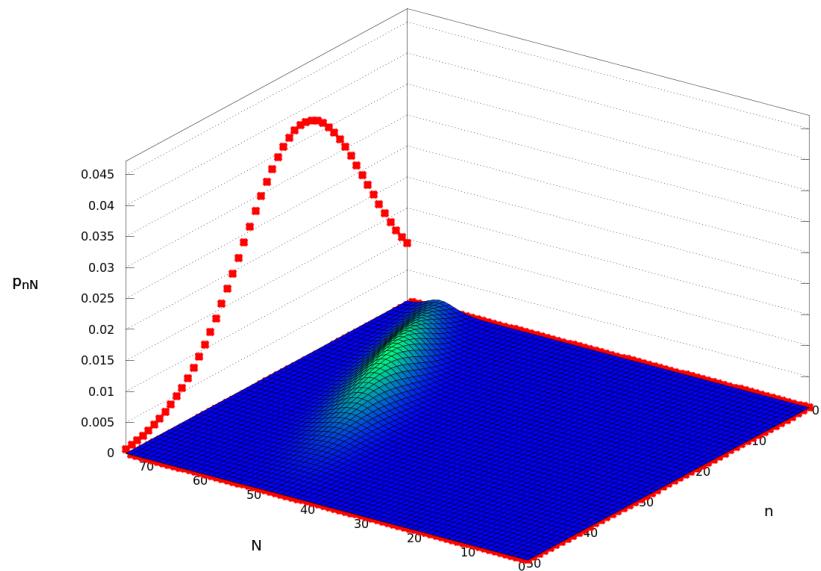


## Dynamik der Emission von atomaren Lasersystemen als statistischer Prozess

Herleitung und Auswertung von Master- und  
Ratengleichungsmodellen

Bachelorarbeit



# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Einleitung und Motivation</b>   | <b>4</b>  |
| <b>2. Modellbildung</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1. Jaynes Cummings Modell . . . . .   | 5         |
| 2.1.1. Beschränkung auf Zweizustandsmodell . . . . .  | 7         |
| 2.1.2. Beschränkung auf eine Kavitätsmode . . . . .   | 8         |
| 2.1.3. Rotating Wave Approximation . . . . .  | 9         |
| 2.1.4. Jaynes-Cummings Hamiltonian . . . . .  | 10        |
| 2.2. Dissipation in Quantensystemen – Lindblad Terme . . . . .  | 11        |
| 2.2.1. Darstellung des Problems . . . . .   | 11        |
| 2.2.2. Beschreibung der System-Reservoir–Wechselwirkung . . . . .   | 12        |
| 2.2.3. Born-Markov Näherungen . . . . .   | 13        |
| 2.2.4. Lindblad von-Neumann Gleichung . . . . .   | 14        |
| 2.3. Herleitung der Mastergleichung aus der Lindblad vNE . . . . .  | 17        |
| 2.3.1. Motivation . . . . .   | 17        |
| 2.3.2. Notation . . . . .   | 18        |
| 2.3.3. Spezifizierung der Prozesse . . . . .  | 18        |
| 2.3.4. Herleitung . . . . .   | 20        |
| 2.3.5. Übersicht und Diskussion der verwendeten Näherungen . . . . .  | 25        |
| 2.3.6. Vergleich mit Rice-Carmichael . . . . .  | 27        |
| 2.4. Ratengleichungen . . . . .   | 28        |
| 2.5. Kohärenz, Photonenstatistik . . . . .  | 29        |
| 2.5.1. Räumliche und zeitliche Kohärenz . . . . .   | 30        |
| 2.5.2. Koheränz erster Ordnung – $g^{(1)}(\tau)$ . . . . .  | 30        |
| 2.5.3. Koheränz zweiter Ordnung, Photonen-Bunching und Antibunching – $g^{(2)}$ . . . . .                                       | 31        |
| <b>3. Diskussion</b>  | <b>33</b> |
| 3.1. Qualitatives Verhalten der modifizierten Ratengleichungen . . . . .  | 33        |
| 3.1.1. Bedingungen für Erreichen der Laserschwelle . . . . .  | 33        |
| 3.1.2. Numerische Überprüfung der Bedingungen für Lasing anhand von Input/Output Kennlinien für Laser mit 75 Emittern . . . . . | 35        |
| 3.1.3. Ratengleichung im Limes vieler Emitter . . . . .   | 36        |

## Inhaltsverzeichnis

|                  |   |           |
|------------------|---|-----------|
| 3.2.             | Analyse der Mastergleichung . . . . .                                       | 40        |
| 3.2.1.           | Quantitativer Vergleich von Ratengleichung und Mastergleichung .            | 40        |
| 3.2.2.           | Betrachtung der Photonenstatistik und $g_2$ . . . . .                       | 41        |
| 3.2.3.           | Qualitative Diskussion der zeitlichen Entwicklung von $p_{n,N_1}$ . . . . . | 41        |
| <b>4.</b>        | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>   | <b>44</b> |
| <b>A. Anhang</b> |   | <b>45</b> |
| A.1.             | Dichtematrix-Formalismus . . . . .  | 45        |
| A.2.             | von-Neumann-Gleichung . . . . .   | 45        |
| A.3.             | Bilder in der Quantenmechanik . . . . .                                     | 46        |
| A.3.1.           | Schrödinger-Bild . . . . .  | 46        |
| A.3.2.           | Heisenberg-Bild . . . . .   | 46        |
| A.3.3.           | Dirac-Bild . . . . .  | 46        |
| A.3.4.           | Übersicht . . . . .   | 47        |
| A.4.             | Dipolnäherung . . . . .   | 47        |
| A.5.             | Pauli-Matrizen . . . . .  | 48        |
| A.6.             | Linienbreite $\leftrightarrow$ Lebensdauer . . . . .                        | 49        |
| A.7.             | Motivation 'Rotating Wave Approximation' . . . . .                          | 49        |
| A.8.             | Diskussion des $\beta$ -Faktors . . . . .                                   | 50        |
| A.9.             | Zusammenhang zwischen $g^{(1)}(\tau)$ und spektraler Dichte . . . . .       | 50        |
| A.10.            | Nebenrechnungen . . . . .   | 51        |
| A.10.1.          | zeitliche Ableitung $p_{n,N_1}$ . . . . .                                   | 51        |
| A.10.2.          | zeitliche Ableitung $q_{n,N_1}$ . . . . .                                   | 53        |
| A.11.            | Bilder . . . . .  | 57        |
| A.11.1.          | $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 0.01$ und $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$ . . . . .   | 57        |
| A.11.2.          | $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 0.1$ und $P = 0.05 \text{ ps}^{-1}$ . . . . .   | 58        |
| A.11.3.          | $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 0.1$ und $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$ . . . . .    | 59        |
| A.11.4.          | $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 1$ und $P = 0.05 \text{ ps}^{-1}$ . . . . .     | 60        |
| A.11.5.          | $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 1$ und $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$ . . . . .      | 61        |

# **1. Einleitung und Motivation**

In dieser Arbeit soll eine überlicherweise phänomenologisch begründete Mastergleichung zur Beschreibung der Statistik eines Quantenpunktasers aus bekannten Modellen der Quantenoptik hergeleitet werden. [...]

## 2. Modellbildung

Um eine möglichst exakte aber handhabbare Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Materie und elektromagnetischem Feld zu bekommen...

### 2.1. Jaynes Cummings Modell

Die einfachste Beschreibung der Wechselwirkung eines dissipationsfreien Systems von Materie und elektromagnetischem Feld ist durch das Jaynes-Cummings Modell gegeben. Es beschreibt die Wechselwirkung eines Atoms mit zwei diskreten Zuständen und einer Photononenmode in Dipolnäherung. Physikalisch entspricht dies der Situation, in der ein Atom in einer guten Kavität eingeschlossen ist und eine der Resonanzfrequenzen sehr gut mit einer Übergangsfrequenz des Atoms übereinstimmt.

Für die Herleitung des Hamiltonoperators wird zunächst der allgemeinere Fall eines Atoms mit mehreren Energien betrachtet, das mit einem elektromagnetischen Feld beliebigen Spektrums wechselwirkt. Darin ist der Jaynes-Cummings Hamiltonoperator (J. C. Hamiltonian) als Spezialfall enthalten.

#### Hilbertraum und Basis des Problems, Operatoren

Der Hilbertraum des Systems ist das Direktprodukt vom Hilbertraum des Atoms,  $\mathcal{H}_{\text{at}}$ , mit dem Hilbertraum des Feldes,  $\mathcal{H}_{\text{Feld}}$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{at}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Feld}}. \quad (2.1)$$

Dieser Raum wird aufgespannt durch das Direktprodukt der Basisvektoren der beiden Hilberträume. Der Anregungszustand des Atoms wird mit  $|\alpha\rangle$  bezeichnet. Der Ketvektor  $|n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle$  gibt die Besetzung der Photononenmoden  $k$  an und beschreibt so das elektromagnetische Feld.

$$|\alpha\rangle \otimes |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = |\alpha; n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle \quad (2.2)$$

Auf diesen Zustand wirken die Operatoren der Subsysteme wie folgt:

## 2. Modellbildung

**Erzeuger und Vernichter eines atomaren Zustands:**  $|\alpha'\rangle\langle\alpha|$  projiziert den Zustand  $|\alpha\rangle$  auf  $|\alpha'\rangle$ , es gilt:

$$(|\alpha'\rangle\langle\alpha|) |\alpha\rangle = |\alpha'\rangle.$$

**Vernichter einer Photonenmode:**  $b_k$  ist der Vernichtungsoperator eines Photons in Mode  $k$ :

$$b_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k} |n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots\rangle.$$

**Erzeuger einer Photonenmode:**  $b_k^\dagger$  erzeugt ein Photon in Mode  $k$ :

$$b_k^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots\rangle.$$

**Besetzungsoperator für Photonen:**  $b_k^\dagger b_k$  gibt die Anzahl der Photonen in Mode  $k$  an:

$$b_k^\dagger b_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = n_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle.$$

Die Operatoren  $b_k$  und  $b_k^\dagger$  erfüllen die bosonischen Kommutationsregeln:

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}.$$

### Hamiltonoperator für Licht-Materie Wechselwirkung in Dipolnäherung

Der Hamiltonian des gesamten System setzt sich zusammen aus den Operatoren für das freie Atom und das Feld:

$$H_0 = H_{\text{At}} + H_{\text{Feld}} = \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| + \sum_k \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k. \quad (2.3)$$

Für die Ruhenergie des Zustands gilt somit:

$$H_0 |\alpha; n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = \left( \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} + \sum_k \hbar\omega_k n_k \right) |\alpha; n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle \quad (2.4)$$

Wird nun das äußere Feld angeschaltet, so wird der freie Hamiltonian  $H_0$  um einen Wechselwirkungsteil  $H'$  ergänzt. Dieser beträgt in Dipolnäherung [ZITAT, Anh. A.4]:

$$H' = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

dabei beschreibt  $\mathbf{d}$  das Dipolmoment des Atoms und  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  das elektrische Feld. Der Ausdruck für das quantisierte  $\mathbf{E}$ -Feld am Ort  $\mathbf{r}_0$  des Atoms lautet [1]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}} \left[ b_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}_0) - b_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}_0) \right].$$

## 2. Modellbildung

Die  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  bezeichnen hier die Normalmoden des Feldes und beschreiben eine in  $\boldsymbol{\varepsilon}$ -Richtung polarisierte, transversale Ausbreitung in  $\mathbf{k}$ -Richtung ( $\boldsymbol{\varepsilon} \perp \mathbf{k}$ ):

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \boldsymbol{\varepsilon} u_k(\mathbf{r}).$$

Für die Darstellung von  $H'$  wird die atomare Basis  $\{|\alpha\rangle\}$  gewählt:

$$\begin{aligned} H' &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} = \sum_{\alpha, \alpha'} |\alpha\rangle \mathbf{d}_{\alpha\alpha'} \cdot \mathbf{E} \langle \alpha'| \\ &= - \sum_{\alpha, \alpha', k} \hbar \left[ -i \frac{\mathbf{d}_{\alpha\alpha'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}} u_k(\mathbf{r}_0) b_k + \text{c. c.} \right] |\alpha\rangle \langle \alpha'| \\ &= \sum_{\alpha, \alpha', k} \hbar \left[ g_{\alpha\alpha'}(k) b_k + g_{\alpha'\alpha}^*(k) b_k^\dagger \right] |\alpha\rangle \langle \alpha'|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

In Gl. 2.5 stehen nun die Erzeuger und Vernichter der Photonenmoden,  $b_k^\dagger$  und  $b_k$ , sowie die atomaren Übergänge  $|\alpha\rangle \langle \alpha'|$ . Die Kopplungsstärke dieser Operatoren wird von der Größe  $g_{\alpha\alpha'}$  angegeben:

$$g_{\alpha\alpha'}(k) := -i \frac{\mathbf{d}_{\alpha\alpha'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0}} u_k(\mathbf{r}_0). \quad (2.6)$$

Für die Stärke der Kopplung zwischen Photonenmode  $k$  und atomaren Übergang  $\alpha \rightarrow \alpha'$  liefern somit folgende Größen einen Beitrag:

$u_k(\mathbf{r}_0)$  ist die Amplitude der Normalmode am betrachteten Ort. Plaziert man beispielsweise das aktive Material einer Probe in einem Schwingungsknoten innerhalb der Kavität, ist praktisch keine Kopplung zu erwarten.

$\mathbf{d}_{\alpha\alpha'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ , das Dipolelement zwischen den Zuständen und seine Orientierung zur Polarisation des Feldes.

Es ist zu beachten, dass das Dipolelement zwischen gleichen Zuständen verschwindet,  $\mathbf{d}_{\alpha\alpha} = 0$ . Somit verschwindet auch die Kopplung zwischen gleichen Zuständen.

Der gesamte Hamiltonian setzt sich nun aus (2.3) und (2.5) zusammen:

$$H = H_o + H' = \sum_{\alpha} \hbar\omega_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| + \sum_{k} \hbar\omega_k b_k^\dagger b_k + \sum_{\alpha, \alpha', k} \hbar \left[ g_{\alpha\alpha'}(k) b_k + g_{\alpha'\alpha}^*(k) b_k^\dagger \right] |\alpha\rangle \langle \alpha'|. \quad (2.7)$$

### 2.1.1. Beschränkung auf Zweizustandsmodell

Im Folgenden wird die Betrachtung des Hamiltonians auf ein System beschränkt, bei dem das Atom nur zwei diskrete Zustände,  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$ , annehmen kann.

## 2. Modellbildung

Damit wird der Zustandsraum des Atoms zweidimensional und eine Beschreibung der atomaren Operatoren durch Paulimatrizen ist möglich (Anh. A.5):

$$\begin{aligned}\sigma_+ &= |\alpha\rangle\langle\beta| \\ \sigma_- &= |\beta\rangle\langle\alpha|.\end{aligned}$$

In dieser Notation lautet der Hamiltonoperator für die Licht-Materie-Wechselwirkung,  $H'$  (2.5):

$$\frac{1}{\hbar}H' = \sum_k \left( g_{\alpha\beta}(k)b_k\sigma_+ + g_{\beta\alpha}(k)b_k\sigma_- + g_{\alpha\beta}^*(k)b_k^\dagger\sigma_- + g_{\beta\alpha}^*(k)b_k^\dagger\sigma_+ \right). \quad (2.8)$$

Auch der Hamiltonoperator des nicht wechselwirkenden Systems kann vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hbar}H_{\text{at}} &= \omega_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| + \omega_\beta |\beta\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} \omega_\alpha & 0 \\ 0 & \omega_\beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{\omega_\alpha + \omega_\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\omega_\alpha + \omega_\beta}{2} \mathbf{1} + \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2} \boldsymbol{\sigma_z} \\ &\hat{=} \omega_{\alpha\beta} \sigma_z.\end{aligned} \quad (2.9)$$

Der Mittelwert kann als additive Konstante vernachlässigt werden.  $\omega_{\alpha\beta}$  beschreibt die Differenz der Kreisfrequenzen,  $\omega_{\alpha\beta} = \omega_\alpha - \omega_\beta$ .

### 2.1.2. Beschränkung auf eine Kavitätsmode

Nachdem der atomare Zustandsraum auf zwei Zustände reduziert wurde, betrachten wir die photonischen Zustände genauer: Prinzipiell sind in den Summen von (2.8) alle möglichen  $k$ -Werte erlaubt. Eine Beschränkung dieser unendlichen Summe kann experimentell erreicht werden, indem das System in einen Resonator, Kavität genannt, eingebettet wird. Das Prinzip ist in Fig. 2.1 gezeigt.

Eine Kavität ist ein Bereich der Länge  $L$ , der von zwei Spiegeln, bzw. allgemeiner: reflektierenden Schichten, begrenzt wird. Aufgrund der Symmetrie des Systems sind dann nur Wellen erlaubt, deren Amplitude an den Kavitätswänden verschwindet – stehende Wellen bilden sich aus. Für die erlaubten Wellenzahlen ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) gilt somit:

$$k = n \frac{\pi}{L}$$

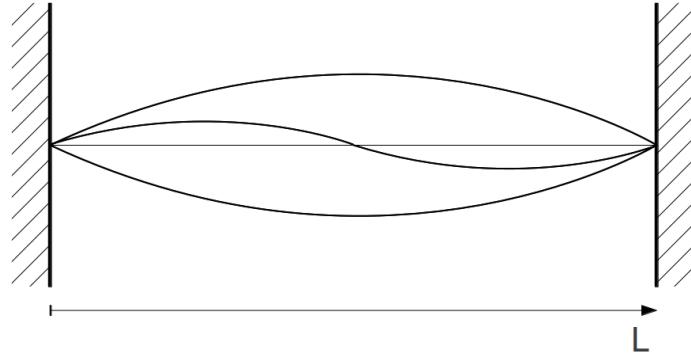


Abbildung 2.1.: diskrete Moden in Kavität mit reflektierenden Wänden und Länge  $L$

Bei linearer Dispersion für Licht,  $\omega = ck$  gilt somit:

$$\omega_n = ck_n = nc \frac{\pi}{L}$$

Dies entspricht einem diskreten Spektrum, die Summe in (2.8) läuft nun also nur noch über Kavitätsmoden.

In der Realität sind die erlaubten Frequenzen nicht unendlich scharf, sondern bilden Linien endlicher Breiten (siehe Anhang A.6).

### 2.1.3. Rotating Wave Approximation

Die einzelnen Beiträge des Wechselwirkungs-Hamiltonians (2.8) sind in Abb. 2.2 gezeigt. Man unterscheidet zwischen den sogenannten *resonanten* Prozessen a) und d), bei denen der Verlust eines Photons durch die Anregung des Atoms kompensiert wird oder umgekehrt, und den *nicht-resonanten* Prozessen b) und c). Hier werden beide Systeme angeregt oder relaxieren.

Eine anschaulich einleuchtende Näherung ist die sogenannte 'Rotating-Wave-Approximation' (RWA). Hier werden die nicht-resonanten Prozesse im Hamiltonian vernachlässigt. Wie im Anhang gezeigt wird, ist diese Näherung insbesondere dann gerechtfertigt, wenn atomare Übergangsfrequenz  $\omega_{\alpha\beta}$  und Kavitätsmode  $\omega_k$  gut aufeinander abgestimmt sind. (A.7).

Mit der gleichen Begründung können die resonanten Prozesse zwischen allen Übergängen vernachlässigt werden, bei denen die Kavitätsmode nicht der atomaren Übergangsfrequenz übereinstimmt. Die Summe über die Moden reduziert sich so auf den Fall, in dem  $\omega_k \approx \omega_{\alpha\beta}$ .

## 2. Modellbildung

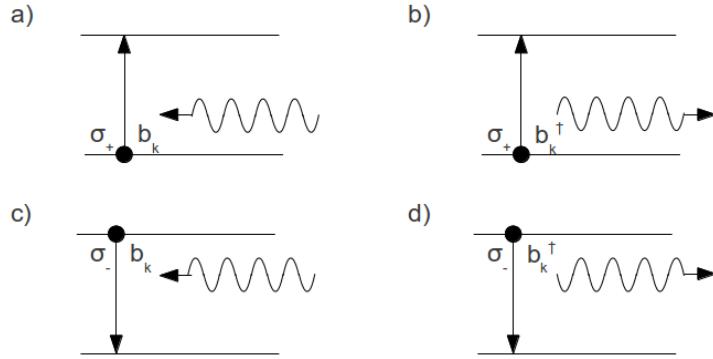


Abbildung 2.2.: a): Photon wird absorbiert, Atom wird angeregt; b) Photon emittiert, Atom angeregt; c) Photon absorbiert, Atom relaxiert; d) Photon emittiert, Atom relaxiert.

### 2.1.4. Jaynes-Cummings Hamiltonian

In den genannten Näherungen lautet der Hamiltonian (2.7) insgesamt:

$$H_{\text{JC}} = H_{\text{JC}}^0 + H'_{\text{JC}}, \quad (2.10)$$

mit  $H_{\text{JC}}^0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_{\alpha\beta}\sigma_z + \hbar\omega b_k^\dagger b_k$   
und  $H'_{\text{JC}} = \hbar g b\sigma_+ + \hbar g^* b^\dagger \sigma_-$ .

Dies ist der sogenannte Jaynes-Cummings Hamiltonian (JC-Hamiltonian), der die Wechselwirkung eines Zweizustandssystems mit einer Photonenmode beschreibt.

Als Basis verwendet man üblicherweise die Zustände  $\{|\alpha, n\rangle; |\beta, n\rangle\}_{n=0,1,2,\dots}$ .  $\alpha$  und  $\beta$  geben an, ob das Atom angeregt oder relaxiert ist, während  $n$  die Anzahl der Photonen in der Kavitätsmode anzeigt. Diese Basis entspricht der Eigenbasis des ungestörten Operators.

Eine genauere Betrachtung der Wirkung des Wechselwirkungsterms  $H'_{\text{JC}}$  auf die Basiszustände zeigt, dass Übergänge immer nur zwischen zwei benachbarten Zuständen mit der gleichen Anzahl an Anregungsquanten stattfinden:

$$\begin{aligned} H' |\alpha, n\rangle &= \hbar g^* \sqrt{n+1} \quad |\beta, n+1\rangle \\ \rightarrow H' |\beta, n+1\rangle &= \hbar g \sqrt{n+1} \quad |\alpha, n\rangle \\ H' |\beta, n\rangle &= \hbar g \sqrt{n} \quad |\alpha, n-1\rangle \\ \rightarrow H' |\alpha, n-1\rangle &= \hbar g^* \sqrt{n} \quad |\beta, n\rangle \end{aligned}$$

## 2. Modellbildung

Die Dynamik spielt sich also in voneinander unabhängigen  $2 \times 2$ -Blöcken ab. Die Matrixelemente eines solchen Blockes sind in Tabelle 2.1 zu sehen.

| $\frac{1}{\hbar} H_{JC}$ | ...      | $ \alpha, n\rangle$       | $ \beta, n+1\rangle$         | ...      |
|--------------------------|----------|---------------------------|------------------------------|----------|
| $\vdots$                 | $\ddots$ | $\vdots$                  | $\vdots$                     | $\ddots$ |
| $\langle \alpha, n  $    | ...      | $\omega_\alpha + n\omega$ | $g\sqrt{n+1}$                | ...      |
| $\langle \beta, n+1  $   | ...      | $g^*\sqrt{n+1}$           | $\omega_\beta + (n+1)\omega$ | ...      |
| $\vdots$                 | $\ddots$ | $\vdots$                  | $\vdots$                     | $\ddots$ |

Tabelle 2.1.: Matrixelemente eines JC-Blocks mit  $N = n + 1$  Anregungsquanten

Die Entwicklung eines Systems bzw. Ensembles ergibt sich nun aus der Lösung der von-Neumann-Gleichung (A.2) mit dem JC-Hamiltonian (2.10).

## 2.2. Dissipation in Quantensystemen – Lindblad Terme

Die bisherigen Betrachtungen wurden unter der Annahme angestellt, dass das System keinen äußeren Wechselwirkungen unterworfen ist, insbesondere dissipative Prozesse wurden vernachlässigt.

Reelle physikalische Systeme stehen jedoch immer mit ihrer Umwelt in Kontakt und streben gegen ein thermisches Gleichgewicht mit dieser Umgebung. Formell lassen sich diese Prozesse durch eine Wechselwirkung mit einem Reservoir beschreiben. Es wird angenommen, dass das Reservoir genügend groß ist und sich durch den Kontakt zwar das System, nicht aber das Reservoir selber verändert. Außerdem wird die Interaktion als genügend klein angenommen, dass sich die Physik des Systems, z. B. das Energieeigenwertspektrum, durch den Kontakt nicht qualitativ ändert. Die Wechselwirkung kann also störungstheoretisch beschrieben werden.

### 2.2.1. Darstellung des Problems

Im Dichtematrixformalismus (siehe Anh. A.1) das in Abb. 2.3 dargestellte Problem vom Dichteoperator  $\rho_{\mathcal{R}+\mathcal{S}}$  beschrieben. Er erhält alle Informationen über das System und das Reservoir und deren Wechselwirkung.

Strebt man nur eine Beschreibung des Systems an, können die einzelnen Prozesse im Reservoir vernachlässigt werden. Man reduziert daher den gesamten Dichteoperator für System und Reservoir durch Mittelung über die Reservoirzustände. Im Dichtematrixformalismus geschieht dies durch abspuren des Dichteoperators in der Reservoir-Basis:

$$\rho_{\mathcal{S}} = \text{Tr}_{\mathcal{R}}\{\rho_{\mathcal{R}+\mathcal{S}}\} \quad (2.11)$$

## 2. Modellbildung



Abbildung 2.3.: Ein System  $\mathcal{S}$  steht mit einem Reservoir  $\mathcal{R}$  in Kontakt.

Das Ziel ist es, eine geschlossene Gleichung für diesen Systemoperator zu finden. Wir werden sehen, dass die bereits bekannte von-Neumann Gleichung um die sog. Lindblad-Terme erweitert werden wird, die das System bedämpfen oder antreiben.

### 2.2.2. Beschreibung der System-Reservoir–Wechselwirkung

Der Hamiltonian für das gesamte Problem setzt sich zusammen aus den ungestörten Operatoren für die beiden Subsysteme, System und Reservoir, und dem Wechselwirkungsanteil:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H' \\ \rightarrow H_0 &= H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{R}} \\ \rightarrow H' &= H_{\mathcal{SR}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ein Beispiel ist die Interaktion einer Photonenmode mit Feldoperatoren  $a^{(\dagger)}$  mit einem Bad, welches ein Kontinuum an Moden mit Operatoren  $b_k^{(\dagger)}$  enthält:

$$\begin{aligned} H &= H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{R}} + H_{\mathcal{SR}}, & (2.13) \\ \text{mit } H_{\mathcal{S}} &= \hbar\omega a^\dagger a, \\ H_{\mathcal{R}} &= \hbar \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k \\ \text{und } H_{\mathcal{SR}} &= \hbar \sum_k (g_k b_k a^\dagger + g_k^* b_k^\dagger a) \end{aligned}$$

Diese Situation entspricht der eines gedämpften Oszillators in der Rotating-Wave-Approximation.

## 2. Modellbildung

### 2.2.3. Born-Markov Näherungen

Um eine geschlossene Gleichung für  $\rho_S$  zu erhalten wird eine Entwicklung der vNE vorgenommen. Im Wesentlichen führen dann zwei Näherungen auf eine handhabbare Form:

**Born Näherung:** Eine Born-Näherung zu machen bedeutet ganz allgemein, dass man die Zeitentwicklung der vNE *bis zur zweiten Ordnung* in  $H' = H_{SR}$  vornimmt. Wir werden sehen, dass das in diesem Fall ebenfalls bedeutet anzunehmen, dass der Dichteroperator  $\rho_{R+S}$  faktorisiert, dass also die Statistik von Systemoperator  $\rho_S$  und Reservoir  $R$  unabhängig voneinander sind:

$$\rho_{R+S} = \rho_S \otimes R$$

**Markov-Näherung:** Markov'sche Systeme sind solche, deren zukünftige Entwicklung nicht von der vergangenen abhängt, sondern nur vom gegenwärtigen Zustand. Diese Näherung ist dann gerechtfertigt, wenn der Einfluss des Systems auf das Reservoir so klein ist, dass dieses praktisch nicht verändert wird.

Die Entwicklung von  $S$  könnte von der Vergangenheit abhängen, falls frühere Zustände im Reservoir 'gespeichert' würden und durch dieses zurückwirken könnten. Falls das Reservoir aber groß genug ist, wird es durch das System praktisch nicht gestört und 'speichert' die Änderungen durch  $S$  nicht lang genug, sodass diese die zukünftige Entwicklung des Systems nicht nennenswert beeinflussen können.

Im Dirac-Bild (A.3.3) liest sich die vNE für das beschriebene Problem folgendermaßen ( $\rho_{R+S} \equiv \rho$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(t)]. \quad (2.14)$$

Gleichung (2.14) lässt sich formal integrieren

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')]. \quad (2.15)$$

Erneutes Einsetzen in Gl. 2.14 liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho} &= \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\rho}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')]] \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')]]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Durch Eichung des Hamiltonians konnte der erste Term auf der rechten Seite zum Verschwinden gebracht werden. An dieser Stelle kann der Dichteoperator faktorisiert werden:

## 2. Modellbildung

$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_S \cdot R + \mathcal{O}(H_{SR}) + \dots$ . Die Korrekturterme sind mindestens in der Ordnung von  $H_{SR}$ , da die Korrelation von System und Reservoir von diesem Term abhängt. Im Doppelkommutator von 2.16 erhält man daher bereits Terme der Ordnung 3 und höher im  $H_{SR}$ . Diese werden in der Born'schen Näherung vernachlässigt. Die Spurbildung über die Reservoir-Zustände führt dann zu einer Gleichung für  $\tilde{\rho}_S$ :

$$\text{Tr}_R \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_S \approx -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \left\{ [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}_S(t') \cdot R]] \right\}$$

Für Markov'sche Systeme kann nun angenommen werden, dass  $\tilde{\rho}_S$  nicht von seiner eigenen Vergangenheit abhängt (s. o.) und man im Integral eine Ersetzung  $\tilde{\rho}_S(t') \rightarrow \tilde{\rho}_S(t)$  vornehmen kann (siehe Diskussion in [2]).

Für die Systemoperator-Gleichung folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_S \approx -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \left\{ [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}_S(t) \cdot R]] \right\} \quad (2.17)$$

### 2.2.4. Lindblad von-Neumann Gleichung

Um das Integral in 2.17 weiter auszuwerten, muss der Wechselwirkungshamiltonian  $\tilde{H}_{SR}(t)$  expliziter formuliert werden, wir nehmen an:

$$H_{SR} = \hbar \sum_i s_i \Gamma_i,$$

im Dirac-Bild also

$$\tilde{H}_{SR} = \hbar \sum_i \tilde{s}_i \tilde{\Gamma}_i. \quad (2.18)$$

Die  $s_i$  bezeichnen die Operatoren im Hilbertraum des Systems, während die  $\Gamma_i$  im Hilbertraum des Reservoirs wirken. Einsetzen in 2.17 liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_S(t) \approx - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \text{Tr}_R \left\{ [\tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), [\tilde{s}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), \tilde{\rho}_S(t) \cdot R]] \right\} \quad (2.19)$$

Da die System-Operatoren mit den Reservoir-Operatoren kommutieren (Operatoren auf unterschiedlichen Räumen), können die  $\tilde{s}_{i,j}$  und das  $\tilde{\rho}_S$  aus der Spur gezogen werden, untereinander müssen die Kommutatoren erhalten bleiben und werden explizit aufgeschrieben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit schreiben wir das  $t$  nicht aus ( $\tilde{s}_i(t) = \tilde{s}_i$ ,  $\tilde{s}_j(t') = \tilde{s}'_j$ ):

## 2. Modellbildung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{\mathcal{S}}(t) \approx & - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \tilde{s}_i \tilde{s}'_j \tilde{\rho} \operatorname{Tr}_{\mathcal{R}} \left\{ \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}'_j R \right\} \\ & - \tilde{s}_i \tilde{\rho} \tilde{s}'_j \operatorname{Tr}_{\mathcal{R}} \left\{ \tilde{\Gamma}_i R \tilde{\Gamma}'_j \right\} \\ & - \tilde{s}'_j \tilde{\rho} \tilde{s}_i \operatorname{Tr}_{\mathcal{R}} \left\{ \tilde{\Gamma}'_j R \tilde{\Gamma}_i \right\} \\ & + \tilde{\rho} \tilde{s}'_j \tilde{s}_i \operatorname{Tr}_{\mathcal{R}} \left\{ R \tilde{\Gamma}'_j \tilde{\Gamma}_i \right\}. \end{aligned}$$

Nun wird einerseits ausgenutzt, dass unter der Spur eine zyklische Permutation erlaubt ist, andererseits ist es leicht zu zeigen, dass  $\tilde{s}_j(t') = \tilde{s}_j(t) e^{i\omega_j(t-t')}$  gilt. Es bleibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{\mathcal{S}}(t) \approx & - \sum_{i,j} (\tilde{s}_i \tilde{s}_j \tilde{\rho} - \tilde{s}_j \tilde{\rho} \tilde{s}_i) \int_0^t dt' e^{i\omega_j(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}'_j \rangle_{\mathcal{R}} \\ & - \sum_{i,j} (\tilde{\rho} \tilde{s}_j \tilde{s}_i - \tilde{s}_i \tilde{\rho} \tilde{s}_j) \int_0^t dt' e^{i\omega_j(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}'_j \tilde{\Gamma}_i \rangle_{\mathcal{R}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

In unserem Fall betrachten wir als Systemoperatoren entweder die photonischen oder die atomaren Erzeuger und Vernichter (2.1). D. h.  $s_i$  und  $s_j$  repräsentieren entweder  $a^\dagger$  und  $a$  oder  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$ , die Indizes  $i$  und  $j$  laufen von eins bis zwei. Als Reservoir-Operatoren benutzt man das (kontinuierliche) Spektrum des Reservoirs:  $\Gamma_1 = \hbar \sum_k g_k b_k$ . Damit wird das Beispiel in 2.13 reproduziert.

Die Summe in 2.20 kann explizit ausgeschrieben werden, dabei wird benutzt, dass jeweils gilt:  $\tilde{s}_1 \equiv \tilde{s}^\dagger$  und  $\tilde{s}_2 \equiv \tilde{s}$ , sowie  $\Gamma_1 = \Gamma_2^\dagger$ . Somit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{\mathcal{S}}(t) \approx & - (\tilde{s}^\dagger \tilde{s} \tilde{\rho}_{\mathcal{S}} - \tilde{s} \tilde{\rho}_{\mathcal{S}} \tilde{s}^\dagger) \int_{12} \dots \\ & - (\tilde{s} \tilde{s}^\dagger \tilde{\rho}_{\mathcal{S}} - \tilde{s}^\dagger \tilde{\rho}_{\mathcal{S}} \tilde{s}) \int_{21} \dots \\ & - (\tilde{\rho}_{\mathcal{S}} \tilde{s} \tilde{s}^\dagger - \tilde{s}^\dagger \tilde{\rho}_{\mathcal{S}} \tilde{s}) \int_{21}^* \dots \\ & - (\tilde{\rho}_{\mathcal{S}} \tilde{s}^\dagger \tilde{s} - \tilde{s} \tilde{\rho}_{\mathcal{S}} \tilde{s}^\dagger) \int_{12}^* \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Kurzschreibweise der Integrale gibt an, welche Indizes in 2.20 für  $i$  und  $j$  eingesetzt werden. Wenn die Reservoir-Operatoren  $\Gamma$  bekannt sind, ist die Berechnung der Integrale in 2.20 bzw. 2.21 prinzipiell machbar [2], hier sollen aber nur die wichtigsten Ergebnisse angegeben werden:

Der Betrag des Erwartungswerts  $\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_{\mathcal{R}}$  ist symmetrisch in  $(t, t')$ , es gilt:  $\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_{\mathcal{R}} =$

## 2. Modellbildung

$\left(\langle \tilde{\Gamma}_i(t')\tilde{\Gamma}_j(t)\rangle_{\mathcal{R}}\right)^*$ . Deshalb sind die Integrale in 2.20 paarweise komplex konjugiert. Aufgrund der großen (kontinuierlichen) Anzahl an Moden im Reservoir kann man annehmen, dass der Erwartungswert  $\langle \tilde{\Gamma}_i(t)\tilde{\Gamma}_j(t')\rangle_{\mathcal{R}}$  mit der Zeit sehr schnell abfällt. Dies ist die formelle Begründung für die Gültigkeit der Markov-Näherung [2].

Als Werte für die Integrale findet man:

$$\begin{aligned}\int_{12} &= \frac{1}{2}\gamma(N_0 + 1) - i\Delta_1 \\ \int_{21} &= \frac{1}{2}\gamma N_0 + i\Delta.\end{aligned}\tag{2.22}$$

$\gamma$ ,  $N_0$ ,  $\Delta_1$  und  $\Delta$  sind reservoirspezifische Parameter. Setzt man die Integrale von 2.22 in den Ausdruck 2.21 ein, und transformiert ins Schrödingerbild zurück ( $\tilde{O} \rightarrow O$ ), erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho_S &= \frac{1}{i\hbar}[H_S, \rho_S] + \frac{1}{i\hbar}[\hbar\Delta ss^\dagger - \hbar\Delta_1 s^\dagger s, \rho_S] \\ &+ \frac{1}{2}\gamma(N_0 + 1)\mathcal{L}_{[s]}\rho_S \\ &+ \frac{1}{2}\gamma N_0 \mathcal{L}_{[s^\dagger]}\rho_S\end{aligned}\tag{2.23}$$

An dieser Stelle wurde bereits der Superoperator  $\mathcal{L}_{[x]}$  eingeführt:

$$\mathcal{L}_{[x]}\rho = 2x\rho x^\dagger - x^\dagger x\rho - \rho x^\dagger x.\tag{2.24}$$

Der zweite Term in 2.22 führt zu einer Eigenwert-Renormalisierung des Hamiltonoperators und wird von nun an als implizit enthalten angesehen. Ebenso wird der Index  $S$  zukünftig vernachlässigt, da nur noch Systemoperatoren betrachtet werden. Die Kenntnis über das Reservoir wurde in die reservoirspezifischen Konstanten ausgelagert. Diese entsprechen typischen Reaktionszeiten und können daher als Raten  $\frac{1}{\tau_s}$  aufgefasst werden<sup>1</sup>, die spezifisch für den Prozess/Operator  $s$  sind.

Zusammenfassend erhält man als Gleichung für den Dichteoperator eines Systems mit Reservoirkontakt die **Lindblad von-Neumann Gleichung (LvNE)**:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2}\sum_s \frac{1}{\tau_s} \mathcal{L}_{[s]}\rho\tag{2.25}$$

Die Wirkung des Reservoirs auf das System wird also durch die typische Zeitkonstante  $\tau_s$  und den Superoperator  $\mathcal{L}_{[s]}$  beschrieben, wobei  $s$  die Prozesse sind, die durch die Wechselwirkung hervorgerufen werden.

---

<sup>1</sup>Die Einheit von  $\tau$  ist eine Zeit,  $[\tau] = \text{t}$ .

## 2. Modellbildung

Im Beispiel einer Photonenmode in Kontakt mit einem Bad (2.13), werden zwei Prozesse durch die System-Reservoir Wechselwirkung initiiert: Photonengewinn ( $a^\dagger$ ) und Photonenverlust ( $a$ ). In (2.23) entspricht der Systemoperator  $s$  dem Photonenoperator  $a$ . Der erste Lindblad-Term beschreibt somit den Verlust von Photonen an das Reservoir und der zweite Term mit  $s^\dagger = a^\dagger$  den Gewinn durch das Reservoir mit den Raten  $\frac{1}{\tau_a} = \gamma(N_0 + 1)$  und  $\frac{1}{\tau_{a^\dagger}} = \gamma N_0$ .

### 2.3. Herleitung der Mastergleichung aus der Lindblad vNE

#### 2.3.1. Motivation

Die im letzten Kapitel hergeleitete Lindblad von-Neumann Gleichung (2.25) beschreibt die Licht-Materie Wechselwirkung für beliebige Systeme in den genannten Näherungen. Die Dynamik der vollständigen Dichtematrix des System wird jedoch für die meisten Betrachtungen gar nicht benötigt und kann derzeit nur für einfache Systeme mit endlichem Computeraufwand errechnet werden. Um den Rechenaufwand zu minimieren können verschiedene Vereinfachungen eingeführt werden.

Eine Möglichkeit zur Beschreibung der Konfiguration des Systems ist die sogenannte **Mastergleichung** Näherung. Eine Mastergleichung ist eine oft phänomenologisch begründete Differentialgleichung, die die Wahrscheinlichkeiten der Größen eines Systems beschreibt [3].

Im Falle eines Lasers ist es zweckmäßig, die Wahrscheinlichkeiten  $p_{n,N_1}$  für jede Kombination der Anzahl von Photonen  $n$  und Anzahl angeregter Emitter  $N_1$  zu beschreiben. Diese erhält man als Diagonalelemente der Dichtematrix in der Basis von Photonen- und Emitterzuständen. Die Auswertung dieser Wahrscheinlichkeiten erlaubt es, neben durchschnittlichen Erwartungswerten für die Photonen- und Emitterzahl, die volle Photonenstatistik des System anzugeben. Was gegenüber der vollen Dichtematrix des Systems fehlt ist die Kenntnis der Korrelationen zwischen Atomen und Photonen, z. B. der 'photon-assisted polarization'.

Das Mastergleichungsmodell kann in der **Ratengleichung** Näherung noch einen Schritt vereinfacht werden: Die Ratengleichungen bilden die zeitliche Entwicklung der mittleren Anzahl der angeregten Emitter im System und der Photonen in der Kavität mode ab. Sie haben einerseits den Vorteil, dass sie numerisch mit sehr wenig Aufwand zu lösen sind, andererseits können auch analytische Betrachtungen angestellt werden. Wir kommen in Kapitel 2.4 darauf zurück.

Ein oft zitiert Vorschlag für eine Mastergleichung, die die Konfiguration von Emettern und Photonen angibt, stammt von Rice und Carmichael [4]. Die Gleichung wurde phänomenologisch begründet und gerade so gewählt, dass sie die zuvor üblicherweise benutzten Ratengleichungen reproduziert.

In dieser Arbeit soll ein Schritt weiter gegangen werden, und eine Mastergleichung aus

## 2. Modellbildung

der LvNE hergeleitet werden. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu Rice und Carmichael vorliegen soll anschließen diskutiert und numerisch überprüft werden. Die Herleitung folgt im Wesentlichen den Aufzeichnungen von P. Gartner [5].

### 2.3.2. Notation

Betrachtet wird ein Ensemble von identischen Zweizustandsemittern.

**Emitter**  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ : Jeder Emitter besetzt jeweils einen Zustand,  $|1\rangle$  oder  $|2\rangle$ .

**Verteilung**  $A_i$ : Verteilung der Emittoren im Zustand  $|i\rangle$ .  $N_i(A) =$  Anzahl der Emittoren in dem Zustand  $\rightarrow N = (N_1, N_2)$ : Liste der Besetzungszahlen (Anzahl Emittoren in Zustand 1, Anzahl Emittoren in Zustand 2).

**Gesamtzustand der Emitter**  $|A\rangle = |A_1, A_2\rangle$ : Zustand eindeutig bestimmt durch Kenntnis der Emittoren in Zustand  $|i\rangle$  in  $A_i$ .

**Operatoren:**  $a_{f\alpha}^\dagger a_{i\alpha}$  bringt Emittoren  $\alpha$  aus Zustand  $|i\rangle$  in Zustand  $|f\rangle$ .

$\sum_{A(N)} = \sum_{\forall A: N_i(A)=N_i}$ : Summe über alle Verteilungen  $A$  mit gegebener Anzahl  $N_i$  von Emittoren im Zustand  $|i\rangle$ . Meistens:  $i = 1$ , d. h. Summe über alle Verteilungen mit gegebener Anzahl an angeregten Emittoren.

Aus dem Dichteoperators des Systems kann so die Wahrscheinlichkeit  $n$  Photonen und  $N$  angeregte Emittoren zu haben ausgerechnet werden:

$$p_{n,N_1} = \sum_{A(N_1)} \langle nA | \rho | nA \rangle. \quad (2.26)$$

Ziel ist es, eine geschlossene Differentialgleichung für 2.26 zu finden.

### 2.3.3. Spezifizierung der Prozesse

Die Dynamik des Dichteoperators überträgt sich gemäß 2.26 auf die Besetzungswahrscheinlichkeiten. Daher ist hier noch einmal die LvNE angegeben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{\tau_s} \mathcal{L}_{[s]} \rho$$

Um 2.26 auszuwerten, muss zunächst einmal das Modell genauer beschrieben werden, der Hamiltonoperator und die Lindblad-Terme des Systems also genauer betrachtet werden.

#### Hamiltonoperator

Zur Beschreibung der Wechselwirkung von Zweizustandssystemen mit einer Photonenmode wird der Wechselwirkungsteil des J. C.-Hamiltonians 2.10 für mehrere Emittoren verwandt. Die Leiteroperatoren  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$  übersetzen sich in die Operatoren  $a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha}$  und  $a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha}$ .

## 2. Modellbildung

$$H = \hbar g^* b^\dagger \sum_{\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} + \hbar g b \sum_{\alpha} a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha}. \quad (2.27)$$

Dieser Hamiltonian gilt unter der Annahme, dass alle Emitter identisch sind und der Abstand  $d$  unter den Emittoren klein gegenüber der betrachteten Wellenlänge  $\lambda$  ist,  $\lambda \gg d$ , da die Kopplungskonstanten  $g$  dann identisch für jeden Emitter sind.

### Lindblad-Terme

Es wird angenommen, dass das System drei dominanten Wechselwirkungsprozessen mit äußeren Reservoirs unterworfen ist: Zunächst wird nicht bei jeder Relaxation eines Emitters ein Photon in der Lasermode erzeugt. Gerade in Gaslasern wird ein großer Anteil in sog. Leckmoden emittiert, die für den Laserprozess nicht mehr zur Verfügung stehen. Das Verhältnis der Emission in lasende zu der in nicht-lasende Moden wird mit dem sog.  $\beta$ -Faktor bezeichnet (siehe A.8).

Der Prozess der spontanen Emission in nicht-lasende Moden wird durch einen Lindblad-Term beschrieben, bei dem im System Emitter relaxieren, jedoch keine Laser-Photon entstehen. Für den Systemoperator gilt also  $s = \sum_{\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha}$ . Die Rate  $\frac{1}{\tau_{nl}}$  mit der ein angeregter Emitter in eine nicht-lasende Mode emittiert wird mit  $\gamma$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho \right|_{nl} &= \frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha} [2a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} \rho a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} - a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} \rho - \rho a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha}] \\ &= \frac{\gamma}{2} \sum_{\alpha} [2a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} \rho a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} - a_{1\alpha}^\dagger a_{1\alpha} \rho - \rho a_{1\alpha}^\dagger a_{1\alpha}]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

In 2.28 wurde benutzt, dass  $a_{2\alpha} a_{2\alpha}^\dagger = \mathbf{1}$ . Als nächstes wird der Pumpprozess betrachtet, der dafür sorgt, dass jeder Emitter mit der Rate  $\frac{1}{\tau_{pump}} = P$  angeregt werden. Der zugehörige Lindblad-Term ist strukturell identisch mit dem für den Verlust in nicht-lasende Moden, wenn man die Indizes 1 und 2 vertauscht.

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho \right|_{pump} = \frac{P}{2} \sum_{\alpha} [2a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} \rho a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} - a_{2\alpha}^\dagger a_{2\alpha} \rho - \rho a_{2\alpha}^\dagger a_{2\alpha}]. \quad (2.29)$$

Schließlich müssen Kavitätsverluste betrachtet werden: Diese sind in reellen Systemen nicht nur nicht vermeidbar, sondern natürlich auch gewollt, andererseits würde der Laser kein Licht emittieren. Die Emissionsrate wird  $\frac{1}{\tau_{loss}} = \kappa$  genannt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \rho \right|_{loss} = \frac{1}{2} \kappa [2b \rho b^\dagger - b^\dagger b \rho - \rho b^\dagger b] \quad (2.30)$$

## 2. Modellbildung

Die gesamte rechte Seite der LvNE enthält dann vier Teilprozesse:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + \left.\frac{\partial}{\partial t}\rho\right|_{\text{nl}} + \left.\frac{\partial}{\partial t}\rho\right|_{\text{pump}} + \left.\frac{\partial}{\partial t}\rho\right|_{\text{loss}} \quad (2.31)$$

Das weitere Vorgehen hin zu einer geschlossenen Gleichung für  $p_{n,N}$  gliedert sich in drei Schritte:

1. Differentiation der Diagonalelemente  $p_{n,N}$  nach der Zeit.
2. Differentiation der Nebendiagonalelemente ('photon-assisted polarization'  $q_{n,N}$ ) nach der Zeit.
3. Adiabatische Eliminierung der Nebendiagonalelemente.

### 2.3.4. Herleitung

#### Differentiation der Diagonalelemente

Die Definition der Diagonalelemente lautet (2.26):  $p_{n,N_1} = \sum_{A(N_1)} \langle nA | \rho | nA \rangle$ . Differenziert man die Terme nach der Zeit und setzt 2.31 ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle nA | \rho | nA \rangle &= \langle nA | \frac{\partial}{\partial t} \rho | nA \rangle \\ &\stackrel{(2.31)}{=} \langle nA | \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] | nA \rangle + \langle nA | \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho \right|_{\text{nl}} | nA \rangle \\ &\quad + \langle nA | \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho \right|_{\text{pump}} | nA \rangle + \langle nA | \left. \frac{\partial}{\partial t} \rho \right|_{\text{loss}} | nA \rangle. \end{aligned}$$

Einsetzen der Einzelprozesse (2.28 - 2.30) liefert:

$$\begin{aligned} &= -ig^* \sqrt{n} \sum_{\alpha} \langle n-1, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A | \rho | nA \rangle - ig\sqrt{n+1} \sum_{\alpha} \langle n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A | \rho | nA \rangle \\ &\quad + ig^* \sqrt{n+1} \sum_{\alpha} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle + ig\sqrt{n} \langle nA | \rho | n-1, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A \rangle \\ &\quad + \gamma \sum_{\alpha} \langle n, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A | \rho | n, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A \rangle - \gamma N_1 \langle nA | \rho | nA \rangle \\ &\quad + P \sum_{\alpha} \langle n, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A | \rho | n, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle - PN_2 \langle nA | \rho | nA \rangle \\ &\quad + \kappa(n+1) \langle n+1, A | \rho | n+1, A \rangle - \kappa n \langle nA | \rho | nA \rangle. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die ersten zwei Zeilen in 2.32 stammen aus dem Kommutator mit dem JC-Hamiltonian und erzeugen Nebendiagonalelemente, die wir abkürzend  $q_{n,N_1}$  nennen:

## 2. Modellbildung

$$q_{n,N_1} := -ig\sqrt{n+1} \sum_{A(N_1)} \sum_{\alpha} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle. \quad (2.33)$$

Die weiteren drei Zeilen beschreiben die Verlust- und Gewinnprozesse. Nach einem sortieren und umstellen von 2.32 (siehe A.10.1)<sup>2</sup> erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{n,N_1} = & 2q_{n,N_1} + 2q_{n-1,N_1+1} \\ & + \gamma[(N_1 + 1)p_{n,N_1+1} - N_1 p_{n,N_1}] \\ & + P[(N_2 + 1)p_{n,N_1-1} - N_2 p_{n,N_1}] \\ & + \kappa[(n + 1)p_{n+1,N_1} - np_{n,N_1}]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Dies ist zwar schon eine Gleichung für die Wahrscheinlichkeiten  $p_{n,N_1}$ , sie ist jedoch nicht geschlossen, da die Kenntnis der  $q_{n,N_1}$  verlangt ist. Im nächsten Schritt muss daher eine Gleichung für diese Größe abgeleitet werden.

### Differentiation der Nebendiagonalelemente

Per definitionem gilt (2.33):  $q_{n,N_1} \sim \sum_{A(N_1)} \sum_{\alpha} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle$ .

Wie zuvor wird die Differentiation der Elemente auf den Dichteoperator übertragen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle = \langle nA | \frac{\partial}{\partial t} \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle.$$

Setzt man für  $\frac{\partial}{\partial t} \rho$  wie zuvor die LvNE 2.25 ein, so erhält man den Ausdruck

---

<sup>2</sup>Bei genauerer Untersuchung erweisen sich die  $q$  als reell, deswegen wurde der \* für komplexe Konjugation weggelassen.

## 2. Modellbildung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} q_{n,N_1} = & -ig\sqrt{n} \sum_{\beta} \langle n-1, a_{1\beta}^\dagger a_{2\beta} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\
& - ig\sqrt{n+2} \sum_{\beta} \langle nA | \rho | n+2, a_{2\beta}^\dagger a_{1\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\
& - ig^* \sqrt{n+1} \sum_{\beta} \langle n-1, a_{2\beta}^\dagger a_{1\beta} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\
& + ig^* \sqrt{n+1} \sum_{\beta} \langle nA | \rho | n, a_{1\beta}^\dagger a_{2\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\
& + \frac{\gamma}{2} \sum_{\beta} \left\{ 2 \langle n, a_{1\beta}^\dagger a_{2\beta} A | \rho | n+1, a_{1\beta}^\dagger a_{2\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right. \\
& \quad - \langle n, a_{1\beta}^\dagger a_{1\beta} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\
& \quad \left. - \langle nA | \rho | n+1, a_{1\beta}^\dagger a_{1\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} \rangle \right\} \\
& + \frac{P}{2} \sum_{\beta} \left\{ 2 \langle n, a_{2\beta}^\dagger a_{1\beta} A | \rho | n+1, a_{2\beta}^\dagger a_{1\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right. \\
& \quad - \langle n, a_{2\beta}^\dagger a_{2\beta} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\
& \quad \left. - \langle nA | \rho | n+1, a_{2\beta}^\dagger a_{2\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right\} \\
& + \kappa \sqrt{(n+1)(n+2)} \langle n+1, A | \rho | n+2, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\
& \quad \kappa(n+\frac{1}{2}) \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Die zeitliche Veränderung der Nebendiagonalelemente wird von Gleichung 2.35 beschrieben. Diese Nebendiagonalelemente wurden durch den Kommutator mit dem JC-Hamiltonian erzeugt. Um zu vermeiden, dass man durch erneute Wechselwirkung eine Störungsordnung höher gelangt und um das Erlangen einer geschlossenen Lösung zu gewährleisten, werden in diesen Termen Prozesse, an denen mehrere Emitter beteiligt sind (nämlich dann, wenn  $\alpha \neq \beta$ ), vernachlässigt. Die Vernachlässigung dieser Terme geschieht aus zweckmäßigen Gründen, es können jedoch anschauliche Hinweise zu deren Rechtfertigung geliefert werden:

Physikalisch ist diese Näherung nach Sargent, Scully und Lamb dann in Ordnung, wenn der Abstand der Emitter  $d$  groß ist im Vergleich zu deren Ausdehnung [6]. Betrachtet man beispielsweise Quantenpunkte mit einer Ausdehnung von ca.  $10\text{ nm}$  bei einer Dichte von etwa  $10^{10}$  Punkten pro Quadratzentimeter, so sind und nur etwa 3% der Fläche von Quantenpunkten besetzt [7].

Die einzelnen Terme werden unter Vernachlässigung dieser superradianten Effekte im Anhang behandelt (A.10.2). Es folgt:

## 2. Modellbildung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} q_{n,N_1} = & -|g|^2(n+1)(N_2+1)p_{n+1,N_1-1} \\
& + |g|^2(n+1)N_1 p_{n,N_1} \\
& + \gamma \left( N_1 q_{n,N_1+1} - \left( N_1 - \frac{1}{2} \right) q_{n,N_1} \right) \\
& + P \left( (N_2+1) q_{n,N_1-1} - \left( N_2 + \frac{1}{2} \right) q_{n,N_1} \right) \\
& + \kappa \left( (n+1) q_{n+1,N_1} - \left( n + \frac{1}{2} \right) q_{n,N_1} \right). \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Damit ist das Problem im Grunde vollständig gelöst. Während 2.34 und 2.36 sowohl  $p$ - als auch  $q$ -Terme enthalten, sind sie als gekoppeltes Differentialgleichungssystem lösbar.

### Eliminierung der $qs$ mit unterschiedlichem Index

Um eine geschlossene Gleichung für  $p_{n,N_1}$  zu erhalten, muss zunächst in Gleichung 2.36 dafür gesorgt werden, dass nur noch  $q_{n,N_1}$  enthalten sind und keine 'qs' mit unterschiedlichen Indizes,  $q_{n\pm 1,N_1\pm 1}$ .

Mu und Savage haben zur Behandlung eines ähnlichen Problems im einatomigen Laser vorgeschlagen anzunehmen, dass die Photonenzahl-Verteilung langsam variiert und daher gilt [8]:

$$q_{n+1,N_1} \approx q_{n,N_1} \tag{2.37}$$

Diese Näherung führt jedoch in 2.36 dazu, dass der  $\kappa$ -Term insgesamt positiv ist, man erhält einen Faktor  $+\kappa \frac{1}{2} q_{n,N_1}$ . Der Beitrag von Kappa führt daher nicht zu Dephasierung. Mu und Savage rechtfertigen diese Näherung für den Fall, dass die spontane Emissionsrate  $\gamma$  deutlich größer ist als  $\kappa$ ,  $\gamma \gg \kappa$ .

Ein Alternativvorschlag von Gartner [5] besteht darin, nicht nur die Indizes der  $q_{n,N_1}$  zu verschieben, sondern den Vorfaktor mitzubehandeln, sodass z. B. gilt:

$$\begin{aligned}
(n+1) q_{n+1,N_1} & \approx n q_{n,N_1} \\
(N_1+1) q_{n,N_1+1} & \approx N_2 q_{n,N_1} \\
\Rightarrow (N_2-1) q_{n,N_1+1} & \approx N_2 q_{n,N_1} \tag{2.38}
\end{aligned}$$

In dieser Näherung bleibt der  $\kappa$ -Term als Ganzes in 2.36 negativ und führt zu Dephasierung.

Das Problem beider Näherungen, sowohl der von Mu und Savage als auch der von Gartner, ist, dass die Annahme, die Photonenverteilung sei stetig und genügend glatt

## 2. Modellbildung

für eine große Anzahl von Photonen und Emittoren besser zutrifft, als im Fall von wenigen Emittoren oder Photonen, wie z. B. im Quantenpunktler, in dem sich nur einige zehn Emitter befinden können.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Gleichungen für  $p_{n,N_1}$  und  $q_{n,N_1}$  prinzipiell als gekoppeltes Differentialgleichungssystem lösbar sind. Die besprochene Näherung ist nur dann unumgänglich, wenn man eine geschlossene Gleichung für  $p_{n,N_1}$  finden will.

### Adiabatische Eliminierung der Diagonalelemente

Um die  $q_{n,N_1}$  in Gleichung 2.34 durch  $p_{n,N_1}$  zu ersetzen und schließlich eine geschlossene Gleichung zu erhalten, müssen die  $q_{n,N_1}$  adiabatisch eliminiert werden.

Man nimmt an, dass die Dynamik der Polarisationen  $q_{n,N_1}$  im Vergleich zu den Wahrscheinlichkeiten  $p_{n,N_1}$  vernachlässigbar klein ist. Das bedeutet physikalisch, dass das System seinen äußeren Einflüssen (Lindblad-Prozesse) hinreichend schnell folgt,

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{n,N_1} \approx 0. \quad (2.39)$$

Diese Näherung wird im statischen Fall exakt. Zusammen mit der Elimination der  $q_{n\pm 1, N_1 \pm 1}$  (siehe vorheriger Abschnitt), erhält man aus 2.37:

$$\begin{aligned} 0 &= -|g|^2(n+1)(N_2+1)p_{n+1,N_1-1} + |g|^2(n+1)N_1p_{n,N_1} - \frac{1}{2}(\gamma + P + \kappa)q_{n,N_1} \\ \Leftrightarrow q_{n,N_1} &= -\frac{1}{2}R(n+1)(N_2+1)p_{n+1,N_1-1} + \frac{1}{2}R(n+1)N_1p_{n,N_1}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

$R$  bezeichnet die Rate der spontanen Emission in die Lasermode:

$$R = \frac{1}{\tau_l} = \frac{4|g|^2}{\gamma + P + \kappa}. \quad (2.41)$$

Es ist zu beachten, dass  $R$  umso kleiner ist, je größer die Raten der äußeren Einflüsse  $\gamma$ ,  $P$  und  $\kappa$  sind. Dies zeigt den dephasierenden Einfluss der äußeren Prozesse. Eingesetzt in 2.34 erhält man so eine geschlossene Gleichung für die Wahrscheinlichkeiten  $p_{n,N_1}$  (Mastergleichung):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{n,N_1} &= R[n(N_1+1)p_{n-1,N_1+1} - (n+1)N_1p_{n,N_1} \\ &\quad + (n+1)(N_2+1)p_{n+1,N_1-1} - nN_2p_{n,N_1}] \\ &\quad + \gamma[(N_1+1)p_{n,N_1+1} - N_1p_{n,N_1}] \\ &\quad + P[(N_2+1)p_{n,N_1-1} - N_2p_{n,N_1}] \\ &\quad + \kappa[(n+1)p_{n+1,N_1} - n p_{n,N_1}]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

## 2. Modellbildung

### Vernachlässigung der stimulierten Absorptionsprozesse

Die Reabsorptionsprozesse in den Mastergleichungen werden üblicherweise vernachlässigt, weil das 2-Niveau System effektiv eine Näherung für ein 3- oder 4-Niveau System beschreibt.

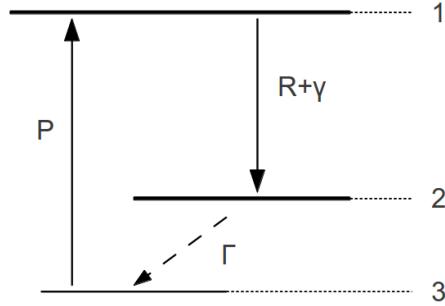


Abbildung 2.4.: 3-Niveau System, Laserniveau 2 wird mit sehr schneller Rate  $\Gamma$  in Level 3 entleert.

Führt man unterhalb des unteren Laserniveaus 2 ein Hilfsniveau 3 ein und nimmt an, dass die Rate  $\Gamma$  der Relaxation von 2 in 3 deutlich größer ist als die Rate  $R$  von 1 in 2, so kann Niveau 2 als praktisch unbesetzt angesehen werden,  $N_2 \approx 0$ . Der Großteil der Emitter befindet sich dann in Level 1 oder 3, sodass gilt:

$$N_3 \approx N - N_1 = N_2.$$

Man vermeidet also die Betrachtung der Reabsorptionsprozesse, behält jedoch den Sättigungsfaktor  $N_2 = N - N_1$  für die Pumprate. Außerdem hängt die Rate der spontanen Emission in lasende Moden  $R$  nicht mehr wie in (2.41) vom Pumpterm  $P$  an.

Wenn Absorptionsprozesse vernachlässigt werden lautet die Mastergleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{n,N_1} = & R [n(N_1 + 1) p_{n-1,N_1+1} - (n + 1)N_1 p_{n,N_1}] \\ & + \gamma [(N_1 + 1) p_{n,N_1+1} - N_1 p_{n,N_1}] \\ & + P [(N_2 + 1) p_{n,N_1-1} - N_2 p_{n,N_1}] \\ & + \kappa [(n + 1) p_{n+1,N_1} - n p_{n,N_1}]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

### 2.3.5. Übersicht und Diskussion der verwendeten Näherungen

Die Mastergleichung 2.42 wurde unter Verwendung vielfältiger Näherungen aus grundlegenden Prinzipien der Quantenmechanik und Quantenoptik hergeleitet. Diese wurden im Text genannt, hier soll jedoch noch eine knappe Übersicht gegeben werden.

## 2. Modellbildung

### Jaynes Cummings Modell

Im Jaynes-Cummings Modell werden Annahmen getroffen, die die Natur der Wechselwirkung von elektromagnetischen Feld und Materie betreffen.

**Dipolnäherung:** Bei der Dipolnäherung wird davon ausgegangen, dass der betrachtete Bereich in dem Feld und Materie wechselwirken klein ist gegen die Wellenlänge  $\lambda$ . Im optischen Fall entspricht  $\lambda$  einigen hundert Nanometern.

**Wechselwirkung einer Kavitätsmode mit zwei Zuständen:** Das aktive Material wird als Zweizustandssystem betrachtet, das mit einer diskreten Photonenmode ohne Verstimmung wechselwirkt. Das ist dann gerechtfertigt, wenn die Kavitätsmode sehr gut auf einen energetischen Übergang des Systems abgestimmt ist und die weiteren Übergangsenergien deutlich entfernt liegen.

Es werden also nur resonante Prozesse betrachtet ( $\rightarrow$  Rotating Wave Approximation A.7).

### Lindblad Formalismus

Bei der Betrachtung der dissipativen Prozesse und der Herleitung der Lindblad-Terme, wurden zwei wichtige Näherungen über die Wechselwirkung von System und Reservoir getroffen:

**Born-Näherung:** Dadurch, dass man die zeitliche Entwicklung des System nur bis zur zweiten Ordnung in  $H'$  vorgenommen hat, vernachlässigt man Korrelationen zwischen System und Reservoir und arbeitet mit dem faktorisierten Dichteoperator  $\rho_{\mathcal{R}+\mathcal{S}} = \rho_{\mathcal{S}} \otimes R$ .

**Markov-Näherung:** Es wird davon ausgegangen, dass die Entwicklung eines Systems bestimmt werden kann, wenn *ein* Anfangszustand spezifiziert wurde. Die vergangene Entwicklung muss nicht bekannt sein. Diese Näherung ist dann gerechtfertigt, wenn die Wechselwirkung zwischen System und Reservoir genügend schwach ist.

### Herleitung der Mastergleichung

Bei der Herleitung der Mastergleichung aus der LvNE wurden einige Prozesse vernachlässigt, um eine geschlossene Gleichung für die Wahrscheinlichkeiten  $p_{n,N_1}$  zu erhalten.

**Annahme identische Emitter:** Es wurde angenommen, dass alle Emitter exakt gleich sind und das Volumen, das innerhalb der Kavität von ihnen eingenommen wird klein gegen die kubische Wellenlänge ist. Daher werden die Kopplungskonstanten  $g$  als identisch behandelt und inhomogene Dephasierungsprozesse ('inhomogeneous broadening') durch individuelle Verstimmungen der Emitter zur Kavitätsmode vernachlässigt. Diese Effekte werden teilweise durch den  $\beta$ -Faktor bzw. den  $\gamma$ -Prozess des Verlusts in nicht-lasende

## 2. Modellbildung

Moden berücksichtigt (Anh- A.8).

**Vernachlässigung superradianter Prozesse:** Prozesse, an denen mehrere Emitter beteiligt sind können nach Sargent, Scully und Lamb dann vernachlässigt werden, wenn das System 'hinreichend diskret' ist, die Emitterdichte also nicht zu groß ist [6].

**Annahme der Stetigkeit von  $q_{n,N_1}$ :** Diese Annahme wird getroffen, damit man Polarisierungen mit unterschiedlichen Indizes  $q_{n\pm 1, N_1 \pm 1}$  gleichsetzen und so zu einer geschlossenen Gleichung gelangen kann. Diese Näherung ist vermutlich umso besser, je mehr Photonen und Emitter betrachtet werden.

**Adiabatische Eliminierung:** Die Annahme, dass die Zeitentwicklung der Polarisationen  $q_{n,N_1}$  wesentlich langsamer als die der Wahrscheinlichkeiten  $p_{n,N_1}$  ist gilt dann, wenn das System seinen äußeren Einflüssen hinreichend schnell folgt.

Im statischen Fall wird diese Näherung exakt.

### 2.3.6. Vergleich mit Rice-Carmichael

#### Mastergleichung von Rice und Carmichael

Während 2.43 aus grundlegenden Prinzipien unter den genannten Bedingungen hergeleitet wurde, haben Rice und Carmichael eine rein phänomenologisch begründete Mastergleichung postuliert. In der verwendeten Notation lautet sie [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{n,N_1} = & R[n(N_1 + 1)p_{n-1,N_1+1} - (n + 1)N_1 p_{n,N_1}] \\ & + \gamma[(N_1 + 1)p_{n,N_1+1} - N_1 p_{n,N_1}] \\ & + \underline{P[p_{n,N_1-1} - p_{n,N_1}]} \\ & + \kappa[(n + 1)p_{n+1,N_1} - n p_{n,N_1}] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Rice und Carmichael betrachten ihre Mastergleichung ebenfalls ohne Absorptionseffekte, stellen in einer Fußnote jedoch klar, dass diese prinzipiell relevant sein können und geben die zwei Terme an, die strukturell vergleichbar zur zweiten Zeile in (2.42) sind. Die einzelnen Prozesse lassen sich wie in Abb. 2.5, schematisch darstellen.

Der mittlere Punkt entspricht der Wahrscheinlichkeit  $p_{n,N_1}$ , die weiteren Punkte entsprechen den Wahrscheinlichkeiten mit  $n \pm 1$  und  $N_1 \pm 1$ . Die Pfeile in horizontaler Richtung beschreiben die Kavitätsverluste, es gehen Photonen verloren, ohne dass sich die Konfiguration der Emitter ändert.

In senkrechter Richtung gehen einerseits Emitter-Anregungen durch spontane Emission in nicht-lasende Moden verloren (gestrichelte Linie,  $\gamma$ -Prozess). Andererseits werden Emitter durch den Pumpprozess angeregt.

In diagonaler Richtung wird der Gewinn eines Photons durch den Verlust einer Emitter-Anregung kompensiert. Beiträge liefern die Raten für spontane (gestrichelte Linie) und stimulierte (durchgezogene Linie) Emission in lasende Moden.

## 2. Modellbildung

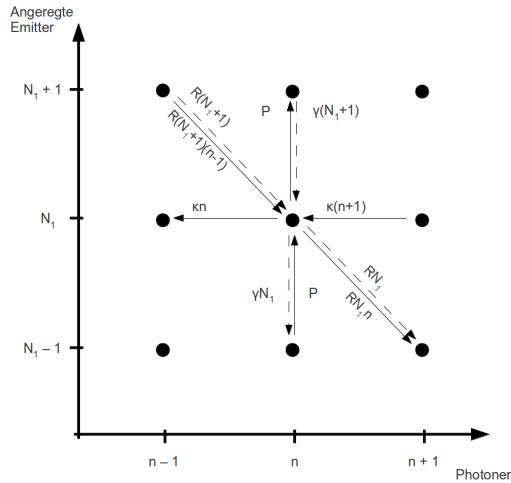


Abbildung 2.5.: Schematische Darstellung der Beiträge zur Mastergleichung.

Verlust- und Gewinnprozesse verlaufen also in senkrechter oder horizontaler Richtung, Beiträge zum Laser-Prozess verlaufen in diagonaler Richtung.

### 2.4. Ratengleichungen

Eine weitere Vereinfachung des Modells kann man erreichen, indem man die sogenannten Ratengleichungen einführt. Diese sind gekoppelte Differentialgleichungen für die Dynamik der Anzahl der angeregten Photonen  $n$  und die Anzahl der angeregten Emitter  $N_1$ . Man erhält sie durch absummieren der kompletten Photon-Emitterkonfigurationsstatistik  $p_{n,N_1}$ :

$$\langle n \rangle = \sum_{n,N_1} n p_{n,N_1}$$

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{n,N_1} N_1 p_{n,N_1}$$

Unter der Annahme, dass Photon- und Emittorstatistik genügend unabhängig sind und näherungsweise gilt  $\langle nN_1 \rangle = \langle n \rangle \langle N_1 \rangle$  erhält man so aus der Mastergleichung ohne Absorptionsterme 2.43:

## 2. Modellbildung

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n \rangle = R (\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle - \kappa \langle n \rangle \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N_1 \rangle = -R (\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle + P N_2 - \gamma \langle N_1 \rangle \quad (2.45)$$

$$= -R (\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle + P (N - \langle N_1 \rangle) - \gamma \langle N_1 \rangle. \quad (2.46)$$

Diese sind identisch zu den Ratengleichungen von Rice und Carmichael, mit dem Unterschied, dass die Pumprate effektiv mit dem Faktor  $N_2$  gesättigt wird.

### Unterschied zum Modell von Rice und Carmichael

Der Unterschied zwischen dem hier entwickelten Modell und dem von Rice und Carmichael liegt, wenn man von den Reabsorptionsprozessen absieht, in der Behandlung der **Pumprate**:

Bei Rice und Carmichael fehlen die Faktoren  $N_2$  und  $N_2 + 1$  im Pumpterm. Nimmt man an, dass  $N_2$  genügend groß ist und  $N_2 \approx N_2 + 1$  gilt, kann man  $P$  skalieren:  $\tilde{P} = N_2 P$ . Wie später gezeigt wird (3) gilt für den Fall einer großen Gesamtanzahl von Emittoren  $N$ , dass bis auf wenige Prozent Abweichung  $N_2 \approx N$  gilt. Man erhält also eine intensive Größe  $P$ , die nicht mit der Größe des Systems skaliert oder eine extensive Größe  $\tilde{P} = NP$ , die Pumprate für das gesamte System bezeichnet [9].

Betrachtet man jedoch einen Laser mit wenigen Emittoren ( $N < 100$ ), ergibt sich aus der Tatsache, dass  $N_2$  keine Konstante ist (wie  $N$ ), sondern von der Anzahl der Emitter und der Anzahl der angeregten Emitter abhängt, ein qualitativer Unterschied zu Rice und Carmichael: Werden Emitter angeregt, so sinkt die Anzahl der relaxierten Emitter  $N_2$  ab und sorgt dafür, dass effektiv weniger Emitter durch den Pumpprozess angeregt werden. Dieser Sättigungsprozess ist bei Rice und Carmichael nicht enthalten, wird in (2.43) aber implizit berücksichtigt. Die Konsequenzen für das Erreichen des Laserprozesses werden in (3.1.1) diskutiert.

## 2.5. Kohärenz, Photonenstatistik

Laserlicht unterscheidet sich in mehreren physikalischen Eigenschaften von thermischem Licht, wie es beispielsweise von einer Glühlampe emittiert wird. Hier soll kurz das Konzept der 'Kohärenz' erster und zweiter Ordnung erläutert werden um ein Verständnis für die Unterschiede und Mechanismen zur Identifizierung dieser unterschiedlichen Lichttypen zu erhalten.

## 2. Modellbildung

### 2.5.1. Räumliche und zeitliche Kohärenz

Eine ideale elektromagnetische Welle ist nach der Maxwell'schen Theorie eine ebene Welle der Form [10]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)}. \quad (2.47)$$

Diese Welle ist monochromatisch, da sie in Raum und Zeit unendlich ausgedehnt ist und ihre Fouriertransformierte somit  $\delta$ -Peak liefert. Diese Fouriertransformation ist im Distributionssinn zu verstehen, weil (2.47) nicht quadratintegrabel ist.

Reelles Licht kann nicht aus solchen idealisierten, unendlich langen Wellenzügen bestehen, weil die Emissionszeiten, also die Zeit der Erzeugung von Lichtquanten durch atomare Übergänge endlich sind. Diese endliche Ausdehnung der Welle in der Zeit führt unweigerlich zu einer Verbreiterung des Spektrums im Frequenzraum. Zusätzlich wird Licht üblicherweise nicht nur von einem einzelnen Emitter erzeugt, sondern von einem Ensemble von Emittoren. Das bedeutet, dass die reelle elektromagnetische Welle aus einer statistischen Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Herkunft mit unterschiedlichen Frequenzen und Phasen besteht. Es wird im folgenden vereinfachend angenommen, dass eine Punktquelle betrachtet wird, also keine zusätzliche räumliche Verteilung betrachtet werden muss.

Die sog. *Kohärenz* misst, wie stark die unterschiedlichen Wellenbestandteile eines Signals miteinander korreliert sind. Im Fall hoher Kohärenz variieren die Phasen der einzelnen Wellen nur sehr gering, während diese Größe bei kleiner Kohärenz zufällig und mit großer Streuung verteilt ist. Ein quantitatives Maß für die Kohärenz einer Emission ist die sog. Kohärenzzeit  $\tau_c$  bzw. die äquivalente Größe der Kohärenzlänge  $l_c = c \cdot \tau_c$ ,  $c$  bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit. Die Kohärenzlänge gibt an, nach welcher Entfernung vom Ursprung die Phasen der einzelnen Signalbestandteile so stark verschoben sind, dass die Form des Signals verloren geht und Rauscheffekte überwiegen. Die Kohärenzlänge ist daher abhängig von der Wellenlänge und der spektralen Breite des Signals [11]:

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = c \cdot \tau_c. \quad (2.48)$$

Die Breite im Frequenzraum bestimmt also ebenfalls die Kohärenzzeit  $\tau_c$ , mit der die Kohärenz des Signals abklingt. Kohärenzlängen reichen von einigen Millimetern (Glühlampe), bis zu einigen hundert Kilometern (guter Laser).

### 2.5.2. Kohärenz erster Ordnung – $g^{(1)}(\tau)$

Ein Maß für die Kohärenz eines Signals ist die sogenannte Autokorrelationsfunktion erster Ordnung,  $g^{(1)}(t, \tau)$ . Sie gibt an, wie groß die Korrelation (Ähnlichkeit) zweier Signale  $E(t)$  gleichen Ursprungs ist, die zu den Zeiten  $t$ , bzw.  $t + \tau$  entstanden sind und

## 2. Modellbildung

lautet [11]:

$$g^{(1)}(t, \tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle}{\langle |E(t)|^2 \rangle}. \quad (2.49)$$

Für stationäre System gilt  $\frac{\partial}{\partial t}g^{(1)}(t, \tau) = 0$  und somit

$$g^{(1)} = g^{(1)}(\tau).$$

Experimentell lässt sich die Messung von  $g^{(1)}(\tau)$  bewerkstelligen, in dem Licht beispielsweise in einem Michelson-Interferometer um die Zeit  $\tau$  versetzt mit sich selbst überlagert wird. Liegt koherantes Licht vor, so bilden sich Interferenzringe. Der Interferenzkontrast zwischen aufeinanderfolgenden Ringen ist ein Maß für dessen Koheranz [11]:

$$\nu = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} =: |g^{(1)}(\tau)|^2. \quad (2.50)$$

Für unkorreliertes Licht (Glühlampe) wäre kaum ein Unterschied zwischen den Intensitäten sichtbar und  $g^{(1)}(\tau)$  somit verschwindend klein.

Weitere Bemerkungen zum Zusammenhang der spektralen Dichte und  $g^{(1)}$  finden sich im Anhang, A.9.

### 2.5.3. Koheranz zweiter Ordnung, Photonen-Bunching und Antibunching – $g^{(2)}$

Das Konzept der Koheranz erster Ordnung kann beliebig erweitert werden<sup>3</sup>. Ein in der Quantenoptik oft benutztes Maß ist die Autokorrelationsfunktion zweiter Ordnung,  $g^{(2)}(t, \tau)$ . Sie beschreibt die Korrelation von Photonenemissionen: Ein erhöhter Wert bedeutet, dass das System dazu tendiert immer mehrere, zeitlich kurz aufeinander folgende Photonen zu emittieren. Dieses Phänomen wird *Bunching* genannt. Bei verringertem  $g^{(2)}(t, \tau)$  ist die Wahrscheinlichkeit eines weiteren Ereignissen zunächst gering. Der Emittier macht eine kurze Ruhepause bevor er ein neues Photon erzeugen kann.

Die quantenmechanische Definition von  $g^{(2)}$  lautet mit den Feldoperatoren  $b$  und  $b^\dagger$  [2]

$$g^{(2)}(t, \tau) = \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t + \tau)b(t + \tau)b(t) \rangle}{|b^\dagger(t)b(t)|^2},$$

bzw. für stationäre Prozesse,  $\frac{\partial}{\partial t}g^{(2)}(t, \tau) = 0$ ,

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle b^\dagger b^\dagger(\tau)b(\tau)b \rangle}{|b^\dagger b|^2}. \quad (2.51)$$

---

<sup>3</sup>siehe Arbeiten von R. Glauber, [12]

## 2. Modellbildung

Eine wichtige Kenngröße ist die simultane Emission zweier Photonen ( $\tau = 0$ ). In diesem Fall reduziert sich  $g^{(2)}$  zu:

$$\begin{aligned} g^{(2)}(0) &= \frac{\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle}{|b^\dagger b|^2} = \frac{\langle b^\dagger b b^\dagger b - b^\dagger b \rangle}{|b^\dagger b|^2} \\ &= \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Es kann gezeigt werden, dass thermisches Licht eine Boltzmannstatistik aufweist, für die  $g^{(2)}(0) = 2$  gilt. Kohärentes Laserlicht dagegen weist eine poissonartige Statistik auf, für die  $g^{(2)}(0) = 1$  gilt.

Aus der Kenntnis der Lösung der Mastergleichnung und der daraus resultierenden Photonenstatistik  $p_n = \sum_{N_1} p_{n,N_1}$ , lässt sich mit Hilfe von (2.52) so eine Aussage darüber treffen, welche Art von Licht das betrachtete System emittiert.

## 3. Diskussion

Die Unterschiede zwischen den Gleichungen, die im Theorieteil entwickelt wurden zu den Gleichungen von Rice und Carmichael, liegen in erster Linie am Sättigungsterm  $N_2$ . Der Einfluss dieses Terms kann analytisch anhand der Ratengleichungen diskutiert werden und wird später numerisch überprüft.

### 3.1. Qualitatives Verhalten der modifizierten Ratengleichungen

Die Ratengleichungen mit Sättigung lauten (2.46):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle n \rangle &= R(\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle - \kappa \langle n \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle N_1 \rangle &= -R(\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle + P(N - \langle N_1 \rangle) - \gamma \langle N_1 \rangle.\end{aligned}$$

Im stationären Fall verschwindet die zeitliche Änderung der Größen. Dies erlaubt, die stationären Werte für  $n$  und  $N_1$  analytisch als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}0 &= R(\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle - \kappa \langle n \rangle \\ 0 &= -R(\langle n \rangle + 1) \langle N_1 \rangle + P(N - \langle N_1 \rangle) - \gamma \langle N_1 \rangle\end{aligned}\tag{3.1}$$

zu bestimmen. Für die stationäre Anzahl der Photonen ( $n$ ) in der Kavitätsmode lautet diese Gleichung:

$$n^2 - \frac{RNP - \kappa(R + \gamma + P)}{R\kappa} n - \frac{NP}{\kappa} = 0.\tag{3.2}$$

#### 3.1.1. Bedingungen für Erreichen der Laserschwelle

Die Lösung der Gleichung (3.2) ist der Schnittpunkt einer Parabel mit der x-Achse:

### 3. Diskussion

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 - ax - b, \\
 \Leftrightarrow y &= \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + b\right) \\
 \text{mit } a &= \frac{RNP - \kappa(R + \gamma + P)}{R\kappa} \\
 \text{und } b &= \frac{NP}{\kappa}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Da die Parabel nach oben geöffnet und  $b$  immer positiv ist ( $N, P$  und  $\kappa$  jeweils nicht-negativ) schneidet sie die  $y$ -Achse stets im negativen Bereich und es gibt genau eine positive Lösung für  $n$  (dicker Punkt). Das Verhalten der Lösung hängt vor allem davon ab, ob  $a$  positiv oder negativ ist. Beide Fälle werden in Abb. 3.1 gezeigt. [13]

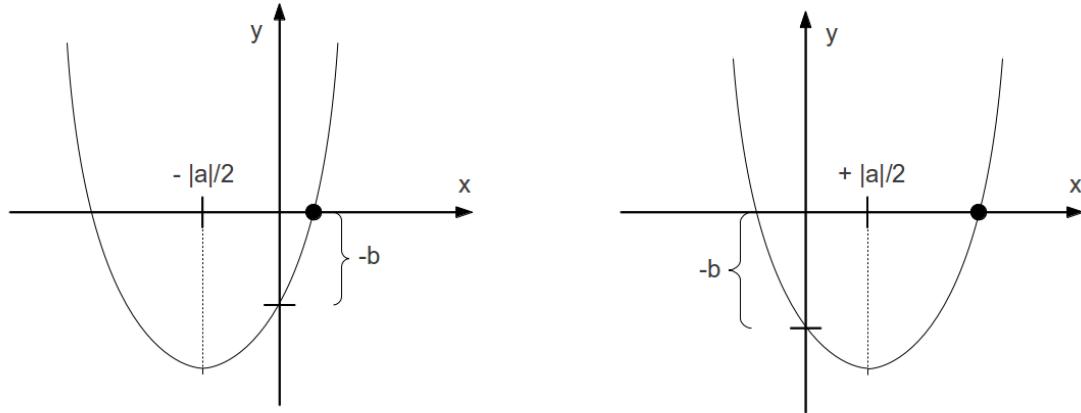


Abbildung 3.1.: Parabel die von der quadratischen Gleichung  $y = x^2 - ax - b$  beschrieben wird. Lösungen für  $y = 0$ : Schnittpunkte mit  $x$ -Achse. Dicker Punkt: physikalische Lösung (Anzahl der Photonen kann nicht negativ sein). Links:  $a < 0$ ; rechts:  $a > 0$ .

**a negativ:** Falls  $a$  negativ ist, ist die Parabel nach links verschoben und ihr Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse verschiebt sich kaum. Im Gegenteil, je größer der Betrag von  $a$  wird, desto langsamer wird der Schnittpunkt wandern. Nach (3.3) ist dies der Fall, wenn gilt:

$$(NR - \kappa)P < \kappa(R + \gamma).$$

Diese Bedingung ist dauerhaft erfüllt, falls

$$\begin{aligned}
 NR &< \kappa \\
 N &< \frac{\kappa}{R}.
 \end{aligned}$$

### 3. Diskussion

Übertragen auf die Anzahl der Photonen als Funktion des Pumpstroms bedeutet das, dass in diesem Regime die Anzahl der Emitter zu klein ist um die Kavitätsverluste wirksam zu kompensieren. Es ist daher kein drastischer Anstieg der Photonenzahl durch stimulierte Emission zu erwarten.

a **positiv**: Wenn die Anzahl der Emitter groß genug ist,

$$N > \frac{\kappa}{R}, \quad (3.4)$$

wechselt a für eine kritische Pumpstärke  $P_0$  das Vorzeichen. Es gilt:

$$P_0 = \frac{\kappa(R + \gamma)}{NR - \kappa}. \quad (3.5)$$

Ab diesem Moment beginnt die Lösung für n schnell zu wachsen, da der Scheitelpunkt der Parabel nun im positiven Bereich liegt (rechts Bild) und sowohl a als auch b mit P wachsen. Wir bezeichnen daher  $P_0$  von nun an als 'Pumpschwelle'. Physikalisch gesehen ist die Situation erreicht, ab der die stimulierte Emission die spontane überwiegt und die Zahl der Photonen schnell ansteigt.

Unter der Annahme, dass hinreichend große Pumpstärken immer erreicht werden können, ohne dass das Lasersystem und die assoziierten Raten zu stark zu beeinflusst werden, ist die limitierende Bedingung für den Laserprozess die in (3.4) genannte. Diese Bedingung legt die minimale Anzahl von Emittoren fest, wenn die Kavitätsverluste und die Rate der Emission in lasende Moden bekannt sind. Bei fester Anzahl von Emittoren kann diese Ungleichung umgestellt werden, um eine Abschätzung über den minimalen  $\beta$ -Faktor (A.8) der nötig ist um den Laserprozess zu ermöglichen, vorzunehmen. Mit  $\frac{1}{\tau_{sp}} = R + \gamma$  und  $\beta = \frac{R}{R+\gamma}$  erhält man aus (3.4):

$$\beta > \frac{\kappa \tau_{sp}}{N} = \frac{1}{N} \frac{\tau_{sp}}{\tau_{loss}}. \quad (3.6)$$

Bei fester Anzahl von Emittoren und bekannter gesamter Emissionszeit  $\tau_{sp}$  muss  $\beta$  also genügend groß sein, um Bedingung (3.6) zu erfüllen, damit Lasing auftreten kann.

#### 3.1.2. Numerische Überprüfung der Bedingungen für Lasing anhand von Input/Output Kennlinien für Laser mit 75 Emittoren

Die positive Lösung der Gleichung (3.2) liefert die Anzahl der Photonen im stationären Fall und lautet:

$$n|_{t \rightarrow \infty} = \frac{RNP - \kappa(R + \gamma + P)}{2R\kappa} + \sqrt{\left(\frac{RNP - \kappa(R + \gamma + P)}{2R\kappa}\right)^2 + \frac{NP}{\kappa}}. \quad (3.7)$$

Für die numerische Kalkulation wurden folgende Parameter verwandt:

### 3. Diskussion

$$\begin{aligned}\tau_{\text{sp}} &= 50 \text{ ps} \\ \tau_{\text{loss}} &= \frac{17}{2} \text{ ps.}\end{aligned}\tag{3.8}$$

Die Werte wurden von *Gies et al.* übernommen [14]. Es wurde ein System von  $N = 75$  Emittern betrachtet. Nach Gleichung (3.6) muss der  $\beta$ -Faktor mindestens etwa 0.078 betragen, damit Lasing auftreten kann. Bei der Berechnung wurde ein Bereich von  $\beta \in [10^{-3}; 1]$  über einem Pumpstrom von  $P \in [10^{-4}; 10^5] \text{ ps}^{-1}$  betrachtet. Als Schrittweiten für  $\beta$  wurden 10er Potenzen verwendet. Im Bereich von  $\beta \approx 0.078$  wurde die Schrittweite sehr klein gewählt um den Wechsel der Regime fein aufzulösen. Die Raten  $R$  und  $\gamma$  erhält man aus  $\tau_{\text{sp}}$  über

$$R = \frac{\beta}{\tau_{\text{sp}}},$$

bzw.

$$\gamma = \frac{1 - \beta}{\tau_{\text{sp}}}.$$

Die Ergebnisse wurden in Abb. 3.2 geplottet. Es ist zu erkennen, dass die Photonenzahlen für  $\beta$ -Werte unterhalb von 0.078 tatsächlich effektiv sättigen und oberhalb einer bestimmten Pumprate nicht weiter wachsen. In dieser Situation sind alle Emittoren angeregt und relaxieren durch spontane, jedoch nicht durch stimulierte Emission. Für  $\beta > 0.078$  hingegen kann stimulierte Emission stattfinden und die Photonenzahl wächst auch für größere Pumpraten weiter.

#### 3.1.3. Ratengleichung im Limes vieler Emitter

Betrachtet man den Fall vieler Emitter ( $N \rightarrow \infty$ ), so ist die Bedingung (3.4) praktisch automatisch erfüllt. Für die Pumpschwelle (3.5) erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned}P_0|_{N \rightarrow \infty} &= \frac{\kappa(R + \gamma)}{NR} \\ \Rightarrow NP_0 &= \tilde{P}_0 = \frac{\kappa}{\beta}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

$\tilde{P}_0$  bezeichnet also nicht mehr die Pumprate pro Emitter, sondern die Pumprate für das gesamte System. Bei einer Auftragung gegen  $\beta \tilde{P} = \beta NP$  ist also zu erwarten, dass die Pumpschwelle bei  $\kappa$  liegt. Die Ratengleichungen von Rice-Carmichael führen zu der selben Pumpschwelle [1], [4].

Wir betrachten die Lösung für die Photonenzahl (3.7) in Abhängigkeit von der systemischen Pumprate  $\tilde{P}$  und  $P = \frac{\tilde{P}}{N} \approx 0$ :

### 3. Diskussion

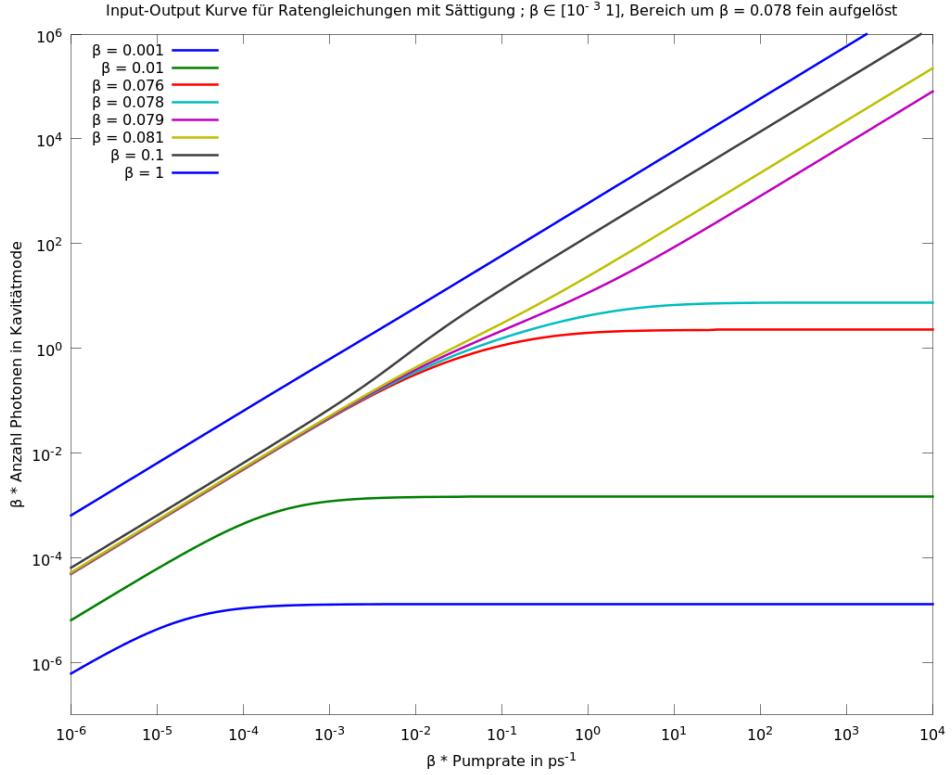


Abbildung 3.2.: Ratengleichungen mit Sättigungsterm für  $N = 75$  Emitter. Pumprate und Photonenzahl wurden zur besseren Vergleichbarkeit mit  $\beta$  skaliert.

$$n|_{\substack{t \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} = \frac{R\tilde{P} - \kappa(R + \gamma)}{2R\kappa} + \sqrt{\left(\frac{R\tilde{P} - \kappa(R + \gamma)}{2R\kappa}\right)^2 + \frac{\tilde{P}}{\kappa}}. \quad (3.10)$$

Diese lässt sich für zwei Grenzfälle betrachten:

**1. Unterhalb der Schwelle,  $\tilde{P} \approx 0$ :** In diesem Fall führt eine Entwicklung der Wurzel in (3.10) bis zur ersten Ordnung zu dem Ergebnis

$$n|_{\substack{t \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty \\ \tilde{P} \approx 0}} \approx \frac{\beta}{\kappa} \tilde{P}$$

**2. Oberhalb der Schwelle,  $\tilde{P} \rightarrow \infty$ :** Hier führt eine Entwicklung der Wurzel zu dem Wert

$$n|_{\substack{t \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty \\ \tilde{P} \rightarrow \infty}} \approx \frac{\tilde{P}}{\kappa}. \quad (3.11)$$

### 3. Diskussion

In beiden Regimen wächst  $n$  linear in  $\tilde{P}$ , mit dem Unterschied eines Faktors  $\beta$ . Bei logarithmischer Auftragung bedeutet dies einen Sprung um  $\beta$ . Beide Ergebnisse entsprechen erneut dem Fall von Rice und Carmichael [1], [4].

Löst man das Gleichungssystem (3.1) für  $n$  und  $N_1$  nach  $N_1$  auf und setzt den Ausdruck (3.11) ein, so erhält man für die stationäre Anzahl angeregter Emitter:

$$N_{1,\text{stat}}|_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \tilde{P} \rightarrow \infty}} \approx \frac{\kappa}{R} = \frac{1}{\beta} \frac{\tau_{\text{sp}}}{\tau_{\text{loss}}} \quad (3.12)$$

Die Anzahl angeregter Emitter ist also in erster Linie von  $\beta$  abhängig, falls  $\tau_{\text{sp}}$  und  $\tau_{\text{loss}}$  in derselben Größenordnung liegen. Sie ist nicht abhängig von der Anzahl der verfügbaren Emitter,  $N$ ! Weiterhin zeigt ein Vergleich mit der Bedingung (3.4), dass oberhalb der Pumpschwelle nur so viele Emitter angeregt sind, wie nötig sind um den Laserprozess in Gang zu setzen und aufrecht zu erhalten.

Da  $N_{1,\text{stat}}$  nicht von  $N$  abhängt, schrumpft der Anteil angeregter Emitter, wenn man die Gesamtanzahl erhöht:

$$\frac{N_{1,\text{stat}}}{N}|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Im Umkehrschluss bedeutet das für die Anzahl der relaxierten Emitter  $N_2$ :

$$N_2|_{N \rightarrow \infty} \rightarrow N.$$

Natürlich gilt dieses Ergebnis nur so lange, wie die Pumpstärke noch nicht zu groß ist und so viele Photonen erzeugt werden, dass die stimulierten Reabsorptionsprozesse, nicht mehr zu vernachlässigen sind (siehe → 2.3.4).

Solange diese Bedingungen erfüllt sind, reproduziert die Ratengleichung mit Sättigung (2.46) die Ratengleichungen von Rice und Carmichael für den Fall vieler Emitter und wenn die Systempumprate  $\tilde{P}$  betrachtet wird. Ein Vergleich für  $N = 10^7$  Emitter ist in Abb. 3.3 auf Seite 39 dargestellt. Erneut werden die Kennlinien mit  $\beta$  skaliert. Der senkrechte Stricht zeigt an, wann  $\beta P = \kappa$  gilt, also wann die Pumpschwelle (3.9) überschritten wird. Bei genauerer Betrachtung kann nur ein kleiner Unterschied zwischen den Kennlinien für  $\beta = 10^{-5}$  festgestellt werden, da die Anzahl angeregter Emitter (3.12) zwischenzeitlich stark anwächst und die Näherung  $N_2 \approx N$  somit schlechter wird.

### 3. Diskussion

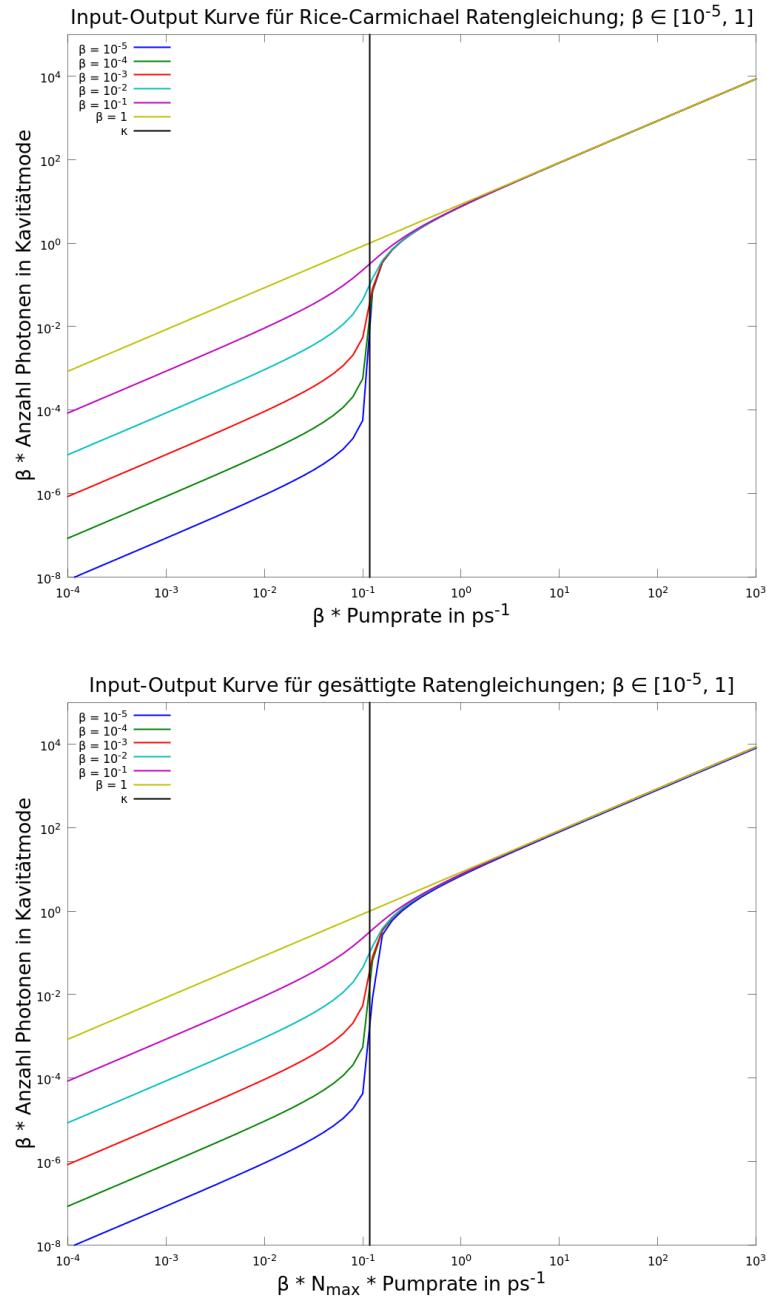


Abbildung 3.3.: oben: Input-Output Kennlinie für Rice-Carmichael Ratengleichungen, unten: Input-Output Kennlinie für gesättigte Ratengleichungen; Parameter wie zuvor. Senkrechter Strich:  $\kappa$

### 3. Diskussion

## 3.2. Analyse der Mastergleichung

In diesem Abschnitt wird die Lösung der vollen Mastergleichung für ein Ensemble von 75 Emittoren diskutiert und mit den Ratengleichungen verglichen.

Betrachtet wurden dieselben Parameter wie bei der Diskussion der Ratengleichungen, siehe (3.8). Es wurden Berechnungen angestellt für  $\beta$ -Faktoren von 0.01, 0.1 und 1, bei Pumpströmen im Bereich von  $P \in [10^{-5}; 1] \text{ ps}^{-1}$ .

### 3.2.1. Quantitativer Vergleich von Ratengleichung und Mastergleichung

Um eine Aussage darüber treffen zu können, wie gut die Ratengleichungen (2.46) die Photonenzahl und damit die Kennlinien für das Modell im Vergleich zur vollen Mastergleichung (2.43) reproduzieren, wurden die Ergebnisse aus beiden Gleichungen in Abb. 3.4 verglichen. Es sind einerseits die Erwartungswerte für die stationären Photonenzah-

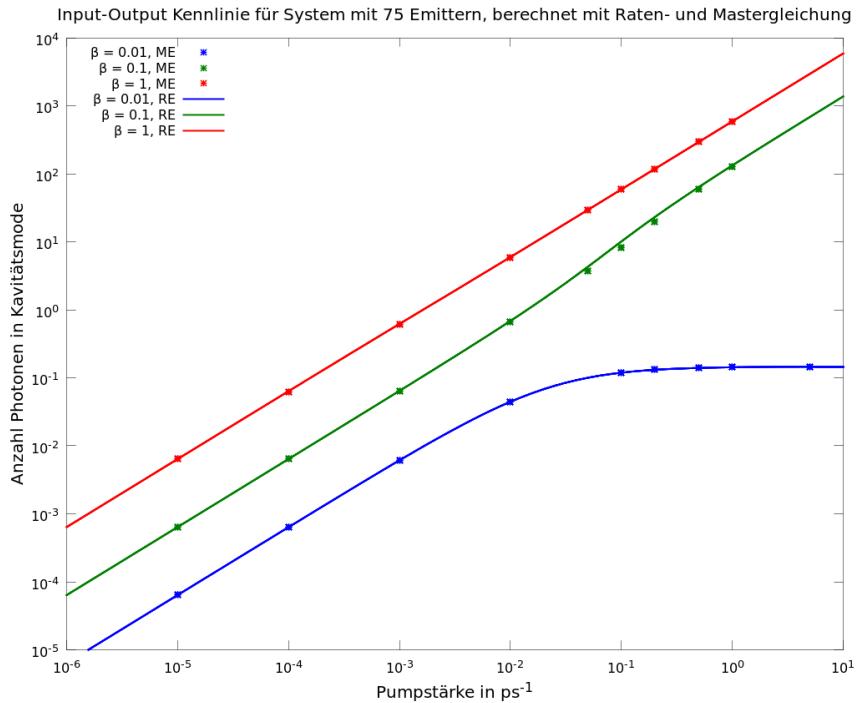


Abbildung 3.4.: Vergleich der Kennlinien für  $\beta = 0.01, 0.1$  und  $1$ ; berechnet mit Ratengleichungen (durchgezogene Linie) und Mastergleichung (Punkte)

len geplottet, die mit den Ratengleichungen berechnet wurden (durchgezogene Linie,

### 3. Diskussion

berechnet wie im vorigen Kapitel). Darüber wurden die Punkte mit den entsprechenden Erwartungswerten der Mastergleichung berechnet. Dazu wurde diese Gleichung für jeweils einen Parametersatz numerisch bis der Zeit gelöst, ab der  $p_{n,N_1}(t)$  stationär wird. Der Erwartungswert der Photonenzahl erhält man dann durch absummieren:

$$\langle n \rangle = \sum_{n,N_1} n p_{n,N_1}.$$

Wie in Abb. 3.4 zu sehen stimmen diese Erwartungswerte sehr gut überein. Es ist also davon auszugehen, dass sich die qualitative Diskussion der Ratengleichungen im vorigen Kapitel (3.1.1) auf die Mastergleichung anwenden lässt. Beispielsweise sollte die Abschätzung für den  $\beta$ -Faktor (3.6) ebenfalls stimmen.

#### 3.2.2. Betrachtung der Photonenstatistik und $g_2$

Um für große  $\beta$ -Faktoren eine Aussage über das Einsetzen des Lasings treffen zu können und so Ausdruck (3.5) für den Bereich der Pumpschwelle überprüfen zu können, wird aus den Photonenstatistiken wie in Kapitel 2.5.3 auf Seite 31 beschrieben die Autokorrelationsfunktion zweiter Ordnung,  $g^{(2)}(0)$  berechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 3.5 zu sehen. Zum Vergleich wurden die mit (3.5) berechneten Pumpschwellen als senkrechte Linien miteingezeichnet. Es wird einerseits deutlich, dass wie erwartet für  $\beta = 0.01$  kein Lasing auftritt, sondern  $g^{(2)}(0) \approx 2$  gilt und somit thermisches Licht emittiert wird. Für die  $\beta$ -Faktoren, die die Bedingung (3.6) erfüllen findet im Bereich der Pumpschwelle ein Reduzierung der Autokorrelationsfunktion statt und es gilt oberhalb der Schwelle  $g^{(2)}(0) \approx 1$ . Es wird somit koherantes Licht emittiert.

#### 3.2.3. Qualitative Diskussion der zeitlichen Entwicklung von $p_{n,N_1}$

Da die Lösung der Mastergleichung für jeden Zeitschritt bekannt ist, kann die qualitative Situation in der Kavität bildlich dargestellt werden. Plottet man  $p_{n,N_1}$  als Größe über den Achsen  $n$  und  $N_1$ , so erhält man glockenförmige Kurven, die sich mit der Zeit im Konfigurationsraum ( $n, N_1$ ) bewegen und schließlich stationär werden. Repräsentative Graphen für die zuvor diskutierten möglichen Situationen finden sich im Anhang A.11 ab Seite 57. Die Photonenstatistik  $p_n$  wurde für jede Situation jeweils mitgeplottet.

**Verhalten unterhalb der Pumpschwelle:** In den Abbildungen A.1 auf Seite 57 ist der  $\beta$ -Faktor zu gering, als das nach Bedingung (3.6) Lasing stattfinden könnte. Im Konfigurationsraum sieht man stattdessen, dass die Anzahl der angeregten Emittoren nach Einschalten der Pumpe wächst, ohne das nennenswert Laserphotonen entstehen. Nach etwa 15 ps sind so gut wie alle Emittoren angeregt, Relaxation findet jedoch nur durch spontane Emission statt. Stimulierte Emission kann wie zuvor beschrieben nicht einsetzen.

### 3. Diskussion

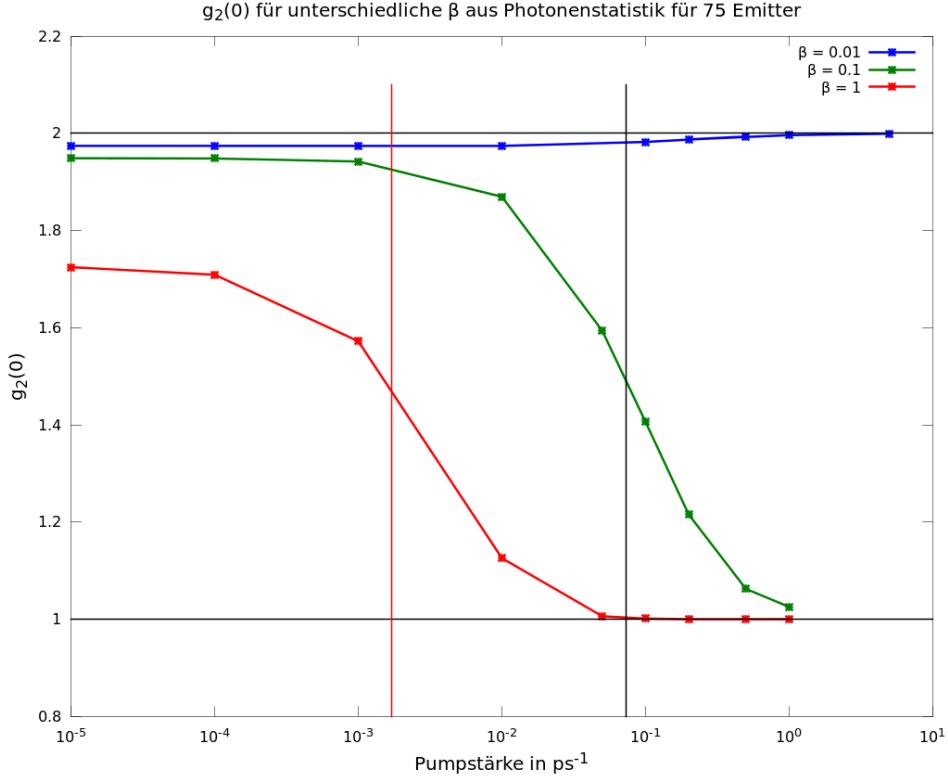


Abbildung 3.5.: Autokorrelationsfunktion 2. Ordnung  $g^{(2)}(\tau = 0)$ , berechnet mit Photonenstatistik aus Lösung der Mastergleichung. Die linke senkrechte Linie zeigt die analytische Pumpschwelle für  $\beta = 1$  an, die rechte entsprechend für  $\beta = 0.1$ .

In den Abbildungen A.2 ist der  $\beta$  – Faktor groß genug, das stimulierte Emission einsetzen könnte, jedoch ist die Pumpe noch zu schwach um diese in Gang zu setzen. Es ist jedoch schon eine deutliche Aufweitung der Photonenstatistik zu erkennen, auch wenn sie noch exponentiell abfällt und somit einer Boltzmann-Verteilung entspricht.

**Verhalten oberhalb der Laserschwelle:** In den Abbildungen A.3 bis A.5 auf den Seiten 59 bis 61 sind Situationen dargestellt, in denen die Pumpschwelle nach einer kritischen Zeit überschritten wird.

Zunächst werden auch hier Emittoren angeregt, ohne dass eine nennenswerte Anzahl an Laserphotonen entsteht (jeweils zweiter dargestellter Zeitschritt). Nach einer gewissen Zeit sind genügend Emittoren angeregt und durch spontane Emission entsteht eine kritische Anzahl an Laserphotonen um die stimulierte Emission in Gang zu setzen (dritter und vierter Zeitschritt). Die Zahl der Photonen beginnt zu steigen und die Photonen-

### *3. Diskussion*

statistik fängt an poissonartig zu werden. Schließlich stellt sich ein Gleichgewicht mit poissonförmiger Statistik ein, dessen genaue Gestalt von den Parametern abhängt. Allgemein lässt sich jedoch zumindest mit Hilfe der Ratengleichungen ausrechnen, wo der Schwerpunkt der Verteilung im Konfigurationsraum  $(n, N_1)$  liegen wird, da die stationären Werte für  $n$  und  $N_1$  z.B. mit (3.7) bestimmt werden können.

## **4. Zusammenfassung und Ausblick**

# A. Anhang

## A.1. Dichtematrix-Formalismus

Eine Einführung in den Dichtematrix-Formalismus findet sich in jedem Buch über Quantenmechanik bzw. statistische Physik. Hier seien nur die allerwichtigsten Eckpfeiler aufgeführt.

**Definition:**  $\rho = \sum_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha}|$ ,  $p_{\alpha}$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass sich das System im Zustand  $|\psi_{\alpha}\rangle$  befindet.

**$\rho$  in der Basis einer Operators  $A$ :**  $A = \sum_n |n\rangle a_n \langle n|$ :  $\rho = \sum_{nn'} |n\rangle \rho_{nn'} \langle n'|$ , mit  $\rho_{nn'} = \langle n| \rho |n'\rangle$ .

**Erwartungswert einer Observable  $A$ :**  $\langle A \rangle = \text{Tr} \{\rho A\} = \sum_{nn'} \text{Tr} \{A |n\rangle \rho_{nn'} \langle n'|\} = \sum_n a_n \rho_{nn}$ .

**Interpretation:** Die Diagonalelemente  $\rho_{nn}$  beschreiben die Wahrscheinlichkeit den Eigenwert  $a_n$ , bzw. das System im Zustand  $|n\rangle$  vorzufinden.

Die Nebendiagonalelemente  $\rho_{nn'}$  mit ( $n \neq n'$ ) enthalten weitere Informationen über das System, z. B. die Polarisation.

## A.2. von-Neumann-Gleichung

Die von-Neumann-Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung des Dichteoperators mit konstanten Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_{\alpha}$

$$\rho = \sum_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha}|.$$

Mit der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

folgt sofort:

## A. Anhang

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha}| \\
&= \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{\alpha}\rangle \right) p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha}| + |\psi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_{\alpha}| \right) \\
&= \frac{1}{i\hbar} \sum_{\alpha} H |\psi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha}| - |\psi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \langle \psi_{\alpha}| H \\
\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho &= \frac{1}{i\hbar} [H, \rho]
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Die von-Neumann-Gleichung entspricht somit der nach der Dirac'schen Regel quantisierten klassischen Liouville-Gleichung für die Dynamik der Wahrscheinlichkeitsdichte eines Ensembles im Phasenraum [15]

### A.3. Bilder in der Quantenmechanik

In der Quantenmechanik gibt es unterschiedliche (jedoch unitär-äquivalente) Beschreibungen von Zuständen und Operatoren. Die wichtigsten seien hier kurz dargestellt. [1]

#### A.3.1. Schrödinger-Bild

Im Schrödingerbild sind die Zustandsvektoren bzw. Dichteroperatoren zeitabhängig, während (ungestörte) Observablen zeitunabhängig sind. Die Dynamik des Zustandsvektors ergibt sich aus der Schrödingergleichung, die Dynamik des Dichteoperators folgt aus der vNE (A.2).

#### A.3.2. Heisenberg-Bild

Im Heisenberg-Bild wird die Dynamik des Systems durch eine unitäre Transformation auf die Operatoren übertragen. Zustandsvektor und Dichteoperator bleiben konstant in der Zeit. Die zeitliche Entwicklung der Operatoren folgt aus den Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen (siehe Tabelle A.3.4).

#### A.3.3. Dirac-Bild

Das Dirac-Bild (auch: Interaktions-Bild) steht zwischen den beiden vorher genannten Bildern und ist insbesondere für störungstheoretische Betrachtungen interessant: Die Dynamik, die der ungestörte, zeitlich konstante Hamiltonoperator  $H_0$  erzeugt, wird durch eine unitäre Operation separiert. In diesem mitbewegten Bezugssystem hängt die weitere Dynamik dann vom Störungsoperator  $H'(t)$  ab. Falls keine Störung vorhanden ist, wird das Schrödingerbild reproduziert.

## A. Anhang

### A.3.4. Übersicht

|                       | Schrödinger-Bild  | Heisenberg-Bild   | Dirac-Bild   |
|-----------------------|---|---|--|
| <b>Zustandsvektor</b> | $ \psi(t)\rangle$   | $ \psi\rangle$  | $ \psi(t)\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar}H_0t}  \tilde{\psi}(t)\rangle$                                 |
| zeitliche Entwicklung | $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t)\rangle = H  \psi(t)\rangle$ | –   | $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}  \tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{H}'(t)  \tilde{\psi}(t)\rangle$ |
| <b>Dichteoperator</b> | $\rho(t)$   | $\rho$  | $\rho(t) = e^{\frac{1}{i\hbar}H_0t} \tilde{\rho}(t) e^{-\frac{1}{i\hbar}H_0t}$                       |
| zeitliche Entwicklung | $\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho(t)]$   | –   | $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}'(t), \tilde{\rho}(t)]$    |
| <b>Operator</b>       | $A$   | $A(t)$  | $A = e^{\frac{1}{i\hbar}H_0t} \tilde{A}(t) e^{-\frac{1}{i\hbar}H_0t}$                                |
| zeitliche Entwicklung | –   | $\frac{\partial}{\partial t} A(t) = \frac{1}{i\hbar} [A(t), H]$ | $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{A}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{A}(t), H_0]$                    |

## A.4. Dipolnäherung

Für die Hamiltonfunktion eines geladenen Teilchens mit Ladung  $q$  im elektromagnetischen Feld mit elektrischem Potential  $\varphi(\mathbf{r})$  und Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  gilt:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + U(\mathbf{r}) + q\varphi(\mathbf{r}) \quad (\text{A.2})$$

Aufgrund der geringen Ausdehnung eines Atoms oder einer Ansammlung von mehreren Atomen im Vergleich zu typischen Wellenlängen des elektrischen Feldes (Atom:  $\sim 1\text{\AA}$ , optisches Licht  $\sim 0,5\mu\text{m} = 5000\text{\AA}$ ) können die Potentiale näherungsweise als konstant angenommen werden:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t), \varphi(\mathbf{r}, t) \approx \varphi(\mathbf{r}_0, t) \quad (\text{A.3})$$

Durch Eichung des Feldes kann das Vektorpotential zum Verschwinden gebracht werden. Man wählt dazu die Eichfunktion

$$\chi(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Für die transformierten Felder gilt dann (Summe weggelassen):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla \chi(\mathbf{r}, t) \\ &= \mathbf{A} - \nabla [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{A}] \\ &= \mathbf{A} - \mathbf{e}_i \delta_{ij} A_j - \mathbf{e}_i (x_i - x_j) \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## A. Anhang

In Gl. A.4 wurde ausgenutzt, dass sich  $\mathbf{A}$  im betrachteten Bereich praktisch nicht ändert (A.3). Die Rechnung für das Potential mit der gleichen Eichfunktion folgt analog:

$$\begin{aligned}\varphi'(\mathbf{r}, t) &\approx \varphi(\mathbf{r}_o, t) + \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{r}_0, t) \\ &\approx (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} \\ &\approx -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t)\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

$\varphi(\mathbf{r}_0, t)$  kann durch eine additive Konstante entfernt werden. Mit den Gln. A.4, A.5 wird aus der Hamiltonfunktion des Problems (A.2):

$$\begin{aligned}H &\approx H_{\text{dipol}} = H_0 + H_{\text{int}} \quad (\text{A.6}) \\ \text{mit } H_0 &= \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + U(\mathbf{r}) \\ \text{und } H_{\text{int}} &= -q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)\end{aligned}$$

Das Produkt  $q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  im Interaktionsoperator in Gl. A.6 ist nichts anderes als das Dipolmoment  $\mathbf{d}(\mathbf{r})$ .

Für den Hamiltonoperator in Dipolnäherung gilt somit:

$$H_{\text{dipol}} = H_0 + H_{\text{int}} = H_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{A.7})$$

Diese Hamiltonfunktion kann gemäß den Regeln der kanonischen Quantisierung in eine quantenmechanische Beschreibung übersetzt werden.

## A.5. Pauli-Matrizen

Da sich jede komplexe, hermitesche 2x2 Matrix als Linearkombination von Pauli-Matrizen und Einheitsmatrix schreiben lässt, sind diese zur Beschreibung von physikalischen Problemen mit zwei Zuständen, wie eben das 2LA, äußerst geeignet. Sie lauten:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## A. Anhang

Aus diesen können die beiden Leiteroperatoren gebildet werden:

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |\alpha\rangle\langle\beta|$$

$$\sigma_- = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |\beta\rangle\langle\alpha|$$

Diese sind zueinander hermitesch konjugiert:  $\sigma_+^\dagger = \underline{\sigma_-}$ .

## A.6. Linienbreite $\leftrightarrow$ Lebensdauer

Das Spektrum innerhalb einer Kavität ist nicht komplett scharf. Das liegt daran, dass die Spiegel nie totalreflektierend sein können, sondern immer einen Teil der Photonen passieren lassen müssen (Gaslaser: ca. 70 % reflektierend). Das bedeutet, dass die Photonen nur eine endliche Zeit in der Kavität verweilen. Dass dies zu einer spektralen Aufweichung führt, kann durch Fouriertransformation gezeigt werden: Die Fouriertransformierte einer exponentiell abfallenden Funktion ist eine Lorentz-Kurve!

...

## A.7. Motivation 'Rotating Wave Approximation'

Im Dirac-Bild (A.3.3) gilt für den zeitabhängigen Operator  $\tilde{b}_k$  die Bewegungsgleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{b}_k = \frac{1}{\hbar}[\tilde{b}_k, H_0] = e^{-\frac{1}{i\hbar}H_0 t} \left[ b_k, \sum_{k'} \omega_{k'} b_{k'}^\dagger b_{k'} \right] e^{\frac{1}{i\hbar}H_0 t} = \omega_k \tilde{b}_k$$

Diese Differentialgleichungen sieht für die anderen Operatoren  $b_k^\dagger$ ,  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$  ähnlich aus. Man erhält als Lösungen ebene Wellen:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_k^\dagger(t) &= b_k e^{-i\omega_k t} & \tilde{b}_k(t) &= b_k e^{i\omega_k t} \\ \tilde{\sigma}_+(t) &= \sigma_+ e^{i\omega_{\alpha\beta} t} & \tilde{\sigma}_-(t) &= \sigma_- e^{-i\omega_{\alpha\beta} t} \end{aligned}$$

Nun bildet man die Produkte der photonischen Operatoren  $\tilde{b}_k^{(\dagger)}$  mit den atomaren Operatoren  $\tilde{\sigma}_\pm$ :

$$\tilde{b}_k \tilde{\sigma}_+ = b_k \sigma_+ e^{-i(\omega_k - \omega_{\alpha\beta})t} \tag{A.8}$$

$$\tilde{b}_k \tilde{\sigma}_- = b_k \sigma_- e^{-i(\omega_k + \omega_{\alpha\beta})t} \tag{A.9}$$

Während die Schwingungen sich in A.8 gegenseitig kompensieren, verstärken sie sich in A.9 noch. Wenn nun  $\omega_k \approx \omega_{\alpha\beta}$ , atomare Übergangsfrequenz und Kavitätsmode also

## A. Anhang

aufeinander abgestimmt sind, ist A.8 ein sich langsam ändernder Term, während A.9 schnell oszilliert. Ein vergleichbares Ergebnis erhält man auch für die anderen beiden möglichen Kombinationen von Operatoren ( $\tilde{b}_k^\dagger \tilde{\sigma}_-$  und  $\tilde{b}_k \tilde{\sigma}_+$ )

Diese schnell oszillierenden Terme treten dann auf, wenn beider Operatoren Erzeuger oder Venichter sind, und werden in der RWA vernachlässigt da ihr Beitrag zur Lösung der vNE klein ist.

### A.8. Diskussion des $\beta$ -Faktors

Der sogenannte  $\beta$ -Faktor bezeichnet das Verhältnis der Raten für Emission in lasende Moden,  $R$ , zur Rate für die gesamte spontane Emission  $\frac{1}{\tau_{\text{sp}}} = R + \gamma$ :

$$\beta = \frac{R}{R + \gamma} = \frac{\tau_{\text{sp}}}{\tau_1}. \quad (\text{A.10})$$

Dieser Faktor hängt vor allem von der Größe des Modenvolumens  $V_{\text{mode}}$  in der Kavität ab. Das Modenvolumen ist die Größe des Bereichs, in dem die Photonen mit dem Medium wechselwirken. Ist dieses groß gegen die kubische Wellenlänge des Lichts,  $V_{\text{mode}} \gg \lambda^3$ , so wird nur ein kleiner Teil der gesamten spontanen Emission in die Lasermode gekoppelt. Dies ist beispielsweise bei herkömmlichen Halbleiter-Lasern auf Quantenfilmbasis (Laser-Dioden) der Fall ( $\beta \approx 10^{-5}$ ). Gaslaser erreichen noch kleinere  $\beta$ -Werte. [16]

Mittlerweile ist es möglich, Mikrolaser mit sehr kleinem Modenvolumen ( $V_{\text{mode}} \approx \lambda^3$ ) zu fertigen. Diese erreichen  $\beta$ -Werte nahe 1, die Emission findet also fast ausschließlich in der Lasermode statt. Als aktives Material werden Halbleiterquantenpunkte verwendet. [17]

### A.9. Zusammenhang zwischen $g^{(1)}(\tau)$ und spektraler Dichte

Die Spektraldichte  $S(\omega)$  einer elektromagnetischen Welle  $E(t)$  lautet [11]:

$$S(\omega) := |E(\omega)|^2. \quad (\text{A.11})$$

$E(\omega)$  ist die Fouriertransfomierte des Signals. Für zeitinvariante bzw. stationäre Signale kann die Transformierte nicht gebildet werden, da diese nicht quadratintegrabel sind.

Wie Wiener und Chintschin gezeigt [11] haben lässt sich dieses Problem umgehen, indem nicht das Feld selber, sondern dessen Autokorrelationsfunktion transfomiert wird, es gilt:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau.$$

## A. Anhang

Normalisierung mit  $\langle |E(t)|^2 \rangle$  führt dann zu

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(1)}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{A.12})$$

Das Frequenzspektrum eines elektromagnetischen Signals ist also die Fouriertransformierte dessen Korrelationsfunktion erster Ordnung und die Kohärenzzeit  $\tau_c$  ist dessen typische Abklingzeit.

## A.10. Nebenrechnungen

### A.10.1. zeitliche Ableitung $p_{n,N_1}$

Definition der Wahrscheinlichkeiten  $p_{n,N_1}$  und Polarisationen  $q_{n,N_1}$ :

2.26:  $p_{n,N_1} := \sum_{A(N_1)} \langle nA | \rho | nA \rangle$ , und

2.33:  $q_{n,N_1} := -ig\sqrt{n+1} \sum_{A(N_1)} \sum_{\alpha} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle$ .

Die Differentiation der Diagonalelemente gibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle nA | \rho | nA \rangle &= \underbrace{-ig^* \sqrt{n} \sum_{\alpha} \langle n-1, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A | \rho | nA \rangle}_{\textcircled{1}} - \underbrace{ig\sqrt{n+1} \sum_{\alpha} \langle n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A | \rho | nA \rangle}_{\textcircled{2}} \\ &\quad + \underbrace{ig^* \sqrt{n+1} \sum_{\alpha} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle}_{\textcircled{3}} + \underbrace{ig\sqrt{n} \langle nA | \rho | n-1, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A \rangle}_{\textcircled{4}} \\ &\quad + \underbrace{\gamma \sum_{\alpha} \langle n, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A | \rho | n, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A \rangle}_{\textcircled{5}} - \gamma N_1 \langle nA | \rho | nA \rangle \\ &\quad + \underbrace{P \sum_{\alpha} \langle n, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A | \rho | n, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle}_{\textcircled{6}} - P N_2 \langle nA | \rho | nA \rangle \\ &\quad + \underbrace{\kappa(n+1) \langle n+1, A | \rho | n+1, A \rangle}_{\textcircled{7}} - \kappa n \langle nA | \rho | nA \rangle \end{aligned}$$

Die Summe über die passenden Ensemble-Zustände  $\sum_{\forall A: N_1(A)=N_1}$  wurde hier nicht explizit aufgeschrieben.

#### Behandlung der Beiträge:

Für  $\textcircled{2}$  und  $\textcircled{3}$  folgt unmittelbar:

$$\textcircled{3} = \textcircled{2}^* = -q_{n,N_1}^*$$

## A. Anhang

$$\textcircled{1}: -ig\sqrt{n} \sum_{\forall A: N_1(A)=N_1} \sum_{\alpha \in A_2} \langle n-1, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A | \rho | nA \rangle.$$

Definiere:  $a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A =: B$ . Es gilt  $N_1(B) = N_1(A) + 1 = N_1 + 1$ , da nur über die Verteilungen summiert wird, in denen die  $\alpha$  in  $|2\rangle$  sind. Somit erhält man:  $-ig\sqrt{n} \sum_{\forall B: N_1(B)=N_1+1} \sum_{\alpha} \langle n-1, B | \rho | n, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A \rangle$ . Vertauscht man nun den Dummy-Index  $B$  wieder mit  $A$  und vergleicht mit 2.33 folgt sofort:

$$\textcircled{1} = q_{n-1, N_1+1} \quad (\text{A.13})$$

Analog folgt für \textcircled{4}:

$$\textcircled{4} = \textcircled{1}^* = q_{n-1, N_1+1}^*$$

\textcircled{5} und \textcircled{6}: Beide Terme enthalten als rechten Summanden ein ohnehin diagonales Element, wir konzentrieren und daher auf den jeweils ersten Summanden proportional zu  $\sum_{\forall A: N_1(A)=N_1} \sum_{\alpha \in A_f} \langle n, a_{i\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A | \rho | n, a_{i\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A \rangle$ . (i, f) bezeichnen (1, 2) für den  $\gamma$ -Term bzw. (2, 1) für den  $P$ -Term.

Wieder wird eine Verteilung  $B$  definiert:  $a_{i\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A =: B$ . Wie oben gilt daher  $N_i(B) = N_i(A) + 1$  bzw.  $N_f(B) = N_f(A) - 1$ , ebenso wie:  $\sum_{\alpha \in A_f} \rightarrow \sum_{\alpha \in B_i}$ . Der erste Summand lässt sich also umschreiben:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in A_f} \sum_{\forall A: N_1(A)=N_1} \langle n, a_{i\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A | \rho | n, a_{i\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A \rangle \\ & \rightarrow \sum_{\alpha \in B_i} \sum_{\forall B: N_1(B)=N_1 \pm 1}^{+ : i=1 \atop - : i=2} \langle n, B | \rho | n, B \rangle \end{aligned}$$

Die Summe über die  $\alpha$  gibt schlicht den Faktor  $N_i(B)$ , die Summe über die  $B$ -Verteilungen lässt sich ähnlich wie für \textcircled{1} in ein  $p_{n, N_1 \pm 1}$  umschreiben. Insgesamt erhält man:

$$(N_i + 1) \cdot p_{n, N_1 \pm 1}^{+ : i=1 \atop - : i=2}$$

setzt man i und f ein, folgt für die Beiträge insgesamt:

$$\begin{aligned} \textcircled{5} &= \gamma[(N_1 + 1)p_{n, N_1+1} - N_1 p_{n, N_1}] \\ \textcircled{6} &= P[(N_2 + 1)p_{n, N_1-1} - N_2 p_{n, N_1}] \end{aligned}$$

Für Term \textcircled{7} folgt offensichtlich noch:

$$\textcircled{7} = \kappa[(n + 1)p_{n+1, N} - np_{n, N_1}]$$

## A. Anhang

### A.10.2. zeitliche Ableitung $q_{n,N_1}$

In superradianter Näherung lautet die Gleichung 2.35:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle = -ig\sqrt{n} \langle n-1, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \quad (\text{A.1})$$

$$-ig\sqrt{n+2} \langle nA | \rho | n+2, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \quad (\text{A.2})$$

$$-ig^* \sqrt{n+1} \langle n-1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \quad (\text{A.3})$$

$$+ig^* \sqrt{n+1} \langle nA | \rho | n, a_{1\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \quad (\text{A.4})$$

$$+\frac{\gamma}{2} \sum_{\beta} \left\{ 2 \langle n, a_{1\beta}^\dagger a_{2\beta} A | \rho | n+1, a_{1\beta}^\dagger a_{2\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right. \quad (\text{A.5})$$

$$\left. - \langle n, a_{1\beta}^\dagger a_{1\beta} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right. \quad (\text{A.6})$$

$$\left. - \langle nA | \rho | n+1, a_{1\beta}^\dagger a_{1\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$+\frac{P}{2} \sum_{\beta} \left\{ 2 \langle n, a_{2\beta}^\dagger a_{1\beta} A | \rho | n+1, a_{2\beta}^\dagger a_{1\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right. \quad (\text{A.8})$$

$$\left. - \langle n, a_{2\beta}^\dagger a_{2\beta} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right. \\ \left. - \langle nA | \rho | n+1, a_{2\beta}^\dagger a_{2\beta} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right\}$$

$$+\kappa\sqrt{(n+1)(n+2)} \langle n+1, A | \rho | n+2, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \quad (\text{A.8})$$

$$\kappa(n+\frac{1}{2}) \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \quad (\text{A.9})$$

Im Hinterkopf ist zu behalten, dass dieser Gleichung um  $q_{n,N_1}$  zu erhalten noch eine Summation und ein Faktor hinzuzufügen sind:

$$q_{n,N_1} = -ig\sqrt{n+1} \sum_{\forall A: N_1(A)=N_1} \sum_{\alpha} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle$$

#### Behandlung der Terme

1:  $\langle n-1, a_{1\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle = 0$ , da der Emitter  $\alpha$  nicht gleichzeitig im angeregten (1) und im relaxierten (2) Zustand sein kann.

2:  $\langle nA | \rho | n+2, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle = 0$ , weil der Vernichter  $a_{1\alpha}$  zweimal auf den Emitter wirkt, dieser aber nur maximal einen Anregungszustand aufweist.

3: Analog zu ⑤ und ⑥ in A.10.1: Wieder setzt man  $a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A =: B$ , die Summe über  $\alpha$  wird so zu einem Faktor  $N_2 + 1$ . Summierung über die Ensemble-Zustände mit fester Emitterzahl führt auf:

## A. Anhang

$$\sum_{A(N)} \sum_{\alpha} \langle n - 1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A | \rho | n + 1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \propto (N_2 + 1) p_{n+1, N_1 - 1}$$

4: Der Operator  $a_{1\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A$  selektiert solche Verteilungen  $A$ , in denen der Emitter  $\alpha$  angeregt ist. Die Summe über alle Emitter wird so zu einem Faktor in Höhe der Anzahl der erregten Emittoren:

$$\sum_{\alpha \in A_1} \sum_{A(N)} \langle nA | \rho | nA \rangle \propto N_1 p_{n, N_1}$$

5-7: Die  $\gamma$ -Terme für den Verlustprozess (5-7) sind wie zuvor formell identisch zu den  $P$ -Terminen für den Pumpenprozess. Deshalb werden diese gleichzeitig berechnet, das Tupel  $(i, f)$  steht erneut für  $(1, 2)$  im Fall des Verlusts und  $(2, 1)$  im Fall der Pumpe.

5:  $\sum_{A(N)} \sum_{\alpha, \beta} \langle n, a_{i\beta}^\dagger a_{f\beta} A | \rho | a_{i\beta}^\dagger a_{f\beta} \underline{a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha}} A \rangle$ . Für diese Terme wurde nicht  $\alpha = \beta$  gesetzt, weil  $a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A$  ein eigener Ausgangszustand ist. Die beiden unterstrichenen Operatoren im Ket auf der rechten Seite können unter Ausnutzung ihrer Kommutationsrelation vertauscht werden<sup>1</sup>.

Es gilt:  $[a_{i\beta}^\dagger a_{f\beta}, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha}] = \delta_{f\beta, 2\alpha} a_{i\alpha}^\dagger a_{1\alpha} - \delta_{i\beta, 1\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{f\alpha}$ . Insgesamt hat man also

$$\begin{aligned} \sum_{A(N_1)} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \langle n, a_{i\beta}^\dagger a_{f\beta} A | \rho | a_{i\beta}^\dagger a_{f\beta} \underline{a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha}} A \rangle &= \sum_{A(N_1)} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \langle n, a_{i\beta}^\dagger a_{f\beta} A | \rho | n + 1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} a_{i\beta}^\dagger a_{f\beta} A \rangle \\ &\quad + \delta_{f, 2} \sum_{A(N)} \sum_{\alpha} \langle n, a_{i\alpha}^\dagger a_{2\alpha} A | \rho | a_{i\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\ &\quad - \delta_{i, 1} \sum_{A(N)} \sum_{\alpha} \langle n, a_{1\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A | \rho | a_{2\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A \rangle. \end{aligned}$$

Erneut setzt man wie in Term 3  $a_{i\beta}^\dagger a_{f\beta} A =: B$ . Der Unterschied besteht darin, dass man kein Diagonalelement  $p_{n, N_1}$  bekommt sondern ein Nebendiagonalelement  $q_{n, N_1 \pm 1}$ . Das gilt für den Fall  $i = 1$  ( $\gamma$ -Prozess), umgekehrt gibt es für den  $P$ -Prozess einen negativen Beitrag.

Für die Summe über die  $\beta$ -Zustände erhält im ersten Summanden einen Faktor  $N_i + 1$ . Der zweite Summand verschwindet wie in Term 1.

Für den dritten Summanden setzt man  $a_{1\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A =: B$ , man hat dann  $a_{2\alpha}^\dagger a_{f\alpha} A = a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} B$  und erhält auch hier ein  $q_{n, N_1 \pm 1}$ . Insgesamt hat man für Term 5:

$$(N_i + 1) q_{n, N_1 \pm 1} - \delta_{i, 1} q_{n, N_1 \pm 1}.$$

---

<sup>1</sup>  $BA = AB - [A, B]$

## A. Anhang

6:  $\sum_{A(N)} \sum_{\alpha,\beta} \langle n, a_{i\beta}^\dagger a_{i\beta} A | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \propto N_i q_{n,N_1}$ , da  $a_{i\beta}^\dagger a_{i\beta} = \mathbf{1}$  und die Summe über  $\beta$ -Zustände dann einen Faktor  $N_i$  liefert.

7:  $\sum_{A(N)} \sum_{\alpha,\beta} \langle nA | \rho | n+1, a_{i\alpha}^\dagger a_{i\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle$  kann wie Term 5 mithilfe der Kommutationsrelation der Operatoren,  $[a_{i\beta}^\dagger a_{i\beta}, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha}] = \delta_{i\beta,\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} - \delta_{i\beta,1\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha}$ , behandelt werden. Wieder erhält man drei Summanden:

$$\begin{aligned} & \sum_{A(N)} \sum_{\alpha,\beta} \langle nA | \rho | n+1, a_{i\alpha}^\dagger a_{i\alpha} a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\ &= \left( \sum_{\beta \in A_i} +\delta_{i,2} - \delta_{i,1} \right) \sum_{A(N)} \sum_{\alpha} \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\ &\propto (N_i + \delta_{i,2} - \delta_{i,1}) q_{n,N_1} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also für die Terme 5-7 (Term 5 gibt einen doppelten Beitrag):

$$2 \cdot (5) + (6) + (7) = 2(N_i + 1 - \delta_{i,1}) q_{n,N_1 \pm 1} + (2N_i - \delta_{i,1} + \delta_{i,2}) q_{n,N_1}.$$

8, 9:  $\kappa \sqrt{(n+1)(n+2)} \langle n+1, A | \rho | n+2, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle - \kappa(n+\frac{1}{2}) \langle nA | \rho | n+1, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle$ . Man sieht sofort, dass der zweite Summand einen Beitrag von  $-\kappa(n+\frac{1}{2}) q_{n,N_1}$  geben wird. Beim ersten Summanden lohnt sich eine genauere Betrachtung:

$$\begin{aligned} & -ig\sqrt{n+1} \sum_{A(N)} \sum_{\alpha} \kappa \sqrt{n+1} \sqrt{n+2} \langle n+1, A | \rho | n+2, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \\ &= \kappa(n+1) \left( -ig\sqrt{n+2} \sum_{A(N)} \sum_{\alpha} \langle n+1, A | \rho | n+2, a_{2\alpha}^\dagger a_{1\alpha} A \rangle \right) \\ &= \kappa(n+1) q_{n+1,N_1} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man für die Terme 8 und 9 also einen Beitrag von:

$$\kappa \left[ (n+1) q_{n+1,N_1} - (n + \frac{1}{2}) q_{n,N_1} \right]$$

### Zusammenfassung

Fasst man alle Terme zusammen, erhält man als Gleichung für die Polarisationen  $q_{n,N_1}$  insgesamt:

## A. Anhang

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} q_{n,N_1} = & -|g|^2(n+1)(N_2+1)p_{n+1,N_1-1} \\
& + |g|^2(n+1)N_1 p_{n,N_1} \\
& + \gamma N_1 q_{n,N_1+1} \\
& - \gamma(N_1 - \frac{1}{2})q_{n,N_1} \\
& + P(N_2+1)q_{n,N_1-1} \\
& - P(N_2 + \frac{1}{2})q_{n,N_1} \\
& + \kappa(n+1)q_{n+1,N_1} \\
& - \kappa(n + \frac{1}{2})q_{n,N_1}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Wählt man  $q_{n,N_1}$  zu Beginn reell, bleiben die Polarisationen auch reell. Im weiteren Verlauf werden die  $q_{n,N_1}$  daher als reelle Größen behandelt.

## A. Anhang

### A.11. Bilder

#### A.11.1. $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 0.01$ und $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$

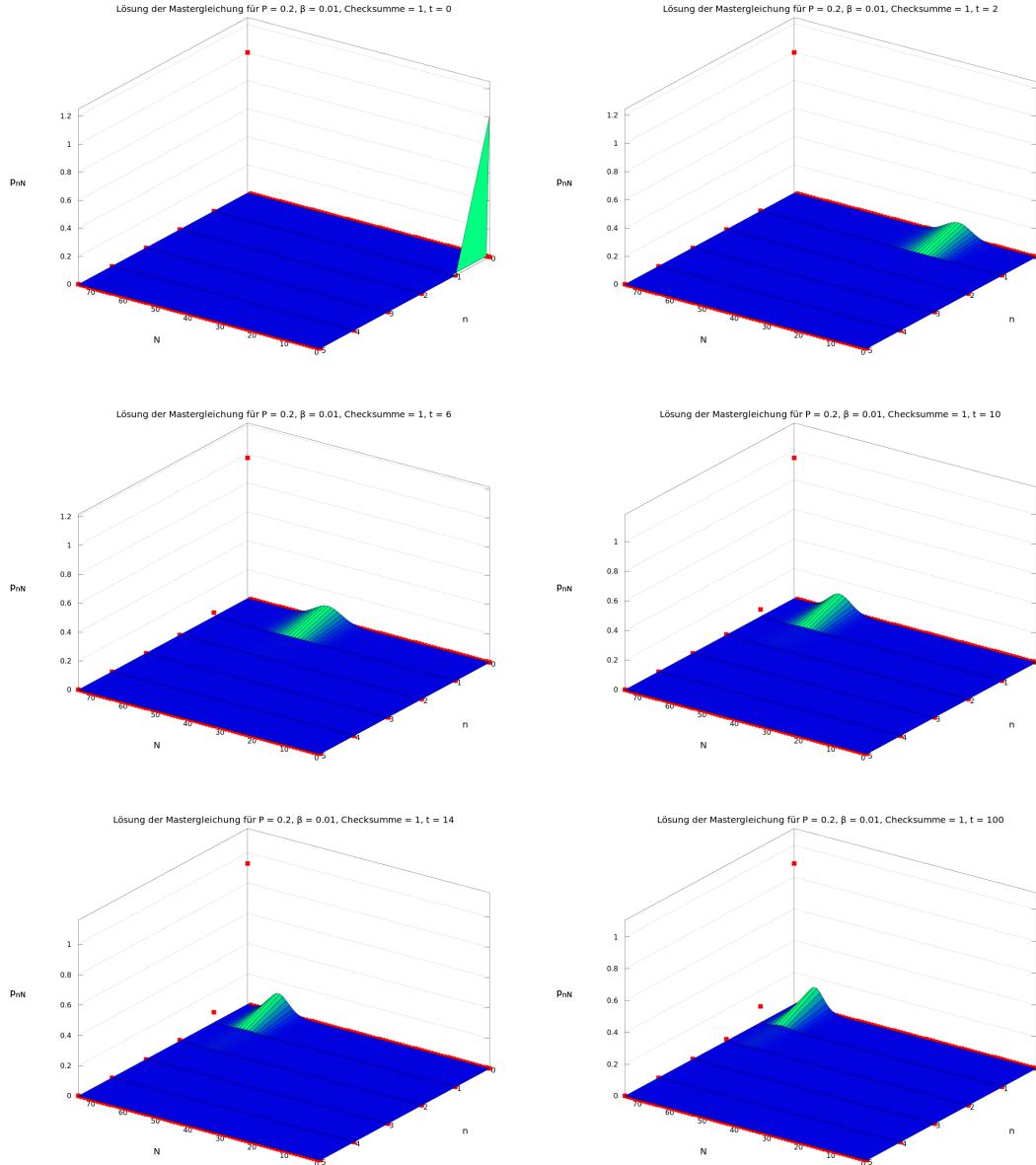


Abbildung A.1.: Emitter-Photonenstatistik  $p_{n,N_1}(t)$  für  $\beta = 0.01$  und  $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$  nach  $t = [0, 2, 6, 10, 14, 100]$  ps. Rote Punkte: Projektion der Photonenstatistik  $p_n(t)$  für den jeweiligen Zeitschritt.  $z$ -Achse skaliert.

## A. Anhang

### A.11.2. $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 0.1$ und $P = 0.05 \text{ ps}^{-1}$

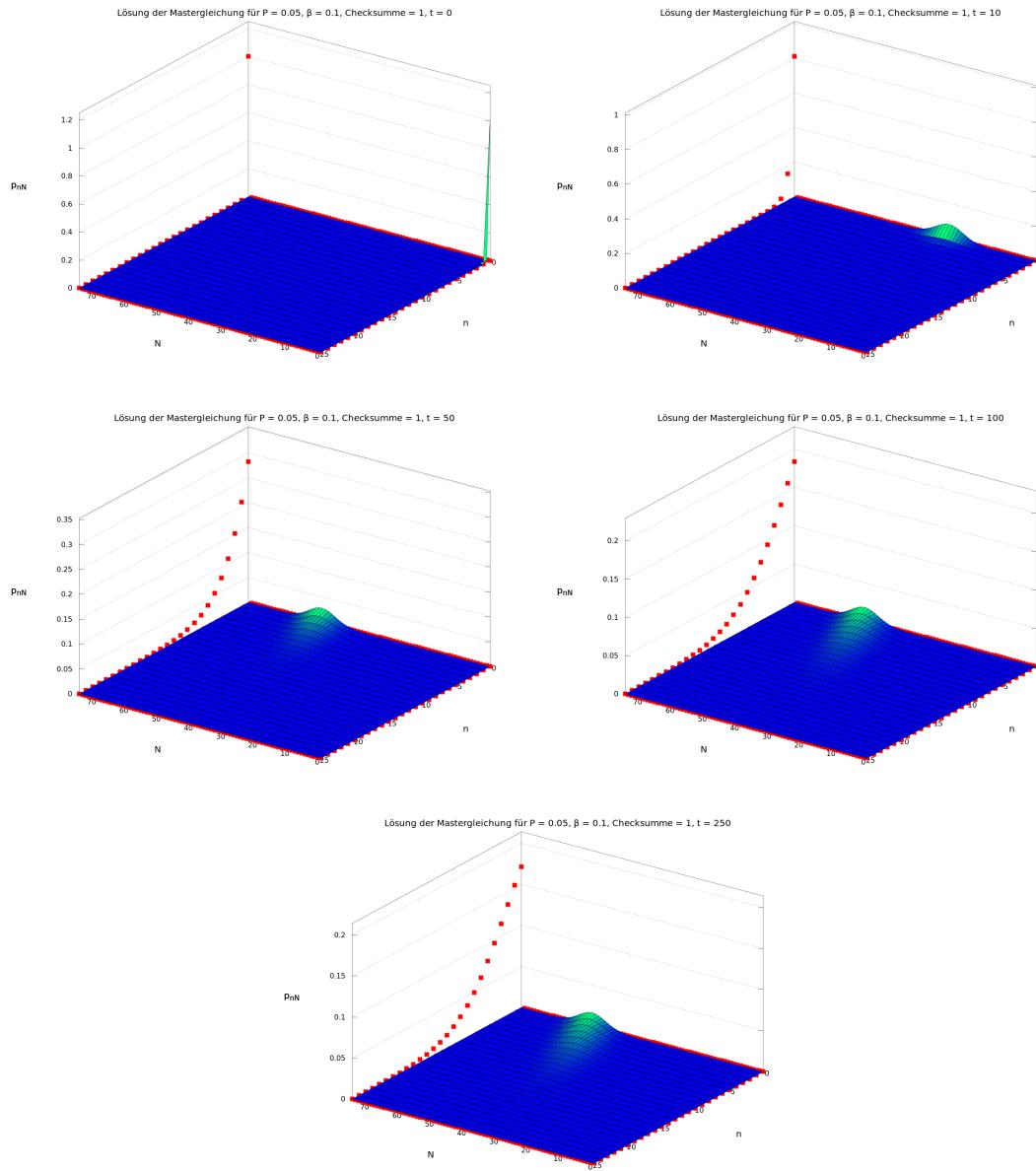


Abbildung A.2.: Emitter-Photonenstatistik  $p_{n,N_1}(t)$  für  $\beta = 0.1$  und  $P = 0.05 \text{ ps}^{-1}$  nach  $t = [0, 10, 50, 100, 250] \text{ ps}$ . Rote Punkte: Projektion der Photonenstatistik  $p_n(t)$  für den jeweiligen Zeitschritt.  $z$ -Achse skaliert.

## A. Anhang

### A.11.3. $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 0.1$ und $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$

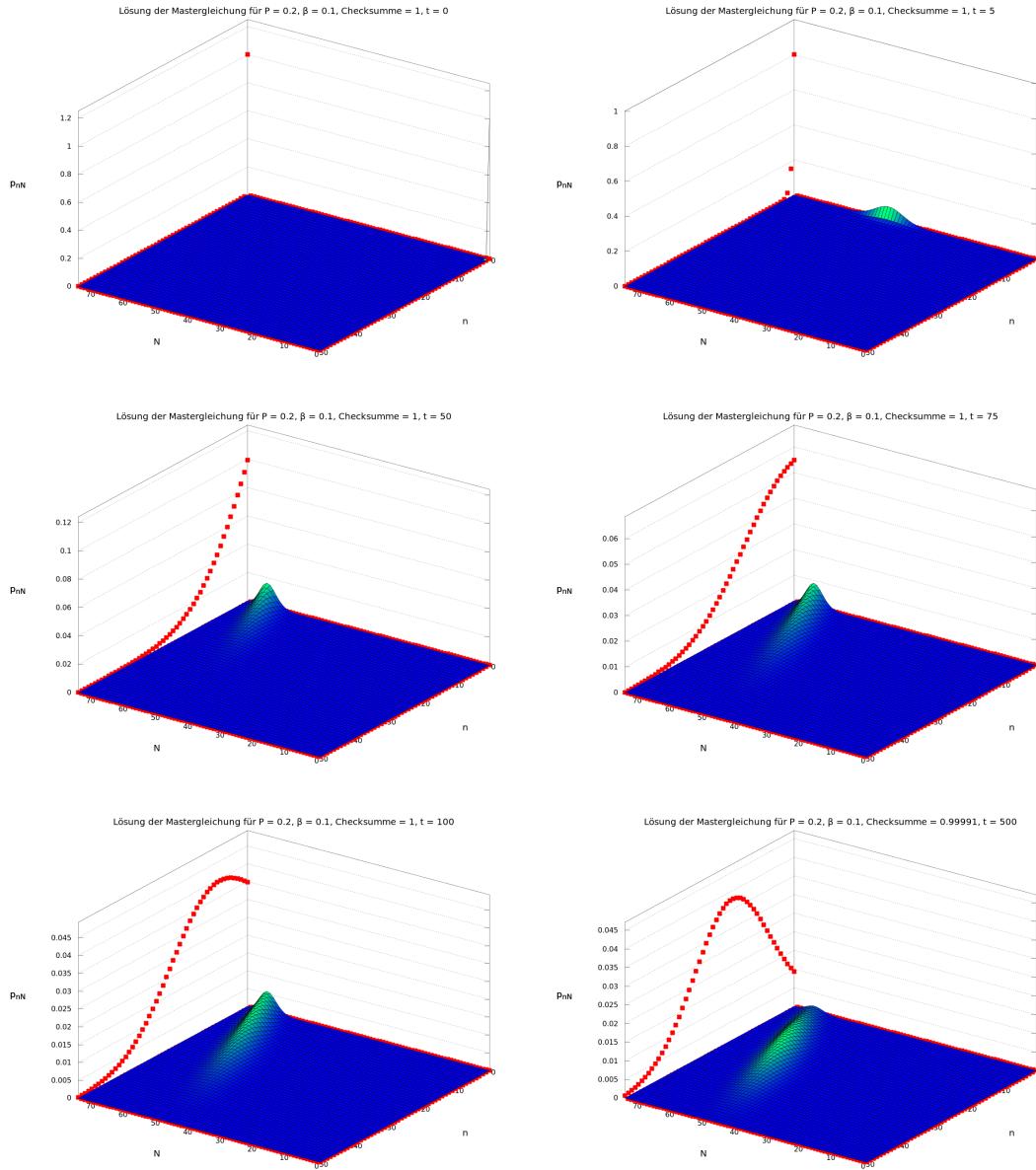


Abbildung A.3.: Emitter-Photonenstatistik  $p_{n,N_1}(t)$  für  $\beta = 0.1$  und  $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$  nach  $t = [0, 5, 50, 75, 100, 500] \text{ ps}$ . Rote Punkte: Projektion der Photonenstatistik  $p_n(t)$  für den jeweiligen Zeitschritt.  $z$ -Achse skaliert.

## A. Anhang

### A.11.4. $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 1$ und $P = 0.05 \text{ ps}^{-1}$

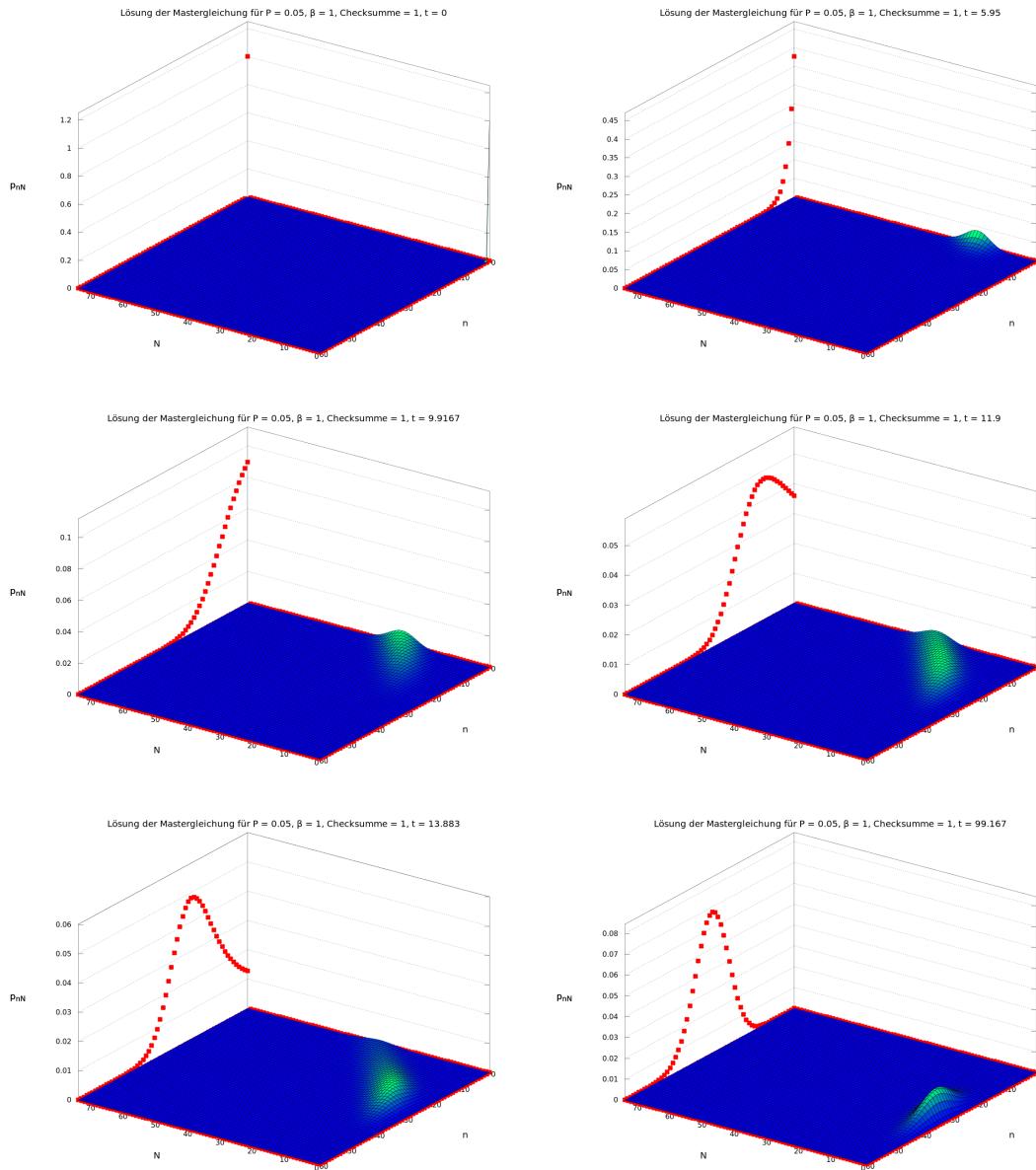


Abbildung A.4.: Emitter-Photonenstatistik  $p_{n,N_1}(t)$  für  $\beta = 1$  und  $P = 0.05 \text{ ps}^{-1}$  nach  $t = [0, 6, 10, 12, 14, 100] \text{ ps}$ . Rote Punkte: Projektion der Photonenstatistik  $p_n(t)$  für den jeweiligen Zeitschritt.  $z$ -Achse skaliert.

## A. Anhang

### A.11.5. $p_{n,N_1}(t)$ für $\beta = 1$ und $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$

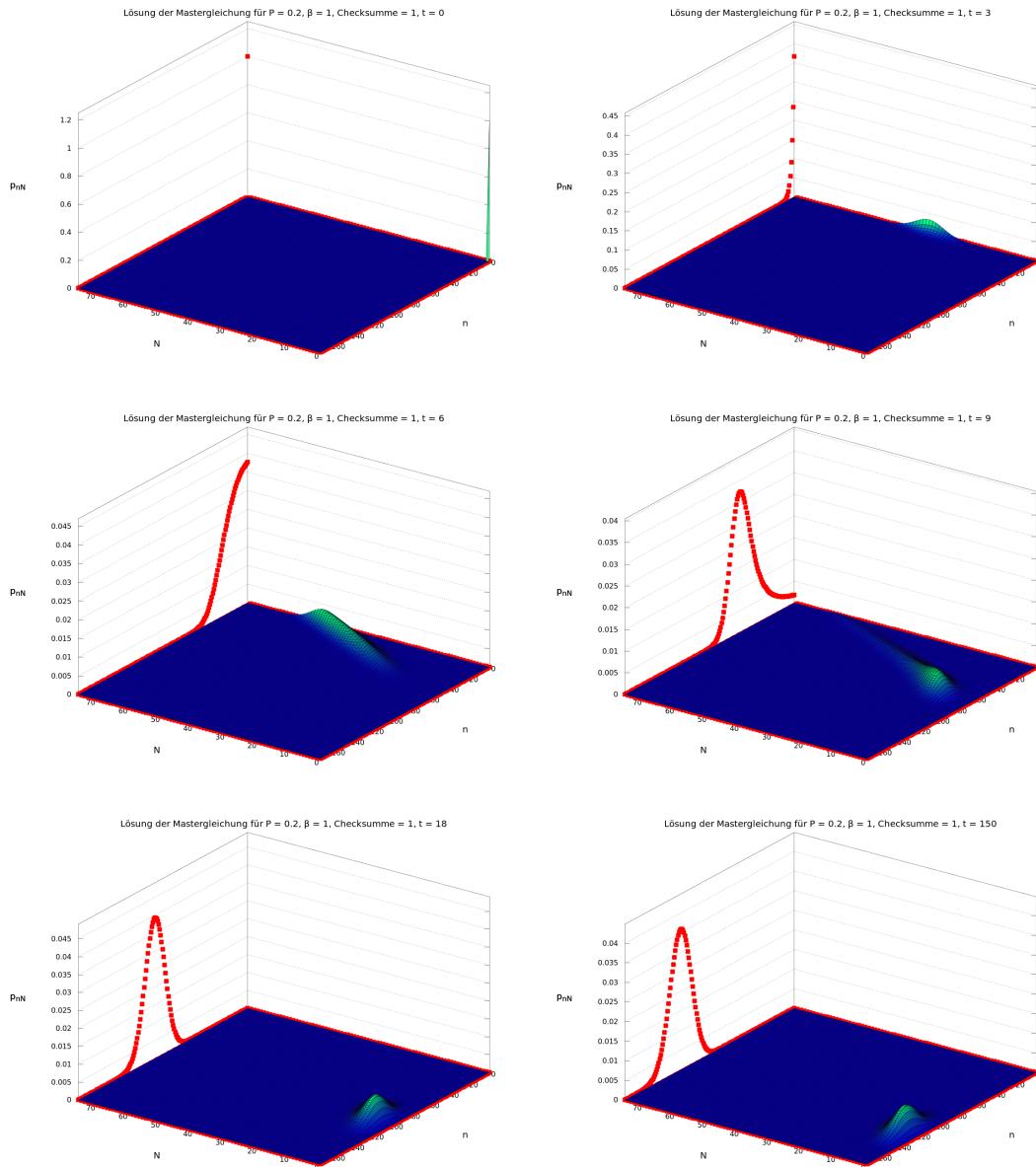


Abbildung A.5.: Emitter-Photonenstatistik  $p_{n,N_1}(t)$  für  $\beta = 1$  und  $P = 0.2 \text{ ps}^{-1}$  nach  $t = [0, 3, 6, 9, 18, 150] \text{ ps}$ . Rote Punkte: Projektion der Photonenstatistik  $p_n(t)$  für den jeweiligen Zeitschritt.  $z$ -Achse skaliert.

# Literaturverzeichnis

- [1] P. Gartner. '*Quantum Optics*'. Vorlesung. 2011.
- [2] *Statistical methods in quantum optics / H. J. Carmichael: Master equations and Fokker-Planck equations*. Texts and monographs in physics. Springer, Berlin [u.a.], 1999.
- [3] Wikipedia. Mastergleichung, 20.08.2012.
- [4] H. J. Carmichael Perry R. Rice. Photon statistics of a cavity-qed laser: A comment on the laser-phase-transition analogy, 1994.
- [5] P. Gartner. Master equation for many identical emitters, 2012.
- [6] W. Lamb M. Sargent, M. Scully. Laser physics, 1974.
- [7] Elias Goldmann, 2012. persönliche Kommunikation.
- [8] C. M. Savage Y. Mu. One-atom lasers, 1992.
- [9] Lena Brinkhoff. Dynamische und statistische eigenschaften der emission von atomaren lasersystemen, 2008.
- [10] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY [u.a.], 3. ed. edition, 1999.
- [11] Jeremy J. Baumberg, Guillaume Malpuech, Fabrice P. Laussy, and Alexey Kavokin. *Microcavities*. Series on semiconductor science and technology ; 16. Oxford Univ. Press, Oxford [u.a.], 2007.
- [12] Roy J. Glauber. *Quantum theory of optical coherence: selected papers and lectures*. Wiley-VCH, Weinheim, 2007.
- [13] P. Gartner. persönliche Kommunikation.
- [14] Christopher Gies, Jan Wiersig, Michael Lorke, and Frank Jahnke. Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers. *Phys. Rev. A*, 75:013803, Jan 2007.
- [15] P.A.M. Dirac. The principles of quantum mechanics, 1958.

### *Literaturverzeichnis*

- [16] A. Forchel S. Reizenstein. Highly efficient quantum dot micropillar lasers. In F. Jahnke, editor, *Quantum optics with semiconductor quantum optics*. Woodhead, 2012.
- [17] S. Strauf et al. Self-tuned quantum dot gain in photonic crystal lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 96(127404), 2006.