

Universität Bremen
Fachbereich 01
Institut für Theoretische Physik

Spektrale Eigenschaften von Ein-Atom-Emittern

Masterthesis, vorgelegt von

Elias Goldmann, B.Sc.

Betreuer & 1. Gutachter	Prof. Dr. Frank Jahnke
2. Gutachter	Prof. Dr. Gerd Czycholl
Matrikelnummer	2044432

Bremen, 25. März 2010

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit werden die statistischen und spektralen Eigenschaften der denkbar kleinsten Lasersysteme behandelt: Mikroresonatoren, welche nur ein einzelnes Atom beinhalten, das mit einem quantisierten Lichtfeld wechselwirkt. Zunächst wird das Atom mit zwei Energieniveaus modelliert und im Jaynes-Cummings-Modell beschrieben. Ausgehend vom Dichtematrixformalismus werden der für ein Lasersystem unabdingbare Pumpprozess und die verschiedenen auftretenden Verlustprozesse durch Wechselwirkungen mit externen Reservoirs über den Lindblad-Formalismus modelliert. Für den stationären Zustand des Systems, welcher ein dynamisches Gleichgewicht von Energiezufuhr (Pumpen) und Energieverlust (Emission, Dephasing) darstellt, werden die relevanten Kenngrößen des Systems wie Photonenstatistik, Spektren und Korrelationen des elektromagnetischen Feldes für verschiedene Kopplungsregimes, definiert durch das Verhältnis von Energieverlusten zur Stärke der Kopplung von Feld und Atom, berechnet. Das Zwei-Niveau-System zeigt dabei eine Abhängigkeit des Kopplungsregimes von der Pumprate, welche das Verschwinden der Rabi-Struktur des Emissionsspektrums mit zunehmender Pumprate bedingt. Weiterhin zeigt das Zwei-Niveau-System Quenching in der Input-Output-Kennlinie bei großen Pumpraten und Bunching-Verhalten der emittierten Photonen. Um mehr mikroskopische Details zu berücksichtigen, wird das Atom zusätzlich durch vier Energieniveaus für starke und schwache Kopplung modelliert. Dieses System zeigt Sättigung statt Quenching, keine Aufspaltung des Emissionsspektrums für schwache Kopplung und eine Multiplett-Struktur der Spektren für starke Kopplung. Das emittierte Licht zeigt im Regime starker Kopplung Antibunching-Verhalten. Beim Vergleich der Systeme zeigt sich, dass das Vier-Niveau-System eine makroskopische mittlere Photonenanzahl benötigt, um die Effekte der starken Kopplung zu zeigen, während das Zwei-Niveau-System schon bei geringsten mittleren Photonenanzahlen die charakteristische Aufspaltung zeigt.

INHALTSVERZEICHNIS

1 Einleitung	1
2 Theoretische Beschreibung atomarer Lasersysteme	3
2.1 Licht-Materie-Kopplung	3
2.1.1 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	4
2.1.2 Jaynes-Cummings-Modell	6
2.1.3 Rotating Wave Approximation	7
2.1.4 Einfluss der Kopplung auf Energien und Zustände	9
2.2 Dichtematrixformalismus	11
2.2.1 Definition des Dichteoperators	12
2.2.2 Dichteoperator für das Jaynes-Cummings-Modell	12
2.2.3 Bewegungsgleichung für Zustände ohne Dissipation	14
2.3 Wechselwirkung mit der Umgebung	15
2.3.1 Ankopplung eines Reservoirs	15
2.3.2 Vollständige Bewegungsgleichungen des Dichteoperators	18
3 Statistische Beschreibung des quantisierten Lichtfeldes	19
3.1 Charakterisierung des Lichtfeldes	19
3.1.1 Korrelationsfunktionen, Feldmomente und Kohärenz	19
3.1.2 Kohärentes und thermisches Licht	22
3.1.3 Photonenbunching und -antibunching	24
3.2 Berechnung der spektralen Feldeigenschaften	28
3.2.1 Wiener-Khintchine-Theorem und Spektren	28
3.2.2 Quanten-Regressions-Theorem	29
3.2.3 Anwendung des Quanten-Regressions-Theorems	31
4 Modellsysteme für Ein-Atom-Laser	33
4.1 Zwei-Niveau-Ein-Atom-Laser	34
4.1.1 Dephasierung und Kopplungsregimes	35
4.1.2 Der β -Faktor	36
4.2 Vier-Niveau-Ein-Atom-Laser	38
4.2.1 Vollständige Bewegungsgleichungen des Vier-Niveau-Systems	39
4.2.2 Dephasing, Kopplungsregimes und β -Faktor	41

5 Numerische Behandlung des Zwei-Niveau-Systems	43
5.1 Numerik	43
5.2 Zeitentwicklung des Systems	44
5.3 Kennlinien	49
6 Numerische Behandlung des Vier-Niveau-Systems	56
6.1 Vergleich mit dem Zwei-Niveau-System	56
6.2 Starke Kopplung im Vier-Niveau-System	62
7 Zusammenfassung und Ausblick	68
Literaturverzeichnis	70
Anhang	73
Eidesstattliche Erklärung	75

KAPITEL 1

EINLEITUNG

Durch zunehmende Komplexität, Miniaturisierung und benötigte Operationsgeschwindigkeit von optoelektronischen Komponenten in der Informationsübertragung und -verarbeitung sowie in der Unterhaltungs- und Industrielektronik, konzentriert sich die Forschung der letzten Jahre im Bereich der Quantenoptik auf kleinste, durchstimmbare und hocheffiziente Lichtemitter. Diese Emittoren können zum Beispiel durch Halbleiter-Quantenpunkt-Laser realisiert werden (von [AS82] über [LUE94] bis [NKI⁺09]). Da die Emission zum Beispiel für Quanten-Computing-Realisierungen bis zur Emission einzelner Photonen kontrollierbar sein soll, besteht der Bedarf an sogenannten Einzel-Photonen-Emittoren. Diese Emittoren erzeugen einzelne Photonen mit fest definierten Eigenschaften wie Energie oder Polarisation. Eine mögliche Realisierung eines Einzel-Photonen-Emitters ist der Ein-Atom-Laser. Das einfachste Modell eines solchen Lasers ist das Ein-Atom-Limit eines gewöhnlichen Lasers: ein aktives Medium in einem Resonator, das von einer externen Energiequelle gespeist wird, wobei das aktive Medium aus einem einzelnen Atom mit zwei oder vier Niveaus besteht. Nachdem Smith und Gardiner [SG88] einen Weg zur Behandlung eines solchen Systems vorschlugen, waren es Mu und Savage [MS92], die verschiedene Ein-Atom-Systeme in Hinblick auf die Photonenstatistik behandelten und zeigten, dass ein solches System Lasereigenschaften besitzt. Ginzel et al. [GBM⁺93] und Löffler et al. [LMW97] behandelten das Spektrum des Ein-Atom-Lasers und sagten die sog. Rabi-Struktur im Spektrum vorher. Clemens, Rice und Pedrotti [CRP04] beschrieben den Einfluss des Pumpprozesses auf diese Struktur. In der vorliegenden Thesis werden diese Ergebnisse für den Zwei-Niveau- und den Vier-Niveau-Ein-Atom-Laser nachvollzogen und verglichen. Vor wenigen Jahren konnten McKeever et al. den Ein-Atom-Laser experimentell realisieren [MBB⁺04], [MBBB03], [BBB⁺04]. Das erstaunliche an diesem Laser ist, dass er, obwohl Quanten-Fluktuationen aufgrund der Systemgröße eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen, einen geordneteren Photonenstrom erzeugt als ein herkömmlicher Laser mit vielen Atomen [CO03]. Dies macht den Ein-Atom-Laser zur optimalen Quelle einzelner Photonen.

AUFBAU DER THESIS

Die vorliegende Thesis ist folgendermaßen aufgebaut. Um einen Ein-Atom-Laser zu beschreiben, wird zunächst in Kapitel 2 die Wechselwirkung eines atomaren Zwei-Niveau-Systems in einem Resonator mit einer einzelnen Mode des quantisierten elektromagnetischen Feldes theoretisch beschrieben (das sog. Jaynes-Cummings-Modell). Dazu wird der Dichtematrixformalismus genutzt, in dem die Liouville-von-Neumann-Gleichung die zentrale Bewegungsgleichung darstellt. Diese Behandlung erlaubt es, auf eine einfache Art

und Weise die Interaktion des atomaren Systems mit der Umgebung zu berücksichtigen. Die durch diese Interaktion auftretenden Dissipationsprozesse werden durch Reservoirs modelliert und können so in der Bewegungsgleichung berücksichtigt werden.

Im dritten Kapitel wird auf die Charakterisierung des Lichtfeldes, mit dem das Atom wechselwirkt, eingegangen. Es werden die Beschreibung des Lichtfeldes, zurückgehend auf Glauber, sowie der Zusammenhang von Feld-Feld-Korrelationen mit den Spektren des Feldes und deren praktische Berechnung durch das Quanten-Regressions-Theorem erläutert.

Das Kapitel 4 beinhaltet die Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen zur Beschreibung des Ein-Atom-Lasers zu einem Gesamtsystem. Einerseits wird das atomare Zwei-Niveau-System als aktives Medium des Lasers behandelt, andererseits wird ein Vier-Niveau-System eingeführt, welches die mikroskopischen Prozesse besser berücksichtigt. Die relevanten Änderungen, welche durch die Erweiterung auf vier atomare Niveaus in der Liouville-von-Neumann-Gleichung erforderlich sind, werden diskutiert. Für beide Systeme erfolgt eine Beschreibung von Bereichen verschiedenen Verhaltens des Systems, ausgedrückt durch das Verhältnis von Dipolkopplung zu Dephasing, sowie eine Diskussion des β -Faktors, welcher ein Maß für die Effizienz des Lasers ist.

In den Kapiteln 5 und 6 folgt die Darstellung der Ergebnisse der numerischen Simulation der beiden betrachteten Systeme. Für das Zwei-Niveau-System werden die Zeitentwicklungen des Systems in das stationäre Regime, sowie die Kennlinien diverser Größen wie den Spektren, Korrelationsfunktionen und Photonenstatistiken über der Pumprate betrachtet. Für das Vier-Niveau-System werden dieselben Kennlinien berechnet und die Ergebnisse mit denen des Zwei-Niveau-Systems verglichen.

Die Thesis schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf denkbare Erweiterungen in Kapitel 7.

KAPITEL 2

THEORETISCHE BESCHREIBUNG ATOMA-RER LASERSYSTEME

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Behandlung atomarer Lasersysteme beschrieben. Ein Lasersystem besteht aus den Grundbausteinen aktives Medium, Resonator und Anregungsmechanismus. Zur Beschreibung der ersten beiden Bausteine wird zunächst die Wechselwirkung von Licht und Materie in einem Resonator beschrieben, was zum vielzitierten Jaynes-Cummings-Modell führt. Anschließend wird der Dichtematrixformalismus genutzt, um eine Bewegungsgleichung für das System aufzustellen, die Liouville-Neumann-Gleichung. Um den dritten Baustein und Dissipationsprozesse zu beschreiben, wird danach der Dichtematrixformalismus erweitert.

2.1 LICHT-MATERIE-KOPPLUNG

Zunächst wird die Wechselwirkung des atomaren Systems mit dem Lichtfeld beschrieben. Man beschränkt sich hierbei in der Regel auf die resonante Wechselwirkung zweier atomarer Niveaus mit einer einzelnen Mode des quantisierten Lichtfeldes, siehe Abb. 2.1, S. 4. Diese Annahme ist gerechtfertigt, solange es sich nicht um ein Atom im freien Raum handeln soll, sondern um ein Atom in einem Resonator (z.B. zwischen zwei Spiegeln hoher Güte). Im freien Raum liegen die Moden des elektromagnetischen Feldes dicht, wodurch in dem Atom, welches aus vielen Energieniveaus besteht, durch Wechselwirkung mit dem Lichtfeld verschiedene Übergänge angeregt werden können. Die endliche Ausdehnung des Resonators erzwingt, dass innerhalb des Resonators zwar beliebig viele, aber nur diskrete Moden des elektromagnetischen Feldes existieren dürfen (und zwar mit den Wellenlängen $\lambda = \frac{n}{2}l$, wenn l die Resonatorlänge ist (der Abstand der Spiegel) und $n \in \mathbb{N}$). Durch geschickte Wahl der Resonatorlänge kann erreicht werden, dass die Energie $\frac{hc}{\lambda_{max}}$ der Mode mit der maximalen Wellenlänge gerade der Energie eines bestimmten Übergangs im Atom entspricht. In diesem Fall sind das Atom und die Mode des elektromagnetischen Feldes resonant. Liegt die Energie dieser resonanten Mode zum Beispiel im optischen Spektralbereich, so liegt die Energie der nächsthöheren Mode schon im Ultravioletten. Wenn die Energieniveaus im Atom weit genug auseinander liegen, so spielt der entsprechende Übergang durch die höhere Mode keine Rolle mehr und es genügt, die Wechselwirkung einer einzelnen Mode des elektromagnetischen Feldes in einem Resonator mit zwei Niveaus eines Atoms zu betrachten. Dies soll im Folgenden geschehen. Zunächst wird das elektromagnetische Feld quantisiert, um damit das sogenannte Jaynes-Cummings-Modell in Dipol-Näherung und Rotating-Wave-

Approximation vorzustellen.

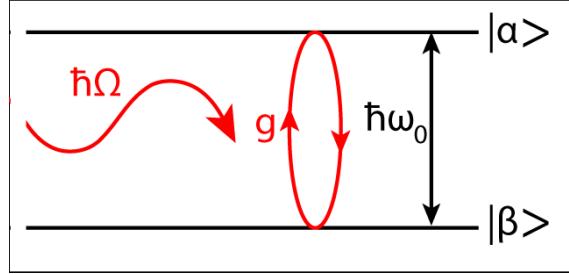


Abbildung 2.1: Subsystem zur Untersuchung der Licht-Materie-Kopplung, bestehend aus einem atomaren Zwei-Niveau-System, dessen Energieniveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ eine Energiedifferenz von $\hbar\omega$ aufweisen, sowie einer Mode des elektrischen Feldes der Energie $\hbar\Omega$. g ist der Dipolkopplungsparameter.

2.1.1 QUANTISIERUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES

Wie oben erläutert genügt es, bei Anwesenheit eines geeigneten Resonators eine einzelne Mode des elektromagnetischen Feldes zu betrachten. Das klassische elektrische Feld einer Mode der Frequenz Ω , mit Ausbreitung in \vec{z} -Richtung und Polarisation in \vec{x} -Richtung, wird in der Basis ebener Wellen beschrieben durch

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x q(t) \sqrt{\frac{2\Omega^2}{\epsilon_0 V}} \sin(kz). \quad (2.1)$$

Dabei sei ein endliches Volumen V betrachtet, $q(t)$ sei die zeitabhängige Feldamplitude, ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante und $k = \frac{\Omega}{c}$ die Wellenzahl mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c . Laut Maxwell erzeugt jedes räumlich veränderliche elektrische Feld ein Magnetfeld. Der Zusammenhang der Felder ist im Vakuum durch die Maxwellgleichung $\nabla \times \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ gegeben. Damit ist das Magnetfeld

$$\vec{B}(z, t) = \vec{e}_y \frac{\dot{q}(t)}{c^2 k} \sqrt{\frac{2\Omega^2}{\epsilon_0 V}} \cos(kz). \quad (2.2)$$

Die Hamiltonfunktion zur Beschreibung des elektromagnetischen Feldes einer Mode ist gegeben durch das Volumenintegral über die Energiedichte

$$H = \frac{1}{2} \int_V dV [\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2] = \frac{1}{2} [\Omega^2 q^2 + p^2]. \quad (2.3)$$

Dabei sind q und $p = \dot{q}$ verallgemeinerte kanonisch konjugierte Variable von Ort und Impuls. Eine einfache und direkte Möglichkeit das elektromagnetische Feld zu quantisieren besteht darin, diese klassischen Variablen laut dem Bohrschen Korrespondenzprinzip (siehe [Boh20]) als Operatoren \hat{q}, \hat{p} zu identifizieren, die die Kommutatorrelation

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar \quad (2.4)$$

erfüllen. Die Einführung der Operatoren

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}} (\Omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad , \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}} (\Omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (2.5)$$

mit der bosonischen Kommutatorrelation $[b, b^\dagger] = 1$ und die Identifizierung dieser Operatoren als Photonen-Erzeuger (b^\dagger) bzw. -Vernichter (b) liefert den quantisierten Hamiltonian des Lichtfeldes, der formal einem harmonischen Oszillatoren der Frequenz Ω gleicht:

$$H = \hbar\Omega \left[b^\dagger b + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.6)$$

Die Eigenzustände dieses Hamiltonians sind die Photonenzahlzustände $|n\rangle$, worin $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Photonen in der betrachteten Mode angibt. Die Wirkung der Operatoren b, b^\dagger auf diese Zustände ist gegeben durch

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.7)$$

womit folgt:

$$b^\dagger b|n\rangle = n|n\rangle. \quad (2.8)$$

Dabei garantieren die Faktoren \sqrt{n} und $\sqrt{n+1}$ in Gl. (2.7) die Normierung der Zustände. Die Anwendung von $b(b^\dagger)$ verringert (erhöht) die Zahl der Photonen im System um eins. Wie in Gl. (2.8) dargestellt, sind die Photonenzahlzustände $|n\rangle$ Eigenzustände des Operatorproduktes $b^\dagger b$ zum Erwartungswert n . Dieses Produkt kann also als Photonenzahloperator interpretiert werden. Damit sind die Eigenwerte des Hamiltonians durch die Eigenwertgleichung

$$H|n\rangle = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (2.9)$$

definiert.

Ein Zustand $|n\rangle$ des Lichtfeldes zu fester Photonenzahl n entsteht durch n -maliges Anwenden des Erzeugungsoperators auf den Vakuumzustand $|0\rangle$:

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle = |n\rangle. \quad (2.10)$$

Formal ist der Zustand $|n\rangle$ ein Element des Fockraums

$$\mathcal{H}_{Fock} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots \mathcal{H}_n \oplus \dots, \quad (2.11)$$

wobei \mathcal{H}_n der Hilbertraum zur Teilchenzahl n ist (\mathcal{H}_0 ist der Vakuum-Hilbertraum) und \oplus die Direktsumme bezeichnet. Der Fockraum lässt unterschiedliche Teilchenzahlen zu und ist deshalb geeignet, die Photonenzahlzustände $|n\rangle$ darzustellen. Durch Umstellen der Gln. (2.5) folgt

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}} (b + b^\dagger), \quad (2.12)$$

womit sich für das quantisierte elektromagnetische Feld die Darstellung ergibt

$$E(z, t) = \epsilon_\Omega (b + b^\dagger) \sin(kz) \quad \text{mit} \quad \epsilon_\Omega = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{\epsilon_0 V}}. \quad (2.13)$$

Darin ist ϵ_Ω eine Konstante der Dimension des elektromagnetischen Feldes, welche als „Feld pro Photon“ bezeichnet wird*.

*Der Begriff Feld pro Teilchen klingt zunächst ungewohnt. Gemeint ist mit ϵ_Ω die mittlere Feldstärke, welche einem Photon

Im Allgemeinen müsste in Gl. (2.13) über alle Polarisationsrichtungen und Impulse $|p| = \hbar k$ summiert werden, um alle möglichen Feldzustände zu behandeln. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Einfluss dieser Größen allerdings nicht behandelt.

2.1.2 JAYNES-CUMMINGS-MODELL

Das Jaynes-Cumming-Modell (siehe [JC63]) beschreibt die Wechselwirkung eines atomaren Zwei-Niveau-Systems (ZNS) mit einer Mode des quantisierten Lichtfeldes. Dieses Modell wird im Folgenden als Ausgangspunkt für die quantenmechanische Beschreibung des Ein-Atom-Lasers verwendet. Das atomare System besteht aus zwei Energieniveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$, zwischen denen Übergänge mit einer Energie $E_\alpha - E_\beta = \hbar\omega_0$ erlaubt sind. Dieses System steht in Wechselwirkung mit einer einzelnen Mode der Energie $\hbar\Omega$ eines elektromagnetischen Feldes (siehe Abb. 2.1, S. 4).

Der Hamiltonian für dieses System sieht folgendermaßen aus:

$$H = H_0^{ZNS} + V_{WW} = H_0^{Atom} + H_0^{Feld} + V_{WW}, \quad (2.14)$$

wobei der Wechselwirkungsterm in Dipolnäherung angenommen wird und durch $V_{WW} = -\vec{d}\vec{E}$ gegeben ist. Dabei ist $\vec{d} = e\vec{r}$ der Dipoloperator. Die Näherung besteht darin, die räumliche Änderung des elektromagnetischen Feldes zu vernachlässigen. Dies ist gerechtfertigt, weil das das System anregende Feld im optischen Bereich liegt und somit räumlich auf großen Skalen oszilliert, verglichen mit der atomaren Ausdehnung (vgl. Abb. 2.2 und eine kurze Herleitung im Anhang S. 73). Die Eigenfunktionen des atomaren

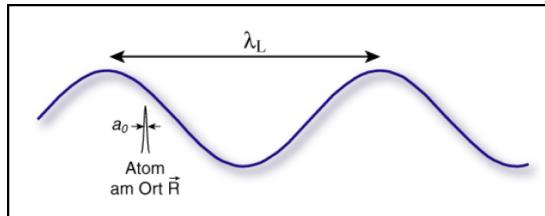


Abbildung 2.2: Zur Dipolnäherung: Ein Atom besitzt eine Ausdehnung in der Größenordnung vom Bohrschen Radius a_B . Optische Wellenlängen sind um einen Faktor 10^4 größer als diese Ausdehnung, deshalb kann man das Feld am Ort des Atoms in guter Näherung als räumlich konstant annehmen.

Anteils des Hamiltonians sind durch

$$H_0^{Atom} |j\rangle = E_j |j\rangle \quad j \in \{\alpha, \beta\} \quad (2.15)$$

gegeben, die Eigenfunktionen des Feldanteils durch

$$H_0^{Feld} |n\rangle = \hbar\Omega n |n\rangle \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.16)$$

wobei die Energieachse um den konstanten Betrag $\frac{\hbar\Omega}{2}$ verschoben ist und somit die ursprüngliche Grundzustandsenergie aus Gl. (2.6) zu Null gewählt ist. Darin sind $|j\rangle$ und $|n\rangle$ die ungestörten Zustände des Atoms bzw. des Feldes. Ohne Berücksichtigung des Wechselwirkungsterms V_{WW} sind die Eigenzustände von H_0^{ZNS} durch die Produktzustände $|j, n\rangle = |j\rangle \otimes |n\rangle$ gegeben. Die Eigenzustände des Hamiltonians unter Berücksichtigung der Wechselwirkung werden in Abschnitt 2.1.4 ausführlich erläutert.

entspricht (vgl. [Mes99, Seite 44]).

Im Jaynes-Cummings-Modell wird für eine elegante Darstellung der Pauli'sche Spinformalismus bemüht, um mit den beiden Zuständen $|\alpha\rangle = (1, 0)^T$ und $|\beta\rangle = (0, 1)^T$ zu operieren, was wegen der Analogie der zwei diskreten Spin-Einstellungsmöglichkeiten und der zwei atomaren Niveaus naheliegend ist: das Zwei-Niveau-System besitzt die Spin- $\frac{1}{2}$ -Algebra. Unter Verwendung der Spinmatrix σ_z und der Spinflipmatrizen σ_+ (hier effektiv als atomarer Aufsteigeoperator) und σ_- (hier als atomarer Absteigeoperator) mit

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

und

$$\sigma_+ |\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\alpha\rangle \quad \sigma_- |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\beta\rangle \quad (2.18)$$

kann man H_0^{ZNS} und V_{WW} schreiben als

$$H_0^{ZNS} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \hbar\Omega b^\dagger b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \hbar\Omega b^\dagger b \quad (2.19)$$

$$V_{WW} = - \begin{pmatrix} 0 & d_{\alpha\beta} E \\ d_{\alpha\beta} E & 0 \end{pmatrix} = - (d_{\alpha\beta} E \sigma_+ + d_{\alpha\beta} E \sigma_-). \quad (2.20)$$

Darin sind $d_{\alpha\beta} E = \langle \alpha | V_{WW} | \beta \rangle$ die Dipolmatrixelemente. Einsetzen des quantisierten Lichtfeldes Gl. (2.13) in Gl. (2.20) liefert

$$V_{WW} = g(b + b^\dagger)\sigma_+ + g^*(b + b^\dagger)\sigma_- \stackrel{RWA}{\approx} gb\sigma_+ + g^*b^\dagger\sigma_-, \quad (2.21)$$

wobei

$$g = -d_{\alpha\beta}\epsilon_\Omega \sin(kz) \quad (2.22)$$

die Dipolkopplungsstärke zwischen Feld und System beschreibt. Dabei wurde die „Rotating Wave Approximation (RWA)“ verwendet (vgl. Kapitel 2.1.3). Insgesamt entsteht so der Gesamthamiltonian der Wechselwirkung des Zwei-Niveau-Systems und einer einzelnen quantisierten Lichtmode in RWA, der Jaynes-Cummings-Hamiltonian:

$$H = H_0^{ZNS} + V_{WW} = \frac{1}{2} \hbar\omega_0 \sigma_z + \hbar\Omega b^\dagger b + gb\sigma_+ + g^*b^\dagger\sigma_-.$$

(2.23)

2.1.3 ROTATING WAVE APPROXIMATION

Die Rotating Wave Approximation kann anschaulich im Wechselwirkungsbild erläutert werden. Aus dem bisher verwendeten Schrödingerbild entsteht diese Darstellung, indem im Hamiltonoperator die Zeitabhängigkeiten der Zustände auf die Operatoren umgeschrieben werden, z.B. $\tilde{\sigma}_+ = \sigma_+ e^{i\Omega t}$ oder $\tilde{b} = b e^{-i\omega_0 t}$, mit den ursprünglichen Operatoren σ_\pm aus dem Schrödingerbild. Für die in Gl. (2.21) vorkommenden Ope-

ratorprodukte ergeben sich dadurch die Proportionalitäten

$$\tilde{b}\tilde{\sigma}_+ \propto e^{i(\Omega-\omega_0)t}, \quad (2.24)$$

$$\tilde{b}^\dagger\tilde{\sigma}_- \propto e^{-i(\Omega-\omega_0)t}, \quad (2.25)$$

$$\tilde{b}\tilde{\sigma}_- \propto e^{-i(\Omega+\omega_0)t}, \quad (2.26)$$

$$\tilde{b}^\dagger\tilde{\sigma}_+ \propto e^{i(\Omega+\omega_0)t}, \quad (2.27)$$

wobei jeweils ω_0 die atomare Übergangsfrequenz zwischen den beiden Niveaus und Ω die Frequenz der Feldmode ist. In dieser Darstellung wird deutlich, dass die ersten beiden Terme zeitlich nur langsam, mit der Differenzfrequenz $\pm(\Omega - \omega_0)$, oszillieren (im resonanten Fall ($\Omega = \omega_0$) gar nicht), wohingegen die beiden letzten Terme mit der Summe der Frequenzen $\pm(\Omega + \omega_0)$ oszillieren. Die Rotating Wave Approximation besteht nun darin, die Terme schneller Oszillation im Hamiltonian zu vernachlässigen. Diese Näherung ist umso besser, je mehr Atom und Feld in Resonanz sind, da in diesem Fall die Differenz der Oszillationsfrequenzen maximal ist. Die Näherung ist anhand Abb. 2.3 intuitiv zu verstehen. Die Terme a) und b)

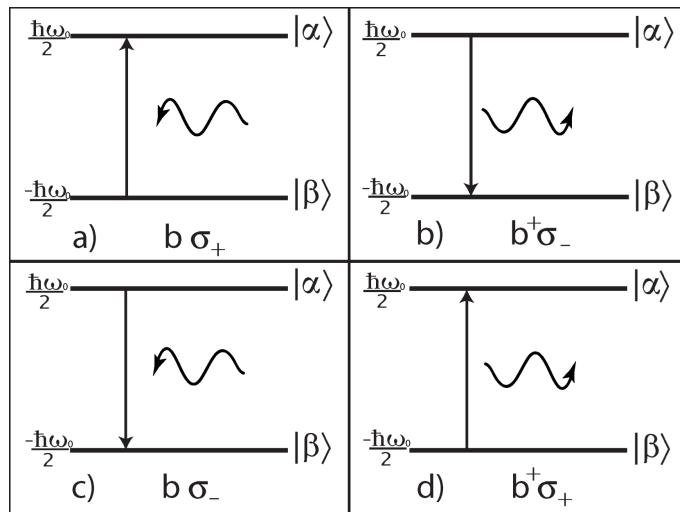


Abbildung 2.3: Zur Rotating Wave Approximation in Gl. (2.21), S. 7: Die Prozesse c) und d) werden vernachlässigt. Nähere Diskussion in Kap. 2.1.3.

entsprechen den bekannten Vorgängen der Absorption (ein Photon wird vernichtet und das Atom angeregt) und Emission (ein Photon wird erzeugt und das Atom relaxiert). Die Terme c) und d) entsprechen den intuitiv nicht zugänglichen Vorgängen der Absorption eines Photons und gleichzeitiger atomarer Relaxation sowie der Emission eines Photons und gleichzeitiger atomarer Anregung. Diese Vorgänge haben bei oder nahe der Resonanz nur eine sehr geringe quantenmechanische Wahrscheinlichkeit und werden daher in der Rotation Wave Approximation vernachlässigt.

2.1.4 EINFLUSS DER KOPPLUNG AUF ENERGIEN UND ZUSTÄNDE

Wie im vorletzten Abschnitt beschrieben, sind die Zustände im ungestörten System durch $|\alpha, n\rangle = |\alpha\rangle \otimes |n\rangle$ und $|\beta, n\rangle = |\beta\rangle \otimes |n\rangle$ gegeben, wobei der Hamiltonian H_0^{ZNS} folgendermaßen auf die Zustände wirkt:

$$H_0^{ZNS} |\alpha, n\rangle = \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} + n\hbar\Omega \right) |\alpha, n\rangle \quad (2.28)$$

$$H_0^{ZNS} |\beta, n\rangle = \left(-\frac{\hbar\omega_0}{2} + n\hbar\Omega \right) |\beta, n\rangle. \quad (2.29)$$

Die Licht-Materie-Wechselwirkung V_{WW} koppelt für festes n nur die Zustände $|\alpha, n\rangle$ und $|\beta, n+1\rangle$, so dass jeder Satz solcher gekoppelter Zustände unabhängig betrachtet werden kann. In dieser Basis ($|\alpha, n\rangle$, $|\beta, n+1\rangle$) ist der Hamiltonian gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \hbar\Omega b^\dagger b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + g\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + g^*\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \hbar\Omega(n + \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hbar\delta & 2g\sqrt{n+1} \\ 2g^*\sqrt{n+1} & -\hbar\delta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.30)$$

mit der Frequenzdifferenz $\delta = \omega_0 - \Omega$. Wie in den Gln. (2.19) und (2.20), S. 7 stehen die ungestörten Energien auf den Diagonalelementen und die Kopplungsterme auf den Nichtdiagonalelementen. Die Lösungen des gestörten Systems werden durch Diagonalisieren des Hamiltonians erhalten. Die Eigenenergien sind:

$$E_{1n} = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar}{2} R_n \quad (2.31)$$

$$E_{2n} = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar}{2} R_n \quad (2.32)$$

mit der verallgemeinerten Rabi-Frequenz $R_n = \sqrt{\delta^2 + (R_n^0)^2}$ und der quantenmechanischen Rabi-Frequenz

$$R_n^0 = \sqrt{4|g|^2(n+1)}. \quad (2.33)$$

Unter Berücksichtigung der Wechselwirkung liegt also eine Energieaufspaltung der Zustände um den Betrag $\Delta E = \hbar R_n$, bzw. bei Resonanz ($\delta = 0$) um den Betrag $\Delta E = 2\hbar|g|\sqrt{n+1}$ vor (vgl. Abb. 2.4, S. 10). Durch diese Aufspaltung kommen nun nicht mehr nur Übergänge der Jaynes-Cummings-Frequenz ω_0 vor, sondern es kommen, je nach mittlerer Photonenzahl im Resonator, Übergänge mit den Frequenzen

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \pm \frac{R_n \pm R_{n+1}}{2} \\ &= \omega_0 \pm g(\sqrt{n+1} \pm \sqrt{n+2}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

vor, wobei letztere Gleichung für den Resonanzfall gilt. Durch die Energieaufspaltung kommen für einen Übergang zwischen Zuständen mit n und $n+1$ je vier Frequenzen vor, mit Ausnahme der Übergänge mit dem Grundzustand $|\beta, 0\rangle$ als Endzustand, da dieser nicht aufspaltet.

Die Eigenzustände des gestörten Problems sind die sog. „dressed states“ (vgl. [MS99, Seite 348]), eine

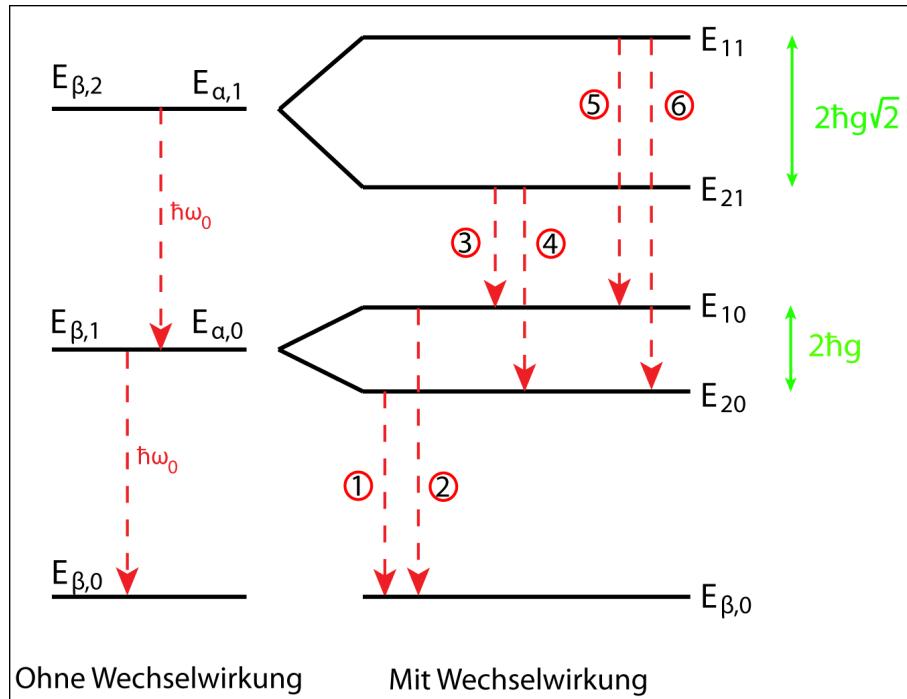


Abbildung 2.4: Darstellung des Einflusses der Licht-Materie-Wechselwirkung auf die niedrigsten Energien des Systems: Mit Wechselwirkung spalten die Niveaus um einen Betrag $\hbar R_n = \hbar g\sqrt{n+1}$ auf, wodurch neue Übergänge der Frequenzen $\omega \pm \frac{R_n}{2}$ entstehen. Bei sehr kleinen Photonenzahlen sind nur die Energieniveaus E_{10} und E_{20} besetzt und die Übergänge 1 und 2 mit den Energien $\hbar(\omega_0 \pm g)$ sind relevant. Für hinreichend große mittlere Photonenzahlen sind zusätzlich die Energieniveaus E_{11} und E_{21} (und entsprechend höhere Niveaus) besetzt und die mit 3 bis 6 bezeichneten Prozesse mit den Energien $\hbar(\omega_0 \pm (\sqrt{2} \pm 1))$ sind relevant.

Linearkombination der beiden ungestörten Zustände („bare states“), die zu festem n koppeln:

$$|1, n\rangle = \sin \Theta_n |\alpha, n\rangle + \cos \Theta_n |\beta, n+1\rangle \quad (2.35)$$

$$|2, n\rangle = \cos \Theta_n |\alpha, n\rangle - \sin \Theta_n |\beta, n+1\rangle \quad (2.36)$$

mit

$$\sin \Theta_n = \frac{R_n^0}{\sqrt{(R_n^0)^2 + (R_n - \delta)^2}} \quad \cos \Theta_n = \frac{R_n - \delta}{\sqrt{(R_n^0)^2 + (R_n - \delta)^2}}. \quad (2.37)$$

Allein durch die Kopplung von Atom und Feld oszillieren also die Zusammensetzungen der gestörten Zustände mit einer Frequenz $\propto \sqrt{n+1}$, was eine direkte Konsequenz der Feldquantisierung ist. Diese Oszillationen werden Rabioszillationen genannt und können experimentell beobachtet werden (siehe [BSKM⁺96], [FGB⁺08]). Sie entstehen anschaulich durch den Prozess, dass ein angeregtes Atom unter Emission eines Photons relaxiert, dann das emittierte Photon wieder absorbiert und anschließend wieder emittiert. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten der elektronischen Niveaus oszillieren dabei zwischen 0 und 1[†].

[†]Dieses Verhalten ist im bisher betrachteten System möglich, weil einerseits der Resonator die Wellenfunktion des emittierten Photons auf einen kleinen Bereich beschränkt, wobei die Wellenfunktion immer einen Überlapp mit dem Atom haben soll, wodurch überhaupt erst eine erneute Wechselwirkung möglich ist; andererseits, weil im bisher betrachteten System noch keine Dissipationsprozesse, wie zum Beispiel ein Verlust des Photons im Resonator oder Dämpfung der atomaren Besetzungswahrscheinlichkeit berücksichtigt sind.

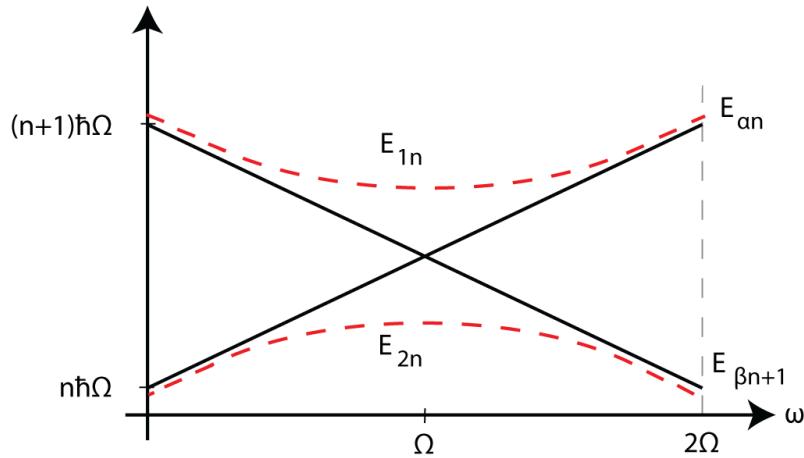


Abbildung 2.5: Zum Einfluss der Wechselwirkung: Darstellung der Energiedifferenzen des ungestörten (durchgezogene Linien) und des gestörten Hamiltonians (gestrichelte Linien), aufgetragen gegen die atomare Übergangsfrequenz ω . Zu sehen ist das charakteristische Anti-crossing der gestörten Eigenwerte: Die sich im ungestörten Fall kreuzenden Energien stoßen sich bei Berücksichtigung der Licht-Materie-Wechselwirkung voneinander ab und kreuzen sich nicht mehr.

Im Resonanzfall ($\delta = 0$) sind die Anteile der ungestörten Zustände am gestörten Zustand gleich groß:

$$|1, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha, n\rangle + |\beta, n+1\rangle] \quad (2.38)$$

$$|2, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha, n\rangle - |\beta, n+1\rangle], \quad (2.39)$$

wohingegen die gestörten Zustände für große Frequenzunterschiede ($\omega \ll \Omega, \omega \gg \Omega$) in die ungestörten Zustände übergehen, was durch Einsetzen von R_n in Gl (2.37) deutlich wird. Die beschriebene Aufspaltung der Energiedifferenzen durch die Wechselwirkung ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Hier sind die Energiedifferenzen des Hamiltonians gegen die atomare Übergangsfrequenz ω aufgetragen. Die durchgezogenen Linien entsprechen den ungestörten Energien, die gestrichelten Linien entsprechen den Energien des Gesamtsystems inklusive Wechselwirkung. Zu sehen ist das sogenannte „Anti-crossing“, die gegenseitige Abstoßung der Energien der Zustände durch die Atom-Feld-Wechselwirkung, ein typisches Phänomen, das bei Berücksichtigung von Störungen in Quantensystemen zu beobachten ist. Die Abstoßung ist gegeben durch $E_{1,n} - E_{2,n} = R_n$, der minimale Wert wird bei Resonanz ($\omega = \Omega$) erreicht und beträgt $2|g|\sqrt{n+1} = R_n^0$.

2.2 DICHTEMATRIXFORMALISMUS

Systeme hoher Komplexität, zum Beispiel Ensembles in einem bestimmten Makrozustand, der durch verschiedene Mikrozustände realisiert werden kann, können oft nicht mehr mit endlichem Aufwand durch eine einfache Wellenfunktion beschrieben werden. Stattdessen wird zur Beschreibung der Dichtematrixformalismus

mus verwendet. Die Dichtematrix beschreibt die Besetzung von Mikrozuständen des Systems und beinhaltet damit Informationen über statistische Eigenschaften des beschriebenen Systems. Auch für stark vereinfachte Systeme mit wenigen Freiheitsgraden kann diese Darstellung sinnvoll sein. Die für Wellenfunktionen oft schwierige Erweiterung des Systems um Dissipationsprozesse erfolgt für die Dichtematrix auf natürliche Weise durch eine Erweiterung der Bewegungsgleichung, der Liouville-von-Neumann-Gleichung. Im Folgenden werden der Dichteoperator und die zugehörige Bewegungsgleichung vorgestellt.

2.2.1 DEFINITION DES DICHTEOPERATORS

Der sogenannte statistische Operator oder Dichteoperator ρ ist definiert durch

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (2.40)$$

wobei die $|\psi_n\rangle$ die Zustände des Systems sind, welche mit der Wahrscheinlichkeit p_n vorkommen. Der Dichteoperator ist hermitesch ($\rho = \rho^*$), normiert ($Sp\{\rho\} = 1$, wobei Sp die Spur bezeichnet) und hat nicht-negative Erwartungswerte. Für reine Zustände ($p_{n'} = 1$, $p_{n \neq n'} = 0$) vereinfacht er sich zu $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ und ist somit ein reiner Projektor. Dass durch einen Dichteoperator die statistischen Informationen eines Systems bestimmt sind, drückt sich unter Anderem darin aus, dass sich der Erwartungswert einer beliebigen Größe (Observablen) \hat{F} bestimmen lässt über

$$\langle \hat{F} \rangle = Sp\{\rho \hat{F}\}. \quad (2.41)$$

Damit sind die Erwartungswerte beliebiger Systemgrößen zu einem Zeitpunkt festgelegt. Die zeitliche Entwicklung des Dichteoperators und damit des Systems ist durch die Liouville-von-Neumann-Gleichung (quantenmechanisches Analogon zur klassischen Liouville-Gleichung) bestimmt, die durch Einsetzen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung in die Definition des Dichteoperators entsteht (für eine Herleitung siehe Anhang, S. 73):

$$\boxed{\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)]}. \quad (2.42)$$

Die zeitliche Änderung des Dichteoperators ist also durch den Kommutator von Hamiltonian und Dichteoperator gegeben.

2.2.2 DICHTEOPERATOR FÜR DAS JAYNES-CUMMINGS-MODELL

Der Dichteoperator bezogen auf das Jaynes-Cummings-Modell wird beschrieben in der Basis der ungestörten Zustände $|j, n\rangle = |j\rangle \otimes |n\rangle$ mit $j \in \{\alpha, \beta\}$ und $n \in \mathbb{N}$ und ist folgendermaßen definiert:

$$\rho = \sum_{jj'} \sum_{nn'} \rho_{j'n',jn} |j'n'\rangle \langle jn|, \quad \rho_{j'n',jn} = \langle j'n' | \rho | jn \rangle. \quad (2.43)$$

Die Dichtematrix hat prinzipiell die Dimension $\infty \times \infty$, da die Photonenanzahl n nach oben nicht beschränkt ist. Aus der Liouville-von-Neumann-Gleichung (Gl. (2.42)) entstehen durch explizites Ausführen des Kommutators von Dichtematrix (Gl. (2.43)) und Jaynes-Cummings-Hamiltonian (Gl. (2.23), S. 7) die vollständigen Bewegungsgleichungen für die Dichtematrixelemente in der Basis der $|\alpha, n\rangle, |\beta, n+1\rangle$ im Wech-

$$\left(\begin{array}{ccccccc}
 \rho_{\beta 0, \beta 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & \lceil \rho_{\alpha 0, \alpha 0} & \rho_{\alpha 0, \beta 1} \rceil & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lfloor \rho_{\beta 1, \alpha 0} & \rho_{\beta 1, \beta 1} \rfloor & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lceil \rho_{\alpha 1, \alpha 1} & \rho_{\alpha 1, \beta 2} \rceil & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \lfloor \rho_{\beta 2, \alpha 1} & \rho_{\beta 2, \beta 2} \rfloor & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lceil \rho_{\alpha 2, \alpha 2} & \rho_{\alpha 2, \beta 3} \rceil \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lfloor \rho_{\beta 3, \alpha 2} & \rho_{\beta 3, \beta 3} \rfloor \\
 \vdots & & & & & & \ddots
 \end{array} \right)$$

\underbrace{\phantom{\rho_{\beta 0, \beta 0}}}_{n=0} \quad \underbrace{\phantom{\rho_{\alpha 0, \alpha 0}}}_{n=1} \quad \underbrace{\phantom{\rho_{\alpha 1, \alpha 1}}}_{n=2}

Abbildung 2.6: Struktur und Indizierung der relevanten Elemente der freien Zeitentwicklung der Dichtematrix. Die eckigen Klammern deuten die Jaynes-Cummings Untermatrizen an, in welchen die Diagonalelemente über die rot unterlegten Übergangselemente koppeln. Kopplungen zwischen den einzelnen Untermatrizen entstehen durch die Ankopplung von Reservoirn.

selwirkungsbild:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n', \alpha n} = \hbar \delta(n' - n) \rho_{\alpha n', \alpha n} + g\sqrt{n'+1} \rho_{\beta n'+1, \alpha n} - g^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha n', \beta n+1} \quad (2.44)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n', \beta n} = \hbar \delta(n' - n) \rho_{\beta n', \beta n} - g\sqrt{n} \rho_{\beta n', \alpha n-1} + g^* \sqrt{n'} \rho_{\alpha n'-1, \beta n} \quad (2.45)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n', \beta n} = \hbar \delta(n' - n) \rho_{\alpha n', \beta n} - g\sqrt{n} \rho_{\alpha n', \alpha n-1} + g\sqrt{n'+1} \rho_{\beta n'+1, \beta n} \quad (2.46)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n', \alpha n} = \hbar \delta(n' - n) \rho_{\beta n', \alpha n} + g^* \sqrt{n'} \rho_{\alpha n'-1, \alpha n} - g^* \sqrt{n+1} \rho_{\beta n', \beta n+1}. \quad (2.47)$$

Im Jaynes-Cummings-Modell sind die Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ und für festes n die Zustände $|n\rangle$ und $|n+1\rangle$ gekoppelt, was in Abb. 2.6, S. 13 dargestellt ist. Dadurch müssen für die Berechnung der freien Zeitentwicklung der Dichtematrix nur die 2×2 -Blöcke (Jaynes-Cummings-Untermatrizen) mit $n' = n, n \pm 1$ und deren Wechselwirkung betrachtet werden.

Zur Charakterisierung der Anregungszustände des quantisierten elektromagnetischen Feldes der betrachteten Mode wird häufig die Photonenstatistik verwendet. Sie beschreibt die Besetzung der Zustände im elektromagnetischen Feld. Die Photonenstatistik besteht aus den Diagonalelementen der reduzierten Photonendichtematrix, die durch Ausspuren der atomaren Freiheitsgrade erhalten wird:

$$\rho_{nn'} = \sum_j \rho_{jn, jn'} = \rho_{\alpha n, \alpha n'} + \rho_{\beta n, \beta n'}. \quad (2.48)$$

Die Photonenstatistik ist damit

$$\rho_{nn} = p_n = \sum_j \rho_{jn, jn}. \quad (2.49)$$

Darin ist p_n die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zustand mit der Photonenzahl n vorkommt. Der Erwar-

tungswert der mittleren Photonenzahl kann damit bei Kenntnis der Photonenstatistik berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \langle n \rangle = \langle b^\dagger b \rangle &= Sp\{\rho b^\dagger b\} \\
 &= \sum_{j,n} \langle j, n | \rho b^\dagger b | j, n \rangle \\
 &= \sum_{j,n} n \langle j, n | \rho | j, n \rangle \\
 &= \sum_n np_n.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Die oben beschriebenen Bewegungsgleichungen für die Dichtematrixelemente enthalten noch keine Dissipationsprozesse im System, auf die in Kapitel 2.3 eingegangen wird.

2.2.3 BEWEGUNGSGLEICHUNG FÜR ZUSTÄNDE OHNE DISSIPATION

Ohne Berücksichtigung von Dissipation können die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Jaynes-Cummings-Untermatrizen analytisch gelöst werden. Beispielhaft soll hier die Bewegungsgleichung für ein einzelnes Matrixelement mit $\delta = 0$ integriert werden. Angenommen das System startet mit den Anfangsbedingungen $\rho_{\alpha n, \alpha n}(t = 0) = 1$ (angeregtes Atom und n Photonen in der Lasermode) und $\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \alpha n}(t = 0) = 0$. Ableiten von Gl. (2.44), S. 13 nach der Zeit ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -\frac{i}{\hbar} g \sqrt{n+1} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \alpha n} + \frac{i}{\hbar} g^* \sqrt{n+1} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1}. \tag{2.51}$$

Einsetzen von Gl. (2.46) und Gl. (2.47) in Gl. (2.51) liefert

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -2|g|^2 \frac{(n+1)}{\hbar^2} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}). \tag{2.52}$$

Aus Gl. (2.44)+Gl. (2.45) folgt $\rho_{\beta n+1, \beta n+1} = 1 - \rho_{\alpha n, \alpha n}$, was eingesetzt in Gl. (2.52) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -2|g|^2 \frac{(n+1)}{\hbar^2} (2\rho_{\alpha n, \alpha n} - 1) \tag{2.53}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned}
 \rho_{\alpha n, \alpha n} &= \frac{1 + \cos \left(2|g| \frac{\sqrt{n+1}}{\hbar} t \right)}{2} \\
 &= \cos^2 \left(|g| \frac{\sqrt{n+1}}{\hbar} t \right)
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

ergibt. Hier sind direkt die Rabioszillationen in der Zeitentwicklung der Zustände zu sehen. Sie haben eine Kreisfrequenz $R_n^0 = 2|g| \frac{\sqrt{n+1}}{\hbar}$ (vgl. [MS99, Seite 291]) und damit eine Periodendauer von $T_n = \frac{\pi \hbar}{|g| \sqrt{n+1}}$. Bei endlicher Verstimmung $\delta \neq 0$ ist die Rabifrequenz gegeben durch R_n .

2.3 WECHSELWIRKUNG MIT DER UMGEBUNG

Bisher wurden das Subsystem, bestehend aus atomarem Zwei-Niveau-System in einem Resonator und einer Mode des elektromagnetischen Feldes, sowie die Auswirkungen der Kopplung dieser beiden Teile betrachtet. Um einen Laser zu beschreiben, muss zusätzlich die Möglichkeit der Wechselwirkung mit der Umgebung, also Auskopplung von Photonen aus dem Resonator, Dissipation und ein Pumpmechanismus, berücksichtigt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Umgebung durch Reservoirs von harmonischen Oszillatoren im thermischen Gleichgewicht modelliert.

Im Folgenden wird das im vorigen Abschnitt diskutierte Modell um jene Reservoirs erweitert und es werden die resultierenden Effekte dargestellt.

2.3.1 ANKOPPLUNG EINES RESERVOIRS

Als Modell für ein Reservoir, mit dem das Zwei-Niveau-System in Wechselwirkung steht, wird ein Bad von harmonischen Oszillatoren mit Frequenzen Ω_i im thermischen Gleichgewicht bei $T = 0$ K mit dem Hamiltonian

$$H_R = \sum_i \hbar \Omega_i a_i^\dagger a_i \quad (2.55)$$

angenommen, wobei die a_i, a_i^\dagger die bosonischen Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren der i-ten Reservoirmode sind. Dieses Reservoir dient zum Auffangen von aus dem System austoppelnden Photonen sowie zum Pumpen des Systems (Anregung des Atoms durch Kopplung mit Photonen des Reservoirs). Durch die Ankopplung solcher nicht unteireinander wechselwirkenden Reservoirs entstehen zusätzliche Terme (sogenannte Lindblad-Terme) in der Liouville-von-Neumann-Gleichung (2.42):

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_l \frac{\chi_l}{2} \left([O_l, \rho O_l^\dagger] + [O_l \rho, O_l^\dagger] \right).} \quad (2.56)$$

Diese zusätzlichen Lindblad-Terme beinhalten dabei je eine dem jeweiligen Vorgang entsprechende Konstante χ_l , welche im Wesentlichen die Kopplungsstärke von System und Reservoir beschreibt, und die die Wirkung der Reservoirkopplung beschreibenden Operatoren O_l, O_l^\dagger . Diese sind die schon vorgestellten Systemoperatoren (b, b^\dagger oder σ_\pm) und wirken somit auf dem Hilbertraum des Systems, weshalb sie nicht mit dem ursprünglichen Dichteoperator des Systems ohne Reservoir ρ vertauschen (für eine detaillierte Herleitung siehe [Ste09]). Um die Liouville-von-Neumann-Gleichung zu erhalten, wird die sogenannte Born-Markov-Näherung verwendet. Diese Näherung beinhaltet die Vernachlässigung aller Wechselwirkungsprozesse höherer Ordnung als 2 (Born-Näherung), sowie die Vernachlässigung aller Gedächtnis-Effekte im System (Markov-Näherung). Dies ist anschaulich mit der Annahme zu erklären, die Zeitskala der Korrelation von System und Reservoir sei klein verglichen mit der Zeitskala des Systems (definiert durch die Lebensdauer des angeregten Zustands, genaue Diskussion siehe [Car99], oder [Ste09]). Die Lindblad-Terme erhalten, im Gegensatz zu phänomenologisch eingeführten Verlusten, die Spur der Dichtematrix und sind somit näher an einer „vollen Theorie“ als die oft verwendete Beschreibung des Lasersystems durch phänomenologisch aufgestellte Ratengleichungen (vgl. [YB89]).

Im Rahmen dieser Arbeit sollen drei Mechanismen betrachtet werden, die über Lindblad-Terme beschrieben werden können: Resonatorverluste (ein Photon verlässt den Resonator), spontane Emission in nichtlasende Moden (Emission von Photonen der Energie $E \neq \hbar \omega_{\alpha\beta}$) und inkohärentes Pumpen (externe Anregung der atomaren Niveaus). Sie werden im Folgenden diskutiert und in die Dichtematrixgleichungen einbezogen.

RESONATORVERLUSTE

Mit Resonatorverlusten ist die Auskopplung von Photonen aus dem Resonator gemeint, also jener Verlust an Photonen im Resonator, welcher die Laseremission ausmacht. Dieser Verlust ist unvermeidbar, da die Spiegel des Resonators nie eine hundertprozentige Reflektivität aufweisen, und somit bei jedem Reflektionsprozess eines Photons am Resonatorspiegel eine geringe Wahrscheinlichkeit der Transmission besteht. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch eine Rate $\kappa = \frac{\omega}{Q}$ berücksichtigt, wobei Q ein Maß für die Güte der Spiegel ist. Die zugehörigen Operatoren sind die Photonenerzeuger und -vernichter, da hierbei ohne Änderung der atomaren Zustände Photonen im System vernichtet werden. Der zugehörige Lindblad-Term ist demnach:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho|_{res} = \frac{\kappa}{2} [2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b]. \quad (2.57)$$

Die Bewegungsgleichung der Diagonalelemente der Dichtematrix hat in der Basis der $|j, n\rangle$ folgende Darstellung:

$$\frac{d}{dt} p_n|_{res} = \kappa [(n+1)p_{n+1} - np_n] \quad (2.58)$$

wobei $p_n = f_{\alpha,n} + f_{\beta,n}$ die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes mit n Photonen darstellt. Für die Änderung der mittleren Photonenzahl und der atomaren Besetzungswahrscheinlichkeit durch Resonatorverluste ergibt sich damit:

$$\frac{d}{dt} \langle n \rangle|_{res} = -\kappa \langle n \rangle \quad \frac{d}{dt} f_j|_{res} = 0. \quad (2.59)$$

Darin bezeichnet f_j die Besetzungswahrscheinlichkeit der atomaren Niveaus mit $j = \alpha, \beta$.

Resonatorverluste allein betrachtet bedingen also einen exponentiellen Zerfall der mittleren Photonenzahl und beeinflussen nicht die atomare Besetzungswahrscheinlichkeit.

EMISSION IN NICHTLASENDE MODEN

Das angeregte Atom kann, genauso wie es in die Jaynes-Cummings-Mode emittiert, auch in andere, nicht-lasende Moden emittieren, also in Moden mit anderer Frequenz als die JC-Frequenz ω_0 . Dadurch ändert sich der atomare Zustand ohne Änderung der Photonenzahl in der Lasermode, also sind die relevanten Operatoren im zugehörigen Lindblad-Term die atomaren Aufsteige- bzw. Vernichtungs-Operatoren. Der Lindblad-Term ist der Folgende:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho|_{nl} = \frac{1}{2\tau_{nl}} [2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-], \quad (2.60)$$

mit der Zerfallsrate $\frac{1}{\tau_{nl}}$. Für die Photonenstatistik und die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten gilt:

$$\frac{d}{dt} p_n|_{nl} = 0 \quad \frac{d}{dt} f_\alpha|_{nl} = -\frac{1}{\tau_{nl}} f_\alpha \quad \frac{d}{dt} f_\beta|_{nl} = \frac{1}{\tau_{nl}} f_\alpha. \quad (2.61)$$

Die spontane Emission in nichtlasende Moden beeinflusst also die Photonen in der Lasermode nicht direkt. Für die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten f_j ergeben sich ein exponentieller Zerfall des angeregten Zustandes und eine Entwicklung des nichtangeregten Zustandes je proportional zur Besetzungswahrscheinlichkeit des angeregten Zustandes.

INKOHÄRENTES PUMPEN

Um ein anfangs nicht angeregtes Atom anzuregen und dem bisher festgestellten exponentiellen Zerfall des angeregten Atomniveaus entgegenzuwirken, wird dem System Energie zugeführt, indem das Atom aus externen Reservoiren angeregt wird, also die Besetzungswahrscheinlichkeit des angeregten Niveaus $|\alpha\rangle$ erhöht wird. Gleichzeitig wird dadurch die Besetzungswahrscheinlichkeit des unteren Niveaus $|\beta\rangle$ verringert. Der Name inkohärentes Pumpen bezieht sich dabei auf die Tatsache, dass dieser Prozess die Kohärenz zwischen den Laserniveaus zerstört, indem Ladungsträger über höhere, nicht explizit berücksichtigte Pumpniveaus in den angeregten Zustand gelangen, wodurch die Phaseninformation der Ladungsträger vernachlässigt wird. Im zugehörigen Lindblad-Term der von-Neumann-Gleichung werden wegen der Änderung der Besetzungswahrscheinlichkeiten die Operatoren der atomaren Zustände σ_{\pm} verwendet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho|_P = \frac{P}{2} [2\sigma_+\rho\sigma_- - \sigma_-\sigma_+\rho - \rho\sigma_-\sigma_+] \quad (2.62)$$

mit der Pumprate P . Genau wie die Emission in nichtlasende Moden hat auch hier das Pumpen keinen direkten Einfluss auf die Photonen in der Lasermode. Die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten f_α und f_β verhalten sich gemäß:

$$\frac{d}{dt}f_\alpha|_P = Pf_\beta \quad \frac{d}{dt}f_\beta|_P = -Pf_\beta. \quad (2.63)$$

2.3.2 VOLLSTÄNDIGE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DES DICHTEOPERATORS

Unter Berücksichtigung der betrachteten Prozesse der Resonatorverluste, der Emission in nichtlasende Moden sowie des Pumpens ergibt sich für die Dichtematrix die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & - \frac{i}{\hbar} [H, \rho] \\ & + \frac{\kappa}{2} ([b, \rho b^\dagger] + [b\rho, b^\dagger]) \\ & + \frac{1}{2\tau_{nl}} ([\sigma_-, \rho \sigma_+] + [\sigma_- \rho, \sigma_+]) \\ & + \frac{P}{2} ([\sigma_+, \rho \sigma_-] + [\sigma_+ \rho, \sigma_-]). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Diese Gleichung wird auch als Liouville-von-Neumann-Gleichung bezeichnet. Für die einzelnen Dichtematrixelemente lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n', \alpha n} = & - \frac{i}{\hbar} \left(\hbar \delta(n' - n) \rho_{\alpha n', \alpha n} + g \sqrt{n' + 1} \rho_{\beta n' + 1, \alpha n} - g^* \sqrt{n + 1} \rho_{\alpha n', \beta n + 1} \right) \\ & + \frac{\kappa}{2} \left(2\sqrt{n' + 1} \sqrt{n + 1} \rho_{\alpha n' + 1, \alpha n + 1} - (n' + n) \rho_{\alpha n', \alpha n} \right) \\ & + \frac{1}{2\tau_{nl}} (-2\rho_{\alpha n', \alpha n}) + \frac{P}{2} (2\rho_{\beta n', \beta n}), \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n', \beta n} = & - \frac{i}{\hbar} \left(\hbar \delta(n' - n) \rho_{\beta n', \beta n} + g^* \sqrt{n'} \rho_{\alpha n' - 1, \beta n} - g \sqrt{n} \rho_{\beta n', \alpha n - 1} \right) \\ & + \frac{\kappa}{2} \left(2\sqrt{n' + n} \sqrt{n + 1} \rho_{\beta n' + 1, \beta n + 1} - (n' + 1) \rho_{\beta n', \beta n} \right) \\ & + \frac{1}{2\tau_{nl}} (2\rho_{\alpha n', \alpha n}) + \frac{P}{2} (-2\rho_{\beta n', \beta n}), \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n', \beta n} = & - \frac{i}{\hbar} \left(\hbar \delta(n' - n) \rho_{\alpha n', \beta n} + g \sqrt{n' + 1} \rho_{\beta n' + 1, \beta n} - g \sqrt{n} \rho_{\alpha n', \alpha n - 1} \right) \\ & + \frac{\kappa}{2} \left(2\sqrt{n' + 1} \sqrt{n + 1} \rho_{\alpha n' + 1, \beta n + 1} - (n' + n) \rho_{\alpha n', \beta n} \right) \\ & + \frac{1}{2\tau_{nl}} (-\rho_{\alpha n', \beta n}) + \frac{P}{2} (-\rho_{\alpha n', \beta n}), \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n', \alpha n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n', \beta n} \right)^*, \quad (2.68)$$

wobei auch hier nur jeweils die Matrixelemente mit $n' = n, n \pm 1$ betrachtet werden müssen.

KAPITEL 3

STATISTISCHE BESCHREIBUNG DES QUANTISIERTEN LICHTFELDES

3.1 CHARAKTERISIERUNG DES LICHTFELDES

Die große wissenschaftliche und technologische Bedeutung des Lasers röhrt von dessen charakteristischer Emission her: Ein Laser emittiert, im Gegensatz zu thermischer Emission, kohärentes Licht. Anhand des Anteils von kohärentem Licht im Lichtfeld kann für ein herkömmliches Lasersystem unterschieden werden, ob es sich unter- oder oberhalb der Laserschwelle befindet*. Der Anteil von kohärentem und thermischem Licht am Lichtfeld drückt sich in der jeweiligen Photonenstatistik aus.

Im Folgenden werden, um die Eigenschaften der Emission des Ein-Atom-Lasers beschreiben zu können, die Photonenstatistik sowie eine allgemeine Definition der Kohärenz, beschrieben durch Korrelationsfunktionen des Feldes, vorgestellt.

3.1.1 KORRELATIONSFUNKTIONEN, FELDMOMENTE UND KOHÄRENZ

In der klassischen Optik wird Licht als kohärent bezeichnet, wenn es in entsprechenden Aufbauten (z.B. Michelson-Interferometer) Interferenzfähigkeit zeigt. Für die Lichtwellen bedeutet dies, dass zeitlich (räumlich) kohärente Wellen eine feste zeitliche (räumliche) Phasenbeziehung besitzen. Inkohärentes Licht erzeugt in identischen Aufbauten nur eine gemittelte Intensität, die aus der Überlagerung aller auftretenden Phasen entsteht, aber keine zeitlich (räumlich) festen Interferenzmuster. Diese Definition der Kohärenz ist solange ausreichend, wie es sich um klassische Felder handelt, bei denen das Hinzufügen bzw. Entfernen eines einzelnen Photons das Feld nicht signifikant ändert. In der Quantenoptik hingegen ist dies der Fall, da einzelne Photonen erzeugt und detektiert werden können und ein Feld evtl. nur aus einem einzelnen Photon besteht, weshalb eine Verallgemeinerung des Kohärenzbegriffs notwendig ist, welche die einzelnen Photonen (bzw. deren Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren) berücksichtigt. Diese Definition geht auf Glauber [Gla63b] zurück und verwendet Feld-Feld-Korrelationen, um das Lichtfeld zu charakterisieren. Korrelationen sind allgemein Vergleiche verschiedener Funktionen $f(\vec{r}, t)$ und $g(\vec{r}, t)$ durch Integration, wobei die Funktionen gegeneinander „verschoben“ werden und somit die Ähnlichkeit der Funktionen (der

* Ein gewöhnliches Lasersystem mit vielen Emittoren besitzt eine wohldefinierte Schwelle der Höhe $\frac{1}{\beta}$ in der Input-Output-Kurve, oberhalb derer das Lasersystem kohärent emittiert. Dabei ist die von der Resonatorgeometrie abhängende Größe $\beta \ll 1$ ein Maß für die Größe der Schwelle.

Überlapp) χ gemessen wird:

$$\chi(\vec{r}', t') = \int f(\vec{r}, t) g(\vec{r} + \vec{r}', t + t') d\vec{r} dt. \quad (3.1)$$

Sind die beiden verglichenen Funktionen identisch, spricht man von Autokorrelation.

Als Ausgangspunkt für die Berechnung von Feldkorrelationen dient Gl. (2.13), S. 5. Diese impliziert, dass das elektrische Feld aus einem positiven und einem negativen Frequanzanteil (proportional zum Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperator des Feldes) besteht, so dass gilt:

$$E = E^+ + E^- \quad (3.2)$$

$$E^+(\vec{r}, t) = \varepsilon_\Omega b \sin(kz) \quad (3.3)$$

$$E^- = (E^+)^\dagger. \quad (3.4)$$

Ein idealer Detektor ist nur empfindlich gegenüber dem positiven Feldanteil E^+ , da der negative Anteil dem Erzeugungsoperator b^\dagger , also der Erzeugung von Photonen proportional ist. Die Intensität am Detektor ist damit gegeben durch das Betragsquadrat der Übergangsmatrixelemente von E^+ vom Ausgangszustand $|\psi_i\rangle$ zu allen möglichen Endzuständen $\langle\psi_f|$:

$$\langle I_i \rangle = \sum_f |\langle\psi_f|E^+|\psi_i\rangle|^2, \quad (3.5)$$

was leicht umgeformt werden kann zu

$$\begin{aligned} \langle I_i \rangle &= \sum_f \langle\psi_i|E^-|\psi_f\rangle\langle\psi_f|E^+|\psi_i\rangle \\ &= \langle\psi_i|E^-E^+|\psi_i\rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Intensität entspricht also dem Erwartungswert des Produktes der Feldanteile. Darin wird die Vollständigkeit der Zustände ausgenutzt, um die Identität $\sum_f |\psi_f\rangle\langle\psi_f| = \mathbb{1}$ wegzulassen.

Im Dichtematrixformalismus entspricht dies

$$\langle I \rangle = Sp\{\rho E^-(\vec{r}, t) E^+(\vec{r}, t)\}. \quad (3.7)$$

Darüber kann die Korrelationsfunktion erster Ordnung definiert werden:

$$G^{(1)}(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = Sp\{\rho E^-(\vec{r}, t) E^+(\vec{r}', t')\}, \quad (3.8)$$

bzw. in normierter Form

$$g^{(1)}(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \frac{Sp\{\rho E^-(\vec{r}, t) E^+(\vec{r}', t')\}}{Sp\{\rho E^-(\vec{r}, t) E^+(\vec{r}, t)\}}, \quad (3.9)$$

worin Sp die Spur bezeichnet. Diese Funktion beschreibt die Korrelation des negativen Feldanteils am Ort \vec{r} zur Zeit t mit dem positiven Feldanteil am Ort \vec{r}' zur Zeit t' . Im Folgenden wird nur noch die Zeitverschiebung $t' - t = \tau$ berücksichtigt. Da für das betrachtete Lasersystem die Kenntnis der Systemgrößen im stationären Zustand von Interesse ist, wird zusätzlich das Limit $\lim_{t \rightarrow \infty}$ angenommen[†].

[†]Der stationäre Zustand beschreibt den Zustand des Systems im Limit $t \rightarrow \infty$, in dem sich die relevanten Systemgrößen, wie zum Beispiel die mittlere Photonenanzahl im Resonator, nicht mehr ändern. Dies bedeutet allerdings nur, dass zum Beispiel genauso viele Photonen den Resonator verlassen wie erzeugt werden. Es handelt sich also um einen dynamischen Zustand, in dem die Systemgrößen

Für ein quantenmechanisch behandeltes System werden für die Korrelationen des elektrischen Feldes nicht mehr die Feldanteile E^\pm betrachtet. Das elektrische Feld ist quantisiert, also müssen die Operatoren $b(t+\tau)$, $b^\dagger(t)$ des elektrischen Feldes verwendet werden:

$$G^{(1)}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle b^\dagger(t)b(t+\tau) \rangle, \quad (3.10)$$

bzw normiert:

$$g^{(1)}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle b^\dagger(t)b(t+\tau) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle}. \quad (3.11)$$

Der Normierungsfaktor $\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle$ in Gl. (3.11) entspricht dem Erwartungswert der Photonenzahl $\langle n \rangle$. Diese Korrelationsfunktion hängt mit der klassischen Definition von Kohärenz dahingehend zusammen, dass sie die Sichtbarkeit V (Kontrast, zum Beispiel in einem Michelson-Aufbau) und darüber auch die Kohärenzzeit τ_c bzw. -länge des Feldes (vgl. [AGU⁺08]) beinhaltet, wobei I_{max} bzw. I_{min} der maximalen bzw. minimalen Intensität entspricht:

$$V(\tau) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = |g^{(1)}(\tau)| \quad (3.12)$$

$$\tau_c = 2 \int_0^{\infty} |g^{(1)}(\tau)|^2 d\tau.$$

(3.13)

Der Erwartungswert der Photonenzahl $\langle n \rangle$ wird in Hinblick auf $G^{(1)}$ als Moment des Feldes nullter Ordnung bezeichnet. Die Korrelationsfunktion erster Ordnung $G^{(1)}$ wird dann als Moment erster Ordnung definiert. Diese Bezeichnung legt eine Hierarchie von Momenten beliebiger Ordnung nahe, wobei jedes Moment durch eine Korrelationsfunktion beschrieben wird:

$$g^{(2)}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t+\tau)b(t+\tau)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2} \quad (3.14)$$

\vdots

$$g^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle b^\dagger(t)\dots b^\dagger(\tau_n)b(\tau_n)\dots b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^n}. \quad (3.15)$$

Das Feldmoment n -ter Ordnung beschreibt dabei die Korrelation von Ereignissen an n Zeitpunkten, zum Beispiel die gleichzeitige Messung von n Photonen.

Die vollständige Information über den Feldzustand steckt in allen Feldmomenten, allerdings ist es weder praktikabel noch erforderlich alle Momente zu kennen. Über die Definition der Feldmomente kann nun die Definition des Kohärenzgrades eines Feldes erfolgen. Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines vollständig kohärenten Feldes ist erfüllt, wenn für alle normierten Momente gilt

$$|g^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n)| = 1, \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

(3.16)

Damit folgt aus der Definition der Momente, dass diese für beliebig hohe n folgendermaßen faktorisieren:

$$G^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \prod_{i=1}^n G^{(1)}(\tau_i, \tau_i). \quad (3.17)$$

stationär sind.

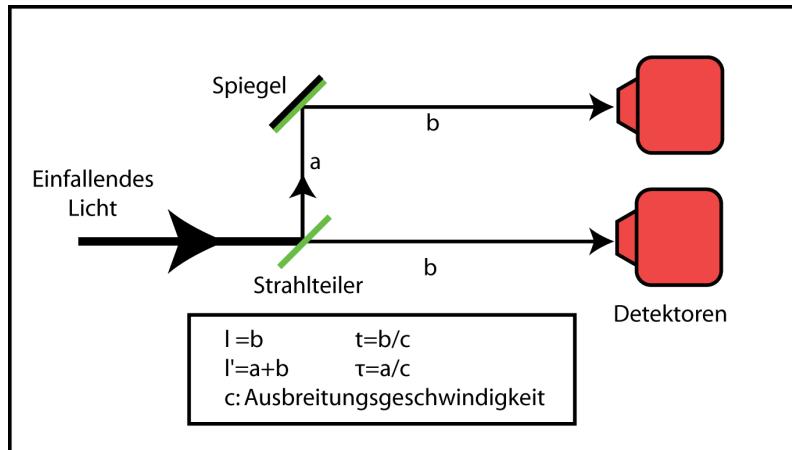


Abbildung 3.1: Schematischer Aufbau des Hanbury-Brown-Twiss-Experiments zur Messung der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(t, \tau)$. Gemessen werden Photonen hinter einem Strahlteiler mit variabler Weglänge: Ein Lichtstrahl wird in zwei Teilstrahlen aufgeteilt, die unterschiedlich lange Wege (l, l') bis zu einem Detektor laufen. So kann das Auftreffen von korrelierten Photonen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t = \frac{l}{c}$ und $t + \tau = \frac{l'}{c}$ (mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts c) gemessen werden.

Für Kohärenz j -ter Ordnung sind die Gln. (3.16) und (3.17) jeweils für $n = 1, \dots, j$ erfüllt. Dies bedeutet, Kohärenz j -ter Ordnung liegt in Experimenten mit j -facher Verzögerung von Photonendetektionen vor, wenn sich die Raten der j -fachen Detektion auf ein Produkt der Detektionsraten der einzelnen Detektoren reduzieren. Das heisst, dass für Momente $i \leq j$ das Auftreffen von Photonen auf die Detektoren statistisch nicht korreliert ist. Prinzipiell können alle Feldmomente gemessen werden, allerdings sind die Aufbauten für die Messung von Momenten höherer Ordnung experimentell schwierig zu realisieren. Für die ersten Feldmomente dagegen sind die Aufbauten wohlbekannt: Die Messung von $g^{(1)}(\tau)$ erfolgt am Aufbau des Young'schen Doppelspaltexperiments (siehe [You04]), $g^{(2)}(\tau)$ kann am Hanbury-Brown-Twiss-Aufbau (vgl. [BT56]) gemessen werden. In modernen Experimenten kommen sogenannte Streak-Kameras mit einer zeitlichen Auflösung von wenigen Pikosekunden zum Einsatz, welche direkt die zeitliche Korrelation von Photonen in einem Lichtstrahl detektieren können, wodurch mittlerweile auch das Moment dritter Ordnung gemessen werden kann (siehe [WGJ⁺09]). Beispielhaft ist in Abb. 3.1 das Hanbury-Brown-Twiss-Experiment zur Messung von $g^{(2)}(\tau)$ dargestellt.

In der vorliegenden Arbeit werden die ersten vier Momente, also bis zum Moment dritter Ordnung, betrachtet, da diese genügend Informationen über das emittierte Feld des Lasersystems enthalten. Das Moment nullter Ordnung beschreibt die mittlere Photonenzahl im Feld, das Moment erster Ordnung beschreibt die Kohärenzzeit und ist, wie im übernächsten Abschnitt dargestellt, mit dem Emissionsspektrum des Lasers verbunden. Die Momente zweiter und dritter Ordnung beschreiben das Lichtfeld durch einen Zusammenhang zur Photonenstatistik, welcher im folgenden Abschnitt vorgestellt wird. Zur Abkürzung wird im Folgenden der Begriff Kohärenz mit Kohärenz mindestens zweiter Ordnung gleichgesetzt.

3.1.2 KOHÄRENTES UND THERMISCHES LICHT

Ein weiterer Zugang, um eine Aussage über den Zustand eines Lichtfeldes zu treffen, ist die Photonenstatistik. Diese gibt die Wahrscheinlichkeit p_n an, dass ein Zustand mit n Photonen vorliegt, also die Wahrscheinlichkeit den Zustand $|n\rangle$ zu messen (vgl. Gl. (2.49), S. 13). Jede Zusammensetzung eines Lichtfeldes aus kohärenten und thermischen Anteilen hat eine charakteristische Photonenstatistik. Die Photonenstatistik

kann nicht direkt gemessen werden, jedoch hängt sie mit den Werten der Feldmomente ohne Zeitverschiebung $g^{(2,3)}(\tau = 0)$ zusammen. Im Folgenden sollen nun die verschiedenen Zustände des Lichtfeldes und deren Photonenstatistiken vorgestellt werden. Anschliessend wird der Zusammenhang von $g^{(2,3)}(\tau = 0)$ mit dem Zustand des Lichtfeldes dargestellt.

KOHÄRENTE LICHT

Die charakteristische Laseremission ist kohärentes Licht; das Lichtfeld wird dabei durch kohärente Zustände beschrieben (vgl. [Gla63a]). Kohärente Zustände sind solche, die der klassischen Beschreibung des Lichts am nächsten kommen, da sie Impuls- und Ortsunschärfe minimieren und somit nicht auseinanderlaufen. Ein kohärenter Zustand zeichnet sich dadurch aus, dass er ein Eigenzustand zum Vernichtungsoperator ist, was letztlich eine Konsequenz der Forderung ist, dass die Energien des quantenmechanischen und des klassischen Zustands identisch sind. In der Basis der Photonenzahlzustände ist der kohärente Zustand gegeben durch

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (3.18)$$

wobei α der Eigenwert des Zustands $|\alpha\rangle$ bezüglich des Vernichtungsoperators ist (vgl. [MS99, Seite 335]). Dies führt zur Photonenstatistik der kohärenten Zustände:

$$P_n^{ko} = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (3.19)$$

die einer Poisson-Verteilung entspricht (vgl. Abb. 3.2, S. 24 und [MW95, Seite 23]). Das Charakteristische an dieser Verteilung ist der Erwartungswert von $|\alpha|^2$.

THERMISCHES LICHT

Thermisches Licht ist das am häufigsten in der Natur vorkommende Licht, z.B. die Emission von Schwarzkörperstrahlern (Strahlern im thermischen Gleichgewicht). Auch die Emission eines Lasersystems unterhalb der Laserschwelle ist thermisch. Der zugehörige (kanonische) Dichteoperator des durch Gl. (2.6), S. 5 beschriebenen Systems ist gegeben durch

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Sp\{e^{-\beta H}\}} = \frac{e^{-\beta \hbar \sum_n \Omega_n b_n^\dagger b_n}}{Sp\{e^{-\beta \hbar \sum_n \Omega_n b_n^\dagger b_n}\}}, \quad (3.20)$$

wobei $\beta = \frac{1}{k_B T}$ mit der Boltzmannkonstanten k_B und der Temperatur T und $Sp\{A\}$ die Spur von A ist. Das elektromagnetische Feld wird darin durch ein Ensemble harmonischer Oszillatoren der Frequenzen Ω_n beschrieben. In der Basis der Photonenzahlzustände ist der Dichteoperator für thermisches Licht gegeben durch

$$\rho = \sum_{nm} \rho_{nm} |n\rangle \langle m| \quad \text{mit} \quad \rho_{nm} = \frac{\langle n | e^{-\beta \hbar \sum_n \Omega_n b_n^\dagger b_n} | m \rangle}{\sum_n \langle n | e^{-\beta \hbar \sum_n \Omega_n b_n^\dagger b_n} | n \rangle} = e^{-\beta \hbar \Omega n} (1 - e^{-\beta \hbar \Omega}) \delta_{nm}. \quad (3.21)$$

Die Hauptdiagonalelemente ρ_{nn} beschreiben die Wahrscheinlichkeit P_n , dass die Mode n Photonen enthält. Dadurch ergibt sich die thermische Photonenstatistik (vgl. Abb. 3.2 und [MW95, Seite 660]):

$$P_n^{th} = e^{-\beta \hbar \Omega n} (1 - e^{-\beta \hbar \Omega}) \quad (3.22)$$

und über $\langle n \rangle = \sum_n n P_n$ die zu erwartende Bose-Einstein-Verteilung. Das Charakteristische an der thermischen Verteilung ist das Maximum der Kurve bei $n = 0$.

SUB- UND SUPER-POISSONISCHES LICHT

Sub- und superpoissonisches Licht gehört zu den nichtklassischen Lichtarten. Das Licht eines Einatom-Emitters ist durch die sub-poissonische Photonenstatistik charakterisiert. Das Charakteristische an diesem Emitter ist, dass der Einatom-Emitter nach der Emission eines Photons nicht sofort ein nächstes Photon emittieren kann, sondern erst wieder angeregt werden muss. Dies drückt sich in der Photonenstatistik darin aus, dass direkt nach der Detektion eines Photons die Wahrscheinlichkeit, ein anderes Photon zu detektieren, Null ist. Die Zustände dieses Lichtes können zum Beispiel die reinen Fockzustände $|n\rangle$ sein, die Zustände fester Photonenzahl. Die zugehörige Statistik ist dann ein Kronecker-Delta zu einer festen Photonenzahl: $\delta_{n=\langle n \rangle}$, vgl. Abb. 3.2. Dies ist der Extremfall einer Verteilung, die schmäler als die poissonische Verteilung ist. Eine allgemeine Verteilung kann also für sub-poissonisches Licht nicht angegeben werden, da sie verschiedene Formen annehmen kann.

Unter super-poissonischem Licht versteht man Licht mit einer Verteilung zwischen der Bose-Einstein-Verteilung und der Poisson-Verteilung, also Licht im Übergang zwischen nichtlasendem und lasendem Zustand. Die zugehörige Verteilung ist wie beim sub-poissonischem Licht nicht allgemein darstellbar, sondern kann verschiedene Verteilungsformen annehmen.

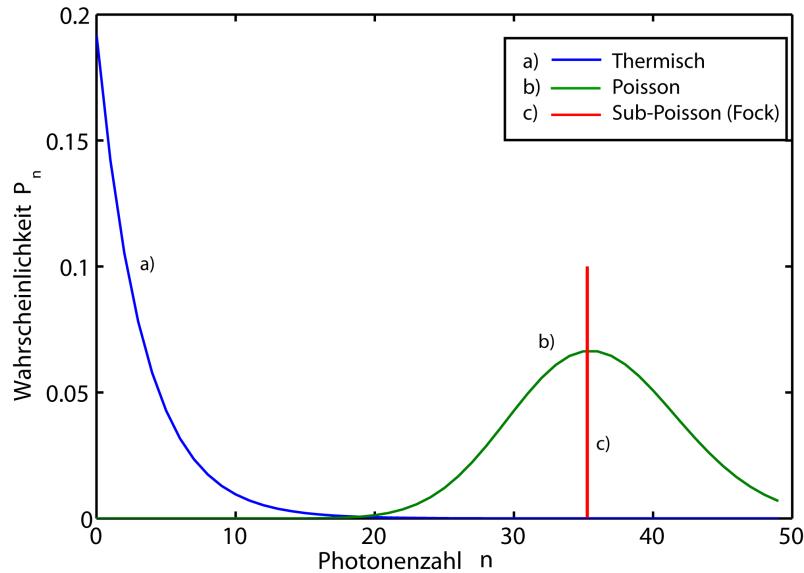


Abbildung 3.2: Qualitative Darstellung der Photonenstatistik für a) thermisches b) kohärentes und c) ein Beispiel für sub-poissonisches Licht.

3.1.3 PHOTONENBUNCHING UND -ANTIBUNCHING

Für die oben genannten Lichtarten zeigt sich bei Betrachtung der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit τ als allgemeines Verhalten, dass alle Zusammensetzungen von Licht (thermisch, poissonisch, sub-poissonisch, super-poissonisch) mit steigender Verzögerungszeit τ ihre Korrelation verlieren und

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g^{(2)}(\tau) = 1 \quad (3.23)$$

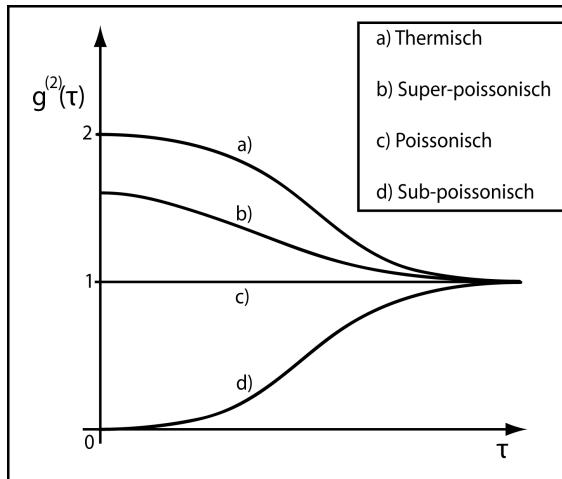


Abbildung 3.3: Mögliche qualitative Verläufe der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit τ . Für große τ werden alle Verteilungen unkorreliert, nehmen also den Wert 1 an (vgl. [AGS66]). Dargestellt sind a) thermisches Licht, b) super-poissonisches Licht mit Bunching, c) poissonisches Licht und d) sub-poissonisches Licht mit Antibunching.

gilt (vgl. Abb. 3.3): wenn der Laufzeitunterschied im Strahlteilerexperiment sehr groß ist, kann keine Korrelation mehr festgestellt werden. Erste Informationen über die Zusammensetzung des im System vorliegenden Lichtfeldes sind in $g^{(2)}(\tau = 0)$ enthalten. Dies ist im stationären Zustand unabhängig von t und kann dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau = 0) &= \frac{\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle}{\langle b^\dagger b \rangle^2} = \frac{\langle b^\dagger b b^\dagger b \rangle - \langle b^\dagger b \rangle^2}{\langle b^\dagger b \rangle^2} \\ &= \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei in der ersten Zeile die Kommutatorrelation $[b, b^\dagger] = 1$ benutzt wird. Die zweite Zeile folgt aus der Wirkung der Photonenerzeuger und -vernichter auf die Lichtzustände (vgl. Gl. (2.8), S. 5). Der Zusammenhang zur jeweiligen Photonenstatistik ist

$$g^{(2)}(\tau = 0) = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle^2} = \frac{\sum_n n^2 p_n - \sum_n n p_n}{(\sum_n n p_n)^2}, \quad (3.25)$$

wobei $\langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 p_n$ und $\langle n \rangle = \sum_n n p_n$ verwendet wird. Ist also $g^{(2)}(\tau = 0)$ bekannt, so kann die Art der Photonenstatistik und damit die Zusammensetzung des Lichtfeldes der Emission eines Lasers angegeben werden. In Abb. 3.3, S. 25 wird deutlich, dass $g^{(2)}(\tau = 0)$ nur positive Werte annimmt. Es ist:

$$g^{(2)}(0) = \begin{cases} 2 & \text{für thermisches Licht,} \\ \in (1, 2] & \text{für super-poissonisches Licht,} \\ 1 & \text{für poissonisches Licht,} \\ \in (0, 1] & \text{für sub-poissonisches Licht,} \end{cases} \quad (3.26)$$

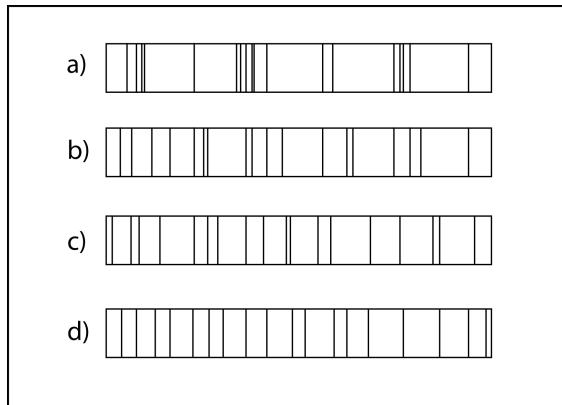


Abbildung 3.4: Photonenbunching und -antibunching: a) starkes Bunching (thermisches Licht), b) Zufallsverteilung (poissonisches Licht), c) schwaches Antibunching, d) starkes Antibunching. Dargestellt ist das Auftreffen von Photonen auf einen Detektor, aufgetragen gegen eine beliebige Zeitskala.

vgl. [Lou03, Seite 248]. Anhand des Wertes der Korrelationsfunktion ohne Zeitverzögerung $g^{(2)}(0)$ kann also die Zusammensetzung eines vorliegenden Lichtfeldes aus thermischen und kohärenten Anteilen abgelesen werden.

Wird der „zeitliche Verlauf“ der verschiedenen zusammengesetzten Lichtfeldern gemessen, also das Auftreffen von einzelnen Photonen auf einen Detektor, so kann ein erstaunliches Phänomen festgestellt werden: Bei thermischem Licht tritt eine Art von Photonenhäufung auf in dem Sinne, dass die Wahrscheinlichkeit ein Photon zu detektieren sehr groß ist, wenn gerade ein anderes Photon detektiert wurde. Die Wahrscheinlichkeit, ein Photon zu detektieren, wenn kein anderes Photon zuvor gemessen wurde, ist klein. Die Lichtquanten treten also in Bündeln (englisch: bunches) auf. Daher wird dieser Effekt „Bunching“ genannt (vgl. [MW95, Seite 714]). Bei kohärentem Licht ist diese Eigenschaft aufgehoben, das Auftreffen von Photonen auf den Detektor ist zufällig verteilt. Hier tritt also kein Bunching auf. Bei Licht mit sub-poissonischer und super-poissonischer Statistik kann sowohl Bunching als auch der gegenteilige Effekt auftreten: die Wahrscheinlichkeit, direkt nach der Detektion eines Photons ein weiteres Photon zu messen, ist geringer als bei kohärentem Licht. Die Lichtquanten treten zeitlich voneinander getrennt auf (vgl. [Seite 69][Per91]). Der Effekt wird als „Antibunching“ bezeichnet[‡]. Das hier beschriebene Bunching bzw. Antibunching ist in Abb. 3.4 veranschaulicht. Zu sehen ist eine beliebige Zeitachse, die Striche symbolisieren das Auftreffen eines Photons auf einen Detektor. Anhand des in Abb. 3.3, S. 25 dargestellten qualitativen Verlaufes lässt sich somit anhand der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für den Bereich $\tau \leq \tau_c$ entscheiden, ob Bunching oder Antibunching vorliegt (vgl. [SAZ⁺99]):

$$g^{(2)}(\tau) \begin{cases} < g^{(2)}(0): \text{Bunching} \\ > g^{(2)}(0): \text{Antibunching.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Über $g^{(2)}$ hinaus lässt sich anhand der Korrelationsfunktion dritter Ordnung eine Aussage über die Kohärenz dritter Ordnung des Lichtfeldes treffen. Da der Informationsgehalt einer Korrelationsfunktion $g^{(3)}(\tau_1, \tau_2)$ gering ist, und Messungen schwer zu realisieren sind, genügt es $g^{(3)}(0, 0)$ (im Folgenden

[‡]Anschaulich entsteht das Antibunching-Verhalten bei einem einzelnen Emitter dadurch, dass nach der Emission eines Photons eine gewisse Zeit vergehen muss, bis der Emitter wieder emittieren kann, da er erst wieder angeregt werden muss.

$g^{(3)}(0)$) zu betrachten (vgl. [WGJ⁺09]). Analog zu Gleichung (3.24), S. 25 ist:

$$\begin{aligned} g^{(3)}(0) &= \frac{\langle b^\dagger b^\dagger b^\dagger b b b \rangle}{\langle b^\dagger b \rangle^3} \\ &= \frac{\langle n^3 \rangle - 3\langle n^2 \rangle + 2\langle n \rangle}{\langle n \rangle^3}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Allgemein gilt für thermisches Licht:

$$g^{(n)}(0) = n!. \quad (3.29)$$

Die Funktion $g^{(3)}(0)$ nimmt somit für Kohärenz dritter Ordnung den Wert 1 an, für thermisches Licht den Wert 6.

3.2 BERECHNUNG DER SPEKTRALEN FELDEIGENSCHAFTEN

Im vorigen Abschnitt wurde der vielfältige Zusammenhang der Korrelationen $g^{(2,3)}$ mit den statistischen Eigenschaften des Lichtfeldes erläutert. In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang dieser Größen mit den spektralen Eigenschaften durch das Wiener-Khintchine-Theorem hergestellt. Anschließend wird zur Berechnung der Korrelationen und damit der Spektren das Quanten-Regressions-Theorem vorgestellt.

3.2.1 WIENER-KHINTCHINE-THEOREM UND SPEKTREN

Das Wiener-Khintchine-Theorem beschreibt den Zusammenhang zwischen einer einem stationären Zufallsprozess zugeordneten Autokorrelationsfunktion und deren Spektrum (vgl. [Khi34]). Es besagt, dass die Fouriertransformation der Autokorrelationsfunktion, hier also zum Beispiel $g^{(1)}(\tau)$, das Spektrum des dazugehörigen Prozesses beschreibt. Da es sich bei der Korrelationsfunktion erster Ordnung um die Beschreibung des von dem Atom emittierten Feldes handelt, kann somit durch Fouriertransformation von $g^{(1)}(\tau)$ das Emissionsspektrum $S_b(\omega)$ des Lasers berechnet werden:

$$\begin{aligned} S_b(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} g^{(1)}(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle b^\dagger(t)b(t+\tau) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \langle b^\dagger(t)b(t+\tau) \rangle}{\langle n \rangle_{ss}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Darin bezeichnet $\langle n \rangle_{ss}$ den Erwartungswert der Photonenzahl im stationären Zustand ($t \rightarrow \infty$), so dass der Ausdruck nur von der Zeitdifferenz τ abhängt.

Das Emissionsspektrum bildet direkt die relevanten Energien ab, weshalb in Anlehnung an Kapitel 2.1.4 unterschiedliche Bereiche dieses Spektrums zu erwarten sind: Für Situationen ohne Licht-Materie-Kopplung besteht das Spektrum aus einer (durch Dephasing verbreiterten) Linie, für Situationen mit Licht-Materie-Kopplung aus mehreren Linien, wie die dressed states voraussagen (sogenannte Vakuum-Rabi-Struktur [CRP04], [GBM⁺93], [Rei08]). Die berechnete Form des Emissionsspektrums wird in Kapitel 5.3 dargestellt und erläutert.

Eine charakteristische Größe dieses Spektrums ist die Breite der Emissionslinie $\delta\omega$, welche ein Maß für die spektrale Güte des Lasers darstellt. Für konventionelle Laser mit vielen Atomen gilt das Ergebnis von Schawlow und Townes (siehe [ST58]) für die halbe Breite bei der Hälfte des Maximums (HWHM: Half Width at Half Maximum) der Emission als eine hinreichend gute Näherung für die minimal erreichbare Breite:

$$\delta\omega = \frac{\kappa}{2\langle n \rangle} \quad (\text{HWHM}). \quad (3.31)$$

Dieses Resultat sagt eine reziproke Abhängigkeit zwischen der Linienbreite und der mittleren Photonenzahl voraus (siehe auch [CRP04]).

Analog zu dieser Überlegung kann das Fluoreszenzspektrum $S_\sigma(\omega)$ definiert werden. Das Fluoreszenzspektrum beschreibt die Emission des Systems ohne den Einfluss des Resonators, wodurch nicht eine einzelne Mode des Feldes bevorzugt wird (vgl. Abb. 4.1, S. 34). Dies entspricht der Emission des Atoms in die Mo-

den des freien Raumes, soweit dies durch den Resonator zugelassen wird (vgl. [KK07], [LMW97])[§]. Die zugehörigen Operatoren sind die atomaren Auf- und Absteigeoperatoren σ_{\pm} , womit analog zu Gl. (3.11), S. 21 eine Korrelationsfunktion für das erste atomare Moment definiert werden kann:

$$g_{\sigma}^{(1)}(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \sigma_+(t)\sigma_-(t+\tau) \rangle}{\langle \sigma_+(t)\sigma_-(t) \rangle}. \quad (3.32)$$

Damit folgt für das Fluoreszenzspektrum:

$$\begin{aligned} S_{\sigma}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} g_{\sigma}^{(1)}(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \sigma_+(t)\sigma_-(t+\tau) \rangle}{\langle \sigma_+(t)\sigma_-(t) \rangle} d\tau. \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \sigma_+(t)\sigma_-(t+\tau) \rangle}{\langle f_{\alpha} \rangle_{ss}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Darin ist der Normierungsfaktor

$$\begin{aligned} \langle \sigma_+(t)\sigma_-(t) \rangle &= Sp\{\rho\sigma_+\sigma_-\} \\ &= \sum_{j,n} \langle j, n | \rho\sigma_+\sigma_- | j, n \rangle \\ &= \sum_n \langle \alpha, n | \rho | \alpha, n \rangle \\ &= \langle f_{\alpha} \rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

der Erwartungswert der Besetzung des oberen Niveaus, da $\sigma_+\sigma_- | j, n \rangle = \delta_{j,\alpha}$.

3.2.2 QUANTEN-REGRESSIONS-THEOREM

Das Quanten-Regressions-Theorem beschreibt die Berechnung von Erwartungswerten, welche von zwei verschiedenen Zeiten t und $t + \tau$ abhängen als Funktion von nur einer Zeit (vgl. [Lax63], Herleitung nach [Car93]). Betrachtet wird ein System S , das an ein Reservoir R gekoppelt ist. Der Hamiltonian sei H . Im Folgenden wird dies für ein System in Wechselwirkung mit einem Reservoir beschrieben. Der Dichteoperator ist $\chi(t)$, der reduzierte Dichteoperator (nach Ausspuren des Reservoirs) sei $\rho(t)$. Dieser folgt der Liouville-von-Neumann-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\rho = \mathcal{L}\rho \quad (3.35)$$

mit dem verallgemeinerten Liouville-Operator \mathcal{L} , der das Gesamtsystem $S \otimes R$ inklusive der Reservoire berücksichtigt. \mathcal{L} wirkt nicht wie normale Operatoren auf Zustände, sondern wieder auf Operatoren.

Allgemein gilt, dass der Erwartungswert einer Größe durch die Spur mit dem Dichteoperator gegeben ist, so auch für Operatorprodukte:

$$\langle O_1(t)O_2(t') \rangle = Sp_{S \otimes R} \{ \chi(0)O_1(t)O_2(t') \}. \quad (3.36)$$

[§]In der Regel wird ein eindimensionales Photonenconfinement angenommen, wie es zum Beispiel bei einem Atom zwischen zwei Spiegeln oder bei Quantenpunkten in Pillarresonatoren vorkommt. In diesem Fall erlaubt die Resonatorgeometrie nur Fluoreszenzemission zur Seite hin, nicht aber in die Richtung, welche durch die Spiegel ausgezeichnet ist.

Im Heisenbergbild genügen die Operatoren der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}O(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, O] \quad (3.37)$$

mit der formalen Lösung

$$O(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} O(0) e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \quad (3.38)$$

Ebenso gilt

$$\chi(0) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \chi(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \quad (3.39)$$

Eingesetzt in Gl. (3.36) ergibt dies unter Ausnutzung von zyklischer Vertauschung unter der Spur

$$\begin{aligned} \langle O_1(t) O_2(t') \rangle &= Sp_{S \otimes R} \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} H t} \chi(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{\frac{i}{\hbar} H t} O_1(0) e^{-\frac{i}{\hbar} H t} e^{\frac{i}{\hbar} H t'} O_2(0) e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} \right\} \\ &= Sp_{S \otimes R} \left\{ O_2(0) e^{-\frac{i}{\hbar} H(t' - t)} \chi(t) O_1(0) e^{\frac{i}{\hbar} H(t' - t)} \right\} \\ &= Sp_S \left\{ O_2(0) Sp_R \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} H(t' - t)} \chi(t) O_1(0) e^{\frac{i}{\hbar} H(t' - t)} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Der letzte Schritt ist gültig, wenn angenommen wird, dass O_2 ein Systemoperator ist, der somit nur auf dem Hilbertraum des Systems, H_S , wirkt und deswegen aus der Spur über das Reservoir herausgezogen werden kann. Es sei nun $t' \geq t$ und $\tau := t' - t$. Dann kann der Inhalt der inneren Spur umgeschrieben und umbenannt werden zu

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} \chi(t) O_1(0) e^{\frac{i}{\hbar} H \tau} := \chi_{O_1}(\tau). \quad (3.41)$$

Dieser neue Dichteoperator genügt der Gleichung

$$\frac{d}{d\tau} \chi_{O_1}(\tau) = -\frac{i}{\hbar} [H, \chi_{O_1}(\tau)] \quad (3.42)$$

mit

$$\chi_{O_1}(0) = \chi(t) O_1(0). \quad (3.43)$$

Um Systemgrößen zu berechnen, muss zunächst der Einfluss der Reservoir ausgespurt werden, um somit den reduzierten Dichteoperator zu erhalten. Wie schon oben definiert, gilt auch für diesen modifizierten Dichteoperator

$$\rho_{O_1}(\tau) = Sp_R \{ \chi_{O_1}(\tau) \}, \quad (3.44)$$

wobei

$$\rho_{O_1}(0) = Sp_R \{ \chi(t) O_1(0) \} = \rho(t) O_1(0). \quad (3.45)$$

Mit der Annahme, dass System und Reservoir faktorisieren, also dass $\chi(t) = R_0 \rho(t)$ gilt, folgt aus den Gleichungen (3.43) und (3.45)

$$\chi_{O_1}(0) = R_0 [\rho(t) O_1(0)] = R_0 \rho_{O_1}(0). \quad (3.46)$$

Damit wird der Operatorprodukt-Erwartungswert aus Gl. (3.36):

$$\begin{aligned} \langle O_1(0) O_2(\tau) \rangle &= Sp_S \{ O_2(0) Sp_R \{ \chi_{O_1}(\tau) \} \} \\ &= Sp_S \{ O_2(0) \rho_{O_1}(\tau) \}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dabei genügt das $\rho_{O_1}(\tau)$ wieder der Liouville-von-Neumann-Gleichung:

$$\frac{d}{d\tau}\rho_{O_1}(\tau) = \mathcal{L}\rho_{O_1}(\tau). \quad (3.48)$$

Um also den Erwartungswert $\langle O_1(0)O_2(\tau) \rangle$ zu berechnen, muss für jedes τ Gl. (3.47) gelöst werden. Dazu muss die τ -Dynamik von $\rho_{O_1}(\tau)$ nach Gl. (3.48) mit der Anfangsbedingung aus Gl. (3.45) berechnet werden, wobei hier das Limit $t \rightarrow \infty$, also der stationäre Zustand des Systems angenommen wird:

$$\rho(t \rightarrow \infty) := \rho_{ss}. \quad (3.49)$$

Analog zu dieser Rechnung lassen sich auch Erwartungswerte von vier Operatoren mit Zeitverschiebung τ mit Hilfe des Quanten-Regressions-Theorems berechnen. Dann gilt:

$$\langle O_1(0)O_2(\tau)O_3(\tau)O_4(0) \rangle = Sp_S \{ O_2(0)O_3(0)\rho_{O_4O_1}(\tau) \} \quad (3.50)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_{O_4O_1}(\tau) &= Sp_R \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar}H} O_4(0) \chi(t) O_1(0) e^{\frac{i}{\hbar}H} \right\} \\ &= [O_4\rho_{ss}O_1]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Für $\rho_{O_4O_1}(\tau)$ gilt analog zur obigen Darstellung die Liouville-von-Neumann-Gleichung:

$$\frac{d}{d\tau}\rho_{O_4O_1}(\tau) = \mathcal{L}\rho_{O_4O_1}. \quad (3.52)$$

3.2.3 ANWENDUNG DES QUANTEN-REGRESSIONS-THEOREMS

Mit Hilfe des Quanten-Regressions-Theorems können nun die Gleichungen zur Berechnung der Erwartungswerte der Korrelationsfunktionen ausgeschrieben werden. Für $g^{(1)}(\tau)$ sind $O_1 = b^\dagger$ und $O_2 = b$ die Photonenerzeuger und -vernichter. Also ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} g^{(1)}(t, \tau) &= \frac{\langle b^\dagger(t)b(t+\tau) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle} \\ &= \frac{Sp_S \{ b [\rho_{ss}b^\dagger](\tau) \}}{\langle b^\dagger(t \rightarrow \infty)b(t \rightarrow \infty) \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle n \rangle_{ss}} \sum_{j,n} \langle j, n | b \rho_{b^\dagger}(\tau) | j, n \rangle \\ &= \frac{1}{\langle n \rangle_{ss}} \sum_{j,n} \sqrt{n+1} \langle j, n+1 | \rho_{b^\dagger}(\tau) | j, n \rangle. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dabei gilt für die Matrix $\rho_{b^\dagger}(\tau)$ die Bewegungsgleichung (2.64).

Analog lässt sich $g_\sigma^{(1)}(\tau)$ berechnen, wobei $O_1 = \sigma_+$ und $O_2 = \sigma_-$ gilt:

$$\begin{aligned}
 g_\sigma^{(1)}(t, \tau) &= \frac{\langle \sigma_+(t)\sigma_-(t+\tau) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle} \\
 &= \frac{Sp_S \{ \sigma_- [\rho_{ss}\sigma_+] (\tau) \}}{\langle \sigma_+(t \rightarrow \infty)\sigma_-(t \rightarrow \infty) \rangle} \\
 &= \frac{1}{\langle f_\alpha \rangle_{ss}} \sum_{j,n} \langle j, n | \sigma_- \rho_{\sigma_+}(\tau) | j, n \rangle \\
 &= \frac{1}{\langle f_\alpha \rangle_{ss}} \sum_n \langle \alpha, n | \rho_{\sigma_+}(\tau) | \beta, n \rangle. \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung von $g^{(2)}(\tau)$ gilt analog unter Verwendung des Quanten-Regressions-Theorems für Erwartungswerte von vier Operatoren:

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t+\tau)b(t+\tau)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t)b(t)b(t) \rangle} \\
 &= \frac{Sp_S \{ b^\dagger b [b\rho_{ss}b^\dagger] (\tau) \}}{\langle b^\dagger(t \rightarrow \infty)b^\dagger(t \rightarrow \infty)b(t \rightarrow \infty)b(t \rightarrow \infty) \rangle} \\
 &= \frac{1}{\langle n \rangle_{ss}^2} \sum_{j,n} \langle j, n | b^\dagger b \rho_{bb^\dagger}(\tau) | j, n \rangle \\
 &= \frac{1}{\langle n \rangle_{ss}^2} \sum_{j,n} n \langle j, n | \rho_{bb^\dagger}(\tau) | j, n \rangle. \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

KAPITEL 4

MODELLSYSTEME FÜR EIN-ATOM-LASER

Zur Behandlung des Ein-Atom-Lasers wurden in den vorherigen Kapiteln alle notwendigen Teile eingeführt. Im zweiten Kapitel wurde das Lichtfeld einer Resonatormode quantisiert und dessen Wechselwirkung mit einem Atom im Resonator vorgestellt. Um Bewegungsgleichungen für das System aufzustellen, wurde der Dichtematrixformalismus eingeführt. In diesem Formalismus wird die Wechselwirkung des Systems aus Atom, Resonator und einer quantisierten Mode des elektromagnetischen Feldes mit der Umgebung durch die Ankopplung von Reservoirn berücksichtigt, in dem die Bewegungsgleichung der Dichtematrix erweitert wird. Im dritten Kapitel wurde der theoretische Hintergrund für die Berechnung und Interpretation der statistischen und spektralen Eigenschaften des vom atomaren System emittierten Lichtes vorgestellt. In diesem Kapitel nun werden die vorgestellten Teile des Ein-Atom-Lasers zusammen betrachtet.

Zunächst wird der einfachste Fall vorgestellt, der schon ausführlich behandelte Zwei-Niveau-Ein-Atom-Laser. Dieses System ist stark vereinfacht und kommt in der Natur nicht vor*. Trotzdem eignet sich dieses System aufgrund der einfachen Struktur gut als erstes Modell zur Untersuchung eines einfachen Lasersystems. Weiterhin kann das Zwei-Niveau-System als Grenzfall eines realisierbaren Drei-Niveau-Systems mit den Energieniveaus $|1\rangle$ bis $|3\rangle$, Dipolkopplung zwischen den Niveaus $|1\rangle$ und $|2\rangle$ und Pumpen zwischen den Niveaus $|1\rangle$ und $|3\rangle$ angesehen werden, solange die Relaxationsrate γ_{32} von $|3\rangle$ nach $|2\rangle$ hinreichend schnell gegenüber den übrigen Raten ($g, \kappa, \gamma_{21}, P$) ist (so dass eine adiabatische Elimination des Übergangs von $|3\rangle$ nach $|2\rangle$ gerechtfertigt ist, vgl. z.B. [Seite 3273][JGC⁺99]).

Nach der Behandlung des Zwei-Niveau-Ein-Atom-Lasers wird das System realistischer gestaltet und um zwei Energieniveaus erweitert, so dass ein Vier-Niveau-Ein-Atom-Laser beschrieben wird (wie z.B. in [MBBB03]). Diese Erweiterung berücksichtigt durch die weiteren Energieniveaus mehr mikroskopische Details und ist deswegen vorzuziehen. Zur Behandlung dieses erweiterten Systems werden zunächst die entsprechenden Bewegungsgleichungen erweitert und die Unterschiede zum Zwei-Niveau-System erläutert.

Für beide Systeme wird jeweils eine Diskussion zum Kopplungsregime, welches beschreibt ob Dipol-Kopplung oder Relaxation im System dominiert, sowie zum β -Faktor, welcher das Verhältnis von Emission in die Lasermode zur Gesamtemission angibt, angeschlossen.

*Die für Laseraktivität benötigte Besetzungsinvolution (das Elektron besitzt eine höhere Aufenthaltswahrscheinlichkeit im angeregten Zustand als im Grundzustand: $f_\alpha - f_\beta > 0$) kann aufgrund der Boltzmannverteilung der Besetzungscheinlichkeit der Zustände in der Natur nicht realisiert werden. Um Besetzungsinvolution zu realisieren werden mindestens drei Energieniveaus benötigt.

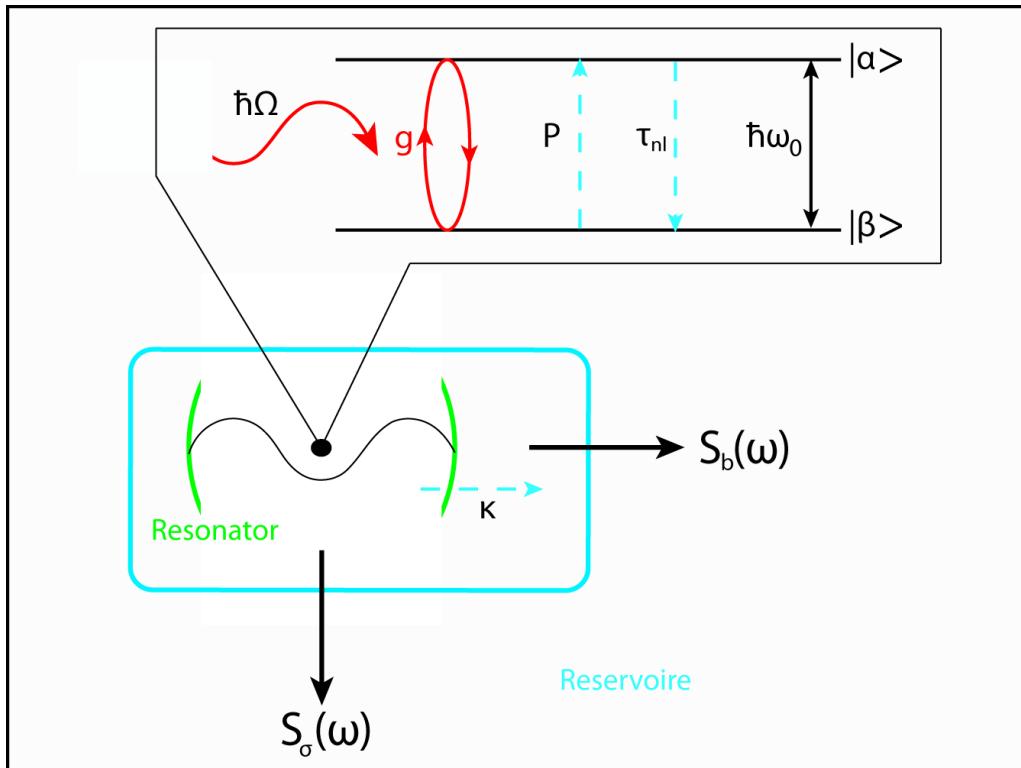


Abbildung 4.1: Darstellung des betrachteten Gesamtsystems aus atomarem Zwei-Niveau-System, einer einzelnen Mode des elektromagnetischen Feldes, sowie den drei Reservoiren für Resonatorverluste (κ), Emission in nicht-lasende Moden (τ_{nl}) und den Pumpprozess (P). $S_b(\omega)$ bezeichnet das Emissionsspektrum, $S_\sigma(\omega)$ das Fluoreszenzspektrum. Weitere Erläuterungen im Text.

4.1 ZWEI-NIVEAU-EIN-ATOM-LASER

Das betrachtete Gesamtsystem eines Zwei-Niveau-Ein-Atom-Lasers ist in Abb. 4.1, S. 34 dargestellt. Die Abbildung zeigt im linken unteren Teil das Gesamtsystem, darüber eine Ausschnittsvergrößerung des atomaren Systems. Das Gesamtsystem besteht aus einem einzelnen Atom (schwarz) mit einem Elektron, welches sich in einem Resonator (grün) befindet. Das Atom kann über das elektromagnetische Feld mit dem Resonator wechselwirken, beide wiederum wechselwirken mit der Umgebung, was über die Ankopplung geeigneter Reservoir (türkis) modelliert wird. Das atomare System (Vergrößerung) besteht hier aus zwei Energieniveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ mit der Energiedifferenz $\hbar\omega$, welche per Dipolkopplung mit Kopplungskonstante g mit einer Mode des elektromagnetischen Feldes der Energie $\hbar\Omega$ wechselwirken (rot). Diese Kopplung bewirkt, dass ein Elektron auf dem Energieniveau $|\beta\rangle$ durch Absorption eines Photons auf das Energieniveau $|\alpha\rangle$ angehoben werden kann bzw. durch Emission eines Photons von $|\alpha\rangle$ nach $|\beta\rangle$ relaxieren kann. Um den Einfluss der Umgebung auf dieses System miteinzubeziehen, werden für die durch die Interaktion des Systems mit der Umgebung auftretenden Prozesse geeignete Reservoir verwendet (türkis). So wird der Prozess berücksichtigt, dass Photonen mit einer bestimmten Verlustrate κ den Resonator verlassen, und sich somit die mittlere Photonenzahl im Resonator verringert. Weiterhin ist berücksichtigt, dass das Elektron bei der Relaxation mit einer Verlustrate $\frac{1}{\tau_{nl}}$ in andere Moden als die Lasermode ω des elektromagnetischen Feldes emittiert. Als essenzielles Merkmal eines Lasersystems ist zusätzlich das (inkohärente) Zuführen von Energie durch eine Energiepumpe mit einer Rate P durch ein Reservoir modelliert, was bewirkt, dass

das Elektron in den angeregten Zustand $|\alpha\rangle$ angehoben wird. Bei der Darstellung des Gesamtsystems sind weiterhin die Spektren $S_b(\omega)$ und $S_\sigma(\omega)$ angegeben. Ersteres ist das Emissionsspektrum, also das Spektrum des elektromagnetischen Feldes, welches durch die Resonatorspiegel emittiert wird. Letzteres ist das Fluoreszenzspektrum, welches aus den Seiten des Resonators emittiert wird.

4.1.1 DEPHASIERUNG UND KOPPLUNGSREGIMES

Der Begriff Dephasierung beschreibt das Zerfallen der Kohärenz eines Systems mit der Zeit durch Dissipationsprozesse. In der Dichtematrix ist das Dephasieren der Zerfall der Nebendiagonalelemente, ausgedrückt durch die Zerfallsrate in die Lasermode $\frac{1}{\tau}$. Abhängig von der Stärke der Dephasierung können Bereiche unterschieden werden, in denen sich die effektive Licht-Materie-Kopplung stark unterscheidet. Dafür wird ein dimensionsloser Kopplungsparameter K eingeführt, an dem abgelesen werden kann, ob sich das System im Regime starker oder schwacher Kopplung befindet.

DEPHASIERUNG IN DER DICHTEMATRIX

In der vollen Dichtematrix kann die Dephasierung nur näherungsweise analytisch beschrieben werden, da unter Berücksichtigung aller Verlustprozesse keine geschlossenen Gleichungen für die Hauptdiagonalelemente entstehen. Trotzdem kann mittels der sogenannten adiabatischen Eliminierung zumindest für den stationären Fall eine Abschätzung vorgenommen werden. Die adiabatische Eliminierung nimmt die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix (Gl. (2.67), S. 18) als konstant an, was im stationären Fall exakt ist. Um geschlossene Gleichungen für die Diagonalelemente der Dichtematrix zu erhalten, muss der Term $\propto \kappa$ in den Nebendiagonalelementen der Dichtematrix gesondert behandelt werden, da er von dem jeweils nächsthöheren Jaynes-Cummings-Block abhängt. Die Dephasierung durch die Resonatorverluste kann im Allgemeinen nicht als klein gegen die anderen Dephasierungsmechanismen angesehen (und damit 0 gesetzt) werden und hängt sogar von der Photonenzahl n ab. Um trotzdem geschlossene Gleichungen zu erhalten, wird sie als konstanter Term $\frac{\kappa}{2} \rho_{\alpha n, \beta n+1}$ abgeschätzt. Mit dieser Annahme entsteht für den Zerfall der Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix in die lasende Mode die Rate (vgl. [MS92], [GWLJ07] und für eine Herleitung den Anhang, S. 73)

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{\Gamma}{(\omega - \Omega)^2 + \Gamma^2} \quad (4.1)$$

$$= \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\Gamma}, \quad (4.2)$$

mit der Dephasierung

$$\Gamma = \frac{P}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}} + \frac{\kappa}{2}. \quad (4.3)$$

Gl. (4.2) gilt dabei für den Resonanzfall $\delta = \omega - \Omega = 0$. An Γ ist abzulesen, dass auch die Pumprate einen dephasierenden Einfluss auf das System hat; für große Pumpraten wird diese Pumpdephasierung sogar dominant und verhindert das Einschalten des Lasers. Dieses Verhalten wird „Quenching“ genannt. Es tritt in (theoretischen) Zwei- und Drei-Niveau-Systemen auf, in denen ein Niveau des Laserübergangs inkohärent gepumpt wird. Dadurch zerstört das Pumpen für große Pumpraten die Kohärenz zwischen den Laserniveaus und verhindert so die Emission, so dass ein solcher Laser durch zu starkes Pumpen „ausgedrückt“ wird (vgl. [MS92], [ZRSB98], [JGC⁺99]). Anschaulich entspricht dies dem Fall, dass so schnell gepumpt wird, dass das atomare System im oberen Laserniveau gefangen bleibt und keine Übergänge mehr vollziehen kann.

KOPPLUNGSREGIMES

Die effektive Stärke der Licht-Materie-Kopplung ist nicht nur durch die Dipolkopplung g des Jaynes-Cummings-Hamiltonians bestimmt, welche Kohärenz zwischen den Laserniveaus generiert, sondern hängt auch von der Stärke des Dephasings Γ ab, welche diese Kohärenz dämpft. Das Verhalten des Systems ist bestimmt durch das Verhältnis dieser beiden Größen. Um dieses Verhältnis zu quantifizieren, wird der dimensionslose Kopplungsparameter

$$K = \frac{g}{\hbar} \frac{\Gamma}{|\delta|^2 + \Gamma^2} \quad (4.4)$$

$$= \frac{g}{\hbar} \frac{1}{\frac{P}{2} + \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}}} \quad (4.5)$$

eingeführt, wobei Gl. (4.5) für den Fall $\delta = 0$ gilt. In Parameterbereichen, in denen die Dipolkopplung das Dephasing überwiegt, also für $K \gg 1$, liegt starke Kopplung vor, das System nimmt die dressed states ein und zeigt die in Abbildung 2.4, S. 10 dargestellte Aufspaltung der Energieniveaus (vgl. [LMW97]). In Parameterbereichen mit $K \ll 1$, in dem also das Dephasing die Dipolkopplung überwiegt, liegt schwache Kopplung vor und das System nimmt die ungestörten Zustände an. Starkes Dephasing zerstört also die Licht-Materie-Kopplung, wobei $K \gg 1$ bzw. $K \ll 1$ grobe Abschätzungen für die entsprechenden Bereiche sind. Gewöhnliche Laser mit vielen Emittoren agieren im Regime schwacher Kopplung, wobei viele Atome und Photonen notwendig sind, um stimulierte Emission zu erzeugen. Der Einfluss einzelner Photonen ist in diesem Fall vernachlässigbar. Ein-Atom- oder Quantenpunkt-laser können auch im Regime starker Kopplung agieren, wie in naher Vergangenheit gezeigt wurde (vgl. [MBBB03]). Die Emission dieser Laser besitzt keine Schwelle und kann sub-poissonisches Licht und Antibunching zeigen und kann somit als Einzel-Photonenquelle für Quanten-Computing-Anwendungen dienen, in denen Photonen „auf Bestellung“ benötigt werden (die Einzelphotonenquelle ist umso besser, je größer das Antibunching ist, also je stärker das Verhalten $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ ausgeprägt ist, vgl. Gl. (3.27), S. 26).

4.1.2 DER β -FAKTOR

Um die Effizienz eines Lasers zu beschreiben, wird oft der sogenannte β -Faktor eingeführt:

$$\beta = \frac{\tau_{sp}}{\tau} - \frac{1}{\tau_{sp}} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{nl}}. \quad (4.6)$$

Er ist definiert als das Verhältnis der Emissionsrate in die Lasermode ($\frac{1}{\tau}$) zur totalen spontanen Rekombinationsrate ($\frac{1}{\tau_{sp}}$). Diese setzt sich aus der Summe der Emissionsraten in lasende und in nichtlasende Moden zusammen.

Wie aus Gl. (4.6) und Gl. (4.2), S. 35 deutlich wird, variiert der β -Faktor des Zwei-Niveau-Systems mit der Pumprate, die dephasierend wirkt. Aus der Definition von β kann somit schon geschlossen werden, dass der üblicherweise als für einen Laser, also für die gesamte Kennlinie, konstant angenommene β -Faktor für jeden Punkt der Kennlinie, also für jede Pumprate, verschieden ist. Die üblicherweise zum Vergleich mit Experimenten für die gesamte Kennlinie benutzten β -Werte sind also, falls als Modell ein Zwei-Niveau-System verwendet wird, gemittelte Werte $\bar{\beta}$. Die Aussage, ein Zwei-Niveau-Emitter habe „einen festen β -Wert, welcher die Effizienz kennzeichnet“, ist also so nicht tragbar, da sich die Aussage maximal auf eine mittlere Effizienz beziehen kann. Selbst eine Mittelung ist nicht leicht zu rechtfertigen, da die Variation von β allgemein nicht klein ist, wie in Abb. 4.2, S. 37 zu sehen. Hier ist der mit Gl. (4.1), S. 35 und Gl.

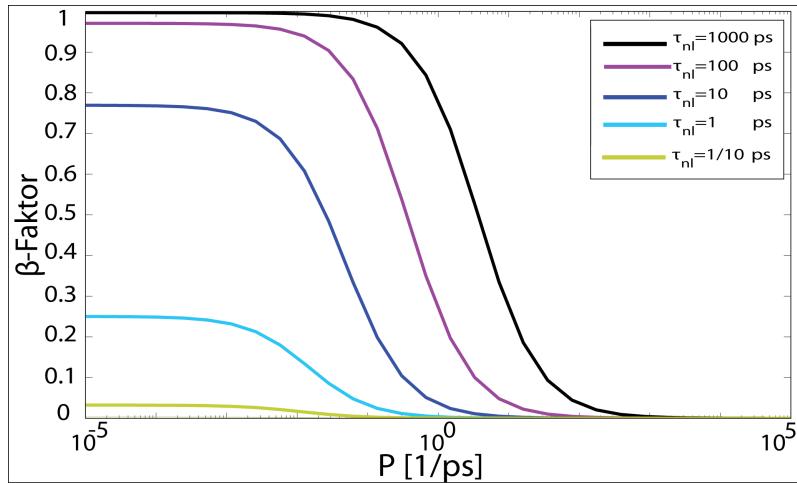


Abbildung 4.2: Der β -Faktor in Abhängigkeit der Pumprate für verschiedene Werte von τ_{nl} . Verwendet sind die Parameter $\kappa = \frac{1}{100 \text{ ps}}$ und $\frac{g}{\hbar} = 0.03 \frac{1}{\text{ps}}$.

(4.6), S. 36 berechnete β -Faktor für festes κ und verschiedene τ_{nl} gegen die Pumprate aufgetragen. Darin wird das oben beschriebene Quenching sichtbar. Die Emission geht für kleine Pumpraten fast vollständig in die Lasermode, für größere Pumpraten wird ein immer größerer Anteil der Gesamtemission in nichtlasende Moden emittiert; für sehr große Pumpraten erfolgt keine Emission mehr in die Lasermode.

Der β -Faktor kann also im Allgemeinen nicht als Konstante für eine komplette Kennlinie angenommen werden, da die Variation mit der Pumprate nicht vernachlässigbar ist, solange κ klein gegen die Dipolkopplungsstärke $\frac{g}{\hbar}$ ist (sog. „good cavity limit“).

Die Abhängigkeit des β -Faktors vom Kopplungsparameter K lautet:

$$\beta = \frac{2\tau_{nl} \frac{|g|}{\hbar} K}{1 + 2\tau_{nl} \frac{|g|}{\hbar} K} \longrightarrow \begin{cases} 1 & K \gg 1 \\ 0 & K \ll 1, \end{cases} \quad (4.7)$$

wobei die Grenzwerte für den Fall gelten, dass bei der Variation von K die Parameter τ_{nl} und g konstant bleiben. Verglichen mit dem Kopplungsparameter K zeigt sich also, dass die starke Variation von β für die verwendeten Parameter erst dann einsetzt, wenn sich das System bereits im Regime schwacher Kopplung befindet. Für das Regime starker Kopplung, in dem die Licht-Materie-Wechselwirkung das Systemverhalten bestimmt, kann β als nahezu konstant angesehen werden. Dieses Verhalten ist in Abb. 4.3, S. 38 zu sehen. Aufgetragen sind K und β gegen die Pumprate P .

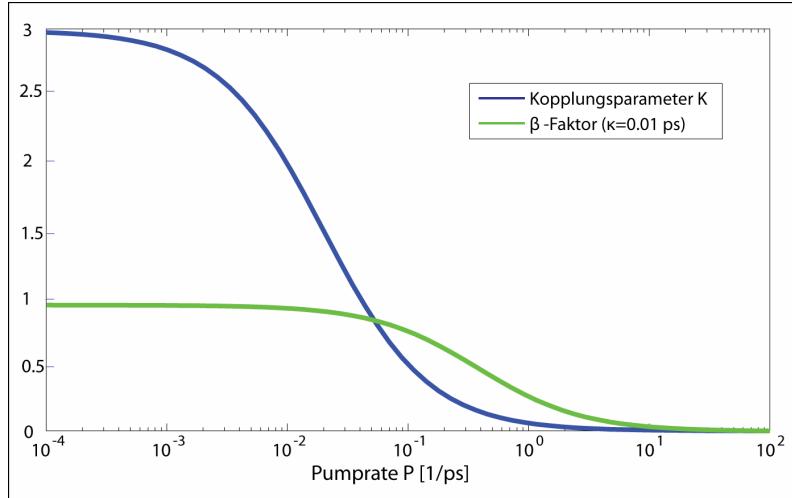


Abbildung 4.3: Der Kopplungsparameter K und der β -Faktor in Abhängigkeit der Pumprate. Die verwendeten Parameter sind $\kappa = \frac{1}{100}$ ps, $\tau_{nl} = 100$ ps und $|g| = 0.02$ meV.

4.2 VIER-NIVEAU-EIN-ATOM-LASER

Nach der ausführlichen Behandlung und vor der Darstellung der Ergebnisse der numerischen Simulation des Systems mit zwei atomaren Niveaus, welche an eine einzelne Mode des elektromagnetischen Feldes gekoppelt sind und sich in einem verlustbehafteten Resonator befinden, soll dieses System im Folgenden um zwei atomare Niveaus erweitert werden, um, wie oben erläutert, das System realistischer zu gestalten, indem mehr mikroskopische Details berücksichtigt werden. Im Folgenden werden wie beim Zwei-Niveau-System die Bewegungsgleichungen hergeleitet und die verschiedenen Systemgrößen berechnet. In Abb. 4.4, S. 39 ist das in diesem Kapitel betrachtete Vier-Niveau-System zu sehen. Die Niveaus werden von jetzt an mit $|1\rangle$ bis $|4\rangle$ bezeichnet, wobei die inneren Niveaus $|2\rangle$ und $|3\rangle$ den Niveaus $|\beta\rangle$ und $|\alpha\rangle$ des Zwei-Niveau-Systems gleichen. Sie besitzen eine Energiedifferenz von $\hbar\omega$ und koppeln per Dipolkopplung an das Feld. Der Resonator sei nah an der Resonanz mit diesen beiden Niveaus, so dass die Kopplung der zusätzlichen Niveaus mit dem Resonator vernachlässigt werden kann. Das zusätzliche Energieniveau $|1\rangle$ befindet sich energetisch unterhalb von $|2\rangle$ und dient der Entleerung dieses Niveaus. Die Ladungsträger in $|2\rangle$ können somit das innere System per spontaner Emission mit einer Rate γ_{21} verlassen und das Niveau $|1\rangle$ bevölkern. Von dort aus werden die Ladungsträger durch inkohärentes Pumpen mit einer Rate P in das zweite zusätzliche Niveau, $|4\rangle$, gehoben, welches energetisch oberhalb von $|3\rangle$ liegt. Von dort aus relaxieren die Ladungsträger durch spontane Emission mit einer Rate γ_{43} in das Niveau $|3\rangle$. Neben den betrachteten Mechanismen werden zusätzlich Verlustraten für spontane Emission in nichtlasende Moden (Rate γ_{32}) zwischen den Niveaus $|3\rangle$ und $|2\rangle$, sowie für Resonatorverluste (Rate κ) betrachtet. Die Verlustmechanismen werden wie zuvor durch Ankopplung geeigneter Reservoirs beschrieben. Durch das Pumpen zwischen den Niveaus $|1\rangle$ und $|4\rangle$ entsteht somit ein Ladungsträgerkreislauf, durch den sich in der Zeitentwicklung ein dynamisches Gleichgewicht (stationärer Zustand) einstellt, in dem die Korrelationsfunktionen und damit das Spektrum bestimmt werden können.

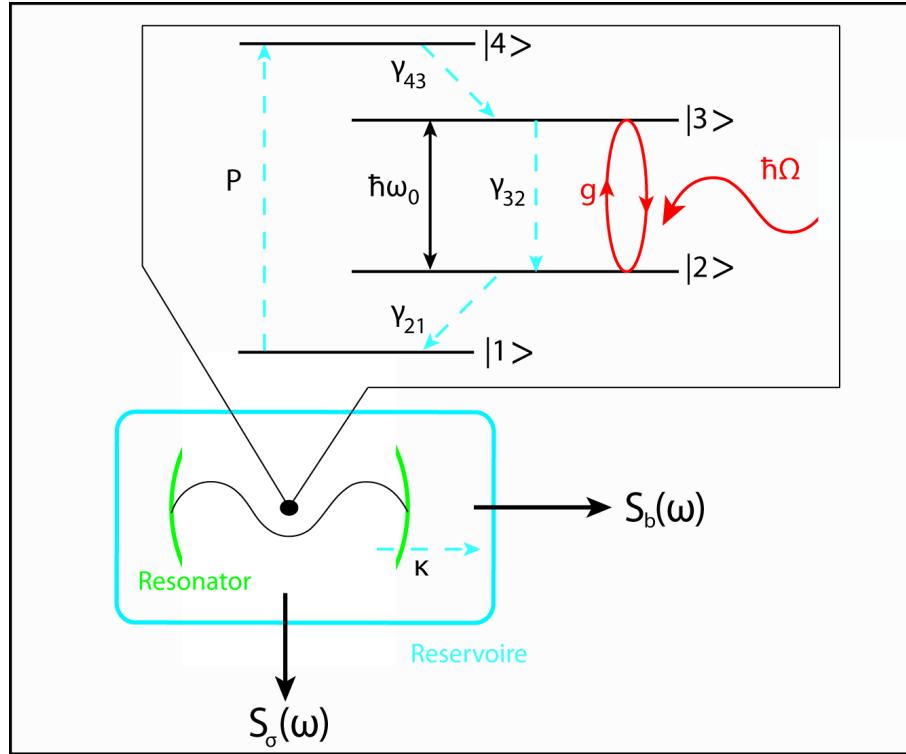


Abbildung 4.4: Darstellung des in diesem Kapitel behandelten Gesamtsystems aus Vier-Niveau-Atom und Reservoiren. Erläuterung im Text.

4.2.1 VOLLSTÄNDIGE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DES VIER-NIVEAU-SYSTEMS

Die wechselwirkungsfreien Zustände des Vier-Niveau-Systems sind analog zum Zwei-Niveau-System durch $|a, n\rangle$ gegeben, wobei nun $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ und wie gehabt $n \in \mathbb{N}$ gilt. Um das System in diesen Zuständen zu beschreiben, und die Liouville-von-Neumann-Gleichung inklusive der Reservoirankopplungen mittels Lindblad-Termen aufzustellen, müssen zunächst die atomaren Operatoren auf das erweiterte System angepasst werden, da die bisher verwendeten σ_{\pm} nur auf die Niveaus $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ wirken. Im Vier-Niveau-System müssen sie ersetzt werden durch Kombinationen von Vernichtern und Erzeugern c_k, c_k^\dagger , welche auf allen vier atomaren Niveaus $k = 1, 2, 3, 4$ wirken, für die die Antikommutatorrelation

$$[c_i, c_j^\dagger]_+ = \delta_{ij} \quad (4.8)$$

gilt, damit keine atomare Doppelbesetzung möglich ist. Damit wird ein Übergang von einem atomaren Niveau i zu einem Niveau j beschrieben durch

$$|j\rangle \langle i| = c_j^\dagger c_i. \quad (4.9)$$

Bezogen auf die Systemzustände $|a, n\rangle$ gilt:

$$c_j^\dagger c_i |a, n\rangle = \delta_{ai} |j, n\rangle \quad (4.10)$$

In der Formulierung dieser Operatoren muss also im Jaynes-Cummings-Term des Zwei-Niveau-Hamiltonians die Ersetzung $\sigma_{\pm} \rightarrow c_3^\dagger c_2, c_2^\dagger c_3$, im Lindblad-Term für den Pumpprozess die Ersetzung $\sigma_{\pm} \rightarrow$

$c_4^\dagger c_1, c_1^\dagger c_4$ vorgenommen werden. Aus dem Lindblad-Term für die Emission in nichtlasende Moden werden durch die Erweiterung auf vier Niveaus drei Terme mit den jeweiligen Raten γ_{43}, γ_{32} und γ_{21} und den entsprechenden Operatorpaaren der beteiligten Niveaus. Diese Terme lassen sich beschreiben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho|_{\text{nl}} = \sum_{ij} \frac{\gamma_{ij}}{2} \left[2c_j^\dagger c_i \rho c_i^\dagger c_j - c_i^\dagger c_j c_j^\dagger c_i - \rho c_i^\dagger c_j c_j^\dagger c_i \right] \quad (4.11)$$

mit $(i, j) \in \{(4, 3), (3, 2), (2, 1)\}$. Unter Ausnutzung der Kommutatorrelation der Erzeuger und Vernichter $[c_j, c_j^\dagger] = 1$ können die Terme mit $c_i^\dagger c_j c_j^\dagger c_i$ zu $c_i^\dagger c_i$ vereinfacht werden, solange nur ein Elektron im System vorhanden ist. In diesem Fall gilt die Identität $c_i c_j = 0$, da nur ein Elektron vernichtet werden kann. Da der Lindblad-Term zur Beschreibung der Resonatorverluste nur photonische Operatoren b^\dagger, b enthält, ändert sich dieser Term durch die Erweiterung auf vier Niveaus nicht.

Insgesamt ergibt sich somit die Liouville-von-Neumann-Gleichung des Ein-Atom-Lasers mit vier atomaren Niveaus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & - \frac{i}{\hbar} [H_{JC}, \rho] \\ & + \frac{\kappa}{2} [2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{ij} \gamma_{ij} \left[2c_j^\dagger c_i \rho c_i^\dagger c_j - c_i^\dagger c_i \rho - \rho c_i^\dagger c_i \right] \\ & + \frac{P}{2} \left[2c_4^\dagger c_1 \rho c_1^\dagger c_4 - c_1^\dagger c_1 \rho - \rho c_1^\dagger c_1 \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei der Jaynes-Cummings-Term lautet:

$$H_{JC} = g b c_3^\dagger c_2 + g^* b^\dagger c_2^\dagger c_3. \quad (4.13)$$

Die Elemente der Dichtematrix werden mit ρ_{ij}^{nm} mit $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $(n, m) \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Die Struktur der Dichtematrix in der Basis der ungestörten Zustände $|1, n\rangle \dots |4, n\rangle$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$ ist in Abb. 4.5, S. 41 dargestellt. Die Unterblöcke

$$\rho^{nm} = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{nm} & \rho_{12}^{nm} & \rho_{13}^{nm} & \rho_{14}^{nm} \\ \rho_{21}^{nm} & \rho_{22}^{nm} & \rho_{23}^{nm} & \rho_{24}^{nm} \\ \rho_{31}^{nm} & \rho_{32}^{nm} & \rho_{33}^{nm} & \rho_{34}^{nm} \\ \rho_{41}^{nm} & \rho_{42}^{nm} & \rho_{43}^{nm} & \rho_{44}^{nm} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

haben die Dimension 4×4 und sind durch die Jaynes-Cummings-Kopplung und die Lindblad-Terme wie dargestellt untereinander gekoppelt. Durch die Definition der Operatoren sind in einem Unterblock mit $n = m$ ausschließlich die Diagonalelemente ρ_{ii}^{nn} ungleich Null. Weiterhin sind nur noch die zueinander komplex konjugierten Elemente $\rho_{23}^{n+1,n}$ und $\rho_{32}^{n,n+1}$ ungleich Null, da die Blöcke ρ^{nn} und $\rho^{n+1,n+1}$ über diese Elemente koppeln. Alle übrigen Matrixelemente sind bei einem entsprechenden Anfangszustand identisch Null, da sie nicht mit den übrigen Matrixelementen koppeln. Für die verbleibenden Matrixelemente ergeben

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c|c}
 \rho_{11}^{00} & 0 & 0 & 0 & & \dots & \\
 0 & \rho_{22}^{00} & 0 & 0 & & & \\
 0 & 0 & \lceil \rho_{33}^{00} & 0 & \rho_{32}^{10} \rceil & & \\
 0 & 0 & 0 & \rho_{44}^{00} & & & m=0 \\
 & & & & & & \\
 & & \rho_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 & \\
 & \lceil \rho_{23}^{01} & 0 & \rho_{22}^{11} \rceil & 0 & 0 & \\
 & & 0 & \lceil \rho_{33}^{11} & 0 & \rho_{32}^{21} \rceil & \\
 & & 0 & 0 & \rho_{44}^{11} & & m=1 \\
 & & & & & & \\
 & & \rho_{11}^{22} & 0 & 0 & 0 & \\
 & \lceil \rho_{23}^{12} & 0 & \rho_{22}^{22} \rceil & 0 & 0 & \\
 & & 0 & \lceil \rho_{33}^{22} & 0 & \rho_{32}^{22} \rceil & \\
 & & 0 & 0 & \rho_{44}^{22} & & m=2 \\
 & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & \\
 \hline
 n=0 & & n=1 & & n=2 & &
 \end{array} \right)$$

Abbildung 4.5: Struktur der Dichtematrix mit 4 atomaren Niveaus. Die eckigen Klammern deuten die Jaynes-Cummings-Untermatrizen an, in welchen die Diagonalelemente über die rot unterlegten Übergangselemente koppeln. Die hinzugekommenen Matrixelemente, über die der Pumpprozess realisiert ist, sind grün unterlegt.

sich somit die Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{11}^{nm} = - \left(P + \frac{\kappa}{2}(n+m) \right) \rho_{11}^{nm} + \frac{\kappa}{2} \sqrt{n+1} \sqrt{m+1} \rho_{11}^{n+1,m+1} + \gamma_{21} \rho_{22}^{nm} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22}^{nm} = & - \left(\gamma_{21} + \frac{\kappa}{2}(n+m) \right) \rho_{22}^{nm} + \frac{\kappa}{2} \sqrt{n+1} \sqrt{m+1} \rho_{22}^{n+1,m+1} + \gamma_{32} \rho_{33}^{nm} \\
 & + \frac{g^*}{i\hbar} \sqrt{n} \rho_{32}^{n-1,m} - g \frac{g}{i\hbar} \sqrt{m} \rho_{32}^{n,m-1}
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{33}^{nm} = & - \left(\gamma_{32} + \frac{\kappa}{2}(n+m) \right) \rho_{33}^{nm} + \gamma_{43} \rho_{44}^{nm} + \frac{\kappa}{2} \sqrt{n+1} \sqrt{m+1} \rho_{33}^{n+1,m+1} \\
 & + \frac{g}{i\hbar} \sqrt{n+1} \rho_{23}^{n+1,m} - \frac{g^*}{i\hbar} \sqrt{m+1} \rho_{32}^{n,m+1}
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{44}^{nm} = - \left(\gamma_{43} + \frac{\kappa}{2}(n+m) \right) \rho_{44}^{nm} + \frac{\kappa}{2} \sqrt{n+1} \sqrt{m+1} \rho_{44}^{n+1,m+1} + P \rho_{11}^{nm} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{32}^{nm} = & - \left(\gamma_{21} + \gamma_{32} + \frac{\kappa}{2}(n+m) \right) \rho_{32}^{nm} + \frac{\kappa}{2} \sqrt{n+1} \sqrt{m+1} \rho_{32}^{n+1,m+1} \\
 & + \frac{g}{i\hbar} \sqrt{n+1} \rho_{22}^{n+1,m} - \frac{g^*}{i\hbar} \sqrt{m+1} \rho_{33}^{n,m-1}
 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{23}^{nm} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{32}^{n,m})^*. \quad (4.20)$$

4.2.2 DEPHASING, KOPPLUNGSREGIMES UND β -FAKTOR

Analog zur Überlegung für das Zwei-Niveau-System ist im Fall des Vier-Niveau-Systems die Rate der Emission in die Lasermode abschätzbar zu (siehe Kap. 7, S. 73):

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\Gamma} \quad (4.21)$$

mit dem Dephasing

$$\Gamma = \frac{\kappa + \gamma_{32} + \gamma_{21}}{2}. \quad (4.22)$$

Der bedeutende Unterschied zum Ergebnis des Zwei-Niveau-Systems ist der, dass der Laserübergang durch die Hinzunahme der Energieniveaus $|1\rangle$ und $|4\rangle$ für den Pumpvorgang von diesem entkoppelt ist. Dadurch hat das Pumpen keinen dephasierenden Einfluss mehr auf das System und das im Zwei-Niveau-System beobachtete Quenching tritt nicht mehr auf. In einem Ein-Elektronen-Bild entspricht diese Entkopplung der Tatsache, dass das Elektron erst nach der Emission in die Lasermode wieder gepumpt werden kann, wohingegen es im Zwei-Niveau-System durch das inkohärente Pumpen über die Laserniveaus im oberen Laserzustand gehalten und so an der Emission in die Lasermode gehindert werden kann (vergleiche hierzu auch die Diskussion in Kap. 4.1.1, S. 35).

An Stelle des Pumpens tritt nun ein anderer Prozess im Dephasing auf, die Entleerung des unteren Laserniveaus $|2\rangle$ durch spontane Emission in das untere Pumpniveau $|1\rangle$. Für schnelle Raten γ_{21} im Vergleich zur Dipolkopplung g wirkt dieser Prozess dephasierend: das Elektron wird schnell wieder aus der Laseroszillation herausgenommen und kann so nur kurz am Laserprozess teilnehmen und spontan oder stimuliert in die Lasermode emittieren.

Wie in Kap. 4.1.1 beschrieben, bestimmt das Verhältnis von Dipolkopplungsstärke g und Dephasing Γ das Kopplungsregime. Analog zu der Diskussion für das Zwei-Niveau-System ist für das erweiterte System der Kopplungsparameter K definiert als

$$\begin{aligned} K &= \frac{g}{\hbar} \frac{1}{\Gamma} \\ &= \frac{g}{\hbar \kappa + \gamma_{32} + \gamma_{21}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

und unterscheidet zwischen den Regimes starker ($K \gg 1$) und schwacher ($K \ll 1$) Kopplung. Im Vier-Niveau-System kann sich also nicht wie im Zwei-Niveau-System das Kopplungsregime während einer Kennlinie mit der Pumpstärke ändern, es treten also auch keine Aufspaltungen des Spektrums für verschiedene Pumpstärken auf (siehe Kap. 6, S. 56).

Da die Emission in die Lasermode im Vier-Niveau-System nicht mehr von der Pumpstärke abhängt, variiert auch der β -Faktor nicht mehr mit der Pumpstärke und ist somit konstant auf einer Kennlinie für einen Satz von Parametern. Der Anteil der Emission in die Lasermode an der Gesamtemission bleibt also konstant für eine Kennlinie. Die Abhängigkeit des β -Faktors vom Kopplungsparameter lautet für das Vier-Niveau-System:

$$\beta = \frac{1}{1 + \gamma_{32} \frac{\hbar}{2gK}} \longrightarrow \begin{cases} 1 & K \gg 1 \\ 0 & K \ll 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

wobei für die Rate der Emission in nichtlasende Moden $\frac{1}{\tau_{nl}}$ nun gilt:

$$\frac{1}{\tau_{nl}} = \gamma_{32}. \quad (4.25)$$

KAPITEL 5

NUMERISCHE BEHANDLUNG DES ZWEI-NIVEAU-SYSTEMS

In diesem Kapitel wird der im vorigen Kapitel beschriebene Zwei-Niveau-Ein-Atom-Laser numerisch behandelt. Die Ergebnisse werden entsprechend dargestellt sowie auftretende Effekte erläutert. Zunächst wird die Zeitentwicklung des Systems an drei festen Parametersätzen diskutiert, je einer für starke, mittlere und schwache Kopplung. Darin werden je die Entwicklung der mittleren Photonenzahl, die Photonenstatistik, das Emissions- und Fluoreszenzspektrum, sowie die Korrelationsfunktionen erster und zweiter Ordnung je mit und ohne Zeitverschiebung beschrieben. Anschließend werden Kennlinien des Systems bezüglich der Pumprate diskutiert. Darin werden die Kennlinien der mittleren Photonenzahl, der Korrelationsfunktion zweiter und dritter Ordnung sowie der Kohärenzzeit behandelt. Weiterhin werden die Kennlinien der Spektren und der Breite der Spektren behandelt.

5.1 NUMERIK

Alle Berechnungen wurden mit Matlab 7.5 durchgeführt. Die auftretenden Differentialgleichungssysteme wurden mit in Matlab implementierten Differentialgleichungslösern 4. Ordnung gelöst (ode45, ode113 oder ode15s), die auf dem Runge-Kutta-Verfahren basieren.

Um die Dichtematrix der Dimension $2n \times 2n$ berechnen zu können, muss die Matrix bei einer endlichen Photonenzahl n_{max} abgeschnitten werden, wobei n_{max} so zu wählen ist, dass das Abschneiden keinen Einfluss auf das System hat. Die Güte der Wahl kann durch Berechnen der Spur überprüft werden, welche normiert ist und somit immer Eins sein muss (es handelt sich bei der Spur um die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Atom) bzw. über die Photonenstatistik, für die $p_{n_{max}} \approx 0$ gelten muss. In den im Folgenden dargestellten Rechnungen wurden die in Tab. 5.1 dargestellten Parameter gewählt.

n_{max}	t_{max} [ps]	τ_{max} [ps]	κ [1/ps]	τ_{nl} [ps]	$\frac{g}{\hbar}$ [1/ps]
16	6000	6000	0.01	100	0.03

Tabelle 5.1: Verwendete Parameter für die Simulation des Zwei-Niveau-Ein-Atom-Lasers. n_{max} gibt dabei die maximal betrachtete Photonenzahl an, ab der die Dichtematrix abgeschnitten wurde. t_{max} bzw. τ_{max} geben an, bis zu welcher maximalen Zeit in ps die t - bzw. τ -Rechnungen durchgeführt wurden. κ und τ_{nl} sind die Verlustraten und $\frac{g}{\hbar}$ die Dipolkopplungsstärke in der Einheit 1/ps.

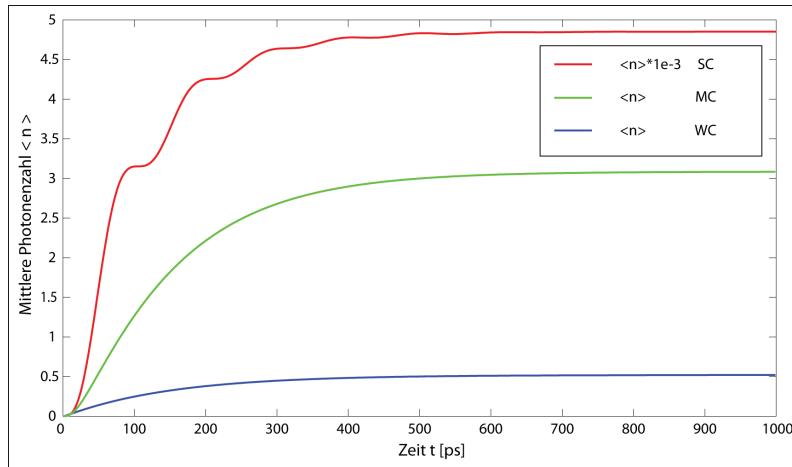


Abbildung 5.1: Zeitentwicklungen der mittleren Photonenzahl im Resonator $\langle n \rangle$ für die verschiedenen Kopplungsbereiche SC, MC und WC.

5.2 ZEITENTWICKLUNG DES SYSTEMS

Zunächst wird die Zeitentwicklung des Systems in den stationären Zustand berechnet, also die Lösung der Liouville-von-Neumann-Gleichung für die Dichtematrix inklusive aller angekoppelter Reservoir (Gl. (2.64), S. 18). Dafür wird solange in der Zeit hochgerechnet, bis sich die Systemgrößen wie Photonenstatistik, Besetzungswahrscheinlichkeiten und die mittlere Photonenzahl im Resonator $\langle n \rangle$ nicht mehr ändern. Der Anfangszustand der Simulation ist jeweils der Grundzustand des Systems: Das atomare System befindet sich im Grundzustand und es befindet sich kein Photon im Resonator. Mit Beginn der Berechnung, bei $t = 0$, wird das Pumpen eingeschaltet. Weiterhin wird Resonanz ($\delta = \Omega - \omega_0 = 0$) angenommen. Um die Entwicklung des Systems in verschiedenen Kopplungsbereichen zu vergleichen, wird die Pumpstärke P variiert, da, wie im vorigen Kapitel gezeigt, der Kopplungsparameter von der Pumprate abhängt. Somit kann das Kopplungsregime durch Wahl der Pumprate festgelegt werden. Dazu wurden

$$P = \begin{cases} 0.0001 \frac{1}{ps}: \text{starke Kopplung (SC)} \\ 0.1 \frac{1}{ps}: \text{mittlere Kopplung (MC)} \\ 1 \frac{1}{ps}: \text{schwache Kopplung (WC)}. \end{cases} \quad (5.1)$$

gewählt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in den Abbildungen 5.1 bis 5.7 dargestellt. In den Abb. 5.1 bis 5.3 sind die Zeitentwicklungen der Erwartungswerte der Photonenzahl $\langle n \rangle$, die Photonenstatistiken im stationären Zustand $P_n(n)$ sowie die Zeitentwicklungen der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung ohne Zeitverschiebung $g^{(2)}(\tau = 0)$ gegen die Zeit t aufgetragen. Dabei können mehrere, im folgenden erläuterte Trends beobachtet werden.

In Abb. 5.1 ist die nach Gl. (2.50), S. 14 berechnete Zeitentwicklung der mittleren Photonenzahl im Resonator dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die hier für das Erreichen des Regimes starker Kopplung verwendete niedrige Pumprate das System nicht in den Laserbetrieb* anregen kann, die mittlere Photonenzahl liegt bei $\langle n \rangle = 4.8 \cdot 10^{-3}$. In diesem Fall ist der Resonator praktisch leer, wodurch es keinerlei stimulierte Emission gibt. In den Regimes mittlerer und schwacher Kopplung ähnelt sich die Entwicklung von $\langle n \rangle$. In beiden

*Für Laserbetrieb ist eine mittlere Photonenzahl im Bereich um 1 nötig, da erst in diesem Bereich die einen Laser auszeichnende starke stimulierte Emission auftritt.

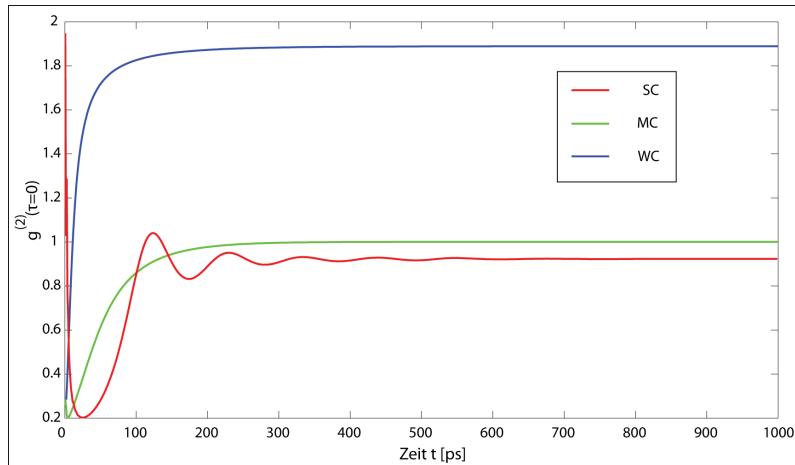


Abbildung 5.2: Zeitentwicklungen von $g^{(2)}(\tau = 0)$ für die verschiedenen Kopplungsbereiche SC, MC und WC.

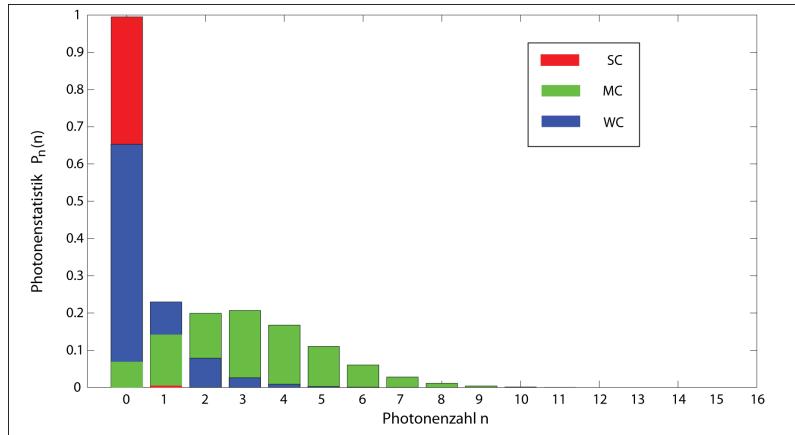


Abbildung 5.3: Photonenstatistiken $P_n(n)$ im stationären Zustand für die verschiedenen Kopplungsbereiche SC, MC und WC.

Fällen erreicht die mittlere Photonenzahl im stationären Zustand makroskopische Werte (WC: 0.5, MC: 3.1), wobei sie für mittlere Kopplung sogar größer Eins ist, was aufgrund der großen Photonenzahl im Resonator (verglichen mit der Anzahl der Systeme (ein Atom)) auf starke stimuliert Emission in die Lasermode schließen lässt. Für schwache Kopplung ist die Pumprate größer als für mittlere Kopplung, wobei sich die mittlere Photonenzahl genau entgegengesetzt verhält. Darin ist das oben beschriebene Quenching zu erkennen. Im Regime schwacher Kopplung ist die Pumprate so groß, dass sie dephasierend wirkt. Somit wird das System stärker gedämpft, was in einer kleineren mittleren Photonenzahl resultiert. Allgemein lässt sich sagen, dass der Anstieg der Entwicklung mit der Stärke der Kopplung ansteigt, wobei die bei starker Kopplung zu beobachtenden Ozillationen (Einfluss der Rabi-Oszillationen des freien Systems) bei mittlerer und schwacher Kopplung ausgedämpft sind und die Kurven somit glatt verlaufen.

In Abb. 5.2 sind die Entwicklungen von $g^{(2)}(\tau = 0)$ dargestellt (vgl. Gl. (3.24), S. 25). Auch hier ist der Einfluss der Rabi-Oszillationen im Regime starker Kopplung zu erkennen. Wichtig für die Charakterisierung des Systems sind die jeweiligen Werte im stationären Zustand. Im Regime schwacher Kopplung ist der stationäre Wert nahe bei Zwei, was indiziert, dass thermisches Licht vorliegt (vgl. Kap. 3.1.1, S. 22), welches Photonenbunching vorweist. Für mittlere Kopplung nimmt $g^{(2)}(\tau = 0)$ den Wert Eins an, das

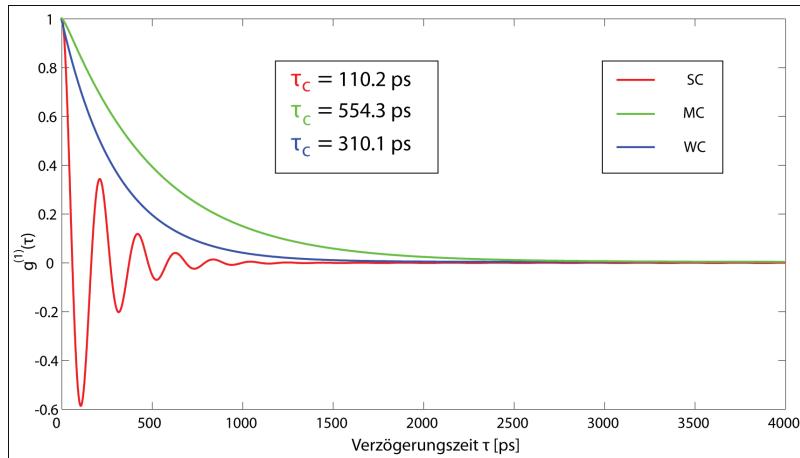


Abbildung 5.4: Darstellung der τ -Entwicklung der Korrelationsfunktionen erster Ordnung $g^{(1)}(\tau)$.

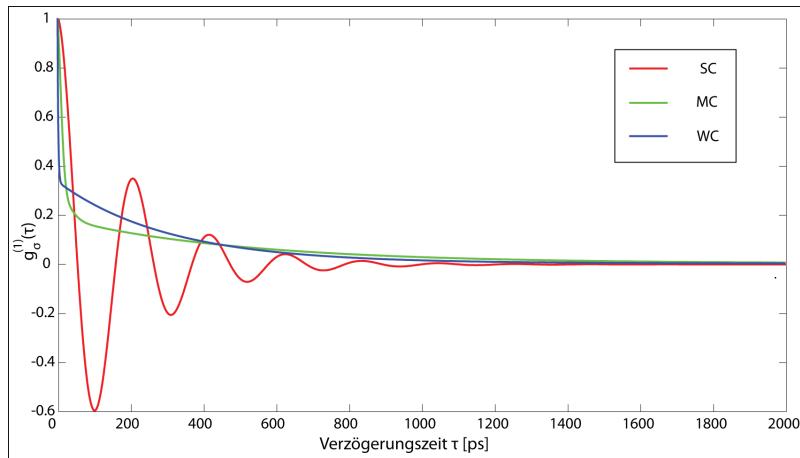


Abbildung 5.5: Darstellung der τ -Entwicklung der Korrelationsfunktionen erster Ordnung $g_\sigma^{(1)}(\tau)$.

Licht ist demnach kohärent (Kohärenz mindestens zweiter Ordnung, vgl. Kap. 3.1.1, S. 19), die Photonen werden voneinander unabhängig statistisch verteilt emittiert. Diese Emission entspricht der klassischen Laseremission. Bei starker Kopplung liegt der stationäre Wert unter Eins, was auf sub-poissonisch verteiltes Licht hinweist.

Diese Aussagen werden durch Abb. 5.3 gestützt, in der die jeweilige nach Gl. (2.49), S. 13 berechnete Photonenstatistik dargestellt ist. Für schwache Kopplung entspricht die Photonenstatistik der thermischen Verteilung, wobei das Charakteristikum das Maximum der Verteilung bei $n = 0$ ist. Bei mittlerer Kopplung entspricht die Verteilung einer Poisson-Verteilung mit Mittelwert $\langle n \rangle = 3.1$, es liegt also wie oben beschrieben Laseremission vor. Bei starker Kopplung entspricht die Verteilung fast einer δ -Funktion $\delta_{n,0}$, was dem Fockzustand $|0\rangle$ entsprechen würde. Da $g^{(2)}(\tau = 0)$ bei starker Kopplung nicht Null ist, sondern zwischen Null und Eins liegt, liegt allerdings kein reiner Fockzustand vor, was auch an der endlichen Wahrscheinlichkeit P_1 zu erkennen ist. Somit handelt es sich um sub-poissonisches Licht.

In den Abb. 5.4 bis 5.7 sind die zu 5.1 zugehörigen τ -Entwicklungen der Korrelationsfunktionen erster Ordnung sowie die sich daraus durch Fouriertransformation ergebenden Spektren dargestellt, welche mittels der Gln. (3.2.3) und (3.54), S. 31 berechnet wurden.

In Abb. 5.4 ist die Entwicklung von $g^{(1)}(\tau)$ bezüglich der Verzögerungszeit τ für die drei Kopplungsregi-

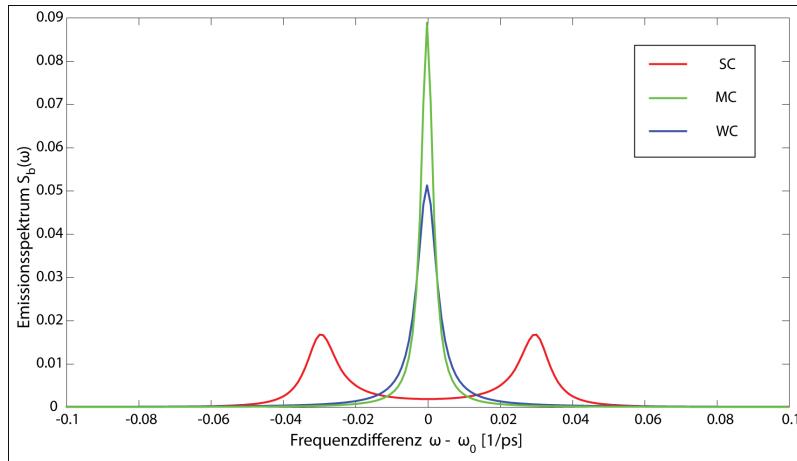


Abbildung 5.6: Darstellung des Emissionsspektrums $S_b(\omega)$.

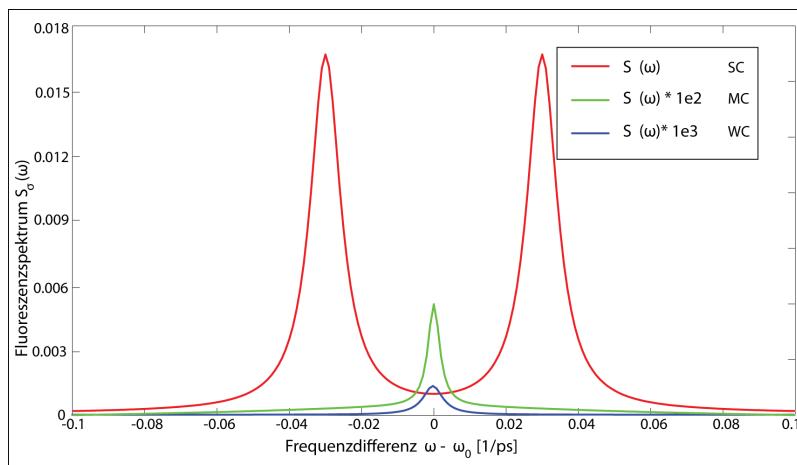


Abbildung 5.7: Darstellung des Fluoreszenzspektrums $S_\sigma(\omega)$.

mes zu sehen. Wie schon bei der Zeitentwicklung der mittleren Photonenzahl sind die Kurven von $g^{(1)}(\tau)$ für schwache und mittlere Kopplung ähnlich und verlaufen glatt. Sie sind exponentiell gedämpft, wobei die Entwicklung für schwache Kopplung stärker gedämpft ist. Auch die Kurve für starke Kopplung ist exponentiell abgedämpft, allerdings ist eine Modulation durch die Rabi-Oszillationen deutlich zu erkennen, was die Korrelationsfunktion teilweise negativ werden lässt. Dieses Vorzeichen der Korrelationsfunktion kann aber nicht gemessen werden, da, wie in Gl. (3.12), S. 21 dargestellt, im Michelson-Aufbau nur der Betrag der Korrelationsfunktion über den Kontrast gemessen werden kann. Für alle drei Kurven ist zu erkennen, dass sie für große τ gegen Null streben. Wie in Kapitel 3.1.1, S. 19 beschrieben, handelt es sich bei $g^{(1)}(\tau)$ um die Kohärenz erster Ordnung. Damit ist die Aussage dieser Tendenz, dass für große τ die Kohärenz erster Ordnung, die Interferenzfähigkeit, verloren geht, wie es schon die klassische Optik beschreibt. Ein Maß dafür, wie schnell die Interferenzfähigkeit verloren geht, ist die Kohärenzzeit τ_c . Sie ist über Gl. (3.13), S. 21 definiert und als Inset in Abb. 5.4 dargestellt. Anhand dieser Werte ist der Trend zu erkennen, dass die Kohärenzzeit umso größer ist, je größer die mittlere Photonenzahl im Resonator ist.

In Abb. 5.5, S. 46 sind die entsprechenden τ -Entwicklungen für die Korrelationsfunktionen $g_\sigma^{(1)}(\tau)$ gegen die Verzögerungszeit τ aufgetragen. Zunächst fällt auf, dass die Entwicklung für starke Kopplung derjenigen von $g^{(1)}(\tau)$ sehr ähnelt, ein genauerer Vergleich zeigt, dass $g_\sigma^{(1)}(\tau)$ ein wenig hin zu kleineren Zeiten

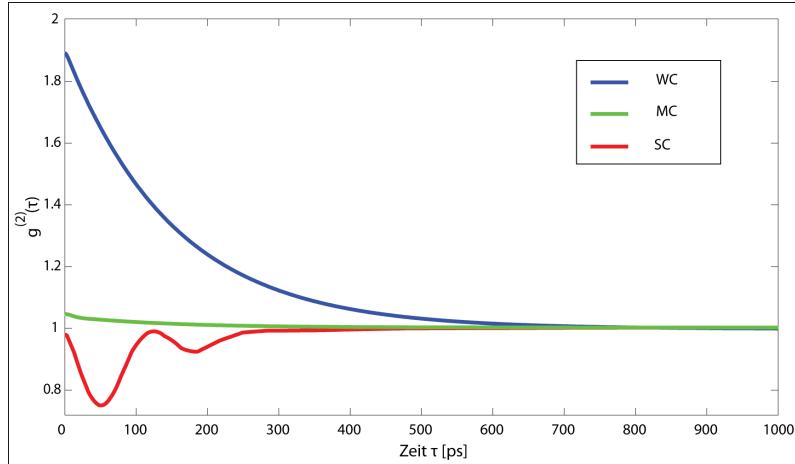


Abbildung 5.8: τ -Entwicklung der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ für die Kopplungsbereiche SC, MC und WC.

τ gegen $g^{(1)}(\tau)$ verschoben ist. Bei Betrachtung der beiden Kurven für mittlere und schwache Kopplung fallen die im Vergleich mit $g^{(1)}(\tau)$ viel stärkeren Dämpfungen und die Knicke in den Kurven für kleine τ auf.

Die Abb. 5.6, S. 47 zeigt die aus $g^{(1)}(\tau)$ durch Fouriertransformation berechneten Emissionsspektren $S_b(\omega)$. Darin ist der in Kapitel 2.1.4 beschriebene Einfluss der Kopplung zu sehen. Für starke Kopplung spaltet das Spektrum in die beiden Moden $\omega \pm R_n$ der dressed states auf, wohingegen das System für mittlere und schwache Kopplung nur die Energie des Laserübergangs ω_0 einnimmt. Wie zu erwarten beträgt die Aufspaltung der beiden Linien für starke Kopplung $\frac{2|g|}{\hbar}$, die einzelnen Peaks liegen also wegen der verschobenen Frequenzachse bei $\pm \frac{|g|}{\hbar}$. Die relativen Intensitäten der Linien bei mittlerer und schwacher Kopplung sind deutlich größer als bei starker Kopplung, sind aber alle in der selben Größenordnung. Die Emission durch die Resonatorspiegel ist also bei starker Kopplung schwach und aufgespalten, während sie bei mittlerer und schwacher Kopplung stärker und mit der Laserfrequenz ω_0 geschieht. Schon durch bloßes Hinsehen kann der Trend der abnehmenden Linienbreite mit steigender mittlerer Photonenzahl beobachtet werden. Die Linie wird also schärfer, je größer die Emission ist.

In Abb. 5.7, S. 47 sind die Fluoreszenzspektren $S_\sigma(\omega)$ dargestellt. Zunächst fällt dieselbe Aufspaltung der Linien für starke Kopplung wie in den Emissionsspektren auf. Auch hier liegen die Peaks bei $\pm \frac{|g|}{\hbar}$. Es sind aber mehrere Unterschiede zu den Emissionsspektren zu sehen. Zunächst ist bei starker Kopplung die Fluoreszenzemission in die aufgespaltenen Moden fast identisch mit der Resonatoremmission, wie schon die große Übereinstimmung der entsprechenden Korrelationsfunktionen nahelegt. Für mittlere und schwache Kopplung geschieht diese Emission in die Lasermode, allerdings mit sehr kleinen Amplituden verglichen mit der Intensität der Fluoreszenzemission bei starker Kopplung (Faktoren 10^2 bzw. 10^3). Im Regime mit Laseraktivität ($\langle n \rangle_{ss} \gtrsim 1$), welches für schwache und mittlere Kopplung erreicht wird, ist also die Fluoreszenzemission effektiv unterdrückt. Weiterhin ist bei den Fluoreszenzspektren für mittlere und schwache Kopplung ein breiter Untergrund zu erkennen, der von der starken Dämpfung der zugehörigen Korrelation im Bereich kleiner Zeiten herrührt.

In Abb. 5.8 sind die τ -Entwicklungen der Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung $g^{(2)}(\tau)$ für die drei Kopplungsregimes dargestellt. Allgemein lässt sich feststellen, dass für große Verzögerungszeiten τ alle Kurven den Wert Eins annehmen, die Korrelation also verloren geht. Dies ist anschaulich am Hanbury-Brown-Twiss-Aufbau zu verstehen: Für sehr lange Verzögerungszeiten „sehen“ sich die Photonen nicht

mehr und das Auftreffen am Detektor ist unkorreliert. In allen Kopplungsbereichen ist ein Bunching-Verhalten zu erkennen, da $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ für $\tau < \tau_c$ gilt (vgl. Gl. 3.27, S. 26). Während die Korrelationsfunktion für mittlere und schwache Kopplung bei Werten größer Eins anfangen und von dort aus stetig gegen Eins streben, befindet sich die Korrelationsfunktion für starke Kopplung unterhalb von Eins und strebt „von unten“ aus gegen Eins. Außerdem weist diese Kurve die für starke Kopplung charakteristischen Oszillationen auf, die von der Rabi-Oszillation in den Besetzungen der Laserniveaus herrühren (vgl. Kap. 2.2.3, S. 14).

5.3 KENNLINIEN

In diesem Kapitel werden nicht mehr einzelne Pumpraten verwendet, sondern Kennlinien bezüglich der Pumprate über einen weiten Parameterbereich berechnet, um das Gesamtverhalten des Systems zu untersuchen. Eine Kennlinie besteht aus den entsprechenden Werten der Systemgrößen im stationären Zustand als Funktion der Pumprate, das heißt für jede Pumprate wird die Zeitentwicklung bis in den stationären Zustand gerechnet und nur dieser letzte Wert aufgetragen.

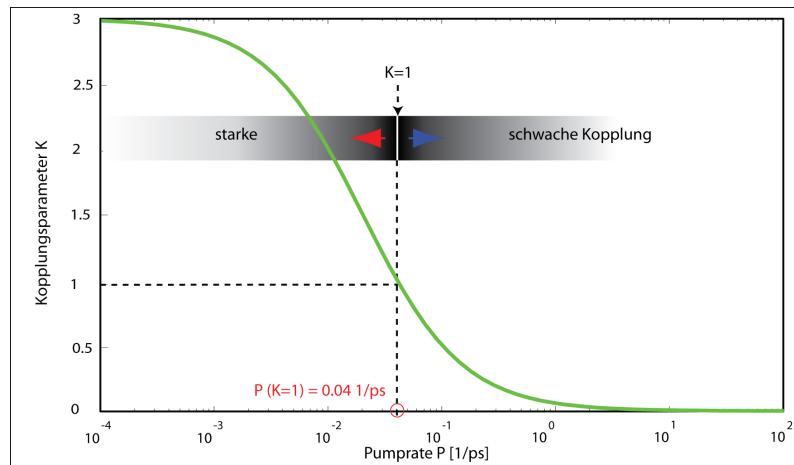


Abbildung 5.9: Darstellung der Kennlinie des Kopplungsparameters $K(P)$. Gekennzeichnet ist die Pumprate, für die $K = 1$ erreicht wird. Dadurch werden die Bereiche starker und schwacher Kopplung getrennt.

Zunächst ist in Abb. 5.9 der in Gl. (4.5), S. 36 beschriebene Kopplungsparameter K als Funktion der Pumprate zur Identifikation der Kopplungsbereiche dargestellt. Es ist zu erkennen, dass für kleine Pumpraten das Regime starker Kopplung und für große Pumpraten das Regime schwacher Kopplung erreicht wird. Zur Unterscheidung der Bereiche ist $P(K = 1)$ eingezeichnet. Daran wird deutlich, dass für mehr als die Hälfte der betrachteten Pumpraten starke Kopplung vorliegt. Der Bereich mittlerer Kopplung ist nicht genau definiert und deshalb nicht eingezeichnet. Für große und kleine Pumpraten konvergiert der Kopplungsparameter gemäß

$$K = \begin{cases} 0 & P \rightarrow \infty \\ \frac{|g|}{\hbar} \frac{1}{\frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}}} & P \rightarrow 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

In Abb. 5.10, S. 50 ist die Kennlinie der mittleren Photonenzahl im Resonator dargestellt. Zusätzlich sind die drei Parameter aus den Abb. 5.1 bis Abb. 5.7 als gestrichelte Linien eingezeichnet. Die mittlere Photonenzahl folgt zunächst einem exponentiellen Anstieg, wird dann linear und erreicht schließlich ein Maximum

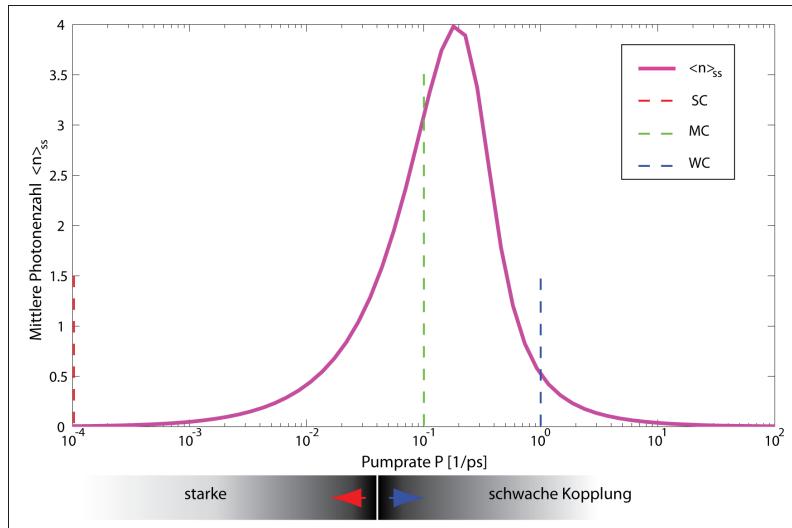


Abbildung 5.10: Darstellung der Kennlinie der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle_{ss}(P)$. Die gestrichelten Linien deuten die in den vorherigen Einzelrechnungen (Abb. 5.1-5.8) verwendeten Parameter an.

bei $\langle n \rangle_{ss} \approx 4$. Anschließend, im Regime schwacher Kopplung, wird das Dephasing dominant und drückt den Laser aus (Quenching), so dass die mittlere Photonenzahl wieder auf Null zurück geht. Anschaulich bedeutet dies, dass das System im angeregten Zustand gefangen gehalten wird und nicht emittieren kann, da die Pumprate vom unteren in den oberen Zustand zu schnell ist, als dass das System genügend Zeit zum Relaxieren hat. Dieser Abfall der mittleren Photonenzahl durch das Dephasing geht schneller als der Anstieg durch das Pumpen. Weiterhin ist das Fehlen einer Laserschwelle zu bemerken, es gibt keine Pumprate, ab der die Intensität schlagartig ansteigt. Dieses Fehlen einer Schwelle ist charakteristisch für ein System mit einem $\bar{\beta}$ -Faktor von 1 (vgl. Kap. 4.1.2, S. 36 und [RC94]). Wie in Abb. 5.10 zu erkennen ist, liegt das Erreichen des Laserbereiches schon im Regime starker Kopplung, also sollte auch eine eventuelle Laserschwelle in diesem Bereich liegen. Starke Kopplung ist aber wie in Gl. (4.7), S. 37 dargestellt (fast) gleichbedeutend mit $\bar{\beta} = 1$, was erklärt, dass im betrachteten Fall keine Schwelle vorliegt.

Abb. 5.11, S. 51 zeigt die Kennlinie der mittels Gl. (3.13), S. 21 berechneten Kohärenzzeit τ_c (durchgezogene Linie) sowie zum Vergleich die Kennlinie der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle_{ss}$ (gestrichelte Linie). Zu Beginn der Kennlinie, für kleine Pumpraten, bleibt die Kohärenzzeit konstant bei ca. 100 ps , was im Vakuum einer Kohärenzlänge von $l_c = c\tau_c = 0.03\text{ m}$ entspricht (c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Mit der anfangenden langsamen Zunahme der mittleren Photonenzahl sinkt die Kohärenzzeit leicht ab. Die dem System durch das Pumpen zugeführte Energie führt zu inkohärenter spontaner Emission, da die mittlere Photonenzahl im Resonator für kohärente, stimulierte Emission noch zu klein ist, wodurch die Kohärenzzeit der Gesamtemission verkleinert wird. Erst ab einer mittleren Photonenzahl von ca. 0.5 nimmt der Anteil der stimulierten Emission zu, was die Kohärenzzeit deutlich erhöht. Im Folgenden folgt der Verlauf der Kennlinie der Kohärenzzeit dem der mittleren Photonenzahl und steigt stark an. Kurz nachdem die mittlere Photonenzahl ihr Maximum erreicht, hat auch die Kohärenzzeit ein Maximum von $\tau_c \approx 1000\text{ ps}$, gleichbedeutend mit einer Kohärenzlänge von $l_c \approx 0.3\text{ m}$. Bei noch größeren Pumpraten wirkt sich das Dephasing auch auf die Kohärenzzeit aus. Mit leichter Verzögerung zur mittleren Photonenzahl nimmt auch die Kohärenzzeit wieder auf einen konstanten Wert ab, allerdings nicht auf ihren Ursprungswert von $\tau_c \approx 100\text{ ps}$, sondern auf einen größeren Wert von $\tau_c \approx 200\text{ ps}$. Dieser Unterschied ist damit zu erklären, dass das System bei niedrigen Pumpraten mehr innere Dynamik besitzt (Rabi-Oszillationen der Zustände

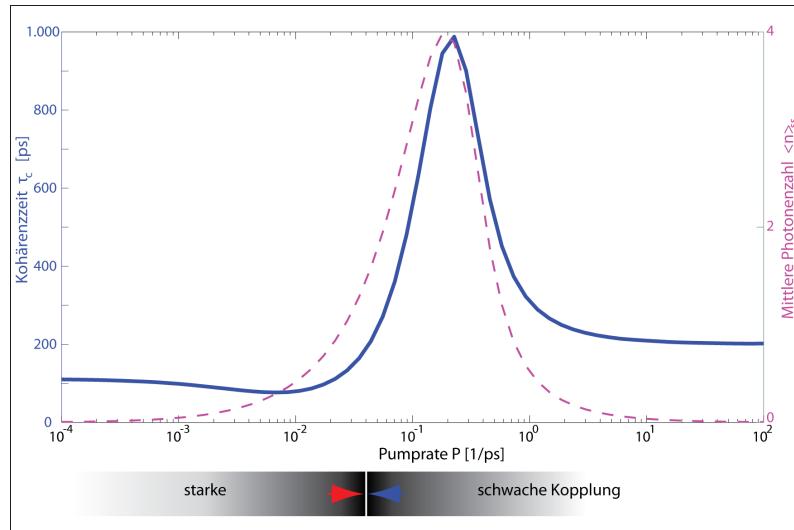


Abbildung 5.11: Darstellung der Kennlinie der Kohärenzzeit $\tau_c(P)$. Zum Vergleich ist $\langle n \rangle_{ss}$ eingezeichnet.

wegen starker Kopplung), welche die Kohärenzzeit mindert, während diese Dynamik für sehr große Pumpraten durch das starke Dephasing ausgedämpft ist (vgl. Abb. 5.4 und 5.5).

In Abb. 5.12, S. 52 sind die Kennlinien der Korrelationsfunktionen $g^{(n)}(\tau = 0)$ bis zur dritten Ordnung, über die die Kohärenz der Emission und die Photonenstatistik bzw. der Lichttyp bestimmt ist, sowie zum Vergleich abermals die Kennlinie der mittleren Photonenzahl dargestellt. Die Funktion $g^{(1)}(0)$ ist wegen der Normierung per Definition immer Eins. Die Korrelationsfunktionen $g^{(2)}(0)$ und $g^{(3)}(0)$ beschreiben jeweils ein ähnliches Verhalten. Für sehr kleine Pumpraten befinden sie sich unterhalb von Eins, es liegt also sub-poissonisches (anti-gebunchtes) Licht vor. Bemerkenswert ist der Punkt, an dem alle drei Korrelationsfunktionen den Wert Eins annehmen. Er liegt im Bereich zwischen $P = 2 \cdot 10^{-3}$ und $P = 3 \cdot 10^{-3}$. Bei dieser Pumpstärke weist die Emission also mindestens Kohärenz dritter Ordnung auf. Mit steigender Pumprate nehmen $g^{(2)}(0)$ und $g^{(3)}(0)$ langsam zu und sättigen dann auf einen Zwischenwert von $g^{(2)}(0) \approx 1.2$ bzw. $g^{(3)}(0) \approx 1.1$. Ab dem Bereich, in dem die Laseraktivität beginnt ($\langle n \rangle_{ss} \approx 1$) verhalten sich die Korrelationsfunktionen wie bei einem konventionellen Laser: Das emittierte Licht steigert mit steigender Photonenzahl, also mit steigender Intensität, seine Kohärenz, die Korrelationen $g^{(2)}(0)$ und $g^{(3)}(0)$ gehen wieder auf Eins zu. Dieses Verhalten ist bis zu einer Pumprate kurz vor dem Maximum der mittleren Photonenzahl zu beobachten. Ab dieser Pumprate überwiegt das Dephasing die Kohärenz, was sich darin ausdrückt, dass die Korrelationsfunktionen stark ansteigen, um bei großen Pumpraten einen Wert von $g^{(2)}(0) = 2$ bzw. $g^{(3)}(0) = 6$ zu erreichen. Dies bedeutet, dass die Kohärenz zerstört wird und die Photonenstatistik und damit die Emission thermisch wird und nur noch aus spontaner Emission besteht (vgl. Kap. 3.1.3, S. 24).

In der Abb. 5.13, S. 52 ist die Kennlinie des aus der τ -Entwicklung der Korrelationsfunktion erster Ordnung $g^{(1)}(\tau)$ berechneten Emissionsspektrums $S_b(\omega)$ dargestellt. Die Frequenzachse bezieht sich auf die atomare Übergangsfrequenz ω_0 , es sind also die Differenzfrequenzen $\omega - \omega_0$ aufgetragen. Zu sehen ist die Aufspaltung der Niveaus im Regime starker Kopplung, also für kleine Pumpraten, in zwei Peaks mit den Energien $\pm \frac{|g|}{\hbar}$, also mit einer Differenz von $\frac{2|g|}{\hbar}$. Dies entspricht, wie oben dargestellt, der Einnahme der dressed states (vgl. Kap. 2.1.4, S. 9). Im Regime schwacher Kopplung liegt nur noch ein Peak bei der atomaren Übergangsfrequenz ω_0 vor, das System befindet sich in den bare states. In dem Inset ist das Emissionsspektrum in der Seitenansicht dargestellt, um die Höhe zu veranschaulichen. Es fällt auf, dass sich die

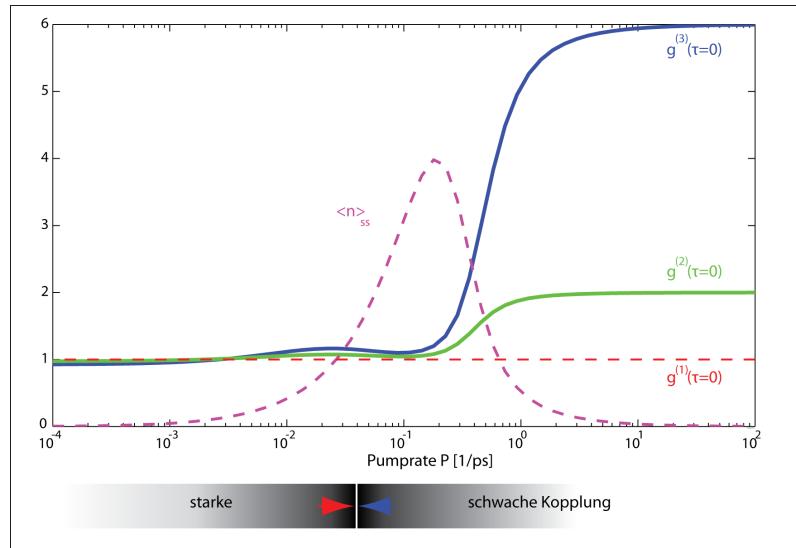


Abbildung 5.12: Darstellung der Kennlinie der Korrelationsfunktionen $g^{(1)}(\tau = 0)$ bis $g^{(3)}(\tau = 0)$ und der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle_{ss}$.

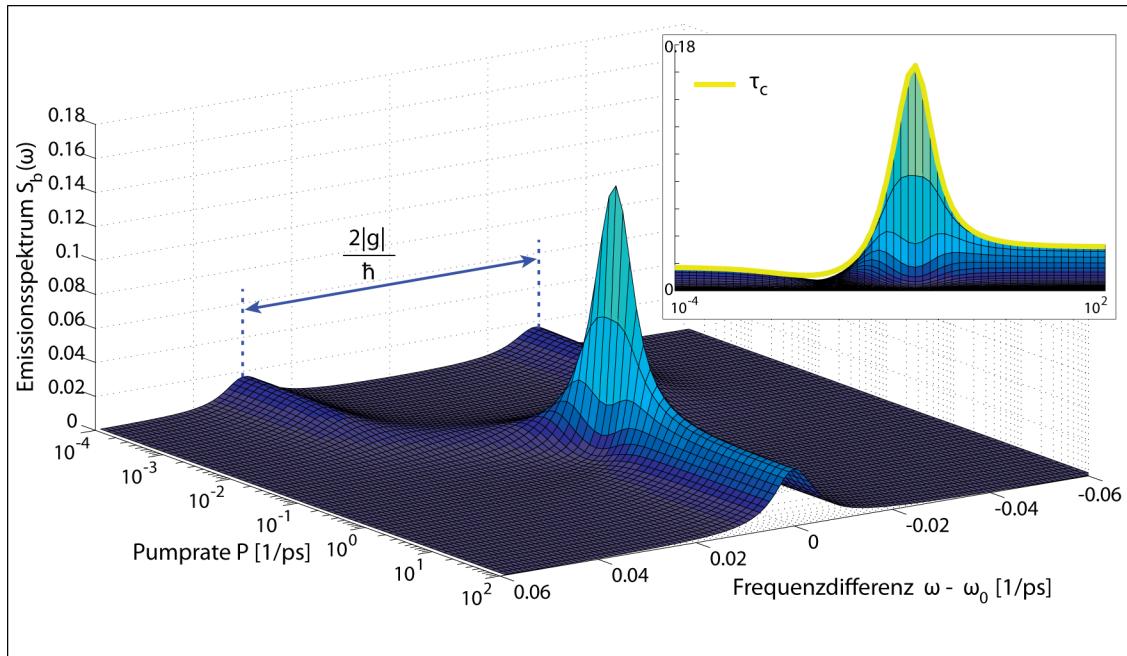


Abbildung 5.13: Darstellung der Kennlinie des Emissionsspektrums $S_b(\omega)$. Als Inset ist die Höhe des Spektrums im Vergleich mit der Entwicklung der Kohärenzzeit τ_c eingezeichnet.

Höhe des Emissionsspektrums analog zur Kennlinie der (skalierten) Kohärenzzeit verhält (gelbe Kurve im Inset, vgl. Abb. 5.11). Dies ist nachvollziehbar, da sowohl das Spektrum als auch die Kohärenzzeit aus der selben Größe berechnet werden. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Höhe und Breite des Emissionsspektrums mit der mittleren Photonenzahl im Resonator wächst und fällt. Dort, wo die mittlere Photonenzahl groß ist, ist das Emissionsspektrum hoch und schmal und umgekehrt. In den Bereichen sehr großer und kleiner Pumpraten wird das Spektrum stationär und ändert sich nicht mehr.

Die Abb. 5.14, S. 53 zeigt das aus der Korrelationsfunktion erster Ordnung $g_\sigma^{(1)}(\tau)$ berechnete Fluores-

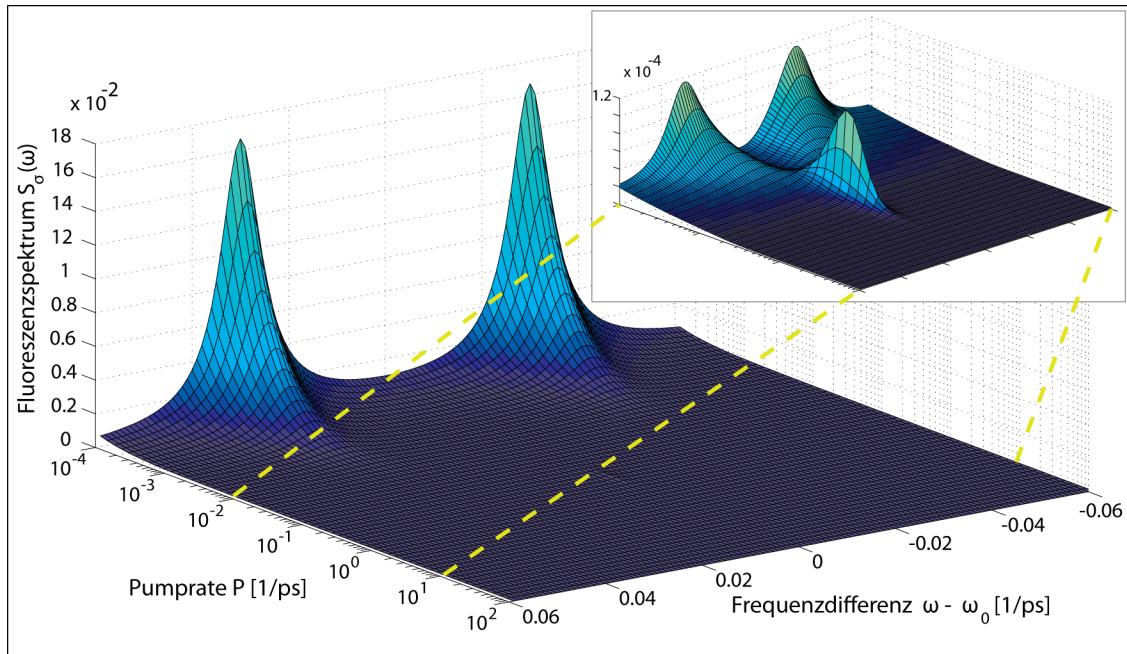


Abbildung 5.14: Darstellung der Kennlinie des Fluoreszenzspektrums $S_\sigma(\omega)$. Im Inset ist eine Vergrößerung des gekennzeichneten Abschnittes des Spektrums dargestellt.

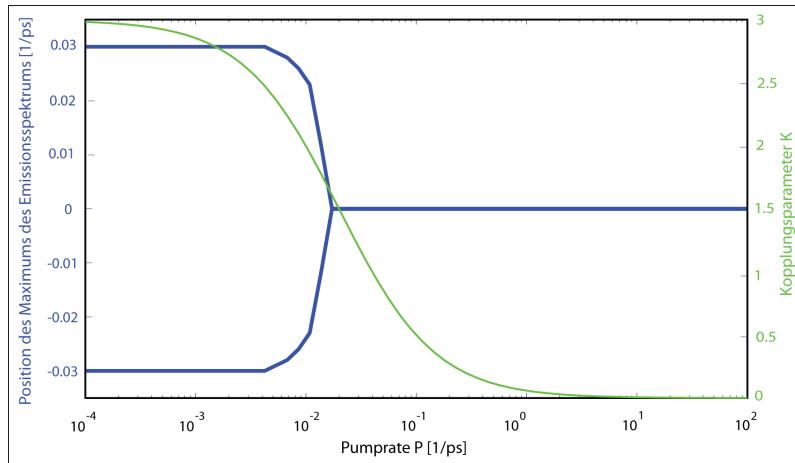


Abbildung 5.15: Darstellung der Position des Maximums des Emissionsspektrums als Funktion der Pumprate. Zur Interpretation ist der Kopplungsparameter K eingezeichnet.

zenzspektrum $S_\sigma(\omega)$. Das Fluoreszenzspektrum verhält sich bezüglich der Kopplung wie das Emissionsspektrum. Die auftretenden Energien müssen natürlich identisch sein. So besitzt das Fluoreszenzspektrum bei kleinen Pumpraten die zwei Peaks der dressed states mit der bekannten Aufspaltung, welche für zunehmende Pumpraten zu einem Peak bei ω_0 werden, welcher auch die Charakteristik des Peaks im Emissionsspektrum aufweist, wie im Inset dargestellt. Allerdings unterscheiden sich die beiden Spektren stark in den Höhen der Peaks. Sind die aufgespaltenen Peaks bei kleiner Pumprate noch bei beiden Spektren gleich hoch, so werden sie im Fluoreszenzspektrum mit steigender Pumprate schnell gedämpft. Schon bei mittlerer Kopplung ist die Höhe des Peaks um zwei Größenordnungen kleiner als die Höhe der Peaks bei starker Kopplung, bei schwacher Kopplung beträgt der Unterschied sogar drei Größenordnungen. Dieses Verhalten

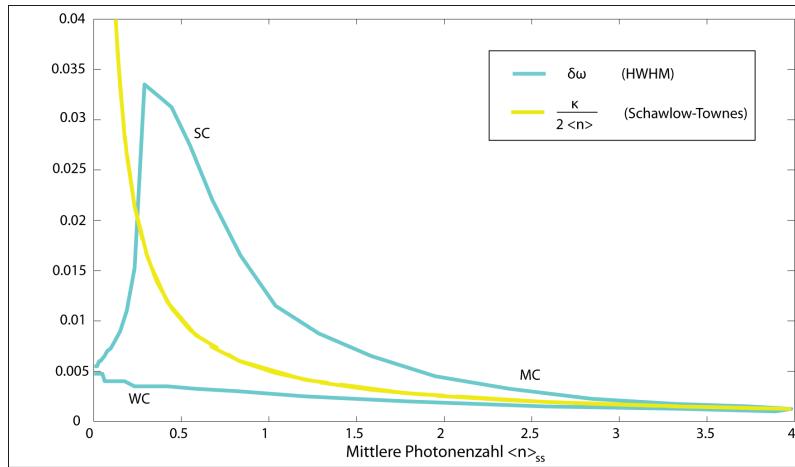


Abbildung 5.16: Darstellung der spektralen Breite $\delta\omega$ (HWHM) des Emissionsspektrums als Funktion der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle_{ss}$, sowie des Schawlow-Townes-Resultates für das Quantenlimit der Linienbreite.

ist anschaulich damit zu erklären, dass das System für kleine Pumpraten nur wenige Photonen in alle Richtungen emittiert, also in gleichem Maße durch die Spiegel des Resonators wie in alle anderen Richtungen. Der Anteil der Emission durch Resonatorverluste und durch Emission in nichtlasende Moden ist gleich groß. Für steigende mittlere Photonenzahlen im Resonator steigt der Anteil der stimulierten Emission in die Resonatormode und der spontanen Emission in dieselbe Mode im Vergleich zur spontanen Emission in alle Moden. Die Emission in die Fluoreszenzmoden wird dadurch unterdrückt, wodurch das Spektrum an Höhe verliert.

In Abb. 5.15, S. 53 sind die Peakpositionen des Emissionsspektrums $S_b(\omega)$ als Funktion der Pumprate dargestellt, um den Bereich der Aufspaltung der Energien bzw. den Wechsel zwischen dressed und bare states zu illustrieren. Zusätzlich ist der Kopplungsparameter K aufgetragen. Dabei ist zu sehen, dass die Aufhebung der Aufspaltung schon bei kleinen Pumpraten im Regime starker Kopplung beginnt ($K \approx 2.5$) und bereits vor Erreichen von $K = 1$ abgeschlossen ist. Der Übergang geschieht also schon vor dem Bereich mittlerer Kopplung um $K \approx 1$.

In Abb. 5.16 ist die Linienbreite $\delta\omega^\dagger$ des Emissionsspektrums $S_b(\omega)$ gegen die mittlere Photonenzahl im Resonator $\langle n \rangle_{ss}$ aufgetragen, um die Güte der Laseremission zu untersuchen. Zum Vergleich ist das natürliche Quantenlimit der Linienbreite für konventionelle Laser weit oberhalb der Laserschwelle, das Schawlow-Townes-Resultat $\delta\omega = \frac{\kappa}{2\langle n \rangle_{ss}}$, eingezeichnet (vgl. Gl. (3.31), S. 28), welches für das Regime schwacher Kopplung gilt. Der Verlauf der Linienbreite teilt sich in zwei unterschiedliche Bereiche auf, welche den Regimes starker und schwacher Kopplung entsprechen. Die Auftragung erfolgt gegen die mittlere Photonenzahl, weshalb die Kennlinie der Linienbreite zunächst bei $\langle n \rangle_{ss} = 0$ anfängt, für kleine Pumpraten im Regime starker Kopplung den oberen Verlauf nimmt und durch das Quenching nach Einnahme des Zustandes maximaler Photonenzahl wieder den unteren Verlauf zurück nimmt. Es ist zu sehen, wie die Linienbreite für kleine Pumpraten im Regime starker Kopplung (SC) zunächst durch das Zusammenlaufen der beiden Peaks im Emissionsspektrum stark zunimmt, um dann im Übergangsbereich, bei mittlerer Kopplung (MC), mit steigender mittlerer Photonenzahl wieder mit einem Potenzgesetz abzunehmen. Das Minimum der Linienbreite wird bei der maximalen mittleren Photonenzahl angenommen. Im

[†]Die Linienbreite des Spektrums ist als halbe Breite bei halber Höhe des Spektrums definiert. Sie wird numerisch als die Differenz der Datenpunkte, welche der halben Höhe am besten entsprechen, geteilt durch die Schrittweite berechnet.

Regime schwacher Kopplung (WC) ist zu erkennen, dass die Linienbreite durch das Quenching nur wenig beeinflusst wird und somit mit wieder sinkender mittlerer Photonenzahl nur schwach zunimmt, sich aber dauerhaft unterhalb der Schawlow-Townes-Linienbreite befindet. Weiterhin ist bemerkenswert, dass die Linienbreiten für sehr große und sehr kleine Pumpraten, also je für sehr kleine $\langle n \rangle_{ss}$ nahezu identisch sind, obwohl sich das System in stark unterschiedlichen Regimes befindet. Allgemein lässt sich sagen, dass das Schawlow-Townes-Verhalten in dem Bereich, in dem relevante Laseremission stattfindet, qualitativ reproduziert wird, die Linienbreite in diesem Bereich aber immer breiter als die Schawlow-Townes-Linienbreite ist. Nur im Bereich der schwachen Kopplung liegt die Linienbreite unterhalb dieser Breite.

KAPITEL 6

NUMERISCHE BEHANDLUNG DES VIER-NIVEAU-SYSTEMS

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Berechnung der Bewegungsgleichungen des Vier-Niveau-Systems vorgestellt, mit den zuvor berechneten Ergebnissen des Zwei-Niveau-Systems verglichen und Gemeinsamkeiten und Unterschiede diskutiert. Im Gegensatz zum Zwei-Niveau-System wird hier auf die Darstellung der Zeitentwicklung des Systems verzichtet und es werden nur noch die Kennlinien diskutiert.

6.1 VERGLEICH MIT DEM ZWEI-NIVEAU-SYSTEM

Um die beiden im Theorieteil beschriebenen atomaren Lasersysteme zu vergleichen, werden für die Berechnung des Vier-Niveau-Systems die identischen Parameter wie für das Zwei-Niveau-System verwendet. Dabei kommen zwei zusätzliche Parameter hinzu, welche die Anbindung des Pumpmechanismus über die zusätzlichen Niveaus regeln: γ_{43} und γ_{21} . Diese Verlustraten sollen sinnvollerweise schnell gegenüber den Raten sein, welche beide Laserniveaus beinhalten, damit die Dynamik von den Laserniveaus gesteuert wird und nicht von den Hilfsniveaus. Die Einstreureate γ_{43} in das obere Laserniveau und die Ausstreurate γ_{21} aus dem unteren Laserniveau regulieren, wie in [Ste09] ausführlich diskutiert, die Photonenausbeute, also die maximale Photonenzahl im Resonator. Während γ_{43} für größere Werte auch je größere Photonenzahlen ermöglicht, wirkt sich γ_{21} auf das System wie ein Flaschenhals aus. Bei zu großen Werten wirkt γ_{21} dephasierend, da es, wie in Gl. (4.20), S. 41 zu erkennen ist, einen Dämpfungsterm proportional zu γ_{21} gibt, so dass die Photonenausbeute mit steigendem γ_{21} sinkt.

Die zur Berechnung des Vier-Niveau-Systems verwendeten Parameter sind in Tabelle 6.1 dargestellt.

n_{max}	t_{max} [ps]	τ_{max} [ps]	κ [1/ps]	$\tau_{nl} = \frac{1}{\gamma_{32}}$ [ps]	γ_{43} [1/ps]	γ_{21} [1/ps]	$\frac{g}{h}$ [1/ps]
16	6000	6000	0.01	100	1	1	0.03

Tabelle 6.1: Verwendete Parameter für die Berechnung des Vier-Niveau-Systems.

Da für das Vier-Niveau-System der Kopplungsparameter gemäß Gl. (4.23), S. 42 definiert ist, hängt das Kopplungsregime, in dem sich das System befindet, nicht von der Pumprate ab und ändert sich somit nicht, wie im Zwei-Niveau-System, innerhalb einer Kennlinie. Für die in Tabelle 6.1 gewählten Parameter beträgt der Kopplungsparameter $K = 0.058$, das System befindet sich also im Regime schwacher Kopplung. Wie

in Gl. (4.24), S. 42 beschrieben, ist für das Vier-Niveau-System die Definition eines β -Faktors für eine gesamte Kennlinie sinnvoll, welcher für die gewählten Parameter $\beta = 0.0018$ beträgt.

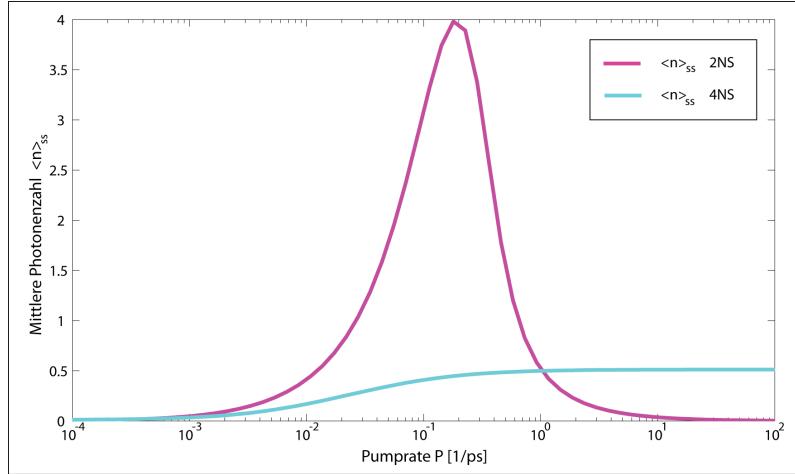


Abbildung 6.1: Kennlinie des Vier-Niveau-Ein-Atom-Lasers. Zum Vergleich ist die Kennlinie des zuvor betrachteten Zwei-Niveau-Systems abgebildet.

In Abb. 6.1 sind die Kennlinien des Erwartungswertes der Photonenzahl im Resonator im stationären Zustand für das Vier- und das Zwei-Niveau-System dargestellt. Die Kennlinie des Vier-Niveau-Systems fängt bei kleinen Pumpstärken bei sehr kleinen Photonenzahlen an, steigt dann mit zunehmender Pumprate leicht an und sättigt auf einen Wert von $\langle n \rangle_{ss} \approx 0.5$. Das Vier-Niveau-System kommt also bei den gewählten Parametern nicht in den lasenden Bereich mit $\langle n \rangle_{ss} \gtrsim 1$. Im Vergleich zur Kennlinie des Zwei-Niveau-Systems fällt zunächst auf, dass sich die Systeme sehr unterschiedlich verhalten. Vor allem zwei Dinge fallen ins Auge: Das Vier-Niveau-System nimmt sehr viel kleinere mittlere Photonenzahlen an als das Zwei-Niveau-System, und es tritt hier kein Quenching auf, für sehr große Pumpraten bleibt die mittlere Photonenzahl konstant und nimmt nicht wie im Zwei-Niveau-System wieder ab. Der erste Effekt tritt auf, weil die Ausstreuarten und damit das Dephasing im Vier-Niveau-System durch die über Streuprozesse angekoppelten zusätzlichen Niveaus einen direkteren Einfluss auf das System haben als im Zwei-Niveau-System. Durch hinreichend langsame Streuung in und aus den Laserniveaus wird der Einfluss des Pumpvorgangs geschwächt (vgl. [Ste09]). Dass im Vier-Niveau-System kein Quenching auftritt, liegt an der Entkopplung des Pumpprozesses und des Laserübergangs. Dadurch, dass der Pumpprozess kein Laserniveau direkt enthält, hängt wie in Gl. (4.21), S. 41 dargestellt die Rate der Emission in die Lasermode nicht mehr von der Pumpstärke ab. Dadurch kann eine große Pumpstärke kein Dephasing und somit auch kein Quenching verursachen. Der einzige Bereich, in dem sich die Kennlinien der beiden Systeme ähneln, ist bei sehr kleinen Pumpstärken. Hier sind die mittleren Photonenzahlen fast gleich, allerdings ist die Kurve des Zwei-Niveau-Systems immer oberhalb der des Vier-Niveau-Systems.

In Abb. 6.2, S. 58 ist die Photonenstatistik des Vier-Niveau-Systems dargestellt. Anstelle der kompletten Kennlinie sind beispielhaft zwei Verteilungen für den Bereich kleiner und großer Pumpraten abgebildet. Für kleine Pumpraten entspricht die Verteilung nahezu einer Funktion $\delta_{n,0}$, was dem Fockzustand $|0\rangle$ entsprechen würde und auf sub-poissonisches Licht hinweist. Für große Pumpraten entspricht die Verteilung der thermischen Photonenstatistik mit Maximum bei $n = 0$. Wie schon bei der Diskussion der Kennlinie der mittleren Photonenzahl festgestellt, erreicht das Vier-Niveau-System bei den gewählten Parametern nicht den lasenden Bereich, was sich bei Betrachtung der Photonenstatistiken darin ausdrückt, dass im Laufe der Kennlinie die Photonenstatistik nie der Form einer Poisson-Verteilung entspricht.

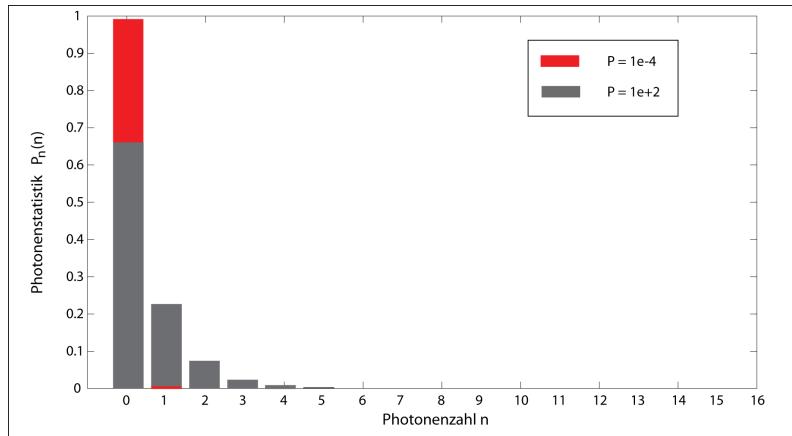


Abbildung 6.2: Darstellung der Photonenstatistik des Vier-Niveau-Systems im stationären Zustand für kleine ($P = 10^{-4} \frac{1}{ps}$) und große Pumpstärke ($P = 10^2 \frac{1}{ps}$).

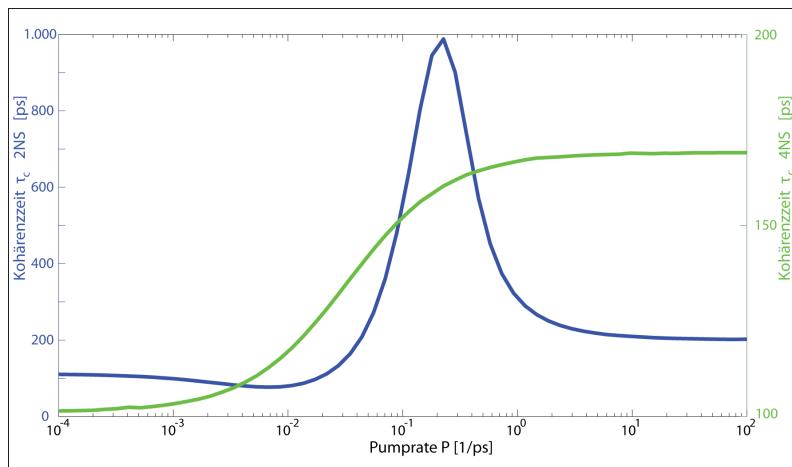


Abbildung 6.3: Darstellung der Kennlinie der Kohärenzzeit τ_c des Vier-Niveau-Systems zusammen mit der korrespondierenden Kennlinie des Zwei-Niveau-Systems.

Die Kennlinie der Kohärenzzeit τ_c des Vier-Niveau-Systems ist in Abb. 6.3 zusammen mit der entsprechenden Kennlinie des Zwei-Niveau-Systems dargestellt. Genau wie diese nimmt die Kennlinie des Vier-Niveau-Systems einen zur mittleren Photonenanzahl analogen Verlauf, indem sie für kleine Pumpraten einen niedrigen Wert annimmt, mit mittleren Pumpraten ansteigt und dann für große Pumpraten auf einen konstanten maximalen Wert sättigt. Verglichen mit dem konkreten Verlauf der Kennlinie von τ_c des Zwei-Niveau-Systems fallen sowohl große Unterschiede als auch Gemeinsamkeiten auf. Zunächst gleichen sich die Werte der Kohärenzzeiten der beiden Systeme für sehr kleine Pumpraten stark (2NS: 110.2 ps, 4NS: 101.1 ps), da der unterschiedlich modellierte Pumpmechanismus noch keinen großen Einfluss hat. Anschließend nehmen die Kennlinien der Kohärenzzeiten für zunehmende Pumpraten einen gegenläufigen Verlauf: während die Kennlinie für das Vier-Niveau-System stetig steigt, sinkt die entsprechende Kennlinie des Zwei-Niveau-Systems ab. Dieses Verhalten des Zwei-Niveau-Systems, mit steigender Pumprate (und damit in diesem Bereich steigender mittlerer Photonenanzahl im Resonator) Kohärenz zu verlieren, tritt für das Vier-Niveau-System für keinen Bereich der Kennlinie auf. Bei Betrachtung der Skalen für die beiden Kennlinien fällt auf, dass, wie schon bei Betrachtung der Kennlinie der mittleren Photonenanzahl gesehen, die Kennlinie des Zwei-Niveau-Systems deutlich größere maximale Werte annimmt als die Kennlinie des Vier-

Niveau-Systems (2NS: 987.3 ps, 4NS: 169.1 ps) und das Vier-Niveau-System kein Quenching-Verhalten für große Pumpraten der Kohärenzzeit wie das Zwei-Niveau-System aufweist. Trotz der großen Unterschiede nehmen die beiden Systeme bei sehr großen Pumpraten wieder recht ähnliche Kohärenzzeiten an (2NS: 202.1 ps, 4NS: 169.1 ps).

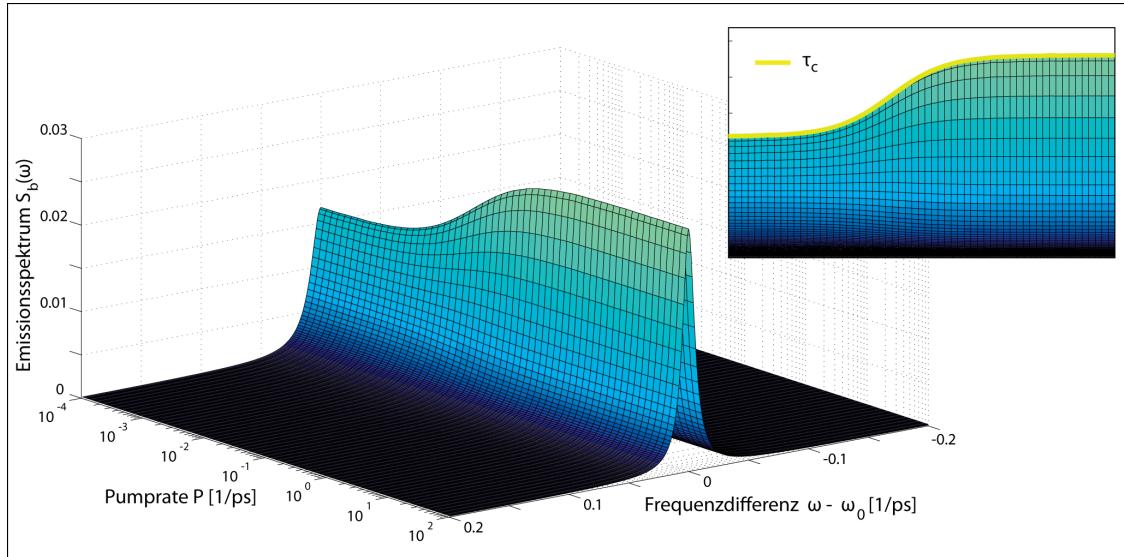


Abbildung 6.4: Darstellung der Kennlinie des Emissionsspektrums des Vier-Niveau-Systems. Der Inset zeigt das Maximum des Spektrums zusammen mit der Kennlinie der Kohärenzzeit τ_c .

Das Emissionsspektrums $S_b(\omega)$ des Vier-Niveau-Systems ist in Abb. 6.4, S. 59 als Funktion der Differenzfrequenz $\omega - \omega_0$ und der Pumprate P dargestellt. Das Emissionsspektrum besteht für den gesamten Bereich der Pumprate aus einem einzelnen Peak; das System nimmt also für keine verwendete Pumprate die dressed states ein, da es sich, wie schon oben festgestellt, für keine Pumprate im Bereich der starken Kopplung befindet. Mit zunehmender Pumprate und damit zunehmender mittlerer Photonenzahl $\langle n \rangle_{ss}$ im Resonator nimmt, wie von einem Lasersystem zu erwarten ist, die Höhe des Spektrums zu und die Breite des Spektrums ab. Die Breite sinkt dabei von zunächst $0.01 \frac{1}{ps}$ auf letztendlich $0.006 \frac{1}{ps}$. Damit befindet sich die Breite des Emissionsspektrums des Vier-Niveau-Systems immer oberhalb der Breite des entsprechenden Zwei-Niveau-Emissionsspektrums, allerdings unterhalb der entsprechenden Shawlow-Townes-Breite. Aufgrund der kleinen mit den verwendeten Parametern erreichten mittleren Photonenzahl wird auf einen Plot der spektralen Breite $\delta\omega(\langle n \rangle_{ss})$ analog zu Abb. 5.16, S. 54 verzichtet. Im Inset ist wie schon für das Zwei-Niveau-System die Übereinstimmung der Höhe des Spektrums mit dem Verlauf der Kohärenzzeit in geeigneter Skalierung dargestellt (vgl. Abb. 5.13, S. 52). Im Vergleich zum Zwei-Niveau-System ist das Emissionsspektrum des Vier-Niveau-Systems maximal so hoch wie das Emissionsspektrum des Zwei-Niveau-Systems im Bereich starker Kopplung, also bei kleinen Pumpraten.

Zusätzlich zum Emissionsspektrum ist in Abb. 6.5, S. 60 das Fluoreszenzspektrum $S_\sigma(\omega)$ des Vier-Niveau-Systems dargestellt, welches deutlich komplexer erscheint. Zunächst besteht das Fluoreszenzspektrum aus einem breiten Untergrund, welcher sowohl zu größeren Differenzfrequenzen $\omega - \omega_0$ als auch zu kleinen Differenzen um ω_0 herum abfällt. Moduliert ist dieser Untergrund mit einem dem Emissionsspektrum entsprechenden Peak auf der Laserfrequenz ω_0 . Dieser ist für kleine Pumpraten kleiner als der Untergrund und bewirkt so einen Abfall des Fluoreszenzspektrums zur Laserfrequenz hin. Für zunehmende Pumpraten steigt dieser Peak bis hin zu der Situation, dass diese Emission in die Lasermode stärker ist als die Emission in nichtlasende Moden, deren Spektrum durch den Untergrund beschrieben wird. Das Maxi-

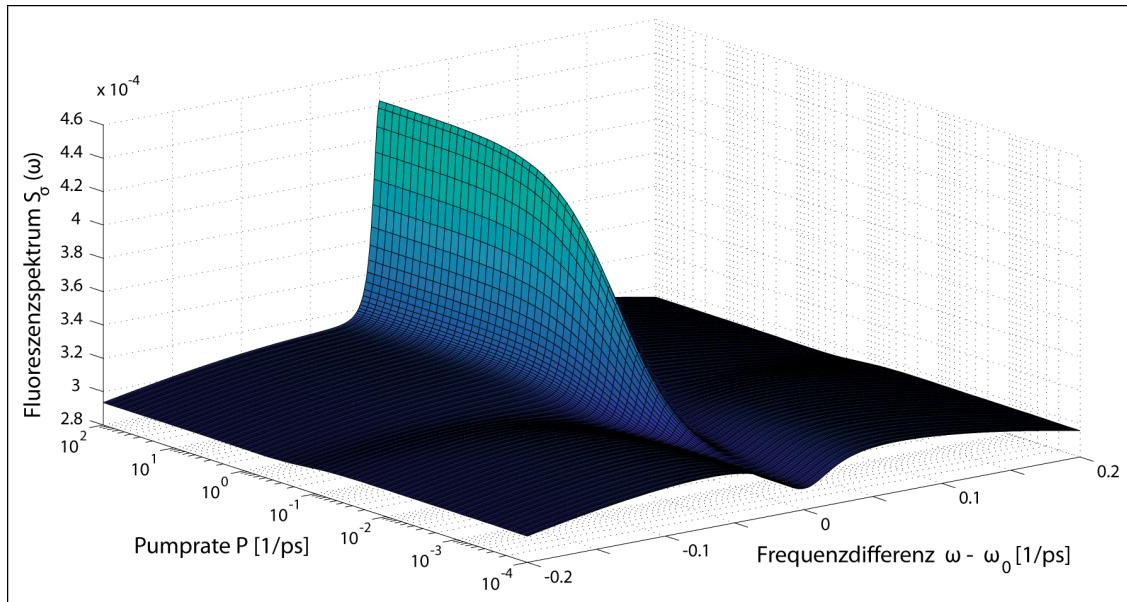


Abbildung 6.5: Darstellung des Fluoreszenzspektrums $S_\sigma(\omega)$ des Vier-Niveau-Systems. Für eine bessere Darstellung wurde die Achse der Pumprate umgedreht.

mum des Untergrundes liegt für kleine Pumpraten bei ca. $\pm 0.07 \frac{1}{ps}$. Weiterhin weist der Untergrund einen Übergangsbereich bei ca. $P = 10^{-1} \frac{1}{ps}$ auf, welcher die Bereiche trennt, in denen der Untergrund einen bzw. keinen Peak aufweist. Dieser Übergangsbereich stimmt überein mit dem Bereich, in dem der Peak bei der Laserfrequenz ungefähr übereinstimmt mit der Höhe des Maximums des Untergrundes. Das Ansteigen der Emission in nichtlasende Moden mit steigender Emission in die Lasermode kann damit erklärt werden, dass das Vier-Niveau-System wie in Abb. 6.1, S. 57 nicht in den lasenden Bereich $\langle n \rangle_{ss} \gtrsim 1$ kommt und somit bei sättigender Photonenzahl die Pumpleistung zusätzlich die Emission in die nichtlasenden Moden verstärkt. Im Vergleich mit dem Emissionsspektrum $S_b(\omega)$ fällt auf, dass das Fluoreszenzspektrum um einen Faktor 10^{-2} kleiner ist. Im Vergleich zum Fluoreszenzspektrum des Zwei-Niveau-Systems zeigt das Fluoreszenzspektrum des Vier-Niveau-Systems wie zu erwarten keine Aufspaltung für kleine Pumpraten, da für verschiedene Pumpraten keine verschiedenen Kopplungsregimes eingenommen werden.

In Abb. 6.6, S. 61 sind die Kennlinien der Korrelationsfunktionen ohne Zeitverzögerung $g^{(2)}(\tau = 0)$ und $g^{(3)}(\tau = 0)$ des Vier-Niveau-Systems dargestellt. Sie verhalten sich ähnlich wie die Kohärenzzeit τ_c und die mittlere Photonenzahl im Resonator $\langle n \rangle_{ss}$: Beide Kennlinien beginnen für kleine Pumpraten bei einem Wert kurz unterhalb Eins (was auf sub-poissonisches Licht hinweist) und steigen mit wachsender Pumprate stetig an. Für große Pumpraten sättigen beide ab, wobei bei $g^{(3)}(\tau = 0)$ der Anstieg und damit der Sättigungswert größer als bei $g^{(2)}(\tau = 0)$ ist. Ansonsten ähneln sich die Kennlinien in ihrer Form, genau wie sich die Kennlinien für $g^{(2)}(\tau = 0)$ und $g^{(3)}(\tau = 0)$ beim Zwei-Niveau-System ähneln. Im Vergleich zu diesem System fällt auf, dass sich die Sättigungswerte für große Pumpraten gerichtet unterscheiden: Die Werte des Vier-Niveau-Systems sind jeweils kleiner als im Zwei-Niveau-System (für $P \rightarrow \infty$: $g_{2NS}^{(2)}(0) = 2$, $g_{4NS}^{(2)}(0) = 1.8$; $g_{2NS}^{(3)}(0) = 6$, $g_{4NS}^{(3)}(0) = 4.8$). Die Werte des Zwei-Niveau-Systems entsprechen laut Gl. (3.29), S. 27 exakt den Werten von thermischem Licht, 2! und 3!. Daraus lässt sich schließen, dass der Zustand des Lichtfeldes des Vier-Niveau-Systems bei großen Pumpraten nicht vollständig thermisch ist. Dieses Ergebnis ist plausibel, da das vom Zwei-Niveau-System bei großen Pumpraten emittierte thermische Licht vor allem dadurch entsteht, dass kohärente Emission durch das auftretende Quenching unterdrückt wird und das System so nur noch inkohärent (thermisch) emittieren kann. Wie im Inset, in dem die τ -

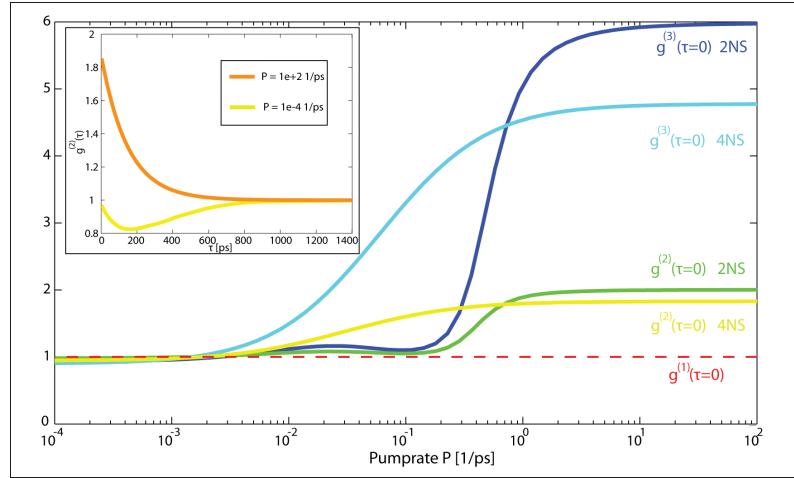


Abbildung 6.6: Darstellung der Kennlinien der Korrelationsfunktionen $g^{(2)}(\tau = 0)$ und $g^{(3)}(\tau = 0)$ des Vier-Niveau-Systems. Zum Vergleich sind die entsprechenden Kennlinien des Zwei-Niveau-Systems abgebildet. Der Inset zeigt die τ -Entwicklung der Korrelationsfunktion $g^{(2)}(\tau)$ für kleine und große Pumpraten, anhand derer das Bunching- bzw. Antibunching-Verhalten abgelesen werden kann.

Entwicklung der Korrelationsfunktion $g^{(2)}(\tau)$ für große und kleine Pumpraten aufgetragen ist, zu erkennen ist, gilt für beide Kurven $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$. Dies bedeutet, dass das vom System emittierte Licht, wie im Zwei-Niveau-System, Bunching-Verhalten zeigt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Trennung der Laserniveaus und der Niveaus, über die der Pumpprozess implementiert wird, große Auswirkungen auf das Verhalten des Systems hat. Es tritt kein Quenching auf, was sich sowohl in der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle_{ss}$, als auch in der Kohärenzzeit und den Spektren widerspiegelt. Auch die Korrelationsfunktionen, welche das Lichtfeld beschreiben, verhalten sich im erweiterten System anders, da ihre jeweiligen Ausprägungen von den Werten der zuvor genannten Größen abhängen. Weiterhin unterscheiden sich die Systeme grundlegend dahingehend, dass sich das Vier-Niveau-System nicht durch Wahl von besonders großen Raten γ_{43} und γ_{21} in das Zwei-Niveau-System überführen lässt. Der Unterschied im Pumpprozess wirkt sich auch bei sehr schnellen Relaxationsprozessen deutlich auf das Systemverhalten aus (vgl. [Ste09]).

6.2 STARKE KOPPLUNG IM VIER-NIVEAU-SYSTEM

Bei den zum Vergleich mit dem Zwei-Niveau-System verwendeten Parametern befindet sich das Vier-Niveau-System, wie oben gezeigt, im Regime schwacher Kopplung. Abschließend wird nun in diesem Kapitel durch Variation der Dipolkopplung g sowie der Verlustparameter κ und γ_{ij} untersucht, wie sich das Vier-Niveau-System in diesem Regime verhält. Dafür wurden die Parameter in Tab. 6.2 verwendet.

n_{max}	t_{max} [ps]	τ_{max} [ps]	κ [1/ps]	γ_{32} [1/ps]	γ_{43} [1/ps]	γ_{21} [1/ps]	$\frac{g}{\hbar}$ [1/ps]
20	6000	20000	0.001	0.001	0.01	0.01	0.1

Tabelle 6.2: Verwendete Parameter für die Berechnung des Vier-Niveau-Systems im Regime starker Kopplung.

Mit diesen Parametern beträgt der Kopplungsparameter $K = 16,667$, das System befindet sich also deutlich im Regime starker Kopplung. Der β -Faktor beträgt hier $\beta = 0.9937$, somit sind die Emissionsraten in die Lasermode und in nichtlasende Moden nahezu identisch, die Verluste in nichtlasende Moden sind sehr klein. Das System beschreibt somit (fast) einen „thresholdless laser“ mit $\beta = 1$ (vgl. [PDLS⁺99], [RC94]).

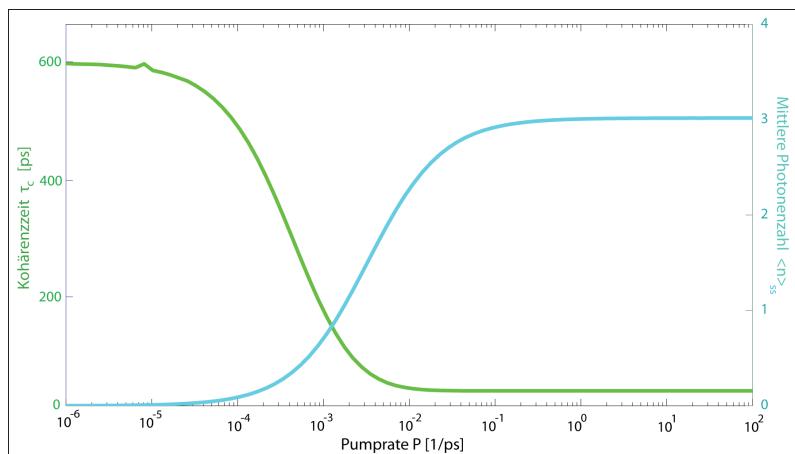


Abbildung 6.7: Darstellung der Kennlinien der mittleren Photonenzahl im Resonator im stationären Zustand $\langle n \rangle_{ss}$ und der Kohärenzzeit für starke Kopplung im Vier-Niveau-System.

In Abb. 6.7 sind die Kennlinien der mittleren Photonenzahl im Resonator sowie der Kohärenzzeit für das Vier-Niveau-System im Regime starker Kopplung dargestellt. Für die Kennlinie der mittleren Photonenzahl lässt sich ein typischer Verlauf feststellen: Für kleine Pumpraten ist $\langle n \rangle_{ss}$ sehr klein, steigt dann mit zunehmender Pumprate an, durchläuft einen Bereich mit linearem Anstieg und sättigt für große Pumpraten ab. Aufgrund der gewählten Parameter (kleines Dephasing) liegt die maximale mittlere Photonenzahl hier bei $\langle n \rangle_{ss} \approx 3$, also oberhalb der für Laseraktivität nötigen mittleren Photonenzahl von ca. 1. Der Vergleich mit der entsprechenden Kennlinie des Vier-Niveau-Systems im Regime schwacher Kopplung (Abb. 6.1, S.57) zeigt, dass sich die Kennlinien, bis auf die von der Parameterwahl abhängigen maximalen mittleren Photonenzahl, gleichen. Die starke Kopplung hat also keinen sichtbaren Einfluss auf den Kurvenverlauf der mittleren Photonenzahl im Resonator. Die Kennlinie der Kohärenzzeit τ_c fängt bei einer sehr langen Kohärenzzeit an (≈ 600 ps) und fällt dann mit steigender Pumprate bzw. steigender mittlerer Photonenzahl ab und sättigt auf einen kleinen Wert von 24.6 ps. Die Kohärenzzeit verhält sich also im Regime starker Kopplung gegenläufig zu $\langle n \rangle_{ss}$. Dieses Verhalten ist im Kontrast zur entsprechenden Kennlinie im Regime

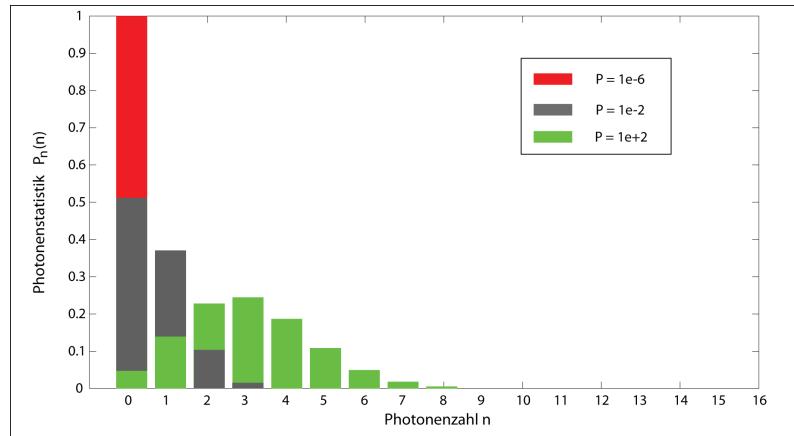


Abbildung 6.8: Photonenstatistiken im Regime starker Kopplung für die drei Pumpraten $P = 10^{-6}, 10^{-2}, 10^2 \frac{1}{\text{ps}}$ im Vier-Niveau-System.

schwacher Kopplung zu sehen, in dem τ_c analog zu $\langle n \rangle_{ss}$ zunimmt (vgl. Abb. 6.3, S. 58). Die Abnahme der Kohärenzzeit wird groß ab Pumpraten, von denen an das System makroskopische Werte für die mittlere Photonenzahl annimmt. Es scheint also, als ob die starke Kopplung einen dephasierenden Einfluss auf die Kohärenzzeit ausübt, wenn genügend Photonen durch die starke Kopplung im Resonator gehalten werden. Dies entspricht anschaulich dem Fall, dass die Kohärenz emittierter Photonen mit später emittierten Photonen durch die Kopplung mit dem Atom verkleinert wird. Die starke Kopplung übt also einen gravierenden Einfluss auf die Kohärenzzeit des Systems aus.

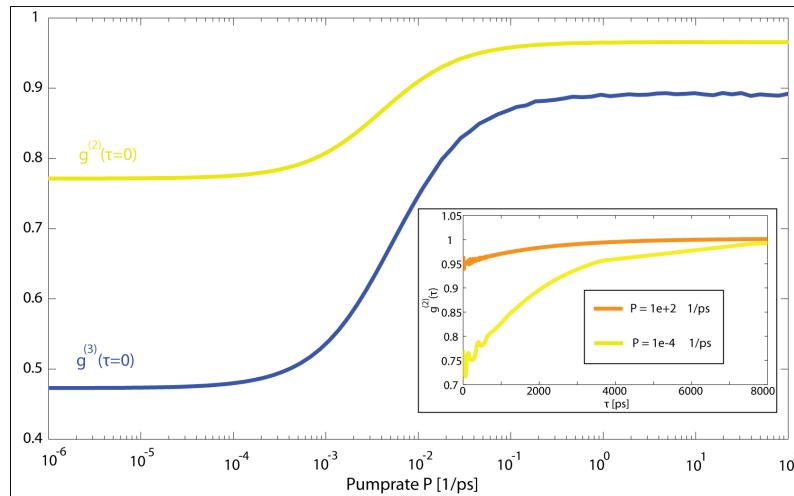


Abbildung 6.9: Darstellung der Korrelationen $g^{(2)}(\tau = 0)$ und $g^{(3)}(\tau = 0)$ für starke Kopplung im Vier-Niveau-System. Der Inset zeigt die τ -Entwicklung der Korrelationsfunktion $g^{(2)}(\tau)$ für kleine und große Pumpraten.

In Abb. 6.8 sind die Photonenstatistiken für drei verschiedene Pumpraten des Vier-Niveau-Systems im Regime starker Kopplung dargestellt. Für kleine Pumpraten ähnelt die Photonenstatistik stark dem Fock-Zustand $|0\rangle$, die entsprechende Photonenstatistik ist eine (minimal verbreiterte) δ -Funktion $\delta_{n,0}$, die Emission ist sub-poissonisch. Für mittlere Pumpraten enthält die Photonenstatistik einen poissonischen Anteil, allerdings ist das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung bei $n = 0$. Für große Pumpraten überwiegt der poissonische Anteil und die Verteilung ist fast vollständig poissonisch mit Mittelwert $\langle n \rangle = 3$. Dieses

Verhalten der Photonenstatistik ist wie erwartet und entspricht der oben beschriebenen Entwicklung der mittleren Photonenzahl. Deswegen ist hier kein Einfluss der starken Kopplung zu bemerken.

Die Korrelationen $g^{(2)}(\tau = 0)$ und $g^{(3)}(\tau = 0)$ des Vier-Niveau-Systems mit starker Kopplung sind in Abb. 6.9, S. 63 dargestellt. Beide Kennlinien nehmen einen Verlauf analog zum Erwartungswert der Photonenzahl, indem sie mit steigenden Pumpraten zunehmen und für große Pumpraten sättigen. Im Verlauf der Kennlinie sind die Werte der Korrelationen immer kleiner als Eins, es handelt sich also, wie schon bei der Betrachtung der Photonenstatistiken festgestellt, um sub-poissonisches Licht. Mit steigender Pumprate nähern sich die Korrelationen aber dem Wert Eins an, die Emission wird also poissonischer mit steigender Pumprate. Der Inset zeigt, dass für beide betrachteten Pumpraten bis auf minimale Oszillationen $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ gilt. Das Vier-Niveau-System zeigt im untersuchten Regime starker Kopplung also eindeutig Antibunching-Verhalten. Das bei Betrachtung derselben Korrelationen für schwache Kopplung beim Zwei-Niveau- sowie beim Vier-Niveau-System festgestellte Verhalten, dass $g^{(3)}(\tau = 0)$ im Wesentlichen $g^{(2)}(\tau = 0)$ in stärkerer Ausprägung entspricht, bestätigt sich auch hier. Der Einfluss der starken Kopplung auf das System ist in den Korrelationen des Lichtfeldes also nicht zu bemerken.

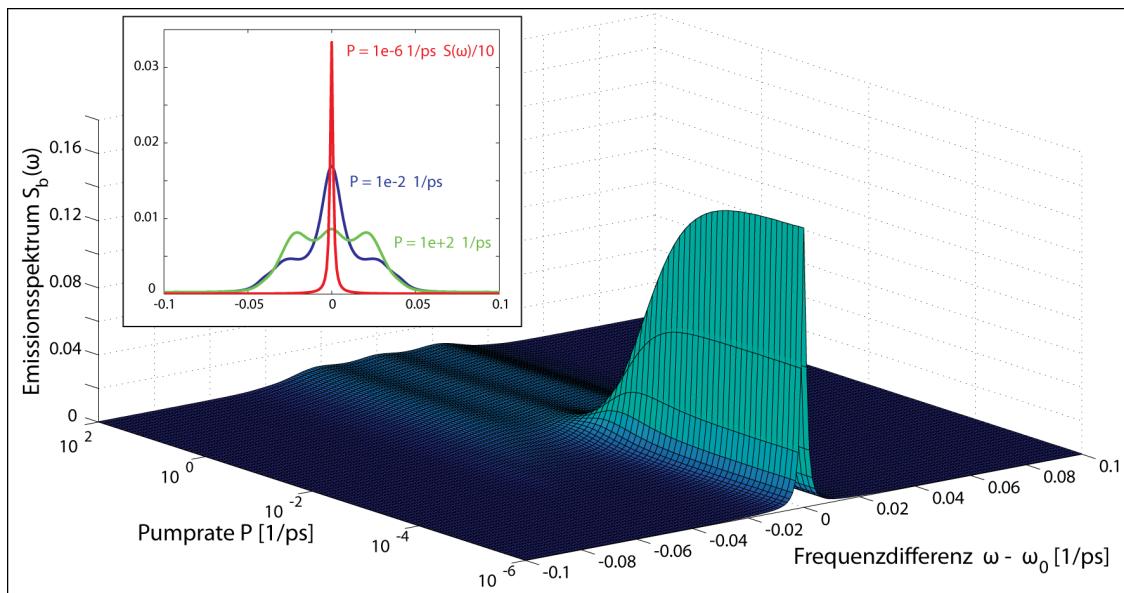


Abbildung 6.10: Darstellung der Kennlinie des Emissionsspektrums $S_b(\omega)$ des Vier-Niveau-Systems bei starker Kopplung. Der Inset zeigt selbiges Spektrum für einzelne Pumpraten, wobei das aufgetragene Spektrum für $P = 10^{-6} \frac{1}{\text{ps}}$ mit dem Faktor $\frac{1}{10}$ skaliert ist.

Das Emissionsspektrum $S_b(\omega)$ des Vier-Niveau-Systems in starker Kopplung ist in Abb. 6.10 als Funktion der Pumprate gegen die Frequenzdifferenz $\omega - \omega_0$ aufgetragen. Dabei ist der oben schon angedeutete Einfluss der starken Kopplung auf das System zu beobachten. Für kleine Pumpraten besteht das Spektrum aus einem einzigen Peak auf der Laserfrequenz ω_0 . Mit zunehmender Pumprate nimmt die Höhe des Peaks analog zur Kennlinie der Kohärenzzeit τ_c ab, die Breite nimmt zu. Ab einer Pumprate von $P \approx 10^{-3} \frac{1}{\text{ps}}$, also ab einer Pumprate, ab der das System eine mittlere Photonenzahl in der Nähe von Eins annimmt, tauchen im Emissionsspektrum zusätzliche Peaks bei $\omega = \pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{2} - \sqrt{1}) \approx \pm 0.041 \frac{1}{\text{ps}}$ auf, was Übergängen zwischen den dressed states mit Photonenzahlen von $n = 1$ nach $n = 0$ entspricht (vgl. Abb. 2.4, S. 10). Mit zunehmender Pumprate, und damit mit zunehmender mittlerer Photonenzahl, verschieben sich die zusätzlichen Peaks hin zu $\omega \approx \pm 0.02 \frac{1}{\text{ps}}$. Dieser Effekt tritt auf, da mit steigender Photonenzahl höhere Zustände der dressed states eingenommen werden und sich die entsprechenden Peaks mit Fre-

quenzen $\omega = \pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$ im Emissionsspektrum überlagern, weil diese Frequenzen durch die Wurzelfunktionen für wachsendes n immer näher aneinander rücken. Es fällt einerseits auf, dass im Emissionspektrum nur die „Differenzpeaks“ mit den Frequenzen $\omega = \pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})$ und nicht die „Summenpeaks“ mit den Frequenzen $\omega = \pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$ sichtbar sind. Andererseits ist zu bemerken, dass die zusätzlichen Peaks von den dressed states herrühren (da sich das System im Regime starker Kopplung befindet), trotzdem aber Emission mit der Laserfrequenz ω_0 auftritt, welche in den dressed states nicht als Übergangsfrequenz vorkommt. Beides wird erklärt durch die Wirkung des Resonators, dessen Spektrum ja hier betrachtet wird. Der Resonator verstärkt einerseits die Emission mit der Laserfrequenz ω_0 (durch die Ermöglichung von stimulierter Emission in die Lasermode) und dämpft andererseits die Emission mit davon stark abweichenden Frequenzen durch die Resonatorspiegel ab. Diese Dämpfung ist im Emissionsspektrum, also in der Emission durch die Resonatorspiegel, umso stärker, je größer die Differenzfrequenz $\omega - \omega_0$ ist. Wie im Inset in Abb. 6.12, S. 67 dargestellt, sind für große Pumpraten sehr wohl Summenpeaks im Emissionsspektrum zu sehen, aufgrund der beschriebenen Dämpfung durch den Resonator sind deren Amplituden im Vergleich zu den Amplituden der Differenzpeaks aber klein. Deshalb werden diese Peaks in der Abb. 6.10, S. 64 nicht deutlich, weshalb die Frequenzachse dort auf den Bereich $\omega - \omega_0 = \pm 0.1 \frac{1}{ps}$ begrenzt ist. Die Pumprate zeigt im Emissionsspektrum einen dämpfenden Einfluss,

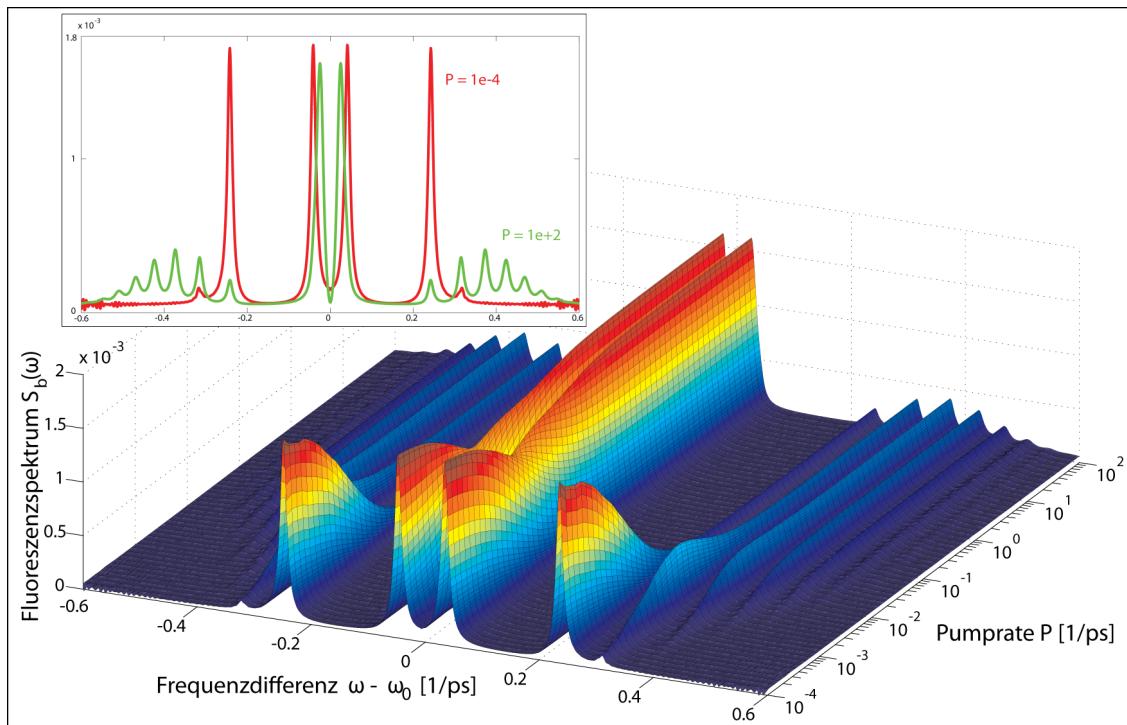


Abbildung 6.11: Darstellung der Kennlinie des Fluoreszenzspektrums $S_\sigma(\omega)$ des Vier-Niveau-Systems bei starker Kopplung. Der Inset zeigt das Spektrum für große (grün) und kleine Pumpraten (rot) und verdeutlicht den Unterschied der Bereiche.

indem sie mit ansteigender Pumprate die Emission auf der Laserfrequenz dämpft, allerdings verschwindet der Peak nie vollständig, sondern passt sich (aufgrund der Parameterwahl zufällig) in der Höhe an die beiden zusätzlichen Peaks an. Im Inset der Abb. 6.10, S. 64 sind beispielhaft drei Spektren aufgetragen, welche die unterschiedlichen Bereiche charakterisieren. Dabei ist das Spektrum von $P = 10^{-6} \frac{1}{ps}$ mit einem Faktor $\frac{1}{10}$ skaliert. Das hier dargestellte Spektrum legt die schon oben getätigten Vermutungen nahe, dass die starke Kopplung erst bei makroskopischen mittleren Photonenzahlen einen dominierenden Ein-

fluss auf das Systemverhalten hat. Dies ist auch sinnvoll, da es um die Kopplung von Feld und Atom geht, und das Feld erst bei hinreichender Pumpstärke soweit aufgebaut ist, dass die Wechselwirkung des Feldes mit dem Atom nicht mehr eine kleine Störung ist, sondern das atomare System stark beeinflusst. In diesem Punkt unterscheidet sich das Vier-Niveau-System also deutlich vom Zwei-Niveau-System, in welchem die dressed states schon bei verschwindend geringer Pumpstärke und damit auch sehr niedriger Photonenzahl eingenommen werden (vgl. Abb. 5.13, S. 52).

In Abb. 6.11, S. 65 ist die Kennlinie des Fluoreszenzspektrums $S_\sigma(\omega)$ des Vier-Niveau-Systems bei starker Kopplung dargestellt. Es besteht für alle betrachteten Pumpraten aus mindestens vier Peaks, welche in den oben beschriebenen Bereichen unterschiedlich ausgeprägt sind. Für kleine Pumpraten liegen die Peaks bei Frequenzen von $\omega = \pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{2} - \sqrt{1}) \approx \pm 0.041 \frac{1}{ps}$ und $\omega = \pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{2} + \sqrt{1}) \approx \pm 0.241 \frac{1}{ps}$, was den niedrigsten Übergängen der dressed states entspricht. Mit steigender Pumprate kommen einerseits zusätzliche Peaks hinzu, andererseits verschieben sich die mittleren beiden Peaks hin zur Laserfrequenz ω_0 . Beides entsteht durch Übergänge zwischen den dressed states höherer Photonenzahlen, welche mit steigender Pumprate vermehrt eingenommen werden. Die Verschiebung der mittleren beiden Peaks entsteht wie im Emissionsspektrum durch die Superposition der Übergänge $\propto (\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})$. Die bei größeren Frequenzen auftretenden Peaks entsprechen den Übergängen $\propto (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$. Dabei ist die Höhe der Peaks zur Besetzungswahrscheinlichkeit der entsprechenden dressed states proportional, was bei Be trachtung der Summenpeaks deutlich wird: Für kleine Pumpraten tauchen nur die niedrigsten Übergänge im Fluoreszenzspektrum auf, für große Pumpraten sättigt die mittlere Photonenzahl auf $\langle n \rangle \approx 3$ und der Übergang $\propto (\sqrt{3} + \sqrt{4})$ ist am stärksten ausgeprägt. Im Inset sind die Fluoreszenzspektren für sehr kleine und sehr große Pumpraten dargestellt, wobei die Verschiebung der mittleren Peaks durch die Addition der Differenzpeaks deutlich wird.

In Abb. 6.12, S. 67 sind die Spektren $S_b(\omega)$ und $S_\sigma(\omega)$ für große Pumpraten dargestellt, um die Positionen der Peaks der Spektren zu verdeutlichen. Die entsprechenden Energien und Übergänge sind in Tab. 6.3, S. 66 dargestellt. Die Abweichung der \textcircled{A}^\pm -Peaks des Emissionsspektrums von denen des Fluoreszenzspektrums entstehen durch die Überlagerung mit dem Peak auf der Laserfrequenz ω_0 . Im Inset sind die Summenpeaks dargestellt, um zu verdeutlichen, dass diese auch im Emissionsspektrum auftauchen. Dabei ist die jeweilige Skala zu beachten, die Summenpeaks des Emissionsspektrums haben eine Amplitude von maximal $5.8 \cdot 10^{-5}$, wohingegen die Amplituden der Summenpeaks des Fluoreszenzspektrums um eine Größenordnung größer sind. Außerdem fällt auf, dass die Amplituden der Summenpeaks des Fluoreszenzspektrums in diesem Bereich wie schon oben beschrieben proportional zur Besetzungswahrscheinlichkeit der jeweiligen dressed states sind, während die Amplituden der Summenpeaks des Emissionsspektrums zu größeren Frequenzen hin stetig abnehmen, was von dem oben beschriebenen dämpfenden Einfluss des Resonators herrührt.

Bezeichnung	Übergang	Frequenz $\omega - \omega_0$
⑤ ,⑥	$n = 1 \rightarrow n = 0$	$\pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{1} + \sqrt{2}) \approx \pm 0.24$
⑨ ,⑩	$n = 2 \rightarrow n = 1$	$\pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx \pm 0.31$
⑬ ,⑭	$n = 3 \rightarrow n = 2$	$\pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{4} + \sqrt{3}) \approx \pm 0.37$
:	:	:
\textcircled{A}^\pm	$\sum_n \{(n+1) \rightarrow n \text{ mit } p_n \geq 0\}$	$\pm \frac{g}{\hbar} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Tabelle 6.3: Erläuterung der in den Spektren des Vier-Niveau-Systems auftretenden Peaks. p_n gibt die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustandes mit n Photonen an.

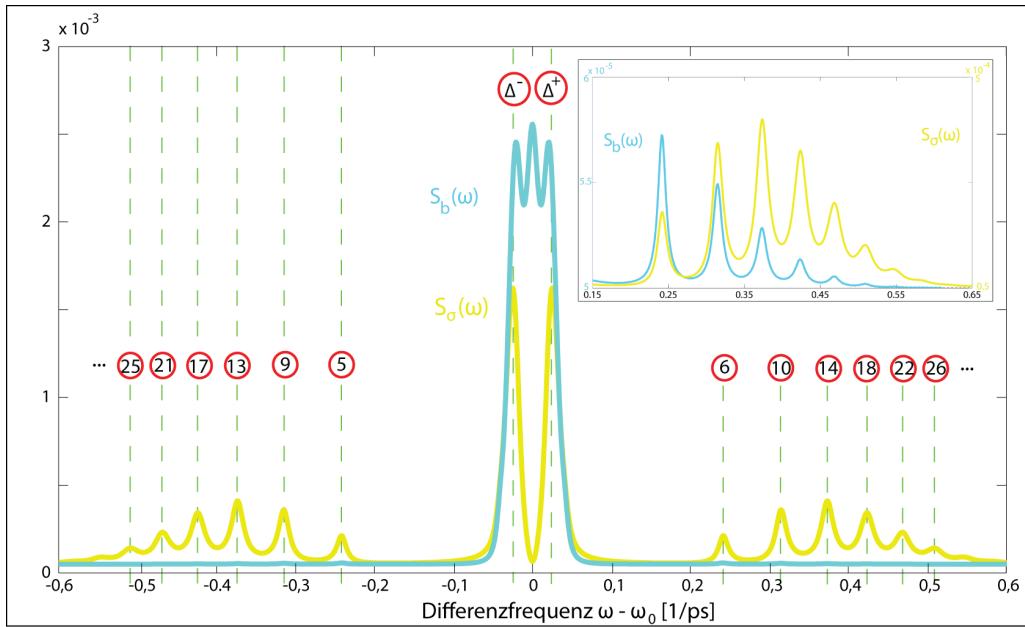


Abbildung 6.12: Darstellung der Spektren $S_b(\omega)$ und $S_\sigma(\omega)$ für große Pumpraten ($P = 100 \text{ ps}^{-1}$) zur Zuordnung der auftretenden Peaks. Darin ist die Nummerierung der Peaks aus Abb. 2.4, S. 10 für die Übergänge $\propto \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ übernommen bzw. sinngemäß erweitert. Die Peaks der Übergänge $\propto \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$ sind, da sie aufeinanderfallen, nicht einzeln sondern insgesamt mit Δ^\pm bezeichnet. Das Inset zeigt eine Vergrößerung des Bereiches großer Differenzfrequenzen $\omega - \omega_0$, um die Summenpeaks im Emissionsspektrum zu verdeutlichen.

Aus dem Vergleich des Vier-Niveau-Systems bei starker und bei schwacher Kopplung lässt sich zusammenfassen, dass der Kopplungsbereich einen Einfluss auf die spektralen Eigenschaften des Systems ausübt ($\tau_c, S_b(\omega), S_\sigma(\omega)$), nicht aber auf die statistischen Eigenschaften ($\langle n \rangle_{ss}, g^{(2)}, g^{(3)}$). Außerdem ist der Kopplungsbereich im Vier-Niveau-System für die Emission durch die Resonatorspiegel erst für hinreichend große mittlere Photonenzahlen $\langle n \rangle_{ss}$ im Resonator relevant. Im Zwei-Niveau-System hingegen ist der Einfluss der starken Kopplung schon bei kleinen mittleren Photonenzahlen zu bemerken, was auch für die Fluoreszenzemission des Vier-Niveau-Systems gilt.

KAPITEL 7

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

ZUSAMMENFASSUNG

Im Rahmen der vorliegenden Masterthesis wurden atomare Lasersysteme quantenstatistisch behandelt und auf ihre spektralen Eigenschaften hin untersucht. Nach der Einführung im ersten Kapitel wurde im zweiten Kapitel der Thesis ein System aus atomarem Zwei-Niveau-System in einem Resonator und einer einzelnen Mode des elektromagnetischen Feldes beschrieben. Zunächst wurde die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes dargestellt, welches mit dem atomaren System wechselwirkt. Zur Beschreibung des atomaren Systems wurde das Jaynes-Cummings-Modell vorgestellt. Die Wechselwirkung von Licht und Materie wurde anschließend im Dichtematrixformalismus beschrieben, welcher die komplette statistische Information des Systems beinhaltet. Mittels Born-Markov- und Rotating-Wave-Approximation wurden Bewegungsgleichungen für die Matrixelemente hergeleitet. Die Wechselwirkung des Gesamtsystems mit der Umgebung wurde durch geeignete Reservoir für die Prozesse der Emission in nichtlasende Moden, Resonatorverluste und den Pumpprozess im Lindblad-Formalismus modelliert. Somit ergab sich insgesamt als Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem die Liouville-von-Neumann-Gleichung.

Anschließend wurde im dritten Kapitel die auf Glauber zurückgehende Beschreibung der Kohärenz von Lichtfeldern dargestellt, welche den Grad der Kohärenz des Feldes anhand der Werte von verschiedenen Feld-Feld-Korrelationen misst. Im Rahmen dieser Beschreibung wurden die unterschiedlichen, zum Teil nichtklassischen, Lichttypen vorgestellt und das Phänomen des Bunching- bzw- Antibunching-Verhaltens von Photonen erläutert. Im Folgenden wurde das Wiener-Khintchine-Theorem beschrieben, welches den Zusammenhang zwischen den Feld-Feld-Korrelationen und den Spektren des Systems beschreibt. Zur Berechnung dieser Spektren wurde das Quanten-Regressions-Theorem vorgestellt und auf die konkreten Fälle angewandt.

Als Modellsysteme des Ein-Atom-Lasers wurden im Kapitel vier die Gesamtsysteme aus atomarem Zwei- bzw. Vier-Niveau-System motiviert. Für das Vier-Niveau-System wurde dazu zunächst die Liouville-von-Neumann-Gleichung hergeleitet und die Unterschiede zum vorher behandelten Zwei-Niveau-System erläutert. Für beide Gesamtsysteme wurde jeweils die Bedeutung des Dephasings und die in diesem Kontext auftretenden Kopplungsregimes erläutert sowie der oft zitierte β -Faktor eingeführt.

Anschließend wurden im fünften Kapitel die Ergebnisse der Simulation des zuvor beschriebenen Zwei-Niveau-Systems dargestellt und diskutiert. Es zeigte sich, dass der Pumpvorgang durch seinen konkreten Einfluss auf die Laserniveaus dephasierend wirkt und sich somit das Kopplungsregime mit der Pumprate ändert. Diese Pumpdephasierung bewirkt einen als Quenching bezeichneten Effekt, der das Ausgehen des

Lasers bei zu großen Pumpraten beschreibt. Dieser Effekt drückt sich sowohl in der Kennlinie der mittleren Photonenzahl im Resonator als auch in den Spektren und den Korrelationen des elektromagnetischen Feldes aus. Das vom Zwei-Niveau-System emittierte Licht zeigte für alle Bereiche der Kennlinie Bunching-Verhalten der Photonen, also das Auftreten von Photonenhäufungen.

Im sechsten Kapitel der Thesis wurden die Ergebnisse der Simulation des Vier-Niveau-Systems vorgestellt und mit denen des Zwei-Niveau-System verglichen. Dabei offenbarte sich, dass die Änderung im Pumpprozess gravierende Unterschiede im Verhalten des Systems bewirkt. Das Vier-Niveau-System zeigt dabei in der Input-Output-Kennlinie ein Sättigungs- statt ein Quenching-Verhalten für große Pumpraten. Da das Kopplungsregime sich im Vier-Niveau-System nicht mehr mit der Pumprate ändert, wurde als Abschluss der Thesis das Verhalten des Vier-Niveau-Systems im Regime starker Kopplung untersucht. Dabei zeigte sich, dass sich der Kopplungsbereich deutlich auf die spektralen Eigenschaften, nicht aber auf die statistischen Eigenschaften des Systems auswirkt. Das Emissionsspektrum des Vier-Niveau-Systems zeigt für hinreichend große Pumpraten eine Triplett-Struktur, während das entsprechende Fluoreszenzspektrum eine Multiplett-Struktur aufweist. Beide Strukturen werden durch die dressed states und die An- bzw. Abwesenheit des Resonators erklärt. Das Vier-Niveau-System zeigte im Regime starker Kopplung Emission von Licht mit Antibunching-Verhalten.

AUSBLICK

Das in dieser Thesis behandelte System aus einem Ladungsträger auf maximal vier atomaren Energieniveaus in einem Resonator, welcher auf genau eine Mode des elektromagnetischen Feldes abgestimmt ist, lässt sich auf verschiedene Arten erweitern. Zunächst ist es realistischer, dass der Resonator nicht exakt auf eine Mode abgestimmt ist, weshalb sich eine Berücksichtigung von mehreren Moden des Feldes anbietet. Eine nächste Erweiterung wäre die Berücksichtigung weiterer Ladungsträger im atomaren System. Um diese Situation möglichst realistisch zu modellieren, ist es sinnvoll, die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Ladungsträgern zu berücksichtigen. Um aktuellen experimentellen Bemühungen gerecht zu werden, könnte das System dahingehend umgeformt werden, dass es statt eines Ein-Atom-Lasers einen Halbleiter-Quantenpunkt-Laser beschreibt. Dabei würden die inneren atomaren Niveaus den niedrigsten lokalisierten Zuständen der Elektronen bzw. Löcher entsprechen, die äußeren Niveaus den entsprechenden angeregten lokalisierten Zuständen. Der Pumpprozess würde hier der Anregung von Ladungsträgern in den wetting layer (delokalisierte Zustände der Unterlage) mit anschließender Relaxation in den angeregten lokalisierten Zustand entsprechen, die Emission eines Photons würde der Rekombination eines Excitons entsprechen. Ein weiterer Schritt wäre die Modellierung von mehreren, über das elektromagnetische Feld wechselwirkenden, atomaren Systemen (Superradianz), welche ein Modell für durch die Natur der Wachstumsverfahren statistisch auf einem Unterlagenmaterial verteilte Quantenpunkte sind.

LITERATURVERZEICHNIS

- [AGS66] FT Arecchi, E. Gatti, and A. Sona. Time distribution of photons from coherent and Gaussian sources. *Physics Letters*, 20(1):27–29, 1966. [cited at p. 25]
- [AGU⁺08] S. Ates, C. Gies, S. M. Ulrich, J. Wiersig, S. Reitzenstein, A. Löffler, A. Forchel, F. Jahnke, and P. Michler. Influence of the spontaneous optical emission factor beta on the first-order coherence of a semiconductor microcavity laser. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 78(15):155319, 2008. [cited at p. 21]
- [AS82] Y. Arakawa and H. Sakaki. Multidimensional quantum well laser and temperature dependence of its threshold current. *Applied Physics Letters*, 40(11):939–941, 1982. [cited at p. 1]
- [BBB⁺04] A. D. Boozer, A. Boca, J. R. Buck, J. McKeever, and H. J. Kimble. Comparison of theory and experiment for a one-atom laser in a regime of strong coupling. *Phys. Rev. A*, 70(2):023814, 2004. [cited at p. 1]
- [Boh20] N. Bohr. Über die serienspektra der elemente. *ZS. f. Phys.*, 2(5):423–469, 1920. [cited at p. 4]
- [BSKM⁺96] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, JM Raimond, and S. Haroche. Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity. *Physical Review Letters*, 76(11):1800–1803, 1996. [cited at p. 10]
- [BT56] R.H. Brown and RQ Twiss. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 177(4497):27–29, 1956. [cited at p. 22]
- [Car93] H. Carmichael. *An Open System Approach to Quantum Optics*. Springer, 1993. [cited at p. 29]
- [Car99] H. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics*. Springer, 1999. [cited at p. 15]
- [CO03] H. Carmichael and L. A. Orozco. Single atom lasers orderly light. *Nature*, 425(11):246–247, 2003. [cited at p. 1]
- [CRP04] J.P. Clemens, P.R. Rice, and L. M. Pedrotti. Spectra of single-atom lasers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 21(11):2025–2034, 2004. [cited at p. 1, 28]
- [FGB⁺08] J. M. Fink, M. Göppel, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, A. Blais, and A. Wallraff. Climbing the jaynes-cummings ladder and observing its $\sqrt{n + 1}$ -nonlinearity in a cavity qed system. *Nature*, 454(7202):315–318, 2008. [cited at p. 10]
- [GBM⁺93] C. Ginzel, H.J. Briegel, U. Martini, B.G. Englert, and A. Schenzle. Quantum optical master equations: The one-atom laser. *Physical Review A*, 48(1):732–738, 1993. [cited at p. 1, 28]

- [Gla63a] Roy J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131(6):2766–2788, 1963. [cited at p. 23]
- [Gla63b] Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130(6):2529–2539, 1963. [cited at p. 19]
- [GWLJ07] C. Gies, J. Wiersig, M. Lorke, and F. Jahnke. Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers. *Physical Review A*, 75(1):13803, 2007. [cited at p. 35]
- [JC63] ET Jaynes and FW Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, 1963. [cited at p. 6]
- [JGC⁺99] B. Jones, S. Ghose, J. Clemens, P. Rice, and L. Pedrotti. Photon statistics of a single atom laser. *Phys. Rev. A*, 60(4):3267–3275, 1999. [cited at p. 33, 35]
- [Khi34] A. Khintchine. Korrelationstheorie der stationären stochastischen prozesse. *Mathematische Annalen*, 109(1), 1934. [cited at p. 28]
- [KK07] T.B. Karlovich and S.Y. Kilin. Auto-and cross-correlation functions of a one-atom laser in a regime of strong coupling. *Optics and Spectroscopy*, 103(2):280–290, 2007. [cited at p. 29]
- [Lax63] M. Lax. Formal theory of quantum fluctuations from a driven state. *Phys. Rev.*, 129(5):2342–2348, 1963. [cited at p. 29]
- [LMW97] M. Löffler, G. Meyer, and H. Walther. Spectral properties of the one-atom laser. *Phys. Rev. A*, 55(5):3923–3930, 1997. [cited at p. 1, 29, 36]
- [Lou03] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, 2003. [cited at p. 26]
- [LUE94] N N Ledentsov, V M Ustinov, and A Yu. Egorov. Optical properties of heterostructures with InGaAs-GaAs quantum clusters. *Semiconductors (Engl. Transl.)*, 28(8):832–4, 1994. [cited at p. 1]
- [MBB⁺04] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, R. Miller, J. R. Buck, A. Kuzmich, and H. J. Kimble. Deterministic Generation of Single Photons from One Atom Trapped in a Cavity. *Science*, 303(5666):1992–1994, 2004. [cited at p. 1]
- [MBBB03] J. McKeever, A. Boca, AD Boozer, and JR Buck. Experimental realization of a one-atom laser in the regime of strong coupling. *Nature*, 425:268–271, 2003. [cited at p. 1, 33, 36]
- [Mes99] D. Meschede. *Optik, Licht und Laser*. Teubner Studienbücher Physik, 1999. [cited at p. 6]
- [MS92] Y. Mu and CM Savage. One-atom lasers. *Physical Review A*, 46(9):5944–5954, 1992. [cited at p. 1, 35]
- [MS99] P. Meystre and M. Sargent. *Elements of Quantum Optics*. Springer, 1999. [cited at p. 9, 14, 23]
- [MW95] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995. [cited at p. 23, 26]
- [NKI⁺09] M. Nomura, N. Kumagai, S. Iwamoto, Y. Ota, and Y. Arakawa. Photonic crystal nanocavity laser with a single quantum dot gain. *Opt. Express*, 17(18):15975–15982, 2009. [cited at p. 1]

- [PDLS⁺99] I. Protsenko, P. Domokos, V. Lefèvre-Seguin, J. Hare, JM Raimond, and L. Davidovich. Quantum theory of a thresholdless laser. *Physical Review A*, 59(2):1667–1682, 1999. [cited at p. 62]
- [Per91] Jan Perina. *Quantum statistics of linear and nonlinear optical phenomena*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht [u.a.], 2., completely rev. ed edition, 1991. [cited at p. 26]
- [RC94] P.R. Rice and H. Carmichael. Photon statistics of a cavity-QED laser: A comment on the laser–phase-transition analogy. *Physical Review A*, 50(5):4318–4329, 1994. [cited at p. 50, 62]
- [Rei08] Johann Peter Reithmaier. Strong exciton-photon coupling in semiconductor quantum dot systems. *Semiconductor Science and Technology*, 23(12):123001, 2008. [cited at p. 28]
- [SAZ⁺99] Marlan O. Scully, Author, M. Suhail Zubairy, Author, Ian A. Walmsley, and Reviewer. Quantum optics. *American Journal of Physics*, 67(7):134, 1999. [cited at p. 26]
- [SG88] A. M. Smith and C. W. Gardiner. Phase-space method without large-n scaling for the laser and optical bistability. *Phys. Rev. A*, 38(8):4073–4086, 1988. [cited at p. 1]
- [ST58] A. L. Schawlow and C. H. Townes. Infrared and optical masers. *Phys. Rev.*, 112(6):1940–1949, 1958. [cited at p. 28]
- [Ste09] A. Steinhoff. *Bachelorarbeit: Photonenstatistik des Ein-Atom-Laser*. Universität Bremen, 2009. [cited at p. 15, 56, 57, 61]
- [WGJ⁺09] J. Wiersig, C. Gies, F. Jahnke, Assmann M., T. Berstermann, M. Bayer, C. Kistner, S. Reitenstein, C. Schneider, S. H fling, A. Forchel, C. Kruse, J. Kalden, and D. Hommel. Direct observation of correlations between individual photon emission events of a microcavity laser. *Nature*, 460:245–249, 2009. [cited at p. 22, 27]
- [YB89] H. Yokoyama and SD Brorson. Rate equation analysis of microcavity lasers. *Journal of Applied Physics*, 66:4801, 1989. [cited at p. 15]
- [You04] Thomas Young. The bakerian lecture: Experiments and calculations relative to physical optics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 94:1–16, 1804. [cited at p. 22]
- [ZRSB98] J. Zeller, W. Rudolph, and M. Sheik-Bahae. Theoretical and experimental investigation of a quenched cavity laser with saturable absorber. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, 66(3):295–303, 1998. [cited at p. 35]

ANHANG

DIPOL-NÄHERUNG

Die Ankopplung eines Lichtfeldes an Materie (Elektron) erfolgt in der Elektrodynamik durch die sogenannte Minimalkopplung: Im Hamiltonoperator werden Vektorpotential \vec{A} und Skalarpotential ϕ des elektromagnetischen Feldes eingeführt.

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 \mapsto \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi, \quad (7.1)$$

wobei m die Elektronenmasse, e die Elektronenladung, c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ der Impulsoperator ist. Das elektromagnetische Feld sei gegeben durch eine ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (7.2)$$

Für Licht im optischen Spektralbereich und eine räumlichen Ausdehnung der Elektronenaufenthaltswrscheinlichkeit des Elektrons von einem Bohrschen Radius (a_B) ist

$$|\vec{k}| |\vec{r}| = \frac{2\pi a_B}{\lambda} \approx 10^{-4}, \quad (7.3)$$

wodurch die räumliche Variation des elektrischen Feldes vernachlässigt werden kann und die Näherung

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \approx \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (7.4)$$

gültig ist. Der Name der Näherung wird klar, wenn man den Zusammenhang des elektrischen Feldes mit seinen Potentialen betrachtet und sich den Hamiltonian ansieht. Es ist

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi - \partial_t \vec{A}, \quad (7.5)$$

wodurch klar wird, dass

$$\phi = -\vec{r} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = -\vec{r} \vec{E} \quad \vec{A} = 0 \quad (7.6)$$

eine triviale Lösung für die Potentiale ist. Der Hamiltonian wird dadurch zu

$$H = H_0 + H_{WW} = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - e\vec{r}\vec{E}, \quad (7.7)$$

worin $e\vec{r} = \vec{d}$ der Dipoloperator ist. Die Wechselwirkung drückt sich also durch den Dipoloperator (bzw. dessen Matrixelemente) aus, was den Namen der Näherung begründet.

HERLEITUNG DER VON-NEUMANN-GLEICHUNG

Ableiten der Definition der Dichtematrix nach der Zeit liefert

$$\dot{\rho} = |\dot{\psi}\rangle \langle \psi| + |\psi\rangle \langle \dot{\psi}|. \quad (7.8)$$

Darin wird die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi\rangle \quad (7.9)$$

eingesetzt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [H |\psi\rangle \langle \psi| - |\psi\rangle \langle \psi| H] \\ &= -\frac{i}{\hbar} [H\rho - \rho H] \end{aligned} \quad (7.10)$$

und damit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho], \quad (7.11)$$

die von-Neumann-Gleichung.

BERECHNUNG VON τ AUS DER DICHTEMATRIX

Für das Zwei-Niveau-System ist die Berechnung folgendermaßen. Adiabatische Eliminierung der Zeitableitung der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} &= -i(\omega - \Omega) \rho_{\alpha n, \beta n+1} - \frac{i}{\hbar} \sqrt{n+1} (g\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - g\rho_{\alpha n, \alpha n}) \\ &\quad + \frac{\kappa}{2} (2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \rho_{\alpha n+1, \beta n+2} - (2n+1)\rho_{\alpha n, \beta n+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2\tau_{nl}} (-\rho_{\alpha n, \beta n+1}) + \frac{P}{2} (-\rho_{\alpha n, \beta n+1}) \approx 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

und die Annahme einer konstanten Dephasierung durch die Resonatorverluste

$$\frac{\kappa}{2} (2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} \rho_{\alpha n+1, \beta n+2} - (2n+1)\rho_{\alpha n, \beta n+1}) \approx -\frac{\kappa}{2} \rho_{\alpha n, \beta n+1} \quad (7.13)$$

liefert für die Nebendiagonalelemente

$$\rho_{\alpha n, \beta n+1} = \frac{ig\sqrt{n+1}}{\hbar\alpha} (\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - \rho_{\alpha n, \alpha n}) \quad (7.14)$$

$$\rho_{\beta n+1, \alpha n} = \rho_{\alpha n, \beta n+1}^* \quad (7.15)$$

mit

$$\alpha = i(\omega - \Omega) + \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}} + \frac{P}{2}. \quad (7.16)$$

Dies eingesetzt in die Gleichungen für die Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix

$$\partial_t \rho_{\alpha n, \alpha n} = -\frac{i}{\hbar} g\sqrt{n+1} \rho_{\beta n+1, \alpha n} + \frac{i}{\hbar} g\sqrt{n+1} \rho_{\alpha n, \beta n+1} + \wp, \quad (7.17)$$

worin \wp die Dissipationsterme in der Gleichung der Hauptdiagonalelemente abkürzt, liefert

$$\partial_t \rho_{\alpha n, \alpha n} = \left[-\frac{|g|^2(n+1)}{\hbar^2 \alpha^*} - \frac{|g|^2(n+1)}{\hbar^2 \alpha} \right] (\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - \rho_{\alpha n, \alpha n}) + \wp \quad (7.18)$$

$$= -\frac{|g|^2(n+1)}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha} \right) (\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - \rho_{\alpha n, \alpha n}) + \wp \quad (7.19)$$

$$= -\frac{|g|^2(n+1)}{\hbar^2} \frac{\operatorname{Re}\{\alpha\}}{|\alpha|^2} (\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - \rho_{\alpha n, \alpha n}) + \wp. \quad (7.20)$$

Damit ist die Zerfallsrate in die Lasermode τ :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{\operatorname{Re}\{\alpha\}}{|\alpha|^2} \quad (7.21)$$

$$\stackrel{\delta=0}{=} \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\operatorname{Re}\{\alpha\}}, \quad (7.22)$$

wobei die letzte Gleichung für den Resonanzfall ($\delta = 0$) gilt. Ausgeschrieben lautet die Zerfallsrate τ für den Resonanzfall also:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}} + \frac{P}{2}}. \quad (7.23)$$

Für das Vier-Niveau-System ist die Rechnung analog, allerdings sind der Pumpmechanismus und das Lasern entkoppelt, wodurch sich im Resonanzfall

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{2}{\kappa + \gamma_{32} + \gamma_{21}} \quad (7.24)$$

ergibt. Anzumerken ist, dass der Einstreuprozess in die Laserniveaus von $|4\rangle$ nach $|3\rangle$ mit der Rate γ_{43} keinen dephasierenden Einfluss hat, der Ausstreuoprozess von $|2\rangle$ nach $|1\rangle$ mit der Rate γ_{21} hingegen schon.

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Verwendung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher Form oder auszugsweise im Rahmen anderer Prüfungen noch nicht vorgelegt worden.

Bremen, 25. März 2010

Elias Goldmann