UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 2

Análisis de algoritmos

Rivera Morales David
320176876

Gallegos Cortes José Antonio
320316566

February 27, 2025

Solución de los 8 pares de funciones

1. **Par 1:**
$$f(n) = \log(n), \quad g(n) = \log\big(n^2+1\big).$$
Análisis:
Vamos a resolver el limite $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ y dependiendo del resultado podremos determinar que complejidad tiene, si tenemos que el limite es igual a 0 entonces f(n)∈o(g(n)), si es mayor a cero pero menor a infinito tendremos que f(n)∈ θ(g(n)) y por último si tenemos que es infinito entonces f(n)∈ ω(g(n)) por lo que tenemos lo siguiente:
$\lim_{n\to\infty} \frac{log(n)}{log(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n^2+1}}$ por L'hopital.
Y seguimso desarrollando la expresión:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2} \text{ podemos sacar la constante } \frac{1}{2}, \text{ tenemos entonces: } \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$$
Ahora podemos separar la división:
$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2}$$
Finalmente podemos separar en dos limites:
$$\frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2})$$
El limite de una constante es la constante, mientras que para el limite de $\frac{1}{n^2}$ si aplicamos la propiedad $\lim n \to \infty(\frac{c}{n^a}) = 0$ por lo que al final tenemos:
$$\frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$
Como es mayor que cero y menor que infinito sabemos que $f(n) \in \theta(g(n))$

2. **Par 2:**
$$f(n) = \frac{n^2}{\log(n)}, \quad g(n) = n(\log(n))^2.$$
Análisis:
Por $\frac{\frac{b}{c}}{a} = \frac{b}{c*a}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{\log(n)}}{n(\log(n))^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\log(n)(n\log(n))^2} \text{ por } (ab)^c = a^c b^c \text{ tenmos que } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\log^2(n)\log(n)}$$
Ahora sumamos los exponentes y dividimos las x^2
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\log^3(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log^3(n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \log^3(n)} = \frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty} = 0$$
Por ello:
$$f(n) \in o(g(n))$$

3. **Par 3:**

$$f(n) = (n^3)2^n, \quad g(n) = n3^n.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{(n^3)2^n}{n3^n}.$$

Análisis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^{\cancel{3}})2^n}{\cancel{n}3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2)2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} (n^2)\frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} (n^2)(\frac{2}{3})^n$$

Reescribimos con la propiedad $a*b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$ para usar L'hopital, la raíz de n^2 es $2n$ mientras que la de $\frac{1}{(\frac{2}{3})^n}$ la obtendremos ahora

$$(\frac{1}{(\frac{2}{3})^n})' = ((\frac{3}{2})^n) = (\frac{3}{2})^n log(\frac{3}{2})$$

Por lo que debemos obtener el limite de $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(\frac{3}{2})^n log(\frac{3}{2})}$, aplicamos L'hopital y sacamos las derivadas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)}{(\frac{3}{2})^n log(\frac{3}{2})} = \frac{2}{log(\frac{3}{2})\frac{d}{dx}(\frac{3}{2})^n)} = \frac{2}{log(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})^n log(\frac{3}{2})} = \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})^n}$$

Ahora simplificamos con la misma propiedad $a * b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$ y usamos la propiedad $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a*c}{b}$ para luego poder sacar casi toda la expresión como una constante.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})(\frac{3^n}{2^n})} = \frac{2}{\frac{log^2(\frac{3}{2})(3^n)}{2^n}} = \frac{2 * 2^n}{log^2(\frac{3}{2})3^n} = \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})} * \frac{2^n}{3^n}$$

Sacamos como una constante y aplicamos la regla $\frac{a^c}{b^c} = \frac{a}{b}^c$

$$\frac{2}{log^2(\frac{3}{2})} \lim_{n\to\infty} (\frac{2^n}{3^n}) = \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})} \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})} * 0 = 0$$

Como es cero tenemos que $f(n) \in o(g(n))$

4. **Par 4:**

$$f(n) = n!, \quad g(n) = n^n.$$

Queremos obtener:

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{n!}{n^n})$$

Análisis:

Usamos la definición de convergencia de series "Si $\sum a_n$ es convergente entonces $\lim_{x\to\infty}(a_n) = 0$". Por lo que verificamos si es convergente o no, para lo que aplicamos el criterio de d'Alembert o de la razón, que nos dice:

Si existe una N tal que para toda $n \geq N$, $a_n \neq 0$ y $\lim_{x\to\infty} |\frac{a_n+1}{a_n}| = L$:

- Si L $<$ 1, entonces la suma es convergente

- Los otros casos no nos interesan-

Por lo que desarrollamos aplicando el criterio de la razón y luego simplificamos para poder obtener el limite:

$$\sum_{a=1}^{\infty}(1\frac{n!}{n^n}) = |\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}| = |\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!}|$$

Podemos eliminar los factoriales con la propiedad $\frac{n!}{(n-m)!} = n$, por lo que nos daría $\frac{(n+1)!}{n!} = (n+1)$. Podemos cancelar el n+1 de arriba con un n+1 de abajo ya que sería como tener $(n+1)^0$

$$= |\frac{n^n(n+1)}{(n+1)^{n+1}}| = |\frac{n^n}{(n+1)^n}| = \frac{|n^n|}{|(n+1)^n|}$$

Ahora ya sumplificada podemos obtener su limite, como n tiende a infinito siempre va a ser positivo por lo que podemos quitar los valores absolutos y podemos sacar el exponente en común:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|n^n|}{|(n+1)^n|} = \lim_{x\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{x\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n$$

Podemos aplicar la regla $\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$

$$= \lim_{x\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = e^{-1} = \frac{1}{e} = L$$

Como L es menor a 1, por el criterio de la razón podemos decir que es convergente, y como es convergente entonces

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{n!}{n^n}) = 0$$

Por lo que al final tenemos:

$$f(n) \in o\big(g(n)\big).$$

5. **Par 5:**

$$f(n) = \log\big(\log(n)\big), \quad g(n) = \sqrt{\log(n)}.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\log(\log(n))}{(\log(n))^{1/2}}.$$

Análisis: Vamos a hacer un cambio de variable, vamos a cambiar $\log n$ por t para luego aplicar L´hopital, por lo que nos quedaría como:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(t)}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log(t)'}{t^{\frac{1}{2}'}} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2}t^{-1/2}} = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{2t^{1/2}}} = \frac{2t^{1/2}}{t}$$

Aplicamos las leyes de los exponentes $\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{t^{1-1/2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{t^{1/2}} \text{ aplicamos la propiedad } lim_{x\to\infty}(\frac{c}{x^a}) = 0$$

y como tenemos que el limite es cero entonces:

$$f(n) \in o\big(g(n)\big).$$

6. **Par 6:**

$$f(n) = n^{\log(n)}, \quad g(n) = n\ \log(n) - n.$$

Simplificamos g(n) factorizando n:

$$g(n) = n\big(\log(n) - 1\big).$$

Para n grande, $\log(n) - 1$ es positivo, por lo que g(n) se comporta como $n \log(n)$. Para f(n), utilizamos la transformación exponencial:

$$n^{\log(n)} = \exp\big(\log(n) \cdot \log(n)\big) = \exp\big((\log(n))^2\big).$$

Comparamos el crecimiento de $\exp\big((\log(n))^2\big)$ con $n \log(n)$ formando el cociente:

$$\frac{f(n)}{g(n)} \approx \frac{\exp\big((\log(n))^2\big)}{n\ \log(n)}.$$

Tomamos logaritmos del cociente para simplificar la comparación:

$$\log\Big(\frac{f(n)}{g(n)}\Big) \approx (\log(n))^2 - \log\big(n\ \log(n)\big).$$

Notemos que $(\log(n))^2$ domina a $\log(n) + \log(\log(n))$ (recordando que $\log\big(n\ \log(n)\big) = \log(n) + \log(\log(n))$). Esto implica que el cociente tiende a infinito, demostrando que f(n) crece mucho más rápido que g(n).

Análisis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

Por lo tanto,

$$f(n) \in \omega\big(g(n)\big).$$

7. **Par 7:**

$$f(n) = log(n\sqrt{n}), \quad g(n) = \sqrt{n}\log(n)$$

Análisis: Aplicando las leyes de los exponentes $\frac{1}{a^b} = a^-b$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{ln(n\sqrt{n})}{\sqrt{n}ln(n)}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{ln(nn^{1/2})}{\sqrt{n}ln(n)}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{ln(n^{3/2})}{\sqrt{n}ln(n)}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\frac{3}{2}ln(n)}{\sqrt{n}ln(n)}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{3\cancel{ln(n)}}{2\sqrt{n}\cancel{ln(n)}}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{3}{2\sqrt{n}}) = \frac{3}{2}\frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\infty}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\infty} = \frac{3}{2} * \frac{1}{\infty} = \frac{3}{2} * 0 = 0$$

Así,

$$f(n) \in o\big(g(n)\big).$$

8. **Par 8:**

$$f(n) = 2^{\,n^2+1}, \quad g(n) = 4^n.$$

Análisis:

$$4^n = (2^2)^n = 2^{2n}.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{2^{n^2+1}}{2^{2n}} = 2^{\,n^2+1-2n}.$$

$$n^2 + 1 - 2n = n^2 - 2n + 1$$

Por lo que ahora simplemente calculamos el limite de lo anterior con la propiedad de los limites que nos dice que dado un polinomio $P(x) = (a_n x^n + \cdots + bx + c)$, el límite $\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + \cdots + bx + c) = \infty, a > 0$ como en nuestro caso tenemos $a = 1$ y $n = 2$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - 2n + 1 = \infty$$

Como tenemos que es infinito entonces sabemos que:

$$f(n) \in \omega\big(g(n)\big).$$