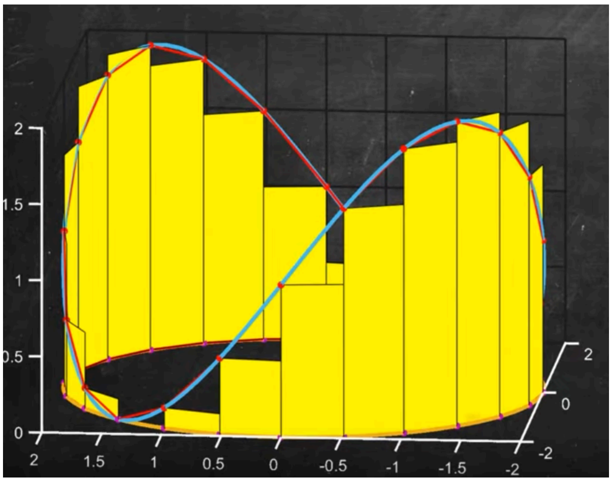
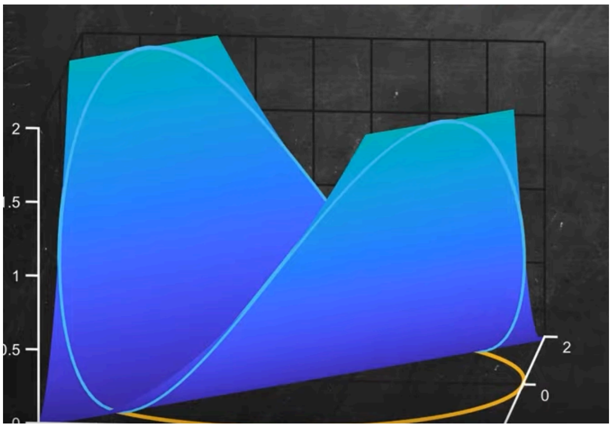
Line integrals

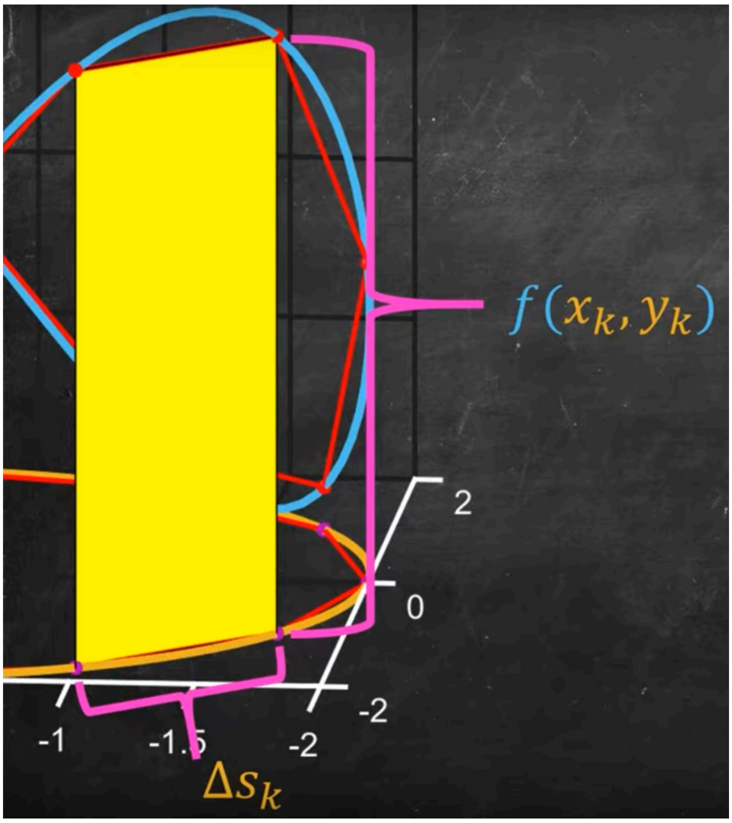
On veut intégrer $f(x, y) = z$ (en bleu) selon le cercle, que l'on paramétrise comme $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j}$.



On peut d'abord réécrire notre fonction comme $f(t) = f(g(t), h(t))$. Pourquoi ? Parce que les seuls points qui nous intéressent sont ceux selon $g(h), h(t)$!



Notre fonction aurait pu être comme ça, mais on veut juste être sur les points du cercle.



Ici on veut l'aire donc

$$A_k = f(x_k, y_k)\Delta s_k$$

$$A_k = f(x_k, y_k)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\Rightarrow dA = f(g(t), h(t))\sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}dt$$

Theorem (Gauss / Green)

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ be as in the main auxiliary theorem

Let $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ be a diff'able vector field. Then

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dl$$ Gauss theorem / divergence theorem

$$\iint_{\Omega} \operatorname{curl} \vec{F}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\tau}\, dl$$ Green theorem

ccw rotation by $90°$: $(-y, x)$

cw rotation by $90°$: $(y, -x)$

Outlook

$\boxed{2D}$ $\iint \operatorname{div} \vec{F} = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}$

area integral — line integral

$\iint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F}\, \vec{T}$

area integral — line integral

$\boxed{3D}$ $\iiint \operatorname{div} \vec{F} = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}$

volume integral — surface integral

Similar in higher dimensions:
hypervolume vs. hypersurface

$\oiint \operatorname{curl} \vec{F} = \oint \vec{F}\, \vec{T}$

surface integral — line integral

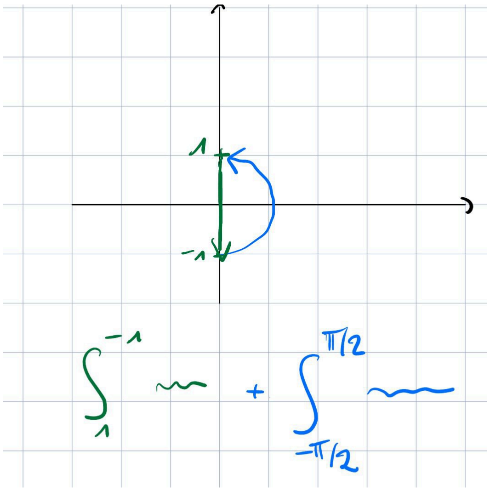
Higher dimensions:
so much more difficult

Trouver un potentiel

- compute $\int_0^x F(t)dt$
- compute $\int_x^y F(t)dt$
- sum them

Calculer une intégrale avec le Green's theorem

- bien choisir un sens pour la bordure (par ex)



- $$\int_{\delta\Omega} F \cdot d\vec{s} = \int\int_{\omega} \operatorname{div}(F) d\omega$$

Calculer une aire d'un graph

$$\text{par exemple, } \Phi(t) = \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$\text{on définit } \vec{r} = (s, t, \Phi(t))$$

Calculer l'aire du graphe de Φ sur Ω:

$$\int_{\Omega} 1 \left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dsdt$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{d\Phi}{ds} \\ 0 & 1 & \frac{d\Phi}{dt} \end{pmatrix} = \left(-\frac{d\Phi}{ds}, -\frac{d\Phi}{dt}, 1 \right)$$

$$\Rightarrow \text{ (when taking the norm) } \int_{\omega} \sqrt{1 + \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2} dsdt$$

Divergence Theorem

Il fonctionne en 2D et en 3D.

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\vec{S} = \int\int\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\int\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F(\Phi(\vec{x}))} \cdot \vec{n} \cdot \left\| \overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi} \right\| d\vec{S} = \int\int\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx_1 dx_2 dx_3$$

Avec $\vec{n}$ le vecteur normal par rapport à la surface en chaque point.
On définit une paramétrisation du volume $\varphi(x, y)$, et $\Phi(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$.

Note : on ajoute $\left\|\overrightarrow{\partial_s \Phi} \times \overrightarrow{\partial_t \Phi}\right\|$ comme on ajoute la dérivée, parce que comme s et t sont perpendiculaires, le cross-product $\vec{a} \times \vec{b} = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\left(\widehat{ab}\right)$ avec $\widehat{ab} = \frac{\pi}{2}$ donc juste $\|\partial_s \Phi\| \cdot \|\partial_t \Phi\|$.

Pour trouver le vecteur normal :

$$\vec{n} = \frac{\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\left\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\right\|}$$

$$\vec{n} = \frac{\partial_\varphi \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})}{\left\|\partial_x \Phi(\vec{x}) \times \partial_y \Phi(\vec{x})\right\|}$$

Green's Theorem

Il fonctionne en 2D uniquement. On regarde sur la bordure comment ça tourne.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{J} dl = \int \int_{\Omega} \text{curl } \vec{F}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

avec $\vec{\tau}$ la dérivée de la

Stoke's Theorem

Il fonctionne en 3D.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $F = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
Si $n = 2$, alors le **rotationnel** de F est donné par :

$$\text{rot } F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) \in \mathbb{R}$$

Si $n = 3$, alors il est donné par :

$$\begin{aligned} \text{rot } F(x) &= \text{“}(\text{rot } F_{23}, \text{rot } F_{31}, \text{rot } F_{12})\text{''} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x), \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)\right) \end{aligned}$$

Déterminant Jacobienne

En coordonnées sphériques :

$\det = r^2 \sin(\theta)$

En coordonées polaires

$\det = r$

Distributions

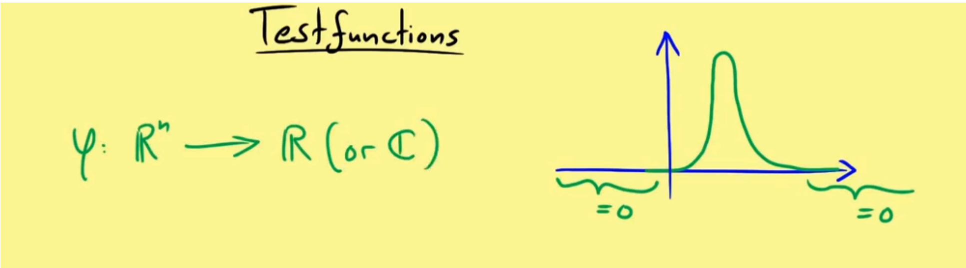
La dérivée est trop “forte” pour considérer les fonctions avec des pics, mais alors comment dériver ces fonctions ?

Dirac H

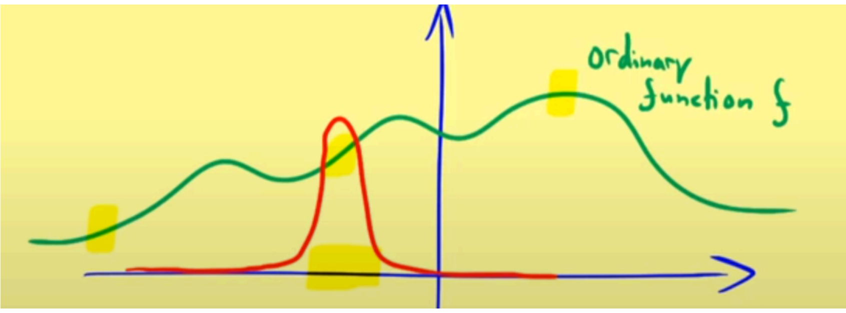
Par exemple, la Heaviside function : $H(x) = 1 \;\; \text{if } x \geq 0 \;\; \text{else } 0$

La dérivée $H'(x) = \varepsilon(x)$ sera quasiment partout 0 sauf en un point (le jump). Comment avoir une fonction H' comme ça ? En fait on peut considérer cette fonction comme une distribution.

On utilise ensuite une **test function** pour obtenir la densité entre deux points.



$$\varphi \to \int f(x)\varphi(x)dx$$



D c’est l’ensemble des fonctions infinement dérivables (lisses) dont le support est contenu dans un certain intervalle.

Montrer que T est une distribution

- montrer que T est finite :

$$\forall \varphi \in D : |T(\varphi)| < \infty$$

- montrer que T est continue :

$$\forall [a,b] \subset R \; \exists C > 0 \;\; \text{(peut dépendre de a, b) t.q } \forall \varphi \in D \;\; \text{t.q supp } (\varphi) \subset [a,b] :$$

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x^i \varphi(x)|$$

Pour montrer ça on peut par exemple prendre $i = 0$ et si ça suffit on peut s’arrêter là.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx \right| = \left| \int_a^b \varphi(x)dx \right|$$

$$\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \int_a^b 1 dx = (b-a) \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

$$\leq (b-a) \sum_{i \geq 0} \max_{x \in \mathbb{R}} \left|\partial_x^i \varphi(x)\right|$$

Note : le support c'est le domaine de la fonction n'est pas zéro.
Note 2 : T peut être négative et φ aussi.

Distribution derivative

Le produit scalaire mesure à quel point deux vecteurs vont dans la même direction :

$$< X, Y >= \sum_{i=0}^{n} x_i y_i$$

Généralisation pour les fonctions continues :

$$< F_1, F_2 >= \int_b^a F_1(x) F_2(x) dx$$

Distribution derivative :

$$< f', \varphi >= - < f, \varphi' >= - \int f(x) \varphi'(x) dx$$

$$= -[f(x)\varphi(x)]_0^\infty + \int \varphi(x) dx \quad \text{or } \varphi(\infty) = 0 \quad \text{(une test function vaut 0 en l'infini)}$$

$$= \int \varphi(x) dx$$