

UNIVERSITÄT BREMEN
FACHBEREICH 01
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Bachelorarbeit

Quantenmechanische Modelle zur Beschreibung von Relaxationsoszillationen in Lasern

David Fabian Klosik

Erstgutachter Prof. Dr. Frank Jahnke
Zweitgutachter Prof. Dr. Detlef Hommel

Bremen, den 24. Juli 2009

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit diskutiert ein Modell zur Beschreibung der Dynamik atomarer Lasersysteme. Als Erweiterung der single-mode-Ratengleichungen ist es durch die im Jaynes-Cummings-Modell beschriebene Kopplung eines atomaren Übergangs im oder nahe dem optischen Frequenzbereich mit einer resonanten Lichtmode, die in einem optischen Resonator von den übrigen Moden des Lichtfeldes separiert wird, charakterisiert. Die Ergänzung weiterer Niveaus erlaubt den Vergleich des stationären Verhaltens eines Drei- und eines Vierniveaulasersystems; ferner wird die zeitliche Entwicklung des Vierniveausystems mit den charakteristischen Relaxationsoszillationen untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
I	Theoretische Modellbildung	3
2	Theoretische Begründung der Modellsysteme	3
2.1	Feldquantisierung	3
2.1.1	Hamiltonoperator des freien elektromagnetischen Feldes	5
2.1.2	Das elektrische Feld in Operatordarstellung	6
2.2	Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung	7
2.2.1	Licht-Emitter-Wechselwirkungshamiltonian	7
2.2.2	Jaynes-Cummings-Modell	9
2.3	Dichtematrix	11
2.4	Dissipation durch Reservoirankopplung	12
2.4.1	Born- und Markovnäherung zur Ableitung der Mastergleichung	13
2.4.2	Kopplung des Zweiniveausystems mit dem Reservoir	17
2.4.3	Kopplung der Kavitätsmode mit dem Reservoir	18
2.5	Herleitung der Ratengleichungen	18
2.6	Phänomenologische Erweiterung um Pumpprozess und -niveaus	20
II	Numerische Behandlung	23
3	Stationäre Lösungen	23
3.1	Vergleich des Drei- und des Vierniveausystems	24
3.1.1	Vergleich der Besetzungsinversionen	25
3.2	Analytische Grenzwerte für kleine und große Pumpraten	25
3.2.1	Grenzfall kleiner Pumpraten	26
3.2.2	Grenzfall sehr großer Pumpraten im Vierniveausystem	28
4	Zeitentwicklungen	29
4.1	Frequenz der Relaxationsoszillationen	30
5	Relaxationsoszillationen des Vierniveausystems	31
5.1	Analytische Beschreibung im Grenzfall der Ratengleichungen	33
5.2	Modulationsantwort des Vierniveausystems	36
5.2.1	Variation der Kavitätsverlustrate κ	36
5.2.2	Variation des β -Faktors	37
5.2.3	Variation der Pumprate P_0	37
5.2.4	Fazit der Untersuchung der Modulationsantwort	38
6	Zusammenfassung und Ausblick	41
A	Zur adiabatischen Elimination der Übergangsamplitude	43
B	Parameter	44

1 Einleitung

Im Jahr 1916 postulierte Albert Einstein in seiner Ableitung des Planck'schen Strahlungsgesetzes den Vorgang der stimulierten Emission als direkte Umkehrung der Absorption: Die Anregung eines Atoms in einen höheren Zustand durch die Aufnahme eines Photons erfolge mit gleicher Wahrscheinlichkeit wie die Relaxation eines angeregten Atoms in den Grundzustand unter Aussendung eines weiteren Photons, das die Ausbreitungsrichtung, Frequenz, Phase und Polarisation des eingestrahnten Photons besitzt. Da der Boltzmannverteilung gemäß energetisch höhere Zustände weniger stark besetzt sind als energetisch niedrigere, dominiert im thermischen Gleichgewicht die Absorption. Ein System, das die stimulierte Emission nutzen soll, bedarf also eines Prozesses, der eine Besetzungsinversion, also eine höhere Besetzung angeregter als nichtangeregter Atome erzeugt. Ein Laser ist ein solches System und durch vier wesentliche Elemente gekennzeichnet: Ein Pumpprozess bewirkt eine Besetzungsinversion im aktiven Medium, das etwa durch die Atome eines Gases oder Halbleitermaterialien gegeben sein kann, und sich in einem optischen Resonator befindet. Dieser wiederum selektiert wenige Moden - im Modell dieser Arbeit nur eine einzige - des Lichtfeldes im Bereich der Frequenz eines atomaren Übergangs. Die Umgebung ist durch ein Kontinuum an Lichtmoden charakterisiert, sodass sich irreversible Verlustprozesse (etwa die spontane Emission in die nichtlasenden, also in die nicht vom Resonator unterstützten Moden) beschreiben lassen. Bei hinreichend großer Besetzungsinversion im aktiven Medium werden die durch spontane Emission in die Resonatormode (im Folgenden auch "Kavitäts-" und "Lasermode") abgegebenen Photonen durch stimulierte Emission vervielfältigt, sodass im Resonator phasensynchrones Laserlicht hoher Leistungsdichte entsteht, das über eine etwas weniger stark reflektierende Spiegelfläche des Resonators ausgekoppelt werden kann.

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit, dem Kapitel 2, wird das Ratengleichungsmodell eines atomaren Lasersystems theoretisch begründet: Zunächst wird eine Beschreibung des quantisierten Lichtfeldes und daraufhin der Licht-Materie-Wechselwirkung entwickelt; unter der Annahme einer Modenseparation in einem geeigneten Resonator wird die Wechselwirkung auf die Kopplung eines atomaren Übergangs und einer resonanten Kavitätsmode reduziert und mithin der Emitter als Zweiniveausystem beschrieben. Anschließend werden die dissipativen Effekte der spontanen Emission und der Kavitätsverluste modelliert und die Mastergleichung des Systems hergeleitet, aus der sich die single-Mode-Ratengleichungen des Zweiniveaumitters ergeben. Anschließend wird der Pumpprozess phänomenologisch als optische Anregung des Emitters eingeführt: Aufgrund des Pauliblockings lässt sich eine Inversion durch direktes Pumpen des Zweiniveausystems keine Inversion erreichen. Zur Beschreibung eines Lasersystems müssen also weitere Niveaus ergänzt werden.

Lasersysteme lassen sich über die Anzahl der maßgeblich beteiligten Energieniveaus charakterisieren [Dem05]: Im Rubinlaser etwa werden Cr^{3+} -Ionen eines Al_2O_3 -Kristalls durch die Absorption des Lichtes einer Blitzlampe im grünen und blauen Spektralbereich aus dem Grundzustand E_0 in verbreiterte Energieniveaus angeregt, aus denen die Elektronen durch Phononenwechselwirkung in strahlungslosen Übergängen in ein Niveau E_1 relaxieren. Zwischen den Niveaus E_1 und E_0 stellt sich dann der Laserübergang ein. Fasst man die oberhalb von E_1 befindlichen verbreiterten Niveaus zu einem Pumpniveau zusammen, so lässt sich der Rubinlaser als **Dreiniveausystem** beschreiben.

Der Helium-Neon-Laser hingegen stellt ein Vierniveausystem dar. Durch Elektronenstoß werden zwei metastabile Zustände des Helium besetzt, die wiederum durch fastresonante Stöße selektiv zwei angeregte Zustände des Neon besetzen. Zwischen diesen und tieferen, schwächer besetzten Zuständen bilden sich dann Laserübergänge aus. Laser- und Pumpniveau sind nicht identisch und lassen sich als **Vierniveausystem** darstellen. Beide Modelle sind in der Abbildung 1 auf der Seite 21 skizziert.

Um eine Besetzungsinversion im Dreiniveausystem zu erzeugen, bedarf es eines starken Pumpprozesses: Da das untere Laser- und das untere Pumpniveau zusammenfallen, sind für eine höhere Besetzung des oberen als des unteren Laserniveaus über die Hälfte der Emitter des aktiven Mediums anzuregen. Im Vierniveausystem hingegen erfolgt der Abbau der Besetzung des unteren Laserniveaus nicht durch direkte Pumpanregung der Ladungsträger, sondern durch deren Relaxa-

tion in ein tiefergelegenes Pumpniveau, sodass eine Inversion auch für kleine Pumpraten erreichbar ist. Um diesen effizienzsteigernden Einfluss des vierten Pumpniveaus zu untersuchen, schließt der erste Abschnitt der Arbeit mit einer Erweiterung des Modellsystems um ein beziehungsweise um zwei Pumpniveaus auf ein Modell des Drei- beziehungsweise des Vierniveaus Lasersystems. Der zweite Abschnitt der Arbeit ist dann der numerischen Untersuchung der Modellsysteme gewidmet.

Ein mit konstanter Rate gepumptes Lasersystem wird sich zeitlich in einen stationären Zustand entwickeln, in dem sich ein dynamisches Gleichgewicht zwischen allen beteiligten Prozessen einstellt. Die Auftragung der stationären Photonenzahl in der Lasermode über der Pumprate liefert die Input-Output-Kennlinien des Systems. Da die stimulierte Emission sowohl vom Grad der Besetzungsinversion als auch von der Zahl der in der Kavitätsmode zur Anregung zur Verfügung stehenden Photonen abhängig ist, wächst mit Erreichen des Regimes der stimulierten Emission die Photonenzahl stark an. In den Kennlinien lässt sich das Einsetzen der stimulierten Emission daher als Laserschwelle erkennen¹.

Im Kapitel 3 werden die stationären Lösungen des Drei- und des Vierniveausystems in Hinblick auf die Input-Output-Charakteristik und die Inversion miteinander verglichen.

Wird ein Laser als zeitlich kontinuierliche Lichtquelle ("continuous wave laser") verwendet, so ist eine Kenntnis des stationären Systemzustands hinreichend. Sieht eine Anwendung jedoch die zeitliche Schaltung des Lasers vor - etwa in der optischen Datenübertragung -, so ist die zeitliche Entwicklung der Photonenzahl bedeutsam. So limitiert etwa die Einschaltverzögerung des Photonoutputs die maximale Wiederholungsrate eines zu übertragenden Signals. Das Kapitel 4 untersucht die Dynamik des Vierniveausystems und weist gedämpfte Oszillationen um den stationären Wert der Photonenzahl als Merkmal der Zeitentwicklung im Bereich der Laserschwelle aus. Der Untersuchung dieser **Relaxationsoszillationen** ist das Kapitel 5 gewidmet, das über eine zeitliche Modulation der Pumprate die Schwingungseigenschaften des Vierniveausystems in Hinblick auf eine Dämpfung der Oszillationen untersucht.

Mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick hinsichtlich möglicher Erweiterungen in Kapitel 6 schließt die Arbeit.

¹Dies gilt, sofern der Resonator nicht die spontane Emission in alle anderen als die Lasermode vollständig unterdrückt ("thresholdless laser", siehe etwa Kapitel 3 oder [YB89]).

Teil I

Theoretische Modellbildung

2 Theoretische Begründung der Modellsysteme

In diesem Abschnitt der Arbeit sollen die in den nachfolgenden Kapiteln numerisch untersuchten Lasersysteme modelliert werden; an seinem Ende werden zwei gekoppelte Differentialgleichungssysteme stehen, die die Dynamik der Besetzungen im Drei- und im Vierniveausystem sowie jeweils die zeitliche Entwicklung des Photonenausgangs beschreiben. Zentrales Element der Ableitung ist die Kopplung jeweils eines Übergangs in beiden Systemen mit einer Lichtmode, die durch räumliche Begrenzung auf eine Kavität resonant gestimmt ist. Um spontane Emissionsprozesse erfassen zu können, erfolgt die Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung im Bild eines quantisierten Lichtfeldes: Kapitel 2.1 stellt mit dem Hamiltonoperator des quellenfreien elektromagnetischen Feldes und einer Darstellung des elektrischen Feldes in bosonischen Operatoren die grundlegenden Zusammenhänge bereit, um im anschließenden Kapitel 2.2 die Wechselwirkung eines Emitters, der als Ladungsträgersystem mit diskreten Energieniveaus beschrieben wird, mit der Vielzahl der Lichtmoden des quantisierten Lichtfeldes in der Dipolnäherung zu rekonstruieren. In einem geeigneten Resonator lassen sich die Moden des Lichtfeldes hinreichend separieren, um alle Wechselwirkungen des ausgewählten atomaren Übergangs mit anderen als der Kavitätsmode zu unterdrücken. Ist diese resonante Kopplung die einzige zwischen Emitter und Lichtfeld, so lässt sich der Emitter als Zweiniveausystem beschreiben. Das Kapitel 2.2.2 präsentiert mit dem Jaynes-Cummings-Hamiltonian den Hamiltonoperator der Wechselwirkung eines Zweiniveausystems mit einer resonanten Lichtmode, zeigt jedoch auch auf, dass sich dissipative Prozesse wie die spontane Emission in die nicht resonant gestimmten nichtlasenden Moden und die Kavitätsverluste nicht durch den Jaynes-Cummings-Hamiltonian erfassen lassen. Im Kapitel 2.4 werden die Verlustmechanismen über eine Reservoirankopplung im Dichtematrixformalismus beschrieben und finden sich als Lindbladterme in der Mastergleichung, einer geschlossenen Differentialgleichung für den Systemanteil der Dichtematrix, die sich nach geeigneten Näherungsschritten ergibt, wieder. Kapitel 2.3 benennt die wesentlichen Eigenschaften der Dichtematrix. Mit der Mastergleichung lassen sich dann in Kapitel 2.5 mittels Spurbildung über die entsprechenden Operatoren die Dynamiken der Erwartungswerte der Besetzungszahlen und der Photonenzahl in der Lasermode gewinnen. Nach einer semiklassischen Näherung, die das photonische und das elektronische System als unkorreliert annimmt, und einer adiabatischen Eliminierung des verbleibenden Quellterms in den Differentialgleichungen ergeben sich die Ratengleichungen des Zweiniveausystems in Wechselwirkung mit einer resonant gestimmten Kavitätsmode. Als Prozess des Inversionsaufbaus wird in Kapitel 2.6 der Pumpprozess phänomenologisch als optische Anregung des Emitters eingeführt. Hier wird ferner das Zweiniveausystem phänomenologisch um Pumpniveaus ergänzt und die Ratengleichungen zu den eingangs erwähnten Gleichungssystemen zur Beschreibung der Besetzungs- und Photonenoutputdynamik des Drei- und des Vierniveausystems erweitert.

Unabhängig von der Anzahl der Niveaus trage jeder Emitter jeweils nur einen Ladungsträger, sodass sich keine Coulombwechselwirkungen zwischen Ladungsträgern einstellen. Auch mögen die Emmitter in der Kavität nicht miteinander wechselwirken, sodass sich die Ableitung der Ratengleichungen für nur ein Ladungsträgersystem durchführen lässt, und die Emitterzahl in der Kavität (N_{Em}) in Kapitel 2.5 lediglich als Faktor in die Ratengleichungen für einen Emitter eingeht.

2.1 Feldquantisierung

Während eine Vielzahl quantenoptischer Phänomene - wie etwa die Aufspaltung der Übergangsfrequenz eines Zweiniveausystems durch den optischen Stark-Effekt [HK90] - einer semiklassischen Beschreibung zugänglich ist, erfordern einige die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes. Letzterer Klasse gehört etwa die spontane Emission an, die sich im Bild eines klassischen Lichtfeldes nicht beschreiben lässt. Die Entwicklung des in der vorliegenden Arbeit untersuchten La-

sersystems beginnt daher mit einem Abriss zur Feldquantisierung. Im folgenden Abschnitt wird zu diesem Zweck das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ nach Normalmoden entwickelt und in dieser Form zur Darstellung der Hamiltonfunktion verwendet. Nach einem Quantisierungsschritt lassen sich dann der Hamiltonoperator des freien optischen Feldes und das elektrische Feld in bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren formulieren. [Jac98], [Sch68]

In der Coulombbeichung genügt das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ eines freien elektromagnetischen Feldes im Vakuum der Wellengleichung

$$\left[\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1)$$

mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c und ist durch die Eichbedingung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ rein transversal. Eine mögliche Lösung zu (2.1) ergibt sich durch die Entwicklung des Potentials nach den Eigenfunktionen des Laplaceoperators, die im Falle der räumlichen Einschränkung auf ein quaderförmiges Normierungsvolumen V mit Kantenlängen l_x , l_y und l_z durch die Normalmoden

$$\vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r}) = \frac{\vec{\varepsilon}}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{\varepsilon} u_k(\vec{r}), \quad (2.2)$$

gegeben sind. Mit periodischen Randbedingungen ist darin der Wellenvektor gemäß $\vec{k} = \left(n_x \frac{2\pi}{l_x}, n_y \frac{2\pi}{l_y}, n_z \frac{2\pi}{l_z} \right)$ mit ganzzahligen n diskretisiert. Die beiden Einstellungen des Einheitsvektors $\vec{\varepsilon} \in \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ repräsentieren die beiden möglichen Polarisationsrichtungen: $\vec{\varepsilon}_1$ und $\vec{\varepsilon}_2$ bilden ein Rechtssystem mit dem Wellenvektor \vec{k} , sodass gemäß

$$\nabla \cdot \vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r}) = 0$$

die Moden transversale Felder darstellen. Ferner sind sie orthogonal,

$$\langle \vec{u}_{\varepsilon,k}, \vec{u}_{\varepsilon',k'} \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{\varepsilon,\varepsilon'}, \quad (2.3)$$

und erlauben die Darstellung eines jeden transversalen Vektorfeldes:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = \sum_{\varepsilon,k} c_{\varepsilon,k} \vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r}). \quad (2.4)$$

Für das Vektorpotential existiert damit die Darstellung

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\varepsilon,k} A_{\varepsilon}(\vec{k}, t) \vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r}), \quad (2.5)$$

die sich aufgrund der Form der Modenfunktion als Fourierreihenentwicklung des reellen Potentials im Ort lesen lässt, sodass sich die Koeffizienten A_{ε} bei komplexer Konjugation gemäß

$$A_{\varepsilon}^*(\vec{k}, t) = A_{\varepsilon}(-\vec{k}, t) \quad (2.6)$$

verhalten. Da das skalare Potential Φ für das freie optische Feld in Coulombbeichung verschwindet, sind das elektrische und das Magnetfeld durch

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\sum_{\varepsilon,k} \dot{A}_{\varepsilon}(\vec{k}, t) \vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r}) \quad (2.7a)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \sum_{\varepsilon,k} A_{\varepsilon}(\vec{k}, t) (\nabla \times \vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r})) = \pm i \sum_{\varepsilon,k} k A_{\varepsilon}(\vec{k}, t) \vec{u}_{\varepsilon',k}(\vec{r}) \quad (2.7b)$$

gegeben, worin $\vec{u}_{\varepsilon',k}$ gerade die Modenfunktion mit dem jeweils anderen der beiden möglichen Polarisationsvektoren $\vec{\varepsilon}$ beschreibt.

2.1.1 Hamiltonoperator des freien elektromagnetischen Feldes

Mit der Orthogonalität der Moden (2.3) und der Beziehung von Vakuumlichtgeschwindigkeit, Vakuumfeld- und Induktionskonstante $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ geht die klassische Hamiltonfunktion

$$H = \int \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^*(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^*(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right) d^3r \quad (2.8)$$

in

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{\varepsilon, k} \left(\dot{A}_\varepsilon^*(\vec{k}) \dot{A}_\varepsilon(\vec{k}) + \omega_k^2 A_\varepsilon^*(\vec{k}) A_\varepsilon(\vec{k}) \right) \quad (2.9a)$$

$$= \sum_{\varepsilon, k} H_{\varepsilon, k} \stackrel{(2.6)}{=} \sum'_{\varepsilon, k} (H_{\varepsilon, k} + H_{\varepsilon, -k}) \quad (2.9b)$$

über, worin $\omega_k^2 \equiv c^2 k^2$ gilt, $\sum'_{\varepsilon, k}$ die Summation über den halben k -Raum bedeuten möge² und die Darstellungen des elektrischen und des Magnetfeldes aus (2.7) verwendet werden. In der Gleichung (2.9a) besitzt die Hamiltonfunktion formal die Struktur einer Summe über unabhängige Oszillatoren mit komplexen Koordinaten und der Frequenz ω_k . Dieser Analogie folgend wird $A_\varepsilon(\vec{k})$ als verallgemeinerte Koordinate $q_\varepsilon(\vec{k})$ gewählt und $p_\varepsilon(\vec{k}) = \varepsilon_0 \dot{A}_\varepsilon^*(\vec{k})$ als kanonisch konjugierter Impuls bestimmt. Werden $q_\varepsilon(\vec{k})$ und $p_\varepsilon(\vec{k})$ nun in Operatoren überführt, die der Vertauschungsrelation für Ort und Impuls

$$[\hat{q}_\varepsilon(\vec{k}), \hat{p}_\varepsilon(\vec{k})] = [\hat{q}_\varepsilon^\dagger(\vec{k}), \hat{p}_\varepsilon^\dagger(\vec{k})] = i\hbar \quad (2.10)$$

genügen³, so gilt

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon, k} + H_{\varepsilon, -k} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \hat{p}_\varepsilon^\dagger(\vec{k}) \hat{p}_\varepsilon(\vec{k}) + \varepsilon_0 \omega_k^2 \hat{q}_\varepsilon^\dagger(\vec{k}) \hat{q}_\varepsilon(\vec{k}) \\ &= \hbar \omega_k \left[\left(b_{\varepsilon, k}^\dagger b_{\varepsilon, k} + \frac{1}{2} \right) + \left(b_{\varepsilon, -k}^\dagger b_{\varepsilon, -k} + \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

mit den Operatoren⁴

$$b_{\varepsilon, k} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_k}{2\hbar}} \hat{q}_\varepsilon(\vec{k}) + \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega_k}} \hat{p}_\varepsilon^\dagger(\vec{k}) \quad (2.12a)$$

$$b_{\varepsilon, k}^\dagger = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega_k}{2\hbar}} \hat{q}_\varepsilon^\dagger(\vec{k}) - \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega_k}} \hat{p}_\varepsilon(\vec{k}), \quad (2.12b)$$

die sich wiederum der Vertauschungsrelation für bosonische Operatoren

$$[b_{\varepsilon, k}, b_{\varepsilon', k'}^\dagger] = \delta_{\varepsilon, \varepsilon'} \delta_{k, k'} \quad (2.13)$$

gemäß verhalten. Der Hamiltonoperator des elektromagnetischen Feldes ergibt sich also mit

$$H_F = \sum_{\varepsilon, k} \hbar \omega_k \left(b_{\varepsilon, k}^\dagger b_{\varepsilon, k} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.14)$$

formal als Summe über voneinander unabhängige harmonische Oszillatoren.

Wegen der Relation (2.13) vertauschen $H_F^{(\varepsilon, k)}$ und $H_F^{(\varepsilon', k')}$ für unterschiedliche $(\vec{\varepsilon}, \vec{k})$, sodass eine

²Die Summation enthalte entweder \vec{k} oder $-\vec{k}$.

³Mit (2.6) werden $\hat{q}^\dagger(\vec{k}) = \hat{q}(-\vec{k})$ und $\hat{p}^\dagger(\vec{k}) = \hat{p}(-\vec{k})$, sodass andere Kommutatoren als der in (2.10) gezeigte verschwinden.

⁴Die Operatoren $b_{\varepsilon, -k}$ und $b_{\varepsilon, -k}^\dagger$ ergeben sich mit (2.6).

gemeinsame Eigenbasis für die Operatoren zu jeder Mode existiert. Die normierten gemeinsamen Eigenzustände sind die Photonenzustände

$$|n_1 n_2 \dots n_{\varepsilon,k} \dots\rangle = |\{n\}\rangle, \quad (2.15)$$

die sich als Produkt der Eigenzustände zu den jeweiligen Moden ergeben und dem Fockraum

$$H_{Fock,s} = H_s(0) \oplus H_s(1) \oplus \dots \oplus H_s(N) \oplus \dots, \quad (2.16)$$

also der direkten Summe der symmetrischen Teilräume für alle möglichen Teilchenzahlen entstammen. Die Wirkungen der Operatoren aus H_F auf diese Zustände sind durch

$$b_{\varepsilon,k}^\dagger b_{\varepsilon,k} |n_1 n_2 \dots n_{\varepsilon,k} \dots\rangle = n_{\varepsilon,k} |n_1 n_2 \dots n_{\varepsilon,k} \dots\rangle \quad (2.17a)$$

$$b_{\varepsilon,k} |n_1 n_2 \dots n_{\varepsilon,k} \dots\rangle = \sqrt{n_{\varepsilon,k}} |n_1 n_2 \dots n_{\varepsilon,k} - 1 \dots\rangle \quad (2.17b)$$

$$b_{\varepsilon,k}^\dagger |n_1 n_2 \dots n_{\varepsilon,k} \dots\rangle = \sqrt{n_{\varepsilon,k} + 1} |n_1 n_2 \dots n_{\varepsilon,k} + 1 \dots\rangle \quad (2.17c)$$

gegeben: $b_{\varepsilon,k}^\dagger b_{\varepsilon,k}$ gibt bei Anwendung auf einen Fockzustand also gerade die Anzahl der Photonen in der Mode $\vec{u}_{\varepsilon,k}$, während $b_{\varepsilon,k}$ ein Photon in $\vec{u}_{\varepsilon,k}$ vernichtet und $b_{\varepsilon,k}^\dagger$ eines in der Mode erzeugt. In diesem Sinne sind $b_{\varepsilon,k}^\dagger$ und $b_{\varepsilon,k}$ Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Die Energie des elektromagnetischen Feldes ergibt sich mit (2.17a) gemäß

$$H_F |\{n\}\rangle = \sum_{\varepsilon,k} \hbar \omega_k \left(n_{\varepsilon,k} + \frac{1}{2} \right) |\{n\}\rangle \quad (2.18)$$

als Summe der mit der jeweiligen Photonenzahl multiplizierten Energien jeder Einzelmode sowie der Vakuumenergie.

2.1.2 Das elektrische Feld in Operatordarstellung

Mit dem Hamiltonoperator des optischen Feldes lässt sich nun eine Darstellung des elektrischen Feldes in den bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus (2.12) gewinnen, die in der Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung im Kapitel 2.2 verwendet werden wird.

Durch Auflösen der Gleichungen für die bosonischen Operatoren $b_{\varepsilon,\pm k}^{(\dagger)}$ aus (2.12) nach dem Operator $\hat{q}_\varepsilon(k)$,

$$\hat{q}_\varepsilon(k) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k}} (b_{\varepsilon,k} + b_{\varepsilon,-k}^\dagger), \quad (2.19)$$

der im vorangegangenen Kapitel mit dem Koeffizienten A_ε der Entwicklung des Vektorpotentials nach den Normalmoden identifiziert worden ist, lässt sich zunächst mit $\vec{u}_{\varepsilon,k} = \vec{u}_{\varepsilon,-k}^*$ (siehe (2.2)) und einem Wechsel des Summationsindex' im zweiten Summanden von (2.19) das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ in den bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausdrücken:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\varepsilon,k} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k}} (b_{\varepsilon,k} + b_{\varepsilon,-k}^\dagger) \vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r}) = \sum_{\varepsilon,k} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k}} (b_{\varepsilon,k} \vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r}) + b_{\varepsilon,k}^\dagger \vec{u}_{\varepsilon,k}^*(\vec{r})). \quad (2.20)$$

Um das elektrische Feld nun gemäß (2.7a) zu schreiben, werden die Zeitableitungen der Operatoren $b_{\varepsilon,k}^\dagger$ und $b_{\varepsilon,k}$ benötigt, die sich aus der Heisenberg'schen Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O = [O, H] \quad (2.21)$$

für einen Operator O im Heisenbergbild und den Hamiltonoperator H des Systems ergeben. Mit dem Zusammenhang $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ folgt

$$[b_{\varepsilon,k}, H_F] = \sum_{\varepsilon',k'} \hbar\omega_{k'} [b_{\varepsilon,k}, b_{\varepsilon',k'}^\dagger b_{\varepsilon',k'}] = \hbar\omega_k b_{\varepsilon,k} \quad (2.22a)$$

$$[b_{\varepsilon,k}^\dagger, H_F] = \sum_{\varepsilon',k'} \hbar\omega_{k'} [b_{\varepsilon,k}^\dagger, b_{\varepsilon',k'}^\dagger b_{\varepsilon',k'}] = -\hbar\omega_k b_{\varepsilon,k}^\dagger \quad (2.22b)$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{\varepsilon,k} = -i\omega_k b_{\varepsilon,k} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} b_{\varepsilon,k}^\dagger = i\omega_k b_{\varepsilon,k}^\dagger. \quad (2.23)$$

Das elektrische Feld lässt sich nun in den bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren formulieren; es gilt

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = i \sum_{\varepsilon,k} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_k}} \left(b_{\varepsilon,k} \vec{u}_{\varepsilon,k}(\vec{r}) - b_{\varepsilon,k}^\dagger \vec{u}_{\varepsilon,k}^*(\vec{r}) \right). \quad (2.24)$$

2.2 Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung

Mit H_F aus Gleichung (2.14) ist der Anteil des freien optischen Feldes am Hamiltonoperator des Gesamtsystems bereits gegeben. Ferner kann die sich nun anschließende Ermittlung der Operatorenanteile, die die Bewegung der Ladungsträger im Potential des jeweiligen Emitters und deren Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld beschreiben, eine Operatorarstellung des elektrischen Feldes nutzen.

Die Licht-Materiewechselwirkung wird nachfolgend in der Dipolnäherung beschrieben. Der Hamiltonoperator eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld lässt sich dann über eine Göppert-Mayer-Transformation in einen Anteil der Ladungsträger im Emitterpotential und einen Wechselwirkungsanteil, der linear vom elektrischen Feld und nicht länger explizit von den Potentialen abhängt, auftrennen [CTDRG89][Asc04].

Da in der vorliegenden Behandlung jeweils nur ein Ladungsträger die diskreten Niveaus eines jeden Emitters besetzen möge, werden sich keine Coulombwechselwirkungen zwischen Ladungsträgern einstellen. Auch mögen verschiedene Emitter nicht miteinander wechselwirken, sodass die Beschreibung der Licht-Materiewechselwirkung für nur einen Emitter geschieht.

2.2.1 Licht-Emitter-Wechselwirkungshamiltonian

Der Hamiltonoperator eines Teilchens der Ladung q und der Masse m im freien elektromagnetischen Feld und im mechanischen Potential $U(\vec{r})$ ist in Coulombbeichung durch

$$H_p = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + \underbrace{q\Phi}_{=0} + U(\vec{r}) \quad (2.25)$$

gegeben, worin sowohl der mechanische ($\vec{p} = -i\hbar\nabla$), als auch der zeitabhängige elektromagnetische Impuls ($q\vec{A}(\vec{r}, t)$) quadratisch eingehen. Mittels der Transformation mit dem zeitabhängigen unitären Operator

$$T(t) = e^{\frac{iq}{\hbar} \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}_0, t)} \quad , \quad T^{-1} = T^\dagger \quad (2.26)$$

lässt sich H_p linearisieren und statt im Vektorpotential im quantisierten elektrischen Feld formulieren. Die in (2.26) verwandte **Dipolnäherung**

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \vec{A}(\vec{r}_0, t), \quad (2.27)$$

die den Ort des Teilchens durch die Position des Emitters \vec{r}_0 , in dessen Potential es gebunden ist, ersetzt, ist gerechtfertigt, wenn die Ausdehnung des Ladungsträgersystems hinreichend klein gegen die Wellenlänge der Strahlung ist, die Felder sich mithin im Bereich eines Emitters räumlich

praktisch nicht verändern. Die atomaren Ausmaße eines Emitters im Angströmbereich und die charakteristischen Wellenlängen optischer Strahlung trennen etwa drei Größenordnungen, sodass die Bedingungen der Dipolnäherung im vorliegenden Fall erfüllt sind.

Unter der unitären Transformation geht die Schrödingergleichung für H_p und die Zustände $|\psi\rangle$ in

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} T |\psi\rangle = \underbrace{\left[T H_p T^\dagger - i\hbar T \frac{\partial T^\dagger}{\partial t} \right]}_{\equiv H'_p} T |\psi\rangle \quad (2.28)$$

mit dem Hamiltonoperator

$$H'_p = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) + q\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_0, t)}{\partial t} \stackrel{(\text{Coulombbeziehung})}{=} -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) - q\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t) \quad (2.29)$$

über. Der Hamiltonoperator des im Emitter gebundenen Ladungsträgers im elektromagnetischen Feld zerfällt also in die beiden Anteile

$$H_{sys} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\vec{r}) \quad (2.30a)$$

$$H' = -q\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0, t), \quad (2.30b)$$

deren erster den lediglich im Potential $U(\vec{r})$ des Emitters gebundenen Ladungsträger beschreibt, während dessen Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld durch den zweiten Anteil gegeben ist. H_p ist nun linear im elektrischen Feld und nicht länger explizit vom Vektorpotential abhängig. Mit dem quantisierten elektrischen Feld aus (2.24) ergibt sich in den Eigenzuständen $|\alpha\rangle$ des Systemoperators H_{sys}

$$H_{sys} = \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (2.31a)$$

$$H' = \sum_{\alpha, \alpha', k} \hbar \left(g_{\alpha, \alpha'}(k) b_k + g_{\alpha, \alpha'}^*(k) b_k^\dagger \right) |\alpha\rangle \langle \alpha'|. \quad (2.31b)$$

Darin gibt ω_{α} als Eigenwert des Operators H_{sys} zum Zustand $|\alpha\rangle$ die Energie des entsprechenden Niveaus an und k bezeichne abkürzend ein Paar aus $\{\vec{\varepsilon}, \vec{k}\}$. Die Größe

$$g_{\alpha, \alpha'}(k) = \frac{i}{\hbar} \left(\vec{d}_{\alpha, \alpha'} \cdot \vec{\varepsilon} \right) \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0}} u_k(\vec{r}_0) \quad (2.32)$$

gibt die Kopplung des elektronischen Übergangs zwischen den diskreten Zuständen $|\alpha'\rangle$ und $|\alpha\rangle$ mit der durch k indizierten Photonenmode an. Sie ist abhängig vom der Größe des Dipolmatrixelements des Übergangs

$$\vec{d}_{\alpha, \alpha'} = q \langle \alpha, \vec{r} | \alpha' \rangle = q \int \phi_{\alpha}^*(\vec{r}) \vec{r} \phi_{\alpha'}(\vec{r}) d^3r, \quad (2.33)$$

worin die $\phi(\vec{r})$ die Wellenfunktionen der entsprechenden Emitterzustände in Ortsdarstellung sein mögen, und seiner Einstellung zum Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}$ der Lichtmode. Ferner gehen die Modenfrequenz und der Wert der skalaren Modenfunktion u_k (siehe (2.2)) am Ort \vec{r}_0 ein. Da $\vec{d}_{\alpha, \alpha'}$ für $\alpha = \alpha'$ verschwindet, gilt $g_{\alpha, \alpha, k} = 0$. Der Gesamthamiltonoperator der Wechselwirkung eines durch diskrete Energieniveaus charakterisierten Ladungsträgersystems mit dem quantisierten freien optischen Feld besitzt damit die Gestalt

$$\begin{aligned} H &= H_{sys} + H_F + H' \\ &= \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| + \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_{\alpha, \alpha', k} \hbar \left(g_{\alpha, \alpha'}(k) b_k + g_{\alpha, \alpha'}^*(k) b_k^\dagger \right) |\alpha\rangle \langle \alpha'|. \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.2.2 Jaynes-Cummings-Modell

Im vorangegangenen Kapitel wird die Wechselwirkung eines Ladungsträgersystems, das beliebig viele diskrete Zustände besitzen möge, mit einer ebenfalls beliebigen Anzahl photonischer Moden des freien optischen Feldes beschrieben. Die Lasersysteme hingegen, die in diesem zweiten Abschnitt der vorliegenden Arbeit modelliert und in den nachfolgenden Kapiteln numerisch untersucht werden sollen, sind durch die Kopplung eines ausgewählten Übergangs mit einer resonanten Kavitätsmode gekennzeichnet. Da die anderen Übergänge Frequenzen abseits der Frequenz der Kavitätsmode besitzen mögen, und deshalb praktisch keinen Beitrag zur Laseraktivität geben, wird der Emittor zur Vereinfachung der nachstehenden Rechnungen als Zweiniveausystem mit den Niveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$, deren Übergangsenergie $\hbar\omega_{\alpha\beta} = \hbar(\omega_\alpha - \omega_\beta)$ betrage, beschrieben. Im Kapitel 2.6 werden dann wieder weitere Niveaus hinzugefügt, um den Einfluss der Besetzungsdynamik auf das Laserverhalten zu untersuchen. In diesem Kapitel werden nun nach der Separation der Kavitätsmode und der Beschränkung des Ladungsträgersystems auf zwei Niveaus die nichtresonanten Terme aus dem entstehenden Hamiltonoperator in der Rotating-Wave-Approximation entfernt. Es ergibt sich der Jaynes-Cummings-Hamiltonian.

In einer optischen Kavität, etwa einem Fabry-Perot-Resonator, der Länge L bilden sich stehende Wellen aus, deren diskrete Frequenzen durch $\omega_k = \frac{c\pi}{L}n$ mit ganzzahligem n gegeben sind und mit abnehmender Länge der Kavität größere Abstände voneinander zeigen. Aufgrund von Kavitätsverlusten, die in Kapitel 2.4 modelliert werden, stellen sich endliche Linienbreiten $\delta\omega$ ein. Ein Maß für die Schärfe der Frequenzlinien gibt der Qualitätsfaktor $Q = \frac{\omega}{\delta\omega}$, der Modenfrequenz und Linienbreite ins Verhältnis setzt. Für hinreichend kleine L und hinreichend große Q lassen sich also Moden nach ihren Frequenzen separieren, sodass eine ausgewählte Kavitätsmode lediglich mit einem resonanten Übergang eines Ladungsträgersystems wechselwirken wird, während andere Übergänge nicht an die Kavitätsmode koppeln. Für die nachfolgenden Rechnungen ist dann eine Beschreibung des Emittors als Zweiniveausystem gerechtfertigt.

Die Operatoren des Zweiniveausystem-Unterraums, die in (2.34) durch die Projektoren $|\alpha\rangle\langle\alpha'|$ gegeben sind, lassen sich elegant über die Pauli'schen Spinmatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

darstellen, und wirken auf die Zustände

$$|\alpha\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad |\beta\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T. \quad (2.36)$$

Der Systemanteil des Hamiltonoperators für das Zweiniveausystem geht in dieser Basis in

$$H_{sys}^{ZNS} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_\alpha & 0 \\ 0 & \omega_\beta \end{pmatrix} = \underbrace{\hbar \frac{\omega_\alpha + \omega_\beta}{2}}_{\text{konstant}} I_2 + \frac{1}{2} \hbar \omega_{\alpha\beta} \sigma_z, \quad (2.37)$$

mit der (2×2) -Einheitsmatrix I_2 über, wobei der konstante Anteil durch eine Verschiebung der Nullpunktsenergie zu Null gesetzt werden kann. Die Operatoren für die Übergänge zwischen den beiden Niveaus nehmen in der Spinmatrizenbasis die Form

$$|\alpha\rangle\langle\beta| \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2} \equiv \sigma_+ \quad (2.38a)$$

$$|\beta\rangle\langle\alpha| \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2} \equiv \sigma_- \quad (2.38b)$$

an. σ_+ regt den Emittor also gerade aus dem Grund- in den angeregten Zustand an, während σ_- die gegenteilige Wirkung zeigt.

Nach den Einschränkungen des photonischen und des elektronischen Systems entfällt in (2.34) die Summation über den Modenindex k ; die Summe über die beiden Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ liefert vier Summanden:

$$H' = \hbar g_{\alpha\beta} b \sigma_+ + \hbar g_{\alpha\beta}^* b^\dagger \sigma_- + \hbar g_{\beta\alpha} b \sigma_- + \hbar g_{\beta\alpha}^* b^\dagger \sigma_+. \quad (2.39)$$

Die ersten beiden Terme repräsentieren darin die Prozesse der Vernichtung eines Photons bei gleichzeitiger Anregung des Emitters (Absorption) beziehungsweise der Erzeugung eines Photons mit einhergehender Relaxation des Emitters (Emission), während die letzten beiden Summanden eine gleichzeitige Energieab- beziehungsweise Energiezunahme in beiden Teilsystemen beschreiben. Im Rahmen der **Rotating-Wave-Approximation** werden die beiden letztgenannten Prozesse vernachlässigt.

Mittels der Transformation mit dem Operator $U(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t}$ mit $H_0 = H_{sys}^{ZNS} + H_F$ werden die Operatorprodukte aus (2.39) in das Wechselwirkungsbild überführt. Aufgrund des unitären Charakters der Transformation entsprechen transformierte Produkte den Produkten der separat transformierten Größen und es ergibt sich

$$\widetilde{b^{(\dagger)}\sigma_\pm}(t) = U(t) b^{(\dagger)}\sigma_\pm U^\dagger(t) = \tilde{b}^{(\dagger)}(t)\tilde{\sigma}_\pm(t) \quad (2.40)$$

Die Dynamik der einzelnen Operatoren folgt dann mit der Produktregel; so gilt exemplarisch

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{b}(t) = U(t) [b, H_0] U^\dagger(t) = \hbar\omega \tilde{b}(t) \Rightarrow \tilde{b}(t) = \tilde{b}(0) e^{-i\omega t} = b e^{-i\omega t}. \quad (2.41)$$

Die Kommutatoren der Spinoperatoren σ_+ und σ_- mit H_0 liefern anstelle der Frequenz der Photonenmode ω die Übergangsfrequenz $\omega_{\alpha\beta}$ zwischen den Niveaus des Zweiniveausystems, sodass sich die Produkte aus photonischen und Zweiniveausystemoperatoren gemäß

$$\tilde{b}\tilde{\sigma}_\pm = b\sigma_\pm e^{i(\omega_{\alpha\beta} \mp \omega)t}, \quad \tilde{b}^\dagger\tilde{\sigma}_\pm = b^\dagger\sigma_\pm e^{i(\omega_{\alpha\beta} \pm \omega)t} \quad (2.42)$$

verhalten. Sind die Frequenz der Photonenmode ω und die Übergangsfrequenz $\omega_{\alpha\beta}$ einander ähnlich, so werden die Operatorprodukte $\tilde{b}\tilde{\sigma}_+$ und $\tilde{b}^\dagger\tilde{\sigma}_-$ nur sehr langsam, die Produkte $\tilde{b}\tilde{\sigma}_-$ und $\tilde{b}^\dagger\tilde{\sigma}_+$ sehr rasch oszillieren. In den letzteren beiden Fällen werden in einer zeitlichen Integration⁵ die positiven und negativen Schwingungsbeiträge einander also in hohem Maße kompensieren, sodass das Vernachlässigen der Operatorprodukte $b\sigma_-$ und $b^\dagger\sigma_+$ in (2.39) im Rahmen der Rotating-Wave-Approximation nur einen geringen Fehler bedeutet.

Nun ist also ein Operator zur Beschreibung der Kopplung eines Zweiniveausystems mit einer etwa resonanten photonischen Mode konstruiert: Der **Jaynes-Cummings-Hamiltonian** ergibt sich zu

$$\begin{aligned} H &= \underbrace{H_{sys}^{ZNS} + H_F}_{\equiv H_0} + H' \\ &= \hbar\omega_\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| + \hbar\omega_\beta |\beta\rangle \langle\beta| + \hbar\omega b^\dagger b + \hbar g b |\alpha\rangle \langle\beta| + \hbar g^* b^\dagger |\beta\rangle \langle\alpha| \\ &= \frac{1}{2} \hbar\omega_{\alpha\beta} \sigma_z + \hbar\omega b^\dagger b + \hbar g b \sigma_+ + \hbar g^* b^\dagger \sigma_-. \end{aligned} \quad (2.43)$$

In der Basis der Eigenzustände des freien Operatoranteils H_0

$$|\zeta, n\rangle = |\zeta\rangle |n\rangle, \quad \zeta \in \{\alpha, \beta\},$$

worin $|\zeta\rangle$ die Eigenzustände des Hamiltonoperators des Ladungsträgersystems H_{sys} und $|n\rangle$ den Photonenzahlzustand für die Kavitätsmode angeben mögen, ist der Jaynes-Cummings-Hamiltonian blockdiagonal. Der Wechselwirkungsanteil H' koppelt gerade die Zustände $|\alpha, n\rangle$ und $|\beta, n+1\rangle$, erlaubt also die bereits benannten Prozesse der Anregung des Ladungsträgersystems bei Absorption eines Photons und der Relaxation des Ladungsträgers in den tieferen Zustand bei Emission

⁵wie etwa zur Lösung der von-Neumann-Gleichung im Wechselwirkungsbild, vergleiche (2.54) in Kapitel 2.4

eines Photons in die Kavitätsmode. Wird die Photonenerzeugung als Anregung des photonischen Teilsystems gezählt, so konserviert das Jaynes-Cummings-Modell gerade die Anregung im Gesamtsystem. Der 2×2 -Block, der die Erhaltung von $n + 1$ Anregungen zeigt, liest sich

$$\frac{1}{\hbar} H_{JC}^{(n)} = \begin{pmatrix} \omega_\alpha + n\omega & g\sqrt{n+1} \\ g^*\sqrt{n+1} & \omega_\beta + (n+1)\omega \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Die blockdiagonale Form macht das Modell zwar exakt lösbar, zeigt jedoch die Notwendigkeit einer Erweiterung zur Beschreibung eines Lasersystems: Dissipative Prozesse wie die spontane Emission in nichtlasende Moden lassen sich nicht allein mit dem Hamiltonoperator aus (2.43) erfassen. Im Kapitel 2.4 werden sie über eine Reservoirankopplung modelliert. Die Ergänzung eines phänomenologisch begründeten Pumpprozesses wird in Kapitel 2.6 beschrieben.

2.3 Dichtematrix

Wird an einem System ein unvollständiger Satz von Observablen gemessen, liegt also nur eine eingeschränkte Information über das System vor, so wird sich dessen Zustand nicht durch einen einfachen Vektor im Hilbertraum beschreiben lassen, sondern als Mischzustand aus der statistisch gewichteten Menge aller denkbaren Systemzustände einstellen. Eine Beschreibung ist über die Dichtematrix

$$\varrho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.45)$$

möglich, in der $p_i = \varrho_{i,i} = \langle \psi_i | \varrho | \psi_i \rangle$ die Wahrscheinlichkeit für die Realisierung des Zustands $|\psi_i\rangle$ angibt.

Die Dichtematrix ist selbstadjungiert, semipositiv definit und besitzt die Spur 1:

$$\varrho^\dagger = \varrho \quad , \quad \varrho \geq 0 \quad , \quad \text{tr} \{ \varrho \} = 1. \quad (2.46)$$

Bei bekannter Dichtematrix eines Systems lassen sich die Erwartungswerte beliebiger Operatoren O durch Spurbildung über Operator und Dichtematrix gemäß

$$\langle O \rangle = \text{tr} \{ \varrho O \} \quad (2.47)$$

bestimmen, sodass mit der Angabe seiner Dichtematrix ein System also vollständig beschrieben ist. Die Dynamik der Dichtematrix ist über die von-Neumann-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varrho(t) = [H, \varrho(t)] \quad (2.48)$$

gegeben, die sich durch Einbringen der zeitabhängigen Schrödingergleichung in die Definition (2.45) ergibt [Nol04]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varrho &= \sum_i p_i \left(\frac{\partial |\psi_i\rangle}{\partial t} \langle \psi_i| + |\psi_i\rangle \frac{\partial \langle \psi_i|}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{i}{\hbar} \sum_i p_i (H |\psi_i\rangle \langle \psi_i| - |\psi_i\rangle \langle \psi_i| H) = -\frac{i}{\hbar} [H, \varrho] \end{aligned}$$

Im Folgekapitel werden das Zweiniveausystem und die Kavitätsphotonenmode zum Zwecke der Modellation von Dissipationseffekten jeweils an ein Reservoir gekoppelt, das durch ein Quasikontinuum an Moden eines elektromagnetischen Feldes beschrieben wird. Von den Reservoirs wird lediglich gefordert werden, dass sie durch die Wechselwirkung mit dem jeweiligen System nur wenig aus dem thermischen Gleichgewichtszustand ausgelenkt werden und gegebenenfalls rasch in diesen relaxieren mögen; die konkreten Vorgänge in den Reservoirs sind nicht weiter von Interesse. Die Zustände des jeweiligen Reservoiranteils müssen also für die Beschreibung des zu untersuchenden Teilsystems nicht konkret festliegen. Für die anstehenden Rechnungen wird daher der Dichtematrixformalismus gewählt.

2.4 Dissipation durch Reservoirankopplung

Unter realen Bedingungen wird der Anregungszustand eines Systems aus Emitter und Kavitätsmode irreversibel zerfallen und nicht, wie im Jaynes-Cummings-Modell beschrieben (*Kapitel 2.2.2*), für alle Zeiten erhalten bleiben. Dissipative Prozesse werden im Folgenden durch die Ankopplung des zu untersuchenden Systems an ein bosonisches Reservoir modelliert, dessen Eigenschaften die Beschreibung von (irreversiblen) Verlustmechanismen ausgehend von der reversiblen von-Neumann-Gleichung ermöglichen. Das Reservoir wechselwirke nur schwach mit dem System, sodass lediglich die Besetzungen der Systemzustände, nicht jedoch diese selbst verändert werden. Ferner zeichne es sich durch eine praktisch unbegrenzte Zahl an Freiheitsgraden aus und relaxiere im Vergleich zur Zeitskala der Systemprozesse nach Auslenkung sehr rasch zurück in den thermischen Gleichgewichtszustand. Hier wird das Reservoir als Quasikontinuum photonischer Moden mit dem Hamiltonoperator

$$H_R = \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k \quad (2.49)$$

und der Dichtematrix

$$R = \frac{1}{Z} e^{-H_R/(k_B T)} = \frac{1}{Z} \sum_{\{n\}} e^{(-1/(k_B T)) \sum_k \hbar \omega_k n_k} |\{n\}\rangle \langle \{n\}|, \quad (2.50)$$

worin die Zustandssumme $Z = \text{tr} \left\{ \exp \left(-\frac{H_R}{k_B T} \right) \right\}$, die Boltzmannkonstante k_B sowie die Reservoirtemperatur T eingehen, beschrieben. Die Dichtematrix des Gesamtsystems ϱ lässt sich durch Spurbildung über die Reservoirfreiheitsgrade gemäß

$$\varrho_s = \text{tr}_R \{ \varrho \} \quad (2.51)$$

auf die Systemdichtematrix ϱ_s reduzieren.

Mit der Annahme der schwachen Kopplung von System und Reservoir und den oben benannten Reservoirseigenschaften lassen sich die Born- und die Markovnäherung rechtfertigen, die die Formulierung einer geschlossenen Gleichung, der **Mastergleichung**, für den Systemanteil der Dichtematrix ermöglichen. Die Verluste finden sich dort als **Lindbladterme** wieder.

Im Folgenden wird nicht das gesamte System aus Emitter und Kavitätsmode an ein Reservoir gekoppelt, sondern beide Anteile getrennt voneinander behandelt und separate Mastergleichungen für das Zweiniveausystem und die Kavitätsmode ermittelt. Die Teilsysteme mögen dabei an zwei statistisch unabhängige Reservoirs gekoppelt sein. Im additiv in System-, Reservoir- und Wechselwirkungsanteil zerfallenden Hamiltonoperator des Gesamtsystems,

$$H = H_S + H_R + H_{SR}, \quad (2.52)$$

ist also der Anteil des an das Reservoir gekoppelten Systems H_S entweder zu H_{sys}^{ZNS} (bei Ankopplung des Zweiniveausystems) oder H_F (bei Ankopplung der Kavitätsmode an das Reservoir) gewählt⁶. Dieses Vorgehen vereinfacht die Rechnung stark, da sich für die Operatoren σ_\pm , $b^{(\dagger)}$ im Wechselwirkungsbild dann lediglich triviale Zeitabhängigkeiten ergeben (*vergleiche (2.63) in der anschließenden Rechnung, bzw Kapitel 2.2.2, S. 10*), vernachlässigt allerdings die interne Kopplung von Emitter und Kavitätsmode im Wechselwirkungsanteil des Jaynes-Cummings-Hamiltonians, die in Gleichung (2.43) im Kapitel 2.2.2 durch H' gegeben war. Nach Carmichael [Car99, S. 283] sei die entstehende Abweichung für realistische Kopplungsstärken jedoch klein. Eine exemplarische Berechnung der Bewegungsgleichung für den σ_+ -Operator stützt diese Einschätzung: In Kapitel 2.2.2 sind die Operatoren $b^{(\dagger)}$ und σ_\pm mit dem Transformationsoperator $U(t) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} H_0 t \right)$ mit dem Hamiltonoperator $H_0 = H_{sys}^{ZNS} + H_F$, also gerade dem wechselwirkungsfreien Jaynes-Cummings-Hamiltonian in das Wechselwirkungsbild überführt worden. Hier hingegen gilt $U'(t) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} H_S t \right)$;

⁶Da die σ -Operatoren auf einen anderen Raum als die photonischen Erzeuger und Vernichter für die Kavitätsmode wirken, führt die Wahl von $H_S = H_{sys} + H_F$ aus (2.43), also des wechselwirkungsfreien Jaynes-Cummings-Operators als Systemhamiltonian auf identische Ergebnisse.

wird H_S als voller Jaynes-Cummings-Hamiltonian gewählt, so ergibt sich nach einer zum Vorgehen in Kapitel 2.2.2 analogen Rechnung statt einer trivialen Zeitabhängigkeit

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\sigma}_+(t) = -\frac{i}{\hbar} U'(t) [\sigma_+, H_{JC}] (U^\dagger)'(t) = i\omega_{\alpha\beta} \sigma_+ - g^* b^\dagger \sigma_z. \quad (2.53)$$

Die Bewegungsgleichungen der Operatoren sind nun gekoppelt, der Grad der Beimischung anderer Operatoren ist jedoch durch g gegeben und damit klein für kleine Kopplungskonstanten g .

Die Ableitung der Mastergleichung für ein angekoppeltes Zweiniveausystem verläuft analog zum Fall der Ankopplung einer Kavitätsmode; im Kapitel 2.4.1 werden System- und Reservoiroperatoren eingeführt, um eine allgemeine Rechnung vornehmen zu können. Die anschließenden Kapitel benennen dann die konkreten Verlustmechanismen für die beiden Teilsysteme.

Die Dynamik der Gesamtdichtematrix ϱ ist durch die von-Neumann-Gleichung (2.48) für den Gesamthamiltonian H gegeben. Eine Überführung ins Wechselwirkungsbild gemäß

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varrho}(t) = [\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\varrho}(t)] \quad (2.54)$$

trennt den freien Anteil der Zeitentwicklung vom Wechselwirkungsanteil. Änderungen von $\tilde{\varrho}(t)$ sind nun proportional zu der als klein angenommenen Wechselwirkung von System und Reservoir. Wird das Ergebnis der formalen Integration wieder in (2.54) eingesetzt, so ergibt sich der exakte Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varrho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \varrho(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\varrho}(t')]] dt', \quad (2.55)$$

in dem $\tilde{\varrho}(0) = \varrho(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammenfallen.

Eine geschlossene Gleichung für die Systemdichtematrix lässt sich hieraus nach Anwendung zweier Näherungen, der **Born-** und der **Markovnäherung** gewinnen.

2.4.1 Born- und Markovnäherung zur Ableitung der Mastergleichung

Eine Wechselwirkung von System und Reservoir möge bei $t_0 = 0$ beginnen, sodass zu diesem Zeitpunkt die entsprechenden Dichtematrizen faktorisieren:

$$\varrho(0) = \varrho_s(0)R. \quad (2.56)$$

Bei hinreichend schwacher Kopplung von System und Reservoir wird die Annahme einer faktorierten Dichtematrix für spätere Zeitpunkte $\tilde{\varrho}(t) \approx \tilde{\varrho}_S(t)R$ eine angemessene Näherung darstellen. Durch die Vernachlässigung etwaiger Korrekturterme ist die Bewegungsgleichung der Dichtematrix auf die zweite Ordnung in H_{SR} beschränkt. In Anlehnung an den Abbruch der Born'schen Reihe in der Streutheorie [CTDL99] wird dieser Näherungsschritt **Bornnäherung** genannt. Nach der Spurbildung über die Reservoirfreiheitsgrade ergibt sich aus (2.55) eine Gleichung für die Dynamik der Systemdichtematrix

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varrho}_S(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R \left\{ [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\varrho}_S(t')R]] \right\} dt', \quad (2.57)$$

wobei der erste Summand auf der rechten Gleichungsseite in (2.55) nach Spurbildung fortfällt. Dies zeigt sich, wenn die Gestalt des Hamiltonoperators H_{SR} für die Wechselwirkung von System und Reservoir konkretisiert wird; er setze sich gemäß

$$H_{SR} = \sum_i s_i \Gamma_i = \sum_i \tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t) \quad (2.58)$$

aus Systemoperatoren s_i und Reservoiroperatoren Γ_i zusammen. In der Behandlung des Zweiniveausystems geben die s_i die σ -Operatoren für das Ladungsträgersystem wieder; ist die Kavitätsmode

an das Reservoir gekoppelt, so laufen die s_i über Erzeuger und Vernichter b^\dagger , b der betreffenden Photonenmode, es gilt⁷:

$$s_i \in \{\sigma_+, \sigma_-\} \quad \text{beziehungsweise} \quad s_i \in \{b^\dagger, b\}. \quad (2.59)$$

Die Reservoiooperatoren ergeben sich zu

$$\Gamma_i \in \left\{ \sum_k \hbar g_k b_k, \sum_k \hbar g_k^* b_k^\dagger \right\}. \quad (2.60)$$

Für den in (2.57) verschwundenen Term ergibt sich nun mit der zyklischen Vertauschbarkeit in der Spurbildung

$$\begin{aligned} \text{tr}_R \left\{ \left[\tilde{H}_{SR}(t), \varrho_s(0) R \right] \right\} &= \left[\text{tr}_R \left\{ R \tilde{H}_{SR}(t) \right\}, \varrho_s(0) \right] \\ &= \left[U'(t) \text{tr}_R \left\{ R H_{SR} \right\} (U^\dagger)'(t), \varrho_s(0) \right] \\ &= \sum_j s_j \left[U'(t) \langle \Gamma_i \rangle_R (U^\dagger)'(t), \varrho_s(0) \right], \end{aligned} \quad (2.61)$$

wobei für den vorletzten Schritt für den Tausch von R und H_R das thermische Gleichgewicht des Reservoirs benötigt wird⁸ und im letzten Schritt die Spurbildung $\text{tr}_R \{R \dots\} = \langle \dots \rangle_R$ abgekürzt wird. Mit den Γ_i aus (2.60) und der in Fockbasis diagonalen Dichtematrix R aus (2.50) gilt jedoch $\langle \Gamma_i \rangle_R = 0$.

Mit den System- und Reservoiooperatoren aus (2.59) und (2.60) lässt sich nach Auswertung des Doppelkommutators in (2.57) schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varrho}_S(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \int_0^t \{ \tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\varrho}_S(t') - \tilde{s}_j(t') \tilde{\varrho}_S(t') \tilde{s}_i(t) \} \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R dt' \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \int_0^t \{ \tilde{\varrho}_S(t') \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\varrho}_S(t') \tilde{s}_j(t') \} \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R dt'. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Wird nun, wie zu Beginn des Kapitels beschrieben, als Hamiltonoperator des Systems H_S nicht der volle Jaynes-Cummings-Hamiltonian, sondern lediglich der Zweiniveau- beziehungsweise der Anteil zur Beschreibung der Kavitätsmode verwendet, so ergibt sich in der Wechselwirkungsdarstellung der Systemoperatoren s_j eine triviale Zeitabhängigkeit, die einen Wechsel des Zeitarguments gemäß

$$\tilde{s}_j(t') = s_j e^{-i\omega_j t'} = \tilde{s}_j(t) e^{i\omega_j(t-t')} \quad (2.63)$$

ermöglicht. ω_j benennt dabei abhängig von der Wahl des angekoppelten Systems die Frequenz des Übergangs im Emitter beziehungsweise der Kavitätsphotonenmode. Das Vorzeichen lässt sich etwa in (2.42) im Kapitel 2.2.2 ablesen.

In (2.62) gehen die Eigenschaften des Reservoirs durch die beiden Korrelationsfunktionen

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R, \quad \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R \quad (2.64)$$

⁷In Kapitel 2.2 ist die Kopplung eines Ladungsträgersystems mit den Moden eines optischen Feldes beschrieben und mit g aus (2.32) ein mikroskopischer Ausdruck für die Stärke der Kopplung ermittelt worden; die System- und Reservoiooperatoren sind damit für diesen Fall einsichtig. Die Ankopplung einer Kavitätsmode an die Lichtmoden des Reservoirs wird im Folgenden analog behandelt, wenn auch keine mikroskopische Beschreibung der Kopplung gegeben ist.

⁸Befindet sich R stets im thermischen Gleichgewicht, so gilt die von-Neumann-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} R = [H_R, R] = 0,$$

sodass R und H_R vertauschen.

ein; fallen diese sehr rasch im Vergleich zur Zeitskala der Änderungen der Systemdichtematrix im Wechselwirkungsbild ab, so werden die Ersetzung von $\tilde{\varrho}_S(t')$ durch $\tilde{\varrho}_S(t)$ und die Verschiebung der unteren Integrationsgrenze nach $-\infty$ gerechtfertigt sein. Die **Markovnäherung** vernachlässigt also in der Bewegungsgleichung (2.62) die explizite Zeitabhängigkeit der Systemdichtematrix von Zeitpunkten $t' < t$. Mit den eingangs skizzierten Eigenschaften des Reservoirs ist ein solches Markov'sches Verhalten des Systems einsichtig: Verläuft die Relaxation des Reservoirs in den thermischen Gleichgewichtszustand sehr viel rascher als die Systemprozesse, so sind die dem Reservoir durch das System aufgeprägten Änderungen nicht hinreichend lange gespeichert, um in nennenswertem Maße auf die weitere Zeitentwicklung des Systems zurückzuwirken.

Für eine nähere Untersuchung der Gültigkeit der Markovnäherung lassen sich die Funktionen in (2.64) mit den Reservoiroperatoren in (2.60) konkret bestimmen. Für $i = j$ ergeben sich die Erwartungswerte von zwei photonischen Vernichtungs- beziehungsweise Erzeugungsoperatoren hinsichtlich der Reservoirfreiheitsgrade. Da sich R stets im thermischen Gleichgewicht befinden möge, mithin der Erwartungswert über die Reservoirfreiheitsgrade gemäß

$$\langle \dots \rangle_R = \sum_{\{n\}} \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{k_B T} \sum_k \hbar \omega_k n_k} \langle \{n\} | \dots | \{n\} \rangle \quad (2.65)$$

gebildet wird, fallen diese Korrelationsfunktionen fort. Für die verbleibenden ergibt sich

$$\langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R = \langle \tilde{\Gamma}_1(t') \tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R^* = \hbar^2 \sum_k |g_k|^2 (\langle n_k \rangle + 1) e^{-i\omega_k(t-t')} \quad (2.66a)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}_2(t) \tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R = \langle \tilde{\Gamma}_2(t') \tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R^* = \hbar^2 \sum_k |g_k|^2 \langle n_k \rangle e^{i\omega_k(t-t')} \quad (2.66b)$$

mit der Anzahl der Photonen in der k -ten Reservoirmode

$$\langle n_k \rangle = \langle b_k^\dagger b_k \rangle_R = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_k}{k_B T}} - 1}. \quad (2.67)$$

Nach Einführung einer Zustandsdichte $D(\omega)$, mit der sich gemäß $D(\omega)d\omega$ gerade die Anzahl der Moden mit Frequenzen im Intervall $\omega + d\omega$ ergibt, gehen die Gleichungen in (2.66) in

$$\langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R = \hbar^2 \int_0^\infty D(\omega) |g(\omega)|^2 (\langle n(\omega) \rangle + 1) e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad (2.68a)$$

$$\langle \tilde{\Gamma}_2(t) \tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R = \hbar^2 \int_0^\infty D(\omega) |g(\omega)|^2 \langle n(\omega) \rangle e^{i\omega(t-t')} d\omega \quad (2.68b)$$

über und lassen sich nun als Fouriertransformierte der Funktionen $D(\omega) |g(\omega)|^2 (\langle n(\omega) \rangle + 1)$ und $D(\omega) |g(\omega)|^2 \langle n(\omega) \rangle$ lesen. Sind diese Funktionen glatt, so werden ihre Transformaten rasch in der Zeit abfallen; bei schwacher Kopplung ändert sich zudem die Systemdichtematrix im Wechselwirkungsbild, in dem der Anteil der freien Zeitentwicklung absepariert ist, langsam. Im Integral über t' in (2.69) wird dann also der Beitrag der Systemdichtematrix für t' nahe t maßgeblich sein⁹. Die Markovnäherung wird also nur anwendbar sein, wenn das Reservoir ein Kontinuum an Moden aufweist. Die expliziten Zerfallszeiten der Reservoirkorrelationsfunktionen sind von der Zustandsdichte im Reservoir und vom Verhalten der Kopplungskonstante g mit ω abhängig.

Die geschweiften Klammern in (2.62) hängen nun lediglich von der Zeit t ab, sodass sich eine geschlossene Gleichung für die Systemdichtematrix ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varrho}_S(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \{ \tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t) \tilde{\varrho}_S(t) - \tilde{s}_j(t) \tilde{\varrho}_S(t) \tilde{s}_i(t) \} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_j(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R dt' \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \{ \tilde{\varrho}_S(t) \tilde{s}_j(t) \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\varrho}_S(t) \tilde{s}_j(t) \} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_j(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R dt' \end{aligned} \quad (2.69)$$

⁹In diesem Fall rasch abfallender Korrelationsfunktionen wird also auch die Verschiebung der unteren Integrationsgrenze nach $-\infty$ nur geringe Abweichungen bedingen.

Die Integrale über die Korrelationsfunktionen in (2.69) können nun explizit ausgewertet werden. Exemplarisch sei die Rechnung für die Wahl $i = 1$ und $j = 2$ und den Fall der Kopplung des Zweiniveausystems an das Reservoir, also für die System- und Reservoiroperatoren

$$\begin{aligned}\tilde{s}_1(t) &= \tilde{\sigma}_+(t) \quad , \quad \tilde{s}_2(t) = \tilde{\sigma}_-(t)e^{i\omega_{\alpha\beta}(t-t')} \\ \tilde{\Gamma}_1(t) &= \sum_k \hbar g_k b_k e^{-i\omega_k t} \quad , \quad \tilde{\Gamma}_2(t') = \sum_k \hbar g_k^* b_k^\dagger e^{i\omega_k t'}\end{aligned}$$

gezeigt. Mit der Dirac'schen Identität

$$\frac{1}{x \pm i\eta} \xrightarrow{(\eta \rightarrow 0)} P \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x),$$

in der P den Cauchyhauptwert bezeichne, ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t e^{i\omega_{\alpha\beta}(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R dt' &= \sum_k |g_k|^2 \int_{-\infty}^t e^{-i(\omega_k - \omega_{\alpha\beta})(t-t')} (\langle n_k \rangle + 1) dt' \\ &= - \sum_k |g_k|^2 (\langle n_k \rangle + 1) \frac{i}{\omega_k - \omega_{\alpha\beta} - i\eta} \quad (\text{mit } \eta \rightarrow 0) \\ &= \frac{\gamma_{\alpha,\beta}}{2} (\langle n_k \rangle + 1) - i\Delta_{1,\alpha,\beta}\end{aligned}\tag{2.70}$$

mit den Ersetzungen

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_k |g_k|^2 2\pi\delta(\omega_k - \omega_{\alpha\beta}) \quad , \quad \Delta_{1,\alpha\beta} = \sum_k |g_k|^2 (\langle n_k \rangle + 1) P \frac{1}{\omega_k - \omega_{\alpha\beta}}.\tag{2.71}$$

Für eine komfortablere Darstellung der Integrationsergebnisse wird eine Vereinbarung zur Notation getroffen: Es bezeichne die Frequenz ω_0 abhängig von der Wahl des an das Reservoir gekoppelten Systems die Übergangsfrequenz $\omega_{\alpha\beta}$ im Emitter beziehungsweise die Frequenz ω der Kavitätsmode. Die Indizes an γ und Δ_1 werden nun nicht mehr notiert.

Aufgrund der δ -Funktion wird γ lediglich einen Beitrag für $\omega_k = \omega_0$ geben, sodass $\langle n_k \rangle$ im Produkt mit γ in die Gleichgewichtsphotonenanzahl in der resonanten Reservoirmode $\langle n_0 \rangle$ übergeht.

Die verbleibenden Integrationen können analog ausgeführt werden; da die beiden Korrelationsfunktionen in (2.64) für $i = 2, j = 1$ Reservoirerwartungswerte über photonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in Normalordnung liefern, ergibt sich mit

$$\Delta = \sum_k |g_k|^2 \langle n_k \rangle P \frac{1}{\omega_k - \omega_0}\tag{2.72}$$

noch eine weitere Größe. Die Gleichung für die Systemdichtematrix (2.69) geht nun in

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varrho}_S &= i\Delta_1 [\tilde{s}_1 \tilde{s}_2, \tilde{\varrho}_S] - i\Delta [\tilde{s}_2 \tilde{s}_1, \tilde{\varrho}_S] \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} (N_0 + 1) [2\tilde{s}_2 \tilde{\varrho}_S \tilde{s}_1 - \tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \tilde{\varrho}_S - \tilde{\varrho}_S \tilde{s}_1 \tilde{s}_2] \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} N_0 [2\tilde{s}_1 \tilde{\varrho}_S \tilde{s}_2 - \tilde{s}_2 \tilde{s}_1 \tilde{\varrho}_S - \tilde{\varrho}_S \tilde{s}_2 \tilde{s}_1]\end{aligned}\tag{2.73}$$

über, worin lediglich noch Systemoperatoren verbleiben, die zum Zeitpunkt t ausgewertet werden. Nach einem Wechsel zurück ins Schrödingerbild gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho_s = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \varrho_s] + e^{-\frac{i}{\hbar} H_S t} \frac{\partial \tilde{\varrho}_s(t)}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar} H_S t}$$

ergibt sich schließlich die **Mastergleichung** des jeweiligen Systems in Kopplung mit einem thermischen Reservoir¹⁰

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varrho_s = & -\frac{i}{\hbar} [H_S, \varrho_s] \\ & + \frac{\gamma}{2} (\langle n_0 \rangle + 1) [2s_2 \varrho_s s_1 - s_1 s_2 \varrho_s - \varrho_s s_1 s_2] \\ & + \frac{\gamma}{2} \langle n_0 \rangle [2s_1 \varrho_s s_2 - s_2 s_1 \varrho_s - \varrho_s s_2 s_1]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Der erste Summand gibt darin die freie Zeitentwicklung an, während sich die Wechselwirkungen mit dem Reservoir in den beiden weiteren Summanden, den **Lindbladtermen**, wiederfinden, die sich gegen einfachere Beschreibungen von Verlustmechanismen durch die Erhaltung der Spur und der Hermitizität der Dichtematrix auszeichnen. Erstere Eigenschaft zeigt sich durch zyklische Vertauschung der Operatoren in der Spurbildung über (2.74) ($\frac{\partial}{\partial t} \text{tr}_S \{ \varrho_s \} = \text{tr}_S \{ \frac{\partial}{\partial t} \varrho_s \} = 0$), während sich die zweite aus der Rechenregel zur Bildung eines adjungierten Operatorenprodukts $[ABC]^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$ ergibt. Bei der Temperatur $T = 0$, die in der Ableitung der Ratengleichungen in Kapitel 2.5 gewählt werden wird, verschwindet $\langle n_0 \rangle$ und es verbleibt lediglich der erste Lindbladterm.

In (2.74) ist die Mastergleichung die Wahl des angekoppelten Systems betreffend noch allgemein in den Operatoren s_1 und s_2 formuliert; die Mastergleichungen für die konkreten Systeme ergeben sich, wenn die Systemoperatoren gemäß

$$\begin{aligned} s_1 = \sigma_+, \quad s_2 = \sigma_- & \quad \text{für ein Zweiniveausystem} \\ s_1 = b^\dagger, \quad s_2 = b & \quad \text{für eine Photonenmode} \end{aligned} \quad (2.75)$$

gewählt werden. In (2.74) ist γ von der Größe g abhängig, die gemäß (2.32) die Stärke der Kopplung eines Übergangs im Ladungsträgersystem mit einer Lichtmode beschreibt. Diese Kopplung stellt sich jedoch nur für die Wechselwirkung des Zweiniveausystems mit den Moden des Reservoirs ein; wird die Kavitätsmode an das Reservoir gekoppelt, ergeben sich rein photonische Wechselwirkungen, die in dieser Arbeit nicht mikroskopisch beschrieben werden. Im Falle der Ankopplung der Kavitätsmode gelte die Notation $\gamma \rightarrow \kappa$ (siehe Kapitel 2.4.3).

2.4.2 Kopplung des Zweiniveausystems mit dem Reservoir

Die Besetzungen n_α und n_β der beiden Niveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ des Zweiniveausystems sind durch die Diagonalelemente der zugehörigen Dichtematrix gegeben, deren Dynamiken nun über die Mastergleichung zugänglich sind:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha(t) = \langle \alpha | \frac{\partial}{\partial t} \varrho_s | \alpha \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t} n_\beta(t) = \langle \beta | \frac{\partial}{\partial t} \varrho_s | \beta \rangle. \quad (2.76)$$

Die beiden gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha = \underbrace{-\gamma \langle n_0 \rangle (n_\alpha - n_\beta)}_{(i)} \underbrace{-\gamma n_\alpha}_{(ii)} = -\frac{\partial}{\partial t} n_\beta \quad (2.77)$$

zeigen drei Prozesse der Besetzungsänderung: Die in (i) zusammengefassten Vorgänge sind abhängig von der Photonenzahl in der resonanten Reservoirmode; es sind dies die stimulierte Emission und die Absorption jeweils mit der Rate $\gamma \langle n_0 \rangle$. Der Abbau der Besetzung des oberen Niveaus $|\alpha\rangle$ in (ii) hängt dagegen lediglich vom momentanen Wert der Besetzung ab. Die Ankopplung an ein thermisches Reservoir ist also geeignet, die **spontane Emission** des Zweiniveausystems zu modellieren. Für die Emission in das Kontinuum von Moden des freien Raums lässt sich die Rate

¹⁰Sowohl im Falle des Zweiniveausystems, als auch bei Ankopplung der Kavitätsmode lassen sich die Δ -Terme durch eine Energierenormalisierung als Anteile des Systemhamiltonoperators H_S definieren; im Folgenden werden sie nicht mehr aufgeführt.

der spontanen Emission direkt bestimmen [MS07], denn die komplex konjugierten Funktionen der Vakuummoden kompensieren einander in der Bildung des Betragsquadrates der Kopplungskonstanten g aus (2.32) gerade: Wird die Summation über k in (2.71) für γ in ein Integral über den k -Raum überführt, so ergibt sich die Wigner-Weisskopf-Rate der spontanen Emission

$$\gamma_{ww} = \frac{\omega_{\alpha\beta}^3 d_{\alpha\beta}^2}{3\pi\epsilon_0 \hbar c^3}. \quad (2.78)$$

Im Folgekapitel 2.5 soll das System aus Zweiniveausystem und Kavitätsmode rekonstruiert werden, das für die Reservoirankopplung in seine Teilsysteme getrennt worden war. Die Größe γ wird dort die Rate der spontanen Emission in die nichtlasenden Moden angeben.

2.4.3 Kopplung der Kavitätsmode mit dem Reservoir

Im Kapitel 2.2.2 ist bereits die endliche Linienbreite der Kavitätsmode benannt worden, die sich aufgrund der unvollständigen Reflexion an den Spiegeln der Kavität einstellt. Die Lindbladterme der Mastergleichung für die Kavitätsmode in Kopplung mit dem thermischen Reservoir geben diese Kavitätsverluste wieder. Während mit der Kopplungskonstanten g aus (2.32) ein mikroskopischer Ausdruck für die Kopplungsstärke eines Übergangs zwischen den diskreten Niveaus eines Ladungsträgersystems und einer Photonenmode gegeben ist, der die Berechnung der Emissionsrate γ ermöglicht, wird die **Kavitätsverlustrate** κ üblicherweise nicht aus einer mikroskopischen Beschreibung der Kopplung der Kavitäts- an die Moden des Reservoirs berechnet, sondern experimentell etwa aus der Linienbreite der Kavitätsmode über den Qualitätsfaktor gemäß $\kappa = \frac{\omega}{2Q}$ bestimmt [Loh07].

2.5 Herleitung der Ratengleichungen

Im vorangegangenen Kapitel sind unter Vernachlässigung der internen Wechselwirkung von Zweiniveausystem und Kavitätsmode separate Mastergleichungen für die beiden Teilsysteme ermittelt worden, in denen Lindbladterme die dissipativen Effekte der spontanen Emission beziehungsweise der Kavitätsverluste beschreiben; in den Rechnungen sind lediglich die freien Anteile des Ladungsträgersystems H_{sys}^{ZNS} und des Feldes H_F des Hamiltonoperators aus (2.43) verwendet worden (*siehe Beginn des Kapitels 2.4*). Im Folgenden wird nun wieder der volle Jaynes-Cummings-Hamiltonian als Systemhamiltonoperator H_S verwandt, wenn gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle O \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \text{tr} \{ \varrho_s O \} = \text{tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \varrho_s O \right\}. \quad (2.79)$$

die Erwartungswertdynamik von Operatoren O aus dem Systemunterraum bestimmt wird. Gelte für beide Reservoirs $T = 0$, verbleibt also mithin jeweils lediglich der erste Lindbladterm, so ergibt sich unter Verwendung der Rechenregel zur zyklischen Vertauschbarkeit von Operatoren in der Spurbildung

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle O \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [O, H_{JC}] \rangle + \frac{\gamma}{2} \langle [\sigma_+, O] \sigma_- + \sigma_+ [O, \sigma_-] \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle [b^\dagger, O] b + b^\dagger [O, b] \rangle. \quad (2.80)$$

Mit den Operatoren $\hat{n}_\alpha = |\alpha\rangle \langle \alpha|$, $\hat{n}_\beta = |\beta\rangle \langle \beta|$ und $\hat{N} = b^\dagger b$ lassen sich nun Differentialgleichungen für die zeitlichen Entwicklungen der Besetzungen und der Anzahl der Photonen in der Kavitätsmode bestimmen; es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha = -ig \langle b \sigma_+ \rangle + ig^* \langle b^\dagger \sigma_- \rangle - \gamma n_\alpha = -\frac{\partial}{\partial t} n_\beta \quad (2.81a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N = ig \langle b \sigma_+ \rangle - ig^* \langle b^\dagger \sigma_- \rangle - \kappa N. \quad (2.81b)$$

Beide Gleichungen enthalten die photonenassistierte Übergangsamplitude $\langle b^\dagger \sigma_- \rangle = \langle b \sigma_+ \rangle^*$ als Quellterm, für deren Dynamik sich mit (2.80) wiederum die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle b^\dagger \sigma_- \rangle = -i(\omega_{\alpha\beta} - \omega) \langle b^\dagger \sigma_- \rangle + i g n_\alpha + i g \langle b^\dagger b (\hat{n}_\alpha - \hat{n}_\beta) \rangle - \frac{\kappa + \gamma}{2} \langle b^\dagger \sigma_- \rangle \quad (2.82)$$

mit neuem Quellterm ergibt. Da sich durch fortgesetzte Ermittlung von Bewegungsgleichungen für entstehende Quellterme kein geschlossenes Gleichungssystem ergeben wird, ist das Verfahren an einer geeigneten Stelle abzuberechnen. Eine elementare Näherung trennt in der Gleichung für die Übergangsamplitude die Einflüsse von Photonen und Ladungsträgern in einer **semiklassischen Faktorisierung**

$$\langle b^\dagger b (\hat{n}_\alpha - \hat{n}_\beta) \rangle \approx \langle b^\dagger b \rangle \langle \hat{n}_\alpha - \hat{n}_\beta \rangle = N(n_\alpha - n_\beta) \quad (2.83)$$

und vernachlässigt damit die Korrelationen des photonischen und des elektronischen Systems. Rice und Carmichael berechnen die stationäre Photonenzahl und die stationäre Zahl der invertierten Emitter im Master¹¹- und im Ratengleichungsbild für $\beta = 1$ und finden geringe Abweichungen in der Zahl der invertierten Emitter, während beide Ansätze eine praktisch identische stationäre Photonenzahl liefern [RC94]. In einer analogen Rechnung ließen sich Abweichungen im vorliegenden Modell untersuchen.

Im Resonanzfall $\omega_{\alpha\beta} - \omega = 0$ ergibt sich mit (2.83)

$$\langle b^\dagger \sigma_- \rangle(t) = e^{-\frac{\kappa + \gamma}{2}(t-t_0)} \langle b^\dagger \sigma_- \rangle(t_0) + i g \int_{t_0}^t e^{-\frac{\kappa + \gamma}{2}(t-t')} [n_\alpha(t') + N(t') (n_\alpha(t') - n_\beta(t'))] dt' \quad (2.84)$$

Für $\langle b^\dagger \sigma_- \rangle(t_0) = 0$ oder hinreichend lange Zeiten klingt der erste Summand ab; für hinreichend große Verlustraten κ und γ sowie langsame Änderungen der Besetzungen und der Photonenzahl lässt sich das Integral der Markovnäherung in Kapitel 2.4.1 analog vereinfachen. Die Übergangsamplitude folgt dann instantan ihren Quellen:

$$\langle b^\dagger \sigma_- \rangle(t) = \frac{2ig}{\kappa + \gamma} (n_\alpha(t) + N(t)(n_\alpha(t) - n_\beta(t))). \quad (2.85)$$

Der Einfluss der adiabatischen Elimination der Übergangsamplitude wird im Kapitel A des Anhangs über eine numerische Vergleichsrechnung abgeschätzt. Durch Einsetzen in (2.81) ergeben sich die Ratengleichungen für ein Zweiniveausystem in Kopplung mit einer resonanten Kavitätsmode, in denen die Übergangsamplitude adiabatisch eliminiert worden ist, zu

$$\dot{N} = R(n_\alpha - n_\beta)N + Rn_\alpha - \kappa N \quad (2.86a)$$

$$\dot{n}_\alpha = -R(n_\alpha - n_\beta)N - (R + \gamma)n_\alpha = -\dot{n}_\beta. \quad (2.86b)$$

worin die Ersetzung

$$R \equiv \frac{4|g|^2}{\kappa + \gamma} \quad (2.87)$$

eingeführt worden ist. Nach semiklassischer Faktorisierung und adiabatischer Eliminierung der Übergangsamplitude bilden die Ratengleichungen ein geschlossenes Gleichungssystem für die Besetzungen der Laserniveaus, also lediglich die Diagonalelemente der Dichtematrix, und die Photonenzahl in der Kavität; ihre Gültigkeit ist damit auf das inkohärente Regime beschränkt. [AE87]. Durch die gleiche Gruppierung der Terme wie in (2.77) in Kapitel 2.4.2 lassen sich die Bedeutungen der Konstanten direkt ablesen: Die Besetzung des Zustands $|\alpha\rangle$ zerfällt wieder in zwei Prozessen, deren einer abhängig von der Anzahl der Photonen in der Lasermode ist, während der andere lediglich von der momentanen Besetzung des Niveaus abhängt; neben der stimulierten und

¹¹Um die von Rice und Carmichael verwendeten Gleichungen zu reproduzieren, müsste in Kapitel 2.4 auch der Pumpprozess über eine Reservoirankopplung eingeführt werden. In die dann analog zu (2.74) entstehende Mastergleichung, ginge der Pumpprozess als weiterer Lindbladterm ein. Werden die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix adiabatisch eliminiert, so ergeben sich gekoppelte Differentialgleichungen für die Diagonalelemente. Diese Gleichungen referenzieren Rice und Carmichael als Mastergleichungen.

der spontanen Emission lässt sich auch der Prozess der Absorption identifizieren. Die Rate der gesamten spontanen Emission ist offenbar durch $(R + \gamma)$ gegeben und damit im Vergleich zu (2.77) um den Anteil der Emission in die Lasermode verstärkt. Im Folgenden gelten die anschaulichen Benennungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_l} &\equiv R && \text{Rate der spontanen Emission in die Lasermode} \\ \frac{1}{\tau_{\text{sp}}} &\equiv R + \gamma && \text{Rate der totalen spontanen Emission} \end{aligned}$$

Der Anteil der Emission in die Kavitätsmode an der gesamten spontanen Emission kann durch den gemäß

$$\frac{1}{\tau_l} \equiv \beta \frac{1}{\tau_{\text{sp}}} \quad (2.88)$$

definierten **β -Faktor** angegeben werden, der eine Formulierung der Gleichungen (2.86) lediglich in Abhängigkeit der Rate $\frac{1}{\tau_{\text{sp}}}$ erlaubt. In konventionellen Lasern wird nur ein geringer Bruchteil der Photonen spontan in die Lasermode emittiert, während Mikroresonatoren β -Werte nahe Eins erreichen können. Für die numerischen Untersuchungen im zweiten Anteil der vorliegenden Arbeit werden β -Faktoren aus dem Bereich $\beta = 10^{-5}, \dots, 1$ gewählt.

Mit einer abschließenden Näherung wird nun noch das System auf eine beliebige Emittierzahl in der Kavität erweitert: Unter Annahme der Unabhängigkeit der Emitter geht deren Anzahl N_{Em} in die für einen Emitter formulierten Ratengleichungen (2.86) lediglich als Faktor vor den Besetzungen in (2.86a) ein, und es ergibt sich

$$\dot{N} = \left(N_{\text{Em}} \frac{n_\alpha - n_\beta}{\tau_{\text{sp}}} \beta - \kappa \right) N + N_{\text{Em}} \frac{n_\alpha}{\tau_{\text{sp}}} \beta \quad (2.89a)$$

$$\dot{n}_\alpha = -\frac{n_\alpha - n_\beta}{\tau_{\text{sp}}} \beta N - \frac{n_\alpha}{\tau_{\text{sp}}} = -\dot{n}_\beta. \quad (2.89b)$$

Die Anordnung der Terme in (2.89a) betont die Bedeutung der als Differenz der Besetzungen definierten Besetzungsinversion

$$w \equiv n_\alpha - n_\beta. \quad (2.90)$$

Ist w positiv, so überwiegt die stimulierte Emission die Absorption und der Emitter gibt Photonen in die Kavität ab; mit der vergrößerten Photonenzahl in der Kavität wächst wiederum die Rate der stimulierten Emission $N_{\text{Em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} N$. Ein großer Photonenoutput wird sich also im Regime der stimulierten Emission einstellen, das durch einen Prozess des Inversionsaufbaus zu erreichen ist. Im Folgekapitel wird ein solcher Pumpprozess phänomenologisch eingeführt. Dort wird deutlich, weshalb die Einführung mindestens eines weiteren Niveaus zur Konstruktion eines Lasersystems notwendig ist.

2.6 Phänomenologische Erweiterung um Pumpprozess und -niveaus

Im vorliegenden Modell wird der Pumpprozess phänomenologisch eingeführt und als optische Anregung eines Übergangs im Ladungsträgersystem modelliert. Ein eingestrahktes Photon wird im Falle der Inversion zweier Niveaus mit resonantem Übergang eine Emission stimulieren, also dem Inversionsaufbau entgegen wirken, während es vom nicht invertierten System absorbiert wird und einen Aufbau der Inversion bewirkt. Im vorliegenden Modell wird dieses Verhalten über eine konstante Pumprate und einen Pauli-Blocking-Faktor $(n_{\text{unten}} - n_{\text{oben}})$ für den Fall der optischen Anregung modelliert, der gerade die Differenz der Besetzungen der beiden gepumpten Niveaus angibt, und in die entsprechenden Gleichungen des Differentialgleichungssystems eingebracht wird. Durch ein direktes Pumpen der beiden Niveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ wird sich im Zweiniveausystem für den Grenzfall großer Pumpraten aufgrund des Pauli-Blocking-Faktors also gerade ein Ausgleich der Besetzungen ($w = 0$) einstellen. Eine Inversion - und damit das Regime der stimulierten Emission - lassen sich nicht erreichen, sodass zur Konstruktion eines Lasersystem dem Zweiniveausystem mindestens ein

weiteres Niveau hinzuzufügen ist. Die Übergänge in und aus den Pumpniveaus mögen durch eine im Vergleich zu τ_{sp} kurze Relaxationszeit τ_{relax} bestimmt sein, um eine möglichst große Besetzung des Niveaus $|\alpha\rangle$ zu erhalten. In den numerischen Untersuchungen der nachfolgenden Kapitel wird das Verhältnis der Zerfallszeiten $\frac{\tau_{\text{relax}}}{\tau_{\text{sp}}}$ zu 10^{-3} angenommen. Nach Ergänzung der Pumpniveaus möge weiterhin der einzig resonante Übergang derjenige zwischen den nun als Laserniveaus referenzierten Niveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ sein.

Das in den nachfolgenden Kapiteln untersuchte Dreiniveausystem ist links in der Abbildung 1 skiz-

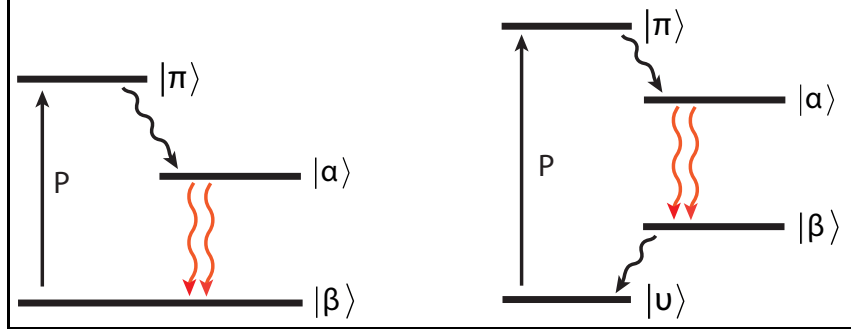


Abbildung 1: Skizzen der phänomenologisch motivierten Lasersystemsmodelle: Dreiniveausystem *links*, Vierniveausystem *rechts*. Die schwarz eingezeichneten nichtlasenden Übergänge aus und in die Pumpniveaus sind durch die Relaxationszeit τ_{relax} charakterisiert, während der Übergang zwischen den Niveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ über die rot eingezeichneten Vorgänge der spontanen und der stimulierten Emission (sowie der nicht skizzierten Absorption) mit den charakteristischen Zeiten τ_{sp} beziehungsweise τ_{sp}/β mit der resonanten Kavitätsmode wechselwirkt.

ziert: Es besitzt ein Pumpniveau $|\pi\rangle$ oberhalb des oberen Laserniveaus $|\alpha\rangle$. Die optische Pumpe ist auf den Übergang zwischen $|\beta\rangle$ und $|\pi\rangle$ gestimmt, sodass das untere Laser- mit dem unteren Pumpniveau zusammenfällt. In $|\pi\rangle$ angehobene Ladungsträger mögen mit einer Rate $1/\tau_{\text{relax}}$ rasch im Vergleich zur spontanen Emission in das obere Laserniveau relaxieren. Das Dreiniveausystem ist durch das Gleichungssystem

$$\dot{N} = \left(N_{\text{Em}} \frac{n_{\alpha} - n_{\beta}}{\tau_{\text{sp}}} \beta - \kappa \right) N + N_{\text{Em}} \frac{n_{\alpha}}{\tau_{\text{sp}}} \beta \quad (2.91a)$$

$$\dot{n}_{\alpha} = -\frac{n_{\alpha} - n_{\beta}}{\tau_{\text{sp}}} \beta N - \frac{n_{\alpha}}{\tau_{\text{sp}}} + \frac{n_{\pi}}{\tau_{\text{relax}}} \quad (2.91b)$$

$$\dot{n}_{\beta} = \frac{n_{\alpha} - n_{\beta}}{\tau_{\text{sp}}} \beta N + \frac{n_{\alpha}}{\tau_{\text{sp}}} - P(n_{\beta} - n_{\pi}) \quad (2.91c)$$

$$\dot{n}_{\pi} = P(n_{\beta} - n_{\pi}) - \frac{n_{\pi}}{\tau_{\text{relax}}} \quad (2.91d)$$

gegeben. Der Abbau der Besetzung des unteren Laserniveaus ist in dieser Anordnung direkt vom Pumpprozess abhängig: n_{β} zerfällt erst für sehr große Pumpraten rasch.

Die Relaxation mit der Rate $\frac{1}{\tau_{\text{relax}}}$ in ein unterhalb des unteren Laserniveaus angefügtes Pumpniveau $|\nu\rangle$ stellt einen nur implizit von der Pumprate abhängigen Abbauprozess der Besetzung des $|\beta\rangle$ -Niveaus dar. Für kleine Pumpraten sollte sich daher im Vierniveausystem, das durch das

Gleichungssystem

$$\dot{N} = \left(N_{\text{Em}} \frac{n_\alpha - n_\beta}{\tau_{\text{sp}}} \beta - \kappa \right) N + N_{\text{Em}} \frac{n_\alpha}{\tau_{\text{sp}}} \beta \quad (2.92\text{a})$$

$$\dot{n}_\alpha = -\frac{n_\alpha - n_\beta}{\tau_{\text{sp}}} \beta N - \frac{n_\alpha}{\tau_{\text{sp}}} + \frac{n_\pi}{\tau_{\text{relax}}} \quad (2.92\text{b})$$

$$\dot{n}_\beta = \frac{n_\alpha - n_\beta}{\tau_{\text{sp}}} \beta N + \frac{n_\alpha}{\tau_{\text{sp}}} - \frac{n_\beta}{\tau_{\text{relax}}} \quad (2.92\text{c})$$

$$\dot{n}_\pi = P(n_v - n_\pi) - \frac{n_\pi}{\tau_{\text{relax}}} \quad (2.92\text{d})$$

$$\dot{n}_v = -P(n_v - n_\pi) + \frac{n_\beta}{\tau_{\text{relax}}} \quad (2.92\text{e})$$

gegeben ist und im rechts in der Abbildung 1 gezeigt wird, eine größere Besetzungsinversion einstellen. Im nachfolgenden Kapitel 3 werden die Systeme (2.91) und (2.92) hinsichtlich ihrer stationären Lösungen numerisch untersucht und miteinander verglichen.

Teil II

Numerische Behandlung

Die theoretische Modellbildung im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit führte auf zwei Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, die die Dynamik eines Drei- beziehungsweise eines Vierniveau-Lasersystems beschreiben. In diesem zweiten Anteil der Arbeit werden die Systeme nun numerisch untersucht. In Kapitel 3 wird zunächst anhand der Input-Output-Kennlinien das stationäre Verhalten beider Systeme verglichen. Da das Vierniveausystem in Kapitel 2.6 als Erweiterung des Dreiniveausystems um einen effizienteren Abbaumechanismus der Besetzung des unteren Laserniveaus eingeführt worden ist, vollzieht Kapitel 3 auch das Verhalten der stationären Inversion in beiden Systemen nach. In Kapitel 4 wird dann die Zeitentwicklung des Vierniveausystems untersucht. Im Bereich der Laserschwelle läuft die Photonenzahl zunächst weit über ihren stationären Wert hinaus, um sich diesem dann in gedämpften Oszillationen zu nähern. Der Dynamik dieser Relaxationsoszillationen [MS07] geht schließlich das Kapitel 5 nach, indem es die Antwort des Systems auf eine Modulation der Pumprate untersucht.

Zur Diskussion der numerischen Ergebnisse werden an geeigneter Stelle analytische Grenzfälle herangezogen.

Unter Verwendung der implementierten Differentialgleichungssolver ode45 und ode15s sind die numerischen Berechnungen in MATLAB 7.8 ausgeführt worden.

3 Stationäre Lösungen

Ein Lasersystem, das sich durch eines der Gleichungssysteme (2.91) und (2.92) beschreiben lässt, und mit einer konstanten Pumprate P angeregt wird, entwickelt sich zeitlich in einen stationären Zustand. Ist der stationäre Wert der Besetzungsinversion der beiden Laserzustände $\bar{w} = \bar{n}_\alpha - \bar{n}_\beta$ klein, so wird sich in nennenswertem Maße lediglich eine spontane Emission zeigen und die Kavität wird praktisch keine Photonen enthalten. Ist \bar{w} hingegen hinreichend groß, so überwiegt die stimulierte Emission die Absorption und der Term $N_{\text{Em}} \frac{n_\alpha - n_\beta}{\tau_{\text{sp}}} \beta N$ erreicht die Größenordnung der durch κN gegebenen Kavitätsverluste, sodass das System Photonen durch stimulierte Emission in die Kavität abgeben wird (*vergleiche* (2.91a), (2.92a)). In einer Auftragung der stationären Photonenzahl in der Kavität über der Pumprate, einer **Input-Output-Kennlinie**, sollte sich der Übergang vom Regime der spontanen zum Regime der stimulierten Emission durch eine rasche Zunahme der Steigung erkennen lassen. Die **Laserschwelle** bezeichnet also gerade jenen Pumpratenbereich, in dem das System beginnt, Photonen in nennenswerter Anzahl auszusenden. Abbildung 2 zeigt exemplarisch die stationäre Photonenzahl über der Pumprate im Bereich der

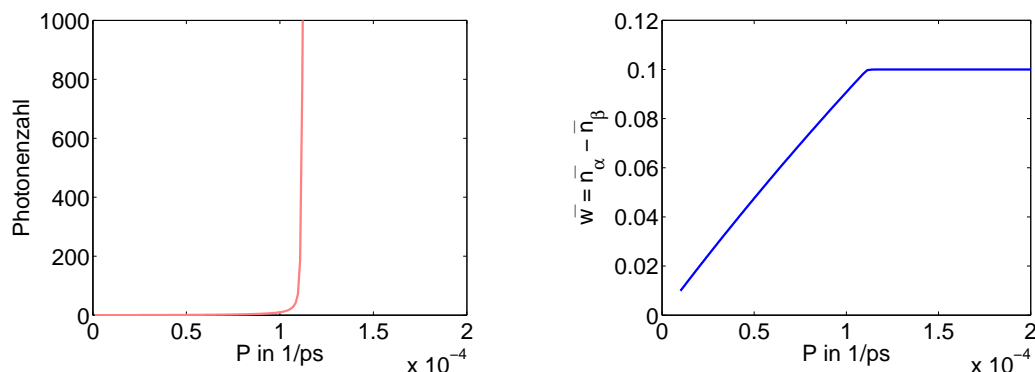


Abbildung 2: Stationäre Photonenzahl über der Pumprate im Bereich der Laserschwelle (*links*); zugehörige Kennlinie der Besetzungsinversion (*rechts*). $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$, $\beta = 10^{-5}$, $N_{\text{Em}} = 10^9$.

Laserschwelle für das Vierniveausystem, sowie das zugehörige Verhalten der Inversion. Unterhalb der Schwelle trägt eine Erhöhung der Pumprate praktisch ausschließlich zum Inversionsaufbau bei und die Zahl der Photonen in der Kavität bleibt im einstelligen Bereich. Mit dem Erreichen der Laserschwelle kehrt sich das Verhalten um: Die Inversion nimmt einen konstanten Wert an und jede weitere Erhöhung der Pumprate wird in den Photonenoutput umgesetzt, der aufgrund der einsetzenden stimulierten Emission nun rasch zunimmt. Für die in Abbildung 2 gezeigten Linien ist ein β -Faktor von 10^{-5} gewählt worden, sodass im Regime der spontanen Emission nur wenige Emittoren mit der Kavitätsmode koppeln, wohingegen im Regime der stimulierten Emission fast ausschließlich in die Kavitätsmode emittiert wird und sich damit eine deutliche Laserschwelle ausbildet. Für wachsende β -Faktoren nimmt dieser Effekt ab, bis für $\beta = 1$ die Emission für alle Pumpraten in die Kavitätsmode erfolgt: Das System zeigt keine Schwelle mehr (*“thresholdless laser“*, *vergleiche etwa* [YB89]). Das Folgekapitel diskutiert die Input-Output-Kennlinien für verschiedene β -Faktoren.

3.1 Vergleich des Drei- und des Vierniveausystems

Eine zur Untersuchung des Laserverhaltens besonders geeignete Darstellung der Input-Output-Kennlinien ist die doppeltlogarithmische Auftragung, in der sich die Laserschwelle als rasches Anwachsen der Linien zwischen zwei linearen Bereichen zeigt. Soll der Einfluss des β -Faktors, also des Anteils der in die Kavitätsmode emittierten Photonen an der gesamten spontanen Emission, untersucht werden, so bietet sich eine vom β -Faktor abhängige Wahl der Emittierzahl N_{Em} an. Wird N_{Em} bei Variation des β -Faktors stets so angepasst, dass sich ein konstantes Produkt

$$N_{\text{Em}} \beta = \text{const} \quad (3.1)$$

ergibt, so wird das System die Laserschwelle für verschiedene β -Faktoren bei der gleichen Pumprate erreichen. Die zugehörigen Kennlinien lassen sich dann übersichtlich als Schar darstellen. Ein geringerer β -Faktor geht mit (3.1) mit einer vergrößerten Anzahl in der Kavität befindlicher Emittoren einher¹², sodass eine Variation von β in den Gleichungssystemen (2.91) und (2.92) lediglich die Terme der stimulierten Emission beziehungsweise der Absorption in den Gleichungen für die Besetzungen der Laserniveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ unmittelbar betrifft. In die Gleichungen (2.91a) und (2.92a) für die Photonenzahldynamik geht sie lediglich mittelbar über die Veränderung der Inversion (stimulierte Emission) und der Besetzung des oberen Laserniveaus n_α (spontane Emission) ein. Unterhalb der Laserschwelle ist der Anteil der stimulierten klein gegen den Anteil der spontanen Emission, während es sich jenseits der Laserschwelle gerade umgekehrt verhält. Für kleine Pumpraten sollten Kennlinien für verschiedene β -Faktoren also eng liegen; im Regime der stimulierten Emission hingegen sollten sich dann größere Photonenzahlen für kleinere β ergeben. Durch die Skalierung der Photonenzahl mit β ergibt sich der in der Abbildung 3.1 gezeigte gegenteilige relative Verlauf der Linien einer Schar: Vor Erreichen der Laserschwelle verlaufen die skalierten Kennlinien für kleine β -Faktoren unterhalb der Linien für große β , während sich im Regime der stimulierten Emission oberhalb der Laserschwelle eine nur geringe β -Abhängigkeit zeigt.

Ein Vergleich der Kennlinienscharen zeigt für das Vierniveausystem sowohl ein früheres Erreichen der Laserschwelle, als auch ein regelmäßigeres Verhalten der Kennlinien zueinander im Bereich kleiner Pumpraten. Der letztgenannten Beobachtung geht das Folgekapitel 3.2 nach, indem es beide Systeme für kleine Pumpraten in linearer Antwort behandelt. Die Verschiebung der Laserschwelle in Richtung kleinerer Pumpraten wird durch die im Drei- und Vierniveausystem verschiedenen Verlustmechanismen für die Besetzung des unteren Laserniveaus $|\beta\rangle$ bewirkt: Die pumpratenunabhängige Relaxation in das Pumpniveau $|v\rangle$ mit der Rate $1/\tau_{\text{relax}}$ ermöglicht eine Räumung des $|\beta\rangle$ -Niveaus bereits für kleine P und mithin eine größere Besetzungsinversion für kleine Pumpraten (*vergleiche Kapitel 2.6*). Für sehr große Pumpraten erreichen beide Systeme einen Bereich der Sättigung bei einer ähnlichen Photonenzahl in der Kavität, die auch bei Erhöhung der Pumprate nicht weiter steigt. Auch dieser Bereich soll im Folgekapitel 3.2 näher untersucht werden.

¹²Eine gemäß (3.1) gewählte Atomzahl bleibt über den Verlauf einer Rechnung konstant. Siehe Kapitel 5.1 für ein abweichendes Modell mit unbeschränkter Emittierzahl.

Alle nachstehenden Berechnungen an den Systemen (2.91) und (2.92) folgen der β -abhängigen Definition der Atomzahl in der Kavität; namentlich wird - abgesehen von einer Rechnung im Kapitel 3.2.2 - stets $N_{\text{Em}} \beta = 10^4$ gewählt.

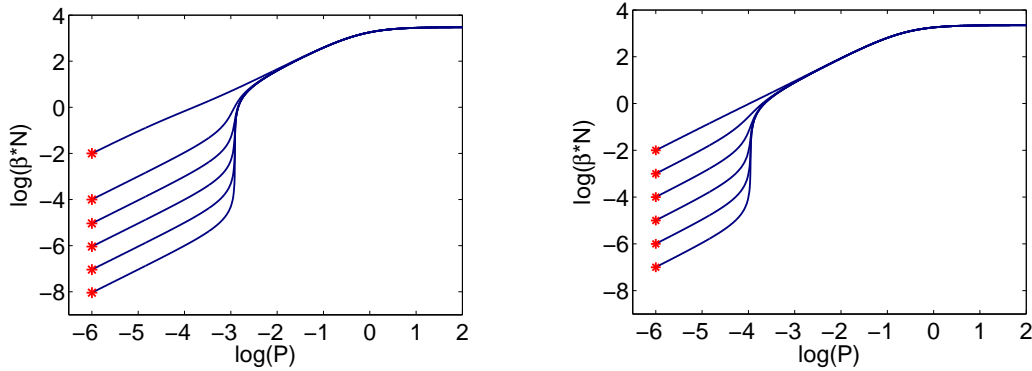


Abbildung 3: Input-Output-Kennlinien des Dreiniveausystems (*links*) und des Vierniveausystems (*rechts*) für die Parameter $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$. Der β -Faktor wird in Potenzen von 10 von $\beta = 10^{-5}$ bis $\beta = 1$ variiert; Linien mit kleineren β -Werten verlaufen unterhalb der Laserschwelle unterhalb von Linien mit größeren β -Faktoren. Die Atomzahl ist gemäß $N_{\text{Em}} = 10^4/\beta$ gesetzt, sodass sich die Laserschwelle innerhalb der Kennlinienschar bei der gleichen Pumprate einstellt. Zusätzlich sind am linken Bildrand die analytisch ermittelten Grenzwerte für die Photonenanzahl bei kleiner Pumprate eingezeichnet (*siehe Kap. 3.2.1*).

3.1.1 Vergleich der Besetzungsinversionen

Abbildung 4 zeigt die unterschiedlichen Entwicklungen der stationären Besetzungsinversionen $\bar{w} = \bar{n}_\alpha - \bar{n}_\beta$ mit der Pumprate in den Systemen (2.91) und (2.92). Das Dreiniveausystem erreicht die Inversion erst knapp unterhalb der Laserschwelle, sodass ein größerer β -Faktor zunächst die Reabsorption, im Lasingregime jedoch die stimulierte Emission stärkt. Die Inversionskennlinien für große β sollten im Dreiniveausystem also zunächst oberhalb der Linien für kleine β liegen, diese im Bereich der Schwelle (etwa bei $\bar{w} = 0$) schneiden, und im Lasingregime schließlich unterhalb der Linien für kleine β verlaufen. Anders verhält es sich im Vierniveausystem, das aufgrund des effektiven Abbaus der $|\beta\rangle$ -Besetzung durch das zusätzliche Pumpniveau $|\nu\rangle$ bereits im Bereich kleiner Pumpraten invertiert ist. Hier sind größere β -Faktoren stets der stimulierten Emission zu- und damit der Besetzungsinversion der Niveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ abträglich und führen mithin zu geringeren \bar{w} -Werten. Im Vierniveausystem verlaufen also für alle Pumpraten \bar{w} -Linien für kleine β oberhalb der Linien für große β -Faktoren.

Im Sättigungsbereich ist die Inversion in beiden Systemen praktisch β -unabhängig; die \bar{w} -Kennlinien liegen sehr eng¹³.

3.2 Analytische Grenzwerte für kleine und große Pumpraten

Unterhalb der Laserschwelle sind die Kennlinien für verschiedene β -Faktoren in der doppeltlogarithmischen Auftragung im Vierniveausystem äquidistant angeordnet, während sich im Dreiniveausystem ein unregelmäßigeres Verhalten zeigt (*vergleiche Abb. 3.1*). Die Behandlung beider Systeme in linearer Antwort bei kleinen Pumpraten soll den verantwortlichen Mechanismus für dieses voneinander abweichende Verhalten aufzeigen. Der Beobachtung der schwachen β -Abhängigkeit der in Abbildung 3.1 gezeigten Kennlinien im Sättigungsbereich geht das Kapitel 3.2.2 nach.

¹³Siehe Kapitel 3.2.2 für eine Einschränkung: Erreicht ein System auch bei beliebig großer Pumprate nicht das Regime der stimulierten Emission, so laufen die Kennlinien auch im Sättigungsbereich nicht ineinander.

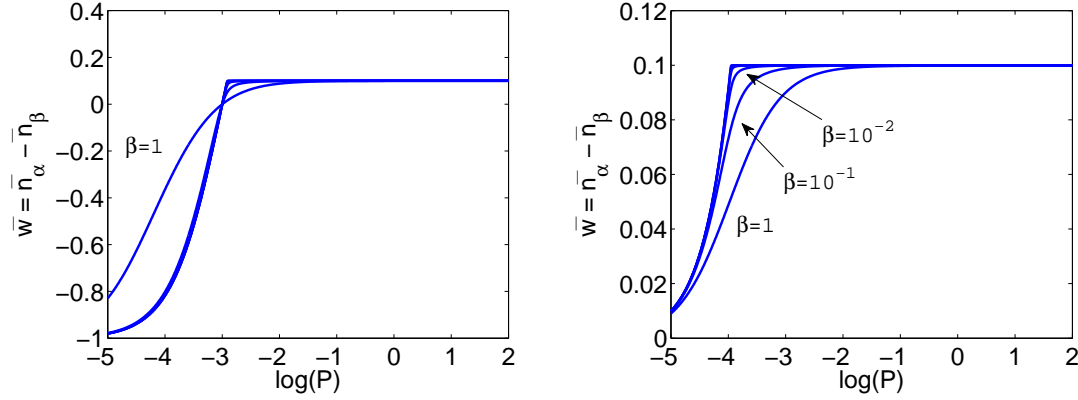


Abbildung 4: Stationäre Besetzungsinversion $\bar{w} = \bar{n}_\alpha - \bar{n}_\beta$ im Dreiniveau- (*links*) und im Vierniveausystem (*rechts*) über der logarithmierten Pumprate für die Parameter $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$, $\beta = 10^{-5}, \dots, 1$; $N_{\text{Em}} = 10^4/\beta$. Der relative Verlauf der Linien wird im Text erläutert.

3.2.1 Grenzfall kleiner Pumpraten

Werden die Systeme (2.91) und (2.92) durch sehr kleine Pumpraten P gestört, so lassen sie sich als

$$\dot{f} = F(f, P) \quad (3.2)$$

mit $f = (N, n_\alpha, n_\beta, n_\pi)$ im Fall des Drei- und $f = (N, n_\alpha, n_\beta, n_\pi, n_v)$ im Falle des Vierniveausystems lesen und in erster Ordnung linearisieren.

Das ungestörte **Vierniveausystem** wird - so es sich nicht bereits in diesem befindet - in den Zustand $f_0 = (0, 0, 0, 0, 1)$ relaxieren (keine Photonen in Kavität, Ladungsträger in tiefstem Zustand $|v\rangle$), sodass die Terme der Absorption und der stimulierten Emission, $\frac{n_\alpha - n_\beta}{\tau_{\text{sp}}} \beta N$, im System erster Ordnung fortfallen. Im stationären Fall

$$0 = -\kappa \bar{N}^{(1)} + N_{\text{Em}} \frac{\bar{n}_\alpha^{(1)}}{\tau_{\text{sp}}} \beta \quad (3.3a)$$

$$0 = -\frac{\bar{n}_\alpha^{(1)}}{\tau_{\text{sp}}} + \frac{\bar{n}_\pi^{(1)}}{\tau_{\text{relax}}} \quad (3.3b)$$

$$0 = \frac{\bar{n}_\alpha^{(1)}}{\tau_{\text{sp}}} - \frac{\bar{n}_\beta^{(1)}}{\tau_{\text{relax}}} \quad (3.3c)$$

$$0 = P - \frac{\bar{n}_\pi^{(1)}}{\tau_{\text{relax}}} \quad (3.3d)$$

$$0 = -P + \frac{\bar{n}_\beta^{(1)}}{\tau_{\text{relax}}}. \quad (3.3e)$$

lässt sich damit aus den Gleichungen (3.3b) bis (3.3e) ein Ausdruck für die Besetzung des α -Niveaus $\bar{n}_\alpha^{(1)} = P \tau_{\text{sp}}$ bestimmen, der dann in (3.3a) eingesetzt den Näherungswert für die Photonenzahl im Bereich kleiner Pumpraten $\bar{N}^{(1)}$ ergibt. Die Photonenzahl in der Kavität wirkt ohne stimulierte Prozesse nicht auf die Besetzungsdynamik zurück. Für den Näherungswert $\bar{N}^{(1)}$ gilt

$$\bar{N}^{(1)} = \frac{N_{\text{Em}} \beta \bar{n}_\alpha^{(1)}}{\kappa \tau_{\text{sp}}} = \frac{N_{\text{Em}} \beta}{\kappa} P. \quad (3.4)$$

Er ist sowohl von der Rate der spontanen Emission τ_{sp} als auch von der Relaxationszeit τ_{relax} unabhängig, sodass offenbar die geringe Pumprate die Dynamik limitiert. Ferner wächst $\bar{N}^{(1)}$ linear in P und verhält sich antiproportional zur Rate der Kavitätsverluste; der Faktor $N_{\text{Em}}\beta$ ist nach (3.1) konstant. Gemäß

$$\log \beta N = \underbrace{\log \left(\frac{N_{\text{Em}}\beta P}{\kappa} \right)}_{=\text{konstant in } \beta} + \log \beta \quad (3.5)$$

liegen die Linien einer β -Schar für kleine P in der doppeltlogarithmischen Auftragung äquidistant (*vergleiche Abbildung 3.1*).

Das **Dreiniveausystem** wird für $P = 0$ von $f_0 = (0, 0, 1, 0)$ gelöst, sodass sich in erster Ordnung für den stationären Fall das Gleichungssystem

$$0 = - \left(N_{\text{Em}} \frac{1}{\tau_{\text{sp}}} \beta + \kappa \right) \bar{N}^{(1)} + N_{\text{Em}} \frac{\bar{n}_{\alpha}^{(1)}}{\tau_{\text{sp}}} \beta \quad (3.6a)$$

$$0 = \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \bar{N}^{(1)} - \frac{\bar{n}_{\alpha}^{(1)}}{\tau_{\text{sp}}} + \frac{\bar{n}_{\pi}^{(1)}}{\tau_{\text{relax}}} \quad (3.6b)$$

$$0 = - \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \bar{N}^{(1)} + \frac{\bar{n}_{\alpha}^{(1)}}{\tau_{\text{sp}}} - P \quad (3.6c)$$

$$0 = P - \frac{\bar{n}_{\pi}^{(1)}}{\tau_{\text{relax}}} \quad (3.6d)$$

ergibt. Im Gegensatz zu (3.3) bleibt im für kleine Pumpraten linearisierten Dreiniveausystem mit $n_{\beta}^{(1)} = 1$ der Term $\frac{n_{\alpha} - n_{\beta}}{\tau_{\text{sp}}} \beta$ als $-\frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}}$ erhalten: Das Niveau $|\beta\rangle$ ist zugleich Pump- und Laserniveau und für kleine Pumpraten stärker besetzt als das reine Lasingniveau im Vierniveausystem. Im Dreiniveausystem werden Kavitätsphotonen reabsorbiert.

Mit (3.6c) in (3.6a) ergibt sich

$$0 = - \left(N_{\text{Em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} + \kappa \right) + N_{\text{Em}} \left(P + \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \bar{N}^{(1)} \right) \beta = N \left[N_{\text{Em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} (\beta - 1) - \kappa \right] + N_{\text{Em}} \beta P$$

und damit wiederum der gegen den entsprechenden Ausdruck im Vierniveausystem, (3.4), um einen Term $N_{\text{Em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} (1 - \beta)$ im Nenner erweiterte Näherungswert an die Photonenzahl für sehr kleine Pumpraten

$$\bar{N}^{(1)} = \frac{N_{\text{Em}} \beta P}{\kappa + N_{\text{Em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} (1 - \beta)}, \quad (3.7)$$

der für $\beta = 1$ in (3.4) übergeht. Der zusätzliche Term wächst wegen (3.1) für abnehmende β monoton.

Im Bereich sehr kleiner Pumpraten gilt für die mit β skalierte Photonenzahl also

$$\log \beta N = \underbrace{\log N_{\text{Em}} \beta P}_{=const} + \log \left(\frac{\beta}{\kappa + \frac{N_{\text{Em}} \beta}{\tau_{\text{sp}}} (1 - \beta)} \right). \quad (3.8)$$

In Abbildung 3.1 sind die Grenzwerte für $\beta = 1$ in beiden Systemen identisch, während für kleinere β die Grenzwerte des Dreiniveau- unterhalb der Grenzwerte des Vierniveausystems liegen.

Die Untersuchung der Gleichungssysteme in linearer Antwort liefert zufriedenstellende Näherungen an die numerisch ermittelten Grenzwerte und weist Reabsorptionsprozesse durch geringere Inversion im Dreiniveausystem als Begründung für das weniger gleichmäßige Verhalten der Kennlinien aus.

3.2.2 Grenzfall sehr großer Pumpraten im Vierniveausystem

Die Linien der in Kapitel 3 gezeigten Kennlinienscharen verlaufen in doppeltlogarithmischer Auftragung jenseits der Laserschwelle sehr eng; der Wert $\beta\bar{N}$ scheint für große Pumpraten nur schwach vom β -Faktor abhängig zu sein. Im Grenzfall sehr großer Pumpraten ($P \rightarrow \infty$) lässt sich ein analytischer Wert $(\beta\bar{N})_{P \rightarrow \infty}$ ermitteln, dessen β -Abhängigkeit nachstehend untersucht wird. Für geeignete Parameter wird sich eine übersichtliche Näherung an den Sättigungswert ergeben.

Eine sehr große Pumprate sollte den Ausführungen in Kapitel 2.6 gemäß die Besetzungen der beiden Pumpniveaus $|v\rangle$ und $|\pi\rangle$ ausgleichen. Tatsächlich liefern die Gleichungen (2.92d) und (2.92e) des Vierniveausystems bei ($P \rightarrow \infty$) im stationären Fall $\bar{n}_v = \bar{n}_\pi$, sodass der Pauli-Blocking-Faktor gerade verschwindet. Mit $\bar{n}_\pi = \bar{n}_\beta$ aus den Gleichungen (2.92b) und (2.92c) ergibt sich dann für die Besetzungserhaltung im Grenzwert sehr großer Pumpraten

$$\bar{n}_\alpha + 3\bar{n}_\beta = 1. \quad (3.9)$$

Die beiden verbleibenden, in \bar{N} und \bar{n}_α formulierten Gleichungen liefern schließlich die mit β skalierte stationäre Photonenzahl zu

$$(\beta\bar{N})_{P \rightarrow \infty} = \frac{1}{8} (v_0 + v_1\beta) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v_e\beta}{(v_0 + v_1\beta)^2}} \right], \quad (3.10)$$

worin die Abkürzungen

$$v_0 = \frac{N_{\text{Em}}\beta}{\kappa} \left(\frac{1}{\tau_{\text{relax}}} - \frac{1}{\tau_{\text{sp}}} \right) - \frac{\tau_{\text{sp}}}{\tau_{\text{relax}}} - 3, \quad v_1 = \frac{N_{\text{Em}}\beta}{\kappa\tau_{\text{sp}}}, \quad v_e = 16 \frac{N_{\text{Em}}\beta}{\kappa\tau_{\text{relax}}} \quad (3.11)$$

verwandt werden, die bei Änderung von β wegen (3.1) konstant sind. In Gleichung (3.10) verbleiben dann nur noch freie β , die von den Faktoren v_1 und v_e gewichtet werden. Die Struktur der Abkürzungen legt die Einführung der dimensionslosen Größen

$$u \equiv \frac{\tau_{\text{sp}}}{\tau_{\text{relax}}}, \quad q \equiv \frac{N_{\text{Em}}\beta}{\kappa\tau_{\text{relax}}} \quad (3.12)$$

nahe. Beide nehmen für die in den vor- und nachstehenden Rechnungen gewählten Parameter große Zahlenwerte an: Die Relaxationszeit τ_{relax} ist in Kapitel 2.6 mit der Maßgabe, klein gegen die Rate der spontanen Emission τ_{sp} zu sein, eingeführt worden, und zum Erreichen der Laserschwelle ist das Produkt $N_{\text{Em}}\beta$ hinreichend groß zu wählen; es gelte mithin

$$u \gg 1, \quad q \gg 1. \quad (3.13)$$

Die Abkürzungen in (3.11) gehen damit in

$$v_0 = q \left(1 - \frac{1}{u} \right) - u - 3 \approx q - u, \quad v_1 = \frac{q}{u}, \quad v_e = 16q \quad (3.14)$$

über. Nun lassen sich die Summe $v_0 + v_1\beta$ nähern

$$v_0 + v_1\beta \approx q \left(1 + \frac{\beta}{u} \right) - u \approx q - u = v_0 \quad (3.15)$$

und der Quotient in der Wurzel in (3.10) vereinfachen, wenn zudem $q - u \approx q$ gerechtfertigt ist, q also sehr viel größere Werte als u annimmt:

$$\frac{v_e\beta}{v_0^2} = 16\beta \frac{q}{(q-u)^2} \approx 16 \frac{\beta}{q}. \quad (3.16)$$

Wird nun noch die Wurzel in (3.10) gemäß $\sqrt{1+x} \stackrel{(x \ll 1)}{\approx} 1 + \frac{1}{2}x$ entwickelt, so ergibt sich schließlich

$$(\beta\bar{N})_{(P \rightarrow \infty)} \approx \frac{1}{8} v_0 \left[1 + \sqrt{1 + 16 \frac{\beta}{q}} \right] \approx v_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{\beta}{q} \right) \approx \frac{v_0}{4}. \quad (3.17)$$

Ist also τ_{sp} sehr viel größer als die Relaxationszeit τ_{relax} und nimmt der Quotient $q = \frac{N_{\text{Em}}\beta}{\kappa\tau_{\text{relax}}}$ noch deutlich größere Werte an, gilt mithin

$$\tau_{\text{sp}} \gg \tau_{\text{relax}} \quad , \quad N_{\text{Em}}\beta \gg \kappa\tau_{\text{sp}}, \quad (3.18)$$

so ergibt sich der Sättigungswert der mit β skalierten Photonenzahl gerade etwa zu einem Viertel der Größe $v_0 \approx \frac{N_{\text{Em}}\beta}{\kappa\tau_{\text{relax}}} - \frac{\tau_{\text{sp}}}{\tau_{\text{relax}}}$ und ist nach (3.1) damit praktisch unabhängig vom β -Faktor; der maximale Photonenausput wächst mit sinkender Relaxationszeit τ_{relax} .

Für Systeme, die hingegen durch $u \approx q$, also durch $N_{\text{Em}}\beta \approx \kappa\tau_{\text{sp}}$ gekennzeichnet sind, dürften sich größere β -Abhängigkeiten ergeben.

Abbildung 5 zeigt zwei exemplarische Kennlinienscharen. Die im linken Bild gewählten Parameter liefern $u = 10^3$ und $q = 10^4$ und werden in zahlreichen Rechnungen der Arbeit genutzt; die Näherung in Gleichung (3.17) reproduziert den Sättigungswert der skalierten Photonenzahl zufriedenstellend.

Das rechte Bild zeigt ein System mit gemäß $N_{\text{Em}}\beta = 10^3$ veringierter Emitterzahl, sodass die Parameter u und q den gleichen Wert $u = q = 10^3$ annehmen. Das System erreicht die Laserschwelle und damit das Regime der stimulierten Emission offenbar nicht; die Linien laufen auch für große Pumpraten nicht ineinander.

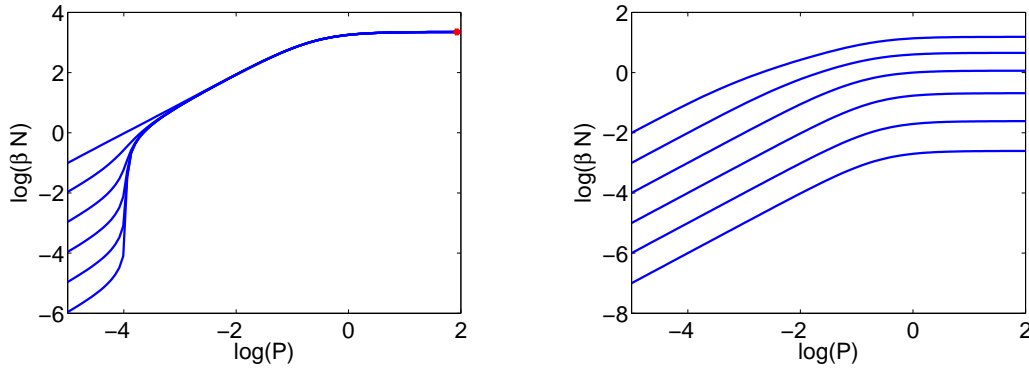


Abbildung 5: Illustration der β -Abhängigkeit der doppeltlogarithmischen Kennlinien. *Links:* Kennlinienschar, wie sie auch in Abbildung 3.1 gezeigt ist, mit $u = 10^3$ und $q = 10^4$ ($\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $N_{\text{Em}}\beta = 10^4$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$); rot markiert ist die Größe $\frac{v_0}{4} \approx \frac{1}{4}(q - u)$. *Rechts:* Kennlinienschar für $u = 10^3$ und $q = 10^3$ ($N_{\text{Em}}\beta = 10^3$, übrige Parameter wie links).

4 Zeitentwicklungen

Die Kennlinien in Kapitel 3 geben lediglich die Input-Output-Charakteristik der beiden Systeme (2.91) und (2.92) im stationären Zustand wieder und treffen keine Aussage über deren jeweilige zeitliche Entwicklung. Für Anwendungen eines Lasersystems etwa in der optischen Datenübertragung gewinnt jedoch die Dynamik des Photonenausputs wesentliche Bedeutung und soll im Folgenden für das Vierniveausystem untersucht werden.

Ein schwach gepumptes Vierniveausystem, das sich zum Zeitpunkt t_0 im Zustand ($n_v = 1$, $N = 0$) befindet, wird monoton in einen stationären Zustand laufen, jedoch praktisch keine Photonen emittieren. Mit Erreichen der Laserschwelle ändert sich das qualitative Verhalten des Photonenausputs mit der Zeit: Die Photonenzahl wächst zunächst weit über ihren stationären Wert hinaus und vollführt dann gedämpfte Oszillationen, die **Relaxationsoszillationen**, um diesen. Abbildung 6 zeigt die Entwicklung des Vierniveausystems bei Anregung durch ein rechteckförmiges Pumpratensignal. Erst etwa 70 ps nach Einschalten der Pumpe antwortet die Photonenzahl mit einem ersten Maximum der Oszillation, die noch bei Abschalten des Pulses nicht vollkommen abgeklungen ist; auch

das anschließende Abfallen der Photonenzahl geschieht nicht instantan, sondern benötigt einige 10 ps.

Zur Veranschaulichung der Dynamik sei auf das Inset in Abbildung 6 verwiesen: Es zeigt ein

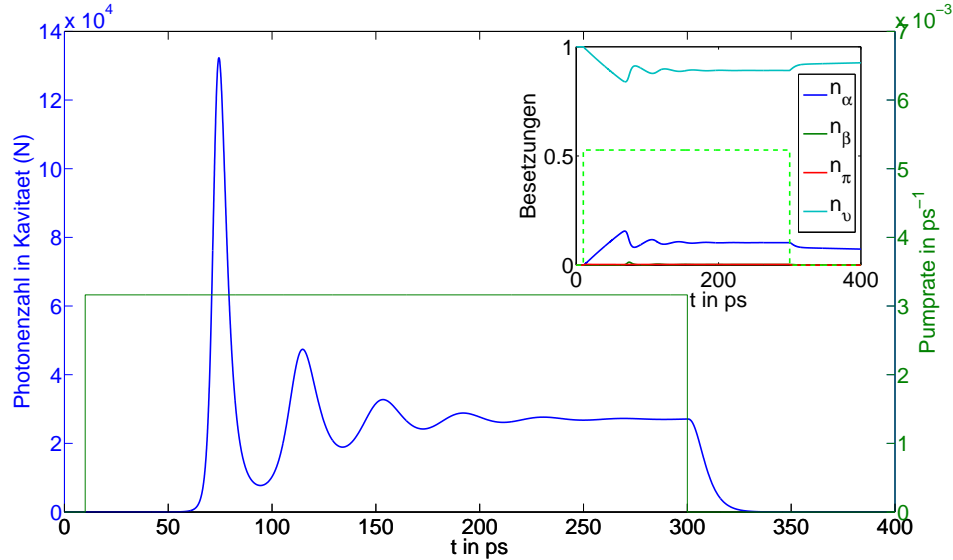


Abbildung 6: Zeitentwicklung der Photonenzahl im Vierniveausystem bei Anregung durch eine konstante Pumprate $P_{\text{fest}} = 10^{-2.5} \text{ ps}^{-1}$, die bei $t_1 = 10 \text{ ps}$ ein- und bei $t_2 = 300 \text{ ps}$ wieder ausgeschaltet wird. Das Inset zeigt die Dynamik der Besetzungen. Weitere Parameter: $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\beta = 10^{-3}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$

zunächst etwa lineares Anwachsen der Besetzung des oberen Laserzustands n_α , die ob der sehr geringen Besetzung des $|\beta\rangle$ -Zustands im Vierniveausystem praktisch die Inversion angibt. Ist diese hinreichend ausgeprägt, so kompensiert der Term $N_{\text{Em}} \frac{n_\alpha - n_\beta}{\tau_{\text{sp}}} \beta N$ in der Gleichung (2.92a) für die Photonenzahl die Kavitätsverluste κN über. Die einsetzende stimulierte Emission lässt die Photonenzahl in der Kavität rasch anwachsen, baut damit jedoch ebenfalls die Inversion und mithin die eigene Quelle rasch wieder ab. Während die Photonenzahl noch aufgrund der Kavitätsverluste fällt, wächst die Inversion wieder etwa linear an und der Vorgang beginnt mit verringerter Amplitude von neuem.

Eine Anwendung des zeitlich aufgelösten Photonenoutputs eines Lasersystems, wie es von (2.92) beschrieben wird, ist also wesentlich durch die Verzögerung nach Einschalten des Inputs (maximale Wiederholungsrate) und Abklingcharakteristik der Relaxationsoszillationen beschränkt.

4.1 Frequenz der Relaxationsoszillationen

Augenfällig in Abbildung 6 ist eine Verbreiterung der ersten Minima der Photonenzahl gegen die jeweils benachbarten Maxima, während die Schwingung mit abnehmender Amplitude zusehends harmonischer scheint. Eine feste Frequenz, die geeignet ist, die gedämpften Schwingungen zu charakterisieren, wird also nicht für die ersten, stark überhöhten Extrema sinnvoll definiert sein. Zur Erstellung der Abbildung 7 werden die Zeitpunkte t_i , zu denen sich Extrema der Photonenzahlentwicklung aus Abbildung 6 einstellen¹⁴, ausgelesen und die Differenzen für jeweils benachbarte Extrema dann über den t_i aufgetragen: Offenbar etabliert sich nach dem Abklingen der nichtlinearen Schwingungsanteile eine Frequenz ω_{system} , die für weitere Berechnungen gemäß $\omega_{\text{system}} = \frac{\pi}{z}$ gewonnen wird, worin z den Mittelwert der Zeitdifferenzen im harmonischen Bereich bezeichnen möge.

¹⁴Um mehr Extrema auswerten zu können, wird der Pumpprozess hier jedoch nicht bei t_2 wieder ausgeschaltet.

Das Kapitel 5.1 wird die Näherung der Photonenzahlentwicklung für kleine Amplituden als gedämpfte harmonische Schwingung im Grenzfalle der Ratengleichungen nachvollziehen.

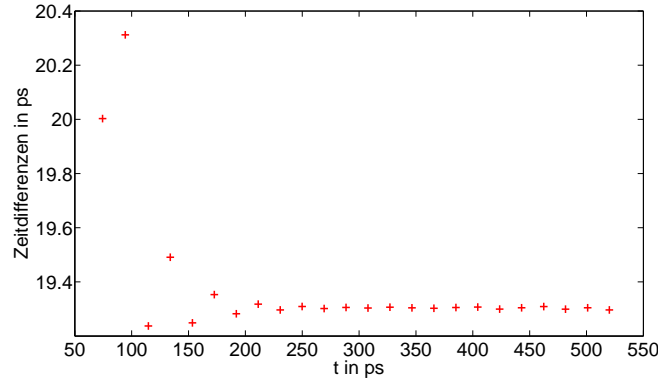


Abbildung 7: Differenzen der Zeitpunkte, zu denen sich benachbarte Extrema der Photonenzahlentwicklung aus Abbildung 6 (*siehe Fußnote 14*) ausprägen, über dem jeweils früheren Zeitpunkt aufgetragen.

5 Relaxationsoszillationen des Vierniveausystems

Zur Annäherung an die Charakteristika der Relaxationsoszillationen wird im Folgenden die Antwort des Vierniveausystems auf eine kleine harmonische Modulation der vormalig konstanten Pumprate P untersucht. Im ehemals stationären Bereich sollte die Photonenzahl der kleinen Störung folgen und Rückschlüsse auf die Schwingungseigenschaften des Systems, also etwa auf die Frequenz oder die Dämpfung der Relaxationsoszillationen ermöglichen. Nach der Ersetzung

$$P \rightarrow P(t) = P_0 + I \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.1)$$

im Gleichungssystem (2.92) oszilliert der Wert der Pumprate harmonisch mit der Frequenz ω um den Wert P_0 . Ist die Modulationsamplitude I hinreichend klein gewählt, so wird das System nur wenig gestört und sollte sich im Wesentlichen verhalten, als würde es mit der konstanten Pumprate P_0 angeregt.

Abbildung 9 zeigt neben dem grün skizzierten Verlauf der Pumprate die resultierende Zeitentwicklung der Photonenzahl bei modulierter Pumprate (blau) für eine Anregung mit etwa der halben Frequenz der gedämpften Oszillation des Systems ω_{system} , sowie zum Vergleich die Entwicklung bei unmodulierter Pumprate $P = P_0$ (rot). Nach Abklingen der Oszillationen des Einschwingbereiches, die weiterhin mit Systemfrequenz auftreten, läuft die Photonenzahl nicht länger in den stationären Wert des unmodulierten Falles, sondern schwingt harmonisch mit der Anregungsfrequenz um diesen. Bei Anregung abseits der Systemfrequenz findet sich eine Übergangszone zwischen den Bereichen der Relaxationsoszillation und dem harmonischen Folgen der Photonenzahl, in welcher sich die Frequenzverschiebung von System- auf Anregungsfrequenz vollzieht. Im rechten Bild der Abbildung 9 lassen sich die Abweichungen der abklingenden Relaxationsoszillationen im modulierten System von denen des unmodulierten Falles, der Übergangsbereich mit Frequenzsprung sowie die erste Periode der harmonischen Schwingung mit Anregungsfrequenz erkennen. Die Verschiebung der Frequenz $\omega_{\text{system}} \rightarrow \omega$ illustriert ebenfalls die Abbildung 8: Die roten Markierungen im unteren Bildbereich sind der Abbildung 7 entnommen, und geben daher die Abstände der Extrema einer Relaxationsoszillation bei unmodulierter Pumprate $P = P_0$ wieder. Die schwarze Linie im oberen Bildanteil hingegen markiert mit $\frac{\pi}{\omega}$ die halbe Periodendauer einer Schwingung mit der Anregungsfrequenz. Blau eingezeichnet schließlich sind die analog zum Vorgehen in Kapitel 4.1 gewonnenen Zeitdifferenzen für den Fall einer modulierten Anregung: Sowohl der Einschwing-

auch der Übergangs- und der Bereich des harmonischen Nachfolgens der Modulation sind zu erkennen.

Im Folgenden sollen die Modulationsparameter sowie die Kavitätsverlustrate κ und der β -Faktor

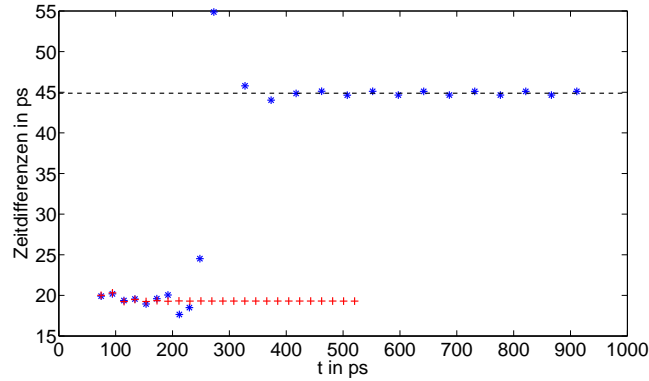


Abbildung 8: Analoges Bild zu Abbildung 7, Kap. 4.1, jedoch bei Anregung durch eine modulierte Pumprate (blaue Markierungen). Rot eingezeichnet sind die bei konstanter Pumprate gewonnenen Werte, die auch in Abb. 7 gezeigt sind; schwarz markiert ist $\frac{\pi}{\omega}$, also die halbe Periodendauer der Modulationsschwingung.

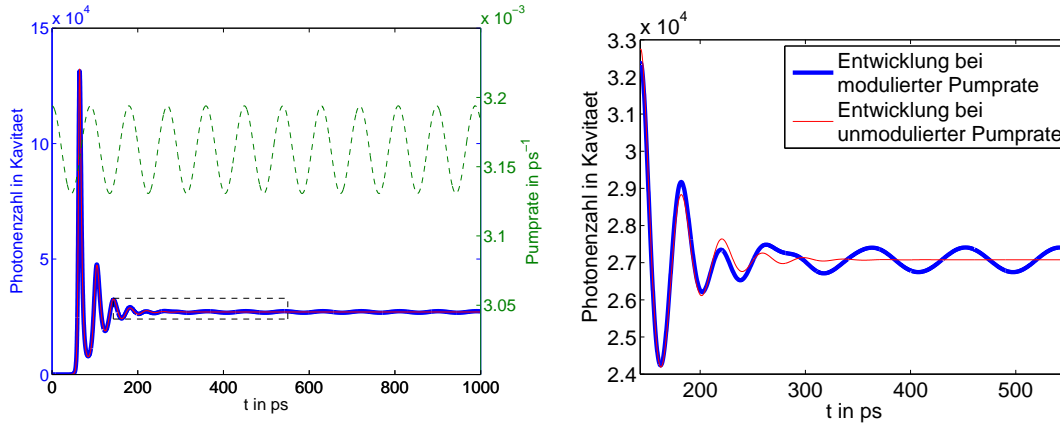


Abbildung 9: Zeitentwicklung der Photonenzahl für ein durch $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$, $\beta = 10^{-3}$ und $N_{\text{Em}}\beta = 10^4$ gegebenes Vierniveausystem, das konstant mit $P_0 = 10^{-2.5} \text{ ps}^{-1}$ (rot) beziehungsweise mit der gemäß (5.1) mit $\omega = 0.07 \text{ ps}^{-1}$, $I = 0.01 P_0$ und $\varphi = 0$ modulierten Rate $P(t)$ gepumpt wird (blau). Die Systemfrequenz ergäbe sich zu etwa $\omega_{\text{system}} \approx 0.16 \text{ ps}^{-1}$. Gestrichelt ist der Verlauf der Pumprate mit der Zeit eingezeichnet. Das rechte Bild zeigt vergrößert die Übergangszone vom Einschwing- in den Bereich des harmonischen Nachfolgens der Anregung.

variiert werden. Als charakteristische Größen für die Untersuchung der Systemantwort dienen die Beträge der Differenzen aufeinanderfolgender Extrema der Photonenzahl, die der jeweiligen Zeitentwicklung entnommen werden; im eingeschwungenen Bereich lassen sie sich - zu ihrem Mittelwert zusammengefasst - als doppelte absolute Amplitude der Schwingung der Photonenzahl um deren stationären Wert \bar{N} lesen.

Während der Bereich der gedämpften Oszillation (und bei Anregung abseits der Systemfrequenz insbesondere die Übergangszone) empfindlich auf eine Variation der Phase φ der Modulation reagieren, ist die Modulationsantwort im eingeschwungenen Bereich phasenunabhängig, sodass in der

Folge für einen festen Satz von System- und Modulationsparametern lediglich die Anregungsfrequenz, nicht jedoch die Phase der Modulation durchgestimmt wird.

Die Modulationsantwort des Systems wird Informationen über dessen Schwingungseigenschaften und damit über die Charakteristika der Relaxationsoszillationen liefern, wenn die harmonische Störung der Anregung hinreichend klein bleibt und das System selbst praktisch nicht verändert. Die Notwendigkeit einer kleinen Amplitude I der Pumpratenmodulation lässt sich am Bild der Kennlinien des Photonenausgangs über der Pumprate aus Kapitel 3, besser aber noch an einer linearen Darstellung veranschaulichen (Abbildung 10): Erfolgt die Modulation lediglich in einem Pumpratenbereich, in dem die zugehörige Kennlinie praktisch linear verläuft, so wird die Photonenzahl im eingeschwungenen Bereich harmonisch folgen. Umfasst das Modulationsfenster hingegen einen Kennlinienbereich starker Krümmung, so wird eine harmonische Modulation eine nichtharmonische Antwort der Photonenzahl zur Folge haben. Exemplarisch seien in Abbildung 11 die Zeitentwicklungen für einen kritischen Bereich der Kennlinie für $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\beta = 10^{-5}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$ und $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$ gegeben: Eine einprozentige Modulation um $P_0 = 1.075 \cdot 10^{-4} \text{ ps}^{-1}$ umfasst lediglich einen wenig gekrümmten Kennlinienausschnitt, während die Modulation mit $I = 0.05 P_0$ einen Bereich starker konvexer Krümmung einfasst, sodass der Einfluss der positiven Beiträge der fünfprozentigen Modulation überhöht wird. Bereits im erstgenannten Fall ist die Schwingung der Photonenzahl um einen größeren Wert als \bar{N} zentriert, bei fünfprozentiger Modulation jedoch schwingt die Photonenzahl stark nichtlinear. Die verhältnismäßig geringe Anregungsfrequenz von $\omega = 0.001 \text{ ps}^{-1}$, bei der die in Abbildung 11 gegebenen Zeitentwicklungen aufgenommen wurden, unterstützt diesen Effekt, insofern sie dem System erlaubt, der Anregung zu folgen. Auch finden sich größere Krümmungen an Kennlinien zu kleineren β -Werten, sodass sich nichtlineares Verhalten im Bereich der Laserschwelle eher für geringe β -Faktoren erwarten lässt und für den schwellenlosen Laser mit $\beta = 1$ nicht auftritt. Die jeweiligen Modulationsfenster sind in Abbildung 10 eingezeichnet.

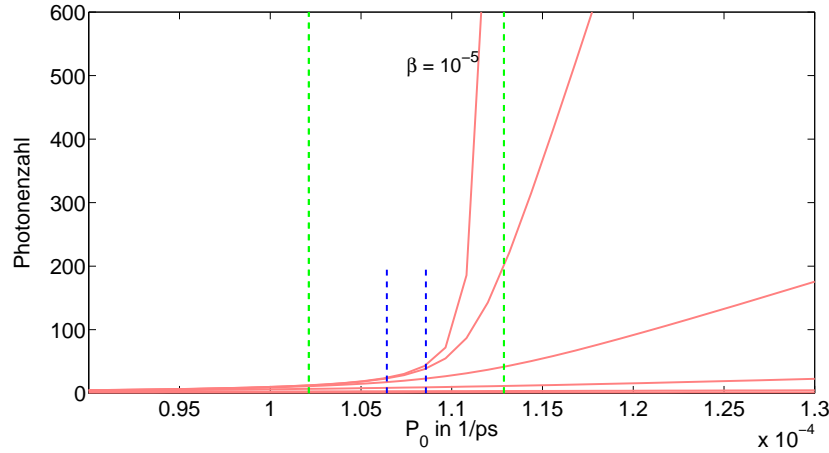


Abbildung 10: Bereich der Laserschwelle in linearer Auftragung ($\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$). Blau ist das Fenster für die einprozentige, grün das Fenster für die fünfprozentige Modulation eingezeichnet.

5.1 Analytische Beschreibung im Grenzfall der Ratengleichungen

Die Untersuchungen der stationären Lösungen der Differentialgleichungssysteme (2.91) und (2.92) in Kapitel 3 zeigen für begrenzte Pumpraten eine größere Inversion der Besetzungen der Laser-

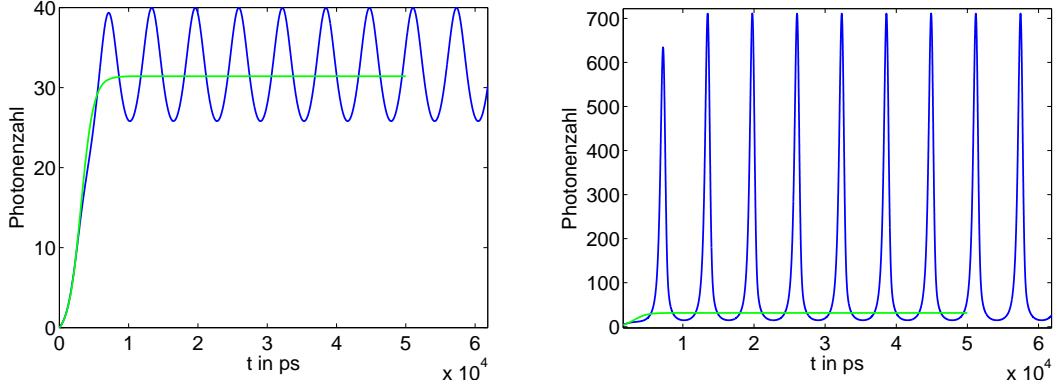


Abbildung 11: Zeitentwicklungen für $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\beta = 10^{-5}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$ und $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$ bei einprozentiger (*links*) und fünfprozentiger (*rechts*) Modulation, sowie Entwicklung des Systems bei unmodulierter Pumprate $P = P_0 = 1.075 \cdot 10^{-4} \text{ ps}^{-1}$ (grün)

niveaus im Vierniveau- als im Dreiniveausystem. Im Grenzfall einer sehr raschen Relaxation aus dem oberen Pump- ins obere Laserniveau und aus dem unteren Laser- ins untere Pumpniveau, also einer sehr kleinen Relaxationszeit τ_{relax} , sowie bei hinreichend großer Pumprate lassen sich die fünf Gleichungen des erstgenannten Systems auf lediglich zwei Ratengleichungen für die zeitlichen Entwicklungen der Photonenzahl in der Kavitätsmode, N , und der Anzahl der invertierten Atome im Resonator, $n_{\text{em}} \equiv N_{\text{Em}} n_{\alpha}$, reduzieren (*vergleiche etwa* [YB89]). Bei vernachlässigbar kleiner Besetzung des unteren Laserniveaus $|\beta\rangle$, also $n_{\beta} \approx 0$ gehen die ersten beiden Gleichungen für die Dynamik des Vierniveausystems in

$$\begin{aligned}\dot{N} &= n_{\text{em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} (N + 1) - \kappa N \\ \dot{n}_{\alpha} &= -\frac{n_{\alpha}}{\tau_{\text{sp}}} \beta N - \frac{n_{\alpha}}{\tau_{\text{sp}}} + \frac{n_{\pi}}{\tau_{\text{relax}}}\end{aligned}$$

über. Wird nun die Dynamik der Besetzungen der verbleibenden Niveaus, die über die Relaxation aus dem $|\pi\rangle$ - ins $|\alpha\rangle$ -Niveau auf die n_{α} -Gleichung einwirkt, in einem effektiven Pumpterm $\frac{n_{\pi}}{\tau_{\text{relax}}} =: p$, also der Einstreuung aus dem oberen Hilfsniveau, zusammengefasst, und die n_{α} -Gleichung anschließend mit der Atomzahl N_{Em} multipliziert, so ergeben sich die **Ratengleichungen**

$$\dot{N} = n_{\text{em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} (N + 1) - \kappa N \quad (5.2a)$$

$$\dot{n}_{\text{em}} = -\frac{n_{\text{em}}}{\tau_{\text{sp}}} \beta N - \frac{n_{\text{em}}}{\tau_{\text{sp}}} + \bar{p} \quad (5.2b)$$

mit $\bar{p} = N_{\text{Em}} p$. Die Reduktion auf das Ratengleichungsmodell geht mit dem Verlust der Erfassung der Reabsorptionsvorgänge ($n_{\alpha} - n_{\beta} \approx n_{\alpha}$) und des Sättigungsbereiches für große Pumpraten einher. Während im Vierniveausystem die Besetzung des $|\alpha\rangle$ -Zustands durch die Erhaltung der Besetzung gegen 1 beschränkt und die Zahl der Emitter im Resonator als fester Parameter wählbar ist, mithin $N_{\text{Em}} n_{\alpha} \leq N_{\text{Em}}$ gilt, wächst die Anzahl der invertierten Emitter in den Ratengleichungen mit \bar{p} unbeschränkt an. Das so beschriebene System besitzt also keine feste Emitteranzahl im Resonator.

Im Bereich großer Photonenzahlen ($N \gg 1$) lässt sich (5.2a) vereinfachen und es ergeben sich die

Gleichungen

$$\dot{N} = \left(n_{\text{em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} - \kappa \right) N \quad (\text{i})$$

$$\dot{n}_{\text{em}} = -\frac{n_{\text{em}}}{\tau_{\text{sp}}} \beta N - \frac{n_{\text{em}}}{\tau_{\text{sp}}} + \bar{p}, \quad (\text{ii})$$

die im stationären Fall

$$0 = \left(\bar{n}_{\text{em}} \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} - \kappa \right) \bar{N} \quad (\text{iii})$$

$$0 = -\frac{\bar{n}_{\text{em}}}{\tau_{\text{sp}}} \beta \bar{N} - \frac{\bar{n}_{\text{em}}}{\tau_{\text{sp}}} + \bar{p}. \quad (\text{iv})$$

durch

$$\bar{n}_{\text{em}} = \frac{\kappa \tau_{\text{sp}}}{\beta}, \quad \bar{N} = \frac{\bar{p}}{\kappa} - \frac{1}{\beta} \quad (5.3)$$

gelöst werden. Mit dem Ansatz

$$N(t) = \bar{N} + \varepsilon(t) \quad , \quad n_{\text{em}}(t) = \bar{n}_{\text{em}} + \xi(t)$$

lassen sich nun lineare Differentialgleichungen für kleine Abweichungen ε und ξ um die stationären Lösungen ermitteln.

Mit (i) und (ii) finden sich zunächst die Gleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \left(\bar{n}_{\text{em}} \bar{N} + \varepsilon \bar{n}_{\text{em}} + \xi \bar{N} + \underbrace{\varepsilon \xi}_{\approx 0} \right) - \kappa \bar{N} - \kappa \varepsilon = \underbrace{\left(\frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \bar{n}_{\text{em}} - \kappa \right) (\bar{N} + \varepsilon)}_{=0, \text{ nach (iii)}} + \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \xi \bar{N} \\ \dot{\xi} &= -\frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \bar{n}_{\text{em}} \bar{N} - \frac{\bar{n}_{\text{em}}}{\tau_{\text{sp}}} + \bar{p} - \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} (\bar{n}_{\text{em}} \varepsilon + \xi \bar{N}) - \frac{\xi}{\tau_{\text{sp}}}, \\ &\quad \underbrace{\quad}_{=0, \text{ nach (iv)}} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \xi \bar{N} \\ \dot{\xi} &= -\frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \left(\bar{N} + \frac{1}{\beta} \right) \xi - \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \bar{n}_{\text{em}} \varepsilon, \end{aligned}$$

die sich zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung für die kleine Abweichung der Photonenzahl vom stationären Wert \bar{N}

$$\ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \left(\bar{N} + \frac{1}{\beta} \right)}_{=: 2\gamma} \dot{\varepsilon} + \underbrace{\left(\frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}} \right)^2 \bar{n}_{\text{em}} \bar{N}}_{=: \omega_0^2} \varepsilon = 0 \quad (5.4)$$

zusammenfügen. Nahe der stationären Lösung zeigt die Photonenzahl also das Verhalten eines gedämpften harmonischen Oszillators, dessen Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfung γ sich mit (5.3) zu

$$\omega_0^2 = \frac{\beta \bar{p}}{\tau_{\text{sp}}} \quad , \quad \gamma = \frac{\beta \bar{p}}{2\kappa \tau_{\text{sp}}} \quad (5.5)$$

ergeben, und für dessen Frequenz $\omega_{\text{system}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ gilt.

Für kleine Störungen oberhalb der Schwelle ($|\varepsilon| \ll \bar{N}$ bei $\bar{N} \gg 1$) gilt also $N(t) = \bar{N} + \varepsilon(t)$ mit

$$\varepsilon(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_{\text{system}} t + \varphi). \quad (5.6)$$

Ein hinreichend schwach harmonisch getriebenes Vierniveausystem, das sich im eingeschwungenen Zustand dem Ratengleichungsmodell gemäß verhält, sollte also bei Durchstimmung der Anregungsfrequenz ω das Verhalten eines getriebenen gedämpften harmonischen Oszillators zeigen, für dessen Amplitude in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz

$$|A|(\omega) = \frac{f/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \quad (5.7)$$

mit einer effektiven Amplitude der Anregung f/m gilt. Eine Resonanz sollte sich bei

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (5.8)$$

einstellen.

5.2 Modulationsantwort des Vierniveausystems

Bei fester Wahl der jeweils verbleibenden Parameter werden die Amplitudenantworten des Vierniveausystems auf Durchstimmung der Anregungsfrequenz bei Variation der Kavitätsverlustrate, des β -Faktors sowie der Rate P_0 aufgenommen. Gemäß Kapitel 5 werden die Extremstellen der Photonenanzahlentwicklung im eingeschwungenen Bereich ausgelesen und die Beträge der Differenzen benachbarter extremaler Photonenanzahlen gebildet. Der durch 2 dividierte Mittelwert der so entstehenden Werte wird im Folgenden als Amplitude bezeichnet. In allen nachstehenden Rechnungen gelten $\tau_{\text{sp}} = 1000$ ps, $\tau_{\text{relax}} = 1$ ps und $I = 0.01 P_0$ (einprozentige Modulation). Eine Diskussion der numerischen Ergebnisse geschehe im Rahmen der im Ratengleichungsbild gewonnenen Ausdrücke für die Eigenfrequenz ω_0 und die Dämpfung γ in (5.5), die mit (5.8) eine Näherung an die Resonanzfrequenz der Photonenanzahloszillation im eingeschwungenen Bereich liefern und im Folgenden für den Vergleich mit den numerisch am Vierniveausystem gewonnenen Ergebnissen angepasst werden.

Für hinreichend kurze Relaxationszeiten τ_{relax} , vernachlässigbar geringe Besetzungen des unteren Laserniveaus $|\beta\rangle$ ($n_\beta \approx 0$) und eine Photonenanzahl $N \gg 1$ führt das Kapitel 5.1 die fünf gekoppelten Gleichungen des Systems (2.92) auf die zwei Ratengleichungen (5.2) für die Photonenanzahl N und die Anzahl der invertierten Emittoren im Resonator n_{em} zurück. Der Parameter \bar{p} wird dabei als mit der Atomzahl multiplizierte Einstreuung $\frac{n_\pi}{\tau_{\text{relax}}}$ aus dem oberen Pumpniveau, also als effektive Pumprate für die Größe n_{em} eingeführt. In der Anwendung der in Kapitel 5.1 ermittelten Ausdrücke für ω_0 und γ auf die Ergebnisse der numerischen Untersuchung des Vierniveausystems wird mithin $\bar{p} = N_{\text{Em}} \frac{\bar{n}_\pi}{\tau_{\text{relax}}}$ mit dem numerisch ermittelten stationären Wert der $|\pi\rangle$ -Besetzung im Vierniveausystem genutzt. Die Ausdrücke für die Frequenz und die Dämpfung gehen damit in

$$\omega_0^2 = \frac{(N_{\text{Em}}\beta)}{\tau_{\text{sp}}\tau_{\text{relax}}} \bar{n}_\pi \quad , \quad \gamma = \frac{(N_{\text{Em}}\beta)}{2\kappa\tau_{\text{sp}}\tau_{\text{relax}}} \bar{n}_\pi \quad (5.9)$$

über, worin das Produkt $N_{\text{Em}}\beta$ gemäß (3.1) konstant gegen Änderungen von β ist. Die Abhängigkeiten der Resonanzfrequenznäherung von den Parametern β und P_0 sind also rein implizit über \bar{n}_π gegeben; für die Kavitätsverlustrate κ kommt eine explizite Abhängigkeit in (5.9) hinzu.

5.2.1 Variation der Kavitätsverlustrate κ

Abbildung 13 zeigt die Amplitude der harmonischen Photonenanzahlschwingung über der Anregungsfrequenz ω für verschiedene Kavitätsverlustraten κ als Ergebnis einer numerischen Behandlung des Vierniveausystems. Größere Verlustraten äußern sich in einer Abnahme der absoluten Amplitude und in einer deutlicheren Ausprägung des Resonanzmaximums, mithin in einer geringeren Dämpfung. In Kavitäten hoher Güte werden die Relaxationsoszillationen aufgrund der hohen Lebensdauer der Kavitätsmode also stärker ausgedämpft als in Kavitäten, die durch große Verlustraten gekennzeichnet sind und in denen die Photonenanzahl daher rasch fällt.

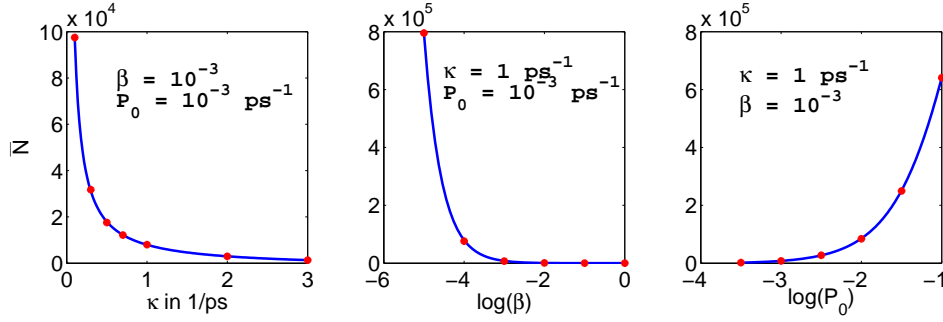


Abbildung 12: Entwicklung der stationären Photonenzahl \bar{N} bei Variation der Kavitätsverlustrate κ (*links*), des β -Faktors (*mittig*) und der Pumprate P_0 (*rechts*); rot markiert sind jeweils die in den nachstehenden Abbildungen genutzten Parameterwerte. In allen Bildern gilt $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$, $N_{\text{Em}}/\beta = 10^4$.

Die Resonanz verschiebt sich zunächst in Richtung größerer, schließlich jedoch wieder in Richtung kleinerer Frequenzen. Die Abnahme der Dämpfung wird in (5.9) sowohl durch das explizite antiproportionale Verhalten von γ , als auch durch den abnehmenden Wert von \bar{n}_π für wachsende κ (*siehe Inset in Abbildung 13*) nachvollzogen. Die roten Markierungen zeigen die gemäß (5.8) mit Frequenz und Dämpfung aus (5.9) bestimmten Näherungswerte an die Resonanzfrequenz. Qualitativ wird die Verschiebung der Resonanz durch die im Bild der Ratengleichungen abgeleitete Näherung reproduziert, wenn diese auch stets größere Werte für die Resonanzfrequenz liefert, als sich aus der numerischen Behandlung des Vierniveausystems ergeben. Eine Begründung der zunehmenden Abweichungen mit wachsendem κ mag in der geringeren stationären Photonenzahl in höherwertigen Kavitäten zu finden sein: Abbildung 12 zeigt links die stationären Photonenzahlen, die sich bei Variation der Kavitätsverlustrate ergeben. Mit zunehmendem κ ist die Näherungsbedingung $N \gg 1$ weniger gut erfüllt.

5.2.2 Variation des β -Faktors

Die Abbildung 14 zeigt mit dem jeweiligen β -Wert skalierte Amplitudenkennlinien für eine Variation des β -Faktors im Bereich $\beta = 10^{-5}, \dots, 1$ bei einer Pumprate $P_0 = 10^{-3} \text{ ps}^{-1}$ oberhalb der Laserschwelle (*vergleiche Kennlinien in Abbildung 3.1*). Es zeigt sich eine zunehmende Dämpfung für größere β . Während die Linien für kleine β noch sehr eng liegen, ist die Dämpfungszunahme ab $\beta = 10^{-2}$ deutlich erkennbar. Dieses Verhalten findet sich in der Auftragung von \bar{n}_π über β wieder: Eine merkliche Zunahme des Wertes zeigt sich erst im Bereich hochwertiger Resonatoren. Der Versuch, die Resonanzfrequenzen des Systems mittels (5.9) zu reproduzieren liefert weniger zufriedenstellende Ergebnisse als im Falle der Variation der Kavitätsverlustrate: während die numerisch ermittelten Kennlinien mit wachsendem β eine leichte Verschiebung der Resonanz in Richtung kleinerer Frequenzen anzeigen, laufen die rot eingezeichneten Näherungswerte kaum merklich in Richtung größerer Frequenzen. Für große β -Faktoren mag eine Begründung in den geringen Photonenzahlen von $\bar{N} \approx 81$ für $\beta = 0.1$ und $\bar{N} \approx 9$ für $\beta = 1$, die die in Kapitel 5.1 formulierte Bedingung für die Näherung im Ratengleichungsbild, $\bar{N} \gg 1$, nicht mehr erfüllen, gesucht werden.

5.2.3 Variation der Pumprate P_0

In Abbildung 15 sind mit einem konstanten Faktor $\beta = 10^{-3}$ skalierte Amplitudenkennlinien für verschiedene Pumpraten P_0 gezeigt. Die Laserschwelle des untersuchten Systems kann der Kennlinienschar des Vierniveausystems aus Kapitel 3 (*Abbildung 3.1*) entnommen werden und liegt bei etwa $P = 10^{-4} \text{ ps}^{-1}$. Die genutzten Pumpraten zwischen $P_0 = 10^{-3.5} \text{ ps}^{-1}$ und $P_0 = 10^{-1} \text{ ps}^{-1}$ sind also alle aus dem Regime der stimulierten Emission jenseits der Laserschwelle gewählt. Mit wachsendem P_0 wachsen die absolute Amplitude sowie die Dämpfung des Systems; für $P_0 = 10^{-1} \text{ ps}^{-1}$

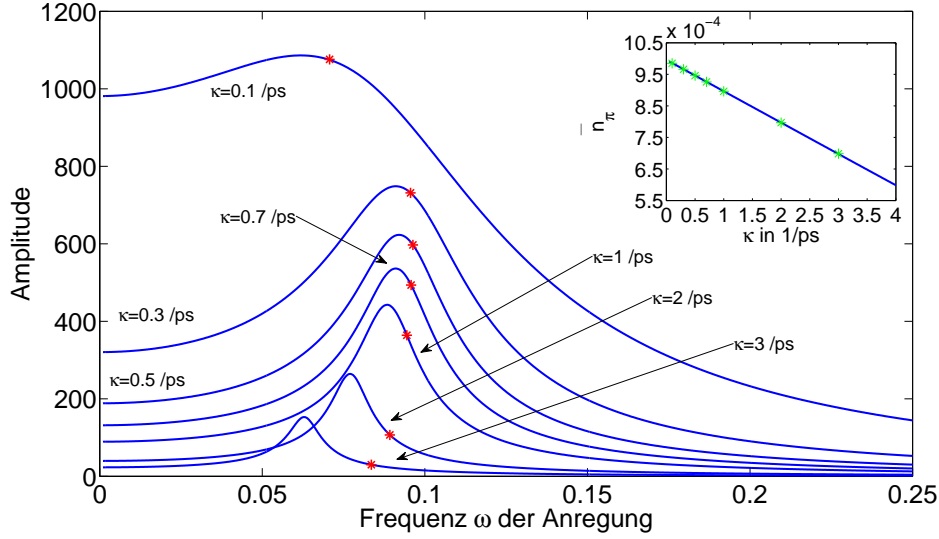


Abbildung 13: κ -Variation bei $\beta = 10^{-3}$, $P_0 = 10^{-3} \text{ ps}^{-1}$, $I = 0.01 P_0$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$. Die roten Markierungen zeigen die Näherungswerte an die Resonanzfrequenz. Im Inset ist das Verhalten von \bar{n}_π über der Kavitätsverlustrate gezeigt, grün markiert sind dort die im großen Bild genutzten κ -Werte.

stellt sich kein Resonanzmaximum mehr ein. Mit der Entfernung von der Laserschwelle in Richtung größerer Pumpraten, also mit einem rascheren Aufbau der durch die stimulierte Emission im Bereich eines Maximums der Photonenzahlsoszillationen verringerten Inversion, werden die Relaxationsoszillationen also zunehmend ausgedämpft.

Auch der im Inset der Abbildung 15 gezeigte stationäre Wert der $|\pi\rangle$ -Besetzung wächst mit P_0 . Da für alle Pumpraten das obere Pumpniveau $|\pi\rangle$ und das untere Laserniveau $|\beta\rangle$ im stationären Fall gleich besetzt sind (vergleiche (2.92d) und (2.92e)), nimmt für große Pumpraten auch n_β zu und wächst für $P_0 = 0.1 \text{ ps}^{-1}$ auf den etwa fünfzigfachen Wert der maximalen stationären Besetzung \bar{n}_{pi} in den beiden vorangegangenen Rechnungen, sodass die näherungsweise Beschreibung des Systems im Bild der Ratengleichungen weniger gerechtfertigt sein dürfte. Die Näherungswerte an die Resonanzfrequenz reproduzieren den qualitativen Verlauf der Resonanzen in Richtung größerer Frequenzen bei wachsender Pumprate; einzig das vollständige Ausdämpfen der Resonanz für $P_0 = 10^{-1} \text{ ps}^{-1}$ findet sich in den gemäß (5.9) und (5.8) ermittelten Werten nicht wieder.

Abbildung 12 zeigt rechts das Verhalten der stationären Photonenzahl mit Variation der Pumprate: Die für kleine Pumpraten stärkeren relativen Abweichungen der im Bild der Ratengleichungen gewonnenen Näherungswerte von den numerisch am Vierniveausystem ermittelten Resonanzfrequenzen mögen in der geringeren Photonenzahl zu suchen sein.

Die Verringerung der Kavitätsverlustrate κ und die Vergrößerung der Pumprate P_0 wirken sich beide dämpfend auf die Schwingungen des Vierniveausystems aus. Abbildung 16, in der Input-Output-Kennlinienscharen ($\beta = 10^{-5}, \dots, 1$), wie sie in Kapitel 3 beschrieben werden, für verschiedene Kavitätsverlustraten κ aufgetragen sind, zeigt die Beziehung der beiden Parameter auf: Zwischen Laserschwelle und Sättigungsbereich sind hinsichtlich der relativen Position auf der Kennlinie die Wirkungen einer Verringerung der Kavitätsverlustrate κ bei konstantem P_0 und der Vergrößerung der Pumprate bei konstantem κ ähnlich.

5.2.4 Fazit der Untersuchung der Modulationsantwort

Die vorangegangenen Untersuchungen der Modulationsantwort des Vierniveausystems zeigten die Einflüsse der Kavitätsverlustrate κ , des β -Faktors und der Pumprate P_0 auf die Schwingungseigen-

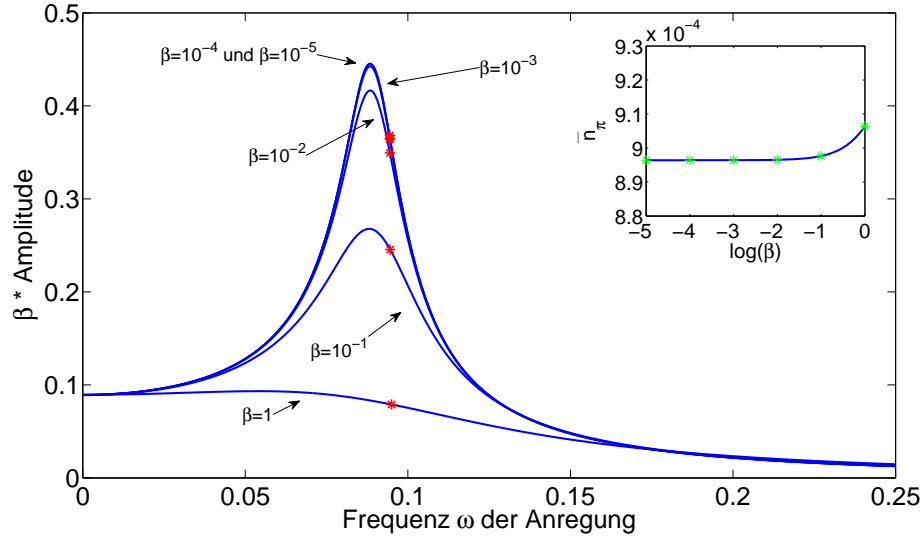


Abbildung 14: β -Variation bei $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $P_0 = 10^{-3} \text{ ps}^{-1}$, $I = 0.01 P_0$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$ und Näherungswerte (rot) an die Resonanzfrequenzen. Im Inset das Verhalten der stationären Besetzung des Zustands $|\pi\rangle$ des Vierniveausystems über dem logarithmierten β -Faktor gegeben.

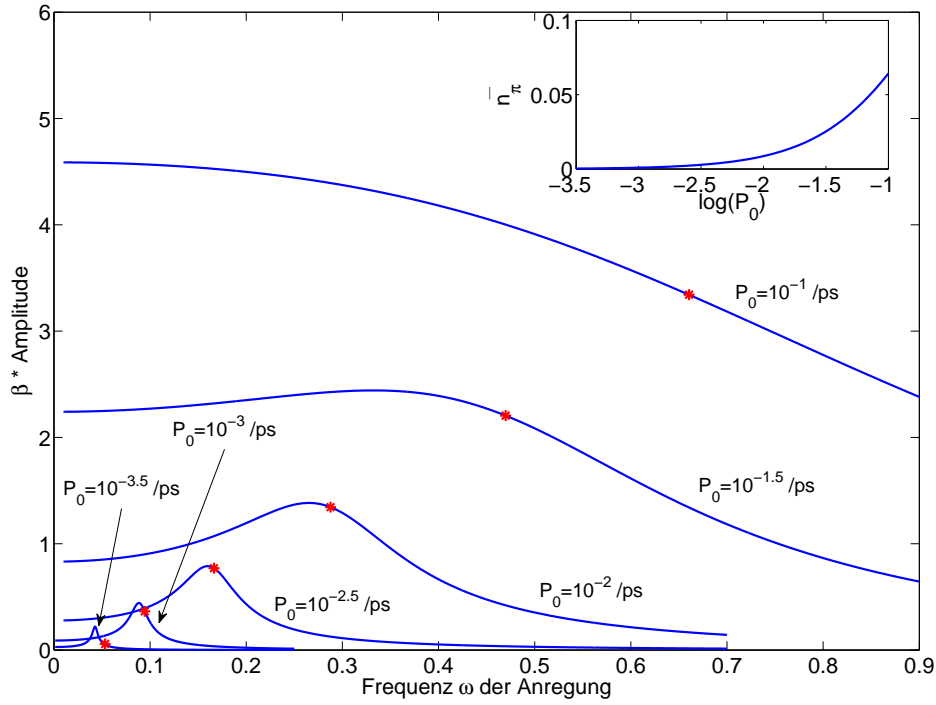


Abbildung 15: P_0 -Variation bei $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\beta = 10^{-3}$, $I = 0.01 P_0$, $\tau_{\text{sp}} = 1000 \text{ ps}$, $\tau_{\text{relax}} = 1 \text{ ps}$ und Näherungswerte (rot) an die Resonanzfrequenzen. Das Inset zeigt die stationäre Besetzung des $|\pi\rangle$ -Zustands über der Rate P_0 .

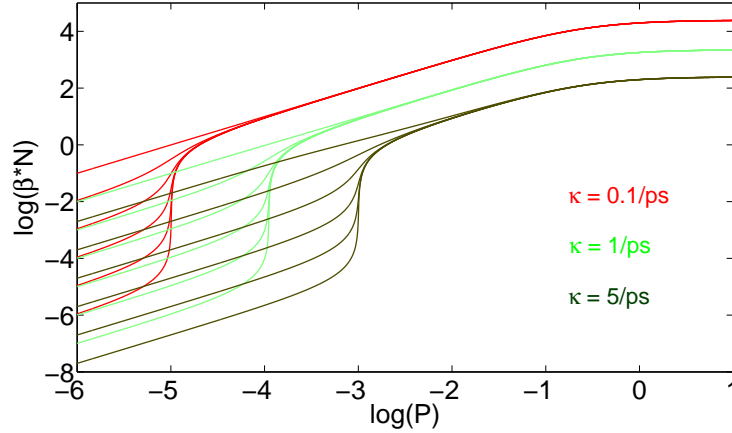


Abbildung 16: Kennlinienscharen ($\beta = 10^{-5}, \dots, 1$) des Vierniveausystems für $\tau_{sp} = 1000$ ps und $\tau_{relax} = 1$ ps bei verschiedenen Kavitätsverlustraten κ

schaften des Systems. Um die Relaxationsoszillationen zu dämpfen, sind Kavitäten hoher Güte zu wählen, die sich durch kleine Kavitätsverlustraten und große β -Faktoren auszeichnen. Auch eine Erhöhung der Pumprate wirkt der Ausbildung der Oszillationen entgegen. Wie das Kapitel 4 aufzeigte, ist eine Anwendung des Laseroutputs im nichtstationären Bereich jedoch nicht ausschließlich durch die Abklingdauer der Relaxationsoszillationen beschränkt: In der Abbildung 6 auf der Seite 30 sind ebenfalls die Einschaltverzögerung und das exponentielle Abklingen der Photonenzahl nach Ausschalten des Pumpratensignals erkennbar. Eine geringere Kavitätsverlustrate wirkt dämpfend auf die Relaxationsoszillationen und verkürzt die Einschaltverzögerung, da die stimulierte Emission dann bereits bei einer geringeren Inversion einsetzt, wird aber ein langsames Entleeren der Kavität im ungepumpten System bedingen. Einem rechteckförmigen Pumpratensignal wird der Photonenoutput also dann besonders gut folgen, wenn die Kavitätsverlustrate zunächst sehr klein ist und mit dem Abschalten des Signals sehr rasch vergrößert, die Resonatorgüte also rasch verringert wird. Die Güteschaltung ("Q-switching") ist üblicherweise eine Methode zur Erzeugung kurzer Laserpulse und beschreibt in dieser Anwendung den gerade gegenläufigen Prozess der Verlustatenänderung [Dem05]: Bei stark vergrößerten Verlusten bewirkt der Pumpprozess eine große Inversion des aktiven Mediums, da die stimulierte Emission als Prozess des Inversionsabbaus nicht einsetzt; wird dann die Verlustrate rasch verringert, die Güte der Kavität also rasch erhöht, so ergibt sich ein Puls starker stimulierter Emission.

Eine Variation der Kavitätsgröße kann prinzipiell mittels elektrooptischer Schalter, etwa einer Pockelszelle, erfolgen. Der Pockelseffekt (oder linearer elektrooptischer Effekt) beschreibt die lineare Abhängigkeit des Brechungsindex' von der Feldstärke eines angelegten elektrischen Feldes, die einige inversionssymmetriefreie Kristalle wie etwa Kaliumhydrogenphosphat (KDP) aufweisen [EE03]. Die in einer Pockelszelle verwendeten Kristalle sind entweder stets doppelbrechend, oder zeigen bei Anlegen des elektrischen Feldes doppelbrechendes Verhalten. In beiden Fällen erlaubt die elektronische Steuerung des Brechungsindex' die Variation des Phasenversatzes der beiden senkrecht zueinander polarisierten Teilstrahlen, die sich im Kristall ergeben, wenn dieser mit linear polarisiertem Licht bestrahlt wird. Ergibt sich gerade ein Versatz der halben Wellenlänge $\lambda/2$, so tritt linear polarisiertes Licht aus dem Kristall aus, dessen Polarisationssebene um $\pi/2$ verdreht ist. Das Pockelsmedium lässt sich also als schaltbare $\lambda/2$ -Platte verwenden. Wird auf der optischen Achse des Resonators eine Pockelszelle von einem Polarisator und einem Analysator in Kreuzstellung eingefasst, so lässt sich das Laserlicht abhängig von der an die Zelle angelegten Spannung dämpfen.

Abbildung 17 zeigt die Zeitentwicklung der Photonenzahl eines zur Übertragung eines Rechteckpulses optimierten Vierniveausystems: β -Faktor und Pumprate sind im Vergleich zum System, dessen Photonenoutput in Abbildung 6 gegeben ist, vergrößert worden, und eine idealisierte Po-

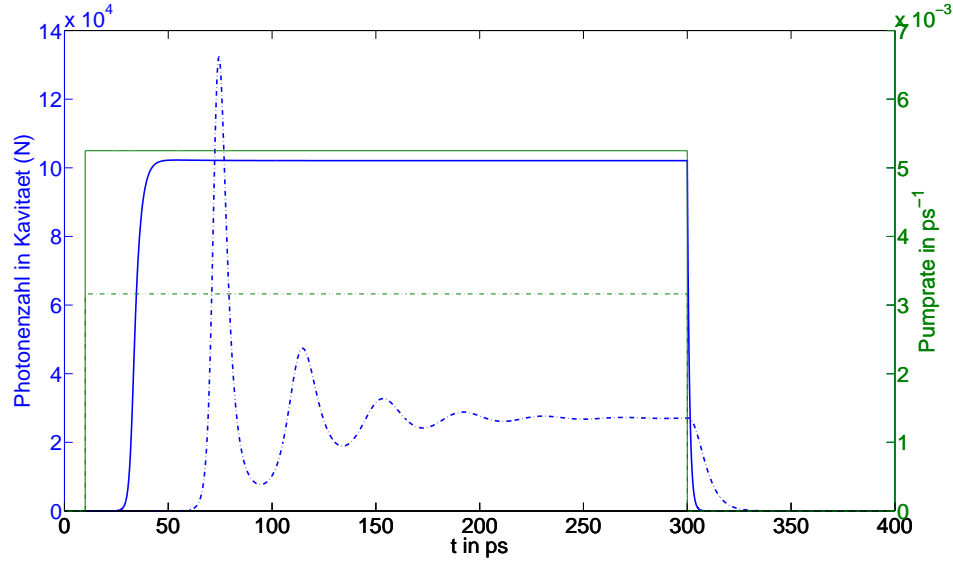


Abbildung 17: Optimierte Zeitentwicklung der Photonenzahl im Vierniveausystem. Eine idealisierte Pockelszelle schaltet die Kavitätsverlustrate bei $t = 300$ ps von $\kappa_1 = 0.05 \text{ ps}^{-1}$ auf $\kappa_2 = 1 \text{ ps}^{-1}$; gegen Abbildung 6 ist ferner die Pumprate auf $P = 10^{-2.28} \text{ ps}^{-1}$ und der β -Faktor auf $\beta = 10^{-2}$ vergrößert. Gestrichelt eingezeichnet sind Pumprate und Zeitentwicklung aus Abbildung 6 in Kapitel 4, Seite 30.

ckelszelle schaltet zum Zeitpunkt $t = 300$ ps instantan die Kavitätsverlustrate von $\kappa_1 = 0.05 \text{ ps}^{-1}$ auf $\kappa_2 = 1 \text{ ps}^{-1}$. Die Einschaltverzögerung ist verringert, die Photonenzahl in der Kavitätsmode fällt nach Ausschalten des Signals sehr rasch ab und die Relaxationsoszillationen sind vollständig ausgeblendet; die dem Lasersystem eigenen Beschränkungen der Signalübertragung sind also minimiert. In einem tatsächlichen Aufbau gemäß der obigen Beschreibung kämen diesen jedoch Limitierungen durch die Schaltcharakteristik eines realen elektrooptischen Bauelements hinzu: Tatsächlich lässt sich beim momentanen technischen Stand der Schaltvorgang einer Pockelszelle auf der Pikosekundenskala der Dynamik des Lasersystems aus Abbildung 17 mitnichten als instantan annähern; die Realisierung der notwendigen hohen Rate der Spannungsänderung beschränkt die Schaltzeiten auf den Nanosekunden- und bestenfalls den Bereich von etwa 100 ps [Hob00]. Da der Pockelseffekt selbst, also die Änderung des Brechungsindex' im Kristall, jedoch sehr rasch verläuft, ließen sich bei Fortentwicklung der Steuerungselektronik die Schaltzeiten einer Pockelszelle noch verringern und ein dem Verlauf in Abbildung 17 ähnliches Verhalten des Laseroutputs erreichen. Bei den vorliegenden Parametern ließen sich dann noch Rechtecksignale von etwa 60 ps Breite auflösen, sodass sich Repetitionsraten im Bereich von 15 GHz ergäben.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit untersuchte mit dem Drei- und dem Vierniveausystem zwei atomare Lasersysteme im Bild der Ratengleichungen. In einem ersten Abschnitt, dem Kapitel 2, wurden die genutzten Differentialgleichungssysteme für die Dynamik der Besetzungen und des Photonenausgangs über eine Reihe von Näherungen aus einer allgemeinen Beschreibung der Wechselwirkung eines Ladungsträgersystems mit der Vielzahl der Moden des freien quantisierten Lichtfeldes abgeleitet. Nach einem Abriss zur Feldquantisierung, der die Herleitung des Hamiltonoperators des freien optischen Feldes sowie einer Operatorarstellung des elektrischen Feldes enthielt, wurden

ausgehend von der Darstellung eines Ladungsträgers im elektromagnetischen Feld ein mikroskopischer Ausdruck für die Kopplungsstärke eines atomaren Übergangs mit einer Mode des Lichtfeldes und der zugehörige Hamiltonoperator der Wechselwirkung in Dipolnäherung ermittelt. Über das Jaynes-Cummings-Modell ist dann die Wechselwirkung eines ausgewählten atomaren Übergangs mit einer in etwa resonanten Kavitätslichtmode, wie sie sich etwa in einem optischen Resonator abseparieren lässt, in der Rotating-Wave-Approximation beschrieben worden. Die dissipativen Effekte der spontanen Emission und der Kavitätsverluste wurden anschließend im Dichtematrixformalismus über eine Reservoirankopplung modelliert, und fanden sich als Lindbladterme in der Mastergleichung wieder, die unter Nutzung der Born- und der Markovnäherungen aus der von-Neumann-Gleichung der Gesamtdichtematrix von System und Reservoir abgeleitet worden war. Mit der Mastergleichung ließen sich dann Gleichungen für die Dynamik der Besetzungen und der Photonenzahl in der Kavität formulieren, die nach einer adiabatischen Elimination des gemeinsamen Quellterms und einer semiklassischen Faktorisierung der korrelierten Erwartungswerte des photonischen und des elektronischen Systems in ein geschlossenes Gleichungssystem, die Ratengleichungen, übergingen. Schließlich wurden weitere Emitter, ein Pumpprozess und die Dynamik der Pumpniveaus phänomenologisch hinzugefügt.

Die numerische Behandlung des Drei- und des Vierniveausystems folgte im zweiten Anteil der Arbeit. Zunächst wurden mit den Input-Output-Kennlinien die stationären Lösungen beider Systeme miteinander verglichen; auch das Verhalten der stationären Inversion wurde für beide Systeme diskutiert: Das Vierniveausystem erreicht das Regime der stimulierten Emission bereits für kleinere Pumpraten als das Dreiniveausystem und ist bereits für kleine Pumpraten invertiert. Die nach dem β -Faktor aufgeschlüsselten Kennlinien des Vierniveausystems sind in der doppeltlogarithmischen Auftragung unterhalb der Laserschwelle äquidistant angeordnet. Die Untersuchung eines analytischen Näherungswertes der Photonenzahl im Grenzfall kleiner Pumpanregungen wies Reabsorptionsprozesse als Begründung des weniger gleichmäßigen Verhaltens des Photonenausgangs des Dreiniveausystems mit Änderung des β -Faktors aus. Ferner wurde ein analytischer Näherungswert an die Photonenzahl im Sättigungsbereich des Vierniveausystems ermittelt.

Die anschließenden Kapitel untersuchten die Zeitentwicklung des Vierniveausystems und gingen insbesondere den im Bereich der Laserschwelle ausgeprägten Relaxationsoszillationen nach: Die Untersuchung der Schwingungseigenschaften des Systems über die Modulation der Pump-rate konnte den Einfluss der Kavitätsverlustrate κ , des β -Faktors sowie der Pumprate P_0 auf die Schwingungsdämpfung im System aufzeigen. Die abschließende Abbildung 17 zeigt die vollständige Ausdämpfung der Relaxationsoszillationen durch geeignete Parameterwahl.

Ausblick

Die Ableitung der numerisch untersuchten Gleichungssysteme ist wesentlich durch die getätigten Näherungen geprägt. Nachdem die Lichtmateriewechselwirkung in Kapitel 2.2.1 noch für ein Ladungsträgersystem mit beliebig vielen diskreten Energieniveaus in Kontakt mit dem freien optischen Feld beschrieben wird, reduziert das darauffolgende Kapitel 2.2.2 die Beschreibung auf die Jaynes-Cummings-Wechselwirkung und rekonstruiert mithin den Emitter unter Vernachlässigung aller nichtlasenden Niveaus im Bild des Zweiniveausystems, in welchem daraufhin die Mastergleichung und die Ratengleichungen ermittelt werden. In Kapitel 2.6 schließlich wird der Emitter phänomenologisch auf drei beziehungsweise auf vier Niveaus erweitert. In einer Fortsetzung der Arbeit ließe sich die Reservoirankopplung womöglich für das volle Drei- beziehungsweise Vierniveausystem rechnen und damit mikroskopische Ausdrücke für die Relaxationszeiten in die beziehungsweise aus den Pumpniveaus, die hier über die phänomenologische Rate $1/\tau_{\text{relax}}$ eingeführt worden sind, gewinnen.

Der Gültigkeitsbereich der semiklassischen Faktorisierung der photonenassistierten Übergangsamplitude in der Herleitung der Ratengleichungen aus der Mastergleichung in Kapitel 2.5 ließe sich über Vergleichsrechnungen abschätzen. In einem weiteren Schritt wären dann die in der vorliegenden Arbeit vernachlässigten Korrelationen des elektronischen und des photonischen Systems in einer nicht-semiklassischen Beschreibung zu untersuchen. Schließlich ließen sich die Modelle um weitere Ladungsträger und die einhergehenden Coulombwechselwirkungen erweitern.

A Zur adiabatischen Elimination der Übergangsamplitude

Der Gültigkeitsbereich der adiabatischen Näherung der photonenassistierten Übergangsamplitude in Kapitel 2.5, Gleichung (2.85), lässt sich durch eine Vergleichsrechnung abschätzen. Nach semiklassischer Näherung ergibt sich ein geschlossenes Gleichungssystem für die Photonenzahl, die Besetzungen des $|\alpha\rangle$ - und des $|\beta\rangle$ -Zustandes sowie die Übergangsamplitude (Gleichungen in (2.81) und - nach Faktorisierung $\langle b^\dagger b (\hat{n}_\alpha - \hat{n}_\beta) \rangle \approx N (n_\alpha - n_\beta)$ - in (2.82)). Die an diesem System ermittelten Ergebnisse für Photonenausgang und Besetzung lassen sich mit den über die Ratengleichungen gewonnenen Zeitentwicklungen vergleichen. Mit der reskalierten Übergangsamplitude

$$\langle b\sigma_+ \rangle_r \equiv \frac{\langle b\sigma_+ \rangle}{g^*} \quad (\text{A.1})$$

gehen die benannten Gleichungen in

$$\dot{N} = i|g|^2 \langle b\sigma_+ \rangle_r - i|g|^2 \langle b^\dagger \sigma_- \rangle_r - \kappa N \quad (\text{A.2a})$$

$$\dot{n}_\alpha = -i|g|^2 \langle b\sigma_+ \rangle_r + i|g|^2 \langle b^\dagger \sigma_- \rangle_r - \gamma n_\alpha \quad (\text{A.2b})$$

$$\langle b\dot{\sigma}_- \rangle_r = -i(n_\alpha + N(n_\alpha - n_\beta)) - \frac{\kappa + \gamma}{2} \quad (\text{A.2c})$$

über. In (A.2b) lässt sich der Term der spontanen Emission, $-\gamma n_\alpha$, identifizieren. Das Betragsquadrat der Kopplungskonstante g tragen damit nur Terme, die Prozesse mit der Rate der Emission in Lasermode $\frac{1}{\tau_l}$ beschreiben; $|g|^2$ lässt sich daher über die Rate $\frac{1}{\tau_l} = \frac{\beta}{\tau_{sp}}$ ersetzen:

$$\frac{1}{\tau_l} \stackrel{(2.87)}{=} R = \frac{4|g|^2}{\kappa + \gamma} \quad \Leftrightarrow \quad |g|^2 \stackrel{(2.88)}{=} \frac{\kappa + \gamma}{4} \frac{\beta}{\tau_{sp}}. \quad (\text{A.3})$$

Wird nun noch γ als Rate der spontanen Emission in die nichtlasenden Moden gemäß

$$\gamma = \frac{1}{\tau_{nl}} = \frac{1}{\tau_{sp}} - \frac{1}{\tau_l} = \frac{1 - \beta}{\tau_{sp}} \quad (\text{A.4})$$

umgeschrieben, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\dot{N} = -\frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{1 - \beta}{\tau_{sp}} \right) \frac{\beta}{\tau_{sp}} \text{Im} \{ \langle b\sigma_+ \rangle_r \} - \kappa N \quad (\text{A.5a})$$

$$\dot{n}_\alpha = \frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{1 - \beta}{\tau_{sp}} \right) \frac{\beta}{\tau_{sp}} \text{Im} \{ \langle b\sigma_+ \rangle_r \} - \frac{(1 - \beta)}{\tau_{sp}} n_\alpha \quad (\text{A.5b})$$

$$\langle b\dot{\sigma}_+ \rangle_r = -i(n_\alpha + N(n_\alpha - n_\beta)) - \frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{1 - \beta}{\tau_{sp}} \right) \langle b\sigma_+ \rangle_r. \quad (\text{A.5c})$$

Abbildung 18 zeigt die zeitliche Entwicklung der Photonenzahl für die Relaxation des zum Zeitpunkt $t = 0$ invertierten Zweiniveausystems in den Grundzustand ($n_\alpha = 0$, $n_\beta = 1$) für die Kavitätsverlustraten $\kappa = 0.01 \text{ ps}^{-1}$, 0.1 ps^{-1} , 1 ps^{-1} und vergleicht die Ergebnisse aus den Ratengleichungen und dem Gleichungssystem (A.5). γ ergibt sich in allen drei Bildern zu $\gamma = \frac{1 - \beta}{\tau_{sp}} = 9.999 \cdot 10^{-4} \text{ ps}^{-1}$ und trägt damit zur Summe $\kappa + \gamma$ nur für $\kappa = 0.01 \text{ ps}^{-1}$ nennenswert bei. In Kapitel 2.5 waren eine hinreichende Größe der Kavitätsverluste und der Rate der spontanen Emission in die nichtlasenden Moden sowie eine langsame Änderung der Photonenzahl und der Besetzungen als Kriterien für die Gültigkeit der adiabatischen Näherung benannt worden. Die über die Ratengleichungen beziehungsweise über das Gleichungssystem (A.5) berechneten Zeitentwicklungen der Photonenzahl in Abbildung 18 weichen tatsächlich erst für kleine $\kappa + \gamma$ erkennbar voneinander ab. Für $\kappa = 0.01 \text{ ps}^{-1}$ ergibt sich in der Ratengleichungslösung ein rascheres Anwachsen der Photonenzahl als in der Lösung des nicht adiabatisch genäherten Systems; in letzterem verzögern die in den Ratengleichungen vernachlässigten Korrelationen des elektronischen und des photonischen Systems offenbar den Aufbau der Photonenzahl.

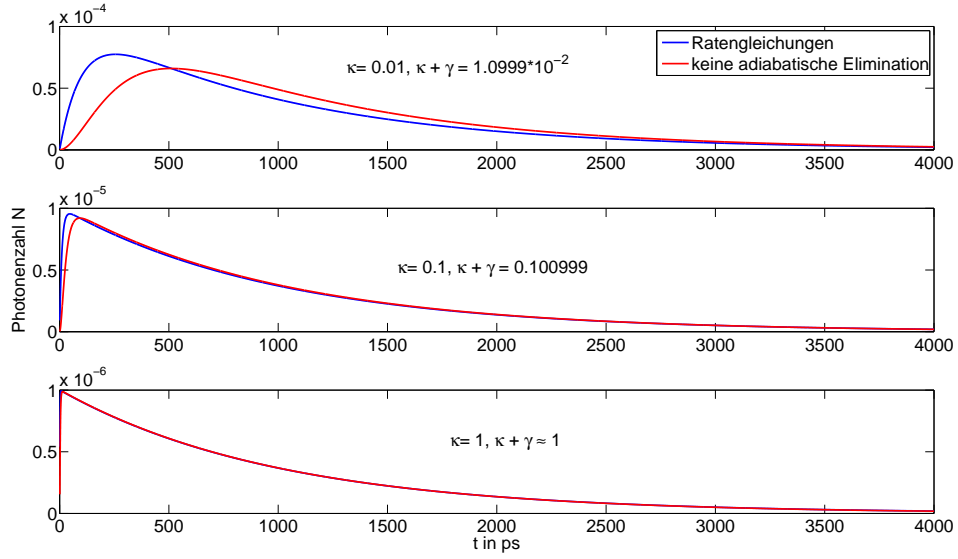


Abbildung 18: Gezeigt ist die zeitliche Entwicklung der Photonenzahl für ein bei $t = 0$ voll invertiertes Zweiniveausystem ($n_\alpha = 1$, $n_\beta = 0$) für verschiedene Kavitätsverlustraten κ . In blau sind die Ergebnisse der Berechnung der Ratengleichungen (2.86), in rot die aus der Berechnung des Gleichungssystems (A.5) gewonnenen Ergebnisse dargestellt; weitere Parameter $\beta = 10^{-3}$, $\tau_{\text{sp}} = 1000$ ps, $\tau_{\text{relax}} = 1$ ps

Für die in vielen der nachfolgenden Rechnungen gemeinsam mit den übrigen Parametern der vorliegenden Berechnung verwendete Verlustrate $\kappa = 1 \text{ ps}^{-1}$ sind die Zeitentwicklungen in Abbildung 18 gut miteinander vereinbar. Die nicht dargestellten Entwicklungen der Besetzungen zeigen für keine der gewählten Kavitätsverlustraten erkennbare Abweichungen.

B Parameter

Die für die numerischen Untersuchungen verwendeten Parameter entstammen den nachstehend tabellierten Wertebereichen¹⁵.

Kavitätsverlustrate	κ	$0.1, \dots, 3 \text{ ps}^{-1}$
Rate der spontanen Emission in die nichtlasenden Moden	$1/\tau_{\text{sp}}$	10^{-3} ps^{-1}
Rate der strahlungsfreien Übergänge	$1/\tau_{\text{relax}}$	1 ps^{-1}
Anteil der spontanen Emission in die Lasermode	β	$10^{-5}, \dots, 1$
Emitterzahl	$N_{\text{Em}} = 10^4/\beta$	
Pumprate	P	$10^{-6}, \dots, 10^2 \text{ ps}^{-1}$

¹⁵Einzig in Kapitel 5.2.4 wird eine Kavität mit noch geringerer Verlustrate von $\kappa = 0.05 \text{ ps}^{-1}$ simuliert. Das Verhältnis von Emitterzahl und β -Faktor ist lediglich in Kapitel 3.2.2 verändert; dort gilt für eine Vergleichsrechnung $N_{\text{Em}} = 10^3/\beta$.

Literatur

- [AE87] L. Allen and J.H. Eberly. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. Dover Publications, Inc., New York, 1987.
- [Asc04] Timo Aschenbrenner. *Diplomarbeit: Lumineszenz- und Ladungsträgerdynamik in Halbleiter-Quantenfilmen und Halbleiter-Quantenpunkten*. Universität Bremen, 2004.
- [Car99] H. J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics*. Springer, Berlin Heidelberg, 1999.
- [CTDL99] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantenmechanik*. de Gruyter, Berlin, New York, zweite edition, 1999.
- [CTDRG89] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons & Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. wiley, 1989.
- [Dem05] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3: Atome Moleküle und Festkörper*. Springer, Berlin Heidelberg, sechste edition, 2005.
- [EE03] J. Eichler and H. J. Eichler. *Laser - Bauformen, Strahlführung, Anwendungen*. Springer, Berlin Heidelberg, fünfte edition, 2003.
- [GWLJ07] C. Gies, J. Wiersig, M. Lorke, and F. Jahnke. Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers. *Physical Review A*, 75(1):13803, 2007.
- [HK90] H. Haug and S. W. Koch. *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors*. World Scientific, third edition, 1990.
- [Hob00] P. C. D. Hobbes. *Building Electro-Optical Systems*. John Wiley & Sons, 2000.
- [Jac98] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [Loh07] H. Lohmeyer. *Optischer Einschluss, Lasing und Purcell-Effekt in Mikrosäulenkavitäten auf Basis breitlückiger Halbleiter*. PhD thesis, Universität Bremen, 2007.
- [MS07] Pierre Meystre and Murray Sargent III. *Elements of Quantum Optics*. Springer, Berlin Heidelberg, vierte edition, 2007.
- [Nol04] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 5/1: Quantenmechanik*. Springer, Berlin Heidelberg, sechste edition, 2004.
- [RC94] P. R. Rice and H. J. Carmichael. Photon statistics of a cavity qed-laser: A comment on the laser-phase-transition analogy. *Physical Review A*, 50(5):4318–4329, 1994.
- [Sch68] L. I. Schiff. *Quantum mechanics*. McGraw-Hill, Inc., 1968.
- [YB89] H. Yokoyama and S. D. Brorson. Rate equation analysis of microcavity lasers. *Journal of Applied Physics*, 66:4801, 1989.

Danksagung

Ich möchte mit einem Dank an diejenigen schließen, die die vorliegende Arbeit ermöglicht oder ihre Entstehung unterstützend begleitet haben.

Für die Themenstellung und die Betreuung der Arbeit sowie für seine Vorlesungen, die mich für die Theoretische Physik begeistert haben, gilt mein Dank Professor Dr. Frank Jahnke. Für seine Tätigkeit als Zweitgutachter danke ich Professor Dr. Detlef Hommel.

Matthias Florian möchte ich für die breite Unterstützung danken, die er mir im Verlauf des Arbeitsprozesses hat zuteil werden lassen. Dr. Christopher Gies gilt mein Dank für die Hilfe besonders beim Einstieg in die Arbeit; Dr. Michael Lorke danke ich für die sehr hilfreichen Ratschläge zum Abfassen der Arbeit und das gewissenhafte Korrekturlesen. Auch Dr. Paul Gartner möchte ich für seine Hilfsbereitschaft und zudem für seine Vorlesung zur Quantenoptik danken, die nicht nur beim Abfassen der Arbeit sehr hilfreich war, sondern mir überdies als besonders motivierende Veranstaltung in Erinnerung ist.

Mit meinen Fragen fühlte ich mich jederzeit willkommen und danke der Arbeitsgruppe *Theoretische Halbleiterphysik* für die überaus angenehme Arbeitsatmosphäre.

Bei Christian Horn bedanke ich mich für die rasche Skizzenhilfe. Für das Ertragen meiner nach dem ein oder anderen Rechenproblemchen mitunter eingetrübten Stimmung und des gelegentlichen Ausdehnens vermeintlich unaufschiebbarer Matlabsessions in den Abend hinein danke ich tausendfach Mareike Hinrichsen-Mohr.

Da diese Arbeit nicht zuletzt drei Jahre des Bachelorstudiums beschließt, abschließend noch ein merci bien an jene, mit denen ich diese Zeit nur allzu gerne verbracht habe; in der richtigen Gesellschaft lässt es sich im NW1 prima aushalten!