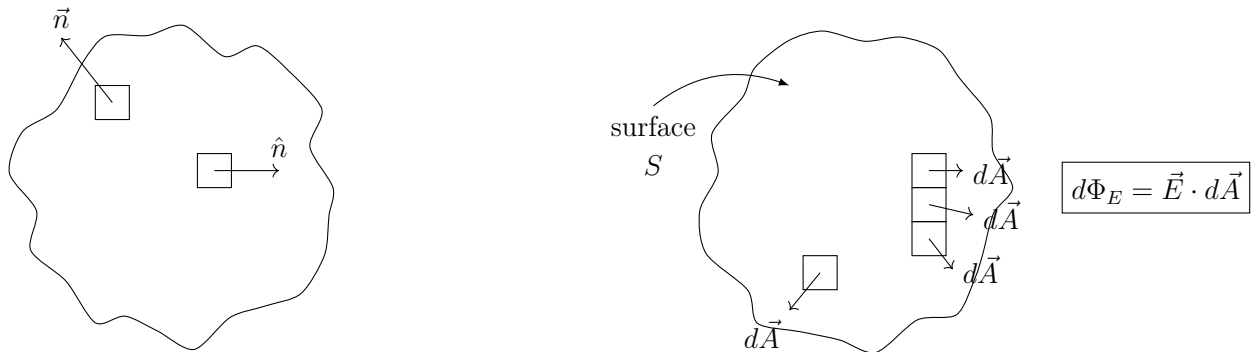
$$\Phi_E^A = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad \text{“flux de } \vec{E} \text{ à travers } \vec{A} \text{”} \quad (2.6)$$

C'est donc une mesure de la “quantité de champ” qui est interceptée par \vec{A} . Rien ne s'écoule, naturellement.

Note 2.2. • Pour le signe on prend la convention de choisir un côté de la surface

- Pour les surfaces fermées la normale est choisie vers l'extérieur
- Pour les surfaces compliquées (pas plates), on divise en petites surfaces infinitésimales $d\vec{A}$. Chaque $d\vec{A}$ est suffisamment petite qu'elle puisse être considérée plate.

Ex. de surface fermée et de forme arbitraire.



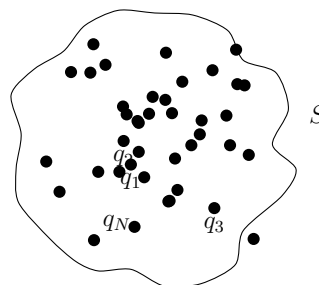
Flux total

$$\Phi_E = \oint_{\text{surface } S} d\Phi_E = \underbrace{\oint_{\text{surface } S}}_{\text{intégrale de surface}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.7)$$

2.2 La loi de Gauss (~ 1820)

Pout toute surface fermée S ,

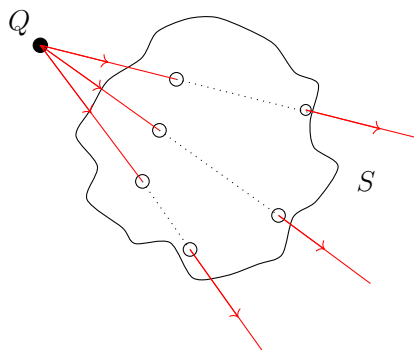
$$\Phi_E^S = \frac{Q_{\text{totale en } S}}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$



Ceci implique que le flux ne dépend pas $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'où exactement les charges se trouvent} \\ \text{de la forme de } S \end{array} \right.$

Preuve (en 4 étapes)

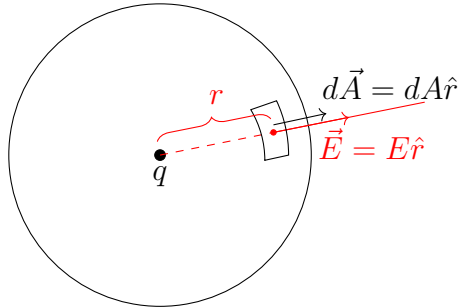
(1) la charge est à l'extérieur de la surface



chaque ligne de champ qui entre dans la surface S , sort de S . La somme de toutes les contributions qui rentrent dans la surface est égale à la somme de toutes les contributions qui sortent. Donc le flux net doit être nul.

$$Q_{\text{en } S} = 0 \iff \Phi_E^S = 0$$

(2) charge ponctuelle au centre d'une sphère S (ex. $q > 0$)



$$\Phi_E^S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (2.9)$$

mais

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (2.10)$$

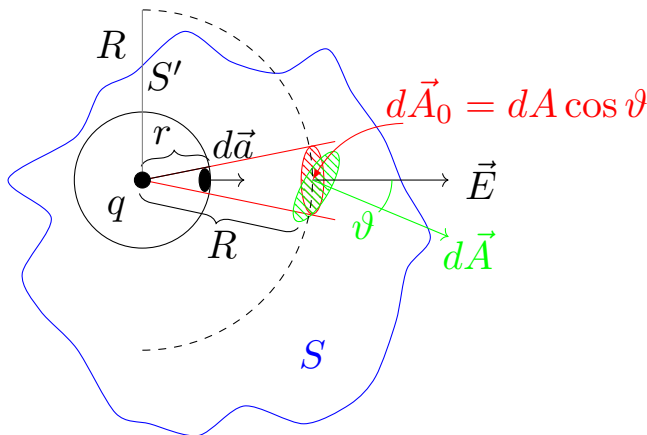
$$\Phi_E^S = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot d\vec{A}}_{\hat{r} \parallel d\vec{A}} = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dA;$$

mais $r = \text{const.}$ sur la surface de la sphère !

$$\Phi_E^S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \underbrace{\oint_S dA}_{\text{surface totale de la sphère}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

Note 2.3. Point clé est l'exacte dépendance de $E \propto \frac{1}{r^2}$ (loi de Coulomb).

(3) charge ponctuelle q dans surface arbitraire S



On inscrit la sphère S' , de rayon r , qui est centrée sur q , et est à l'intérieur de S .

On veut montrer que le flux à travers S' est le même qu'à travers S .

Flux à travers $d\vec{A}$:

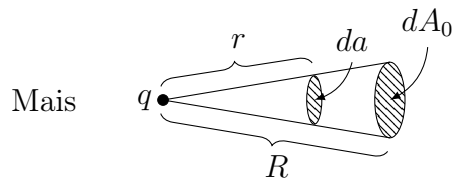
$$d\Phi_E^{dA} = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(R) \overbrace{dA \cos \vartheta}^{dA_0} = E(R) dA_0 \quad (2.12)$$

Mais

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \Rightarrow d\Phi_E^{dA} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} dA_0 \quad (2.13)$$

Flux à travers $d\vec{a}$:

$$d\Phi_E^{da} = \vec{E} \cdot d\vec{a} = E(r) da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} da \quad (2.14)$$



géométrie :

$$\frac{da}{r^2} = \frac{dA_0}{R^2} \quad (2.15)$$

(c'est même la définition de l'angle solide)

Donc :

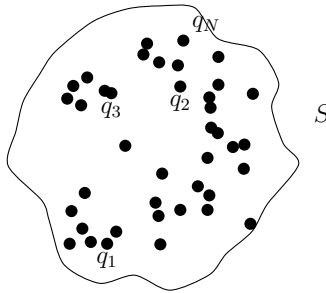
$$d\Phi_E^{dA} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{dA_0}{R^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{da}{r^2} \right] = d\Phi_E^{da} \quad (2.16)$$

pour n'importe quels da , dA , et donc aussi pour les sommes ou intégrales sur da , dA

$$\Rightarrow \Phi_E^S = \Phi_E^{S'} = (\text{de la partie (2)}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.17)$$

(4) Plusieurs charges en S

On applique le principe de superposition :



$$\begin{aligned} \Phi_E^S &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \sum_{j=1, \dots, N} \vec{E}_j \cdot d\vec{A} \\ &= \sum_{j=1, \dots, N} \oint_S \vec{E}_j \cdot d\vec{A} \stackrel{(3)}{=} \sum_{j=1, \dots, N} \frac{q_j}{\epsilon_0} \\ &= \frac{Q_{\text{totale in } S}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

□

La loi de Gauss donne une relation entre le champ \vec{E} et Q , donc entre le champ et sa source

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{en } S}}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

 \forall toute surface fermée S

Cela donne une façon de calculer \vec{E} qui peut être bien plus simple que l'application de la définition, car S est une surface mathématique que nous pouvons choisir arbitrairement. Quels sont nos choix pour simplifier le calcul de \vec{E} (ou de Q à partir de \vec{E}) ?

Idées pour simplifier $\Phi_E^S = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$$(1) \text{ choisir } \vec{E} \cdot d\vec{A} \text{ de façon à éviter une dépendance de } \vartheta \quad \begin{cases} \vec{E} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \\ \vec{E} \perp d\vec{A} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \end{cases}$$

(2) utiliser la symétrie

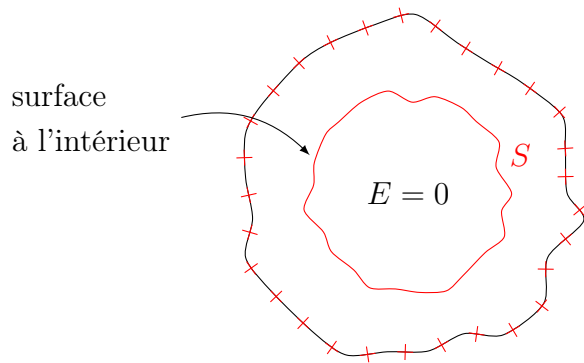
(3) choisir surfaces S simples à calculer (sphères, cylindres, ...)

Ex. de calcul et de conséquence expérimentale

Ici on trouve Q à partir de \vec{E} .

Conducteur sur lequel on place de la charge (par ex. positive) : où est-ce que la charge va aller ?

Dans un conducteur, $E = 0$ (en électro-statique)



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{E}_S = 0 \quad (2.20)$$

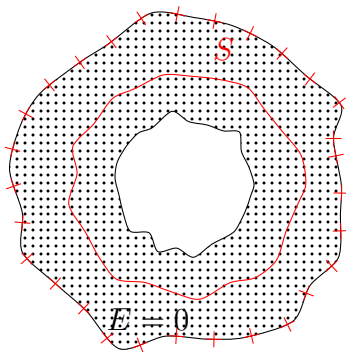
pour toute surface S fermée à l'intérieur du conducteur.

Mais

$$\Phi_E^S = \frac{Q_{en\ S}}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.21)$$

\Rightarrow aucune nette charge ne peut être présente en S ! $Q_{en\ S} = 0 \quad \forall S \Rightarrow$ la charge ne peut être située que sur la surface externe !

Qu'est-ce qu'il se passe si le conducteur est creux (vide à l'intérieur) ?



$$\Phi_E^S = 0 = \frac{Q_{en\ S}}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

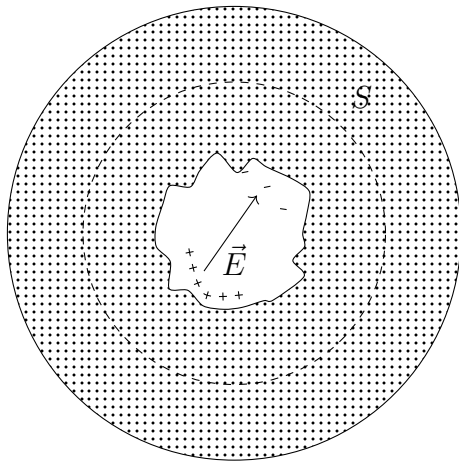
\Rightarrow la même conclusion qu'avant ! (à moins de mettre la charge directement dans le trou central)

2.3 Conséquences de la loi de Gauss

Cette propriété de la charge qui ne peut qu'être distribuée sur la surface externe d'un conducteur a des implications pratiques importantes : écranage électrostatique et cage de Faraday.

Idée : utiliser un conducteur creux pour écranter tout champ électrostatique. Ecranter de l'extérieur vers l'intérieur et vice-versa.

Cage de Faraday



En principe, il pourrait y avoir des charges sur la surface interne, \oplus et \ominus en nombre égal, car $Q_{en\ S} = 0$.

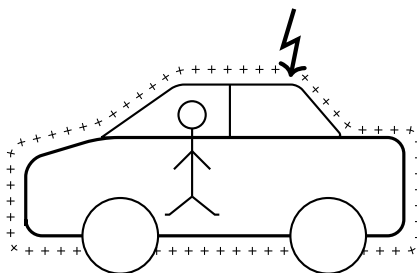
Mais comme on a un conducteur, le champ \vec{E} qui se mettrait en place ferait immédiatement bouger les charges (qui peuvent bouger sur un conducteur), qui se neutraliseraient.

Autre façon de décrire le principe de la cage de Faraday :

Si un conducteur creux est placé dans un champ électrique, les charges se redistribuent sur sa surface externe de façon à ce qu'aucun champ \vec{E} ne serait ressenti à l'intérieur. Une distribution externe de charge ne peut pas produire de charges dans la cavité. Et une distribution de charges dans la cavité ne peut pas produire un champ à l'extérieur.

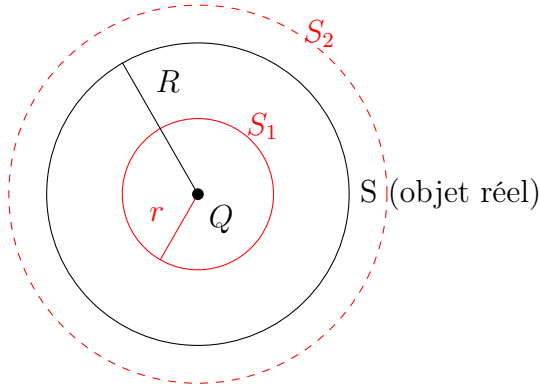
Note 2.4. Toutes ces considérations sont des conséquences de la loi de Coulomb, $F \propto \frac{1}{r^2}$.

L'écranage électrostatique est la raison pour laquelle il est mieux de rester à l'intérieur de la voiture pendant un orage...



Ex. de calcul pour trouver E à partir de Q

(1) Q distribuée uniformément sur sphère, $\vec{E} = ?$



Note 2.5. *Comme on dit que Q est distribuée uniformément, la sphère ne peut pas être conductrice.*

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \text{const.} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (\text{assumons } Q > 0) \quad (2.23)$$

Choisir surface pour calculer le flux facilement : sphère concentrique avec S ; où ? \Rightarrow où nous voulons calculer \vec{E} !

S_1 et S_2 sont des objets mathématiques, r : rayon générique.

Symétrie : \vec{E} ne peut être que radial (il n'y a aucune direction privilégiée)

$$r < R : \quad \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{S_1} E(r) dA = E(r) \oint_{S_1} dA = E(r) 4\pi r^2 \underset{\text{Gauss}}{=} \frac{Q_{\text{en } S_1}}{\varepsilon_0} \quad (2.24)$$

quelle est la charge contenue en S_1 ?

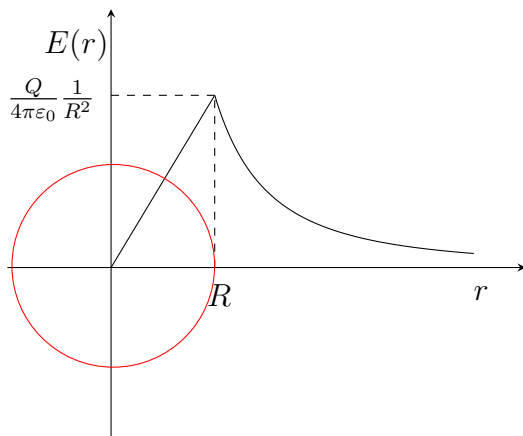
Comme $\rho = \frac{dq}{dV} = \text{const.}$,

$$Q_{\text{en } S_1} = \rho V(S_1) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r} \quad r \leq R$$

$$r > R : \quad \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{en } S_2}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{en } S}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}} \quad (\text{comme pour une charge ponctuelle})$$



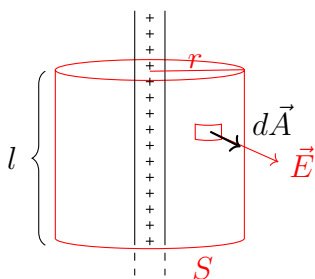
Note 2.6. Si on place une charge \ominus dans la sphère, elle sera sujette à une force \propto distance du centre

→ comme un ressort, donc on s'attend un mouvement harmonique

Autres exemple de calcul du champ en symétrie cylindrique

(2) Fil infini uniformément chargé

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \text{const.} \quad (2.26)$$

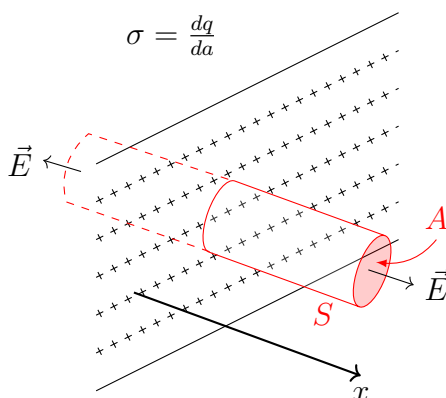


$$\Phi_E^S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \underbrace{2\pi r l}_{\text{surface}} = \frac{\overbrace{Q_{en S}}^{\lambda l}}{\varepsilon_0} \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}} \quad (2.28)$$

(on se rappelle du calcul à travers la définition de E , bien plus compliqué)

(3) Plan infini (d'épaisseur nulle) uniformément chargé



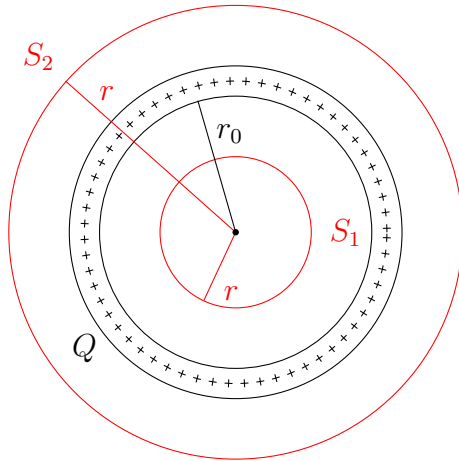
$$\Phi_E^S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(x) \underbrace{2A}_{\text{surface}} = \frac{\overbrace{Q_{en S}}^{\sigma A}}{\varepsilon_0} \quad (2.29)$$

car on doit considérer les deux côtés

$$\Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \quad (2.30)$$

(4) Coquille sphérique uniformément chargée (d'épaisseur négligeable)

$$\Phi_E^S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \frac{Q}{\varepsilon_0} & r > r_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} Q_{\text{en } S_1} = 0 \\ Q_{\text{en } S_2} = Q \end{array}$$



$$\Rightarrow E(r) = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} & r > r_0 \end{cases} \quad (2.31)$$

