

# Bewegung im Magnetfeld

Ziel: Hamiltonoperator  $\mathcal{H}$ , führt auf Zeemaneffekt

Ausgangspunkt:  $F = m \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  Lorentzkraft  $\star\star$

mit  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$  E-Feld

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  Magnetfeld

Zwischenziel: part. Ableitungen loswerden + Rotation vereinfachen

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad \text{(*)}$$

i-Komponente:  $\sum_{k \in i} \dot{x}_k \sum_{mn} \epsilon_{imn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} = \vec{v} \times \vec{B}$

$$= \sum_{kmn} \dot{x}_k \frac{\partial A_n}{\partial x_m} (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km})$$

$$= \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \underbrace{\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}}_m \text{ addieren zu 0!}$$

Newton-BWG-Glg:

i-Komp:  $F_i = -q \frac{\partial}{\partial x_i} \phi + \frac{dA_i}{dt} + \underbrace{\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{v} \vec{A})}$

Lagrange-Form:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + q\vec{A}_i) = q \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{v} \vec{A} - \phi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + qA_i \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (q\vec{v} \vec{A} - q\phi) \end{array} \right. \quad (3)$$

(3) führt auf:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + q\vec{\dot{x}} \vec{A} - q\phi$$

mit  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$  und  $\mathcal{H} = \vec{p} \dot{\vec{x}} - L = \dot{\vec{x}} \underbrace{(m\dot{\vec{x}} + q\vec{A})}_{\vec{p}} - \underbrace{\left( \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + q\vec{\dot{x}} \vec{A} - q\phi \right)}_L$

$$= \frac{m}{2} \vec{v}^2 - q\phi, \quad \text{wobei } \vec{v} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}$$

Legende-Trafo

damit Hamiltonfunktion:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi}$$

Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \vec{A} = 0 \rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p}^2 + q^2 \vec{A}^2 - q\vec{A} \vec{p}) + q\phi$

Diamagnetismus  
Paramagnetismus

über Lorentzkraft & Potentiale Newton-BWG-Glg aufgestellt und über Elimination partieller t Ableitung und Vereinfachen von Rotation Äquivalenz zur Lagrange-Gleichung gezeigt, wodurch über verallgemeinerten Impuls  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$  Hamilton-Glg gefunden werden kann

Bemerkung: Hier Elektronengas, also keine Coulomb-WV

# Bewegung im Magnetfeld

Ziel: Hamiltonoperator  $\mathcal{H}$ , führt auf Zeemaneffekt

Ausgangspunkt:  $F = m \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  Lorentzkraft  $\star\star$

mit  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$  E-Feld

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  Magnetfeld

Zwischenziel: part. Ableitungen loswerden + Rotation vereinfachen

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \dot{x}_i}_{\text{part. Ableitungen}}$$

i-Komponente:  $\sum_{k \in i} \dot{x}_k \sum_{mn} \epsilon_{imn} \frac{\partial A_n}{\partial x_m} = \vec{v} \times \vec{B}$

$$= \sum_{kmn} \dot{x}_k \frac{\partial A_n}{\partial x_m} (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km})$$

$$= \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \underbrace{\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}}_m \text{ addieren zu } 0!$$

Newton-BWG-Glg:

i-Komp:  $F_i = -q \frac{\partial}{\partial x_i} \phi + \frac{dA_i}{dt} + \underbrace{\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{v} \vec{A})}$

Lagrange-Form:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + q\vec{A}) = q \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{v} \vec{A} - \phi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i + qA_i \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(q\vec{v} \vec{A} - q\phi) \end{array} \right. \quad (3)$$

(3) führt auf:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + q\dot{\vec{x}} \vec{A} - q\phi$$

mit  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$  und  $\mathcal{H} = \vec{p} \dot{\vec{x}} - L = \underbrace{\dot{x}_i(m\dot{x}_i + q\vec{A})}_{\vec{p}} - \underbrace{(m\dot{x}_i^2 + q\dot{x}_i \vec{A} - q\phi)}_L$

$$= m\ddot{x}_i + qA_i$$

$$\rightarrow m\ddot{x}_i + q\vec{A}$$

$$= \frac{m}{2} \vec{v}^2 - q\phi, \text{ wobei } \vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}$$

Legende-Trafo

damit Hamiltonfunktion:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi}$$

$\xrightarrow[\vec{v} \vec{A} = 0]{\text{Coulomb-Eichung}}$   $\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p}^2 + q^2 \vec{A}^2 - q\vec{A} \vec{p}) + q\phi$

Diamagnetismus  
 Paramagnetismus

über Lorentzkraft & Potentiale Newton-BWG-Glg aufgestellt und über Elimination partieller t Ableitung und Vereinfachen von Rotation Äquivalenz zur Lagrange-Gleichung gezeigt, wodurch über verallgemeinerten Impuls  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$  Hamiltonglg gefunden werden kann

Bemerkung: Hier Elektronengas, also keine Coulomb-WW

# 5. Bewegung im elektromagnetischen Feld

## 5.1 Elektrodynamik

Ziel: zunächst klass. Hamiltonfunktion findet die Teilchen beschreibt, auf die Kraft im elekt. Feld wirkt

Vorgehen: ohne BB ist Newt. BG zu Lagr. II äquivalent, aus L kann H bestimmt werden

Ausgangspunkt: Newtonsche Bewegungsgleichung mit Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} ; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Wollen Gleichung in Form bringen, die nur totale Zeitableit und Ortsableitung enthält entspr. Lagr. Gleichung  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_{e=1}^3 \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_e} \frac{\partial x_e}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = q\vec{v} \times \nabla \times \vec{A} + q \left[ -\text{grad} \phi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \sum_{e=1}^3 \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_e} \dot{x}_e \right]$$

i-te Komponente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + qA_i) &= q \sum_{k \in e} \epsilon_{ikl} \dot{x}_k \underbrace{(\nabla \times \vec{A})_e}_{\sum_m \epsilon_{kmn} \frac{\partial}{\partial x_m} A_n} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q \sum_e \frac{\partial A_i}{\partial x_e} \dot{x}_e \\ &= q \sum_{k \in e} \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= q \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{v} \cdot \vec{A} - \phi) \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_k \epsilon_{ikl} a_k b_l$$

$$\sum_e \epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}$$

in jedem Fall  
an Antizyklischer

in jedem Fall zyklisch

- für Lagrange-Funktion, die diese Gleichung als Euler-Lagrange-Gleichung liefert, muss gelten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \overset{(1)}{m \ddot{x}_i} + \overset{(2)}{q A_i} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{gleicher Term} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = q \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_i \dot{x}_i A_i - \phi \right) \quad (3)$$

$$L = L(x_i, \dot{x}_i, t) = \frac{m}{2} \sum_i \overset{(1)}{\dot{x}_i^2} + \overset{(2)}{q \sum_i \dot{x}_i A_i} - \overset{(3)}{q \phi}$$

- kons. Impuls:  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + q A_i$

Hamiltonfunkt.:  $H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$

$$H = \sum_i (m \dot{x}_i^2 + q A_i \dot{x}_i - \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 - q \dot{x}_i A_i + q \phi)$$

$$= \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 + q \phi \quad \text{mit } \dot{x}_i = \frac{1}{m} (p_i - q A_i)$$

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i - q A_i)^2 + q \phi$$

beachte:  $L = L(x_i, \dot{x}_i, t)$   
 $H = H(x_i, p_i, t)$

... klass. Hamilton-Funkt. für geladenes Teilchen im eln. Feld

## 5.2 Quantisierung der Teilchenbewegung im klass. elektromagn. Feld

$$p_i \rightarrow \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$H = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} - q \vec{A})^2 + q \phi$$

... Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{ieq}{2m} (\vec{\nabla} \vec{A} + \vec{A} \vec{\nabla}) + \frac{q^2}{2m} A^2 + q\phi$$

• Commutator-Gleichung:  $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$

$$\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{A} + \vec{A} \vec{\nabla}) = \vec{A} \vec{\nabla} = \vec{\nabla} \vec{A}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{q}{m} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{q^2}{2m} A^2 + q\phi$$

Hamiltonian  
mit "p.A-Kopplung"

### 5.3 Spezialfall: konstantes Magnetfeld

→ für konst.  $\vec{B}$ -Feld lässt sich  $\vec{A}$  schreiben als

$$\vec{A} = -\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{B})$$

$$A_k = -\frac{1}{2} \sum_m \epsilon_{krm} x_r B_m$$

$$(\text{rot } \vec{A})_i = \sum_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k$$

$$\sum_k \epsilon_{kij} \epsilon_{krm} = \delta_{ij} \delta_{rm} - \delta_{im} \delta_{jr}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_m \epsilon_{kij} \epsilon_{krm} B_m$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_m (\delta_{ij} \delta_{rm} - \delta_{im}) B_m$$

$$= -\frac{1}{2} (1-3) B_i = B_i$$

diese Form von  $\vec{A}$  ist ebenfalls konsistent mit Coulomb-Gleichung  
 $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_{ik}} A_k = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial x_k} x_k = 3$$

da  $\epsilon_{krm} = 0$

• im Hamiltonop. entsteht

$$\vec{A} \cdot \vec{p} = -\frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \vec{p}$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{B}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

$$A^2 = \frac{1}{4} (\vec{r} \times \vec{B})^2$$

$$= \frac{1}{4} \left( \sum_{jk} x_j^2 B_k^2 - \sum_{jk} x_j B_j x_k B_k \right)$$

$$= \frac{1}{2} [\vec{r}^2 \vec{B}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{B})^2]$$

• zykl. Vertauschung im Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$\text{Annahme: } \vec{B} = \vec{e}_z B$$

$$(\vec{r} \times \vec{B})^2 = \sum_i (\vec{r} \times \vec{B})_i^2$$

$$= \sum \epsilon_{ijk} x_j B_k \epsilon_{ilm} x_l B_m$$

$$= \sum (\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kj})$$

$$x_j B_k x_l B_m$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{q}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B} + \frac{q^2}{8m} [\vec{r}^2 \vec{B}^2 - (\vec{r} \cdot \vec{B})^2]$$

Teilbeitrag zum  
Paramagnetismus  
(er fehlt noch Spin)



Diamagnetismus

$\Rightarrow$  an dieser Stelle  
ist Harmon. Oszillator  
verstärkt ( $\frac{d^2}{dx^2} + Cx^2$ )

$\Rightarrow$  Landau-Quantisierung  
im  $B$ -Feld

$\Rightarrow$  Landau-Niveaus  
GENAUER: siehe Seminarat

## 5.4 Normaler Zeeman-Effekt des H-Atoms ohne Spin-Berücksichtigung

H-Atom im konst.  $\vec{B}$ -Feld

$$\vec{B} = B \hat{e}_z$$

$$H = H_0 - \frac{q}{2m} B L_z$$

Hamilton-Op.  
des H-Atom

$\vec{B}$ -Feld in  
 $z$ -Richtung

Eigenfunktionen zu  $H_0$  sind auch Lösungen zu  $H$

$$H \psi(r) = E \psi(r)$$

$$\psi(r) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

me nicht mit Manne u verwechseln

da  $Y_{lm}$  auch Eigenfunktionen zu  $L_z$ :  $L_z Y_{lm} = h_{lm} Y_{lm}$

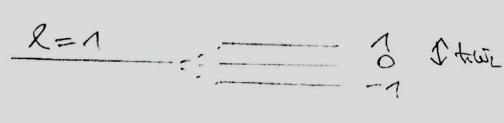
$E_{nlm} = -\frac{E_0}{n^2} - \frac{qB}{2m} h_{lm}$ $= -\frac{E_0}{n^2} + \hbar \omega_L m_l$
--

$$q = -e$$

$$\hbar \omega_L = \frac{eB}{2m} \dots \text{Larmor-}\text{frequenz}$$



- Magnetfeld hat  $(2l+1)$ -fache Entartung auf



- Aufspaltung unabh. von  $l$  in äquidistante Niveaus



-10-

⚠ tatsächliche Aufspaltung für H-Atom  
anders: es entsteht gerade Anzahl von  
Niveaus (als wäre Drehimpuls halbzahlig)

⇒ es fehlt Berücksichtigung von Spin

- magnetisches Moment

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad \mu_B = \frac{e}{2m} \hbar \quad \dots \text{Bolzmannsches Magneton}$$

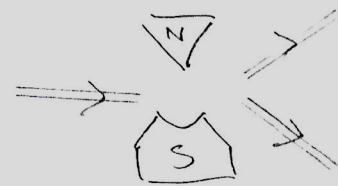
$$H_{\text{para}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

## 6. Spin

### 6.1 Experimentelle Befunde

- Stärke des Drehimpulses im Grundzustand  
 $\lambda = 0 \Rightarrow$  kein Bahndrehimpuls

Aufspaltung des Strahls in  
intensiv. magn. Feld



$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \vec{B}$$

Kraft im magn.  
 $\vec{B}$ -Feld Moment

- a) Welcher kommt magn. Moment?
- b) Warum Aufspaltung in  
gerade Anzahl?  
(Gesamtdrehimpuls halbzahlig?)

- Stern-Gerlach-Experiment (1922)

Silber-Atome: kugelförmige Ladungsverteilung & ein 5s-Elektron  
⇒ gerader Bahndrehimpuls verschwindet  
- Aufspaltung in 2 Strahlen

# Bewegung im Magnetfeld: 2D Elektronengas $\perp$ B-Feld

19/07/17

Ziel: Hamiltonfunktion auf Szenario anpassen  
+ algebraisch möglichst einfach darstellen

Ausgangspunkt:  $H = \frac{1}{2m}(\vec{p}^2 - q\vec{A})^2$  Hamiltonoperator für EM-Feld

$$\text{konst. Magnetfeld } \vec{B} = B\hat{e}_z \rightarrow A = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}), \text{ dann } B = \text{rot } A \\ = \frac{1}{2}\vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{r})$$

Zwischenziel:  $\vec{A}$  konkret bestimmen & H anpassen

$$\text{mit } \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{r}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \text{ folgt: } \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})] = \vec{B}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{r}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -By \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } H = \frac{1}{2m} \sum_{i=x,y} (p_i - qA_i)^2 = \frac{1}{2m} \left[ (-ih\frac{\partial}{\partial x} - \frac{eB}{2}y)^2 + (-ih\frac{\partial}{\partial y} + \frac{eB}{2}x)^2 \right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m\ell^2} \left[ \underbrace{(-i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{By}{2})^2}_{-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{By^2}{4}} + \underbrace{(-i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{Bx}{2})^2}_{+i\frac{Bx}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot 2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{Bx^2}{4}} \right] \quad \ell^2 = \frac{\hbar}{eB}$$

$$\vec{r} = \ell \vec{r}'$$

$$\text{3 Komp. von } \vec{L}, \vec{L}_z = -ih(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$$

$$\Rightarrow H = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{eB}{m} \left[ -\Delta_g + \frac{g^2}{4} + \vec{L}_z^2 \right] = -i \left[ \frac{\partial_x^2}{\partial y^2} - \frac{\partial_y^2}{\partial x^2} \right]$$

erinnert an Harn. Osz.  
(aber in 2D!)

Nun H angepasst, jetzt Algebra!

$$\text{neue Operatoren: } \alpha = \frac{\partial_x - i\beta_y}{2} \quad \beta = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{Bemerkung } (\frac{\partial}{\partial x})^t = -\frac{\partial}{\partial x} \\ \alpha^t = \frac{\partial_x + i\beta_y}{2} \quad \beta^t = -\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{vgl. Impulsoperator}$$

$$\text{Trivial klar: } [\alpha, \alpha^t] = 0, [\beta, \beta^t] = 0$$

$$\text{außerdem: } [\alpha, \beta^t] = \alpha\beta^t - \beta^t\alpha = -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\bar{z} = \bar{z}\partial_{\bar{z}} + 1 + \bar{z}\partial_{\bar{z}}, \text{ denn } \alpha = \frac{\bar{z}}{2}, \alpha^t = \frac{z}{2} \\ \beta = \partial_{\bar{z}}, \beta^t = -\partial_{\bar{z}}$$

$$\text{es gilt: } H = \frac{\hbar\omega_c}{2} [\alpha^t\alpha + \beta^t\beta + \alpha^t\beta + \alpha\beta^t] \quad \text{damit } \vec{L}_z: \\ \downarrow 1 + \beta^t\alpha$$

$$= \frac{\hbar\omega_c}{2} [(\alpha + \beta^t)(\alpha + \beta) + 1] \\ = \hbar\omega [a^t a + 1], \text{ wobei } a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)$$

$$\vec{L}_z = -i(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$$

= ... siehe nächste Seite

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[ \frac{s^2}{4} - \Delta + L_z \right]$$

$$\alpha = \frac{x - iy}{2} = \frac{\bar{z}}{2}$$

$$\alpha^+ = \frac{x + iy}{2} = \frac{z}{2}$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2\partial_z$$

$$\beta^+ = -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = -2\partial_{\bar{z}}$$

Kommultatoren:

$$[\alpha, \alpha^+] = [\beta, \beta^+] = [\alpha, \beta] = 0$$

$$[\alpha, \beta^+] = \alpha\beta^+ - \beta^+\alpha \quad [\alpha^+, \beta] = -1$$

$$= -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\bar{z} \quad (1)$$

$$= 1$$

trivial:

etwas genauer Hingucken:

$$\frac{s^2}{4} = \frac{z\bar{z}}{4} = \alpha\alpha^+$$

$$-\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}} = \beta\beta^+$$

$$\begin{aligned} \frac{2N}{\hbar\omega_c} &= \alpha^+\alpha + \beta^+\beta + \alpha^+\beta + \underline{\alpha\beta^+} \\ &= (\alpha^++\beta^+)(\alpha+\beta) + 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c(\alpha^+\alpha + \frac{1}{2})$$

$$\text{denn: } \alpha\beta^+ + \alpha^+\beta$$

$$= -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + z\partial_z$$

$$= -(\partial_{\bar{z}}\bar{z} - 1) + (\partial_z z - 1)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \alpha\beta^+ + \alpha^+\beta = \beta^+\alpha + \beta\alpha^+ \\ = \alpha\beta^+ + \alpha^+\beta + 1 + \alpha^+\beta + \beta\alpha^+ - 1$$

$$= \frac{1}{2} [\alpha\beta^+ + \beta^+\alpha + 1 + \alpha^+\beta + \beta\alpha^+]$$

$$= \frac{1}{2} [(\alpha+\beta)(\alpha^++\beta^+) - (\alpha^+-\beta^+)(\alpha-\beta)]$$

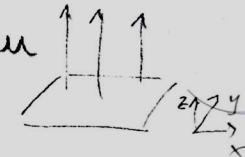
$$= aa^+ - bb^+ \quad , \quad a = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\alpha^+-\beta^+}{\sqrt{2}}$$

Bemerkung: Magnetfeld führt zu zusätzlicher Quantisierung  
Einschränkung auf Kreisbahnen, Zyklotronbewegung

# Zweidim. Elektronengas im senkr. Magnetfeld

$\vec{B}$

- Elektron soll sich in der x-y-Ebene eines QW unter dem Einfluß eines Magnetfeldes in z-Richtung bewegen



$$\vec{B} = B \hat{e}_z$$

aus  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  folgt

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} = \frac{B}{2} \hat{e}_z \times \vec{r} = \frac{B}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{B}{2} (-y \hat{e}_x + x \hat{e}_y)$$

da

$$\vec{B} = \frac{B}{2} \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = B \hat{e}_z$$

- Hamiltonian für 2d-Elektron (Ladung:  $-e$ ) im magn. Feld

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{j=x,y} (p_j + e A_j)^2 \quad \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (\text{freie Elektronen im Magnettf., Coul.-WW int.})$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{\hbar} \frac{B}{2} y \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{\hbar} \frac{B}{2} x \right)^2 \right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2e^2} \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2e^2} \right)^2 \right] \quad \text{KL-Wchsel notwendig?}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2me^2} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial \varphi_x} + \frac{Q_y}{2} \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial \varphi_y} - \frac{Q_x}{2} \right)^2 \right] \quad \vec{r} = \ell \vec{\varphi}$$

$$\ell^2 = \frac{\hbar}{eB}$$

$$\frac{\hbar^2}{m\ell^2} = \frac{\hbar eB}{m} = \hbar \omega_c \quad \dots \text{Zyklotron Energie}$$

$$L_z = -i \left[ Q_x \frac{\partial}{\partial Q_y} - Q_y \frac{\partial}{\partial Q_x} \right] \text{ wo } \hbar? \quad -i\hbar \vec{x} \times \vec{\nabla} = \frac{y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}}{z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}} \quad \frac{x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}}{x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[ - \left( \frac{\partial^2}{\partial Q_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial Q_y^2} \right) + \frac{Q_x^2 + Q_y^2}{4} + L_z \right]$$

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[ - \nabla_Q^2 + \frac{Q^2}{4} + L_z \right]$$

- $\Rightarrow$  Hamiltonsp. eines zweidim. harm. Osz. (quadr. Potential)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega_c^2}{2} x^2 \quad x = R_Q$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m\omega_c^2}{2} r^2$$

- Einführung vom Erzeugungs- und Vernichtungsp. (analog zum harmon. Oszill.)

$$\alpha = \frac{Q_x - i Q_y}{2}$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial Q_x} - i \frac{\partial}{\partial p_y}$$

$$16V$$

$$1a + 3e = 0$$

$$2aV$$

$$2b + 4d = 0$$

$$\text{also } L_2 = \alpha\beta^+ + \alpha^+\beta$$

$$\alpha^+ = \frac{Q_x + i Q_y}{2}$$

$$\beta^+ = -\frac{\partial}{\partial Q_x} - i \frac{\partial}{\partial p_y}$$

$$\alpha\alpha^+ = \frac{\alpha\alpha^+ + \alpha^+\alpha}{2}$$

$$\beta\beta^+ = \frac{\beta\beta^+ + \beta^+\beta}{2}$$

$$[\alpha, \alpha^+] = 0 \quad (\text{Orbital. kommut. untereinander})$$

$$[\beta, \beta^+] = 0 \quad (\text{Impulsort. kommut. untereinander})$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \quad \alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^+ + \beta^+)}$$

Def: Intra-Landau-Niveau  
Erz. & Vernichtungsp.

$$[\alpha, \alpha^+] = \alpha\alpha^+ - \alpha^+\alpha = \frac{1}{2} [(\alpha + \beta)(\alpha^+ + \beta^+) - (\alpha^+ + \beta^+)(\alpha + \beta)]$$

$$= \frac{1}{2} [\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha + \beta\alpha^+ - \alpha^+\beta] \quad \text{da } [\alpha, \alpha^+] = 0 \text{ und } [\beta, \beta^+] = 0$$

$$\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha = \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} [(x - iy)(-p_x - ip_y) - (-p_x - ip_y)(x - iy)]$$

$$(AB)^+ = B^+A^+ \quad = \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \left[ \underbrace{-[x, p_x]}_{i\hbar} - \underbrace{[y, p_y]}_{i\hbar} \right]$$

$$= 1 \quad \text{da } p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\beta\alpha^+ - \alpha^+\beta = 1, \quad \text{d.h.}$$

$$[\alpha, \alpha^+] = 1$$

$$\text{dann } (\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha)^+ = \beta\alpha^+ - \alpha^+\beta = (1)^+ = 1$$

$$[\alpha, \alpha] = [\alpha^+, \alpha^+] = 0 \quad \dots \text{Boye-VR}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^+ - \beta^+) \quad b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)}$$

Def: Intra-Landau-Niveau  
Erz. & Vernichtungsp.

$$[b, b^+] = bb^+ - b^+b = \frac{1}{2} [(\alpha^+ - \beta^+)(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)(\alpha^+ - \beta^+)]$$

$$= \frac{1}{2} [\underbrace{\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha}_1 + \underbrace{\beta\alpha^+ - \alpha^+\beta}_1] = 1$$

$$[b, b^\dagger] = [b^\dagger, b^\dagger] = 0 \quad \dots \text{Bose-VR}$$

- Merkregeln: Relationen:

$$Q_x = a + a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \underbrace{a + b^\dagger}_{\in \alpha} + \underbrace{a^\dagger + b}_{\in \alpha^\dagger} \right)$$

$$-i Q_y = a - a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a + b^\dagger - a^\dagger - b \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_x} = \frac{1}{2} (\beta - \beta^\dagger) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \underbrace{a - b^\dagger}_{\in \beta} - \underbrace{a^\dagger + b}_{\in \beta^\dagger} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_y} = \frac{1}{2} (\beta + \beta^\dagger) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( a - b^\dagger + a^\dagger - b \right)$$

- Hamiltonian durch Energien und Vernichtungsp. ausdrücken

$$H = \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial Q_x} + \frac{Q_y}{2} \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial Q_y} - \frac{Q_x}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left\{ \left[ \frac{i}{2\sqrt{2}} (2a - 2a^\dagger) \right]^2 + \left[ -\frac{1}{2\sqrt{2}} (2a + 2a^\dagger) \right]^2 \right\}$$

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left\{ -\frac{1}{2} (a - a^\dagger)^2 + \frac{1}{2} (a + a^\dagger)^2 \right\}$$

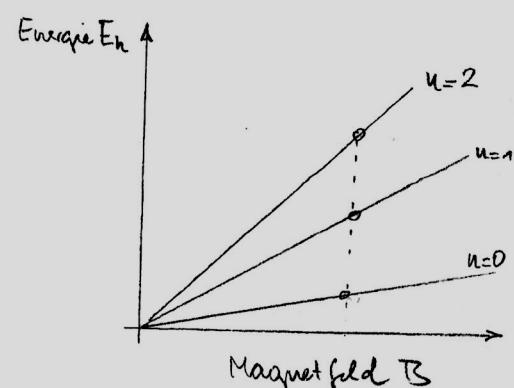
$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left\{ -\frac{1}{2} (a^2 - a a^\dagger - a^\dagger a + a^{*\dagger}) + \frac{1}{2} (a^2 + a a^\dagger + a^\dagger a + a^{*\dagger}) \right\}$$

$$= \frac{\hbar \omega_c}{2} (a a^\dagger + a^\dagger a)$$

$$H = \hbar \omega_c (a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

Wannum Ganzahlig?

$$\Rightarrow E_n = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, \dots$$



$$L_z = -i \left[ Q_x \frac{\partial}{\partial Q_y} - Q_y \frac{\partial}{\partial Q_x} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ (a + b^+ + a^+ + b^-)(a - b^+ + a^- - b^-) - (a + b^+ - a^- - b^-)(a - b^+ - a^+ + b^-) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 2(a a^+ + a^+ a) - 2(b b^+ + b^+ b^-) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[ 4a^+ a + 2 - 4b^+ b^- - 2 \right]$$

$$L_z = a^+ a - b^+ b^-$$

Warum so einfach trennbar?

- gemeins. Satz vom EF für H und Lz:

$\Rightarrow$  Eigenwertgleichg

$$\phi_{nn'} = |n\rangle |n'\rangle \quad \text{mit } a|n\rangle = n|n\rangle$$

und  $b^+ b |n'\rangle = n' |n'\rangle$

Grundzustand  $\phi_{00}$

mit

$$a \phi_{00} = a|0\rangle |0\rangle = 0$$

$$b \phi_{00} = |0\rangle b|0\rangle = 0$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{Q_x}{2} + \frac{\partial}{\partial Q_x} - i \left( \frac{Q_y}{2} + \frac{\partial}{\partial Q_y} \right) \right]$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{Q_x}{2} + \frac{\partial}{\partial Q_x} + i \left( \frac{Q_y}{2} + \frac{\partial}{\partial Q_y} \right) \right]$$

folgt

$$\phi_{00}(Q_x, Q_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Q_x^2 + Q_y^2}{4}}$$

Norm,  $\int e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 2\pi$

$$\text{da } \frac{\partial}{\partial Q_{xy}} \phi_{00} = -\frac{Q_{xy}}{2} \phi_{00}$$

bel. Zustand  $\phi_{nn'}$

$$\phi_{nn'}(Q_x, Q_y) = \frac{(a^+)^n (b^+)^{n'}}{\sqrt{n! n'!}} \phi_{00}(Q_x, Q_y)$$

- für Löcher ( Ladung +e) folgt

$$\begin{aligned}
 H^{(b)} &= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial q_x} - \frac{q_y}{2} \right)^2 + \left( i \frac{\partial}{\partial q_y} + \frac{q_x}{2} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{\hbar \omega_c}{2} \left\{ \left[ \frac{i}{2\sqrt{2}} (2k_z - 2k_z^+) \right]^2 + \left[ -\frac{1}{2\sqrt{2}} (-2k_z - 2k_z^+) \right]^2 \right\} \\
 &= \hbar \omega_c (k_z^+ k_z + \frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

$$L_z^{(b)} = a^+ a^- - b^+ b^-$$

⇒ Eigenwertgleichungen:

$$H^{(b)} \phi_{nn'} = E_n \phi_{nn'}$$

$$L_z^{(b)} \phi_{nn'} = (n-n') \phi_{nn'}$$

d.h. n und n' tauschen die Rolle und  $L_z^{(b)} = -L_z^{(e)}$  (für n und n' vert.)

$$\alpha := \frac{\hat{z}}{z} \quad \beta = \partial_z$$

$$\alpha^+ = \frac{\hat{z}}{z} \quad \beta^+ = z \cdot \partial_{\bar{z}}$$

$$\text{dann } [\alpha, \alpha^+] = 0, [\beta + \beta^+] = 0, [\alpha, \beta] = 0$$

$$[\alpha, \beta^+] = -\bar{z} \partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} \bar{z}$$

$$= -\bar{z} \partial_{\bar{z}} + 1 + \bar{z} \partial_{\bar{z}}$$

$$= 1$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^+ = \cancel{\left( \frac{\partial}{\partial z} \right)} \Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ = -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{x-iy}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ (1)}$$

dann falle

$$\text{und } \begin{bmatrix} \frac{x^2+y^2}{4} & -\Delta_S & \frac{\hbar\omega}{2} \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

$$-\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\cancel{\frac{1}{4} z\bar{z} + 4\partial_z \partial_{\bar{z}}} + \cancel{2(z\partial_{\bar{z}} - \bar{z}\partial_z)}$$

$$= \alpha^+ \alpha + \beta \beta^+ + \alpha^+ \beta + \alpha \beta^+$$

$$= \alpha^+ \alpha + \beta \beta^+ + 1 + \beta^+ \alpha + \alpha^+ \beta$$

$$= (\alpha^+ + \beta^+) (\alpha + \beta) + 1$$

$$= \hbar \omega \left( \alpha^+ \alpha + \frac{1}{2} \right)$$

$$x = z + \bar{z}$$

$$\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2 + 2\partial_z \partial_{\bar{z}}$$

$$y = i \frac{-ix - iy}{2}$$

$$-\left[ \partial_{\bar{z}}^2 + \partial_z^2 - 2\partial_z \partial_{\bar{z}} \right]$$

$$\Rightarrow \Delta = -4\partial_z \partial_{\bar{z}}$$

$$\cancel{x - \partial_{\bar{z}}^2}$$

$$-i(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$$

$$= -i \left[ \cancel{\left( \frac{z+\bar{z}}{2} \right)} i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) - i \left( \frac{\bar{z}-z}{2} \right) (\partial_z + \partial_{\bar{z}}) \right]$$

$$= \cancel{i} [z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}]$$

$$= 2\hbar \quad -\beta^+$$

$$= \alpha^+ \beta + \alpha \beta^+ \quad i(\bar{z} - z)$$

$$i \cancel{\frac{\partial}{\partial}}$$

(1)

Bewegung am

Magnetfeld

20 Elektronengas

Zusätzliche Rechnungen

$$[\alpha, \alpha^+] = 0, [\beta, \beta^+] = 0, [\alpha, \beta^+] = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta_S = \alpha^+ \alpha = \alpha \alpha^+ \\ + i \frac{\partial^2}{4} = \beta \beta^+ = \beta^+ \beta \\ L_S = \alpha \beta^+ + \alpha^+ \beta = 1 + \beta^+ \alpha + \alpha^+ \beta \end{array} \right\} \begin{aligned} H &= \frac{\hbar \omega_c}{2} \underbrace{[\alpha^+ \alpha + \beta^+ \beta + \beta^+ \alpha + \alpha^+ \beta + 1]}_{(\alpha^+ + \beta^+) (\alpha + \beta)} \\ &= \hbar \omega_c \left[ \underbrace{\frac{(\alpha^+ + \beta^+)}{\sqrt{2}}}_{:= a^+} \underbrace{\frac{(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}}}_{:= a} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \hbar \omega_c [a^+ a + \frac{1}{2}] \end{aligned}$$

$$\alpha = x + iy = z, \bar{\alpha} = x - iy$$

$$\alpha^+ = \bar{z}$$

$$\beta = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\beta^+ = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \quad \left[ \frac{\partial}{\partial z} \right]^+ = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z} dz}_{\partial f = 1} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}}_{f = z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\begin{aligned} \alpha &:= \bar{z} & \beta &= \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha^+ &:= z & \beta^+ &= -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned}$$

WIRTINGER  
KALKÜL!

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta^+] &= \alpha \beta^+ - \beta^+ \alpha = -\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \\ &= -\bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + 1 + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$df = \partial f dz$$

$$df = \partial dz + \bar{\partial} d\bar{z} \quad f = z + \bar{z} = 2x$$

$$dz = dz \checkmark$$

$$df = dz + d\bar{z} \quad x = z + \bar{z}$$

$$dx = dz + d\bar{z}$$

②

$$p^+ = -p^-$$

$$\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \langle \psi | p^+ | \psi \rangle$$

~~Integration~~

$$\left[ \int dx^n \psi^* \frac{\partial}{\partial x^n} \psi \right]^*$$

Leon Hadel  
Leon Hadel

$$\int dx \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi = \int dx \psi^* \psi' = |\psi \times \psi| - \int dx \psi^{*1} \psi$$

Impuls  $\rightarrow p^+ = \hat{p}$

+ Ableitungsoperator

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \psi^* &= -ih \frac{\partial}{\partial x} \\ -ih \frac{\partial}{\partial x} &= -ih \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\psi(x) = R(x) + iI(x)$$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = R'(x) + iI'(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \bar{\psi}(x) &= R'(x) - iI'(x) \\ &= \psi'^* \end{aligned}$$

$$ih \psi(x) = ih R - ih I$$

$$\begin{aligned} (ih \psi(x))^* &= -ih R - ih I \\ &= -ih(R - iI) \\ &= -ih \psi^* \end{aligned}$$

$$(zw)^* = \cancel{R_z} \cancel{R_w}$$

Leon

$$zw = R_z R_w - l_z l_w + i R_z l_w + i R_w l_z$$

$$(zw)^* = \cancel{R_z R_w} R_z R_w - l_z l_w - i(R_z l_w + R_w l_z)$$

$$z^* w^* = R_z R_w - l_z l_w$$

$$(R+iI)(R_2+iI_2)^* = (R-iI)(R_2-iI_2)$$

$$R_e(\omega^* z^*) = R_e(\omega z)^*$$

$\frac{\partial}{\partial x}$  versteht mit \*

③

$$[\alpha, p] = \frac{x-iy}{2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - i \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{2} - i \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{2}} \underbrace{\left( \frac{x-iy}{2} \right)}_{x p_x - \frac{\partial}{\partial x} x}$$

$$= \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial y} - \cancel{\frac{xy}{2} \frac{\partial}{\partial x}} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \cancel{i \frac{xy}{2} \frac{\partial}{\partial y}} + i \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$= \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \beta^a$$

$$\alpha a^+ + \beta p^+ + \cancel{\alpha \beta^+ + \alpha^+ \beta} \quad \cancel{\beta \alpha^+ + \beta^+ \beta}$$

$$\alpha(\alpha^+ + \beta^+) + \beta(p^+ + \alpha^+)$$

$$\underbrace{(\alpha + \beta)}_{a} \underbrace{(\beta^+ + \alpha^+)}_{a^+} = aa^+$$

$$[\alpha p^+] = \alpha p^+ + p^+ \alpha$$

$$= \frac{x-iy}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left( -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{x-iy}{2} \right)$$

$$= -\frac{x}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{iy}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$- \left[ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - i \frac{xy}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{xy}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right]$$

$$= 1 - \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$2[\alpha, p^+] = (x-iy) \left( -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$+ \left( + \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x-iy)$$

$$= (x-iy) \left( -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left[ 2 + x \left( i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \right) + y \left( \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] - \frac{1}{i}$$

$$= (x-iy) \left( -\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left[ 2 + (x-iy) \left( i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] - \frac{1}{i}$$

$$= 2$$

$$[\alpha, p^+] = 1$$

$$[\alpha p^+ - p^+ \alpha]^+ = \beta \alpha^+ - \alpha^+ \beta = [p, \alpha^+] = 1$$

$$\beta \alpha^+ - \alpha^+ \beta = 1$$

L<sub>2</sub> hermitesch

$$\alpha p^+ + \alpha^+ \beta$$

$$\cancel{\frac{\alpha p^+}{2} + \frac{1}{2} + \frac{p^+ \alpha}{2}} \quad \cancel{\frac{p^+}{2} + \frac{\alpha^+ \beta}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$\alpha p^+ + \alpha^+ \beta = \frac{\alpha p^+}{2} + \frac{p^+ \alpha}{2} + \frac{\beta \alpha^+}{2} + \frac{\alpha^+ \beta}{2}$$

$$H = \frac{1}{2} \left[ \alpha \alpha^+ + \alpha^+ \alpha + \beta \beta^+ + \beta^+ \beta \right]$$

$$+ \alpha p^+ + p^+ \alpha + \alpha^+ \beta + \beta \alpha^+$$

$$= \frac{1}{2} \left( \alpha + \beta \right) \left( \alpha^+ + \beta^+ \right) -$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \alpha^+ + \beta^+ \right) \left( \alpha + \beta \right) + \alpha p^+ +$$

(4)

$$[aa^+, bb^+] = aa^+ \cancel{bb^+} - \cancel{bb^+} aa^+$$

$$[\zeta_1, \zeta_2] = 1$$

$$[a, b] = ab - ba =$$

$$\frac{1}{2}[a, a^+]$$

$$= \cancel{\alpha \beta} \cancel{\alpha^+ \beta^+}$$

$$= \alpha \beta^+ + \beta \alpha^+ - \alpha^+ \beta - \beta^+ \alpha$$

= 2

$$a^+ a [a^+ \gamma] = a^+ \underbrace{aa^+}_{a^+ a + 1} \gamma =$$

dann EF

$$\begin{matrix} a^+ a \\ a^+ a + 1 \\ \downarrow a \\ a^+ b \\ a^+ b^+ \end{matrix}$$

$$= a^+ \underbrace{a^+ a}_n \gamma + a^+ \gamma$$

$$= (n+1) a^+ \gamma$$

$$a^+ a [a^+ \gamma] = [a a^+ - 1][a^+ \gamma]$$

$$a = [n-1](a^+ \gamma)$$

muss Ende geben!

$a^+ \gamma$  EF von  $a^+ a$

## Kommutator $[a, b]$

$$[a, b] = ab - ba = 0, \text{ wenn } [a, b] = 0, \text{ dann } [b^+, a^+] = 0 = [a^+, b^+]$$

$$[a, b^+] = b^+ a^+ - a^+ b^+ = 0$$

$$b = a^+ - \beta^+$$

$L_2$  und  $H$ : EF

EF zu  $b$  &  $a$

unterschiedlich

$$[a, b] = (\bar{z} + \partial_{\bar{z}})(z + \partial_z) - (z + \partial_z)(\bar{z} + \partial_{\bar{z}})$$

$$= \bar{z} z - z \bar{z} + \partial_{\bar{z}} z - \partial_z \bar{z}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$$[a, b^+] = (\bar{z} + \partial_{\bar{z}})(\bar{z} + \partial_z) - (\bar{z} + \partial_z)(\bar{z} + \partial_{\bar{z}})$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$\beta^+ = (\alpha - \beta)$$

$$= \bar{z} - \partial_{\bar{z}}$$

$$b = (\bar{z} - \beta^+)$$

$$= (z + \partial_z)$$

↑ Prüfen

$$\rightarrow [a^+ a, b^+ b] = 0 \rightarrow \text{EF von } L_2 \rightarrow \text{EF von } H$$

vollig analog Harm Oszillator

Separation nach  $x/y$

$$\int e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$$

(5)

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \left( 2 e^{-x} = 4\pi (-e^r) \right)$$

$$= 2\pi$$

6Z bestimmen

→ DGL:

$$\frac{dx}{2} = - \frac{d\bar{x}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = - \frac{\bar{x}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\bar{x}}{2} \right)$$

↑ 5

$$\frac{x^2}{4} = - \ln(4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{4}} = \psi(x)$$

$$\boxed{\psi = \psi(x)\psi(y)}$$

$$\int e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$$

$$= 2\pi \rightarrow$$

$$\frac{x^2}{2} = -2y$$

?

# Exzitonen im Magnetfeld

20107/17

Ziel: Hamiltonian vereinfachen durch Basistrafo, da nun + Coulomb-WW

Ausgangspunkt:  $\mathcal{H}^{MX} = \sum_{\alpha=e,h} \frac{1}{2m_\alpha} (\hat{p}_\alpha - e_\alpha \hat{A})^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}_h|}$  Magnetfeld-Hamiltonian

Problem: Elektronen + Loch Orte/Ableitung + Relativkoor. in C-WW  
 → unitäre Trafo → bessere Basis →  $\mathcal{H}$  wird einfacher

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_e - \vec{r}_h & \Rightarrow U = e^{+\frac{i}{\hbar} \frac{e}{2} \vec{B} \cdot (\vec{R} \times \vec{r})} & \langle 41n14 \rangle = \langle 41u^+ u n u^+ u | 4 \rangle, \quad u | 4 \rangle = | 4' \rangle \\ \vec{R} &= \frac{\vec{r}_e + \vec{r}_h}{2} & U^+ = U^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{2} \vec{B} \cdot (\vec{R} \times \vec{r})} & = \langle 4' | \underbrace{u n u^+}_{U^+} | 4' \rangle \\ & & & \mathcal{H}' = U \mathcal{H} U^+ \text{ Erwartungswerte bleiben identisch} \end{aligned}$$

gesucht ist nur  $\mathcal{H}'$ , dazu schrittweise:

$$1) \vec{R} \times \vec{r} = \frac{1}{2} ((\vec{r}_e + \vec{r}_h) \times (\vec{r}_e - \vec{r}_h)) = \frac{1}{2} [\vec{r}_h \times \vec{r}_e - \vec{r}_e \times \vec{r}_h] = \vec{r}_h \times \vec{r}_e$$

$$2) \hat{p}_{e_h}^* U^+ = (\hat{p}_e U^+) + U^* \hat{p}_{e_h}, \text{ wobei } \hat{p} U^+ = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}_h} e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{2} \vec{B} \cdot (\vec{R} \times \vec{r})} \stackrel{!}{=} \begin{cases} +\frac{e}{2} (\vec{r}_h \times \vec{B}) U^+ \\ -\frac{e}{2} (\vec{r}_e \times \vec{B}) U^+ \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{R} \times \vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}_h \times \vec{r}_e) = \begin{cases} \vec{r}_e (\vec{B} \times \vec{r}_h) \\ \vec{r}_h (\vec{r}_e \times \vec{B}) \end{cases}$$

$$= \pm \frac{e}{2} (\vec{r}_h \times \vec{B}) U^+ + U^* \hat{p}_{e_h}$$

$$3) U(\dots)^2 U^+ = \underbrace{U(\dots)}_{\text{genug zu wissen/kennen}} U^* U(\dots) U^+$$

$$U(\hat{p}_{e_h} \pm \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r})) U^+ = U \left[ \hat{p}_{e_h} U^+ \pm \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) U^+ \right]$$

$$= U \left[ \pm \frac{e}{2} (\vec{r}_h \times \vec{B}) U^+ + U^* \hat{p}_{e_h} \pm U^* \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}_h) \right]$$

$$= \hat{p}_{e_h} + \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$$

also  $\boxed{\mathcal{H}'^{MX} = \frac{1}{2m_e} \left[ \hat{p}_e + \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right]^2 + \frac{1}{2m_h} \left[ \hat{p}_h + \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right]^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}}$  nur noch Relativkoordinaten!

Komplett umgeschrieben  
 (Kurz gefasst)

4) Impulse umschreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_h} &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_h} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}_h}{\partial \vec{r}_h} = \pm \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \pm \vec{p} + \underbrace{\frac{1}{2} \vec{P}}_{\text{vernachlässigbar klein}} \end{aligned}$$

damit  $\mathcal{H}^{MX} = \mathcal{H}_r^e + \mathcal{H}_r^h - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|}$

$$\mathcal{H}_r^e = \frac{1}{2m_e} \left( \vec{p} + \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right)^2; \quad \mathcal{H}_r^h = \frac{1}{2m_h} \left( \vec{p} - \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right)^2$$

Ziel: Eigenwertgleichung konstruieren zu  $\mathcal{H}^{Mx}$

Ausgangspunkt: - optische Übergänge nur bei  $n=n'$ , also für  $\mathcal{H}_{\text{ex}}^m \phi_{nn'} = E_{n'n'} \phi_{nn'}$

- Entwicklung dann gerechtfertigt, wenn Anteil  $qA \gg \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ , also die Coulombwechselwirkung gg. dem Magnettfeldanteil gering ist  
(kurz: starke Felder)

$$\text{gefordert: } \mathcal{H}^{Mx} \phi_a = E_a \phi_a, \text{ mit } \mathcal{H}^{Mx} = \underbrace{\mathcal{H}_r^c + \mathcal{H}_r^h}_{\text{EW blieben identisch!}} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \mathcal{H}_r^m = \frac{1}{2me_h} \left( \vec{p} \pm \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right)^2$$

$$\text{jetzt } \phi_a = \sum_n c_{an} \phi_{nn}$$

dann Matrixelemente:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{n'n'} | \mathcal{H}^{Mx} | \phi_a \rangle &= \langle \phi_{n'n'} | \sum_n c_{an} \left( \mathcal{H}_r^c + \mathcal{H}_r^h - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \phi_{nn} \rangle \\ &= \sum_n c_{an} \left[ \langle \phi_{n'n'} | \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} | \phi_{nn} \rangle \right] \\ &= \sum_n c_{an} \left[ \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2}) \langle \phi_{n'n'} | \phi_{nn} \rangle + \langle \phi_{n'n'} | -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} | \phi_{nn} \rangle \right] \\ &= \sum_n c_{an} \left[ \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2}) \delta_{n'n'} + \int dV \phi_{n'n'} \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \phi_{nn} \right] \\ &\stackrel{!}{=} \langle \phi_{n'n'} | E_a \phi_a \rangle = \langle \phi_{n'n'} | \sum_n c_{an} E_a \phi_{nn} \rangle = \sum_n c_{an} E_a \delta_{n'n'} = c_{an} E_a \end{aligned}$$

also Eigenwertgleichung:

$$\boxed{\sum_n \left[ \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2}) \delta_{n'n'} + \int dV \phi_{n'n'} \left( -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \phi_{nn} \right] c_{an} = E_a c_{an}}$$

Eigenwertgleichung  
in bekannter Basis  
 $\phi_{nn}$  für starke Magnet-  
felder

## b) Exzitonen im Magnetfeld

- erweitern H um Coulomb-Wk zw. Elektronen u. Löchern

$$H^{MX} = \sum_{\alpha=e,h} \frac{1}{2m_\alpha} (\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A})^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}_h|}$$

$$= \sum_{\alpha=e,h} \frac{1}{2m_\alpha} (\vec{p}_\alpha - \frac{e_\alpha}{2} \vec{B} \times \vec{r}_\alpha)^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}_h|}$$

Schrödinger-Gl. (Von g.f. Maye)

$$\begin{aligned} H^{MX} &\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \\ &= E \Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_e &= -e \\ e_h &= e \end{aligned}$$

- unitäre Transf:

$$U = e^{+\frac{i}{\hbar} \frac{e}{2} \vec{B} \cdot (\vec{R} \times \vec{r})}$$

Relativ

$$\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_h$$

$$U^+ = e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{2} \vec{B} \cdot (\vec{R} \times \vec{r})}$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_e + \vec{r}_h}{2}$$

allg. gilt für unit. Transf mit  $U^\dagger U = 1$

$$\langle \Psi' \rangle = U \langle \Psi \rangle \quad \langle A \rangle_{\Psi'} = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

$$\langle \Psi' | = \langle \Psi | U^+$$

$$= \underbrace{\langle \Psi | U^+}_{= \langle \Psi' |} \underbrace{U A U^+}_{= \langle \Psi | A | \Psi \rangle}$$

$$= \langle \Psi' | A | \Psi \rangle$$

$$\Rightarrow A' = U A U^+$$

$$= \langle A \rangle_{\Psi'}$$

$$\Psi(\vec{r}) = U \Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h)$$

$$H^{MX} = U H^{MX} U^+$$

$$1) \vec{R} \times \vec{r} = \frac{1}{2} (\vec{r}_e + \vec{r}_h) \times (\vec{r}_e - \vec{r}_h)$$

$$\text{da } (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\text{und } \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{r}_h \times \vec{r}_e - \vec{r}_e \times \vec{r}_h)$$

$$= - \underbrace{\vec{r}_e \times \vec{r}_h}$$

$$2) \vec{p}_e = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}_e} \quad \vec{p}_e U^+ f = -i\hbar \frac{\partial U^+}{\partial \vec{r}_e} f$$

$$\underbrace{-i\hbar \frac{\partial U^+}{\partial \vec{r}_e} f}_{+ U^+ \vec{p}_e f \quad ①}$$

mit zykl. Vertauschung im Spatpr  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c})$

$$(\vec{R} \times \vec{r}) \cdot \vec{B} = - \underbrace{(\vec{r}_e \times \vec{r}_h)}_{\vec{B}} \cdot \vec{B}$$

$$= - \underbrace{(\vec{r}_h \times \vec{B})}_{\vec{B}} \cdot \vec{r}_e$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_e \times \vec{B})}_{\vec{B}} \cdot \vec{r}_h$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}_e} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{e}{2} \vec{B} \cdot (\vec{R} \times \vec{r})} \quad ②$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}_e} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{e}{2} \vec{r}_e \cdot (\vec{r}_h \times \vec{B})}$$

$$= \pm \frac{e}{2} (\vec{r}_e \times \vec{B}) U^+$$

$$\pm \frac{e}{2} [(\vec{r}_h \times \vec{B}) + (\vec{B} \times \vec{r}_h)]$$

$$= \pm \frac{e}{2} [\vec{B} \times (\vec{r}_e - \vec{r}_h)] \quad ③$$

②

$$= \pm \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \quad ④$$

$$(\vec{p}_e \pm \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{r}_e) U^+ = U \vec{p}_e + \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) U^+ = \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$$

$$U (\vec{p}_e \pm \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{r}_e) U^+ = \vec{p}_e + \frac{e}{2} (\vec{B} \times \vec{r})$$

$$[\vec{B} \times \vec{r}, U^+] = 0$$

) deshalb

$$U^+ \text{ vertauscht mit } \vec{B} \times \vec{r}$$

da  $U^+$  selbst nur Driftp. enth. ( $\vec{B}$  ist kein Operator)

$$3) H_r^{mx} = \mu H^{mx} \mu^+$$

$$= \mu \frac{1}{2m_e} (\vec{P}_e + \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{r}_e)^2 \mu^+ + \mu \frac{1}{2m_h} (\vec{P}_h - \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{r}_h)^2 \mu^- - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|}$$

$$= \frac{1}{2m_e} (\vec{P}_e + \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{r})^2 + \frac{1}{2m_h} (\vec{P}_h + \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{r})^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|}$$

führen Relativ- und Schwerpunktimpulse ein (wie bereits für Ort)

restauchen nur noch Relativate auf!

$$4) \frac{\partial}{\partial \vec{r}_e} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_e} + \frac{\partial}{\partial \vec{R}} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{r}_e} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_h} = - \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{R}}$$

$$\vec{P}_e = \vec{P} + \frac{1}{2} \vec{P}$$

$$\vec{P}_h = -\vec{P} + \frac{1}{2} \vec{P}$$

vernachl. Schwerpunktimpuls:  $\vec{P} = 0$

$\Rightarrow$  Hamiltonian, der nur noch Relativbewegung enthält:

$$H_r^{mx} = H_r^e + H_r^h - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|}$$

$$H_r^e = \frac{1}{2m_e} (\vec{P} + \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{r})^2$$

$$H_r^h = \frac{1}{2m_h} (\vec{P} - \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{r})^2$$

- keine Coulomb-WW (zweidim. e-h-Plasma im senkr. Magnetfeld)

$$H_r = H_r^e + H_r^h$$

$$H_r^e \phi_{nn'}^e = E_n^e \phi_{nn'}^e$$

$$H_r^h \phi_{nn'}^h = E_{n'}^h \phi_{nn'}^h$$

$$E_n^e = \frac{\hbar^2}{m_e \ell^2} (n + \frac{1}{2})$$

$$E_{n'}^h = \frac{\hbar^2}{m_h \ell^2} (n' + \frac{1}{2})$$

$$H_r \phi_{nn'}^o = E_n^o \phi_{nn'}^o$$

$$\phi_{nn'}^o = \phi_{nn'}^e \cdot \phi_{nn'}^h$$

$$E_{nn'} = E_n^e + E_{n'}^h \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h}$$

Warum?

$$E_{nn'} = \frac{\hbar^2}{\mu \ell^2} (n + \frac{1}{2}) = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$$

(opt. Übergänge für  $n=n'$ ) siehe hinten (und ...)

• entwickeln EF zu  $H_r^{\text{mx}}$  nach EF zu  $H_r$  (ohne Coul.-WW)

$$H_r^{\text{mx}} \phi_\alpha(\vec{q}) = E_\alpha \phi_\alpha(\vec{q}) \quad \leftarrow \text{Fordern wir}$$

$$\phi_\alpha(\vec{q}) = \sum_n c_{n\alpha} \phi_{nn}(\vec{q}) \quad \leftarrow \text{unsere Darstellung}$$

$$H_r^{\text{mx}} \phi_\alpha(\vec{q}) = \sum_n c_{n\alpha} \left[ \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar q} \right] \phi_{nn}(\vec{q}) = E_\alpha \sum_n c_{n\alpha} \phi_{nn}(\vec{q})$$

$$\underbrace{\int d^3q \phi_{nn}^*(\vec{q}) H_r^{\text{mx}} \phi_\alpha(\vec{q})}_{\substack{\text{von links Norm/} \\ \text{Skalarprodukt}}} = \sum_n c_{n\alpha} \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) \delta_{nn} - \underbrace{\left( \int d^3q \phi_{nn}^*(\vec{q}) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar q} \phi_{nn}(\vec{q}) \right)}_{= E_\alpha \sum_n c_{n\alpha} \delta_{nn}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{hieraus Bestimmungsgl} \\ \text{für Energien } E_\alpha \end{array}$$

dimensionslose Größen:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} = E_B \quad \frac{\hbar^2}{2\mu l^2} = \frac{\hbar \omega_c}{2} = \frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} \frac{a_0^2}{l^2} = E_B \frac{a_0^2}{l^2}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2a_0 E_B \quad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar q} = \frac{2E_B}{q} \frac{a_0}{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\hbar \omega_c}{2E_B} = \frac{a_0^2}{l^2} = \lambda}$$

$$\sum_n \left[ \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) \delta_{nn} - \left( \int d^3q \phi_{nn}^*(\vec{q}) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar q} \phi_{nn}(\vec{q}) \right) c_{n\alpha} \right] c_{n\alpha} = E_\alpha c_{n\alpha}$$

dividieren durch  $E_B$

$$\sum_n \underbrace{\left[ 2\lambda (n + \frac{1}{2}) \delta_{nn} - \left( \int d^3q \phi_{nn}^*(\vec{q}) \frac{2\sqrt{\lambda}}{l} \phi_{nn}(\vec{q}) \right) c_{n\alpha} \right]}_{V_{nn}} c_{n\alpha} = E_\alpha c_{n\alpha}$$

$$\sum_n \left[ \lambda (2n + 1) \delta_{nn} - V_{nn} \right] c_{n\alpha} = E_\alpha c_{n\alpha}$$

Eigenwertgleichung