



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 2

Análisis de algoritmos

Rivera Morales David  
320176876

Gallegos Cortes José Antonio  
320316566

February 27, 2025

# Solución de los 8 pares de funciones

## 1. Par 1:

$$f(n) = \log(n), \quad g(n) = \log(n^2 + 1).$$

### Análisis:

Vamos a resolver el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  y dependiendo del resultado podremos determinar que complejidad tiene, si tenemos que el límite es igual a 0 entonces  $f(n) \in o(g(n))$ , si es mayor a cero pero menor a infinito tendremos que  $f(n) \in \theta(g(n))$  y por último si tenemos que es infinito entonces  $f(n) \in \omega(g(n))$  por lo que tenemos lo siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log(n^2+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n^2+1}} \text{ por L'hôpital.}$$

Y seguimos desarrollando la expresión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2} \text{ podemos sacar la constante } \frac{1}{2}, \text{ tenemos entonces: } \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2}$$

Ahora podemos separar la división:

$$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n^2}$$

Finalmente podemos separar en dos límites:

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right)$$

El límite de una constante es la constante, mientras que para el límite de  $\frac{1}{n^2}$  si aplicamos la propiedad  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{n^a}\right) = 0$  por lo que al final tenemos:

$$\frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$$

Como es mayor que cero y menor que infinito sabemos que  $f(n) \in \theta(g(n))$

## 2. Par 2:

$$f(n) = \frac{n^2}{\log(n)}, \quad g(n) = n(\log(n))^2.$$

### Análisis:

$$\text{Por } \frac{\frac{b}{c}}{a} = \frac{b}{c \cdot a}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{\log(n)}}{n(\log(n))^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\log(n)(n \log(n))^2} \text{ por } (ab)^c = a^c b^c \text{ tenemos que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 \log^2(n) \log(n)}$$

Ahora sumamos los exponentes y dividimos las  $x^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2} \log^3(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log^3(n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \log^3(n)} = \frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por ello:

$$f(n) \in o(g(n))$$

### 3. Par 3:

$$f(n) = (n^3)2^n, \quad g(n) = n3^n.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{(n^3)2^n}{n3^n}.$$

**Análisis:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3)2^n}{n3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2)2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2) \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2) \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Reescribimos con la propiedad  $a * b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$  para usar L'hôpital, la raíz de  $n^2$  es  $2n$  mientras que la de  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  la obtendremos ahora

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right)' = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)' = \left(\frac{3}{2}\right)^n \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

Por lo que debemos obtener el límite de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n \log\left(\frac{3}{2}\right)}$ , aplicamos L'hôpital y sacamos las derivadas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)}{\left(\frac{3}{2}\right)^n \log\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{\log\left(\frac{3}{2}\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2}\right)^n} = \frac{2}{\log\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^n \log\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{\log^2\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

Ahora simplificamos con la misma propiedad  $a * b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$  y usamos la propiedad  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a * d}{b * c}$  para luego poder sacar casi toda la expresión como una constante.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log^2\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3^n}{2^n}\right)} = \frac{2}{\frac{\log^2\left(\frac{3}{2}\right) (3^n)}{2^n}} = \frac{2 * 2^n}{\log^2\left(\frac{3}{2}\right) 3^n} = \frac{2}{\log^2\left(\frac{3}{2}\right)} * \frac{2^n}{3^n}$$

Sacamos como una constante y aplicamos la regla  $\frac{a^c}{b^c} = \frac{a}{b}$

$$\frac{2}{\log^2\left(\frac{3}{2}\right)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{3^n}\right) = \frac{2}{\log^2\left(\frac{3}{2}\right)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{\log^2\left(\frac{3}{2}\right)} * 0 = 0$$

Como es cero tenemos que  $f(n) \in o(g(n))$

### 4. Par 4:

$$f(n) = n!, \quad g(n) = n^n.$$

Queremos obtener:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

**Análisis:**

Usamos la definición de convergencia de series "Si  $\sum a_n$  es convergente entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$ ". Por lo que verificamos si es convergente o no, para lo que aplicamos el criterio de d'Alembert o de la razón, que nos dice:

Si existe una  $N$  tal que para toda  $n \geq N$ ,  $a_n \neq 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ :

- Si  $L < 1$ , entonces la suma es convergente

- Los otros casos no nos interesan-

Por lo que desarrollamos aplicando el criterio de la razón y luego simplificamos para poder obtener el limite:

$$\sum_{a=1}^{\infty} \left(1 \frac{n!}{n^n}\right) = \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| = \left| \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} \right|$$

Podemos eliminar los factoriales con la propiedad  $\frac{n!}{(n-m)!} = n$ , por lo que nos daría  $\frac{(n+1)!}{n!} = (n+1)$ . Podemos cancelar el  $n+1$  de arriba con un  $n+1$  de abajo ya que sería como tener  $(n+1)^0$

$$= \left| \frac{n^n(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \right| = \left| \frac{n^n}{(n+1)^n} \right| = \frac{|n^n|}{|(n+1)^n|}$$

Ahora ya sumplificada podemos obtener su limite, como  $n$  tiende a infinito siempre va a ser positivo por lo que podemos quitar los valores absolutos y podemos sacar el exponente en común:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|n^n|}{|(n+1)^n|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Podemos aplicar la regla  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} = L$$

Como  $L$  es menor a 1, por el criterio de la razón podemos decir que es convergente, y como es convergente entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0$$

Por lo que al final tenemos:

$$f(n) \in o(g(n)).$$

## 5. Par 5:

$$f(n) = \log(\log(n)), \quad g(n) = \sqrt{\log(n)}.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\log(\log(n))}{(\log(n))^{1/2}}.$$

**Análisis:** Vamos a hacer un cambio de variable, vamos a cambiar  $\log n$  por  $t$  para luego aplicar L'hopital, por lo que nos quedaría como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(t)}{t^{1/2}} = \frac{\log(t)'}{t^{1/2}'} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2}t^{-1/2}} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2t^{1/2}}} = \frac{2t^{1/2}}{t}$$

Aplicamos las leyes de los exponentes  $\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{t^{1-1/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{t^{1/2}} \text{ aplicamos la propiedad } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{x^a}\right) = 0$$

y como tenemos que el limite es cero entonces:

$$f(n) \in o(g(n)).$$

6. Par 6:

$$f(n) = n^{\log(n)}, \quad g(n) = n \log(n) - n.$$

$$g(n) = n(\log(n) - 1).$$

$$n^{\log(n)} = \exp(\log(n) \cdot \log(n)) = \exp((\log(n))^2).$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} \approx \frac{\exp((\log(n))^2)}{n \log(n)}.$$

$$\log\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) \approx (\log(n))^2 - \log(n \log(n)).$$

**Análisis:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

Por lo tanto,

$$f(n) \in \omega(g(n)).$$

7. Par 7:

$$f(n) = \log(n\sqrt{n}), \quad g(n) = \sqrt{n} \log(n)$$

**Análisis:** Aplicando las leyes de los exponentes  $\frac{1}{a^b} = a^{-b}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n\sqrt{n})}{\sqrt{n} \ln(n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(nn^{1/2})}{\sqrt{n} \ln(n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n^{3/2})}{\sqrt{n} \ln(n)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{3}{2} \ln(n)}{\sqrt{n} \ln(n)} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3 \cancel{\ln(n)}}{2 \sqrt{n} \cancel{\ln(n)}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2 \sqrt{n}} \right) = \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\infty} = \frac{3}{2} * \frac{1}{\infty} = \frac{3}{2} * 0 = 0$$

Así,

$$f(n) \in o(g(n)).$$

8. Par 8:

$$f(n) = 2^{n^2+1}, \quad g(n) = 4^n.$$

**Análisis:**

$$4^n = (2^2)^n = 2^{2n}.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{2^{n^2+1}}{2^{2n}} = 2^{n^2+1-2n}.$$

$$n^2 + 1 - 2n = n^2 - 2n + 1$$

Por lo que ahora simplemente calculamos el limite de lo anterior con la propiedad de los limites que nos dice que dado un polinomio  $P(x) = (a_n x^n + \dots + bx + c)$ , el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n + \dots + bx + c) = \infty, a > 0$  como en nuestro caso tenemos  $a = 1$  y  $n = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - 2n + 1 = \infty$$

Como tenemos que es infinito entonces sabemos que:

$$f(n) \in \omega(g(n)).$$