

Institut für theoretische Physik

Bachelorarbeit

Untersuchung der radiativen Wechselwirkung und nicht-resonanten Kopplung von N Quantenpunkten in einer Mikrokavität

Theoretical investigation of the radiative interaction and
non-resonant coupling of N quantum dots in a microcavity

vorgelegt von

Christian Renk

Erstgutachter: Prof. Dr. Frank Jahnke
Zweitgutachter: Prof. Dr. Thomas Frauenheim
Studiengang: Bachelorstudiengang Physik
vorgelegt am: 10.10.2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Quantisierung der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie . . .	3
2.2	Modell eines Quantenpunktensembles	6
2.3	Struktur des Hamiltonoperators	7
2.4	Wechselwirkung mit einem Reservoir	10
2.5	Offenes Quantenpunktensemble	12
2.6	Eigenschaften des quantisierten Lichtfeldes	15
2.7	Bewegungsgleichungen von Erwartungswerten	17
3	Numerische Ergebnisse	21
3.1	Getriebenes Jaynes-Cummings-Modell mit Verlustmechanismen . .	22
3.2	Getriebenes Quantenpunktensemble	25
3.3	Modell von Hintergrundemittern	30
4	Zusammenfassung	33
5	Danksagung	35
	Literatur	37

1 Einleitung

In Anbetracht der heutigen technischen Möglichkeiten Quantenpunkte herzustellen und zu kontrollieren, erfahren sie unter anderem im Rahmen der Quanteninformations- und Lasertechnologie sowie in der Grundlagenforschung hinsichtlich der Quantenelektrodynamik in einer Kavität besonderes Interesse. Sie stellen dabei einen dreidimensionalen räumlichen Einschluss für Ladungsträger dar und weisen somit ähnlich zur energetischen Struktur von Atomen ein diskretes Energiespektrum auf. Dergestalt werden Quantenpunkte häufig auch als künstliche Atome bezeichnet.

Neben der jüngst experimentell nachgewiesenen langreichweitigen Kopplung von selbstorganisierten Quantenpunkten [28, 14], geben unerwartet niedrige Laserschwelldwerte sowie die nicht resonante Ankopplung von Quantenpunkten an eine Kavitätsmode [17, 18, 19, 29] Anlass, die radiative Wechselwirkung zwischen solchen bezüglich einer Mikrokavität theoretisch zu untersuchen. Dies ist Ziel dieser Arbeit, wobei hier nicht auf die Superradianz eingegangen werden soll.

Vorgehen

Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich die optisch aktiven, mit der Kavitätsmode nahezu in Resonanz stehenden Quantenpunktniveaus als Zwei-Niveau-System beschrieben, gleichwohl die theoretische Modellierung mit Hilfe von Mehr-Niveau-Systemen der festkörperphysikalischen Struktur eines Quantenpunkts gerechter werden würde. Weiterer Vorteil neben der Einfachheit der Darstellung ist, dass die das System beschreibende Dichtematrix bzw. deren Zeitentwicklung direkt numerisch berechenbar ist.

In Kapitel 2 wird, nach einer Einführung der Grundlagen zur quantentheoretischen Beschreibung des Lichtfeldes, das dieser Arbeit zugrundeliegende Modell erarbeitet und dessen Abweichungen von der physikalischen Realität eines Quantenpunkts stets diskutiert. Des Weiteren wird der Dichtematrixformalismus dargestellt und damit im Zusammenhang die Wechselwirkung des Systems mit seiner Umgebung beschrieben sowie der Begriff der Photonenstatistik erläutert.

Das 3. Kapitel widmet sich den numerischen Ergebnissen hinsichtlich eines einzelnen sowie eines Ensembles von Zwei-Niveau-Systemen. Abschließend wird ein Vergleich zwischen dem Modell dieser Arbeit und einer häufig verwendeten phänomenologischen Beschreibung angestellt.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird das theoretische Modell der eben zuvor beschriebenen physikalischen Anordnung entwickelt. Dazu werden die Grundlagen der Feldquantisierung dargestellt sowie explizit einfließende Annahmen erläutert. Der Untersuchung des isolierten Systems folgend, wird das Konzept des Dichtematrixformalismus eingeführt und hierauf basierend die Beschreibung dissipativer Einflüsse auf ein nichtisoliertes quantenmechanisches System betrachtet. Abschließend werden Begriffe zur Analyse des quantisierten elektromagnetischen Feldes wie z.B. die Photonenzustandstatistik dargelegt, anhand derer im folgenden Kapitel numerische Resultate interpretiert werden.

2.1 Quantisierung der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie

Ausgangspunkt einer quantentheoretischen Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung ist dessen Darstellung im klassischen Hamiltonformalismus. In Anbetracht der räumlichen Kontinuität und den damit verbundenen überabzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden des klassischen elektromagnetischen Feldes ist es zunächst notwendig den Hamiltonformalismus bzgl. mehrerer unabhängiger Variablen zu erweitern, indem eine sog. *Lagrangedichte* \mathcal{L} eingeführt wird, deren Raumintegral die zugehörige Lagrange-Funktion darstellt. Das Hamiltonsche Prinzip bzgl. gewisser Randbedingungen¹ angewandt auf das Wirkungsfunktional der Felder führt analog dem Fall einer unabhängigen Variable mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen zu den entsprechenden Bewegungsgleichungen.

Die Lagrangedichte der Elektrodynamik² ist eine Funktion der elektromagnetischen Potentiale $\phi(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, die über die Definitionen

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \partial_t \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

derart mit den Observablen verbunden sind, dass die homogenen Maxwell-Gleichungen per definitionem erfüllt sind. Um die dynamische, nicht-relativistische Wirkung N geladener Teilchen ergänzt, lautet die Lagrange-Funktion unter Ver-

¹Aus physikalischen Gründen ist zu fordern, dass $\phi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $\mathbf{A} \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

²Für eine Ableitung sei auf [26] verwiesen.

nachlässigung des magnetischen Moments³ [25]

$$L = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} (\partial_t \mathbf{q}_j)^2 + \int ((\mathbf{J}, \mathbf{A}) - \rho\phi) d^3x + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2) d^3x . \quad (2.1)$$

Zur vollständigen Charakterisierung des gekoppelten Systems genügt die Angabe der Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen sowie der transversalen Feldanteile, da das magnetische Feld schließlich stets transversal und der longitudinale Anteil des elektrischen Feldes durch die inhomogene Maxwellgleichung $\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$ mit den Orten der Ladungen verknüpft ist. Mittels der Coulomb-Eichung ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$) lassen sich die longitudinalen Feldanteile in (2.1) unter Berücksichtigung der Randbedingungen beseitigen [27, 30]. Identifikation der konjugierten Impulse bzw. Impulsdichte bzgl. der Feldkoordinaten

$$\mathbf{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = m_j \partial_t \mathbf{q}_j + Q_j \mathbf{A} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\Pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}} = \epsilon_0 \partial_t \mathbf{A} = -\epsilon_0 \mathbf{E}_\perp$$

führt zur folgenden Hamiltonfunktion transversaler Felder

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m_j} (\mathbf{p}_j - Q_j \mathbf{A})^2 + H_{Coulomb} + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{\Pi}^2 + c^2 (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2) d^3x , \quad (2.2)$$

wobei Q_j die jeweilige Teilchenladung und $H_{Coulomb}$ deren instantane Coulomb-Wechselwirkung bezeichnet.

Dem Korrespondenzprinzip nach, vollzieht sich der Übergang von der klassischen zur quantentheoretischen Beschreibung mit der Ersetzung der kanonischen Variablen durch selbstadjungierte, nicht-kommutierende Operatoren dergestalt, dass

$$\mathbf{q}, \mathbf{p} \longmapsto \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}} \quad \text{mit} \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \mathbb{1}$$

bzw. die explizit zeitabhängigen Feldvariablen \mathbf{A} und $\mathbf{\Pi}$ betreffend

$$\mathbf{A}, \mathbf{\Pi} \longmapsto \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{\Pi}} \quad \text{mit} \quad [\hat{A}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_j(\mathbf{y}, t)] = i\hbar \delta_{ij}^\perp(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbb{1} . \quad (2.3)$$

Hierbei gewährleistet die (dyadische) transversale Deltadistribution $\delta_{ij}^\perp(\mathbf{x})$, dass bedingt durch die Coulomb-Eichung die Ortsabhängigkeit der Feldvariablen stets transversaler Natur ist.

Im Folgenden sei das Schrödingerbild bemüht, d.h. die Zeitabhängigkeit wird vollständig von den Zuständen getragen. Da die Zeitentwicklung durch einen unitären Operator gegeben ist, bleibt der Kommutator der kanonischen Feldvariablen $\hat{\mathbf{A}}|_{t=0}$ und $\hat{\mathbf{\Pi}}|_{t=0}$ stets erhalten.

³Man spricht hier von der sog. *minimalen Kopplung*.

Im Hinblick auf den Einschluss des Lichtfeldes in einer Kavität $V \subset \mathbb{R}^3$ und der dadurch bedingten Diskretisierung der Frequenzen ist es zweckmäßig, die kanonischen Variablen des elektromagnetischen Feldes in Normalmoden⁴ $\mathbf{u}_{\mathbf{k},\mu}$ zu entwickeln:

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\mathbf{k},\mu} \hat{q}_{\mathbf{k},\mu} \mathbf{u}_{\mathbf{k},\mu}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{\Pi}} = \sqrt{\epsilon_0} \sum_{\mathbf{k},\mu} \hat{p}_{\mathbf{k},\mu} \mathbf{u}_{\mathbf{k},\mu}(\mathbf{x}) , \quad (2.4)$$

wobei $\mu = 1, 2$ die möglichen (orthonormalen) Polarisierungen abzählt. Die Menge der nicht-selbstadjungierten Operatoren $\{\hat{q}_{\mathbf{k},\mu}, \hat{p}_{\mathbf{k},\mu}\}$ erfüllen kanonische Vertauschungsrelationen

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},\mu}, \hat{p}_{\mathbf{k}',\mu'}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\mu\mu'} \mathbb{1} \quad \text{und} \quad [\hat{q}_{\mathbf{k},\mu}, \hat{q}_{\mathbf{k}',\mu'}] = [\hat{p}_{\mathbf{k},\mu}, \hat{p}_{\mathbf{k}',\mu'}] = 0 ,$$

weshalb der resultierende Anteil des Strahlungsfeldes (letzter Term in (2.2)) als „unendliche“ Summe harmonischer Oszillatoren dargestellt werden kann:

$$\hat{H}_{Rad} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\mu} \hat{p}_{\mathbf{k},\mu}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \hat{q}_{\mathbf{k},\mu}^2 . \quad (2.5)$$

Anhand (2.5) ergibt sich aus (2.2) folgender die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie beschreibender Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2m_j} (\hat{\mathbf{p}}_j - Q_j \hat{\mathbf{A}})^2 + \hat{H}_{Coulomb} + \sum_{\mathbf{k},\mu} \hbar \omega_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k},\mu}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\mu} + \frac{1}{2} \mathbb{1}) , \quad (2.6)$$

mit den Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren der üblichen Operatoralgebra des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k},\mu}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k},\mu}^\dagger - i\hat{p}_{\mathbf{k},\mu} \right) \quad \text{bzw.} \quad \hat{a}_{\mathbf{k},\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k},\mu} + i\hat{p}_{\mathbf{k},\mu}^\dagger \right) , \\ \hat{a}_{-\mathbf{k},\mu}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k},\mu} - i\hat{p}_{\mathbf{k},\mu}^\dagger \right) \quad \text{bzw.} \quad \hat{a}_{-\mathbf{k},\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k},\mu}^\dagger + i\hat{p}_{\mathbf{k},\mu} \right) , \end{aligned}$$

die offenbar folgenden Kommutatoren genügen:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\mu}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}',\mu'}^\dagger] = [\hat{a}_{\mathbf{k},\mu}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\mu'}] = 0 \quad \text{und} \quad [\hat{a}_{\mathbf{k},\mu}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\mu'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\mu\mu'} \mathbb{1} . \quad (2.7)$$

Zusammenfassend ist festzustellen, dass das gekoppelte System aus Licht und Materie quantenphysikalisch über einen Hamiltonoperator zu beschreiben ist, der additiv in die drei Komponenten $\hat{H}_{Teilchen}$, \hat{H}_{Rad} und \hat{H}_W zerfällt, wobei erstere auf dem Hilbertraum des jeweiligen Teilsystems $\mathcal{H}_{Teilchen}$ bzw. \mathcal{H}_{Rad} operieren. Letzterer stellt die Wechselwirkung dar (in der Coulombbeziehung gilt $[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{A}}] = 2(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{A}})$)

$$\hat{H}_W = - \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{m_j} (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{A}}) + \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2m_j} (\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}})$$

und wirkt demzufolge auf dem Zustandsraum des Gesamtsystems gegeben durch das Tensorprodukt der Teilsysteme.

⁴Basislösungen der Helmholtzgleichung

2.2 Modell eines Quantenpunktensembles

Zur Vereinfachung des Ausdrucks (2.6) für den Hamiltonoperator des Gesamtsystems werden vor dem Hintergrund der zu beschreibenden physikalischen Situation einige (in der Literatur durchaus übliche) Annahmen getroffen.

Obwohl Quantenpunkte (QD) einen Durchmesser von einigen wenigen Nanometern aufweisen und somit die Dimension von Atomen um ein bis zwei Größenordnungen übertreffen, lässt sich hinsichtlich optischer Wellenlängen (mehrere 100nm) die Ortsabhängigkeit des elektromagnetischen Potentials im Bezug auf die Ausdehnung der QDs vernachlässigen. Mittels der unitären Transformation

$$\hat{U}_{dip} = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N Q_j (\hat{\mathbf{x}}_j, \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_j)) \right)$$

und der Näherung $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \approx \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_j)$ in (2.6) lässt sich der Hamiltonoperator⁵ in die sog. *Dipol-Approximation* überführen [3]:

$$\hat{H} = \hat{H}_{Teilchen} + \hat{H}_{Rad} + \hat{H}_{Dipol} + \hat{H}_{Int} .$$

Der erste Term fasst die kinetische sowie die Coulombenergie der jeweiligen Teilchen zusammen, hingegen stellen die letzten beiden Terme zum einen die Dipol-Dipol-Wechselwirkung \hat{H}_{Dipol} und zum anderen die Ankopplung \hat{H}_{Int} der elektrischen Dipole an das Strahlungsfeld dar.

Des Weiteren werden die Quantenpunkte im Rahmen der zweiten Quantisierung als Zwei-Niveau-Systeme (ZNS) aufgefasst, d.h. ein QD j besitzt einen Grund- $|g_j\rangle$ und einen angeregten Zustand $|e_j\rangle$, deren Energiedifferenz $\hbar\omega_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$) sei. Diese Vereinfachung beeinflusst die Eigenschaften des Modells im Hinblick auf die experimentelle Situation wesentlich. So besitzt das ZNS eine fermionische Struktur, gleichwohl elektronische Anregungen im Festkörper im Sinne von Elektron-Loch-Paaren weder rein fermionischer, noch rein bosonischer Natur sind [13]. Letzteres Extrem sowie der Vergleich mit festkörperphysikalischen Modellen beschränkt das hier beschriebene Modell prinzipiell auf den Fall geringer Anregungen [8, 32].

Der Zustandsraum eines einzelnen ZNS ist zweidimensional, sodass ein solches mittels der üblichen Spin- $\frac{1}{2}$ -Operatorenalgebra beschrieben werden kann, d.h. mit Hilfe der Operatoren

$$\hat{S}_z^{(j)} = \frac{1}{2} (|e_j\rangle\langle e_j| - |g_j\rangle\langle g_j|) , \quad \hat{S}_+^{(j)} = |e_j\rangle\langle g_j| \quad \text{und} \quad \hat{S}_-^{(j)} = |g_j\rangle\langle e_j| . \quad (2.8)$$

Man beachte, dass die Energieniveaus eines ZNS symmetrisch bzgl. der Referenzenergie $E_0 = 0$ gesetzt wurden. Im Folgenden werden $\hat{S}_{z,\pm}^{(j)}$ synonym zu deren Fortsetzungen auf den Zustandsraum des Gesamtsystems

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{Teilchen} \otimes \mathcal{H}_{Rad} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}_{Teilchen} = \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$$

⁵Unter Verwendung der Modenentwicklung von $\hat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k},\mu} \sqrt{\hbar/(2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})} (\hat{a}_{\mathbf{k},\mu} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})} + \text{h.c.})$.

gebraucht und erfüllen offensichtlich die Kommutatorrelationen

$$[\hat{S}_{z,\pm}^{(i)}, \hat{S}_{z,\pm}^{(j)}] = 0, \quad [\hat{S}_z^{(i)}, \hat{S}_\pm^{(j)}] = \pm \hat{S}_\pm^{(i)} \delta_{ij} \quad \text{und} \quad [\hat{S}_+^{(i)}, \hat{S}_-^{(j)}] = 2\hat{S}_z^{(i)} \delta_{ij}. \quad (2.9)$$

Der Einschluss des Lichtfeldes in einer Mikrokavität führt, wie bereits erwähnt, zu einer diskreten Modenstruktur. Die Moden sind überdies bedingt durch die geringen Abmessungen der Kavität dergestalt separiert, dass im Weiteren lediglich eine Mode explizit berücksichtigt wird, welche mit den Übergangsfrequenzen der QDs nahezu in Resonanz ist. Die übrigen Moden tragen zur Dissipation des Systems bei (siehe Abschnitt 2.4).

Alsdann nimmt der resultierende Hamiltonoperator in der Dipolnäherung (2.2) unter Vernachlässigung der Dipol-Dipol-Wechselwirkung sowie der Vakuumsenergie des elektromagnetischen Feldes folgende Gestalt an:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \hbar \omega_j \hat{S}_z^{(j)} + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N g_j \hat{S}_-^{(j)} \hat{a}^\dagger + g_j^* \hat{S}_+^{(j)} \hat{a}, \quad (2.10)$$

mit der Exziton-Photon-Kopplungskonstanten

$$g_j = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V}} \exp(i(\mathbf{k}, \mathbf{x}_j)) \cdot (\mathbf{d}_{eg}, \epsilon). \quad (2.11)$$

Hierbei wurde der Dipoloperator $\hat{\mathbf{d}}^{(j)}$, dessen Hauptdiagonalelemente identisch verschwinden⁶, mittels der ZNS-Operatoren wie folgt dargestellt:

$$\hat{\mathbf{d}}^{(j)} = \mathbf{d}_{eg} \hat{S}_+^{(j)} + \mathbf{d}_{eg}^* \hat{S}_-^{(j)}.$$

Zusätzlich wohnt (2.10) die sog. *Rotating Wave Approximation* (RWA) inne, welche sich im Wechselwirkungsbild schnell ändernde Operatorprodukte nicht berücksichtigt [16]. Demzufolge tragen in diesem Modell lediglich die in erster Ordnung energieerhaltenden Anteile von \hat{H}_{Int} zur radiativen Wechselwirkung bei, virtuelle Prozesse hingegen nicht. Zu beachten ist allerdings, dass sich diese Näherung auf den Fall der ungefähren Resonanz zwischen Kavitätsmode ω und QD-Übergangsfrequenz ω_j bezieht, also $\omega_j \gg \Delta_j$ mit der Verstimmung $\Delta_j = \omega_j - \omega$ zwischen diesen. In Anbetracht von Exziton-Photon-Kopplungskonstanten in QDs im Bereich einiger $10 \mu\text{eV}$ [11, 18, 20, 23] und Halbleiter-Bandlücken von $\approx 1 \text{eV}$ erscheint dies bzgl. der im Rahmen dieser Arbeit erzielten Verstimmungen von bis zu $\pm 10g$ als erfüllt.

2.3 Struktur des Hamiltonoperators

In der *Rotating Wave Approximation* ist die Anregungszahl \hat{M} eine Erhaltungsgröße des isolierten Systems, d.h.

$$[\hat{M}, \hat{H}] = 0 \quad \text{mit} \quad \hat{M} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \hat{S}_z^{(j)} + \frac{N}{2} \mathbb{1}.$$

⁶In der Annahme eindeutiger Parität der Zustände $|g_j\rangle, |e_j\rangle$.

Sämtliche Matrixelemente von \hat{H} bzgl. beliebiger Eigenzustände zu verschiedenen Eigenwerten des Anregungszahloperators verschwinden demzufolge identisch, sodass Übergänge zwischen Zuständen verschiedener Anregungszahl nicht stattfinden. Überdies ist die Matrix des Hamiltonoperators in der Eigenbasis⁷ von \hat{M} blockdiagonal, bedingt durch die Entartung dieser durch die Produktzustände

$$|\{s_j\}, n\rangle \equiv |\{s_j\}\rangle \otimes |n\rangle \in \mathcal{H}$$

gegebenen Eigenzustände. Hierbei bezeichnet $|\{s_j\}\rangle$ einen reinen Tensor aus dem Zustandsraum $\mathcal{H}_{\text{Teilchen}}$ der ZNS. Die Dimension der Blöcke entspricht dabei dem jeweiligen Entartungsgrad des zugehörigen Eigenwerts M in Abhängigkeit von der Anzahl der QDs

$$g_M = \sum_{k=1}^{\min\{M,N\}} \binom{N}{k} \leq 2^N .$$

Zur Bestimmung der nicht verschwindenden Matrixelemente sei im Folgenden die Anregungszahl $M \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest gewählt. Ferner genügt es lediglich eine Komponente \hat{H}'_j zu betrachten, da sich der Hamiltonoperator nach Reskalierung⁸

$$\hat{H} - \hbar\omega(\hat{M} - \frac{N}{2} \mathbb{1}) = \sum_{j=1}^N \hat{H}'_j \quad \text{mit} \quad \hat{H}'_j = \hbar\Delta_j \hat{S}_z^{(j)} + \left(g_j \hat{S}_-^{(j)} \hat{a}^\dagger + h.c.\right) \quad (2.12)$$

aus diesen additiv zusammensetzt. Da \hat{H}'_j lediglich mit den j -ten ZNS wechselwirkt, sind aufgrund der Orthonormiertheit der ZNS-Zustände all diejenigen Elemente stets gleich null, die sich in mindestens zwei solcher Zustände unterscheiden, denn:

$$\begin{aligned} \langle \{s_j\}, n | \hat{H}'_j | \{s'_j\}, n' \rangle &= \prod_{k \neq j} \langle s_k | s'_k \rangle \cdot \left(\hbar\Delta_j \langle s_j | \hat{S}_z^{(j)} | s'_j \rangle \langle n | n' \rangle + \right. \\ &\quad \left. + g_j \sqrt{n' + 1} \langle s_j | \hat{S}_-^{(j)} | s'_j \rangle \langle n | n' + 1 \rangle + h.c. \right) . \end{aligned}$$

Es verbleiben somit die folgenden Matrixelemente, wobei $|\{\dots s_j = g \dots\}\rangle$ den Ket $|\{s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, g, s_{j+1}, \dots, s_N\}\rangle$ bezeichnet, usw.:

$$\begin{aligned} \langle \{\dots s_j = e \dots\}, n | \hat{H}'_j | \{\dots s_j = e \dots\}, n \rangle &= \frac{\hbar\Delta_j}{2} , \\ \langle \{\dots s_j = g \dots\}, n | \hat{H}'_j | \{\dots s_j = g \dots\}, n \rangle &= -\frac{\hbar\Delta_j}{2} , \\ \langle \{\dots s_j = g \dots\}, n + 1 | \hat{H}'_j | \{\dots s_j = e \dots\}, n \rangle &= g_j \sqrt{n + 1} , \\ \langle \{\dots s_j = e \dots\}, n | \hat{H}'_j | \{\dots s_j = g \dots\}, n + 1 \rangle &= g_j^* \sqrt{n + 1} . \end{aligned}$$

⁷Der Anregungszahloperator ist auf \mathcal{H} selbstadjungiert, sodass gemäß des *Spektraltheorems* der Hilbertraum \mathcal{H} gleich der (inneren) direkten Summe der \hat{H} -invarianten Eigenräume von \hat{M} ist.

⁸Dies entspricht einer unitären Transformation in das sich mit der Kreisfrequenz ω bewegende Bezugssystem (*rotating frame*) - siehe Kapitel 3.

Nach (2.12) wechselwirkt jeder Produktzustand mit N solchen Zuständen, die sich um eine QD-Anregung unterscheiden, wie in Abbildung 2.1 für zwei bzw. drei QDs dargestellt ist. Jeder zu einer festen Anregungszahl gehörende Block des Hamiltonoperators besitzt demzufolge pro Zeile $N+1$ nicht verschwindende Matrixelemente, sofern $M \geq N$. Ist die Anregungszahl geringer als die Anzahl der ZNS, so sind die entsprechenden Blöcke Untermatrizen der jeweiligen Dimension.

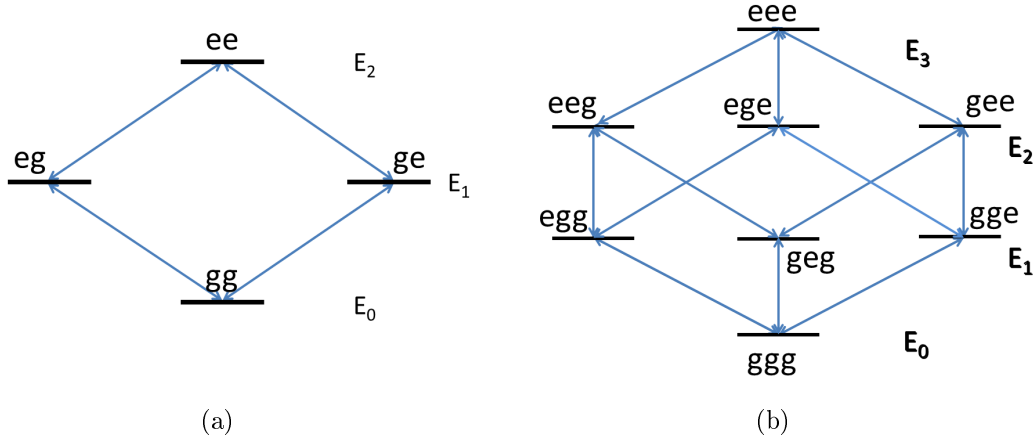


Abb. 2.1: Schematische Darstellung der Kopplung zwischen den Produktzuständen für zwei ZNS (a) bzw. drei ZNS (b) bzgl. beliebiger Anregungszahl $M = n + m \geq N$. Ist $M < N$, so reduziert sich die Kopplung um $N - M$ Ebenen von oben, d.h. von E_N beginnend.

Bedingt durch die Kopplung der Eigenzustände des Anregungszahloperators mit entsprechenden Superpositionszuständen ist es zur Beschreibung der kollektiven Phänomene üblich, in die sog. *Dicke-Basis* überzugehen, welche aus den gemeinsamen Eigenzuständen des Betrags des Gesamtdrehimpuls \hat{S}^2 und dessen z -Komponente \hat{S}_z gebildet wird. Ein echter Vorteil resultiert für identische Systeme (d.h. $(\omega_1, g_1) = (\omega_2, g_2) = \dots = (\omega_N, g_N) = (\Omega, g)$), da in diesem Fall zusätzlich \hat{H} und \hat{S} kommutieren [21, 22, 31]. Die Verschiedenheit der Systeme hingegen führt zur Kopplung symmetrischer und antisymmetrischer Zustände.

Die Diagonalisierung des Hamiltonoperators ist i.A. nicht trivial, allerdings lassen sich im Bereich geringer Anregung $M \in \{0, 1\}$ für ZNS gleicher Übergangsfrequenz ω_a analytische Lösungen des charakteristischen Polynoms unabhängig ihrer Anzahl N angeben. So ist für $M = 1$ ein Eigenwert ϵ_d stets $N - 1$ -fach entartet, indes sind die verbleibenden zwei nicht entarteten Eigenwerte um

$$\pm G_N := \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar}{2} \Delta_{ca}\right)^2 + \sum_{j=1}^N |g_j|^2} \quad \text{mit} \quad \Delta_{ca} = \omega - \omega_a$$

gegenüber diesem verschieden⁹. Darüber hinaus überlappen die zu ϵ_d zugehörigen

⁹Dies folgt mittels Induktion über N aus der oben beschriebenen Gestalt der Blockmatrix.

Eigenzustände nicht mit dem angeregten Zustand der Kavität $|\{g_1, g_2, \dots, g_N\}, 1\rangle$, sodass im Emissionsspektrum lediglich zwei Linien jeweils um $\pm G_N$ zur Kavitätsresonanz $\hbar\omega$ verschoben auftreten (*Rabi Aufspaltung*), sofern die Nullpunktenergie mit dem Grundzustand $|\{g_1, g_2, \dots, g_N\}, 0\rangle$ assoziiert wird. In diesem Sinne werden die nicht zur Emission beitragenden Eigenzustände zu ϵ_d als *nicht leuchtend* bezeichnet (*dark states*).

2.4 Wechselwirkung mit einem Reservoir

Jedes physikalische System (S) unterliegt mehr oder minder dem Einfluss seiner Umgebung (R). Die Komplexität des Gesamtsystems $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$ sowie der Einflüsse auf das System seitens dessen Umgebung lässt lediglich eine statistische Beschreibung zu, welche die Effekte der System-Umgebung-Wechselwirkungsprozesse erfasst. Grundlage hierfür ist der *Dichtematrixformalismus*.

Die Einführung des sog. *statistischen Operators* $\hat{\rho}$ zur Charakterisierung eines Systems

$$\hat{\rho} := \sum_i P(\psi_i) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.13)$$

verallgemeinert insoweit den Ansatz, einen reinen Zustand eines abgeschlossenen Systems mit dem Projektor $\hat{\Pi}_\psi := |\psi\rangle \langle \psi|$ auf den eindimensionalen Unterraum $[\psi] \subset \mathcal{H}$ zu identifizieren, anstatt mittels normierter Repräsentanten¹⁰ $|\psi\rangle$ dieser Äquivalenzklasse $[\psi] \in \mathcal{H} \setminus \mathbb{C}^\times$, als die Superposition (2.13) der Projektoren es vermag, die subjektive Unkenntnis über den Mikrozustand des betrachteten Systems in den Zustandsbegriff einzubeziehen. Der statistische Erwartungswert (Ensemblemittel) einer Observable \hat{O} ist durch

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_i P(\psi_i) \langle \hat{O} \rangle_{\psi_i} = \text{Spur}\{\hat{O}\hat{\rho}\}$$

gegeben, welcher im Falle eines reinen Zustands mit dem quantenmechanischen Erwartungswert übereinstimmt. Hieraus wird deutlich, dass der Dichteoperator sämtliche messbaren Eigenschaften eines Zustandsvektors $|\psi\rangle$ enthält. Offensichtlich ist $\hat{\rho}$ hermitesch ($\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$), positiv semidefinit ($\langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle \geq 0, \forall |\phi\rangle \in \mathcal{H}$) und es gilt $\text{Spur}\{\hat{\rho}\} = 1$, schließlich bezeichnet $0 \leq P(\psi_i) \leq 1$ die Wahrscheinlichkeit¹¹ der Realisierung des Zustandes $|\psi_i\rangle$.

Das Gesamtsystem, wiederum als abgeschlossen betrachtet, führt zur unitären Zeitentwicklung des zugehörigen Dichteoperators im Schrödingerbild

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) ,$$

generiert durch den entsprechenden Hamiltonoperator. Unter Verwendung der zur Schrödingergleichung analogen Zeitableitung von \hat{U} resultiert für die Dynamik des

¹⁰Man beachte, dass diese nicht eindeutig sind, da $S_{\mathbb{C}}(1) \subset [\psi]$.

¹¹Dies bedeutet $\sum_i P(\psi_i) = 1$, wodurch die Definition der Spur bzgl. $\hat{\rho}$ sinnvoll ist.

Dichteoperators eines abgeschlossenen Systems die sog. *Liouville-/von-Neumann-Gleichung*:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] . \quad (2.14)$$

Von eigentlichem Interesse sind System-Observablen $\hat{O}_S := \hat{O} \otimes \mathbb{1}_R$, deren Erwartungswerte vollständig mit Hilfe des System-Dichteoperators

$$\hat{\rho}_S := \text{Spur}\{\hat{\rho}\}_R .$$

berechenbar sind. Hierbei bezeichnet $\text{Spur}\{\cdot\}_R$ die sog. *partielle Spur* bzgl. der Umgebungsfreiheitsgrade, d.h. die Abbildung

$$L(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R) \rightarrow L(\mathcal{H}_S), \quad \text{Spur}\{\hat{O}_S \otimes \hat{O}_R\}_R \mapsto \hat{O}_S \cdot \text{Spur}\{\hat{O}_R\} . \quad (2.15)$$

In Bezug auf eine Basis $\{|\phi_i^{(S)}\rangle\}$ bzw. $\{|\phi_i^{(R)}\rangle\}$ in S bzw. R gilt demzufolge für die Matricelemente von $\hat{\rho}_S$:

$$(\hat{\rho}_S)_{ij} := \sum_k \langle \phi_i^{(S)} | \otimes \langle \phi_k^{(R)} | \hat{\rho} | \phi_j^{(S)} \rangle \otimes | \phi_k^{(R)} \rangle$$

In Anbetracht dessen, dass das System S im Austausch mit der Umgebung steht und dementsprechend kein abgeschlossenes System darstellt, ist die Evolution des System-Dichteoperators i.A. nicht unitär [2].

Im Folgenden wird die Umgebung als ein Reservoir (abzählbar) unendlich vieler harmonischer Oszillatoren begriffen. Dies erscheint insofern sinnvoll, als die QDs zum einen bzw. die Kavitätsmode zum anderen als Subsysteme des QDs-Kavitätsmode-Systems mit jeweiligen Umgebungen solcher Art koppeln (siehe Abschnitt 2.5). Ein Ansatz zur Modellierung der hierdurch entstehenden Dissipationsprozesse sind die sog. *Lindblad-Terme*

$$\mathcal{L}_{\hat{\delta}} \hat{\rho}_S := \frac{\kappa_{\hat{\delta}}}{2} \left([\hat{O}_S, \hat{\rho}_S \hat{O}_S^\dagger] + [\hat{O}_S \hat{\rho}_S, \hat{O}_S^\dagger] \right) , \quad (2.16)$$

welche für beschränkte Operatoren die allgemeine Form markovscher System-Umgebung-Wechselwirkungen darstellen [2]. Es bezeichnet $\kappa_{\hat{\delta}}$ die Rate, mit der die Störung $\mathcal{L}_{\hat{\delta}}$ einhergeht, und \hat{O}_S (\hat{O}_S^\dagger) den damit verbunden Vernichtungsoperator (Erzeugungsoperator). Im Falle unbeschränkter Erzeuger und Vernichter (z.B. \hat{a} und \hat{a}^\dagger bzgl. der Kavitätsmode) lassen sich die spurerhaltenden Lindblad-Terme unter den nachstehenden Annahmen ableiten [2, 16]:

- *Born-Approximation*: Die Kopplung zwischen System und Reservoir sei hinreichend schwach, sodass eine Störungsrechnung (im Wechselwirkungsbild) nach der zweiten Ordnung (erster nichtverschwindende Term) abgebrochen werden kann. Weiter bedeutet dies, dass die Umgebung nicht durch die System-Reservoir-Wechselwirkung beeinflusst wird, der Zustand des Gesamtsystem also annähernd ein Produktzustand darstellt $\hat{\rho}(t) \approx \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_R$. Hierbei bezeichnet $\hat{\rho}_R$ den Ausgangszustand des Reservoirs (Gleichgewichtszustand).

- *Markov-Approximation*: Es wird angenommen, dass die reservoirinternen Wechselwirkungsprozesse wesentlich schneller ablaufen als die Änderung des Systemzustandes. Somit sind System-Umgebungs-Korrelationen vernachlässigbar und die Bewegungsgleichung für $\hat{\rho}_S$ ist lokal zeitabhängig.

2.5 Offenes Quantenpunktensemble

In Bezug auf ein mit einer Kavitätsmode wechselwirkendes Ensemble von Quantenpunkten (2.10) sind verschiedene Dissipationsprozesse zu berücksichtigen. Sowohl die QDs als auch die Kavitätsmode stehen in Wechselwirkung mit jeweiligen Reservoirs. Das hiermit assoziierte Modell ist in Abbildung 2.2 schematisch gezeigt. Im Folgenden wird auf den Systemindex „S“ verzichtet, d.h. $\hat{\rho}$ bezeichnet stets die System-Dichtematrix $\hat{\rho}_S$.

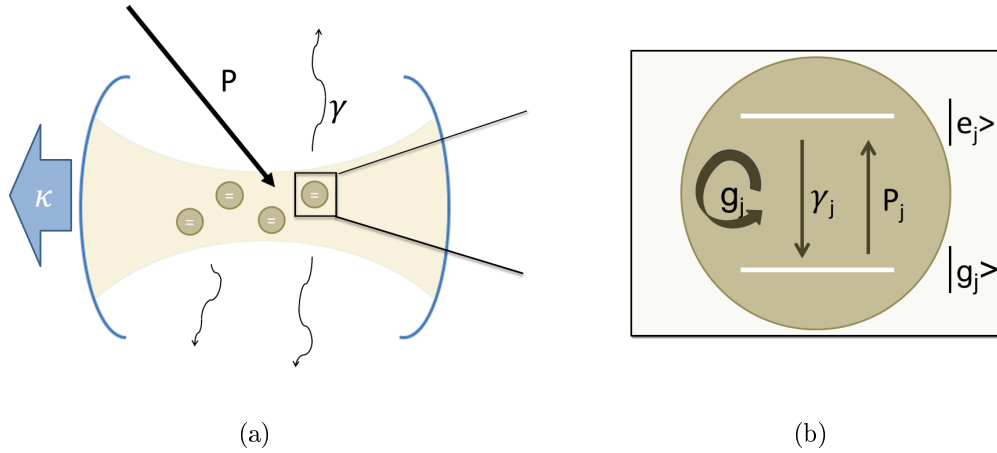


Abb. 2.2: Quantenpunktensemble in einer Kavität. (a) ZNS an eine Kavitätsmode mit der Rate $\tilde{g}_j = g_j/\hbar$ gekoppelt. Mit der Rate P_j werden inkohärent Anregungen erzeugt, welche mit der Rate $\gamma_{nl}^{(j)}$ in andere Kavitätsmoden zerfallen. (b) Skizziertes QD-Modellsystem mit den in (a) dargestellten An- und Abregungsprozessen. Die Kavitätsmode zerfällt zudem mit der Verlustrate κ .

Kavitätsverluste

Bedingt durch die endliche Güte der Kavität wird die Kavitätsmode durch Verluste von Photonen an externe elektromagnetische Feldmoden gedämpft. Die zugehörige Verlustrate sei im Folgenden κ , sodass die Störung mittels der kavitätsphotonenerzeugenden bzw. -vernichtenden Operatoren \hat{a}^\dagger bzw. \hat{a} anhand der Lindblad-Terme

$$\mathcal{L}_{\hat{a}}\hat{\rho} := \frac{\kappa}{2} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}) \quad (2.17)$$

beschrieben wird. Die zeitliche Änderung der Dichtematrixelemente hinsichtlich der Kavitätsverluste ist demzufolge

$$\left. \frac{d}{dt} \langle \{s_j\}, n | \hat{\rho} | \{s'_j\}, n' \rangle \right|_{kav} = \frac{\kappa}{2} \left(2\sqrt{n+1}\sqrt{n'+1} \langle \{s_j\}, n+1 | \hat{\rho} | \{s'_j\}, n'+1 \rangle - (n+n') \langle \{s_j\}, n | \hat{\rho} | \{s'_j\}, n' \rangle \right)$$

Offensichtlich werden die Freiheitsgrade des elektrischen Systems und somit Erwartungswerte von ZNS-Operatoren hierdurch nicht bzw. nicht direkt beeinflusst, da die zeitliche Änderung der QD-Dichtematrixelemente

$$(\hat{\rho}_{QDs})_{\{s_j\}, \{s'_j\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \{s_j\}, n | \hat{\rho} | \{s'_j\}, n \rangle$$

hinsichtlich dieser Störung identisch verschwinden. Hingegen führen die Lindbald-Terme aus (2.17) zum exponentiellen Zerfall der mittleren Photonenzahl in der Kavitätsmode:

$$\left. \frac{d}{dt} \langle \hat{n} \rangle \right|_{kav} = \kappa (\text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}\} - \text{Spur}\{\hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}\}) = -\kappa \langle \hat{n} \rangle .$$

Emission in andere Kavitätsmoden

Die Freiheitsgrade der QDs betreffend bilden unter anderem die in (2.10) nicht explizit berücksichtigten Kavitätsmoden zusammen mit dem Kontinuum an Moden außerhalb der Kavität ein Reservoir, an welches die QDs unabhängig ankoppeln. Die Unabhängigkeit bedeutet, dass ein QD j das Reservoir bzgl. eines QD $i \neq j$ nicht beeinflusst. Die in die Bewegungsgleichung der System-Dichtematrix miteinzubeziehende Störung besitzt folgende Gestalt:

$$\mathcal{L}_{\hat{S}_-} \hat{\rho} := \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_{nl}^{(j)}}{2} \left(2 \hat{S}_-^{(j)} \hat{\rho} \hat{S}_+^{(j)} - \hat{\rho} \hat{S}_+^{(j)} \hat{S}_-^{(j)} - \hat{S}_+^{(j)} \hat{S}_-^{(j)} \hat{\rho} \right) . \quad (2.18)$$

Wie zu erwarten, nimmt diese Störung keinen Einfluss auf photonische Freiheitsgrade, insofern als die Summe über alle möglichen Konfigurationen der QDs bzgl. der Zeitableitungen der System-Dichtematrixelemente

$$\left. \frac{d}{dt} \langle \{s_j\}, n | \hat{\rho} | \{s'_j\}, n' \rangle \right|_{nl} = \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_{nl}^{(k)}}{2} \left(2 \delta(\{s_j\}, g_k) \delta(\{s'_j\}, g_k) \langle \{ \dots s_k = e \dots \}, n | \hat{\rho} | \{ \dots s'_k = e \dots \}, n' \rangle - (\delta(\{s_j\}, e_k) + \delta(\{s'_j\}, e_k)) \langle \{s_j\}, n | \hat{\rho} | \{s'_j\}, n' \rangle \right)$$

gleich null ist. Man beachte nämlich, dass für den Fall $\{s_j\} = \{s'_j\}$ die ersten 2^{N-1} Terme mit $\delta(\{s_j\}, g_k) = 1$ mit denen bzgl. $\delta(\{s_j\}, e_k) = 1$ übereinstimmen

(ebenfalls 2^{N-1} an der Zahl). Hierbei ist $\delta(\{s_j\}, g_k)$ für alle QD-Konfigurationen der Form $\{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, g_k, s_{k+1}, \dots, s_N\}$ gleich eins und sonst null ($s_i \in \{e_i, g_i\}$ für $i \neq k$ beliebig).

Die Wirkung bzgl. der QD-Zustände ist aus den in 2.3 genannten Gründen wesentlich komplexer. Betrachtet man jedoch lediglich die j -te Komponente von (2.18), so ist klar, dass ausschließlich ähnliche Zustände¹² aus zwei Blöcken verschiedener Anregungszahl M und $M+1$ wechselwirken, ohne ein Photon zu erzeugen¹³. Demzufolge wechselwirkt der Grundzustand eines Blocks der Anregungszahl M mit allen Zuständen einfacher ZNS-Anregung des Blocks $M+1$ mit der Rate

$$\sum_{j=1}^N \gamma_{nl}^{(j)}.$$

Umgekehrt entspricht dies der negativen Dissipationsrate des Zustandes vollständig invertierter ZNS.

Zur Einbeziehung weiterer Prozesse, die eine nichtradiative QD-Anregungsverminderung zur Folge haben und die im Modell dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt sind (wie z.B. die Wechselwirkung mit Phononen), stellen die Raten γ_{nl} effektive Raten dar. In Anbetracht der geschilderten Unzulänglichkeiten des ZNS in der Beschreibung der festkörperphysikalischen Struktur eines QD, wird darauf nicht weiter eingegangen. Es sei jedoch angemerkt, dass sämtliche Raten i.A. nicht denen in der mikroskopischen Ableitung erhaltenen (fouriertransformierten) Reservoirkorrelationen entsprechen, sondern an das Experiment angepasst sind.

Inkohärente Anregung

Das stark vereinfachende Modell einzelner QDs als ZNS mit lediglich zwei Zuständen und Konfigurationen hat zur Folge, dass der Anregungsprozess (Pumpprozess) ebenso speziell gewählt ist. In einem QD werden Elektronen und Löcher i.A. wesentlich stärker durch das räumlich einschränkende Potential als durch die gegenseitige Coulombwechselwirkung beeinflusst, jedoch stellt die Anregung eines ZNS aus dem Grund- in den angeregten Zustand eine vollständig korrelierte (gleichzeitige) Elektron-Loch-Paar-Erzeugung dar [6, 8]. Der Pumpprozess ist also formal zum nichtradiativen Zerfall invers, sodass der diesbezügliche Liouville-Operator durch Vertauschen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sowie Ersetzung der Zerfallsraten $\gamma_{nl}^{(j)}$ durch die entsprechenden Pumpraten P_j in (2.18) gegeben ist:

$$\mathcal{L}_{\hat{S}_+} \hat{\rho} := \sum_{j=1}^N \frac{P_j}{2} \left(2 \hat{S}_+^{(j)} \hat{\rho} \hat{S}_-^{(j)} - \hat{\rho} \hat{S}_-^{(j)} \hat{S}_+^{(j)} - \hat{S}_-^{(j)} \hat{S}_+^{(j)} \hat{\rho} \right). \quad (2.19)$$

¹²Mit *ähnlichen Zuständen* sind solche gemeint, die sich nur in einer einzigen ZNS-Anregung unterscheiden.

¹³Man beachte, dass $\hat{\rho}$ die blockdiagonale Form von \hat{H} aufweist.

Hierin sind sämtliche Ladungsträgerdynamiken und Relaxationsprozesse grob zusammengefasst. Für eine ausführliche Diskussion mit dem Vergleich zu einem festkörperphysikalischen Modell sei auf [8] verwiesen.

2.6 Eigenschaften des quantisierten Lichtfeldes

Der Zustandsraum der Photonen \mathcal{H}_{rad} ist der bosonische Fock-Raum, definiert als Hilbertsche Summe symmetrischer N-Teilchenräume \mathcal{H}_n

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n .$$

Die Menge der Besetzungszustände $\{|\{n_{\mathbf{k},\mu}\}\rangle\}$ bildet eine Basis in $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ [30]. Im Fall einer Mode ist ein Feldzustand eindeutig durch $|n\rangle$ festgelegt, wobei n die Besetzungszahl der Mode bezeichnet.

Wie bereits in Abschnitt 2.4 erläutert, ist der reine quantenmechanische Zustand nicht immer zugänglich. In Anbetracht der Berechnung des Erwartungswertes von Systemgrößen mit Hilfe der reduzierten Dichtematrix wird deutlich, dass sämtliche Messgrößen bzgl. des Lichtfeldes durch die photonische Dichtematrix $\hat{\rho}^{rad} := \text{Spur}\{\hat{\rho}\}_{ZNS}$ bestimmt sind. Hierbei bezeichnet $\hat{\rho}$ die Dichtematrix des Systems, gebildet aus dem ZNS-Ensemble und der Kavitätsmode. In diesem Sinne gibt $\hat{\rho}^{rad}$ Aufschluss über den Systemzustand. Die Diagonalmatrixelemente in der Besetzungszahlbasis

$$\hat{\rho}_{nn}^{rad} = \langle n | \hat{\rho}^{rad} | n \rangle =: p(n)$$

geben die Wahrscheinlichkeiten wieder, solch einen Zustand $|n\rangle$ zu messen. Man unterscheidet in drei verschiedene Arten von Licht anhand der Wahrscheinlichkeitsverteilung der $p(n)$.

Thermisches Licht

Klassische Lichtquellen strahlen i.A. thermisches Licht aus, welches durch folgende Charakteristik definiert ist. Ausgehend vom Dichteoperator, der ein System der Temperatur T im thermischen Gleichgewicht beschreibt

$$\hat{\rho}_{th} := \frac{\exp(-\beta \hat{H})}{\text{Spur}\{\exp(-\beta \hat{H})\}} ,$$

folgt mit $\hat{H} = \sum_n \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$ und $\beta := 1/(k_B T)$ für die Diagonalelemente bzgl. der Besetzungszustände:

$$p(n)_{th} = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \hbar\omega(n + 1/2)) \quad \text{mit} \quad Z = \frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar\omega)} ,$$

d.h. dass thermische Lichtquellen eine exponentiell abklingende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Besetzung von Zuständen höherer Energie (\equiv größerem n) zeigen, deren Maximum bei $n = 0$ liegt. Hinsichtlich der bosonischen Natur der Photonen, ist die mittlere Besetzungszahl $\langle \hat{n} \rangle_{th}$ durch die Bose-Einstein-Verteilung gegeben, wie sich rechnerisch aus

$$\langle \hat{n} \rangle_{th} = \text{Spur}\{\hat{n}\hat{\rho}_{th}\} = \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}$$

wie erwartet ergibt. Hiermit lassen sich die Diagonalelemente einer ideal thermisch strahlenden Quelle über die entsprechende mittlere Photonenzahl berechnen:

$$p(n) = \frac{\langle \hat{n} \rangle_{th}^n}{(1 + \langle \hat{n} \rangle_{th})^{n+1}} .$$

Kohärentes Licht

Der quantenmechanische kohärente Zustand $|\alpha\rangle$ ist definiert als Eigenzustand des Vernichtungsoperators \hat{a} mit Eigenwert α [16]. Dies hat zur Folge, dass der kohärente Zustand in seinen Eigenschaften bezüglich der Erwartungswerte von Observablen denen einer klassischen elektromagnetischen Feldmode sehr ähnlich ist [6, 22]. Ohne auf die mathematischen Eigenschaften näher einzugehen, sei hinsichtlich der Photonenstatistik (d.h. der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Besetzungszustände) die Darstellung von $|\alpha\rangle$ in der Basis der Fockzustände angegeben. Es gilt:

$$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle , \quad (2.20)$$

woraus unmittelbar folgt, dass im Fall eines kohärenten Zustandes des Lichtfeldes (d.h. $\hat{\rho}^{rad} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$) die Wahrscheinlichkeit, n Photonen zu messen, gegeben ist durch:

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-\langle \hat{n} \rangle_{coh}} \frac{\langle \hat{n} \rangle_{coh}^n}{n!} .$$

Dabei wurde der Zusammenhang $\langle \hat{n} \rangle_{coh} := \langle \alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$ ausgenutzt. Die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt der Beziehung $\Delta n = \sqrt{\langle \hat{n} \rangle}$ zwischen Photonenzahlschwankung und mittlerer Photonenzahl (Poissonverteilung).

Zustände mit festgelegter Photonenzahl

Die reinen Fockzustände führen zu einer Photonenstatistik $p(n) = \delta_{n=\langle n \rangle}$, welche für alle Zustände $|m\rangle$ mit $m \neq n$ gleich null ist. Solch eine Verteilung ist für einzelne Emittoren typisch, insofern als nach der Emission eines Photons erst nach erneuter Anregung ein weiteres emittiert werden kann.

In Abbildung 2.3 sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzgl. verschiedener mittlerer Photonenzahl für die beschriebenen Idealfälle dargestellt.

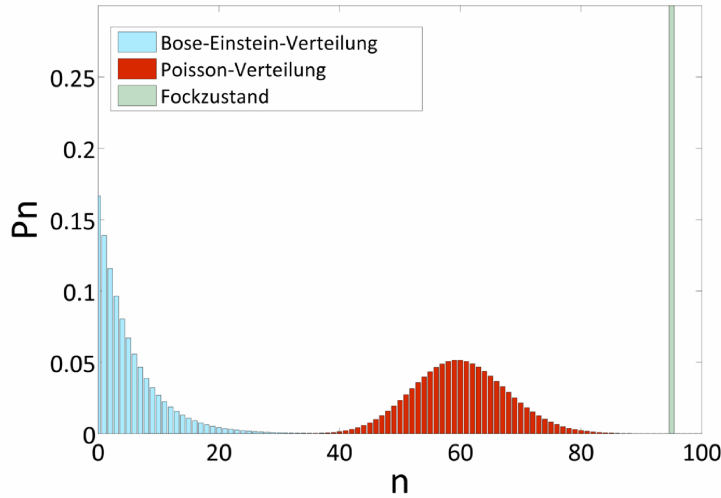


Abb. 2.3: Ideale Photonenstatistiken: Verteilung für thermisches Licht (hellblau), Poisson-Verteilung bzgl. kohärentem Licht (rot) sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen Fockzustand.

Experimentell ist die Photonenstatistik nicht ohne weiteres zugänglich, sodass um dennoch Aussage über diese treffen zu können, die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung

$$g_2(t_1, t_2) := \frac{\langle \hat{a}^\dagger(t_1) \hat{a}^\dagger(t_2) \hat{a}(t_2) \hat{a}(t_1) \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger(t_1) \hat{a}(t_1) \rangle \langle \hat{a}^\dagger(t_2) \hat{a}(t_2) \rangle}$$

herangezogen wird. Im stationären Fall hängt $g_2(t_1, t_2)$ nur von der Zeitdifferenz $\tau := t_2 - t_1$ ab [16]. Für $\tau = 0$ gibt die Korrelationsfunktion Auskunft über die Wahrscheinlichkeit, zwei Photonen zu gleicher Zeit zu messen und kann folgendermaßen dargestellt werden

$$g_2(0) = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{\sum_n n^2 p(n) - \sum_n n p(n)}{(\sum_n n p(n))^2},$$

wodurch sie im Zusammenhang mit der Photonenstatistik steht. Berechnungen der Erwartungswerte für kohärente, thermische sowie für Zustände fester Besetzungszahl ergibt $g_2(0) = 1$, $g_2(0) = 2$ bzw. $g_2(0) = 0$. Dabei bedeutet $g_2(0) = 1$ für kohärentes Licht, dass der korrelierte Erwartungswert $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle$ faktorisiert, die kohärente Emission ist also statistisch unkorreliert.

2.7 Bewegungsgleichungen von Erwartungswerten

Zur Diskussion der Ergebnisse und zum Verständnis des Verhaltens der dort berechneten Größen, ist es sinnvoll, auf die zeitliche Änderung der mittleren Photonenzahl in der Kavität $\langle \hat{n} \rangle$ sowie auf die Bewegungsgleichungen damit verbundener

Größen einzugehen. Durch die Berechnung der Rate des spontanen Zerfalls in die Kavitätsmode lässt sich der Einfluss der Verstimmung eines ZNS auf dessen Emissionsverhalten anschaulich interpretieren.

Der Erwartungswert einer Systemgröße \hat{O} kann mit Hilfe der Dichtematrix und der Spurbildung berechnet werden, wie in Abschnitt 2.4 dargestellt wurde. Beachtet man, dass Operatoren im Schrödingerbild zeitunabhängig sind, ergibt sich für die Bewegungsgleichung von $\langle \hat{O} \rangle$ aus der Evolution der Dichtematrix unter Berücksichtigung von Dissipationsprozessen (*master equation* - siehe (3.1))

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{O} \rangle = \frac{i}{\hbar} \text{Spur}\{[\hat{H}, \hat{O}] \hat{\rho}(t)\} + \text{Spur}\{\hat{O} \mathcal{L} \hat{\rho}(t)\} , \quad (2.21)$$

wobei die Linearität der Spurbildung sowie deren Eigenschaft ausgenutzt wurde, dass Operatorprodukte zyklisch vertauscht werden können. Hierbei bezeichnet \mathcal{L} allgemein inkohärente Prozesse wie $\mathcal{L}_{\hat{a}}$, $\mathcal{L}_{\hat{S}_-}$ und $\mathcal{L}_{\hat{S}_+}$.

In Anbetracht dessen, dass Operatoren bzgl. des Zustandsraumes der ZNS mit denen bzgl. des Zustandsraumes der Photonen kommutieren, ergibt sich für die mittlere Photonenzahl

$$\left(\frac{d}{dt} + \kappa \right) \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \frac{2}{\hbar} \sum_{j=1}^N \text{Im} \left(g_j \langle \hat{S}_-^{(j)} \hat{a}^\dagger \rangle \right) , \quad (2.22)$$

da somit $\text{Spur}\{\hat{n} \mathcal{L}_{\hat{S}_+} \hat{\rho}\}$ bzw. $\text{Spur}\{\hat{n} \mathcal{L}_{\hat{S}_-} \hat{\rho}\}$ verschwinden. Sie setzt sich demzufolge aus dem Imaginärteil der sog. photonenunterstützten Polarisationen $\hat{S}_-^{(j)} \hat{a}^\dagger$ der einzelnen ZNS zusammen und ist im stationären Zustand ihnen sogar direkt proportional, somit können die einzelnen Emissionsanteile seitens der ZNS separiert werden.

Die Zeitableitung von $\langle \hat{S}_-^{(j)} \hat{a}^\dagger \rangle$ berechnet sich analog, wobei sämtliche Dissipationsterme über die entsprechenden Raten zur Dämpfung beitragen:

$$\left(\frac{d}{dt} + i\Delta_j + \frac{1}{2} (\kappa + \gamma_{nl}^{(j)} + P_j) \right) \langle \hat{S}_-^{(j)} \hat{a}^\dagger \rangle = g_j^* \left(\langle \hat{S}_+^{(j)} \hat{S}_-^{(j)} \rangle_+ \langle \hat{S}_+^{(j)} \hat{S}_-^{(j)} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - \langle \hat{S}_-^{(j)} \hat{S}_+^{(j)} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle \right) .$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass $\hat{S}_+^{(j)} \hat{S}_-^{(j)} = |e_j\rangle\langle e_j|$, $\hat{S}_-^{(j)} \hat{S}_+^{(j)} = |g_j\rangle\langle g_j|$ und demzufolge $\hat{S}_z^{(j)} = \frac{1}{2} (\hat{S}_+^{(j)} \hat{S}_-^{(j)} - \hat{S}_-^{(j)} \hat{S}_+^{(j)})$ ist. Es ergibt sich das Problem, dass die gemischten Operatorerwartungswerte stets an solche höherer Ordnung koppeln. Da hier lediglich die Wechselwirkung zwischen ZNS und Photonenmode beschrieben werden soll, genügt es mittels der sog. *cluster-expansion*-Methode die Bewegungsgleichungen in erster Approximation zu beschreiben [9, 23], sodass die gemischten Erwartungswerte gemäß dem Schema

$$\langle \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{c} \rangle = \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle + \delta \langle \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger \hat{c} \hat{c} \rangle$$

faktorisiert werden¹⁴. Die Approximation besteht in der Vernachlässigung der Korrelationsterme $\delta\langle\hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger\hat{c}\hat{c}\rangle$, sodass für die photonenunterstützte Polarisation gilt:

$$\left(\frac{d}{dt} + i\Delta_j + \frac{1}{2}(\kappa + \gamma_{nl}^{(j)} + P_j)\right)\langle\hat{S}_-^{(j)}\hat{a}^\dagger\rangle = g_j^*\langle\hat{S}_+^{(j)}\hat{S}_-^{(j)}\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle\left(\langle\hat{S}_+^{(j)}\hat{S}_-^{(j)}\rangle - \langle\hat{S}_-^{(j)}\hat{S}_+^{(j)}\rangle\right). \quad (2.23)$$

Die Zeitentwicklung der Besetzung des angeregten Niveaus ergibt sich analog zur Bewegungsgleichung der mittleren Photonenzahl als abhängig von der photonenunterstützte Polarisation, sodass

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{S}_+^{(j)}\hat{S}_-^{(j)}\rangle = -\frac{2}{\hbar}\text{Im}\left(g_j\langle\hat{S}_-^{(j)}\hat{a}^\dagger\rangle\right). \quad (2.24)$$

Hieraus ergibt sich durch Einsetzen von (2.23) in (2.24) im stationären Zustand für die spontante Emission (d.h. anhand des ersten nicht zu $\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle$ proportionalen Terms in (2.23)) des j -ten ZNS in die Kavitätsmode folgende Emissionsrate

$$\frac{1}{\tau_{sp}^{(j)}} = \frac{2}{\hbar}\text{Im}\left(\frac{|g_j|^2}{i\Delta_j + \Lambda}\right) = \frac{2|g_j|^2}{\hbar}\frac{\Lambda}{\Delta_j^2 + \Lambda^2} \quad (2.25)$$

mit $\Lambda = \frac{1}{2}(\kappa + \gamma_{nl}^{(j)} + P_j)$. Da allgemein mit dem Zerfall eines ZNS mit der Rate μ stets auch ein Dephasieren der Übergangselemente mit der halben Rate $\mu/2$ einhergeht [2], ist somit die Dephasierung der Übergangselemente der Dichtematrix in dem hier betrachteten Modell von der Verstimmung des ZNS zur Kavitätsmode abhängig.

¹⁴Auf die *cluster-expansion*-Methode wird hier nicht weiter drauf eingegangen und auf [23] verwiesen.

3 Numerische Ergebnisse

Im folgenden Kapitel werden ausgewählte numerische Resultate präsentiert. In Abschnitt 3.1 werden zunächst die Parameter im Hinblick auf die nicht resonante Kopplung festgelegt und darüber hinaus das Emissionsverhalten eines einzelnen angeregten ZNS (*Jaynes-Cummings-Modell*) kurz dargestellt. Darauf aufbauend behandelt der Abschnitt 3.2 die Charakteristika mehrerer Emittter. Abschließend wird (Abschnitt 3.3) der Vergleich zwischen explizit im Modell berücksichtigten Hintergrundemitter und einer oft gebrauchten phänomenologischen Beschreibung angestellt.

Den hier dargelegten Ergebnissen liegt die numerische Berechnung der sog. *master equation* für die QDs-Kavitätsmode-Dichtematrix zugrunde, die die zeitliche Änderung der System-Dichtematrix beschreibt und sich nebst der hamiltonschen Dynamik aus den in Kapitel 2 diskutierten inkohärenten Prozessen zusammensetzt:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_{\hat{a}}\hat{\rho} + \mathcal{L}_{\hat{S}_-}\hat{\rho} + \mathcal{L}_{\hat{S}_+}\hat{\rho} . \quad (3.1)$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass (3.1) zudem mittels der unitären Transformation

$$\hat{U} := \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{R} t\right) \quad \text{mit} \quad \hat{R} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \hat{S}_z^{(j)}\right) \quad (3.2)$$

in ein bewegtes Bezugssystem (*rotating frame*) überführt ist, gegenüber der die Lindblad-Terme invariant sind. Ohne Kennzeichnung in der Notation sind sowohl $\hat{\rho}$ als auch \hat{H} entsprechend transformiert, wobei der Hamiltonoperator (2.10) folgende Gestalt annimmt:

$$\hat{H} = \hbar \sum_{j=1}^N \Delta_j \hat{S}_z^{(j)} + \tilde{g}_j \left(\hat{S}_-^{(j)} \hat{a}^\dagger + \hat{S}_+^{(j)} \hat{a} \right) .$$

Ferner sind die Kopplungskonstanten g_j hierbei reell gewählt [1, 21] und $\tilde{g}_j := g_j/\hbar$.

Mit der direkten Berechnung der *von-Neumann-Gleichung* stellt sich ein wesentliches numerisches Problem, bedingt durch den Speicherbedarf der Dichtematrix. Der Zustandsraum der ZNS ist offensichtlich von der Dimension 2^N , hingegen gilt es, den abzählbar unendlich dimensionalen Zustandsraum der Kavitätsmode unter Berücksichtigung der gesteigerten Emission durch mehrere QDs in der Kavität geeignet zu beschränken. Neben der Zunahme des Speicherbedarfs werden die Rechnungen zudem rasch zeitintensiv, allerdings zeigt sich, dass zur Berechnung

stationärer Größen die Verwendung eines *Runge-Kutta-Verfahrens* bis einschließlich dritter Ordnung ausreicht, da es im Vergleich mit Verfahren höherer Ordnung zu identischen Ergebnissen führt. Dabei wird die Zeitentwicklung des Systems als stationär angesehen, wenn die mittlere Photonenzahl $\langle \hat{n} \rangle$ als „abgespurte Größe“ über ein Zeitintervall von 30 ps um weniger als 0,01% vom Intervallendwert abweicht.

3.1 Getriebenes Jaynes-Cummings-Modell mit Verlustmechanismen

Zunächst sei ein einzelner QD (ZNS) in der Mikrokavität betrachtet. In diesem Fall reduziert sich (2.10) zum sog. *Jaynes-Cummings-Modell* [12], wobei vermöge der *von-Neumann-Gleichung* Verlustprozesse sowie inkohärentes Anregen des Systems miteinbezogen sind. Durch die Wahl der Parameter für die Ankopplung an die Kavitätsmode $\tilde{g} = 0.3/\text{ps}$, für die Rate der Kavitätsphotonenverluste $\kappa = 0.12/\text{ps}$ sowie $\gamma_{nl} = 0.01/\text{ps}$ für die Rate mit der das ZNS nicht radiativ relaxiert, ist die Kopplung zwischen ZNS und Feldmode stark (*strong coupling regime* - $g > \kappa, \gamma_{nl}$).

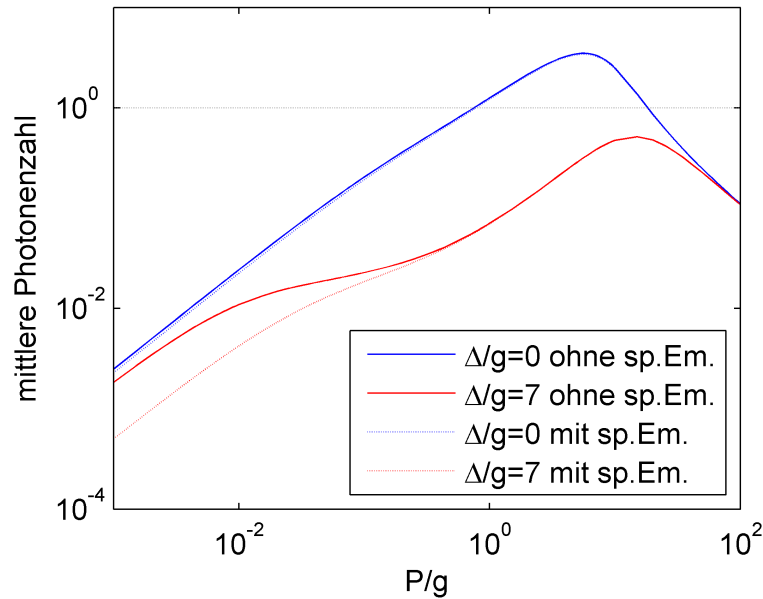


Abb. 3.1: Mittlere Photonenzahl doppelt logarithmisch gegen die Pumprate aufgetragen. Die blaue, durchgezogene Kurve zeigt das Emissionsverhalten eines zur Mikrokavität resonanten ZNS unter Berücksichtigung nicht radiativer Relaxationsprozessen, die gestrichelte zeigt den Verlauf ohne solche Einflüsse. Dazu korrespondierend ist das Verhalten eines verstimmten Emitters $\Delta/\tilde{g} = 7$ in rot dargestellt.

In Abbildung 3.1 ist für ein bzgl. der Kavitätsmode resonantes und ein verstimmt-tes ZNS ($\Delta/\tilde{g} = 7$) die mittlere Photonenzahl im stationären Zustand $\langle \hat{n} \rangle_{ss}$ in Abhängigkeit von der Pumprate P aufgetragen. Zudem ist das jeweilige Emissionsverhalten mit sowie ohne Berücksichtigung der spontanen Emission in andere Moden dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass die Kurvenverläufe des resonanten und des nicht resonanten ZNS zum einen im Bereich geringer und zum anderen im Bereich starker Anregung ($P/\tilde{g} > 10^0$) qualitativ übereinstimmen, jedoch nimmt die Emission im nicht resonanten Fall für moderates Pumpen deutlich geringer zu, da die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls in die Kavitätsmode durch die Verstimmung geringer ist. Somit sättigt die Inversion der ZNS-Zustände des verstimmtten Emitters abhängig von der gewählten Rate γ_{nl} früher, gegenüber dem mit der Kavität in Resonanz stehenden (siehe Abb. 3.2(a)). Letzteren betreffend hat die hier gewählte Rate $\gamma_{nl} = 0.01/\text{ps}$ kaum einen Einfluss. Sobald der angeregte Zustand $|e\rangle$ im Mittel mehr besetzt ist als der Grundzustand ($P/\tilde{g} \geq 10^0$), beginnt ferner für $\Delta/\tilde{g} = 0$ die stimulierte Emission zu überwiegen ($\langle \hat{n} \rangle \geq 1$) und führt zu der in Abbildung 3.2(a) gezeigten Doppel-S-Form der Zustandsinversion in halblogarithmischer Darstellung. Demzufolge geht die Photonenzahl von einer zuvor *sub-poissonischen*

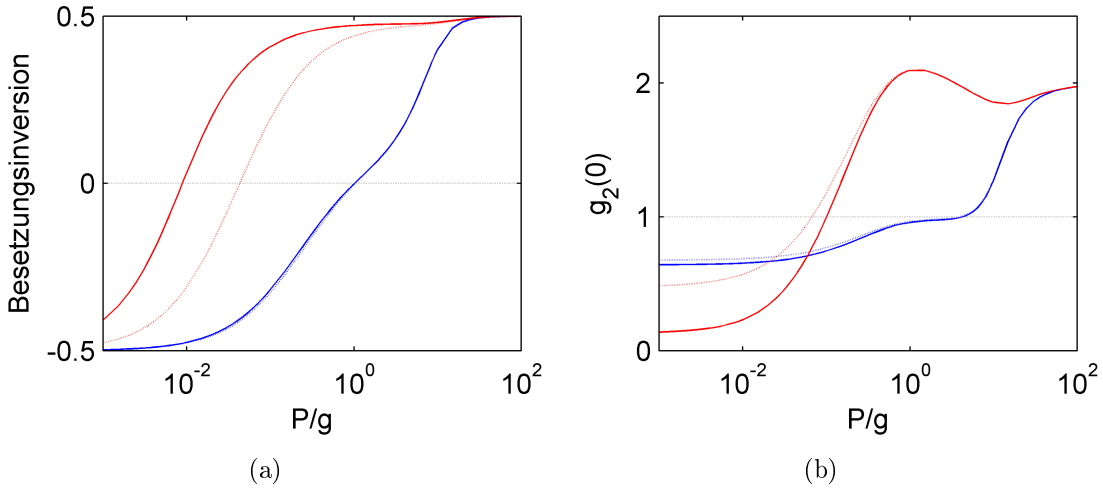


Abb. 3.2: Halblogarithmische Darstellung der Besetzungsinversion (a) sowie der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung (b) in Abhängigkeit der Pumprate P . Farbkonvention entspricht der in Abb. 3.1

zur *poissonischen Verteilung* über (hier nicht dargestellt) und die Autokorrelationsfunktion ist ≈ 1 , d.h. die gleichzeitige Detektion zweier Photonen ist unkorreliert. In diesem Sinne beginnt das resonante ZNS *Laserlicht* zu emittieren, bis schließlich der dekohärente Einfluss seitens des Pumpprozesses in das angeregte Niveau die Kohärenz zwischen beiden Zuständen zerstört und Licht thermischer Charakteristik ausgestrahlt wird. Bei geringer Anregung ist es zunächst unwahrscheinlich, direkt hintereinander zwei Photonen zu messen, da nach Emission der Verbleib des

Systems im Grundzustand andauert. Dieser als *anti-bunching* bezeichnete Effekt ist somit typisch für Einzelemittersysteme.

Die Abnahme der Anzahl an Photonen in der Kavität $\langle n \rangle_{ss}$ bei zunehmender inkohärenter Pumpanregung wird als *self-quenching* bezeichnet [24] und wird aus der zeitlichen Änderung der Polarisation des ZNS insoweit verständlich

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}_- \rangle = i \left(\Delta \langle \hat{S}_- \rangle - g \langle \hat{S}_z \hat{a} \rangle \right) - \frac{1}{2} (\gamma_{nl} + P) \langle \hat{S}_- \rangle, \quad (3.3)$$

als übermäßiges Pumpen den Erwartungswert $\langle \hat{S}_- \rangle$ ausdämpft. Dabei ergibt sich (3.3) aus (2.21).

Parameterauswahl

Hinsichtlich der Untersuchung des Einflusses von nicht resonanten Hintergrundemittern in Abschnitt 3.2 und 3.3 gilt es, die Auswahl des Parameterbereichs bzgl. der Verstimmung zu überlegen. Dazu ist in Abb. 3.3 die Resonanzkurve eines ZNS in Abhängigkeit von der Pumprate sowie der Verstimmung Δ der Übergangsfrequenz des ZNS zur Frequenz der Mikrokavität dargestellt. Man beachte, dass beide Parameter auf die Wechselwirkungsrate \tilde{g} skaliert sind, sodass die qualitativen Aussagen bei Variation von \tilde{g} bei gleichen Verhältnissen dieselben sind. In Anbetracht

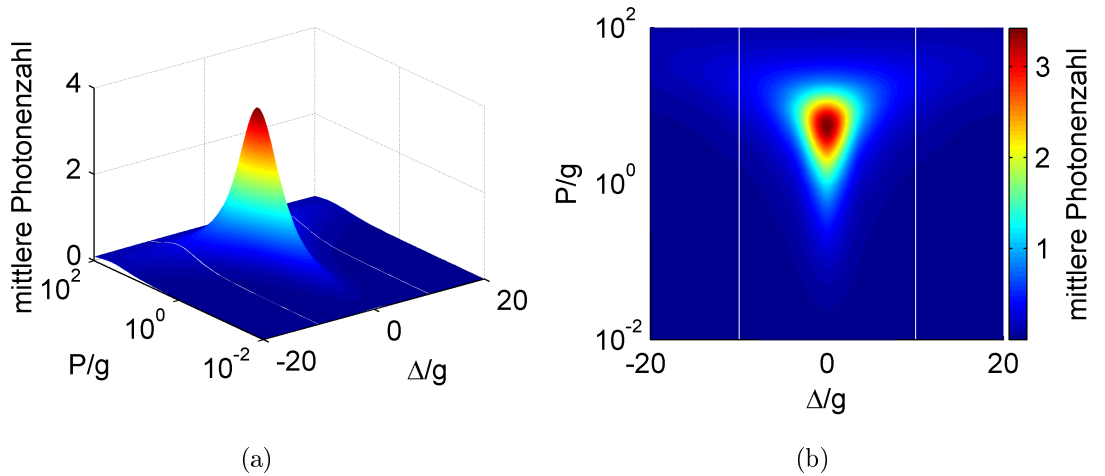


Abb. 3.3: Resonanzkurve eines ZNS in einer Mikrokavität in Abhängigkeit des Pump- P sowie des Verstimmungsparameters Δ . Der im Weiteren betrachtete Bereich der Verstimmung ist durch die hellblauen Linien bei $\Delta/\tilde{g} = -10$ und $\Delta/\tilde{g} = 10$ gekennzeichnet.

der nur noch geringen Emission außerhalb des in Abb. 3.3 markierten Bereichs im Vergleich zum Resonanzfall liegt es nahe, für die Verstimmung Werte aus $[-10, 10]$ zu betrachten.

3.2 Getriebenes Quantenpunktensemble

In diesem und im folgenden Abschnitt befinden sich sämtliche ZNS sowie die Kavität anfangs im Grundzustand. Anlehnend an den vorherigen Abschnitt 3.1 werden hier die stationären Eigenschaften eines getriebenen Quantenpunktensembles untersucht, wobei anzumerken ist, dass ein jeder QD unabhängig der übrigen gemäß (2.19) inkohärenter Anregung unterliegt. Darüber hinaus seien die Raten $P_j = P$ (für $j \in \{1, 2, \dots, N\}$) einander gleich.

Die Vernachlässigung eines gemeinsamen (oder paarweisen) Pumpreservoirs ist zum einen durch spektrale Verstimmung und/oder zum anderen durch räumliche Unterscheidbarkeit gerechtfertigt [4, 5, 6]. Ferner erweist sich ein solches kollektives Pumpreservoir durch damit verstärkt einhergehendes *self-quenching* nicht sonderlich geeignet für QD-Laser-Systeme [4].

Quantenpunkte in starker Kopplung

Zunächst werden 2 QDs betrachtet, deren Kopplungskonstanten $\tilde{g}_{1,2}$ hinsichtlich der Wechselwirkung mit der Kavitätsmode jeweils auf $\tilde{g} = 0.3/\text{ps}$ festgelegt sind. Die Raten $\gamma_{nl}^{(1,2)} = 0.01/\text{ps}$ des nicht radiativen Zerfalls werden ebenfalls einheitlich gewählt und sind somit deutlich geringer als die Verluste seitens der Kavität, insofern als $\kappa = 0.12/\text{ps}$ konsequent beibehalten wird. Die Eigenschaften eines einzelnen Emitters mit entsprechenden Parametern wurden bereits in Abschnitt 3.1 beschrieben, sodass diese in den direkten Vergleich mit den hier präsentierten Ergebnissen gestellt werden können.

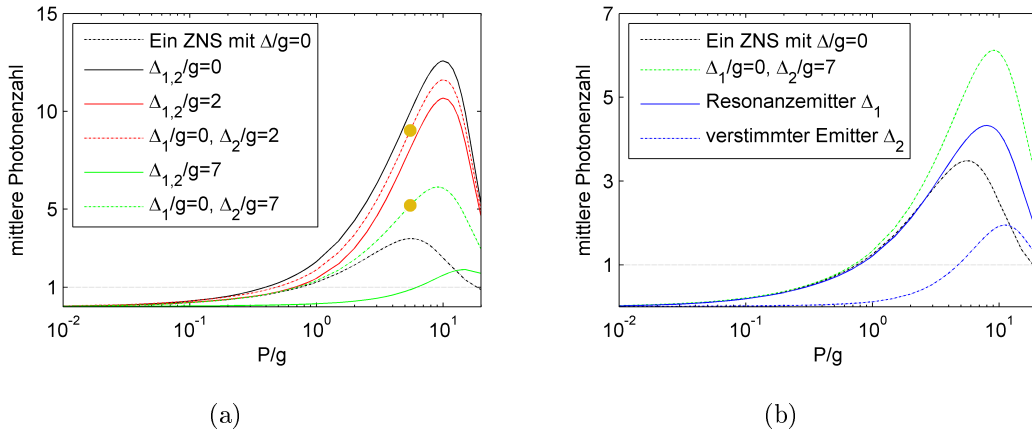


Abb. 3.4: (a): Mittlere Photonenzahl $\langle \hat{n} \rangle_{ss}$ über der Rate P des Pumpprozesses (logarithmisch) für verschiedene Verstimmungskonfigurationen. (b): Erwartungswert der Kavitätsphotonen bzgl. einem resonanten und einem um $\Delta/\tilde{g} = 7$ verstimmten ZNS. Die Gesamtemission der beiden QDs ist entsprechend zu (a) grün dargestellt, die einzelnen Anteile in blau (durchgezogen bzw. gestrichelt) sowie die Kurve eines einzelnen Emitters in schwarz, ebenfalls für $\tilde{g} = 0.3/\text{ps}$.

Die mittlere Photonenzahl $\langle \hat{n} \rangle_{ss}$ im stationären Betrieb ist über der logarithmisch skalierten Pumprate P in Abbildung 3.4(a) bzgl. verschiedener Konfigurationen der Verstimmungen aufgetragen, wobei die Emission unterschiedlich verstimmter ZNS stets dünn-gestrichelt dargestellt ist. Neben der allgemein deutlich erhöhten Photonenzahl in der Kavität (der Fall zweier stark nicht resonanter ZNS ausgenommen) ist bemerkenswert, dass die Anwesenheit eines weiteren, selbst stark verstimmten Emitters die Emission des mit der Kavitätsmode in Resonanz stehenden merklich steigert (siehe Abbildung 3.4(b)). Dieser unterstützende Effekt tritt ein, sofern der Erwartungswert der ausgestrahlten Kavitätsphotonen seitens des nicht resonanten ZNS größer als $1/2$ ist ($P/\tilde{g} > 2.5$), und erklärt sich durch den zur mittleren Photonenzahl proportionalen Term in (2.23) (stimulierte Emission - vgl. (2.23) und (2.24)).

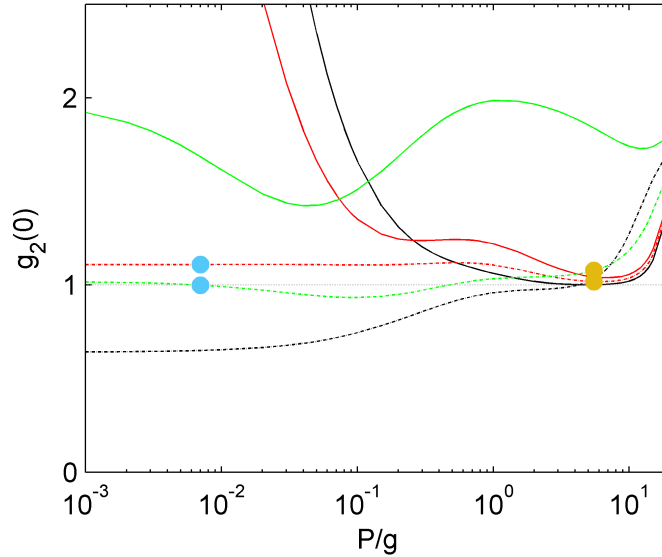


Abb. 3.5: Autokorrelationsfunktion $g_2(\tau)$ bzgl. keiner Verzögerung $\tau = 0$ über der Pumprate P (logarithmisch) hinsichtlich der Konfiguration aus 3.4(a) aufgetragen. Die blauen wie gelben Punkte bezeichnen die zu den in Abb. 3.6 dargestellten Photonenzuständen zugehörigen Werte. Die Farbkodierung der Kurven aus Abb. 3.4(a) ist beibehalten.

In Anbetracht der Abhängigkeit der Dephasierung des Systems von der Verstimmung (2.25) und des zunehmenden Anteils des verstimmten Emitters an der Gesamtemission bei größeren (bzw. sehr geringen) Pumpraten ist es verständlich, dass die Photonenzustände zu einer thermischen Verteilung übergeht und für die Autokorrelationsfunktion $g_2(0) > 1$ gilt (siehe Abb. 3.5). Dieses Verhalten ist somit von der Verstimmung Δ des zweiten QDs abhängig, wie aus den thermischen Anteilen der Photonenzustände für $\Delta_2/\tilde{g} = 2$ (Abb. 3.6(c) und 3.6(d)) und $\Delta_2/\tilde{g} = 7$ zu gleichen Pumpraten deutlich wird (entsprechend als gelber Punkt in Abb. 3.5 markiert).

Die ungleich sowie die nicht bzw. nur leicht verstimmten QDs zeigen im Bereich $10^0 \leq P/\tilde{g} \leq 10^1$ Laser-Verhalten, bedenkt man, dass die mittlere Photonenzahl wesentlich größer als eins ist und zudem $g_2(0) \approx 1$ eine poissonische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Momente von $\langle \hat{n} \rangle_{ss}$ andeutet¹. Gleichwohl für den gewählten Parametersatz das einzelne ZNS diese, für einen Laser typischen, Eigenschaften ebenso aufzeigt (vgl. Abschnitt 3.1), so ist der Übergang zu diesem besonderen Verhalten fließend (kein Schwellwert). Dies zeigt sich in der bereits für sehr ge-

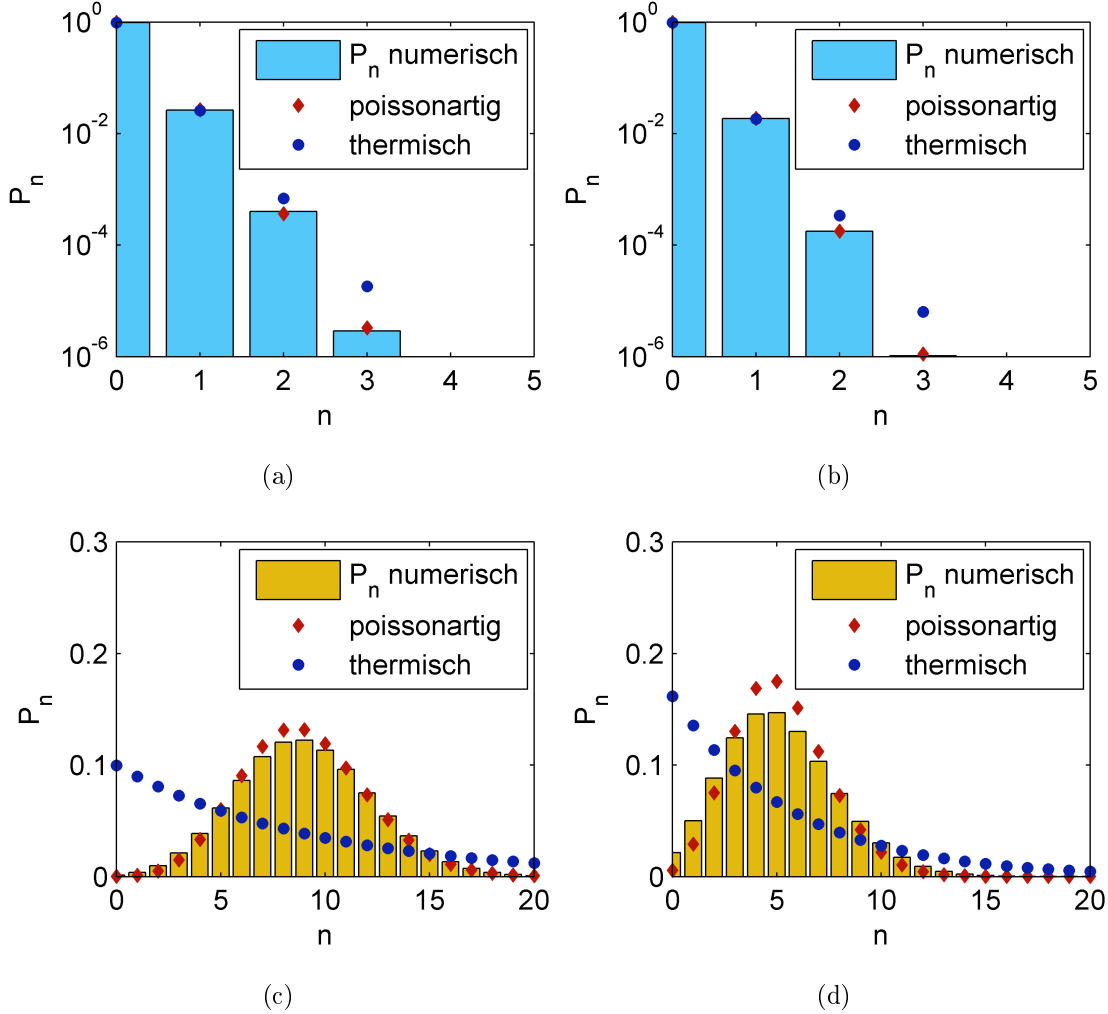


Abb. 3.6: Photonenstatistik für $\Delta_1/\tilde{g} = 0$ und (a,c) $\Delta_2/\tilde{g} = 2$ bzw. (b,d) $\Delta_2/\tilde{g} = 7$ für gering [(a) und (b)] sowie stark [(c) und (d)] angeregte Quantenpunktensembles. Die Farbe der Balken stehen mit denen der Bezugspunkte in Abb. 3.4(a) und 3.5 im Zusammenhang, d.h. es gilt $P/\tilde{g} = 0.007$ für (a,b) bzw. $P/\tilde{g} = 5.5$ für (c,d). Zudem ist jeweils die ideale Bose-Einstein- bzw. Poisson-Verteilung in Bezug auf die entsprechende mittlere Photonenzahl eingezeichnet (vgl. Abschnitt 2.6).

¹In diesem Bereich sind lediglich die Photonenstatistiken für $\Delta_1/\tilde{g} = 0$ und $\Delta_2/\tilde{g} = 2$ sowie $\Delta_2/\tilde{g} = 7$ in Abb. 3.6(c) und 3.6(d) explizit dargestellt.

ringe Anregungsraten poissonartigen Photonenstatistik wie Abbildung 3.6(a) und 3.6(b) verdeutlicht. Man beachte die halblogarithmische Darstellung, in der die exponentielle Bose-Einstein-Verteilung (thermisches Licht) linear ist.

Nicht stark gekoppelte Quantenpunkte

Dem Fall starker Kopplung sei nun ein Ensemble von bis zu vier Quantenpunkten gegenüber gestellt, die für sich genommen nicht in der Lage sind, Laserlicht zu emittieren. Hierzu wird die Kopplungskonstante auf $\tilde{g} = 0.1/\text{ps}$ herabgestzt, ohne die weiteren Parameter γ_{nl} und κ zu variieren. Im Hinblick auf den Einfluss von Hintergrundemittern auf einen einzelnen QD werden im Folgenden Szenarien untersucht, in denen alle bis auf einen gegen die Kavitätsmode verstimmt sind, d.h. $N - 1$ ZNS sind einander identisch.

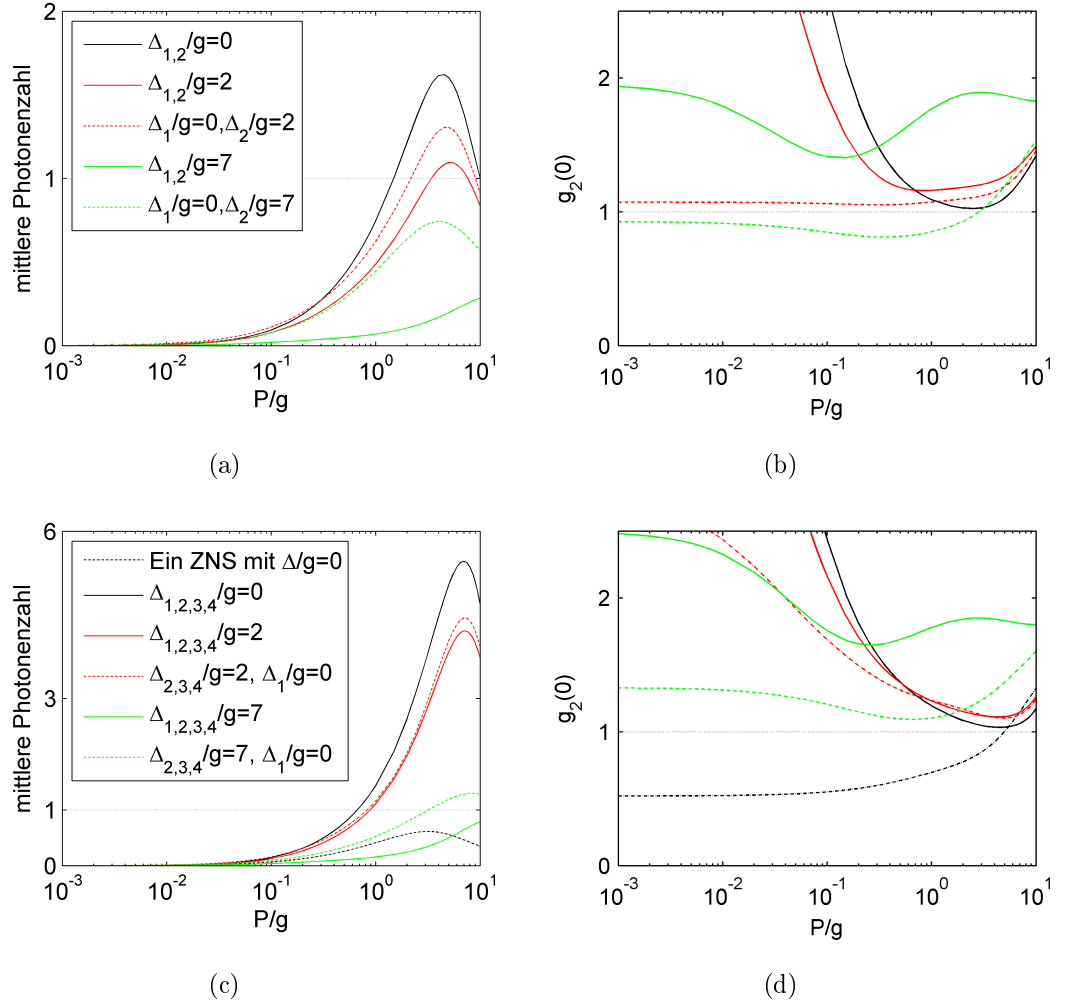


Abb. 3.7: Mittlere Photonenzahl $\langle \hat{n} \rangle_{ss}$ über der Rate P des Pumpprozesses (logarithmisch) für verschiedene Verstimmungskonfigurationen bzgl. zwei (a) bzw. vier ZNS (c). Die zugehörigen Verläufe der Autokorrelationsfunktion $g_2(0)$ sind in (b) bzw. (d) dargestellt.

Im Gegensatz zu Ein-QD/Atom-Systemen zeigen mehrere ZNS kein *anti-bunching* bei geringer Anregung, sondern emittieren im Allgemeinen thermisches Licht. Das von zwei schwach gepumpten, nicht stark gekoppelten und ungleich verstimmten ZNS² ausgestrahlte Licht weist außerordentliche Kohärenzeigenschaften auf (siehe Abb. 3.7(b)), ähnlich zu dem vorherigen Paragraph bzgl. zweier stark gekoppelter Emittier. Allerdings führt die kleinere Wechselwirkung mit der Kavitätsmode dazu, dass nur für zwei vollständig resonante sowie lediglich leicht verstimmte QD-Ensembles die stimulierte Emission die spontanen Zerfälle gering überwiegt (d.h. $\langle \hat{n} \rangle_{ss} > 1$ - siehe Abb. 3.7(a)). Dennoch kann in Anbetracht der Zustandsinversion nicht von einem Laser-Übergang gesprochen werden, gleichwohl die nicht verstimmten ZNS im Bereich $P/\tilde{g} \in [2, 4]$ zu einer Poissonverteilung mit relativ kleinem thermischen Anteil führen. Kein Ensemble zweier QDs mit den hier verwendeten Parametern zeigt ein dafür typisches lineares Regime [7] (siehe Abb. 3.8(a)).

In der Anwesenheit von insgesamt vier QDs findet dieser Übergang für ein vollständig resonantes bzw. leicht verstimmtes Ensemble sowie für den Fall leicht verstimmter Hintergrundemitter statt, wie Abb. 3.8(b) verdeutlicht. Für Systeme mit großer Differenz zwischen der Übergangs- und der Kavitätsmodenfrequenz bleibt der Verlauf der Zustandsinversion streng konkav, d.h. hier ist der stimulierte Emissionsanteil nur gering, sofern überhaupt vorhanden (vgl. Abb. 3.7(c)).

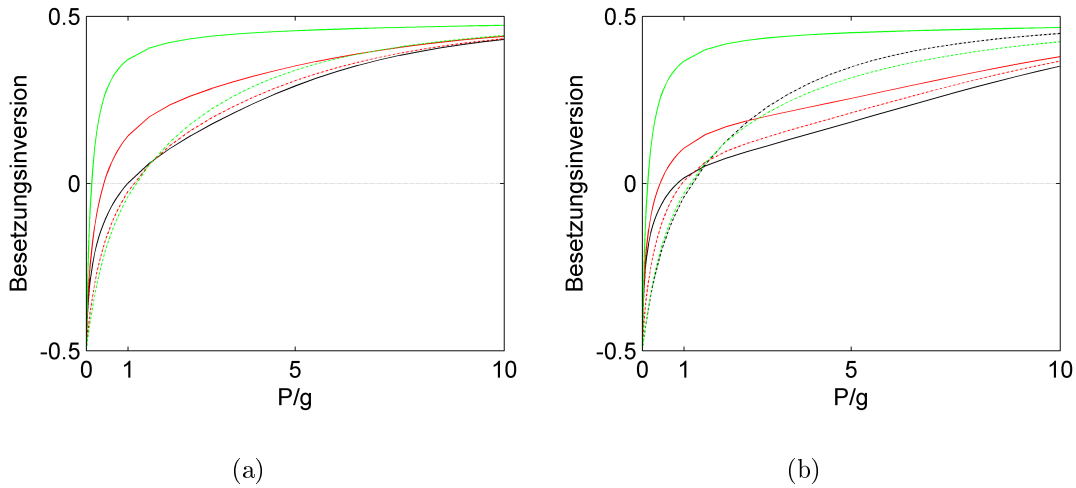


Abb. 3.8: Besetzungsinversion des Resonanzemitters bzw. bei gleicher Verstimmung eines der identischen ZNS linear über der Pumprate P aufgetragen bei insgesamt zwei (a) bzw. vier ZNS (b). Man beachte, dass die lineare Abhängigkeit in halblogarithmischer Darstellung zu einem doppelt S-förmigen Verlauf führt (vgl. Abb. 3.2(a)). Die Farbkonvention entspricht der in Abb. 3.7(a) bzw. 3.7(c)

²Gemeint ist, dass sich eines der beiden in Resonanz zur betrachteten Mode befindet.

3.3 Modell von Hintergrundemittern

Anhand der Ergebnisse des vorherigen Abschnitts 3.2 ist die Vernachlässigung spektral verstimmter Emitter offensichtlich keine gute Näherung. Die Anwesenheit solcher Hintergrundemitter führt zum einen in der starken Kopplung zu niedrigen Schwellwerten für das Einsetzen des Laser-Verhaltens und zum anderen bei moderaten Kopplungs-Verhältnissen dazu, dass stimulierte Emission ermöglicht ist und überdies sogar die vorherrschenden Verluste und spontanen Prozesse überwiegen kann. Hinsichtlich des numerischen Aufwands, mehrere QDs explizit zu berücksichtigen, scheint es jedoch zweckdienlich, den Einfluss der Hintergrundemitter phänomenologisch in das Modell eines einzelnen mit der Kavitätsmode in Resonanz stehendem QD einzubeziehen.

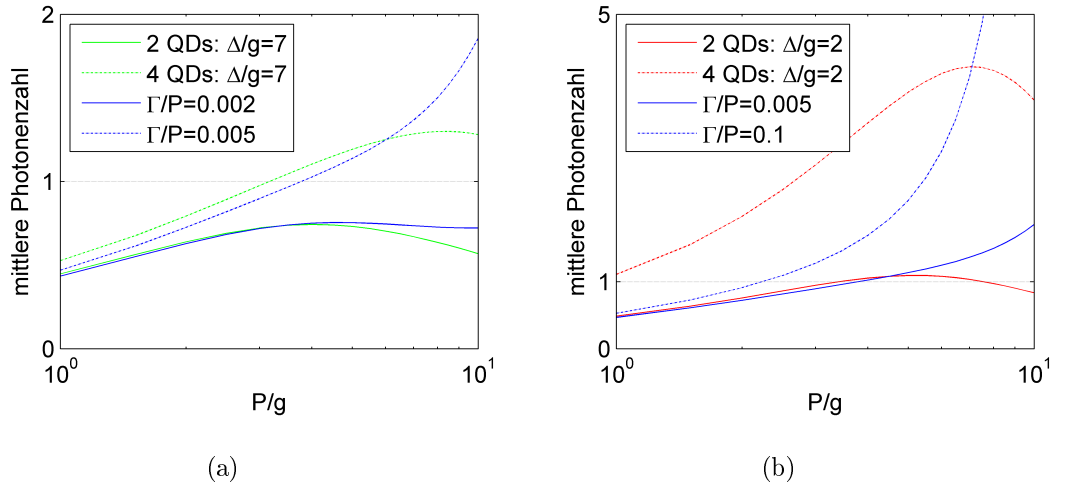


Abb. 3.9: Darstellung der mittleren Photonenzahl in der Kavität für stark (a) bzw. leicht verstimmt (b) Ensembles jeweils mit einem nicht verstimmt ZNS. Die durchgezogenen Linien entsprechen der Anwesenheit eines ($\Delta_2 = \Delta$), die gestrichelte Kurven dreier identischer Hintergrundemitter ($\Delta_{2,3,4} = \Delta$). Die blau eingefärbten Verläufe zeigen das Verhalten eines Resonanzemitters mit gepumpter Kavität. Die Kopplungsrate der ZNS mit der Kavität beträgt: $\tilde{g} = 0.1/\text{ps}$.

Dies betreffend soll nun folgend ein in der Literatur [15, 17, 18] häufig verwendeter Ansatz mit den zuvor diskutierten Resultaten verglichen werden. Die in dieser Arbeit dargelegte rein radiative Wechselwirkung der Hintergrund-QDs mit dem Resonanz-QD über zusätzliche Kavitätsphotonen wird in dem besagten Modell durch einen die Kavität betreffenden (inkohärenten) Pumpprozess modelliert (*cavity feeding*), welcher analog zum Anregungsprozess der ZNS formal invers zum Verlustterm $\mathcal{L}_{\hat{a}}$ ist:

$$\mathcal{L}_{\hat{a}^\dagger} \hat{\rho} := \frac{\Gamma}{2} (2 \hat{a}^\dagger \hat{\rho} \hat{a} - \hat{\rho} \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho}) . \quad (3.4)$$

Da hierdurch die seitens der vernachlässigten QDs emittierten Photonen simuliert

werden sollen, wird die Pumprate Γ der Kavität i.A. als proportional zur Pump-rate P des QD gewählt. Es ist zu bemerken, dass dieser Dissipationsterm aus der mikroskopischen Ableitung bzgl. der Wechselwirkung einer Kavität mit einem thermischen Reservoir hervorgeht [16], wobei die Raten der Verluste $\kappa(1 + n_{th})/2$ und der Anregung $\kappa n_{th}/2$ mit der Anzahl thermischer Photonen n_{th} verknüpft ist. Für eine größere Kavitätspumprate als Kavitätsverlustrate $\Gamma > \kappa$ stellen somit $\mathcal{L}_{\hat{a}}$ und $\mathcal{L}_{\hat{a}^\dagger}$ die Ankopplung eines thermischen Reservoirs negativer Temperatur dar [10], man beachte, dass n_{th} durch die Bose-Einstein-Verteilung gegeben ist. Dies bedeutet, dass ab einer bestimmten Anregung des QD die mittlere Photonenzahl exponentiell zunimmt.

In Abbildung 3.9 ist die mittlere Photonenzahl für ein nicht verstimmtes ZNS in der Anwesenheit von zwei (durchgezogene Linien) sowie vier (gestrichelte Kurven) leicht Abb. 3.9(b) bzw. stark Abb. 3.9(a) verstimmten Hintergrundemitter dargestellt. Die blauen Kurven verkörpern die Berechnungen eines einzelnen ZNS unter Berücksichtigung des Kavitätspumpprozesses. Es ist zu erkennen, dass für stark nicht resonante Emitter ($\Delta/g = 7$) die Emissionskurven bishin zu einer gewissen Pumprate nahezu in Deckung gebracht werden können. Allerdings wächst die Differenz mit der Anzahl der verstimmten ZNS an, da eine höhere mittlere Photonenzahl größere Pumpraten Γ erfordert, wodurch die Emissionskurve schnell exponentielles Verhalten zeigt, verdeutlicht durch die blaue, gepunktete Linie für $\Gamma = 0.005$. Gleiches gilt für weniger verstimmt ZNS ($\Delta/g = 2$ - in Abb. 3.9(b)), sodass dieser phänomenologische Ansatz nur sehr beschränkt zu ähnlichen Resultaten führt.

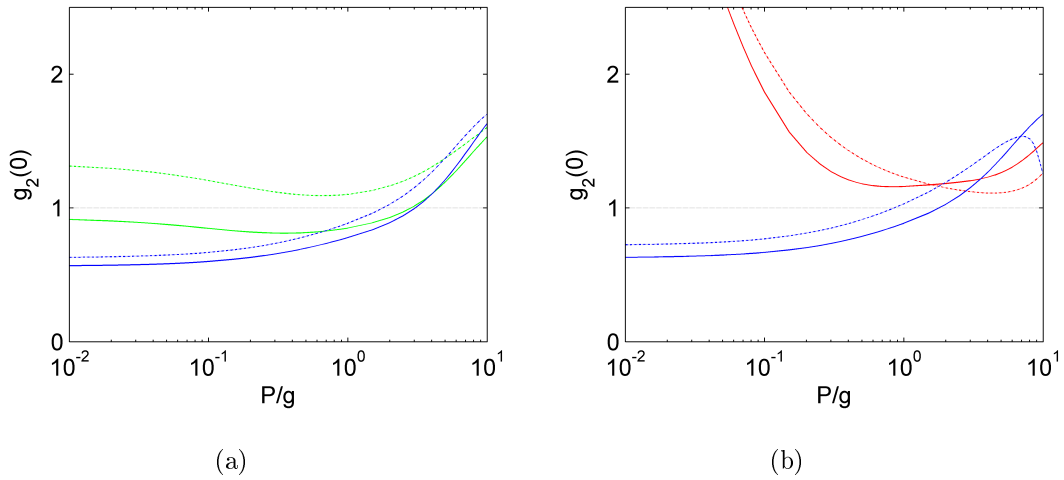


Abb. 3.10: Darstellung der Korrelationsfunktion 2. Ordnung für verschiedene Verstimmkonfigurationen ((a): $\Delta/\tilde{g} = 7$; (b): $\Delta/\tilde{g} = 2$) jeweils mit einem nicht verstimmt ZNS für insgesamt zwei (durchgezogene Linien) bzw. vier (gestrichelte Linien) ZNS mit $\tilde{g} = 0.1/\text{ps}$. Die blau eingefärbten Verläufe zeigen das Verhalten eines Resonanzemitters mit gepumpter Kavität.

Überdies ist die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung (dargestellt in Abb. 3.10) im Bereich geringer QD-Anregung wesentlich voneinander verschieden, so tritt im Falle nicht explizit berücksichtigter Hintergrund-ZNS wieder *anti-bunching* auf, da für kleine P auch $\Gamma \propto P$ gering ist und somit die mittlere Photonenzahl hauptsächlich durch die Emission des in Resonanz stehenden ZNS verursacht wird. Für nur leicht verstimmte Emittter (Abb. 3.10(b)) ist keine Übereinstimmung mehr vorhanden.

Die stark gekoppelten QDs betreffend bleiben die Aussagen qualitativ dieselben, auch hier zeigt sich, dass im Falle eines stark verstimmten Hintergrundemitters die Emissionskurve des expliziten Modells näherungsweise durch das inkohärente Pumpen der Kavität im Bereich moderater ZNS-Anregung beschreiben wird, jedoch besitzen sämtliche numerischen Lösungen kein lokales Maximum mehr. Aus Ab-

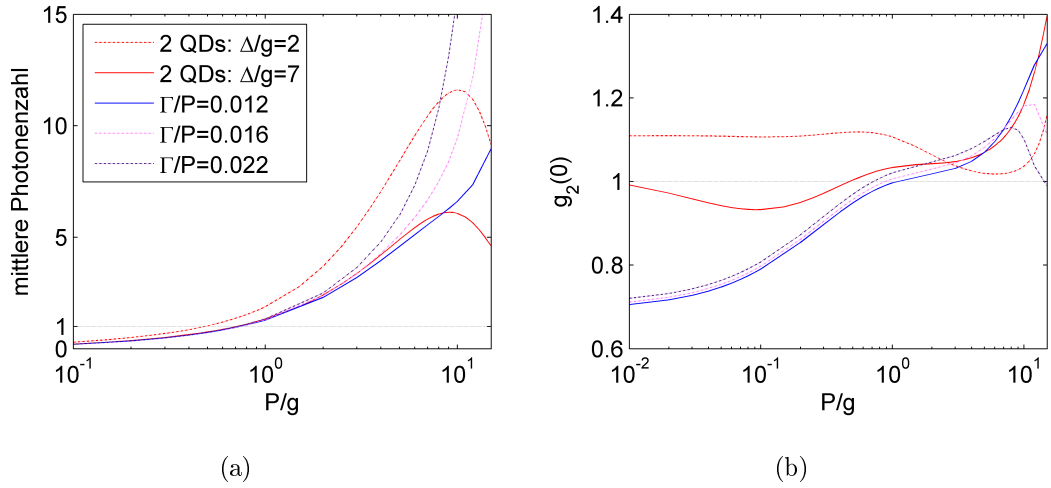


Abb. 3.11: Mittlere Photonenzahl (a) sowie Korrelationsfunktion zweiter Ordnung (b) für zwei stark gekoppelte ZNS ($\tilde{g} = 0.3/\text{ps}$) verschiedener Verstimmung, wobei ein ZNS stets in Resonanz zur Kavitätsmode steht. Die durchgezogene Kurve zeigt das Verhalten bei starker Verstimmung $\Delta/\tilde{g} = 7$ des Hintergrundemitters, die gestrichelte diese Situation bei geringerer Verstimmung $\Delta/\tilde{g} = 2$. Die blauen Kurven repräsentieren die numerischen Berechnung eines einzelnen Emitters in einer thermisch gepumpten Kavität.

bildung 3.11 wird auch deutlich, dass höhere Pumpraten $\Gamma/\tilde{g} > 0.016$ (gestrichelt hell- bzw. dunkelviolet) nicht zu „besseren“ Ergebnissen führen, d.h. qualitativ sowie quantitativ stimmen beide Modelle nicht miteinander überein. Der Abfall der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für große Pumpraten zeigt darüber hinaus, dass $\Gamma > \kappa$ gilt. Bedingt durch die Beschränkung der maximalen Photonenzahl baut sich eine invertierte thermische Photonenzustand auf.

4 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die radiative Wechselwirkung zwischen mehreren Quantenpunkten theoretisch untersucht. Dazu wurden zunächst die Grundlagen der Quantisierung der Licht-Materie-Wechselwirkung dargelegt und darauf aufbauend das dieser Arbeit zugrundeliegende Modell eines Ensembles an Zwei-Niveau-Systemen erschlossen, welche ausschließlich über das Photonenfeld miteinander in Wechselwirkung stehen. Einfließende Annahmen wie z.B. die RWA wurden im Bezug auf die festkörperphysikalische Situation reflektiert. Der Analyse des abgeschlossenen Systems wurde nachfolgend der Dichtematrixformalismus eingeführt, damit die System-Umgebung-Wechselwirkung in das Modell implementiert werden konnte. In diesem Zusammenhang wurde die Besonderheit der Beschreibung eines QD durch ein ZNS hinsichtlich des Anregungsprozesses nochmals betont. Ferner stellten die Charakterisierung des Lichtfeldes sowie die Bewegungsgleichungen der Photonenzahl bzw. der Besetzung des angeregten ZNS-Zustandes die Basis zur Diskussion der numerischen Ergebnisse bereit.

Die numerische Analyse eines einzelnen ZNS zeigte das Auftreten des für einzelne Emittter typische *anti-bunching* sowie des für inkohärent gepumpte ZNS charakteristische *self-quenching*, d.h. die Abnahme der mittleren Photonenzahl bei anwachsender Anregung.

Mehrere ZNS hingegen emittieren im Bereich geringer Anregung in Abhängigkeit von der Anzahl der Emittter sowie der gewählten Verstimmungskonfiguration thermisch bis kohärent. Es wurden bis zu vier QDs simuliert. Stark gekoppelte Emittter betreffend, welche für sich genommen in der Lage sind, Laserlicht zu emittieren, konnte ein schwellenloser Laser-Übergang festgestellt werden. Ferner führt die Anwesenheit eines stark verstimmten Emitters zu einer deutlichen Steigerung der Emission. Darüber hinaus wurde festgestellt, dass mehrere leicht verstimmte Hintergrundemitter einem resonanten ZNS zum Laser-Verhalten verhelfen können.

Abschließend wurde ein Vergleich zwischen den Ergebnissen des Modells, welches die Hintergrundemitter explizit enthält, und eines Modells, das deren Einfluss phänomenologisch mit Hilfe einer inkohärenten Kavitätsanregung zu berücksichtigen versucht, angestellt. Lediglich für stark nicht resonante Hintergrundemitter konnte nur beschränkt ein Bereich geringer bzw. moderater Pumpraten ausgemacht werden, in dem eine Übereinstimmung vorhanden ist. Festzuhalten ist, dass die Ankopplung thermischer Photonen an die Kavität das Verhalten eines Resonanzemitters unter dem Einfluss weiterer Hintergrundemitter nicht korrekt wiedergibt.

Ausblick

Hinsichtlich der bereits diskutierten aus der Vereinfachung eines Quantenpunkts als Zwei-Niveau-System herrührenden Unzulänglichkeiten, wäre es wünschenswert, das Modell hin zu einem Mehr-Niveau- und Mehr-Elektronen-System zu erweitern. Des Weiteren ist die RWA zu überdenken, damit noch stärkere Verstimmung erreicht werden können, da in Experimenten bzgl. erheblich nicht resonanter Emitter starkes *anti-bunching* gemessen wurde [19], entgegen der hier präsentierten theoretischen Ergebnisse.

5 Danksagung

Abschließend möchte ich meinen Dank an Prof. Dr. Frank Jahnke für das Ermöglichen dieser Arbeit und die herzliche Aufnahme in der Arbeitsgruppe aussprechen. Des Weiteren bedanke ich mich bei Prof. Dr. Thomas Frauenheim als Zweitgutachter.

Neben der Arbeitsgruppe im Allgemeinen, möchte ich mich insbesondere bei Dr. Christopher Gies für die intensive Betreuung meiner Arbeit bedanken.

Tiefe Dankbarkeit richtet sich an meine Freundin Flora Daumal sowie an meine Familie, die mir stets zur Seite standen und mir einen Rückhalt geboten haben.

Nicht zu vergessen sind all diejenigen, die hier nicht namentlich erwähnt worden sind, denen aber dennoch mein persönlich Dank gilt.

Literatur

1. Allen, L. *u. a.* *Optical Resonance And Two-Level Atoms* 1. (Dover Publications, 1987).
2. Breuer, H.-P. *u. a.* *The Theory Of Open Quantum Systems* 1. Aufl. (Oxford University Press, 2002).
3. Cohen-Tannoudji, C. *u. a.* *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics* 1. Aufl. (John Wiley & Sons, 1997).
4. Del Valle, E. *u. a.* Entanglement and lasing with two quantum dots in a microcavity. *Physical Review B* **76**, 1–8 (Dez. 2007).
5. Delvalle, E. *u. a.* The steady state of two quantum dots in a cavity. *Superlattices and Microstructures* **43**, 465–469 (Mai 2008).
6. del Valle Reboul, E. *Quantum Electrodynamics with Quantum Dots in Microcavities* Diss. (Universidad Autónoma de Madrid, 2009).
7. Gartner, P. The two-level atom laser: analytical results and the laser transition. *arXiv*, 1105.2189v2 (2011).
8. Gies, C. *u. a.* in *Quantum Optics with Semiconductor Nanostructures* (Hrsg. Jahnke, F.) (Woodhead Publishing, Cambridge, 2012).
9. Gies, C. *u. a.* Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers. *Physical Review A* **75**, (Jan. 2007).
10. Gies, C. *u. a.* The single quantum dot-laser: lasing and strong coupling in the high-excitation regime. *Optics Express* **19**, 14370–14388 (Juli 2011).
11. Hohenester, U. *u. a.* Phonon-assisted transitions from quantum dot excitons to cavity photons. *Physical Review B* **80**, 201311 (Nov. 2009).
12. Jaynes, E. *u. a.* Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE* **51**, 89–109 (1963).
13. Kavokin, A. V. *u. a.* *Microcavities* 1. (Oxford University Press, 2007).
14. Khitrova, G. *u. a.* Quantum dots: Collective radiance. *Nature Physics* **3**, 84–86 (2007).
15. Kim, H. *u. a.* Strong coupling between two quantum dots and a photonic crystal cavity using magnetic field tuning. *Optics express* **19**, 2589 (Jan. 2011).

16. Lambropoulos, P. *u. a. Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information: An Introduction* 1. (Springer Verlag, 2006).
17. Laucht, a. *u. a.* Dephasing of Exciton Polaritons in Photoexcited InGaAs Quantum Dots in GaAs Nanocavities. *Physical Review Letters* **103**, 1–4 (Aug. 2009).
18. Laucht, a. *u. a.* Mutual coupling of two semiconductor quantum dots via an optical nanocavity. *Physical Review B* **82**, 075305 (Aug. 2010).
19. Laucht, a. *u. a.* Temporal monitoring of nonresonant feeding of semiconductor nanocavity modes by quantum dot multiexciton transitions. *Physical Review B* **81**, 1–4 (Juni 2010).
20. Laussy, F. *u. a.* Strong Coupling of Quantum Dots in Microcavities. *Physical Review Letters* **101**, 083601 (Aug. 2008).
21. Leonardi, C. *u. a.* Dicke Model and the Theory of Driven and Spontaneous Emission. *Rivista Del Nouvo Cimento* **9**, 1–85 (1986).
22. Mandel, L. *u. a. Optical Coherence and Quantum Optics* 1. (Cambridge University Press, 1995).
23. Michler, P. *Single Semiconductor Quantum Dots* 1. Aufl. (Springer Verlag, 2009).
24. Mu, Y. *u. a.* One-Atom Laser. *Physical Review A* **46**, 5944 (1992).
25. Power, E. A. *Introductory Quantum Electrodynamics* 1. Aufl. (Longmans, Green und Co LTD, 1964).
26. Scheck, F. *Theoretische Physik 3: Klassische Feldtheorie* 3. Aufl. (Springer Verlag, 2009).
27. Scheck, F. *Theoretische Physik 4: Quantisierte Felder* 2. Aufl. (Springer Verlag, 2007).
28. Scheibner, M. *u. a.* Superradiance of quantum dots. *Nature Physics* **3**, 106–110 (Jan. 2007).
29. Strauf, S. *u. a.* Self-Tuned Quantum Dot Gain in Photonic Crystal Lasers. *Physical Review Letters* **96**, 25–28 (März 2006).
30. Straumann, N. *Relativistische Quantentheorie: Eine Einführung in die Quantenfeldtheorie* 1. Aufl. (Springer Verlag, 2004).
31. Tavis, M. *u. a.* Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian. *Physical Review* **170**, 379–384 (1968).
32. Yamamoto, Y. *u. a. Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics - Springer Tracts in Modern Physics 169* 1. Aufl. (Springer Verlag, 2000).