

Photonenstatistik des Ein-Atom-Lasers

Bachelor-Thesis

vorgelegt am: 9. Juli 2009

im Institut für Theoretische Physik der Universität Bremen

| | |
|-----------------|-------------------------|
| Name: | Alexander Steinhoff |
| Matrikelnummer: | 2145679 |
| Fachbereich: | 1 |
| Erstgutachter: | Prof. Dr. Frank Jahnke |
| Zweitgutachter: | Prof. Dr. Gerd Czycholl |

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 1.1 | Atome und Quantenpunkte | 5 |
| 1.2 | Grundlagen von Lasern | 6 |
| 1.3 | Gliederung | 7 |
| 2 | Grundlagen der Licht-Materie-Wechselwirkung | 9 |
| 2.1 | Quantisierung des elektromagnetischen Feldes | 9 |
| 2.1.1 | Fock-Zustände | 10 |
| 2.1.2 | Kohärente Zustände | 11 |
| 2.2 | 2-Niveau-Atom | 12 |
| 2.2.1 | Wechselwirkung von Materie und Licht, Dipol-Näherung | 13 |
| 2.2.2 | Jaynes-Cummings-Modell, Rotating Wave Approximation | 14 |
| 2.3 | Zweite Quantisierung | 15 |
| 3 | Grundlagen der statistischen Physik | 17 |
| 3.1 | Dichtematrix-Formalismus | 17 |
| 3.1.1 | Spur eines Operators | 17 |
| 3.1.2 | Dichtematrix | 17 |
| 3.2 | Photonenstatistik | 19 |
| 3.2.1 | Kohärentes Licht | 19 |
| 3.2.2 | Thermisches Licht | 20 |
| 3.3 | Korrelationsfunktionen | 20 |
| 4 | Liouville-von Neumann-Gleichung des Ein-Atom-Lasers | 23 |
| 4.1 | Das Modell | 23 |
| 4.2 | Liouville-von Neumann-Gleichung | 24 |
| 4.2.1 | Vorbereitende Überlegungen | 24 |
| 4.2.2 | Born-Markov-Näherung | 25 |
| 4.2.3 | Reservoirwechselwirkung der Resonatormode | 26 |
| 4.2.4 | Reservoirwechselwirkung des 2-Niveau-Atoms | 28 |
| 4.2.5 | Vollständige Liouville-von Neumann-Gleichung | 29 |
| 4.3 | Bewegungsgleichungen der Matrixelemente | 30 |
| 5 | Anwendung | 33 |
| 5.1 | Grenzfälle | 33 |
| 5.1.1 | Jaynes-Cummings-Wechselwirkung, Rabi-Oszillationen | 33 |
| 5.1.2 | Wechselwirkung der Resonatormode, Kavitätsverluste | 35 |
| 5.1.3 | Wechselwirkung des 2-Niveau-Atoms, spontane Emission in nichtlasende Moden | 37 |
| 5.1.4 | Pumpen | 38 |
| 5.2 | Vollständige Gleichungen | 39 |
| 5.3 | Vergleich mit Rechnung in Cluster-Entwicklung | 41 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 6 | Erweiterung auf vier atomare Niveaus | 47 |
| 6.1 | Liouville-von Neumann-Gleichung des 4-Niveau-Modells | 48 |
| 6.2 | Bewegungsgleichungen der Matrixelemente | 49 |
| 6.3 | Vollständige Gleichungen | 49 |
| 6.4 | Einfluss der spontanen Emission | 51 |
| 6.4.1 | Variation von γ_{12} | 51 |
| 6.4.2 | Variation von γ_{34} | 53 |
| 6.4.3 | Vergleich mit dem 2-Niveau-Modell | 54 |
| 7 | Zusammenfassung und Ausblick | 57 |
| 8 | Anhang | 61 |
| 8.1 | Numerische Methoden | 61 |
| 8.2 | Rechnungen | 61 |
| 8.2.1 | Lösung der Gleichung (5.3) | 61 |
| 8.2.2 | Beweis von Gleichung (5.7) | 62 |

Kapitel 1

Einleitung

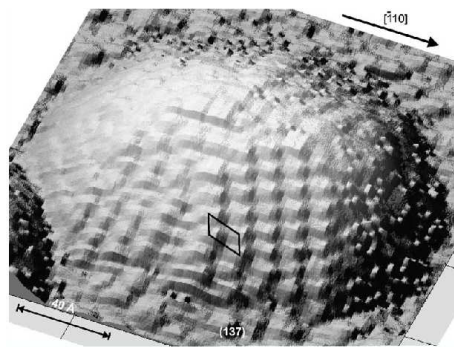


Abbildung 1.1: Experimentelle Realisierung von Quantenpunkten: STM-Aufnahme eines einzelnen linsenförmigen InAs-Quantenpunktes, auf GaAs gewachsen (Quelle: [10]).

Ansichts des Bedarfes an immer kleineren und genauer kontrollierbaren Lichtquellen wurde in den letzten Jahren die theoretische Modellierung sowie experimentelle Realisierung von Einzelemitterlasern vorangetrieben. So konnten bereits Lichtquellen basierend auf Halbleiter-Quantenpunkten und einzelnen Atomen in Mikrokavitäten hergestellt und untersucht werden. Die dadurch ermöglichte Erzeugung und Kontrolle einzelner Photonen ist etwa für das Gebiet der Quanteninformation von Bedeutung [21],[12].

1.1 Atome und Quantenpunkte

Einzelne Atome besitzen lokalisierte Zustände und können als Quelle kohärenter Photonen dienen, sofern sie in eine Kavität eingeschlossen und einem äußeren Pumpprozess ausgesetzt werden. Es sind idealerweise vier Zustände des Atoms beteiligt: zwei innere, zwischen denen ein optischer Übergang besteht, und zwei äußere, welche für den Pumpprozess verwendet werden und mit ersteren über nicht-strahlende Übergänge verbunden sind (siehe Abb. 1.2b)).

Die Modellierung eines solchen Ein-Atom-Lasers kann nun auf verschiedene Arten erfolgen, von denen in dieser Arbeit zwei verwendet und miteinander verglichen werden. Zum einen wird das 2-Niveau-System als einfachstes mögliches Modell betrachtet, welches nur die lasenden Niveaus explizit enthält und den Einfluss der äußeren Niveaus indirekt simuliert. Zum anderen wird das realistischere 4-Niveau-System herangezogen, das den Einfluss der äußeren Niveaus explizit modelliert. Darüber hinaus sind auch Systeme mit drei [13] oder mehr als vier Niveaus denkbar.

In dieser Arbeit werden die Zustände des Ein-Atom-Lasers als lokalisierte atomare Zustände aufgefasst, zwischen denen ein einzelnes Elektron Übergänge vollziehen kann. Sie können allerdings auch als Energiezustände verschiedener Elektronenkonfigurationen eines Atoms interpretiert werden.

Eine weitere Möglichkeit zur Realisierung von Einzel-Emitter-Lasern bieten die sogenannten

Halbleiter-Quantenpunkte. Dabei handelt es sich um Inseln aus Halbleitermaterial mit Abmessungen im Nanometerbereich, welche von einem anderen Halbleitermaterial mit größerer Bandlücke umschlossen werden. Sie erlauben einen Einschluss der Ladungsträger in Valenz- und Leitungsband (Elektronen und Löcher) auf lokalisierten, atomähnlichen Zuständen in allen drei räumlichen Dimensionen, weshalb sie oft auch als “künstliche Atome” bezeichnet werden. Oberhalb dieser lokalisierten Zustände befindet sich ein Quasikontinuum aus delokalisierten Zuständen der sogenannten Benetzungsschicht, auf welcher der Quantenpunkt (als eine von verschiedenen möglichen Realisierungen, siehe Abb. 1.1) gewachsen ist. Die Zustände sind in Schalen angeordnet, welche aufgrund von räumlichen Symmetrien verschiedene Entartungsgrade aufweisen. Die ersten beiden Schalen werden entsprechend ihrer Entartung als s- bzw. p-Schale bezeichnet, siehe Abb. 1.2a), [1],[19]. Die Dynamik von Quantenpunkten hängt

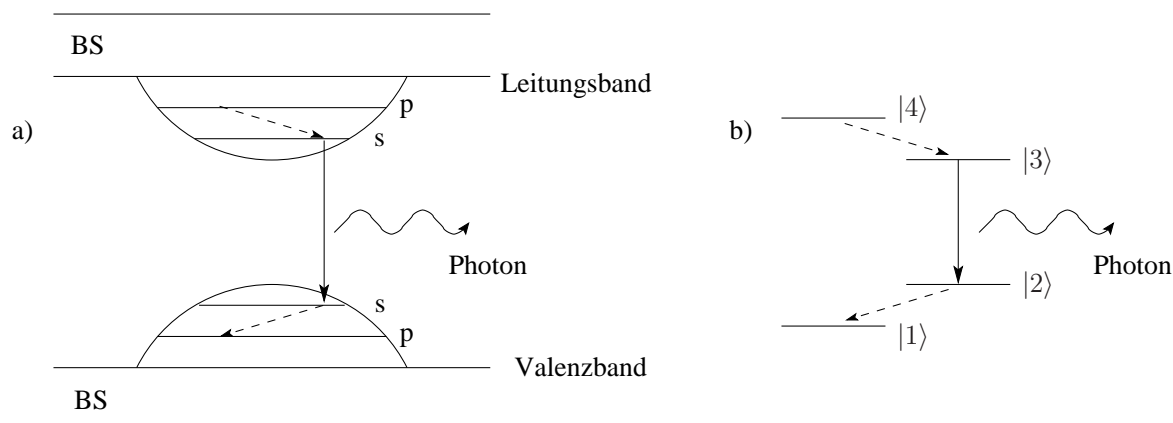


Abbildung 1.2: a) Energieschema eines *Halbleiter-Quantenpunktes*: Lokalisierte Zustände, angeordnet in s- und p-Schalen, werden umschlossen von einem Quasikontinuum aus Zuständen der Benetzungsschicht (BS). Die gestrichelten Linien kennzeichnen die Relaxation zwischen den Schalen, während die durchgezogene Linie den strahlenden Übergang in der s-Schale darstellt. b) Das *einzelne Atom* kann ebenfalls aus lokalisierten Zuständen modelliert werden, welche als $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|4\rangle$ bezeichnet werden. Es besitzt einen optischen Übergang zwischen den Zuständen $|2\rangle$ und $|3\rangle$ sowie nicht-strahlende Übergänge zwischen den Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ bzw. $|3\rangle$ und $|4\rangle$. Dabei spielen festkörperspezifische Effekte, die etwa durch die Vielteilchen-Wechselwirkung mit der Benetzungsschicht auftreten, keine Rolle.

von vielen Wechselwirkungen ab, etwa jenen der lokalisierten Zustände mit den Benetzungsschicht-Zuständen. Zu ihrer Behandlung sind daher kompliziertere Modelle als für jene des Ein-Atom-Lasers notwendig. Es besteht jedoch eine gewisse Analogie zwischen den Systemen aufgrund der Tatsache, dass beide über lokalisierte Zustände verfügen.

1.2 Grundlagen von Lasern

An dieser Stelle sollen kurz allgemeiner Aufbau und Funktionsweise von Lasern beschrieben werden [7].

Als *Laser* (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) bezeichnet man Vorrichtungen, die in der Lage sind, eigene Lichtemission zu verstärken. Die wesentlichen Komponenten eines Lasers sind ein aktives Medium, ein Resonator und eine Pumpvorrichtung. Zudem steht das System stets in Kontakt mit seiner Umgebung, also mit äußeren Reservoirs, die als im thermischen Gleichgewicht befindlich angenommen werden. Das aktive Medium kann auf verschiedene Arten realisiert werden. Wesentlich ist, dass es Übergänge zwischen Energieniveaus im optischen Bereich zulässt und Elektronen enthält, welche, durch die Pumpvorrichtung angeregt, in diesen Übergängen Licht entsprechender Wellenlängen emittieren. Die Übergänge können spontan und in beliebiger Richtung und Phase erfolgen (spontane Emission) oder von einfallenden Photonen an einem angeregten Elektron induziert werden (stimulierte Emission). In letzterem Fall besitzt das emittierte Photon die gleiche

Phase, Richtung und Frequenz wie das induzierende Photon, das Licht wird verstärkt. In Konkurrenz zur stimulierten Emission steht die Absorption eines einfallenden Photons durch Elektronen im Grundzustand. Der Resonator umschließt das aktive Medium und sorgt für die Selektion bestimmter diskreter Photonenmoden mit einer gewissen Linienbreite (“lasende” Moden) sowie, mittels Reflexion, für den mehrmaligen Durchgang der entsprechenden emittierten Photonen durch das Medium. Dabei wird ein geringer Teil des Lichtes aus dem Resonator ausgekoppelt und steht außerhalb des Lasers zur Verfügung, was sich als Resonator- oder Kavitätsverlust des Lasers auswirkt. Charakteristisch für das erzeugte Licht ist die hohe Kohärenz und Leistungsdichte. Es wird im Übrigen zwischen der spontanen Emission in “lasende” und “nichtlasende” Moden unterschieden. Das Verhältnis der Rate der spontanen Emission in lasende Moden zur Gesamtrate der spontanen Emission wird als β -Faktor bezeichnet und ist charakteristisch für den Laser.

Zwischen allen genannten Prozessen stellt sich stets nach einer gewissen Zeit ein dynamisches Gleichgewicht ein, welches von den Reservoiren und der Leistung der Pumpvorrichtung (Pumprate) abhängig ist. Das System befindet sich dann im stationären Zustand. In konventionellen Lasern (Gaslaser, Diodenlaser etc.) existieren zwei unterschiedliche Pumpbereiche, die durch die sogenannte Laserschwelle getrennt werden. Bei Pumpraten unterhalb des Schwellenwertes sind nur wenige Emittoren angeregt und es überwiegt die Absorption von Photonen. Ab einer bestimmten Rate wird jedoch Besetzungsinversion erreicht, also eine im Mittel höhere Besetzung des oberen Niveaus als des unteren. Dann beginnt die stimulierte Emission über Absorption und spontane Emission zu dominieren, die Verluste in Material und Kavität werden überschritten und der Laser emittiert kohärentes Licht. Die Visualisierung der Laserschwelle erfolgt durch die *Kennlinie* des Lasers, in der die im stationären Zustand vorhandene mittlere Photonenzahl im System über der Pumprate aufgetragen wird. Die Kennlinie weist im Allgemeinen an der Schwelle einen Übergang auf, etwa einen Knick in nichtlogarithmischer Darstellung bzw. einen Sprung in der zumeist verwendeten doppellogarithmischen Darstellung. Die Ausprägung des Überganges ist dabei von der Größe des oben genannten β -Faktors abhängig. Auch in der Photonenzahlstatistik des Lasers wird der Übergang zwischen dem lasenden und dem nichtlasenden Bereich deutlich: Konventionelle Laser emittieren unterhalb der Laserschwelle inkohärentes thermisches Licht und gehen an der Laserschwelle zur Emission kohärenten Lichtes über.

Ein-Atom-Laser, deren Verhalten in dieser Arbeit statistisch untersucht werden soll, unterscheiden sich insofern von den genannten konventionellen Lasern, dass diese aus sehr vielen Atomen bestehen. Von besonderem Interesse wird dabei die Photonenzahlstatistik von Ein-Atom-Lasern sein, die, wie sich herausstellen wird, signifikante Unterschiede zu der Statistik konventioneller Laser aufweist.

1.3 Gliederung

In den folgenden zwei Kapiteln werden zunächst die notwendigen Grundlagen der Licht-Materie-Wechselwirkung bis hin zum Jaynes-Cummings-Modell sowie der statistischen Physik mit dem zentralen Dichtematrix-Formalismus eingeführt. Darauf aufbauend wird im vierten Kapitel die sogenannte Liouville-von Neumann-Gleichung des Ein-Atom-Lasers mit zwei Niveaus in einer Born-Markov-Näherung hergeleitet. Sie enthält sämtliche Informationen über sein statistisches zeitliches Verhalten unter Ankopplung an äußere Reservoire und führt zu den entscheidenden Bewegungsgleichungen. Deren numerische Lösung und Auswertung geschieht im fünften Kapitel, wo zudem mit der sogenannten Cluster-Entwicklung eine alternative Lösungsmethode vorgestellt wird. Im Anschluss wird im sechsten Kapitel das Modell auf vier atomare Niveaus erweitert, ausgewertet und ein Vergleich der Ergebnisse beider Modelle gezogen. Das letzte Kapitel erhält eine Zusammenfassung aller Ergebnisse sowie einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen dieser Arbeit.

Kapitel 2

Grundlagen der Licht-Materie-Wechselwirkung

2.1 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Eine Untersuchung der statistischen Eigenschaften von Photonen in Ein-Atom-Lasern einschließlich quantenmechanischer Effekte wie der spontanen Emission erfordert nicht nur die Quantisierung der Materie, sondern ebenfalls des elektromagnetischen Feldes. Es wird notwendig sein, geeignete quantenmechanische Operatoren und Zustände zur Darstellung des quantisierten Feldes einzuführen [21]. Als Ausgangspunkt der Quantisierung dienen die klassischen quellenfreien Maxwell-Gleichungen des elektromagnetischen Feldes:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

wobei $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ und $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ mit μ_0 und ϵ_0 der magnetischen Permeabilität und elektrischen Permittivität des Vakuums. Die Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} lassen sich durch Potentiale V und \mathbf{A} darstellen, welche invariant unter bestimmten Eichtransformationen sind. Eine geeignete Eichtransformation ist in diesem Fall die Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. In dieser lassen sich die Felder folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.\tag{2.2}$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.2) in Gl. (2.1) ergibt sich eine Wellengleichung für das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}.\tag{2.3}$$

Zur Lösung dieser Gleichung wird das Feld als auf ein endliches Volumen V beschränkt betrachtet und in Normalmoden $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ entwickelt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k c_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \sum_k c_k^* \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}\tag{2.4}$$

Diese sind Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\Delta = \nabla^2$. Sie bilden eine orthonormale Basis des Raumes aller transversalen Funktionen über dem Volumen V ,

$$\int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{kk'},\tag{2.5}$$

und erfüllen die Transversalitätsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = 0.\tag{2.6}$$

Die Form der Normalmoden hängt von den genauen Randbedingungen des Volumens V ab. Für periodische Randbedingungen ergeben sich etwa ebene Wellen

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

mit dem Einheitspolarisationsvektor $\hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)}$. Die zwei möglichen Polarisationsrichtungen $\lambda = 1, 2$ und der Wellenzahlvektor \mathbf{k} werden zu einem Summationsindex k zusammengefasst. Aufgrund der Beschränkung auf ein endliches Volumen sind die Komponenten des Wellenzahlvektors diskret:

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L_z}, \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Die Polarisation der Welle ist wegen Gl. (2.6) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{k} . Mit entsprechenden Fourier-Koeffizienten c_k lässt sich das Vektor-Potential nun schreiben als

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} [a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + a_k^* \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}], \quad (2.7)$$

Aus Gl. (2.2) folgt damit das elektrische Feld in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} [a_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} - a_k^* \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}]. \quad (2.8)$$

Die Normierung wurde derart gewählt, dass die Amplituden a_k und a_k^* dimensionslos sind und nach der Quantisierung möglichst einfache Identitäten erfüllen. Klassisch handelt es sich dabei um zueinander konjugiert komplexe Zahlen. Die Quantisierung des Feldes erfolgt nun durch Übergang zu zueinander adjungierten Operatoren a_k und a_k^\dagger . Es stellt sich heraus, dass für sie die folgenden Kommutatorrelationen gelten:

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0, \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (2.9)$$

Somit handelt es sich bei den Quanten des Feldes, den Photonen, um bosonische Teilchen. Die Beschreibung der Moden des elektromagnetischen Feldes erfolgt damit völlig analog zu der Beschreibung voneinander unabhängiger harmonischer Oszillatormoden durch entsprechende Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Jede Mode wird durch quantenmechanische Zustände in einem jeweils eigenen Hilbert-Raum beschrieben. Die Zustände des gesamten Feldes sind dann in dem Produktraum der Hilbert-Räume aller Moden definiert. Der Hamilton-Operator des elektromagnetischen Feldes lautet

$$H = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) d\mathbf{r}. \quad (2.10)$$

Durch Einsetzen von \mathbf{E} aus Gl. (2.8) und des entsprechenden Ausdrucks für \mathbf{H} sowie Ausnutzung der Eigenschaften der Normalmoden ergibt sich für den Hamilton-Operator

$$H = \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (2.11)$$

2.1.1 Fock-Zustände

Es werde nun das Eigenwertproblem einer einzelnen Mode mit dem Hamilton-Operator

$$H = \hbar \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.12)$$

betrachtet [21]. Der Operator $a^\dagger a$ ist selbstadjungiert und positiv definit und besitzt daher nur reelle, nichtnegative Eigenwerte. Seine normierten Eigenzustände, die sogenannten *Fock-Zustände*, werden mit $|n\rangle$ bezeichnet. Unter Verwendung der Kommutatorrelationen (2.9) und der zuvor genannten Eigenschaften ergibt sich, dass die zugehörigen Eigenwerte dann $\hbar \omega (n + \frac{1}{2})$ mit natürlichen Zahlen

$n = 0, 1, 2, \dots$ lauten. Die Zahlen n stellen die Anzahl der Photonen in der entsprechenden Mode dar, weshalb der Operator $N = a^\dagger a$ als Besetzungszahloperator bezeichnet wird. Weiterhin findet man die folgenden Relationen für die Operatoren a^\dagger und a :

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.13)$$

Die Anwendung des Operators a auf einen Fock-Zustand verringert also die Photonenzahl in der Mode, bei Anwendung von a^\dagger wird entsprechend die Photonenzahl erhöht. Die Operatoren heißen daher Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator. Aus dem Grundzustand $|0\rangle$ mit $a |0\rangle = 0$ lässt sich so sukzessive die unendliche Leiter von Fock-Zuständen erzeugen:

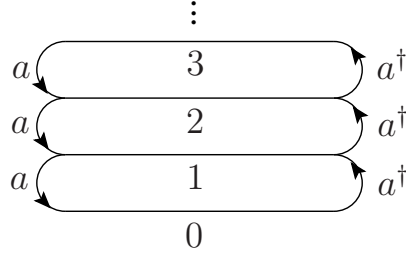


Abbildung 2.1: Spektrale Leiter der Fock-Zustände $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, die durch Anwendung des Erzeugungsoperators a^\dagger bzw. des Vernichtungsoperators a durchlaufen wird.

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Die Fock-Zustände sind orthogonal und vollständig:

$$\begin{aligned} \langle n|m\rangle &= \delta_{nm}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| &= 1. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Im Falle mehrerer Moden wie in Gl. (2.11) gibt es eine gemeinsame Eigenbasis aller Operatoren $a_k^\dagger a_k$ aus symmetrisierten Vielteilchenzuständen:

$$a_k^\dagger a_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle = a_k^\dagger a_k |\{n\}\rangle = n_k |\{n\}\rangle.$$

Auch hier gelten wieder Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsbedingung. Für den Hamilton-Operator des Feldes (2.11) gilt:

$$H |\{n\}\rangle = \sum_k \hbar \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right) |\{n\}\rangle. \quad (2.16)$$

Die Energie des Feldes setzt sich zusammen aus der Summe der Energien der einzelnen Moden, multipliziert mit der Anzahl der in der Mode befindlichen Photonen, und der Vakuumenergie

$$\langle 0| H |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_k \hbar \omega_k.$$

Das Modenspektrum ist nach oben unbegrenzt, woraus eine unendliche Vakuumenergie resultiert. Dieses Problem kann durch eine Renormierung umgangen werden, da praktisch nur Energiedifferenzen gemessen werden.

2.1.2 Kohärente Zustände

Eine weitere, wichtige Basis zur Darstellung optischer Felder sind die kohärenten Zustände [15]. Sie können formal eingeführt werden als Eigenzustände des Vernichtungsoperators einer einzelnen Photonenmode mit beliebigem komplexem Eigenwert α :

$$a |\phi_\alpha\rangle = \alpha |\phi_\alpha\rangle. \quad (2.17)$$

Nach Entwicklung des Zustandes $|\phi_\alpha\rangle$ nach Fock-Zuständen,

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle c_n, \quad (2.18)$$

und Einsetzen in Gl. (2.17) ergibt sich durch Rekursion

$$|\phi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0, \quad (2.19)$$

wobei c_0 durch die Normierung der Zustände bestimmt wird zu

$$c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}.$$

Die normierten Eigenzustände $|\alpha\rangle$ lauten dann

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}, \quad (2.20)$$

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Man beachte, dass das Spektrum von a die gesamte komplexe Zahlenebene ist. Kohärente Zustände sind nicht orthogonal,

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}, \quad (2.21)$$

und übervollständig, d.h. die Entwicklung eines Zustandes in kohärenten Zuständen ist nicht eindeutig.

Offenbar ist in kohärenten Zuständen, im Gegensatz zu Fock-Zuständen, die Photonenzahl unbestimmt. Ihre physikalische Relevanz erhalten sie unter anderem durch die Tatsache, dass Laser im Betrieb über der Laserschwelle kohärentes Licht erzeugen. Über die statistischen Eigenschaften kohärenter Zustände wird daher an späterer Stelle noch einiges zu sagen sein.

2.2 2-Niveau-Atom

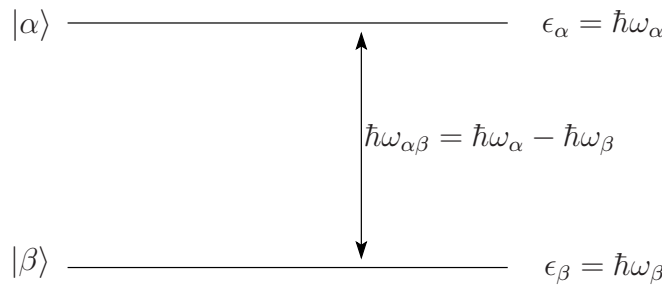


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des 2-Niveau-Atoms, bestehend aus dem Grundzustand $|\beta\rangle$ und dem angeregten Zustand $|\alpha\rangle$ mit der Energiedifferenz $\hbar\omega_{\alpha\beta}$.

Das einfachste, nichttriviale Modell zur Beschreibung nichtlinearer optischer Phänomene in Materie ist das 2-Niveau-Atom [5]. Es stellt eine gängige Näherung dar, wenn das Licht exakt oder beinahe resonant mit der Energiedifferenz der Niveaus ist.

Der Grundzustand des Atoms werde mit $|\beta\rangle$ bezeichnet und besitze die Energie $\epsilon_\beta = \hbar\omega_\beta$, der angeregte Zustand $|\alpha\rangle$ besitze die Energie $\epsilon_\alpha = \hbar\omega_\alpha$ und die Energiedifferenz sei $\hbar\omega_{\alpha\beta}$. Der freie Hamilton-Operator des Systems lautet dann

$$H_{at} = \hbar\omega_\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha| + \hbar\omega_\beta |\beta\rangle \langle\beta|. \quad (2.22)$$

Übergänge zwischen den beiden Zuständen werden durch die Operatoren $|\alpha\rangle\langle\beta|$ und $|\beta\rangle\langle\alpha|$ beschrieben. Wegen seiner zweidimensionalen Struktur kann das 2-Niveau-Atom als Pseudo-Spin-System mit Pauli-Matrizen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ aufgefasst werden:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Es seien

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Der Hamilton-Operator kann in dieser Form geschrieben werden als

$$H_{at} = \hbar \begin{pmatrix} \omega_\alpha & 0 \\ 0 & \omega_\beta \end{pmatrix} = \hbar \frac{\omega_\alpha + \omega_\beta}{2} \mathbb{1} + \hbar \frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{\alpha\beta} \sigma_z. \quad (2.25)$$

Hierbei wurden additive Konstanten vernachlässigt, da experimentell nur Energiedifferenzen zugänglich sind. Die Übergangsoperatoren lauten

$$|\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_+, \quad |\beta\rangle\langle\alpha| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_-. \quad (2.26)$$

2.2.1 Wechselwirkung von Materie und Licht, Dipol-Näherung

Semiklassisch wird die Wechselwirkung von Licht und Materie durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben [15]:

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + qV(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}), \quad (2.27)$$

mit dem atomaren Potential $U(\mathbf{r})$. Das elektromagnetische Feld werde in der Coulomb-Eichung betrachtet. Der Hamilton-Operator kann dann in eine sehr nützliche Form gebracht werden, indem die räumliche Änderung des Vektorpotentials \mathbf{A} über dem Atom vernachlässigt wird. Dies erscheint gerechtfertigt, da typische Lichtwellenlängen die Abmessungen von Atomen um etwa drei Größenordnungen übertreffen. Es ist dann

$$H = H_{at} + H', \quad H' = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) = - \sum_{\alpha, \alpha'} \mathbf{d}_{\alpha\alpha'} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) |\alpha\rangle\langle\alpha'| \quad (2.28)$$

mit dem Dipol-Operator $\mathbf{d} = -e(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, \mathbf{r}_0 der Position und $|\alpha\rangle$ den Eigenzuständen des Atoms. Diese Näherung wird als *Dipol-Näherung* der Wechselwirkung von Licht und Materie bezeichnet. Man beachte, dass semiklassisch die elektrische Feldstärke kein Operator ist und etwa die spontane Emission nicht beschreibt. Dies ändert sich durch die Quantisierung des Feldes. Der freie Hamilton-Operator des Systems ist dann durch den Hamilton-Operator des Feldes zu ergänzen und das klassische Feld \mathbf{E} durch das quantisierte Feld (2.8) zu ersetzen:

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{at} + H_{ph} = \sum_{\alpha} \hbar \omega_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| + \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k, \\ H' &= - \sum_{\alpha, \alpha', k} i \mathbf{d}_{\alpha\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \left[a_k u_k(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega_k t} - a_k^\dagger u_k^*(\mathbf{r}_0) e^{i\omega_k t} \right] |\alpha\rangle\langle\alpha'| \\ &= \sum_{\alpha, \alpha', k} \hbar \left[g_{\alpha\alpha'}(k) a_k + g_{\alpha'\alpha}^*(k) a_k^\dagger \right] |\alpha\rangle\langle\alpha'| \end{aligned} \quad (2.29)$$

mit der Kopplungskonstanten der Mode k und des Übergangs zwischen den Zuständen $|\alpha\rangle$ und $|\alpha'\rangle$

$$g_{\alpha\alpha'}(k) = \frac{-i \mathbf{d}_{\alpha\alpha'} \cdot \hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)}}{\hbar} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} u_k(\mathbf{r}_0). \quad (2.30)$$

Diese hängt offenbar von der Ausrichtung des Dipolmatrixelementes zur Polarisierung der Photonenmode und der Amplitude der Mode am Ort \mathbf{r}_0 des Atoms ab. Man beachte, dass alle Diagonalelemente des Dipoloperators verschwinden und daher in Gl. (2.29) nur Terme mit $\alpha \neq \alpha'$ auftreten.

Der Hamilton-Operator des Systems enthält nun sowohl atomare als auch photonische Operatoren, der Hilbert-Raum des Problems wird damit von einer gemeinsamen Basis atomarer und photonischer Zustände $|\alpha, \{n\}\rangle$ aufgespannt.

2.2.2 Jaynes-Cummings-Modell, Rotating Wave Approximation

Der im vorigen Abschnitt hergeleitete Wechselwirkungs-Hamiltonian soll auf einen interessanten Spezialfall eingeschränkt werden, das *Jaynes-Cummings-Modell* zur Beschreibung eines 2-Niveau-Atoms in Wechselwirkung mit einer einzelnen Photonenmode [11],[15].

Der Wechselwirkungs-Hamiltonian (2.29) reduziert sich damit auf vier Terme, sodass der Hamilton-Operator des Systems folgendermaßen lautet:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_{\alpha\beta}\sigma_z + \hbar\omega a^\dagger a + \hbar g_{\alpha\beta}a\sigma_+ + \hbar g_{\beta\alpha}a\sigma_- + \hbar g_{\alpha\beta}^*a^\dagger\sigma_- + \hbar g_{\beta\alpha}^*a^\dagger\sigma_+. \quad (2.31)$$

Die Wechselwirkung mit nur einer Mode lässt sich etwa in einem Resonator realisieren. In diesem bilden sich stehende Wellen mit diskreten Frequenzen aus, die umso weiter auseinander liegen, je kleiner die Resonatorlänge L ist. Ein 2-Niveau-Atom in näherungsweise Resonanz mit einer der Frequenzen wird mit den Moden anderer Frequenzen nur schwach wechselwirken, sodass die Beschränkung auf eine Mode gerechtfertigt ist.

Zur weiteren Vereinfachung des Hamilton-Operators soll an dieser Stelle eine sehr wichtige Näherung betrachtet werden: Die *Rotating Wave Approximation* (RWA); Sie besteht in der Vernachlässigung nicht-resonanter bzw. schnelloszillierender Wechselwirkungen im System. In Gl. (2.31) treten zwei Terme auf, bei denen die Energie einer Komponente zugunsten der Energie der anderen Komponente reduziert wird, und zwei Terme, bei denen beide Komponenten Energie verlieren bzw. aufnehmen (siehe Abb. 2.3). Letztere sind die nicht-resonanten Terme. Zur Rechtfertigung der RWA soll diese

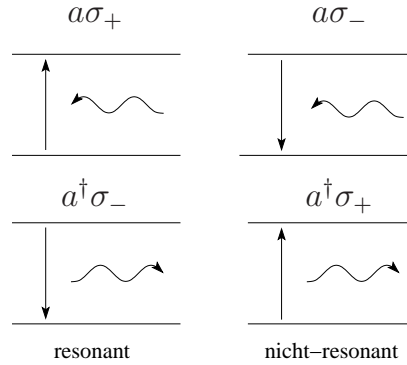


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der Jaynes-Cummings-Terme. Im Jaynes-Cummings-Modell existieren vier Terme der Wechselwirkung zwischen Atom und Photonenmode, von denen zwei als resonant und zwei als nicht-resonant betrachtet werden können. Letztere werden in der RWA vernachlässigt, siehe Rechtfertigung im Text.

kurz im Wechselwirkungs- oder Dirac-Bild diskutiert werden. Zustandsfunktionen und Operatoren im Dirac-Bild sind mit den entsprechenden Größen im Schrödinger-Bild verknüpft durch unitäre Transformationen:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(t)\rangle &= e^{i/\hbar H_0 t} |\psi(t)\rangle, \\ \tilde{A}(t) &= e^{i/\hbar H_0 t} A e^{-i/\hbar H_0 t}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

So ist etwa $\tilde{a}(t) = e^{i/\hbar H_0 t} a e^{-i/\hbar H_0 t}$. Durch Differenzieren nach der Zeit und Ausnutzen der Vertauschbarkeit von H_0 und $e^{i/\hbar H_0 t}$ findet man:

$$\tilde{a}(t) = \tilde{a}(0)e^{-i\omega t} = a e^{-i\omega t} \quad (2.33)$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für a^\dagger, σ_+ und σ_- :

$$\begin{aligned}\tilde{a}^\dagger(t) &= a^\dagger e^{i\omega t}, \\ \tilde{\sigma}_+(t) &= \sigma_+ e^{i\omega_{\alpha\beta} t}, \\ \tilde{\sigma}_-(t) &= \sigma_- e^{-i\omega_{\alpha\beta} t}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Daraus folgt für Kombinationen dieser Operatoren:

$$\begin{aligned}\widetilde{a\sigma_+} &= e^{i/\hbar H_0 t} a \sigma_+ e^{-i/\hbar H_0 t} = e^{i/\hbar H_0 t} a e^{-i/\hbar H_0 t} e^{i/\hbar H_0 t} \sigma_+ e^{-i/\hbar H_0 t} \\ &= \tilde{a} \tilde{\sigma}_+ = a \sigma_+ e^{-i\omega t} e^{i\omega_{\alpha\beta} t} \\ &= a \sigma_+ e^{i(\omega_{\alpha\beta} - \omega)t}, \\ \widetilde{a^\dagger \sigma_-} &= a^\dagger \sigma_- e^{-i(\omega_{\alpha\beta} - \omega)t}, \\ \widetilde{a\sigma_-} &= a \sigma_- e^{-i(\omega_{\alpha\beta} + \omega)t}, \\ \widetilde{a^\dagger \sigma_+} &= a^\dagger \sigma_+ e^{i(\omega_{\alpha\beta} + \omega)t}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Bei der Auswertung einer Zustandsfunktion oder einer Dichtematrix (siehe nächster Abschnitt) im Wechselwirkungsbild wird stets ein Wechselwirkungs-Hamiltonian \tilde{H}' zeitlich zu integrieren sein. Gl. (2.35) zeigt, dass die beiden letzteren, nicht-resonanten Terme aufgrund der Addition der atomaren und photonischen Frequenzen im Exponenten im Vergleich zu den resonanten Termen sehr schnell oszillieren. Sie werden daher im Mittel kaum zur Änderung des Systems beitragen, weshalb die resonanten Größen das Verhalten des Systems wesentlich bestimmen.

In der RWA lautet schließlich der Jaynes-Cummings-Hamiltonian:

$$\begin{aligned}H_{JC} &= \frac{1}{2} \hbar \omega_{\alpha\beta} \sigma_z + \hbar \omega a^\dagger a + \hbar g a \sigma_+ + \hbar g^* a^\dagger \sigma_-, \\ g &= g_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{2.36}$$

2.3 Zweite Quantisierung

Analog zu der bereits verwendeten Quantisierung des elektromagnetischen Feldes lassen sich Felder im Allgemeinen durch kanonische Quantisierung in eine Darstellung durch entsprechende Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren überführen [14],[18]. Insbesondere erhält man so durch Anwendung auf Lösungen $|\psi\rangle$ der Schrödinger-Gleichung einen praktischen Formalismus zur Behandlung von Vielteilchensystemen. Es handelt sich dabei um eine Alternative zur Darstellung durch die bekannte Vielteilchen-Schrödingergleichung, nicht jedoch, wie der Begriff der zweiten Quantisierung vermuten lässt, um eine weitere Quantisierung der Quantenmechanik.

Vielteilchenzustände werden in der zweiten Quantisierung durch die Anwendung von Erzeugungsoperatoren auf einen Vakuumzustand $|0\rangle$ definiert,

$$|\varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_N}\rangle^\pm = \frac{1}{\sqrt{N!}} c_{\alpha_1}^\dagger c_{\alpha_2}^\dagger \dots c_{\alpha_N}^\dagger |0\rangle,$$

wobei die symmetrischen Zustände (+) bosonischen Teilchen und die antisymmetrischen Zustände (−) fermionischen Teilchen entsprechen. Die Operatoralgebra basiert dann wiederum auf den Kommutator- bzw. Antikommutatorrelationen der bosonischen bzw. fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned}[c_{\alpha_1}^\dagger, c_{\alpha_2}^\dagger]_\mp &\equiv c_{\alpha_1}^\dagger c_{\alpha_2}^\dagger \mp c_{\alpha_2}^\dagger c_{\alpha_1}^\dagger = 0, \quad [c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}]_\mp = 0, \\ [c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}^\dagger]_\mp &= \delta(\alpha_1, \alpha_2).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Im Falle fermionischer Teilchen folgt aus Gl. (2.37), dass sich keine zwei Teilchen in demselben Einzelteilchenzustand befinden dürfen, was auch als Pauli-Prinzip bekannt ist. Die Anwendung eines fermionischen Erzeugungsoperators eines bereits besetzten Zustandes bringt daher den Vielteilchenzustand zum Verschwinden.

Die Wirkung beliebiger Operatoren auf Vielteilchenzustände besteht in der zweiten Quantisierung stets in der “Erzeugung” und “Vernichtung” von Teilchen in Einteilchenzuständen. So sind hier etwa die Übergangsoperatoren zwischen atomaren Niveaus von Interesse, welche in Kapitel 2.2 durch Pauli-Matrizen dargestellt wurden:

$$|\alpha\rangle \langle\beta| = c_{\alpha}^{\dagger} c_{\beta}, \quad |\beta\rangle \langle\alpha| = c_{\beta}^{\dagger} c_{\alpha}. \quad (2.38)$$

Diese Identitäten gelten allerdings nur für Systeme mit einem einzelnen Elektron, da ansonsten in der zweiten Quantisierung zusätzliche Terme auftreten.

Kapitel 3

Grundlagen der statistischen Physik

Der Ein-Atom-Laser soll vor allem in Hinblick auf die statistischen Eigenschaften der beteiligten Photonen untersucht werden. Zur Ableitung und Auswertung der entscheidenden Gleichungen ist es daher notwendig, einige grundlegende Methoden der statistischen Physik einzuführen. Von zentraler Bedeutung ist hierbei der Dichtematrix-Formalismus, da sich mit diesem das betrachtete System in höchstem Maße charakterisieren lässt [20].

3.1 Dichtematrix-Formalismus

3.1.1 Spur eines Operators

Sei A ein linearer Operator und $|v_\alpha\rangle_\alpha$ eine Basis des Hilbert-Raums. Dann ist die Spur des Operators A definiert als Summe über die Diagonalelemente der entsprechenden Matrix:

$$Tr\{A\} = \sum_{\alpha} A_{\alpha\alpha}. \quad (3.1)$$

Die Spur besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $Tr\{A\}$ ist unabhängig von der Basis.
2. $Tr\{\lambda A + \mu B\} = \lambda Tr\{A\} + \mu Tr\{B\}$
3. $Tr\{|\psi\rangle\langle\varphi|\} = \langle\varphi|\psi\rangle$
4. $Tr\{AB\} = Tr\{BA\}$
5. $(Tr\{A\})^* = Tr\{A^\dagger\}$
6. $A \geq 0 \Rightarrow Tr\{A\} \geq 0$

Wegen 1. ist $Tr\{A\}$ die Summe über alle Eigenwerte von A und aus 4. folgt die zyklische Vertauschbarkeit beliebig vieler Operatoren unter der Spur, etwa für drei Operatoren:

$$Tr\{ABC\} = Tr\{CAB\} = Tr\{BCA\}.$$

3.1.2 Dichtematrix

Allgemein werde ein Ensemble von Systemen durch ein Gemisch aus Zuständen $|\psi_\alpha\rangle$ beschrieben, wobei sich ein System des Ensembles mit der Wahrscheinlichkeit ρ_α im Zustand $|\psi_\alpha\rangle$ befinde. Der Erwartungswert eines Operators A , der auf ein solches System wirkt, berechnet sich dann zu

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | A | \psi_{\alpha} \rangle, \quad (3.2)$$

wobei zu unterscheiden ist zwischen den quantenmechanischen Erwartungswerten $\langle \psi_{\alpha} | A | \psi_{\alpha} \rangle$ innerhalb eines Systems und der statistischen Mittelung über alle Systeme des Ensembles durch Summation und

Gewichtung mit ρ_α , wobei $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$.

Wegen der Eigenschaft 3. der Spur kann die Bildung von Erwartungswerten interpretiert werden als Bildung der Spur über das Produkt des Operators A und eines Operators ρ mit

$$\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha |\psi_\alpha\rangle \langle \psi_\alpha|. \quad (3.3)$$

Dieser wird als *statistischer Operator*, *Dichteoperator* oder, dargestellt in einer bestimmten Basis, als *Dichtematrix* bezeichnet. Er enthält die maximal verfügbare Menge an Informationen über das Ensemble. Falls $\rho_\alpha = \delta_{\alpha,\alpha_0}$ gilt, sich also alle Systeme des Ensembles im gleichen Zustand $|\psi_{\alpha_0}\rangle$ befinden, so bezeichnet man dies als reinen Zustand. Es ist dann

$$\rho = |\psi_{\alpha_0}\rangle \langle \psi_{\alpha_0}|. \quad (3.4)$$

Die Dichtematrix besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. $Tr \{\rho\} = 1$
2. $\rho^\dagger = \rho$
3. $\rho \geq 0$

Die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix folgt aus der Schrödinger-Gleichung und findet ihre Formulierung in der *von-Neumann-Gleichung*:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho]. \quad (3.5)$$

Die Entwicklung nach der von-Neumann-Gleichung erhält die drei zuvor genannten Eigenschaften der Dichtematrix. Obgleich die Dichtematrix als statistisches Werkzeug eigentlich die Betrachtung einer großen Anzahl von Systemen erfordert, soll im Folgenden immer auf ein einzelnes System Bezug genommen werden.

Ein wichtiger Fall ist die Zusammensetzung des betrachteten Systems aus Teilsystemen mit voneinander unabhängigen Zuständen in verschiedenen Hilbert-Räumen, beispielsweise das System aus Atom und einzelner Photonenmode mit den Produkt-Basiszuständen $|\alpha, n\rangle$. Die Dichtematrix beinhaltet dann eine Summation sowohl über atomare als auch über photonische Zustände:

$$\rho = \sum_{\alpha, \alpha', n, n'} |\alpha, n\rangle \rho_{n, n'}^{\alpha, \alpha'} \langle \alpha', n'|. \quad (3.6)$$

Dementsprechend beinhaltet die Bildung der Spur separate Spurbildung über atomare und photonische Zustände:

$$\langle A \rangle = Tr \{\rho A\} = \sum_{\alpha, \alpha', n, n'} \rho_{n, n'}^{\alpha, \alpha'} \langle \alpha', n'| A |\alpha, n\rangle. \quad (3.7)$$

Sei nun $A_{at} \equiv A_{at} \mathbb{1}_{ph}$ ein Operator, der ausschließlich auf atomare Zustände wirkt. Dann gilt für seinen Erwartungswert

$$\begin{aligned} \langle A_{at} \rangle &= Tr_{at} Tr_{ph} \{A_{at} \mathbb{1}_{ph} \rho\} \\ &= Tr_{at} Tr_{ph} \left\{ \sum_{\alpha, \alpha', n, n'} |\alpha, n\rangle \rho_{n, n'}^{\alpha, \alpha'} \langle \alpha', n'| A_{at} \mathbb{1}_{ph} \right\} \\ &= \sum_{\alpha, \alpha', n, n'} \rho_{n, n'}^{\alpha, \alpha'} \langle \alpha'| A_{at} |\alpha\rangle \langle n| n' \rangle \\ &= \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_n \rho_n^{\alpha, \alpha'} \langle \alpha'| A_{at} |\alpha\rangle \\ &= \sum_{\alpha, \alpha'} \rho_{at}^{\alpha, \alpha'} \langle \alpha'| A_{at} |\alpha\rangle \\ &= Tr_{at} \{\rho_{at} A_{at}\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei die *reduzierte Dichtematrix* des atomaren Teilsystems definiert wurde als

$$\rho_{at} = Tr_{ph} \{ \rho \}. \quad (3.9)$$

Analog verfährt man bei photonischen Operatoren:

$$\langle A_{ph} \rangle = Tr_{ph} \{ \rho_{ph} A_{ph} \}, \quad \rho_{ph} = Tr_{at} \{ \rho \}. \quad (3.10)$$

3.2 Photonenstatistik

In der Optik ist es von großem Interesse, den Grad der Kohärenz eines optischen Feldes zu kennen. Kohärentes Licht besitzt sowohl räumlich als auch zeitlich eine feste Phasenbeziehung, was in entsprechenden Experimenten zu Interferenzphänomenen führt. Inkohärentes Licht hingegen überlagert in den gleichen Experimenten nicht zu festen Interferenzmustern.

Die Kohärenz von Licht lässt sich mathematisch durch seine Photonenstatistik charakterisieren. Diese beschreibt die statistische Verteilung der Besetzungszustände einer oder mehrerer Photonenmoden, woraus neben der Art des optischen Feldes auch die mittlere Anzahl von Photonen im Feld bestimmt werden kann. Nach Gl. (3.10) gilt für die mittlere Photonenzahl einer bestimmten Mode:

$$\langle n \rangle = Tr \{ \rho a^\dagger a \} = Tr_{ph} \{ \rho_{ph} a^\dagger a \} = \sum_{n,n'} \rho_{ph}^{nn'} \langle n' | a^\dagger a | n \rangle = \sum_n n \rho_{ph}^n = \sum_n n p_n, \quad (3.11)$$

mit $p_n = Tr_{at} \{ \rho_n \} = \sum_\alpha \rho_n^\alpha$ als Wahrscheinlichkeit dafür, das System in einem Zustand mit n Photonen zu finden.

3.2.1 Kohärentes Licht

Eine Photonenstatistik, die für den Laser von Bedeutung ist, ist jene der kohärenten Zustände, welche in Kapitel (2.1.2) eingeführt wurden. Zur Herleitung der Statistik werde ein System in einem reinen kohärenten Zustand betrachtet:

$$\rho = |\alpha\rangle \langle \alpha|. \quad (3.12)$$

Für $|\alpha\rangle$ wird die Darstellung in Fock-Zuständen (2.20) angesetzt:

$$\rho = \sum_{n,m} |n\rangle \frac{\alpha^n (\alpha^*)^m}{\sqrt{n!m!}} e^{-|\alpha|^2} \langle m| = \sum_{n,m} |n\rangle \rho_{nm} \langle m|.$$

Wie in Gl. (3.11) stellen die Diagonalelemente von ρ , $\rho_{nn} \equiv p_n$, die Wahrscheinlichkeiten dar, n Photonen im System vorzufinden. Sie folgen offenbar der Poisson-Verteilung:

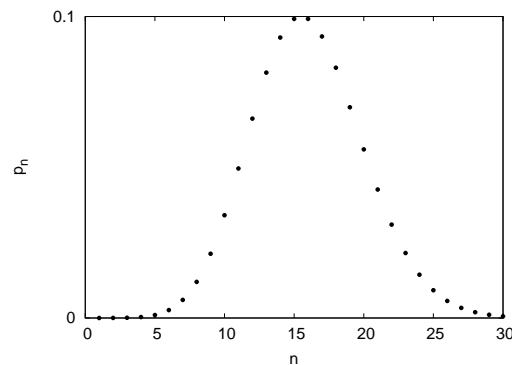


Abbildung 3.1: Poisson-Verteilung für $\alpha = 4$. Die Verteilung entspricht der statistischen Verteilung von Photonen in einem kohärenten Zustand, dessen Eigenwert $\alpha = 4$ ist.

$$p_n = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (3.13)$$

Für die mittlere Photonenzahl findet man mit Gl. (2.20)

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (3.14)$$

und weiterhin mit Gl. (2.9)

$$\langle n^2 \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a a^\dagger a | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle + \langle \alpha | (a^\dagger)^2 a^2 | \alpha \rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4. \quad (3.15)$$

Damit folgt für die Varianz der Photonenzahl:

$$(\Delta n)^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle. \quad (3.16)$$

Es kann gezeigt werden, dass die zeitliche Entwicklung kohärenter Zustände nach der Schrödinger-Gleichung keinen Einfluss auf die Photonenzahlstatistik hat [5].

3.2.2 Thermisches Licht

Für die weitere Diskussion werden Systeme im thermischen Gleichgewicht eine wichtige Rolle spielen. Insbesondere ist auch thermisches Licht, also ein optisches Feld im thermischen Gleichgewicht, von Interesse, da natürlich vorkommendes Licht, etwa das eines schwarzen Strahlers, von dieser Art ist. Auch konventionelle Laser emittieren unterhalb der Laserschwelle thermisches Licht. Für die Dichtematrix eines Systems im thermischen Gleichgewicht liefert die von-Neumann-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho] = 0.$$

ρ ist also diagonal in Energieeigenzuständen. Mit thermodynamischen Überlegungen findet man, dass ρ ein kanonisches Ensemble bei einer Temperatur T beschreibt mit

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (3.17)$$

wobei die Zustandssumme $Z = \text{Tr} \{e^{-\beta H}\}$ der Normalisierung dient. Mit dem Hamilton-Operator einer Photonenmode $H = \hbar\omega a^\dagger a = \sum_n |n\rangle \hbar\omega n \langle n|$ ergibt sich für die Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_n |n\rangle e^{-\beta \hbar\omega n} \langle n|, \quad (3.18)$$

die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung mit n Photonen ist also

$$\rho_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hbar\omega n}, \quad Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}} \quad (3.19)$$

und für die mittlere Photonenzahl folgt die Bose-Einstein-Verteilung

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar\omega} - 1}. \quad (3.20)$$

3.3 Korrelationsfunktionen

Anstatt der genauen Photonenzahlstatistik werden oft auch sogenannte Korrelationsfunktionen angegeben, welche indirekt die Kohärenz eines Systems beschreiben [15],[21]. Sie können in n -ter Ordnung definiert werden, praktisch sind für die Quantenoptik allerdings nur die Korrelationsfunktionen erster und zweiter Ordnung, $g^{(1)}(\tau)$ und $g^{(2)}(\tau)$, von Interesse. $g^{(1)}(\tau)$ spielt eine Rolle in Interferenzexperimenten wie dem Doppelspaltversuch von Young, bei dem ein Interferenzmuster durch die Überlagerung der Wellenfunktion eines Photons mit sich selbst erzeugt wird (siehe Abb. 3.2a), und enthält Informationen über das Spektrum des optischen Feldes. $g^{(2)}(\tau)$ hingegen betrifft die Detektierung zweier Photonen

in einem gewissen zeitlichen Abstand, etwa beim Hanbury-Brown-Twiss-Experiment (siehe Abb. 3.2b, [4]), und beschreibt das sogenannte Bunching und Antibunching von Photonen (s.u.). Zudem hängt es mit der Form der Photonenstatistik des optischen Feldes zusammen. Die Korrelationsfunktionen sind im Falle einer einzelnen Photonenmode definiert als

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\tau) &= g^{(1)}(t, t + \tau) = \frac{\langle a^\dagger(t + \tau)a(t) \rangle}{\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle}, \\ g^{(2)}(\tau) &= g^{(2)}(t, t + \tau) = \frac{\langle a^\dagger(t)a^\dagger(t + \tau)a(t + \tau)a(t) \rangle}{\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

$\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle$ bzw. $\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle^2$ dienen der Normierung, τ ist die Verzögerung zwischen den beiden Ereignissen. Sie wird in Abb. 3.2 als Laufzeitunterschied zweier Teilstrahlen desselben Lichtstrahles veranschaulicht, welche an einem Punkt auf dem Schirm interferieren (5a) bzw. mit verschiedenen Detektoren gemessen werden (5b). Mathematisch handelt es sich bei den $g^{(n)}$ um quantenmechanische Erwartungswerte von Produkten mehrerer Operatoren, welche zu verschiedenen Zeiten ausgewertet werden. Anschaulich können sie als proportional zu bedingten Wahrscheinlichkeiten der Detektierung von n Photonen zu verschiedenen Zeitpunkten vorgestellt werden. Es werde im Folgenden die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung betrachtet.

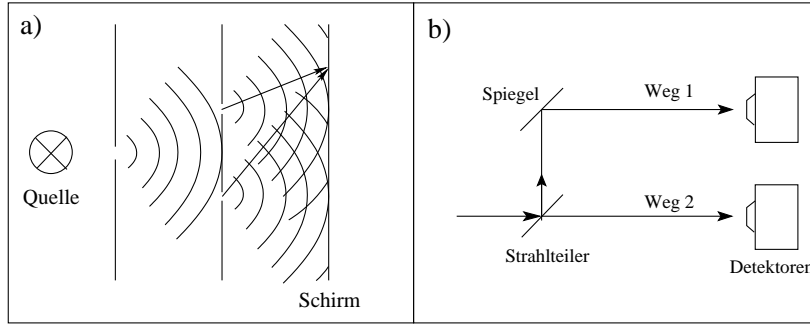


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung des Doppelspaltexperimentes von Young (a) sowie des Hanbury-Brown-Twiss-Experimentes (b). a) Ein Doppelspalt wird mit kohärentem Licht bestrahlt, welches etwa durch Beugung an einem davor angebrachten Einzelspalt erzeugt werden kann. Die beiden kohärenten Teilstrahlen interferieren, bedingt durch ihren Laufzeitunterschied, auf einem Schirm zu einer bestimmten Intensitätsverteilung. b) Ein einfallender Strahl wird in zwei Teilstrahlen aufgespalten, welche, mit einem gewissen Laufzeitunterschied versehen, an zwei verschiedenen Detektoren eintreffen.

Für große Zeiten strebt $g^{(2)}(\tau)$ in jedem Fall gegen einen bestimmten festen Wert, was der Tatsache entspricht, dass jegliche Korrelation verloren geht. Die Normierung ist derart gewählt, dass dieser Wert 1 ist:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g^{(2)}(\tau) = 1.$$

Zur Charakterisierung der Photonenstatistik genügt allerdings die Betrachtung der Korrelation für $\tau = 0$. Gl. (3.21) geht dann über in

$$g^{(2)}(t, t) = g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle a^\dagger a a^\dagger a \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2}{\langle a^\dagger a \rangle^2} = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2}. \quad (3.22)$$

Daraus folgt mit den Ergebnissen der Kapitel 3.2.1 und 3.2.2, dass für kohärentes Licht $g_{ko}^{(2)}(0) = 1$ und für thermisches Licht $g_{th}^{(2)}(0) = 2$ ist. Licht im Bereich zwischen thermischem und kohärentem Licht, also für $1 < g^{(2)}(0) < 2$, wird *super-poissonisch* genannt. Es entspricht dem Übergang zwischen lasendem und nichtlasendem Betrieb eines konventionellen Lasers. Licht im Bereich $0 < g^{(2)}(0) < 1$ wird als *sub-poissonisch* bezeichnet. Klassisch sind Korrelationsfunktionen mit Werten kleiner 1 nicht möglich, daher sind sub-poissonische Zustände rein quantenmechanischer Natur.

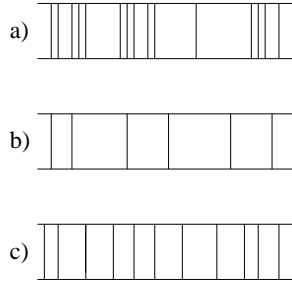


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung des (anti-) bunching von Photonen auf einer beliebigen Zeitskala für a) thermisches Licht, b) sub-poissonisches Licht, c) kohärentes Licht

Zuletzt soll noch der interessante Effekt des Photonen- (Anti)bunching erläutert werden. Photonen-Bunching tritt auf, falls $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ gilt. Photonen tendieren dann dazu, in Gruppen am Detektor einzutreffen, insbesondere bei thermischem Licht. Der umgekehrte Effekt, das Photonen-Antibunching, wird demnach bei $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ beobachtet. Unmittelbar nach Eintreffen eines Photons ist dann die Wahrscheinlichkeit der Messung weiterer Photonen sehr gering. Dies ist etwa bei einem einzelnen emittierenden Atom der Fall, da es nach Aussenden eines Photons eine gewisse Zeit zur Rückkehr in den angeregten Zustand benötigt. Antibunching tritt allerdings auch im super-poissonischen Bereich auf ($g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0) > 1$). Kohärentes Licht ist unkorreliert und zeigt keine der beiden Tendenzen, die Photonen treffen völlig zufällig verteilt am Detektor ein, siehe dazu auch Abb. 3.3.

Damit sei die Behandlung der statistischen Physik abgeschlossen. Im nächsten Abschnitt werden alle bisher gewonnenen Erkenntnisse dazu verwendet werden, ein Modell eines Ein-Atom-Lasers mathematisch zu beschreiben und auszuwerten.

Kapitel 4

Liouville-von Neumann-Gleichung des Ein-Atom-Lasers

Zur Modellierung eines Ein-Atom-Lasers soll in einem ersten Schritt das 2-Niveau-Atom herangezogen werden. Dazu wird zunächst das Modell beschrieben, um danach eine geschlossene Gleichung abzuleiten, die die zeitliche Entwicklung des gesamten Systems liefert.

4.1 Das Modell

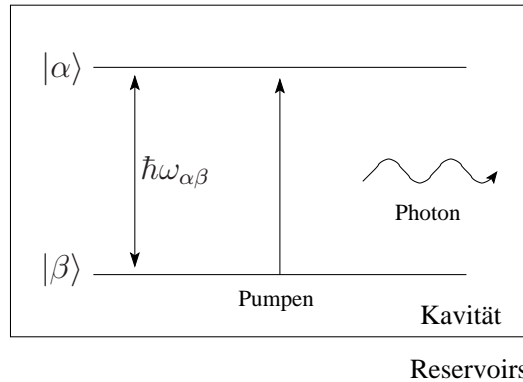


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des verwendeten Modells. Ein 2-Niveau-Atom sowie Photonen einer darauf abgestimmten Mode befinden sich in einer verlustbehafteten Kavität und koppeln jeweils an ein Reservoir im thermischen Gleichgewicht. Das System werde uerdem inkohärent gepumpt.

Betrachtet wird ein Atom mit zwei Energiezuständen $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$, welches sich in einer verlustbehafteten Kavität befindet, die als Resonator für im System befindliche Photonen agiert. Es wird angenommen, dass eine der Resonatormoden auf das 2-Niveau-Atom abgestimmt ist, ihre Frequenz ω also der Energiedifferenz $\omega_{\alpha\beta}$ der atomaren Zustände entspricht (keine sogenannte *Verstimmung*). Zudem soll die Frequenzdifferenz der Resonatormoden hinreichend groß sein, sodass nur die Wechselwirkung der einzelnen Resonatormode mit dem Atom berücksichtigt werden muss. Das System stehe in Wechselwirkung mit zwei Reservoirs, jeweils bestehend aus einem Spektrum von Photonenmoden im thermodynamischen Gleichgewicht. Die Reservoirs seien groß im Vergleich zum System und werden durch die Wechselwirkung nicht beeinflusst. Die Wechselwirkung sei schwach, so dass die Eigenzustände des Systems nicht verändert werden, sondern lediglich ihre Besetzung. Das System werde von uen durch inkohärentes Pumpen angeregt. Dies soll eine Situation simulieren, in der zwei weitere, nichtlasende Niveaus uerhalb des 2-Niveau-Systems gepumpt werden und dieses ihrerseits durch Relaxation mit Ladungsträgern auffüllen. In einem kohärent gepumpten 2-Niveau-System würde

hingegen kein Lasing entstehen, da sich Emission und Absorption von Laserphotonen stets aufheben. Ziel dieses Abschnittes ist es, unter Verwendung gewisser Annahmen und der Erkenntnisse der vorangegangenen Abschnitte eine geschlossene Gleichung für die reduzierte Dichtematrix ρ des Systems zu gewinnen, mithilfe derer das System quantenmechanisch beschrieben werden kann. Dies ist die *Liouville-von Neumann-Gleichung* des Systems. Die Herleitung folgt im Wesentlichen der von Carmichael [5].

4.2 Liouville-von Neumann-Gleichung

4.2.1 Vorbereitende Überlegungen

Das Gesamtsystem aus System S mit der Dichtematrix ρ und Reservoirs $R_{1/2}$ mit ρ_R werde durch eine Dichtematrix χ beschrieben. Durch Bildung der Spur über alle Zustände der Reservoirs lässt sich, wie in Kap. 3.1 beschrieben, die reduzierte Dichtematrix des Systems berechnen, wobei die Reservoirs sich im thermischen Gleichgewicht befinden:

$$\rho = \text{Tr}_R \{ \chi \}. \quad (4.1)$$

Der Hamilton-Operator des Gesamtsystems setzt sich zusammen aus den Hamilton-Operatoren H_S des Systems, $H_R^{1/2}$ der Reservoirs sowie H_{SR} der Wechselwirkung zwischen System und Reservoirs:

$$\begin{aligned} H &= H_S + H_R^1 + H_R^2 + H', \\ H' &= H_{SR}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Das System wird mit einem Jaynes-Cummings-Hamiltonian in Rotating Wave Approximation (2.36) modelliert:

$$H_S = H_{JC} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{\alpha\beta} \sigma_z + \hbar \omega a^\dagger a + \hbar g a \sigma_+ + \hbar g^* a^\dagger \sigma_- \quad (4.3)$$

mit der Dipol-Kopplungskonstanten

$$g = \frac{-i \mathbf{d}_{\alpha\beta} \cdot \hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)}}{\hbar} \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} u(\mathbf{r}_0). \quad (4.4)$$

Die Reservoirs werden jeweils als Spektrum harmonischer Oszillatoren mit Oszillatormoden k nach Gl. (2.11) beschrieben:

$$H_R^{1/2} = \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k. \quad (4.5)$$

Für den Wechselwirkungs-Hamiltonian ergibt sich in RWA und Dipol-Näherung

$$H_{SR} = \sum_k \hbar (h_k^* b_k^\dagger \sigma_- + h_k b_k \sigma_+) + \sum_k \hbar (f_k^* b_k^\dagger a + f_k b_k a^\dagger) \quad (4.6)$$

mit den Kopplungskonstanten h_k zwischen dem 2-Niveau-Atom und einem Reservoir sowie f_k zwischen der Resonatormode und dem anderen Reservoir. Die Annahme von zwei verschiedenen, voneinander unabhängigen Reservoirs ist hier wesentlich, da ansonsten zusätzliche, komplizierte Wechselwirkungsterme auftreten würden. Die Wechselwirkungen des Atoms und der Resonatormode mit einem Reservoir sollen daher jeweils getrennt betrachtet und später zu einer gesamten Liouville-von Neumann-Gleichung zusammengefügt werden. Da sich die Wechselwirkungs-Hamiltonians in der allgemeinen Form

$$H_{SR}^{1/2} = \sum_i s_i \Gamma_i, \quad (4.7)$$

mit s_i als System- und Γ_i als Reservoir-Operatoren, schreiben lassen, kann die Ableitung der Liouville-von Neumann-Gleichung zunächst allgemein gehalten werden. Sie wird in der Born-Markov-Näherung erfolgen.

Der Hamiltonian der Jaynes-Cummings-Wechselwirkung, bestehend aus den zwei hinteren Termen in Gl. (4.3), werde zunächst von der Betrachtung ausgenommen, da er sich nicht analog zu den freien System-Hamiltonians behandeln lässt. Hierauf wird später noch einzugehen sein.

4.2.2 Born-Markov-Näherung

Die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix $\chi(t)$ des Gesamtsystems wird durch die von-Neumann-Gleichung bestimmt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi(t) = [H, \chi(t)] \quad (4.8)$$

Diese geht in der Wechselwirkungsdarstellung über in

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi}(t) = [\tilde{H}'(t), \tilde{\chi}(t)], \quad (4.9)$$

was sich formal integrieren lässt:

$$\tilde{\chi}(t) = \chi(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t [\tilde{H}'(t'), \tilde{\chi}(t')] dt'. \quad (4.10)$$

Unter der Annahme, dass zu Beginn System und Reservoir unkorreliert sind, faktorisiert die Dichtematrix $\tilde{\chi}$ und die Anfangsbedingung lautet

$$\tilde{\chi}(0) = \chi(0) = \rho(0)\rho_R(0),$$

mit $\rho(0)$ beliebig und $\rho_R(0) = R$ im thermischen Gleichgewicht. Eingesetzt in Gl. (4.9) ergibt dies

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}'(t), \chi(0)] + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_0^t [\tilde{H}'(t), [\tilde{H}'(t'), \tilde{\chi}(t')]] dt'. \quad (4.11)$$

Unter der Annahme eines zeitlich unveränderlichen Reservoirs kann für die Dichtematrix zu einem beliebigen Zeitpunkt angesetzt werden:

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\rho}(t)R + O(H'). \quad (4.12)$$

An dieser Stelle wird als erste wichtige Näherung in Gl. (4.11) die *Born-Näherung* durchgeführt, indem alle Terme vernachlässigt werden, die von höherer als zweiter Ordnung in H' sind. Dies wird gerechtfertigt durch die Annahme einer schwachen Wechselwirkung zwischen System und Reservoir. $\tilde{\chi}(t)$ faktorisiert dann zu allen Zeiten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}'(t), \rho(0)R] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t [\tilde{H}'(t), [\tilde{H}'(t'), \tilde{\rho}(t')R]] dt'. \quad (4.13)$$

Gemäß Gl. (4.1) erhält man durch Bilden der Spur über die Reservoirzustände eine Gleichung für die reduzierte Dichtematrix des Systems:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} Tr_R \left\{ [\tilde{H}'(t), \rho(0)R] \right\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t Tr_R \left\{ [\tilde{H}'(t), [\tilde{H}'(t'), \tilde{\rho}(t')R]] \right\} dt'. \quad (4.14)$$

Es kann gezeigt werden, dass im hier betrachteten Fall die Erwartungswerte von Reservoir-Operatoren im Gleichgewichtszustand R verschwinden, sodass der erste Term in Gl. (4.14) eliminiert werden kann [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t Tr_R \left\{ [\tilde{H}'(t), [\tilde{H}'(t'), \tilde{\rho}(t')R]] \right\} dt'. \quad (4.15)$$

Nach dieser Gleichung wird die Entwicklung von $\tilde{\rho}(t)$ nicht nur durch den momentanen Zustand, sondern wegen der Integration über $\tilde{\rho}(t')$ auch durch das Verhalten in der Vergangenheit festgelegt. In der zweiten wesentlichen Näherung, der *Markov-Näherung*, wird $\tilde{\rho}(t')$ durch $\tilde{\rho}(t)$ ersetzt und die zeitliche Integration bis $-\infty$ ausgeweitet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t Tr_R \left\{ [\tilde{H}'(t), [\tilde{H}'(t'), \tilde{\rho}(t)R]] \right\} dt'. \quad (4.16)$$

Diese Näherung ist gerechtfertigt, wenn das Reservoir im Vergleich zum System sehr viele Freiheitsgrade besitzt, also aus einem Kontinuum von Oszillatoren besteht. Dies verursacht ein im Vergleich zur Zeitskala der Änderung von $\tilde{\rho}(t)$ schnelles Abklingen der Reservoir-Korrelationsfunktionen, welche im nächsten Abschnitt eingeführt werden.

Schreibt man den Wechselwirkungs-Hamiltonian nach Gl. (4.7) im Wechselwirkungsbild und verwendet, dass die Hamiltonians von System und Reservoir auf verschiedenen Hilberträumen wirken und vertauschen ($[H_S, H_R] = 0$):

$$\begin{aligned}\tilde{H}'(t) &= \sum_i e^{(i/\hbar)(H_S+H_R)t} s_i \Gamma_i e^{-(i/\hbar)(H_S+H_R)t} \\ &= \sum_i e^{(i/\hbar)H_S t} s_i e^{-(i/\hbar)H_S t} e^{(i/\hbar)H_R t} \Gamma_i e^{-(i/\hbar)H_R t} \\ &= \sum_i \tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), \\ \tilde{H}'(t') &= \sum_j \tilde{s}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'),\end{aligned}\tag{4.17}$$

so wird Gleichung (4.16) zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \int_{-\infty}^t Tr_R \left\{ \left[\tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), \left[\tilde{s}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), \tilde{\rho}(t) R \right] \right] \right\} dt'.\tag{4.18}$$

Zur Auswertung des Doppelkommutators wird die zyklische Vertauschbarkeit von Operatoren unter der Spur verwendet - $Tr \{ABC\} = Tr \{CAB\} = Tr \{BCA\}$ - sowie für die Korrelationsfunktionen des Reservoirs geschrieben:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R &= Tr_R \left\{ R \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \right\}, \\ \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R &= Tr_R \left\{ R \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \right\}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Zuletzt verwendet man, dass nach Gl. (2.33) und Gl. (2.34)

$$\tilde{s}_j(t') = s_j e^{-i\omega_j t'} = s_j e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_j(t-t')} = \tilde{s}_j(t) e^{i\omega_j(t-t')},\tag{4.20}$$

wobei ω_j für $\pm\omega$ oder $\pm\omega_{\alpha\beta}$ steht. Für die reduzierte Dichtematrix des Systems erhält man dann die folgende geschlossene Gleichung in Born-Markov-Näherung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} [\tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t) \tilde{\rho}(t) - \tilde{s}_j(t) \tilde{\rho}(t) \tilde{s}_i(t)] \int_{-\infty}^t e^{i\omega_j(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R dt' \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} [\tilde{\rho}(t) \tilde{s}_j(t) \tilde{s}_i(t) - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}(t) \tilde{s}_j(t)] \int_{-\infty}^t e^{i\omega_j(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R dt'.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Mithilfe dieser Gleichung können nun die Resonatormode und das 2-Niveau-Atom separat betrachtet werden.

4.2.3 Reservoirwechselwirkung der Resonatormode

Gemäß dem zweiten Term in Gl. (4.6), welcher die Wechselwirkung der Resonatormode mit einem Reservoir vermittelt, wird nun die folgende Identifizierung vorgenommen:

$$\begin{aligned}s_1 &= a, \quad s_2 = a^\dagger \\ \Gamma_1 &= \Gamma^\dagger = \hbar \sum_k f_k^* b_k^\dagger, \quad \Gamma_2 = \Gamma = \hbar \sum_k f_k b_k.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Im Wechselwirkungsbild gilt dann für die Operatoren nach Gl. (4.20):

$$\begin{aligned}\tilde{s}_1(t) &= a e^{-i\omega t}, \quad \tilde{s}_2(t) = a^\dagger e^{i\omega t} \\ \tilde{\Gamma}_1(t) &= \hbar \sum_k f_k^* b_k^\dagger e^{i\omega_k t}, \quad \tilde{\Gamma}_2(t) = \hbar \sum_k f_k b_k e^{-i\omega_k t}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Die Korrelationsfunktionen des Reservoirs können nun explizit ausgerechnet werden. Dabei treten Terme auf, die Erwartungswerte von paarweise kombinierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im thermischen Gleichgewicht enthalten. Allgemein gilt nach Gl. (3.18) mit $\rho = R$:

$$\langle A \rangle_R = \text{Tr} \{ R A \} = \sum_{\{n\}} \frac{1}{Z} e^{-\beta \sum_k \hbar \omega_k n_k} \langle n | A | n \rangle$$

Offenbar verschwindet wegen der Orthogonalität der Fock-Zustände dieser Erwartungswert immer dann, wenn zwei Erzeugungs- oder zwei Vernichtungsoperatoren aufeinandertreffen oder wenn die zwei Operatoren zu verschiedenen Moden gehören. So ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \langle b_{k_1} b_{k_2}^\dagger \rangle_R &= \delta_{k_1 k_2} \langle b_{k_1} b_{k_1}^\dagger \rangle_R = \delta_{k_1 k_2} \langle b_{k_1}^\dagger b_{k_1} + 1 \rangle_R = \delta_{k_1 k_2} (\langle n_{k_1} \rangle + 1), \\ \langle n_k \rangle &= \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

In Gleichung (4.21) treten somit vier Terme mit nichtverschwindenden Korrelationsfunktionen auf, von denen jeweils zwei zueinander komplex konjugiert sind. Der erste Term, für $i = 1, j = 2, \omega_j = -\omega$, wird folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R dt' \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega(t-t')} \sum_{k_1, k_2} \hbar^2 f_{k_1}^* f_{k_2} e^{ik_1 t} e^{-ik_2 t'} \langle b_{k_1}^\dagger b_{k_2} \rangle_R dt' \\ &= \sum_k |f_k|^2 \int_{-\infty}^t e^{i(\omega_k - \omega)(t-t')} \langle n_k \rangle dt' \\ &= \sum_k |f_k|^2 \int_0^\infty e^{i(\omega_k - \omega)\tau} \langle n_k \rangle d\tau, \quad \tau = t - t' \\ &= \sum_k |f_k|^2 \langle n_k \rangle \pi \delta(\omega_k - \omega) + i \sum_k |f_k|^2 \langle n_k \rangle P \frac{1}{\omega_k - \omega} = \frac{1}{2} \kappa N_0 + i\Delta, \end{aligned} \quad (4.25)$$

wobei im vierten Schritt Diracs Identität verwendet wurde und P den Cauchy-Hauptwert des Integrals darstellt. Analog findet man für die anderen drei Funktionen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_2(t) \tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R dt' = \frac{1}{2} \kappa (N_0 + 1) - i\Delta_1 \\ & \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_1(t') \tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R dt' = \frac{1}{2} \kappa N_0 - i\Delta \\ & \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_2(t') \tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R dt' = \frac{1}{2} \kappa (N_0 + 1) + i\Delta_1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Hierbei ist N_0 als die mittlere Photonenzahl bei der Frequenz ω und der Temperatur T charakteristisch für das Reservoir, während alle Informationen über die Wechselwirkung in den folgenden Größen enthalten sind:

$$\begin{aligned} \kappa &= \sum_k |f_k|^2 2\pi \delta(\omega_k - \omega), \\ \Delta_1 &= \sum_k |f_k|^2 (\langle n_k \rangle + 1) P \frac{1}{\omega_k - \omega} = \Delta + \Delta', \\ \Delta &= \sum_k |f_k|^2 \langle n_k \rangle P \frac{1}{\omega_k - \omega}, \quad \Delta' = \sum_k |f_k|^2 P \frac{1}{\omega_k - \omega}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Durch Einsetzen dieser Terme in Gl. (4.21) erhält man die Liouville-von Neumann-Gleichung für die reduzierte Dichtematrix der Resonatormode in der folgenden Form:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho} = & - [\tilde{a} \tilde{a}^\dagger \tilde{\rho} - \tilde{a}^\dagger \tilde{\rho} \tilde{a}] \left(\frac{1}{2} \kappa N_0 + i \Delta \right) \\
& - [\tilde{a}^\dagger \tilde{a} \tilde{\rho} - \tilde{a} \tilde{\rho} \tilde{a}^\dagger] \left(\frac{1}{2} \kappa (N_0 + 1) - i \Delta_1 \right) \\
& - [\tilde{\rho} \tilde{a} \tilde{a}^\dagger - \tilde{a}^\dagger \tilde{\rho} \tilde{a}] \left(\frac{1}{2} \kappa N_0 - i \Delta \right) \\
& - [\tilde{\rho} \tilde{a}^\dagger \tilde{a} - \tilde{a} \tilde{\rho} \tilde{a}^\dagger] \left(\frac{1}{2} \kappa (N_0 + 1) + i \Delta_1 \right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Dies lässt sich noch etwas vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho} = & \frac{1}{2} \kappa (N_0 + 1) [2 \tilde{a} \tilde{\rho} \tilde{a}^\dagger - \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \tilde{a}^\dagger \tilde{a}] \\
& + \frac{1}{2} \kappa N_0 [2 \tilde{a}^\dagger \tilde{\rho} \tilde{a} - \tilde{a} \tilde{a}^\dagger \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \tilde{a} \tilde{a}^\dagger] \\
& + i \Delta_1 [\tilde{a}^\dagger \tilde{a}, \tilde{\rho}] - i \Delta [\tilde{a} \tilde{a}^\dagger, \tilde{\rho}].
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Gemäß

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t) &= e^{(i/\hbar) H_S t} \rho(t) e^{-(i/\hbar) H_S t}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho} &= e^{(i/\hbar) H_S t} \left[\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] + \frac{\partial}{\partial t} \rho \right] e^{-(i/\hbar) H_S t}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

kann die Gleichung in das Schrödinger-Bild zurücktransformiert werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho = & - \frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] - \frac{i}{\hbar} [\hbar \Delta a a^\dagger - \hbar \Delta_1 a^\dagger a, \rho] \\
& + \frac{1}{2} \kappa (N_0 + 1) [2 a \rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a] \\
& + \frac{1}{2} \kappa N_0 [2 a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger].
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Der zweite Kommutator auf der rechten Seite kann mittels einer Renormierung der Photonenfrequenz von ω auf $\omega - \Delta'$ in den Hamiltonian H_S integriert werden. Die Liouville-von Neumann-Gleichung (4.31) hat damit die Form einer von-Neumann-Gleichung des freien Systems mit zusätzlichen Termen, den *Lindblad-Termen*, welche die Wechselwirkung des Systems mit dem Reservoir beschreiben. Die Lindblad-Terme erhalten sowohl die Spur als auch die Hermitizität der Dichtematrix.

4.2.4 Reservoirwechselwirkung des 2-Niveau-Atoms

Die Wechselwirkung des 2-Niveau-Atoms mit einem Reservoir wird durch den ersten Term in Gl. (4.6) repräsentiert. In diesem Fall gilt für die System- und Reservoiroperatoren:

$$\begin{aligned}
s_1 = \sigma_-, \quad s_2 = \sigma_+ \\
\Gamma_1 = \Gamma^\dagger = \hbar \sum_k h_k^* b_k^\dagger, \quad \Gamma_2 = \Gamma = \hbar \sum_k h_k b_k,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

woraus für die Darstellung im Wechselwirkungsbild folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_1(t) &= \sigma_- e^{-i\omega_{\alpha\beta} t}, \quad \tilde{s}_2(t) = \sigma_+ e^{i\omega_{\alpha\beta} t} \\
\tilde{\Gamma}_1(t) &= \hbar \sum_k h_k^* b_k^\dagger e^{i\omega_k t}, \quad \tilde{\Gamma}_2(t) = \hbar \sum_k h_k b_k e^{-i\omega_k t}.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Nach Einsetzen in Gl. (4.21) kann die Ableitung der Liouville-von Neumann-Gleichung völlig analog zum zuvor diskutierten Fall erfolgen. Man gelangt so zu einer Gleichung, die von gleicher Form ist wie

Gleichung (4.31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] - \frac{i}{\hbar} [\hbar \Delta \sigma_- \sigma + -\hbar \Delta_1 \sigma_+ \sigma_-, \rho] \\ & + \frac{1}{2} \gamma (N_0 + 1) [2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-] \\ & + \frac{1}{2} \gamma N_0 [2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dabei sind die Konstanten analog zu Gl. (4.27) definiert:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_k |h_k|^2 2\pi \delta(\omega_k - \omega_{\alpha\beta}), \\ \Delta_1 &= \sum_k |h_k|^2 (\langle n_k \rangle + 1) P \frac{1}{\omega_k - \omega_{\alpha\beta}} = \Delta + \Delta', \\ \Delta &= \sum_k |h_k|^2 \langle n_k \rangle P \frac{1}{\omega_k - \omega_{\alpha\beta}}, \quad \Delta' = \sum_k |h_k|^2 P \frac{1}{\omega_k - \omega_{\alpha\beta}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

N_0 ist in diesem Fall die mittlere Photonenzahl bei der Frequenz $\omega_{\alpha\beta}$ und der Temperatur T .

Es kann eine Renormierung der atomaren Energien vorgenommen werden. Bei $T = 0$ wird wegen $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta'$ nur der höhere Energiezustand renormiert, was für Atome in Kontakt mit dem freien Raum zum sogenannten Lamb-Shift führt. Dieser wird durch Auswertung von Δ' jedoch nicht korrekt wiedergegeben, eine relativistische Quantentheorie ist erforderlich. Hier wird der Effekt als im Hamilton-Operator berücksichtigt angenommen.

4.2.5 Vollständige Liouville-von Neumann-Gleichung

Die beiden ersten Terme in Gl. (4.3) wurden in den vorangegangenen Abschnitten behandelt. Es soll im Folgenden der Einfachheit halber das Reservoir bei der Temperatur $T = 0$ betrachtet werden. Dann entfallen alle Terme, die einen Faktor N_0 enthalten und für die reduzierte Dichtematrix ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho] + \frac{1}{2} \kappa [2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a] \\ & + \frac{1}{2} \gamma [2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Der Einfluss des Jaynes-Cummings-Kopplungsterms kann allerdings nicht analog behandelt werden, da dessen Zeitentwicklung wesentlich komplizierter ist als in Gl. (4.20). Das Zeitintegral in Gl. (4.21) ist dann nicht mehr trivial zu lösen.

Es wird eine weitere Näherung vorgenommen, indem der Hamilton-Operator des Systems in Gl. (4.36) durch den Jaynes-Cummings-Operator (4.3) ersetzt wird. Diese Näherung ist gut, wenn die Zeitskala der Jaynes-Cummings-Wechselwirkung, die von der Kopplungskonstanten g abhängt, groß ist gegenüber der Abklingdauer der Reservoir-Korrelationsfunktion.

Bisher enthält die Liouville-von Neumann-Gleichung neben dem Hamilton-Operator des Systems lediglich dissipative Terme. Zur vollständigen Modellierung des Ein-Atom-Lasers fehlt mit dem Pumpen noch ein wesentlicher Bestandteil. Dieses werde durch einen weiteren Lindblad-Term dargestellt, welcher sich von dem γ -Term nur durch Vertauschung der σ_+ - und σ_- -Operatoren unterscheidet und mit einer Pumprate P ankoppelt [13]. Diese spezielle Form ist zweckmäßig; Wie später in der Diskussion der Dichtematrixelemente deutlich werden wird, besitzt der Pumpterm die Wirkung einer inversen Relaxation: Er erzeugt Besetzungsinversion im 2-Niveau-Atom. Eine physikalische Begründung oder Herleitung des Pumptermes kann hingegen an dieser Stelle nicht erfolgen.

Wie bereits angedeutet, handelt es sich hierbei um inkohärentes Pumpen, da es die Kohärenz zwischen den atomaren Zuständen nicht erhält. Dies wird im Weiteren zum bemerkenswerten Effekt des *Quenching* führen. Die Liouville-von Neumann-Gleichung des Ein-Atom-Lasers mit zwei Energieniveaus

und einer Lasermode in einer Kavität ist nun vollständig und lautet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & -\frac{i}{\hbar} [H_{JC}, \rho] + \frac{1}{2} \kappa [2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a] \\ & + \frac{1}{2} \gamma [2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-] \\ & + \frac{1}{2} P [2\sigma_+ \rho \sigma_- - \sigma_- \sigma_+ \rho - \rho \sigma_- \sigma_+]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Diese Gleichung wird im Folgenden dazu verwendet werden, Bewegungsgleichungen für die die Photonenstatistik bestimmenden Elemente der Dichtmatrix abzuleiten, zu diskutieren und numerisch auszuwerten.

4.3 Bewegungsgleichungen der Matrixelemente

Die Elemente der Dichtmatrix ρ werden mit ρ_{ij}^{nm} notiert, wobei n und i die Zeile und m und j die Spalte definieren. n und m durchlaufen die Besetzungszahlen der Photonenmode, also die Fock-Zustände $|n\rangle$ mit $n = 0, 1, 2, \dots$, während i und j den Grundzustand $|\beta\rangle$ oder den angeregten Zustand $|\alpha\rangle$ bezeichnen. Die Matrix besitzt also unendlich viele Einträge. Ein Ausschnitt der Matrix ist

$$\begin{pmatrix} \rho_{\alpha\alpha}^{n-1m-1} & \rho_{\alpha\beta}^{n-1m} & \dots & \dots \\ \rho_{\beta\alpha}^{nm-1} & \rho_{\beta\beta}^{nm} & \rho_{\beta\alpha}^{nm} & \dots \\ \dots & \rho_{\alpha\beta}^{nm} & \rho_{\alpha\alpha}^{nm} & \rho_{\alpha\beta}^{nm+1} \\ \dots & \dots & \rho_{\beta\alpha}^{n+1m} & \rho_{\beta\beta}^{n+1m+1} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Um allgemeine Bewegungsgleichungen für die Matrixelemente abzuleiten, werde ein 2x2-Block der Matrix betrachtet:

$$\begin{pmatrix} \rho_{\alpha\alpha}^{nm} & \rho_{\alpha\beta}^{nm+1} \\ \rho_{\beta\alpha}^{n+1m} & \rho_{\beta\beta}^{n+1m+1} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Ein Matrixelement hängt mit der Dichtmatrix zusammen über

$$\rho_{ij}^{nm} = \langle i, n | \rho | j, m \rangle.$$

Die Bewegungsgleichung für das Element $\rho_{\alpha\alpha}^{nm}$ lautet dann beispielsweise:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\alpha}^{nm} = & -\frac{i}{\hbar} \langle \alpha, n | [H_{JC}, \rho] | \alpha, m \rangle \\ & + \frac{1}{2} \kappa [2 \langle \alpha, n | a \rho a^\dagger | \alpha, m \rangle - \langle \alpha, n | a^\dagger a \rho | \alpha, m \rangle - \langle \alpha, n | \rho a^\dagger a | \alpha, m \rangle] \\ & + \frac{1}{2} \gamma [2 \langle \alpha, n | \sigma_- \rho \sigma_+ | \alpha, m \rangle - \langle \alpha, n | \sigma_+ \sigma_- \rho | \alpha, m \rangle - \langle \alpha, n | \rho \sigma_+ \sigma_- | \alpha, m \rangle] \\ & + \frac{1}{2} P [2 \langle \alpha, n | \sigma_+ \rho \sigma_- | \alpha, m \rangle - \langle \alpha, n | \sigma_- \sigma_+ \rho | \alpha, m \rangle - \langle \alpha, n | \rho \sigma_- \sigma_+ | \alpha, m \rangle] \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die Auswertung erfolgt dann gemäß der zuvor eingeführten Regeln für die atomaren und photonischen Operatoren:

$$\begin{aligned} \sigma_+ |\beta, m\rangle &= |\alpha, m\rangle \\ \sigma_- |\alpha, m\rangle &= |\beta, m\rangle \\ a |\alpha, m\rangle &= \sqrt{m} |\alpha, m-1\rangle \\ a^\dagger |\alpha, m\rangle &= \sqrt{m+1} |\alpha, m+1\rangle, \end{aligned} \quad (4.41)$$

wobei Operatoren auf bra-Vektoren so wirken wie ihre adjungierten Operatoren auf ket-Vektoren. Man gelangt so zu den folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\alpha}^{nm} &= (-\gamma - \frac{\kappa}{2}(m+n) + i\omega(m-n))\rho_{\alpha\alpha}^{nm} + P\rho_{\beta\beta}^{nm} \\
&\quad + ig^*\sqrt{m+1}\rho_{\alpha\beta}^{nm+1} - ig\sqrt{n+1}\rho_{\beta\alpha}^{n+1m} + \kappa\sqrt{(n+1)(m+1)}\rho_{\alpha\alpha}^{n+1m+1} \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta\beta}^{n+1m+1} &= \gamma\rho_{\alpha\alpha}^{n+1m+1} + (-P - \frac{\kappa}{2}(m+n+2) + i\omega(m-n))\rho_{\beta\beta}^{n+1m+1} \\
&\quad + ig\sqrt{m+1}\rho_{\beta\alpha}^{n+1m} - ig^*\sqrt{n+1}\rho_{\alpha\beta}^{nm+1} + \kappa\sqrt{(n+2)(m+2)}\rho_{\beta\beta}^{n+2m+2} \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\beta}^{nm+1} &= (-\frac{\gamma}{2} - \frac{P}{2} - \frac{\kappa}{2}(m+n+1) - i\omega_{\alpha\beta} + i\omega(m-n+1))\rho_{\alpha\beta}^{nm+1} \\
&\quad + ig\sqrt{m+1}\rho_{\alpha\alpha}^{nm} - ig\sqrt{n+1}\rho_{\beta\beta}^{n+1m+1} + \kappa\sqrt{(n+1)(m+2)}\rho_{\alpha\beta}^{n+1m+2} \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta\alpha}^{n+1m} &= (-\frac{\gamma}{2} - \frac{P}{2} - \frac{\kappa}{2}(m+n+1) + i\omega_{\alpha\beta} + i\omega(m-n-1))\rho_{\beta\alpha}^{n+1m} \\
&\quad - ig^*\sqrt{n+1}\rho_{\alpha\alpha}^{nm} + ig^*\sqrt{m+1}\rho_{\beta\beta}^{n+1m+1} + \kappa\sqrt{(n+2)(m+1)}\rho_{\beta\alpha}^{n+2m+1}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Von physikalischer Relevanz sind zum Einen die Elemente auf der Hauptdiagonalen; Sie stellen die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Zustände des Gesamtsystems dar und bestimmen die Photonenstatistik. Gekoppelt werden sie in der Liouville-von Neumann-Gleichung sowohl direkt als auch über Elemente auf den ersten Nebendiagonalen. Weitere Elemente der Dichtematrix sind hier nicht von Interesse, weil sie weder direkt noch indirekt an die Diagonalelemente gekoppelt sind. Die Gleichungen (4.42) werden daher nur für den Fall $n = m$ betrachtet. Wegen der Hermitizität der Dichtematrix gilt $(\rho_{\alpha\beta}^{nn+1})^* = \rho_{\beta\alpha}^{n+1n}$ und es wird eine der letzten beiden Gleichungen obsolet. Zudem fallen, da Abstimmung zwischen Photonenmode und Atom angenommen wird, alle Terme heraus, welche die Frequenzen ω und $\omega_{\alpha\beta}$ enthalten. Den gleichen Effekt hätte die Rechnung im Wechselwirkungsbild, da dann der Jaynes-Cummings-Hamiltonian in Gl. (4.37) nur Terme der Licht-Materie-Kopplung und der Verstimmung enthalten würde. Die Gleichungen lauten somit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\alpha}^{nn} &= -(\gamma + \kappa n)\rho_{\alpha\alpha}^{nn} + P\rho_{\beta\beta}^{nn} + \kappa(n+1)\rho_{\alpha\alpha}^{n+1n+1} \\
&\quad + ig^*\sqrt{n+1}\rho_{\alpha\beta}^{nn+1} - ig\sqrt{n+1}\rho_{\beta\alpha}^{n+1n} \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1} &= \gamma\rho_{\alpha\alpha}^{n+1n+1} - (P + \kappa(n+1))\rho_{\beta\beta}^{n+1n+1} + \kappa(n+2)\rho_{\beta\beta}^{n+2n+2} \\
&\quad + ig\sqrt{n+1}\rho_{\beta\alpha}^{n+1n} - ig^*\sqrt{n+1}\rho_{\alpha\beta}^{nn+1} \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} &= -\frac{1}{2}(\gamma + P + \kappa(2n+1))\rho_{\alpha\beta}^{nn+1} + \kappa\sqrt{(n+1)(n+2)}\rho_{\alpha\beta}^{n+1n+2} \\
&\quad + ig\sqrt{n+1}\rho_{\alpha\alpha}^{nn} - ig\sqrt{n+1}\rho_{\beta\beta}^{n+1n+1}, \\
n &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Man beachte, dass tatsächlich nur Elemente der Haupt- und ersten Nebendiagonalen miteinander koppeln und die Entwicklung aller anderen Matrixelemente davon unabhängig verläuft, sofern die Anfangsbedingungen auf Haupt- und Nebendiagonale beschränkt sind (was hier stets gegeben ist). Dies rechtfertigt nochmals die Beschränkung auf diese Elemente. Dennoch hat man es hier mit unendlich vielen Matrixelementen zu tun. Zur numerischen Bearbeitung der Gleichungen muss die Matrix also bei einer bestimmten Photonenzahl „abgeschnitten“ werden. Die Numerik ist dann stets auf Stabilität zu überprüfen, etwa durch die Kontrolle der Spur der berechneten Dichtematrix.

Mit den Gleichungen (4.43) ist das Ziel dieses Abschnitts erreicht; Sie enthalten alle notwendigen Informationen über die Photonenstatistik des Ein-Atom-Lasers. Im nächsten Kapitel werden sowohl einfache Grenzfälle als auch die vollständigen Gleichungen untersucht und Resultate der numerischen Auswertung präsentiert.

Kapitel 5

Anwendung

5.1 Grenzfälle

Zunächst sollen nicht die vollständigen Gleichungen (4.43) untersucht werden, sondern einfache Grenzfälle, welche sich zugleich analytisch lösen lassen. Dazu werde jeweils nur eine Wechselwirkung „eingeschaltet“ und die anderen vernachlässigt. Dabei werden die einzelnen Terme der Gleichungen und ihre Wirkung auf das Gesamtverhalten des Lasers untersucht. Dies dient nicht nur dem besseren Verständnis des Lasers, sondern auch der Überprüfung der Numerik.

5.1.1 Jaynes-Cummings-Wechselwirkung, Rabi-Oszillationen

Zur Untersuchung der Jaynes-Cummings-Kopplung werden in den Gleichungen (4.43) die Koeffizienten γ , κ und P auf den Wert 0 gesetzt, sie geben dann die zeitliche Entwicklung von ρ nach der von-Neumann-Gleichung unter Einfluss des Jaynes-Cummings-Hamiltonians (2.36) im Wechselwirkungsbild wieder:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\alpha}^{nn} &= ig^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} - ig \sqrt{n+1} \rho_{\beta\alpha}^{n+1n} = 2Re(ig^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha\beta}^{nn+1}) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1} &= ig \sqrt{n+1} \rho_{\beta\alpha}^{n+1n} - ig^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} = 2Re(ig \sqrt{n+1} \rho_{\beta\alpha}^{n+1n}) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} &= ig \sqrt{n+1} \rho_{\alpha\alpha}^{nn} - ig \sqrt{n+1} \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta\alpha}^{n+1n} &= -ig^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha\alpha}^{nn} + ig^* \sqrt{n+1} \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1}, \\
 n &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Man beachte, dass die Hauptdiagonalelemente Besetzungswahrscheinlichkeiten darstellen und daher reell und positiv sind, während die Nebendiagonalelemente je nach Wahl der Phase von g auch komplex sein können.

Offenbar sind lediglich die vier Gleichungen für ein festes n miteinander gekoppelt und entwickeln sich unabhängig von den Gleichungen für die Matricelemente anderer Photonenzahlen. Daraus folgt, dass, bei Präparation des Systems in einem Zustand $|i, n\rangle$, dieses sich für alle Zeiten nur innerhalb des entsprechenden 2x2-Blockes der Matrix bewegt:

$$\left(\begin{array}{cccc}
 \rho_{\alpha\alpha}^{n-1n-1} & \rho_{\alpha\beta}^{n-1n} & \dots & \dots \\
 \rho_{\beta\alpha}^{nn-1} & \rho_{\beta\beta}^{nn} & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \rho_{\alpha\alpha}^{nn} & \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} \\
 \dots & \dots & \rho_{\beta\alpha}^{n+1n} & \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1}
 \end{array} \right) \tag{5.2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_n$

Zur Lösung des Gleichungssystems (5.1) werde es in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}_n = M_n \cdot \mathbf{R}_n \tag{5.3}$$

geschrieben mit

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} \rho_{\alpha\alpha}^{nn} \\ \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1} \\ \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} \\ \rho_{\beta\alpha}^{n+1n} \end{pmatrix}, M_n = i\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & g^* & -g \\ 0 & 0 & -g^* & g \\ g & -g & 0 & 0 \\ -g^* & g^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\mathbf{R}_n = e^{M_n t} \mathbf{R}_{n,0}$ kann mit einigem Rechenaufwand durch Diagonalisieren der Matrix M_n bestimmt werden (siehe Rechnung im Anhang). Befindet sich das System zu Anfang im unteren atomaren Niveau $|\beta\rangle$ mit $n+1$ Photonen in der Kavität, so lautet die Anfangsbedingung

$$\mathbf{R}_{n,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich die Lösung

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\alpha}^{nn}(t) &= -\frac{1}{2}\cos(\omega_R t) + \frac{1}{2} \\ \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1}(t) &= 1 - \rho_{\alpha\alpha}^{nn}(t) \\ \rho_{\alpha\beta}^{nn+1}(t) &= -\frac{ig}{2|g|}\sin(\omega_R t) \\ \rho_{\beta\alpha}^{n+1n}(t) &= \left(\rho_{\alpha\beta}^{nn+1}(t)\right)^* \end{aligned} \tag{5.4}$$

mit der *Rabi-Frequenz* $\omega_R = 2|g|\sqrt{n+1}$. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Systemzustände können nun angegeben werden mit $n_\alpha = p_{\alpha,n} = \rho_{\alpha\alpha}^{nn}$ und $n_\beta = p_{\beta,n+1} = \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1}$, die mittlere Photonenzahl mit

$$\langle n \rangle = n \cdot \rho_{\alpha\alpha}^{nn} + (n+1) \cdot \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1} = \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1} + n.$$

Das System oszilliert also durch periodische Absorption und stimulierte Emission eines Photons mit der Rabi-Frequenz zwischen den beiden atomaren Zuständen $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ sowie zwischen den (mittleren) Photonenzahlen n und $n+1$. Diese Oszillationen werden als Rabi-Oszillationen bezeichnet. Die numerische Lösung für $n=2$ und $g=1\text{ps}^{-1}$ ist in Abb. 5.1 grafisch aufgetragen.

Man erkennt, dass nach einer halben Periode

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2|g|\sqrt{n+1}}$$

die Besetzung der Niveaus exakt umgekehrt, also eine Besetzungsinversion erzeugt wurde. Innerhalb einer vollen Periode

$$T = \frac{\pi}{|g|\sqrt{n+1}}$$

durchläuft das System einen sogenannten Rabi-Flop. Einer Betrachtung wert ist außerdem die Korrelationsfunktion $g^{(2)}(t, t)$, die sich nach Gl. (3.22) berechnen lässt zu

$$g^{(2)}(t, t) = 4 \frac{n \cdot \cos(\omega_R t) + n^2}{(\cos(\omega_R t) + 2n + 1)^2}, \tag{5.5}$$

siehe auch die numerische Lösung in Abb. 5.1. $g^{(2)}(t, t)$ oszilliert natürlich ebenfalls mit der Rabi-Frequenz. Sie erreicht ihren Maximalwert $n/(n+1)$ im Zustand $|\beta, n+1\rangle$ und ihren Minimalwert $1-1/n$ im Zustand $|\alpha, n\rangle$, entsprechend ihrer Interpretation als Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten zweier Photonen im System.

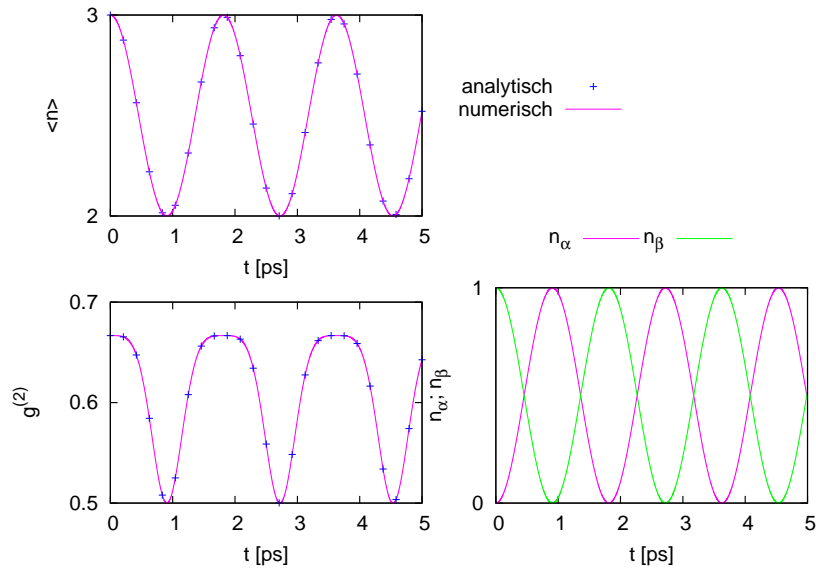


Abbildung 5.1: Numerische Lösungen für die zeitliche Entwicklung der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle$, der Besetzungswahrscheinlichkeiten n_α und n_β sowie der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(0)$ in Jaynes-Cummings-Kopplung mit $g = 1\text{ps}^{-1}$ und $n = 2$. Zum Vergleich sind die analytischen Lösungen für $\langle n \rangle$ und $g^{(2)}(0)$ eingetragen, siehe dazu auch die Rechnung im Text.

5.1.2 Wechselwirkung der Resonatormode, Kavitätsverluste

Die Wechselwirkung der Resonatormode mit dem Reservoir wird durch den ersten Lindblad-Term in der Liouville-von Neumann-Gleichung (4.37) bestimmt. Um sie isoliert von den anderen Wechselwirkungen zu betrachten, werden die Koeffizienten γ , g und P als verschwindend angenommen. Offenbar werden dann nur noch die photonischen Zustände von der zeitlichen Entwicklung des Systems beeinflusst, die atomare Besetzung ändert sich nicht. Das Gleichungssystem (4.43) wird zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho^n &:= \frac{\partial}{\partial t} \rho_{ii}^{nn} = -\kappa n \rho_{ii}^{nn} + \kappa(n+1) \rho_{ii}^{n+1n+1}, \quad i = \alpha, \beta \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} &= -\frac{\kappa}{2} (2n+1) \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} + \kappa \sqrt{(n+1)(n+2)} \rho_{\alpha\beta}^{n+1n+2}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

κ koppelt demnach jeden Term eines 2x2-Blockes der Matrix mit dem ihm entsprechenden Term des nächsthöheren Blockes.

Das System befinde sich zu Beginn in einem Zustand $|i, n_0\rangle$. Dann gilt es nach Gl. (5.6), $n_0 + 1$ gekoppelte Gleichungen zu betrachten, da Zustände mit $n > n_0$ nicht erreicht werden können. Für kleine Werte von n_0 findet man sukzessive, wobei die Differentialgleichungen mit Maple gelöst wurden, die folgenden Lösungen:

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{1}$$

$$\rho^1(t) = e^{-\kappa t}, \quad \langle n \rangle_1(t) = e^{-\kappa t}$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{2}$$

$$\rho^2(t) = e^{-2\kappa t}$$

$$\rho^1(t) = 2(1 - e^{-\kappa t})e^{-\kappa t}, \quad \langle n \rangle_2(t) = 2e^{-\kappa t}$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{3}$$

$$\rho^3(t) = e^{-3\kappa t}$$

$$\rho^2(t) = 3(1 - e^{-\kappa t})e^{-2\kappa t}$$

$$\rho^1(t) = 3(e^{-\kappa t} - 2e^{-2\kappa t} + e^{-3\kappa t}), \quad \langle n \rangle_3(t) = 3e^{-\kappa t}$$

Dies lassen sich für beliebige n_0 verallgemeinern zu

$$\rho^{n_0-m}(t) = \binom{n_0}{m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} e^{-(n_0-j)\kappa t} (-1)^{m-j} = \binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^m \quad (5.7)$$

mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

und dem binomischen Lehrsatz, was sich durch Einsetzen in Gl. (5.6) verifizieren lässt (siehe Rechnung im Anhang). Die mittlere Photonenzahl verhält sich nach der einfachen Gleichung

$$\langle n \rangle_{n_0}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{m=0}^{n_0-1} \rho^{n_0-m}(t) = n_0 e^{-\kappa t}, \quad (5.8)$$

wie durch Betrachtung der Liouville-von Neumann-Gleichung (4.37),

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \frac{1}{2} \kappa [2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a], \quad (5.9)$$

und Formulierung der Bewegungsgleichung eines Erwartungswertes $\langle A \rangle$ gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \text{Tr} \{ \rho A \} = \text{Tr} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho A \right\} \\ &= \frac{\kappa}{2} \langle [a^\dagger, A] a + a^\dagger [A, a] \rangle. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sei nun A ein beliebiger normalgeordneter Operator der Resonatormode:

$$A = \underbrace{a^\dagger a^\dagger \dots a^\dagger}_n \underbrace{a a \dots a}_m$$

Seine Bewegungsgleichung lautet dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle &= \frac{\kappa}{2} \langle [a^\dagger, a^\dagger \dots a^\dagger a \dots a] a + a^\dagger [a^\dagger \dots a^\dagger a \dots a, a] \rangle \\ &= \frac{\kappa}{2} \langle a^\dagger \dots a^\dagger [a^\dagger, a \dots a] a + a^\dagger [a^\dagger \dots a^\dagger, a] a \dots a \rangle \\ &= -\frac{\kappa}{2} (n+m) \langle A \rangle, \end{aligned} \quad (5.11)$$

wobei in beiden Schritten die Kommutatorrelation $[a, a^\dagger] = 1$ sowie die Identität

$$[A, B_1 B_2 \dots B_n] = [A, B_1] B_2 \dots B_n + B_1 [A, B_2] B_3 \dots B_n + \dots + B_1 \dots B_{n-1} [A, B_n]$$

verwendet wurde. Die Lösung ist

$$\langle A \rangle(t) = e^{-\frac{\kappa}{2}(n+m)t} \langle A \rangle(0). \quad (5.12)$$

Mit $A = a^\dagger a$ und $\langle A \rangle(0) = n_0$ ergibt sich die Identität aus Gl. (5.8). Die numerische Berechnung für den Fall $n_0 = 5$ und $\kappa = 0.1 \text{ ps}^{-1}$ bestätigt die Rechnung, siehe Abb. 5.2. Es kann außerdem, analog zu der Berechnung der Diagonalelemente ρ^n , gezeigt werden, dass die Nebendiagonalelemente $\rho_{\alpha\beta}^{nn+1}$ für große Zeiten verschwinden. Diese *Dephasierung* oder *Dekohärenz* des Systems ist eine charakteristische Folge des Kontaktes mit einem Reservoir im thermischen Gleichgewicht. Er lässt die Dichtematrix diagonal in Energieeigenzuständen werden, vgl. auch Kap. 3.2.2.

Auch in diesem Spezialfall ist es interessant, die Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ zu untersuchen. Dazu betrachte man wiederum die Bewegungsgleichung (5.11). Nach Gl. (3.22) ist dann

$$g^{(2)}(0) = \frac{e^{-2\kappa t} \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle(0)}{(e^{-\kappa t} \langle a^\dagger a \rangle(0))^2} = \frac{\langle n^2 \rangle(0) - \langle n \rangle(0)}{(\langle n \rangle(0))^2}. \quad (5.13)$$

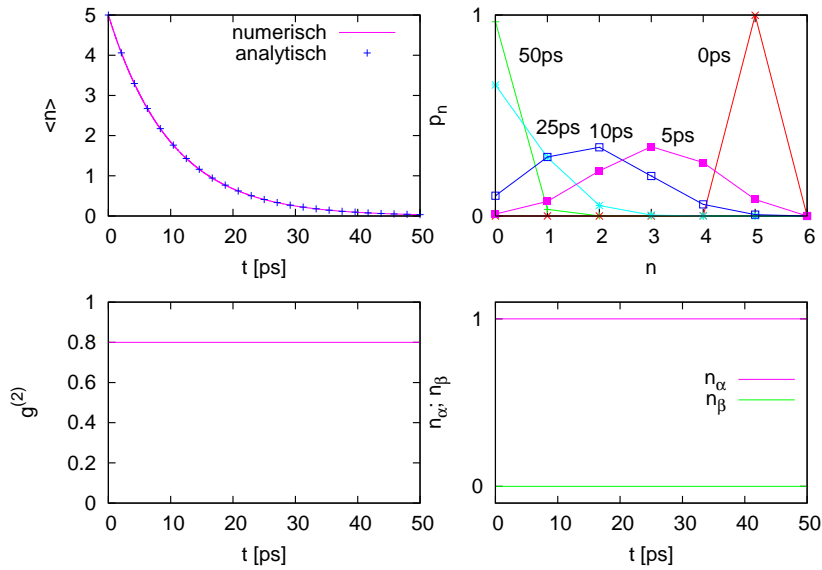


Abbildung 5.2: Numerische Lösungen der zeitlichen Entwicklung von $\langle n \rangle$, n_α , n_β und $g^{(2)}(0)$ sowie der Photonenzahl für reine Kavitätsverluste mit $\kappa = 0.1 \text{ ps}^{-1}$ und $n_0 = 5$. Die analytische Lösung für $\langle n \rangle$ dient dem Vergleich mit der Rechnung im Text.

Das bemerkenswerte Resultat ist also, dass die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für alle Zeiten ihren initialen Wert behält, obgleich sich die Photonenzahl der Resonatormode den vorangegangenen Betrachtungen nach zeitlich entwickelt. Im Falle der Präparation des Systems in einem Zustand mit definierter Photonenzahl n_0 besteht die Photonenzahl zu Beginn aus einem deltaförmigen Peak bei $n = n_0$, um sich dann zu verbreitern und sich mit der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle_{n_0}(t)$ gemäß Gl. (5.8) bzw. Gl. (5.12) auf $n = 0$ zuzubewegen, siehe dazu Abb. 5.2. Für große Zeiten sind im Mittel nahezu alle Photonen dissipiert und die Statistik nähert sich wiederum einem deltaförmigen Peak an. Zum Vergleich zeigt Abb. 5.2 auch den zeitlichen Verlauf von $g^{(2)}(0)$ für den Fall $n_0 = 5$.

5.1.3 Wechselwirkung des 2-Niveau-Atoms, spontane Emission in nichtlassenden Moden

Die Wechselwirkung des 2-Niveau-Atoms mit dem Reservoir wird durch den zweiten Lindblad-Term in Gl. (4.37) beschrieben. Er enthält nur atomare Operatoren, daher werden bei Ausschalten der κ -, g - und P -Kopplungen nur atomare Besetzungen von der Zeit abhängen, nicht jedoch die Photonenzahl. Die Gleichungen (4.43) reduzieren sich auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\alpha}^{nn} &= -\gamma \rho_{\alpha\alpha}^{nn} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta\beta}^{n+1n+1} &= \gamma \rho_{\alpha\alpha}^{n+1n+1} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} &= -\frac{1}{2} \gamma \rho_{\alpha\beta}^{nn+1}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der Koeffizient γ stellt demnach die Rate dar, mit welcher das Atom spontan, also ohne äußere Einwirkung, vom angeregten in den Grundzustand übergeht. Er koppelt jeweils zwei nebeneinanderliegende 2×2 -Blöcke der Matrix. Falls sich das System initial in einem Zustand $|\alpha, n\rangle$ befindet, so bestimmt man das zeitliche Verhalten der Matrixelemente leicht zu

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\alpha}^{nn}(t) &= e^{-\gamma t} \\ \rho_{\beta\beta}^{nn}(t) &= 1 - e^{-\gamma t}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Offenbar ist die mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle = \sum_n n(\rho_{\alpha\alpha}^{nn} + \rho_{\beta\beta}^{nn})$ tatsächlich konstant. Da die spon-

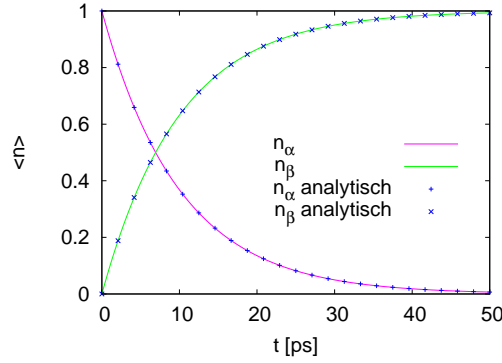


Abbildung 5.3: Numerische Lösungen der zeitlichen Entwicklung von n_α und n_β für reine spontane Emission mit $\gamma = 0.1 \text{ ps}^{-1}$. Die analytischen Lösungen dienen dem Vergleich mit der Rechnung im Text.

tane Emission durch Reservoir-Wechselwirkung entsteht, beinhaltet sie nur Emission in nichtlasende Moden. Es handelt sich bei ihr um einen rein quantenmechanischen Effekt, der, im Gegensatz zu Absorption und stimulierter Emission, nur in einer Theorie mit quantisiertem Licht auftritt. Anders als die beiden anderen Effekte wird sie nicht durch die Einwirkung einer elektromagnetischen Welle ausgelöst, sondern erfolgt zufällig und ist nur statistisch zu beschreiben. Die numerische Berechnung liefert ebenfalls den exponentiellen Verlauf aus Gl. (5.15), siehe Abb. 5.3.

In Gl. (5.14) wird außerdem offensichtlich, dass der Kontakt mit dem Reservoir wiederum Dephasierung verursacht und die Nebendiagonalelemente verschwinden.

Es findet im Übrigen ebenso spontane Emission in die Lasermode statt. Sie kann jedoch nicht aus der Wechselwirkung mit einem Reservoir hergeleitet werden, da dies stets eine unendliche Anzahl von Reservoirmoden erfordert (siehe Kap. 4.2.2). Somit gibt es über die Liouville-von Neumann-Gleichung keinen direkten Zugriff auf diesen Vorgang, obgleich er die Entwicklung des Systems natürlich beeinflusst.

5.1.4 Pumpen

Der letzte Lindblad-Term der Liouville-von Neumann-Gleichung (4.37) beschreibt das inkohärente Pumpen des 2-Niveau-Atoms mit einer Pumprate P . Auf die Entwicklung der Matrixelemente hat es die entgegengesetzte Wirkung der spontanen Emission:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\alpha}^{nn} &= P \rho_{\beta\beta}^{nn} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta\beta}^{nn} &= -P \rho_{\beta\beta}^{nn} \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha\beta}^{nn+1} &= -\frac{1}{2} P \rho_{\alpha\beta}^{nn+1}, \\
 n &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Lösungen sind wiederum Exponentialfunktionen.

Ein Term, der besondere Aufmerksamkeit verdient, ist der Dämpfungsterm in der dritten Gleichung von (5.16). Er sorgt für ein exponentielles Abklingen der Elemente auf der ersten Nebendiagonalen. Da diese Elemente die Jaynes-Cummings-Kopplung der Hauptdiagonalelemente vermitteln, kann ihre Dämpfung großen Einfluss auf das Lasing haben. Eine Pumprate, welche groß im Vergleich zu den anderen Kopplungskonstanten ist, zerstört die Phasenbeziehung oder Kohärenz zwischen den Systemzuständen und kann den Laserbetrieb zum Erliegen bringen. Dieser Effekt wird als *Quenching* des Lasers bezeichnet und ist typisch für das hier verwendete inkohärente Pumpen in 2-Niveau-Systemen. Er wird vor allem bei der folgenden Betrachtung der vollen Gleichungen wichtig.

5.2 Vollständige Gleichungen

Nachdem zuvor alle Wechselwirkungen des Lasers getrennt untersucht wurden, sollen nun die vollständigen Gleichungen (4.43) betrachtet werden. Eine analytische Lösung des Problems ist nicht mehr möglich. Das System wird sich, unter Dämpfung durch das Reservoir und Anregung durch das Pumpen, mehr oder weniger schnell in einen stationären Zustand mit fester Photonenstatistik und -zahl entwickeln. Die Entwicklung der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle$, der Besetzungsinversion $w = n_\alpha - n_\beta$ sowie der Photonenstatistik und der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}(0)$ für die Parameter $\gamma = 0.01ps^{-1}$, $\kappa = 0.01ps^{-1}$, $g = 0.1ps^{-1}$ und $P = 1ps^{-1}$ zeigt die folgende Abb. 5.4. Man erkennt

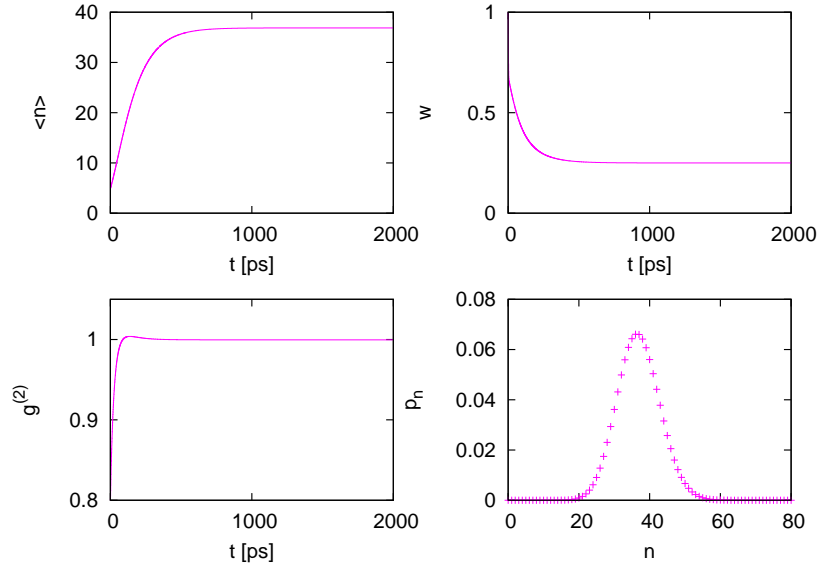


Abbildung 5.4: Numerische Lösungen der zeitlichen Entwicklung von $\langle n \rangle$, w und $g^{(2)}(0)$ sowie der Photonenstatistik im stationären Zustand des vollständigen Systems für $\gamma = 0.01ps^{-1}$, $\kappa = 0.01ps^{-1}$, $g = 0.1ps^{-1}$.

sehr gut das Einstellen einer invertierten Besetzung der atomaren Niveaus sowie einer relativ hohen Photonenzahl. Zudem wird durch die Betrachtung der Photonenstatistik und der Korrelationsfunktion deutlich, dass das vom Laser erzeugte Licht kohärent ist.

Um den Laser vollständig zu charakterisieren, muss sein Verhalten jedoch für ein breites Spektrum von Pumpraten untersucht werden. Dazu nimmt man sogenannte Kennlinien auf, indem man bei verschiedenen Pumpraten P die zeitliche Entwicklung des Systems bis in den stationären Zustand berechnet und die erzielte Photonenzahl $\langle n \rangle$ gegen P aufträgt. Die Abb. 5.5 und 5.6 zeigen die Kennlinie, Besetzungsinversion und Photonenstatistik des 2-Niveau-Modells für die oben genannten Parameter.

Charakteristisch für Kennlinien konventioneller Laser ist die deutliche Aufteilung in zwei Bereiche, oberhalb und unterhalb der Laserschwelle, an welcher die Lasertätigkeit beginnt (siehe Kap. 1.2). Die Ursache hierfür ist, dass konventionelle Laser thermodynamische Systeme mit scharfen Phasenübergängen darstellen. Eine derart klare Abgrenzung ist beim Ein-Atom-Laser, welcher vielmehr durch Quanteneffekte bestimmt wird, nicht zu erkennen (siehe Abb. 5.5). Es lässt sich lediglich ein Schwellenbereich festlegen, in dem der Laser vom nichtlasenden in den lasenden Zustand übergeht. Er ist durch eine signifikante Änderung in der Photonenstatistik gekennzeichnet, die durch Buckel im Verlauf von $g^{(2)}(0)$ sichtbar wird. Dieses wechselt vom Wert 1 vorübergehend in den super-poissonischen Bereich. Im Gegensatz dazu beginnt bei einem konventionellen Laser $g^{(2)}(0)$ bei 2, da er unterhalb der Schwelle thermisches Licht emittiert, und nähert sich oberhalb der Schwelle dem Wert 1. Anders als beim konventionellen Laser liegt beim Ein-Atom-Laser außerdem im Schwellenbereich zunächst keine Besetzungsinversion vor. Die mittlere Photonenzahl lässt überhaupt keinen Übergang zwischen zwei Bereichen erkennen. Sie steigt im gesamten Schwellenbereich und darunter auf einer nichtlogarithmischen Skala nahezu linear an.

Die genaue Ursache des Buckels in $g^{(2)}(0)$ lässt sich nicht ohne weiteres feststellen, allerdings fällt auf,

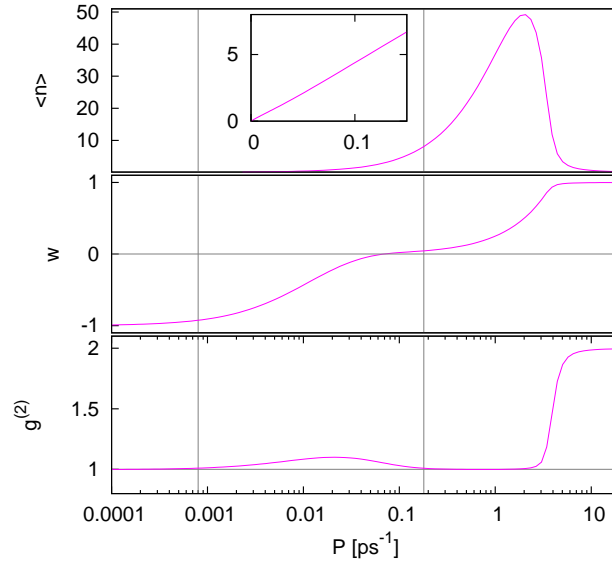


Abbildung 5.5: Kennlinie, Besetzungsinversion und Korrelationsfunktion zweiter Ordnung in Abhängigkeit von der Pumprate im 2-Niveau-Modell für $\gamma = 0.01ps^{-1}$, $\kappa = 0.01ps^{-1}$, $g = 0.1ps^{-1}$. Die senkrechten Linien kennzeichnen den Schwellenbereich des Lasers. Das kleine Diagramm zeigt den Verlauf der Kennlinie bei nichtlogarithmischer Skala für Pumpstärken bis in den Schwellenbereich.

dass seine Position etwa mit dem Wendepunkt der Besetzungsinversion (bzw. von $n_\alpha = (1 + w)/2$) zusammenfällt, also eventuell den Wechsel zwischen zwei Bereichen kennzeichnet. Am Ende des Schwellenbereiches sinkt $g^{(2)}(0)$ auf 1 zurück, das System erreicht Besetzungsinversion und die Photonenzahl steigt weiterhin mit der Pumprate an.

Im Falle des inkohärent gepumpten 2-Niveau-Modells tritt oberhalb des Schwellenbereiches eine weitere Unterteilung auf, bewirkt durch den bereits beschriebenen Effekt des Quenching, also der Dekohärenz durch starkes Pumpen. Obgleich das System mit zunehmender Pumprate bis zu einer vollständigen Besetzungsinversion gelangt, bricht die Photonenausbeute ab einer bestimmten Pumprate ein und fällt auf Werte unterhalb des Schwellenbereiches zurück. Interessant sind in diesem Zusammenhang auch die Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ und die Photonenstatistik. Die Photonen sind im Laserbetrieb erkennbar poissonisch verteilt (Abb. 5.6), ab Einsetzen des Quenching steigt $g^{(2)}(0)$ jedoch sehr schnell auf einen Wert nahe 2 an, was auf thermisches Licht hindeutet. Dies spiegelt sich auch in der Statistik wieder. Das Verhalten erscheint plausibel, da das invertierte System nach wie vor Photonen durch spontane Emission emittiert, welche stark inkohärent sind. Man beachte, dass wiederum die signifikante Änderung von $g^{(2)}(0)$ etwa mit einem Wendepunkt der Besetzungsinversion zusammenfällt. Die Korrelationsfunktion reagiert empfindlich auf Übergänge des Systems zwischen verschiedenen Bereichen.

Im nächsten Abschnitt wird das Verhalten des Lasers für andere Werte des Kopplungsparameters g untersucht, da sich hier eine starke Abhängigkeit vermuten lässt. Zugleich soll eine alternative Methode zur numerischen Untersuchung des Lasers eingeführt und die Ergebnisse beider Methoden verglichen werden.

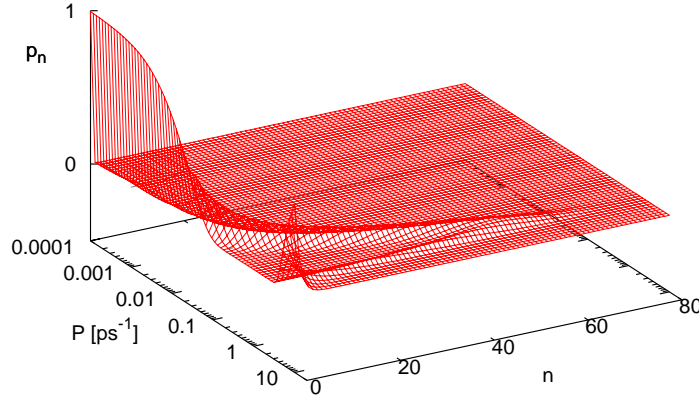


Abbildung 5.6: Photonenstatistik in Abhängigkeit von der Pumprate im 2-Niveau-Modell für $\gamma = 0.01ps^{-1}$, $\kappa = 0.01ps^{-1}$, $g = 0.1ps^{-1}$.

5.3 Vergleich mit Rechnung in Cluster-Entwicklung

Zum Abschluss der Behandlung des 2-Niveau-Modells soll auf eine weitere Möglichkeit der Berechnung des Systems eingegangen werden, welche Vor- und Nachteile gegenüber der Berechnung mittels der vollen Dichtematrix besitzt. Dabei handelt es sich um die sogenannte *Cluster-Entwicklung* [8],[9]. Es wird von der Liouville-von Neumann-Gleichung (4.37) ausgegangen, um gekoppelte Bewegungsgleichungen für Erwartungswerte von atomischen, photonischen und gemischten Operatoren zu erhalten. Die atomaren Operatoren werden hierbei in zweiter Quantisierung betrachtet, d.h. der Operator c_i^\dagger bzw. c_i erzeugt bzw. vernichtet ein Elektron im Zustand $|i\rangle$, sodass die Besetzung des entsprechenden Zustandes durch $c_i^\dagger c_i$ gegeben ist (siehe auch Kap. 2.3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = Tr \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho A \right\} = & -i \left\langle g^* [A, a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha] + g [A, a c_\alpha^\dagger c_\beta] \right\rangle \\ & + \frac{\kappa}{2} \langle [a^\dagger, A] a + a^\dagger [A, a] \rangle \\ & + \frac{\gamma}{2} \langle [c_\alpha^\dagger c_\beta, A] c_\beta^\dagger c_\alpha + c_\alpha^\dagger c_\beta [A, c_\beta^\dagger c_\alpha] \rangle \\ & + \frac{P}{2} \langle [c_\beta^\dagger c_\alpha, A] c_\alpha^\dagger c_\beta + c_\beta^\dagger c_\alpha [A, c_\alpha^\dagger c_\beta] \rangle \end{aligned} \quad (5.17)$$

Durch Einsetzen von Singulett von Operatoren, etwa $c_\alpha^\dagger c_\alpha$ oder a^\dagger , entstehen stets Gleichungen, welche Multipletts weiterer Operatoren von meist höherer Ordnung enthalten. Hierbei ist wichtig, dass atomische Operatoren wie c_α stets paarweise eine Ordnung bilden, während photonische Operatoren wie a^\dagger dies einzeln tun. Beispielsweise ist die zeitliche Entwicklung der Besetzung n_α , eines Singuletts, an die sogenannte photonenassistierte Polarisation $\langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle$ gekoppelt, welche ein Dublett darstellt (siehe die zweite der Gleichungen (5.18)).

So entsteht eine Hierarchie von Gleichungen, die, entsprechend der unendlichen Größe der Dichtematrix, keine obere Grenze hat. Es ist daher notwendig, eine Näherung durchzuführen und bei einer bestimmten Multiplett-Ordnung die sukzessive Berechnung abubrechen, wobei dies nicht mit dem “Abschneiden” der Dichtematrix gleichzusetzen ist. Dazu wird von der Faktorisierung der Erwartungswerte von N-Teilchen-Operatoren in alle möglichen Kombinationen von 1- bis (N-1)-Teilchen-Operatoren ausgegangen. Die Abweichung der Faktorisierung vom tatsächlichen Erwartungswert wird mit einer Korrelationsfunktion $\delta(N)$ angegeben und die gekoppelten Gleichungen der Erwartungswerte werden durch gekoppelte Gleichungen der entsprechenden Korrelationsfunktionen ersetzt. Man beachte, dass

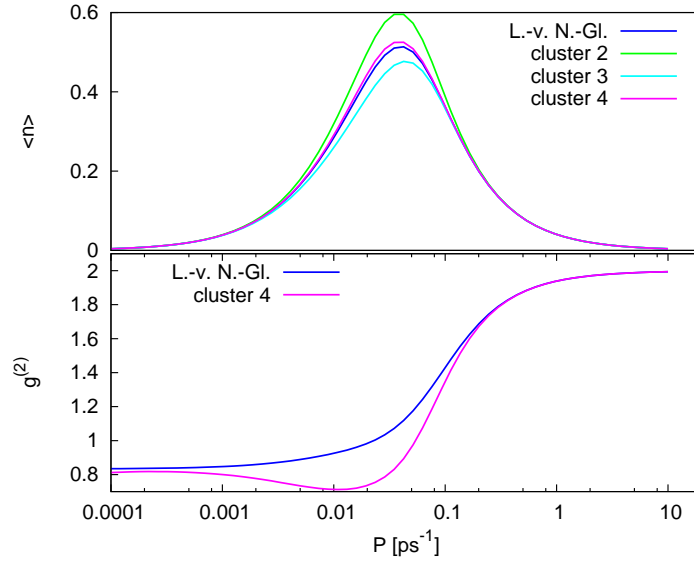


Abbildung 5.7: Kennlinien und Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für $g = \kappa = \gamma = 0.01 \text{ ps}^{-1}$, berechnet mit der Liouville-von Neumann-Gleichung sowie der Cluster-Entwicklung auf Dublett-, Triplett- und Quadruplett-Niveau (cluster 2-4).

diese Korrelationen nichts mit den Korrelationsfunktionen $g^{(n)}(\tau)$ des optischen Feldes zu tun haben. Durch Vernachlässigen der Korrelationen ab einer bestimmten Ordnung kann dann die Rechnung abgebrochen werden. Unter Verwendung der bosonischen und fermionischen Kommutatorrelationen und der Annahme, dass die Erwartungswerte einzelner photonischer Operatoren verschwinden, erhält man die folgende Hierarchie von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \delta \langle a^\dagger a \rangle &= -ig^* \delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle + ig \delta \langle a c_\alpha^\dagger c_\beta \rangle - \kappa \delta \langle a^\dagger a \rangle \\
 \frac{\partial}{\partial t} \delta \langle c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle &= ig^* \delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle - ig \delta \langle a c_\alpha^\dagger c_\beta \rangle - \gamma \delta \langle c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle + P(1 - \delta \langle c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle) \\
 \frac{\partial}{\partial t} \delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle &= ig \left(\delta \langle c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle - \delta \langle a^\dagger a \rangle \right) + 2ig \left(\delta \langle a^\dagger a \rangle \delta \langle c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle + \delta \langle a^\dagger a c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(\gamma + P + \kappa) \delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Vernachlässigen der Korrelation dritter Ordnung $\delta \langle a^\dagger a c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle$ in Gl. (5.18) liefert die Cluster-Entwicklung auf Dublett-Niveau. Die weitere Rechnung, welche die Korrelation dritter Ordnung berücksichtigt, ergibt für eben diese die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \delta \langle a^\dagger a c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle &= ig^* \left(\delta \langle a^\dagger a \rangle \delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle + \delta \langle a^\dagger a^\dagger a c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle \right) \\
 &\quad - ig \left(\delta \langle a^\dagger a \rangle \delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle + \delta \langle a^\dagger a^\dagger a c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle \right)^* \\
 &\quad + ig^* \delta \langle c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle \delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle - ig \delta \langle c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle \delta \langle a c_\alpha^\dagger c_\beta \rangle \\
 &\quad - (\gamma + P + \kappa) \delta \langle a^\dagger a c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle,
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

in der wiederum eine Korrelation vierter Ordnung $\delta \langle a^\dagger a^\dagger a c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle$ auftritt. Um die Cluster-Entwicklung auf Triplett-Niveau abzuschneiden, setzt man die Korrelation auf 0. Anderenfalls bezieht man Korre-

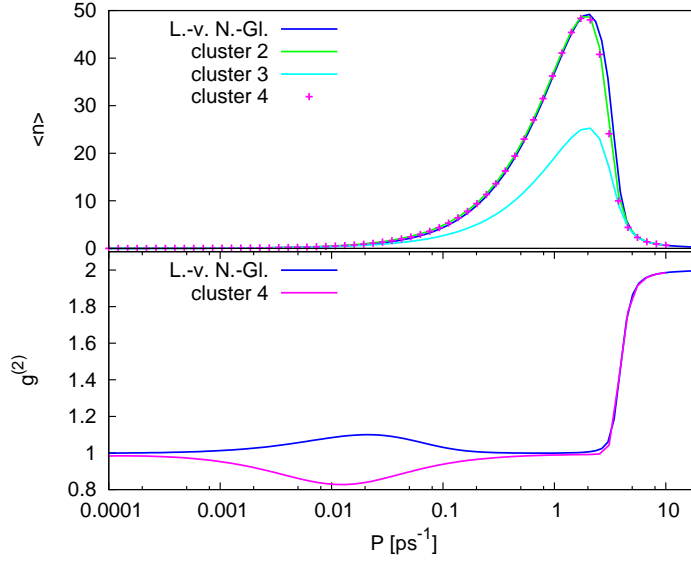


Abbildung 5.8: Kennlinien und Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für $g = 0.1ps^{-1}$, $\kappa = \gamma = 0.01ps^{-1}$, berechnet mit der Liouville-von Neumann-Gleichung sowie der Cluster-Entwicklung auf Dublett-, Triplett- und Quadruplett-Niveau (cluster 2-4).

lationen vierter Ordnung ein:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \delta \langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle &= -2ig^* \delta \langle a^\dagger a^\dagger ac_\beta^\dagger c_\alpha \rangle \\
 &\quad + 2ig \delta \langle a^\dagger a^\dagger ac_\beta^\dagger c_\alpha \rangle^* \\
 &\quad - 2\kappa \delta \langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \delta \langle a^\dagger a^\dagger ac_\beta^\dagger c_\alpha \rangle &= 2ig \delta \langle a^\dagger ac_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle - ig \delta \langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle \\
 &\quad - \frac{1}{2}(\gamma + 3\kappa + P) \delta \langle a^\dagger a^\dagger ac_\beta^\dagger c_\alpha \rangle \\
 &\quad + 4ig \delta \langle a^\dagger a \rangle \delta \langle a^\dagger ac_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle \\
 &\quad + 2ig^* \left(\delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle \right)^2 - 2ig \delta \langle a^\dagger c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle \delta \langle ac_\alpha^\dagger c_\beta \rangle \\
 &\quad + 2ig \left(\delta \langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle \delta \langle c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle + \delta \langle a^\dagger a^\dagger aac_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle \right)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

mit $\delta \langle a^\dagger a^\dagger aac_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle = 0$ für das Abschneiden auf Quadruplett-Niveau. Die Entwicklung könnte entsprechend beliebig fortgesetzt werden, wobei stets darauf zu achten ist, dass alle nichtverschwindenden Korrelationen des jeweiligen Niveaus einbezogen werden. Es sind dies Korrelationen der Typen

$$\delta \langle (a^\dagger)^n a^n \rangle, \delta \langle (a^\dagger)^n a^n c_\alpha^\dagger c_\alpha \rangle, \delta \langle (a^\dagger)^n a^{n-1} c_\beta^\dagger c_\alpha \rangle.$$

Auf den drei betrachteten Niveaus werden nun die gekoppelten Gleichungen numerisch für verschiedene Pumpraten bis zum stationären Zustand berechnet und jeweils die Kennlinie aufgetragen, siehe Abb. 5.7 bis 5.9. Auf Quadruplett-Niveau kann außerdem $g^{(2)}(0)$ berechnet werden mit

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle}{(\langle a^\dagger a \rangle)^2} = \frac{2(\delta \langle a^\dagger a \rangle)^2 + \delta \langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle}{(\delta \langle a^\dagger a \rangle)^2} = 2 + \frac{\delta \langle a^\dagger a^\dagger aa \rangle}{(\delta \langle a^\dagger a \rangle)^2}. \tag{5.21}$$

Offenbar nähern im Falle der Kennlinie die Lösungen der Cluster-Entwicklung für kleine g die Lösung der vollständigen Matrix gut an, wobei höhere Multipletts besser sind. Für größere Werte von g ergeben sich mit der Triplett-Näherung sehr große Abweichungen, lediglich die Form der Kennlinie wird

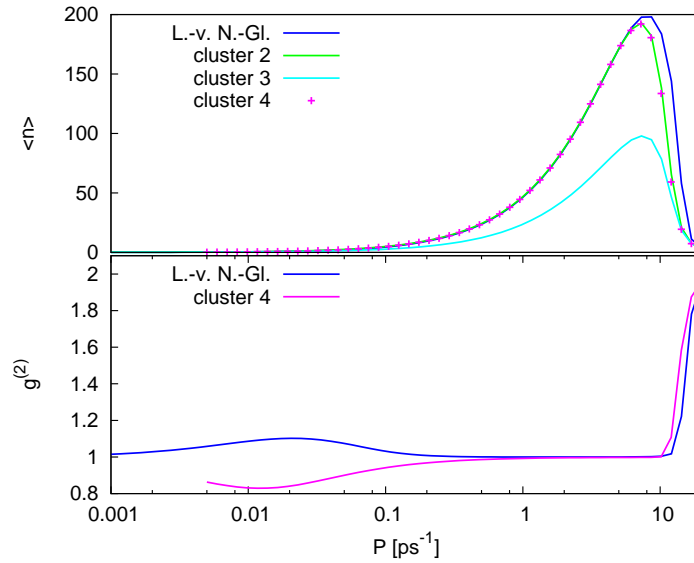


Abbildung 5.9: Kennlinien und Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für $g = 0.2\text{ps}^{-1}$, $\kappa = \gamma = 0.01\text{ps}^{-1}$, berechnet mit der Liouville-von Neumann-Gleichung sowie der Cluster-Entwicklung auf Dublett-, Triplett- und Quadruplett-Niveau (cluster 2-4).

richtig erzeugt. Die Funktion $g^{(2)}(0)$ wird, bis auf den Schwellenbereich, in allen Fällen gut wiedergegeben. Hier ergibt sich in der Cluster-Entwicklung ein Buckel im sub-poissonischen Bereich. Des

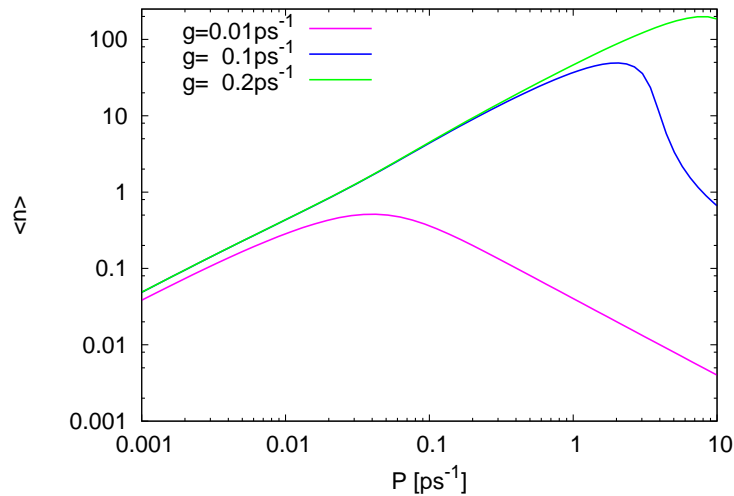


Abbildung 5.10: Kennlinien für $g = 0.01\text{ps}^{-1}$, $g = 0.1\text{ps}^{-1}$ und $g = 0.2\text{ps}^{-1}$, berechnet mit der Liouville-von Neumann-Gleichung, in doppelllogarithmischer Skala aufgetragen.

Weiteren traten bei der Berechnung auf Quadruplett-Niveau bei großen Werten von g und kleinen Pumpraten numerische Schwierigkeiten auf, weshalb $g^{(2)}(0)$ für die Cluster-Entwicklung in Abb. 5.9 in einem sichtbar kleineren Wertebereich aufgetragen wurde. Die starke Abhängigkeit des Verhaltens des Lasers von der Jaynes-Cummings-Kopplung wird jedoch mit beiden Methoden deutlich: Während der Bereich der Laserschwelle, erkennbar an dem Buckel in der $g^{(2)}(0)$ -Kurve (bei $g = 0.01\text{ps}^{-1}$ überlagert von anderen Effekten), nicht merklich von g beeinflusst wird, verschiebt sich der Bereich maximaler Photonenemission stark zu größeren Pumpraten hin und die maximale Anzahl von Photonen im System nimmt überproportional zu. Offenbar wird also eine höhere Übergangsrate zwischen den Niveaus, bedingt durch große g , erst durch eine entsprechend höhere Pumprate ausgereizt. Man

beachte, dass die Kennlinie für größere Werte von g trotz der Verschiebung des Maximums an jeder Stelle oberhalb der Linien kleiner g -Werte verläuft (siehe Abb. 5.10). Die Photonenausbeute wächst demnach wie erwartet stets mit der Jaynes-Cummings-Kopplung an. Für kleine Werte von g fallen die beiden oben genannten Bereiche zusammen und $g^{(2)}(0)$ bewegt sich für kleine Pumpraten deutlich im sub-poissonischen Bereich. Das emittierte Licht weist also Antibunching auf, wie in Kapitel 3.3 diskutiert, die direkte Folge von zwei Laseremissionen ist besonders unwahrscheinlich.

Die Cluster-Entwicklung kann eine nützliche Alternative zur Rechnung mit der vollen Dichtematrix darstellen. Die Herleitung der Gleichungen erfolgt unter wesentlich größerem Aufwand, während ihre numerische Lösung aufgrund ihrer vergleichsweise geringen Anzahl schneller erfolgen kann. Allerdings können sich starke Abweichungen ergeben, selbst bei Cluster-Entwicklungen höherer Ordnung. Weitere Arbeiten könnten hier ansetzen und etwa untersuchen, ob sich abhängig vom System Bereiche für das Multiplett-Niveau angeben lassen, oder allgemein physikalische Situationen existieren, in denen die Cluster-Entwicklung unzuverlässig ist.

Zudem enthalten die Gleichungen keine detaillierten Informationen über die Photonenstatistik des Lasers, $g^{(2)}(0)$ kann hier lediglich einen Anhaltspunkt geben. Für eine Behandlung sehr vieler atomarer Emitter ist die Cluster-Entwicklung aber sicherlich eine gute Alternative, sofern sie zuverlässig eingesetzt werden kann, da dann die Dichtematrix sehr groß wird und ihre volle Betrachtung extrem viel Rechenaufwand erfordert.

Kapitel 6

Erweiterung auf vier atomare Niveaus

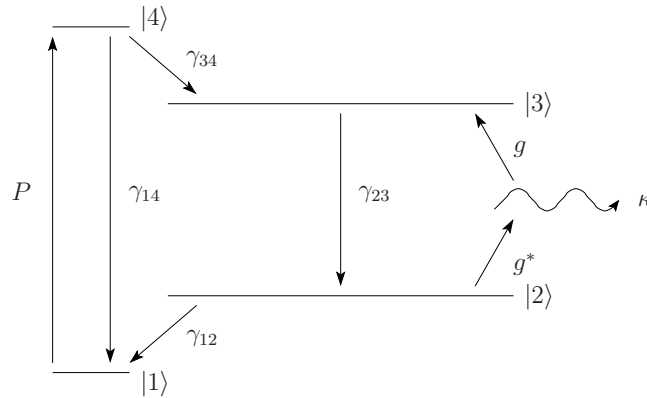


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Modells mit vier atomaren Niveaus. Zwischen den Zuständen $|1\rangle$ und $|4\rangle$ wird mit der Rate P gepumpt, die Zustände $|2\rangle$ und $|3\rangle$ sind nach dem Jaynes-Cummings-Modell mit dem Koeffizienten g an eine Photonenmode gekoppelt. Zusätzlich koppeln einige atomare Übergänge sowie die Photonenmode an Reservoirs im thermischen Gleichgewicht, sodass spontane Emission mit den Raten γ_{12} , γ_{14} , γ_{23} und γ_{34} sowie Kavitätsverluste mit der Rate κ auftreten.

Bisher wurde der Ein-Atom-Laser als inkohärent gepumptes 2-Niveau-System modelliert, das an eine Photonenmode gekoppelt ist und sich in einer verlustbehafteten Kavität befindet. Das Modell werde nun um zwei atomare Niveaus erweitert, von denen eines oberhalb und eines unterhalb der bereits vorhandenen Niveaus liegen (siehe Abb. 6.1). Der Pumpvorgang sei nach wie vor inkohärent, allerdings finden Pumpen und Lasing nicht mehr auf denselben Niveaus statt. Stattdessen werden Ladungsträger aus dem unteren Zustand $|1\rangle$ in den oberen Zustand $|4\rangle$ gehoben, von wo sie mittels spontaner Emission in den oberen Laserzustand $|3\rangle$ relaxieren. Ladungsträger im unteren Laserzustand $|2\rangle$ sinken ebenfalls durch spontane Emission weiter ab in den Zustand $|1\rangle$, sodass ein Kreislauf entsteht. Die Kopplung der äußeren Zustände an die Kavität werde im Weiteren vernachlässigt, da die Kavität auf die inneren Zustände abgestimmt ist und zwischen den inneren und äußeren Zuständen eine hinreichend große Energiedifferenz angenommen werden kann. Weiterhin werden die Raten der spontanen Emission zwischen den Zuständen $|4\rangle$ und $|2\rangle$ sowie zwischen $|3\rangle$ und $|1\rangle$ vernachlässigt, sodass diese nicht direkt gekoppelt sind.

Besonders interessant wird es nun sein, das Verhalten des erweiterten Systems mit dem des einfacheren 2-Niveau-Systems zu vergleichen, denn physikalisch sollen sie die gleiche Situation beschreiben: den lasenden Übergang zwischen zwei Niveaus eines einzelnen Emitters. Im bisher behandelten Fall wurde der Prozess des Pumpens so weit wie möglich vereinfacht und mit einem inkohärenten Pumpterm direkt zwischen den lasenden Niveaus modelliert. Dieser Pumpterm hatte keine wirkliche physikalische

Bedeutung, sondern sollte einen kohärenten Pumpvorgang zwischen höheren, nicht explizit einberechneten Niveaus simulieren.

Das in diesem Kapitel eingeführte Modell beschreibt den Pumpvorgang explizit als Ladungsträgerversorgung durch die Relaxation aus anderweitig angeregten, äußeren Zuständen (obgleich für diese wiederum ein inkohärenter Pumpterm verwendet wird). Daher wird der Pumpvorgang nicht mehr nur durch die Pumprate, sondern auch durch die Raten der spontanen Emission zwischen den inneren und äußeren Zuständen gesteuert. Wie man sich leicht vorstellen kann, können vergleichsweise niedrige Emissionsraten einen “Flaschenhals” des Systems darstellen und die Wirkung des Pumpens beeinträchtigen. Intuitiv würde man aber vermuten, dass bei Emissionsraten, die gleich der Pumprate sind, die gepumpten Ladungsträger direkt in den Zustand $|3\rangle$ übergehen bzw. nach Relaxation von $|2\rangle$ auf $|1\rangle$ direkt gepumpt werden. Das System sollte sich dann insgesamt wie das 2-Niveau-System verhalten. In den folgenden Abschnitten wird analog zum bisherigen Vorgehen zunächst die Liouville-von Neumann-Gleichung des Systems formuliert werden, um aus ihr die Bewegungsgleichungen der Dichtematrixelemente zu gewinnen und diese numerisch zu lösen. Die anschließende Diskussion der Ergebnisse wird unter anderem den oben angesprochenen Vergleich zwischen dem 2-Niveau-System und dem 4-Niveau-System aufgreifen.

6.1 Liouville-von Neumann-Gleichung des 4-Niveau-Modells

Zur Beschreibung des erweiterten Systems werde wiederum die Liouville-von Neumann-Gleichung herangezogen. Diese findet man auf Grundlage derselben Überlegungen wie jene für das 2-Niveau-System, siehe Kap. 4. Es genügt daher, Gleichung (4.37) entsprechend zu erweitern. Abweichend werden im Folgenden die atomaren Operatoren in der zweiten Quantisierung dargestellt. In dieser Darstellung kann auch ein System mit mehr als einem Elektron relativ einfach behandelt werden, was eine sinnvolle Erweiterung des Modells darstellen würde, die hier jedoch nicht erfolgen soll.

Die Quasi-Spinmatrizen werden damit zu

$$\sigma_+ = c_3^\dagger c_2, \quad \sigma_- = c_2^\dagger c_3 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_+ = c_4^\dagger c_1, \quad \sigma_- = c_1^\dagger c_4. \quad (6.1)$$

Es gelten die allgemeinen Beziehungen

$$c_j^\dagger c_i |a, n\rangle = \delta_{a,i} |j, n\rangle, \quad c_i^\dagger c_j |a, n\rangle = \delta_{a,j} |i, n\rangle, \quad (6.2)$$

siehe auch Kap. 2.3.

Da an der Photonenmode nichts geändert wurde, muss im Jaynes-Cummings-Hamiltonian sowie im Kavitätsverlustterm und im Pumpterm in Gl. (4.37) lediglich die Darstellung der atomaren Operatoren gemäß Gl. (6.1) angepasst werden. Für die Terme der spontanen Emission ist es notwendig, zu Gleichung (4.6), dem Hamiltonian der System-Reservoir-Wechselwirkung, zurückzukehren. Dieser enthält nach Gl. (2.29) je eine Summe für jedes Paar von atomaren Zuständen, die an ein Reservoir koppeln. Jeder dieser Terme führt bei der Herleitung der Liouville-von Neumann-Gleichung zu einem Lindblad-Term analog dem dritten Term in Gl. (4.37). Die Liouville-von Neumann-Gleichung des erweiterten Systems sieht damit folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & -\frac{i}{\hbar} [H_{JC}, \rho] + \frac{1}{2} \kappa [2a\rho a^\dagger - a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a] \\ & + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \gamma_{ij} \left[2c_i^\dagger c_j \rho c_j^\dagger c_i - c_j^\dagger c_i c_i^\dagger c_j \rho - \rho c_j^\dagger c_i c_i^\dagger c_j \right] \\ & + \frac{1}{2} P \left[2c_4^\dagger c_1 \rho c_1^\dagger c_4 - c_1^\dagger c_4 c_4^\dagger c_1 \rho - \rho c_1^\dagger c_4 c_4^\dagger c_1 \right], \\ H_{JC} = & \hbar g^* a^\dagger c_2^\dagger c_3 + \hbar g a c_3^\dagger c_2, \\ (i, j) = & (1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die Bedeutung der Koeffizienten wird in Abb. 6.1 deutlich. Man beachte, dass sich im Falle eines Elektrons die Gleichung noch vereinfachen lässt unter Verwendung der Antikommutatorrelation in Gl. (2.37) und der Identität $c_i c_j = 0$ (es kann nur ein Elektron vernichtet werden):

$$c_j^\dagger c_i c_i^\dagger c_j = c_j^\dagger (1 - c_i^\dagger c_i) c_j = c_j^\dagger c_j.$$

6.2 Bewegungsgleichungen der Matrixelemente

Im nächsten Schritt werden wiederum Bewegungsgleichungen für die Elemente der Dichtematrix ρ abgeleitet, um das System numerisch behandeln zu können. Die Matrix hat prinzipiell die gleiche Form wie Gl. (4.38) des einfacheren Systems; Als Basis dienen nun die Produktzustände

$$|1, n\rangle, |2, n\rangle, |3, n\rangle, |4, n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sodass zu jedem der unendlich vielen photonischen Matrixelemente eine Untermatrix der Dimension 4x4 gehört:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{nm} & \rho^{nm+1} \\ \rho^{n+1m} & \rho^{n+1m+1} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

$$\rho^{nm} = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{nm} & \rho_{12}^{nm} & \rho_{13}^{nm} & \rho_{14}^{nm} \\ \rho_{21}^{nm} & \rho_{22}^{nm} & \rho_{23}^{nm} & \rho_{24}^{nm} \\ \rho_{31}^{nm} & \rho_{32}^{nm} & \rho_{33}^{nm} & \rho_{34}^{nm} \\ \rho_{41}^{nm} & \rho_{42}^{nm} & \rho_{43}^{nm} & \rho_{44}^{nm} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Die Gleichungen der einzelnen Elemente werden wie in Kap. 4.3 für eine feste Photonenzahl $n = m$ unter der Verwendung von Gl. (6.2) und der bekannten photonischen Identitäten aufgestellt. Es stellt sich heraus, dass von den 16 Gleichungen eines Blockes nur jeweils sechs Gleichungen für die Entwicklung der relevanten Diagonalterme eine Rolle spielen, von denen zwei zueinander komplex konjugiert sind. Wie im Fall des 2-Niveau-Atoms sind auch hier benachbarte photonische Matrixelemente durch Kavitätsverluste und die Jaynes-Cummings-Wechselwirkung gekoppelt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{11}^{nn} &= -(P + \kappa n) \rho_{11}^{nn} + \kappa(n+1) \rho_{11}^{n+1n+1} + \gamma_{12} \rho_{22}^{nn} + \gamma_{14} \rho_{44}^{nn} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{22}^{n+1n+1} &= -(\gamma_{12} + \kappa(n+1)) \rho_{22}^{n+1n+1} + \gamma_{23} \rho_{33}^{n+1n+1} + \kappa(n+2) \rho_{22}^{n+2n+2} \\ &\quad + ig\sqrt{n+1} \rho_{23}^{n+1n} - ig^* \sqrt{n+1} \rho_{32}^{nn+1} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{33}^{nn} &= -(\gamma_{23} + \kappa n) \rho_{33}^{nn} + \kappa(n+1) \rho_{33}^{n+1n+1} + \gamma_{34} \rho_{44}^{nn} \\ &\quad + ig^* \sqrt{n+1} \rho_{32}^{nn+1} - ig\sqrt{n+1} \rho_{23}^{n+1n} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{32}^{nn+1} &= -\frac{1}{2}(\gamma_{12} + \gamma_{23} + \kappa(2n+1)) \rho_{32}^{nn+1} + \kappa\sqrt{(n+1)(n+2)} \rho_{32}^{n+1n+2} \\ &\quad + ig\sqrt{n+1} \rho_{33}^{nn} - ig\sqrt{n+1} \rho_{22}^{n+1n+1}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{23}^{n+1n} &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{32}^{nn+1})^* \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{44}^{nn} &= -(\gamma_{14} + \gamma_{34} + \kappa n) \rho_{44}^{nn} + P \rho_{11}^{nn} + \kappa(n+1) \rho_{44}^{n+1n+1} \\ &\quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

Die Matrix wird wie im Falle des 2-Niveau-Modells bei einer geeigneten Photonenzahl abgeschnitten und numerisch gelöst. Es existieren auch hier einfache, analytisch lösbare Fälle, in denen nur einzelne Wechselwirkungen eingeschaltet sind. Sie sollen in dieser Arbeit jedoch nicht betrachtet werden. Stattdessen wird die vollständige Matrix gelöst und das Verhalten des 4-Niveau-Modells bei verschiedenen Pumpraten ausgewertet sowie qualitativ mit dem des 2-Niveau-Modells verglichen. Zudem wird die Wirkung der zwei zusätzlichen Niveaus untersucht, indem Kennlinien für verschiedene Raten der spontanen Emission zwischen den inneren und äußeren Zuständen aufgenommen werden.

6.3 Vollständige Gleichungen

Die Gleichungen (6.6) werden zunächst für die folgenden Parameter und verschiedene Pumpraten gelöst:

$$g = 0.1 ps^{-1}, \kappa = \gamma_{23} = 0.01 ps^{-1}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{34} = 1 ps^{-1}, \quad \gamma_{14} = 0 ps^{-1}$$

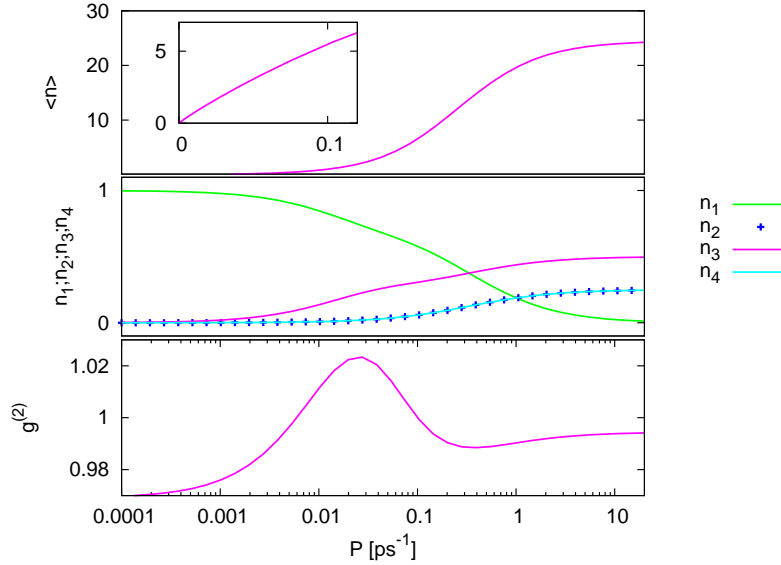


Abbildung 6.2: Kennlinie, Besetzungswahrscheinlichkeiten und Korrelationsfunktion des 4-Niveau-Modells für $g = 0.1 \text{ ps}^{-1}$, $\kappa = \gamma_{23} = 0.01 \text{ ps}^{-1}$, $\gamma_{12} = \gamma_{34} = 1 \text{ ps}^{-1}$, $\gamma_{14} = 0 \text{ ps}^{-1}$. Das kleine Diagramm zeigt den Verlauf der Kennlinie bei nichtlogarithmischer Skala für Pumpstärken bis in den Schwellenbereich.

Typischerweise sind die Raten der spontanen Emission zwischen den inneren und äußeren Zuständen groß im Vergleich zu den Übergangsraten zwischen den lasenden Zuständen, sodass die starke Besetzung des oberen Laserniveaus gewährleistet ist.

Die daraus resultierende Kennlinie sowie die Besetzungen der Zustände, die Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ und die Photonenstatistik sind in Abb. 6.2 und 6.3 aufgetragen. Im Vergleich mit den entsprechenden Diagrammen des 2-Niveau-Modells in Kap. 5.2, Abb. 5.5 und 5.6, fallen diverse Gemeinsamkeiten und Unterschiede auf; Der Verlauf der Kennlinie ist auch im Falle des 4-Niveau-Modells zunächst nahezu linear. Für niedrige Pumpraten befindet sich das Elektron vorwiegend im untersten Zustand $|1\rangle$, die lasenden Zustände sind kaum besetzt. Die Besetzung des Zustandes $|3\rangle$ ist dabei jedoch, anders als im 2-Niveau-Modell, stets größer als die des Zustandes $|2\rangle$. Dies ist damit zu erklären, dass der Zustand $|2\rangle$ nun nicht mehr der Grundzustand ist, sondern durch spontane Emission mit (bzgl. g und γ_{23}) relativ hoher Rate γ_{12} entleert wird. Die erzeugten Laserphotonen gehen fast vollständig durch Kavitätsverluste verloren, das emittierte Licht befindet sich im leicht sub-poissonischen Bereich. Mit zunehmender Pumprate beginnt die Besetzung der höheren Zustände die des Zustandes $|1\rangle$ zu überwiegen. Eine klar definierte Laserschwelle ist allerdings weder an der Kennlinie noch an der Besetzung der Niveaus zu erkennen. Lediglich n_3 weist, wie schon n_α im Falle des 2-Niveau-Modells, Wendepunkte auf, die Übergänge zwischen verschiedenen Bereichen andeuten, hier jedoch in deutlich schwächerer Ausprägung. Die Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ besitzt hingegen wie im Falle des 2-Niveau-Systems einen Buckel im Schwellenbereich, der hier aber deutlich weniger ausgeprägt ist (Das Maximum beträgt etwa 1.02, im Gegensatz zu 1.2 beim 2-Niveau-Modell). Im Bereich hoher Pumpraten ergibt sich für alle Größen eine Sättigung, das System befindet sich vorwiegend im oberen Laserniveau $|3\rangle$ und emittiert nahezu kohärentes Licht.

Der wichtigste Unterschied zum 2-Niveau-Modell besteht darin, dass kein Quenching auftritt. Der Grund dafür ist, dass die Prozesse des Pumpens und des Lasings voneinander entkoppelt sind und somit die Kohärenz der Laserniveaus nicht zerstört wird. Dies spiegelt sich auch in den Bewegungsgleichungen der Matrixelemente (6.6) wieder, in denen die Pumprate nur noch für die Elemente ρ_{11}^{nn} und ρ_{44}^{nn} eine Rolle spielt. Es ist allerdings zu erwähnen, dass durch ein eventuelles zweites Elektron im System eine Kopplung zwischen den lasenden und den gepumpten Zuständen hergestellt wird und erneut Quenching auftreten kann.

Die Sättigung der Photonenzahl entsteht dadurch, dass auch bei hohen Pumpraten das obere Laserniveau nur bis zu einem bestimmten Grad besetzt werden kann, obgleich eine nahezu vollständige

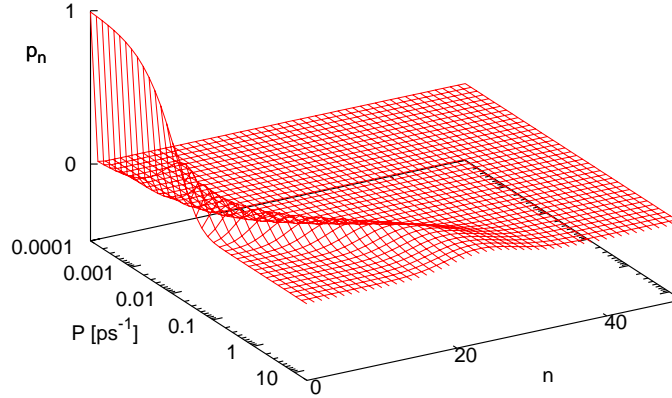


Abbildung 6.3: Photonenstatistik des 4-Niveau-Modells in Abhängigkeit von der Pumprate für $g = 0.1ps^{-1}$, $\kappa = \gamma_{23} = 0.01ps^{-1}$, $\gamma_{12} = \gamma_{34} = 1ps^{-1}$, $\gamma_{14} = 0ps^{-1}$.

Inversion der Laserniveaus durchaus möglich ist. Die Besetzungen werden unter anderem durch die Raten γ_{12} und γ_{34} der spontanen Emission beeinflusst; Bei einer endlichen Emissionsrate benötigt das System eine gewisse Zeit, um wieder in den Grundzustand $|1\rangle$ zu relaxieren bzw. um aus dem oberen Pumpniveau $|4\rangle$ in das obere Laserniveau überzugehen. Dies spielt gerade dann eine Rolle, wenn die Emissionsraten im Vergleich zu den anderen Raten g , γ_{23} und P klein sind. Die Abhängigkeit von der spontanen Emission zwischen den lasenden und nichtlasenden Zuständen wird im nächsten Abschnitt verdeutlicht werden.

6.4 Einfluss der spontanen Emission

Als nächstes soll die quantitative Abhängigkeit des Systems von der Kopplung zwischen lasenden und nichtlasenden Zuständen untersucht werden. Dazu wird jeweils eine der beiden Raten der spontanen Emission, γ_{12} und γ_{34} , konstant gehalten, während die andere variiert wird. Zuletzt werden Kennlinien für verschiedene Sätze identischer Emissionsraten mit der entsprechenden Kennlinie des 2-Niveau-Modells verglichen.

6.4.1 Variation von γ_{12}

Zunächst wird die Abhängigkeit des Systems von γ_{12} betrachtet. Dies ist die Rate, mit der das System nach stimulierter Emission eines Laserphotons oder durch spontane Emission in den Grundzustand $|1\rangle$ zurückkehrt, um erneut angeregt zu werden. Man würde also erwarten, dass die Besetzung des oberen Laserniveaus und die Anzahl der emittierten Photonen größer wird, je höher diese Rate ist. Tatsächlich verhält es sich jedoch anders: Wie in Abb. 6.4 zu erkennen ist, steigt der Sättigungswert der Photonenausbeute zuerst mit der Rate γ_{12} an, stagniert dann aber etwa bei $\gamma_{12} = 1ps^{-1}$ und nimmt darüber wieder stark ab. Die Ursache für dieses Verhalten findet man in den Gleichungen der Matrixelemente (6.6); Die Phasen ρ_{32}^{n+1n} enthalten einen Dämpfungsterm, der zu γ_{12} proportional ist. Folglich zerstört eine hohe Rate der spontanen Emission die Korrelation der Laserzustände und somit das Lasing, ähnlich dem Quenching des 2-Niveau-Modells. Die Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ verhält sich entsprechend; Während für mittlere Raten nahezu kohärentes Licht emittiert wird, verläuft $g^{(2)}(0)$ für $\gamma_{12} = 3ps^{-1}$ deutlich im super-poissonischen, weniger kohärenten Bereich, vgl. die Dekohärenz durch Quenching.

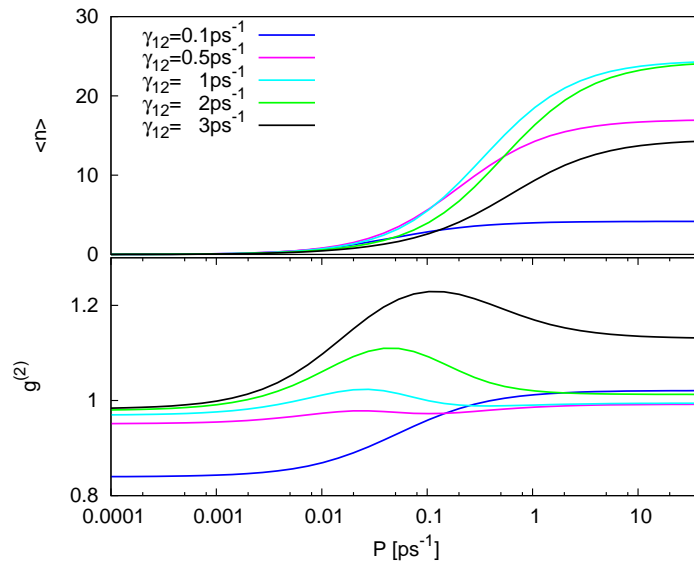


Abbildung 6.4: Kennlinien und Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung für verschiedene Werte von γ_{12} und $g = 0.1 ps^{-1}$, $\kappa = \gamma_{23} = 0.01 ps^{-1}$, $\gamma_{34} = 1 ps^{-1}$, $\gamma_{14} = 0 ps^{-1}$.

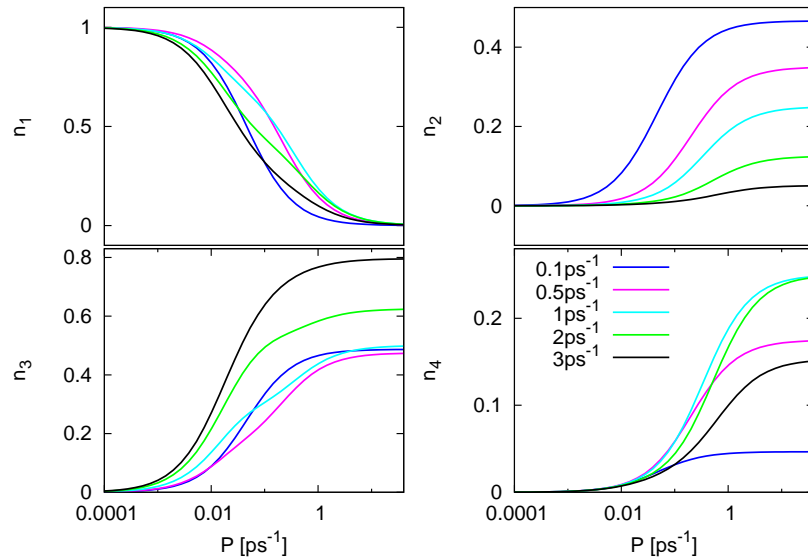


Abbildung 6.5: Besetzungswahrscheinlichkeiten n_1, n_2, n_3, n_4 für verschiedene Werte von γ_{12} und $g = 0.1 ps^{-1}$, $\kappa = \gamma_{23} = 0.01 ps^{-1}$, $\gamma_{34} = 1 ps^{-1}$, $\gamma_{14} = 0 ps^{-1}$.

Die Besetzung des oberen Laserniveaus wird wie erwartet bei großen Raten stark angehoben, die des unteren abgesenkt, siehe Abb. 6.5. Für sehr kleine Raten γ_{12} hingegen emittiert der Laser nur wenige Photonen und bewegt sich über weite Bereiche im deutlich sub-poissonischen Regime. Es werden hier nicht genügend Ladungsträger nachgeliefert, um die Besetzungsinversion aufrecht zu erhalten, und der Laser benötigt relativ lange, um nach einer Emission wieder angeregt zu werden. Dies ist auch an der geringen Besetzung des oberen Pumpniveaus und der relativ hohen Besetzung des unteren Laserniveaus zu erkennen und resultiert gemäß den Ausführungen in Kap. 3.3 im Antibunching der emittierten Photonen.

6.4.2 Variation von γ_{34}

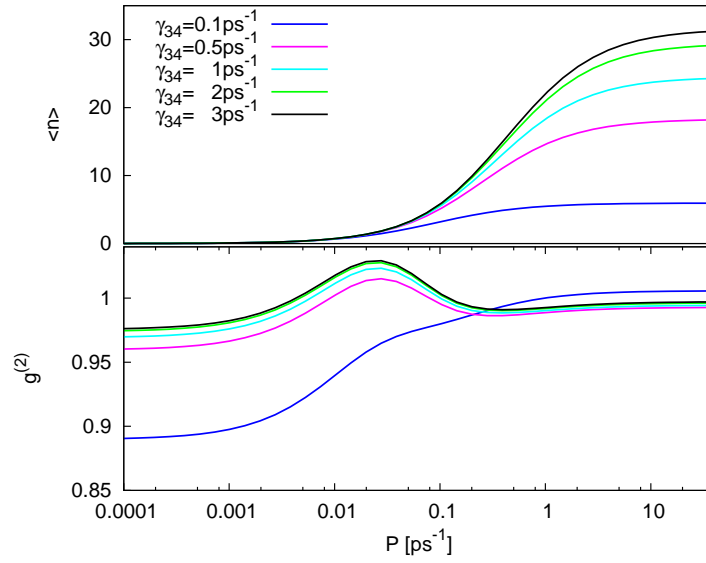


Abbildung 6.6: Kennlinien und Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung für verschiedene Werte von γ_{34} und $g = 0.1 ps^{-1}$, $\kappa = \gamma_{23} = 0.01 ps^{-1}$, $\gamma_{12} = 1 ps^{-1}$, $\gamma_{14} = 0 ps^{-1}$.

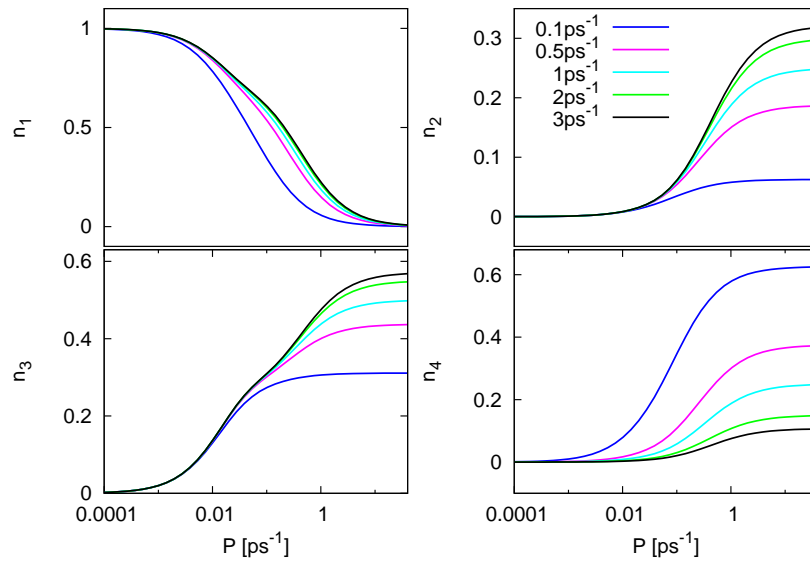


Abbildung 6.7: Besetzungswahrscheinlichkeiten n_1, n_2, n_3, n_4 für verschiedene Werte von γ_{34} und $g = 0.1 ps^{-1}$, $\kappa = \gamma_{23} = 0.01 ps^{-1}$, $\gamma_{12} = 1 ps^{-1}$, $\gamma_{14} = 0 ps^{-1}$.

γ_{34} ist die Rate, mit der das System vom oberen Pumpniveau $|4\rangle$ in das obere Laserniveau $|3\rangle$ relaxiert. Dementsprechend sollte die Photonenausbeute mit γ_{34} ansteigen, was durch die Rechnung bestätigt wird, siehe Abb. 6.6. In diesem Fall wird keine Dekohärenz erzeugt, daher können über das Anheben von γ_{34} insgesamt höhere Photonenzahlen erreicht werden als über das Anheben von γ_{12} . Die maximale Ausbeute wird durch die Besetzung der Laserniveaus begrenzt, welche durch $\sum_i n_i = 1$ beschränkt ist, sowie durch γ_{12} , welches bei großen γ_{34} als Flaschenhals wirkt. Die Korrelationsfunktion wird durch Variation von γ_{34} kaum beeinflusst, lediglich bei sehr kleinen Werten von γ_{34} emittiert das System über weite Bereiche deutlich sub-poissonisches Licht. Wie im vorigen Kapitel erläutert wird dann die erneute Anregung des Lasers nach Emission eines Photons durch die niedrige Rate γ_{34} verzögert, sodass Photonen-Antibunching entsteht.

Abb. 6.7 zeigt das Verhalten der Besetzungen der vier atomaren Zustände. Wie erwartet, steigen n_2 und n_3 mit γ_{34} , während n_4 abnimmt. Die Besetzung n_1 des unteren Pumpniveaus sinkt für hohe Pumpraten in jedem Fall auf 0.

6.4.3 Vergleich mit dem 2-Niveau-Modell

Abschließend werden, um an die Diskussion zur Einführung des 4-Niveau-Systems anzuknüpfen, die Kennlinie sowie die Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ des 4-Niveau-Modells für verschiedene Sätze von γ_{12} und γ_{34} mit den entsprechenden Graphen des 2-Niveaus-Lasers direkt verglichen, siehe Abb. 6.8 und 6.9. Die Raten werden gleich gewählt, um sie gemeinsam der maximalen Pumprate anzunähern und so die intuitive Vermutung der Ähnlichkeit beider Systeme für $\gamma \approx P$ zu überprüfen.

Für kleine Pumpraten verhalten sich die Kennlinien beider Systeme ähnlich, eine Laserschwelle ist in beiden Fällen nicht zu erkennen (siehe Abb. 6.8). Die Kennlinie des 2-Niveau-Modells steigt allerdings hinter dem Schwellenbereich, erkennbar an dem Buckel im Verlauf von $g^{(2)}(0)$, im Gegensatz zu der des 4-Niveau-Modells weiter an und erreicht an ihrem Maximum eine höhere Photonenzahl. Durch das Quenching sinkt die Photonenausbeute dann jedoch weit unter die des 4-Niveau-Modells, welche die bekannte Sättigung aufweist. Das 4-Niveau-Modell kann mit keiner Kombination von γ_{12} und γ_{34} eine vergleichbare maximale Photonenzahl erreichen, da zu große Werte von γ_{12} Dekohärenz erzeugen (siehe Kap. 6.4.1 und Gl. (6.6)) und bezüglich γ_{34} die Besetzung eine Begrenzung darstellt (siehe Kap. 6.4.2), sodass es die Dekohärenz nicht "ausgleichen" kann. Die Begrenzung durch die Besetzung würde ohne das Quenching auch beim 2-Niveau-Modell auftreten, allerdings bei einer weit höheren Photonenzahl. Offenbar gibt es also Raten γ_{12} und γ_{34} , für die sich die Systeme bestmöglich annähern und die hier etwa bei $2ps^{-1}$ liegen (natürlich unter der Annahme, dass beide Raten übereinstimmen). Die Systeme divergieren nicht nur, wie zu erwarten war, bei einer Verringerung der Emissionsraten, sondern auch bei einer Erhöhung, aus den oben genannten Gründen. Weitere Rechnungen ergeben, dass sich der Trend fortsetzt und bei Emissionsraten, die im Bereich der maximalen Pumprate liegen, nahezu keine Photonen im System vorhanden sind.

Der Verlauf von $g^{(2)}(0)$ zeigt für beide Systeme einen Buckel im super-poissonischen Bereich, außer bei sehr kleinen Emissionsraten, die durch Photonen-Antibunching gekennzeichnet sind, und sehr großen Emissionsraten, welche einen direkten Anstieg auf Werte nahe $g^{(2)}(0) = 2$ zur Folge haben. Das Verhalten bei hohen Pumpraten ist aufgrund des Quenching im 2-Niveau-System sehr verschieden. Die größte Übereinstimmung zwischen beiden Systemen besteht auch hier für die Raten $\gamma_{12} = \gamma_{34} = 2ps^{-1}$, darüber und darunter gibt es starke Abweichungen. Man beachte, dass mit zunehmenden Emissionsraten der ohnehin breite Schwellenbereich immer weiter aufweicht und für große Werte nicht mehr zu erkennen ist.

Die Ergebnisse zeigen, dass, auch abgesehen vom Quenching des 2-Niveau-Systems, die beiden Modelle keinesfalls übereinstimmen, solange nur die Emissionsraten γ_{12} und γ_{34} mit der Pumprate vergleichbar sind.

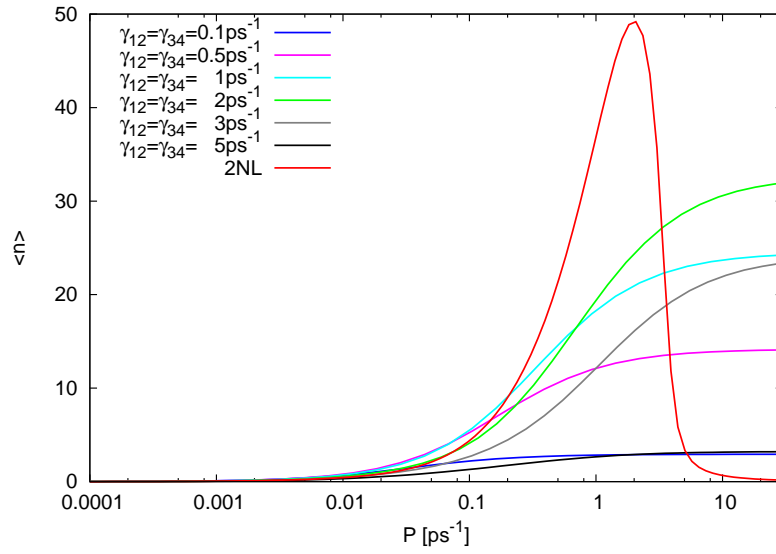


Abbildung 6.8: Kennlinien für verschiedene $\gamma_{12} = \gamma_{34}$ im Vergleich mit dem 2-Niveau-Modell (2NM) für $g = 0.1 \text{ ps}^{-1}$, $\kappa = \gamma_{23} = 0.01 \text{ ps}^{-1}$, $\gamma_{14} = 0 \text{ ps}^{-1}$.

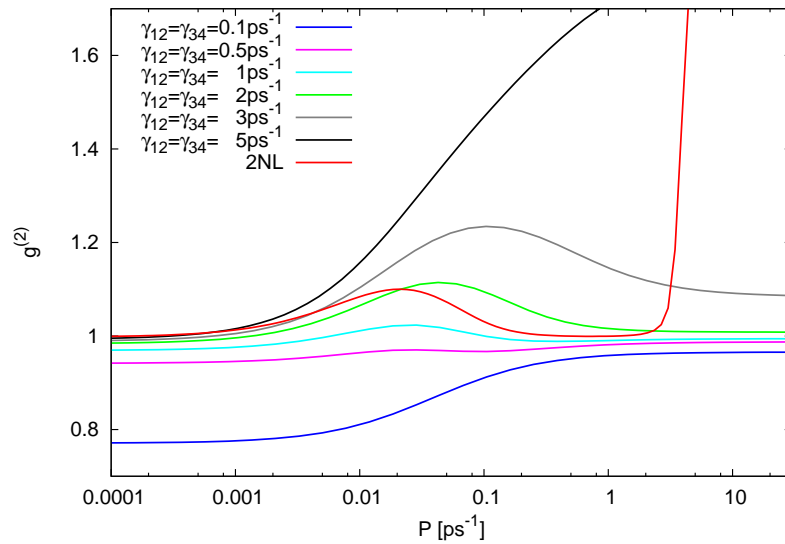


Abbildung 6.9: Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für verschiedene $\gamma_{12} = \gamma_{34}$ im Vergleich mit dem 2-Niveau-Modell (2NM) für $g = 0.1 \text{ ps}^{-1}$, $\kappa = \gamma_{23} = 0.01 \text{ ps}^{-1}$, $\gamma_{14} = 0 \text{ ps}^{-1}$.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der Arbeit war es, den Ein-Atom-Laser mit einem lasenden Übergang, bestehend aus zwei Energieniveaus, zu modellieren und sein statistisches Verhalten numerisch zu untersuchen.

Dazu wurde zunächst die Quantisierung elektromagnetischer Felder eingeführt. Die Jaynes-Cummings-Kopplung einer einzelnen Photonenmode an ein System aus zwei atomaren Energieniveaus wurde diskutiert. Schließlich wurden der Dichtematrix-Formalismus und darauf aufbauend die Grundlagen der Photonenstatistik beschrieben. Mithilfe dieser Grundlagen wurde die Herleitung der Liouville-von Neumann-Gleichung des Lasersystems in Wechselwirkung mit äußeren Reservoirs in einer Born-Markov-Näherung durchgeführt. Dabei wurden zwei Ansätze verschiedener Komplexität verfolgt: Das direkt inkohärent gepumpte 2-Niveau-System und das 4-Niveau-System mit einem Elektron sowie inkohärentem Pumpen und Lasing zwischen getrennten Zuständen. Beide Systeme dienen der Modellierung eines Ein-Atom-Lasers mit einem lasenden Übergang. Hierbei wird im 2-Niveau-System der Pumpvorgang stark vereinfacht durch Ankopplung an ein Reservoir, also als Lindblad-Term, modelliert, wohingegen er im 4-Niveau-System realistischer als Relaxation von einem äußeren gepumpten Niveau beschrieben wird.

Es ließen sich zunächst zwischen Ein-Atom-Lasern im Allgemeinen und konventionellen Lasern, bestehend aus vielen Emittlern, gravierende Unterschiede feststellen. Im Gegensatz zu konventionellen Lasern weisen Ein-Atom-Laser keine definierte Laserschwelle auf, sondern allenfalls einen Schwellenbereich, der sich nicht in der Kennlinie, sondern nur in der Photonenstatistik abzeichnet. Zudem erfolgt in der Photonenstatistik von Ein-Atom-Lasern kein Übergang von thermischem zu kohärentem Licht. Für bestimmte Sätze von Parametern kann allerdings die Ladungsträgerversorgung derart verzögert sein, dass das emittierte Licht starkes Photonen-Antibunching aufweist, die Photonen also tendenziell einzeln statt in Paketen auftreten.

Auch die zwei Modelle des Ein-Atom-Lasers lieferten zum Teil sehr verschiedene Ergebnisse. Im inkohärent gepumpten 2-Niveau-System zerstört zu starkes Pumpen die Kohärenz zwischen den lasenden Niveaus und drückt die Photonenzahl. Dieses als Quenching bezeichnete Phänomen tritt im 4-Niveau-System mit einem Elektron nicht auf, da dort die lasenden nicht mit den gepumpten Niveaus zusammenfallen. Stattdessen erreicht die Photonenzahl einen Sättigungswert, wie im Falle des konventionellen Lasers. Es wurde zudem untersucht, inwiefern beide Systeme quantitativ verglichen werden können, falls die Übergangsraten zwischen den gepumpten und den lasenden Niveaus im 4-Niveau-System der Pumprate entsprechen. Dabei zeigte sich, dass sie keinesfalls gleiche Ergebnisse liefern, den gleichen physikalischen Sachverhalt also sehr unterschiedlich beschreiben. Da es sich bei dem 2-Niveau-System um ein einfacheres und unrealistischeres Modell handelt, stellt sich nun die Frage nach seinen Anwendungsmöglichkeiten. Zum Verständnis der in dieser Arbeit diskutierten einfachen Phänomene wie der Jaynes-Cummings-Kopplung mit daraus folgenden Rabi-Oszillationen oder der Dephasierung durch Kontakt mit einem thermischen Reservoir ist das einfache Modell zweifellos geeignet. Auch kann es bereits qualitative Vorhersagen des 4-Niveau-Modelles vorwegnehmen, wie etwa das Fehlen einer definierten Laserschwelle und das Auftreten von Antibunching. Beim Quenching handelt es sich allerdings um einen Effekt, der nur dadurch entsteht, dass der Pumpvorgang über äußere Niveaus wie im 4-Niveau-Modell durch inkohärentes Pumpen der lasenden Niveaus simuliert wird. Ein experimenteller Ein-Atom-Laser wird sich nicht als inkohärent gepumptes 2-Niveau-System realisieren lassen, während 4-Niveau-Systeme sich als Lasermaterial gut eignen. Es ist also nicht zu erwarten, dass vom

2-Niveau-Modell vorausgesagte starke Quenching im Experiment zu beobachten, es stellt ein Artefakt des Modells dar und wäre ohnehin ein unerwünschter Nebeneffekt. Das 2-Niveau-Modell ist daher als einfacherer “Ersatz” des 4-Niveau-Modells zur vollständigen Beschreibung des Ein-Atom-Lasers nur bedingt geeignet.

Es wurde außerdem die sogenannte Cluster-Entwicklung als alternative Methode zur Behandlung des 2-Niveau-Modells eingeführt und in einigen Fällen bezüglich der Kennlinie sowie der Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ mit dem Dichtematrix-Formalismus verglichen. Bei dieser Methode wurde eine (prinzipiell unendliche) Hierarchie von gekoppelten Bewegungsgleichungen für die Korrelationen zwischen Erwartungswerten und ihren Faktorisierungen bis zu einer bestimmten Ordnung entwickelt. Da der Dichtematrix-Formalismus hingegen eine Theorie in unendlicher Ordnung darstellt, kann dies als Überprüfung der Genauigkeit der Cluster-Entwicklung angesehen werden.

Die Ergebnisse beider Methoden stimmten hinsichtlich der Kennlinien in den meisten Fällen gut überein, wiesen jedoch in den übrigen Fällen auffallend starke Abweichungen auf. Dabei wurde die Übereinstimmung nicht unbedingt mit zunehmender Ordnung verbessert. Bei $g^{(2)}(0)$ ergab sich stets im Schwellenbereich eine deutliche Abweichung, ansonsten konnte der Verlauf der Kurven durch die Cluster-Entwicklung gut reproduziert werden.

Wegen ihrer relativ geringen Anzahl stellen sich die Gleichungen der Cluster-Entwicklung als wesentlich weniger rechenintensiv heraus, können aber im Gegenzug keine direkten Informationen über die Photonenstatistik liefern. Zudem können sich bis in die vierte Ordnung (teils gravierende) Abweichungen von den Ergebnissen des Dichtematrix-Formalismus ergeben. Für die gleichzeitige Behandlung vieler Emitter kann sich die Methode dennoch als geeignete Alternative erweisen [9].

Auf den Ergebnissen dieser Arbeit aufbauend sind zahlreiche Verbesserungen und Erweiterungen denkbar; So wurden bereits bei der Herleitung der Liouville-von Neumann-Gleichung einige Näherungen gemacht, deren zentrale die Born-Markov-Näherung war. Die Exaktheit der Liouville-von Neumann-Gleichung könnte durch Weglassen der Markov-Näherung gesteigert werden. Das zeitliche Integral in Gl. (4.15) wäre dann nicht mehr analytisch zu lösen und müsste für jeden Zeitschritt bei der späteren Lösung der Bewegungsgleichungen numerisch ausgewertet werden, was einen enormen zusätzlichen Rechenaufwand bedeuten würde. Weiterhin wurde eine Näherung durchgeführt, in der die Reservoirwechselwirkung des Jaynes-Cummings-Hamiltonians durch Ersetzen von H_S mit H_{JC} in Gl. (4.36) vernachlässigt wurde. Auch wenn in dieser Arbeit keine Lösung vorgeschlagen werden kann, so wäre es doch wünschenswert, diese Näherung zu vermeiden, um ein besseres Modell zu erhalten.

Als mögliche Erweiterung kommt etwa das 4-Niveau-System mit mehreren Elektronen infrage, in dem auch die Coulomb-Wechselwirkungen zwischen den Elektronen berücksichtigt werden müssten. Des Weiteren könnten mehrere Emitter betrachtet werden, deren gegenseitige Wechselwirkung zu wiederum neuen Effekten wie der sogenannten Superradianz führt [2], [17].

Ein Punkt, der noch einer Vertiefung bedarf, ist die Analyse des Schwellenbereiches von Ein-Atom-Lasern und der damit verbundenen Buckel in der Korrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ (siehe etwa Abb. 5.5). Letztlich bietet die in dieser Arbeit nur kurz angeschnittene Cluster-Entwicklung Ansatzpunkte zur Untersuchung, vor allem in Hinblick auf das in dieser Arbeit angewandte System zur Faktorisierung von Erwartungswerten. So ist noch offen, inwiefern der Fehler der Faktorisierung vom Zustand des Systems, also etwa von der Photonenstatistik, abhängig ist. Damit verbunden ist die Frage, bis zu welcher Ordnung die Cluster-Entwicklung systembedingt entwickelt werden muss und in welcher Ordnung der Entwicklung die scheinbar willkürlichen starken Abweichungen vom Dichtematrix-Formalismus auftreten.

Literaturverzeichnis

- [1] N. Baer, C. Gies, J. Wiersig, and F. Jahnke. Luminescence of a Semiconductor Quantum Dot System. *Eur. Phys. J. B*, 50:411, 2006.
- [2] R. Bonifacio, P. Schwendimann, and F. Haake. Quantum Statistical Theory of Superradiance. *Physical Review A*, 4:302, 1971.
- [3] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2005.
- [4] R. H. Brown and R. Twiss. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 177:27–29, 1956.
- [5] H. J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999.
- [6] S. J. Chapman. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, Boston, 1998.
- [7] W. Demtröder. *Experimentalphysik 3*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [8] J. Fricke. Transport equations including many-particle correlations for an arbitrary quantum system: A general formalism. *Ann. Phys.*, 252:479, 1996.
- [9] C. Gies, J. Wiersig, M. Lorke, and F. Jahnke. Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers. *Phys. Rev. A*, 75:013803, 2007.
- [10] K. Jacobi. Atomic structure of InAs quantum dots on GaAs. *Progress in Surface Science*, 71:185, 2003.
- [11] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89, 1963.
- [12] J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, J. R. Buck, and H. J. Kimble. Experimental realization of a one-atom laser in the regime of strong coupling. *Nature*, 425:268, 2003.
- [13] Y. Mu and C. M. Savage. One-atom lasers. *Phys. Rev. A*, 46:5944, 1992.
- [14] W. Nolting. *Grundkurs theoretische Physik 5/2*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [15] M. Orszag. *Quantum Optics*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2000.
- [16] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [17] N. E. Rehler and J. H. Eberly. Superradiance. *Physical Review A*, 3:1735, 1971.
- [18] L. I. Schiff. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill Education, New York, 1968.
- [19] K. Schuh. Diploma thesis: Polaronen in Halbleiter-Quantenpunkten, 2008.
- [20] F. Schwabl. *Quantenmechanik*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [21] D. F. Walls and G. F. Milburn. *Quantum Optics*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2007.

Kapitel 8

Anhang

8.1 Numerische Methoden

Die zeitliche Integration der gekoppelten Bewegungsgleichungen der Matrixelemente in Gl. (4.43) bzw. (6.6) sowie der Erwartungswerte in der Cluster-Entwicklung (Gl. (5.18) bis (5.20)) erfolgte nach der Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung mit adaptiver Schrittweite [16]. Diese wurde mit Fortran 90 implementiert [6].

8.2 Rechnungen

8.2.1 Lösung der Gleichung (5.3)

Zur Berechnung der Lösung $\mathbf{R}_n = e^{M_n t} \mathbf{R}_{n,0}$ der Gleichung (5.3) muss zunächst die Matrix

$$M_n = i\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & g^* & -g \\ 0 & 0 & -g^* & g \\ g & -g & 0 & 0 \\ -g^* & g^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert werden. Dies geschieht durch Transformation in die Eigenbasis der Matrix. Die Spalten einer Matrix T^{-1} seien durch die Eigenvektoren von M_n gegeben, dann besitzt die Matrix D Diagonalform mit den Eigenwerten von M_n in entsprechender Reihenfolge auf der Diagonalen [3]:

$$D = T M_n T^{-1} \Rightarrow M_n = T^{-1} D T.$$

Mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion folgt

$$e^{M_n t} = 1 + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots = T^{-1} T + T^{-1} D T t + \frac{1}{2} T^{-1} D T T^{-1} D T t^2 + \dots = T^{-1} e^{D t} T. \quad (8.1)$$

Die Eigenvektoren und zugehörigen Eigenwerte von M_n werden mit Maple bestimmt, sodass für die einzelnen Matrizen folgt:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & |g|/g & -|g|/g \\ 0 & 1 & -|g|/g & |g|/g \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ g^*/g & 0 & -g^*/g & -g^*/g \end{pmatrix}, T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & g/|g| \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ g/2|g| & -g/2|g| & 1/2 & -g/2|g| \\ -g/2|g| & g/2|g| & 1/2 & -g/2|g| \end{pmatrix},$$
$$D = i\sqrt{n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2|g| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2|g| \end{pmatrix}, e^{D t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2i|g|t\sqrt{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2i|g|t\sqrt{n+1}} \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen in Gl. (8.1) und Gl. (5.3) folgt der Lösungsvektor (5.4).

8.2.2 Beweis von Gleichung (5.7)

Aus den berechneten Matrixelementen $\rho^n(t)$ für kleine n_0 lässt sich eine Vermutung über die allgemeine Form der Lösung treffen. Es ist zweckmäßig, die n_0 Matrixelemente $\rho^n(t)$ mit $n = n_0 - m$, $m = 0, 1, \dots, n_0 - 1$ zu indizieren. Dann ist die vermutete Verallgemeinerung:

$$\rho^{n_0-m}(t) = \binom{n_0}{m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} e^{-(n_0-j)\kappa t} (-1)^{m-j} = \binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^m$$

mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

und dem binomischen Lehrsatz. Der Ausdruck werde in die rechte Seite der ersten der Gleichungen (5.6),

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho^n = -\kappa n \rho^n + \kappa(n+1) \rho^{n+1},$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} & -\kappa(n_0 - m) \binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^m + \kappa(n_0 - m + 1) \binom{n_0}{m-1} (e^{-n_0\kappa t} - 1)^{m-1} \\ &= -n_0\kappa \binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^m + m\kappa \binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^m + m\kappa \binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^{m-1} \\ &= -n_0\kappa \binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^m + m\kappa \binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^{m-1} (e^{\kappa t} - 1 + 1) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\binom{n_0}{m} e^{-n_0\kappa t} (e^{\kappa t} - 1)^m \right) = \frac{\partial}{\partial t} \rho^{n_0-m}(t). \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wurde verwendet, dass

$$(n_0 - m + 1) \binom{n_0}{m-1} = (n_0 - m + 1) \frac{n_0!}{(m-1)!(n_0 - m + 1)!} = \frac{n_0!}{(m-1)!(n_0 - m)!} = m \binom{n_0}{m}$$

und im vorletzten Schritt die Produktregel für Ableitungen.

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Frank Jahnke für die Themenstellung, die freundliche Betreuung sowie die ausgezeichneten Vorlesungen in theoretischer Physik bedanken, die mein Interesse an der Materie besonders vertieft haben.

Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. Gerd Czycholl für seine Tätigkeit als Zweitgutachter dieser Arbeit.

Besonderer Dank gilt Sandra Ritter für die hervorragende und aufopferungsvolle Betreuung, für das aufmerksame Korrekturlesen und eine angenehme Büroatmosphäre. Ganz herzlich möchte ich mich auch bei Dr. Paul Gartner für die Beantwortung zahlreicher Fragen, das Korrekturlesen und nicht zuletzt seine Vorlesung über Quantenoptik bedanken, die mir sehr bei meiner Arbeit geholfen hat.

Dank gilt außerdem der gesamten Arbeitsgruppe *Theoretische Halbleiterphysik* für die gute Arbeitssphäre mitsamt netter Runden bei Kaffee und Kuchen.

Zuletzt bedanke ich mich bei meinen Kommilitonen, besonders bei Hendrik Geffers, Nils Neugebohrn und Claas Gloistein, für das gemeinsame Durchstehen von drei Bachelorjahren mit viel Arbeit und einer Menge Spaß zwischendurch.