

Universität Bremen  
Fachbereich 01  
Institut für Theoretische Physik

# Quantenstatistische Beschreibung des Ein-Atom-Lasers

Bachelorthesis, vorgelegt von

**Elias Goldmann**

1. Gutachter	Prof.Dr. Frank Jahnke
2. Gutachter	Prof.Dr. Gerd Czycholl
Matrikelnummer	2044432

Bremen, 30. Juli 2008

## **Zusammenfassung**

In der vorliegenden Arbeit werden die Lasereigenschaften eines Einatom-Emitters im Jaynes-Cummings-Modell untersucht. Dieses beinhaltet ein quantenmechanisch beschriebenes atomares Zwei-Niveau-System in Wechselwirkung mit einer Mode des quantisierten Lichtfelds, welches an externe Reservoirs gekoppelt ist. Das Gesamtsystem wird im Dichtematrixformalismus behandelt; die Ankopplung der externen Reservoirs erfolgt durch Lindblad-Terme. Anhand der Dichtematrix werden Dissipationsprozesse, die Charakterisierung der Laseraktivität durch die Korrelationsfunktion und die Lichtstatistik sowie die Auswirkung nichtresonanter Anregung untersucht. Aus der vollen Dichtematrixtheorie werden die oft verwendeten Ratengleichungen für Laser hergeleitet. Die Ratengleichungen liefern dabei nur eine stark eingeschränkte Information über das System und basieren auf zusätzlichen Näherungen. Die numerische Auswertung der Ratengleichungen liefert für das betrachtete System eine gute Übereinstimmung mit den entsprechenden Ergebnissen der Dichtematrixtheorie.

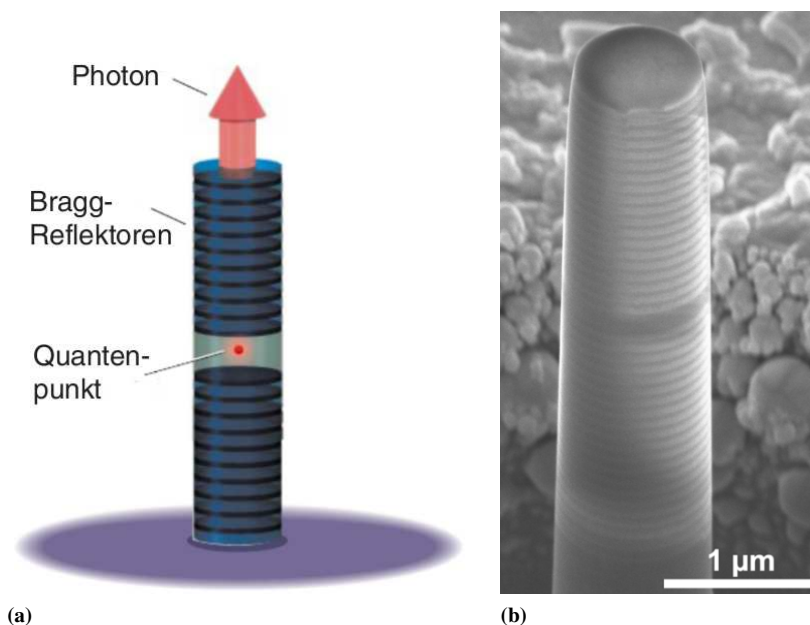
# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	4
2.1.1	Quantisierung des elektromagnetischen Felds . . . . .	4
2.1.2	Dichteoperator . . . . .	5
2.1.3	Kohärenz, Photonenstatistiken und Photonen(anti-)bunching . . . . .	7
2.2	Wechselwirkung im Jaynes-Cummings-Modell . . . . .	12
2.2.1	Jaynes-Cummings-Modell . . . . .	12
2.2.2	Rotating Wave Approximation . . . . .	14
2.2.3	Rabioszillationen . . . . .	15
2.2.4	Dichteoperator für das Jaynes-Cummings-Modell . . . . .	16
2.2.5	Bewegungsgleichungen des Dichteoperators . . . . .	16
2.2.6	Bewegungsgleichung für Zustände ohne Dissipation . . . . .	17
2.2.7	Mastergleichungen . . . . .	17
2.3	Wechselwirkung mit dem Reservoir . . . . .	19
2.3.1	Ankopplung eines Reservoirs . . . . .	19
2.3.2	Vollständige Bewegungsgleichungen des Dichteoperators . . . . .	21
2.3.3	Mastergleichungen mit Ankopplung des Reservoirs . . . . .	22
2.3.4	Ratengleichungen . . . . .	22
2.3.5	Dephasierung . . . . .	23
2.3.6	Zum $\beta$ -Faktor . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>26</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	26
3.2	Dichtematrix . . . . .	26
3.2.1	Freie Dichtematrix und Rabioszillationen . . . . .	27
3.2.2	Dissipation . . . . .	28
3.2.3	Volle Dichtematrix: Dissipation und Pumpen . . . . .	29
3.2.4	Nichtresonante Anregung (Verstimmung) . . . . .	31
3.3	Ratengleichungen . . . . .	32
3.4	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	34

<b>4 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>36</b>
4.1 Zusammenfassung . . . . .	36
4.2 Ausblick . . . . .	37
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>38</b>
<b>Anhang</b>	<b>40</b>

# KAPITEL 1

## EINFÜHRUNG



**Abbildung 1.1:** Gegenstand aktueller Forschung: (a) Quantenpunkt in einer vertikalen Mikrokanalstruktur mit mehreren Halbleitermaterialschichten als Modell eines Mikrolasers ( Quelle: [Vah03]). (b) Experimentelle Realisierung (Rasterelektronenmikroskopaufnahme, Quelle: [LSG<sup>+</sup>05]).

Durch die Nachfrage nach immer schnelleren Schaltelementen in der Optoelektronik und die fortschreitende Miniaturisierung bemüht sich die Forschung auf dem Gebiet der Lasertechnologie in jüngster Zeit um die Herstellung immer kleinerer und effektiverer Laser, die sich möglichst genau kontrollieren lassen sollen. In anderen Kontexten ist die Erzeugung und Kontrolle einzelner Photonen von Interesse (zum Beispiel in der Quanteninformationstheorie). Seit ca. 1992 werden theoretische Modelle zur Beschreibung von hocheffektiven Einatom-Lasern behandelt (siehe [MS92],[GBM<sup>+</sup>93]). Die experimentelle Realisierung erfolgte zunächst, indem einzelne Atome in Licht- oder Paulfallen eingeschlossen wurden und zusätzlich mit einem Mikrowellenresonator wechselwirken. Neuartige Entwicklungen auf dem Gebiet der Halbleiter-Nanostrukturen machen es seit kurzem möglich, einzelne Quantenpunkte in optischen Mikroresonatoren zu platzieren. Die Quantenpunkte liefern dabei einerseits dreidimensionalen Einschluss der Ladungsträger und werden deshalb oft als künstliche Atome bezeichnet. Andererseits bilden die optischen Resonatoren

einen dreidimensionalen Einschluss des elektromagnetischen Feldes. Das zentrale Merkmal der genannten Realisierungen ist ein Übergang zwischen zwei Energieniveaus im optischen Bereich, siehe Abb. 1.2a, S. 3. Realisiert werden können nur Mehrniveausysteme, da für ein System mit nur zwei Niveaus aufgrund des Pauli-Blockings beim optischen Pumpen keine Besetzungsinversion möglich ist. Für einen Einstieg in die Theorie genügt es aber, jeweils nur die beiden Niveaus in einem atomaren Modell zu betrachten, die resonant mit der Lasermode wechselwirken. Dies ist sinnvoll, wenn die Dynamik der übrigen Niveaus in effektiver Weise im Rahmen einer adiabatischen Eliminierung beschrieben werden kann, die in dieser Arbeit im Detail erläutert wird.

### LASER: EINFÜHRUNG

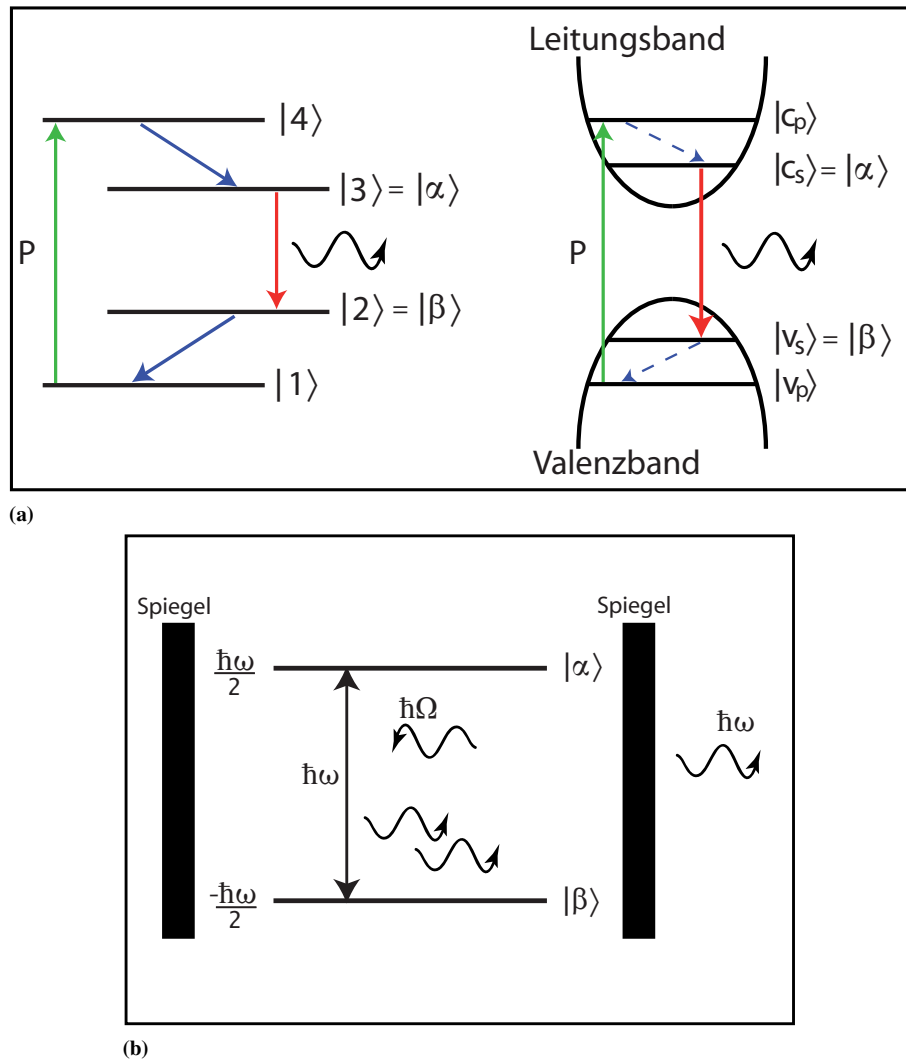
Ein System, das durch seine physikalischen Eigenschaften sowie die es umgebenden Aufbauten in der Lage ist, die eigene Lichtemission zu verstärken, nennt man Laser (Light amplification by stimulated emission of radiation). Ein Lasersystem besteht aus vier Komponenten: aktives Medium, Resonator, Reservoir (Umgebung) und einem Anregungsprozess des aktiven Materials (Energiepumpe). Ein aktives Medium kann zum Beispiel durch ein Halbleitermaterial, Gasgemische oder Quantenpunkte realisiert sein. Das aktive Medium enthält mehrere Energieniveaus, von denen zwei Niveaus eine Energiedifferenz im optischen oder nahe dem optischen Bereich aufweisen, sowie Elektronen, die zwischen den Niveaus wechseln können und bei dem Übergang vom höheren zum niedrigeren Niveau Licht emittieren. Für diese Lichtemission wird zwischen spontaner und induzierter Emission unterschieden. Letztere ist der treibende Vorgang beim Laser, da ein Photon ein angeregtes Atom zur Emission eines weiteren Photons der selben Frequenz, Phase und Ausbreitungsrichtung anregen kann. Durch das Einschliessen des aktiven Mediums mit Spiegeln (Resonator) können emittierte Photonen auf das aktive Medium zurückgelenkt werden und dadurch erneute Emission stimulieren. Ist ein Spiegel in einer bestimmten Richtung zu einem Bruchteil durchlässig, so kann in diese Richtung Licht aus dem System in die Umgebung gelangen. Die Eigenschaften dieses Lichtes sind vor allem die hohe Kohärenz und die hohe Leistungsdichte. In konventionellen Lasern tritt im stationären Betrieb mit wachsender Pumprate eine Laserschwelle auf, bei der ein Übergang von spontaner zu dominant stimulierter Emission stattfindet. Dies ist gegeben, wenn im Mittel mehr angeregte als nicht angeregte Niveaus besetzt sind (sog. Besetzungsinversion). Besetzungsinversion wird durch zusätzliches Anregen von Elektronen durch die Energiepumpe erreicht, z. B. durch Einstrahlung von Licht, also die Absorption von Lichtquanten durch die Elektronen. Um zu erkennen, ob sich ein Lasersystem unter- oder oberhalb der Laserschwelle befindet, wird üblicherweise die Input-Output-Kennlinie des Systems betrachtet. Eine genaue Untersuchung von Lasern auf der Basis von Resonatoren sehr hoher Güte (wie sie für einzelne Atome als aktives Medium notwendig sind) zeigt jedoch, dass es in diesen Systemen keine klar definierte Laserschwelle in der Input-Output-Kennlinie gibt<sup>1</sup>. Daher ist es sinnvoll, ein weiteres Merkmal zur Beschreibung des Systemzustands zu verwenden, die Photonenstatistik. Sie beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der emittierten Photonen und weist auch für schwellenlose Laser einen Übergang auf.

### VORGEHEN

Im Folgenden werden Modelle vorgestellt und berechnet, welche die vier Elemente aktives Medium, Resonator, Reservoir und Energiepumpe sowie die Lasereigenschaften des Gesamtsystems beschreiben. Nach dieser Einführung werden in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen der Feldquantisierung, des Dichtematrixformalismus, der Photonenstatistiken und der Licht-Materie-Wechselwirkung im Jaynes-Cummings-

---

<sup>1</sup>Sogenannte „thresholdless laser“ (vgl. [PDLS<sup>+</sup>99],[Yok92]) die allerdings noch nicht realisiert wurden.



**Abbildung 1.2:** (a) Modelle, in denen das betrachtete Zwei-Niveau-System enthalten ist. Links: atomarer Übergang, rechts: Halbleiter-Quantenpunkt mit vier elektronischen Niveaus. Mit  $P$  ist jeweils der Pumpvorgang gekennzeichnet, blaue Übergänge sind strahlungslos, rote Übergänge sind die Laserübergänge;  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  sind die in der Arbeit betrachteten inneren Niveaus.  $|c\rangle$  und  $|v\rangle$  kennzeichnen das Leitungs- und Valenzband,  $s$  und  $p$  sind die Indizes für die Energiezustände im Halbleitermodell. In Abb. (b) ist das in der Arbeit behandelte Modell der beiden inneren Niveaus  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  im Jaynes-Cummings-Modell dargestellt. Darin sind die Photonen von dem durch Spiegel repräsentierten Resonator eingeschlossen. Diese Resonatormode wechselwirkt mit den atomaren Niveaus.

Modell (siehe Abb. 1.2b, S. 3) beschrieben. Um die Umgebung des Systems im Dichtematrixformalismus in das Modell zu integrieren, werden externe Reservoirs durch Lindblad-Terme angekoppelt. Aus der Formulierung der Dichtematrix zur Beschreibung des Gesamtsystems werden anhand von Näherungen einfache Raten- und Mastergleichungen hergeleitet. In Kapitel 3 wird die Berechnung der vollen Dichtematrix sowie der Ratengleichungen gezeigt und die Ergebnisse verglichen. Abschließend wird die Arbeit in Kapitel 4 zusammengefasst und ein Ausblick auf einen möglichen Ausbau der Arbeit gegeben.

# KAPITEL 2

## THEORIE

### 2.1 GRUNDLAGEN

Im folgenden Abschnitt werden die Grundlagen der Feldquantisierung, des Dichtematrixformalismus und der Photonenstatistiken dargestellt. Im Anschluss wird die Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(\tau)$  eingeführt, um den Vergleich mit Experimenten führen zu können, in denen unter Anderem  $g^{(2)}(\tau)$  gemessen wird (vgl. z. B. [MBBB03]).

#### 2.1.1 QUANTISIERUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN FIELDS

Das klassische elektrische Feld einer einzelnen Mode der Frequenz  $\Omega$ , mit Ausbreitung in  $\vec{z}$ -Richtung und Polarisation in  $\vec{x}$ -Richtung, wird beschrieben durch

$$\vec{E}(x, t) = \vec{x}q(t)\sqrt{\frac{2\Omega^2}{\epsilon_0 V}} \sin(kz). \quad (2.1)$$

Dabei sei ein endliches Volumen  $V$  betrachtet,  $q(t)$  die zeitabhängige Feldamplitude und  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante. Über die Maxwellgleichung  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  ist das korrespondierende klassische Magnetfeld

$$\vec{B}(x, t) = \vec{y}\frac{\dot{q}(t)}{c^2 k}\sqrt{\frac{2\Omega^2}{\epsilon_0 V}} \cos(kz), \quad (2.2)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c$  und der Wellenzahl  $k$ . Die Hamiltonfunktion zur Beschreibung des elektromagnetischen Felds mit einer Mode ist gegeben durch das Integral über die Energiedichte

$$H = \frac{1}{2} \int_V dV [\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2] = \frac{1}{2} [\Omega^2 q^2 + p^2]. \quad (2.3)$$

Dabei sind  $p$  und  $q$  kanonisch konjugierte Variablen von Ort und Impuls. Um das Problem zu quantisieren, werden die klassischen Variablen laut Korrespondenzprinzip durch Operatoren ersetzt, die die Kommutatorrelation  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$  erfüllen. Die Einführung der Operatoren

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad , \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (2.4)$$



mit  $[b, b^\dagger] = 1$  und Identifizierung dieser Operatoren als Photonen-Erzeuger ( $b^\dagger$ ) bzw. -Vernichter ( $b$ ) liefert den quantisierten Hamiltonian des Lichtfelds, der formal einem harmonischen Oszillator der Frequenz  $\Omega$  gleicht:

$$H = \hbar\Omega \left[ b^\dagger b + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.5)$$

Die Eigenzustände dieses Hamiltonians sind die Photonenanzahlzustände  $|n\rangle$ . Die Wirkung der Operatoren  $b, b^\dagger$  auf diese Zustände ist gegeben durch

$$b |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad b^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (2.6)$$

womit folgt:

$$b^\dagger b |n\rangle = n |n\rangle. \quad (2.7)$$

Dabei garantieren die Wurzelterme die Normierung der Zustände. Die Anwendung von  $b(b^\dagger)$  verringert (erhöht) die Zahl der Photonen im System um eins; das Operatorprodukt  $b^\dagger b$  kann also als Photonenanzahl-operator interpretiert werden. Damit sind die Eigenwerte des Hamiltonians definiert durch

$$H |n\rangle = \hbar\Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle. \quad (2.8)$$

Ein Zustand  $|n\rangle$  des Lichtfeldes zu fester Photonenanzahl  $n$  entsteht durch  $n$ -maliges Anwenden des Erzeugers auf den Vakuumzustand  $|0\rangle$ :

$$(b^\dagger)^n |0\rangle = |n\rangle. \quad (2.9)$$

Formal ist der Zustand  $|n\rangle$  ein Element des Fockraums

$$\mathcal{H}_{Fock} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \dots \mathcal{H}_n \otimes \dots, \quad (2.10)$$

wobei  $\mathcal{H}_n$  der Hilbertraum zur Teilchenzahl  $n$  ist ( $\mathcal{H}_0$  ist der Vakuum-Hilbertraum). Der Fockraum lässt unterschiedliche Teilchenzahlen zu und ist deshalb geeignet die Photonenanzahlzustände  $|n\rangle$  darzustellen. Das quantisierte elektrische Feld wird damit wegen  $q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V}}(b + b^\dagger)$  zu

$$E(z, t) = \epsilon_\Omega (b + b^\dagger) \sin(kz) \quad \text{mit} \quad \epsilon_\Omega = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{\epsilon_0 V}}, \quad (2.11)$$

mit dem Feld  $\epsilon_\Omega$  pro Photon.

Im Allgemeinen müsste in (2.11) über alle Moden, Polarisationsrichtungen und Impulse  $|p| = \hbar k$  summiert werden, um alle möglichen Feldzustände behandeln zu können. Im Rahmen dieser Arbeit soll allerdings ein Resonator beschrieben werden, in dem die Licht-Materie-Wechselwirkung mit einer einzelnen Mode hoher Güte die Physik bestimmt. Andere Moden werden über die Ankopplung eines geeigneten Reservoirs beschrieben.

### 2.1.2 DICHTOPERATOR

Die Berechnungen in dieser Arbeit werden im Dichtematrixformalismus ausgeführt, da die Dichtematrix alle Informationen über ein zu untersuchendes System enthält und Bewegungsgleichungen für die Dichtematrixelemente berechnet werden können. Deshalb sollen im Folgenden der Dichteoperator und die zu-

gehörige Bewegungsgleichung vorgestellt werden.

#### ALLGEMEINE DEFINITION DES DICHTEOPERATORS

Systeme hoher Komplexität, zum Beispiel Ensembles in einem bestimmten Makrozustand, der durch verschiedene Mikrozustände realisiert werden kann, können oft nicht mehr mit endlichem Aufwand durch eine einfache Wellenfunktion beschrieben werden. Stattdessen wird zur Beschreibung der sogenannte Statistische Operator oder Dichteoperator  $\rho$  benötigt. Er ist definiert durch

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (2.12)$$

wobei die  $|\psi_n\rangle$  Zustände des Systems sind, die mit der Wahrscheinlichkeit  $p_n$  vorkommen. Der Dichteoperator ist hermitesch ( $\rho = \rho^*$ ), normiert ( $Sp\{\rho\} = 1$ ) und hat nicht-negative Erwartungswerte. Für reine Zustände ( $p_{n'} = 1$ ,  $p_{n \neq n'} = 0$ ) vereinfacht er sich zu  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  und ist somit ein reiner Projektor. Dass durch einen Dichteoperator die Größen eines Systems bestimmt sind, drückt sich unter Anderem darin aus, dass sich der Erwartungswert einer beliebigen Größe (Observablen)  $\hat{F}$  bestimmen lässt über

$$\langle \hat{F} \rangle = Sp\{\rho \hat{F}\}. \quad (2.13)$$

Damit sind die Erwartungswerte beliebiger Systemgrößen zu einem Zeitpunkt festgelegt. Die zeitliche Entwicklung des Dichteoperators und damit des Systems ist durch die von-Neumann-Gleichung (quantenmechanisches Analogon zur klassischen Liouville-Gleichung) bestimmt, die durch Einsetzen der zeitabhängigen Schrödingergleichung in die Definition des Dichteoperators entsteht (Für eine Herleitung siehe Anhang, S. 40):

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)]. \quad (2.14)$$

Die zeitliche Änderung des Dichteoperators ist also durch den Kommutator von Hamiltonian und Dichteoperator gegeben.

#### PHOTONENSTATISTIK

Beschreiben die Zustände  $|\psi_n\rangle$  in Gl. (2.12), S. 6 reine Photonenzustände  $|n\rangle$ , so ist  $p_n$  die Wahrscheinlichkeit das System im Zustand  $|n\rangle$  zu finden;  $p_n(n)$  ist dann die Photonenstatistik. Ist  $|\psi_n\rangle = |j\rangle \otimes |n\rangle = |j, n\rangle$  ein gekoppeltes System mit dem atomaren Anteil  $|j\rangle$  und dem photonischen Anteil  $|n\rangle$ , so müssen zunächst die atomaren Freiheitsgrade ausgespart werden, um die Photonenstatistik zu erhalten:

$$p_n = \rho_{nn} = \sum_j \rho_{jnjn}. \quad (2.15)$$

In dieser Arbeit werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$p_{jn} \equiv \rho_{jn,jn} \quad p_n = \sum_j p_{jn} \quad f_j = \sum_n p_{jn}. \quad (2.16)$$

Darin ist der erste Ausdruck die Wahrscheinlichkeit, das System im Zustand  $|j, n\rangle$  zu finden (Diagonalelemente der Dichtematrix sind Wahrscheinlichkeiten), der mittlere Ausdruck die Photonenstatistik ( $p_n = \rho_{nn}$ , durch Spurbildung über elektronische Zustände) und der letzte Ausdruck die atomare Besetzungs-

wahrscheinlichkeit, die durch Spurbildung über die Photonenzustände entsteht.

### 2.1.3 KOHÄRENZ, PHOTONENSTATISTIKEN UND PHOTONEN(ANTI-)BUNCHING

Um Aussagen über die Intensität und andere Größen treffen zu können, ist es in einem Lasersystem von Bedeutung, zu jedem Zeitpunkt die Eigenschaften des Systems zu kennen. Das wichtigste Merkmal zur Charakterisierung des Systemzustands ist die Photonenzustatistik. An ihr kann direkt abgelesen werden, ob sich das Lasersystem ober- oder unterhalb der Laserschwelle befindet, da diese Zustände eine definierte Photonenzustatistik haben. Im Folgenden werden die Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(\tau)$ , vier verschiedene Lichttypen und die dazugehörigen Photonenzustatistiken sowie das bunching/antibunching-Verhalten von Licht behandelt.

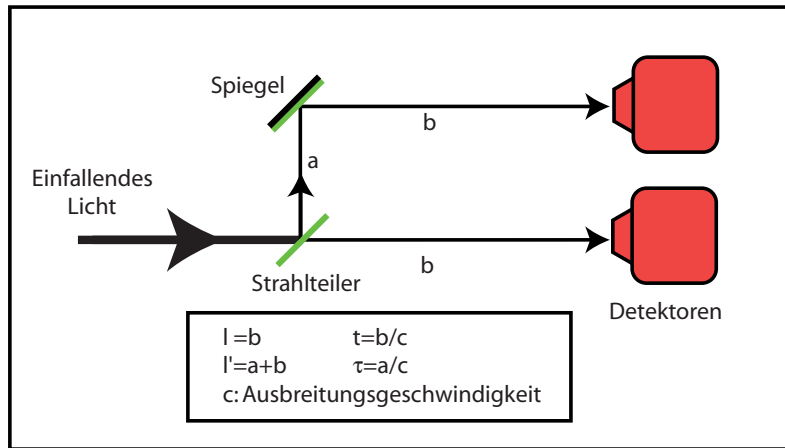
#### KOHÄRENZ UND KORRELATIONSFUNKTION

Bei der Behandlung von Lichtphänomenen wird zwischen kohärentem und inkohärentem Licht unterschieden. Als inkohärentes Licht werden solche Lichtwellen bezeichnet, die weder räumlich noch zeitlich eine feste Phasenbeziehung haben. Kohärentes Licht zeichnet sich durch eine feste Phasenbeziehung sowohl räumlich als auch zeitlich aus, was in entsprechenden Aufbauten Interferenzphänomene erzeugt. Inkohärentes Licht erzeugt in identischen Aufbauten nur eine gemittelte Intensität, die aus der Überlagerung aller auftretenden Phasen entsteht, aber keine räumlich und zeitlich festen Interferenzmuster. In der mathematischen Beschreibung des Lichts spiegelt sich die Kohärenz in der Photonenzustatistik wider. Diese gibt die Wahrscheinlichkeit  $p_n$  an,  $n$  Photonen in einem Zustand zu haben, also den Zustand  $|n\rangle$  zu messen (vgl. Gl. (2.8), S. 5). In Experimenten zur Quantenoptik wird häufig die sogenannte Korrelationsfunktion gemessen, um indirekt eine Aussage über die Photonenzustatistik und die Kohärenz im System zu erhalten und so eine Aussage über den Zustand eines Lasersystems zu treffen. Die Korrelationsfunktionen werden nach ihrem Grad (der prinzipiell beliebig hoch sein kann) unterschieden, wobei die Funktionen erster und zweiter Ordnung von besonderem Interesse sind: Die Korrelationsfunktion erster Ordnung beschreibt Interferenzphänomene, die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung beschreibt die Photonenzustatistik und das bunching/antibunching der Photonen. Für ein Feld einer einzigen Mode, wie es hier betrachtet wird, sind die ersten beiden Korrelationsfunktionen gegeben durch (vgl. [Car99]):

$$g^{(1)}(t, t + \tau) = \frac{\langle b^\dagger(t)b(t + \tau) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle} \quad (2.17)$$

$$g^{(2)}(t, t + \tau) = \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t + \tau)b(t + \tau)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2}, \quad (2.18)$$

mit den Photonenerzeugern und -vernichtern  $b^\dagger$  und  $b$ . Darin sind  $\langle b(t) \rangle, \langle b^\dagger(t + \tau) \rangle$  die Erwartungswerte der Operatoren zu Zeitpunkten  $t, t + \tau$  mit der Verzögerungszeit zwischen zwei Ereignissen  $\tau$  (siehe Abb. 2.1, S. 8). Damit ist  $\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle = \langle n \rangle$  die Wahrscheinlichkeit ein Photon zum Zeitpunkt  $t$  zu messen. Die Ausdrücke  $\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle$  in Gl. (2.17), S. 7 und  $\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2$  in Gl. (2.18), S. 7 garantieren die Normierung. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Eigenschaften des Lichts hinsichtlich der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung untersucht. In Abb. 2.1, S. 8 ist schematisch das Experiment zum Messen der Korrelationsfunktion dargestellt. Gemessen werden Photonen hinter einem Strahlteiler mit variabler Weglänge (Kohärenzlänge), wobei auch die einzelnen Terme in Gl. (2.17) und Gl. (2.18) deutlich werden: Ein Lichtstrahl wird in zwei Teilstrahlen aufgeteilt, die unterschiedlich lange Wege ( $l, l'$ ) bis zu einem Detektor laufen. So kann das Auftreffen von korrelierten Photonen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten  $t = \frac{l}{c}$  und  $t + \tau = \frac{l'}{c}$  (mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts  $c$ ) gemessen werden. Bevor auf die unterschiedlichen Aus-



**Abbildung 2.1:** Schematischer Aufbau des Hanbury-Brown-Twiss-Experiments (vgl. [BT56]) zur Messung der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung  $g^{(2)}(\tau)$ . Weiteres siehe Text.

prägungen der Korrelationsfunktion eingegangen wird, werden zunächst verschiedene Lichtarten und deren Photonenzustände dargestellt.

#### KOHÄRENTES LICHT

Die charakteristische Laseremission ist kohärentes Licht; das System wird dabei durch kohärente Zustände beschrieben. Kohärente Zustände sind solche, die der klassischen Beschreibung des Lichts am nächsten kommen, da sie Impuls- und Ortsunschärfe minimieren und somit nicht auseinanderlaufen. Ein kohärenter Zustand zeichnet sich dadurch aus, dass er ein Eigenzustand zum Vernichtungsoperator ist, was letztlich eine Konsequenz der Forderung ist, dass die Energien des quantenmechanischen und des klassischen Zustands identisch sind. In der Basis der Photonenzustände ist der kohärente Zustand gegeben durch

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.19)$$

wobei  $\alpha$  der Eigenwert des Zustands  $|\alpha\rangle$  bezüglich des Vernichtungsoperators ist (vgl. [MS99, Seite 335]). Dies führt zur Photonenzustandstatistik der kohärenten Zustände:

$$P_n^{ko} = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.20)$$

die einer Poisson-Verteilung entspricht (vgl. Abb. 2.2, S. 9 und [MW95, Seite 23]). Das Charakteristische an dieser Verteilung ist das Maximum bei  $|\alpha|^2$ .

#### THERMISCHES LICHT

Thermisches Licht ist das am häufigsten in der Natur vorkommende Licht, z.B. die Emission von Schwarzkörperstrahlern (Strahlern im thermischen Gleichgewicht). Auch die Emission eines Lasersystems unterhalb der Laserschwelle ist thermisches Licht. Der zugehörige (kanonische) Dichteoperator des durch Gl. (2.5), S. 5 beschriebenen Systems ist gegeben durch

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Sp}\{e^{-\beta H}\}} = \frac{e^{-\beta \hbar \sum_n \Omega_n b_n^\dagger b_n}}{\text{Sp}\{e^{-\beta \hbar \sum_n \Omega_n b_n^\dagger b_n}\}}, \quad (2.21)$$

wobei  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  mit der Boltzmannkonstanten  $k_B$  und der Temperatur  $T$  und  $Sp\{A\}$  die Spur von  $A$  ist. In der Basis der Photonenzustände ist der Dichteoperator für thermisches Licht gegeben durch

$$\rho = \sum_{nm} \rho_{nm} |n\rangle \langle m| \quad \text{mit} \quad \rho_{nm} = \frac{\langle n | e^{-\beta \hbar \sum_n \Omega_n b_n^\dagger b_n} | m \rangle}{\sum_n \langle n | e^{-\beta \hbar \sum_n \Omega_n b_n^\dagger b_n} | n \rangle} = e^{-\beta \hbar \Omega_n} (1 - e^{-\beta \hbar \Omega_n}) \delta_{nm}. \quad (2.22)$$

Die Hauptdiagonalelemente  $\rho_{nn}$  beschreiben die Wahrscheinlichkeit  $P_n$ , dass die Mode  $n$  Photonen enthält. Dadurch ergibt sich die thermische Photonenzustatistik (vgl. Abb. 2.2, S. 9 und [MW95, Seite 660]):

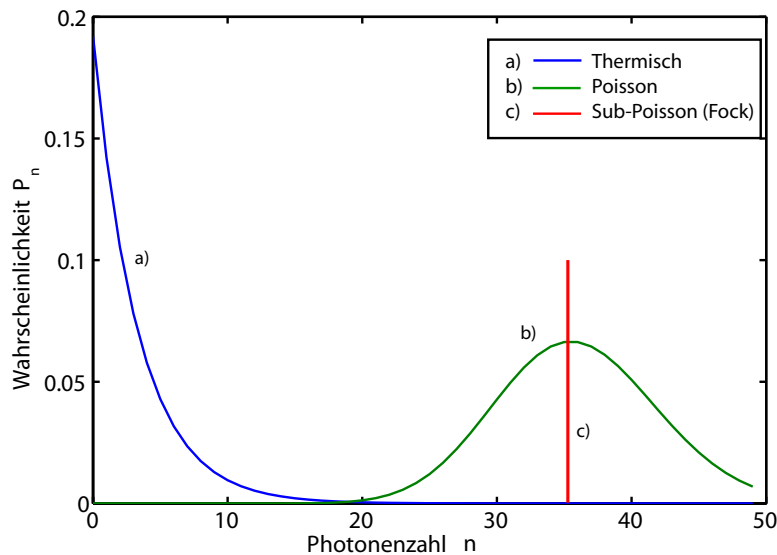
$$P_n^{th} = e^{-\beta \hbar \Omega_n} (1 - e^{-\beta \hbar \Omega_n}) \quad (2.23)$$

und über  $\langle n \rangle = \sum_n n P_n$  die zu erwartende Bose-Einstein-Verteilung. Das Charakteristische an der thermischen Verteilung ist das Maximum der Kurve bei  $n = 0$ .

#### SUB- UND SUPER-POISSONISCHES LICHT

Sub- und superpoissonisches Licht gehört zu den nichtklassischen Lichtarten. Das Licht eines Einatom-Emitters ist durch die sub-poissonische Photonenzustatistik charakterisiert. Das Charakteristische an diesem Emittor ist, dass der Einatom-Emitter nach der Emission eines Photons nicht sofort ein nächstes emittieren kann, sondern erst wieder angeregt werden muss. Dies drückt sich in der Photonenzustatistik darin aus, dass direkt nach dem Detektieren eines Photons die Wahrscheinlichkeit, ein anderes anzutreffen, Null ist. Die Zustände dieses Lichts sind die reinen Fockzustände  $|n\rangle$ , die Zustände fester Photonenzahl. Die zugehörige Statistik ist also ein Kronecker-Delta zu einer festen Photonenzahl:  $\delta_{n=\langle n \rangle}$ , vgl. Abb. 2.2, S. 9.

Unter super-poissonischem Licht versteht man Licht mit einer Verteilung zwischen der Bose-Einstein-Verteilung und der Poisson-Verteilung, also Licht im Übergang zwischen nichtlasendem und lasendem Zustand. Die zugehörige Verteilung ist nicht allgemein darstellbar, sondern kann verschiedene Verteilungsformen annehmen.



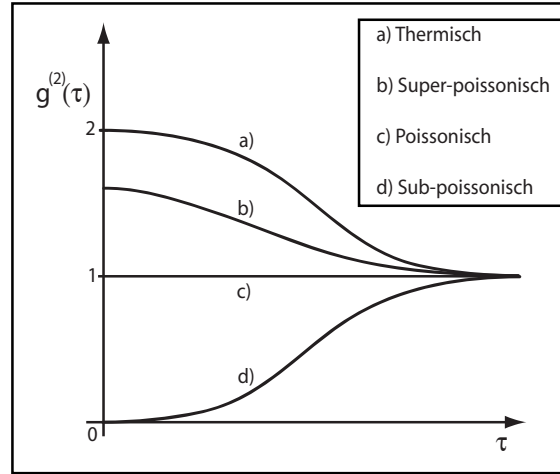
**Abbildung 2.2:** Qualitative Darstellung der Photonenzustatistik für a) thermisches b) kohärentes und c) sub-poissonisches Licht.

## PHOTONENBUNCHING UND -ANTIBUNCHING

Für die oben genannten Lichtarten zeigt sich bei Betrachtung der Korrelationsfunktion in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$  als allgemeines Verhalten, dass alle „Sorten“ von Licht (thermisch, poissonisch, sub-poissonisch, super-poissonisch) mit steigender Verzögerungszeit  $\tau$  ihre Korellation verlieren und

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g^{(2)}(\tau) = 1 \quad (2.24)$$

gilt (vgl. Abb. 2.3, S. 10). Wenn der Laufzeitunterschied im Strahlteilerexperiment sehr groß ist, kann



**Abbildung 2.3:** Qualitativer Verlauf der Korrelationsfunktion in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit  $\tau$ . Für große  $\tau$  werden alle Verteilungen unkorelliert, nehmen also den Wert 1 an (vgl. [AGS66]). Dargestellt sind a) thermisches Licht, b) poissonisches Licht, c) sub-poissonisches Licht und d) super-poissonisches Licht.

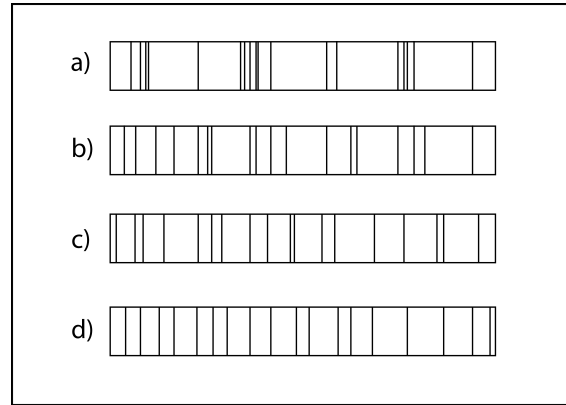
keine Korrelation mehr festgestellt werden. Um etwas über den Zustand eines Lasersystems zu erfahren (also welcher Lichttyp vorliegt), genügt es,  $g^{(2)}(\tau = 0)$  zu betrachten. Dies ist im stationären Regime unabhängig von  $t$  und kann dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} g^{(2)}(t, 0) &= \frac{\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle}{\langle b^\dagger b \rangle^2} = \frac{\langle b^\dagger b b^\dagger b \rangle - \langle b^\dagger b \rangle^2}{\langle b^\dagger b \rangle^2} \\ &= \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

wobei in der ersten Zeile die Kommutatorrelation  $[b, b^\dagger] = 1$  benutzt wird. Die zweite Zeile folgt aus der Wirkung der Photonenerzeuger und -vernichter auf die Lichtzustände (vgl. Gl. (2.7), S. 5). Der Zusammenhang zur jeweiligen Photonenzustand ist

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2} = \frac{\sum_n n^2 p_n - (\sum_n n p_n)^2}{(\sum_n n p_n)^2}, \quad (2.26)$$

wobei  $\langle n^2 \rangle = \sum_n n^2 p_n$  und  $\langle n \rangle = \sum_n n p_n$  verwendet wird. Ist also die Photonenzustand bekannt, so kann  $g^{(2)}(0)$  berechnet werden und somit die Simulation mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden. In



**Abbildung 2.4:** Photonenbunching und -antibunching für die verschiedenen Verteilungen. a) thermisches Licht, b) poissonisches Licht, c) sub-poissonisches Licht, d) super-poissonisches Licht. Dargestellt ist das Auftreffen von Photonen auf einen Detektor, aufgetragen gegen eine beliebige Zeitskala.

Abb. 2.3, S. 10 wird deutlich, dass  $g^{(2)}(0)$  nur positive Werte annimmt. Es ist:

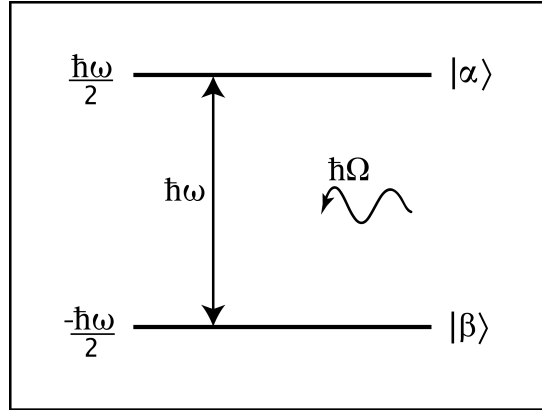
$$g^{(2)}(0) = \begin{cases} 2 & \text{für thermisches Licht,} \\ \in (1, 2] & \text{für super-poissonisches Licht,} \\ 1 & \text{für poissonisches Licht,} \\ \in (0, 1] & \text{für sub-poissonisches Licht,} \end{cases} \quad (2.27)$$

vgl. [Lou03, Seite 248]. Anhand der Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(0)$  kann also der in einem System vorliegende Lichttyp eindeutig abgelesen werden.

Wird der „zeitliche Verlauf“ der verschiedenen Lichttypen gemessen, also das Auftreffen von einzelnen Photonen auf einen Detektor, so kann ein erstaunliches Phänomen festgestellt werden: Thermisches Licht tritt in „Päckchen“ auf in dem Sinne, dass die Wahrscheinlichkeit ein Photon zu detektieren sehr groß ist, wenn gerade ein anderes Photon detektiert wurde. Die Wahrscheinlichkeit, ein Photon zu detektieren, wenn kein anderes Photon zuvor gemessen wurde, ist klein. Die Lichtquanten treten also in Bündeln (englisch: bunches) auf. Daher wird dieser Effekt „bunching“ genannt (vgl. [MW95, Seite 714]). Bei kohärentem Licht ist diese Eigenschaft weitestgehend aufgehoben, das Auftreffen von Photonen auf den Detektor ist zufällig verteilt. Hier tritt also kein bunching auf. Beim sub-poissonischen Licht tritt genau der gegenteilige Effekt wie beim thermischen Licht auf: die Wahrscheinlichkeit, direkt nach der Detektion eines Photons ein weiteres Photon zu messen ist Null. Daher treten die sub-poissonisch verteilten Lichtquanten zeitlich voneinander getrennt auf. Der Effekt wird als antibunching bezeichnet. Dasselbe Verhalten zeigt auch das super-poissonisch verteilte Licht, allerdings ist hier das antibunching noch stärker ausgeprägt als beim sub-poissonischen Licht. Dies kann damit veranschaulicht werden, dass wie oben beschrieben die Emission in fast-regelmäßigen Abständen geschieht. Das hier beschriebene bunching bzw. antibunching ist in Abb. 2.4, S. 11 veranschaulicht. Zu sehen ist eine beliebige Zeitachse, die Striche symbolisieren das Auftreffen eines Photons auf einen Detektor.

## 2.2 WECHSELWIRKUNG IM JAYNES-CUMMINGS-MODELL

Im Folgenden wird ein Zwei-Niveau-System (ZNS) betrachtet, das mit einem quantisierten elektromagnetischen Feld wechselwirkt.



**Abbildung 2.5:** Atomares Zwei-Niveau-System in Wechselwirkung mit einer einzelnen Mode des elektromagnetischen Felds.

### 2.2.1 JAYNES-CUMMINGS-MODELL

Das Jaynes-Cummings-Modell (siehe [JC63]) ist ein einfaches, aber in vielen Fällen ausreichendes Modell zur Beschreibung der Wechselwirkung eines Zwei-Niveau-Systems mit einer Mode des quantisierten Lichtfelds. Dieses Modell wird im Folgenden als Ausgangspunkt für die quantenmechanische Beschreibung eines Lasers verwendet. Das System besteht aus zwei Energieniveaus  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$ , zwischen denen Übergänge mit einer Energie  $\hbar\omega$  erlaubt sind. Dieses System steht in Wechselwirkung mit einer einzelnen Mode der Energie  $\hbar\Omega$  eines elektromagnetischen Felds (siehe Abb. 2.5, S. 12).

Im Folgenden wird der Hamiltonian der Wechselwirkung von Atom und Feld im Jaynes-Cummings-Formalismus dargestellt. Die atomaren Zustände werden mit  $|\alpha\rangle = (1, 0)^T$  (oberer Zustand) und  $|\beta\rangle = (0, 1)^T$  (unterer Zustand) benannt und haben die Energien  $E_\alpha = \frac{\hbar\omega}{2}$  und  $E_\beta = -\frac{\hbar\omega}{2}$ . Das elektromagnetische Feld ist hier durch eine einzelne Mode der Frequenz  $\Omega$  und damit der Energie  $\hbar\Omega$  dargestellt.

Der allgemeinste Hamiltonian für dieses System sieht folgendermaßen aus:

$$H = H_0^{ZNS} + V_{WW} = H_0^{Atom} + H_0^{Feld} + V_{WW}, \quad (2.28)$$

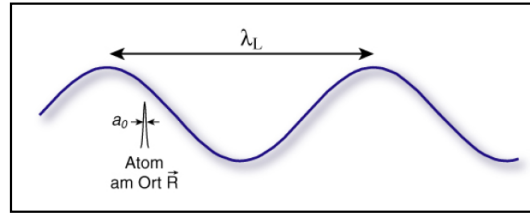
wobei der Wechselwirkungsterm in Dipolnäherung angenommen wird und durch  $V_{WW} = -\vec{d}\vec{E} = -e\vec{r}\vec{E}$  gegeben ist. Dabei ist  $\vec{d} = e\vec{r}$  der Dipoloperator. Die Dipolnäherung ist gerechtfertigt, weil das das System anregende Feld im optischen Bereich liegt und somit räumlich auf großen Skalen oszilliert, verglichen mit der atomaren Skala (vgl. Abb. 2.6, S. 13). Die Eigenfunktionen des atomaren Anteils des Hamiltonians sind durch

$$H_0^{Atom} |j\rangle = E_j |j\rangle \quad j \in \{\alpha, \beta\} \quad (2.29)$$

gegeben, die Eigenfunktionen des Feldanteils durch

$$H_0^{Feld} |n\rangle = \hbar\Omega n |n\rangle \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$





**Abbildung 2.6:** Zur Dipolnäherung: Ein Atom am Ort  $\vec{R}$  besitze eine Ausdehnung in der Groenordnung vom Bohrschen Radius  $a_0$ . Optische Wellenlängen sind um einen Faktor  $10^4$  groer als diese Ausdehnung, deshalb kann man das Feld am Ort des Atoms gut durch  $E(\vec{r}) \approx E(\vec{R})$  nähern (Bild nach E. Bloch, Uni Mainz).

wobei die Energieachse um den konstanten Betrag  $\frac{\hbar\Omega}{2}$  verschoben ist und somit die ursprüngliche Grundzustandsenergie auf Null gesetzt ist. Darin sind  $|j\rangle$  und  $|n\rangle$  die ungestörten Zustände des Atoms bzw. des Felds. Unter Berücksichtigung der Wechselwirkung sind die Zustände des Systems durch  $|j, n\rangle = |j\rangle \otimes |n\rangle$  gegeben. Im Jaynes-Cummings-Modell wird für eine elegante Darstellung der Pauli'sche Spinformalismus bemüht, um mit den beiden Zuständen  $|\alpha\rangle = (1, 0)^T$  und  $|\beta\rangle = (0, 1)^T$  zu operieren. Unter Verwendung der Spinmatrix  $\sigma_z$  und den Spinflipmatrizen  $\sigma_+$  (hier effektiv als Aufsteigeoperator) und  $\sigma_-$  (hier als Absteigeoperator) mit

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

und

$$\sigma_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

kann man den Hamiltonian des ZNS und  $V_{WW}$  schreiben als

$$H_0^{ZNS} = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_A + \hbar\Omega b^\dagger b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_P = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_z + \hbar\Omega b^\dagger b \mathbb{1}_P \quad (2.33)$$

$$V_{WW} = - \begin{pmatrix} 0 & d_{\alpha\beta} E \\ d_{\alpha\beta} E & 0 \end{pmatrix} = -d_{\alpha\beta} E \sigma_+ - d_{\alpha\beta} E \sigma_- \quad (2.34)$$

Darin ist  $d_{\alpha\beta} = \langle \alpha | V_{WW} | \beta \rangle \frac{1}{E}$  die Wechselwirkungsamplitude;  $\sigma_z$  wirkt auf die elektronischen,  $\sigma_\pm$  auf die atomaren Zustände. Der Index  $A/P$  beschreibt, dass die entsprechende Matrix im atomaren/photonischen Unterraum wirkt. Einsetzen des quantisierten Lichtfelds (2.11) liefert

$$V_{WW} = g(b + b^\dagger)\sigma_+ + g^*(b + b^\dagger)\sigma_- \stackrel{RWA}{\approx} gb\sigma_+ + g^*b^\dagger\sigma_- \quad (2.35)$$

wobei  $g = -d_{\alpha\beta}\epsilon_\Omega \sin(kz)$  die Kopplungsstärke zwischen Feld und System beschreibt. Dabei wurde die „Rotating Wave Approximation (RWA)“ verwendet (vgl. Kapitel 2.2.2, S. 14). Insgesamt entsteht so der Gesamthamiltonian der Wechselwirkung des ZNS und einer einzelnen quantisierten Lichtmode in RWA, der Jaynes-Cummings-Hamiltonian:

$$H = H_0^{ZNS} + H_0^{Feld} + V_{WW} = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\Omega b^\dagger b \mathbb{1}_P + gb\sigma_+ + g^*b^\dagger\sigma_- \quad (2.36)$$

## 2.2.2 ROTATING WAVE APPROXIMATION

Die Rotating Wave Approximation geht vom Wechselwirkungsbild aus. Aus dem bisher verwendeten Schrödingerbild entsteht diese Darstellung, indem die Zeitabhängigkeiten der Zustände auf die Operatoren umgewälzt werden, z.B.  $\tilde{\sigma}_+ = \sigma e^{i\Omega t}$  oder  $\tilde{b} = b e^{-i\omega t}$ , mit den ursprünglichen Operatoren  $\sigma_{\pm}$  aus dem Schrödingerbild. Für die in Gl. (2.35) vorkommenden Operatorprodukte ergeben sich dadurch die Proportionalitäten

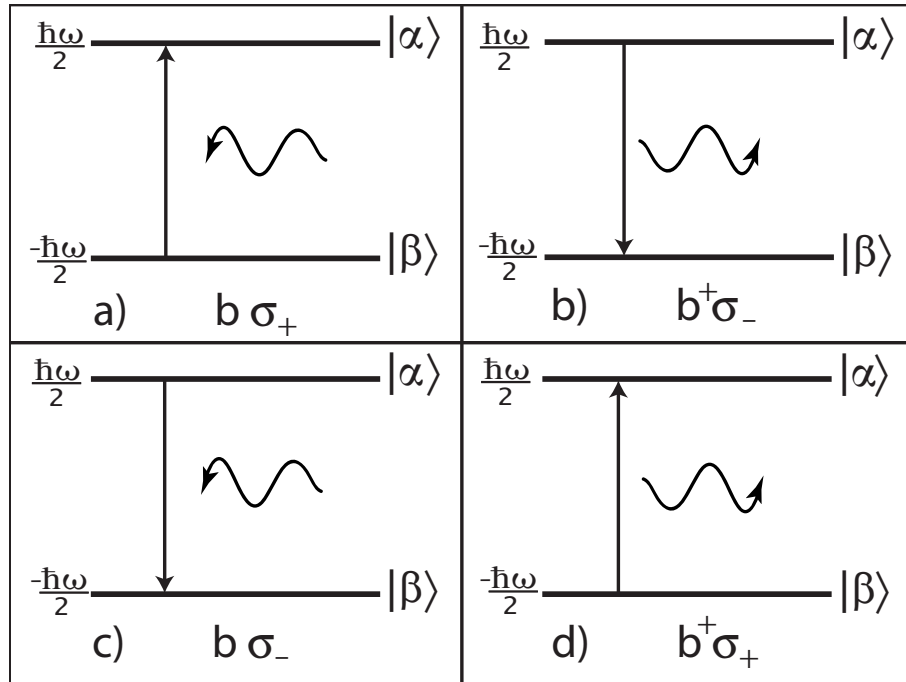
$$\tilde{b}\tilde{\sigma}_+ \propto e^{i(\Omega-\omega)t}, \quad (2.37)$$

$$\tilde{b}^\dagger\tilde{\sigma}_- \propto e^{-i(\Omega-\omega)t}, \quad (2.38)$$

$$\tilde{b}\tilde{\sigma}_- \propto e^{-i(\Omega+\omega)t}, \quad (2.39)$$

$$\tilde{b}^\dagger\tilde{\sigma}_+ \propto e^{i(\Omega+\omega)t}, \quad (2.40)$$

wobei jeweils  $\omega$  die atomare Übergangsfrequenz zwischen den beiden Niveaus und  $\Omega$  die Frequenz der Feldmode ist. In dieser Darstellung wird deutlich, dass sich die ersten beiden Terme zeitlich nur sehr langsam ändern (im resonanten Fall ( $\Omega = \omega$ ) gar nicht) und die beiden letzten Terme dagegen sehr schnell. Um die Erwartungswerte dieser Operatorprodukte zu berechnen, werden sie über den Raum integriert. Dabei mitteln sich die beiden letzten Terme aufgrund der hohen Frequenz schnell heraus und können deswegen vernachlässigt werden. Diese Näherung ist auch anhand Abb. 2.7, S. 14 intuitiv zu verstehen. Die Terme



**Abbildung 2.7:** Zur Rotating Wave Approximation in Gl. (2.35), S. 13: Die Prozesse c) und d) werden vernachlässigt. Nähere Diskussion in Kap. 2.2.2, S. 14.

a) und b) entsprechen den bekannten Vorgängen der Absorption (ein Photon wird vernichtet und das Atom angeregt) und Emission (ein Photon wird erzeugt und das Atom relaxiert). Die Terme c) und d) entsprechen den intuitiv nicht zugänglichen Vorgängen der Absorption eines Photons und gleichzeitiger atomarer Relaxation sowie der Emission eines Photons und gleichzeitiger atomarer Anregung. Diese Vorgänge existieren, werden aber in der Rotation Wave Approximation vernachlässigt.

## 2.2.3 RABIOSZILLATIONEN

Im ungestörten System sind die Zustände durch  $|\alpha, n\rangle = |\alpha\rangle \otimes |n\rangle$  und  $|\beta, n\rangle = |\beta\rangle \otimes |n\rangle$  gegeben, wobei der Hamiltonian  $H_0 = H_0^{ZNS} + H_0^{Feld}$  folgendermaßen auf die Zustände wirkt:

$$H_0 |\alpha, n\rangle = \left( \frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\Omega \right) |\alpha, n\rangle \quad (2.41)$$

$$H_0 |\beta, n\rangle = \left( -\frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\Omega \right) |\beta, n\rangle. \quad (2.42)$$

Im gestörten System koppelt das Wechselwirkungspotential  $V_{WW}$  für festes  $n$  die Zustände  $|\alpha, n\rangle$  und  $|\beta, n+1\rangle$ , so dass die Wechselwirkung für jeden Satz solcher gekoppelter Zustände unabhängig betrachtet werden kann. In dieser Basis  $(|\alpha, n\rangle, |\beta, n+1\rangle)$  ist der Hamiltonian gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \hbar\Omega b^\dagger b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + g\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + g^*\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hbar\delta & 2g\sqrt{n+1} \\ 2g^*\sqrt{n+1} & -\hbar\delta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit der Frequenzdifferenz  $\delta = \omega - \Omega$ . Wie in Gl. (2.36), S. 13 stehen die ungestörten Energien auf den Diagonalelementen und die Kopplungsterme auf den Nichtdiagonalelementen. Die Lösungen des gestörten Systems werden durch Diagonalisieren des Hamiltonians erhalten: Die Eigenenergien sind:

$$E_{1n} = \hbar\Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar}{2} R_n \quad (2.44)$$

$$E_{2n} = \hbar\Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar}{2} R_n \quad (2.45)$$

mit der sog. verallgemeinerten Rabi-Frequenz  $R_n = \sqrt{\delta^2 + (R_n^0)^2}$  und der quantenmechanischen Rabi-Frequenz  $R_n^0 = \sqrt{4|g|^2(n+1)}$ . Die Eigenzustände des gestörten Problems (sog. „dressed states“, vgl. [MS99, Seite 348]) sind:

$$|1, n\rangle = \sin \Theta_n |\alpha, n\rangle + \cos \Theta_n |\beta, n+1\rangle \quad (2.46)$$

$$|2, n\rangle = \cos \Theta_n |\alpha, n\rangle - \sin \Theta_n |\beta, n+1\rangle \quad (2.47)$$

mit

$$\sin \Theta_n = \frac{R_n^0}{(R_n^0)^2 + (R_n - \delta)^2}, \quad \cos \Theta_n = \frac{R_n - \delta}{(R_n^0)^2 + (R_n - \delta)^2}. \quad (2.48)$$

Allein durch die Kopplung von Atom und Feld oszillieren also die Zusammensetzungen der gestörten Zustände mit einer Frequenz  $\propto \sqrt{n+1}$ , was eine direkte Konsequenz der Feldquantisierung ist. Diese Oszillationen werden Rabioszillationen genannt (vgl. [BSKM<sup>+</sup>96]). Sie entstehen anschaulich durch den Prozess, dass ein angeregtes Atom unter Emission eines Photons relaxiert, dann das emittierte Photon wieder absorbiert und anschließend wieder emittiert. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten der elektronischen Niveaus oszillieren dabei zwischen 0 und 1. Die Rabioszillationen werden in Abschnitt 3.2.2, S. 28 numerisch behandelt.

Im Resonanzfall ( $\delta = 0$ ) sind die Anteile der ungestörten Zustände am gestörten Zustand gleichgroß:

$$|1, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha, n\rangle + |\beta, n+1\rangle] \quad (2.49)$$

$$|2, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\alpha, n\rangle - |\beta, n+1\rangle] \quad (2.50)$$

wohingegen die gestörten Zustände für große Frequenzunterschiede ( $\omega \ll \Omega$ ,  $\omega \gg \Omega$ ) in die ungestörten Zustände übergehen, was durch Einsetzen von  $R_n$  in (2.48) deutlich wird. Nach der Einführung des Dichteoperators im anschließenden Abschnitt können Bewegungsgleichungen nicht nur für den Gesamtzustand, sondern auch für die einzelnen wechselwirkenden Zustände (also für die Dichtematrixelemente) berechnet werden.

#### 2.2.4 DICHTEOperator FÜR DAS JAYNES-CUMMINGS-MODELL

Der Dichteoperator bezogen auf das Jaynes-Cummings-Modell wird beschrieben durch die Basis der atomaren und der photonischen Zustände  $|j, n\rangle = |j\rangle \otimes |n\rangle$  mit  $j \in \{\alpha, \beta\}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  und ist folgendermaßen definiert (vgl. Kapitel 2.1.2, S. 6):

$$\rho = \sum_{jj'} \sum_{nn'} \rho_{j'n', jn} |j'n'\rangle \langle jn|, \quad \rho_{j'n', jn} = \langle j'n' | \rho | jn \rangle. \quad (2.51)$$

Im Jaynes-Cummings-Modell sind die Zustände  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  und für festes  $n$  die Zustände  $|n\rangle$  und  $|n+1\rangle$  gekoppelt, was in Abb. 3.1, S. 27 dargestellt ist. Eine der interessanten Informationen über das Lasersystem steckt in der Photonenzustatistik, siehe Abb. 2.2, S. 9. Diese besteht aus den Diagonalmatrixelementen der sogenannten reduzierten Photonendichtematrix, die durch Aussparen der atomaren Freiheitsgrade erhalten wird:

$$\rho_{nn'} = \sum_j \rho_{jn, jn'} \stackrel{JC}{=} \rho_{\alpha n, \alpha n'} + \rho_{\beta n, \beta n'}. \quad (2.52)$$

Die Photonenzustatistik ist damit

$$\rho_{nn} = P_n = \sum_j \rho_{jn, jn}. \quad (2.53)$$

#### 2.2.5 BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DES DICHTEOOperators

Aus der von-Neumann-Gleichung (Gl. (2.14), S. 6) entstehen durch explizites Ausführen des Kommutators von Dichtematrix (Gl. (2.51), S. 16) und Jaynes-Cummings-Hamiltonian (Gl. (2.36), S. 13) die vollständigen Bewegungsgleichungen für die Dichtematrixelemente in der Basis der  $|\alpha, n\rangle, |\beta, n+1\rangle$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \alpha n} = g\sqrt{n+1} \rho_{\beta n+1, \alpha n} - g^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha n, \beta n+1} \quad (2.54)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \beta n+1} = -g\sqrt{n+1} \rho_{\beta n+1, \alpha n} + g^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha n, \beta n+1} \quad (2.55)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} = \hbar(\omega_{\alpha\beta} - \Omega) \rho_{\alpha n, \beta n+1} - g\sqrt{n+1} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}). \quad (2.56)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \alpha n} = \hbar(\omega_{\alpha\beta} - \Omega) \rho_{\beta n+1, \alpha n} + g^* \sqrt{n+1} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}). \quad (2.57)$$

Durch explizite Lösung der Differentialgleichungen für die Dichtematrix können Bewegungsgleichungen für die einzelnen Niveaus aufgestellt werden, beispielsweise für den Zustand  $\rho_{\alpha 0, \alpha 0}$ . Diese Gleichungen be-

schreiben jedoch noch keine Dissipationsprozesse im System. Dissipationsprozesse werden durch das Ankoppeln von externen Reservoiren sichergestellt und formal durch sogenannte Lindblad-Terme eingeführt (siehe Kapitel 2.3.1, S. 19).

### 2.2.6 BEWEGUNGSGLEICHUNG FÜR ZUSTÄNDE OHNE DISSIPATION

Die in Kapitel 2.2.3, S. 15 diskutierten Rabioszillationen sind nicht nur in den Gesamtzuständen sichtbar, sondern auch in den Bewegungsgleichungen für die einzelnen Matrixelemente. Beispielhaft soll hier die Bewegungsgleichung für ein einzelnes Matrixelement integriert werden. Angenommen das System startet mit den Anfangsbedingungen  $\rho_{\alpha n, \alpha n}(t=0) = 1$  (angeregtes Atom und  $n$  Photonen in der Lasermode) und  $\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \alpha n}(t=0) = 0$ . Ableiten von Gl. (2.54), S. 16 nach der Zeit ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -\frac{i}{\hbar} g \sqrt{n+1} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \alpha n} + \frac{i}{\hbar} g^* \sqrt{n+1} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n \beta n+1}. \quad (2.58)$$

Einsetzen von Gl. (2.56) und Gl. (2.57) in Gl. (2.58) liefert

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -2|g|^2 \frac{(n+1)}{\hbar^2} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}). \quad (2.59)$$

Aus Gl. (2.54)+(2.55) ergibt sich  $\rho_{\beta n+1, \beta n+1} = 1 - \rho_{\alpha n, \alpha n}$ , was eingesetzt in Gl. (2.59) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -2|g|^2 \frac{(n+1)}{\hbar^2} (2\rho_{\alpha n, \alpha n} - 1) \quad (2.60)$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha n, \alpha n} &= \frac{1 + \cos\left(2|g| \frac{\sqrt{n+1}}{\hbar} t\right)}{2} \\ &= \cos^2\left(|g| \frac{\sqrt{n+1}}{\hbar} t\right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

ergibt. Die Rabioszillationen haben also die Kreisfrequenz  $R_n^0 = 2|g| \frac{\sqrt{n+1}}{\hbar}$  (vgl. [MS99, Seite 291]) und damit eine Periodendauer von  $T_n = \frac{\pi \hbar}{|g| \sqrt{n+1}}$ . Dieses Ergebnis ist in Abb. 3.2, S. 28 dargestellt.

### 2.2.7 MASTERGLEICHUNGEN

Um das System zu vereinfachen und die Ratengleichungen, die mit der vollen Lösung der Dichtematrix verglichen werden sollen, herzuleiten, wird mittels adiabatischer Eliminierung zu den sogenannten Mastergleichungen für die Diagonalelemente der Dichtematrix übergegangen. Um Verlustmechanismen miteinzubeziehen, wird eine phänomenologische Verlustrate  $\gamma$  in den Gleichungen für die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix eingeführt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} = (\hbar(\omega_{\alpha\beta} - \Omega) - i\gamma) \rho_{\alpha n, \beta n+1} - g\sqrt{n+1} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}). \quad (2.62)$$

Die adiabatische Eliminierung besteht darin, die Änderung der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix als langsam im Vergleich zur Änderung der Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix zu betrachten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \alpha n} \approx 0. \quad (2.63)$$

Dies bedeutet anschaulich, dass sich die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix (Übergangsamplituden) langsam im Vergleich zur natürlichen Zeitskala des Systems, definiert durch die Lebensdauer des oberen Niveaus, ändern. Durch Umstellen der Gleichungen für die Nebendiagonalelemente ergibt sich:

$$\rho_{\alpha n, \beta n+1} \approx \frac{g\sqrt{n+1}}{\hbar^2 (\omega_{\alpha\beta} - \Omega) - i\hbar\gamma} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}) \quad (2.64)$$

$$\rho_{\beta n+1, \alpha n} = \rho_{\alpha n, \beta n+1}^*. \quad (2.65)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichungen in Gl. (2.54), S. 16 werden geschlossene Gleichungen für die Hauptdiagonalelemente, die Mastergleichungen erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -\frac{n+1}{\tau} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}) \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \beta n+1} = \frac{n+1}{\tau} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}). \quad (2.67)$$

Darin ist

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{|g|^2}{\gamma} \frac{\gamma^2}{(\omega_{\alpha\beta} - \Omega)^2 + \gamma^2} \quad (2.68)$$

die Rate der spontanen Emission in die angenommene Jaynes-Cummings-Mode der Frequenz  $\Omega$ , wobei  $\gamma$  die oben phänomenologisch eingeführte Zerfallsrate ist.

## 2.3 WECHSELWIRKUNG MIT DEM RESERVOIR

Um Dissipation durch Kopplung mit der Umgebung für das atomare und das photonische Subsystem in die Theorie einzubeziehen, muss eine Modellierung der Umgebung benutzt werden. Hier wird die Umgebung durch ein Reservoir von harmonischen Oszillatoren im thermischen Gleichgewicht repräsentiert. In diesem Kapitel werden die dadurch auftretenden Effekte dargestellt und in die relevanten Gleichungen mit einbezogen.

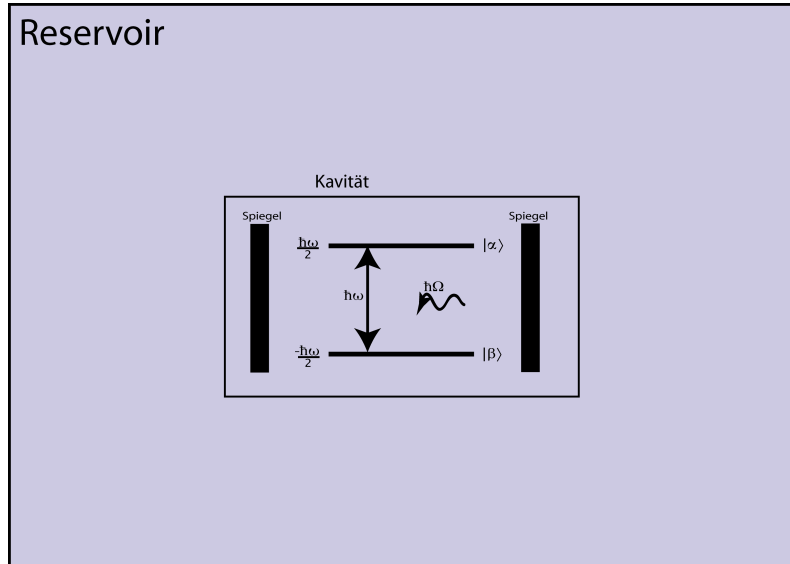


Abbildung 2.8: Ankopplung eines Reservoirs an das betrachtete Zwei-Niveau-System.

### 2.3.1 ANKOPPLUNG EINES RESERVOIRS

Als Reservoir, mit dem das Zwei-Niveau-System in Wechselwirkung steht, wird ein Bad von harmonischen Oszillatoren mit Frequenzen  $\Omega_i$  im thermischen Gleichgewicht, mit dem Hamiltonian

$$H_R = \sum_i \hbar \Omega_i a_i^\dagger a_i \quad (2.69)$$

angenommen, wobei die  $a_i, a_i^\dagger$  die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren der  $i$ -ten Mode sind. Dieses Reservoir dient dem Auffangen von aus dem System auskoppelnden Photonen sowie zum Pumpen des Systems (Anregung des Atoms durch Kopplung mit Photonen des Reservoirs). Durch die Ankopplung dieses Reservoirs entstehen zusätzliche Terme (sogenannte Lindblad-Terme) in der von-Neumann-Gleichung (2.14):

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_l \frac{\chi_l}{2} \left( [O_l, \rho O_l^\dagger] + [O_l \rho, O_l^\dagger] \right) \right], \quad (2.70)$$

wobei die  $l$  verschiedene Dissipationsprozesse darstellen und die  $O_l, O_l^\dagger$  die dem jeweiligen Vorgang entsprechenden Erzeuger und Vernichter sind;  $\chi_l$  ist die jeweilige Zerfallsrate. Um diese Gleichung zu erhalten, wird die sogenannte Born-Markov-Näherung verwendet. Diese Näherung beinhaltet die Vernachlässigung aller Wechselwirkungsprozesse höherer Ordnung als 2 (Born-Näherung), sowie die Vernachlässigung aller Gedächtnis-Effekte im System (Markov-Näherung). Dies ist anschaulich mit der Annahme zu erklären, die

Zeitskala der Korrelation von System und Reservoir sei klein verglichen mit der Zeitskala des Systems (definiert durch die Lebensdauer des angeregten Zustands, genaue Diskussion siehe [Car99], [Bri08] und [Mü08]). Die Lindblad-Terme erhalten, im Gegensatz zu phänomenologisch eingeführten Verlustraten, die Spur der Dichtematrix und sind somit näher an einer „vollen Theorie“ als die oft verwendete Beschreibung des Lasersystems durch phänomenologisch aufgestellte Master- oder Ratengleichungen.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen drei Mechanismen betrachtet werden, die über Lindblad-Terme beschrieben werden können: Kavitätsverluste (Photon verlässt Resonator), spontane Emission in nichtlasende Moden (Emission von Photonen der Energie  $E \neq \hbar\omega_{\alpha\beta}$ ) und inkohärentes Pumpen (externe Anregung der atomaren Niveaus). Sie werden im Folgenden diskutiert und in die Dichtematrix und die Mastergleichungen einbezogen. Aus den Mastergleichungen werden über eine weitere Näherung die oft verwendeten Raten-gleichungen hergeleitet.

#### KAVITÄTSVERLUSTE

Mit Kavitätsverlusten ist die Dämpfung der Lasermode durch Spiegelverluste mit einer Rate  $\kappa = \frac{\omega}{Q}$  gemeint, wobei  $Q$  ein Maß für die Güte der Spiegel ist, also beschreibt, welcher Anteil der in der Kavität vorhandenen Photonen die Kavität verlässt. Die zugehörigen Operatoren sind die Photonenerzeuger und -vernichter, da hierbei ohne Änderung der atomaren Zustände Photonen im System vernichtet werden. Der zugehörige Lindblad-Term ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho|_{kav} = \frac{\kappa}{2} [2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b]. \quad (2.71)$$

Die Bewegungsgleichung der Diagonalelemente der Dichtematrix hat in der Basis der  $|j, n\rangle$  folgende Darstellung:

$$\frac{\partial}{\partial t}p_n|_{kav} = \kappa [(n+1)p_{n+1} - np_n]. \quad (2.72)$$

Für die Änderung der mittleren Photonenzahl und der atomaren Besetzungswahrscheinlichkeit durch Kavitätsverluste ergibt sich damit:

$$\frac{d}{dt}\langle n \rangle|_{kav} = -\kappa \langle n \rangle \quad \frac{d}{dt}f_j|_{kav} = 0. \quad (2.73)$$

Kavitätsverluste bedingen also einen exponentiellen Zerfall der mittleren Photonenzahl und beeinflussen nicht die atomare Besetzungswahrscheinlichkeit.

#### EMISSION IN NICHTLASSENDE MODEN

Das angeregte Atom kann genauso wie es in die Jaynes-Cummings-Mode emittiert auch in andere, nicht-lasende Moden emittieren, also in Moden mit anderer Frequenz als die JC-Frequenz  $\omega$ . Dadurch ändert sich der atomare Zustand ohne Änderung der Photonenzahl in der Lasermode, also sind die relevanten Operatoren im zugehörigen Lindblad-Term die Pauli'schen Spinflip-Operatoren. Der Lindblad-Term ist der Folgende:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho|_{nl} = \frac{1}{2\tau_{nl}} [2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-], \quad (2.74)$$

mit der Zerfallsrate  $\frac{1}{\tau_{nl}}$ . Die Bewegungsgleichungen der  $p_{\alpha n}$  sind damit:

$$\frac{d}{dt}p_{\alpha n}|_{nl} = -\frac{1}{\tau_{nl}}p_{\alpha n} \quad \frac{d}{dt}p_{\beta n}|_{nl} = \frac{1}{\tau_{nl}}p_{\alpha n}, \quad (2.75)$$



die Photonenstatistik und die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten sind:

$$\frac{d}{dt}p_n|_{nl} = 0 \quad \frac{d}{dt}f_\alpha|_{nl} = -\frac{1}{\tau_{nl}}f_\alpha \quad \frac{d}{dt}f_\beta|_{nl} = \frac{1}{\tau_{nl}}f_\alpha. \quad (2.76)$$

Die spontane Emission in nichtlasende Moden beeinflusst also die Photonen in der Lasermode nicht direkt. Für die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten  $f_i$  ergeben sich ein exponentieller Zerfall des angeregten Zustandes und eine Entwicklung des nichtangeregten Zustandes proportional zur Besetzungswahrscheinlichkeit des angeregten Zustandes.

#### INKOHÄRENTES PUMPEN

Um ein anfangs nicht angeregtes Atom anzuregen und dem bisher festgestellten exponentiellen Zerfall des angeregten Atomniveaus entgegenzuwirken, wird das lasende System gepumpt, indem die Atome aus externen Reservoiren angeregt werden, also die Besetzungswahrscheinlichkeit des angeregten Niveaus  $|\alpha\rangle$  erhöht wird. Gleichzeitig wird dadurch die Besetzungswahrscheinlichkeit des unteren Niveaus  $|\beta\rangle$  verringert. In diesem Lindblad-Term der von-Neumann-Gleichung werden deshalb die Operatoren der atomaren Zustände,  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$ , verwendet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho|_P = \frac{P}{2} [2\sigma_+\rho\sigma_- - \sigma_-\sigma_+\rho - \rho\sigma_-\sigma_+], \quad (2.77)$$

mit der allgemeinen Pumprate  $P$ . Die Bewegungsgleichungen der  $p_{\alpha n}$  sind:

$$\frac{d}{dt}p_{\alpha n}|_P = Pp_{\beta n} \quad \frac{d}{dt}p_{\beta n}|_P = -Pp_{\beta n}. \quad (2.78)$$

Genau wie die Emission in nichtlasende Moden hat auch hier das Pumpen keinen direkten Einfluss auf die Photonen in der Lasermode. Die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten verhalten sich nach:

$$\frac{d}{dt}f_\alpha|_P = Pf_\beta \quad \frac{d}{dt}f_\beta|_P = -Pf_\beta. \quad (2.79)$$

#### 2.3.2 VOLLSTÄNDIGE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DES DICHTEOPERATORS

Unter Berücksichtigung der Prozesse der Kavitätsverluste, der Emission in nichtlasende Moden sowie des Pumpens ergibt sich für die Dichtematrix die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\rho &= -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \\ &+ \frac{\kappa}{2} ([b, \rho b^\dagger] + [b\rho, b^\dagger]) \\ &+ \frac{1}{2\tau_{nl}} ([\sigma_-, \rho\sigma_+] + [\sigma_-\rho, \sigma_+]) \\ &+ \frac{P}{2} ([\sigma_+, \rho\sigma_-] + [\sigma_+\rho, \sigma_-]). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Für die einzelnen Dichtematrixelemente lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\alpha n, \alpha n} = & - \frac{i}{\hbar}\sqrt{n+1}(g\rho_{\beta n+1, \alpha n} - g^*\rho_{\alpha n, \beta n+1}) \\ & + \frac{\kappa}{2}(2(n+1)\rho_{\alpha n+1, \alpha n+1} - 2n\rho_{\alpha n, \alpha n}) \\ & + \frac{1}{2\tau_{nl}}(-2\rho_{\alpha n, \alpha n}) + \frac{P}{2}(2\rho_{\beta n, \beta n}),\end{aligned}\quad (2.81)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\beta n+1, \beta n+1} = & - \frac{i}{\hbar}\sqrt{n+1}(g^*\rho_{\alpha n, \beta n+1} - g\rho_{\beta n+1, \alpha n}) \\ & + \frac{\kappa}{2}(2(n+2)\rho_{\alpha n+1, \alpha n+1} - 2(n+1)\rho_{\beta n+1, \beta n+1}) \\ & + \frac{1}{2\tau_{nl}}(2\rho_{\alpha n+1, \alpha n+1}) + \frac{P}{2}(-2\rho_{\beta n+1, \beta n+1}),\end{aligned}\quad (2.82)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\alpha n, \beta n+1} = & - i(\omega - \Omega)\rho_{\alpha n, \beta n+1} - \frac{i}{\hbar}\sqrt{n+1}(g\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - g\rho_{\alpha n, \alpha n}) \\ & + \frac{\kappa}{2}(2\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\rho_{\alpha n+1, \beta n+2} - (2n+1)\rho_{\alpha n, \beta n+1}) \\ & + \frac{1}{2\tau_{nl}}(-\rho_{\alpha n, \beta n+1}) + \frac{P}{2}(-\rho_{\alpha n, \beta n+1}).\end{aligned}\quad (2.83)$$

Die Dichtematrix wird in Kapitel 3.2, S. 26 numerisch behandelt.

### 2.3.3 MASTERGLEICHUNGEN MIT ANKOPPLUNG DES RESERVOIRS

Unter Berücksichtigung der aufgezählten Verlustmechanismen und mit der in Kapitel 2.2.7, S. 17 dargestellten adiabatischen Eliminierung, ergeben sich für die Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix die folgenden Bewegungsgleichungen, die Mastergleichungen inklusive der Dissipationsterme (vgl. [RC94]):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p_{\alpha n} = & - \frac{(n+1)}{\tau}[p_{\alpha n} - p_{\beta n+1}] + \kappa[(n+1)p_{\alpha n+1} - np_{\alpha n}] \\ & - \frac{1}{\tau_{nl}}p_{\alpha n} + Pp_{\beta n}\end{aligned}\quad (2.84)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p_{\beta n+1} = & \frac{(n+1)}{\tau}[p_{\alpha n} - p_{\beta n+1}] + \kappa[(n+2)p_{\beta n+2} - (n+1)p_{\beta n+1}] \\ & + \frac{1}{\tau_{nl}}p_{\alpha n+1} - Pp_{\beta n+1}.\end{aligned}\quad (2.85)$$

Dabei kommt der erste Term jeweils aus der Lösung der „ungestörten“ von-Neumann-Gleichung (ohne Ankopplung des Reservoirs), der zweite Term je durch die Kavitätsverluste, der dritte durch die Berücksichtigung der spontanen Emission in nichtlasende Moden und der vierte Term durch den Pumpprozess. Die numerische Behandlung und Diskussion der Mastergleichungen ist in [Bri08] zu finden. Allerdings werden dort als aktives Material Systeme mit einer großen Anzahl von Atomen betrachtet, so dass eine direkte Lösung der Dichtematrixgleichungen praktisch nicht mehr möglich ist.

### 2.3.4 RATENGLEICHUNGEN

Die Ratengleichungen werden üblicherweise zum Vergleich mit Experimenten verwendet, da sie ohne Aufwand zu lösen sind und phänomenologisch hergeleitet werden können. Im Rahmen dieser Arbeit können die Ratengleichungen aus der vollen Theorie der Dichtematrix hergeleitet werden. Um die Gültigkeit der bei der Herleitung getätigten Näherungen zu untersuchen, werden die Ratengleichungen mit der Lösung der vollen Dichtematrix in Kapitel 3.4, S. 34 verglichen. Die Ratengleichungen beinhalten nur noch die Besetzungs-

wahrscheinlichkeiten der beiden atomaren Niveaus und den Erwartungswert der mittleren Photonenzahl im Resonator. Sie entstehen aus den Mastergleichungen, wenn als Näherung die Korrelation zwischen Atomen und Photonen als gering angenommen wird, so dass die  $\rho_{jn,jn} = p_{jn}$  faktorisieren:

$$p_{jn} = f_j p_n \quad \text{bzw.} \quad \rho_{jn,jn} = \rho_{jj} \rho_{nn}. \quad (2.86)$$

Damit ergeben sich geschlossene Gleichungen für die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten und die mittlere Photonenzahl im Resonator, allerdings kann die Photonenzahl nach der Faktorisierung nicht mehr berechnet werden. Einsetzen der Faktorisierung von  $p_{jn}$  in die Mastergleichungen liefert die Ratengleichungen für den Einatom-Laser (vgl. [YB89]):

$$\frac{d}{dt} f_\alpha = -\frac{f_\alpha - f_\beta}{\tau_{sp}} \beta \langle n \rangle - \left( \frac{1}{\tau_{sp}} \right) f_\alpha + P f_\beta \quad (2.87)$$

$$= -\frac{d}{dt} f_\beta \quad (2.88)$$

$$\frac{d}{dt} \langle n \rangle = \frac{f_\alpha - f_\beta}{\tau_{sp}} \beta \langle n \rangle + \beta \frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} - \kappa \langle n \rangle. \quad (2.89)$$

Darin ist

$$\frac{1}{\tau_{sp}} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{nl}} \quad \beta = \frac{\tau_{sp}}{\tau} \quad (2.90)$$

die totale spontane Rekombinationsrate, die sich aus der Summe der Raten in lasende und in nichtlasende Moden zusammensetzt; der  $\beta$ -Faktor gibt das Verhältnis der Emission in die Lasermode ( $\frac{1}{\tau}$ ) zur Gesamtemission ( $\frac{1}{\tau_{sp}}$ ) an. Eine Diskussion des  $\beta$ -Faktors wird in Kapitel 2.3.6, S. 24 geführt. Die einzelnen Terme der Ratengleichungen können wie folgt interpretiert werden:  $\frac{f_\alpha}{\tau} \langle n \rangle$  entspricht der stimulierten Emission,  $\frac{f_\alpha}{\tau}$  der spontanen Emission,  $\frac{f_\beta}{\tau} \langle n \rangle$  der Absorption und  $\frac{f_\alpha}{\tau_{sp}}$  der gesamten spontanen Emission. Die numerische Berechnung der Ratengleichungen ist in Kapitel 3.3, S. 32 zu finden.

### 2.3.5 DEPHASIERUNG

Der Begriff Dephasierung beschreibt das Zerfallen der Kohärenz eines Systems mit der Zeit durch die Dissipationsprozesse. In der Dichtematrix ist das Dephasieren der Zerfall der Offdiagonalelemente, ausgedrückt durch die Zerfallsrate in die Lasermode  $\tau$ . Im Folgenden wird die Dephasierung in der Dichtematrix und in den Ratengleichungen beschrieben.

#### DEPHASIERUNG IN DER DICHEMATRIX

In der vollen Dichtematrix kann die Dephasierung nur näherungsweise analytisch beschrieben werden, da unter Berücksichtigung aller Prozesse keine geschlossenen Gleichungen für die Hauptdiagonalelemente entstehen. Trotzdem kann mittels der schon oben verwendeten adiabatischen Eliminierung (vgl. Kap. 2.2.7, S. 17) zumindest für den stationären Fall eine Abschätzung vorgenommen werden. Die adiabatische Eliminierung nimmt die Nebendiagonalelemente der Dichtematrix (Gl. (2.83), S. 22) als konstant an, was im stationären Fall exakt ist. Um geschlossene Gleichungen für die Diagonalelemente der Dichtematrix zu erhalten, muss der Term  $\propto \kappa$  in den Nebendiagonalelementen der Dichtematrix gesondert behandelt werden, da er von dem jeweils nächsthöheren Jaynes-Cummings-Block abhängt. Die Dephasierung durch die Kavitätsverluste kann im Allgemeinen nicht als klein gegen die anderen Dephasierungsmechanismen angesehen (und damit 0 gesetzt) werden und hängt sogar von der Photonenzahl  $n$  ab. Um trotzdem geschlossene Gleichungen zu erhalten wird sie als konstanter Term  $\frac{\kappa}{2} \rho_{\alpha n, \beta n+1}$  abgeschätzt. Mit dieser Annahme entsteht

für den Zerfall der Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix in die lasende Mode die Rate (vgl. [MS92], [GWLJ07] und für eine Herleitung den Anhang, S. 40)

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{\Gamma^2}{(\omega - \Omega)^2 + \Gamma^2} \quad (2.91)$$

$$= \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\Gamma}, \quad (2.92)$$

mit der Dephasierung

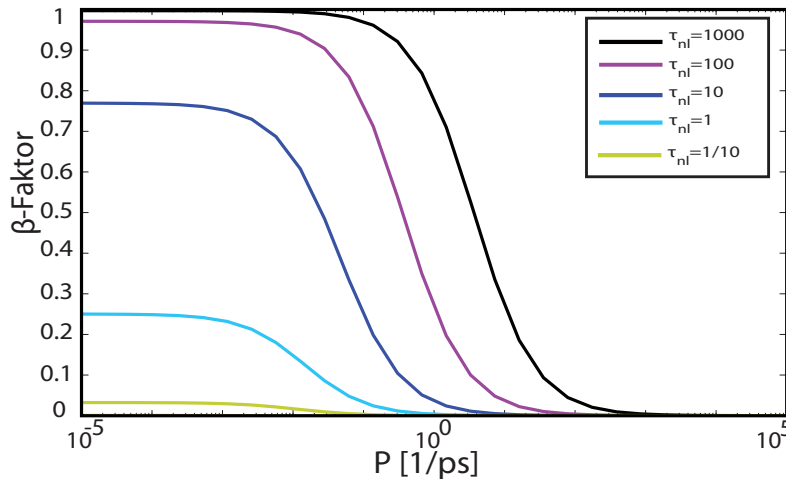
$$\Gamma = \frac{P}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}} + \frac{\kappa}{2}. \quad (2.93)$$

Gl. (2.92) gilt dabei für den Resonanzfall  $\delta = \omega - \Omega = 0$ . An  $\Gamma$  ist abzulesen, dass auch die Pumprate einen dephasierenden Einfluss auf das System hat; für große Pumpraten wird diese Pumpdephasierung sogar dominant und verhindert das Einschalten des Lasers. Dieses Verhalten wird „self-quenching“ genannt. Es tritt in (theoretischen) Zwei-Niveau-Systemen auf, in denen direkt in das höhere Niveau gepumpt wird. Dadurch zerstört das Pumpen für große Pumpwerte die Kohärenz und verhindert so die Emission (vgl. [MS92], [ZRSB98] und Abb. 3.5a, S. 30).

#### DEPHASIERUNG IN DEN RATENGLICHUNGEN

In die Mastergleichungen bzw. die hieraus hergeleiteten Ratengleichungen geht die Dephasierung über in die in Kap. 2.3.3, S. 22 eingeführte Gesamtemissionsrate  $\tau_{sp}$ . Ein Vergleich von Gl. (2.91), S. 24 mit Gl. (2.68), S. 18 zeigt, dass die aus der Dichtematrix abgeschätzte Dephasierung  $\Gamma$  gerade die zunächst phänomenologisch eingeführte Verlustrate  $\gamma$  liefert. Damit kann die Emissionsrate  $\tau$  in den Ratengleichungen näherungsweise durch Gl. (2.91), S. 24 angenommen werden. Über Gl. (2.90), S. 23 kann damit die Gesamtemissionsrate  $\tau_{sp}$  bestimmt werden.

#### 2.3.6 ZUM $\beta$ -FAKTOR



**Abbildung 2.9:** Der  $\beta$ -Faktor in Abhängigkeit der Pumprate für verschiedene Werte von  $\tau_{nl}$ . Verwendet sind die auch später angenommenen Parameter  $\kappa = \frac{1}{200 \text{ ps}}$  und  $|g| = 0.05 \text{ meV}$ .

Die im Kapitel 2.3.4, S. 22 beschriebenen Ratengleichungen werden häufig zum Vergleich von Experimenten mit der Theorie bemüht, zum Beispiel um aus der Messung nicht bekannte Parameter wie den in Gl.

(2.90), S. 23 eingeführten  $\beta$ -Faktor zu bestimmen. Dabei sind die verwendeten Ratengleichungen zumeist phänomenologisch eingeführt und nicht aus einer genaueren Theorie abgeleitet. Der  $\beta$ -Faktor in diesen Gleichungen soll die Effizienz des im Experiment verwendeten Lasers beschreiben. Wie aus Gl. (2.90), S. 23 und Gl. (2.92), S. 24 deutlich wird, variiert der  $\beta$ -Faktor aber mit der Pumprate, die dephasierend wirkt. Aus der Definition von  $\beta$  kann somit schon geschlossen werden, dass der üblicherweise als für die gesamte Kennlinie konstant angenommene  $\beta$ -Faktor für jeden Punkt der Kennlinie, also für jede Pumprate, verschieden ist. Die üblicherweise zum Vergleich mit Experimenten für die gesamte Kennlinie benutzten  $\beta$ -Werte sind also gemittelte Werte  $\bar{\beta}$ . Die Aussage, ein Emitter habe „einen festen  $\beta$ -Wert, welcher die Effizienz kennzeichnet“, ist also so nicht tragbar, da sich die Aussage maximal auf eine mittlere Effizienz beziehen kann. Selbst eine Mittelung ist nicht leicht zu rechtfertigen, da die Variation von  $\beta$  allgemein nicht klein ist, wie in Abb. 2.9, S. 24 zu sehen. Hier ist der mit Gl. (2.91), S. 24 und Gl. (2.90), S. 23 berechnete  $\beta$ -Faktor für festes  $\kappa$  und verschiedene  $\tau_{nl}$  gegen die Pumprate aufgetragen. Darin wird das oben beschriebene „quenching“ sichtbar. Die Emission geht für kleine Pumpraten fast vollständig in die Lasermode, für größere Pumpraten wird ein immer größerer Anteil der Gesamtemission in nichtlasende Moden emittiert; für sehr große Pumpraten erfolgt keine Emission mehr in die Lasermode.

Der  $\beta$ -Faktor kann also im Allgemeinen nicht als Konstante für eine komplette Kennlinie angenommen werden, da die Variation mit der Pumprate nicht vernachlässigbar ist, solange  $\kappa$  klein ist (sog. „good cavity limit“). Wie sich in Kapitel 3.3, S. 32, Abb. 3.8c herausstellt, ist der Einfluss des  $\beta$ -Faktors auf die Kennlinie für hinreichend große Pumpraten allerdings klein gegen den Einfluss der Pumpdephasierung.

# KAPITEL 3

## ERGEBNISSE

In diesem Kapitel werden das im Kapitel 2 theoretisch beschriebene Jaynes-Cummings-Modell numerisch behandelt, Ergebnisse dargestellt sowie auftretende Effekte erläutert. Zunächst wird die Dichtematrix diskutiert (vgl. Abschnitt 3.2, S. 26). Darin werden die verschiedenen Dissipationsprozesse, die volle Lösung der Dichtematrix sowie die Auswirkung nichtresonanter Anregung behandelt. Anschließend werden die Ratengleichungen gelöst und dargestellt (vgl. Abschnitt 2.3.4, S. 22). Danach werden die Ergebnisse der vollen Dichtematrix mit den Ergebnissen der Ratengleichungen verglichen und die Unterschiede diskutiert.

### 3.1 GRUNDLAGEN

Alle Berechnungen wurden mit Matlab7.5 durchgeführt. Die auftretenden Differentialgleichungssysteme wurden mit in Matlab implementierten Differentialgleichungslösern 4. Ordnung gelöst (ode45, ode113 oder ode15s), die auf dem Runge-Kutta-Verfahren basieren. Für die in den theoretischen Modellen auftretenden Materialparameter wurden die unten genannten Parameter verwendet:

### 3.2 DICHEMATRIX

Die allgemeinste Beschreibung des Zwei-Niveau-Lasersystems gibt die Dichtematrix. Zur Simulation des Systems wird die Zeitentwicklung der Dichtematrixelemente numerisch berechnet. Als Parameter werden die in Tab. 3.1, S. 26 angegebenen Werte verwendet und zunächst der resonante Fall ( $\delta = \omega - \Omega = 0$ ) betrachtet. Als Anfangsbedingung wird bei den Berechnungen zum freien Anteil der Dichtematrix und den

Parameter	Wertebereich	Verwendete Werte	Bedeutung
$\frac{1}{\tau_{nl}}$	$[\frac{1}{5000}; \frac{1}{10}] \frac{1}{ps}$	$\frac{1}{100 ps}$	Rate des spontanen Zerfalls in nl-Moden
$P$	$[10^{-8}; 10^5] \frac{1}{ps}$	$\frac{1}{10 ps}$	Pumprate
$\kappa$	$[\frac{1}{1000}; 1] \frac{1}{ps}$	$\frac{1}{100 ps}$	Kavitätsverlustrate
$ g $	$[10^{-8}; 1] meV$	0,02 meV	Feld-Atom-Kopplungsstärke

**Tabelle 3.1:** Darstellung der auftretenden Parameter, ihrer Wertebereiche sowie der verwendeten Werte.

$$\begin{pmatrix}
 \rho_{\beta 0, \beta 0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & \lceil \rho_{\alpha 0, \alpha 0} & \rho_{\alpha 0, \beta 1} \rceil & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & \lfloor \rho_{\beta 1, \alpha 0} & \rho_{\beta 1, \beta 1} \rfloor & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & \lceil \rho_{\alpha 1, \alpha 1} & \rho_{\alpha 1, \beta 2} \rceil & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & \lfloor \rho_{\beta 2, \alpha 1} & \rho_{\beta 2, \beta 2} \rfloor & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lceil \rho_{\alpha 2, \alpha 2} & \rho_{\alpha 2, \beta 3} \rceil & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lfloor \rho_{\beta 3, \alpha 2} & \rho_{\beta 3, \beta 3} \rfloor & \\
 \vdots & & & & & & & \ddots
 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n=0}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{n=1}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{n=2}$

**Abbildung 3.1:** Struktur und Indizierung der Dichtematrix. Die eckigen Klammern deuten an, dass das System ohne Dissipation und Pumpen nur die jeweils zusammengefassten Untermatrizen über die rot unterlegten Übergangselemente koppelt.

einzelnen Dissipationsprozessen

$$\rho_{jn, j'n'}(t = 0 \text{ ps}) = \delta_{j\alpha, j'\alpha} \delta_{n0, n'0} \quad (3.1)$$

verwendet. Das System befindet sich also zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Zustand  $\rho_{\alpha 0, \alpha 0}$ . Zur Simulation der vollen Dichtematrix mit allen Dissipationsprozessen und dem Pumpprozess wird das System aus dem Grundzustand

$$\rho_{jn, j'n'}(t = 0 \text{ ps}) = \delta_{j\beta, j'\beta} \delta_{n0, n'0} \quad (3.2)$$

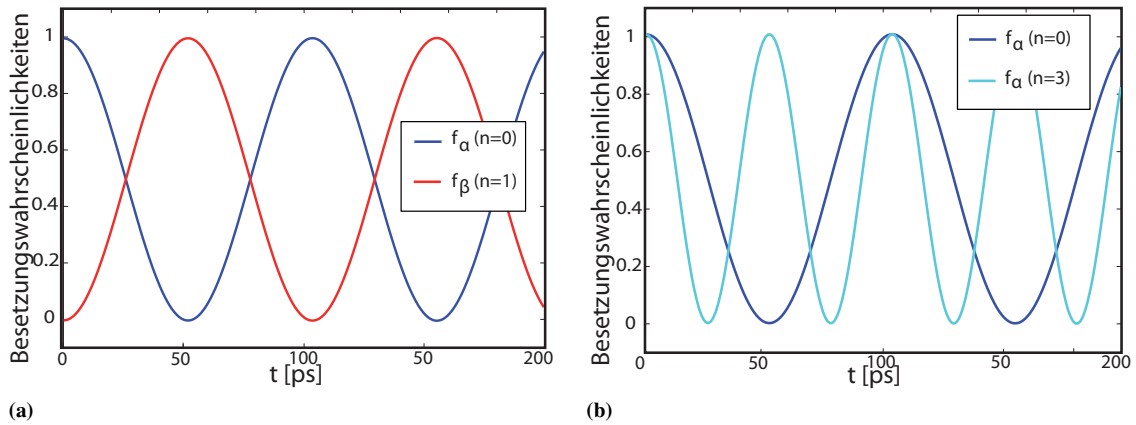
heraus betrachtet. Die Dimension der Dichtematrix ist physikalisch  $(\infty \times \infty)$ ; um das Problem berechenbar zu machen, muss die Matrix aber trunkiert werden, da mit begrenztem Speicher nicht beliebig große Matrizen berechnet werden können. Verwendet werden deshalb  $40 \times 40$ -Matrizen, der höchste Zustand beinhaltet also 19 Photonen. Damit wird formal ein Differentialgleichungssystem von 1600 Gleichungen aufgestellt. Es zeigt sich, dass diese Beschränkung bei geschickter Wahl der Parameter ausreicht, was jeweils durch die Normierung der Dichtematrix überprüft wird: es muss zu jedem Zeitpunkt  $Sp\{\rho\} = 1$  gelten.

Wie im Kapitel 2.2.3, S. 15 dargestellt, koppelt die Wechselwirkung von Atom und Feld die Zustände  $|\alpha, n\rangle$  und  $|\beta, n+1\rangle$  für festes  $n$ . Dies hat zur Folge, dass die Dichtematrix wie in Abb. 3.1, S. 27 dargestellt in  $2 \times 2$ -Unterblöcke zerfällt, die nur durch die Dissipationsprozesse und das Pumpen koppeln. Alle restlichen Elemente sind identisch Null. Wird die Dichtematrix ohne Dissipation betrachtet, so bleibt das System abhängig von der Anfangsbedingung  $n$  im entsprechenden Unterblock.

### 3.2.1 FREIE DICHEMATRIX UND RABIOSZILLATIONEN

Wie schon in Kapitel 3.2, S. 26 dargestellt, koppeln in der freien Dichtematrix (ohne Dissipation und Pumpen) für festes  $n$  jeweils die Elemente  $\rho_{\alpha n, \alpha n}$  und  $\rho_{\beta n+1, \beta n+1}$  über die nichtdiagonalen Matrixelemente  $\rho_{\alpha n, \beta n+1}$  und  $\rho_{\beta n+1, \alpha n}$ . Startet das System also z.B. im Zustand  $\rho_{\alpha 0, \alpha 0}$  (angeregtes Atom, kein Photon in der Mode), so kann das System nur die Zustände  $\rho_{\alpha 0, \alpha 0}$  und  $\rho_{\beta 1, \beta 1}$  annehmen. Die Besetzungen der Zustände des so koppelnden Systems oszillieren gemäß Gl. (2.61), S. 17 mit der Rabifrequenz

$$R_n^0 = 2|g| \frac{\sqrt{n+1}}{\hbar}. \quad (3.3)$$



**Abbildung 3.2:** Darstellung der Entwicklung des Systems ohne Dissipationsprozesse mit der Dichtematrix. (a) Besetzungswahrscheinlichkeiten  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  für  $n = 0$ . (b) Rabioszillationen in  $f_\alpha$  für  $n = 0$  und  $n = 3$ .

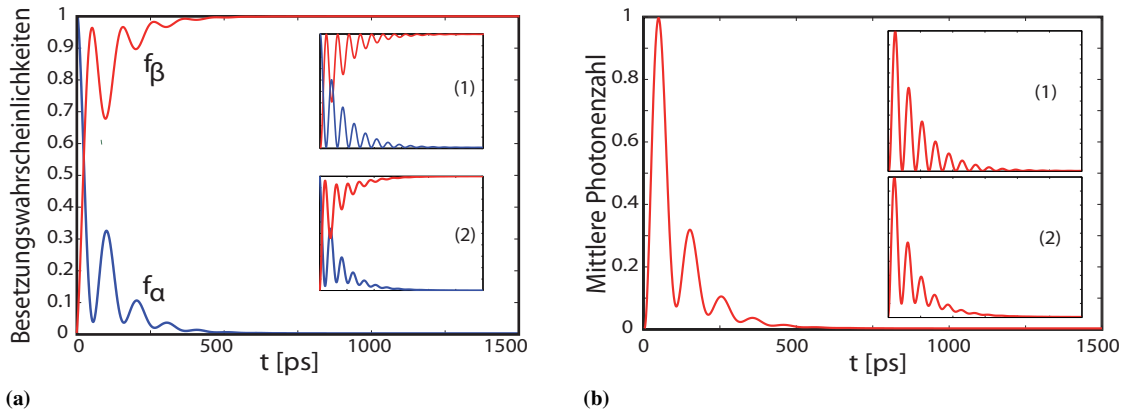
Dies entspricht gerade dem Vorgang, dass das zu Beginn angeregte atomare System mit einer konstanten Frequenz relaxiert und ein Photon emittiert, dieses Photon dann wieder selbst absorbiert und so weiter. Ohne die Hinzunahme von Dissipation oszilliert das System zeitinvariant zwischen diesen beiden Zuständen. Dieses Verhalten ist in Abb. 3.2, S. 28 dargestellt. In 3.2a ist die Zeitentwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  dargestellt. Darin sind die Rabioszillationen mit einer Periode  $T_0 = 103,66$  ps zu sehen. In 3.2b sind die Rabioszillationen für zwei verschiedene Anfangsbedingungen gegen die Zeit aufgetragen. Die Erhöhung der Oszillationsfrequenz  $\propto \sqrt{n+1}$  ist bei Betrachtung der Periodendauer  $T_n = \frac{\pi\hbar}{|g|\sqrt{n+1}}$  deutlich zu erkennen: für  $n = 0$  ist die Periode  $T_0 = 103,66$  ps, für  $n = 3$  ist die Periode um einen Faktor  $\sqrt{3+1} = 2$  kleiner,  $T_3 = 51,83$  ps. Diese Periodenhalbierung kann in Abb. 3.2b direkt abgelesen werden.

### 3.2.2 DISSIPATION

Im Folgenden werden nun die im Kapitel 2.3.1, S. 19 dargestellten Dissipationsprozesse in die Dichtematrix einbezogen. Durch diese Prozesse entstehen in der Dichtematrix Kopplungen zwischen den einzelnen in Abb. 3.1, S. 27 dargestellten Jaynes-Cummings-Unterblöcken.

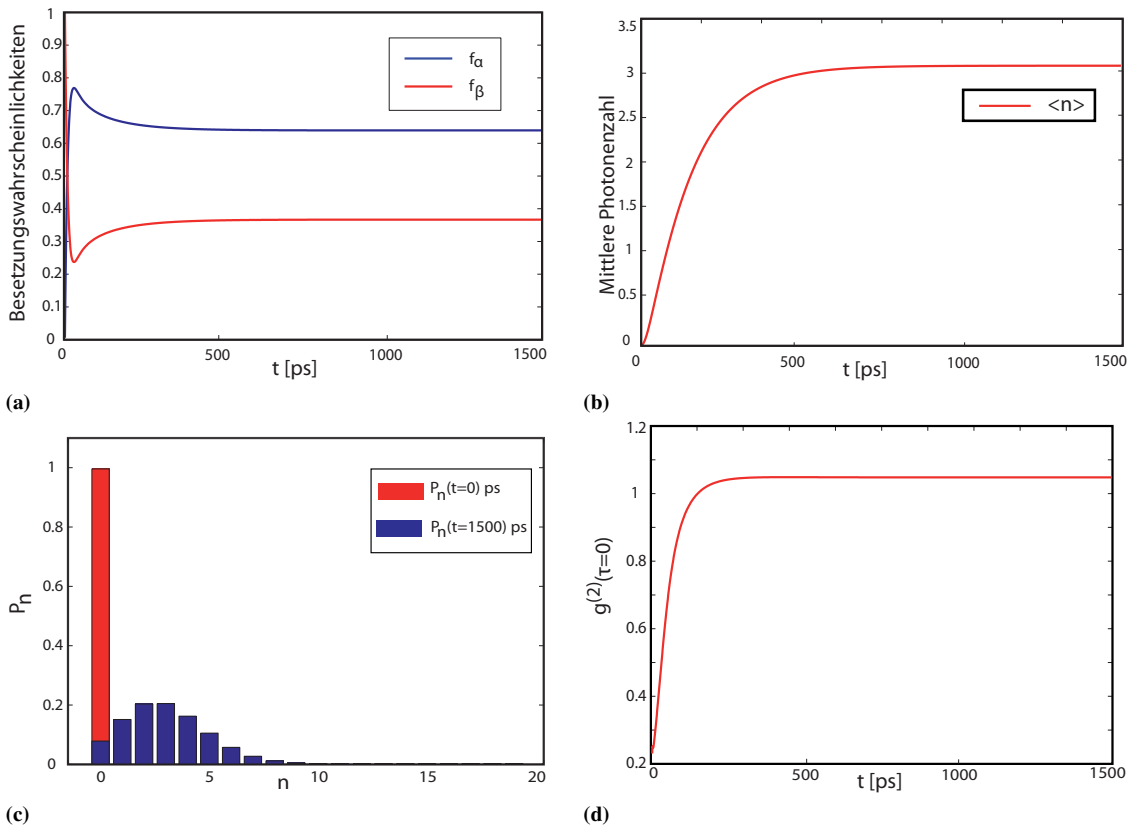
Kavitätsverluste charakterisieren das Zerfallen der photonischen Anregung, entsprechen also dem Vorgang, bei dem ein Photon der Lasermode das System verlässt; somit koppeln die Terme  $\rho_{\alpha n+1, \alpha n+1}$  und  $\rho_{\alpha n, \alpha n}$  der Dichtematrix. Die Zerfallsrate ist  $\kappa$ . Die Emission in nichtlasende Moden beschreibt den Zerfall der atomaren Anregung, es koppeln die Terme  $\rho_{\alpha n, \alpha n}$  und  $\rho_{\beta n, \beta n}$ . Nach Gl. (2.74), S. 20 zerfallen die Zustände mit der Zerfallsrate  $\frac{1}{\tau_{nl}}$ . Der Einfluss der Dissipation ist in Abb. 3.3, S. 29 dargestellt. In Abb. 3.3a ist der Zerfall der atomaren Anregung zu sehen. In der Abbildung kann die Zerfallskonstante (bei der die Anregung auf  $\frac{1}{e}$  abgefallen ist)  $\tilde{\tau} = \left( \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}} \right) = \frac{1}{50 \text{ ps}}$  nachvollzogen werden. Das System vollführt gedämpfte Rabioszillationen und nimmt schließlich den Grundzustand an. In Abb. 3.3b ist der Zerfall der photonischen Anregung zu sehen. Aus dem Zustand mit  $n = 0$  Photonen wird vom initial angeregten Atom ein Photon emittiert, welches dann (unter dem Einfluss der Rabioszillationen) mit derselben Zerfallskonstante  $\tilde{\tau}$  zerfällt. Die einzelnen Dissipationsprozesse wirken sich also nicht nur auf das jeweilige Untersystem (atomar, photonisch) aus, sondern auch auf das jeweils andere System. Diese Kopplung geschieht durch das jeweilige Dephasieren der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix (vgl. 2.3.5, S. 23).





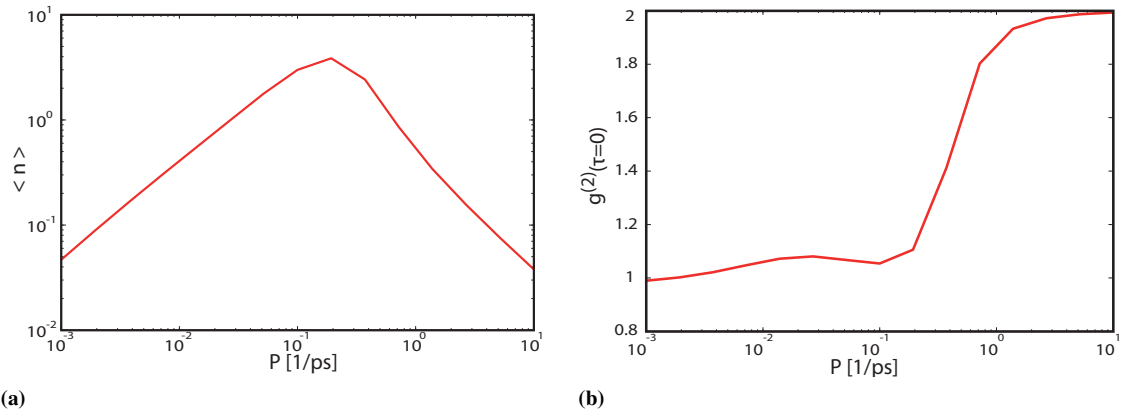
**Abbildung 3.3:** Lösung der Bewegungsgleichungen für die Dichtematrixelemente unter Berücksichtigung von Dissipationsprozessen. In Abb. (a) ist die Zeitentwicklung der atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  dargestellt, in (b) die Zeitentwicklung des Erwartungswertes der Photonenzahl  $\langle n \rangle$ . In den Insets sind die Einflüsse der Dissipationsprozesse jeweils einzeln dargestellt: (1) Kavitätsverluste, (2) Emission in nichtlasende Moden.

### 3.2.3 VOLLE DICHEMATRIX: DISSIPATION UND PUMPEN



**Abbildung 3.4:** Lösung der Bewegungsgleichungen der vollen Dichtematrix. (a) Photonenstatistik, (b) Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(\tau = 0)$ , (c) atomare Besetzungswahrscheinlichkeiten und (d) Erwartungswert der Photonenzahl  $\langle n \rangle$ .

Um dem exponentiellen Zerfall durch die Dissipation entgegenzuwirken und das System zu Laseremis-



**Abbildung 3.5:** Stationäre Lösungen der Bewegungsgleichungen der vollen Dichtematrix für verschiedene Pumpraten. (a) Intensitäts-Kennlinie in doppeltlogarithmischer Auftragung, (b) Kennlinie der Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(\tau = 0)$  über der Pumprate.

sion anzuregen, wird der Pumpprozess hinzugeschaltet. Dieser koppelt in der Dichtematrix die Elemente  $\rho_{\beta n, \beta n}$  und  $\rho_{\alpha n, \alpha n}$  und regt somit das atomare System an. Der stationäre Zustand des Systems ist nun nicht mehr der Grundzustand, sondern ein Zustand, in dem sich die Dissipationsprozesse und das Pumpen gegenseitig ausgleichen. Die Berechnung der vollen Dichtematrix für die oben genannten Parameter ist in Abb. 3.4, S. 29 (Zeitentwicklung) und Abb. 3.5, S. 30 (Stationäre Lösungen für verschiedene Pumpraten) zu sehen.

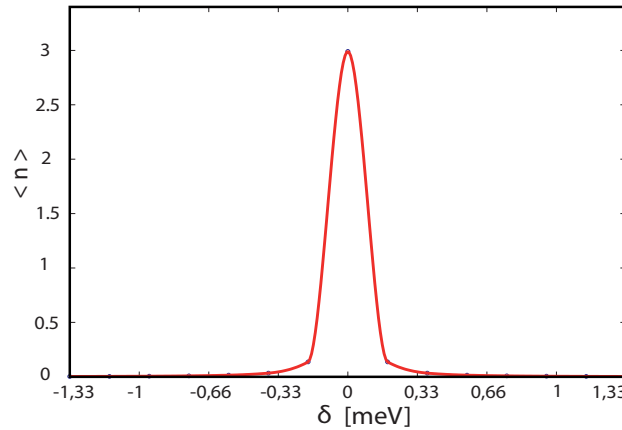
Die in Abb. 3.4a dargestellte Zeitentwicklung der atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten zeigt, dass sich nach einer Einschwingphase<sup>1</sup> die für Emission von Laserlicht notwendige Besetzungsinversion einstellt. In Abb. 3.4b ist die entsprechende Entwicklung des Erwartungswertes der Photonenzahl  $\langle n \rangle$  dargestellt. Es stellt sich ein stationärer Zustand mit  $\langle n \rangle = 3,05$  ein. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Photonen zum Zeitpunkt  $t = 0$  ps und  $t = 1500$  ps ist in 3.4c dargestellt. An ihr kann die Statistik des Lichtes im stationären Zustand abgelesen werden: eine Poissonverteilung zum Erwartungswert  $\langle n \rangle = 3,05$ , was eindeutig kennzeichnet, dass das System einen stationären Zustand oberhalb der Laserschwelle einnimmt (vgl. Kapitel 2.1.3, S. 8). Die Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(0) \approx 1$  in Abb. 3.4d bestätigt den Laserzustand. Das emittierte Licht ist demnach fast vollständig kohärent (super-poissonisch mit einem kleinen thermischen Anteil). Die in 3.5a dargestellte Intensitäts-Kennlinie zeigt das Input-Output-Verhalten des Systems. Bei Betrachtung von Abb. 2.9, S. 24 wird deutlich, dass der  $\beta$ -Faktor für die gewählten Konstanten in dem Bereich, in dem die Pumpdephasierung nicht dominant ist, nahe bei 1 liegt, und somit keine Laserschwelle zu erwarten ist. Die charakteristischen Übergänge des Lasersystems sind aber in der Kennlinie der Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(0)$  in Abb. 3.5b zu sehen. Für kleine Pumpraten ist  $g^{(2)}(0)$  nahe 1 (zwischen kohärent und leicht super-poissonisch)<sup>2</sup>. Ab  $P \approx 1 \frac{1}{\text{ps}}$  nimmt die Korrelationsfunktion den Wert 2 an (thermisches Licht). Hier wird der Einfluss der Dephasierung durch den Pumpvorgang deutlich (vgl. Kap. 2.3.5, S. 23). Das immer stärkere inkohärente Pumpen dephasiert das angeregte Niveau bis zum Zusammenbruch der Laserintensität ab  $P \approx 1 \frac{1}{\text{ps}}$  („self-quenching“), was auch in Abb. 3.5a zu beobachten ist.

<sup>1</sup>Sogenannte Relaxations-Oszillationen, vgl. [Bri08] und [MS99, Seite 348].

<sup>2</sup>Das emittierte Licht ist nicht exakt kohärent, da aufgrund von Speicherbeschränkungen kleine Systeme mit wenigen Photonen-zuständen betrachtet wurden. Wenn  $\langle n \rangle$  nicht groß werden kann enthält die Photonenstatistik immer einen thermischen Anteil, vgl. Abb. 3.4c

### 3.2.4 NICHTRESONANTE ANREGUNG (VERSTIMMUNG)

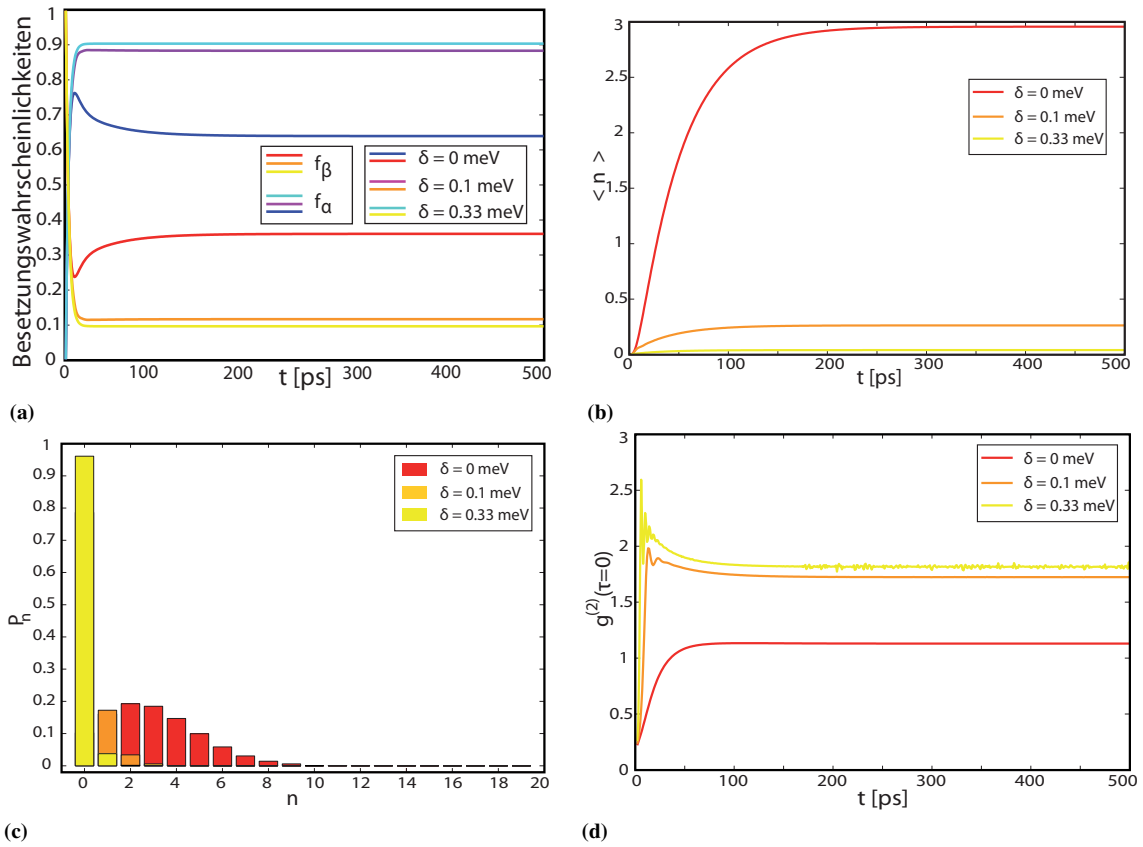
In den bisherigen Berechnungen wurde von resonanter Anregung ausgegangen ( $\delta = \omega - \Omega = 0$ ). Um den Einfluss von Verstimmung, also nichtresonanter Anregung, zu untersuchen, wird in diesem Abschnitt die Dichtematrix mit denselben Parametern wie im vorherigen Abschnitt, aber mit verschiedenen Verstimmungen berechnet. Um einen sinnvollen Bereich für die relative Verstimmung  $\frac{\delta}{\omega}$  zu finden, muss zunächst die Energie des Laserübergangs, also  $\hbar\omega_{\alpha\beta}$  festgelegt werden. Eine realistische Energie für z.B. Halbleiter-Bandlücken ist im Bereich von 1,3 eV (entsprechend einer Frequenz von  $\omega = 2000 \frac{1}{ps}$ ), was mit den verwendeten Konstanten eine Halbwertsbreite des in Abb. 3.6, S. 31 dargestellten Emissionspeaks von  $\Delta E \approx 0,1 \text{ meV}$  mit sich bringt. Dies entspricht einer Frequenz von ca.  $0,15 \frac{1}{ps}$ . Sinnvolle Verstimmungen liegen



**Abbildung 3.6:** Resonanzkurve der Emission. Aufgetragen ist der Erwartungswert der Photonenzahl  $\langle n \rangle$  im Resonator gegen die Verstimmung  $\delta$ .

also im Bereich von  $\delta E = 0 \text{ meV}$  (keine Verstimmung) bis ca.  $\delta E = 0,33 \text{ meV}$  (Anregung im äußeren Bereich der Emissionskurve). Der in Kapitel 2.3.1, S. 20 zur Charakterisierung der Rate der Kavitätsverluste eingeführte Gütefaktor  $Q$  ist definiert als das Verhältnis der Resonanzenergie zur Halbwertsbreite der Resonanzkurve und kann damit abgeschätzt werden zu:  $Q = \frac{E}{\Delta E} \approx 8,66 \cdot 10^3$ . Dies ist ein realistischer Wert für Mikroresonatoren bei hohen  $\bar{\beta}$ -Werten (vgl. [UGA<sup>+</sup>07] mit  $Q_{exp} = 8600 \pm 300$  für einen VCSEL<sup>3</sup> von  $3 \mu\text{m}$  Durchmesser). Im Folgenden wird der Einfluss der Verstimmung auf die Lasereigenschaften untersucht, vgl. Abb. 3.7, S. 32. Es sind jeweils die Kurven für  $\delta E = 0 \text{ meV}$ ,  $0,1 \text{ meV}$ ,  $0,33 \text{ meV}$  gegen die Zeit bzw. gegen die Photonenzahl aufgetragen. Dabei sind mehrere Tendenzen festzustellen: In Abb. 3.7a ist zu sehen, dass die Besetzungsinversion mit steigender Verstimmung zunimmt, der angeregte Zustand also im Mittel höher besetzt ist als der Grundzustand. Dieser Effekt tritt auf, weil die stimulierte Emission bei größerer Verstimmung unwahrscheinlicher wird und das atomare System im Mittel dadurch länger angeregt ist. Durch diesen Effekt werden bei größerer Verstimmung weniger Photonen in die Mode emittiert, was in Abb. 3.7b dargestellt ist. In Abb. 3.7c ist die Photonenstatistik nach Erreichen des stationären Zustandes dargestellt. Es ist zu bemerken, dass die Verteilung nur bei resonanter Anregung einer fast reinen Poisson-Verteilung entspricht. Bei der nichtresonanten Anregung wird deutlich, dass der thermische Anteil des Lichts mit zunehmender Verstimmung wächst, die Wahrscheinlichkeitsverteilung also von einer poissonischen zu einer super-poissonischen und bei großer Verstimmung zu einer thermischen Verteilung wird. Diese Tendenzen sind auch in Abb. 3.7d zu beobachten, in der der Zeitverlauf der Korrelationsfunktion  $g^{(2)}(\tau = 0)$  aufgetragen ist. Das Licht bei resonanter Anregung ist komplett kohärent, bei einer Verstimmung

<sup>3</sup>VCSEL: Vertical-Cavity Surface-Emitting Laser, vgl. [LSG<sup>+</sup>05] oder [Vah03] und Abb. 1.1, S. 1.

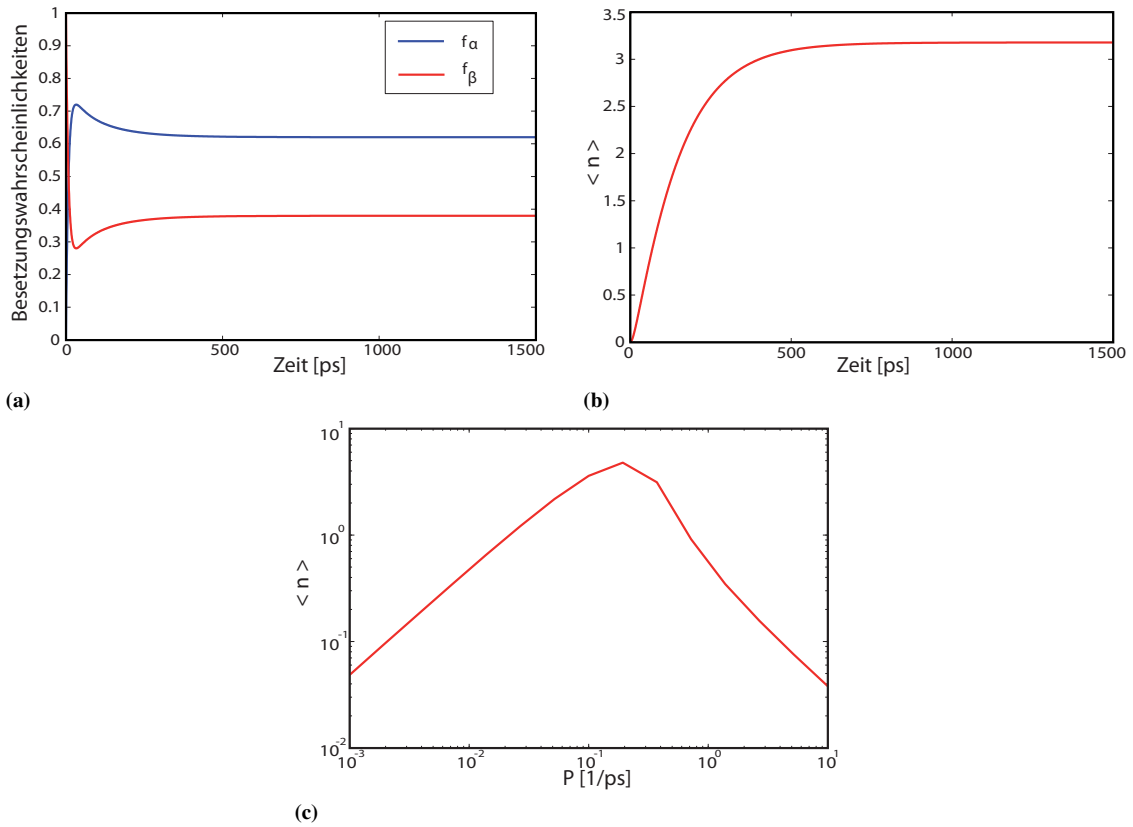


**Abbildung 3.7:** Vergleich der Entwicklung des Systems mit und ohne Verstimmung. (a) Besetzungswahrscheinlichkeiten  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  des atomaren Systems gegen die Zeit aufgetragen. (b) Zeitentwicklung von  $\langle n \rangle$ . (c) Photonenstatistik im stationären Zustand, d) Zeitentwicklung von  $g^{(2)}(\tau = 0)$ .

mung von 0, 1 meV liegt super-poissonisches und bei der Verstimmung von 0, 33 meV fast ausschließlich thermisches Licht vor. Die Verstimmung zerstört (dephasiert) also die Kohärenz des photonischen Systems.

### 3.3 RATENGLICHUNGEN

Nach der Lösung der vollen Dichtematrix mit Berücksichtigung der genannten Dissipationsprozesse können nun die Lösungen der Ratengleichungen mit denen der vollen Bewegungsgleichungen der Dichtematrix verglichen werden, um die Gültigkeit der getätigten Näherungen (adiabatische Eliminierung, Faktorisierung  $\rho_{jn,jn} = \rho_{jj}\rho_{nn}$ , konstante Kavitätsverlustrate), und damit der Ratengleichungen selber zu überprüfen. Die adiabatische Eliminierung wird benötigt, um aus den Dichtematrixgleichungen die Mastergleichungen herzuleiten. Um mit der adiabatischen Eliminierung die Emissionsrate in die Lasermode  $\tau$  abzuschätzen, müssen die Kavitätsverluste als konstant genähert werden. Durch die Faktorisierung der atomaren und photonischen Anteile der Zustände in den Mastergleichungen entstehen die Ratengleichungen für die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten  $f_\alpha, f_\beta$  und den Erwartungswert der Photonenzahl im Resonator  $\langle n \rangle$  (siehe 2.3.4, S. 22). In Abb. 3.8, S. 33 ist die mit den Ratengleichungen berechnete Entwicklung des Systems dargestellt. In Abb. 3.8a ist die Zeitentwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten der beiden atomaren Niveaus dargestellt. Nach der Einschwingphase nehmen die Besetzungswahrscheinlichkeiten stationäre Werte an, welche Besetzungsinversion zeigen. Abb. 3.8b zeigt die Zeitentwicklung des Photonenzahlerwar-

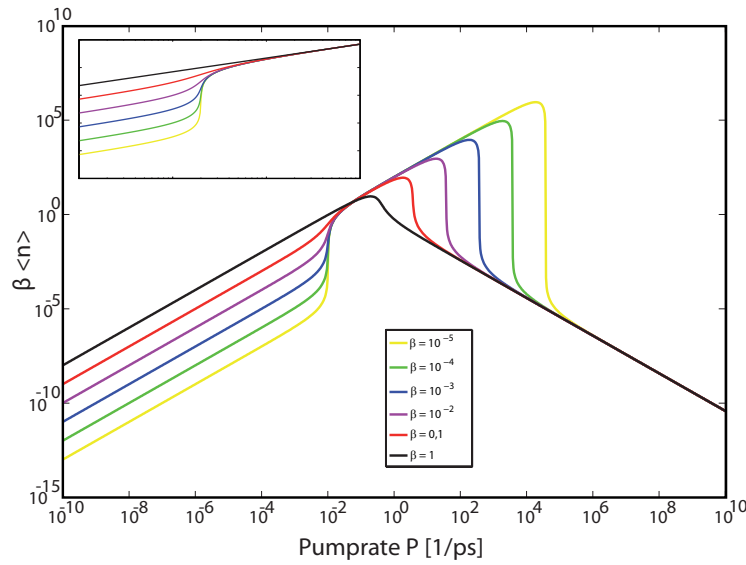


**Abbildung 3.8:** Berechnung der (a) Besetzungswahrscheinlichkeiten und (b) mittleren Photonenzahl durch die Ratengleichungen. In (c) ist die Intensitäts-Kennlinie dargestellt.

tungswertes, also der Intensität. Dabei ist beim Vergleich mit 3.8a zu erkennen, dass erst einige Zeit (ca. 90 ps) nach dem Zeitpunkt der Besetzungsinversion die Photonenzahl größer 1 wird. In Abb. 3.8c ist die Input-Output-Kennlinie der Intensität dargestellt. Dabei sind jeweils die stationären Werte der Intensität gegen die Pumprate aufgetragen. Im Bereich zwischen  $2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{ps}$  und  $7 \cdot 10^{-1} \frac{1}{ps}$  ist Laseraktivität zu beobachten. Der Vergleich des durch die Ratengleichungen beschriebenen Systems mit der vollen Dichtematrixrechnung ist in Kap. 3.4, S. 34 zu finden.

#### $\beta$ -FAKTOR

Die Effizienz des Emitters wird durch das in Kapitel 2.3.4, S. 22, Gl. (2.90) beschriebene Verhältnis von Emission in die Lasermode zur Gesamtemission, den  $\beta$ -Faktor, beschrieben. Wie in Kap. 2.3.6, S. 24 erläutert, kann für die Kennlinie statt  $\beta$  höchstens  $\bar{\beta}$  angegeben werden. Der  $\bar{\beta}$ -Faktor wirkt sich auf die oben dargestellte Kennlinie dadurch aus, dass sich die Höhe des Sprungs in der Input-Output-Kennlinie (in der Funktion  $\langle n \rangle(P)$ ) verändert: je höher die Güte, desto kleiner der Sprung, bis hin zum sogenannten „thresholdless-Laser“ mit  $\bar{\beta} = 1$  (vgl. [RC94], [PDLS<sup>+</sup>99] und [Yok92]). Bei einem solchen Laser ist die Laserschwelle nicht mehr sichtbar und kann somit nicht mehr zur Klassifizierung der Laseraktivität dienen. Das Erreichen der Laserschwelle könnte anhand der Photonenzahl identifiziert werden. Diese ist in den Ratengleichungen aber durch die Faktorisierung der photonischen und atomaren Anteile nicht mehr enthalten. In Abb. 3.9, S. 34 sind die Input-Output-Kennlinien für verschiedene  $\bar{\beta}$ -Werte aufgetragen. Zu erkennen ist das oben beschriebene Verhalten des Sprungs an der Laserschwelle, mit steigendem  $\bar{\beta}$  kleiner zu werden. Weiterhin ist zu bemerken, dass die Unterschiede in der Höhe der Laserschwelle in der logarith-



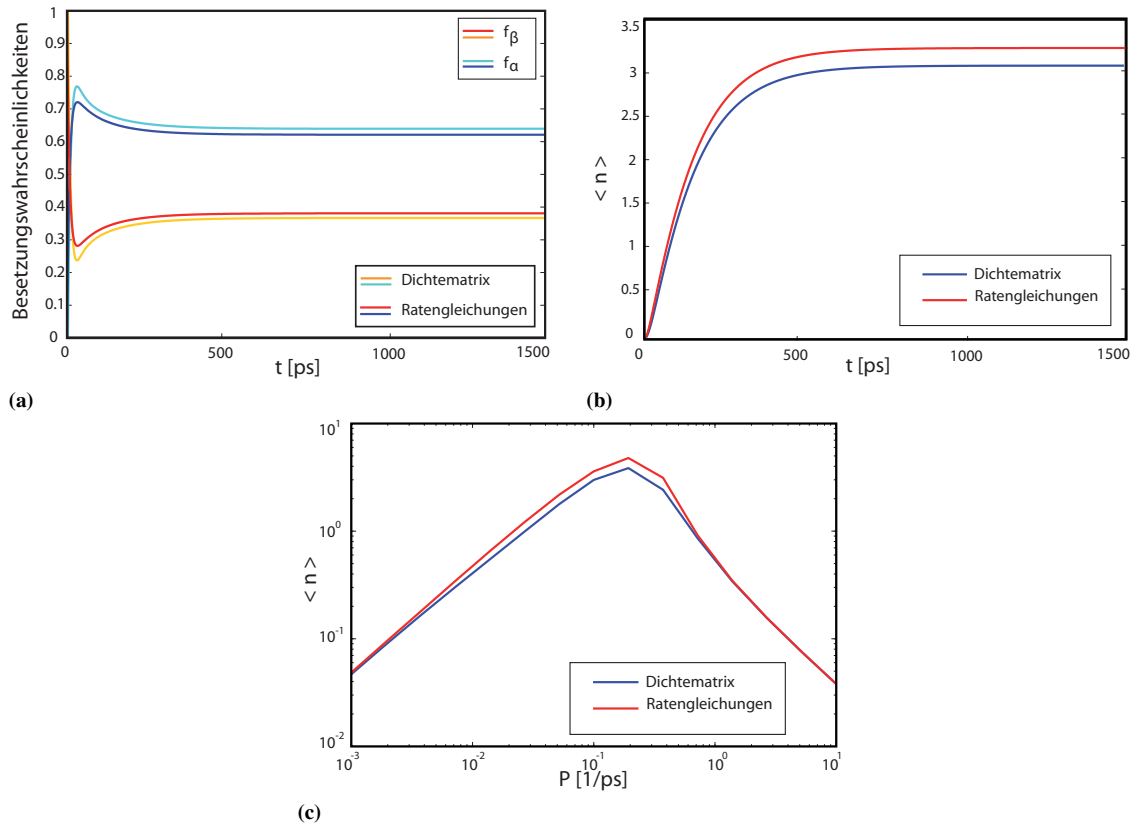
**Abbildung 3.9:** Darstellung der Input-Output-Kennlinien für verschiedene  $\bar{\beta}$ -Werte. Inset: Qualitativer Verlauf der Kennlinien für konstantes  $\tau_{sp}$ , also ohne Pumpdephasierung. In beiden Bildern ist der Photonenanzahlwartungswert mit  $\beta$  skaliert, damit die Laserschwelle jeweils bei der selben Pumprate auftritt.

mischen Auftragung äquidistant mit einem Faktor  $\frac{1}{\Delta\bar{\beta}}$  sind. Die erneute Aufspaltung der Kennlinie mit  $\bar{\beta}$  oberhalb der Laserschwelle ist eine Folge der Annahme eines konstanten  $\bar{\beta}$ : Physikalisch entspricht dieser Annahme eine Variation von  $\tau_{nl}$  mit der Pumprate. Für kleine  $\bar{\beta}$  wird eine große Verlustrate  $\tau_{nl}$  benötigt, welche gleichzeitig den Zusammenbruch der Intensität durch die Pumpdephasierung hinauszögert. Auch diese Aufspaltung ist äquidistant mit einem Abstand  $\frac{1}{\Delta\bar{\beta}}$ .

Der Vergleich der Kennlinien für konstantes  $\bar{\beta}$  mit der in Abb. 3.8c, S. 33 dargestellten Kennlinie, in welcher der  $\beta$ -Faktor für jedes  $P$  gemäß Gl. (2.90), S. 23 mit Gl. (2.92), S. 24 berechnet wurde, zeigt, dass der Einfluss der Variation des  $\beta$ -Faktors klein gegen die Effekte des Pumpdephasierens ist. Die mit festem  $\bar{\beta}$  und den Ratengleichungen berechnete Kennlinie weist eine große Übereinstimmung mit der Kennlinie für  $\bar{\beta} = 1$  auf. Für eine genauere Diskussion der Ratengleichung und der auftretenden Effekte siehe [Bri08].

### 3.4 VERGLEICH DER ERGEBNISSE

Im Folgenden werden die Ergebnisse der vorgestellten Gleichungen der Dichtematrix und der Ratengleichungen gegenübergestellt. Dazu werden je die Input-Output-Kennlinien und die Zeitentwicklungen der mittleren Photonenzahl  $\langle n \rangle$  und der atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten  $f_\alpha$  und  $f_\beta$  verglichen, um einerseits die stationären Ergebnisse und andererseits die Dynamik zu vergleichen. Um die nicht explizit in den Ratengleichungen auftauchende Kopplungskonstante  $g$  zu berücksichtigen, müssen die Parameter aus der Dichtematrixrechnung, wie in Kapitel 2.3.5, S. 23 dargestellt, für die Ratengleichungen angepasst werden. Damit ergeben sich die in Abb. 3.10, S. 35 dargestellten Graphen. In Abb. 3.10a ist der Einfluss der bei der Herleitung getätigten Näherungen zu sehen. Die Zeitentwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten ist sehr ähnlich, allerdings ist die Besetzungsinversion der Dichtematrix für den gesamten Zeitverlauf größer als die der Ratengleichungen. Auch in der Zeitentwicklung von  $\langle n \rangle$  (Abb. 3.10b) sind die Verläufe sehr ähnlich, die Photonenzahl der Ratengleichungen besitzt aber einen geringfügig höheren Wert für  $\langle n \rangle$  im



**Abbildung 3.10:** Vergleich der Kennlinien von Dichtematrix und Ratengleichungen. (a) Vergleich der Zeitentwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten und (b) des Erwartungswertes der Photonenzahl. (c) Vergleich der Kennlinien.

stationären Zustand als die Lösung der Ratengleichungen. Dies korrespondiert mit der etwas höheren Besetzungsinversion insofern, dass weniger Photonen weniger Emission stimulieren und somit die Besetzung des angeregten Niveaus höher ist. In Abb. 3.10c sind die Intensitäts-Kennlinien verglichen. Für  $P < 4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{ps}}$  und  $P > 6 \cdot 10^{-1} \frac{1}{\text{ps}}$  stimmen die Berechnungen sehr gut überein. Im Zwischenbereich ergeben die Ratengleichungen eine geringfügig größere Intensität. Diese Abweichung ist gerichtet, sie ist immer positiv. Es ist anzunehmen, dass die Faktorisierung aus Gl. (2.86), S. 23 diesen Unterschied ausmacht.

## KAPITEL 4

# ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

### 4.1 ZUSAMMENFASSUNG

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollten atomare Ein-Atom-Lasersysteme quantenstatistisch behandelt werden. Dazu wurden zunächst das elektromagnetische Feld im Formalismus der zweiten Quantisierung beschrieben und mögliche Feldzustände und deren unterschiedliche Eigenschaften diskutiert. Weiterhin wurde der Dichteoperator zur Beschreibung eines Systems eingeführt. Anschließend wurde das Jaynes-Cummings-Modell bemüht, um Bewegungsgleichungen für die Dichtematrix aufzustellen. Zur Berücksichtigung der verschiedenen Dissipationsprozesse, die durch die Wechselwirkung mit der Umgebung auftreten, und des Pumpens wurden zur Beschreibung der Kopplung mit externen Reservoiren Lindblad-Terme verwendet. Diese erhalten, im Gegensatz zur phänomenologischen Einführung von Verlusten, die Spur der Dichtematrix und ermöglichen somit eine nicht-phänomenologische Herleitung der oft verwendeten Master- und Ratengleichungen für Lasersysteme. Anschließend wurden die verschiedenen hergeleiteten Bewegungsgleichungen für ein ausgewähltes System numerisch gelöst und verglichen.

Anhand der Lösungen der Bewegungsgleichungen des freien Anteils der Dichtematrix konnten die Rabi-Oszillationen beobachtet werden. Unter Zunahme der Dissipationsprozesse konnte der Einfluss dieser Prozesse auf das atomare und das photonische System untersucht werden. Unter Berücksichtigung aller beschriebenen Prozesse wurde die volle Dichtematrix berechnet und der Übergang vom nicht-lasenden Regime in das Laserregime anhand der Photonenzahlstatistik beobachtet.

Anschließend wurde der Einfluss von Verstimmung, also nicht-resonanter Anregung, auf das System berechnet und mit dem System in resonanter Anregung verglichen. Dabei konnte eine starke Abnahme der Intensität mit steigender Verstimmung beobachtet werden, während das emittierte Licht mit steigender Verstimmung thermischer wird.

Das betrachtete System wurde anschließend anhand der Ratengleichungen berechnet. Neben der Zeitentwicklung wurde der Einfluss des  $\beta$ -Faktors auf das System untersucht. Dabei konnte das Verschwinden der Laserschwelle mit  $\beta \rightarrow 1$  beobachtet werden („thresholdless laser“).

Die Ratengleichungen wurden zum Vergleich mit der Dichtematrix berechnet, um den Einfluss der Näherungen bei der Herleitung abzuschätzen. Dabei konnte eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Gleichungen für große (im Bereich  $P > 5 \cdot 10^{-1} \frac{1}{ps}$ ) und kleine Pumpraten (im Bereich  $P < 4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{ps}$ ) beobachtet werden. Für Pumpraten im Bereich zwischen den genannten Raten konnte festgestellt werden, dass die Ratengleichungen geringfügig größere Werte produzieren als die Dichtematrix. Die Abweichung



ist aber gering.

## 4.2 AUSBLICK

Mit dem in den vorherigen Kapiteln dargestellten Dichtematrixformalismus sind verschiedene Erweiterungen denkbar, die jedoch den Rahmen einer Bachelorarbeit deutlich überschreiten würden.

Ein erster Schritt in Richtung größerer Übereinstimmung mit reellen Lasersystemen wäre zunächst die Erweiterung des atomaren Systems auf 4 Niveaus, wie in Kapitel 1, S. 3, Abb. 1.2a dargestellt.

Ein nächster Schritt wäre die Erweiterung des elektronischen Systems auf 2 oder mehr Elektronen, die sich in den vier atomaren Niveaus aufhalten und optische Übergänge machen können. Interessant wäre dabei, das Laserverhalten mit dem hier behandelten System mit einem Elektron zu vergleichen.

In einem weiteren Schritt der Erweiterung des Systems könnte die Anzahl der Atome erhöht werden. Zu untersuchen wäre dabei die Kopplung der Einzelsysteme durch Strahlung, die sogenannte Superradianz (vgl. [RE71],[BSH71],[Mü08]), die abhängig vom Abstand der Atome untereinander relativ zur Wellenlänge ist.

# LITERATURVERZEICHNIS

- [AGS66] FT Arecchi, E. Gatti, and A. Sona. Time distribution of photons from coherent and Gaussian sources. *Physics Letters*, 20(1):27–29, 1966.
- [Bri08] L.A. Brinkhoff. *Bachelorthesis: Dynamische und statistische Eigenschaften der Emission von atomaren Lasersystemen*. Universität Bremen, 2008.
- [BSH71] R. Bonifacio, P. Schwendimann, and F. Haake. Quantum Statistical Theory of Superradiance. I. *Physical Review A*, 4(1):302–313, 1971.
- [BSKM<sup>+</sup>96] M. Brune, F. Schmidt-Kaler, A. Maali, J. Dreyer, E. Hagley, JM Raimond, and S. Haroche. Quantum Rabi Oscillation: A Direct Test of Field Quantization in a Cavity. *Physical Review Letters*, 76(11):1800–1803, 1996.
- [BT56] R.H. Brown and RQ Twiss. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 177(4497):27–29, 1956.
- [Car99] H. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics*. Springer, 1999.
- [GBM<sup>+</sup>93] C. Ginzel, H.J. Briegel, U. Martini, B.G. Englert, and A. Schenzle. Quantum optical master equations: The one-atom laser. *Physical Review A*, 48(1):732–738, 1993.
- [GWLJ07] C. Gies, J. Wiersig, M. Lorke, and F. Jahnke. Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers. *Physical Review A*, 75(1):13803, 2007.
- [JC63] ET Jaynes and FW Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, 1963.
- [Lou03] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, 2003.
- [LSG<sup>+</sup>05] H. Lohmeyer, K. Sebald, J. Gutowski, R. Kröger, C. Kruse, D. Hommel, J. Wiersig, and F. Jahnke. Resonant modes in monolithic nitride pillar microcavities. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 48(3):291–294, 2005.
- [MBBB03] J. McKeever, A. Boca, AD Boozer, and JR Buck. Experimental realization of a one-atom laser in the regime of strong coupling. *Nature*, 425:268–271, 2003.
- [MS92] Y. Mu and CM Savage. One-atom lasers. *Physical Review A*, 46(9):5944–5954, 1992.
- [MS99] P. Meystre and M. Sargent. *Elements of Quantum Optics*. Springer, 1999.
- [MW95] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.

- [Mü08] S. Müller. *Studienarbeit: Superradiance*. Universität Bremen, 2008.
- [PDLS<sup>+</sup>99] I. Protsenko, P. Domokos, V. Lefčvre-Seguin, J. Hare, JM Raimond, and L. Davidovich. Quantum theory of a thresholdless laser. *Physical Review A*, 59(2):1667–1682, 1999.
- [RC94] P.R. Rice and HJ Carmichael. Photon statistics of a cavity-QED laser: A comment on the laser–phase-transition analogy. *Physical Review A*, 50(5):4318–4329, 1994.
- [RE71] N.E. Rehler and J.H. Eberly. Superradiance. *Physical Review A*, 3(5):1735–1751, 1971.
- [UGA<sup>+</sup>07] SM Ulrich, C. Gies, S. Ates, J. Wiersig, S. Reitzenstein, C. Hofmann, A. Löffler, A. Forchel, F. Jahnke, and P. Michler. Photon Statistics of Semiconductor Microcavity Lasers. *Physical Review Letters*, 98(4):43906, 2007.
- [Vah03] K.J. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 424:839–846, 2003.
- [YB89] H. Yokoyama and SD Brorson. Rate equation analysis of microcavity lasers. *Journal of Applied Physics*, 66:4801, 1989.
- [Yok92] H. Yokoyama. Physics and Device Applications of Optical Microcavities. *Science*, 256(5053):66–70, 1992.
- [ZRSB98] J. Zeller, W. Rudolph, and M. Sheik-Bahae. Theoretical and experimental investigation of a quenched cavity laser with saturable absorber. *Applied Physics B: Lasers and Optics*, 66(3):295–303, 1998.

# ANHANG

## HERLEITUNG DER VON-NEUMANN-GLEICHUNG

Ableiten der Definition der Dichtematrix nach der Zeit liefert

$$\dot{\rho} = |\dot{\psi}\rangle \langle \psi| + |\psi\rangle \langle \dot{\psi}|. \quad (4.1)$$

Darin wird die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$|\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi\rangle \quad (4.2)$$

eingesetzt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [H |\psi\rangle \langle \psi| - |\psi\rangle \langle \psi| H] \\ &= -\frac{i}{\hbar} [H\rho - \rho H] \end{aligned} \quad (4.3)$$

und damit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho], \quad (4.4)$$

die von-Neumann-Gleichung.

## BERECHNUNG VON $\tau$ AUS DER DICHEMATRIX

Adiabatische Eliminierung der Zeitableitung der Nebendiagonalelemente der Dichtematrix

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} = & - i (\omega - \Omega) \rho_{\alpha n, \beta n+1} - \frac{i}{\hbar} \sqrt{n+1} (g \rho_{\beta n+1, \beta n+1} - g \rho_{\alpha n, \alpha n}) \\ & + \frac{\kappa}{2} (2\sqrt{n+1} \sqrt{n+2} \rho_{\alpha n+1, \beta n+2} - (2n+1) \rho_{\alpha n, \beta n+1}) \\ & + \frac{1}{2\tau_{nl}} (-\rho_{\alpha n, \beta n+1}) + \frac{P}{2} (-\rho_{\alpha n, \beta n+1}) \approx 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

und die Annahme einer konstanten Dephasierung durch die Kavitätsverluste

$$\frac{\kappa}{2} (2\sqrt{n+1} \sqrt{n+2} \rho_{\alpha n+1, \beta n+2} - (2n+1) \rho_{\alpha n, \beta n+1}) \approx -\frac{\kappa}{2} \rho_{\alpha n, \beta n+1} \quad (4.6)$$

liefert für die Nebendiagonalelemente

$$\rho_{\alpha n, \beta n+1} = \frac{ig\sqrt{n+1}}{\hbar\alpha} (\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - \rho_{\alpha n, \alpha n}) \quad (4.7)$$

$$\rho_{\beta n+1, \alpha n} = \rho_{\alpha n, \beta n+1}^* \quad (4.8)$$

mit

$$\alpha = i(\omega - \Omega) + \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}} + \frac{P}{2}. \quad (4.9)$$

Dies eingesetzt in die Gleichungen für die Hauptdiagonalelemente der Dichtematrix

$$\partial_t \rho_{\alpha n, \alpha n} = -\frac{i}{\hbar} g\sqrt{n+1} \rho_{\beta n+1, \alpha n} + \frac{i}{\hbar} g\sqrt{n+1} \rho_{\alpha n, \beta n+1} + \wp, \quad (4.10)$$

worin  $\wp$  die Dissipationsterme in der Gleichung der Hauptdiagonalelemente abkürzt, liefert

$$\partial_t \rho_{\alpha n, \alpha n} = \left[ -\frac{|g|^2(n+1)}{\hbar^2 \alpha^*} - \frac{|g|^2(n+1)}{\hbar^2 \alpha} \right] (\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - \rho_{\alpha n, \alpha n}) + \wp \quad (4.11)$$

$$= -\frac{|g|^2(n+1)}{\hbar^2} \left( \frac{1}{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha} \right) (\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - \rho_{\alpha n, \alpha n}) + \wp \quad (4.12)$$

$$= -\frac{|g|^2(n+1)}{\hbar^2} \frac{\text{Re}\{\alpha\}}{|\alpha|^2} (\rho_{\beta n+1, \beta n+1} - \rho_{\alpha n, \alpha n}) + \wp. \quad (4.13)$$

Damit ist die Zerfallsrate in die Lasermode  $\tau$ :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{\text{Re}\{\alpha\}}{|\alpha|^2} \quad (4.14)$$

$$\stackrel{\delta=0}{=} \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\text{Re}\{\alpha\}}, \quad (4.15)$$

wobei die letzte Gleichung für den Resonanzfall ( $\delta = 0$ ) gilt. Ausgeschrieben lautet die Zerfallsrate  $\tau$  für den Resonanzfall also:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2|g|^2}{\hbar^2} \frac{1}{\frac{\kappa}{2} + \frac{1}{2\tau_{nl}} + \frac{P}{2}}. \quad (4.16)$$

# DANKSAGUNG

Am Ende der vorliegenden Bachelorarbeit möchte ich folgenden Personen danken:

Frank Jahnke für außerordentliche Betreuung, Motivation und als Gutachter

Gerd Czycholl für das Wecken meiner Begeisterung an der Quantenmechanik in herausragenden Vorlesungen und als Zweitgutachter

Sandra Ritter als inoffizielle Betreuerin

Der gesamten AG Halbleiterphysik als Diskussionspartner, insbesondere Christopher Gies

Lena Brinkhoff für harte Zusammenarbeit am Thema

Joscha Schmiedt für die Erweiterung meines Programmier-Horizonts

Sonja Schwenk, Agnete und Albrecht Goldmann, Joscha Schmiedt und Sandra Ritter für das Korrekturlesen

Lennart Hilbert für den nichtphysikalischen Faktor

Marco Linke, Moritz Krieger, Lucia Lenz, Joscha Schmiedt, Robert Imlau, Lennart Hilbert, Lena Brinkhoff und die Kommilitonen im Allgemeinen für drei Jahre Spaß

Sonja Schwenk für andere Gedanken und viele wunderbare Jahre

Danke!