

# Ultrastarke Kopplung zwischen einem supraleitenden Qubit und einem elektromagnetischen Resonator

—— Bachelorarbeit ——

Institut für theoretische Physik

Lukas Brunkhorst

Matrikelnr.: 2363246

[l.brunkhorst@uni-bremen.de](mailto:l.brunkhorst@uni-bremen.de)

Eingereicht am: 15. August 2012

Erstgutachter: Prof. Dr. Frank Jahnke

Zweitgutachter: Prof. Dr. Tim Wehling

*Beppo, dem Straßenkehrer.*

# Einleitung

Obwohl das für den Menschen sichtbare Licht nur einen verschwindend geringen Anteil im gesamten Spektrum elektromagnetischer Strahlung einnimmt, spannt seine Wechselwirkung mit Materie doch ein weites Arbeitsfeld für die Physik auf. Während die klassische Optik in der Antike in Form von rein geometrischen Betrachtungen ihre Anfänge fand und bis heute in der Beschreibung makroskopischer Phänomene existiert, ist es seit einem Jahrhundert vor allem die Teilchennatur des Lichts, die im Rahmen der Quantenoptik den Ausgangspunkt für die theoretische Beschreibung vieler mikroskopischer Phänomene der Licht-Materie-Wechselwirkung bildet. Als prominentestes Beispiel für die technische Nutzung der auf diesem Wege entwickelten Modelle steht der so allgemeine wie vielfältige Begriff des Lasers, der im Jahr 2010 sein 50-jähriges Jubiläum feierte. Der grundlegende Prozess, die stimulierte Emission kohärenter, monochromatischer Lichtstrahlen, und seine Umsetzung in unterschiedlichsten Systemen von Hochfrequenz-Lasern bis Leuchtdioden ist ein Sinnbild für die bedeutungsvollen Eigenschaften und in ihrem technologischen Potential vielversprechende, lange nicht ausgereizte Bedeutung der Licht-Materie-Wechselwirkung. Und doch war man bis Anfang der 90er Jahre [1] davon ausgegangen, dass die Kopplung zwischen Licht und Materie verglichen mit den Wechselwirkungen innerhalb des Festkörpers um Größenordnungen schwächer ist. Erst im Verlauf der letzten zwanzig Jahre wurde erkannt, wie in mikroskopischen, lichteinschließenden Kristallstrukturen die Licht-Materie-Kopplung so stark werden kann, dass Licht und Materie Mischzustände eingehen. Die dann auftretenden neuartigen Effekte lassen sich weder den Eigenschaften der Materie noch des Lichts allein, sondern einzig jenen eigener Quasiteilchen, der Polaritonen zuschreiben.

Ein zweites, ursprünglich vollständig unabhängiges Feld wird durch die rasante Entwicklung der Informationstechnologie aufgespannt, welche die Herstellung immer komplexerer, komprimierter elektronischer Schaltkreise erfordert, um die Manipulation der grundlegenden binären Informationseinheiten, den Bits, möglichst effizient zu gestalten. Die jüngste Vision in dem Streben nach immer größeren Speichereinheiten und höheren Taktgeschwindigkeiten auf Chips mit möglichst kleinen Ausdeh-

nungen wird im Feld des Quantencomputings verfolgt. Unter Ausnutzung des quantenmechanischen Phänomens der Verschränkung ist das Ziel die Umsetzung von Rechenoperationen mit Qubits. Als quantenmechanische Analoga der klassischen Bits sind dies Systeme, für deren effektive Beschreibung zwei Zustände ausreichen. Eine mögliche Realisierung solcher Qubits, deren Erforschung erst mit Beginn dieses Jahrhunderts einsetzte, beruht auf dem Phänomen der Supraleitung, einer Eigenschaft, die Materie bei sehr niedrigen Temperaturen nur weniger Kelvin entwickeln kann. Bei solch tiefen Temperaturen vollziehen die Elektronen einen Phasenübergang, der sie in einen kollektiven, makroskopischen Zustand überführt, in dem sie sich reibungsfrei durch den Festkörper bewegen können. Unter Voraussetzungen, die in dieser Arbeit näher erläutert werden, kann das magnetische Moment solcher Supraströme Qubit-Charakter entwickeln, um dann ähnlich wie ein atomares Zweiniveausystem an ein elektromagnetisches Feld zu koppeln. Die Situation bringt es mit sich, dass sich die Energieskalen in solchen Systemen supraleitender Schaltkreise unterhalb jener des sichtbaren Spektrums befinden. Trotzdem können sie mit jenen Modellen beschrieben werden, die kanonischen Charakter in der Quantenoptik einnehmen. Der wesentliche Unterschied ist jedoch, dass supraleitende Schaltkreise nicht mehr im Regime schwacher oder starker Kopplung mit dem elektromagnetischen Feld wechselwirken. Nicht zuletzt aufgrund der heute hochpräzisen Methoden in der Chipfertigung und der damit verbundenen Möglichkeit zur gezielten Einflussnahme auf die Systemparameter, kann in supraleitenden Schaltkreisen erstmalig eine Licht-Materie-Kopplung realisiert werden, deren Größe vergleichbar mit den Übergangsenergien innerhalb der getrennten Systeme von Festkörper und Feld wird. Für solch intensive Wechselwirkung wird der Begriff *Ultrastarke Kopplung* verwendet. Dieses Regime bietet die Perspektive mannigfaltiger unbekannter Phänomene, deren Verständnis für die erfolgreiche Implementierung eines supraleitenden Qubits unabdingbar ist. Neben den dabei auftretenden technischen Schwierigkeiten, ist es in der theoretischen Analyse besonders der notwendige Verzicht auf die üblicherweise zur Beschreibung schwächer ans elektromagnetische Feld koppelnder Zweiniveausysteme herangezogene Rotating Wave Approximation, der neue Ansätze fordert. Doch trotz der Herausforderungen, die die ultrastarke Licht-Materie-Kopplung mit sich bringt, wurden bereits erfolgreich erste logische Operationen mit supraleitenden Qubits durchgeführt.

Obwohl ein Schwerpunkt auf die Modellbildung gesetzt wird, kann die vorliegende Arbeit lediglich eine elementare Einführung in die Funktionsweise und einen Überblick über die gängige Beschreibung des Verhaltens der Qubit-Systeme geben. Ein zweiter Fokus liegt auf der numerischen Auswertung der so gefundenen Modelle. Der Leitgedanke eines stetigen Transfers ausgehend vom Verständnis der ele-

mentaren phänomenologischen Bausteine über die Methoden der mathematischen Beschreibung bis hin zur expliziten Anwendung auf experimentelle Befunde war maßgeblich für die Gliederung dieser Arbeit. Um die Orientierung an der konkreten Realisierung der Systeme nicht zu verlieren, wurde dabei soweit wie möglich auf eine erschöpfende Darstellung der den vorgestellten Theorien zugrundeliegenden mathematischen Strukturen verzichtet. Insbesondere die im ersten Kapitel angestellten Überlegungen zur Supraleitung werden der Komplexität dieses Phänomens und seiner theoretischen Beschreibung nicht näherungsweise gerecht. Und doch reichen sie aus, um die Josephson-Effekte und damit das konstituierende Element supraleitender Qubits in seinen Grundzügen zu verstehen. Indem das zweite Kapitel die einfachsten Regeln klassischer elektronischer Schaltkreise einführt, schafft es, die zwei kanonischen Realisierungen supraleitender Qubits zu begründen. Nach einer Einbettung der bis dahin gesammelten Erkenntnisse in einen mathematischen Apparat während des vierten Kapitels, schließt eine ausführliche und konkretisierende Diskussion unter Einbeziehung numerischer Befunde die Darstellungen ab.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>1 Supraleitung als makroskopische Eigenschaft</b>	<b>6</b>
1.1 Dynamik des Ordnungsparameters . . . . .	7
1.2 Verdrängung und Quantisierung des magnetischen Flusses . . . . .	9
1.3 Josephson-Effekt . . . . .	11
<b>2 Supraleitende Schaltkreise &amp; ihre Qubit-Eigenschaften</b>	<b>14</b>
2.1 Kanonische Quantisierung . . . . .	14
2.2 Die Cooper-Paar-Box . . . . .	18
2.3 Das Fluss-Qubit . . . . .	21
<b>3 Qubit-Feld-Wechselwirkung</b>	<b>25</b>
3.1 Hamiltonoperator der freien Systeme . . . . .	25
3.2 Kopplung . . . . .	29
3.3 Zustandsbeschreibung . . . . .	33
<b>4 Analytische und numerische Diskussion</b>	<b>36</b>
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>49</b>
<b>A Hamiltonoperator im elektromagnetischen Feld</b>	<b>51</b>
<b>Nachwort</b>	<b>56</b>
<b>Danksagung</b>	<b>57</b>

# Kapitel 1

## Supraleitung als makroskopische Eigenschaft

Das Phänomen, dass ein Metall unterhalb einer materialspezifischen Temperatur seinen elektrischen Widerstand verliert, resultiert aus einer komplexen Wechselwirkung zwischen Kristallgitter und Elektronen, die erst 1957 von Bardeen, Cooper und Schrieffer auf mikroskopischer Ebene beschrieben wurde [2]. Grundlage ist hier die Entdeckung, dass je zwei Elektronen unterhalb einer kritischen Temperatur über Anregung von Gitterschwingungen zu einem *Cooper-Paar* gebunden werden und so als Bosonen zum Ladungsstrom beitragen können.

Eine makroskopische Beschreibung war zu diesem Zeitpunkt im Rahmen der *Ginzburg-Landau-Theorie* (GL-Theorie) bereits gelungen und hatte die Bedeutung der Supraleitung als kollektives Phänomen herausgestellt. Postuliert wird im Rahmen der GL-Theorie ein komplexwertiger, makroskopischer *Ordnungsparameter*, der den kollektiven Zustand des betrachteten Systems beschreibt.

$$\boxed{\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}} \quad (1.1)$$

$$\psi_0, \varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dabei ist  $\psi_0^2(\mathbf{r})$  die Cooper-Paar-Dichte  $\rho(\mathbf{r})$ , beschreibt also die räumliche Verteilung jener Ladungsträger, die zur Supraleitung beitragen.  $\Psi$  ist deshalb nicht auf 1 normiert, was den semiklassischen Charakter der GL-Theorie unterstützt. Das Integral des Ordnungsparameters über einen Raumbereich kommt vielmehr der darin befindlichen Gesamtzahl  $N$  an Cooper-Paaren gleich:

$$\int d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2 = \int d^3\mathbf{r} \psi_0^2(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = N \quad (1.2)$$

Allein auf der Grundlage des Postulats eines Ordnungsparameters dieser Form lassen sich alle folgenden Aussagen treffen und somit supraleitende Schaltkreise verstehen.

Wie in (1.1) und (1.2) die Zeitabhängigkeit implizit angenommen werden muss, sei im Folgenden zusätzlich auf die explizite Angabe der Ortsabhängigkeit verzichtet.

## 1.1 Dynamik des Ordnungsparameters

Für die makroskopische Wellenfunktion  $\psi$  des Supraleiters muss die Kontinuitätsgleichung gelten,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (1.3)$$

woraus mit der Cooper-Paar-Dichte  $\rho = |\psi|^2 = \psi^*\psi$  für die Stromdichte  $\mathbf{j}$  folgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi + \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*) \quad (1.4)$$

Einsetzen der Schrödingergleichung  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}\psi$  bzw.  $-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^* = (\hat{H}\psi)^*$  führt zunächst auf

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{i}{\hbar}(\psi^* \hat{H}\psi - \psi(\hat{H}\psi)^*). \quad (1.5)$$

Im Anhang unter A befindet sich eine Herleitung und Diskussion des Hamiltonoperators für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld. Das Ergebnis ist

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi. \quad (1.6)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{A}$  das Vektorpotential und  $\Phi$  das elektrostatische Potential. Die Gestalt von (1.5) bedingt, dass die Stromdichte sich indifferent gegenüber jeglichen skalaren Anteilen im Hamiltonoperator verhält, da diese mit den Wellenfunktionen in der Ortsbasis kommutieren. Die vom Teilchenimpuls unabhängigen, reinen Feldanteile  $q^2\mathbf{A}^2/2m$  und  $q\Phi$  in (1.6) fallen also heraus:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j} &= \frac{i}{2m\hbar} \psi^* \left[ \hat{\mathbf{p}}^2 - q(\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \right] \psi + \text{k. K.} \\ &= \frac{1}{2m} \psi^* \left[ \frac{\hbar}{i} \Delta - q(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) \right] \psi + \text{k. K.} \\ &= \frac{\hbar}{2mi} \left[ \psi^* \Delta \psi - \psi \Delta \psi^* \right] - \frac{q}{2m} \left[ \psi^* (\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) \psi + \psi (\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) \psi^* \right] \\ &= \frac{\hbar}{2mi} \nabla \cdot \left[ \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^* \right] - \frac{q}{2m} \left[ 2\psi^* \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + 2\psi^* (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi + 2\psi (\mathbf{A} \cdot \nabla) \psi^* \right] \\ &= \frac{1}{2m} \nabla \cdot \left[ \frac{\hbar}{i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - 2q\psi^* \psi \mathbf{A} \right]. \end{aligned}$$

Keinen Einfluss hat ebenfalls die Addition eines beliebigen weiteren Potentials zum Hamilton-Operator, solange es nicht geschwindigkeits- und damit impulsabhängig ist und somit nichtkommutierende Terme erzeugt. Mit dieser Einschränkung und



nach Verzicht auf eine globale Konstante, die bei der Ortsableitung wegfiel, folgt für die quantenmechanische Ladungsstromdichte  $q\mathbf{j}$  im elektromagnetischen Feld:

$$\boxed{q\mathbf{j} = \frac{q\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{q^2}{m}|\psi|^2\mathbf{A}} \quad (1.7)$$

Nach Einsetzen wird sofort sichtbar, dass Gl. (1.7) eichinvariant ist, also unverändert bleibt bei Transformationen

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi e^{iq\chi/\hbar} \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi \end{aligned} \quad (1.8)$$

mit beliebiger skalarer Eichfunktion  $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$ . Das bedeutet auch, dass der hier hergeleitete Ausdruck für die Stromdichte direkt mit den im System physikalisch messbaren Strömen korrespondiert.

Für das Kondensat von Cooper-Paaren im Supraleiter mit der makroskopischen Wellenfunktion  $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$  aus (1.1) ist die Einheitsladung  $q = -2e$  und damit

$$\begin{aligned} -2e\mathbf{j} &= -\frac{e\hbar}{mi} \left[ \psi^*(e^{i\varphi}\nabla\psi_0 + i\psi\nabla\varphi) - \psi(e^{-i\varphi}\nabla\psi_0 - i\psi^*\nabla\varphi) \right] - \frac{4e^2}{m}\psi_0^2\mathbf{A} \\ &= -\frac{2e}{m}\psi_0^2(\hbar\nabla\varphi + 2e\mathbf{A}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Diese Beziehung ist als *Londonsche Gleichung* bekannt. Bemerkenswert ist, dass die Stromdichte nur von der Phase des makroskopischen Ordnungsparameters, nicht aber von der Ladungsträgerdichte abhängt. Für die Änderung dieser Phase auf einem infinitesimalen Wegstück  $d\mathbf{r}$  durch das supraleitende Material gilt nach Umstellen obiger Gleichung:

$$\boxed{d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \nabla\varphi = \frac{m}{\hbar\psi_0^2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{j} - \frac{2e}{\hbar} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}} \quad (1.10)$$

Diese Gleichung ist grundlegend für die Wirkung von Magnetfeldern in Supraleitern und bildet so die Basis für die Beschreibung der Josephson-Phänomene.

## 1.2 Verdrängung und Quantisierung des magnetischen Flusses

Die Frage nach der Phasendifferenz zweier Punkte  $A$  und  $B$  in einem Supraleiter ist zu beantworten durch die Integration von (1.10) entlang eines Weges, der  $A$  als Anfangs- und  $B$  als Endpunkt besitzt. Wege mit dieser Eigenschaft gibt es jedoch unendlich viele. Um die Abhängigkeit vom Integrationsweg kenntlich zu machen, sei deshalb die folgende Schreibweise eingeführt:

$$\delta\varphi := \int_{\gamma} d\varphi \quad (1.11)$$

Dabei ist im Allgemeinen natürlich stets die Angabe des Integrationspfades  $\gamma$  nötig. Für den Fall aber, dass Anfangs- und Endpunkt aufeinander fallen ( $A = B$ ), lässt sich auch ohne weitere Spezifikation des Integrationspfades feststellen, dass die Phasendifferenz ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  betragen muss. Denn andernfalls wäre ein grundlegendes Postulat der Quantenmechanik verletzt: Die Eindeutigkeit der Wellenfunktionen.

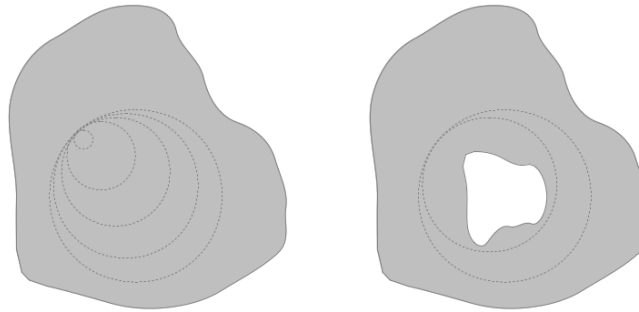


Abbildung 1.1: Flussverdrängung (links) und Flussquantisierung (rechts)

Bildet der Integrationspfad den Rand  $\partial F$  einer Fläche  $F$ , so gilt demnach

$$\delta\varphi = \oint_{\partial F} d\varphi = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Ist nun  $\mathbf{j} = 0$  auf ganz  $\partial F$ , so lässt sich  $\delta\varphi$  durch Einsetzen von (1.10) und mithilfe des Stokes'schen Satzes mit dem magnetischen Fluss  $\Phi$  durch  $F$  identifizieren:

$$\delta\varphi = -\frac{2e}{\hbar} \int_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = -\frac{2e}{\hbar} \int_F d^2\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{2e}{\hbar} \int_F d^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \equiv -\frac{2e}{\hbar} \Phi \quad (1.13)$$

Definiert man den Einheitsfluss

$$\Phi_0 := \frac{h}{2e}, \quad (1.14)$$

so lässt sich (1.13) schreiben als

$$\delta\varphi = -2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (1.15)$$

und nach Gleichsetzen von (1.12) mit (1.15) folgt die Quantisierungsbedingung an den magnetischen Fluss  $\Phi$ :

$$\boxed{\Phi^{(n)} = -n\Phi_0} \quad (1.16)$$

$$n \in \mathbb{N}$$

Im Falle eines einfach zusammenhängenden, supraleitenden Gebietes ergibt sich allein aus dieser Erkenntnis, dass  $n = 0$  sein muss [3]. Die Begründung ist, dass die Phasenänderung bei einer infinitesimalen Variation des Integrationsweges nicht um einen endlichen Wert springen darf, jeder Integrationsweg in einem solchen Gebiet aber kontinuierlich in einen Pfad verschwindender Länge zusammengezogen werden kann (Abb. 1.1 links). Weil dieses Integral aber gleich Null ist, muss der Fluss durch ganz  $F$  verschwinden. Dieses Phänomen ist der *Meißner-Ochsenfeld-Effekt*. Auf dem hier beschrittenen Weg stellt sich dieser als Spezialfall des Prinzips der Flussquantisierung dar.

Von Bedeutung ist, dass die Verdrängung der Magnetfelder aus dem Inneren des Supraleiters nur bis auf eine Eindringtiefe  $\lambda$  geschieht. Dies wird sichtbar durch Anwendung der Rotation auf die London'sche Gleichung (1.9), was zunächst den Phasengradienten eliminiert,

$$\frac{m}{\psi_0^2} \nabla \times \mathbf{j} = 2e \mathbf{B} , \quad (1.17)$$

und mit der Rotation des Maxwell'schen Durchflutungsgesetz im Leiter ( $\mathbf{E} = 0$ )

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} \stackrel{\nabla \cdot \mathbf{B}=0}{=} -\Delta \mathbf{B} = -2e\mu \nabla \times \mathbf{j} , \quad (1.18)$$

in die Differentialgleichung für exponentiellen Zerfall übergeht:

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{4e^2 \mu \psi_0^2}{m} \mathbf{B} \quad (1.19)$$

Die charakteristische Länge, auf der Magnetfelder am Rand eines Supraleiters verschwinden, ist als *London'sche Eindringtiefe* bekannt:

$$\lambda := \sqrt{\frac{m}{4e^2 \mu \psi_0^2}} \quad (1.20)$$

Der Grund für die Flussverdrängung ist die Entstehung der Supra-Oberflächenströme, die dem äußeren Magnetfeld durch die Erzeugung eigener Magnetfelder entgegenwirken.

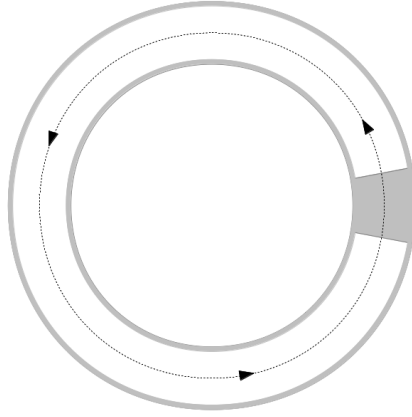


Abbildung 1.2: Supraleitender Ring mit kleinem Bereich geringerer Cooper-Paar-Dichte. In den grauen Bereichen fließt ein Suprastrom.

Auf nicht einfach zusammenhängenden Gebieten (Abb. 1.1 rechts) kann nicht mehr jeder Integrationspfad kontinuierlich zusammengezogen werden, sodass (1.16) ohne Einschränkung von  $n$  gültig bleibt. Die Oberflächenströme  $I$  setzen über die Induktivität  $L$  jeder Erhöhung des äußeren magnetischen Flusses einen gleichhohen Gegenbetrag  $LI$  entgegensetzen, sodass erst die Differenz  $\Phi$  aus äußerem und innerem magnetischen Fluss der Quantisierungsbedingung (1.16) genügen muss:

$$\Phi = \Phi_{ex} - LI = n\Phi_0 \quad (1.21)$$

Die bis zu diesem Punkt angestellten Überlegungen werden der Natur der Supraleitung nicht annähernd gerecht. Trotzdem reichen sie für die folgende Diskussion bereits aus. Eine erweiterte Vorstellung der Grundlagen der Supraleitung findet sich zum Beispiel in [4].

### 1.3 Josephson-Effekt

In einen kleinen Bereich geringer Cooper-Paar-Dichte, der einen supraleitenden Ring an einer Stelle unterbricht (Abb. 1.2), dringen von beiden Seiten Elektronen ein, sodass durch den Ring kein Integrationspfad mehr geschlossen werden kann, auf dem überall  $\mathbf{j} = 0$  gilt. Ein solcher Bereich wird als Josephson-Kontakt (JK) bezeichnet. Das Integral der London-Gleichung (1.10) über den JK ergibt eine Phasendifferenz

$$\gamma = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2e}{\hbar} \int_1^2 \mathbf{dr} \cdot \mathbf{A} \quad (1.22)$$

zwischen seinen zwei Enden 1 und 2.  $\varphi_2 - \varphi$  ist dabei der Anteil, der dem als Josephson-Strom  $I_J$  bezeichneten Tunnelstrom von Cooper-Paaren über den Kon-

takt geschuldet ist. Bei festem äußerem Magnetfeld, also auch festem  $\mathbf{A}$ , lässt sich der Strom über den Kontakt damit als Funktion von  $\gamma$  verstehen:

$$I_J = I_J(\gamma) \quad (1.23)$$

Die Phasendifferenz  $\gamma$  ist allerdings nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  bestimmt. Weil sich diese Unbestimmtheit nicht auf den Josephson-Strom  $I_J$  übertragen darf, der ja physikalisch messbar ist, bedeutet dies, dass  $I_J$  periodisch in eben diesen Intervallen sein muss. Dann ist er aber in einer Fourierreihe folgender Form darstellbar:

$$I_J = \sum_{n=0}^{\infty} = I_n \sin(n\gamma) + \tilde{I}_n \cos(n\gamma) \quad (1.24)$$

Weiter einschränken lässt sich die gesuchte Funktion durch ein Symmetrieargument: Bei Zeitumkehr wird sich die Stromrichtung umkehren, gleichzeitig jedoch auch die Phasendifferenz  $\gamma$  ihr Vorzeichen wechseln:

$$-I_J(\gamma) = I_J(-\gamma) \quad (1.25)$$

Dies hat zur Folge, dass in (1.24) lediglich die ebenfalls ungeraden Sinusglieder in Betracht kommen, also alle  $\tilde{I}_n = 0$  sein müssen. Für die *erste Josephson-Gleichung* wird abschließend eine schnelle Konvergenz der obigen Fourierreihe vorausgesetzt, sodass nur der erste Term beachtet wird:

$$\boxed{I_J = I_k \sin(\gamma)} \quad (1.26)$$

$I_k$  ist der größtmögliche Strom, der durch den Josephson-Kontakt fließen kann und wird deshalb als *kritischer* Strom bezeichnet. Er korrespondiert mit  $\gamma = \pi/2$  und ist proportional zur Fläche des Kontakts sowie exponentiell fallend mit dessen Länge. Direkt verbunden mit dem kritischen Strom ist die zweite charakteristische Größe eines Josephson-Kontakts, die Josephson-Energie

$$E_J = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_k. \quad (1.27)$$

Diese ist ein Maß für den Energieaufwand, den ein Cooper-Paar leisten muss, um den Kontakt zu durchtunneln.

Die *zweite Josephson-Gleichung* leitet sich direkt aus (1.21) und dem Faraday'schen Induktionsgesetz ab,

$$U = -\frac{d\Phi_{ex}}{dt}, \quad (1.28)$$

und lautet

$$\boxed{\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{2\pi}{\Phi_0} U} \quad (1.29)$$

Sie stellt einen Zusammenhang zwischen der Phasenänderung und der Spannung her, die am Kontakt abfällt. Ein konstanter Phasensprung am Josephson-Kontakt führt zu einer reinen Wechselspannung. Umgekehrt bedeutet eine konstante Spannung, dass die Phasendifferenz am Kontakt mit der Zeit linear anwächst.

# Kapitel 2

## Supraleitende Schaltkreise & ihre Qubit-Eigenschaften

Um zu einer quantenmechanischen Beschreibung von supraleitenden Schaltkreisen zu gelangen, wird – ausgehend von den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts – im folgenden das Verfahren der kanonischen Quantisierung auf die bekannten klassischen Zusammenhänge für elektronische Schaltungen angewandt. Dazu reicht es zunächst aus, die Wirkung eines einzelnen Josephson-Kontakts zu analysieren. Die Identifizierung verschiedener Regime führt dann auf eine Unterscheidung entsprechender Umsetzungen supraleitender Qubits. Diese werden in ihrer Bauart und Funktionsweise vorgestellt. Wesentliche Teile dieses Kapitels orientieren sich an [5].

### 2.1 Kanonische Quantisierung

Ein Josephson-Kontakt (JK) in einem ansonsten supraleitenden, geschlossenen Stromkreis der Stromstärke  $I$  und Induktivität  $L$  wird einerseits von dem Tunnelstrom  $I_J = I_k \sin(\gamma)$  passiert. Gleichzeitig wirkt er aber als Kapazität  $C$ , die von einem Strom  $I_C$  geladen wird, schließlich separiert er zwei Bereiche höherer Ladungsträgerdichte. Mit diesem Modell eines JK gilt nach Kirchhoff:

$$I = I_J + I_C \tag{2.1}$$

Ohne Spannungsquelle ist in Gegenwart eines Magnetfeldes allein der magnetische Fluss die Ursache für den fließenden Strom. Wie im vorhergehenden Kapitel deutlich wurde, kann wegen der Flussquantisierung in einem Supraleiter der Strom allerdings nicht wie üblich direkt proportional zum von außen angebrachten magnetischen Fluss  $\Phi_{ex}$  sein, denn dieser kann beliebig und kontinuierlich variiert werden. Es ist erst die Differenz aus externem und durch den Phasensprung am JK verursachten

magnetischen Fluss, der über die Induktivität  $L$  den Strom  $I$  induziert:

$$LI = \Phi_{ex} - \Phi = \Phi_{ex} - \frac{\Phi_0}{2\pi}\gamma \quad (2.2)$$

Diese Beziehung ist bekannt aus der verallgemeinerten Quantisierungsbedingung (1.21), wobei hier das  $n$  aus  $\Phi = n\Phi_0$  nur noch implizit in  $\gamma$  enthalten ist. Im Bild des JKs als Kapazität  $C$  gilt für die Ladung wie an jedem geladenen Kondensator

$$Q = CU, \quad (2.3)$$

und damit für den Ladestrom

$$I_C = \frac{\partial}{\partial t}Q = C \frac{\partial}{\partial t}U. \quad (2.4)$$

Mit der zweiten Josephson-Gleichung (1.29) geht dies schließlich über in

$$I_C = C \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma = C \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi. \quad (2.5)$$

Die erste Josephson-Gleichung (1.26) zusammen mit den nun hergestellten Bezie-

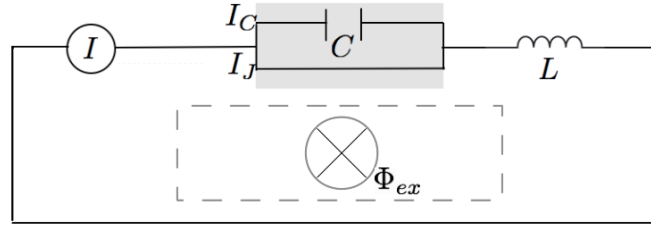


Abbildung 2.1: Allgemeines Modell eines supraleitenden Stromkreises der Induktivität  $L$ . Es fließt der Suprastrom  $I$ , der zu einem Teil den Josephson-Kontakt (grau) als Tunnelstrom  $I_J$  passiert. Ein äußeres Magnetfeld erzeugt den magnetischen Fluss  $\Phi_{ex}$ .

hungen (2.2) und (2.4) übersetzt die Kirchhoffsche Knotenregel (2.1) dann in eine Bewegungsgleichung für den magnetischen Fluss:

$$\boxed{C \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + I_k \sin(2\pi\Phi/\Phi_0) + \frac{\Phi - \Phi_{ex}}{L} = 0} \quad (2.6)$$

Diese Bewegungsgleichung beschreibt in der Sprache der klassischen Elektrodynamik ganz allgemein einen supraleitenden LC-Schwingkreis, der einen Josephson-Kontakt enthält. Quantenmechanische Effekte berücksichtigt sie noch nicht. Diese können aber durchaus relevant werden, wenn ein solcher Schaltkreis auf der  $\mu\text{m}$ -Skala realisiert wird. Um zu einer auch dann noch gültigen Beschreibung zu gelangen, ist das Verfahren der *kanonischen Quantisierung* durchzuführen, das die obige Bewegungsgleichung als Ausgangspunkt nimmt, um zum Hamiltonoperator des Systems



zu gelangen.

Die einzige Variable der Bewegungsgleichung (2.6) ist der magnetische Fluss  $\Phi$ , der gleichbedeutend ist mit der Josephson-Phase  $\gamma = 2\pi\Phi/\Phi_0$ . Die kanonische Quantisierung geht allerdings vom Phasenraum aus, in dem die zeitliche Flussänderung  $\dot{\Phi}$  als zweite Koordinate des Systems fungiert. Damit ist die Bewegungsgleichung nur noch von erster Ordnung:

$$C \frac{\partial}{\partial t} \dot{\Phi} + I_k \sin(2\pi\Phi/\Phi_0) + \frac{\Phi - \Phi_{ex}}{L} = 0 \quad (2.7)$$

Die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}$  des Systems geht durch eine Legendretransformation aus der Lagrangefunktion  $\mathcal{L}$  hervor. Für letztere muss die Euler-Lagrange-Gleichung gelten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = 0 \quad (2.8)$$

Ein Vergleich der letzten beiden Gleichungen ergibt für die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}) = \frac{1}{2} C \dot{\Phi}^2 + E_J \cos(2\pi\Phi/\Phi_0) - \frac{(\Phi - \Phi_{ex})^2}{2L}. \quad (2.9)$$

Statt von der verallgemeinerten Geschwindigkeit  $\dot{\Phi}$  hängt die Hamiltonfunktion vom verallgemeinerten Impuls  $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{\Phi}$  ab. Dieser ist offenbar die Ladung auf dem Kondensator:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = C \dot{\Phi} = Q,$$

sodass sich die Legendretransformation darstellt als:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}(\Phi, Q) = Q \dot{\Phi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{Q^2}{2C} - E_J \cos(2\pi\Phi/\Phi_0) + \frac{(\Phi - \Phi_{ex})^2}{2L}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Der quantenmechanische Hamiltonoperator  $\hat{H}$  geht aus der Hamiltonfunktion nach Ersetzung des konjugierten Variablenpaares durch die entsprechenden nichtkommutierenden Operatoren hervor:

$$\begin{aligned} \Phi &\longmapsto \hat{\Phi} \\ Q &\longmapsto \hat{Q} \\ [\hat{Q}, \hat{\Phi}] &= \frac{\hbar}{i}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei die Unbestimmtheitsrelation wie gewohnt gilt:

$$\Delta Q \Delta \Phi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.12)$$

Das System wird dann vollständig beschrieben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - E_J \cos(2\pi\hat{\Phi}/\Phi_0) + \frac{(\hat{\Phi} - \Phi_{ex})^2}{2L}. \quad (2.13)$$

Für die weitere Diskussion ist es sinnvoll, den Hamilton-Operator als Summe dreier Beträge zu verstehen:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_C + \hat{H}_L + \hat{H}_J \\ \hat{H}_C &= \frac{\hat{Q}^2}{2C} \\ \hat{H}_L &= \frac{(\hat{\Phi} - \Phi_{ex})^2}{2L} \\ \hat{H}_J &= -E_J \cos(2\pi\hat{\Phi}/\Phi_0) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die alleinige Summe aus kapazitivem und induktiven Anteil  $\hat{H}_C + \hat{H}_L$  beschreibt den bekannten LC-Resonator. Er ist komplett analog zum quantenmechanischen harmonischen Oszillator der Masse  $C$  und der Periodendauer  $2\pi\sqrt{LC}$ . Der vom Josephson-Kontakt stammende Anteil  $\hat{H}_J$  bringt das System allerdings fern ab vom Oszillatormodell.

Die Gültigkeit dieser quantenmechanischen Beschreibung ist natürlich begrenzt. Ist die Wechselwirkung des betrachteten supraleitenden Schaltkreises mit seiner Umgebung groß, so werden die kleinen Kohärenzzeiten einen frühzeitigen Kollaps der Wellenfunktion bedingen und die Superpositionen von Zuständen wird nicht mehr beobachtbar sein. Ist das System allerdings hinreichend klein und die Temperatur niedrig genug, so lassen sich nach (2.11) im Wesentlichen zwei verschiedene Regime realisieren, die sich in der Bestimmtheit der konjugierten Messgrößen  $\Phi$  und  $Q$  unterscheiden. In einem dritten Regime ist die Josephson-Phase  $\gamma$  dominant. Es folgt eine kurze Vorstellung der drei prinzipiell möglichen technischen Realisierungen.

## 2.2 Die Cooper-Paar-Box

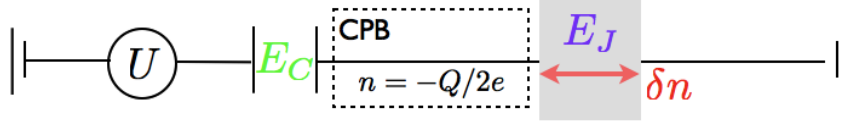


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung einer Schaltung zur Realisierung einer Cooper-Paar-Box.

Eine Cooper-Paar-Box (CPB) bezeichnet einen supraleitenden Bereich, an dem über eine Kapazität  $C$  die Spannung  $U$  anliegt (vgl. 2.2) und bildet die Grundlage das als Ladungs-Qubits bezeichnete Zweiniveausystem. Die Cooper-Paare können die CPB nur als Tunnelstrom über einen Josephsonkontakt verlassen, sind also auf der einen Seite durch die Coulombenergie  $E_C = (-2e)^2/2C$  und auf der anderen durch die Josephson-Energie  $E_J = \Phi_0 I_c/2\pi$  eingeschlossen. Ist die Josephsonenergie klein im Vergleich zur elektrostatischen Energie am Kondensator,

$$E_J < E_C, \quad (2.15)$$

so ist die Zahl  $n$  der Cooper-Paare in der Box nahezu erhalten. Es ist üblich, den Hamiltonoperator für die CPB in der Eigenbasis der Operatoren zu eben dieser Zahl  $n$  und der Josephson Phase  $\gamma$  zu schreiben. Für letztere gilt

$$[\hat{n}, \hat{\gamma}] = \left[ \frac{1}{-2e} \hat{Q}, \frac{2e}{\hbar} \hat{\Phi} \right] = -\frac{1}{\hbar} \left[ \hat{Q}, \hat{\Phi} \right] \stackrel{(2.11)}{=} i. \quad (2.16)$$

Über die angelegte Spannung  $U$  lässt sich der Kondensator mit einer beliebigen Grundbesetzung  $n_G$  an Cooper-Paare laden. Dies entspricht einer Offset-Ladung

$$Q_G = -2en_G = CU. \quad (2.17)$$

Während  $n \in \mathbb{N}$ , sind auf diese Weise wegen der kontinuierlich einstellbaren Spannung insbesondere natürlich auch nichtganzzahlige  $n_G$  möglich. Interessant ist jedoch lediglich die Differenz zur tatsächlichen Füllung. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, mit einem effektiven Hamiltonian zu arbeiten, der in der neu eingeführten Basis folgende Form hat:

$$\boxed{\hat{H}_{CPB} = E_C(\hat{n} - n_G)^2 - E_J \cos(\hat{\gamma})} \quad (2.18)$$

Der Fluss-Anteil  $\hat{H}_L$  aus (2.14) fällt in der Cooper-Paar-Box heraus, denn es fließt weder ein Kreisstrom noch wird von außen ein Magnetfeld angebracht, sodass die

Definition eines magnetischen Flusses obsolet wird<sup>1</sup>. In der Tat lässt sich im Falle der CPB die Josephson-Phase sogar einfach als Differenz der zwei unterschiedlichen makroskopischen Phasen in den beiden anstoßenden supraleitenden Bereiche sehen, also

$$\gamma = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (2.19)$$

wenn  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  die makroskopische Phase der Cooper-Paar-Kondensate innerhalb bzw. außerhalb der Box, also jenseits des JK bezeichnen.

Wegen der hohen Bestimmtheit von  $n$  ist  $\hat{H}_{CPB}$  nahezu diagonal in der zugehörigen orthogonalen Eigenbasis<sup>2</sup>

$$\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (2.20)$$

$$\text{mit } \hat{n} |n\rangle = n |n\rangle \quad \text{und} \quad \langle n | m \rangle = \delta_{nm} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Dies ist äquivalent zur Aussage, dass die Kopplung am Josephson-Kontakt so gering ist, dass in sehr guter Näherung stets nur ein Cooper-Paar tunneln kann. Beschränkt man die Kopplung auf diesen Ein-Teilchen(paar)-Prozess, so lässt sich der Josephson-Anteil am Hamiltonoperator in Bra-Ket-Schreibweise ausdrücken als

$$\cos(\hat{\gamma}) = \frac{1}{2} \sum_n |n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|. \quad (2.21)$$

Hier läuft die Summe über alle Eigenzustände des  $\hat{n}$ -Operators, also alle möglichen Füllstände  $|n\rangle$  mit  $n$  Cooper-Paaren in der Box. Mit dieser Formulierung erhält der Hamiltonoperator einer Cooper-Paar-Box eine tridiagonale Struktur. Wegen (2.15) verläuft sein Spektrum im Wesentlichen auf einer Parabel der Krümmung  $2E_C$  mit dem Scheitelpunkt bei  $n = n_G$ .

Je zwei Zustände  $|n\rangle$  und  $|n+1\rangle$  können noch nicht als Qubit Zustände dienen, da

---

<sup>1</sup>Tatsächlich genügt eines der Argumente. Denn auch bei beliebig großem Magnetfeld entsteht kein magnetischer Fluss, solange der Stromkreis nicht geschlossen ist. Im Bild der Unschärferelation (2.12) stellt sich die Situation wie folgt dar: Der nicht geschlossene Stromkreis macht es unmöglich zu sagen, wie groß die Fläche ist, die von ihm berandet wird: Ist sie verschwindend oder riesig? Die Unsicherheit im magnetischen Fluss ist groß. Entsprechend kleine Fluktuation geschehen in der Ladung.

<sup>2</sup>Es mutet paradox an, von einer *nahezu* erreichten Diagonalität zu sprechen, wenn es doch gerade die Tatsache ist, dass das System *nicht* ungestört in einem Zustand fester Cooper-Paar-Anzahl verweilen kann, die sein Verhalten maßgeblich bestimmt. Es ist diese Beobachtung, die die Bezeichnung des Josephson-Effekts als ein *makroskopisches Quantenphänomen* rechtfertigt. Und tatsächlich: Eine Fluktuation um wenige Cooper-Paare in der Box ist im Vergleich zu einer insgesamt vorhandenen Zahl in der Größenordnung von  $10^8$  [5] verschwindend.

sie energetisch nicht unabhängig sind. Die Eigenzustände des Systems, d.h. jene seines Hamiltonoperators, sind erst die zweikomponentigen Superpositionen der Eigenzustände von  $\hat{n}$ . Deren Koeffizienten hängen von den äußeren Parameter ab, dabei insbesondere von dem über die Kondensatorspannung regulierbaren Grundniveau  $n_G$  an Cooper-Paaren in der CPB.

An (2.18) wird sofort ersichtlich, dass für  $n_G = 1/2$  die Zustände  $|n\rangle$  und  $|n+1\rangle$  entartet sind. Diese mischen dann aufgrund ihrer höchstmöglichen energetischen Nähe maximal zum geraden und ungeraden System-Eigenzustand

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |n\rangle + |n+1\rangle \right) \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |n\rangle - |n+1\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dabei ist der ungerade Zustand der energetisch niedrigere der beiden.  $n_G = 0.5$  wird aufgrund der gleichanteiligen Superposition (2.22) auch als Symmetriepunkt des Systems bezeichnet. Für andere Werte von  $n_G$  verschieben sich die Proportionen. Versteht man  $\hat{H}_J$  im Sinne der Störungstheorie als kleine Störung des ansonsten diagonalen Hamiltonoperators, ist dieses Verhalten beispielhaft für das bekannte quantenmechanische Phänomen der Levelabstoßung bei sich kreuzenden Dispersionen.

Um die Zustände  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$  als die zwei Zustände eines Ladungs-Qubits zu nutzen, ist der Symmetriepunkt von essentieller Bedeutung. Erste Experimente haben gezeigt, dass bei Anregung des Systems mit einem entsprechenden Spannungspuls die Verweilzeit im angeregten Zustand am Symmetriepunkt am größten wird [6]. Supraleitende Qubits werden deshalb an ihrem Symmetriepunkt betrieben.

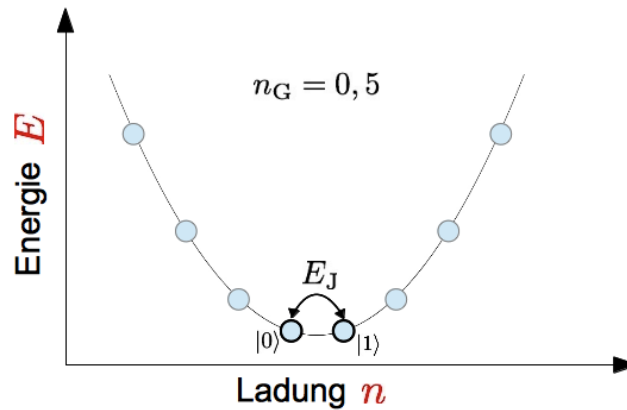


Abbildung 2.3: Dispersion der Cooper-Paar-Box. In der Fock-Basis der Cooper-Paare liegen alle Zustände auf einer Parabel und sind paarweise entartet.

## 2.3 Das Fluss-Qubit

Das Fluss-Qubit ist nach (2.11) die zum Ladungs-Qubit konjugierte Realisierung eines supraleitenden Schaltkreises. Statt der Ladung ist der magnetische Fluss der interessierende Freiheitsgrad des Systems. In diesem Sinn werden Fluss-Qubits realisierende Systeme in Anlehnung an den Begriff der Cooper-Paar-Boxen auch als magnetische Fluss-Boxen bezeichnet. Anstelle von Cooper-Paaren ( $-2e$ ) können Flussquanten  $\Phi_0 = h/2e$  mit einem äußeren magnetischen Feld ausgetauscht werden. Dies

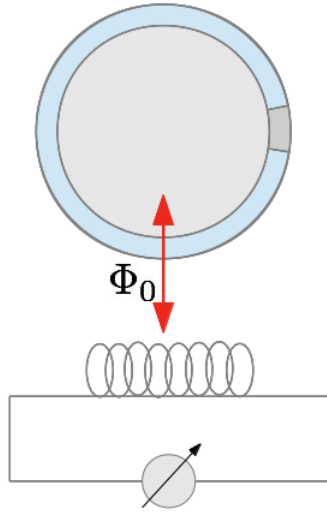


Abbildung 2.4: Prinzip eines Fluss-Qubits: Ein supraleitender Ring mit – im einfachsten Fall – nur einem Josephson-Kontakt tauscht mit einem äußeren magnetischen Feld Flussquanten  $\Phi_0$  aus. Das Feld kann das quantisierte Feld eines elektromagnetischen Resonators sein.

geschieht in einer Geometrie, wie sie in Abschnitt 1.3 bereits zur Herleitung des Josephson-Effekts diskutiert wurde (Abb. 1.2): Ein geschlossener Supraleiter wird von einem oder mehreren Josephson-Kontakten unterbrochen. Im Gegensatz zur CPB entsteht hier bei externem Magnetfeld mit einer zur eingeschlossenen Fläche senkrechten Komponente ein magnetischer Fluss  $\Phi$ . Entsprechend muss der induktive Teil  $\hat{H}_L$  des allgemeinen Hamiltonoperators (2.14) für supraleitende Schaltkreise im Gegensatz zur CPB berücksichtigt werden. Im Gegenzug entfällt der kapazitive Anteil  $\hat{H}_C$ , denn die Coulombenergie der Ladungsverteilung im System beeinflusst den Austausch der Flussquanten nicht. Für den Fall nur eines Josephson-Kontakts kann das System nach diesen Überlegungen dann effektiv beschrieben werden durch

$$\hat{H}_{FQ} = \frac{(\hat{\Phi} - \Phi_{ex})^2}{2L} - E_J \cos\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} \hat{\Phi}\right). \quad (2.23)$$

Dieser Hamiltonoperator ist im Gegensatz zu jenem der CPB unabhängig vom verallgemeinerten Impulsoperator  $\hat{Q}$  bzw.  $\hat{n}$ . Analog zum Ladungs-Qubit wird deshalb eine Orthogonalbasis eingeführt, deren Zustände  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$  jetzt durch die Anzahl der im System gespeicherten Anregungen bestimmt sind. Statt Cooper-Paaren, sind diese Anregungen jetzt magnetische Flussquanten:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} |\nu\rangle &= \nu \Phi_0 |\nu\rangle \\ \langle \nu | \mu \rangle &= \delta_{\nu\mu} \quad \forall \mu, \nu \in \mathbb{N}\end{aligned}\tag{2.24}$$

Wie im Fall der CPB ist die Realisierung eines Fluss-Qubit mit einer Bedingung an das Verhältnis der Energieskalen verknüpft. Für

$$\frac{\Phi_0^2}{L} > E_J\tag{2.25}$$

überwiegt der induktive Teil der Energie. Im Wesentlichen ist das Spektrum also wie schon beim Ladungs-Qubit parabolisch:

$$E_0(n) = \frac{(n\Phi_0 - \Phi_{ex})^2}{2L}\tag{2.26}$$

Wegen dem Josephson-Term  $\hat{H}_J$  des Hamiltonoperators ergibt sich dann mit (2.25)

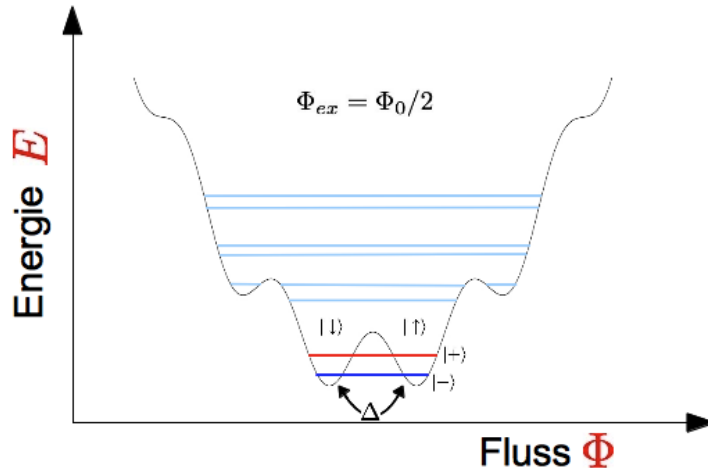


Abbildung 2.5: Dispersion des magnetischen Fluss-Qubits an seinem Symmetriepunkt. Die untersten beiden Zustände k

allerdings eine geringfügig kosinusförmig modulierte Parabel als vollständiges Spektrum. Durch kontinuierliche Veränderung des äußeren magnetischen Flusses auf  $\Phi_{ex} = \Phi_0/2$  kann dieses wieder symmetrisiert werden und es ergibt sich eine Form wie in Abb. 2.5. Die untersten zwei Energieniveaus sind dann deutlich von den übrigen

separiert, können also als Qubitzustände verwendet werden. Ohne einen Josephson-Kontakt wären sie entartet und entsprächen den Zuständen  $|1\rangle$  und  $|0\rangle$  des oben eingeführten Basissystems. Erst die Möglichkeit des Tunnelstroms über den Kontakt koppelt diese zwei Zustände und hebt so ihre Entartung auf. Wie schon beim Ladungs-Qubit führt ein Symmetriebruch zur Levelabstoßung.

Weil der magnetische Fluss über die Induktivität des Stromkreises mit dem Su-

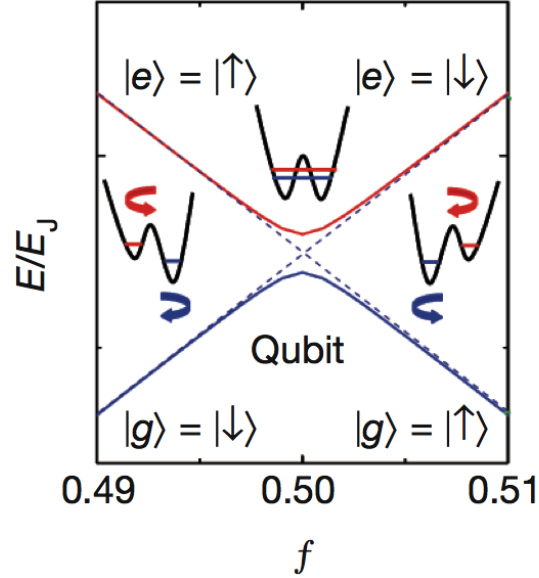


Abbildung 2.6: Superposition der Eigenzustände des magnetischen Flusses zu den Qubit-Eigenzuständen um den Symmetriepunkt. Bezeichnung:  $f \equiv \Phi_{\text{ex}}/\Phi_0$ ,  $|e\rangle \equiv |+\rangle$ ,  $|g\rangle \equiv |-\rangle$ . Entnommen aus [7].

prastrom verknüpft ist, führt man die Bezeichnung  $|\uparrow\rangle$  bzw.  $|\downarrow\rangle$  für die Zustände  $|1\rangle$  und  $|0\rangle$  ein, in denen der Zustand jeweils durch die Richtung des Stromflusses bestimmt wird, also im bzw. gegen den Uhrzeigersinn. Am Symmetriepunkt mischen die entarteten Suprastromzustände maximal zu den Qubit-Eigenzuständen

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right) \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Abb. 2.6 zeigt, wie das Mischungsverhältnis vom externen Fluss abhängt. Zu einer vollständigen Beschreibung des Systems fehlt noch der Feld- sowie der Wechselwirkungsanteil, der die Kopplung zwischen Qubit und Feld beschreibt. Um den dafür benötigten theoretischen Grundlagen einen ausreichenden Rahmen einzuräumen, soll dies Gegenstand des nächsten Kapitels sein. Die hier angedeutete Beschreibung eines Systems mit ursprünglich vielen Energieniveaus als ein Zweiniveausystem



gewinnt ihre Bedeutung als vereinfachende Näherung erst in der Wechselwirkung mit äußeren Freiheitsgraden. Die Formulierung des entsprechenden Hamiltonoperators sei aus diesem Grund ebenfalls in das nächste Kapitel eingebettet, das somit synthetischen Charakter annimmt und auf die späteren, konkreten Berechnungen vorbereitet.

# Kapitel 3

## Qubit-Feld-Wechselwirkung

Im vorangegangenen Kapitel wurde in den zwei prototypischen Fällen der Cooper-Paar-Box und des magnetischen Fluss-Qubits aufgedeckt, dass sich supraleitende Schaltkreise unter geeigneten Bedingungen als Qubits verhalten können. Die Wechselwirkung dieser Zweiniveausysteme mit einem umgebenden elektromagnetischen Feld lässt sich in demselben Formalismus erfassen, der auch zur Beschreibung von Atomen in einer Kavität dient, der Kavitäts-Quantenelektrodynamik. Dies soll auf den kommenden Seiten am Beispiel des Fluss-Qubits begründet und dargestellt werden. Ziel ist die Aufstellung eines Hamiltonoperators der Form

$$\hat{H} = \hat{H}_Q + \hat{H}_R + \hat{H}_{\text{WW}}, \quad (3.1)$$

der das System aus Qubit und Feld vollständig als Summe aus Qubit-, Resonatorfeld- und Wechselwirkungsanteil beschreibt. Um auch die zeitliche Dynamik des zusammengesetzten Systems verstehen zu können, wird am Ende des Kapitels eine kurze Einführung in den Dichteoperator-Formalismus gegeben.

### 3.1 Hamiltonoperator der freien Systeme

Wie gesehen, lässt sich die magnetische Ladungs-Box am Symmetriepunkt in guter Näherung als ein Zweiniveausystem beschreiben. Der zugehörige Hilbertraum ist also zweidimensional, sodass zur Darstellung aller Operatoren die orthogonalen Paulimatrizen

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

dienen können. Für die Wechselwirkung zwischen Fluss-Qubit und Feld ist lediglich die Energiedifferenz zwischen den Qubitzuständen entscheidend. Setzt man den Ursprung auf die Hälfte dieser Differenz, kann für einen effektiven Hamiltonian in der

Basis der Suprastromzustände  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  mit der Repräsentation

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

folgende Gestalt vorausgesetzt werden:

$$\begin{aligned} \hat{H}_Q &= \sum_{i,j \in \{\uparrow, \downarrow\}} |i\rangle \langle i| \hat{H}_Q |j\rangle \langle j| \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon & \Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix} \\ \longrightarrow \quad &\boxed{\hat{H}_Q = \frac{\epsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_x} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dabei beschreibt  $\Delta$  die Tunnelkopplung zwischen den zwei Suprastromzuständen und  $\epsilon$  ihre energetische Differenz. In [8] nehmen diese Größen Werte von  $\Delta/h = (4, 2 \pm 0,02)$  GHz und  $\epsilon = 2I_S(\Phi - \Phi_0/2)$  an, wobei dort ein Suprastrom von  $I_S = (500 \pm 10)$  nA gemessen wird.

Um die Art der Wechselwirkung zu verstehen, in die das Qubit mit dem elektromagnetischen Feld tritt, ist es notwendig, das Feld und sein Entstehen selbst zu begreifen. Dazu sei der Ausgangspunkt hier beim LC-Resonator gesetzt, dessen klassische Hamiltonfunktion sich aus (2.10) durch Weglassen des nichtlinearen Josepshon-Terms ergibt:

$$\mathcal{H} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{(\Phi - \Phi_{ex})^2}{2L} \quad (3.5)$$

Der Hamiltonoperator ist mit  $\omega^2 = 1/LC$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{H}_R &= \hat{H}_C + \hat{H}_L \\ &= \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{1}{2} C \omega (\hat{\Phi} - \Phi_{ex})^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

und entspricht, wie während der Betrachtung des allgemeinen supraleitenden Schaltkreises erwähnt, dem Hamiltonian eines auf der  $\Phi$ -Achse verschobenen harmonischen Oszillators. Wie schon im Fall der Cooper-Paar-Box kann auf dimensionslose Einheiten übergegangen und der Oszillator im Phasenraum symmetrisiert werden. Mit den linearen Transformationen

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &\longrightarrow f \tilde{\Phi} + \Phi_{ex} \\ \hat{Q} &\longrightarrow \frac{\hbar}{f} \tilde{Q} \\ [\tilde{\Phi}, \tilde{Q}] &= [\hat{\Phi}, \hat{Q}]/\hbar = i \end{aligned} \quad (3.7)$$

ergibt sich

$$\hat{H} \longrightarrow \tilde{H} = \frac{\hbar^2}{2f^2C} \tilde{Q}^2 + \frac{1}{2} C f^2 \omega^2 \tilde{\Phi}^2$$

und nach Gleichsetzen der Konstanten,

$$\frac{\hbar^2}{2f^2C} = \frac{1}{2} C f^2,$$

ein charakteristischer Oszillatorfluss:

$$f^2 = \frac{\hbar}{\omega C}$$

Einsetzen liefert den symmetrisierten Hamiltonoperator

$$\tilde{H} = (\tilde{Q}^2 + \tilde{\Phi}^2) \hbar \omega / 2. \quad (3.8)$$

Die zwei zueinander adjungierten Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{a} &:= (\tilde{\Phi} + i\tilde{Q})/\sqrt{2} \\ \hat{a}^\dagger &:= (\tilde{\Phi} - i\tilde{Q})/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

erfüllen die Kommutatorrelation

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (3.10)$$

und ermöglichen es, (3.8) auf nur einen operativen Term zu reduzieren, denn

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = (\tilde{Q}^2 + \tilde{\Phi}^2 + i[\tilde{\Phi}, \tilde{Q}])/2.$$

Der für alle weitere Diskussion entscheidende Hamiltonoperator des Resonatorfelds lautet demnach letztlich

$$\boxed{\hat{H}_R = \hbar \omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)}. \quad (3.11)$$

Der Zusammenhang zu den dimensionsbehafteten Operatoren  $\hat{\Phi}$  und  $\hat{Q}$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{\omega C}{\hbar}} \hat{\Phi} + i \frac{1}{\sqrt{\omega C \hbar}} \hat{Q} \right) \\ \text{und } \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{\omega C}{\hbar}} \hat{\Phi} - i \frac{1}{\sqrt{\omega C \hbar}} \hat{Q} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Eigenwerte- und vektoren von  $\hat{H}_R$  sind jene von  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Nun sind  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$  Linearkombinationen aus nichtkommutierenden Operatoren, sodass für sie erst noch

sinnvolle Eigenwerte- und vektoren gefunden werden müssen. In Übereinstimmung mit der Beobachtung des äquidistanten, diskreten Energiespektrums des quantenmechanischen harmonischen Oszillators – in diesem Fall gleichbedeutend mit der photonischen Teilchennatur des elektromagnetischen Feldes – werden diese so gewählt, dass  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$  ein ganzzahliges Spektrum hat, welches den Energiepaketen  $\hbar\omega$  gerecht wird:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

So gilt

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (3.14)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle,$$

$$\text{wobei } \hat{a} |0\rangle = 0.$$

Die Zustände  $\{|n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$  sind dabei vollständig durch ihre jeweilige Quantenzahl  $n$  bestimmt. Diese gibt im Oszillatorbild die Anzahl der im System befindlichen Schwingungsquanten an. Im Bild des LC-Resonators entspricht  $n$  der Anzahl der Photonen und charakterisiert so den energetischen Zustand des Feldes. Es lässt sich also ein *Teilchenzahloperator*  $\hat{N}$  in der Eigenwertgleichung (3.13) identifizieren:

$$\hat{N} := \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (3.15)$$

Außerdem rechtfertigt (3.14) die Bezeichnung von  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$  als *Vernichtungs-* respektive *Erzeugungsoperator* oder gemeinsam als *bosonische Kletteroperatoren*, zumal die Anwendung dieser Operatoren auf die Eigenzustände ihres Produkts  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  jeweils ein Photon vernichtet bzw. erzeugt. Der Grundzustand  $|0\rangle$  des Oszillators trägt die *Vakuumenergie*  $\hbar\omega/2$ .

Die hier eingeführte Beschreibung des harmonischen Oszillators in der Teilchen-darstellung stellt den einfachsten Fall eines *Fock-Raums* dar. Die Hinzunahme von weiteren unabhängigen Oszillatoren ist die entsprechende Verallgemeinerung und bildet die Grundlage der üblichen Beschreibung von Vielteilchensystemen. Der LC-Resonator liefert nur Photonen einer einzigen Mode des im Allgemeinen aus vielen Moden  $\mathbf{k}$  und Polarisationen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  bestehenden elektromagnetischen Feldes mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{EM} = \sum_{\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.16)$$

## 3.2 Kopplung

Durch (3.4) und (3.11) sind zwei noch unabhängige Systeme beschrieben: Ein elektronisches Zweiniveausystem und eine Mode des elektromagnetischen Feldes. Allerdings tragen beide Systeme elektromagnetische Freiheitsgrade, über die sie sich gegeneinander beeinflussen, in Wechselwirkung treten und Energie austauschen können. Um diesem Umstand gerecht zu werden, ist es zweckmäßig, zur Beschreibung des zusammengesetzten Systems Wellenfunktionen aus einem Hilbertraum heranzuziehen, der die ursprünglichen Hilberträume verknüpft. Will man alle möglichen Konfigurationen erfassen, so ist der benötigte Hilbertraum das direkte Produkt aus den Hilberträumen von Qubit und Feldmode:

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_{\text{Qubit}} \otimes \mathbb{H}_{\text{Feld}} \quad (3.17)$$

Die neuen Hilbertraumvektoren entstehen dann ebenfalls als direktes Produkt aus den ursprünglichen. Es sei dafür folgende übliche Schreibweise eingeführt:

$$\begin{aligned} |i, n\rangle &:= |i\rangle \otimes |n\rangle \\ i &\in \{\downarrow, \uparrow\}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dabei bleibt die Wirkung der Operatoren auf ihre ursprünglichen Räume beschränkt, die bosonischen Leiteroperatoren kommutieren mit den Paulimatrizen:

$$[\hat{a}^{(\dagger)}, \hat{\sigma}_i] = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.19)$$

Für einen Operator  $\hat{Q}$  aus  $\mathbb{H}_{\text{Qubit}}$  und einen zweiten Operator  $\hat{F}$  aus  $\mathbb{H}_{\text{Feld}}$  bedeutet das

$$(\hat{Q}\hat{F})|i, n\rangle = (\hat{Q}\hat{F})(|i\rangle \otimes |n\rangle) = (\hat{Q}|i\rangle) \otimes (\hat{F}|n\rangle). \quad (3.20)$$

Wie stark zwei System miteinander wechselwirken, wird stets anhand einer Kopplungskonstanten festgemacht, zu der der Wechselwirkungsterm  $\hat{H}_{\text{WW}}$  im Hamiltonoperator proportional ist. Diese kann von vielen Faktoren abhängen und ihre exakte Berechnung kann sogar eine eigene Theorie erfordern. Im Fall eines an eine Resonanzmode gekoppelten Fluss-Qubits hängt die Kopplungskonstante im Wesentlichen von der Größe der gemeinsamen Induktivität  $M$  ab, mit der die Kopplung experimentell realisiert wird. Diese kann wie bei Forn-Díaz et al. [8] die Form einer kleinen zusätzlichen Antenne auf der Platine haben, auf der der Stromkreis integriert ist. Im Folgenden sei nun der aus dieser Konfiguration entspringende Ausdruck für  $\hat{H}_{\text{WW}}$  abgeleitet.

Die Wechselwirkung zwischen Fluss-Qubit und Resonatorfeld muss Dipolcharakter besitzen, denn je nachdem, in welchem der zwei Suprastromzustände sich das Qubit befindet, stellt es einen magnetischen Dipol  $\boldsymbol{\mu}$  dar, dessen Größe von der Induktivität  $L$  und der vom Kreisstrom eingeschlossenen Fläche  $\mathbf{F}$  abhängt. Am Symmetriepunkt ist

$$\boldsymbol{\mu} = \pm \frac{\Phi_0}{2L} \mathbf{F}. \quad (3.21)$$

Zunächst klassisch beschrieben koppelt an diesen Dipol der magnetische Teil  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  des Resonatorfeldes gemäß der Hamiltonfunktion

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\text{WW}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (3.22)$$

In der *Dipolnäherung* geht man davon aus, dass sich das Feld im Ort nur auf Längenskalen ändert, die die Ausdehnung des den Dipol erzeugenden Stromflusses<sup>1</sup> weit übersteigen, die Wechselwirkung also lokalisiert am Ort  $\mathbf{r}_0$  des Dipols stattfindet. Für Wellenlängen im cm-Bereich und Fluss-Qubits der Ausdehnung weniger  $\mu\text{m}$ , wie typischerweise und so auch in [8] realisiert werden, ist diese Voraussetzung erfüllt. Damit wird die Hamiltonfunktion der magnetischen Dipolwechselwirkung zu

$$\mathcal{H}_{\text{D}} \approx \mathcal{H}_{\text{WW}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}_0, t). \quad (3.23)$$

Die Quantisierung dieses Ausdrucks macht ihn mit den in den vorangegangenen zwei Abschnitten eingeführten Beschreibung von Qubit und Feld kompatibel. Der zu  $\boldsymbol{\mu}$  gehörige Dipoloperator  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  wird dazu in der Basis der Suprastrome ausgedrückt:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{i,j \in \{\uparrow, \downarrow\}} |i\rangle \langle i| \hat{\boldsymbol{\mu}} |j\rangle \langle j| = \sum_{i,j \in \{\uparrow, \downarrow\}} |i\rangle \mu_{ij} \langle j| \quad (3.24)$$

Ein magnetisches Moment entsteht nur in den reinen Suprastromzuständen, der magnetische Dipoloperator ist also diagonal in der Suprastrombasis:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = |\uparrow\rangle \mu_{\uparrow\uparrow} \langle \uparrow| + |\downarrow\rangle \mu_{\downarrow\downarrow} \langle \downarrow| = \begin{pmatrix} \mu_{\uparrow\uparrow} & 0 \\ 0 & \mu_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Wegen  $\mu_{\uparrow\uparrow} = -\mu_{\downarrow\downarrow}$  lässt sich dies mit  $\mu := \mu_{\uparrow\uparrow}$  schreiben als

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Es bleibt noch, den Feldanteil der Dipolwechselwirkung durch die bosonischen Leiteroperatoren auszudrücken. Während für die Feldenergie mit (3.11) noch ohne

---

<sup>1</sup>Die elektrische Dipolnäherung ist entsprechend auf die im Vergleich zur Wellenlänge räumlich begrenzte *Ladungsverteilung* angewiesen.

größeren Aufwand ein solcher Ausdruck gefunden werden konnte, ist dies für das Magnetfeld selbst nicht ohne Weiteres möglich. Die formale *Quantisierung des elektromagnetischen Feldes* ist hierfür unabdingbar. Eine detaillierte Herleitung findet sich z. B. bei Schiff [9]. An dieser Stelle sollen lediglich die grundsätzlichen Ideen bei diesem Vorgehen genannt und anhand der Situation eines felderzeugenden Resonators entwickelt werden.

Zunächst sei rekapituliert, wie der klassische Ausdruck für die im elektromagnetischen Feld gespeicherte Energie im Vakuum lautet:

$$\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{r} \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} |\partial_t \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \quad (3.27)$$

Dabei wurden die Felder durch das Vektorpotential ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Im Zustandsraum wird das Integral zu einer Summe über Moden  $\mathbf{k}$  und Polarisationen  $\varepsilon$ ,

$$\int \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \left( \int d^3\mathbf{r} \right)^{-1} \sum_{\mathbf{k}, \varepsilon} A_{\varepsilon}(\mathbf{k}, t). \quad (3.29)$$

Die Feldenergie einer Mode  $\mathbf{k}'$  und einer Polarisation  $\varepsilon'$  nimmt dann mit der Dispersion

$$\omega = ck = k/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \quad (3.30)$$

und  $A(t) := A_{\varepsilon'}(\mathbf{k}', t)$  folgende Form an:

$$\mathcal{H} = \frac{\varepsilon_0}{2} |\partial_t A(t)|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \omega^2 |A(t)|^2 \quad (3.31)$$

Bei der Quantisierung des Resonators wurde bereits gefunden:

$$\hat{H}_R = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.11)$$

Feld und Resonator bilden aber eine einzige Entität, sodass  $\hat{H}_R$  auch aus der Hamiltonfunktion (3.31) des Feldes hervorgehen muss. Waren bei der Quantisierung des Resonators noch die Ladung  $Q$  und der magnetische Fluss  $\Phi$  die kanonischen Variablen, sind dies nun die Feldgrößen  $\varepsilon_0 \partial_t A$  und  $A$ , deren zugehörige Operatoren  $\hat{p}$  und  $\hat{q}$  mit  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$  zu den Leiteroperatoren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$  superponiert werden:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \hat{q} \\ \varepsilon_0 \partial_t A &\longrightarrow \hat{p} \end{aligned} \quad (3.32)$$



$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\hbar}} \hat{q} + i \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \hbar \omega}} \hat{p}^\dagger \right) \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\hbar}} \hat{q}^\dagger - i \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \hbar \omega}} \hat{p} \right)\end{aligned}\tag{3.33}$$

Nur diese Gestalt der Leiteroperatoren sichert die Konsistenz der quadratischen Formen (3.31) und (3.11). Es kann gezeigt werden, dass die Zeitabhängigkeit der Leiteroperatoren jene ebener Wellen der Frequenz  $\omega$  ist.

Es ist die über die Maxwell-Gleichungen bestehende Verbindung zwischen  $Q$  und  $\varepsilon_0 \partial_t A$  sowie  $\Phi$  und  $A$ , die verantwortlich ist für die Äquivalenz von (3.12) und (3.33) unter der Ersetzung

$$\begin{aligned}\Phi &\longleftrightarrow A \\ CQ &\longleftrightarrow \varepsilon_0 \partial_t A.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Die generalisierte Feldkoordinate  $A$  der Resonatormode wird durch die Leiteroperatoren (3.33) ausgedrückt als

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega}} (\hat{a} + \hat{a}_-^\dagger),\tag{3.35}$$

wenn man unter

$$\hat{a}_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\hbar}} \hat{q} - i \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \hbar \omega}} \hat{p}^\dagger \right)\tag{3.36}$$

den Aufsteigeoperator in der Resonatormode mit entgegengesetztem Zustandsvektor versteht. Von hier ausgehend kann unter Beachtung von (3.28) und (3.29) ein Ausdruck für  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  gefunden und in (3.23) eingesetzt werden. Zusammen mit (3.25) ergibt sich dann schließlich für den Wechselwirkungsteil im Hamiltonoperator:

$$\hat{H}_D = \hbar g \hat{\sigma}_z (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \begin{pmatrix} \hbar g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) & 0 \\ 0 & -\hbar g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \end{pmatrix}.\tag{3.37}$$

Die analytische Angabe der Kopplungskonstanten  $g$  und ihrer Abhängigkeit vom magnetischen Dipolmatrixelement  $\mu$  sowie der speziellen Architektur der Qubit-Realisierung ist möglich, findet aber in diesem Rahmen keinen Platz. Im Zentrum soll stattdessen stehen, wie sich die *Größe* der Kopplungskonstanten auf das Systemverhalten auswirkt. Neben der numerischen Analyse werden im folgenden Kapitel auch analytische Ansätze diskutiert werden. Der Hamiltonoperator des Systems aus Qubit und Resonatorfeld wie er im Verlauf dieses Kapitels entwickelt wurde, wird

als Ausgangspunkt dienen. In der Basis der Suprastromzustände  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$  lautet er

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_x + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g\hat{\sigma}_z(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.38)$$

bzw.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon/2 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) & \Delta/2 \\ \Delta/2 & -\epsilon/2 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hbar g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

wobei hier wie im gesamten letzten Kapitel auf die Angabe der Vakuumenergie des Resonatorfeldes verzichtet wurde.

### 3.3 Zustandsbeschreibung

Während das stationäre Verhalten des gekoppelten Systems aus Qubit und elektromagnetischem Feld durch die Eigenwerte und Eigenzustände des Hamiltonoperators bestimmt ist, steht die Beschreibung der zeitlichen Dynamik noch aus. Dazu diene zunächst die folgende Überlegung. Nimmt man eine maximale Photonenzahl in der Kavität von  $N$  an, so gibt es

$$\dim \mathbb{H} = \dim \left( \mathbb{H}_{\text{Qubit}} \otimes \mathbb{H}_{\text{Feld}} \right) = \dim \mathbb{H}_{\text{Qubit}} \cdot \dim \mathbb{H}_{\text{Feld}} = 2N \quad (3.40)$$

verschiedene Konfigurationen des Systems, die durch die orthogonalen Produktzustände  $\{|i, n\rangle\}_{i \in \{\uparrow, \downarrow\}}^{n \in \{1, \dots, N\}}$  beschrieben werden. Das System kann einen beliebigen anderen Zustand  $|\varphi_l\rangle$  einnehmen, der dabei jedoch stets als Superposition der Basiszustände gemäß

$$|\varphi_l\rangle = \sum_{\substack{i \in \{\uparrow, \downarrow\} \\ n \in \{1, \dots, N\}}} |i, n\rangle \langle i, n | \varphi_l \rangle = \sum_{\substack{i \in \{\uparrow, \downarrow\} \\ n \in \{1, \dots, N\}}} c_{in} |\varphi_l\rangle \quad (3.41)$$

mit den Koeffizienten  $c_{in} = \langle \varphi_l | i, n \rangle$  darstellbar bleibt. Zustände dieser Art tragen die volle quantenmechanische Information und werden als *reine Zustände* bezeichnet. Falls  $|\varphi_l\rangle$  Eigenzustand einer Observablen  $\hat{O}$  ist, so ist ihr Wert in diesem Zustand festgelegt. Ist hingegen nicht bekannt, in welchem Zustand sich das System befindet, spricht man von einem *gemischten Systemzustand*. In diesem Fall muss eine statistische Mittelung

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_l p_l \langle \varphi_l | \hat{O} | \varphi_l \rangle \quad (3.42)$$

mit  $\sum_l p_l = 1$  vorgenommen werden, um eine Aussage über den bei einer Messung zu erwartenden Wert der Observablen machen zu können. Mit zwei beliebigen vollständigen Basissystemen  $\{|u\rangle\}_{u \in \mathbb{N}}$  und  $\{|u'\rangle\}_{u' \in \mathbb{N}}$  von  $\mathbb{H}$  folgt

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \sum_l \sum_{u, u'} p_l \langle \varphi_l | u \rangle \langle u | \hat{O} | u' \rangle \langle u' | \varphi_l \rangle \\ &= \sum_l \sum_{u, u'} p_l \langle u' | \varphi_l \rangle \langle \varphi_l | u \rangle \langle u | \hat{O} | u' \rangle \\ &= \sum_{u, u'} \langle u' | \left[ \sum_l |\varphi_l\rangle p_l \langle \varphi_l| \right] | u \rangle \langle u | \hat{O} | u' \rangle . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Man definiert den Dichteoperator als

$$\hat{\rho} := \sum_l |\varphi_l\rangle p_l \langle \varphi_l| , \quad (3.44)$$

was nach Transformation gemäß (3.41) in die Basis  $\{|i, n\rangle\}_{\substack{i \in \{\uparrow, \downarrow\} \\ n \in \{1, \dots, N\}}}$  übergeht zu

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{\substack{i, j \in \{\uparrow, \downarrow\} \\ n, m \in \{1, \dots, 2N\}}} |i, n\rangle \langle i, n | \varphi_l \rangle p_l \langle \varphi_l | j, m \rangle \langle j, m | \\ &= \sum_{\substack{i, j \in \{\uparrow, \downarrow\} \\ n, m \in \{1, \dots, N\}}} |i, n\rangle \rho_{i, j} \langle j, m | , \end{aligned} \quad (3.45)$$

wobei

$$\rho_{i, j} = \sum_l p_l \langle i, n | \varphi_l \rangle p_l \langle \varphi_l | j, m \rangle = \sum_l p_l c_{in} c_{jm} . \quad (3.46)$$

Aus der letzten Zeile von (3.43) folgt, dass sich mit dem so definierten Dichteoperator Erwartungswerte durch Spurbildung berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \sum_{u, u'} \rho_{u' u} O_{uu'} = \sum_{u'} (\hat{\rho} \hat{O})_{u' u'} = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{O}) \\ &= \sum_{u, u'=1} O_{uu'} \rho_{u' u} = \sum_{u'} (\hat{\rho} \hat{O})_{uu} = \text{Sp}(\hat{O} \hat{\rho}) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Die Spur

$$\text{Sp}(\dots) = \sum_u \langle u | \dots | u \rangle = \sum_{\substack{i \in \{\uparrow, \downarrow\} \\ n \in \{1, \dots, N\}}} \langle i, n | \dots | i, n \rangle \quad (3.48)$$

ist ein basisunabhängiger Operator auf  $\mathbb{H}$ , lässt sich aber in der Form (3.20) separieren, um aus dem vollen Dichteoperator  $\hat{\rho}$  die Dichteoperatoren  $\hat{\rho}_{\text{Feld}}$  und  $\hat{\rho}_{\text{Qubit}}$  auf den Unterräumen  $\hat{\mathbb{H}}_{\text{Feld}}$  und  $\hat{\mathbb{H}}_{\text{Qubit}}$  zu extrahieren:

$$\text{Sp} \hat{\rho} = \text{Sp}_{\text{Feld}} \text{Sp}_{\text{Qubit}} (\hat{\rho}_{\text{Feld}} \otimes \hat{\rho}_{\text{Qubit}}) = (\text{Sp}_{\text{Feld}} \hat{\rho}_{\text{Qubit}}) (\text{Sp}_{\text{Qubit}} \hat{\rho}_{\text{Qubit}}) \quad (3.49)$$

Die Freiheitsgrade der komplementären Unterräume lassen sich somit abspüren:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}_{\mathrm{Feld}}\hat{\rho} &= \sum_{n=1}^N \langle n | \hat{\rho} | n \rangle = \hat{\rho}_{\mathrm{Qubit}} \\ \mathrm{Sp}_{\mathrm{Qubit}}\hat{\rho} &= \sum_{i \in \{\uparrow, \downarrow\}} \langle i | \hat{\rho} | i \rangle = \hat{\rho}_{\mathrm{Feld}}\end{aligned}\tag{3.50}$$

Die Zeitentwicklung reiner Zustände gemäß der Schrödingergleichung

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_l\rangle &= \hat{H} |\varphi_l\rangle \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_l| &= \langle \varphi_l| \hat{H}\end{aligned}\tag{3.51}$$

setzt sich direkt in jene des Dichteoperators fort:

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_{l=1}^{2N} |\varphi_l\rangle p_l \langle \varphi_l| \\ &= i\hbar \sum_{l=1}^{2N} p_l \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_l\rangle \right) \langle \varphi_l| + |\varphi_l\rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle \varphi_l| \right) \right] \\ &= \sum_{l=1}^{2N} p_l \left[ \left( \hat{H} |\varphi_l\rangle \right) \langle \varphi_l| + |\varphi_l\rangle \left( - \langle \varphi_l| \hat{H} \right) \right] \\ &= \hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H} = [\hat{H}, \hat{\rho}]\end{aligned}\tag{3.52}$$

$$\rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]}\tag{3.53}$$

Obwohl von weitreichender Natur und hier nur phänomenologisch und situationsbezogen eingeführt, sei mit dieser als *von-Neumann-Gleichung* bekannten Bewegungsgleichung für den Dichteoperator die Zustandsbeschreibung des Systems abgeschlossen. Für kleine Hilberträume ist die Lösung der von-Neumann-Gleichung numerisch möglich. Dieser Umstand wird im folgenden Kapitel zur numerischen Auswertung des Modell ausgenutzt.

# Kapitel 4

## Analytische und numerische Diskussion

Bisher wurden die grundlegenden Prinzipien supraleitender Qubits und ihrer Wechselwirkung mit Licht erläutert, um darauf eine vollständig quantisierte Systembeschreibung aufzubauen. Eine Methode zur analytischen Diagonalisierung des resultierenden Hamiltonoperator ist nicht bekannt. In diesem Kapitel soll er daher ausführlich diskutiert werden. Dabei werden sowohl analytische Ansätze vorgestellt als auch numerische Ergebnisse diskutiert. Wie am Ende des vorangehenden Kapitels angemerkt, richtet sich ein besonderes Augenmerk auf den Einfluss großer Kopplungsstärken  $g$  nahe den Eigenfrequenzen der wechselwirkungsfreien Systeme, wie sie in supraleitenden Schaltkreisen realisiert werden können. Eingeleitet werden die Betrachtungen mit dem Fall kleiner Kopplung, für den eine analytische Lösung unter geeigneten Näherungen noch möglich ist. Die prinzipiellen Ergebnisse werden kurz vorgestellt, um eine Grundvorstellung der Systemdynamik zu vermitteln, die dann in der Folge als Referenz für das Verhalten bei größerer Kopplung dienen soll.

Betrachtet man die Wechselwirkung eines Atoms mit dem in einer Kavität resonierenden elektromagnetischen Feld, stellt man fest, dass die Moden des Feldes mit abnehmender Ausdehnung der Kavität zunehmend separieren. Stimmt die Photonenenergie  $\hbar\omega$  in einer Mode mit der Energiedifferenz  $\epsilon$  zweier elektronischer Zustände im Atom überein und liegen zusätzlich die übrigen elektronischen Übergänge energetisch weit entfernt, so lässt sich die Situation in guter Näherung als ein atomares Zweiniveausystem mit Grundzustand  $|\beta\rangle$  und angeregtem Zustand  $|\alpha\rangle$  in Dipol-Wechselwirkung mit nur einer Kavitätsmode verstehen. Der betrachtete effektive

Hamiltonoperator ist dann die Summe

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \hat{H}_{\text{At}} + \hat{H}_{\text{Ph}} + \hat{H}'_{\text{D}} \quad (4.1)$$

und lautet in der Basis  $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$

$$\boxed{\hat{H}_{\text{Rabi}} = \frac{\epsilon}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g\hat{\sigma}_x(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}, \quad (4.2)$$

wobei

$$\hat{H}_{\text{At}} = \frac{\epsilon}{2}\hat{\sigma}_z, \quad \hat{H}_{\text{Ph}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \quad \text{und} \quad \hat{H}'_{\text{D}} = \hbar g\hat{\sigma}_x(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (4.3)$$

Die Matrixrepräsentation ist

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \begin{pmatrix} \epsilon/2 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} & \hbar g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hbar g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) & -\epsilon/2 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Dieser wird üblicherweise *Rabi*-Hamiltonoperator genannt und unterscheidet sich vom Hamiltonoperator der Qubit-Feld-Wechselwirkung aus (3.38) in zwei wesentlichen Merkmalen. Einerseits steht die Wechselwirkung  $\hat{H}'_{\text{D}}$  mit dem Feld in den Übergangselementen statt auf der Diagonalen wie in  $\hat{H}_{\text{D}}$ . Andererseits ist das wechselwirkungsfreie System  $\hat{H}_{\text{At}} + \hat{H}_{\text{Ph}}$  vollständig diagonal. Beides ist eine Konsequenz der Basiswahl: Die atomaren Zustände  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  sind im Gegensatz zu den über den Josephson-Term  $\hat{\sigma}_x\Delta/2$  gekoppelten Suprastromzuständen  $|\uparrow\rangle$  und  $|\downarrow\rangle$  des Fluss-Qubits voneinander unabhängig und damit Eigenzustände von  $\hat{H}_{\text{At}} + \hat{H}_{\text{Ph}}$ . Und während in  $\hat{H}_{\text{Rabi}}$  die Wechselwirkung mit dem Feld nur unter Änderung des atomaren Zustands passiert, erhält sie die Suprastromzustände im Flussqubit.

Es wurde bereits qualitativ diskutiert, dass sowohl Cooper-Paar- und magnetische Fluss-Boxen am Symmetriepunkt als Zweizustandssysteme beschrieben werden können. Wie dies sich formal in der mathematischen Äquivalenz der Hamiltonoperatoren (3.38) und (4.2) widerspiegelt, wird in diesem Kapitel gezeigt werden. Zunächst soll jedoch im Regime schwacher Kopplung eine erste Vorstellung der Dynamik eines Zweiniveausystems in Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld vermittelt werden.

Die entscheidende Näherung, die  $\hat{H}_{\text{Rabi}}$  analytisch diagonalisierbar macht, folgt aus einer Beobachtung in  $\hat{H}'_{\text{D}}$ . Es wird zunächst  $\hat{\sigma}_x$  mit der Summe aus elektronischem Auf- und Absteigeoperator  $\hat{\sigma}_+$  und  $\hat{\sigma}_-$  identifiziert:

$$\hat{H}_{\text{D}} = \hbar g\hat{\sigma}_x(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \hbar g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (4.5)$$

mit  $\hat{\sigma}_+ := |\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_- := |\beta\rangle\langle\alpha| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ausmultiplizieren ergibt vier verschiedene Terme:  $\hat{\sigma}_+\hat{a}$  beschreibt die Anregung des Zweiniveausystems unter Absorption,  $\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger$  die Relaxation unter Emission eines Photons. Bei Resonanz  $\hbar\omega = \epsilon$  bleibt in den mit

$$\hat{\sigma}_+\hat{a} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger \quad (4.6)$$

assoziierten Prozessen die Energie erhalten, weshalb sie als *resonant* bezeichnet werden. Die übrigen zwei Terme  $\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger$  und  $\hat{\sigma}_-\hat{a}$  beschreiben die Anregung unter Emission und die Relaxation unter Absorption eines Photons, also Vorgänge, bei denen die Energie nicht erhalten ist. Im Gegensatz zu den erstgenannten bezeichnet man die mit

$$\hat{\sigma}_-\hat{a} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger \quad (4.7)$$

assoziierten Prozesse als *nicht resonant*. Durch eine unitäre Transformation gemäß

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{H}}_D &:= \hat{U}(t)\hat{H}_D'\hat{U}^\dagger(t) \\ \text{mit } U(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{At}}t}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

erkennt man, dass die nichtresonanten Terme der Wechselwirkung mit der Frequenz  $\omega + \epsilon/\hbar$ , die resonanten hingegen mit  $|\omega - \epsilon/\hbar|$  in der Zeit oszillieren. Für den Fall, dass

$$|\hbar\omega - \epsilon| \ll \hbar\omega + \epsilon, \quad (4.9)$$

vernachlässigt man unter der *Rotating Wave Approximation* (RWA) die nichtresonanten, schnell oszillierenden Terme mit der Argumentation, dass sie sich über alle relevante Zeiten  $\gtrsim 1/\omega$  herausmitteln. Diese Näherung führt auf den Hamiltonoperator, der das Jaynes-Cummings-Modell begründet:

$$\boxed{\hat{H}_{\text{JC}} = \frac{\epsilon}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)} \quad (4.10)$$

Die Gültigkeit der RWA ist allerdings nicht nur darauf angewiesen, dass die Verstimmung

$$\delta := \omega - \epsilon/\hbar \quad (4.11)$$

zwischen Zweiniveausystem und Feld klein ist im Vergleich zu den Einzelfrequenzen  $\omega$  und  $\epsilon/\hbar$ . Damit auch der absolute Beitrag der nichtresonanten Beiträge vernachlässigbar bleibt, muss das gleiche auch für die Kopplung  $g$  gelten:

$$g \ll \omega, \epsilon/\hbar \quad (4.12)$$

In diesem Rahmen sei diese Bedingung an das Verhältnis der Kopplungskonstanten zur Übergangsenergie mit dem Begriff schwacher Kopplung verknüpft. Bezieht man in die theoretische Beschreibung hingegen zusätzlich dissipative Prozesse ein, ist von Interesse, wie die Stärke der Kopplung gemessen an den Verlustgrößen ist. Intensivere Wechselwirkung wird dann als starke  $g/\omega \lesssim 0,1$  oder gar ultrastarke Kopplung bezeichnet. Letztere wird mit supraleitenden Schaltkreisen erstmalig realisierbar.

In der Basis

$$\{|\alpha, n\rangle, |\beta, n\rangle\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (4.13)$$

hat  $\hat{H}_{JC}$  Blockdiagonalstruktur:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{JC} &= \sum_{\substack{i,j' \in \{\alpha,\beta\} \\ n,m \in \mathbb{N}}} |i, n\rangle \langle i, n| \hat{H}_{JC} |j', m\rangle \langle j', m| \\ &= \begin{pmatrix} \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n\hbar\omega + \epsilon/2 & \hbar g\sqrt{n+1} & \vdots \\ \vdots & \hbar g\sqrt{n+1} & (n+1)\hbar\omega - \epsilon/2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die Kopplung ist also beschränkt auf die Zustandspaare

$$|\beta, n+1\rangle \longleftrightarrow |\alpha, n\rangle, \quad (4.15)$$

und die Eigenwerte von der voneinander unabhängigen  $(2 \times 2)$ -Unterblöcke betragen:

$$E_n^\pm = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \hbar \sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)} \quad (4.16)$$

Dabei wird

$$\boxed{\Omega_R = \sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)}} \quad (4.17)$$

als (generalisierte) *Rabi-Frequenz* bezeichnet. In der durch die von-Neumann- Gleichung (3.53) vorgegebene Zeitentwicklung wird sichtbar, dass es diese Frequenz ist, mit der Feld und Zweiniveausystem Anregung austauschen. Befinden sich anfangs  $n$  Photonen in der elektromagnetischen Mode, findet eine harmonische Oszillation in den Besetzungswahrscheinlichkeiten der Zustände (4.15) bzw.  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  statt, die als *Vakuum-Rabi-Oszillation* bezeichnet wird. Volle Inversion, d. h. Wahrscheinlichkeitsamplituden von 1, beobachtet man allerdings nur im Resonanzfall. Allgemein gilt für die Amplitude der Oszillationen:

$$A_n = \frac{4g^2(n+1)}{\delta^2 + 4g^2(n+1)} \quad (4.18)$$



Beide Fälle  $\delta = 0$  und  $\delta \neq 0$  sind in Abb. 4.1 gezeigt. Befindet sich das Feld in keinem Fockzustand, ist die Photonenstatistik in der Mode also durch eine Verteilungsfunktion  $p_n$  gegeben, die jedem Fockzustand  $|n\rangle$  eine Besetzungswahrscheinlichkeit zuordnet, so führt das System keine harmonischen Oszillationen aus. Im Falle kohärenter Besetzung  $p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}$  mit mittlerer Photonenzahl  $\langle n \rangle$  kommt es gar zum vorübergehenden Erlöschen und verzögerten Wiederaufleben der Oszillation. Dieses Phänomen ist als *Kollaps und Revival* bekannt.

Zu untersuchen ist nun, in wie weit sich die hier vorgestellten Charakteristika in das System aus Qubit und Feld mit dem Hamiltonoperator  $\hat{H}$  aus (3.38) fortsetzen, in dem die Bedingung kleiner Kopplungsstärken (4.12) nicht mehr erfüllt sein muss. Die zweite Situation, die die Näherung (4.11) des Jaynes-Cummings-Modells verletzt – der Fall  $\epsilon\hbar \simeq \omega$  und besonders  $\epsilon \ll \hbar\omega$  – wird von Irish et al. in [10] behandelt und soll in diesen Rahmen nicht weiter diskutiert werden.

Die prägnanteste Erkenntnis knüpft an die im Jaynes-Cummings-Modell beobachteten Rabioszillationen an. Die dort gefundene, Harmonizität im Anregungsaustausch zwischen Feld und Materie bei anfänglich in einem Fockzustand präparierten Feld wird für steigende Kopplungsstärken bald aufgebrochen (vgl. Abb. 4.2). Dies ist zu erklären mit dem zunehmenden Effekt der nichtresonanten Prozesse, der die Blockdiagonalstruktur auflöst und dazu führt, dass die gefundenen Oszillationen aus Überlagerungen mehr als einer Frequenz entstehen.

Um die zwei durch  $\hat{H}$  und  $\hat{H}_{\text{Rabi}}$  beschriebenen Systeme quantitativ vergleichen zu können, steht noch eine genauere Analyse der Struktur von  $\hat{H}$  aus, dessen Repräsentation in der Suprastrombasis lautete:

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_x + \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g \hat{\sigma}_z (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.38)$$

Führt man für einen beliebigen Operator  $\hat{O}$  die Schreibweise

$$\hat{O} = \hat{\mathbf{O}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{O}_x \hat{\sigma}_x + \hat{O}_y \hat{\sigma}_y + \hat{O}_z \hat{\sigma}_z \quad (4.19)$$

ein, lässt er sich als Vektor mit den Koordinaten  $\hat{O}_x, \hat{O}_y$  und  $\hat{O}_z$  zur Orthonormalbasis der Paulimatrizen verstehen. Der Qubitanteil  $\hat{H}_{\text{Qubit}} = \epsilon/2 \hat{\sigma}_z + \Delta/2 \hat{\sigma}_x$  liegt dann in der  $(x, z)$ -Ebene und bildet den Winkel  $\theta$  mit der  $x$ -Achse. Für diesen Winkel gilt

$$\tan \theta = \frac{\Delta}{\epsilon}. \quad (4.20)$$

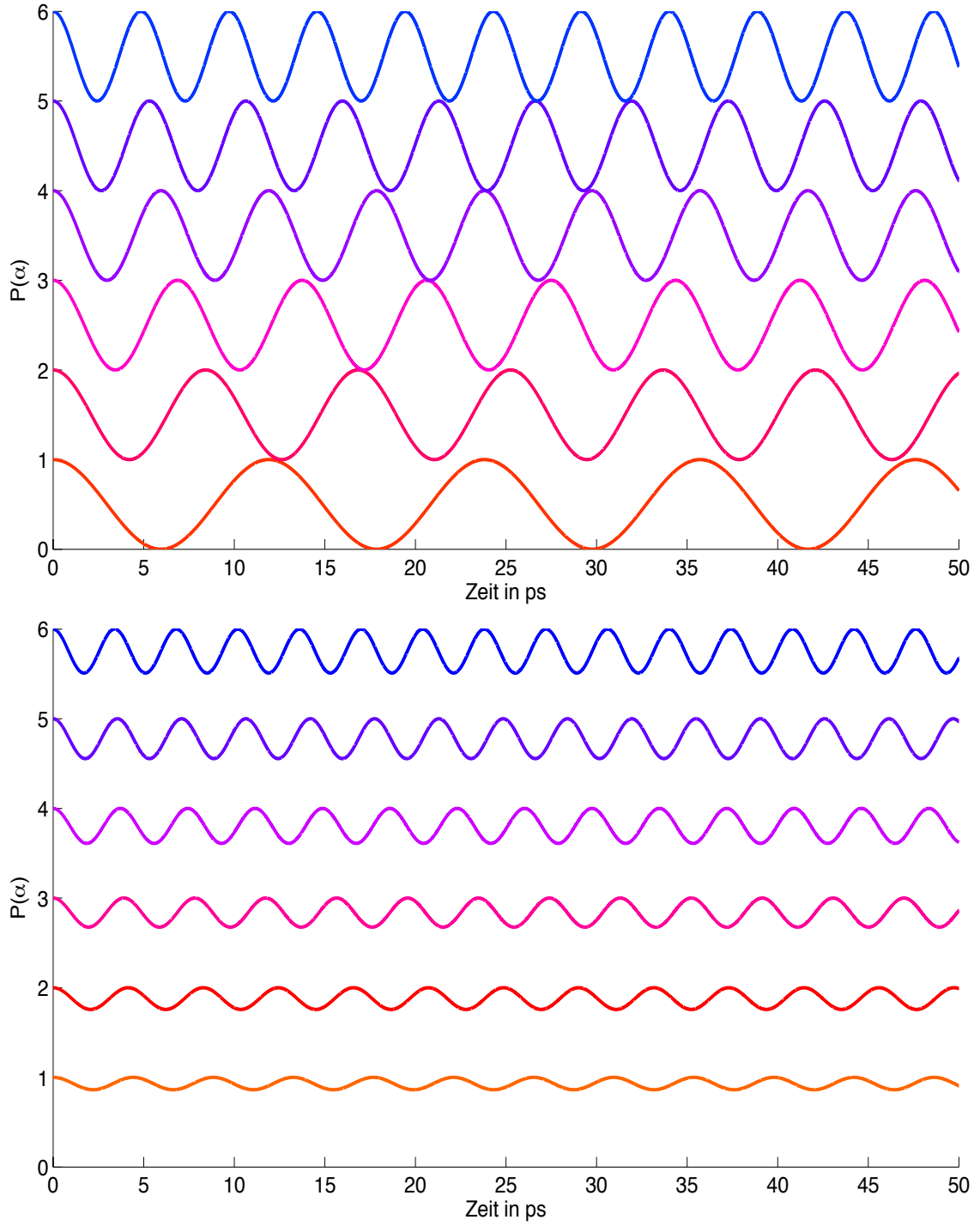


Abbildung 4.1: Rabi-Oszillationen für  $n = 0, 1, \dots, 5$  Photonen in der Lichtmode des Resonators bei anfangs angeregtem Zweinivausystem und Kopplungsstärke  $\hbar g = \epsilon/100$ , jeweils um  $n$  auf der y-Achse verschoben. Der repräsentative Levelabstand von  $\epsilon = (4,2 \text{ GHz})2\pi\hbar$  wurde aus [8] entnommen. *Links:* Volle Inversion im Resonanzfall  $\epsilon = \hbar\omega$ . *Rechts:* Unvollständige Inversion bei Verstimmung  $\hbar\delta = \hbar\omega - \epsilon = \epsilon/20$

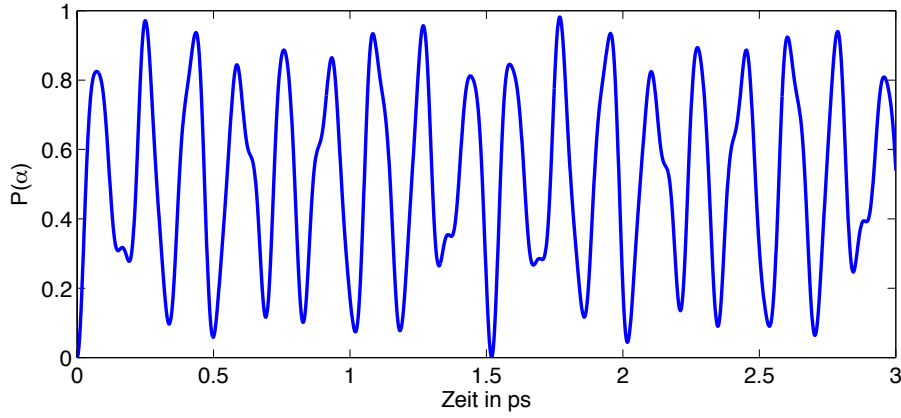


Abbildung 4.2: Zusammenbruch der Harmonizität im Anregungsaustausch zwischen den reinen Zuständen  $\{|+, n\rangle, |-, n+1\rangle\}$  von Qubit und Feld bei  $g = \omega/3$  in Resonanz.

Um die durch  $\hat{H}_{\text{Rabi}}$  beschriebene Situation herzustellen, muss ein Basiswechsel in die Eigenbasis des Qubits  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  stattfinden. Dies ist gleichbedeutend mit einer Drehung des Koordinatensystems um  $\theta$  in der  $(x, z)$ -Ebene. Ganz allgemein gelingen im Raum der Paulimatrizen Drehungen um einen Winkel  $2\phi$  um eine durch eine Normale  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  vorgegebene Achse mittels einer unitären Transformation

$$\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger \quad (4.21)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \exp \left( i\phi \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right), \\ (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \exp \left( i\phi \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \\ &= \sum_k \frac{(i\phi)^k}{k!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^k \\ &= \sum_k \frac{(i\phi)^{2k}}{(2k)!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^{2k} + \frac{(i\phi)^{2k+1}}{(2k+1)!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^{2k+1} \\ &= \sum_k \frac{(i\phi)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(i\phi)^{2k+1}}{(2k+1)!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \\ &= \cos \phi + i \sin \phi \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Wählt man  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\sigma}_y$  und  $\phi = \theta/2$ , vollzieht sich die Transformation für den mit  $\omega_Q = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}/\hbar$  über  $\theta$  parametrisierten Qubitanteil

$$\hat{H}_{\text{Qubit}} = \hat{\mathbf{H}}_{\text{Qubit}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\omega_Q}{2} (\hat{\sigma}_x \sin \theta + \sigma_z \cos \theta) \quad (4.24)$$

wie folgt:

$$\begin{aligned}
\hat{H}'_{\text{Qubit}} &= \left( \cos \frac{\theta}{2} + i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \sin \frac{\theta}{2} \right) \hat{H}_{\text{Qubit}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \sin \frac{\theta}{2} \right) \\
&= \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y \right) \hat{H}_{\text{Qubit}} \left( \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y \right) \\
&= \frac{\omega_Q}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \hat{H}_{\text{Qubit}} + i \frac{\omega_Q}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \hat{\sigma}_y, \hat{H}_{\text{Qubit}} \right] + \frac{\omega_Q}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y \hat{H}_{\text{Qubit}} \hat{\sigma}_y
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Beachtet man die Algebra  $\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = \delta_{ij} + i \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k$  der Paulimatrizen, ist

$$\begin{aligned}
i \left[ \hat{\sigma}_y, \hat{H}_{\text{Qubit}} \right] &= i \left[ \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_x \sin \theta + \hat{\sigma}_z \cos \theta \right] \\
&= i \left( -i \hat{\sigma}_z \sin \theta + i \hat{\sigma}_x \cos \theta - i \hat{\sigma}_z \sin \theta + i \hat{\sigma}_x \cos \theta \right) \\
&= 2(\hat{\sigma}_z \sin \theta - \hat{\sigma}_x \cos \theta)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\hat{H}'_{\text{Qubit}} &= \frac{\omega_Q}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( \hat{\sigma}_x \sin \theta + \hat{\sigma}_z \cos \theta \right) \\
&\quad - 2 \frac{\omega_Q}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left( \cos \theta \hat{\sigma}_x - \sin \theta \hat{\sigma}_z \right) \\
&\quad - \frac{\omega_Q}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left( \hat{\sigma}_x \sin \theta + \hat{\sigma}_z \cos \theta \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Mit den Additionstheoremen  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$  und  $\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$  ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\hat{H}'_{\text{Qubit}} &= \frac{\omega_Q}{2} \cos \theta \left( \hat{\sigma}_x \sin \theta + \hat{\sigma}_z \cos \theta \right) - \omega_Q \sin \theta \left( \hat{\sigma}_x \cos \theta - \hat{\sigma}_z \sin \theta \right) \\
&= \frac{\omega_Q}{2} \hat{\sigma}_z.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Die Diagonalisierung des Hamiltonoperators für das wechselwirkungsfreie Qubit lautet also

$$\hat{H}'_{\text{Qubit}} = \sum_{\sigma \in \{+, -\}} |\sigma\rangle \langle \sigma| \hat{H}_{\text{Qubit}} |\sigma\rangle \langle \sigma| = e^{i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y} \hat{H}_{\text{Qubit}} e^{-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y} = \frac{\omega_Q}{2} \hat{\sigma}_z. \tag{4.29}$$

Während  $\hat{H}_{\text{Feld}}$  invariant gegenüber der Drehung im Raum der Paulimatrizen ist, bildet der vorher diagonale Teil  $\hat{H}_{\text{D}}$  nach der Rotation den Winkel  $-\theta$  mit der  $\hat{\sigma}_z$ -Achse, sodass sich der Hamiltonoperator in der Qubit-Basis  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

$$\hat{H}' = e^{i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y} \hat{H} e^{-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y} \tag{4.30}$$

mit  $\hbar\omega_Q = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$  und  $\tan\theta = \Delta/\epsilon$  liest als

$$\hat{H}' = \frac{\hbar\omega_Q}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)(\hat{\sigma}_z \cos\theta - \hat{\sigma}_x \sin\theta). \quad (4.31)$$

Am Symmetriepunkt sind die Suprastromzustände entartet,  $\epsilon = 0$  bzw.  $\tan\theta = \pi/2$  und damit der Wechselwirkungsteil proportional zu  $\hat{\sigma}_x$ . Dann beschreibt (4.31) ein Zweiniveausystem mit dem energetischen Abstand  $\Delta$  und ist äquivalent zum Rabi-Hamiltonoperator (4.2). Die numerische Diagonalisierung (Abb. 4.4) gibt einen Einblick in die Form des Spektrums. Die Grundstruktur der sich im Abstand der Photonenenergie wiederholenden Qubitdispersion  $\omega_Q(\epsilon) = \pm\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$  wird für steigende Kopplungsstärken und der damit verbunden Levelabstoßung zunehmend aufgeweicht. Ein analytischer Ansatz zur Quantifizierung der Verschiebung in den Übergangsenergien bei ultrastarker Kopplung unterwirft den Hamiltonoperator aus (4.31) weiteren unitären, zur Gruppe der *Bogolioubov-Transformationen* zählenden Transformationen der Art

$$\hat{H}'' = e^S \hat{H}' e^{-S} \quad (4.32)$$

mit antihermiteschem  $S$ . Für den ersten Schritt geben Forn-Diaz et al. [8]  $S = \gamma(\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger - \hat{\sigma}_-\hat{a})$  mit  $\gamma = g \sin\theta/(\omega_Q + \omega)$  an und können so die nichtresonanten Terme eliminieren. Gleichzeitig tauchen Mehrteilchenprozesse auf, die zum Großteil vernachlässigt werden können. Die zugrundeliegende Prozedur wird in [11] näher beleuchtet. Hier sei die Diskussion allein auf das Ergebnis beschränkt, das darin besteht, in dem entstandenen blockdiagonalen Hamiltonoperator den *Bloch-Siegert-Shift* als

$$\omega_{BS} = \frac{g^2 \sin^2\theta}{\omega_Q + \omega} \quad (4.33)$$

identifizieren zu können.  $\hat{H}'$  wurde numerisch diagonalisiert, um diese Energieverschiebung für die von Forn-Diaz et al. experimentell realisierten Parameter in Abb. 4.3 darzustellen.

Der Bloch-Siegert-Shift im Spektrum des Rabi-Hamiltonoperators im Vergleich zu jenem des Jaynes-Cummingsmodells spiegelt direkt den Einfluss der nichtresonanten Terme bei wachsender Kopplungsstärke wieder. Während der Einfluss der resonanten Terme mit ihrer Oszillationsfrequenz  $\omega_Q - \omega$  wächst (Vgl. (4.18)), verhält sich die Größe des Bloch-Siegert-Shifts reziprok zur Oszillationsfrequenz  $\omega_Q + \omega$  der verantwortlichen nichtresonanten Terme. Dies bedeutet, dass besonders auch die relative Bedeutung  $\omega_{BS}/\Omega_R$  der nichtresonanten Terme mit sinkenden Energieskalen wachsen muss. Dies begründet seine Relevanz für Qubit-Oszillator-Systeme,

die im Mikrowellenbereich und damit energetisch weit unterhalb der üblicherweise vom Jaynes-Cummings-Modell beschriebenen Phänomene im sichtbaren Spektralbereich liegen. Dass die Verschiebung vom Symmetriepunkt des Qubits nach außen hin rasch mit  $\sin^2 \theta$  abfällt ist mit dem Argument des dann schwindenden Charakters eines Zweiniveausystems mit Kopplung in  $\hat{\sigma}_x$  verständlich, das die Klassifizierung in resonanten und nichtresonante Terme obsolet macht.

Während die erwähnte Möglichkeit der Bogoliubov-Transformationen das Spektrum verständlich machen kann, setzt ein Ansatz zur Analyse der Gesamtdynamik des Systems aus Qubit und Feld vielmehr beim ursprünglichen Hamiltonoperator in der Suprastrombasis an. Es wird hier die Ähnlichkeit von

$$\hat{H} = \frac{\epsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_x + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g \hat{\sigma}_z (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.38)$$

zum Hamiltonoperator des *Modells wechselwirkungsfreier Bosonen* ausgenutzt. Dieses in [12] ([13]) ausgiebig behandelte, exakt lösbare Modell beschreibt die Kopplung einer Anzahl von Bosonen an den angeregten Zustand eines Teilchens. Anwendung findet es zum Beispiel bei der Beschreibung der Kopplung von Gitterschwingung im Kristall an elektronische Übergänge in den Atomen. Als zugrundeliegende Modellvorstellung dient ein Federpendel mit angehängter Ladung, das harmonische Schwingungen um eine Ruhelage ausführt, die sich verschiebt, sobald ein homogenes äußeres elektrisches Feld eingeschaltet wird. Angewendet auf den vorliegenden Fall versteht sich die elektromagnetische Mode als das Federpendel mit angehängter Ladung und das supraleitende Qubit als das äußere Feld. Im Fall des Ladungs-Qubits geschieht die Rechtfertigung dieses Modell am intuitivsten: Die bosonischen Cooperpaare in der Cooper-Paar-Box tragen die Energie eines Oszillators (vgl. Abb. 2.3) mit Gleichgewichtslage bei  $n_G$ . Wechselt das Qubit seinen Zustand, indem ein Cooperpaar aus der Box heraus oder in sie hinein tunnelt, wird sich die Coulomb-Energie der Ladungsverteilung und somit die Gleichgewichtslage des Oszillators verschoben haben. Die gleiche Situation herrscht auch im Fluss-Qubit, in dem ein Übergang  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$  eine Veränderung des magnetischen Moments  $\mu$  bewirkt und damit die Wechselwirkungsenergie mit dem magnetischen Feld des Oszillators verändert. Der diesem Modell entsprechende Hamiltonoperator hätte in der Suprastrombasis die Form

$$\hat{H}_{\text{WFB}} = \hat{\sigma}_z \left[ \epsilon + \hbar g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \right] + \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (4.34)$$

Sofort wird ersichtlich, dass es der Josephson-Term  $\frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_x$  ist, der das Qubit-Oszillator-System von einer vollständig korrekten Beschreibung durch das Modell wechselwirkungsfreier Bosonen trennt. Offensichtlich verhalten sich supraleitenden Qubits in

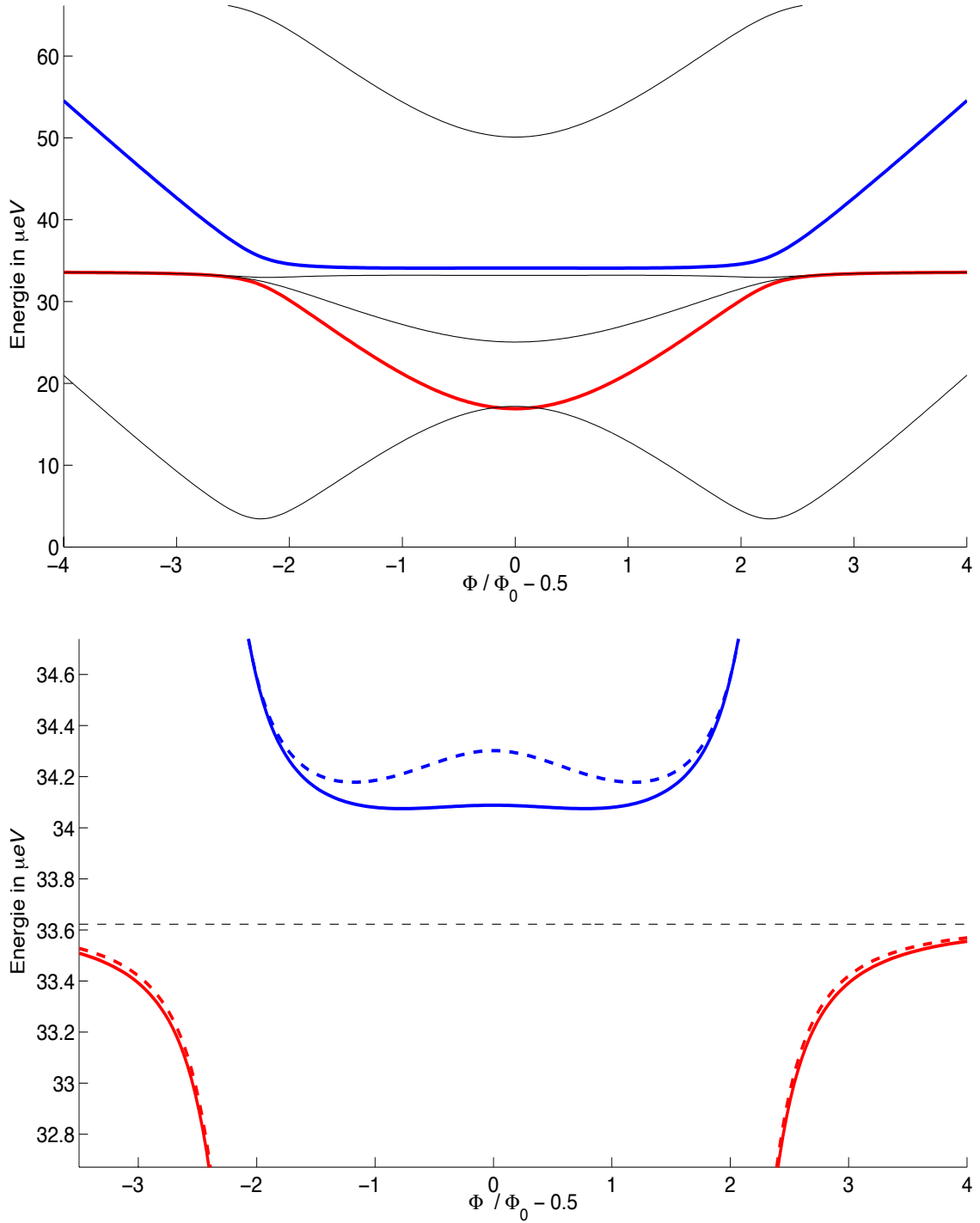


Abbildung 4.3: Reproduktion der experimentellen Ergebnisse aus [? ]. Dargestellt sind die Übergangsenergien im Spektrum des Rabi-Hamiltonoperators aus (4.2) für verschiedene Flussstärken  $\Phi$ . Qubit und Feld sind resonant mit  $\omega = \omega_Q = (4,2 \text{ GHz})2\pi$  (---) und koppeln mit  $g = \epsilon/10$ . *Oben:* Die energetisch niedrigsten sechs Übergänge. *Unten:* Vergrößerung der antikreuzenden Dispersionen von Qubit und Photon am Symmetriepunkt zu oberem (—, blau) und unterem Dispersionszweig (—, rot). Vergleich zum Jaynes-Cummings-Hamiltonian aus (4.10) (---/---) mit Beobachtung des Bloch-Siegert-Shifts von  $\omega_{\text{BS}} \approx (50 \text{ GHz})2\pi$

ihrer Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld also weder in Gänze wie die üblicherweise in der Quantenoptik betrachteten Zweiniveausysteme ( $\hat{H}_{\text{Rabi}}$ ) noch werden sie durch das Modell wechselwirkungsfreier Bosonen ( $\hat{H}_{\text{WfB}}$ ) vollständig korrekt beschrieben. Der Mischcharakter des Systems wird erfasst durch den Winkel  $\theta = \arctan(\Delta/\epsilon)$ . Für  $\theta = \pi/2$  wird das System durch  $\hat{H}_{\text{Rabi}}$  vollständig beschrieben und kann für kleine Kopplung und nahe Resonanz mit dem Feld durch das Jaynes-Cummings-Modell angenähert werden. Dieser Fall wird am Symmetriepunkt des Systems erreicht. Für  $\theta = 0$  ist die korrekte Beschreibung durch  $\hat{H}_{\text{WfB}}$  gegeben und das System nimmt reine verschobene Oszillatorzustände ein. Für geringe Josephson-Energien  $E_J$  verglichen mit  $E_C$  bzw.  $E_L$  wie in (2.15) und (2.25) vorausgesetzt koppeln diese verschobenen Oszillatorzustände. Eine aus diesem Ansatz resultierende Analyse der Systemdynamik wird in [10] durchgeführt.

Abschlusspunkt der vorliegenden Arbeit bildet Abb. 4.4, die die gesammelten Erkenntnisse zusammenfassend visualisiert. Gezeigt ist in qualitativer Weise, wie das Spektrum eines Ladungs-Qubits auf wachsende Kopplungsstärken mit zunehmender Levelabstoßung reagiert und wie die Rotating Wave Approximation im Regime ultrastarker Kopplung versagt.



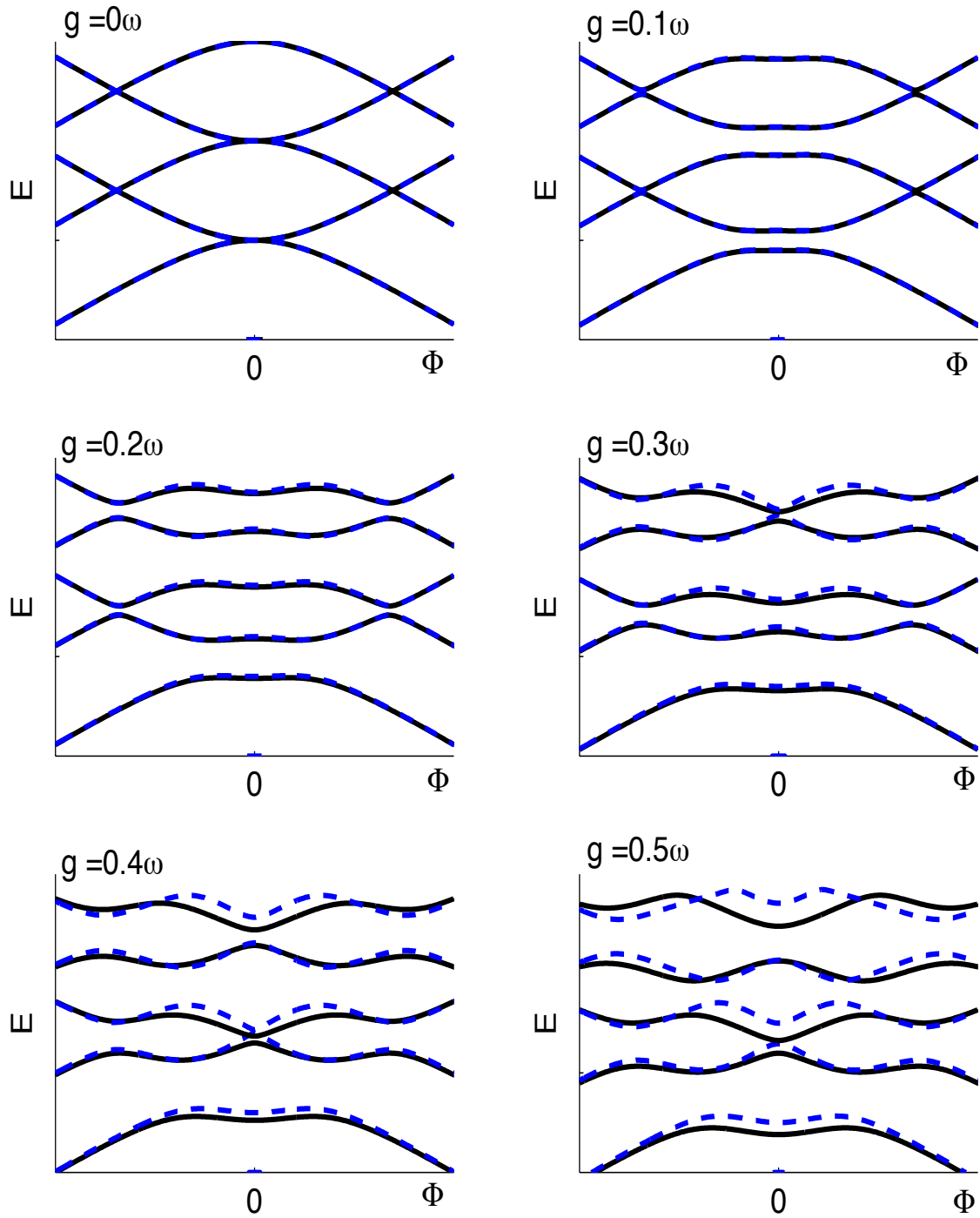


Abbildung 4.4: Qualitativer Vergleich der Spektren von vollständigem Hamiltonoperator  $\hat{H}$  (—) mit dem von  $\hat{H}_{JC}$  (- - -) in Resonanz bei verschiedenen Verhältnissen zwischen Kopplungsstärke  $g$  und Photonenfrequenz  $\omega$ .

# Zusammenfassung und Ausblick

Aufbauend auf elementaren Aussagen der Ginzburg-Landau-Theorie wurden in dieser Arbeit die grundlegenden Funktionsprinzipien supraleitender Schaltkreise und dabei insbesondere die Wirkung von Josephson-Kontakten als nichtlineare Induktivitäten erläutert. Bei dem Übergang zu einer vollständig quantenmechanischen Beschreibung konnten Ladung und magnetischer Fluss als kanonisch konjugierte Observablen identifiziert werden, die zwei komplementäre Regime supraleitender Schaltkreise aufspannen. Anhand einer Präsentation der entsprechenden zwei fundamentalen technischen Realisierungen konnten die Bedingungen verstanden werden, unter denen supraleitende Schaltkreise Qubit-Eigenschaften entwickeln und damit effektiv als Zweiniveausysteme beschreibbar werden. Als essentiell für das Verständnis der supraleitenden Qubits stellte sich dabei das allgemeine quantenmechanische Phänomen der gegenseitigen Abstoßung von Dispersionzweigen an ursprünglichen Entartungspunkten bei einsetzender Wechselwirkung dar.

Der mathematische Formalismus zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen supraleitenden Qubits mit einem äußeren elektromagnetischen Feld wurde speziell anhand der Kopplung zwischen einem Ladungs-Qubit und einem LC-Resonator vorgestellt und umfasste die Herleitung des Hamiltonoperators in Dipolnäherung. Vor diesem Hintergrund wurde eine Einbettung der gesammelten Erkenntnisse in den Kontext sowohl gängiger Modelle als auch aktueller Forschung möglich. Die Möglichkeit, mit supraleitenden Qubits als makroskopischen Systemen bisher unbekannte Stärken der Licht-Materie-Kopplung zu erreichen, wurde als Anlass für eine analytisch geführte und numerisch gestützte Diskussion benutzt, die die Kriterien enthüllte, in denen sich Qubit-Oszillator-Systeme von bekannten Systemen unterscheiden. Insbesondere wurde im Vergleich mit dem in der Quantenoptik gängigen Jaynes-Cummings-Modell bei einer Kopplungsstärke von  $1/10$  der Übergangsfrequenz der auch experimentell beobachtete Bloch-Siegert-Shift im Energiespektrum gefunden. Gleichzeitig wurde ein Zusammenbruch in der Harmonizität des im Jaynes-Cummings-Modell als Vakuum-Rabioszillation bezeichneten Anregungsaustauschs zwischen Licht und Materie beobachtet. Ein weiterer Vergleich mit dem Modell

wechselwirkungsfreier Bosonen machte den Charakter der Qubit-Oszillator-Systeme verständlich als eine durch die Größe der Josephson-Energie bestimmte Mischform aus den üblicherweise in der Quantenoptik betrachten und den durch das Modell wechselwirkungsfreier Bosonen beschriebenen Systemen.

Von den Aspekten, in denen diese Arbeit den vorgestellten Systemen nicht gerecht werden konnte, sei abschließend nur der bedeutendste genannt, welcher bisher nur als Randbemerkung angeklungen ist. Eine der elementaren Anforderungen an Qubits als potentielle Informationseinheiten ist ihrer Fähigkeit zur zeitlich möglichst ausgedehnten Aufrechterhaltung eines einmal präparierten Zustands. Die damit verbundene Forderung nach möglichst verschwindender Reaktion auf Störeffekte in den Schaltkreisen steht dem Wunsch der gezielten Kopplung mehrerer Qubits entgegen. Die Aufgabe, existierende Theorien zur Quantendissipation auf supraleitende Qubits anzuwenden, ist zentraler Gegenstand der aktuellen Forschung und eine entscheidende Schwelle in der Vision des Quantencomputers.

# Anhang A

## Hamiltonoperator im elektromagnetischen Feld

Aus der Elektrodynamik ist bekannt, dass auf ein mit der Ladung  $q$  behaftetes Punktteilchen im elektromagnetischen Feld die Lorentzkraft  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  wirkt,

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (\text{A.1})$$

Elektrisches und magnetisches Feld leiten sich aus dem elektrostatischen Potential  $\Phi(\mathbf{r})$  und dem Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Das zweite Newton'sche Axiom  $\mathbf{F} = m \, d\mathbf{v}/dt$  mit der Teilchenmasse  $m$  liefert nach Einsetzen die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt}\mathbf{v} &= q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - q \left[ \nabla\Phi + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \right] \\ &= q\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - q \left[ \nabla\Phi + \left\{ \frac{d}{dt}\mathbf{A} - \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right\} \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Dabei wurde die totale Zeitableitung des Vektorpotentials benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Führt man die folgende intuitive Schreibweise für den auftretenden Vektorgradienten ein, so lässt sich (A.3) auch ohne Rückgriff auf die Komponentenschreibweise

vereinfachen.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} &= (\nabla \mathbf{A}) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{A}_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{A}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{A}_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \left[ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Wendet man jetzt auf das doppelte Kreuzprodukt in (A.3) die Graßmann-Identität (bac-cab-Regel) an,

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}, \quad (\text{A.6})$$

wird sofort ersichtlich, dass der Vektorgradient in der Bewegungsgleichung herausfällt. So ergibt sich:

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= q \left[ \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] - q \left[ \nabla \Phi + \dot{\mathbf{A}} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] \\ &= q \nabla \left[ \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \Phi \right] - q \dot{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Für die zugehörige Lagrangefunktion  $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  muss die Euler-Lagrange-Gleichung gelten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Schreibt man (A.7) als

$$q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \Phi \right] - \frac{d}{dt} \left[ m\mathbf{v} + q\mathbf{A} \right] = 0, \quad (\text{A.7})$$

wird durch Vergleich mit (A.8) sichtbar:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - \Phi) \quad (\text{A.9})$$

Der kanonische Impuls ergibt sich daraus zu

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}, \quad (\text{A.10})$$

sodass die Legendretransformation der Lagrange- auf die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  wie folgt verläuft:

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(\text{A.9})}{=} m\mathbf{v}^2 + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + q\Phi \\ &\stackrel{(\text{A.10})}{=} \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Ersetzung der kanonischen Variablen  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  durch die zugehörigen quantenmechanischen Operatoren  $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$  führt direkt auf den gesuchten Hamiltonoperator  $\hat{H}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$  im elektromagnetischen Feld. In der Ortsbasis ist  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$  und  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ , sodass das Ergebnis für die quantisierte Teilchenbewegung lautet:

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2 + q\Phi} \quad (\text{A.13})$$

Ausgeschrieben liest sich dieser Hamiltonoperator als

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2 + i\frac{\hbar q}{2m}(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) + q\Phi . \quad (\text{A.14})$$

In der hier nicht näher diskutierten Coulomb-Eichung  $\nabla \cdot \mathbf{A} \stackrel{!}{=} 0$  wird er zu

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{q^2}{2m}\mathbf{A}^2 + i\frac{\hbar q}{m}\mathbf{A} \cdot \nabla + q\Phi \quad (\text{A.15})$$

und man identifiziert den Kopplungsterm

$$i\frac{\hbar q}{m} = -\frac{q}{m}\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} , \quad (\text{A.16})$$

der die Wechselwirkung zwischen Impuls- und Feldanteil manifestiert. In [14] wird ausführlich gezeigt, dass dieser Term gerade der Kopplung  $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$  eines Dipols  $\mathbf{d}$  und das elektrische Feld entspricht.

# Literaturverzeichnis

- [1] Alexey V. Kavokin, Jeremy J. Baumberg, Guillaume Malpuech, and Fabrice P. Laussy. *Microcavities*. Oxford University Press, 2007.
- [2] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, Dec 1957.
- [3] J. C. Gallop. *SQUIDS, the Josephson Effects and Superconducting Electronics*. The Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology. Adam Hilger, 1991.
- [4] Werner Buckel and Reinhold Kleiner. *Supraleitung - Grundlagen und Anwendungen*. WILEY-VCH, 2004.
- [5] T. P. Spiller J. F. Annett, B. L. Gyorffy. Superconducting devices for quantum computation. In S. Sarkar, editor, *Exotic States in Quantum Nanostructures*, chapter 1, pages 165–212. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [6] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J. S. Tsai. Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box. *Nature*, 398:786–788, 1999.
- [7] J. Q. You and Franco Nori. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits. *Nature*, 474:598–597, 2011.
- [8] P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos, J. J. García-Ripoll, E. Solano, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij. Observation of the bloch-siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime. *Phys. Rev. Lett.*, 105, Nov 2010.
- [9] Leonard I. Schiff. *Quantum Mechanics*, volume 3 of *International series in pure and applied physics*. McGraw-Hill, 1968.
- [10] E. K. Irish, J. Gea-Banacloche, L. Martin, and K. C. Schwab. Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator. *Phys. Rev. B*, 2005.

- [11] Andrei B. Klimov and Sergei M. Chumakov. *A group-theoretical approach to quantum optics: models of atom-field interactions*. WILEY-VCH, 2009.
- [12] Gerald D. Mahan. *Many-Particle Physics*. Physics of solids and liquids. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 3 edition, 2000.
- [13] Gerd Czycholl. *Theoretische Festkörperphysik*. Springer-Verlag, 2008.
- [14] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, and Gilbert Grynberg. *Photons and Atoms – Introduction to Quantum Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [15] Platon. Politeia. In *Sämtliche Werke*, volume 2, pages 514–541. Rowohlt, 1999.



# Nachwort

In Platons Höhlengleichnis [15] ist das Licht Metapher für die menschliche Erkenntnisfähigkeit. Das nimmt nicht Wunder, ist es bei den meisten Menschen doch der Sehsinn ist, der die anderen vier bei weitem dominiert. Die Wahrnehmung der Welt auf diesem Wege ist uns allein möglich, indem das Licht von den Dingen zurückgeworfen werden, unsere Netzhaut durchdringen und Nervenimpulse in unserem Sehnerv auslösen kann. Dieser Urprozess des Belebten ist komplexeste Interaktion von Licht und Materie. Vielleicht seit Platon ist er Ursprung eines ganzen Bedeutungsgeflechts der Erkenntnistheorie, das sich nur flüchtig in der etymologischen Verwandtheit von “sehen” (lat.: vid-) und “wissen” (altgr.: *oîd-*) spiegelt.

1905 erkannte Albert Einstein den *Photoeffekt* und öffnete damit die Augen für die Quantenmechanik, die heute die Physik beherrscht und seit einem halben Jahrhundert einen ungeahnten Erkenntnischub brachte. Wie würde sich in diese bemerkenswerte Reihe ein Quantencomputer einfügen?

# Danksagung

Nach drei Jahren an der Otto-Hahn-Alle und einem Sommer am Institut für theoretische Physik möchte ich diese Möglichkeit nicht verstreichen lassen, versuchsweise einen Teil meiner Dankbarkeit auszudrücken.

Zuvorderst bedanke ich mich bei allen, die über diese Arbeit mehr als nur schmunzeln und mir die ein oder andere Nachlässigkeit verzeihen können.

In der Hoffnung, dass die in dieser Arbeit zusammengetragenen bescheidenen Gedanken in seiner Arbeitsgruppe auch nur zu einem Bruchteil fortleben können, bedanke ich mich herzlichst bei Herrn Prof. Dr. Frank Jahnke dafür, dass er mir erlaubte, nicht nur einen ersten wahrhaften Eindruck von der theoretischen Physik zu bekommen.

Dafür, dass Du mir dabei während der letzten Monate mit unbedingter Hilfe beigestanden hast, will ich Dir von Herzen danken, Christopher. Außerdem danke ich Paul Gartner für sein inspirierendes Andante, Andreas für sein herzliches Willkommen und Dir Matthias, dafür dass ich wieder Tee trinke.

Flo, Dir sage ich Danke für Deine Gelassenheit und Deine Akribie, Deinen Humor und Deinen Ernst und dafür, dass Du mich im Praktikum durch das erste Semester gehievt hast.

Mein größter Dank aber gilt allen Menschen, die mir gezeigt haben, was die wichtigste Bedeutung von Relativität ist.