UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 2

Análisis de algoritmos

Rivera Morales David
320176876

Gallegos Cortes José Antonio
320316566

February 27, 2025

Solución de los 8 pares de funciones

1. **Par 1:**
$$f(n) = \log(n), \quad g(n) = \log\big(n^2 + 1\big).$$
Análisis:
Vamos a resolver el limite $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ y dependiendo del resultado podremos determinar que complejidad tiene, si tenemos que el limite es igual a 0 entonces f(n)∈o(g(n)), si es mayor a cero pero menor a infinito tendremos que f(n)∈ θ(g(n)) y por último si tenemos que es infinito entonces f(n)∈ ω(g(n)) por lo que tenemos lo siguiente:
$\lim_{n\to\infty} \frac{log(n)}{log(n^2+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n^2+1}}$ por L'hopital.
Y seguimso desarrollando la expresión:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2} \text{ podemos sacar la constante } \frac{1}{2}, \text{ tenemos entonces: } \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$$
Ahora podemos separar la división:
$$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n^2}$$
Finalmente podemos separar en dos limites:
$$\frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2})$$
El limite de una constante es la constante, mientras que para el limite de $\frac{1}{n^2}$ si aplicamos la propiedad $\lim n \to \infty(\frac{c}{n^a}) = 0$ por lo que al final tenemos:
$$\frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$
Como es mayor que cero y menor que infinito sabemos que $f(n) \in \theta(g(n))$

2. **Par 2:**
$$f(n) = \frac{n^2}{\log(n)}, \quad g(n) = n(\log(n))^2.$$
Análisis:
Por $\frac{\frac{b}{c}}{a} = \frac{b}{c*a}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{\log(n)}}{n(\log(n))^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\log(n)(n\log(n))^2} \text{ por } (ab)^c = a^c b^c \text{ tenmos que } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\log^2(n)\log(n)}$$
Ahora sumamos los exponentes y dividimos las x^2
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\log^3(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log^3(n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \log^3(n)} = \frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty} = 0$$
Por ello:
$$f(n) \in o(g(n))$$

3. **Par 3:**

$$f(n) = (n^3)2^n, \quad g(n) = n3^n.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{(n^3)2^n}{n3^n}.$$

Análisis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^{\cancel{3}})2^n}{\cancel{n}3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2)2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} (n^2)\frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} (n^2)(\frac{2}{3})^n$$

Reescribimos con la propiedad $a*b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$ para usar L'hopital, la raíz de n^2 es $2n$ mientras que la de $\frac{1}{(\frac{2}{3})^n}$ la obtendremos ahora

$$(\frac{1}{(\frac{2}{3})^n})' = ((\frac{3}{2})^n) = (\frac{3}{2})^n log(\frac{3}{2})$$

Por lo que debemos obtener el limite de $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(\frac{3}{2})^n log(\frac{3}{2})}$, aplicamos L'hopital y sacamos las derivadas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)}{(\frac{3}{2})^n log(\frac{3}{2})} = \frac{2}{log(\frac{3}{2})\frac{d}{dx}(\frac{3}{2})^n)} = \frac{2}{log(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})^n log(\frac{3}{2})} = \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})(\frac{3}{2})^n}$$

Ahora simplificamos con la misma propiedad $a * b = \frac{a}{\frac{1}{b}}$ y usamos la propiedad $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a*c}{b}$ para luego poder sacar casi toda la expresión como una constante.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})(\frac{3^n}{2^n})} = \frac{2}{\frac{log^2(\frac{3}{2})(3^n)}{2^n}} = \frac{2 * 2^n}{log^2(\frac{3}{2})3^n} = \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})} * \frac{2^n}{3^n}$$

Sacamos como una constante y aplicamos la regla $\frac{a^c}{b^c} = \frac{a}{b}^c$

$$\frac{2}{log^2(\frac{3}{2})} \lim_{n\to\infty} (\frac{2^n}{3^n}) = \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})} \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{2}{log^2(\frac{3}{2})} * 0 = 0$$

Como es cero tenemos que $f(n) \in o(g(n))$

4. **Par 4:**

$$f(n) = n\ \log(n^2), \quad g(n) = n\ \log(n).$$

$$f(n) = n \cdot 2\log(n) = 2n\log(n).$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{2n\log(n)}{n\log(n)} = 2.$$

Análisis:

$$f(n) \in \Theta\big(g(n)\big).$$

5. **Par 5:**

$$f(n) = \log\big(\log(n)\big), \quad g(n) = \sqrt{\log(n)}.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\log(\log(n))}{(\log(n))^{1/2}}.$$

Análisis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log(n))}{(\log(n))^{1/2}} = 0.$$

$$f(n) \in o\big(g(n)\big).$$

6. **Par 6:**

$$f(n) = n^{\log(n)}, \quad g(n) = n\,\log(n) - n.$$

$$g(n) = n\big(\log(n) - 1\big).$$

$$n^{\log(n)} = \exp\big(\log(n)\cdot\log(n)\big) = \exp\big((\log(n))^2\big).$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} \approx \frac{\exp\big((\log(n))^2\big)}{n\,\log(n)}.$$

$$\log\Big(\frac{f(n)}{g(n)}\Big) \approx (\log(n))^2 - \log\big(n\,\log(n)\big).$$

Análisis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty.$$

Por lo tanto,

$$f(n) \in \omega\big(g(n)\big).$$

7. **Par 7:**

$$f(n) = \log\big(n^{\,n\log n}\big), \quad g(n) = \sqrt{n\,\log(n)}.$$

$$\log\big(n^{\,n\log n}\big) = n\log n \cdot \log n = n\,(\log n)^2.$$

$$g(n) = \sqrt{n\,\log(n)} = (n\,\log(n))^{1/2} = n^{1/2}\,(\log(n))^{1/2}.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n\,(\log(n))^2}{n^{1/2}\,(\log(n))^{1/2}} = n^{1/2}\,(\log(n))^{3/2}.$$

Análisis:

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/2}\,(\log(n))^{3/2} = \infty.$$

Así,

$$f(n) \in \omega\big(g(n)\big).$$

8. **Par 8:**

$$f(n) = 2^{\,n^2+1}, \quad g(n) = 4^n.$$

Análisis:

$$4^n = (2^2)^n = 2^{2n}.$$

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{2^{n^2+1}}{2^{2n}} = 2^{\,n^2+1-2n}.$$

$$n^2 + 1 - 2n = n^2 - 2n + 1$$

Por lo que ahora simplemente calculamos el limite de lo anterior con la propiedad de los limites que nos dice que dado un polinomio $P(x) = (a_n x^n + \cdots + bx + c)$, el límite $\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + \cdots + bx + c) = \infty, a > 0$ como en nuestro caso tenemos $a = 1$ y $n = 2$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 - 2n + 1 = \infty$$

Como tenemos que es infinito entonces sabemos que:

$$f(n) \in \omega\big(g(n)\big).$$