

Analyse III  
Prof. Olivier Mila — EPFL

Notes par Joachim Favre

Bachelor d'informatique — Semestre 3  
Automne 2022



J'ai fait ce document pour mon usage, mais je me suis dit que des notes dactylographiées pouvaient intéresser d'autres personnes. Ainsi, je l'ai partagé (à vous, si vous lisez ces lignes!) ; puisque cela ne me coûtait rien. Je vous demande simplement de garder en tête qu'il y a des erreurs, c'est impossible de ne pas en faire. Si vous en trouvez, n'hésitez pas à me les partager (les erreurs de grammaires et de vocabulaires sont naturellement aussi bienvenues). Vous pouvez me contacter à l'adresse e-mail suivante :

`joachim.favre@epfl.ch`

Si vous n'avez pas obtenu ce document par le biais de mon repo GitHub, vous serez peut-être intéressé par le fait que j'en ai un sur lequel je mets mes notes dactylographiées. Voici le lien (allez regarder dans la section "Releases" pour trouver les documents compilés) :

<https://github.com/JoachimFavre/EPFLNotesIN>

Notez que le contenu ne m'appartient pas. J'ai fait quelques modifications de structure, j'ai reformulé certains bouts, et j'ai ajouté quelques notes personnelles ; mais les formulations et les explications viennent principalement de la personne qui nous a donné ce cours, et du livre dont elle s'est inspirée.

Je pense qu'il est intéressant de préciser que, pour avoir ces notes dactylographiées, j'ai pris mes notes en  $\text{\LaTeX}$  pendant le cours, puis j'ai fait quelques corrections. Je ne pense pas que mettre au propre des notes écrites à la main est faisable niveau quantité de travail. Pour prendre des notes en  $\text{\LaTeX}$ , je me suis inspiré du lien suivant, écrit par Gilles Castel. Si vous voulez plus de détails, n'hésitez pas à me contacter à mon adresse e-mail, mentionnée ci-dessus.

<https://castel.dev/post/lecture-notes-1/>

Je tiens aussi à préciser que les mots "trivial" et "simple" n'ont, dans ce cours, pas la définition que vous trouvez dans un dictionnaire. Nous sommes à l'EPFL, rien de ce que nous faisons n'est trivial. Quelque chose de trivial, c'est quelque chose que quelqu'un pris de manière aléatoire dans la rue serait capable de faire. Dans notre contexte, comprenez plutôt ces mots comme "plus simple que le reste". Aussi, ce n'est pas grave si vous prenez du temps à comprendre quelque chose qui est dit trivial (surtout que j'adore utiliser ce mot partout hihi).

Puisque vous lisez ces lignes, je vais me permettre de vous donner un petit conseil. Le sommeil est un outil bien plus puissant que ce que vous pouvez imaginer, donc ne négligez jamais une bonne nuit de sommeil au profit de vos révisions (particulièrement la veille de l'examen). Je vais aussi me permettre de paraphraser mon enseignante de philosophie du gymnase, Ms. Marques, j'espère que vous vous amuserez en faisant vos examens !



*À Gilles Castel, dont le travail m'a  
inspiré cette méthode de prise de note.*

*Repose en paix, personne ne  
mérite de partir si jeune.*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Résumé par cours</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Rappels</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>Opérateurs différentiels</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Intégrales curvilignes</b>	<b>21</b>
4.1	Courbes . . . . .	21
4.2	Intégrales curvilignes . . . . .	24
4.3	Champs qui dérivent d'un potentiel . . . . .	26
4.4	Théorème de Green . . . . .	32
4.5	Théorème de la divergence sur le plan . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Intégrales de surfaces</b>	<b>41</b>
5.1	Surfaces . . . . .	41
5.2	Intégrales de surface . . . . .	44
5.3	Théorème de la divergence dans l'espace . . . . .	47
5.4	Théorème de Stokes . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>57</b>
6.1	Utilité de la théorie . . . . .	57
6.2	Séries de Fourier . . . . .	57
6.3	Séries de Fourier en sinus et en cosinus . . . . .	65
6.4	Application aux EDO . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Transformées de Fourier</b>	<b>71</b>
7.1	Transformées de Fourier . . . . .	71
7.2	Produit de convolution . . . . .	78
7.3	Application à des équations fonctionnelles . . . . .	80
<b>8</b>	<b>Résumé</b>	<b>85</b>
8.1	Opérateurs différentiels . . . . .	85
8.2	Intégrales curvilignes . . . . .	85
8.3	Intégrales de surfaces . . . . .	87
8.4	Séries de Fourier . . . . .	88
8.5	Transformées de Fourier . . . . .	88





# Liste des cours

<b>Cours 1 : Un vecteur d'opérateurs</b> — Lundi 26 septembre 2022 . . . . .	<b>15</b>
<b>Cours 2 : Des courbes</b> — Lundi 3 octobre 2022 . . . . .	<b>21</b>
<b>Cours 3 : Des notions à haut potentiel</b> — Lundi 10 octobre 2022 . . . . .	<b>26</b>
<b>Cours 4 : La gauche c'est positif</b> — Lundi 17 octobre 2022 . . . . .	<b>30</b>
<b>Cours 5 : Théorème de la divergence en deux dimensions</b> — Lundi 24 octobre 2022 . . . .	<b>35</b>
<b>Cours 6 : On passe aux surfaces</b> — Lundi 31 octobre 2022 . . . . .	<b>40</b>
<b>Cours 7 : I'm in space</b> — Lundi 7 novembre 2022 . . . . .	<b>45</b>
<b>Cours 8 : J'aime bien cette date</b> — Lundi 14 novembre 2022 . . . . .	<b>50</b>
<b>Cours 9 : D'autres choses trop bien</b> — Lundi 21 novembre 2022 . . . . .	<b>57</b>
<b>Cours 10 : L'identité de Provençal le Gaulois</b> — Lundi 28 novembre 2022 . . . . .	<b>63</b>
<b>Cours 11 : Transformées de Fourier</b> — Lundi 5 décembre 2022 . . . . .	<b>71</b>
<b>Cours 12 : On fait comme s'il n'y avait pas de problème</b> — Lundi 12 décembre 2022 . . .	<b>77</b>
<b>Cours 13 : Venez tous en Analyse IV</b> — Lundi 19 décembre 2022 . . . . .	<b>82</b>



# Chapitre 1

## Résumé par cours

### Cours 1 : Un vecteur d'opérateurs — Lundi 26 septembre 2022 \_\_\_\_\_ p. 15

- Rappel des ensembles de nombres, des espaces euclidiens, du produit scalaire et de son application pour calculer une norme et une distance, des ensembles ouverts, fermés et bornés, des fonctions et champs vectoriels, des graphiques de fonctions et de la continuité.
- Définition du gradient, du Laplacien, de la divergence et du rotationnel.
- Explication et preuve d'un théorème reliant ces notions.

### Cours 2 : Des courbes — Lundi 3 octobre 2022 \_\_\_\_\_ p. 21

- Définition de courbe régulière, simple, fermée et par morceaux.
- Définition des intégrales curvilignes, sur des champs scalaires et vectoriels.

### Cours 3 : Des notions à haut potentiel — Lundi 10 octobre 2022 \_\_\_\_\_ p. 26

- Définition de fonctions qui dérivent de potentiel.
- Preuve que l'intégrale d'un champ vectoriel qui dépend d'un potentiel ne dépend que de son point de départ et de son point d'arrivée.
- Explication de comment montrer qu'un champ dérive d'un potentiel, et preuve de 2 théorèmes sur ce sujet.

### Cours 4 : La gauche c'est positif — Lundi 17 octobre 2022 \_\_\_\_\_ p. 30

- Beaucoup d'exemples de champs qui dérivent et qui ne dérivent pas de potentiels.
- Définition de bord, d'adhérence et de domaine régulier.
- Explication et preuve du théorème de Green.

### Cours 5 : Théorème de la divergence en deux dimensions — Lundi 24 octobre 2022 \_\_\_\_\_ p. 35

- Preuve d'un corollaire du théorème de Green permettant de calculer l'aire d'un domaine.
- Définition de la normale extérieure, et preuve d'une proposition permettant de la calculer.
- Explication et preuve du théorème de la divergence dans  $\mathbb{R}^2$ .
- Utilisation du théorème de la divergence dans  $\mathbb{R}^2$  pour calculer une intégrale.

**Cours 6 : On passe aux surfaces** — Lundi 31 octobre 2022 — p. 40

- Définition de la surface.
- Explication des trois représentations des surfaces, et du passage de l'une à l'autre.
- Définition de surface régulière et de surface régulière par morceaux.
- Définition des intégrales de champ scalaires et de champs vectoriels sur des surfaces.

**Cours 7 : I'm in space** — Lundi 7 novembre 2022 — p. 45

- Jouez à Portal (en anglais).
- Définition de surface orientable, et explication d'un exemple.
- Définition de domaine régulier et de champ de normales extérieures.
- Explication du théorème de la divergence dans  $\mathbb{R}^3$ , et explication d'un exemple.

**Cours 8 : J'aime bien cette date** — Lundi 14 novembre 2022 — p. 50

- Définition du bord d'une surface.
- Explication du théorème de Stokes, et d'un de ses corollaires.
- Beaucoup d'exemples.

**Cours 9 : D'autres choses trop bien** — Lundi 21 novembre 2022 — p. 57

- Définition de fonctions périodiques, et d'extension en  $T$ -périodicité.
- Définition de fonctions continues et différentiables par morceaux.
- Explication et justification de la formule des coefficients de la série de Fourier complexe.
- Explication et justification de la formule des coefficients de la série de Fourier réel.
- Justification que la série de Fourier complexe et la série de Fourier réel sont le même objet.

**Cours 10 : L'identité de Provençal le Gaulois** — Lundi 28 novembre 2022 — p. 63

- Il faut regarder Kaamelott, c'est une série très sympa.
- Explication et preuve de l'identité de Parseval.
- Définition des séries de Fourier en sinus et en cosinus.
- Explication de comment calculer les coefficients de Fourier d'une fonction à partir de ceux de sa dérivée, et de comment l'appliquer à la résolution d'équation différentielles ordinaires.

**Cours 11 : Transformées de Fourier** — Lundi 5 décembre 2022 — p. 71

- Définition des transformées de Fourier.
- Définition des transformées inverses de Fourier, et explication du théorème de la formule d'inversion.
- Explication des propriétés des transformées de Fourier.

**Cours 12 : On fait comme s'il n'y avait pas de problème** — Lundi 12 décembre 2022 — p. 77

- Définition du produit de convolution.
- Explication des propriétés du produit de convolution.
- Preuve du lien entre produits de convolutions et produits avec les transformées de Fourier.

- Application des transformées de Fourier à la résolution d'équations différentielles et fonctionnelles.

**Cours 13 : Venez tous en Analyse IV** — Lundi 19 décembre 2022 \_\_\_\_\_ *p. 82*

- Application des transformées de Fourier à l'équation de la chaleur.
- Résumé du cours.



## Chapitre 2

# Rappels

**Nombres** Nous considérons les 5 ensembles de nombres suivants :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

nommés les nombres naturels, nombres entiers relatifs, les nombres rationnels, les nombres réels et les nombres complexes, respectivement.  
 Notez que, dans ce cours  $0 \in \mathbb{N}$ .

**Espace Euclidien** Nous allons principalement considérer l'espace Euclidien suivant :

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

En particulier, nous avons :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

*Remarque  
personnel*

Dans ce cours, le Professeur n'écrit pas les vecteurs de manière différente sur le tableau et dans les séries d'exercices (en les soulignant, en mettant une flèche dessus ou avec du gras), je ne vais donc pas le faire non plus.  
 Notez que c'est relativement cohérent puisque nous notons par exemple les matrices et les ensembles sans aucune notation spéciale, cela paraît presque un peu incohérent de garder une notation différente pour les vecteurs.

**Produit scalaire** Soient  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , alors nous définissons leur **produit scalaire** comme :

$$x \bullet y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Cela nous permet aussi de définir une **norme** :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x \bullet x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Ce qui nous aide à définir une **distance** :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**Ensemble ouvert**  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  est un **ensemble ouvert** si  $\forall x \in \Omega, \exists r > 0$  tel que :

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n | d(x, y) < r\} \subseteq \Omega$$

Ceci nous permet de définir les **ensembles fermés** : un ensemble est fermé s'il est le complémentaire d'un ouvert (le complémentaire de  $E \subset \mathbb{R}^n$  est donné par  $\mathbb{R}^n \setminus E$ ).

*Intuition* En d'autres mots, un ensemble est ouvert si on peut mettre une boule ouverte autour de n'importe quel point. En particulier, un ensemble ouvert n'a pas de bord.

*Notation* Dans ce cours, nous noterons toujours les ensembles ouverts par  $\Omega$ .

**Ensemble borné** Un ensemble  $F$  est borné s'il existe un  $R > 0$  tel que :

$$F \subset B_R(0)$$

En d'autres mots, notre ensemble est inclus dans une boule avec un rayon suffisamment grand.

**Fonctions et champs vectoriels**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , alors la fonction suivante est un champ scalaire (elle prend un vecteur et donne un scalaire) :

$$\begin{aligned} f : \Omega &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

La fonction suivante est un champ vectoriel :

$$\begin{aligned} F : \Omega &\mapsto \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x)) \end{aligned}$$

**Graphique d'une fonction**

*Champ scalaire* Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  une fonction. Alors son graphique est donné par :

$$\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

Nous remarquons qu'il faut une dimension de plus pour dessiner le graphique d'une fonction.

*Champ vectoriel* Considérons maintenant  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ . Le problème est que c'est un objet à  $2n \geq 4$  dimension, il n'est donc pas facile de le représenter en moins de 3 dimensions. Cependant, nous pouvons dessiner notre champ vectoriel en dessinant des vecteurs à un certain nombre de points du plans (pas tous puisque ce ne serait pas lisible).

**Continuité et différentiabilité**

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert. Nous définissons les **classes** :

$$C^0(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R} | f \text{ est continue}\}$$

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R} | \text{toutes les dérivées partielles d'ordre } \leq k \text{ existent et sont continues}\}$$

Nous pouvons généraliser ces idées à des champs vectoriels, pour tout  $k \geq 0$  :

$$C^k(\Omega; \mathbb{R}^n) = \{F = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n | F_i \in C^k(\Omega)\}$$

On peut remarquer que :

$$C^k(\Omega; \mathbb{R}) = C^k(\Omega)$$



## Chapitre 3

# Opérateurs différentiels

**Notation** Dans ce chapitre,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est toujours un ensemble ouvert.

**Définition : Gradient** Soit  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  une fonction. Le **gradient** de  $f$  est :

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Nous voyons que cela nous donne une nouvelle fonction  $\nabla f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ .

*Remarque* Dans la littérature, il existe aussi les notations suivantes :

$$\nabla f = \text{grad } f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \partial_1 f = D_{x_1} f = \partial_{x_1} f = \dots$$

*Classes* Nous pouvons remarquer que si  $f \in C^1(\Omega)$ , alors  $\nabla f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

*Exemple* Soit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Alors nous avons  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ .

*Interprétation* Le gradient pointe dans la direction où la fonction croît le plus. Aussi, en physique, le gradient d'une énergie potentielle est une force :

$$\nabla E_{\text{pot}, G} = \nabla \frac{GmM}{\|(x, y, z)\|} = \frac{GMm}{\|(x, y, z)\|^2} \frac{-(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|} = F_G$$

**Définition Laplacien** : Soit  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  une fonction. Le **Laplacien** de  $f$  est :

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \in \mathbb{R}$$

Nous voyons que cela nous donne une nouvelle fonction  $\Delta f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ .

*Classes* Nous pouvons voir que, si  $f \in C^2(\Omega)$ , alors  $\Delta f \in C^0(\Omega)$ .

*Exemple* Soit la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Nous avons alors :

$$\Delta f(x, y) = 2 + 2 = 4$$

**Définition Divergence**

: Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $F = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ , alors la **divergence** de  $F$  est définie par :

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \in \mathbb{R}$$

Nous voyons que cela nous une nouvelle fonction  $\operatorname{div} F \in C^0(\Omega)$ .

*Notation*

Nous pouvons définir le **nabla** de la manière suivante, ce qui reste cohérent avec la définition du gradient :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

ce qui est un vecteur d'opérateurs.

Alors, nous pouvons définir notre divergence comme :

$$\operatorname{div} F(x) = \nabla \bullet F = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \bullet (F_1, \dots, F_n)$$

*Classes*

Nous pouvons voir que, si  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , alors  $\operatorname{div} F \in C^0(\Omega)$ .

*Exemple*

Prenons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3) \end{aligned}$$

Alors, nous avons :

$$\operatorname{div} F = 1 + 2y + 3z^2$$

*Note personnelle : Interprétation*

Considérons un champ vectoriel représentant la vitesse de particules d'un fluide. Si nous considérons une boule de rayon infinitésimal dans l'espace avec ce fluide, la divergence à un point représente la quantité de fluide qui rentre moins celle qui sort de cette sphère. Ainsi, par exemple, si nous avons un liquide incompressible, alors la divergence est nulle partout. Si nous avons une source à un endroit, alors la divergence est positive, si nous avons un puits, alors elle est négative.

Je vous recommande vivement cette vidéo de 3Blue1Brown afin de mieux comprendre cette notion :

<https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE>

**Définition : Rotationnel**

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $F = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ .

Si  $n = 2$ , alors le **rotationnel** de  $F$  est donné par :

$$\operatorname{rot} F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \in \mathbb{R}$$

Si  $n = 3$ , alors il est donné par :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x) &= "(\operatorname{rot} F_{23}, \operatorname{rot} F_{31}, \operatorname{rot} F_{12})" \\ &= \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \right) \end{aligned}$$

Si  $n \geq 4$ , on ne l'utilise pas dans ce cours (même s'il existe une définition).

On remarque qu'en deux dimensions c'est un scalaire mais en trois c'est un vecteur.

*Notation*

Pour  $n = 3$ , nous pouvons noter :

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \nabla \wedge F = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1, F_2, F_3)$$

Afin de mémoriser le cas de  $n = 2$ , nous pouvons remarquer que c'est simplement la troisième composante du cas  $n = 3$ .

*Exemple*

Prenons la fonction suivante :

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \left( -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Nous obtenons ainsi que :

$$\operatorname{rot} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

En continuant de travailler, nous pouvons obtenir :

$$\operatorname{rot} F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

*Note personnelle : Interprétation*

Considérons à nouveau un champ vectoriel représentant les vitesses de particules de fluide dans un espace. Si nous considérons une sphère de rayon infinitésimal à un point, et que nous considérons des frottement entre le fluide et la sphère, alors celle-ci va commencer à tourner et le rotationnel est son vecteur vitesse angulaire. À nouveau, je vous recommande vivement cette vidéo de 3Blue1Brown afin de mieux comprendre cette notion :

<https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE>

## Remarque

Le plus grand intérêt de ces notions est les lois de Maxwell, que nous verrons en électromagnétisme :

$$\nabla \bullet E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \bullet B = 0, \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

où  $B$  est un champ magnétique et  $E$  un champ électrique.

## Théorème

Soient  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert,  $f \in C^2(\mathbb{R})$  un champ scalaire, et  $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  un champ vectoriel, alors :

1.  $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$
2.  $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$ , si  $n = 2, 3$
3.  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$ , si  $n = 3$
4.  $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \bullet \nabla f$

Remarquez que la troisième équation ne ferait même pas de sens pour  $n = 2$ , puisque la divergence prend un champ vectoriel en entrée.

*Note personnelle : Intuition*

Pour comprendre intuitivement le deuxième et le troisième point, j'ai personnellement beaucoup apprécié le *thread* suivant (où beaucoup des explications sont basées sur le théorème de la divergence et celui de Green/Stokes, présentés dans la suite du cours) :

<https://math.stackexchange.com/questions/26854>

Personnellement, pour le point 2 je trouve très intuitif la phrase : "you can't walk from home to school and back and have gone uphill both ways". Pour le point 3, ce qui me paraît le plus intéressant est que la frontière d'un volume est une surface fermée qui n'a pas de bord, ce qui donne forcément 0 par le théorème de la divergence puis celui de Stokes.

*Preuve 1*

Nous avons :

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f) = \partial_{x_1} \partial_{x_1} f + \dots + \partial_{x_n} \partial_{x_n} f = \Delta f$$

*Preuve 2*Posons  $n = 2$ . Nous trouvons que :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\nabla f) &= \operatorname{rot}(\partial_x f, \partial_y f) \\ &= \partial_x \partial_y f - \partial - y \partial_x f \\ &= \partial_x \partial_y f - \partial_x \partial_y f \\ &= 0\end{aligned}$$

Le cas  $n = 3$ , et la preuve pour les troisièmes et quatrièmes points seront faites dans la deuxième série.

□

## Chapitre 4

# Intégrales curvilignes

### 4.1 Courbes

**Définition** : Un sous-ensemble  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  est une **courbe régulière** s'il existe une fonction :  
**Courbe régulière**

$$\begin{aligned}\gamma : [a, b] &\longmapsto \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))\end{aligned}$$

Telle que :

1.  $\gamma([a, b]) = \Gamma$  où  $\gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [a, b] \text{ avec } \gamma(t) = x\}$ .
2.  $\gamma \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^n) \cap C^1(]a, b[; \mathbb{R}^n)$  ; donc elle est continue et différentiable.
3.  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

Un tel  $\gamma$  s'appelle une paramétrisation de  $\Gamma$ .

*Remarques*

Le point 3 est équivalent à  $\gamma'(t) \neq (0, \dots, 0)$  pour tout  $t \in [a, b]$ .  
 Moralement,  $\gamma$  représente un point qui se déplace sur la courbe  $\Gamma$ .  
 On trouve ainsi que  $t$  c'est le temps,  $\gamma(t)$  c'est la position au temps  $t$ , et  $\gamma'(t)$  c'est la vitesse. Donc,  $\gamma'(t) \neq 0$  veut dire qu'on ne s'arrête jamais.

**Exemple**

Nous voulons savoir si le demi-cercle  $\Gamma$  de rayon 1, sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ , est une courbe régulière. Pour cela, nous devons trouver une paramétrisation.  
 Nous pouvons utiliser les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\gamma : [0, \pi] &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t))\end{aligned}$$

Calculons la norme de la dérivée :

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \implies \|\gamma'(t)\|^2 = 1 \neq 0$$

Nous obtenons donc bien que  $\Gamma$  est une courbe régulière.

*Remarque*

Nous remarquons qu'une courbe  $\Gamma$  peut avoir plusieurs paramétrisations. Nous aurions pu considérer, pour la même courbe :

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} : [-1, 1] &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)\end{aligned}$$

Nous avons bien  $\bar{\gamma}([a, b]) = \Gamma$  car  $\Gamma$  est le graphe de  $\sqrt{1-t^2}$ . Nous obtenons aussi :

$$\bar{\gamma}'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \Rightarrow \bar{\gamma}'(t) \neq 0$$

C'est donc aussi une paramétrisation du cercle, mais sa "vitesse" n'est cependant pas constante.

**Définition** : Une courbe régulière  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  est **simple** s'il existe une paramétrisation  $\gamma : [a, b] \mapsto \Gamma$  telle que, pour tout  $s, t \in [a, b]$ , nous avons :

**Courbe régulière simple**

$$\gamma(s) = \gamma(t) \Rightarrow \begin{cases} s = a, t = b \\ s = b, t = a \\ s = t \end{cases}$$

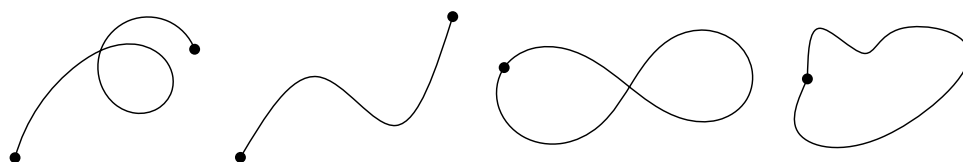
*Remarque*

Cela veut simplement dire que la courbe ne se recoupe pas.

**Définition** : Une courbe régulière  $\Gamma \in \mathbb{R}^n$  est **fermée** s'il existe une paramétrisation  $\gamma : [a, b] \mapsto \Gamma$  avec  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**Exemples**

Nous pouvons considérer les courbes suivantes :



Pas simple,  
pas fermée

Simple,  
pas fermée

Pas simple,  
Fermée

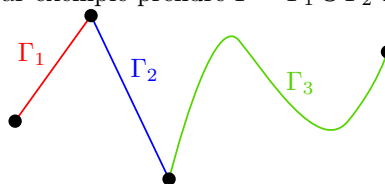
Simple,  
Fermée

**Définition** :  $\Gamma$  est une courbe régulière par morceaux si  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ , où les  $\Gamma_i$  sont des courbes régulières telles que  $\Gamma_{i+1}$  commence là où  $\Gamma_i$  s'arrête (afin que la courbe finale soit continue).

**Courbe régulière par morceaux**

*Exemple*

Nous pouvons par exemple prendre  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  :



**Exemple 1**

Considérons le cercle de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $r$  :

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \right\}$$

Nous pouvons poser la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t)) \end{aligned}$$

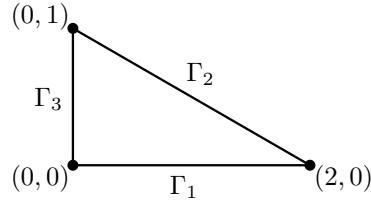
Nous avons alors :

$$\gamma'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t)) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = r \neq 0$$

C'est donc bien une paramétrisation régulière. De plus, nous avons  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ , ce qui implique que  $\Gamma$  est fermée. Nous trouvons finalement qu'il n'y a pas d'intersection, donc que  $\Gamma$  est simple.

**Exemple 2**

Nous voulons paramétriser le triangle de sommets  $(0,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(0,1)$ . Ce n'est pas une courbe régulière puisqu'il y a des angles, mais nous allons la paramétriser par morceaux.



Nous pouvons poser  $\Gamma_1 = \{(t,0)|t \in [0,2]\}$ , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\gamma : [0,2] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t,0)\end{aligned}$$

Pour trouver  $\Gamma_2$ , nous pouvons faire une interpolation entre  $(2,0)$  et  $(0,1)$ , ce qui nous donne :

$$\Gamma_2 = \{(2,0) + t[(0,1) - (2,0)]|t \in [0,1]\} = \{(2,0) + t(-2,1)|t \in [0,1]\}$$

Cela nous permet de trouver  $\gamma_2$  :

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0,1] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (2-2t, t)\end{aligned}$$

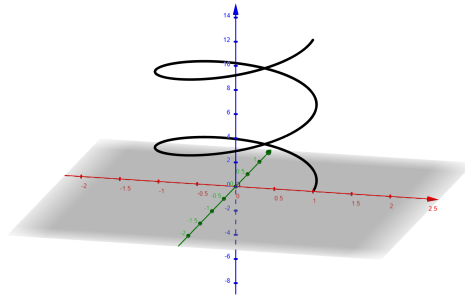
Pour finir, nous pouvons trouver que  $\Gamma_3 = \gamma_3([0,1])$  où :

$$\begin{aligned}\gamma_3 : [0,1] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (0,1-t)\end{aligned}$$

Nous trouvons finalement que  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  est une courbe régulière par morceaux.

**Exemple 3**

Nous voulons paramétriser une hélice dans  $\mathbb{R}^3$ .



Nous trouvons que  $\Gamma = \gamma([0,4\pi])$ , où :

$$\begin{aligned}\gamma : [0,4\pi] &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t), t)\end{aligned}$$

**Exemple 4**

Considérons la courbe composée d'une droite allant de  $(-1,0)$  à  $(0,1)$ , et d'une droite allant de  $(0,1)$  à  $(1,0)$ .

Nous savons que cette courbe n'est pas régulière, mais nous pourrions trouver la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\gamma} : [-1,1] &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^3, 1 - |t^3|)\end{aligned}$$

Elle paramétrise bien  $f(x) = 1 - |x|$ , et elle est de classe  $C^1(]-1, 1[, \mathbb{R}^2)$  :

$$\hat{\gamma}'(t) = (3t^2, -3t|t|)$$

Cependant, nous avons  $\hat{\gamma}'(0) = (0, 0)$ , donc ce n'est pas une paramétrisation régulière.

**Définition** : Soit  $\Gamma$  une courbe paramétrisée par  $\gamma : [a, b] \mapsto \Gamma$ . Alors, nous pouvons définir  $-\Gamma$  par  $\Gamma$  parcourue dans l'autre sens, c'est-à-dire paramétrisée par :

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} : [a, b] &\mapsto \Gamma \\ t &\mapsto \gamma(-t + a + b)\end{aligned}$$

*Remarque*

Nous avons alors :

$$\tilde{\gamma}'(t) = -\gamma'(t)$$

## 4.2 Intégrales curvilignes

**Idée** Le but de cette partie est d'intégrer une fonction le long d'une courbe.

**Exemple** Disons que nous voulons connaître l'altitude moyenne qu'on avait lors d'une randonnée. Pour cela, nous pouvons considérer la courbe  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  qui donne notre trajet (en coordonnées GPS par exemple) avec  $f(x, y)$  qui donne l'altitude. Alors, pour obtenir la valeur moyenne, nous cherchons à intégrer  $f$  le long de  $\Gamma$ .

**Définition : Intégrale curviligne** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert,  $\Gamma \subset \Omega$  une courbe régulière, et  $\gamma : [a, b] \mapsto \Gamma$  une paramétrisation de cette courbe. Pour  $f \in C^0(\Omega)$ , nous définissons l'intégrale curviligne de  $f$  le long de  $\Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} f d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Pour un champ vectoriel,  $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , nous définissons :

$$\int_{\Gamma} F d\ell = \int_{\Gamma} F \bullet d\ell = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt$$

Si  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$  est régulière par morceaux, nous définissons :

$$\int_{\Gamma} f d\ell = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f d\ell$$

Et de la même manière pour un champ vectoriel :

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\ell = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \bullet d\ell$$

*Remarque 1*

Si nous avons une paramétrisation telle que  $\|\gamma'(t)\| = 1$  (donc qu'elle va à vitesse constante), alors nous avons simplement :

$$\int_{\Gamma} f d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) dt$$

*Remarque 2*

L'intégrale  $\int_{\Gamma} F \bullet d\ell$  ne dépend pas de la paramétrisation choisie, au signe près. Nous leverons cette ambiguïté plus tard en parlant d'orientation.



En effet, nous avons par exemple :

$$\int_{-\Gamma} F \bullet d\ell = - \int_{\Gamma} F \bullet d\ell$$

car  $\tilde{\gamma}'(t) = -\gamma'(t)$ .

*Remarque 3* La longueur de la courbe  $\Gamma$  est donnée par :

$$\int_{\Gamma} 1 d\ell$$

*Remarque 4* L'intégrale suivante s'interprète physiquement comme le travail pour déplacer une particule le long de  $\Gamma$  dans le champ de force  $F$  :

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\ell$$

### Exemple 1

Calculons la longueur du cercle de rayon  $r$ , centré en 0. Commençons par prendre une paramétrisation :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (r \cos(t), r \sin(t)) \end{aligned}$$

Nous trouvons donc que la longueur de  $\Gamma$  est donnée par :

$$\int_{\Gamma} 1 d\ell = \int_0^{2\pi} \underbrace{1 \|\gamma'(t)\|}_r dt = 2\pi r$$

### Exemple 2

Calculons la hauteur moyenne de l'hélice  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ , donnée par :

$$\Gamma = \{(\cos(t), \sin(t), t) | t \in [0, 4\pi]\}$$

La hauteur moyenne est donnée par :

$$\frac{\int_{\Gamma} \text{hauteur} d\ell}{\text{longueur de } \Gamma} = \frac{\int_{\Gamma} \text{hauteur} d\ell}{\int_{\Gamma} 1 d\ell}$$

Nous pouvons simplement prendre la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 4\pi] &\longmapsto \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t), t) \end{aligned}$$

Et nous pouvons calculer sa dérivée :

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Nous pouvons maintenant calculer la longueur de notre hélice :

$$\int_{\Gamma} 1 d\ell = \int_0^{4\pi} 1 \cdot \sqrt{2} dt = 4\pi\sqrt{2}$$

La hauteur est donnée par la troisième composante de  $\gamma$ , donc  $t$  :

$$\int_{\Gamma} \text{hauteur} d\ell = \int_{\Gamma} z d\ell = \int_0^{4\pi} t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \frac{t^2}{2} \Big|_{4\pi}^0 = \sqrt{2} 8\pi^2$$

On trouve finalement que la hauteur moyenne est donnée par :

$$h_{\text{moy}} = \frac{\sqrt{2} 8\pi^2}{4\pi\sqrt{2}} = 2\pi$$

Ce à quoi on pouvait s'attendre.

**Exemple 3**

Considérons le champ vectoriel suivant :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (-y, x) \end{aligned}$$

Nous voulons intégrer cette fonction sur le cercle unitaire. Nous pouvons ainsi prendre la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longmapsto \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

L'intégrale de notre fonction est le travail d'une particule qui voyage dans le champ  $F$  le long de  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \bullet d\ell &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \bullet (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Il est intéressant de remarquer que nous avons pris une intégrale sur un cercle fermé, mais que le résultat n'est pas 0.

---

Lundi 10 octobre 2022 — **Cours 3 : Des notions à haut potentiel**

## 4.3 Champs qui dérivent d'un potentiel

### Définition Dériver d'un potentiel

: Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert, et  $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .  
Alors, le champ vectoriel  $F$  **dérive du potentiel**  $f \in C^1(\Omega)$  si  $F = \nabla f$ .

*Remarque 1* Ceci est une généralisation du concept de primitive pour les champs vectoriels.

*Remarque 2* Tous les champs vectoriels ne dérivent pas d'un potentiel.

### Proposition

Si  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  dérive du potentiel  $f \in C^1(\Omega)$  et  $\Gamma$  est une courbe de régulier de paramétrisation  $\gamma : [a, b] \mapsto \Omega$ , alors :

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\ell = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

*Preuve*

Calculons la dérivée suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \gamma(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}(f(\gamma_1(t)), \dots, f(\gamma_n(t))) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma_1}{\partial t}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \frac{\partial \gamma_n}{\partial t}(t) \\ &= \nabla f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) \\ &= F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) \end{aligned}$$

Ce résultat est très intéressant, il nous permet de trouver que :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \bullet dl &= \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} (f \circ \gamma(t)) dt \\ &= [f \circ \gamma(t)]_a^b \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\end{aligned}$$

□

### Savoir si une fonction dérive d'un potentiel

Nous savons que, pour tout champ scalaire  $f$ , nous avons  $\text{rot } \nabla f = 0$ . Ainsi, si nous voulons connaître si une fonction dérive d'un potentiel, il est très intéressant de commencer par calculer le rotationnel : s'il est non-nul, nous savons que notre fonction ne dérive pas d'un potentiel (si  $F = \nabla f$ , alors  $\text{rot } F = \text{rot } \nabla f = 0$ ). S'il est nul, alors nous devons plus travailler. Nous allons voir des théorèmes intéressants, mais nous pouvons essayer aussi de trouver le potentiel dont dérive notre fonction (si elle en dérive de un). Afin d'y parvenir, nous pouvons soit essayer de tâtonner, soit considérer  $F = \nabla f$  comme un système de plusieurs équations différentielles (qui ne donnent pas toujours une solution).

*Observation*

Un autre critère ressemblant à la vérification que  $\text{rot } F = 0$ , est que pour toute courbe fermée  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  (on a une paramétrisation  $\gamma : [a, b] \mapsto \Gamma$  telle que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ), alors :

$$\int_{\Gamma} F \bullet dl = 0$$

En effet :

$$\int_{\Gamma} F \bullet dl = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(b)) = 0$$

En pratique, ce critère est non-trivial à appliquer, mais peut être très intéressant dans certains scénarios.

### Exemple

Considérons le champ vectoriel suivant, défini sur  $\Omega = \mathbb{R}^2$  :

$$F(x, y) = (y^2 + x^2, 2xy + e^y)$$

Nous voulons savoir si  $F$  dérive d'un potentiel. La première étape est de vérifier que le rotationnel est nul partout :

$$\text{rot } F = \frac{\partial}{\partial y} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_2 = 2y - 2y = 0$$

La deuxième étape est de calculer. En tâtonnant, il est complètement possible de trouver :

$$f(x, y) = y^2 x + \frac{x^3}{3} + e^y$$

On remarque que, toujours, il y a plusieurs réponses possibles : nous aurions pu ajouter n'importe quelle constante.

Si nous n'étions par arrivé à trouver notre résultat en tâtonnant, nous pouvons résoudre le système donné par  $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + x^2$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^y$ . On utilise la première équation pour trouver la fonction avec une constante qui dépend de  $y$  :

$$f(x, y) = \int y^2 + x^2 dx = y^2 x + \frac{x^3}{3} + c(y)$$

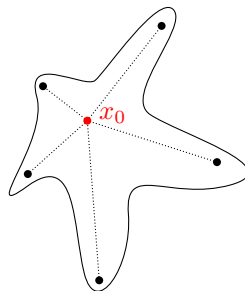
Remplaçons maintenant ce résultat dans notre deuxième équation, afin d'obtenir un résultat (ou une contradiction) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^y \iff 2xy + c'(y) = 2xy + e^y \iff c'(y) = e^y \iff c(y) = e^y + C$$

Nous remarquons que  $c'(y)$  et  $c(y)$  ne dépendent que de  $y$ , donc notre résultat fonctionne (sinon nous aurions une contradiction et notre fonction ne dériverait pas d'un potentiel). Nous avons terminé, et nous trouvons finalement que :

$$f(x, y) = y^2x + \frac{x^3}{3} + c(y) = y^2x + \frac{x^3}{3} + e^y + C$$

**Définition : Domaine étoilé** Un ensemble ouvert  $\Omega$  est un **domaine étoilé** s'il existe un centre  $x_0 \in \Omega$  tel que pour tout  $x \in \Omega$ , le segment  $[x_0, x] \subseteq \Omega$ .

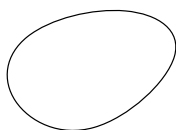


**Définition : Simplement connexe** Un ensemble ouvert qui n'a pas de trou est appelé **simplement connexe**.

*Remarque 1* Cette notion est uniquement importante pour le théorème qui suit. Ce n'est pas grave si nous n'en avons qu'une intuition.

*Remarque 2* Tout domaine étoilé est un ensemble connexe.

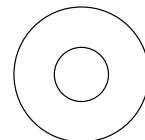
*Exemples*



Domaine étoilé,  
Simplement connexe



Pas domaine étoilé,  
Simplement connexe



Pas domaine étoilé,  
Pas simplement connexe

**Théorème 1 : Caractérisation par le rotationnel** Soient  $n = 2, 3$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert, et  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

1. Si  $F$  dérive d'un potentiel, alors  $\text{rot } F = 0$ .
2. Si  $\Omega$  est simplement connexe, alors cette propriété est une condition nécessaire et suffisante. En d'autres mots, dans ce cas,  $F$  dérive d'un potentiel si et seulement si  $\text{rot } F = 0$ .

*Preuve 1* Si  $F$  dérive d'un potentiel, alors il existe une fonction  $f$  telle que  $F = \nabla f$ , et donc :

$$\text{rot } F = \text{rot } \nabla f = 0$$

*Preuve 2* Nous allons seulement prouver le cas plus faible où  $\Omega$  est un domaine étoilé, pour simplifier notre preuve. On définit  $f$  telle que  $f(x_0) = 0$  et

$$f(x) = \int_{[x_0, x]} F \bullet d\ell$$

où  $[x_0, x]$  est le segment partant de  $x_0$  vers  $x$ . Nous pouvons poser la paramétrisation suivante pour cette courbe :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longmapsto \Gamma = [x_0, x] \\ t &\longmapsto x_0 + t(x - x_0) \end{aligned}$$

Alors, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 F(x_0 + t(x - x_0)) \bullet (x - x_0) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_0 + t(x - x_0)) \bullet (x - x_0) dt\end{aligned}$$

Nous pouvons démontrer que cela donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_0 + t(x - x_0)) \bullet (x - x_0) dt &= [tF_i(x_0 + t(x - x_0))]_0^1 \\ &= F_i(x)\end{aligned}$$

Il suit donc bien que  $\nabla f = F$ .

□

**Théorème 2**  
**Caractérisation**  
**par les courbes**

: Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert (peu importe le  $n$ ), et  $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $F$  dérive d'un potentiel.
2.  $\int_{\Gamma} F \bullet d\ell = 0$  pour toute courbe régulière par morceau simple fermée  $\Gamma \subset \Omega$ .
3.  $\int_{\Gamma_1} F \bullet d\ell = \int_{\Gamma_2} F \bullet d\ell$  pour toutes courbes régulières par morceaux simple avec les mêmes extrémités.

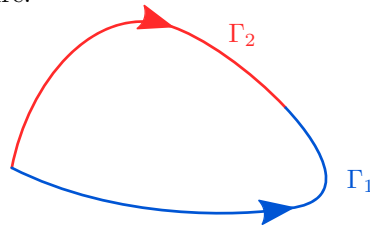
*Preuve 2*  $\iff$   
3

Considérons le cas où l'intégrale selon  $\Gamma_1$  est égale à l'intégrale selon  $\Gamma_2$  (deux courbes avec les mêmes extrémités). Alors, en posant  $\Gamma = -\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , une courbe fermée :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} &= \int_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_1} - \int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2} + \int_{-\Gamma_1} + \int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma} + \int_{\Gamma_1} \\ \iff \int_{\Gamma} &= 0\end{aligned}$$

Cela nous dit donc bien que n'importe quelle intégrale sur une courbe fermée est nulle

Dans l'autre sens, nous pouvons séparer n'importe quel courbe régulière par morceaux simple fermée en deux sous-courbes telles que l'intégrale sur ces deux chemins seront toujours égales, par une intuition similaire.



*Preuve 1*  $\implies$   
2

Nous savons que c'est vrai par l'observation que nous avons faite quand nous cherchions à comprendre comment savoir si une fonction dérive d'un potentiel.

*Preuve 3*  $\implies$   
1

Posons la fonction suivante :

$$f(x) = \int_{x_0 \rightarrow x} F \bullet d\ell$$

où  $x_0$  est fixé, et  $x_0 \rightarrow x$  représente n'importe quelle courbe allant de  $x_0$  à  $x$ .

Par hypothèse, l'intégrale selon n'importe quelle courbe donne le même résultat, ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{x_0 \rightarrow x+he_i} F \bullet d\ell - \int_{x_0 \rightarrow x} F \bullet d\ell \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{x_0 \rightarrow x+he_i} F \bullet d\ell + \int_{x \rightarrow x_0} F \bullet d\ell \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{x \rightarrow x+he_i} F \bullet d\ell \right)\end{aligned}$$

Puisque cette intégrale ne dépend pas du chemin, alors nous pouvons choisir comme chemin le segment  $[x, x+he_i]$ , avec  $\gamma(t) = x + (x+he_i - x)t$  :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x \rightarrow x+e_i h} F \bullet d\ell &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F(x + e_i h) \bullet e_i h dt \\ &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h F_i(x + he_i) dt \\ &= F_1(x)\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que  $\frac{\partial}{\partial x_i} f = F_i(x)$ , et donc que  $\nabla f = F$ . □

Lundi 17 octobre 2022 — Cours 4 : La gauche c'est positif

### Intuition

Si je fais un tour à vélo et que j'ai toujours le vent contraire, c'est que le vent ne dérivait pas d'un potentiel.

En effet, mathématiquement, le total du vent sur notre tour fermé à vélo  $\Gamma$  donne :

$$\int_{\Gamma} \text{vent}(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt < 0 \quad \text{puisque } \text{vent}(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) < 0, \forall t$$

### Exemple 1

Soit le champ suivant :

$$F(x, y) = (-y, x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$$

La première étape est de calculer le rotationnel :

$$\text{rot } F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - (-1) = 2 \neq 0$$

Donc,  $F$  ne dérive pas d'un potentiel.

### Exemple 2

Considérons le champ suivant :

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad \text{où } \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

À nouveau, commençons par calculer le rotationnel :

$$\text{rot } F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Si  $\Omega$  était étoilé (ou simplement connexe), nous pourrions directement conclure que  $F$  dérive d'un potentiel. Cependant, en l'occurrence, il a un trou au milieu, ce qui fait qu'il n'est pas simplement connexe.

La deuxième étape est de garder espoir et essayer d'utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver  $f$  telle que  $F = \nabla f$ . Mais, malheureusement, la troisième étape est de remarquer que ça ne marche pas et de perdre espoir. Ceci nous amène à l'étape suivante.

La quatrième étape est de démontrer que notre champ ne dérive pas d'un potentiel en trouvant une courbe simple fermée  $\Gamma$  telle que :

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\ell \neq 0$$

Pour se faire, on peut simplement prendre le cercle unité :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \bullet d\ell &= \int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) \bullet (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \bullet (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

ce qui n'est pas nul.

Ainsi, nous avons bien montré que  $F$  ne dérive pas d'un potentiel.

### Exemple 3

Considérons à nouveau le champ vectoriel suivant, mais sur un domaine différent :

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2), \quad \text{où } \Omega = \{(x, y) | y > 0\}$$

Nous n'avons pas changé notre champ, donc  $\text{rot } F = 0$ . Cependant, maintenant, nous domaine est étoilé, ce qui nous permet de conclure par le théorème de la caractérisation par le rotationnel que  $F$  dérive d'un potentiel.

*Remarque* Cet exemple nous montre que la géométrie du domaine est importante.

### Exemple 4

Prenons le champ vectoriel suivant :

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} + 1 \right)$$

avec  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Nous pouvons trouver que  $\text{rot } F = 0$ , mais que  $\Omega$  n'est pas simplement connexe.

Passons maintenant à la deuxième étape : Supposons que  $F = \nabla f$ . Alors, nous aurions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \implies f(x, y) &= \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx + c(y) = \frac{1}{2} \log|x^2 + y^2| + c(y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c(y) \end{aligned}$$

Regardons maintenant la dérivée selon  $y$  :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} + c'(y) \stackrel{\text{déf } f}{=} \frac{y}{x^2 + y^2} + 1 \implies c'(y) = 1 \implies c(y) = y + c_2$$

Nous avons ainsi trouvé que  $F$  dérive de :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + y + c_2$$

**Exemple 5**

Considérons le champ vectoriel suivant :

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{(x^2 + z^2)^2}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{(y^2 + z^2)^2}, \frac{z}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{z}{(y^2 + z^2)^2} \right)$$

appartenant à  $C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , avec :

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) | (x = 0 \text{ et } y = 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } z = 0) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } z = 0)\}$$

En d'autres mots,  $\Omega$  est  $\mathbb{R}^3$  sans les axes.

La première étape est de calculer le rotationnel, ce qui nous donne (nous pouvons accélérer ce calcul en se rendant compte de la symétrie entre chaque composante de  $\text{rot } F$ ) :

$$\text{rot } F = 0$$

Cependant, notre domaine n'est pas simplement connexe, donc nous passons à l'étape

2. Si  $F = \nabla f$ , alors nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{(x^2 + z^2)^2} \implies f(x, y, z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + z^2} + c(y, z)$$

Considérons maintenant  $y$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) \stackrel{\text{déf } f}{=} \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{(y^2 + z^2)^2} \\ \implies \frac{\partial c(y, z)}{\partial y} &= \frac{y}{(y^2 + z^2)^2} \\ \implies c(y, z) &= \int \frac{y}{(y^2 + z^2)^2} dy + c_2(z) \\ \implies f(x, y, z) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + z^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{y^2 + z^2} + c_2(z) \end{aligned}$$

Utilisons finalement  $z$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{z}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{z}{(y^2 + z^2)^2} + c'_2(z) \stackrel{\text{déf } f}{=} \frac{z}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{z}{(y^2 + z^2)^2} \\ \implies c'_2(z) &= 0 \\ \implies c_2(z) &= c_3 \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi finalement que notre fonction  $F$  dérive du potentiel suivant :

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right) + c_3$$

## 4.4 Théorème de Green

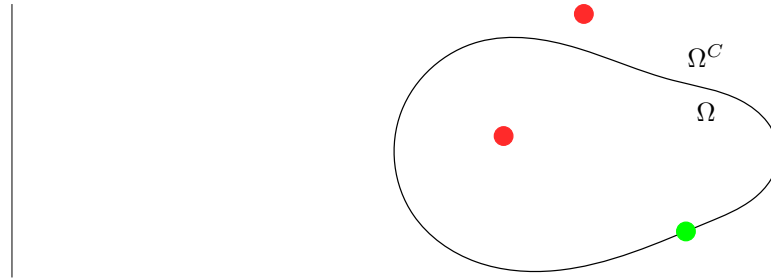
**Définition : Bord** Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un ouvert. Alors, le **bord** de  $\Omega$ , noté  $\partial\Omega$ , est défini par :

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall r > 0, B_r(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } B_r(x) \cap \Omega^C \neq \emptyset\}$$

où  $B_r(x)$  est la boule ouverte de rayon  $r$  centrée en  $x$ .

*Exemple* Par exemple, sur l'image suivante, les points rouges ne font pas partie de  $\partial\Omega$ , mais le point vert oui :




**Définition**  
**Adhérence**

: Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un ouvert. L'**adhérence** de  $\Omega$ , noté  $\overline{\Omega}$ , est donné par :

$$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$$

**Exemple**

Considérons par exemple le domaine ouvert suivant, celui d'un disque de rayon 1 :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$

Alors, nous avons :

$$\partial\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}, \quad \overline{\Omega} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

**Définition : Do-**  
**maine régulier**

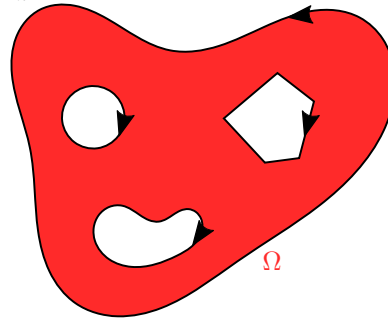
$\Omega \in \mathbb{R}^2$  est un **domaine régulier** s'il existe des ouverts bornés  $\Omega_0, \dots, \Omega_k$  tels que :

- $\overline{\Omega_i} \subseteq \Omega_0$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .
- $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset$  pour  $1 \leq i < j \leq k$ .
- $\partial\Omega_i$  est une courbe régulière par morceau simple fermée pour tout  $0 \leq i \leq k$ .
- $\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$

Le bord  $\partial\Omega$  est orienté positivement si les paramétrisations choisies laissent le domaine  $\Omega$  à gauche.

*Intuition*

Notre domaine régulier  $\Omega$  est défini par un ensemble  $\Omega_0$  avec des "trous"  $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ .



Il est intéressant de remarquer que le bord "des trous" ne tournent pas dans le même sens que le bord de "l'extérieur".

*Remarque*

Donner une orientation au bord  $\partial\Omega$  permet d'enlever l'ambiguïté qu'on avait sur le signes des intégrales : une intégrale ne dépend plus de la paramétrisation maintenant.

**Théorème de**  
**Green**

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un domaine régulier avec le bord  $\partial\Omega$  orienté positivement. Soit aussi  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ .

Alors :

$$\iint_{\Omega} \text{rot } F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} F \bullet d\ell$$

Nous relierons donc une intégrale multiple (de dimension 2) à une intégrale le long d'une courbe.

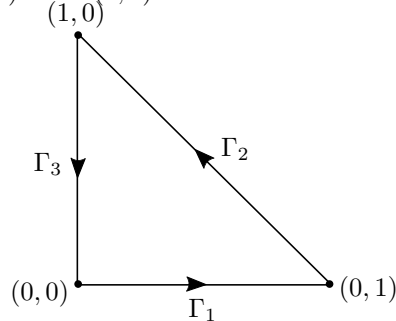
*Remarque*

Si  $F$  dérive d'un potentiel, alors le théorème de Green se lit :

$$0 = 0$$

*Preuve tri-  
angle isocèle  
rectangle*

Nous considérons le cas d'un isocèle rectangle, dont les sommets sont en  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  et en  $(1,0)$ .



Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1-x\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1 \text{ et } 0 < x < 1-y\}\end{aligned}$$

Ceci nous donne que :

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \text{rot } F dx dy &= \iint_{\Omega} \partial_x F_2 dx dy - \iint_{\Omega} \partial_y F_1 dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \partial_x F_2 dx dy - \int_0^1 \int_0^{1-x} \partial_y F_1 dy dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{F_2(1-y, y)}_{t=y} dy - \int_0^1 \underbrace{F_2(0, y)}_{t=1-y} dy \\ &\quad - \int_0^1 \underbrace{F_1(x, 1-x)}_{t=1-x} dx + \int_0^1 \underbrace{F_1(x, 0)}_{t=x} dx\end{aligned}$$

En faisant les changements de variables mentionnés sous chaque intégrale, nous obtenons que c'est égal à (en faisant attention aux bornes pour avoir les signes correctement) :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 F_1(t, 0) dt + \int_0^1 [-F_1(1-t, t) + F_2(1-t, t)] dt \\ &+ \int_0^1 F_2(0, 1-t)(-1) dt\end{aligned}$$

Ce qui est exactement :

$$\int_{\Gamma_1} F \bullet d\ell + \int_{\Gamma_2} F \bullet d\ell + \int_{\Gamma_3} F \bullet d\ell$$

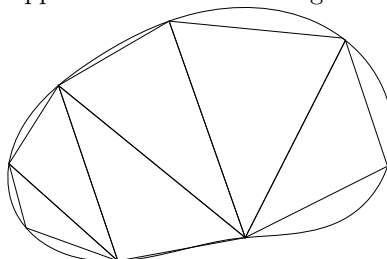
comme attendu.

*Preuve triangle  
quelconque*

Le cas des triangles généraux sera fait dans la cinquième série d'exercices.

*Preuve ouvert  
quelconque*

On considère un  $\Omega$  général. Dans l'idée, nous pouvons trianguler notre domaine, l'approximer avec des triangles de plus en plus fins.



On trouve ainsi, approximativement :

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \operatorname{rot} F &\approx \sum_{\text{triangles}} \iint_{\text{triangle}} \operatorname{rot} F \\ &= \sum_{\text{triangles}} \int_{\partial \text{triangle}} F \bullet d\ell \\ &= \int_{\text{"extérieur"}} F \bullet d\ell \\ &\approx \int_{\partial \Omega} F \bullet d\ell\end{aligned}$$

En effet, chaque ligne à “l’intérieur” de notre triangulation est toujours au bord d’exactement deux triangles, et une fois de manière positive et une fois de manière négative. Ceci nous montre que la somme des intégrales sur les bords nous donne bien l’intégrale des bords de l’extérieur.

### Exemple

Soit le domaine suivant :

$$\Omega = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$

Nous prenons aussi le champ suivant :

$$F(x, y) = (-y, x)$$

Nous avons déjà calculé que  $\operatorname{rot} F = 2$ . Cela nous donne :

$$\iint_{\Omega} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} 2 dx dy = 2 \iint_{\Omega} dx dy = 2 \operatorname{Aire}(\Omega) = 2\pi$$

De plus, on peut poser la paramétrisation de  $\partial \Omega$  suivante :

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\longmapsto \partial \Omega \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t))\end{aligned}$$

Nous avons bien que  $\partial \Omega$  est orienté positivement, ainsi :

$$\int_{\partial \Omega} F \bullet d\ell = \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \bullet (-\sin(t), \cos(t)) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Le théorème de Green est donc bien vérifié dans ce cas.

---

Lundi 24 octobre 2022 — **Cours 5 : Théorème de la divergence en deux dimensions**

**Corolaire : Formule de l’Aire** Soit  $\Omega$  un domaine régulier avec le bord  $\partial \Omega$  orienté positivement. Nous avons alors :

$$\operatorname{Aire}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 dx dy = \int_{\partial \Omega} (0, x) \bullet d\ell = \int_{\partial \Omega} (-y, 0) \bullet d\ell$$

*Preuve*

Nous avons bien que :

$$1 = \operatorname{rot}(0, x) = \operatorname{rot}(-y, 0)$$

Puis, notre résultat découle directement par le théorème de Green.  $\square$

### Exemple

Nous voulons vérifier le théorème de Green pour le domaine suivant :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0 \text{ et } 4 < x^2 + y^2 < 9\}$$

Et avec le champ vectoriel suivant :

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

Nous remarquons que notre domaine a l'allure d'un cercle, ainsi utilisons des coordonnées polaires :

$$\Omega = \left\{ (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \mid \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, r \in ]2, 3[ \right\}$$

De plus, nous trouvons que le rotationnel de notre fonction est donné par :

$$\text{rot } F = \frac{-2x + 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

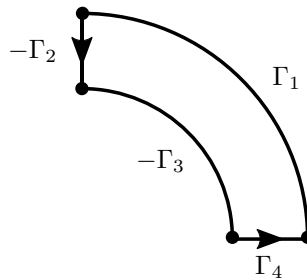
Calculons maintenant notre première intégrale :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \text{rot } F dx dy &= \int_2^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\text{rot } F(r \cos(\theta), r \sin(\theta))}_{\text{Jacobien}} \underbrace{r}_{\text{Jacobien}} d\theta dr \\ &= \int_2^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2r \cos(\theta) + 2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{r^4} r d\theta dr \\ &= \int_2^3 \left( \frac{-2}{r^2} [\sin(\theta)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{r} \left[ \frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) dr \\ &= \int_2^3 \left( \frac{-2}{r^2} + \frac{1}{r} \right) dr \\ &= \left[ \frac{2}{r} + \log(r) \right]_2^3 \\ &= \frac{2}{3} + \log(3) - 1 - \log(2) \\ &= \frac{-1}{3} + \log\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous pouvons ensuite calculer notre deuxième intégrale. Pour y arriver, nous devons définir une paramétrisation de  $\partial\Omega$ , de manière positive :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] &\mapsto \Gamma_1 & \gamma_2 : [2, 3] &\mapsto -\Gamma_2 \\ t &\mapsto 3(\cos(t), \sin(t)) & t &\mapsto (0, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 : \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] &\mapsto -\Gamma_3 & \gamma_4 : [2, 3] &\mapsto \Gamma_4 \\ t &\mapsto 2(\cos(t), \sin(t)) & t &\mapsto (t, 0) \end{aligned}$$



Or, nous savons que :

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma_1 \cup -(-\Gamma_2) \cup -(-\Gamma_3) \cup \Gamma_4$$

Et ainsi :

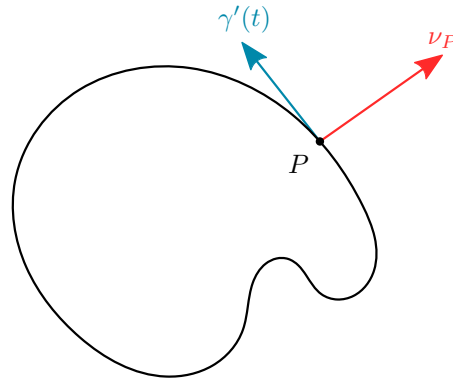
$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} F \bullet d\ell &= \int_{\Gamma_1} F \bullet d\ell - \int_{-\Gamma_2} F \bullet d\ell - \int_{-\Gamma_3} F \bullet d\ell + \int_{\Gamma_4} F \bullet d\ell \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3 \cos(t)}{9}, \frac{1}{9} \right) \bullet 3(-\sin(t), \cos(t)) dt - \int_2^3 \left( 0, \frac{1}{t^2} \right) \bullet (0, 1) dt \\
 &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2 \cos(t)}{4}, \frac{1}{4} \right) \bullet 2(-\sin(t), \cos(t)) dt + \int_2^3 \left( \frac{t}{t^2}, \frac{1}{t^2} \right) \bullet (1, 0) dt \\
 &= \dots \\
 &= -\frac{1}{3} + \log\left(\frac{3}{2}\right)
 \end{aligned}$$

comme attendu.

## 4.5 Théorème de la divergence sur le plan

**Définition : Normale extérieure** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine régulier et  $P \in \partial\Omega$  un point de la frontière de  $\Omega$ . Le vecteur  $\nu_P \in \mathbb{R}^2$  est la **normale extérieure** à  $\Omega$  en  $P$  si :

1.  $\|\nu_P\| = 1$
2. Si  $\gamma : [a, b] \mapsto \partial\Omega$  est une paramétrisation telle que  $\gamma(t_0)$  existe (où  $t_0$  est tel que  $\gamma(t_0) = P$ ), alors  $\gamma'(t_0) \bullet \nu_P = 0$ .
3. Pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, alors  $P + \varepsilon \nu_P \notin \Omega$



*Intuition*

Le point 2 dit que notre vecteur est orthogonal au bord, et le point 3 nous donne la direction de ce vecteur (parmi les deux possibles).

*Remarque*

À un point où la dérivée n'existe pas (dans une courbe simple par morceaux), nous ne considérons pas le deuxième point, ce qui nous donne plein de vecteurs normaux extérieurs.

### Proposition

Si  $\Omega$  est un domaine régulier de bord régulier orienté positivement, et  $\gamma : [a, b] \mapsto \partial\Omega$  est une paramétrisation régulière, alors pour tout  $t \in [a, b]$ , nous avons :

$$\nu_{\gamma(t)} = \frac{(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))}{\|\gamma'(t)\|}$$

*Preuve*

Pour le point 1, nous avons bien :

$$\|\nu_{\gamma(t)}\| = \frac{\|(\gamma'_2, -\gamma'_1)\|}{\|(\gamma'_1, \gamma'_2)\|} = 1$$

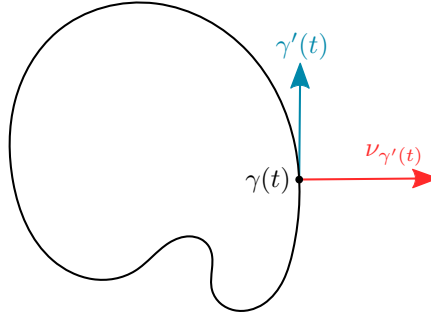
Pour le point 2, nous trouvons :

$$\nu_{\gamma(t)} \bullet \gamma'(t) = \frac{1}{\|\gamma'\|} (\gamma'_2, -\gamma'_1) \bullet (\gamma'_1, \gamma'_2) = \frac{1}{\|\gamma'\|} (\gamma'_2 \gamma'_1 - \gamma'_1 \gamma'_2) = 0$$

Pour le point 3, nous pouvons appliquer une translation et une rotation à notre domaine, afin d'avoir  $\gamma'(t) = (0, y)$ , où  $y > 0$ . Ainsi, cela nous donne le vecteur :

$$\nu_{\gamma(t)} = \frac{(y, 0)}{y} = (1, 0)$$

qui pointe bien vers l'extérieur (comme on peut le voir sur l'image ci-dessous).



### Théorème de la divergence dans $\mathbb{R}^2$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  régulier,  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$  un champ vectoriel, et  $\nu_P$  la normale extérieure à  $\Omega$  en  $P \in \partial\Omega$ . Alors, nous avons :

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy = \int_{\partial\Omega} (F \bullet \nu) d\ell$$

*Remarque 1* La quantité  $\int_{\partial\Omega} F \bullet \nu d\ell$  s'appelle le **flux** de  $F$  à travers  $\partial\Omega$ .

*Remarque 2* Si  $\gamma : [a, b] \mapsto \partial\Omega$  est une paramétrisation positive de  $\partial\Omega$ , alors :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} F \bullet \nu d\ell &= \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \nu_{\gamma(t)} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|} dt \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé que :

$$\int_{\partial\Omega} F \bullet \nu d\ell = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) dt$$

*Intuition*

Dans l'idée  $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy$  est "ce qui sort" de  $\Omega$ , et  $\int_{\partial\Omega} F \bullet \nu d\ell$  est "ce qui passe à travers"  $\partial\Omega$ . Tout ce qui sort doit passer à travers la frontière, donc ces deux valeurs doivent être égales.

*Preuve*

Si  $F = (F_1, F_2)$ , alors :

$$\operatorname{div} F = \operatorname{rot}(-F_2, F_1)$$

Nous obtenons ainsi, par le théorème de Green :

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy = \iint_{\Omega} \operatorname{rot}(-F_2, F_1) dx dy = \int_{\partial\Omega} (-F_2, F_1) \bullet d\ell$$

Prenons maintenant une paramétrisation  $\gamma : [a, b] \mapsto \partial\Omega$ . Cela nous donne que notre intégrale est égale à :

$$\begin{aligned} & \int_a^b (-F_2(\gamma(t)), F_1(\gamma(t))) \bullet (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) dt \\ &= \int_a^b (F_1, F_2) \bullet (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \\ &= \int_{\partial\Omega} (F \bullet \nu) d\ell \end{aligned}$$

par notre proposition ci-dessus.

□

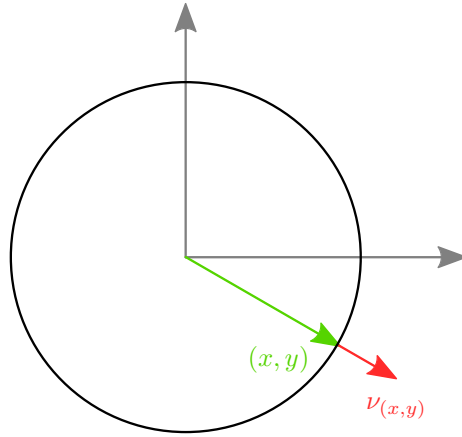
### Exemple 1

Nous voulons calculer  $\int_{\Gamma} g(x, y) d\ell$  où  $\Gamma$  est le cercle de rayon 3 centré en 0, et :

$$g(x, y) = x \sin^4(y) + ye^{x^2+2x}$$

Avec la définition des intégrales curvilignes, ce calcul est compliqué. Cependant, nous pouvons plutôt faire les observations suivantes. Comme  $\Gamma$  est le cercle de rayon 3 centré en 0, nous trouvons que  $\Gamma = \partial\Omega$ , où :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 9\}$$



Nous pouvons voir sur l'image ci-dessus que la normale extérieure au point  $P(x, y) \in \partial\Omega$  est parallèle au vecteur allant de l'origine vers ce point. Ainsi :

$$\nu_{(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y) = \frac{1}{r}(x, y) = \frac{1}{3}(x, y)$$

Ceci est extrêmement intéressant car nous pouvons écrire notre intégrale comme :

$$\int_{\Gamma} g d\ell = \int_{\partial\Omega} \underbrace{(\sin^4(y), e^{x^2+2x})}_F \bullet \frac{1}{3}(x, y) 3 d\ell = 3 \int_{\partial\Omega} F \bullet \nu d\ell$$

Or, nous pouvons voir que :

$$\operatorname{div} F = \partial_x(\sin^4(y)) + \partial_y(e^{x^2+2x}) = 0$$

Ce qui nous permet de simplifier notre intégrale, par le théorème de la divergence :

$$\int_{\Gamma} g d\ell = 3 \int_{\partial\Omega} F \bullet \nu d\ell = 3 \iint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy = 0$$

Remarque

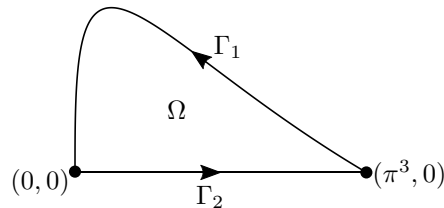
Cette méthode est à retenir pour le calcul d'intégrales.

Lundi 31 octobre 2022 — Cours 6 : On passe aux surfaces

**Exemple 2**Nous voulons calculer  $\int_{\Gamma}(F \bullet \nu)d\ell$  où :

$$F = (y \sin^2(y), xe^{x^2}), \quad \Gamma = \{\gamma(t) = (t^3, \sin(t)) | t \in [0, \pi]\}$$

Une meilleure idée que de simplement appliquer la définition des intégrales de champ est de remarquer que notre courbe  $\Gamma = -\Gamma_1$  peut être étendue avec une autre courbe  $\Gamma_2$ , afin d'obtenir un ensemble de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = -\Gamma \cup \Gamma_2$ .



Or, puisque  $\operatorname{div} F = 0$ , nous avons par le théorème de la divergence que :

$$0 = \iint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy = \int_{\partial\Omega} F \bullet \nu d\ell = \int_{\Gamma_1} (F \bullet \nu) d\ell + \int_{\Gamma_2} F \bullet \nu d\ell$$

Nous voulons calculer  $\int_{\Gamma}(F \bullet \nu)d\ell = \int_{\Gamma_1}(F \bullet \nu)d\ell$  (l'intégrale ne dépend pas de l'orientation puisque nous calculons l'intégrale d'un champ scalaire). Ainsi, nous pouvons poser :

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \pi^3] &\mapsto \Gamma_2 \\ t &\mapsto (t, 0) \end{aligned}$$

Ceci nous donne la normale  $\nu_{\gamma}(t) = (0, -1)$ . Nous pouvons donc finalement calculer notre résultat :

$$\int_{\Gamma} F \bullet \nu d\ell = 0 - \int_{\Gamma_2} F \bullet \nu d\ell = - \int_0^{\pi^3} (0, te^{t^2}) \bullet (0, -1) \|(1, 0)\| dt = \int_0^{\pi^3} te^{t^2} dt = \left[ \frac{e^{t^2}}{2} \right]_0^{\pi^3}$$

Ce qui donne :

$$\frac{e^{\pi^6} - 1}{2}$$



# Chapitre 5

## Intégrales de surfaces

### 5.1 Surfaces

**Définition : Surface** Une **surface** est un objet à deux dimensions dans un espace à 3 dimensions.

*Remarque* Afin de décrire une surface nous avons plusieurs possibilités.

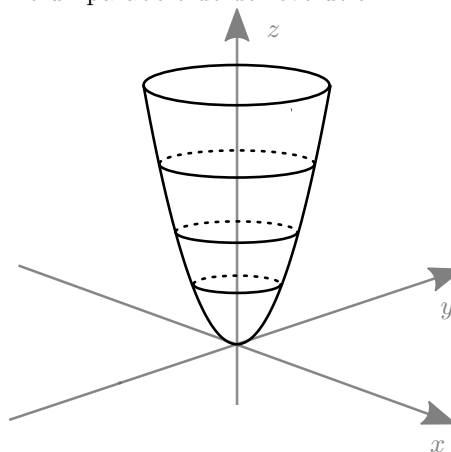
**Représentation cartésienne** Si nous avons  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , alors nous avons la surface suivante :

$$\text{Graphe}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)\}$$

Cette représentation est appelée la **représentation cartésienne** de notre surface.

*Exemple*

Par exemple, si nous posons  $f(x, y) = x^2 + y^2$  et  $\Omega = B_1(0)$ , alors cela nous donne un parabolôide de révolution :



**Représentation implicite**

Si nous avons  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ , nous pouvons considérer ses zéros :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\}$$

Cet ensemble est aussi une surface. Cette représentation est appelée la **représentation implicite** de notre surface.

*Exemple*

L'exemple le plus courant est celui de la sphère, avec  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ .

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\}$$

**Représentation paramétrique**

Si nous avons  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $\sigma : \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ , alors l'ensemble suivant est une surface :

$$S = \text{Im}(\sigma) = \sigma(\Omega)$$

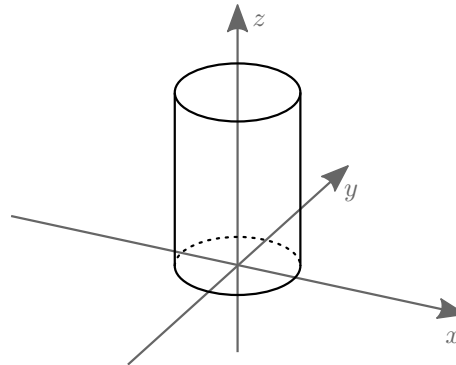
Cette représentation est appelée la **représentation paramétrique** de notre surface.

*Exemple*

Posons  $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 3]$  et :

$$\begin{aligned}\sigma : \Omega &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (\theta, t) &\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), t)\end{aligned}$$

Nous remarquons alors que  $\sigma(\Omega)$  est un cylindre de hauteur 3 et rayon 1.

**Passage entre les représentations**

Le passage entre nos 3 représentations n'est pas évident en général.

*Cartésienne vers paramétrique*

Si nous connaissons :

$$S = \text{Graphe}(f) = \{(x, y, z) | z = f(x, y)\}$$

Alors, nous pouvons poser  $g(x, y, z) = f(x, y) - z$  :

$$S = \{(x, y, z) | f(x, y) - z = 0\}$$

*Paramétrique vers cartésien*

Si nous avons :

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\}$$

Alors il n'est pas possible de faire un seul graphe, mais nous pouvons trouver que c'est égal à l'union de deux graphes en isolant  $z$  :

$$S = \{(x, y, z) | z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\} \cup \{(x, y, z) | z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$

*Cartésien vers paramétrique*

Si nous connaissons que :

$$S = \text{Graphe}(f) = \{(x, y, z) | z = f(x, y)\}$$

où  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ .

Alors, nous avons  $S = \sigma(\Omega)$ , avec :

$$\begin{aligned}\sigma : \Omega &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, f(x, y))\end{aligned}$$

**Description de la sphère**

Comme nous l'avons vu jusque là, nous avons plusieurs manières de décrire une sphère.

La description cartésienne est :

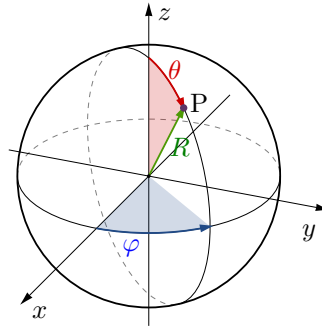
$$S = \{(x, y, z) | z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\} \cup \{(x, y, z) | z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\}$$

La description paramétrique est :

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0\}$$

Et finalement, pour faire la description sphérique, nous avons  $S = \sigma(\Omega)$ , où  $\Omega = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , et :

$$\begin{aligned} \sigma : \Omega &\longrightarrow S \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto \begin{pmatrix} R \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ R \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ R \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

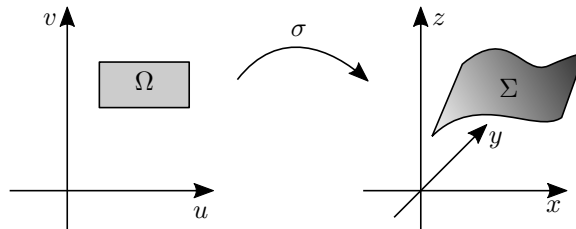


**Définition : Surface régulière**  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  est une **surface régulière** si :

1. Il existe  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , un ouvert borné, avec une frontière  $\partial\Omega$  simple et régulière par morceaux (donc que  $\Omega$  est un domaine “sans trou”) et  $\sigma : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3$  une fonction  $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  injective sur  $\Omega$  (mais pas nécessairement injective sur  $\overline{\Omega}$ ) et telle que :

$$\sigma(\overline{\Omega}) = \Sigma$$

2.  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| \neq 0$  pour tout  $(u, v) \in \Omega$  (où  $\sigma_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$  et  $\sigma_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ ).



*Remarque 1*

Ici,  $\sigma_u \wedge \sigma_v$  est un produit vectoriel de  $\sigma_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$  et de  $\sigma_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}$  :

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \begin{pmatrix} \sigma_{u,2}\sigma_{v,3} - \sigma_{u,3}\sigma_{v,2} \\ -\sigma_{u,1}\sigma_{v,3} + \sigma_{u,3}\sigma_{v,1} \\ \sigma_{u,1}\sigma_{v,2} - \sigma_{u,2}\sigma_{v,1} \end{pmatrix}$$

*Remarque 2*

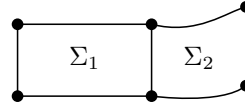
Le terme  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| \neq 0$  pour les surfaces régulières joue le même rôle que le terme  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  pour les courbes régulières.

De plus, nous avons besoin que ce soit non nul, car nous aurons besoin de vecteurs normaux à la surface, et les deux vecteurs normaux unitaires au point  $P = \sigma(u, v)$  sont donnés par :

$$\pm \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$$

**Définition : Surface régulière par morceaux**

$\Sigma$  est **régulière par morceaux** si  $\Sigma$  est connexe (en un seul morceau) et s’il existe des  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  régulières telles que  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$  et où les  $\Sigma_i$  “ne se touchent qu’au bord” (ne s’intersectent pas sauf aux bords).

**Exemple**

Nous voulons démontrer que la sphère de rayon  $R$  centrée en  $(0, 0, 0)$  est une surface régulière.

Utilisons la description paramétrique :

$$\begin{aligned}\sigma : [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) &\longmapsto \begin{pmatrix} R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \cos(\varphi) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cela nous donne que :

$$\sigma_\theta = \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ R \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\varphi = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ R \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -R \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Et ainsi :

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = \begin{pmatrix} -R^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \\ -R^2 \sin^2(\varphi) \sin(\theta) \\ -R^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \end{pmatrix} = -R \sin(\varphi) \sigma(\theta, \varphi)$$

Or, ceci n'est jamais 0 sur l'intérieur de notre surface, ce qui montre bien que  $\|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi\| \neq 0$  pour tout  $(\theta, \varphi) \in \Omega = ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[$ . Nous pouvons en déduire que  $\sigma$  est une paramétrisation régulière, avec les normales :

$$\pm \frac{\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi}{\|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi\|} = \pm \frac{\sigma(\theta, \varphi)}{R}$$

*Observation*

Nous avons trouvé que la normale extérieure d'un cercle avait une forme très similaire.

## 5.2 Intégrales de surface

**Définition : Intégrale de surface** Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  un ouvert, contenant  $\Sigma$  une surface régulière. Soient aussi  $f \in C^0(\Omega)$  un champ scalaire et  $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^3)$  un champ vectoriel. Soient finalement  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert et  $\sigma : A \mapsto \Sigma$  une paramétrisation régulière. Alors, nous définissons l'intégrale d'un champ scalaire par :

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_A f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv$$

Et, nous définissons l'intégrale d'un champ vectoriel par :

$$\iint_{\Sigma} F \bullet dS = \iint_A F(\sigma(u, v)) \bullet (\sigma_u \wedge \sigma_v) du dv$$

*Remarque 1*

Ces intégrales ressemblent beaucoup aux intégrales curvilignes :

Courbe $\Gamma$	Surface $\Sigma$
Paramétrisation $\gamma$	Paramétrisation $\sigma$
$\gamma'$ tangent à la courbe	$\sigma_u \wedge \sigma_v$ normal à la surface
$\ \gamma'\  dt$	$\ \sigma_u \wedge \sigma_v\  du dv$

Nous pouvons ainsi remarquer que les intégrales de champ scalaire sont très similaires ( $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|$  et  $\|\gamma'\|$  sont des facteurs correcteurs relatifs à la paramétrisation), alors que les intégrales de champ vectoriels sont assez différentes (dans un cas on donne de l'importance

aux fonctions qui sont colinéaires à notre courbe, dans l'autre à celles qui sont orthogonales à notre surface).

*Remarque 2* L'intégrale d'un champ scalaire  $\iint_{\Sigma} f dS$  est indépendante de  $\sigma$ . Aussi, l'intégrale de  $\iint_{\Sigma} F \bullet dS$  est indépendante de  $\sigma$ , au signe près (cela dépend de l'orientation de  $\Sigma$ , que nous définirons un peu après).

---

Lundi 7 novembre 2022 — Cours 7 : I'm in space

**Observation** Les deux uniques vecteurs normaux unitaire (de norme 1) au point  $P = \sigma(u, v) \in \Sigma$  sont donnés par :

$$\pm \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$$

**Définition : Surface orientable** Une surface régulière  $\Sigma$  est **orientable** s'il existe une fonction continue  $\nu : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^3$  qui associe un point  $P$  à  $\nu_P$ , de telle manière que  $\nu_P$  est un des deux vecteurs normaux unitaires en  $P$ .

*Exemple :* Par exemple, pour la sphère, nous pouvons poser :

$$\nu_P = \nu_{\sigma(\theta, \varphi)} = \frac{\sigma(\theta, \varphi)}{R}$$

*Exemple :* On remarque même que n'importe quelle surface donnée par représentation implicite est orientable. En effet, si nous avons :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x, y, z) = 0\}$$

Alors nous pouvons par exemple prendre :

$$\nu_{(x, y, z)} = \frac{\nabla \Phi}{\|\nabla \Phi\|}$$

*Exemple : Ruban de Möbius* Le ruban de Möbius n'est, par exemple, pas orientable : il est impossible de trouver une fonction  $\nu$  continue.

*Remarque* Nous ne considérerons que des surfaces orientables dans ce cours.

**Définition : Flux** Si  $\Sigma$  est orientable et  $\nu : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^3$  est un champ de normales unités, alors le **flux** de  $F$  à travers  $\Sigma$  est défini par :

$$\iint_{\Sigma} (F \bullet \nu) dS$$

*Remarque* Nous remarquons que, par définition des intégrales de surfaces :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (F \bullet \nu) dS &= \iint_A (F \bullet \nu) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv \\ &= \pm \iint_A F \bullet \frac{(\sigma_u \wedge \sigma_v)}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv \\ &= \pm \iint_A F \bullet (\sigma_u \wedge \sigma_v) du dv \\ &= \pm \iint_{\Sigma} F \bullet dS \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\iint_{\Sigma} (F \bullet \nu) dS = \pm \iint_{\Sigma} F \bullet dS$$

**Exemple**

Nous voulons calculer  $\iint_{\Sigma} f dS$  où :

$$f(x, y, z) = z, \quad \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4(x^2 + y^2) = 4 + z^2 - 4z, 0 \leq z \leq 2, x \leq 0\}$$

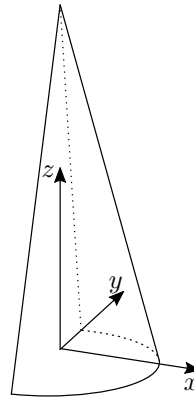
Comme quand nous travaillions dans  $\mathbb{R}^2$ , il faut commencer par dessiner et paramétriser  $\Sigma$ . Pour dessiner une surface, nous devons la comprendre. Or, nous pouvons voir que :

$$4 + z^2 - 4z = (z - 2)^2$$

Cela nous donne ainsi :

$$\Sigma = \left\{ x^2 + y^2 = \frac{(z - 2)^2}{4}, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0 \right\}$$

Nous remarquons donc que, sur le plan  $O_{xy}$ , nous avons des demi-cercles de rayon  $\frac{|z-2|}{2} = \frac{2-z}{2}$ . Cela nous donne ainsi que  $\Sigma$  est un demi cône :



Nous devons maintenant paramétriser notre surface. Utilisons les coordonnées cylindriques :

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

En mettant ça dans notre première équation, nous obtenons :

$$x^2 + y^2 = \frac{(z - 2)^2}{4} \iff r^2 = \frac{(z - 2)^2}{4} \iff r = \frac{2 - z}{2} \iff z = 2 - 2r$$

Nous pouvons ainsi éliminer une variable. Regardons maintenant les deux inégalités :

$$0 \leq z \leq 2 \iff 0 \leq 2 - 2r \leq 2 \iff 0 \leq r \leq 1$$

$$x \geq 0 \iff \underbrace{r}_{\geq 0} \cos(\theta) \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Cela nous donne ainsi la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\mapsto \Sigma \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 2 - 2r) \end{aligned}$$

La deuxième étape est maintenant de calculer  $\sigma_r \wedge \sigma_\theta$  :

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\theta = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{pmatrix} 2r \cos(\theta) \\ 2r \sin(\theta) \\ r \end{pmatrix} \implies \|\sigma_r \wedge \sigma_\theta\| = \sqrt{4r^2 + r^2} = \sqrt{5}r$$

Nous pouvons ensuite passer à la troisième étape, qui est de calculer notre intégrale :

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} f dS &= \iint_{[0,1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} f(\sigma(r, \theta)) \|\sigma_r \wedge \sigma_\theta\| dr d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2-2r) \sqrt{5} r dr d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sqrt{5} r^2 - \frac{2}{3} \sqrt{5} r^3 \right]_0^1 d\theta \\
 &= \frac{\pi \sqrt{5}}{3}
 \end{aligned}$$

#### Remarque

De manière générale, pour paramétriser une surface, il est souvent une bonne idée de prendre les coordonnées sphériques quand nous avons des  $x^2 + y^2 + z^2$  et, sinon, de prendre les coordonnées cylindriques si nous avons  $x^2 + y^2$ ,  $x^2 + z^2$  ou  $y^2 + z^2$ .

**Définition : Aire** L'aire d'une surface  $\Sigma$  est définie par :

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} 1 dS$$

### 5.3 Théorème de la divergence dans l'espace (I'm in space)

**Définition : Domaine régulier**  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  est un **domaine régulier** s'il existe des ouverts bornés  $\Omega_0, \dots, \Omega_k$  tels que :

1.  $\overline{\Omega_i} \subseteq \Omega_0$  pour  $1 \leq i \leq k$ .
2.  $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset$  pour  $1 \leq i < j \leq k$
3.  $\partial\Omega_i = \Sigma_i$  est une surface régulière par morceaux orientable
4.  $\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{i=1}^k \overline{\Omega_i}$

*Remarque*

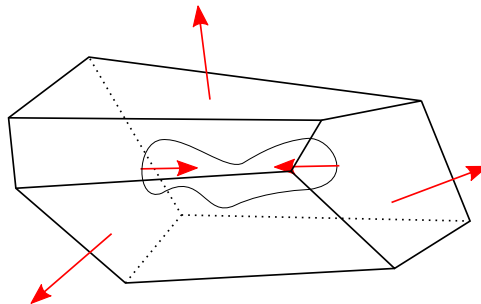
La définition est très similaire au cas en deux dimensions, mais nous demandons aussi que notre surface soit orientable.

*Observation*

Le quatrième point nous donne que  $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \dots \cup \partial\Omega_k$  est une union de surfaces régulières orientables. Ainsi, sur chaque morceau  $\Sigma$  régulier de  $\partial\Omega$ , il existe un champ de normales  $\nu : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^3$ .

**Définition**  
**Champ de normales extérieures**

: Un **champ de normales extérieures** à un domaine régulier  $\Omega$  est un champ  $\nu : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^3$  tel que, sur chaque  $\Sigma$  réguliers,  $\nu$  pointe vers l'extérieur de  $\Omega$ .



**Théorème de la divergence dans  $\mathbb{R}^3$**

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  régulier,  $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$  et  $\nu$  un champ de normales extérieures à  $\Omega$ . Alors, nous avons :

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(F) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} (F \bullet \nu) dS$$

*Observation*

Ce théorème est très similaire à celui dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemple 1**

Nous voulons vérifier le théorème de la divergence pour :

$$F(x, y, z) = (x^2, 0, 0), \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$$

*Dessin et paramétrisation de  $\Omega$*

La première étape est, comme d'habitude de faire un dessin et une paramétrisation de  $\Omega$ . Clairement,  $\Omega$  est un cylindre, et son schéma est plus bas dans ce document. Nous pouvons le paramétriser avec :

$$\Omega = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \mid 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 < z < 1\}$$

*Divergence*

La deuxième étape est maintenant de calculer la divergence :

$$\operatorname{div} F = 2x$$

*Intégrale triple*

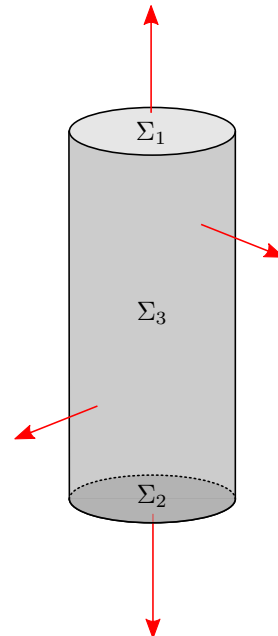
Nous pouvons ensuite passer à la troisième étape, le calcul de notre intégrale triple :

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r \cos(\theta) \cdot \underbrace{r}_{\text{Jacobien}} dz d\theta dr \\ &= \int_0^1 dz \int_0^1 r^3 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} 2 \sin(\theta) d\theta}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il faut faire attention car, ici, nous avons fait un changement de variable : nous voulions calculer l'intégrale selon  $dx dy dz$ , et nous devons donc multiplier par le Jacobien.

*Dessin et paramétrisation de  $\Sigma$*

Nous avons fait la moitié du théorème de la divergence, passons à l'autre moitié. La quatrième étape est, à nouveau, de faire un dessin et une paramétrisation :



Nous considérons le premier capuchon :

$$\Sigma_1 = \{(x, y, 1) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\sigma^1 : [0, 1] \times [0, 2\pi] \mapsto \Sigma_1$$

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 1)$$

Puis le deuxième capuchon :

$$\Sigma_2 = \{(x, y, 0) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$



$$\begin{aligned}\sigma^2 : [0, 1] \times [0, 2\pi] &\longmapsto \Sigma_2 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0)\end{aligned}$$

Et enfin la dernière surface :

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \\ \sigma^3 : [0, 2\pi] \times [0, 1] &\longmapsto \Sigma_3 \\ (\theta, z) &\longmapsto [\cos(\theta), \sin(\theta), z]\end{aligned}$$

*Champ de normales*

Passons maintenant à la cinquième étape qui est, à nouveau, de calculer le champ de normales. Il faut faire attention aux signes, ce qui nous donne, en regardant notre dessin :

$$\nu_P = \begin{cases} (0, 0, 1), & \text{si } P \in \Sigma_1 \\ (0, 0, -1), & \text{si } P \in \Sigma_2 \\ (\cos(\theta), \sin(\theta), 0), & \text{si } P \in \Sigma_3 \end{cases}$$

Si nous avions un moins bon dessin, nous aurions bien sûr pu utiliser les paramétrisations pour calculer les normales :

$$\begin{aligned}\sigma_r^1 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\theta^1 = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \implies \frac{\sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1}{\|\sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nous remarquons (en regardant le dessin) qu'elle pointe bien vers l'extérieur. En faisant exactement le même calcul, on trouve que  $\frac{\sigma_r^2 \wedge \sigma_\theta^2}{\|\sigma_r^2 \wedge \sigma_\theta^2\|} = (0, 0, 1)$ . Cependant, elle ne pointe cette fois pas dans la bonne direction, donc nous prenons plutôt la version allant de le sens opposé :  $\nu = (0, 0, -1)$ . Nous pouvons finalement faire exactement le même raisonnement pour la troisième paramétrisation.

*Intégrale double*

La sixième étape est finalement de calculer notre intégrale double :

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} F \bullet \nu dS &= \iint_{\Sigma_1} \underbrace{F \bullet \nu}_{=0} dS + \iint_{\Sigma_2} \underbrace{F \bullet \nu}_{=0} dS + \iint_{\Sigma_3} F \bullet \nu dS \\ &= \iint_{\Sigma_3} F \bullet \nu dS \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta), 0, 0) \bullet (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \underbrace{\|\sigma_\theta \wedge \sigma_z\|}_{=1} d\theta dz \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \cos^3(\theta) d\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

Le résultat est bien celui attendu.

Cette fois, nous n'avons pas fait de changement de variable, nous avons fait une paramétrisation de notre surface. Il ne faut donc pas multiplier par le Jacobien.

### Remarque

Si nous faisons une intégrale en  $n$  dimensions, alors on ne met rien. Cependant, dès que nous faisons un changement de variable, il faut mettre un Jacobien.

Si nous faisons une intégrale sur une surface dans un espace tridimensionnel, ou une intégrale sur une courbe dans un espace bi- ou tridimensionnel, alors nous devons

multiplier par notre paramétrisation. À nouveau, si nous avons besoin de faire un changement de variable, alors il faut multiplier par un Jacobien (même si on aurait simplement pu s'en tirer avec une meilleure paramétrisation dès le début).

---

Lundi 14 novembre 2022 — Cours 8 : J'aime bien cette date

**Exemple 2**

Nous voulons vérifier le théorème de la divergence pour :

$$F(x, y, z) = (z, z, z), \quad \Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < z(2 - z) \right\}$$

*Paramétrisation de l'intérieur*

La première étape est comme d'habitude de faire une paramétrisation de l'intérieur de notre ensemble.

Si  $z$  est fixé, nous avons un cercle de rayon  $z(2 - z)$ , ce qui nous montre que nous devrions utiliser des coordonnées cylindriques. De plus, pour avoir  $z(2 - z) > 0$ , nous avons besoin de  $z \in ]0, 2[$ . Nous trouvons ainsi :

$$(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

Cela nous donne donc finalement que :

$$\Omega = \{(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \mid z \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 2(2 - z)]\}$$

*Divergence*

La deuxième étape est, à nouveau, de calculer la divergence. Nous pouvons trouver que :

$$\operatorname{div} F = \dots = 1$$

*Intégrale en 3 dimensions*

La troisième étape est ensuite de calculer l'intégrale de la divergence sur l'intérieur de notre ensemble :

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F = \dots = \frac{16}{15} \pi$$

*Paramétrisation de la frontière*

La quatrième étape est maintenant de calculer une paramétrisation de la frontière. Nous remarquons qu'elle est atteinte quand  $r = z(2 - z)$ , donc nous pouvons prendre la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2] &\longmapsto \partial\Omega \\ (\theta, z) &\longmapsto (z(2 - z) \cos(\theta), z(2 - z) \sin(\theta), z) \end{aligned}$$

*Normale*

La cinquième étape est toujours de calculer la normale. Nous commençons ainsi par poser :

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_z = (z(2 - z) \cos(\theta), z(2 - z) \sin(\theta), -2z(1 - z)(2 - z))$$

Nous devons maintenant vérifier qu'elle pointe bien toujours à l'extérieur. Pour y arriver, nous pouvons remarquer que ce champ vectoriel est continu (on ne s'intéresse pas à ce qui se passe en  $r = 0$  et  $z = 2$  puisque ce sont des bords "pointus" mais, comme pour les intégrales en une dimension, on oublie ce qui se passe au bout), et donc nous avons uniquement besoin de le vérifier en un seul point. Ainsi, si on regarde en  $(\theta, z) = (0, 1)$  :

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_z = (1, 0, 0)$$

Elle pointe bien vers l'extérieure. Ceci nous donne alors que :

$$\nu = \frac{\sigma_{\theta} \wedge \sigma_z}{\|\sigma_{\theta} \wedge \sigma_z\|}$$

*Intégrale en 2 dimensions*

Nous pouvons finalement calculer notre intégrale :

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} (F \bullet \nu) dS &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left( F(\sigma(\theta, z)) \bullet \frac{\sigma_\theta \wedge \sigma_z}{\|\sigma_\theta \wedge \sigma_z\|} \right) \|\sigma_\theta \wedge \sigma_z\| d\theta dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} F(\sigma(\theta, z)) \bullet (\sigma_\theta \wedge \sigma_z) d\theta dz \\ &= \dots \\ &= \frac{16\pi}{5}\end{aligned}$$

## 5.4 Théorème de Stokes

**Définition : Bord d'une surface** Soit  $\Sigma$  une surface régulière par morceaux et orientable. Nous supposons ainsi que  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$ , où chaque  $\Sigma_i$  est une surface régulière avec une paramétrisation  $\sigma_i : \overline{A_i} \mapsto \Sigma_i$ .

On fixe un champ de normales  $\nu : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^3$  et on suppose qu'il est donné par :

$$\frac{\sigma_{i,u} \wedge \sigma_{i,v}}{\|\sigma_{i,u} \wedge \sigma_{i,v}\|} = \nu_{\sigma(u,v)}, \quad \forall i, \forall (u,v) \in \overline{A_i}$$

Finalement, nous supposons que, pour tout  $i$ ,  $\partial\overline{A_i}$  est une courbe simple fermée, régulière par morceaux et orientée positivement (de telle manière que  $\overline{A_i}$  est toujours à gauche, puisque c'est positif la gauche (aucune influence politique intentionnelle)). Alors, nous définissons le **bord** de notre surface  $\Sigma$  par :

$$\partial\Sigma = \partial\Sigma_1 \cup \dots \cup \partial\Sigma_k = \sigma_1(\partial\overline{A_1}) \cup \dots \cup \sigma_k(\partial\overline{A_k})$$

où l'on a enlevé les morceaux de courbes réduits à un point et les morceaux de courbe parcourus deux fois en sens inverse (une fois dans un sens et une fois dans l'autre).

### Théorème de Stokes

Soit  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière par morceaux orientable et  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est un ouvert contenant  $\Sigma \cup \partial\Sigma$ .

Alors :

$$\iint_{\Sigma} (\text{rot } F) \bullet dS = \int_{\partial\Sigma} F \bullet d\ell$$

*Remarque*

Le signe de  $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \bullet dS$  dépend de l'orientation de  $\Sigma$ , et le signe de  $\int_{\partial\Sigma} F \bullet d\ell$  dépend du sens de parcours. Cependant, pour calculer la première intégrale, nous avons besoin d'une paramétrisation. Ceci nous donne une orientation pour chaque surface, et nous pouvons ainsi utiliser cette information pour trouver le sens de parcours de  $\partial\Sigma$  correspondant.

*Observation*

C'est l'analogue du théorème de Green, mais pour les surfaces.

### Corollaire

Si  $\Sigma$  est une surface régulière par morceaux telle que  $\partial\Sigma = \emptyset$ , alors :

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } F \bullet dS = 0, \quad \forall F$$

*Exemple*

Par exemple, si  $\Sigma$  est une sphère et  $F$  est n'importe quel champ vectoriel (faute non-intentionnelle, mais j'ai décidé de la garder quand même parce qu'elle me fait rigoler ☺), alors :

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } F \bullet dS = 0$$

**Exemple 1**

Soit  $F(x, y, z) = (z, x, y)$  et la surface suivante :

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$$

Nous voulons vérifier le théorème de Stokes pour ce cas.

*Paramétrisation de la surface*

Nous remarquons que notre surface représente un cornet de glace. Puisque nous avons  $z^2 = x^2 + y^2$ , il semble judicieux d'utiliser des coordonnées cylindriques. La condition  $z^2 = x^2 + y^2$  nous donne  $z = r$  pour  $0 \leq r \leq 1$ . Nous avons ainsi la paramétrisation suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 1] \times [0, 2\pi] &\mapsto \Sigma \\ (z, \theta) &\mapsto (z \cos(\theta), z \sin(\theta), z) \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que, ici :

$$\overline{A} = [0, 1] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$$

*Calcul du rotationnel*

Calculons le rotationnel. Il faut faire attention au fait que, contrairement au cas en deux dimensions où c'est un scalaire, le rotationnel en trois dimensions est un vecteur :

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Intégrale en 2 dimensions*

Nous voulons ensuite calculer  $\iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} F) \bullet dS$ . Pour se faire, nous devons calculer la normale :

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}, \sigma_\theta = \begin{pmatrix} -z \sin(\theta) \\ z \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \implies \sigma_z \wedge \sigma_\theta = \begin{pmatrix} -z \cos(\theta) \\ -z \sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$

Nous n'avons pas besoin de regarder sa direction, tant que nous réutiliserons cette paramétrisation ensuite (et, de toute façon, il n'y a pas vraiment de direction meilleure qu'une autre). Nous pouvons donc calculer notre intégrale :

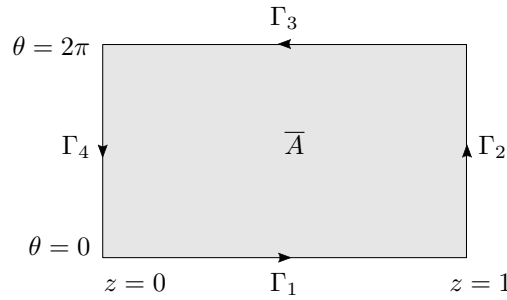
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} F) \bullet dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1, 1, 1) \bullet (-2 \cos(\theta), -2 \sin(\theta), z) d\theta dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-2 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta) + z) d\theta dz \\ &= \int_0^1 2\pi z dz \\ &= 2\pi \frac{1}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

*Paramétrisation du bord*

Nous avons pris :

$$\overline{A} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Ainsi, en faisant attention que les orientations des courbes laissent  $\overline{A}$  à gauche (pour avoir le même signe que ce que nous avons eu ci-dessus), nous pouvons faire le schéma suivant :

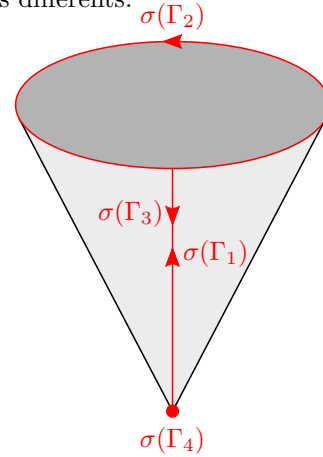


Nous trouvons ainsi  $\partial\bar{A} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , avec les paramétrisations suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\mapsto \Gamma_1 & \gamma_2 : [0, 2\pi] &\mapsto \Gamma_2 \\ t &\mapsto (t, 0) & t &\mapsto (1, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 : [0, 1] &\mapsto \Gamma_3 & \gamma_4 : [0, 2\pi] &\mapsto \Gamma_4 \\ t &\mapsto (1 - t, 2\pi) & t &\mapsto (0, 2\pi - t) \end{aligned}$$

Nous savons maintenant que  $\partial\Sigma = \sigma(\partial\bar{A}) = \sigma(\Gamma_1) \cup \sigma(\Gamma_2) \cup \sigma(\Gamma_3) \cup \sigma(\Gamma_4)$ , où nous enlevons les points et les courbes parcourues deux fois dans deux sens différents.



Nous trouvons ainsi :

$$\sigma(\Gamma_1) = \{\sigma(\gamma(t)) | t \in [0, 1]\} = \{(t, 0, t) | t \in [0, 1]\}$$

$$\sigma(\Gamma_2) = \{\sigma(\gamma_2(t)) | t \in [0, 2\pi]\} = \{(\cos(t), \sin(t), 1) | t \in [0, 2\pi]\}$$

$$\sigma(\Gamma_3) = \{\sigma(\gamma_3(t)) | t \in [0, 1]\} = \{(1 - t, 0, 1 - t) | t \in [0, 1]\} = -\sigma(\Gamma_1)$$

$$\sigma(\Gamma_4) = \{\sigma(\gamma_4(t)) | t \in [0, 2\pi]\} = \{(0 \cos(t), 0 \sin(t), 0) | t \in [0, 2\pi]\} = \{0\}$$

Or, puisque  $\sigma(\Sigma_1) = -\sigma(\Gamma_3)$  et  $\sigma(\Gamma_4)$  est un point, nous enlevons ces trois courbes. Cela nous donne ainsi :

$$\partial\Sigma = \sigma(\Gamma_2) = \{(\cos(t), \sin(t), 1) | t \in [0, 2\pi]\}$$

comme ce que nous aurions pu deviner intuitivement.

*Intégrale en une dimension*

Nous pouvons maintenant calculer notre intégrale en une dimension :

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Sigma} F \bullet dl &= \int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t), 1) \bullet \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (1, \cos(t), \sin(t)) \bullet (-\sin(t), \cos(t), 0) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t) + \cos^2(t)) dt \\
 &= \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

## Exemple 2

Nous voulons vérifier le théorème de Stokes pour  $F(x, y, z) = (0, -z^2, 0)$ , sur la surface  $\Sigma$  suivante :

$$\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0\}$$

qui est la demi-sphère de rayon 2.

*Paramétrisation de la surface*

Nous pouvons utiliser des coordonnées sphériques, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 \sigma : [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\mapsto \Sigma \\
 (\theta, \varphi) &\mapsto (2 \cos(\theta) \sin(\varphi), 2 \sin(\theta) \sin(\varphi), 2 \cos(\varphi))
 \end{aligned}$$

*Rotationnel*

Nous pouvons calculer notre rotationnel :

$$\text{rot } F = (2z, 0, 0)$$

*Intégrale en 2 dimensions*

Pour calculer notre intégrale en deux dimensions, nous avons besoin de trouver la normale. Nous prendront un produit scalaire avec le rotationnel, dont les deuxièmes et troisièmes composantes sont nulles, donc nous n'avons pas besoin de les calculer :

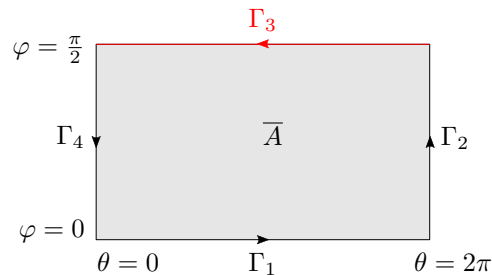
$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = (-4 \cos(\theta) \sin^2(\varphi), \dots, \dots)$$

Nous trouvons maintenant que :

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma} \text{rot } F dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos(\varphi) (-4 \cos(\theta) \sin^2(\varphi)) d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

*Bord de la surface*

Nous savons ensuite que le bord de la demi-sphère est simplement un cercle. Nous avons cependant simplement besoin de trouver son orientation.



En s'imaginant ce que représentent ces courbes sur la demi-sphère, nous voyons que les courbes  $\sigma(\Gamma_2)$  et  $\sigma(\Gamma_4)$  se simplifient, et que  $\sigma(\Gamma_1)$  est un point. Ainsi, nous trouvons que  $\partial\Sigma = \sigma(\Gamma_3)$ , avec

comme paramétrisation :

$$\begin{aligned}\gamma_3 : [0, 2\pi] &\longmapsto \Gamma_3 \\ t &\longmapsto \left(2\pi - t, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Et ceci implique que :

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 2\pi] &\longmapsto \sigma(\Gamma_3) \\ t &\longmapsto (2\cos(t), -2\sin(t), 0)\end{aligned}$$

ce qui est le sens inverse du sens habituel (donc il faut vraiment faire attention au sens).

*Intégrale en  
une dimension*

Nous pouvons finalement calculer notre intégrale :

$$\int_{\partial\Sigma} F \bullet d\ell = \int_0^{2\pi} F(2\cos(t), -2\sin(t), 0) \bullet \dots dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

comme attendu.





## Chapitre 6

# Séries de Fourier

### 6.1 Utilité de la théorie

#### But

Le but est de faire de l'analyse de fréquence.

Par exemple, quand on parle, on émet une onde sonore, qui fera vibrer le tympan à l'intérieur de l'oreille. Pour enregistrer un son dans un ordinateur, on va échantillonner l'amplitude en fonction du temps (on discrétise cette fonction continue). On peut ainsi se poser des questions sur, par exemple, le nombre d'échantillons qu'il faudrait prendre (de manière à ne pas utiliser trop de stockage). Cette question est répondue par le théorème de Nyquist-Shannon, qui utilise la théorie de Fourier. Ensuite, pour stocker efficacement ces données, on peut plutôt stocker les coefficients de la théorie de Fourier, ce qui nous fait gagner beaucoup de place (ce qui donne le format mp3). L'analyse de Fourier a aussi des applications en physique, comme pour déterminer la fréquence de résonance d'un matériau, ou en mathématiques, comme la résolution des équations différentielles, ou l'écriture de toute fonction périodique comme une somme infinie de sinus et cosinus (ou d'exponentielles complexes).

#### Théorème de Nyquist-Shannon

Quand nous échantillons une fonction amplitude, il faut un échantillon toutes les  $\frac{1}{2B}$  secondes, où  $B$  est la fréquence maximale que nous voulons pouvoir reproduire.

*Utilité*

L'oreille humaine n'entend que jusqu'à 20 kHz, donc on prend typiquement  $B = 44$  kHz.

*Preuve*

Ce théorème utilise la théorie de Fourier.

### 6.2 Séries de Fourier

#### Rappel

ponentielle complexe

: Ex- Il est important de se souvenir que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

*Remarque personnelle*

Je ressors cette vidéo très souvent, mais si vous n'avez pas l'intuition de pourquoi l'exponentielle complexe paramétrise un cercle, je vous conseille cette excellente (et très courte) vidéo de 3Blue1Brown :  
<https://www.youtube.com/watch?v=v0YEaeIClKY>

#### Définition Fonction $T$ - périodique

:  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est  **$T$ -périodique** si :

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

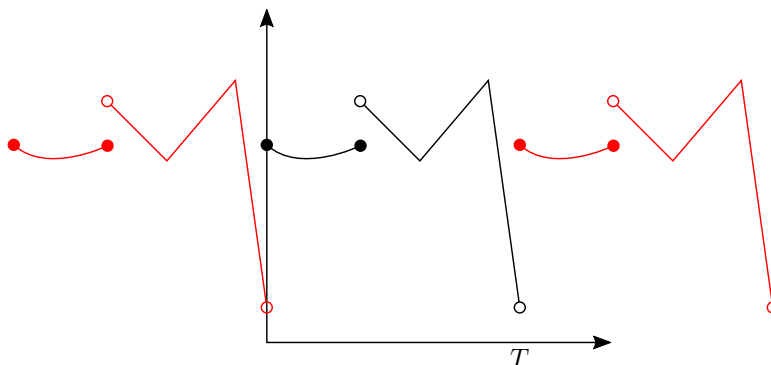
$T$  est appelée une **période** de  $f$ .

*Exemple*

Par exemple,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  et  $\tan(x)$  sont  $2\pi$ -périodiques, mais  $\tan(x)$  est aussi  $\pi$ -périodique. De manière similaire, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sin(\frac{2\pi}{T}nx)$  et  $\cos(\frac{2\pi}{T}nx)$  sont  $T$ -périodiques. Cela nous donne donc aussi que  $e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$  est  $T$ -périodique.

### Extension en $T$ -périodicité

Si  $f : [0, T[ \mapsto \mathbb{R}$ , on peut l'étendre en  $T$ -périodicité  $f_{ext} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  (sans que le résultat ne soit nécessairement continu).

*Exemple*

### Remarque

Si  $f$  est  $T$ -périodique, alors :

$$\int_0^T f(x)dx = \int_h^{T+h} f(x)dx$$

En effet, l'intégrale sur une période est symétrique, peu importe l'endroit où on la commence.

### Définition : Fonction continue par morceaux

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  est **continue par morceaux** s'il existe  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  tels que  $f$  est continue sur chaque  $]a_{i-1}, a_i[$  pour tout  $i$ , mais aussi que les limites à gauche et à droite existent :

$$\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(a_{i-1}^+), \quad \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(a_i^-)$$

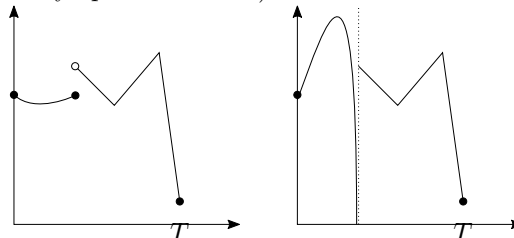
Cependant, les limites aux points  $a_i$  ne sont pas forcées d'exister.

*Terminologie*

On écrit  $f \in C_{morc}^0([a, b])$ .

*Exemple*

Par exemple, la fonction de gauche est continue par morceau, mais pas celle de droite puisque toutes les limites à gauche n'existent pas (à cause de l'asymptote verticale) :



### Définition Fonction différentiable par morceau

Soit  $f$  une fonction continue par morceau. Si  $f \in C^1(]a_{i-1}, a_i[)$  et tous les  $f'(a_i^\pm)$  existent (les dérivées à gauches et à droites, mais pas forcément au point), alors  $f$  est **différentiable par morceau**.

*Terminologie*

On écrit alors  $f \in C_{morc}^1([a, b])$ .

**Rappel : Espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$**  Nous allons avoir besoin de construire un espace vectoriel pour les séries de Fourier, ainsi rappelons nous de leur application sur les nombres réels. Nous posons  $V = \mathbb{R}^n$ , muni d'un produit scalaire :

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n v_j w_j$$

Nous pouvons ensuite trouver une base orthonormée :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Elle est dite orthonormée puisque :

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons ensuite écrire n'importe quel vecteur  $v$  à l'aide de cette base :

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n v_j e_j = \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j$$

**Séries de Fourier** Nous pouvons utiliser la même idée que dans le paragraphe précédent, en remplaçant tout par des choses plus compliquées. Nous prenons l'espace vectoriel suivant :

$$V = \{f = g + ih \mid g, h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ sont } T\text{-périodiques et } C_{\text{morc}}^1([0, T])\}$$

Nous sommes dans un cas continu, donc nous utilisons une intégrale à la place des sommes discrètes pour notre produit scalaire :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(x) \overline{f_2(x)} dx$$

où  $\overline{f_2(x)}$  est le conjugué complexe de  $f_2(x)$ .

Nous pouvons ensuite trouver la base orthonormée suivante :

$$e^{i \frac{2\pi}{T} nx} = \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right), \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}$$

En effet, elle est bien orthonormée :

$$\left\langle e^{i \frac{2\pi}{T} mx}, e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i \frac{2\pi}{T} mx} e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

comme vu dans la huitième série d'exercice.

Nous avons donc maintenant l'espoir de pouvoir écrire :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle f, e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \right\rangle e^{i \frac{2\pi}{T} nx}$$

Ainsi, cela nous pousse à faire la prochaine définition.

**Définition** : Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et  $C^1_{morc}([0, T])$ . Les coefficients de Fourier complexes sont défini comme :

$$c_n = \left\langle f, e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dx, \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}$$

**Définition** : La **somme partielle de Fourier complexe** d'ordre  $N$  est :

**Somme partielle de Fourier complexe**

$$F_N^{\mathbb{C}} f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

**Définition** : La **série de Fourier complexe** de  $f$  est :

$$F^{\mathbb{C}} f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N^{\mathbb{C}} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

**Théorème de Dirichlet** : Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et  $C^1_{morc}([0, T])$ , alors :

$$F^{\mathbb{C}} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}$$

*Remarque*

Si  $f$  est continue en  $x$ , alors cela nous donne exactement le résultat que nous espérions :

$$F^{\mathbb{C}} f(x) = f(x)$$

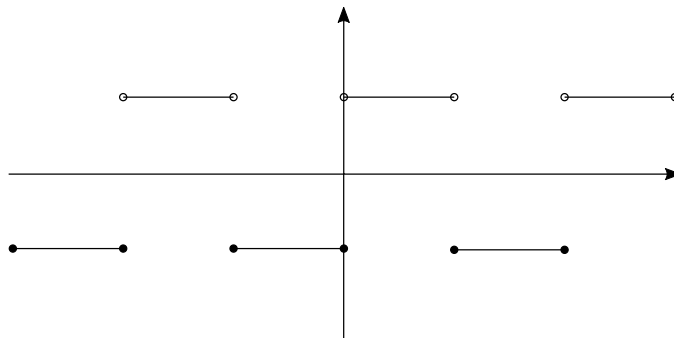
Nous avons donc réussi à écrire nos fonctions comme une somme de sinus et cosinus.

**Exemple**

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

étendue par 2-périodicité.



Cette fonction est bien  $C^1_{morc}([-1, 1])$ . Par la définition des coefficients complexes de la série de Fourier, on trouve que (puisque on intègre le produit de deux fonctions

2-périodiques) :

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) e^{-i\frac{2\pi}{2}nx} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i\pi nx} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 -e^{-i\pi nx} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i\pi nx} dx \\
 &= \frac{-1}{2} \left[ \frac{1}{-i\pi n} e^{-i\pi nx} \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{-i\pi n} e^{-i\pi nx} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2i\pi n} (1 - e^{i\pi n}) - \frac{1}{2i\pi n} (e^{-i\pi n} - 1) \\
 &= \frac{1}{2i\pi n} (1 - (-1)^n - (-1)^n + 1) \\
 &= \frac{1 - (-1)^n}{i\pi n}
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi trouvé que :

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{i\pi n}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Et on trouve donc finalement que :

$$F^{\mathbb{C}} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi nx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i\pi(2k+1)} e^{i\pi(2k+1)x}$$

en posant  $n = 2k + 1$ .

Nous pouvons vérifier que  $F^{\mathbb{C}} f(0) = \frac{1+(-1)}{2} = 0$  :

$$F^{\mathbb{C}} f(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\pi n \cdot 0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \underbrace{(c_N + c_{-N})}_{=0} + \dots + \underbrace{(c_1 + c_{-1})}_{=0} + \underbrace{c_0}_{=0} \right] = 0$$

### Version réelle des séries de Fourier

Nous voyons que :

$$c_n + c_{-n} = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \left( e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} + e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \right) \frac{2}{2} dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx$$

par la définition du cosinus complexe.

De manière similaire :

$$i(c_n - c_{-n}) = \frac{i}{T} \int_0^T f(x) \left( e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} - e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \right) \frac{-2i}{-2i} dx = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx$$

par la définition du sinus complexe.

Cela nous amène donc à la définition suivante.

**Définition** : Les **coefficients de Fourier réels** de  $f$  sont :

**Coefficients de  
Fourier réels**

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx, \quad n \geq 1$$

où  $a_n = c_n + c_{-n}$  et  $b_n = i(c_n - c_{-n})$ .

**Observation**

Nous remarquons que :

$$\begin{aligned} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx} + c_{-n} e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} &= (c_n + c_{-n}) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + i(c_n - c_{-n}) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \\ &= a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \end{aligned}$$

De là, nous trouvons :

$$\begin{aligned} F_N^{\mathbb{C}} f(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx} + \sum_{n=1}^N c_{-n} e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right) \end{aligned}$$

Cela justifie la définition suivante.

**Définition :** La **somme partielle de Fourier réelle** d'ordre  $N$  de  $f$  est :

$$F_N^{\mathbb{R}} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right)$$

**Définition :** La **série de Fourier** réelle de  $f$  est :

$$F^{\mathbb{R}} f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N^{\mathbb{R}} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right)$$

**Remarque importante**

Puisque nous n'avons fait que réordonner les termes, les deux objets sont les mêmes :

$$F_N^{\mathbb{R}} f(x) = F_N^{\mathbb{C}} f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} F_N f(x)$$

Et ainsi :

$$F^{\mathbb{R}} f(x) = F^{\mathbb{C}} f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} F f(x)$$

**Exemple**

Reprenons la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

étendue par 2-périodicité.

Nous avons trouvé que :

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{i\pi n}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Nous pouvons donc calculer nos coefficients réels :

$$a_n = c_n + c_{-n} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{i\pi n} - \frac{2}{i\pi n} = 0, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ i\left(\frac{2}{i\pi n} + \frac{2}{i\pi n}\right) = \frac{4}{\pi n}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Et nous trouvons donc une autre forme pour notre série de Fourier :

$$Ff(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i\pi(2k+1)} e^{i\pi(2k+1)x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(\pi(2k+1)x)$$

en posant à nouveau  $n = 2k + 1$ .

**Passage réel vers complexe** Nous savons que :

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}$$

Or, cela implique que :

$$\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad \text{si } n \geq 1 \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

---

Lundi 28 novembre 2022 — Cours 10 : L'identité de Parseval le Gaulois

**Théorème : Identité de Parseval** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et  $C_{morc}^1([0, T])$ . Alors :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

*Preuve*

Prouvons uniquement le cas où  $T = 2\pi$ , et  $f$  est continue.  
On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx \right)}_{=\bar{c}_n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{c}_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

On peut maintenant convertir cette série avec les coefficients réels :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &= |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} + \frac{a_n^2 + b_n^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \end{aligned}$$

**Application : Calcul de série** Nous avons déjà vu comment utiliser les séries de Fourier afin de calculer des séries dans la neuvième série d'exercices, mais voyons maintenant comment appliquer l'identité de Parseval pour ce même objectif.

Nous voulons calculer la valeur de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . On pose  $f(x)$  comme la fonction  $2\pi$  périodique telle que  $f(x) = x$  sur  $[-\pi, \pi[$ . Nous trouvons alors :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx$$

Si  $n = 0$ , alors nous intégrons une fonction impaire sur un intervalle symétrique, donc  $c_0 = 0$ . Si  $n \neq 0$ , alors on trouve :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}}{-in} \right) + \frac{1}{2\pi in} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx}_{=0} \\ &= \frac{e^{in\pi}}{-in} \\ &= i \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

On trouve donc que  $|c_n|^2 = \frac{1}{n^2}$ , ce qui nous donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \underbrace{|c_0|^2}_{=0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

Et, par l'identité de Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

Ainsi, cela nous donne que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \implies \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

### Remarque

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et  $C_{morc}^1([0, T])$ .

Si  $f$  est paire, alors  $f(x) \sin(\frac{2\pi}{T}nx)$  est impaire et  $T$ -périodique. Ainsi, puisque les  $b_n$  sont calculés en intégrant cette fonction entre  $-\frac{T}{2}$  et  $\frac{T}{2}$ , alors on trouve que, pour tout  $n$  :

$$b_n = 0$$

De manière similaire, si  $f$  est impaire, alors  $f(x) \cos(\frac{2\pi}{T}nx)$  est impaire et  $T$ -périodique. Ainsi, pour tout  $n$  :

$$a_n = 0$$

Regarder la parité de notre fonction peut donc nous permettre de diviser par deux le nombre de calculs.



## 6.3 Séries de Fourier en sinus et en cosinus

**Définition : Série de Fourier en cosinus** Soit  $f \in C_{morc}^1([0, L])$ .

La **série de Fourier en cosinus** de  $f$  est :

$$F_c f(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

Avec :

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

**Définition : Série de Fourier en sinus** Soit  $f \in C_{morc}^1([0, L])$ .

La **série de Fourier en sinus** de  $f$  est :

$$F_s f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

Avec :

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

**Propriété**

Soit  $f \in C_{morc}^1([0, L])$ . Si  $x \in ]0, L[$ , alors :

$$F_c f(x) = F_s f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}$$

De plus, on a :

$$F_c f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad F_c f(L) = \lim_{x \rightarrow L^-} f(x)$$

$$F_s f(0) = F_s f(L) = 0$$

*Remarque*

En particulier, si  $f$  est continue, alors, pour  $x \in ]0, L[$  :

$$F_c f(x) = F_s f(x) = f(x)$$

*Observation*

Là où les séries de Fourier “classiques” permettent de représenter n’importe quelle fonction périodique sur  $\mathbb{R}$ , les séries de Fourier en sinus et en cosinus permettent uniquement de représenter une fonction sur un intervalle fini.

*Preuve*

Considérons les deux fonctions  $f_+$  et  $f_-$  définies par :

$$f_{\pm}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in ]0, L[ \\ \pm f(-x), & \text{si } x \in ]-L, 0[ \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

étendues par  $2L$ -périodicité.

En d’autres mots,  $f_+$  est une extension paire de  $f$  et  $f_-$  est une extension impaire de  $f$ , les deux telles que  $f_{\pm} = f$  sur  $]0, L[$ .

Puisque  $f_+$  est paire, ses coefficients de sinus sont 0. De plus, on trouve que :

$$F f_+ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{2L} nx\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{2L} \int_0^{2L} f_+(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f_+(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx + \int_0^L f_+(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^L \underbrace{f_+(x)}_{=f(x)} \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) dx \\
 &= \tilde{a}_n
 \end{aligned}$$

Et on trouve ainsi que, pour  $x \in ]0, L[$  :

$$F_c f(x) = F f_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
 F_C f(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{f_+(0-h)}^{=f(h)} + f(0+h)}{2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) \\
 F_C f(L) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{f_+(L+h)}^{=f(L-h)} + f(L-h)}{2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(L-h)
 \end{aligned}$$

comme attendu.

La preuve pour  $F_s f$  est similaire et utilise  $F f_-$ .

□

### Exemple

Prenons  $f(x) = x$  pour  $x \in [0, 1]$ .

Nous trouvons que, pour  $n \neq 0$  :

$$\tilde{a}_n = 2 \int_0^1 x \cos(\pi n x) dx = \frac{2}{\pi^2 n^2} (-1 + (-1)^n)$$

Et ainsi :

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \geq 2 \text{ pair} \\ \frac{-4}{\pi^2 n^2}, & n \text{ impair} \end{cases}$$

De manière similaire, on peut trouver que :

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi n} (-1)^n$$

Cela implique que, sur  $x \in ]0, 1[$  :

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos(\pi(2k+1)x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (-1)^n \sin(\pi n x)$$

où la première série est la série de Fourier en cosinus et la deuxième celle en sinus.

## 6.4 Application aux équations différentielles ordinaires

### Remarque

La résolution d'équation différentielle (l'équation de la chaleur en particulier) était la motivation originale de Fourier.

### Proposition

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue et  $T$ -périodique telle que  $f'$  existe (sauf éventuellement en un nombre fini de points) sur  $[0, T]$  et telle que  $f' \in C^1_{\text{morc}}([0, T])$ . Alors :

$$Ff'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n i \frac{2\pi}{T} n e^{i \frac{2\pi}{T} nx}$$

#### Remarque 1

Quand on dérive, on peut donc simplement dériver l'exponentielle à l'intérieur.

#### Remarque 2

Il en suit que :

$$Ff'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\pi}{T} n b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) - \frac{2\pi}{T} n a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right]$$

Ainsi, si les coefficients de Fourier de  $f$  sont  $c_n$  (et  $a_n, b_n$ ), alors :

$$c'_n \stackrel{\text{déf}}{=} i \frac{2\pi}{T} n c_n, \quad a'_n = \frac{2\pi}{T} n b_n, \quad b'_n = -\frac{2\pi}{T} n a_n$$

De plus, si  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est  $T$ -périodique, continue et telle que  $f' \in C^1_{\text{morc}}([0, T])$ , alors on peut calculer les coefficients de  $f$  à partir de ceux de  $f'$ .

#### Idée de preuve

Dans l'idée, puisque  $f(x) = Ff(x)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (Ff(x))' \\ &= \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \right)' \\ &\stackrel{\dagger}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left( e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \right)' \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n i \frac{2\pi}{T} n e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \end{aligned}$$

L'égalité  $\dagger$  est celle qu'il faudrait justifier formellement afin d'avoir une preuve correcte. Nous ne le ferons pas dans ce cours.

### Exemple

Soit  $f(x) = |x|$  sur  $[-1, 1]$  étendue de telle manière à être 2-périodique. Nous avons alors :

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1, & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Nous posons  $f'(-1) = -1$  et  $f'(0) = 0$  (ce choix est arbitraire et ne change pas notre résultat). Pour  $f'$ , nous avons déjà calculé que :

$$c'_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{i\pi n}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Par la propriété du paragraphe précédent, on trouve :

$$c'_n = i \frac{2\pi}{T} n c_n = i\pi n c_n \iff c_n = \frac{1}{i\pi n} c'_n$$

Ainsi, si  $n \neq 0$ , nous obtenons que :

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-2}{\pi^2 n^2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Cependant, si  $n = 0$ , alors  $c'_n = 0$  et donc on n'a pas d'information sur  $c_0$ . C'est normal, puisque c'était une constante qui a été enlevée par la dérivée. Nous sommes forcés de la calculer :

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Et donc :

$$Ff(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \text{ impair}} \frac{-2}{\pi^2 n^2} e^{inx}$$

### Application à une EDO

Nous voulons trouver une fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique telle que :

$$f'(x) - f(x) = h(x)$$

où  $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction continue,  $2\pi$ -périodique et  $C^1_{\text{morc}}(0, 2\pi)$ .

*Résolution*

L'idée est de déterminer  $f$  à partir de  $Ff$ . Posons ainsi :

$$Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \implies Ff'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n i n e^{inx}$$

Supposons aussi que :

$$Fh(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{inx}$$

Comme  $f, f'$  et  $h$  sont continues, on peut remplacer chaque fonction par sa série de Fourier :

$$\begin{aligned} f' - f &= h \\ \iff Ff' - Ff &= Fh \\ \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n i n e^{inx} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{inx} \\ \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (in - 1) e^{inx} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n e^{inx} \end{aligned}$$

Puisque c'est vrai pour tout  $x \in [0, 2\pi]$ , et puisque les coefficients de Fourier sont uniques, cette équation est équivalente à :

$$f' - f = h \iff c_n (in - 1) = \hat{c}_n \iff c_n = \frac{\hat{c}_n}{in - 1}, \quad \forall n$$

Or, puisque  $a_n = c_n + c_{-n}$  :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\hat{c}_n}{in - 1} - \frac{\hat{c}_{-n}}{in + 1} \\ &= \frac{\hat{c}_n(in + 1) - \hat{c}_{-n}(in - 1)}{-n^2 - 1} \\ &= -\frac{1}{n^2 + 1} (\hat{c}_n + \hat{c}_{-n}) - \frac{n}{n^2 + 1} i (\hat{c}_n - \hat{c}_{-n}) \\ &= -\frac{\hat{a}_n + n \hat{b}_n}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

où  $\hat{a}_n$  et  $\hat{b}_n$  sont les coefficients réels de  $h(x)$ .

Nous pouvons alors trouver de manière similaire que :

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \dots = -\frac{\hat{b}_n - n\hat{a}_n}{n^2 + 1}$$

*Application*

Prenons un cas concret pour  $h$  :

$$h(x) = 2 - \cos(x) + 2\sin(x) + \sin(2x) - 2\cos(3x)$$

$h$  est donné sous la forme de sa série de Fourier, donc on trouve :

$$\hat{a}_0 = 2 \cdot 2 = 4, \quad \hat{a}_1 = -1, \quad \hat{a}_2 = 0, \quad \hat{a}_3 = -2, \quad \hat{a}_n = 0, \quad \forall n \geq 4$$

$$\hat{b}_1 = 2, \quad \hat{b}_2 = 1, \quad \hat{b}_n = 0, \quad \forall n \geq 3$$

Et ainsi, par la formule trouvée précédemment, on obtient que :

$$a_0 = -4, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = -\frac{2}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{5}$$

$$b_1 = \frac{-\hat{b}_1 - \hat{a}_1}{2} = -\frac{3}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{5}, \quad b_3 = -\frac{3}{5}$$

et avec  $a_n = 0 = b_n$  pour tout  $n \geq 4$ .

On trouve donc que :

$$\begin{aligned} f(x) &= Ff(x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\ &= -2 - \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{2}{5} \cos(2x) + \frac{1}{5} \cos(3x) \\ &\quad - \frac{3}{2} \sin(x) - \frac{1}{5} \sin(2x) - \frac{3}{5} \sin(3x) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi résolu une équation différentielle sans calculer une seule intégrale (ce qui rend sa résolution beaucoup moins marrante).



## Chapitre 7

# Transformées de Fourier

## 7.1 Transformées de Fourier

### But

Le plus gros problème avec les séries de Fourier c'est que nous sommes obligés de travailler avec des fonctions périodiques. De plus, nous avons toujours cet objectif de travailler avec des fréquences.

L'idée est donc de construire une fonction  $\hat{f}$  à partir de  $f$  telle que  $\hat{f}(\alpha)$  représente "la quantité de fréquence  $\alpha$  dans  $f$ ".

Pour les séries de Fourier, nous avons défini un produit scalaire pour des fonctions  $T$ -périodiques, puis nous avons trouvé que nous pouvions faire une décomposition sur les vecteurs de bases, comme pour  $\mathbb{R}^n$  :

$$f(x) = Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle f, e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \right\rangle e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

où  $\left\langle f, e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \right\rangle$  représente la "quantité de  $e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$  dans  $f$ ". Cependant, puisque  $e^{i\alpha x}$  est une fonction typique de fréquence  $\alpha$ ,  $\left\langle f, e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \right\rangle$  est "la quantité de fréquence  $\frac{2\pi}{T}$  dans  $f$ ".

Nous voulons généraliser cette idée à des fonctions non périodiques (avec  $T \rightarrow \infty$ ), et à des fréquences arbitraires.

**Définition** : Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  (ou  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ ) telle que :  
**Transformée de Fourier**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

La **transformée de Fourier** de  $f$  est la fonction complexe  $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  donnée par :

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

*Remarque 1* On note souvent  $\hat{f}(\alpha) = \mathcal{F}f(\alpha)$ .

*Remarque 2* La condition  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  est un peu ennuyeuse. Cependant, nous pouvons nous en débarrasser en utilisant la théorie des distributions de Schwartz (que nous ne verrons pas dans ce cours).

*Intuition* Nous pouvons voir  $\mathcal{F}f(\alpha)$  comme "la quantité de  $\alpha$  dans  $f$ ".

**Exemple 1**

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\beta x}, & \text{si } x \in [-L, L] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

En appliquant la définition des transformées de Fourier, nous avons :

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L e^{i(\beta-\alpha)x} dx$$

Si  $\alpha = \beta$  alors on trouve :

$$\mathcal{F}f(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L dx = \frac{2L}{\sqrt{2\pi}}$$

Si  $\alpha \neq \beta$ , alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L e^{i(\beta-\alpha)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\beta-\alpha)i} \left[ e^{i(\beta-\alpha)L} - e^{-i(\beta-\alpha)L} \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}(\beta-\alpha)} \sin((\beta-\alpha)L) \end{aligned}$$

Regardons ce qui se passe quand  $\alpha$  est proche de  $\beta$  :

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(\beta-\alpha)} \sin((\beta-\alpha)L) = \frac{2L}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\frac{\sin((\beta-\alpha)L)}{(\beta-\alpha)L}}_{\rightarrow 1} \rightarrow \frac{2L}{\sqrt{2\pi}}$$

Et maintenant quand  $\alpha$  est loin de  $\beta$  :

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \underbrace{\frac{1}{\beta-\alpha}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{2 \sin((\beta-\alpha)L)}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{borné}} \rightarrow 0$$

Nous avons donc bien trouvé que notre transformée de Fourier met en évidence la fréquence  $\beta$ .

**Exemple 2**

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{si } x \in [a, b] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons trouver sa transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\alpha) = \mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \gamma e^{-i\alpha x} dx =$$

Cela nous donne ainsi :

$$\hat{f}(\alpha) = \begin{cases} \frac{-\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\alpha b} - e^{-i\alpha a}}{i\alpha}, & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}}(b-a), & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

**Exemple 3**

Prenons la fonction suivante :

$$f(x) = e^{-|x|}$$



Nous trouvons alors que :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x| - i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\alpha)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{(-1-i\alpha)x} dx\end{aligned}$$

Ce qui nous donne que :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha} \right]_{-\infty}^0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-(1+i\alpha)x}}{-(1+i\alpha)} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{1-i\alpha} - 0 + 0 - \frac{1}{-(1+i\alpha)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\alpha + 1-i\alpha}{1+\alpha^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)}\end{aligned}$$

**Définition** : Soit  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ , une fonction telle que :  
**Transformée de Fourier inverse**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\alpha)| d\alpha < +\infty$$

La **transformée de Fourier inverse** de  $g$ ,  $\mathcal{F}^{-1}g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ , est définie par :

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

*Observation* C'est la même formule que la transformée de Fourier classique, mais sans le moins dans l'exponentielle.

**Théorème : Formule d'inversion** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  une fonction telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha < \infty$$

où  $\hat{f}(\alpha) = \mathcal{F}f(\alpha)$ .

Alors :

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = f(x)$$

*Remarque* Il suit aussi que :

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}))(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha) = \hat{f}(\alpha)$$

**Exemple**

Soit  $f(x) = e^{-|x|}$ . Nous avons trouvé que :

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)}$$

Commençons par vérifier que la transformée de Fourier est intégrable en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)| d\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} d\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} [\arctan(\alpha)]_{-\infty}^{\infty} = \sqrt{2\pi} < \infty$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème d'inversion.

Notre intégrale ci-dessus nous donne déjà que

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) d\alpha = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1 = f(0)$$

Maintenant, pour  $x \neq 0$  :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\alpha^2)}\right)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha x} dx$$

Cependant, puisque  $\frac{1}{1+\alpha^2}$  est pair et  $\sin(\alpha x)$  est impair, leur produit est impair et donc la composante complexe de cette intégrale donne 0. Nous trouvons pour la composante réelle que :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} \cos(\alpha x) dx$$

Maintenant que nous avons ce résultat, nous pouvons l'utiliser pour calculer une intégrale. Puisque  $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(1) = f(1)$ , nous trouvons que :

$$e^{-|1|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha)}{1+\alpha^2} d\alpha \implies \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

Ce résultat est très difficile à obtenir autrement.

<i>Remarque personnelle</i>	Le résultat de cette intégrale est absolument magnifique, et je pense qu'il faut prendre quelques secondes pour l'apprécier à sa juste valeur !
---------------------------------	---

## Propriétés

Soient  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  telles que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$$

Alors, nous avons les propriétés suivantes :

- (Continuité)  $\mathcal{F}f(\alpha)$  est continue en  $\alpha$ .
- (Linéarité) Pour tout  $a, b \in \mathbb{C}$  :

$$\mathcal{F}(af + bg)(\alpha) = a\mathcal{F}(f)(\alpha) + b\mathcal{F}(g)(\alpha)$$

- (Décalage) Pour tout  $b \in \mathbb{C}$  :

$$\mathcal{F}(f(x+b))(\alpha) = e^{ib\alpha} \mathcal{F}(f)(\alpha)$$

- (Dilatation) Pour tout  $c \neq 0$  :

$$\mathcal{F}(f(cx))(\alpha) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\alpha}{c}\right)$$

- (Dérivée) Si de plus  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , et  $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty$ , alors :

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f\right)(\alpha) = \mathcal{F}(f')(\alpha) = i\alpha \mathcal{F}(f)(\alpha)$$

Nous avons des propriétés équivalentes aux trois dernières mais pour l'autre paramètre. Il est intéressant de noter que la constante multiplicative est simplement déplacée au niveau de  $f$  et que  $i$  est remplacé par  $-i$  :

- (Décalage) Pour tout  $\beta \in \mathbb{C}$  :

$$\mathcal{F}(f)(\alpha + \beta) = \mathcal{F}(e^{-i\beta x} f(x))(\alpha)$$

- (Dilatation) Pour tout  $\gamma \neq 0$  :

$$\mathcal{F}(f)(\gamma\alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{|\gamma|} f\left(\frac{x}{\gamma}\right)\right)(\alpha)$$

- (Dérivée) Si de plus  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , et est telle que  $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| < \infty$ , alors :

$$\frac{d}{d\alpha} \mathcal{F}(f)(\alpha) = (\mathcal{F}(f))'(\alpha) = \mathcal{F}(-ixf(x))(\alpha)$$

*Remarque*

Nous pouvons aussi calculer la  $n$ -ème dérivée, si toutes les hypothèses sont correctement vérifiées :

$$\mathcal{F}(f^{(n)})(\alpha) = (i\alpha)^n \mathcal{F}(f)(\alpha), \quad (\mathcal{F}f)^{(n)}(\alpha) = \mathcal{F}((-ix)^n f(x))(\alpha)$$

*Preuve*

Démontrons uniquement les propriétés de dérivation.

Pour la première dérivée, nous pouvons faire une intégrale par parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x) e^{-i\alpha x}]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} (-i\alpha) dx \end{aligned}$$

Puisque  $f(x)$  est intégrable en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ , nous obtenons qu'elle tend vers 0 à ces bornes. Or, puisque  $|e^{-i\alpha x}| = 1$  pour tout  $x$ , on obtient que :

$$\mathcal{F}(f')(\alpha) = 0 - 0 + \frac{i\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx = i\alpha \mathcal{F}(f)(\alpha)$$

Passons maintenant à la dérivée de la transformée. Nous aurions besoin de justifier l'échange de la dérivée et de l'intégrale, mais en supposant qu'on ait le droit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \mathcal{F}f(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{d\alpha} e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ix f(x) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \mathcal{F}(-ixf(x))(\alpha) \end{aligned}$$

□

**Théorème : Identité de Parseval** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  une fonction telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$$

où  $\hat{f}(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha)$ .

*Preuve*Si  $f$  est réelle, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha}_{=\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) \overline{\hat{f}(\alpha)} d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha
\end{aligned}$$

□

**Proposition**  
**Point fixe des**  
**transformées**

: Soit  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Alors  $f$  est un point fixe de la transformée :

$$\mathcal{F}f(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

*Preuve*Pour commencer, vérifions que notre fonction est bien intégrable en valeur absolue sur  $]-\infty, +\infty[$  :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \sqrt{\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy}
\end{aligned}$$

En faisant un changement de variable polaire, on trouve que c'est égal à :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta} \\
&= \sqrt{\int_0^{2\pi} d\theta \left[ -e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{\infty}} \\
&= \sqrt{2\pi \cdot 1} \\
&= \sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

ce qui est bien inférieur à  $\infty$ . Cela montre au passage que :

$$\mathcal{F}f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

Maintenant, nous voulons calculer la transformée de Fourier. Appliquer la formule semble compliquée, donc utilisons une autre méthode. Nous remarquons que, pour notre fonction  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ , nous avons  $f'(x) = -xf(x)$ . Nous appliquons maintenant les propriétés de dérivations (que nous avons le droit d'utiliser puisque  $f, f'$  et  $xf(x)$

sont intégrables en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$  :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha} \mathcal{F}f(\alpha) &= \mathcal{F}(-ixf(x))(\alpha) \\ &= i\mathcal{F}\left(\underbrace{-xf(x)}_{=f'(x)}\right)(\alpha) \\ &= i\mathcal{F}(f')(\alpha) \\ &= i \cdot i\alpha \mathcal{F}(f)(\alpha) \\ &= -\alpha \mathcal{F}f(\alpha)\end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé que la transformée de Fourier de notre fonction respecte l'équation :

$$\hat{f}'(\alpha) = -\alpha \hat{f}(\alpha)$$

Cette équation est une EDO homogène qui peut être résolue facilement :

$$\hat{f}(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

Or, nous avons trouvé ci-dessus que  $\hat{f}(0) = 1$ , ce qui nous donne que  $C = 1$  et donc :

$$\hat{f}(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

comme voulu. □

---

**Lundi 12 décembre 2022 — Cours 12 : On fait comme s'il n'y avait pas de problème**

**Proposition** : Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction intégrable en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ .

**Parité des transformées** 1. Si  $f$  est paire, alors :

$$\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(\alpha x) dx$$

En particulier,  $\hat{f}$  est paire.

2. Si  $f$  est impaire, alors :

$$\hat{f}(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(\alpha x) dx$$

En particulier,  $\hat{f}$  est impaire.

*Preuve*

La preuve est considérée triviale et laissée en exercice au lecteur.

**Remarque**

Comme pour les séries de Fourier, si  $f : [0, \infty[ \mapsto \mathbb{R}$ , on peut considérer la transformée de Fourier en sinus de  $f$  en l'étendant sur  $\mathbb{R}$  de manière à la rendre impaire. De manière similaire, en étendant  $f$  de manière la rendre paire, nous pouvons considérer la transformée de Fourier en cosinus de  $f$ .

## 7.2 Produit de convolution

### Définition Produit de convolution

: Soient  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  des fonctions intégrables en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ . Alors, le **produit de convolution** de  $f$  et  $g$ , noté  $f * g$ , est la fonction :

$$f * g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

L'idée est que nous gardons la fonction  $g$  fixée, que nous retournons (prenons la symétrie de) la fonction  $f$  et la déplaçons pour que son centre soit en  $x$ , puis calculons l'intégrale de leur produit.

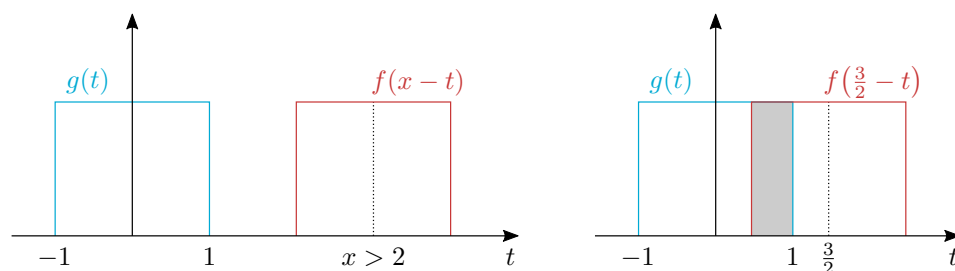
*Remarque personnelle* Il y a une vidéo de 3Blue1Brown sur ce sujet :  
<https://www.youtube.com/watch?v=KuXjwB4LzSA>

### Exemple 1

Considérons les fonctions suivantes :

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Intuitivement, en regardant le dessin ci-dessous, nous pouvons voir que si  $x > 2$ , alors  $f * g(x) = 0$ , mais  $f * g(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$ .



Calculons maintenant notre produit de convolution, en prenant le changement de variable  $y = x - t$  :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dx = \int_{-1}^1 f(x-t)dt = - \int_{x+1}^{x-1} f(y)dy = \int_{x-1}^{x+1} f(y)dy$$

Ainsi, nous obtenons que  $f * g(x) = 0$  si  $x \in [2, \infty[$  ou  $x \in ]-\infty, -2]$ . De plus, pour  $x \in [0, 2[$  :

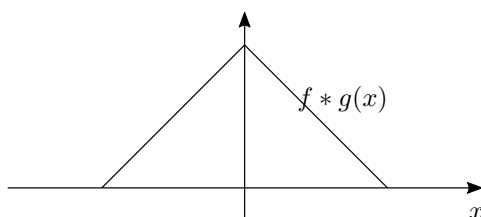
$$f * g(x) = \int_{x-1}^1 1dx = 1 - x + 1 = 2 - x$$

Et de manière similaire, si  $x \in [-2, 0]$  :

$$f * g(x) = \int_{-1}^{x+1} 1dx = 2 + x$$

Nous obtenons ainsi que :

$$f * g(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & \text{si } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



**Exemple 2**

Prenons  $f(x) = g(x) = e^{-|x|}$ . Alors, nous obtenons, si  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|} e^{-|t|} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-(x-t)} e^t dt + \int_0^x e^{-(x-t)} e^{-t} dt + \int_x^{\infty} e^{x-t} e^{-t} dt \\ &= \left[ \frac{e^{2t-x}}{2} \right]_{-\infty}^0 + x e^{-x} + \left[ \frac{e^{x-2t}}{-2} \right]_x^{\infty} \\ &= \frac{e^{-x}}{2} + x e^{-x} + \frac{e^{-x}}{2} \\ &= e^{-x}(1+x) \end{aligned}$$

Similairement, si  $x \leq 0$ , on peut trouver que :

$$f * g(x) = e^x(1-x)$$

En mettant tout cela ensemble, nous obtenons que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f * g(x) = e^{-|x|}(1+|x|)$$

**Application physique**

En physique, la loi de désintégration radioactive nous dit que la masse d'un produit radioactif au fil du temps est décrit par la loi suivante :

$$M(t) = M_0 e^{-ct}$$

où  $c > 0$  est une constante dépendante du matériau et  $M_0 > 0$  la masse de départ. Nous nous demandons maintenant quelle est la masse radioactive au temps  $T$  si une centrale produit  $m(t)$  déchets radioactifs par seconde pendant  $[0, T]$  (qui se désintègrent naturellement en partie).

Commençons par discrétiser notre fonction. Nous pouvons approximer la masse produite entre  $t_i$  et  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  par  $m(t_i)\Delta t$ . Cette masse se désintègre entre  $t_i$  et  $T$ , et donc elle contribue environ  $m(t_i)\Delta t e^{-c(T-t_i)}$  à la radioactivité en  $T$ . La masse au temps  $T$  est donc approximée par :

$$M(t) \approx \sum_{i=0}^n m(t_i) \Delta t e^{-c(T-t_i)}$$

Nous pouvons faire tendre  $\Delta t$  vers 0 pour que ce ne soit plus une approximation, ce qui nous donne :

$$M(t) = \int_0^T m(t) e^{-c(T-t)} dt = (m(t) * e^{-ct})(T)$$

où  $m(t)$  est prise telle que  $m(t) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus [0, T]$ .

**Propriétés**

Soient  $f, g, h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  des fonctions intégrables en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ . Alors :

1.  $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h$
2.  $f * g = g * f$
3.  $(f * g) * h = f * (g * h)$

**Proposition  
Convolutions et  
transformées**

: Soient  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  des fonctions intégrables en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ . Alors :

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)| dx \in \mathbb{R}$
2.  $\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$

*Preuve 1*

Vérifions que notre intégrale est bien réelle (qu'elle n'est pas infinie) :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt \right| dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx dt \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

en prenant à nouveau le changement de variable  $y = x - t$ .*Preuve 2*Considérons maintenant la transformée de Fourier de la convolution (en prenant encore le changement de variable  $y = x - t$ ) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt e^{-i\alpha x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\alpha t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-i\alpha(x-t)} dx dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\alpha t} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\alpha(y)} dy}_{=\mathcal{F}(f)(\alpha)} dt \\
&= \mathcal{F}(f)(\alpha) \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\alpha t} dt \\
&= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(\alpha) \mathcal{F}(g)(\alpha)
\end{aligned}$$

□

**Proposition**  
**Convolution et**  
**transformées**  
**inverses**

: Soient  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  des fonctions telles que  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$  et  $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$  sont intégrables en valeur absolue sur  $] -\infty, \infty[$ . Alors :

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f} * \hat{g}) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}) = \sqrt{2\pi} fg$$

À partir de là, nous pouvons trouver que :

$$\hat{f} * \hat{g} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(fg) \implies \mathcal{F}(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

Ainsi, à un facteur de  $\sqrt{2\pi}$  près,  $\mathcal{F}$  transforme les convolutions en produits et inversement.

### 7.3 Application à des équations fonctionnelles

**Exemple 1**  
**EDO**

: Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction fixée. Nous cherchons une solution  $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  à l'équation :

$$-u''(t) + u(t) = f(t)$$

Nous obtenons ce genre d'équation si nous avons un ressort dans le vide, sur lequel nous appliquons une force  $f(t)$ .



Appliquons la transformée de Fourier sur notre équation :

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}(u'')(\alpha) + \mathcal{F}(u)(\alpha) &= \mathcal{F}(f)(\alpha) \\ \iff -(-\alpha^2)\hat{u}(\alpha) + \hat{u}(\alpha) &= \hat{f}(\alpha) \\ \iff \hat{u}(\alpha) &= \frac{1}{1+\alpha^2}\hat{f}(\alpha) \end{aligned}$$

Nous cherchons  $u$ , donc prenons la transformée de Fourier inverse :

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+\alpha^2}\hat{f}(\alpha)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+\alpha^2}\right) * \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|} * f\right)(t)$$

puisque  $\mathcal{F}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-|t|}\right) = \frac{1}{1+\alpha^2}$ .

Nous obtenons ainsi finalement que :

$$u(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-x|} f(x) dx$$

Par exemple, pour  $f(t) = e^{-|t|}$ , nous pouvons trouver que :

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}(1+|t|)$$

Nous avons vu cette convolution plus tôt dans ce cours.

### Exemple 2 EDO

: Considérons l'équation d'Airy (qui a des applications en physique quantique et en optique) :

$$u''(x) - xu(x) = 0$$

À nouveau, en appliquant la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(u'')(\alpha) - \mathcal{F}(xu(x))(\alpha) = 0 \iff -\alpha^2\hat{u}(\alpha) - i\hat{u}'(\alpha) = 0 \iff \alpha^2\hat{u}(\alpha) = -i\hat{u}'(\alpha)$$

C'est une EDL1 homogène, ce qui est facile à résoudre :

$$\hat{u}(\alpha) = Ce^{i\frac{\alpha^3}{3}}$$

Cette fonction n'est malheureusement pas intégrable en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ , puisque  $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\alpha)| d\alpha = +\infty$ . Ainsi,  $\mathcal{F}^{-1}$  n'est pas applicable. Mais, en l'appliquant quand même en faisant comme s'il n'y avait pas de problème, cela nous permet tout de même de deviner la solution :

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(Ce^{i\frac{\alpha^3}{3}}\right) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{\alpha^3}{3} + \alpha x\right)} d\alpha = \frac{2C}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\alpha^3}{3} + \alpha x\right) d\alpha$$

Cette fonction (à une constante multiplicative près) s'appelle la fonction d'Airy, et elle n'est exprimable à partir de fonctions élémentaires. On peut vérifier qu'elle est bien la solution à notre équation et que cette intégrale converge bien.

*Remarque*

Comme mentionné précédemment, à l'aide de la théorie des distributions nous pouvons enlever la nécessité pour  $\hat{f}$  d'être intégrable en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$  afin de calculer sa transformée inverse. C'est la raison pour laquelle ça a quand même marché ici.

### Exemple 3 Équation fonctionnelle

: Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction fixée. Nous cherchons une solution  $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  à l'équation fonctionnelle suivante :

$$9u(x) + 8(u * f)(x) = f(x)$$

En prenant une transformée de Fourier, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 9\hat{u}(\alpha) + 8\sqrt{2\pi}\hat{u}(\alpha)\hat{f}(\alpha) &= \hat{f}(\alpha) \\ \iff \hat{u}(\alpha)(9 + 8\sqrt{2\pi}\hat{f}(\alpha)) &= \hat{f}(\alpha) \\ \iff \hat{u}(\alpha) &= \frac{\hat{f}(\alpha)}{9 + 8\sqrt{2\pi}\hat{f}(\alpha)} \end{aligned}$$

En posant par exemple  $f(x) = e^{-|x|} \implies \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2}$ , on obtient :

$$\hat{u}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \left( 9 + 8\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\alpha^2} \right)^{-1} = \dots = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{25 + 9\alpha^2}$$

Cela ressemble à  $\frac{1}{1+\alpha^2}$ , donc essayons de le faire ressortir :

$$\hat{u}(\alpha) = \frac{1}{25} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + (\frac{3}{5}\alpha)^2} = \frac{1}{25} \hat{f}\left(\frac{3}{5}\alpha\right) = \frac{1}{25} \mathcal{F}(f)\left(\frac{3}{5}\alpha\right) = \frac{1}{25} \frac{5}{3} \mathcal{F}\left(f\left(\frac{5}{3}x\right)\right)(\alpha)$$

Ce qui nous donne finalement que :

$$u(x) = \frac{1}{15} f\left(\frac{5}{3}x\right) = \frac{1}{15} e^{-\frac{5}{3}|x|}$$

Lundi 19 décembre 2022 — Cours 13 : Venez tous en Analyse IV

#### Exemple 4 Équation de la chaleur

: Nous considérons une barre de métal infinie qu'on chauffe à certains endroits. La température dans la barre change forcément en fonction du temps, car elle se propage. Nous voulons savoir comment  $u(x, t)$  évolue (où  $u$  est la température,  $x$  est la position et  $t$  et le temps). Si les voisins d'un point sont plus froids, alors il va se refroidir ; et inversement. Ceci est représenté mathématiquement par la dérivée seconde de la fonction. On trouve ainsi que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

avec la condition initiale  $u(x, 0) = f(x)$ , qui est la température initiale de la barre. Notons  $\hat{u}(\alpha, t)$ , la transformée de Fourier spatiale (par rapport à  $x$ ) de  $u$ , i.e :

$$\hat{u}(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx$$

Nous pouvons remarquer que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\alpha, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-i\alpha x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\alpha, t) \end{aligned}$$

De plus, par les propriétés des transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\alpha, t) = -\alpha^2 \hat{u}(\alpha, t)$$

Ainsi, en prenant une transformée de Fourier de chaque côté, notre équation devient :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\alpha, t) = -\alpha^2 \hat{u}(\alpha, t)$$

Ceci est une EDL1 que nous pouvons résoudre facilement :

$$\hat{u}(\alpha, t) = c(\alpha)e^{-\alpha^2 t}$$

$c(\alpha)$  est une constante selon le temps, mais pourrait varier spatialement. Pour la trouver, nous pouvons utiliser la condition initiale  $u(x, 0) = f(x)$  :

$$c(\alpha) = \hat{u}(\alpha, 0) = \hat{f}(\alpha) \implies \hat{u}(\alpha, t) = \hat{f}(\alpha)e^{-\alpha^2 t}$$

Maintenant, nous pouvons appliquer la transformée de Fourier inverse :

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\alpha)e^{-\alpha^2 t}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-\alpha^2 t}\right)(x)$$

Nous devons trouver la transformée de Fourier inverse de  $e^{-\alpha^2 t}$ . Elle ressemble à  $e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ , donc essayons de le mettre en valeur :

$$e^{-\alpha^2 t} = e^{-\frac{(\sqrt{2t}\alpha)^2}{2}} = \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)(\sqrt{2t}\alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)^2 \frac{1}{2}}\right)(\alpha) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(\alpha)$$

On trouve ainsi finalement que :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f(x) * \frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-\frac{y^2}{4t}} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) f(y) dy \end{aligned}$$



# Chapitre 8

## Résumé

### 8.1 Opérateurs différentiels

**Définition : Gradient** : Soit  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  une fonction. Le **gradient** de  $f$  est :

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

**Définition : Laplacien** : Soit  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  une fonction. Le **Laplacien** de  $f$  est :

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \in \mathbb{R}$$

**Définition : Divergence** : Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $F = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ , alors la **divergence** de  $F$  est définie par :

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \in \mathbb{R}$$

**Définition : Rotationnel** : Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $F = (F_1, \dots, F_n) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ .  
Si  $n = 2$ , alors le **rotationnel** de  $F$  est donné par :

$$\operatorname{rot} F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \in \mathbb{R}$$

Si  $n = 3$ , alors il est donné par :

$$\operatorname{rot} F(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \wedge (F_1, F_2, F_3)$$

### 8.2 Intégrales curvilignes

**Définition : Courbe régulière** : Un sous-ensemble  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$  est une **courbe régulière** s'il existe une fonction :

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\mapsto \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{aligned}$$

Telle que :

1.  $\gamma([a, b]) = \Gamma$
2.  $\gamma$  est continue sur  $[a, b]$  et différentiable sur  $]a, b[$ .
3.  $\|\gamma'(t)\| \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ .

Un tel  $\gamma$  s'appelle une paramétrisation de  $\Gamma$ .

*Normale*

Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  un domaine régulier de bord orienté positivement. La normale extérieure d'une courbe  $\gamma : [a, b] \mapsto \partial\Omega$  est donnée par :

$$\nu_{\gamma(t)} = \frac{(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))}{\|\gamma'(t)\|}, \quad \forall t \in [a, b]$$

**Définition** : Une courbe **régulière par morceau** est des morceaux de courbes régulières qui sont collés ensembles. Cela revient à autoriser un nombre fini d'endroits où la dérivée s'annule.

**Types de courbes**

Une courbe **simple** est une courbe qui ne s'intersecte pas.

Une courbe **fermée** est une courbe qui s'arrête là où elle commence.

**Définition : Intégrale curviligne** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert,  $\Gamma \subset \Omega$  une courbe régulière, et  $\gamma : [a, b] \mapsto \Gamma$  une paramétrisation de cette courbe.

Pour  $f \in C^0(\Omega)$ , nous définissons l'intégrale curviligne de  $f$  le long de  $\Gamma$  :

$$\int_{\Gamma} f d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$$

Pour un champ vectoriel,  $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , nous définissons :

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\ell = \int_a^b F(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t) dt$$

La deuxième intégrale dépend du sens de parcours.

**Définition** : Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert, et  $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .  
**Dérivée d'un potentiel** Si  $F = \nabla f$  pour une  $f \in C^1(\Omega)$ , alors le champ vectoriel  $F$  **dérive du potentiel**  $f$ .

**Proposition** Si  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  dérive du potentiel  $f \in C^1(\Omega)$  et  $\Gamma$  est une courbe régulière de paramétrisation  $\gamma : [a, b] \mapsto \Omega$ , alors :

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\ell = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

**Corollaire** Soit  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  une fonction dérivant d'un potentiel, et  $\Gamma$  une courbe régulière. Si  $\Gamma$  est fermée, alors :

$$\int_{\Gamma} F \bullet d\ell = 0$$

**Proposition** Soient  $n \in \{2, 3\}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert, et  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Si  $F$  dérive d'un potentiel, alors  $\text{rot } F = 0$ .

**Théorème : Caractérisation du rotationnel** Soient  $n = 2, 3$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert *simplement connexe*, et  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .  $F$  dérive d'un potentiel si et seulement si  $\text{rot } F = 0$ .

**Théorème : Caractérisation par les courbes** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert et  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .  $F$  dérive d'un potentiel si et seulement si  $\int_{\Gamma} F \bullet d\ell = 0$  pour toute courbe régulière par morceaux simple *fermée*  $\Gamma$ .

**Théorème de Green** Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un domaine régulier avec le bord  $\partial\Omega$  orienté positivement (c'est-à-dire qu'on garde le domaine à gauche quand on parcourt  $\partial\Omega$ ). Soit aussi  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ . Alors :

$$\iint_{\Omega} \text{rot } F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} F \bullet d\ell$$

**Théorème de la divergence dans  $\mathbb{R}^2$**  Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  régulier,  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$  un champ vectoriel, et  $\nu_P$  la normale extérieure à  $\Omega$  en  $P \in \partial\Omega$ . Alors, nous avons :

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy = \int_{\partial\Omega} (F \bullet \nu) d\ell$$

Notez qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le signe puisque  $F \bullet \nu$  est un scalaire, et le problème vient quand on intègre un champ vectoriel.

### 8.3 Intégrales de surfaces

**Définition : Surface régulière**  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  est une **surface régulière** si :

1. Il existe  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , un ouvert borné, avec une frontière  $\partial\Omega$  simple et régulière par morceaux (donc que  $\Omega$  est un domaine "sans trou") et  $\sigma : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}^3$  une fonction  $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  injective sur  $\Omega$  (mais pas nécessairement injective sur  $\overline{\Omega}$ ) telle que :

$$\sigma(\overline{\Omega}) = \Sigma$$

2.  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| \neq 0$  pour tout  $(u, v) \in \Omega$  (où  $\sigma_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$  et  $\sigma_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ ).

**Normales** Les deux vecteurs normaux unitaires au point  $P = \sigma(u, v)$  sont donnés par :

$$\pm \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$$

**Définition : Intégrale de surface** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert, contenant  $\Sigma$  une surface régulière. Soient aussi  $f \in C^0(\Omega)$  un champ scalaire et  $F \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^3)$  un champ vectoriel. Soient finalement  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert et  $\sigma : \overline{A} \mapsto \Sigma$  une paramétrisation régulière. Alors, nous définissons l'intégrale d'un champ scalaire par :

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_A f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv$$

Et, nous définissons l'intégrale d'un champ vectoriel par :

$$\iint_{\Sigma} F \bullet dS = \iint_A F(\sigma(u, v)) \bullet (\sigma_u \wedge \sigma_v) du dv$$

Le signe de la deuxième intégrale dépend de l'orientation de notre surface.

**Théorème de la divergence dans  $\mathbb{R}^3$**  Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  régulier,  $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  et  $\nu$  un champ de normales extérieures à  $\Omega$ . Alors, nous avons :

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} (F \bullet \nu) dS$$

**Théorème de Stokes** Soit  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière par morceaux orientable et  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , où  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est un ouvert contenant  $\Sigma \cup \partial\Sigma$ . Alors :

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} F) \bullet dS = \int_{\partial\Sigma} F \bullet d\ell$$

où le signe est donné par les paramétrisations (on utilise la paramétrisation de l'intégrale de gauche pour trouver celle de l'intégrale de droite).

## 8.4 Séries de Fourier

**Définition : Série de Fourier** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique. Alors on a la série de Fourier :

$$Ff(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right)$$

Les coefficients des séries de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} dx \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) dx \end{aligned}$$

Nous avons les conversions suivantes :

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \iff \begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad \text{si } n \geq 1 \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

**Théorème de Dirichlet** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et continue sur  $]0, T[$ , alors :

$$Ff(x) = f(x), \quad \forall x \in ]0, T[$$

**Théorème : Identité de Parseval** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et  $C^1_{\text{morc}}([0, T])$ . Alors :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

**Définition : Série de Fourier en cosinus** Soit  $f \in C^1_{\text{morc}}([0, L])$ .

La série de Fourier en sinus de  $f$  est obtenue en calculant la série de Fourier sur une extension impaire de  $f$  sur  $[-L, L]$ , et similairement pour les séries de Fourier en cosinus avec une extension paire.

**Proposition : Dérivée** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue et  $T$ -périodique telle que  $f'$  existe (sauf éventuellement en un nombre fini de points) sur  $[0, T]$  et telle que  $f' \in C^1_{\text{morc}}([0, T])$ . Alors :

$$F(f')(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \right)'$$

## 8.5 Transformées de Fourier

**Définition : Transformées de Fourier** : Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f| < +\infty$ . Alors, on définit la transformée de Fourier et son inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx \\ \mathcal{F}^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \end{aligned}$$

**Propriétés** Soit  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  deux fonctions intégrables en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ . Alors :

1.  $\mathcal{F}(af(x) + bg(x))(\alpha) = a\mathcal{F}(f)(\alpha) + b\mathcal{F}(g)(\alpha)$



2.  $\mathcal{F}(f(x+b))(\alpha) = e^{ib\alpha}\mathcal{F}(f)(\alpha)$
3.  $\mathcal{F}(f(cx))(\alpha) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\alpha}{c}\right)$
4.  $\mathcal{F}(f')(\alpha) = i\alpha\mathcal{F}(f)(\alpha)$

Dans l'autre sens (c'est-à-dire pour  $\mathcal{F}^{-1}$ , mais aussi plutôt pour la variable  $\alpha$  plutôt que la variable  $x$ ),  $i$  devient simplement  $-i$  (il faut juste faire attention de multiplier la constante au bon endroit).

**Théorème : Identité de Parseval** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  une fonction intégrable en valeur absolue et au carré sur  $]-\infty, \infty[$ . Alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$$

**Définition** : Soient  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  des fonctions intégrables en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ . Alors, le **produit de convolution** de  $f$  et  $g$ , noté  $f * g$ , est la fonction :

$$\begin{aligned} f * g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \end{aligned}$$

**Proposition** : Soient  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  des fonctions intégrables en valeur absolue sur  $]-\infty, \infty[$ . Alors :  
**Convolutions et transformée**

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$$

**Application** Nous pouvons appliquer les séries et transformées de Fourier à la résolution d'équations différentielles ordinaires.

