Bewegung im Magnetfeld

19/07/17

Ziel: Hamiltonoperator $\mathcal{H}$, führt auf Zeemaneffekt

Ausgangspunkt: $F = m \cdot \dot{\vec{v}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ (**) Lorentzkraft

mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ (*) E-Feld

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ Magnetfeld

Zwischenziel: part. Ableitungen loswerden + Rotation vereinfachen

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial x_i}\dot{x}_i \quad (*)$$

i-Komponente: $\sum_{kl} \varepsilon_{ikl} \dot{x}_k \sum_{mn} \varepsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial x_m} A_n = \vec{v} \times \vec{B}$

$$= \sum_{kmn} \dot{x}_k \frac{\partial A_n}{\partial x_m} (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})$$

$$= \sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \underbrace{\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}}$$

~ addieren zu 0!

Newton-BWG-Glg:

i-Komp: $F_i = -q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\phi + \frac{dA_i}{dt} + \underbrace{\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{v}\vec{A})}\right)$

Lagrange-Form: $\frac{d}{dt}(mv_i + qA_i) = q\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{v}\vec{A} - \phi)$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = mv_i + qA_i \\ &\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(q\vec{v}\vec{A} - q\phi) \end{aligned} \right. \quad (3)$$

(3) führt auf:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + q\dot{\vec{x}}\vec{A} - q\phi$$

mit $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \rightarrow m\dot{\vec{x}} + q\vec{A}$ und $\mathcal{H} = \vec{p}\dot{\vec{x}} - L = \dot{\vec{x}}\underbrace{(m\dot{\vec{x}} + q\vec{A})}_{\vec{p}} - \underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + q\dot{\vec{x}}\vec{A} - q\phi\right)}_{L}$

$$= \frac{m}{2}\vec{v}^2 - q\phi, \quad \text{wobei } \vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m}$$

Legendre-Trafo

damit Hamiltonfunktion:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi} \xrightarrow[\vec{\nabla}\vec{A} = 0]{\text{Coulomb-Eichung}} \mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\vec{p}^2 + q^2\vec{A}^2 - q\vec{A}\vec{p}) + q\phi$$

Diamagnetismus, Paramagnetismus

über <u>Lorentzkraft</u> & <u>Potentiale</u> <u>Newton-BWG-Glg</u> aufgestellt und über Elimination partieller t Ableitung und Vereinfachen von Rotation <u>Äquivalenz zur Lagrangegleichung</u> gezeigt, wodurch über verallgemeinerten <u>Impuls</u> $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ <u>Hamiltonglg</u> gefunden werden kann

Bemerkung: Hier Elektronengas, also keine Coulomb-WW

19/07/17

Bewegung im Magnetfeld

Ziel: Hamiltonoperator $\mathcal{H}$, führt auf Zeemaneffekt

Ausgangspunkt: $F = m\cdot\dot{\vec v} = q(\vec E + \vec v \times \vec B)$ (**) Lorentzkraft

mit $\vec E = -\vec\nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec A$ (*) E-Feld

$\vec B = \vec\nabla \times \vec A$ Magnetfeld

Zwischenziel: part. Ableitungen loswerden + Rotation vereinfachen

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{d\vec A}{dt} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial x_i}\dot x_i \quad (*)$$

i-Komponente: $\sum_{kl}\varepsilon_{ikl}\dot x_k \sum_{mn}\varepsilon_{lmn}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n = \vec v\times\vec B$

$$= \sum_{kmn}\dot x_k \frac{\partial A_n}{\partial x_m}(\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})$$

$$= \sum_k \dot x_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \sum_k \dot x_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

~ addieren zu 0!

Newton-BWG-Glg:

i-Komp: $F_i = -q\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\phi + \frac{dA_i}{dt} + \underbrace{\sum_k \dot x_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i}}_{\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec v\vec A)}\right)$

Lagrange-Form: $\frac{d}{dt}(mv_i + qA_i) = q\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec v\vec A - \phi)$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} = mv_i + qA_i \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(q\vec v\vec A - q\phi) \end{array}\right. \quad (3)$$

(3) führt auf:

$$L(\vec x, \dot{\vec x}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec x}^2 + q\dot{\vec x}\vec A - q\phi$$

mit $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot x_i}$ und $\mathcal{H} = \vec p\dot{\vec x} - L = \underbrace{\dot{\vec x}(m\dot{\vec x} + q\vec A)}_{\vec p} - \underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{\vec x}^2 + q\dot{\vec x}\vec A - q\phi\right)}_{L}$

$= m\dot x_i + qA_i$

$\to m\dot{\vec x} + q\vec A$

$$= \frac{m}{2}\vec v^2 - q\phi, \quad \text{wobei } \vec v = \dot{\vec x} = \frac{\vec p - q\vec A}{m}$$

Legendre-Trafo

damit Hamiltonfunktion:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\vec p - q\vec A)^2 + q\phi} \xrightarrow[\vec\nabla\vec A = 0]{\text{Coulomb-Eichung}} \mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\vec p^2 + q^2\vec A^2 - q\vec A\vec p) + q\phi$$

Diamagnetismus

Paramagnetismus

über Lorentzkraft & Potentiale Newton-BWG-Glg aufgestellt und über Elimination partieller t Ableitung und Vereinfachen von Rotation Äquivalenz zur Lagrangegleichung gezeigt, wodurch über verallgemeinerten Impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot x_i}$ Hamiltonglg gefunden werden kann

Bemerkung: Hier Elektronengas, also keine Coulomb-WW

5. Bewegung im elektromagnetischen Feld

5.1 Elektrodynamik

Ziel: zunächst klass. Hamiltonfunkt. finden die Teilchen beschreibt, auf die Kraft im elm. Feld wirkt

Vorgehen: ohne BB ist Newt. BG zu Lagr. II äquivalent, aus L kann H bestimmt werden

Ausgangspunkt: Newtonsche Bewegungsgleichung mit Lorentzkraft

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} m\vec{v} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \quad ; \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

wollen Gleichung in Form bringen, die nur totale Zeitableit und Ortsableitung enthält entspr Lagr. Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_\ell}\frac{\partial x_\ell}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} m\vec{v} = q\vec{v} \times \operatorname{rot}\vec{A} + q\left[-\operatorname{grad}\phi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \sum_{\ell=1}^{3} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_\ell}\dot{x}_\ell\right]$$

i-te Komponente

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + qA_i) = q\sum_{k\ell} \varepsilon_{ik\ell}\, \dot{x}_k \underbrace{(\operatorname{rot}\vec{A})_\ell}_{\sum_{mn} \varepsilon_{\ell mn}\frac{\partial}{\partial x_m}A_n} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + q\sum_\ell \frac{\partial A_i}{\partial x_\ell}\dot{x}_\ell$$

$$q\sum_{kmn} (\delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km})\,\dot{x}_k \frac{\partial A_n}{\partial x_m}$$

$$= q\sum_k \dot{x}_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$= q\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{v}\cdot\vec{A} - \phi)$$

wobei benutzt wurde

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum \varepsilon_{ik\ell}\, a_k b_\ell \qquad \sum_\ell \varepsilon_{\ell ik}\varepsilon_{\ell mn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$$

in jedem Fall ein Antizyklischer

in jedem Fall zyklisch

• für Lagrange-Funktion, die diese Gleichung als Euler-Lagrange-Gleichung liefert, muss gelten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \underset{①}{m\dot{x}_i} + \underset{②}{qA_i}$$

↕ gleicher Term

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = q\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_i \dot{x}_i A_i - \phi\right) \quad ③$$

$$L = L(x_i, \dot{x}_i, t) = \underset{①}{\frac{m}{2}\sum_i \dot{x}_i^2} + \underset{②}{q\sum_i \dot{x}_i A_i} \underset{③}{- q\phi}$$

• kanon. Impuls: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i$

Hamiltonfunkt.: $H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$

Legendre-Trafo

$$H = \sum_i \left(m\dot{x}_i^2 + qA_i\dot{x}_i - \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 - q\dot{x}_i A_i + q\phi\right)$$

$$= \sum_i \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 + q\phi \quad \text{mit } \dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$$

$$\boxed{H = \sum_i \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)^2 + q\phi}$$

beachte: $L = L(x_i, \dot{x}_i, t)$
$H = H(x_i, p_i, t)$

... klass. Hamilton-Funkt. für geladenes Teilchen im elm. Feld

5.2 Quantisierung der Teilchenbewegung im klass. elektromagn. Feld

$$p_i \to \hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + q\phi}$$

... Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{i\hbar q}{2m}(\vec\nabla\vec A + \vec A\vec\nabla) + \frac{q^2}{2m}A^2 + q\phi$$

• Coulomb-Eichung: $\vec\nabla\vec A = 0$

$$\frac{1}{2}(\vec\nabla\vec A + \vec A\vec\nabla)\psi = \vec A\vec\nabla\psi = \vec\nabla\vec A\psi$$

$$\boxed{H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{q}{m}\vec p\cdot\vec A + \frac{q^2}{2m}A^2 + q\phi}$$

Hamiltonian mit "$\vec p\cdot\vec A$-Kopplung"

5.3 Spezialfall: konstantes Magnetfeld

• für räuml. konst. $\vec B$-Feld lässt sich $\vec A$ schreiben als

$$\vec A = -\frac{1}{2}(\vec r\times\vec B)$$

$$A_k = -\frac{1}{2}\sum_{\ell m}\varepsilon_{k\ell m}x_\ell B_m$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec A)_i = \sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k$$

$$\sum_k \varepsilon_{kij}\varepsilon_{k\ell m} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{jkm}\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kjm}B_m$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{jm}(\delta_{ij}\delta_{jm} - \delta_{im})B_m$$

$$= -\frac{1}{2}(1-3)B_i = B_i$$

diese Form von $\vec A$ ist ebenfalls konsistent mit Coulomb-Eichung $\vec\nabla\vec A = 0$

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}A_k = 0 \qquad \text{mit } \frac{\partial}{\partial x_k}x_\ell = \delta$$

da $\varepsilon_{kkm} = 0$

• im Hamiltonop. entsteht

$$\vec A\cdot\vec p = -\frac{1}{2}(\vec r\times\vec B)\cdot\vec p$$

$$= \frac{1}{2}(\vec r\times\vec p)\cdot\vec B$$

$$= \frac{1}{2}\vec L\cdot\vec B$$

zykl. Vertauschung im Spatprodukt

$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = (\vec c\times\vec a)\cdot\vec b$$

$$A^2 = \frac{1}{4}(\vec r\times\vec B)^2 \quad \parallel z$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\sum_{jk}x_j^2B_k^2 - \sum_{j\ell}x_jB_jx_\ell B_\ell\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\vec r^2\vec B^2 - (\vec r\cdot\vec B)^2\right]$$

Annahme: $\vec B = \vec e_z B$

$$(\vec r\times\vec B)^2 = \sum_i(\vec r\times\vec B)_i^2$$

$$= \sum \varepsilon_{ijk}x_jB_k\varepsilon_{i\ell m}x_\ell B_m$$

$$= \sum(\delta_{j\ell}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{k\ell})\,x_jB_kx_\ell B_m$$

aus $\vec p \vec A$, L aus Spatprodukt

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{q}{2m}\vec L\cdot\vec B + \frac{q^2}{8m}\left[\vec r^2\vec B^2 - (\vec r\cdot\vec B)^2\right]$$

Teilbeitrag zum Paramagnetismus (es fehlt noch Spin) $\gg$ Diamagnetismus

⇒ an dieser Stelle ist harmon. Oszillator versteckt $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + Cx^2\right)$

⇒ Landau-Quantisierung im B-Feld

→ Landau-Niveaus

GENAUER: siehe Seminarvort

5.4 Normaler Zeeman-Effekt des H-Atoms ohne Spin-Berücksichtigung

H-Atom im konst. $\vec B$-Feld $\qquad \vec B = B\,\vec e_z$

$$H = H_0 - \frac{q}{2m} B L_z$$

Hamilton-Op. des H-Atom (H_0); $\vec B$-Feld in z-Richtung

Eigenfunktionen zu H_0 sind auch Lösungen zu H

$$H\phi(\vec r) = E\phi(\vec r) \qquad \phi(\vec r) = R(r)\,Y_{l m_l}(\vartheta,\varphi)$$

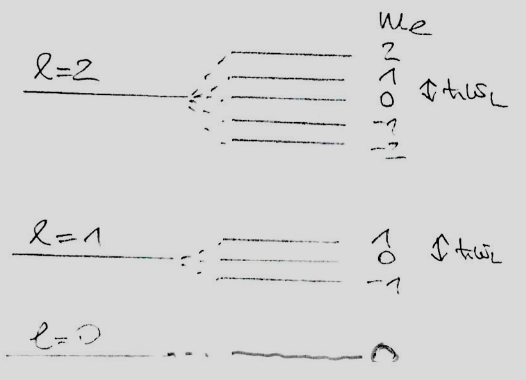
m_l nicht mit Masse m verwechseln

da $Y_{l m_l}$ auch Eigenfunktionen zu L_z: $L_z Y_{l m_l} = \hbar m_l Y_{l m_l}$

$$\boxed{\begin{aligned} E_{n l m_l} &= -\frac{E_0}{n^2} - \frac{qB}{2m}\hbar m_l \\ &= -\frac{E_0}{n^2} + \hbar\omega_L m_l \end{aligned}}$$

$q = -e$

$\omega_L = \frac{eB}{2m}$ … Larmor-Frequenz



- Magnetfeld hebt $(2l+1)$-fache Entartung auf
- Aufspaltung unabh. von l in äquidistante Niveaus

⚠ tatsächliche Aufspaltung für H-Atom anders: es entsteht gerade Anzahl von Niveaus (als wäre Drehimpuls halbzahlig)

$\Rightarrow$ es fehlt Berücksichtigung von Spin

- magnetisches Moment

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L} \qquad \mu_B = \frac{e}{2m}\hbar \quad \text{... Bohrsches Magneton}$$

$$H_{para} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = \frac{\mu_B}{\hbar}\,\vec{L}\cdot\vec{B}$$

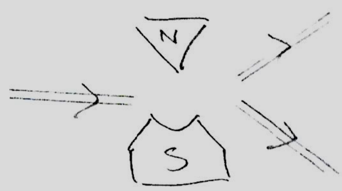
6. Spin

6.1 Experimentelle Befunde

- Wasserstoff im Grundzustand

$l = 0 \Rightarrow$ kein Bahndrehimpuls

Aufspaltung des Strahls in inhom. magn. Feld



$$\vec{F} = (\vec{\mu}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

Kraft im $\vec{B}$-Feld — magn. Moment

a) Woher kommt magn. Moment?

b) Warum Aufspaltung in gerade Anzahl? (Gesamtdrehimpuls halbzahlig?)

- Stern-Gerlach-Experiment (1922)

Silber-Atome: kugelsymm. Ladungsverteilg. & ein 5s-Elektron
$\Rightarrow$ gesamter Bahndrehimpuls verschwindet
- Aufspaltung in 2 Strahlen

19/07/17

Bewegung im Magnetfeld: 2D Elektronengas ⊥ B-Feld

Ziel: Hamiltonfunktion auf Szenario anpassen
+ algebraisch möglichst einfach darstellen

Ausgangspunkt: $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}^2 - q\hat{A})^2$ Hamiltonoperator für EM-Feld

konst. Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z \rightarrow A = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r})$, denn $B = \mathrm{rot} A = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{r})$

Zwischenziel: $\vec{A}$ konkret bestimmen & $\mathcal{H}$ anpassen

mit $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B})$ folgt: $\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{B}(\underbrace{\vec{\nabla}\vec{r}}_{\to 2}) - \vec{r}(\underbrace{\vec{\nabla}\vec{B}}_{\to 0})\right] = \vec{B}$

2 Dimensionen! Maxwell

$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-By\\Bx\\0\end{pmatrix} = \frac{B}{2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$

und $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\sum_{i=x,y}(p_i - qA_i)^2 \overset{q=-e}{=} \frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \frac{eB}{2}y\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + \frac{eB}{2}x\right)^2\right]$

$= \frac{\hbar^2}{2ml^2}\left[\underbrace{\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_x} - \frac{\xi_y}{2}\right)^2}_{-\frac{\partial^2}{\partial\xi_x^2} + \frac{\xi_y^2}{4} + i\frac{\xi_y}{2}\frac{\partial}{\partial\xi_x}\cdot 2} + \underbrace{\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_y} + \frac{\xi_x}{2}\right)^2}_{-\frac{\partial^2}{\partial\xi_y^2} + \frac{\xi_x^2}{4} - i\frac{\xi_x}{2}\frac{\partial}{\partial\xi_y}\cdot 2}\right]$ $\quad l^2 = \frac{\hbar}{eB}$, $\vec{r} = l\vec{\xi}$

3 Komp. von $\vec{L}$, $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ wo!

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = \frac{\hbar}{2}\cdot\overbrace{\frac{eB}{m}}^{\omega_c}\left[\underbrace{-\Delta_\xi + \frac{\xi^2}{4}}_{\text{erinnert an Harm. Osz. (aber in 2D!)}} + \vec{L}_z\right]}$$

$= -i\left[\xi_x\frac{\partial}{\partial\xi_y} - \xi_y\frac{\partial}{\partial\xi_x}\right]$

Nun $\mathcal{H}$ angepasst, jetzt Algebra!

neue Operatoren: $\alpha = \frac{\xi_x - i\xi_y}{2}$ $\quad \beta = \frac{\partial}{\partial\xi_x} - i\frac{\partial}{\partial\xi_y}$ $\quad$ Bemerkung $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^+ = -\frac{\partial}{\partial x_i}$ vgl. Impulsoperator

$\alpha^+ = \frac{\xi_x + i\xi_y}{2}$ $\quad \beta^+ = -\frac{\partial}{\partial\xi_x} - i\frac{\partial}{\partial\xi_y}$

trivial klar: $[\alpha,\alpha^+] = 0$, $[\beta,\beta^+] = 0$

außerdem: $[\alpha,\beta^+] = \alpha\beta^+ - \beta^+\alpha = -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\bar{z} = \bar{z}\partial_{\bar{z}} + 1 + \bar{z}\partial_{\bar{z}}$ $= 1$, denn $\alpha = \bar{z}/2$, $\alpha^+ = z/2$, $\beta = \partial_z$, $\beta^+ = -\partial_{\bar{z}}$

es gilt: $\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[\alpha^+\alpha + \beta^+\beta + \alpha^+\beta + \alpha\beta^+\right]$ $\quad \alpha\beta^+ = 1 + \beta^+\alpha$

$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[(\alpha^+ + \beta^+)(\alpha + \beta) + 1\right]$

$= \hbar\omega\left[a^+a + 1\right]$, wobei $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)$

damit L_z:

$L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$

= ... siehe nächste Seite

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[\frac{g^2}{4} - \Delta + L_z\right]$$

Kommutatoren:

$[\alpha, \alpha^+] = [\beta, \beta^+] = [\alpha, \beta] = 0$

$[\alpha, \beta^+] = \alpha\beta^+ - \beta^+\alpha \qquad [\alpha^+, \beta] = -1$

$= -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\bar{z}$ ①

$= 1$

$$\alpha = \frac{x - iy}{2} = \frac{\bar{z}}{2} \qquad \beta = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\partial_z$$

$$\alpha^+ = \frac{x + iy}{2} = \frac{z}{2} \qquad \beta^+ = -\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = -2\partial_{\bar{z}}$$

trivial:

$$\frac{g^2}{4} = \frac{z\bar{z}}{4} = \alpha\alpha^+$$

$$-\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}} = \beta\beta^+$$

$$\frac{2\mathcal{H}}{\hbar\omega_c} = \alpha^+\alpha + \beta^+\beta + \alpha^+\beta + \underbrace{\alpha\beta^+}_{=\beta^+\alpha + 1}$$

$$= \underbrace{(\alpha^+ + \beta^+)}_{\sqrt{2}a^+}\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\sqrt{2}a} + 1$$

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c\left(a^+a + \tfrac{1}{2}\right)$$

etwas genauer Hingucken:

$$L_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

denn: $\alpha\beta^+ + \alpha^+\beta$

$= -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + z\partial_z$

$= -(\partial_{\bar{z}}\bar{z} - 1) + (\partial_z z - 1)$

$= \beta^+\alpha + \beta\alpha^+$

$$= \alpha\beta^+ + \alpha^+\beta \quad , = \beta^+\alpha + \beta\alpha^+$$

$$\overset{①}{=} \frac{1}{2}\left[\alpha\beta^+ + \beta^+\alpha + 1 + \alpha^+\beta + \beta\alpha^+ - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\alpha\beta^+ + \beta\alpha^+ + \alpha^+\beta + \beta^+\alpha\right]$$

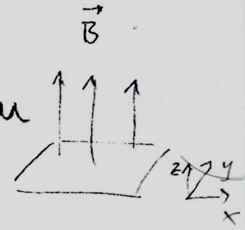
$$= \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)(\alpha^+ + \beta^+) - (\alpha^+ - \beta^+)(\alpha - \beta)\right]$$

$$= aa^+ - bb^+ \quad , \quad a = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \quad , \quad b = \frac{\alpha^+ - \beta^+}{\sqrt{2}}$$

Bemerkung: Magnetfeld führt zu zusätzlicher Quantisierung

Einschränkung auf Kreisbahnen, Zyklotronbewegung

c) Zweidim. Elektronengas im senkr. Magnetfeld



- Elektron soll sich in der x-y-Ebene eines QW unter dem Einfluß eines Magnetfeldes in z-Richtung bewegen

$$\vec{B} = B\vec{e}_z$$

aus $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ folgt

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} = \frac{B}{2}\,\vec{e}_z\times\vec{r} = \frac{B}{2}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ 0 & 0 & 1\\ x & y & z\end{vmatrix} = \frac{B}{2}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$$

da

$$\vec{B} = \frac{B}{2}\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & 0\end{vmatrix} = B\vec{e}_z$$

- Hamiltonian für 2d-Elektron (Ladung: $-e$) im magn. Feld

$q = -e$

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{j=x,y}(p_j + eA_j)^2 \qquad \vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$$

(freie Elektronen im Magnetf., Coul.-WW inkl.)

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{\hbar}\frac{B}{2}y\right)^2 + \left(-i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{\hbar}\frac{B}{2}x\right)^2\right]$$

VZ-Wechsel notwendig?

$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2\ell^2}\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{2\ell^2}\right)^2\right]$$

wie genau?

$$= \frac{\hbar^2}{2m\ell^2}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial\varrho_x} + \frac{\varrho_y}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial\varrho_y} - \frac{\varrho_x}{2}\right)^2\right]$$

$$\ell^2 = \frac{\hbar}{eB} \qquad \vec{r} = \ell\vec{\varrho}$$

Dimensionslose Größen

$$\frac{\hbar^2}{m\ell^2} = \hbar\frac{eB}{m} = \hbar\omega_c \quad \text{... Zyklotron Energie}$$

$$L_z = -i\left[\varrho_x\frac{\partial}{\partial\varrho_y} - \varrho_y\frac{\partial}{\partial\varrho_x}\right]$$

wo $\hbar$? $-i\hbar\ \vec{x}\times\vec{\nabla} = \begin{matrix} y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\\ z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\end{matrix}$

$$\Rightarrow H = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial\varrho_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varrho_y^2}\right) + \frac{\varrho_x^2 + \varrho_y^2}{4} + L_z\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[-\nabla_\varrho^2 + \frac{\varrho^2}{4} + L_z\right]$$

$\Rightarrow$ Hamiltonop. eines zweidim. harm. Osz. (quadr. Potential)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad x = \ell\varrho$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m\ell^2}\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{m\ell^2\omega^2}{2}\varrho^2$$

• Einführung von Erzeugungs- und Vernichtungsop. (analog zum harmon. Oszill.)

$$\alpha = \frac{\varrho_x - i\varrho_y}{2} \qquad \beta = \frac{\partial}{\partial \varrho_x} - i\frac{\partial}{\partial \varrho_y}$$

$1b\checkmark$

$1a + 3c = 0$

$2a\checkmark$

$2b + 4d = 0$

also $L_z = \alpha\beta^+ + \alpha^+\beta$

$$\alpha^+ = \frac{\varrho_x + i\varrho_y}{2} \qquad \beta^+ = -\frac{\partial}{\partial \varrho_x} - i\frac{\partial}{\partial \varrho_y}$$

$\alpha\alpha^+ = \frac{\alpha\alpha^+}{2} + \frac{\alpha^+\alpha}{2}$

$\beta\beta^+ = \frac{\beta\beta^+}{2} + \frac{\beta^+\beta}{2}$

$[\alpha, \alpha^+] = 0$ (Ortsop. kommut. untereinander)

$[\beta, \beta^+] = 0$ (Impulsop. kommut. untereinander)

$$\boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^+ + \beta^+)}$$

Def: Inter-Landau-Niveau Erz. & Vernichtgsop.

$$[a, a^+] = aa^+ - a^+a = \frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)(\alpha^+ + \beta^+) - (\alpha^+ + \beta^+)(\alpha + \beta)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha + \beta\alpha^+ - \alpha^+\beta\right]$$

da $[\alpha, \alpha^+] = 0$ und $[\beta, \beta^+] = 0$

$$\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha = \frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}\left[(x - iy)(-p_x - ip_y) - (-p_x - ip_y)(x - iy)\right]$$

$(AB)^+ = B^+A^+$

$$= \frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}\left[-\underbrace{[x, p_x]}_{i\hbar} - \underbrace{[y, p_y]}_{i\hbar}\right]$$

$$= 1$$ da $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

$$\beta\alpha^+ - \alpha^+\beta = 1 \checkmark$$ dto.

denn $(\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha)^+ = \beta\alpha^+ - \alpha^+\beta = (1)^+ = 1$

$$[a, a^+] = 1$$

$$[a, a] = [a^+, a^+] = 0$$ ... Bose-VR

$$\boxed{b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^+ - \beta^+) \qquad b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)}$$

Def: Intra-Landau-Niveau Erz & Vernichtungsop.

$$[b, b^+] = bb^+ - b^+b = \frac{1}{2}\left[(\alpha^+ - \beta^+)(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)(\alpha^+ - \beta^+)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha}_{1} + \underbrace{\beta\alpha^+ - \alpha^+\beta}_{1}\right] = 1$$

$[b,b] = [b^+, b^+] = 0$ ... Bose-VR

• Umkehr-Relationen:

$$\varrho_x = \alpha + \alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\underbrace{a+b^+}_{\sqrt{2}\,\alpha} + \underbrace{a^+ + b}_{\sqrt{2}\,\alpha^+}\Big)$$

$$-i\varrho_y = \alpha - \alpha^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a+b^+ - a^+ - b\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_x} = \frac{1}{2}(\beta-\beta^+) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\underbrace{a-b^+}_{\sqrt{2}\,\beta} \underbrace{- a^+ + b}_{-\sqrt{2}\,\beta^+}\Big)$$

$$-i\frac{\partial}{\partial \varrho_y} = \frac{1}{2}(\beta+\beta^+) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(a-b^+ + a^+ - b\right)$$

• Hamiltonian durch Erz. und Vernichtungsop. ausdrücken

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial\varrho_x} + \frac{\varrho_y}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial\varrho_y} - \frac{\varrho_x}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left\{\left[\frac{i}{2\sqrt{2}}(2a-2a^+)\right]^2 + \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}(2a+2a^+)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left\{-\frac{1}{2}(a-a^+)^2 + \frac{1}{2}(a+a^+)^2\right\}$$

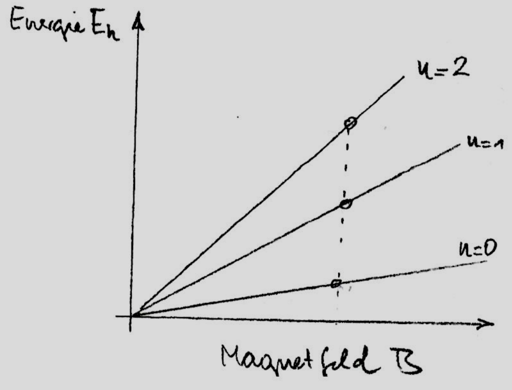
$$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left\{-\frac{1}{2}(\cancel{a^2} - aa^+ - a^+a + \cancel{a^{+2}}) + \frac{1}{2}(\cancel{a^2} + aa^+ + a^+a + \cancel{a^{+2}})\right\}$$

$$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(aa^+ + a^+a\right)$$

$$\boxed{H = \hbar\omega_c\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)}$$

warum Ganzzahlig?

$\Rightarrow E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$ $\quad n = 0, 1, \ldots$



$$L_z = -i\left[\varrho_x \frac{\partial}{\partial \varrho_y} - \varrho_y \frac{\partial}{\partial \varrho_x}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(a+b^+ + a^+ + b)(a-b^+ + a^+ - b) - (a+b^+ - a^+ - b)(a-b^+ - a^+ + b)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2(aa^+ + a^+a) - 2(bb^+ + b^+b)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4a^+a + 2 \quad - 4b^+b - 2\right]$$

$$\boxed{L_z = a^+a - b^+b}$$

Warum so einfach trennbar?

- gemeins. Satz vom EF für H und L_z:

$$\phi_{nn'} = |n\rangle |n'\rangle \quad \text{mit } a^+a|n\rangle = n|n\rangle$$
$$\text{und } b^+b|n'\rangle = n'|n'\rangle$$

⇒ Eigenwertgleichg

$$\boxed{\begin{array}{l} H\phi_{nn'} = E_n \phi_{nn'} \\ L_z \phi_{nn'} = (n-n')\phi_{nn'} \end{array}}$$

mit $m = n - n'$

⇒ Energieeigenwerte sind ∞ fach entartet mit n'

Grundzustand ϕ_{00}

$$a\phi_{00} = a|0\rangle|0\rangle = 0$$
$$b\phi_{00} = |0\rangle b|0\rangle = 0$$

mit

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\varrho_x}{2} + \frac{\partial}{\partial \varrho_x} - i\left(\frac{\varrho_y}{2} + \frac{\partial}{\partial \varrho_y}\right)\right]$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\varrho_x}{2} + \frac{\partial}{\partial \varrho_x} + i\left(\frac{\varrho_y}{2} + \frac{\partial}{\partial \varrho_y}\right)\right]$$

folgt
$$\boxed{\phi_{00}(\varrho_x, \varrho_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varrho_x^2 + \varrho_y^2}{4}}}$$

Norm, $\int e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 2\pi$

da
$$\frac{\partial}{\partial \varrho_{x,y}} \phi_{00} = -\frac{\varrho_{x,y}}{2} \phi_{00}$$

bel. Zustand $\phi_{nn'}$

$$\boxed{\phi_{nn'}(\varrho_x, \varrho_y) = \frac{(a^+)^n (b^+)^{n'}}{\sqrt{n!\, n'!}} \phi_{00}(\varrho_x, \varrho_y)}$$

• für Löcher (Ladung $+e$) folgt

$$H^{(h)} = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left[\left(i\frac{\partial}{\partial\varrho_x} - \frac{\varrho_y}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial\varrho_y} + \frac{\varrho_x}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\hbar\omega_c}{2}\left\{\left[\frac{i}{2\sqrt{2}}(2b - 2b^+)\right]^2 + \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}(-2b - 2b^+)\right]^2\right\}$$

$$= \hbar\omega_c\left(b^+b + \frac{1}{2}\right)$$

$$L_z^{(h)} = a^+a - b^+b$$

$\curvearrowright$ Eigenwertgleichungen:

$$H^{(h)}\phi_{nn'} = E_{n'}\phi_{nn'}$$

$$L_z^{(h)}\phi_{nn'} = (n - n')\phi_{nn'}$$

d.h. n und n' tauschen die Rolle und $L_z^{(h)} = -L_z^{(e)}$ (für n und n' vert.)

$\curvearrowright$

$\alpha := \frac{\hat{z}}{2} \quad \beta = \partial_z$

$\alpha^+ = \frac{\hat{\bar{z}}}{2} \quad \beta^+ = 2 - \partial_{\bar{z}}$

dann $[\alpha, \alpha^+] = 0$, $[\beta + \beta^+] = 0$, $[\alpha, \beta] = 0$

$[\alpha, \beta^+] = -\bar{z}\,\partial_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}}\bar{z}$

$= -\bar{z}\partial_{\bar{z}} + 1 + \bar{z}\partial_{\bar{z}}$

$= 1$

und $\left[\frac{x^2+y^2}{4} - \Delta_g \right. \quad \frac{\hbar\omega}{2}$

$\frac{1}{4} z\bar{z} + 4\partial_z\partial_{\bar{z}} + (z\partial_{\bar{z}} - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$

$= \alpha^+\alpha + \beta\beta^+ + \alpha^+\beta + \alpha\beta^+$

$= \alpha^+\alpha + \beta\beta^+ + 1 + \beta^+\alpha + \alpha^+\beta$

$= (\alpha^+ + \beta^+)(\alpha + \beta) + 1$

$= \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^+ = \cancel{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)} \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$= -\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{x - iy}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Laom Hlettel

$\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$

$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$

$-\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

$x = z + \bar{z}$

$\partial z^2 + \partial\bar{z}^2 + 2\partial z\partial\bar{z}$

$y = i(\bar{z} - z)$

$-\left[\partial_{\bar{z}}^2 + \partial_z^2 - 2\partial_z\partial_{\bar{z}}\right]$

$\Rightarrow \Delta = -4\partial_z\partial_{\bar{z}}$

$\cancel{x - i\frac{\partial}{\partial y}}$

$-i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$

$= -i\left[\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) - i\left(\frac{\bar{z} - z}{2}\right)(\partial_z + \partial_{\bar{z}})\right.$

$= 2\left[z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}}\right]$

$= 2h \quad -\beta^+$

$= \alpha^+\beta + \alpha\beta^+$

$i(\bar{z} - z)$

$i\frac{\partial}{}$

Bewegung im Magnetfeld

2D Elektronengas

zusätzliche Rechnungen

$[\alpha,\alpha^+]=0 \quad , [\beta,\beta^+]=0 \quad , \quad [\alpha,\beta^+]=1$

$$-\Delta_g = \alpha^+\alpha = \alpha\alpha^+$$

$$+i\ \frac{B^2}{4} = \beta\beta^+ = \beta^+\beta$$

$$L_z = \alpha\beta^+ + \alpha^+\beta = 1 + \beta^+\alpha + \alpha^+\beta$$

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega_c}{2}\Big[\underbrace{\alpha^+\alpha + \beta^+\beta + \beta^+\alpha + \alpha^+\beta}_{(\alpha^+ + \beta^+)(\alpha+\beta)} + 1\Big]$$

$$= \hbar\omega_c\Big[\underbrace{\frac{(\alpha^+ + \beta^+)}{\sqrt{2}}}_{:=a^+}\ \underbrace{\frac{(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}}}_{\Rightarrow a} + \frac{1}{2}\Big]$$

$$= \hbar\omega_c\left[a^+a + \tfrac{1}{2}\right]$$

$\alpha = x + iy = z \quad , \bar{z} = x - iy$

$\alpha^+ = \bar{z}$

$\beta = \frac{\partial}{\partial z} \qquad 2\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \qquad \left[\frac{\partial}{\partial z}\right]^+ = \frac{1}{2}\left[-\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right]$

$\beta^+ = -\frac{\partial}{\partial z} \qquad\qquad\qquad\qquad = -\cancel{\tfrac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}}_{\partial f = 1} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \qquad f = z$$

$\alpha := \bar{z} \quad \beta = \frac{\partial}{\partial z}$

$\alpha^+ := z \quad \beta^+ = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

WIRTINGER KALKÜL!

$$[\alpha,\beta^+] = \alpha\beta^+ - \beta^+\alpha = -\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\bar{z}$$

$$= -\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + 1 + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

$df = {}^{\partial}\partial f\, dz$

$df = \partial dz + \bar{\partial} d\bar{z} \qquad f = z + \bar{z} = 2x$

$dz = dz$ ✓

$df = dz + d\bar{z} \qquad x = z + \bar{z}$

$\quad dx = dz + d\bar{z}$

2

$p^+ = -p$?

$$\boxed{\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \langle \psi p^+ | \psi \rangle}$$

$$\left[\int dx^n \, \psi^* \frac{\partial}{\partial x^n} \psi \right]^*$$

Leon Hebel
Leon Hebel

$$\boxed{\int dx \, \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi = \int dx \, \psi^* \psi' = \psi^* \psi \Big| - \int dx \, \psi^{*\prime} \psi}$$

$p^+ = \hat{p}$

Impuls

\+ Ableitungsoperator

$\frac{\partial}{\partial x} \psi^*$

$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

e^{ix} ie

$$\psi(x) = R(x) + i I(x)$$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = R'(x) + i I'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \bar{\psi}(x) = R'(x) - i I'(x)$$

$$= \psi'^*$$

$$i\hbar \psi(x) = i\hbar R - \hbar I$$

$$(i\hbar \psi(x))^* = -i\hbar R - \hbar I$$

$$= -i\hbar (R - i I)$$

$$= -i\hbar \psi^*$$

$$\int dx \, \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi = \underbrace{-i\hbar \, \psi^* \psi \Big|}_{\to 0} + i\hbar \int dx \, \psi^{*\prime} \psi$$

$$+ \int dx \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi\right)^*$$

$\langle \psi | p | \psi \rangle$

Leon

$(zw)^* = \cancel{R_z R_w}$

$zw = R_z R_w - I_z I_w + i R_z I_w + i R_w I_z$

$(zw)^* = \cancel{R_z R_w} \; R_z R_w - I_z I_w - i (R_z I_w + R_w I_z)$

$z^* w^* = R_z R_w - I_z I_w$

$(R + iI)^* (R_2 + i I_2)^* = (R - iI)(R_2 - i I_2)$

$R_e(w^* z^*) = R_e(wz)^*$

$z^* w^* = (zw)^*$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \text{ vertauscht mit } *}$$

3

$$[\alpha,\beta] = \frac{x-iy}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{x-iy}{2}\right)}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{2}-i\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{2}}$$

$x p_x - \frac{\partial}{\partial x} x$

$[x,p_x] = x\frac{\partial}{\partial x} - 1$

$$= \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \cancel{i\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial y}} - \cancel{\frac{iy}{2}\frac{\partial}{\partial x}} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \cancel{i\frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial y}} + \cancel{i\frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$= \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \qquad \beta^+ a$$

$1 + \beta^+ a \quad \beta a^+$

$$\alpha a^+ + \beta\beta^+ + \alpha\beta^+ + \alpha^+\beta$$

$$\alpha(\alpha^+ + \beta^+) + \beta(\beta^+ + \alpha^+)$$

$$\underbrace{(\alpha+\beta)}_{a}\underbrace{(\beta^+ + \alpha^+)}_{a^+} = aa^+$$

$$[\alpha,\beta^+] = \alpha\beta^+ + \beta^+\alpha$$

$$= \frac{x-iy}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{x-iy}{2}\right)$$

$$= -\frac{x}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{iy}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$- \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{ix}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \cancel{\frac{iy}{2}\frac{\partial}{\partial x}}\right]$$

$$= 1 - \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$[x,p_x] = x\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}x = x\frac{\partial}{\partial x} - 1 - x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$= -1 \quad -i\hbar$$

$$2[\alpha,\beta^+] = (x-iy)\left(-\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$+ \left(+\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x-iy)$$

$$1 + x\frac{\partial}{\partial x} + 1 + i\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= (x-iy)\left(-\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left[2 + x\left(i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\right) + \underbrace{y\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{-iy\left(i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\right)}\right]$$

$$= (x-iy)\left(-\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left[2 + (x-iy)\left(i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\right]$$

$$= 2$$

$$[\alpha,\beta^+] = 1$$

$$[\alpha\beta^+ - \beta^+\alpha]^+ = \beta\alpha^+ - \alpha^+\beta = [\beta,\alpha^+] = 1$$

$$\beta\alpha^+ - \alpha^+\beta = 1$$

L_z hermitesch

$$\alpha\beta^+ + \alpha^+\beta \qquad \alpha\beta^+ - \beta^+\alpha = 1$$

$$\frac{\alpha\beta^+}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\beta^+\alpha}{2} \qquad \frac{\beta\alpha^+}{2} + \frac{\alpha^+\beta}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\alpha\beta^+ + \alpha^+\beta = \frac{\alpha\beta^+}{2} + \frac{\beta^+\alpha}{2} + \frac{\beta\alpha^+}{2} + \frac{\alpha^+\beta}{2}$$

$$H = \frac{1}{2}\Big[\alpha\alpha^+ + \alpha^+\alpha + \beta\beta^+ + \beta^+\beta$$
$$+ \alpha\beta^+ + \beta^+\alpha + \alpha^+\beta + \beta\alpha^+\Big]$$

$a \qquad a^+$

$$= \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha^+ + \beta^+)$$

$$\alpha\alpha^+ + \alpha^+\alpha + \beta\beta^+ + \beta^+\beta + \alpha\beta^+ +$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{(\alpha^+ + \beta^+)}_{a^+}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{a}$$

4

$[aa^+, bb^+] = aa^+ bb^+ - bb^+ aa^+$

$[b^+, b] = 1$

$[a, b] = ab - ba =$

$\frac{1}{2}[a, a^+]$

$= \cancel{(\alpha + \beta)(\alpha^+ + \beta^+)}$

$= \alpha\beta^+ + \beta\alpha^+ - \alpha^+\beta - \beta^+\alpha$

$= 2$

$a^+ a [a^+ \psi] = a^+ \underbrace{a a^+}_{a^+ a + 1} \psi =$

auch EF

$aa^+ \to a^+ a$ $\quad a^+ b \leftrightarrow a^+ b^+$

$= a^+ a^+ a \psi + a^+ \psi$

$= (n+1) a^+ \psi$

$\boxed{a^+\psi \text{ ET von } a^+ a}$

$a^+ a [a\psi] = [aa^+ - 1][a\psi]$

a

$= [n-1](a\psi)$

auf / Abstieg!

muss Ende geben!

Kommutator $[a, b]$

$[a, b] = ab - ba = 0$, wenn $[a, b] = 0$, dann $[b^+, a^+] = 0 = [a^+, b^+]$

$= b^+ a^+ - a^+ b^+ = 0$

$[a, b^+]$

$b = \alpha^+ - \beta^+$

L_z und H: EF

EF zu b & a

unterschiedlich

↑ prüfen

$[a, b] = (\bar{z} + \partial_z)(z + \partial_{\bar{z}}) - (z + \partial_{\bar{z}})(\bar{z} + \partial_z)$

$= \cancel{\bar{z} z - z\bar{z} + 1 + \bar{z}\partial_{\bar{z}} - z\partial_z}$

$= 1 - 1 = 0$

$b^+ = (\alpha - \beta)$

$= \bar{z} - \partial_z$

$b = (\alpha^+ - \beta^+)$

$= (z + \partial_{\bar{z}})$

$[a, b^+] = (\bar{z} + \partial_z)(\bar{z} + \partial_z) - (\bar{z} + \partial_z)(\bar{z} + \partial_z)$

$= 0 - 0 = 0$

$\rightarrow [a^+ a, b^+ b] = 0 \rightarrow$ EF von $L_z \rightarrow$ EF von H

$\int e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$

$= r e^{-\frac{r^2}{4}}$

5

völlig analog Harm Oszillator

Separation nach x/y

GZ bestimmen

$\longrightarrow$ DGL:

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\bar{z}}{2}\right.$

$\int 2 e^{-x} = 4\pi(-e^{-r})\Big|_0^\infty$

$= 2\pi$

$\frac{x\psi}{2} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$

$\frac{g_x}{2} = -\frac{dx}{dg_x}$

$\frac{x^2}{4} = -\ln(\psi)$

$\frac{g_x^2}{2} = -2\psi$

$e^{-\frac{x^2}{4}} = \psi(x)$

$\boxed{\psi = \psi(x)\psi(y)}$

$\int e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$

$= 2\pi \rightarrow$

Exzitonen im Magnetfeld

20/07/17

Ziel: Hamiltonian vereinfachen durch Basistrafo, da nun + Coulomb-WW

Ausgangspunkt: $$\mathcal{H}^{Mx} = \sum_{\alpha=e,h} \frac{1}{2m_\alpha}\Big(\hat{p}_\alpha - e_\alpha \underbrace{\hat{A}}_{\frac{1}{2}(B\times \vec{r}_\alpha)}\Big)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}_h|}$$ Magnetfeld-Hamiltonian

Problem: Elektronen + Loch Orte/Ableitung + Relativkoor. in C-WW
→ unitäre Trafo → bessere Basis → $\mathcal{H}$ wird einfacher

$$\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_h \qquad \vec{R} = \frac{\vec{r}_e + \vec{r}_h}{2} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{U} = e^{+\frac{i}{\hbar}\frac{e}{2}\vec{B}\cdot(\vec{R}\times\vec{r})}$$

$$\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}^{-1} = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{2}\vec{B}(\vec{R}\times\vec{r})}$$

$$\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{U}^+\mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{U}^+\mathcal{U}|\psi\rangle \quad , \quad \mathcal{U}|\psi\rangle = |\psi'\rangle$$
$$= \langle\psi'|\underbrace{\mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{U}^+}|\psi'\rangle$$
$$\mathcal{H}' = \mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{U}^+$$ Erwartungswerte bleiben identisch

gesucht ist nun $\mathcal{H}'$, dazu schrittweise:

1) $$\vec{R}\times\vec{r} = \frac{1}{2}\big((\vec{r}_e + \vec{r}_h)\times(\vec{r}_e - \vec{r}_h)\big) = \frac{1}{2}\big[\vec{r}_h\times\vec{r}_e - \vec{r}_e\times\vec{r}_h\big]$$
$$= \vec{r}_h\times\vec{r}_e$$

2) $$\hat{p}_{e/h}\,\mathcal{U}^+ = (\hat{p}_{e/h}\mathcal{U}^+) + \mathcal{U}^+\hat{p}_{e/h}$$, wobei $$\hat{p}\,\mathcal{U}^+ = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}_{e/h}} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{2}\vec{B}(\vec{R}\times\vec{r})} \overset{1)}{=} \begin{cases} +\frac{e}{2}(\vec{r}_h\times\vec{B})\,\mathcal{U}^+ \\ -\frac{e}{2}(\vec{r}_e\times\vec{B})\,\mathcal{U}^+ \end{cases}$$

$$\vec{B}(\vec{R}\times\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}_h\times\vec{r}_e) = \begin{cases}\vec{r}_e(\vec{B}\times\vec{r}_h)\\ \vec{r}_h(\vec{r}_e\times\vec{B})\end{cases}$$

$$= \pm\frac{e}{2}(\vec{r}_{h/e}\times\vec{B})\,\mathcal{U}^+ + \mathcal{U}^+\hat{p}_{e/h}$$

3) $$\mathcal{U}(\ldots)^2\mathcal{U}^+ = \underbrace{\mathcal{U}(\ldots)\mathcal{U}^+}_{\text{genügt zu wissen/kennen}}\mathcal{U}(\ldots)\mathcal{U}^+$$

$$\mathcal{U}\Big(\hat{p}_{e/h} \pm \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\Big)\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}\Big[\hat{p}_{e/h}\mathcal{U}^+ \pm \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\mathcal{U}^+\Big]$$

$\mathcal{U}$ vertauscht mit Ort (selbst nur von Ort abh.) ($\vec{B}$ kein Operator)

$$= \mathcal{U}\Big[\pm\frac{e}{2}(\vec{r}_{h/e}\times\vec{B})\,\mathcal{U}^+ + \mathcal{U}^+\hat{p}_{e/h} \pm \mathcal{U}^+\frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r}_{e/h})\Big]$$
$$= \hat{p}_{e/h} + \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})$$

also $$\boxed{\mathcal{H}'^{mx} = \frac{1}{2m_e}\Big[\hat{p}_e + \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\Big]^2 + \frac{1}{2m_h}\Big[\vec{p}_h + \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\Big]^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|}}$$ nur noch Relativkoordinaten!

4) Impulse umschreiben

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}_{e/h}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{\partial r}{\partial r_{e/h}}}_{=\pm 1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\vec{R}}\frac{\partial R}{\partial \vec{r}_{e/h}}}_{=\frac{1}{2}} = \pm\frac{\partial}{\partial\vec{r}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\vec{R}} = \pm\vec{p} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{P}}_{\text{vernachlässigbar klein}}$$

komplett umgeschrieben (kurz gefasst)

damit $$\mathcal{H}^{Mx} = \mathcal{H}_r^e + \mathcal{H}_r^h - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|}$$

$$\mathcal{H}_r^e = \frac{1}{2m_e}\Big(\vec{p} + \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\Big)^2 ; \quad \mathcal{H}_r^h = \frac{1}{2m_h}\Big(\vec{p} - \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\Big)^2$$

Ziel: Eigenwertgleichung konstruieren zu $\mathcal{H}^{Mx}$

Ausgangspunkt: - optische Übergänge nur bei $n = n'$, also für $\mathcal{H}^m_{e/h} \phi_{nn'} = E_{n/n'} \phi_{nn'}$

- Entwicklung dann gerechtfertigt, wenn Anteil $q\hat{A} \gg \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, also die Coulombwechselwirkung ggn. dem Magnetfeldanteil gering ist (kurz: starke Felder)

gefordert. $\mathcal{H}^{Mx} \phi_\alpha = E_\alpha \phi_\alpha$, mit $\mathcal{H}^{Mx} = \underbrace{\mathcal{H}^e_r + \mathcal{H}^h_r}_{\text{EW bleiben identisch!}} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}|}$ $\quad \mathcal{H}^{e/h}_r = \frac{1}{2m_{e/h}} \left(\vec{p} \pm \frac{e}{2}(B \times \vec{r})\right)^2$

ist diese Trafo notwendig gewesen? wenn wir doch nur bzgl. ϕ_{nn} entwickeln oder aus $\phi_{nn'}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \to \phi_{nn'}(\vec{r})$?

jetzt $\phi_\alpha = \sum_n c_{\alpha n} \phi_{nn}$

dann Matrixelemente:

$$\langle \phi_{n'n'} | \mathcal{H}^{Mx} | \phi_\alpha \rangle = \langle \phi_{n'n'} | \sum_n c_{\alpha n} (\mathcal{H}^e_r + \mathcal{H}^h_r - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}) \phi_{nn} \rangle$$

$$= \sum_n c_{\alpha n} \left[\langle \phi_{n'n'} | \hbar\omega_c (n + \tfrac{1}{2}) - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} | \phi_{nn} \rangle \right]$$

$$= \sum_n c_{\alpha n} \left[\hbar\omega (n + \tfrac{1}{2}) \langle \phi_{n'n'} | \phi_{nn} \rangle + \langle \phi_{n'n'} | - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} | \phi_{nn} \rangle \right]$$

$$= \sum_n c_{\alpha n} \left[\hbar\omega (n + \tfrac{1}{2}) \delta_{n'n} + \int dV \, \phi_{n'n'} (- \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}) \phi_{nn} \right]$$

$$\stackrel{!}{=} \langle \phi_{n'n'} | E_\alpha \phi_\alpha \rangle = \langle \phi_{n'n'} | \sum_n c_{\alpha n} E_\alpha \phi_{nn} \rangle = \sum_n c_{\alpha n} E_\alpha \delta_{n'n} = c_{\alpha n'} E_\alpha$$

also Eigenwertgleichung:

$$\boxed{\sum_n \left[\hbar\omega (n + \tfrac{1}{2}) \delta_{n'n} + \int dV \, \phi_{nn'} (- \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}) \phi_{nn} \right] c_{\alpha n} = E_\alpha c_{\alpha n'}}$$

Eigenwertgleichung in bekannter Basis ϕ_{nn} für starke Magnetfelder

b) Exzitonen im Magnetfeld

- erweitern H um Coulomb-WW zw. Elektronen u. Löchern

$$H^{mx} = \sum_{\alpha=e,h} \frac{1}{2m_\alpha} (\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A})^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}_h|}$$

$$= \sum_{\alpha=e,h} \frac{1}{2m_\alpha} (\vec{p}_\alpha - \frac{e_\alpha}{2} \vec{B}\times\vec{r}_\alpha)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_e - \vec{r}_h|}$$

- Schrödinger-Gl. (Wann gl. für Magf.)

$$H^{mx} \Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h) = E \Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h)$$

$e_e = -e$
$e_h = e$

- unitäre Transf:

$$\mathcal{U} = e^{+\frac{i}{\hbar}\frac{e}{2}\vec{B}\cdot(\vec{R}\times\vec{r})}$$
$$\mathcal{U}^+ = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{2}\vec{B}\cdot(\vec{R}\times\vec{r})}$$

(*) $\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_h$ Relativ

$\vec{R} = \frac{\vec{r}_e + \vec{r}_h}{2}$ Schwerpunkt

allg. gilt für unit. Transf mit $\mathcal{U}^+\mathcal{U} = \mathbb{1}$

$|\Psi'\rangle = \mathcal{U}|\Psi\rangle$ $\quad \langle A\rangle_\Psi = \langle\Psi|A|\Psi\rangle$
$\langle\Psi'| = \langle\Psi|\mathcal{U}^+$ $\quad = \langle\Psi|\mathcal{U}^+\mathcal{U}A\mathcal{U}^+\mathcal{U}|\Psi\rangle$
$\quad = \langle\Psi'|A'|\Psi'\rangle$
$\Rightarrow A' = \mathcal{U}A\mathcal{U}^+$ $\quad = \langle A\rangle_{\Psi'}$

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi'(\vec{r}) &= \mathcal{U}\,\Psi(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \\ H'^{mx} &= \mathcal{U}\,H^{mx}\,\mathcal{U}^+ \end{aligned}}$$

1) $\vec{R}\times\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}_e + \vec{r}_h)\times(\vec{r}_e - \vec{r}_h)$
$= \frac{1}{2}(\vec{r}_h\times\vec{r}_e - \vec{r}_e\times\vec{r}_h)$
$= -\vec{r}_e\times\vec{r}_h$

da $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$
und $\vec{a}\times\vec{a} = 0$

2) $\vec{p}_e = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r_e}$ $\qquad \vec{p}_e\,\mathcal{U}^+ f = -i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}^+}{\partial r_e} f \underbrace{- i\hbar\,\mathcal{U}^+\frac{\partial}{\partial r_e} f}_{+\mathcal{U}^+ p f \text{ (1)}}$

$$-i\hbar\frac{\partial\mathcal{U}^+}{\partial\vec{r}_{e,h}} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}_{e,h}} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{e}{2}\vec{B}\cdot(\vec{R}\times\vec{r})}$$
$$\stackrel{(2)}{=} -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}_{e,h}} e^{\pm\frac{i}{\hbar}\frac{e}{2}\vec{r}_{e,h}\cdot(\vec{r}_{h,e}\times\vec{B})}$$
$$= \pm\frac{e}{2}(\vec{r}_{h,e}\times\vec{B})\,\mathcal{U}^+$$

$\pm\frac{e}{2}[(\vec{r}_{h,e}\times\vec{B}) + (\vec{B}\times\vec{r}_{e,h})]$
$= \pm\frac{e}{2}[\vec{B}\times(\vec{r}_{e,h} - \vec{r}_{h,e})]$ (*)

mit zykl. Vertauschg im Spatpr
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$
$(\vec{R}\times\vec{r})\cdot\vec{B} = -(\vec{r}_e\times\vec{r}_h)\cdot\vec{B}$
$= -(\vec{r}_h\times\vec{B})\cdot\vec{r}_e$
(2) $= (\vec{r}_e\times\vec{B})\cdot\vec{r}_h$

$$(\vec{p}_{e,h} \pm \frac{e}{2}\vec{B}\times\vec{r}_{e,h})\,\mathcal{U}^+ \stackrel{(1)}{=} \mathcal{U}^+\vec{p}_{e,h} + \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\,\mathcal{U}^+ \quad = \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})$$

$$\mathcal{U}\,(\vec{p}_{e,h} \pm \frac{e}{2}\vec{B}\times\vec{r}_{e,h})\,\mathcal{U}^+ = \vec{p}_{e,h} + \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})$$

$[\vec{B}\times\vec{r}, \mathcal{U}^+] = 0$

deshalb

$$\mathcal{U}\,(\ )^2\,\mathcal{U}^+ = \mathcal{U}\,(\ )\,\mathcal{U}^+\mathcal{U}\,(\ )\,\mathcal{U}^+$$

$\mathcal{U}^+$ vertauscht mit $\vec{B}\times\vec{r}$
da $\mathcal{U}^+$ selbst nur Ortsop. enth.
($\vec{B}$ ist kein Operator)

3) $H_r^{mx} = U \, H^{mx} U^+$

$$= U \frac{1}{2m_e}\left(\vec p_e + \frac{e}{2}\vec B\times\vec r_e\right)^2 U^+ + U \frac{1}{2m_h}\left(\vec p_h - \frac{e}{2}\vec B\times\vec r_h\right)^2 U^+ - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$= \frac{1}{2m_e}\left(\vec p_e + \frac{e}{2}\vec B\times\vec r\right)^2 + \frac{1}{2m_h}\left(\vec p_h + \frac{e}{2}\vec B\times\vec r\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec r|}$$

↑ es tauchen nur noch Relativorte auf!

4) führen Relativ- und Schwerpktsimpulse ein (wie bereits für 0 T)

$$\frac{\partial}{\partial \vec r_e} = \frac{\partial}{\partial \vec r}\frac{\partial \vec r}{\partial \vec r_e} + \frac{\partial}{\partial \vec R}\frac{\partial \vec R}{\partial \vec r_e} = \frac{\partial}{\partial \vec r} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec R}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec r_h} = -\frac{\partial}{\partial \vec r} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec R}$$

$$\vec p_e = \vec p + \frac{1}{2}\vec P$$

$$\vec p_h = -\vec p + \frac{1}{2}\vec P$$

vernachl. Schwerpktsimpuls: $\vec P = 0$

⇒ Hamiltonian, der nur noch Relativbewegung enthält:

$$H_r^{mx} = H_r^e + H_r^h - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r|}$$

$$H_r^e = \frac{1}{2m_e}\left(\vec p + \frac{e}{2}\vec B\times\vec r\right)^2$$

$$H_r^h = \frac{1}{2m_h}\left(\vec p - \frac{e}{2}\vec B\times\vec r\right)^2$$

- keine Coulomb-WW (zweidim. e-h-Plasma im senkr. Magnetfeld)

$$H_r = H_r^e + H_r^h$$

$$H_r^e \phi^e_{nn'} = E_n^e \phi^e_{nn'} \qquad E_n^e = \frac{\hbar^2}{m_e \ell^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$H_r^h \phi^h_{nn'} = E_{n'}^h \phi^h_{nn'} \qquad E_{n'}^h = \frac{\hbar^2}{m_h \ell^2}\left(n'+\frac{1}{2}\right)$$

$$H_r \phi^0_{nn'} = E_{nn'} \phi^0_{nn'} \qquad \phi^0_{nn'} = \phi^e_{nn'} \cdot \phi^h_{nn'}$$

$$E_{nn'} = E_n^e + E_{n'}^h \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_h}$$

Warum?

$$E_{nn} = \frac{\hbar^2}{\mu \ell^2}\left(n+\frac{1}{2}\right) = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

(opt. Übergänge für $n = n'$) siehe hinten Buch S...

- entwickeln EF zu H_r^{mx} nach EF zu H_r (ohne Coul.-WW)

$$H_r^{mx}\,\phi_\alpha(\vec{\varrho}) = E_\alpha\,\phi_\alpha(\vec{\varrho})$$ ← Fordern wir

$$\phi_\alpha(\vec{\varrho}) = \sum_n c_{\alpha n}\,\phi_{un}(\vec{\varrho})$$ ← unsere Darstellung

müssen keine Eigenwertgleichung

$$H_r^{mx}\,\phi_\alpha(\vec{\varrho}) = \sum_n c_{n\alpha}\left[\hbar\omega_c\left(n+\tfrac{1}{2}\right) - \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \ell \varrho}\right]\phi_{un}(\vec{\varrho}) = E_\alpha \sum_n c_{n\alpha}\phi_{un}(\vec{\varrho})$$

$$\int d^2\varrho\,\phi^*_{u'n'}(\vec{\varrho})\,H_r^{mx}\,\phi_\alpha(\vec{\varrho}) = \sum_n c_{n\alpha}\,\hbar\omega_c\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\delta_{n'n} - \int d^2\varrho\,\phi^*_{u'n'}(\vec{\varrho})\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\ell\varrho}\,\phi_{un}(\vec{\varrho})$$

von links Norm/Skalarprodukt

$$= E_\alpha \sum_n c_{n\alpha}\,\delta_{n'n}$$ ← hieraus Bestimmungsglg für Energien E_α

dimensionslose Größen:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} = E_B \qquad \frac{\hbar^2}{2\mu\ell^2} = \frac{\hbar\omega_c}{2} = \frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2}\,\frac{a_0^2}{\ell^2} = E_B\,\frac{a_0^2}{\ell^2}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = 2a_0E_B \qquad \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\ell\varrho} = \frac{2E_B}{\varrho}\,\frac{a_0}{\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\hbar\omega_c}{2E_B} = \frac{a_0^2}{\ell^2} = \lambda}$$

$$\sum_n\left[\hbar\omega_c\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\delta_{n'n} - \int d^2\varrho\,\phi^*_{u'n'}(\vec{\varrho})\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\ell\varrho}\,\phi_{un}(\vec{\varrho})\right]c_{n\alpha} = E_\alpha\,c_{n'\alpha}$$

dividieren durch E_B

$$\sum_n\left[2\lambda\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\delta_{nn'} - \underbrace{\int d^2\varrho\,\phi^*_{u'n'}(\vec{\varrho})\,\frac{2\sqrt{\lambda}}{\varrho}\,\phi_{un}(\vec{\varrho})}_{V_{n'n}}\right]c_{n\alpha} = \varepsilon_\alpha\,c_{n'\alpha}$$

$$\boxed{\sum_n\left[\lambda(2n+1)\,\delta_{nn'} - V_{n'n}\right]c_{n\alpha} = \varepsilon_\alpha\,c_{n'\alpha}}$$

Eigenwertgleichung