

Erzeugung verschränkter Photonenpaare mit Halbleiter-Quantenpunkten

Bachelor-Arbeit

vorgelegt von

Johanna Kleinen

am 22.09.2011

**im Institut für Theoretische Physik
der Universität Bremen**

Matrikelnummer:	2293860
Fachbereich:	01
Erstgutachter:	Prof. Dr. F. Jahnke
Zweitgutachter:	Prof. Dr. G. Czycholl

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
2	Theorie: Grundlagen	9
2.1	Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	9
2.2	Licht-Materie-Wechselwirkung im Zwei-Niveau-System	12
2.2.1	Das Jaynes-Cummings Modell	12
2.2.2	Formulierung im Dichtematrixformalismus	14
2.3	Wechselwirkung mit einem Reservoir	16
3	Theorie: Biexziton-Exziton-Kaskade und Verschränkung	19
3.1	Elektronische und photonische Freiheitsgrade	19
3.2	Jaynes-Cummings-Kopplung	23
3.3	Dissipation in der Biexziton-Exziton Kaskade	23
3.4	Zur Verschränkung	24
3.5	Bewegungsgleichungen der Dichtematrixelemente	29
4	Ergebnisse	33
4.1	Kaskadenzerfall ohne Einfluss einer Kavität	33
4.2	Einfluss der Kavität	35
4.3	Erwartungswert mit gemischten Operatoren	38
5	Zusammenfassung und Ausblick	41
6	Anhang	43

1 Einführung

Verschränkung stellt eine entscheidende Ressource im Wissenschaftsfeld der Quanteninformatik dar. Mit ihrer Hilfe lassen sich bestimmte Aufgaben schneller oder sicherer ausführen als auf klassische Art und Weise [5]: So ermöglicht die Verwendung verschränkter Quantensysteme unter anderem Quantenteleportation (theoretische Formulierung erfolgte 1993 [2], experimentell realisiert 1997 [4]), effiziente und extrem schnelle Algorithmen für Quantencomputer (z.B. das Faktorisierungsverfahren von P. Shor [20]) und Protokolle zur Verteilung sicherer Kommunikations-Schlüssel (nach A. Ekert [10]).

Um solche Anwendungen experimentell realisieren zu können, werden verlässliche Quellen verschränkter Quantensysteme (hier: Photonen) benötigt. Dabei muss die Quelle nicht nur Photonen mit einem möglichst hohen Verschränkungsgrad erzeugen, sondern diese “on demand” einzeln emittieren. Um derartiges nichtklassisches Licht entstehen zu lassen, benötigt man eine Quelle, die kontrolliert und steuerbar verschränkte Photonenpaare erzeugt. Zur Zeit werden dazu Verfahren genutzt, die entweder auf stark abgeschwächten Laserpulsen oder parametric down-conversion basieren [16], was den Nachteil hat, dass die Photonen dabei immer noch zufällig (gemäß einer Poisson-Verteilung) generiert werden. Alternativ lassen sich Halbleiter-Quantenpunkte (zu sehen in Abbildung 1.1) als deterministische (getriggerte) Einzelphotonenquellen verwenden. Diese sind dreidimensionale Strukturen im Nanometerbereich, die durch Einschluss von Elektronen und Löchern in allen drei Dimensionen ein diskretes Energiespektrum besitzen. Sie ermöglichen gesteuerte Einzelphotonen-Emission nach gepulster Anregung der Quantenpunkt-Zustände [16] (P. Michler). Darüber hinaus stellen Halbleiter-Quantenpunkte eine vielversprechende Quelle zur Erzeugung verschränkter Photonenpaare dar, da solche unter gewissen Voraussetzungen bei einem gekoppelten Zerfallsprozess, einer Kaskade, entstehen.

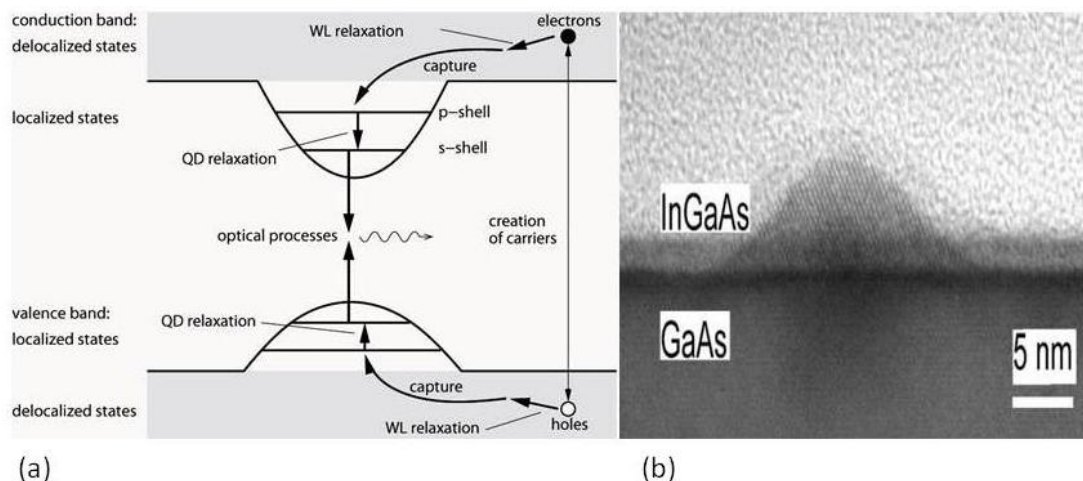


Abbildung 1.1: Schematische Skizze der Exzitonen-Bildung im Quantenpunkt (a) [13] und Bild eines realen Quantenpunktes (b) [1].

DIE BIEXZITON-EXZITON-KASKADE IM QUANTENPUNKT

Im Folgenden werden selbstorganisiert gewachsene Quantenpunkt-Strukturen betrachtet, bei denen die eigentlichen Quantenpunkte, die den dreidimensionalen Einschluss der Ladungsträger liefern, sich auf einer dünnen Benetzungsschicht befinden. Dabei ist die Bandlücke der Materialien der Quantenpunkte und der Benetzungsschicht kleiner als die der sie umgebenden Barriere, sodass Ladungsträger das Potential der Quantenpunkt-Struktur nicht verlassen können. Regt man einen Quantenpunkt mit einem optischen Puls an, so werden Ladungsträger je nach Frequenz der Anregung in Benetzungsschicht- oder in höheren lokalisierten Quantenpunkt-Zuständen erzeugt. Diese Ladungsträger in angeregten Zuständen relaxieren schnell aufgrund von Streuprozessen, die sowohl untereinander als auch mit Phononen stattfinden, in die energetisch niedrigsten Quantenpunkt-Zustände [13]. Auf diese Weise werden Elektron-Loch Paare "eingefangen". Den korrelierten Verbund aus einem Elektron und einem Loch bezeichnet man als Exziton. Auf diese Weise können multi-exzitonische Zustände erzeugt werden, die in einer Kaskade zerfallen, d.h. dass Quasiteilchen, die aus mehreren Exzitonen zusammengesetzt sind, nacheinander in einem strahlenden Prozess vernichtet werden [16](Abschnitt 2.2). Speziell in der Biexziton-Exziton-Kaskade, die bei Besetzung des Quantenpunktes mit je zwei Elektronen (Spinquantenzahl $m_z = \{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$) und Löchern ($m_z = \{+\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$) entsteht, zerfällt zunächst das Biexziton, bestehend aus zwei durch die Coulombwechselwirkung miteinander verbundenen Exzitonen, danach das übrig gebliebene Exziton. Der Ablauf dieses Zerfalls ist in Abb. 1.2 dargestellt. Es werden dabei nacheinander zwei Photonen emittiert, die sich in ihrer Polarisation unterscheiden. Aufgrund der Auswahlregeln entstehen dabei im idealen System Photonen mit zirkularer Polarisation: Rekombiniert ein Elektron-Loch Paar mit Gesamtdrehimpuls -1, wird ein linksherum-polarisiertes Photon erzeugt, bei einem Gesamtdrehimpuls von +1 entsteht ein rechtsherum-polarisiertes Photon. Andere Rekombinationen werden im optischen Spektrum kleiner InAs Quantenpunkte nicht beobachtet [19](Abschnitt 2).

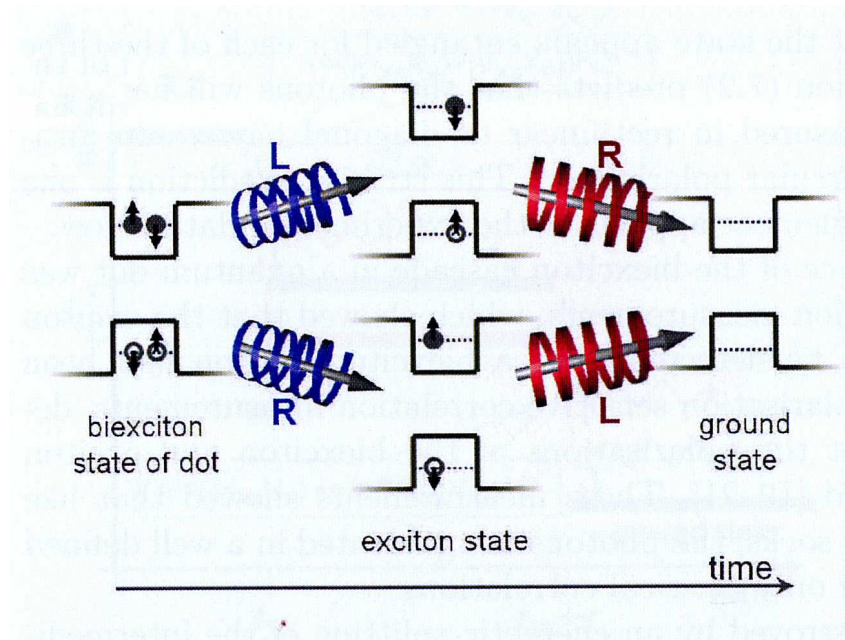


Abbildung 1.2: Der zeitliche Verlauf der Zerfalls und der Photonenpaar-Erzeugung in der Biexziton-Exziton-Kaskade [19]

Der Zerfall des Biexziton kann demnach auf zwei möglichen “Wegen” stattfinden, die sich in der Reihenfolge unterscheiden, in denen die links- bzw. recht-polarisierten Photonen emittiert werden. Ist es unmöglich zu unterscheiden, auf welchem Weg der Zerfall stattgefunden hat, so sind die beiden Photonen maximal verschränkt. Dies bedeutet, dass die Polarisationsmessung an einem einzelnen der Photonen ein zufälliges Ergebnis liefert. Wird durch die Messung allerdings die Polarisation des einen Photons festgelegt, muss das zweite die jeweils andere tragen. Jegliche Information über den genommenen Zerfallsweg verringert den Grad der Verschränkung. In realen Quantenpunkten liegt eine Anisotropie der Interband-Coulomb-Austauschwechselwirkung vor, aufgrund der die Photonen nicht zirkular sondern rektilinear polarisiert werden (horizontal und vertikal). Dies ändert an sich nur die für das System natürliche Basis und nichts am Verschränkungsgrad. Allerdings resultiert aus dieser Anisotropie eine Feinstrukturaufspaltung der Exziton-Energien für die beiden möglichen Zerfallskanäle, wodurch die Verschränkung des Photonenpaares verringert wird. Falls eine Verschränkung beider Photonen vorliegt, eignen sich diese für Anwendungen in der Quanteninformation, beispielsweise in der Quanten-Kryptographie oder Quanten-Teleportation [3]. Aus diesem Grund ist es von Interesse herauszufinden, in welchem Maße die Erzeugung verschränkter Photonenpaare durch diesen Kaskadenzerfall möglich ist und welche Gegebenheiten und Prozesse den Grad der Verschränkung beeinträchtigen können.

VERSCHRÄNKUNG

Das Phänomen der Verschränkung zeichnet sich durch Korrelationen von Quantenzuständen aus, die weitaus stärker sind als klassisch möglich. Um beispielsweise zu beurteilen, ob die Polarisationsseigenschaften eines gegebenen Photonpaar-Zustandes verschränkt oder klassisch erklärbar sind, betrachtet man einen Korrelationskoeffizienten, auf dem die Bell’schen Ungleichungen basieren. Diese stellen das historisch erste Kriterium für nichtklassische Korrelationen dar. Sie wurden von J. Bell entwickelt, um die Annahmen über den lokalen Realismus der Quantenmechanik, die von Einstein, Podolski und Rosen (EPR) im Artikel “Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete” [9] vorgebracht wurden, zu präzisieren und zu zeigen, dass sie experimentell überprüfbar sind. Dabei wird unter Annahmen, die eine sowohl “lokale” als auch “realistische” Theorie der Natur erfüllen muss, eine Ungleichung hergeleitet, die eine Obergrenze für klassische Korrelationskoeffizienten angibt. Ferner wird gezeigt, dass Quantenzustände existieren, die diese Ungleichung verletzen [6] (Kapitel 8.6).

Seitdem haben sich noch andere Verfahren etabliert, um die Verschränkung eines Quantenzustandes festzustellen und auch zu quantifizieren [5]. Unabhängig von der angewendeten Methode erhält man folgende Extrema: Separable Zustände enthalten keinerlei Verschränkung, während die sogenannten Bell-Zustände maximal verschränkt sind. Diese lauten für ein bipartites System

$$\begin{aligned} |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,0\rangle \pm |1,1\rangle) \\ |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle \pm |1,0\rangle). \end{aligned}$$

Sie sind eine Superposition zweier Zustände eines aus zwei Zweiniveau-Untersystemen, P und II, zusammengesetzten Gesamtsystems. Jeder Zustand des Gesamtsystems wird als direktes Produkt (Tensorprodukt) der Unterraum-Zustände gebildet: $|p, \pi\rangle = |p\rangle_P \otimes |\pi\rangle_{II}$. Im Fall der Polarisierungen zweier Photonen würden diese Zustände beispielsweise

$|(\text{Polarisation von Photon 1}), (\text{Polarisation von Photon 2})\rangle$ mit $\{0,1\} \in \{\text{links, rechts}\}$ bezeichnen. Die beiden jeweils auftretenden Zerfallskanäle sind ununterscheidbar und daher gleich wahrscheinlich. Man erkennt, dass der erste Bell-Zustand vollständige Korrelation, der zweite komplette Antikorrelation zeigt.

Darüber hinaus verdeutlichen diese Zustände die aus klassischer Sicht unverständliche Tatsache, dass bei Kenntnis des Zustands des Gesamtsystems $|\Phi^\pm\rangle$ (bzw. $|\Psi^\pm\rangle$), das Wissen über

die Zustände der Untersysteme, aus denen es sich zusammensetzt, unbestimmt sein kann [6] (Kapitel 8.1): Die beiden superpositionierten Zustände werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit eingenommen.

In der Anfangszeit der Quantenmechanik wurden verschränkte Zustände wie von EPR als Anhaltspunkt dafür genommen, dass die Beschreibung der Welt mithilfe von Wellenfunktionen nicht vollständig sein kann, um die Vorstellung des lokalen Realismus nicht aufgeben zu müssen. Inzwischen ist die Existenz solcher Zustände und auch die Verletzung der Bell-Ungleichung experimentell ausführlich belegt ([17], [23]). Man nutzt nun aus, dass sich unter Verwendung der verschränkten, fundamental nichtklassischen Zustände Anwendungen im Bereich der Informationsübertragung und -verschlüsselung realisieren lassen, die unter Nutzung rein klassischer Zustände nicht möglich wären.

VORGEHEN

Die vorliegenden Untersuchungen konzentrieren sich auf die möglichen Multiexzitonkonfigurationen im Quantenpunkt auf die Biexziton-Exziton-Kaskade. Betrachtet werden einzelne Quantenpunkte, die in eine Mikro-Kavität eingebettet und in Ankopplung an eigene thermische Reservoirs der Ladungsträger im Quantenpunkt und der Photonen in der Kavität betrachtet werden. In das Modell gehen nur die für das Biexziton-Exziton-System notwendigen Konfigurationen, d.h. das Biexziton und das Exziton ein. Die Licht-Materie-Wechselwirkung wird mithilfe des Jaynes-Cummings-Modells formuliert und die aus Interaktion mit dem Reservoir entstehenden dissipativen Prozesse werden durch die Lindblad-Theorie eingebunden. Das resultierende Modell enthält die folgenden Effekte:

1. Der Einfluss der Kavität.

Man nimmt an, dass der Abstand der optischen Frequenzen in der Kavität so groß ist, dass das elektronische System an eine einzelne Kavitätsmode koppelt. Die Linienbreite der Resonanz wird dabei durch die Qualität der Kavität bestimmt. Dies ist in modernen Mikroresonatoren sehr gut realisiert. Durch die Wechselwirkung im Jaynes-Cummings-Modell können Photonen in der Kavitätsmode vom elektronischen System in sogenannten Rabioszillationen reabsorbiert werden.

2. Verlustmechanismen.

Aufgrund von Dissipation entstehen Kavitätsverluste, welche die Photonenzahl in der Kavitätsmode verringern. Weiterhin besteht die Möglichkeit, dass das System Photonen in ein Kontinuum von Moden (engl.: “leaky modes”), die von der Kavitätsmode verschieden sind, emittiert. Ferner wird eine Wechselwirkung der Ladungsträger im Quantenpunkt mit Phononen berücksichtigt, welche reine Dephasierung (engl.: pure dephasing) erzeugt.

Mithilfe des auf diese Weise gestalteten Modells wird die Zeitentwicklung des Systems berechnet. Um daraus den Verschränkungsgrad des Photonenpaares zu bestimmen, ist eine Zwei-Zeitenrechnung notwendig, über deren Ergebnis integriert wird.

Im Rahmen dieser Arbeit wird neben den dissipativen Prozessen besonderes Augenmerk auf den Einfluss der Feinstrukturaufspaltung der Exziton-Niveaus im Quantenpunkt auf den Verschränkungsgrad gelegt.

2 Theorie: Grundlagen

Um die an der Emission verschränkter Photonenpaare aus einem Quantenpunkt beteiligten Prozesse zu beschreiben, ist es notwendig, zusätzlich zur quantisierten Behandlung von Materie eine Quantisierung des Strahlungsfeldes vorzunehmen, welche zunächst dargestellt werden soll. Auf diese Weise ist die spontane Emission natürlich im Modell enthalten. Darauf basierend lässt sich die Licht-Materie-Wechselwirkung im Jaynes-Cummings-Modell für ein mit einer Photonmode wechselwirkendes 2-Niveau-System entwickeln. Darüber hinaus wird die Berücksichtigung einer Wechselwirkung des Systems mit einem thermischen Reservoir illustriert. Schließlich werden diese theoretischen Grundlagen auf das zu betrachtende Kaskaden-System übertragen.

2.1 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

In der Elektrodynamik erfolgt die Berechnung von elektrischen, \vec{E} , bzw. magnetischen Feldern, \vec{B} , durch die Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \frac{1}{\mu}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{j} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \\ \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

Demnach entstehen Wirbel des elektrischen Feldes durch die zeitliche Änderung eines Magnetfeldes, Wirbel des magnetischen Feldes sowohl durch eine vorhandene Stromdichte \vec{j} , als auch durch ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld. Quelle des elektrischen Feldes ist die Ladungsdichte ρ . Beim magnetischen Feld treten keine Monopole auf.

Dabei bezeichnet μ die magnetische Permeabilität (hier $\mu = \mu_0$ wie im Vakuum), und $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ die Permittivität als Produkt von Vakuum- und spezifischer Permittivität. Es gilt $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c .

Die gesuchten Felder lassen sich durch das Vektorpotential \vec{A} und das skalare Potential V ausdrücken:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.1)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad (2.2)$$

Diese Potentiale unterliegen einer gewissen Eichfreiheit, sodass bei Übergang zu

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A} - \vec{\nabla} \chi \\ V' &= V + \frac{\partial}{\partial t} \chi\end{aligned}$$

$$\text{mit einer Eichfunktion } \chi = \chi(\vec{r}, t)$$

die Felder, welche die physikalisch messbaren Größen darstellen, unverändert bleiben. In Coulomb-Eichung wählt man $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, das Vektorpotential ist dadurch rein transversal. Befinden sich

zusätzlich die Quellen ρ sowie \vec{j} im Unendlichen, ergibt sich aus den Maxwell-Gleichungen für die Potentiale

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= 0, \\ V &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Daraus folgt, dass das durch $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$ gegebene elektrische Feld ebenfalls völlig transversal ist.

Um die Differentialgleichung für das Vektorpotential zu lösen, kann man sich der Entwicklung von \vec{A} in der Eigenbasis des Laplace-Operators Δ , den sogenannten Normalmoden $\vec{u}_{\epsilon,k}(\vec{r}) = \vec{\epsilon} u_{\vec{k}}(\vec{r})$, bedienen. Sie sind ebene Wellen mit der Polarisationsrichtung $\vec{\epsilon}$ und der Ausbreitungsrichtung \vec{k} .

Im endlichen Volumen V mit Kantenlängen L_i , $i \in \{x, y, z\}$ und mit periodischen Randbedingungen sind die Normalmoden durch ebene Wellen $u_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$ gegeben, wobei \vec{k} über ein

Gitter von Punkten $\vec{k} = (n_x \frac{2\pi}{L_x}, n_y \frac{2\pi}{L_y}, n_z \frac{2\pi}{L_z})$ mit n_x, n_y, n_z ganzen Zahlen läuft.

Die Normalmoden genügen den Kriterien von

$$\text{Transversalität } \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_{\vec{k}}(\vec{r}) = 0 \text{ und Orthogonalität } \langle \vec{u}_{\epsilon,k} | \vec{u}_{\epsilon',k'} \rangle = \delta_{\epsilon,\epsilon'} \delta_{\vec{k},\vec{k}}.$$

So kann jedes transversale Vektorfeld in Normalmoden entwickelt werden, was insbesondere für das Vektorpotential ausgenutzt werden kann:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\epsilon, k} \vec{u}_{\epsilon,k}(\vec{r}) A_{\epsilon}(\vec{k}, t).\tag{2.4}$$

Somit lässt sich die Wellengleichung für das Vektorpotential (2.3) zu

$$\ddot{A}_{\epsilon}(\vec{k}, t) + \omega_k^2 A_{\epsilon}(\vec{k}, t) = 0$$

umschreiben. Sie hat nun die Gestalt der Differentialgleichung eines Oszillators mit der Frequenz $\omega_k = ck$ und den Entwicklungskoeffizienten A_{ϵ} , anstelle der Ortskoordinaten beim Oszillator. Aus (2.4) folgen die Felder nach (2.1) und (2.2) als

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= - \sum_{\epsilon, k} \dot{A}_{\epsilon}(\vec{k}, t) \vec{u}_{\epsilon,k}(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= (\pm) \sum_{\epsilon, k} A_{\epsilon}(\vec{k}, t) i k \vec{\epsilon} u_k(\vec{r}),\end{aligned}$$

wobei $\vec{\epsilon}$ die Polarisationsrichtung senkrecht zu \vec{k} und $\vec{\epsilon}$ ist.

Mithilfe dieser Felder lässt sich die der klassischen Energiedichte entsprechende Hamiltonfunktion aufstellen:

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t) \right] dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{\epsilon, k} \dot{A}_{\epsilon}^*(\vec{k}, t) \dot{A}_{\epsilon}(\vec{k}, t) + \frac{\epsilon_0}{2} c^2 \sum_{\epsilon, k} A_{\epsilon}^*(\vec{k}, t) A_{\epsilon}(\vec{k}, t).\end{aligned}$$

Sie hat die Gestalt der Summe unabhängiger Oszillatoren mit Frequenz $\omega_k = c \cdot k$, der "Masse" ϵ_0 und komplexen Koordinaten $A_{\epsilon}(\vec{k}, t)$.

Bei der Quantisierung der Felder werden die klassischen Variablen in korrespondierende Operatoren übersetzt. Aus den komplexen Koordinaten $q_{\epsilon}(\vec{k}, t) = A_{\epsilon}(\vec{k}, t)$ und Impulsen $p_{\epsilon}(\vec{k}) = \epsilon_0 \dot{A}_{\epsilon}^*(\vec{k})$

werden so nicht-selbstadjungierte Operatoren, während die daraus gebildeten Felder \vec{E} und \vec{B} reale Größen sind und daher in selbst-adjungierte Operatoren übergehen.

Die Einführung bosonischer Operatoren

$$\begin{aligned} b_{\epsilon,k} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega_k}{2\hbar}} q_{\epsilon}(\vec{k}) + \frac{i}{\sqrt{2\epsilon_0 \hbar \omega_k}} p_{\epsilon}^{\dagger}(\vec{k}) \\ b_{\epsilon,k}^{\dagger} &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega_k}{2\hbar}} q_{\epsilon}^{\dagger}(\vec{k}) - \frac{i}{\sqrt{2\epsilon_0 \hbar \omega_k}} p_{\epsilon}(\vec{k}) \end{aligned}$$

mit der Vertauschungsrelation

$$[b_{\epsilon,k}, b_{\epsilon',k'}^{\dagger}] = \delta_{\epsilon\epsilon'} \delta_{kk'}$$

kann analog zu der Einführung der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren beim harmonischen Oszillator erfolgen und liefert die quantisierte Beschreibung vom Vektorpotential und so auch vom elektrischen Feld als

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \sum_{\epsilon, \vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_k}} \left(b_{\epsilon,k} \vec{u}_{\epsilon,k}(\vec{r}) + b_{\epsilon,k}^{\dagger} \vec{u}_{\epsilon,k}^*(\vec{r}) \right), \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= i \sum_{\epsilon, \vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0}} \left(b_{\epsilon,k} \vec{u}_{\epsilon,k}(\vec{r}) - b_{\epsilon,k}^{\dagger} \vec{u}_{\epsilon,k}^*(\vec{r}) \right). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Hamilton-Operator des quantisierten elektromagnetischen Feldes als

$$H = \sum_{\epsilon,k} \hbar \omega_k \left(b_{\epsilon,k}^{\dagger} b_{\epsilon,k} + \frac{1}{2} \right).$$

Da die Hamilton-Operatoren für die einzelnen Moden k untereinander vertauschen, existiert eine gemeinsame Eigenbasis für alle k :

$$|\{n\}\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\rangle.$$

Dies sind die Fock-Zustände, definiert durch das Eigenwertproblem des Photonenzahl-Operators $b^{\dagger}b$ einer gegebenen Mode nach

$$b^{\dagger}b|n\rangle = n|n\rangle.$$

Dabei geben die Eigenwerte n die Anzahl von Photonen in der betrachteten Mode an.

Die Anwendung der Operatoren b und b^{\dagger} bewirkt einen Wechsel in den Zustand mit nächstniedriger bzw. -höherer Photonenzahl nach

$$\begin{aligned} b|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ b^{\dagger}|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \end{aligned}$$

$$\text{wobei gilt, dass } [b, b^{\dagger}] = 1.$$

In der Fock-Basis erhält man das Spektrum von H_k für die betrachtete Mode k nach $H_k|n\rangle = E_n|n\rangle$ als

$$E_n = \hbar \omega_k \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

In einem Fock-Zustand entspricht die im System vorhandene Photonenzahl n immer der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle$, die Varianz beträgt Null.

2.2 Licht-Materie-Wechselwirkung im Zwei-Niveau-System

Dieser Abschnitt führt aus, wie die Wechselwirkung zwischen Materie und einem Lichtfeld, bei der näherungsweise nur zwei elektronische Niveaus involviert sind, mithilfe des Jaynes-Cummings-Modelles beschrieben werden kann. Außerdem wird der Dichtematrixformalismus erläutert, in dem sich alle Informationen über das zu untersuchende System aus den Elementen einer zugehörigen Dichtematrix bestimmen lassen, deren Zeitentwicklung sich durch die von-Neuman-Gleichung ergibt.

2.2.1 Das Jaynes-Cummings Modell

Im Jaynes-Cummings-Modell wird die Licht-Materie-Wechselwirkung für eines Zwei-Niveau-Systems mit dem quantisierten Lichtfeld einer Photonmode behandelt [14]. Im Folgenden werden die atomaren Niveaus als $\chi = \{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$ bezeichnet. Dabei ist $|\alpha\rangle$ das energetisch höhere der atomaren Niveaus, $|\beta\rangle$ das niedrigere. Dieses Problem wird von einem Hamilton-Operator mit ungestörtem und durch die Wechselwirkung hervorgerufenem Anteil beschrieben, wobei sich ersterer aus dem atomaren Anteil und dem des Feldes zusammensetzt:

$$\begin{aligned} H_{JC} &= H_0 + H_{Int}, \\ H_0 &= H_0^{Atom} + H_0^{Feld}. \end{aligned}$$

H_{Int} enthält die Wechselwirkung in Dipolnäherung. Diese ist gerechtfertigt, falls die Änderung des elektrischen Feldes im Bereich der atomaren Ausdehnung vernachlässigt werden kann, also z.B. im Falle optischer Frequenzen. Unter Einführung der Licht-Materie-Kopplungsstärke $g = -d_{\alpha\beta}\epsilon_\Omega u(\vec{r})$, wobei $d_{\alpha\beta} = \langle\alpha| -e\vec{r}\vec{E}|\beta\rangle \frac{1}{E}$ die Wechselwirkungsamplitude und ϵ_Ω das Feld pro Photon ist, erhält man für den Wechselwirkungsanteil von H

$$H_{Int} = gb|\alpha\rangle\langle\beta| + g^*b|\beta\rangle\langle\alpha| + g^*b^\dagger|\beta\rangle\langle\alpha| + gb^\dagger|\alpha\rangle\langle\beta|.$$

Die Anwendung von $|\beta\rangle\langle\alpha| = \sigma_-$ wechselt vom oberen in den unteren atomaren Zustand, die von $|\alpha\rangle\langle\beta| = \sigma_+$ vom unteren in den oberen. Betrachtet man die hier auftretenden Operatoren im Wechselwirkungsbild, in welchem die Operatoren anstelle der Zustände die der Störung geschuldete Zeitabhängigkeit tragen, so gilt $b \propto e^{-i\Omega t}$, $b^\dagger \propto e^{i\Omega t}$, $\sigma_- \propto e^{-i\omega_{\alpha\beta}t}$, $\sigma_+ \propto e^{i\omega_{\alpha\beta}t}$ mit der Energiedifferenz der atomaren Niveaus $\hbar\omega_{\alpha\beta}$, der Frequenz Ω der Photonmode des Strahlungsfeldes. Man sieht, dass nur zwei der vier in H_{Int} erscheinenden Terme resonant sind, die anderen zeigen schnelle Oszillationen und werden daher in der “rotating wave approximation” vernachlässigt[8]. Sie beschreiben Prozesse, die physikalisch sehr unwahrscheinlich sind (beispielweise die Emission eines Photons bei gleichzeitigem Wechsel in ein energetisch höheres atomares Niveau).

Zusammengefasst lautet der Jaynes-Cummings-Hamiltonoperator des Problems somit:

$$\begin{aligned} H_{JC} &= H_0^{Atom} + H_0^{Feld} + H_{Int} \\ &= \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2}\sigma_z + \hbar\Omega b^\dagger b + gb\sigma_+ + g^*b^\dagger\sigma_-, \end{aligned}$$

wobei $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eine der Paulimatrizen ist.

Als Basis des nicht-wechselwirkenden Systems bieten sich Zustände an, die aus dem direkten Produkt der atomaren Zustände des Zweiniveau-Systems und der Fock-Zustände des Strahlungsfeldes entstehen: $|\alpha, n\rangle = |\alpha\rangle \otimes |n\rangle$, $|\beta, n+1\rangle = |\beta\rangle \otimes |n+1\rangle$. Der ungestörte Anteil des Hamilton-Operators ist in Matrixdarstellung dieser Basiszustände gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \langle\alpha, n|H_0|\alpha, n\rangle & \langle\alpha, n|H_0|\beta, n+1\rangle \\ \langle\beta, n+1|H_0|\alpha, n\rangle & \langle\beta, n+1|H_0|\beta, n+1\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2} \cdot \sigma_z + \hbar\Omega \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von H_{Int} in der gewählten Basis lautet

$$H_{Int} = g \cdot \sqrt{n+1} \cdot \sigma_+ + g^* \sqrt{n+1} \cdot \sigma_-,$$

sodass (abgesehen vom Grundzustand) die Zustände für eine feste Photonenzahl n stets paarweise wechselwirken:

$$\begin{aligned} H_{Int}|\alpha, n\rangle &= g^* \sqrt{n+1} |\beta, n+1\rangle \\ H_{Int}|\beta, n+1\rangle &= g \sqrt{n+1} |\alpha, n\rangle \end{aligned}$$

Diese Art der Wechselwirkung führt zu einer Blockdiagonalform des Jaynes-Cummings-Hamiltonoperators mit 2x2-Blöcken, welche zu fester Photonenzahl in der Matrixdarstellung der ungestörten Zustände durch

$$\begin{pmatrix} \langle \alpha, n | H_{JC} | \alpha, n \rangle & \langle \alpha, n | H_{JC} | \beta, n+1 \rangle \\ \langle \beta, n+1 | H_{JC} | \alpha, n \rangle & \langle \beta, n+1 | H_{JC} | \beta, n+1 \rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \hbar\Omega \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & g\sqrt{n+1} \\ g^*\sqrt{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Die Blockdiagonalität macht das Jaynes-Cummings-Modell exakt lösbar. Möchte man allerdings andere Wechselwirkungsprozesse, die z.B. Dissipation beschreiben, zum Jaynes-Cummings-Modell hinzufügen, so wird das resultierende Modell nicht unbedingt exakt zu lösen sein.

2.2.2 Formulierung im Dichtematrixformalismus

Untersucht man Systeme in der statistischen Quantenmechanik, so liegen ihre möglichen Zustände $|\Phi_i\rangle$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten p_i vor. Der Erwartungswert einer Größe A setzt sich daher zusammen aus der Summe der mit diesen Zuständen gebildeten Erwartungswerte, die mit der Wahrscheinlichkeit des Vorliegens des zugehörigen Zustandes gewichtet werden:

$$\begin{aligned}
 \langle A \rangle &= \sum_i p_i \langle \Phi_i | A | \Phi_i \rangle \\
 &= \sum_i p_i \text{Sp}\{A | \Phi_i \rangle \langle \Phi_i | \} \\
 &= \text{Sp}\{A \sum_i | \Phi_i \rangle p_i \langle \Phi_i | \} \\
 &= \text{Sp}\{A \cdot \rho\}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dabei muss gelten, dass $p_i \geq 0$ und $\sum_i p_i = 1$, da es sich um Wahrscheinlichkeiten handelt. Man gewinnt den Erwartungswert einer beliebigen physikalischen Größe demnach durch Spurbildung mit ρ . Der statistische Operator, $\rho = \sum_i | \Phi_i \rangle p_i \langle \Phi_i |$, wird auch Dichtematrix genannt, da seine Diagonalelemente die Wahrscheinlichkeitsdichten für die möglichen Zustände darstellen.

Konkret auf das System mit Licht-Materie-Wechselwirkung übertragen, bezeichnet man die Zustände als $\Phi_i = |j, n\rangle_i$ mit $|j\rangle$, dem elektronischen, sowie $|n\rangle$, dem photonischen Freiheitsgrad. Damit folgt die Dichtematrix mit den Zuständen $|j, n\rangle$ des gekoppelten Systems als

$$\begin{aligned}
 \rho &= \sum_{jj'} \sum_{nn'} |j', n'\rangle \langle j', n' | \rho | j, n \rangle \langle j, n | \\
 &= \sum_{jj'} \sum_{nn'} \rho_{jn, j'n'} |j', n'\rangle \langle j, n|.
 \end{aligned}$$

Bei Kenntnis der Matrixelemente $\rho_{jn, j'n'}$ sind alle Informationen über das betrachtete System bestimmt, da man die Erwartungswerte einzelner physikalischer Größen nach (2.5) durch Spurbildung mit der Dichtematrix gewinnen kann.

Auskunft über atomare Besetzungen erhält man aus der durch Ausspuren der photonischen Freiheitsgrade erhaltenen reduzierten atomaren Dichtematrix $\rho_{jj'}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}_{\text{Photon}} \{\rho\} &= \sum_n \langle n | \rho | n \rangle \\
 &= \sum_{jj'} \sum_n \rho_{jn, j'n} |j'\rangle \langle j| \\
 &= \sum_{jj'} \rho_{jj'} |j'\rangle \langle j| \\
 \text{mit } \rho_{jj'} &= \sum_n \rho_{jn, j'n} = \begin{pmatrix} \rho_{\alpha\alpha} & \rho_{\alpha\beta} \\ \rho_{\beta\alpha} & \rho_{\beta\beta} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dabei stellt $\rho_{\alpha\alpha}$ bzw. $\rho_{\beta\beta}$ die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür dar, dass das Elektron sich im oberen bzw. unteren Niveau aufhält.

Analog gewinnt man die reduzierte Photonen-Dichtematrix $\rho_{nn'}$ mittels Ausspuren der atomaren

Freiheitsgrade nach

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}_{Atom} \{ \rho \} &= \sum_j \langle j | \rho | j \rangle \\
 &= \sum_{nn'} \sum_j \rho_{jn,jn'} |n'\rangle \langle n| \\
 &= \sum_{nn'} \rho_{nn'} |n'\rangle \langle n|, \\
 \text{wobei} \quad \rho_{nn'} &= \rho_{\alpha n, \alpha n'} + \rho_{\beta n, \beta n'}.
 \end{aligned}$$

Die Photonenstatistik $\rho_{n,n} = \sum_j \rho_{jn,jn} = p_n$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Photonenanzahl im System n beträgt.

Die Zeitentwicklung des Systems ist im Dichtematrixformalismus durch die von-Neumann-Gleichung gegeben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho]. \quad (2.6)$$

Für Licht-Materie Kopplung unter Verwendung des Jaynes-Cummings Hamiltonians H_{JC} erhält man so die zeitliche Änderung der einzelnen Matrixelemente als

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \alpha n} &= g\sqrt{n+1} \rho_{\beta n+1, \alpha n} - g^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha n, \beta n+1}, \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \beta n+1} &= g^* \sqrt{n+1} \rho_{\alpha n, \beta n+1} - g\sqrt{n+1} \rho_{\beta n+1, \alpha n}, \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} &= \hbar(\omega_{\alpha\beta} - \Omega) \rho_{\alpha n, \beta n+1} - g\sqrt{n+1} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}), \\
 \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \alpha n} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} \right)^\dagger.
 \end{aligned}$$

2.3 Wechselwirkung mit einem Reservoir

Steht ein System in Kontakt mit einem thermischen Reservoir, so können dämpfende Verlustmechanismen (Dissipation) auftreten. Dabei ist das Reservoir dadurch ausgezeichnet, dass es im Vergleich zum System groß ist und viele Freiheitsgrade hat, sich im thermischen Gleichgewicht befindet und durch die Wechselwirkung mit dem System näherungsweise nicht verändert wird. Die dissipativen Prozesse werden in Born-Markov-Näherung [8] durch Lindblad-Terme in der Zeitentwicklung der Dichtematrix beschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho|_{Dissipation} = \frac{\chi}{2} L_O \rho,$$

wobei der Superoperator $L_O \rho$ für den Operator O , der einen Verlustprozess mit der zugehörigen Zerfallsrate χ_O darstellt, die folgende Gestalt hat:

$$L_O \rho = 2O\rho O^\dagger - O^\dagger O \rho - \rho O^\dagger O.$$

Auf diese Weise lassen sich mithilfe der Lindblad-Terme diverse dissipative Einflüsse in der Zeitentwicklung der Dichtematrix berücksichtigen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_l \frac{\chi_l}{2} L_l \rho.$$

Die Summe läuft über alle in das Modell des Kaskadenzerfalls miteinbezogenen Dissipationsprozesse. Im folgenden betrachten wir Kavitätsverluste, Emission in ein Kontinuum von Moden sowie reine Dephasierung.

Kavitätsverluste

Die Qualität der Kavität, in der sich das System befindet, bedingt die endliche Aufenthaltsdauer $\frac{1}{\kappa}$ von Photonen in der Kavitätsmode im Resonator. Die auf diese Weise verlorene Anregung steht somit nicht wieder zur Reabsorption durch das atomare System zur Verfügung, daraus resultiert eine Dämpfung. Der dazugehörige Lindblad-Term wirkt nur auf das photonische Untersystem:

$$\frac{d}{dt} \rho|_{cav} = \frac{\kappa}{2} [2b\rho b^\dagger - b^\dagger b \rho - \rho b^\dagger b].$$

Emission in ein Kontinuum von Moden

Es besteht die Möglichkeit, dass das System vom angeregten Zustand $|\alpha, n\rangle$ durch Emission eines Photons in ein Kontinuum von Moden (verschieden von der betrachteten oder im Jaynes-Cummings-Modell angekoppelten Mode) in den energetisch niedrigeren Zustand $|\beta, n\rangle$ übergeht, wodurch die Anregung unwiederbringlich verloren geht. Der Prozess wird beschrieben durch den Lindblad-Term

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho|_{EKM} = \frac{1}{2\tau} [2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-].$$

Reine Dephasierung

Reine Dephasierung beschreibt weitere Wechselwirkungen des Systems mit externen Reservoirs, deren Dynamik nicht explizit bekannt ist bzw. nicht näher betrachtet werden soll. Ein Beispiel hierfür ist die Wechselwirkung der Quantenpunkt-Zustände mit den Phononen des Bulk-Materials, auf dem der Quantenpunkt gewachsen wurde. Durch diese Prozesse werden die Nicht-Diagonalelemente der Dichtematrix des Systems wie folgt dephasiert (also gedämpft) [21]:

$$\frac{d}{dt} \rho|_{pd} = \sum_{\substack{x, x' \\ x \neq x'}} \frac{\gamma_{x, x'}^{pd}}{4} (|x\rangle \langle x| \rho |x'\rangle \langle x'| + |x'\rangle \langle x'| \rho |x\rangle \langle x|). \quad (2.7)$$

Hierbei wird angenommen, dass alle Zustände näherungsweise gleich mit der Umgebung wechselwirken und daher alle Raten $\gamma_{\chi,\chi'}^{pd}$ ebenfalls gleich sind.

3 Theorie: Biexziton-Exziton-Kaskade und Verschränkung

Der bisher dargelegte Hintergrund über Licht-Materie-Wechselwirkung im Zweiniveau-System nach Jaynes-Cummings und über Dissipation und soll im Folgenden auf das zu betrachtende System der Biexziton-Exziton-Kaskade übertragen werden. Dafür muss der elektronische Anteil auf vier Niveaus und der photonische auf zwei Moden erweitert werden. Ferner wird betrachtet, in welchem Fall das durch die Kaskadenemission erzeugte Photonenpaar Verschränkung aufweist und wie diese quantifiziert werden kann.

3.1 Elektronische und photonische Freiheitsgrade

Im Biexziton-Exziton-System gibt es vier relevante Konfigurationen der Ladungsträger: Über dem Grundzustand $|G\rangle$ liegen zwei Exziton-Niveaus, $|X_R\rangle$ und $|X_L\rangle$, die aufgrund von Feinstrukturaufspaltung im Quantenpunkt eine Energiedifferenz δ aufweisen können. Dabei bezeichnet der Index R bzw. L , ob im ersten Zerfallsschritt ein rechts- oder linksherum polarisiertes Photon emittiert wurde. Oberhalb der Exziton-Niveaus befindet sich das Biexziton-Level $|B\rangle$ (siehe Energieschema in Abb. 3.1). Dies sind die elektronischen Niveaus. Der betrachtete Zerfallspro-

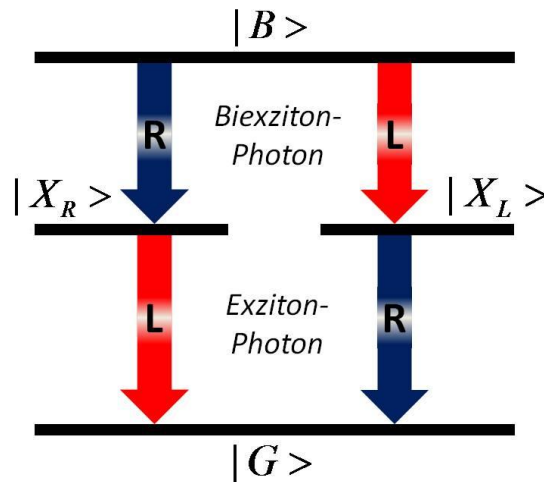


Abbildung 3.1: Energieschema des Kaskadenzerfalls ohne Feinstrukturaufspaltung.

zess beginnt im Biexziton-Zustand, nach einiger Zeit verliert das System ein Elektron-Loch-Paar durch Photonenemission. Nach einem weiteren Rekombinationsprozess des verbleibenden Exzitons geht das System in den Grundzustand über. Die emittierten Photonen können in ein Kontinuum von Moden abgegeben werden oder, falls das System in eine Kavität eingebettet ist, auch in die Kavitätsmoden beider möglicher Polarisationsrichtungen. Ist auf diese Weise entweder der Übergang vom Exziton zum Grundzustand oder aber der Übergang von Biexziton zu Exziton an eine Kavität gekoppelt, hat dieses folgende Einflüsse: Das elektronische System kann durch Reabsorption eines Photons aus einer der Kavitätsmoden in einen höheren Zustand wechseln, außerdem können Kavitätsverluste die Photonenzahl in den Kavitätsmoden senken. Das Modell

wird so initiiert, dass zu Beginn des Kaskadenzerfalls keine Photonen in der Kavitätsmode vorhanden sind; bei jedem angekoppelten Übergang kann genau ein Photon in einer Kavitätsmode erzeugt werden, sofern die Energiedifferenz der elektronischen Niveaus mit der Photonenergie im Rahmen der natürlichen Linienbreite übereinstimmt. Im folgenden beschränken wir uns darauf, dass der Übergang vom Exziton- zum Grundzustand an die Kavität gekoppelt ist, sodass nur ein Kavitätsphoton im Kaskadenzerfall entstehen kann. Es würde sich experimentell schwierig gestalten, eine Kavität mit vier Moden herzustellen, welche für die zwei Polarisationen an beide Übergänge ankoppeln, da diese energetisch unterschiedlich sind.

Zur Basiswahl

Die einführenden Betrachtungen der Biexziton-Exziton Kaskade (Kapitel 1 dieser Arbeit) wurden in der Spin-Basis ausgeführt, da diese am besten wiedergibt, dass die Polarisation der emittierten Photonen aufgrund der Erhaltung des Drehimpulses bei der Loch-Elektron-Rekombination folgt (siehe Abb. 1.2). Im Falle einer Anisotropie in der Elektron-Loch-Austauschwechselwirkung aufgrund von Form und Verspannung des Quantenpunktes ist der Drehimpuls nicht erhalten und die Spinzustände stellen nicht mehr die natürlichen Zustände des Systems dar. Aufgrund der Anisotropie liegt dann eine energetische Aufspaltung der beiden Exziton-Niveaus, $|X_R\rangle$ und $|X_L\rangle$, vor, und es ist somit möglich, die Zerfallskanäle zu unterscheiden [18]. Die Austauschwechselwirkung hybridisiert die reinen Exziton-Spin-Zustände zu symmetrischen und antisymmetrischen Kombinationen, die entlang der Achsen der Anisotropie in der Schichtebene des Halbleiterkristalls ausgerichtet und um die Energie δ verschieden sind [19](Abschnitt 2.1). Diese Kombinationen sind die Exzitonzustände in Horizontal-Vertikal-Basis

$$\begin{aligned} |X_H\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|X_R\rangle + |X_L\rangle) \\ \text{und} \\ |X_V\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|X_R\rangle - |X_L\rangle). \end{aligned}$$

Existiert im Quantenpunkt eine energetische Aufspaltung der Exziton-Niveaus, bietet es sich an, in der Horizontal-Vertikal-Basis zu rechnen, da in dieser der Hamiltonoperator der ungestörten Energien diagonal ist.

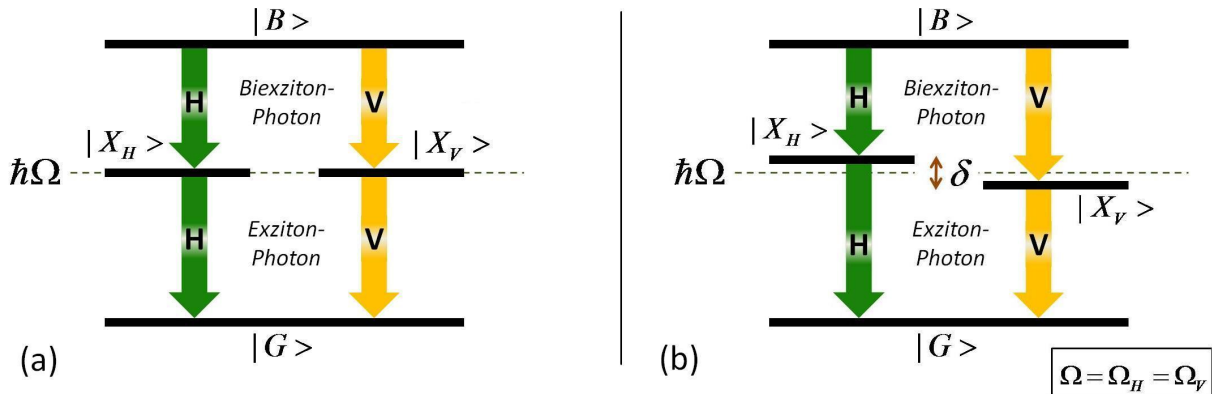


Abbildung 3.2: Energieschema des Kaskadenzerfalls in Horizontal-Vertikal-Basis ohne Feinstrukturaufspaltung (a) und mit (b). Die Energie der Kavitätsmoden $\hbar\Omega$ stimmt mit der Energie der entarteten Exziton-Niveaus überein.

Die elektronischen Zustände $|X_H\rangle$, $|X_V\rangle$ koppeln an Biexziton- und Exziton-Photonen, welche linear entlang der horizontalen und vertikalen Achse der Anisotropie im Kristall polarisiert sind [19]: $|H\rangle$ oder $|V\rangle$ (siehe zugehöriges Energieschema in Abb. 3.2). Das Biexziton-Photon entsteht bei der Rekombination des ersten Elektron-Loch-Paares, nach welcher das Photon-Exziton-System auf den verschränkten Zustand

$$|\text{Photon, Exziton}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, X_H\rangle + |V, X_V\rangle)$$

projiziert wird [19]. Das Exziton-Photon wird bei der nach einer Verzögerung von θ stattfindenden Rekombination des zweiten Elektron-Loch-Paares erzeugt und befindet sich zusammen mit dem Biexziton-Photon im Zweiphotonenzustand $|p, \pi\rangle$, in dem das Biexziton-Photon die Polarisation p und das Exziton-Photon die Polarisation π trägt. Die Polarisation dieser Photonen kann in unterschiedlichen Basen gemessen werden, wobei der Grad der Verschränkung im System wie bei allen physikalischen Größen nicht von dieser Wahl abhängen darf: Der maximal verschränkte Zweiphotonenzustand muss in allen Basen (man kann Polarisation zirkular, rektilinear oder diagonal messen) entsprechend dem Bell-Zustand gestaltet sein [19]:

$$\begin{aligned} |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|L, R\rangle + |R, L\rangle) \quad \text{in zirkularer Rechts-Links Basis} \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|H, H\rangle + |V, V\rangle) \quad \text{in rektilinearer Horizontal-Vertikal Basis} \\ |\Psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|D, D\rangle + |A, A\rangle) \quad \text{in Diagonal-Antidiagonal Basis.} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Wechselt man also die Basis von zirkular zu rektilinear im Fall einer im realen Quantenpunkt vorliegenden Anisotropie, so ändert sich die Form des maximal verschränkten Zustandes nur insofern, als dass die Polarisationen der beiden emittierten Photonen korreliert anstatt antikorreliert sind. Allerdings werden die beiden Exziton-Zustände aufgrund ihrer Energiedifferenz mit der Zeit einen Phasenunterschied entsprechend $e^{i\delta\theta/\hbar}$ ausbilden [19] (Abschnitt 2.2). Daher stellt sich der durch die Kaskade generierte Zweiphotonenzustand als

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|H, H\rangle + e^{i\delta\theta/\hbar} |V, V\rangle \right)$$

dar. Diese Gleichung stimmt mit der für ein System ohne Feinstrukturaufspaltung (3.1) bis auf einen Phasenfaktor überein. Dieser wird durch die bei Integration über alle möglichen Zeitunterschiede θ durchgeführte Mittelung randomisiert, was die Verschränkung zerstört [19] (Abschnitt 2.2). Bei präziser Messung von θ und begrenzter Energiedifferenz δ der Exziton-Niveaus allerdings zeigen die vom Quantenpunkt erzeugten Zweiphotonenzustände Verschränkung und können für Anwendungen in der Quanteninformation genutzt werden.

Die freien Energien

Die Energien der elektronischen Zustände folgen aus den Konfigurationen der Ladungsträger im betrachteten Zustand (siehe Abb. 3.3): Im Leitungsband-Valenzband-Bild (c-v-Bild), also in Hinblick auf die Besetzungen von Leitungs- (c) und Valenzband (v), entspricht der Grundzustand der Situation, dass sich zwei Elektronen entgegengesetzten Spins im Valenzband der s-Schale, dem niedrigsten Energieniveau im Quantenpunkt, befinden. Bei den Exziton-Niveaus ist je eins der Elektronen ins Leitungsband gewechselt. Im Biexziton-Zustand $|B\rangle$ sind beide Elektronen im Leitungsband anzutreffen.

Man nimmt zur Vereinfachung an, dass sich die Ladungsträger in der s-Schale des Quantenpunktes aufhalten und dass es keine Streuung in oder aus anderen Schalen gibt. Dann werden die Energien des Biexziton- und des Exziton-Niveaus durch die Energien von Valenz- und Leitungsband in der s-Schale des Quantenpunktes, ϵ_s^v und ϵ_s^c , sowie durch die Coulomb-Wechselwirkung

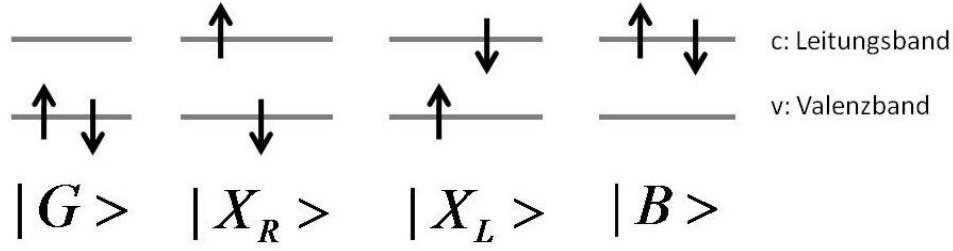


Abbildung 3.3: Die elektronischen Zustände der Biexziton-Exziton Kaskade im c-v-Bild.

bestimmt, welche sich in der Exzitonen- und Biexzitonenbindungsenergie ($\Delta\epsilon_X$ bzw. $\Delta\epsilon_{XX}$) äußert:

$$\begin{aligned} (H^{Carr} + H^{Coul})|G\rangle &= 2\epsilon_s^v|G\rangle \\ (H^{Carr} + H^{Coul})|X_R\rangle &= (\epsilon_s^c + \epsilon_s^v + \Delta\epsilon_X)|X_R\rangle \\ (H^{Carr} + H^{Coul})|X_L\rangle &= (\epsilon_s^c + \epsilon_s^v + \Delta\epsilon_X)|X_L\rangle \\ (H^{Carr} + H^{Coul})|B\rangle &= (2\epsilon_s^c + 2\Delta\epsilon_X + \Delta\epsilon_{XX})|B\rangle \end{aligned}$$

Als Energienullpunkt wird $E_0 = 2 \cdot \epsilon_s^v$ gewählt, sodass die Exziton-Energien $\epsilon_X = (\epsilon_s^c + \epsilon_s^v + \Delta\epsilon_X)$ betragen und die Biexziton-Energie $\epsilon_{XX} = 2\epsilon_s^c - 2\epsilon_s^v + 2\Delta\epsilon_X + \Delta\epsilon_{XX}$ ist. Bei einer Asymmetrie in der Austauschwechselwirkung sind die Exziton-Energien nicht mehr gleich, sondern um den Betrag δ voneinander verschieden, und der Hamiltonoperator ist in rektilinearere Basis diagonal. Dann ergeben sich die Matrixelemente von $H_0^{Atom} = H^{Carr} + H^{Coul}$ in der Basis der vier Konfigurationen als

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \langle B|H_0^{Atom}|B\rangle & \langle B|H_0^{Atom}|X_H\rangle & \langle B|H_0^{Atom}|X_V\rangle & \langle B|H_0^{Atom}|G\rangle \\ \langle X_H|H_0^{Atom}|B\rangle & \langle X_H|H_0^{Atom}|X_H\rangle & \langle X_H|H_0^{Atom}|X_V\rangle & \langle X_H|H_0^{Atom}|G\rangle \\ \langle X_V|H_0^{Atom}|B\rangle & \langle X_V|H_0^{Atom}|X_H\rangle & \langle X_V|H_0^{Atom}|X_V\rangle & \langle X_V|H_0^{Atom}|G\rangle \\ \langle G|H_0^{Atom}|B\rangle & \langle G|H_0^{Atom}|X_H\rangle & \langle G|H_0^{Atom}|X_V\rangle & \langle G|H_0^{Atom}|G\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(\epsilon_s^c - \epsilon_s^v) + 2\Delta\epsilon_X + \Delta\epsilon_{XX} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_s^c - \epsilon_s^v + \Delta\epsilon_X + \frac{\delta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_s^c - \epsilon_s^v + \Delta\epsilon_X - \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_{XX} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_X + \frac{\delta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_X - \frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

unter Einbeziehung einer Feinstrukturaufspaltung der Exziton-Niveaus δ , die beide Exziton-Energien symmetrisch verschiebt.

Das freie Feld

Der Feldanteil des ungestörten Hamiltonoperators ist für zwei Photonmoden durch

$$H_0^{Feld} = \hbar\Omega_H b_H^\dagger b_H + \hbar\Omega_V b_V^\dagger b_V \quad (3.3)$$

mit den Frequenzen Ω_H und Ω_V der horizontal- bzw. vertikal polarisierten Kavitätsphotonen und den dazugehörigen Photonenzahloperatoren $b^\dagger b$ gegeben. Die Frequenzen werden in diesem Modell für beide Polarisationsrichtungen gleich gesetzt. Existiert keine Feinstrukturaufspaltung,

stimmen sie mit der Frequenz eines elektronischen Übergangs, der an die Kavität gekoppelt ist, überein. Ansonsten unterscheiden sich die Energien des Übergangs aufgrund der beteiligten Exziton-Energien von den Energien der Kavitätsphotonen.

3.2 Jaynes-Cummings-Kopplung

Prinzipiell kann jeder atomare Übergang nach dem Jaynes-Cummings-Modell an das Lichtfeld gekoppelt werden. Im Folgenden wird der Fall betrachtet, in dem der zweite Übergang, also jener vom Exziton-Niveau $|X_H\rangle$ (bzw. $|X_V\rangle$) zum Grundzustand, energetisch mit $\hbar\Omega_{H/V}$ übereinstimmt. Nimmt man an, dass zu Beginn $n = 0$ Photonen in der Kavitätsmode anwesend sind, liefert der Jaynes-Cummings-Mechanismus den folgenden Beitrag zur Zeitentwicklung der Dichtematrixelemente nach

$$H_{Int} = \sum_{k=H,V} g b_k |X_k\rangle \langle G| + g^* b_k^\dagger |G\rangle \langle X_k| \quad (3.4)$$

als

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{|X,0\rangle,|X,0\rangle} &= g \cdot \rho_{|G,1\rangle,|X,0\rangle} - g^* \cdot \rho_{|X,0\rangle,|G,1\rangle} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{|G,1\rangle,|G,1\rangle} &= g^* \cdot \rho_{|X,0\rangle,|G,1\rangle} - g \cdot \rho_{|G,1\rangle,|X,0\rangle} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{|X,0\rangle,|G,1\rangle} &= (E_X - E_G) \cdot \rho_{|X,0\rangle,|G,1\rangle} - g \cdot (\rho_{|X,0\rangle,|X,0\rangle} - \rho_{|G,1\rangle,|G,1\rangle}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_{|G,1\rangle,|X,0\rangle} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_{|X,0\rangle,|G,1\rangle} \right)^\dagger, \end{aligned}$$

wobei $|X, n_X\rangle$ entweder für $|X = X_H, n_H = n_X, n_V = 0\rangle$ oder $|X = X_V, n_H = 0, n_V = n_X\rangle$ steht und die Energien $E_X = \epsilon_{H/V}$, $E_G = 0$ betragen.

3.3 Dissipation in der Biexziton-Exziton Kaskade

Die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Verlustprozesse kommen hier zur Geltung. Eine endliche Aufenthaltsdauer von Photonen in der Kavitätsmode wird unabhängig für beide Polarisationsrichtungen durch folgenden Lindbladterm beschrieben:

$$\frac{d}{dt} \rho|_{cav} = \frac{\kappa}{2} [2b_H \rho b_H^\dagger - b_H^\dagger b_H \rho - \rho b_H^\dagger b_H] + \frac{\kappa}{2} [2b_V \rho b_V^\dagger - b_V^\dagger b_V \rho - \rho b_V^\dagger b_V] \quad (3.5)$$

Die Emission in ein Kontinuum von Moden kann an jedem der vier möglichen Übergänge stattfinden: Von $|B\rangle$ zu $|X_H\rangle$, von $|B\rangle$ zu $|X_V\rangle$, von $|X_H\rangle$ zu $|G\rangle$ und von $|X_V\rangle$ zu $|G\rangle$. Für diese Übergänge werden jeweils gleiche Zerfallsraten mit der Zeitkonstanten τ angenommen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho|_{EKM} &= \frac{1}{2\tau} [2\sigma_{H1} \rho \sigma_{H1}^\dagger - \sigma_{H1}^\dagger \sigma_{H1} \rho - \rho \sigma_{H1}^\dagger \sigma_{H1}] \\ &+ \frac{1}{2\tau} [2\sigma_{V1} \rho \sigma_{V1}^\dagger - \sigma_{V1}^\dagger \sigma_{V1} \rho - \rho \sigma_{V1}^\dagger \sigma_{V1}] \\ &+ \frac{1}{2\tau} [2\sigma_{H2} \rho \sigma_{H2}^\dagger - \sigma_{H2}^\dagger \sigma_{H2} \rho - \rho \sigma_{H2}^\dagger \sigma_{H2}] \\ &+ \frac{1}{2\tau} [2\sigma_{V2} \rho \sigma_{V2}^\dagger - \sigma_{V2}^\dagger \sigma_{V2} \rho - \rho \sigma_{V2}^\dagger \sigma_{V2}] \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit

$$\begin{aligned}\sigma_{H1} &= |X_H\rangle\langle B| \\ \sigma_{H2} &= |G\rangle\langle X_H| \\ \sigma_{V1} &= |X_V\rangle\langle B| \\ \sigma_{V2} &= |G\rangle\langle X_V|.\end{aligned}$$

Die reine Dephasierung im elektronischen System kann direkt wie in Formel (2.7) aufgeführt angewendet werden, wobei $\chi, \chi' = B, X_H, X_V, G$ sind:

$$\frac{d}{dt}\rho|_{pd} = \sum_{\substack{\chi, \chi' = B, X_H, X_V, G \\ \chi \neq \chi'}} \frac{\gamma_{\chi, \chi'}^{pd}}{4} (|\chi\rangle\langle\chi|\rho|\chi'\rangle\langle\chi'| + |\chi'\rangle\langle\chi'|\rho|\chi\rangle\langle\chi|). \quad (3.7)$$

3.4 Zur Verschränkung

Kriterien für die Verschränkung eines gegebenen Zustandes kann man in “operational” und “non-operational” aufteilen. Unter Ersterem versteht man eine Art Rezept, welches auf eine explizite Dichtematrix angewendet werden kann und die Antwort liefert, ob der zugehörige Zustand verschränkt ist oder nicht. Zu dieser Art von Kriterium gehört beispielsweise das Peres-Horodecki-Kriterium (“positive partial transpose”) [5]. Zu den “non-operational” Kriterien, die abstrakterer Art sind und deren konkrete Anwendung sich schwieriger gestaltet, zählt das Verfahren der Verschränkungszeugen [5].

Es ist auf verschiedene Weise möglich, realwertige Funktionen zu erhalten, die das Maß der Verschränkung eines gegebenen Quantenzustandes quantifizieren. Ihre Werte stehen normalerweise dazu in Beziehung, wie nützlich der Zustand für (bestimmte) Anwendungen in der Quanteninformatik sind (z.B. Teleportations-Fidelity oder Extraktionsraten für sichere Kommunikationsschlüssel) [5]. In dieser Arbeit werden zwei Maße, die Fidelity und die Concurrence verwendet. Sie sollen im Folgenden herangezogen werden, um Aussagen über den Grad der Verschränkung im Kaskadensystem zu treffen.

Prinzipiell liegt Verschränkung vor, wenn die Wellenfunktion, die ein System beschreibt, nicht faktorisiert ist. Lässt sie sich also nicht in das Produkt der Wellenfunktionen der wesentlichen Bestandteile des Systems zerlegen, wird eine Messung an einem Systemteil Einfluss auf die anderen Systemteile nehmen [19] (Abschnitt 1). Konkret auf das Biexziton-Exziton-System übertragen, sind die Polarisierungen der in der Kaskadenemission erzeugten Photonen miteinander verschränkt, solange nicht bestimmt werden kann, welcher Zerfallsweg genommen wurde. In diesem Idealfall wird der Zweiphotonenzustand als Superposition der beiden Zerfallskanäle beschrieben:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|H, H\rangle + |V, V\rangle\}.$$

Wieder bezeichnet $|\Psi^+\rangle$ den maximal verschränkten Bell-Zustand, $|H, H\rangle$ (bzw. $|V, V\rangle$) horizontale (vertikale) Polarisation der Biexziton- und Exziton-Photonen.

In realen Quantenpunkten reduzieren Faktoren wie Dissipation und Bauart des Quantenpunktes den Verschränkungsgrad, sodass der tatsächliche Zustand des Photonenpaares vom Bell-Zustand abweicht [21]. Um den bei der Emission eingenommenen Systemzustand festzustellen, misst man experimentell die Projektion der photonischen Dichtematrix auf den Zweiphotonen-Unterraum, der von der Basis $\{|H, H\rangle, |H, V\rangle, |V, H\rangle, |V, V\rangle\}$ aufgespannt wird, mittels der Methode der Quantentomographie [21]. Diese Zweiphotonen-Dichtematrix ist gegeben durch

$$\rho_{Ph}^{QT} = \begin{pmatrix} \alpha_{HH} & \zeta_1 & \zeta_2 & \gamma \\ \zeta_1^* & \beta_{HV} & \zeta_3 & \zeta_4 \\ \zeta_2^* & \zeta_3^* & \beta_{VH} & \zeta_5 \\ \gamma^* & \zeta_4^* & \zeta_5^* & \alpha_{VV} \end{pmatrix}.$$

Ihre Elemente entsprechen bestimmten zeitgemittelten Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung. Diese Funktionen haben eine bekannte Anwendung aus der Quantenoptik, wo sie als

$$g^{(2)}(t, \theta) = \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t+\theta)b(t+\theta)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2}$$

die Beziehung zwischen den Intensitäten eines Lichtfeldes zu verschiedenen Zeiten t , $t' = t + \theta$ angeben [18]. Somit enthalten sie Informationen über Photonenstatistik und das sogenannte “bunching” bzw. “antibunching” [15] und werden für $\theta = 0$ zur Unterscheidung unterschiedlicher Typen von Lichtfeldern (z.B. von kohärentem Licht, thermischem Licht, Fockzuständen) genutzt. Zu ihrer experimentellen Bestimmung wird ein Messaufbau nach Hanbury-Brown und Twiss eingesetzt.

Es ist auch möglich, diese Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung mit σ -Operatoren anstelle von b -Operatoren zu verwenden, um anstelle von Photonenzahlen Emissionsereignisse zu verschiedenen Zeiten t, t' zu korrelieren:

$$g_{ijkl}^{(2)} = A \cdot G_{ijkl}^{(2)}(t, t') = A \cdot \langle : \sigma_i^+(t) \sigma_j^+(t') \sigma_k(t') \sigma_l(t) : \rangle$$

mit $i, j, k, l \in \{H1, H2, V1, V2\}$ entsprechend der gesuchten $g^{(2)}$ -Funktion¹. Auf diese Weise kann man feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zerfallswege in der Biexziton-Exziton-Kaskade genommen werden.

Die physikalische Bedeutung der Erwartungswerte, welche diese Korrelationsfunktionen ausmachen, lässt sich anhand von Abbildung 3.2 verdeutlichen: Bei $g_{HHHH}^{(2)}$ bzw. $g_{VVVV}^{(2)}$ wird zunächst im ersten Übergang ein H bzw. ein V polarisiertes Photon erzeugt und im zweiten ein weiteres, um in der umgekehrten Reihenfolge (bei der Messung) wieder vernichtet werden zu können. So stellen α_{HH} und α_{VV} die Wahrscheinlichkeiten dafür dar, dass in einem geeigneten Messzeitraum jeweils einer von beiden Wegen im Zerfall genommen wird. Sind in das Modell keine dissipativen Prozesse, die einen Sprung zwischen beiden Wegen ermöglichen (beispielsweise durch Spinflip), eingebunden, so müssen β_{HV} und β_{VH} gleich Null sein. Da auf jeden Fall einer von beiden Zerfallswegen genommen werden muss, sorgt ein Normierungsfaktor A dafür, dass die Spur der Zweiphotonendichtematrix gleich 1 ist:

$$\begin{aligned} A \cdot (\alpha_{HH} + \beta_{HV} + \beta_{VH} + \alpha_{VV}) &= 1 \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{(\alpha_{HH} + \beta_{HV} + \beta_{VH} + \alpha_{VV})} \end{aligned}$$

Die Elemente γ und γ^* drücken die Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass zwar zwei Photonen der einen Polarisation erzeugt, aber zwei der anderen gemessen werden, was der Ununterscheidbarkeit beider Wege entspricht. Sie werden ebenfalls mit dem Faktor A normiert, sodass der Fall maximaler Verschränkung $\alpha_{HH} = \alpha_{VV} = |\gamma| = 0.5$ und $\beta_{HV} = \beta_{VH} = |\zeta_1| = |\zeta_2| = |\zeta_3| = |\zeta_4| = |\zeta_5| = 0$ entspricht. Die mit $\zeta_1 - \zeta_5$ bezeichneten Elemente entsprechen den verbliebenen möglichen Kombinationen der eingesetzten σ -Operatoren. Sie stellen keine physikalisch sinnvollen Wege der Kaskadenemission dar und sollten daher im Idealfall verschwinden.

Im Rahmen der von uns ins Modell mit einbezogenen Prozesse können nur α_{HH} , α_{VV} und γ von Null verschieden sein, sie legen den Zweiphotonen-Zustand fest, weshalb es unser Ziel ist sie zu ermitteln: Interessiert uns die Verschränkung der Photonen beider Übergänge, ungeachtet in welche Mode sie emittiert werden, berechnet man die $g^{(2)}$ -Korrelationsfunktionen vollständig mit σ -Operatoren [21]:

$$\begin{aligned} \alpha_{HH} &= A \cdot \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' \langle \sigma_{H1}^\dagger(t) \sigma_{H2}^\dagger(t') \sigma_{H2}(t') \sigma_{H1}(t) \rangle = \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' g_{HHHH}^{(2)} \\ \alpha_{VV} &= A \cdot \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' \langle \sigma_{V1}^\dagger(t) \sigma_{V2}^\dagger(t') \sigma_{V2}(t') \sigma_{V1}(t) \rangle = \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' g_{VVVV}^{(2)} \end{aligned}$$

¹auf die $: \cdot :$ -Notation wird in Anhang A näher eingegangen

$$\begin{aligned}
 \beta_{HV} &= A \cdot \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' \langle \sigma_{H1}^\dagger(t) \sigma_{V2}^\dagger(t') \sigma_{V2}(t') \sigma_{H1}(t) \rangle = \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' g_{HVVH}^{(2)} \\
 \beta_{VH} &= A \cdot \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' \langle \sigma_{V1}^\dagger(t) \sigma_{H2}^\dagger(t') \sigma_{H2}(t') \sigma_{V1}(t) \rangle = \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' g_{VHHV}^{(2)} \\
 \gamma &= A \cdot \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' \langle \sigma_{H1}^\dagger(t) \sigma_{H2}^\dagger(t') \sigma_{V2}(t') \sigma_{V1}(t) \rangle = \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' g_{HHVV}^{(2)} \\
 \gamma^* &= A \cdot \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' \langle \sigma_{V1}^\dagger(t) \sigma_{V2}^\dagger(t') \sigma_{H2}(t') \sigma_{H1}(t) \rangle = \int_{t_m}^{t_M} \int_{t'_m}^{t'_M} dt dt' g_{VVHH}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Falls einer der Übergänge durch eine Kavität vermittelt wird und der Einfluss der Kavität auf die Verschränkung betrachtet werden soll, so werden die σ -Operatoren des betreffenden Übergangs durch die Photonenerzeuger und -vernichter der entsprechenden Mode (b_H^\dagger , b_H bzw. b_V^\dagger , b_V) ersetzt [21].

Quanten-Regressions-Theorem

Zur Berechnung der Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung zu unterschiedlichen Zeiten nutzt man das Quanten-Regressions-Theorem. Es sagt aus, dass die Zeitentwicklung einer Größe, die von zwei Zeiten abhängt, für beide Zeitargumente gleich abläuft [11]. Dies kann man auf die $G^{(2)}$ -Funktionen, bei denen der erste Übergang zur Zeit t und der zweite zur Zeit $t' = t + \theta$ stattfindet, anwenden. Nutzt man ferner, dass man nach

$$\langle A(t) \rangle = \text{Sp}\{A(t)\rho\} = \text{Sp}\{A\rho(t)\},$$

anstelle der Zeitabhängigkeit des Operators A in einem anderen Bild auch die der Dichtematrix verwenden kann, so gilt, dass

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_i^\dagger(t) \sigma_j^\dagger(t + \theta) \sigma_k(t + \theta) \sigma_l(t) \rangle &= \text{Sp}\{\sigma_i^\dagger \sigma_j^\dagger(\theta) \sigma_k(\theta) \sigma_l \cdot \rho(t)\} \\
 &= \text{Sp}\{\sigma_j^\dagger(\theta) \sigma_k(\theta) \sigma_l \rho(t) \sigma_i^\dagger\} \\
 &= \text{Sp}\{\sigma_j^\dagger(\theta) \sigma_k(\theta) \tilde{\rho}\} \\
 &= \text{Sp}\{\sigma_k \tilde{\rho}(\theta) \sigma_j^\dagger\},
 \end{aligned}$$

wobei wieder $i, j, k, l \in \{H1, H2, V1, V2\}$, je nach gesuchtem $g^{(2)}$ zu setzen ist. Man berechnet hierbei die Zeitentwicklung der Dichtematrix ρ in t bis zum Zeitpunkt t_ν im Intervall zwischen t_m und t_M , transformiert ρ dann zu einer neuen Matrix $\tilde{\rho} = \sigma_l \rho(t_\nu) \sigma_i^\dagger$, die nicht notwendigerweise die Eigenschaften einer Dichtematrix besitzen muss und die Anfangsbedingungen für eine weitere Zeitentwicklung in θ bis zum Zeitpunkt $\theta_{end} = t_{M'} - t$ enthält. Den gesuchten Erwartungswert erhält man dann durch Spurbildung des Operators $\sigma_j^\dagger \sigma_k$ mit der bis zur Zeit θ_μ entwickelten Matrix $\tilde{\rho}(\theta)$. Der Ablauf dieses Verfahren wird in Abbildung 3.4 visualisiert.

Konkret auf die zu betrachtenden Erwartungswerte angewendet, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 G_{HHHH}^{(2)} &= \langle \sigma_{H1}^\dagger(t) \sigma_{H2}^\dagger(t + \theta) \sigma_{H2}(t + \theta) \sigma_{H1}(t) \rangle \\
 &= \text{Sp}\{\sigma_{H2} \tilde{\rho}_1 \sigma_{H2}^\dagger\} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho}_1 = \sigma_{H1} \rho \sigma_{H1}^\dagger \\
 G_{VVVV}^{(2)} &= \langle \sigma_{V1}^\dagger(t) \sigma_{V2}^\dagger(t + \theta) \sigma_{V2}(t + \theta) \sigma_{V1}(t) \rangle \\
 &= \text{Sp}\{\sigma_{V2} \tilde{\rho}_2 \sigma_{V2}^\dagger\} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho}_2 = \sigma_{V1} \rho \sigma_{V1}^\dagger \\
 G_{HHVV}^{(2)} &= \langle \sigma_{H1}^\dagger(t) \sigma_{H2}^\dagger(t + \theta) \sigma_{V2}(t + \theta) \sigma_{V1}(t) \rangle \\
 &= \text{Sp}\{\sigma_{V2} \tilde{\rho}_3 \sigma_{H2}^\dagger\} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho}_3 = \sigma_{V1} \rho \sigma_{H1}^\dagger
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

bei Betrachtung der Emissionsereignisse, bzw.

$$\begin{aligned}
 G_{HHHH}^{(2)} &= \langle \sigma_{H1}^\dagger(t) b_H^\dagger(t+\theta) b_H(t+\theta) \sigma_{H1}(t) \rangle \\
 &= \text{Sp}\{b_H \tilde{\rho}_1 b_H^\dagger\} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho}_1 = \sigma_{H1} \rho \sigma_{H1}^\dagger \\
 G_{VVVV}^{(2)} &= \langle \sigma_{V1}^\dagger(t) b_V^\dagger(t+\theta) b_V(t+\theta) \sigma_{V1}(t) \rangle \\
 &= \text{Sp}\{b_V \tilde{\rho}_2 b_V^\dagger\} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho}_2 = \sigma_{V1} \rho \sigma_{V1}^\dagger \\
 G_{HHVV}^{(2)} &= \langle \sigma_{H1}^\dagger(t) b_H^\dagger(t+\theta) b_V(t+\theta) \sigma_{V1}(t) \rangle \\
 &= \text{Sp}\{b_V \tilde{\rho}_3 b_H^\dagger\} \quad \text{mit} \quad \tilde{\rho}_3 = \sigma_{V1} \rho \sigma_{H1}^\dagger,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

für den Fall, dass der Übergang vom Exziton- zum Grundzustand ein Photon in der Kavitätsmode erzeugt.

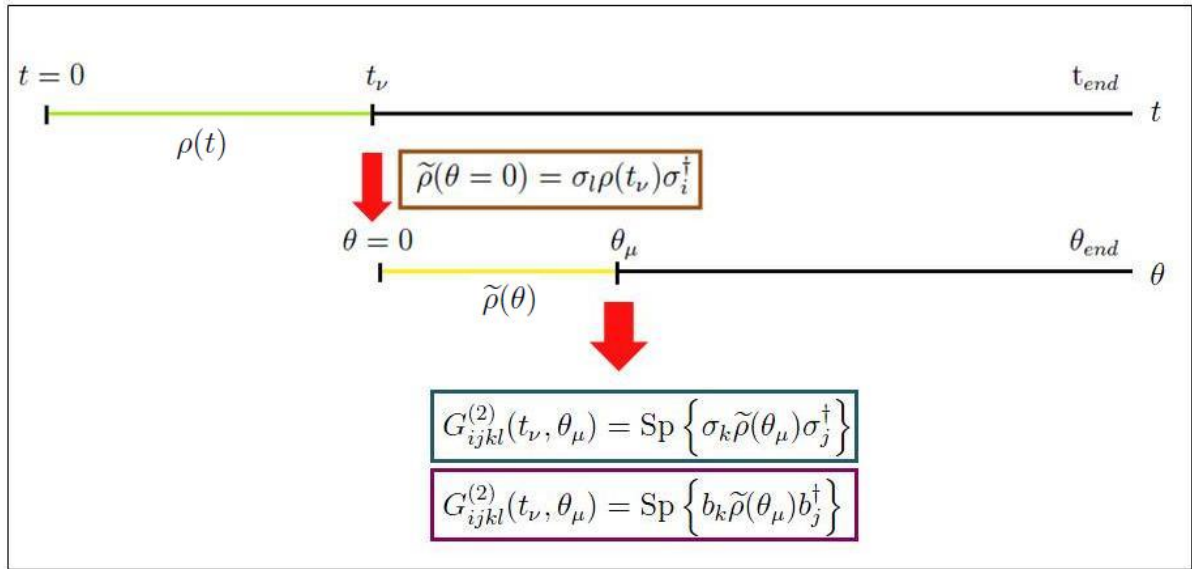


Abbildung 3.4: Zur Berechnung des Erwartungswertes einer zweizeitigen Größe nutzt man das Quanten-Regressions-Theorem, indem man ρ erst in der Zeit entwickelt (grüner Abschnitt der Zeitleiste), dann zur Zeit t_ν wie im braunen Kasten beschrieben transformiert und die transformierte Matrix bis zur Zeit θ_μ (gelber Abschnitt der Zeitleiste) entwickelt. Dann bestimmt man die $G^{(2)}$ -Funktionen nach Gl. (3.8) (blau) bzw. Gl. (3.9) (violett).

Zeitmittelung durch Integration

Da nicht genau bekannt ist, zu welcher Zeit t der erste Zerfall im Kaskadenprozess beginnt und in welchem zeitlichen Abstand θ die beiden Emissionsereignisse stattfinden, mittelt man über beide Zeiten: Für jeden Zeitpunkt, zu dem das erste Emissionsereignis stattfinden kann, werden die Korrelationsfunktionen für alle möglichen Zeitpunkte der zweiten Emission berechnet. Anschließend integriert man über beide Zeitargumente, sodass sich in den Elementen der Zweiphotonen-Dichtematrix die Wahrscheinlichkeit widerspiegelt, dass der entsprechende Weg innerhalb des Beobachtungszeitraumes genommen wurde. Dabei erstreckt sich das Zeitintervall für das erste Emissionsereignis von $t = t_m$ bis $t = t_M$, jenes für das zweite Emissionsereignis von $t' = t_{m'}$ bis $t' = t_{M'}$. Als Anfangszeit beider Integrationen wird der Start der Zeitentwicklung der Kaskade gewählt: $t_m = t_{m'} = 0$; und bis zu einem Zeitpunkt $t_M = t_{M'} = t_{end}$ integriert,

der im Idealfall bei $t_{end} = \infty$ läge, sodass tatsächlich alle Emissionsereignisse registriert werden können.

Die Berechnung der Komponenten der Zweiphotonen-Dichtematrix aus den oben diskutierten Erwartungswerten erfolgt demnach gemäß

$$\begin{aligned}
 & \int_{tm}^{tM} dt \int_{tm'}^{tM'} dt' G_{i,j,k,l}^{(2)}(t, t') \\
 &= \int_{tm}^{tM} dt \int_{tm'-t}^{tM'-t} d\theta G_{i,j,k,l}^{(2)}(t, \theta) \\
 &= \int_0^{t_{end}} dt \int_{-t}^{t_{end}-t} d\theta G_{i,j,k,l}^{(2)}(t, \theta) \\
 &= \int_0^{t_{end}} dt \left[\int_0^{t_{end}-t} G_{i,j,k,l}^{(2)}(t, \theta) d\theta \right] \\
 &= \int_0^{t_{end}} dt \left[\int_0^{t_{end}-t} \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^+(t+\theta) \sigma_k(t+\theta) \sigma_l(t) \rangle d\theta \right]
 \end{aligned}$$

unter Verwendung von Anhang C.

Messgrößen des Verschränkungsgrades

Mithilfe der auf diese Weise errechneten Zweiphotonen-Dichtematrix ρ_{Ph}^{QT} werden die folgenden Maße zur Quantifizierung des im System vorliegenden Verschränkungsgrades bestimmt.

Fidelity

Die Fidelity f^+ beschreibt die Wiedergabetreue der Emission in Bezug auf den maximal-verschränkten Zustand $|\Psi^+\rangle$, ist also gegeben durch die Projektion des Zweiphotonenzustands auf diesen [19] (Abschnitt 4):

$$f^+ = \langle \Psi^+ | \rho | \Psi^+ \rangle = \frac{\alpha_{HH} + \alpha_{VV}}{2} + \text{Re}\{\gamma\}.$$

Es leuchtet ein, dass klassisch korrelierte Photonenpaare höchstens $f^+ = 0.5$ aufweisen können, da alle Nicht-Diagonalelemente gleich Null sind und immer gilt, dass $(\alpha_{HH} + \alpha_{VV}) \leq 1$, da $\text{Sp}\{\rho_{Ph}^{QT}\} = 1$ sein muss.

Experimentell lässt sich die Fidelity aus drei Korrelationsmessungen in den gleichen Basen für beide Photonen bestimmen:

$$f^+ = \langle \Psi^+ | \rho | \Psi^+ \rangle = \frac{(E_{rr} + E_{dd} - E_{cc} + 1)}{4}, \quad (3.10)$$

wobei E_{12} die aus einer Polarisationsmessung der Photonen 1, 2 in rectilinearer (r), diagonalen (d) oder zirkularer (c) Basis erhaltenen Korrelationskoeffizienten sind [19] (Abschnitt 4). Sie können Werte zwischen -1 (maximale Antikorrelation) und 1 (maximale Korrelation) annehmen, bei $E = 0$ besteht keinerlei Korrelation zwischen den zwei betrachteten Messergebnissen.

Entspricht der durch ρ beschriebene Zustand Ψ^+ , so erreicht die Fidelity ihr Maximum von 1: In diesem Fall liefern Polarisationsmessungen in rektilinearer sowie diagonalen Basis vollständig korrelierte, jene in zirkularer Basis antikorrelierte Ergebnisse.

Concurrence

Die Concurrence wird typischerweise verwendet, um den Verschränkungsgrad in Zwei-Qubit-Systemen zu bestimmen [21]:

$$C = 2(|\gamma| - \beta_{HV}). \quad (3.11)$$

Sie setzt sich zusammen aus der Differenz des Betrags von γ und β_{HV} , die beide Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix sind. Somit wächst der durch C gemessene Verschränkungsgrad mit der Unwissenheit, welcher der beiden Wege genommen wurde. Er sinkt, wenn Sprünge zwischen beiden Wegen beispielsweise durch dissipative Prozesse ermöglicht werden. Im Rahmen der in unser Modell eingebundenen Einflüsse gilt immer, dass $\beta_{HV} = \beta_{VH} = 0$ ist. Daher besteht die Concurrence stets nur aus dem Doppelten des Betrags von γ . Im Unterschied zur Fidelity beträgt die Concurrence eines rein klassisch korrelierten Zustandes Null anstelle von 0.5. Weiterhin gehen in C sowohl Real- als auch Imaginärteil von γ ein, während zur Fidelity nur der Realteil beiträgt.

3.5 Bewegungsgleichungen der Dichtematrixelemente

Im Rahmen der im letzten Abschnitt dargestellten Modellannahmen bilden die Zustände

$$|\chi, n_H, n_V\rangle = \{|B, 0, 0\rangle, |X_H, 0, 0\rangle, |X_V, 0, 0\rangle, |G, 1, 0\rangle, |G, 0, 1\rangle, |G, 0, 0\rangle\}$$

eine Basis für das Biexziton-Exziton-Kaskaden-System. Man erhält also eine 6x6 Dichtematrix, deren Bewegungsgleichung sich unter Berücksichtigung der verschiedenen Einflüsse auf die Zeitentwicklung als

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\frac{i}{\hbar}[H_0^{Atom} + H_0^{Feld} + H^{Int}, \rho] + \frac{\partial}{\partial t}\rho_{cav} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_{EKM} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_{pd}. \quad (3.12)$$

ergibt. Hierbei sind die einzelnen Terme wie folgt gegeben: H_0^{Atom} nach (3.2), H_0^{Feld} nach Gl. (3.3), H^{Int} nach Gl. (3.4), $\frac{\partial}{\partial t}\rho_{cav}$ nach Gl. (3.5), $\frac{\partial}{\partial t}\rho_{EKM}$ nach Gl. (3.6) und $\frac{\partial}{\partial t}\rho_{pd}$ nach Gl. (3.7).

Mithilfe dieser Bewegungsgleichung wird eine spezielle Situation untersucht: Der Übergang vom Exziton in den Grundzustand ist an die Kavität gekoppelt. Dabei sind die Energien der Kavitätsmoden horizontaler und vertikaler Polarisation gleich und liegen genau auf den Exzitonenergien ohne Feinstrukturaufspaltung $\hbar\Omega_H = \hbar\Omega_V = \epsilon_X$. Die Feinstrukturaufspaltung vom Betrag δ verstimmt die Energien der Übergänge von $|X_H\rangle$ zu $|G\rangle$ und von $|X_V\rangle$ zu $|G\rangle$ symmetrisch gegenüber der Energie der Kavitätsmoden: $\epsilon_H = \epsilon_X + \frac{\delta}{2}$, $\epsilon_V = \epsilon_X - \frac{\delta}{2}$. Dies entspricht den in [21] betrachteten Gegebenheiten.

Für diese Arbeit erfolgte die Umsetzung der Rechnungen in Matlab 7.8.0, dabei wurde die Bewegungsgleichung mittels des Differentialgleichungs-Lösers ode45, der auf dem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung beruht, numerisch gelöst.

Um die Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix zu erhalten werden im Detail die folgenden Schritte ausgeführt:

Als erstes erfolgt die Wahl der Integrationsgrenzen, die für die Integrationen über t und θ gleich gesetzt werden. Es wird von $t_m = t_{m'} = 0$ bis $t_M = t_{M'} = t_{end}$ integriert, wobei im Idealfall $t_{end} = \infty$ sein sollte. Für die numerische Rechnung wird ein geeigneter Endzeitpunkt bestimmt, der dem genügen muss, dass das System einen stationären Zustand eingenommen hat und die $G^{(2)}(t, \theta)$ auf Null abgeklungen sind, damit ihr gesamter Beitrag in die Rechnung eingeht. Betrachtet man also den zeitlichen Verlauf der Besetzungen, erhält man als Untergrenze für $t_{end} = t_M = t_{M'}$ die Zeit, zu der sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Im nächsten Schritt rechnet man die Zeitentwicklung der Dichtematrix in t mit der Anfangsbedingung, dass sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Biexziton-Zustand aufhält und keine Photonen in der Kavitätsmode vorhanden sind. Dann wird die Zeit t innerhalb des Berechnungszeitraums von $t = 0$ bis t_{end} in die Zeiten $t_\nu = t_1, t_2, t_3, \dots$ im Abstand von einer Pikosekunde aufgeteilt und für jeden dieser Zeitschritte die Dichtematrix $\rho(t_\nu)$ entsprechend des Quanten-Regressions-Theorems (Abschnitt 3.4) in $\tilde{\rho}_{HHHH}(\theta = 0)$, $\tilde{\rho}_{VVVV}(\theta = 0)$, $\tilde{\rho}_{HHVV}(\theta = 0)$ sowie $\tilde{\rho}_{VVHH}(\theta = 0)$ transformiert. Für jede dieser transformierten Dichtematrizen $\tilde{\rho}$ folgt eine Zeitentwicklung in θ von

The diagram illustrates the construction of the reduced density matrix $\tilde{\rho}(\theta=0)$ from the full density matrix ρ by tracing out the t mode.

Step 1: Initial Density Matrix ρ

The initial density matrix ρ is a 6×6 matrix in the basis $\{|B,0,0\rangle, |X_H,0,0\rangle, |X_V,0,0\rangle, |G,1,0\rangle, |G,0,1\rangle, |G,0,0\rangle\}$. The element $\rho_{|B,0,0\rangle,|B,0,0\rangle}$ is highlighted in red.

Step 2: Tracing out the t mode

The reduced density matrix is obtained by tracing out the t mode: $\tilde{\rho}(\theta=0) = \sigma_t \rho(t_\nu) \sigma_t^\dagger$.

Step 3: Intermediate Matrices $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4$

The reduced density matrix is constructed in four steps, each corresponding to a trace operation over a specific mode:

- $\tilde{\rho}_1$: Trace over the G mode (1st index).
- $\tilde{\rho}_2$: Trace over the X_V mode (2nd index).
- $\tilde{\rho}_3$: Trace over the X_H mode (3rd index).
- $\tilde{\rho}_4$: Trace over the B mode (4th index).

Each intermediate matrix $\tilde{\rho}_i$ is a 6×6 matrix. The elements $\tilde{\rho}_{|B,0,0\rangle,|B,0,0\rangle}$ are highlighted in red in each matrix.

Step 4: Final Reduced Density Matrix $\tilde{\rho}(\theta=0)$

The final reduced density matrix $\tilde{\rho}(\theta=0)$ is a 6×6 matrix. The element $\tilde{\rho}_{|B,0,0\rangle,|B,0,0\rangle}$ is highlighted in red.

Step 5: Expectation Value Calculation

The expectation value $G_{ijkl}^{(2)}(t_\nu, \theta_\mu)$ is calculated using the reduced density matrix $\tilde{\rho}(\theta_\mu)$ and the operators σ_k and σ_j^\dagger :

$$G_{ijkl}^{(2)}(t_\nu, \theta_\mu) = \text{Sp} \{ \sigma_k \tilde{\rho}(\theta_\mu) \sigma_j^\dagger \}$$

The operators σ_k and σ_j^\dagger are defined as:

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} G_{HHHH}^{(2)} \\ G_{VVVV}^{(2)} \\ G_{HHVV}^{(2)} \\ G_{VVHH}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \sigma_j^\dagger = \begin{pmatrix} G_{HHHH}^{(2)} \\ G_{VVVV}^{(2)} \\ G_{HHVV}^{(2)} \\ G_{VVHH}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Abbildung 3.5: Zur Berechnung der $G^{(2)}$ -Funktionen werden die in Abb. 3.4 aufgeführten Schritte hier konkretisiert.

$\theta = 0$ bis $\theta_\mu \leq \theta_{end}$ mit den auf diese Weise erhaltenen Anfangsbedingungen, indem erneut die Bewegungsgleichung (3.12) mittels ode45 gelöst wird. Anschließend führt man $Sp\{\sigma_k \tilde{\rho}(\theta_\mu) \sigma_j^+\}$ (bzw. $Sp\{b_k \tilde{\rho}(\theta_\mu) b_j^+\}$) aus und gewinnt so die Erwartungswerte $G_{HHHH}^{(2)}(t_\nu, \theta_\mu)$, $G_{VVVV}^{(2)}(t_\nu, \theta_\mu)$, $G_{HHVV}^{(2)}(t_\nu, \theta_\mu)$ und $G_{VVHH}^{(2)}(t_\nu, \theta_\mu)$. Die konkrete Ausführung dieses Verfahrens ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

An dieser Stelle wurde anhand des zeitlichen Verlaufes der $G^{(2)}$ -Funktionen überprüft, ob das Zeitfenster groß genug gewählt wurde, d.h. ob man so lange rechnet, bis die $G^{(2)}(t_\nu, \theta_\mu)$ näherungsweise Null ergeben. Aus diesem Grund wurde der Endzeitpunkt sicherheitshalber auf $t_{end} = \frac{20}{\tau}$ hochgesetzt.

Als nächstes folgt die Integration der vier $G^{(2)}(t_\nu, \theta_\mu)$ über θ : Dazu werden die $G^{(2)}(t_\nu, \theta_m)$ nach Trapez-Regel gewichtet und aufsummiert

$$\int_0^{t_{end}-t} G^{(2)}(t_\nu, \theta) d\theta \approx \left\{ \frac{(G^{(2)}(t_\nu, \theta_1 = 0) + G^{(2)}(t_\nu, \theta_N = t_{end}))}{2} + \sum_{k=2}^{N-1} G^{(2)}(t_\nu, \theta_k) \right\} \cdot \Delta$$

wobei Δ die Schrittgröße von 1 ps und $N = t_{end}/\Delta$ die Anzahl der Integrationschritte bezeichnet.

Ebenso erfolgt anschließend die Integration über t :

$$\int_0^{t_{end}} G^{(2)}(t) dt \approx \left\{ \frac{(G^{(2)}(t_1 = 0) + G^{(2)}(t_N = t_{end}))}{2} + \sum_{k=2}^{N-1} G^{(2)}(t_k) \right\} \cdot \Delta$$

mit gleicher Schrittgröße und gleichen Integrationsgrenzen.

Diese Berechnungen liefern die Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix ρ_{Ph}^{QT} , von denen γ , α_{HH} und α_{HH} zur Bestimmung des Verschränkungsgrades des emittierten Photonenpaares nach Gl. (3.10), Gl. (4.11) eingesetzt werden.

Abschnitt 4.1 zeigt die Ergebnisse bei Betrachtung des Kaskadensystems ohne Kavität. Die zugehörige Zeitentwicklung erhält man aus der Bewegungsgleichung (3.12) für $\kappa = 0$, $g = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \langle B|\rho|B \rangle & \langle B|\rho|X_H \rangle & \langle B|\rho|X_V \rangle & \langle B|\rho|G \rangle \\ \langle X_H|\rho|B \rangle & \langle X_H|\rho|X_H \rangle & \langle X_H|\rho|X_V \rangle & \langle X_H|\rho|G \rangle \\ \langle X_V|\rho|B \rangle & \langle X_V|\rho|X_H \rangle & \langle X_V|\rho|X_V \rangle & \langle X_V|\rho|G \rangle \\ \langle G|\rho|B \rangle & \langle G|\rho|X_H \rangle & \langle G|\rho|X_V \rangle & \langle G|\rho|G \rangle \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \left[\begin{pmatrix} \epsilon_{XX} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \langle B|\rho|B \rangle & \langle B|\rho|X_H \rangle & \langle B|\rho|X_V \rangle & \langle B|\rho|G \rangle \\ \langle X_H|\rho|B \rangle & \langle X_H|\rho|X_H \rangle & \langle X_H|\rho|X_V \rangle & \langle X_H|\rho|G \rangle \\ \langle X_V|\rho|B \rangle & \langle X_V|\rho|X_H \rangle & \langle X_V|\rho|X_V \rangle & \langle X_V|\rho|G \rangle \\ \langle G|\rho|B \rangle & \langle G|\rho|X_H \rangle & \langle G|\rho|X_V \rangle & \langle G|\rho|G \rangle \end{pmatrix} \right] \\ &- \frac{1}{2\tau} \begin{pmatrix} 4\langle B|\rho|B \rangle & \langle B|\rho|X_H \rangle & \langle B|\rho|X_V \rangle & 0 \\ \langle X_H|\rho|B \rangle & 2\langle X_H|\rho|X_H \rangle & 2\langle X_H|\rho|X_V \rangle & \langle X_H|\rho|G \rangle \\ \langle X_V|\rho|B \rangle & 2\langle X_V|\rho|X_H \rangle & 2\langle X_V|\rho|X_V \rangle & \langle X_V|\rho|G \rangle \\ 0 & \langle G|\rho|X_H \rangle & \langle G|\rho|X_V \rangle & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle B|\rho|B \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle B|\rho|B \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle X_H|\rho|X_H \rangle + \langle X_V|\rho|X_V \rangle \end{pmatrix} \\ &+ \gamma^{pd} \begin{pmatrix} 0 & \langle B|\rho|X_H \rangle & \langle B|\rho|X_V \rangle & \langle B|\rho|G \rangle \\ \langle X_H|\rho|B \rangle & 0 & \langle X_H|\rho|X_V \rangle & \langle X_H|\rho|G \rangle \\ \langle X_V|\rho|B \rangle & \langle X_V|\rho|X_H \rangle & 0 & \langle X_V|\rho|G \rangle \\ \langle G|\rho|B \rangle & \langle G|\rho|X_H \rangle & \langle G|\rho|X_V \rangle & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Anschließend wird die Systemdynamik unter Berücksichtigung der Kavität errechnet, hierbei interessiert man sich sowohl für die Verschränkung der ins Modenkontinuum emittierten Photo-

nenpaare, als auch für die eines Photonenpaares, bei dem das erste Photon in das Modenkontinuum und das zweite Photon in die Kavitätsmode abgegeben wurde. Im ersten Fall berechnet man die Korrelationsfunktionen zweiter Ordnung nach Gl. (3.8), im zweiten nach Gl. (3.9). Die Ergebnisse davon sind in Abschnitt 4.2 und 4.3 dieser Arbeit zu finden.

4 Ergebnisse

Die Lösung der Bewegungsgleichung für die Dichtematrix des Biexziton-Exziton-Systems erfolgt numerisch wie in Abschnitt 3.5 aufgeführt. Dies dient der Untersuchung des Einflusses verschiedener Parameter auf die Verschränkung des im Kaskadenzerfall erzeugten Photonenpaares: Die durch Anwesenheit einer Mikrokavität um den Quantenpunkt, unterschiedliche Dissipationsraten sowie aufgrund von Feinstrukturaufspaltung der Exziton-Energien bewirkten Änderungen des Verschränkungsgrades werden im folgenden überprüft. So lassen sich Aussagen darüber treffen, durch welche Faktoren bzw. Parameterwahlen die Erzeugung verschränkter Photonenpaare in Halbleiter-Quantenpunkten optimiert werden könnte.

Die im folgenden dargestellten numerischen Ergebnisse wurden mit einer analytischen Berechnung der Elemente der Zweiphotonen-Dichematrix abgeglichen, deren Herleitung in Anhang D und E aufgeführt wird [12]. So konnte sichergestellt werden, dass das erstellte Programm zuverlässig funktioniert und so die Basis für komplexere Untersuchungen ohne analytische Lösung im Rahmen eines erweiterten Modells bilden kann.

Zur Wahl der Parameter

Bei den in diesem Abschnitt ausgeführten Berechnungen des Verschränkungsgrades wurde jeweils einer der Einfluss nehmenden Parameter variiert, die anderen wurden sofern nicht anders angegeben nach dem in der Tabelle gelisteten Standard-Satz gewählt.

Größe	Einheit	Standardwahl	Quelle
g	$[meV]$	0.05	[21]
τ^{-1}	$[\frac{1}{ps}]$	$\frac{1}{25}$	[7]
κ	$[\frac{1}{ps}]$	$\frac{1}{65}$	[7]
γ^{pd}	$[\frac{1}{ps}]$	0	-
δ	$[meV]$	0	-

Tabelle 4.1: Standard Parameter-Satz für die in Abschnitt 4 ausgeführten Berechnungen.

Dabei orientieren wir uns hauptsächlich an den Berechnungen von Carmele et al. [7], da dieser seine Parameter speziell für einen InAs Quantenpunkt in einer InGaAs Benetzungsschicht aus- gesucht hat und solche InAs Quantenpunkte auch von Andrew Shields in [19] betrachtet werden, worauf ein Großteil von Abschnitt 3 dieser Arbeit basiert. Zusätzlich können unsere Ergebnisse zum Teil mit denen aus [21] verglichen werden, da in diesen Fällen nur das Verhältnis von δ , γ^{pd} oder κ zu τ^{-1} von Relevanz ist.

4.1 Kaskadenzerfall ohne Einfluss einer Kavität

Zunächst wird der Biexziton-Exziton-Kaskadenzerfall im freien Raum, also ohne Einfluss einer Kavität untersucht. In diesem Fall tragen der freie atomare Hamiltonoperator, Emission in ein

Modenkontinuum sowie reine Dephasierung zur Zeitentwicklung des Systems bei, sodass diese durch die Gleichung (3.13) beschrieben wird. Die daraus resultierende Besetzungsdynamik ist in Abb. 4.1(a) dargestellt. Aufgrund der Parameterwahl ist die Emission in ein Kontinuum von Moden der dominante Prozess, der das System über einen kurzzeitigen Aufenthalt in den Exziton-Niveaus in den Grundzustand führt: Man sieht, wie die Besetzung des Biexziton-Niveaus (rote Kurve) zunächst in gleichen Teilen an die Exziton-Niveaus (grün und gelb) abgegeben wird, sodass deren Besetzung bis zu einem Maximum ansteigt. Da die Exziton-Niveaus allerdings sobald sie besetzt sind an den Grundzustand verlieren, wird ihre Besetzung wieder abgebaut und schließlich befindet sich das System im Grundzustand (blaue Kurve). Beide Exziton-Niveaus haben immer die gleiche Besetzungswahrscheinlichkeit, selbst im Fall, dass sie aufgrund von Feinstrukturaufspaltung energetisch beliebig verschieden sind. Dies resultiert daraus, dass ihre Besetzung durch die Emission in das Modenkontinuum gesteuert wird, die unabhängig von den Energien der Exziton-Niveaus ist. Der Verschränkungsgrad des in diesem Prozess erzeugten Photonenpaares wird durch die Dissipationsraten γ^{pd} und τ^{-1} sowie durch den Betrag der Feinstrukturaufspaltung δ beeinflusst. Die numerische Berechnung liefert das in Abbildung 4.1(b)

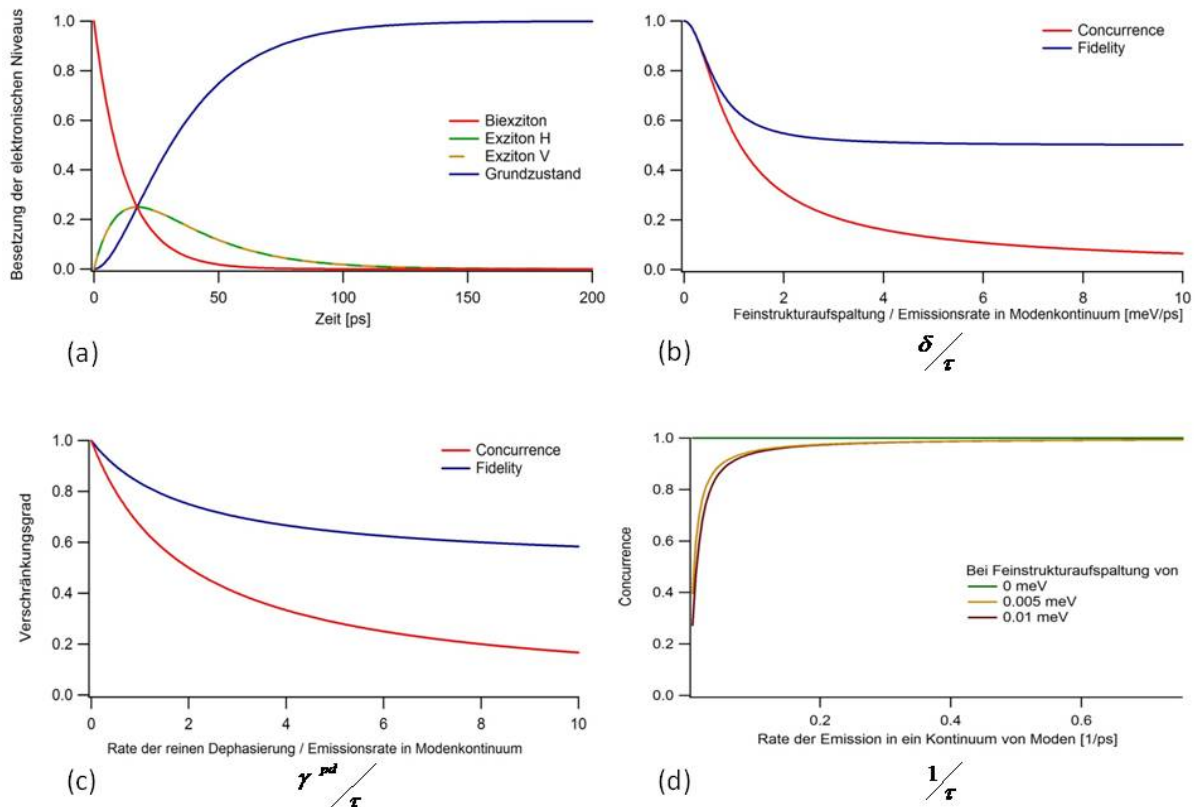


Abbildung 4.1: Studie des Biexziton-Exziton-Kaskadenzerfalls ohne Kavität: (a) Zeitentwicklung der Niveaubesetzungen. (b) Der Verschränkungsgrad (Concurrence in rot und Fidelity in blau) der im Zerfall erzeugten Photonen in Abhängigkeit vom Verhältnis der Feinstrukturaufspaltung der Exziton-Niveaus zur Emissionsrate ins Modenkontinuum. (c) Abhängigkeit von Concurrence und Fidelity des Photonenpaar-Zustands vom Verhältnis der Rate der reinen Dephasierung zur Rate der Emission ins Modenkontinuum. (d) Entwicklung der Concurrence bei Variation der Emissionsrate in ein Kontinuum von Moden.

dargestellte Verhalten von Concurrence und Fidelity bei der Variation des Verhältnisses von Feinstrukturaufspaltung δ zur Emissionsrate in das Modenkontinuum. Abbildung 4.1(c) zeigt

den Verschränkungsgrad bei Variation der Verhältnisse von der Rate der reinen Dephasierung zur Emissionsrate in das Modenkontinuum. Diese beiden Abbildungen lassen sich mit denen in Abb. 2 (a), (b) aus [21] dargestellten vergleichen: Dort wurde der Betrag von γ in Abhängigkeit dieser Parameter gezeichnet, was der Hälfte der Concurrence in meinen Abbildungen entspricht. Man sieht eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse.

Die Abhängigkeiten verhalten sich wie folgt: Beide Verschränkungsmaße (sowohl Concurrence als auch Fidelity) nehmen ihr Maximum von 1 an, falls keine Feinstrukturaufspaltung oder reine Dephasierung vorliegt. Mit steigendem δ bzw. γ^{pd} sinken sie ab und nähern sich sehr langsam ihrem Minimum von 0 für die Concurrence und 0.5 bei der Fidelity an. Dies liegt daran, dass reine Dephasierung die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix zerstört, aus welchen γ gebildet wird, und dass eine Feinstrukturaufspaltung der Energien der Exziton-Niveaus beide Wege unterscheidbar macht: Auf diese Weise wird der Überlapp des resultierenden Zustandes mit dem Bell-Zustand kleiner. Orientiert man sich an [21], so liegen physikalische Werte von γ^{pd} bei $\frac{1}{500\text{ps}}$ und die Feinstrukturaufspaltung sollte zwischen $\delta = 0 - 0.02$ meV betragen. Die Feinstrukturaufspaltung kann also in der Realität wesentlich stärker zur Verringerung des Verschränkungsgrades im System beitragen. Abbildung 4.1 (d) zeigt die Abhängigkeit des Verschränkungsgrades von der Rate der Emission in ein Kontinuum von Moden. Die einzelnen Kurven wurden für unterschiedliche Werte von δ gezeichnet (bei $\gamma^{pd} = 0$). Dabei muss sie allerdings größer als Null sein, damit der Kaskadenzerfall überhaupt stattfindet. Für vorhandenes δ wird am Startpunkt der Kurven (in gelb und rot) deutlich, dass die Verschränkung bei gegebenem (kleinen) τ^{-1} mit steigender Feinstrukturaufspaltung immer geringere Werte annimmt. Sind sowohl δ also auch γ^{pd} gleich Null, so hat die Rate der Emission ins Modenkontinuum keinen Einfluss auf den Verschränkungsgrad. Allerdings führt ansonsten die Erhöhung der Emissionsrate τ^{-1} zu einer Steigerung des Verschränkungsgrades, die den Einfluss der Feinstrukturaufspaltung kompensieren kann. Das selbe Verhalten beobachtet man mit reiner Dephasierung anstelle von bzw. zusätzlich zur Feinstrukturaufspaltung im System. Nun würde dies bedeuten, dass bei genügend hoher Emissionsrate in das Modenkontinuum selbst in Quantenpunkten, in denen eine große Feinstrukturaufspaltung und viel Dephasierung auftritt, immer maximal verschränkte Photonenpaare erzeugt werden könnten. Dies ist unrealistisch und weist auf eine nötige Erweiterung unseres Modells hin: Um das System im Biexziton-Zustand zu präparieren, wird ein Pump-Prozess eingesetzt. Dabei müssen zwei Exzitonen vom Quantenpunkt eingefangen werden, um den Biexziton-Zustand zu bilden. Ist τ^{-1} zu hoch, würde das zuerst eingefangene Exziton zerfallen, bevor es sich mit einem anderen zum Biexziton zusammenschließen könnte. Zerfällt danach ein Biexziton, würde man Ereignisse unterschiedlicher Kaskadenemissionen korrelieren, was den Verschränkungsgrad des Systems wieder reduziert [21]. Dieser Effekt wurde in unserer Rechnung nicht berücksichtigt, weshalb man das Verhalten aus Abb. 4.1 (d) erhält.

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung werden von der analytischen Lösung¹ bestätigt.

4.2 Einfluss der Kavität

Die Kavität nimmt in zweierlei Hinsicht Einfluss auf die Zeitentwicklung der Dichtematrixelemente. Aufgrund der Jaynes-Cummings-Kopplung der elektronischen Niveaus an das elektromagnetische Feld entstehen gedämpfte Rabi-Oszillationen in den Besetzungen der dieser Niveaus: Photonen in den Kavitätsmoden können vom elektronischen System reabsorbiert werden, sodass das System zwischen den Zuständen $|X_H, 0, 0\rangle$ und $|G, 1, 0\rangle$ bzw. $|X_V, 0, 0\rangle$ und $|G, 0, 1\rangle$ hin und her schwingt (im Fall, dass die Kopplung nur zwischen den Exziton-Niveaus und dem Grundzustand besteht). In Abbildung 4.2 ist die Zeitentwicklung der Niveaubesetzungen für zwei unterschiedliche Kopplungsstärken gezeigt. Wie auch in Abb. 4.1 (a) nimmt die Besetzung des Biexziton-Zustands zu Gunsten der Besetzung der Exziton-Niveaus durch Emission ins Modenkontinuum ab. Da allerdings das Exziton-Niveau und der Grundzustand nach Jaynes-Cummings

¹Anhang C

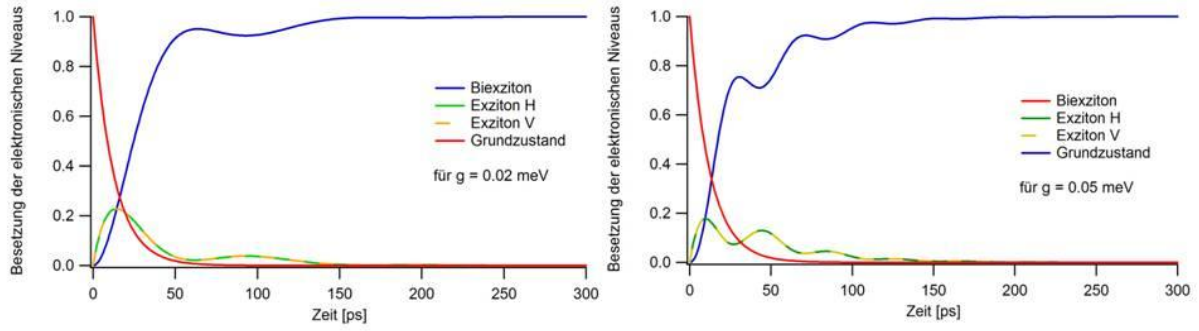


Abbildung 4.2: Besetzungsdynamik unter Einfluss der Kopplung an eine Kavitätsmode mit der Kopplungsstärke $g = 0.02 \text{ meV}$ (links) und $g = 0.05 \text{ meV}$ (rechts).

gekoppelt sind, kann das System, nachdem es unter Emission eines Photons in die Kavitätsmode vom Exziton-Niveau in den Grundzustand übergegangen ist, zurück in den Exziton-Zustand wechseln, indem es ein Photon aus der Kavitätsmode absorbiert. Durch die dissipativen Prozesse erfolgt die Dämpfung der Rabi-Oszillationen, deren Frequenz von der Stärke der Kopplung zwischen elektronischem System und elektromagnetischem Feld, also von g , abhängig ist. Die Dämpfung der Rabi-Oszillationen erfolgt durch die verschiedenen dissipativen Prozesse. Die Frequenz ist von der Stärke der Kopplung zwischen elektronischem System und elektromagnetischem Feld, also von g , abhängig. Man erkennt, dass bei einer höheren Kopplungsstärke 4.2 (rechts), schnellere Oszillationen auftreten. Darüber hinaus ist die Systemdynamik bei größerem g komplexer, die Besetzung der Exziton-Niveaus ist insgesamt niedriger und der Grundzustand wird zunächst schneller besetzt. Der Zerfall benötigt dabei allerdings in beiden Fällen ($g=0.02 \text{ meV}$ in Abb. 4.2 links und $g=0.05 \text{ meV}$ in Abb. 4.2 rechts) in etwa gleich viel Zeit um das System in einen stationären Zustand zu bringen. Im hier gezeigten Fall sind die Exziton-Niveaus gleich stark besetzt. Würde man sie durch Feinstrukturaufspaltung in asymmetrischer Art und Weise von der Energie der Kavitätsmode verschieben, dann nähmen sie auch unterschiedlich an den Rabioszillationen teil und würden nicht mehr übereinstimmen. In den folgenden Rechnungen werden die Exziton-Niveaus allerdings symmetrisch von der Feinstrukturaufspaltung beeinflusst und sind daher immer gleich besetzt. Kavitätsverluste dämpfen die Rabi-Oszillationen, da sie den Verlust von Photonen in den Kavitätsmoden aus dem Resonator beschreiben. Ferner dämpfen sie alle Elemente der Dichtematrix, die von Zuständen mit Photonenzahlen $n_H \neq 0$ und/oder $n_V \neq 0$ gebildet werden (siehe Gl. (3.5)).

Das Verhalten des Verschränkungsgrades unter Einwirkung der Kavität bei Variation der Parameter δ , γ^{pd} , τ^{-1} sowie κ ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Seine Abhängigkeit von Feinstrukturaufspaltung, von reiner Dephasierung und von der Emissionsrate in das Modenkontinuum entwickelt sich qualitativ wie im vorherigen Fall ohne Kavitätseinfluss: Der Verschränkungsgrad sinkt mit steigendem δ , γ^{pd} (abgebildet in Abbildungen 4.3 (a), (b)), er steigt bei Erhöhung von τ^{-1} (siehe 4.3 (c)). Dabei hat die Feinstrukturaufspaltung im Vergleich zum System ohne Kavitätseinfluss eine geringere Reduktion des Verschränkungsgrades zur Folge. Aus diesem Grund beginnen die rote und die orangene Kurve in 4.3 (c) für kleine τ^{-1} auch bei geringeren Werten der Concurrence als in Abbildung 4.1 (b), wobei die Abhängigkeit von der Rate der Emission in ein Kontinuum von Moden qualitativ unverändert ist. Kavitätsverluste haben in einem Quantenpunkt ohne Feinstrukturaufspaltung und ohne reine Dephasierung (grüne Kurve) keinen Einfluss auf den Verschränkungsgrad des erzeugten Photonenpaares (4.3 (d)). Liegt allerdings $\delta \neq 0$ vor, wird der Verschränkungsgrad für geringe und für hohe Verlustraten verringert, dazwischen existiert ein Maximum. Dieses ist umso stärker ausgeprägt, je größer die Feinstrukturaufspaltung ist, erreicht dann aber nicht mehr einen Verschränkungsgrad von eins. Es gibt demnach für jede gegebene endliche Feinstrukturaufspaltung, die bei realen Quanten-

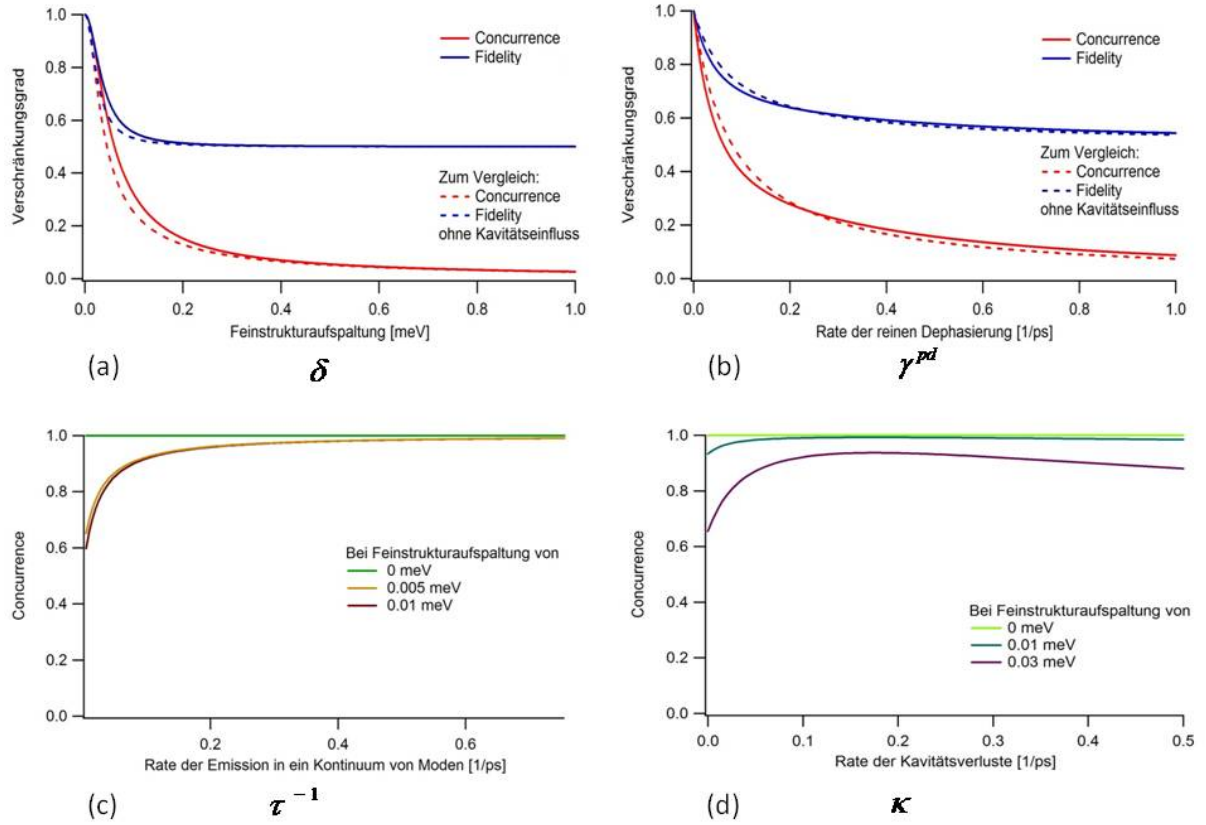


Abbildung 4.3: Verhalten des Verschränkungsgrades zweier unter Einfluss einer Kavität ins Kontinuum von Moden emittierten Photonen bei der Variation von (a) Feinstrukturaufspaltung, (b) Rate der reinen Dephasierung, (c) Rate der Emission in ein Kontinuum von Moden und (d) der Rate der Kavitätsverluste.

punkten fast nicht zu vermeiden ist, eine optimale Kavität, für die die Verschränkung im System maximal ist. Das Verhalten der Abhängigkeit des Verschränkungsgrades von der Rate der Kavitätsverluste lässt sich auf folgende Weise erklären: Damit das Photon im zweiten Zerfallsschritt in die Kavitätsmode emittiert werden kann, muss die Energie des Photons im Bereich der Linienbreite des Übergangs der Kavität liegen. Eine Feinstrukturaufspaltung verstimmt die Energie des Übergangs gegenüber der des Photons, sodass δ kleiner als die Linienbreite sein muss, damit das Exziton-Photon in die Kavitätsmode emittiert werden kann. Kavitätsverluste vergrößern die Linienbreite, da sie die Zeit verringern, die sich das Photon in der Kavität aufhält. Somit ist der Verschränkungsgrad bei vorhandener Feinstrukturaufspaltung für sehr kleine κ gering und steigt dann an. Weil die Kavitätsverluste auch einen dephasierenden Einfluss auf einige Elemente der Dichtematrix haben, senken große κ den Verschränkungsgrad wieder.

Auch in den Fall, dass der Exziton-Übergang an eine Kavität gekoppelt ist, kann eine analytische Methode zur Berechnung α_{HH} , α_{VV} und γ^2 hergeleitet werden. Die Ergebnisse der numerischen Betrachtung stimmen mit den analytischen überein.

²Anhang D

4.3 Erwartungswert mit gemischten Operatoren

Bildet man die Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix, α_{HH} , α_{VV} , γ , mit gemischten b - und σ -Operatoren, so betrachtet man die Verschränkung eines im ersten Zerfallsschritt ins Modenkontinuum emittierten Photons mit dem im zweiten Zerfallsschritt in die Kavitätsmode emittierten Photon. An der Gestalt der Abhängigkeit des Verschränkungsgrades von den verschiedenen Parametern ändert sich dadurch im Vergleich zum im letzten Abschnitt diskutierten Fall nichts: Bei Betrachtung der δ -Abhängigkeit von Concurrence und Fidelity erkennt man, dass die Verschränkung des Photonenpaares wie erwartet mit zunehmender Feinstrukturaufspaltung vermindert wird (Abbildung 4.4 (a) zeigt den unnormierten Betrag von γ in cyan). Allerdings stößt man auf ein Problem bei der Normierung, das im nächsten Abschnitt diskutiert wird. Die reine Dephasierung scheint hier im Vergleich zu 4.3 (b) einen stärkeren Einfluss auf die Reduktion des Verschränkungsgrades zu haben (siehe 4.4 (b)), während eine Erhöhung der Emissionsrate in das Modenkontinuum für endliche δ den Verschränkungsgrad nicht mehr auf eins, sondern nur bis auf einen stationären Wert darunter zu vergrößern vermag (siehe 4.4 (c)). Die Kavitätsverluste bewirken bei gleicher Parameterwahl ($\delta \neq 0$) quantitativ höhere Maximalwerte der Concurrence 4.4 (d) im Vergleich zu den Ergebnissen des Abschnitts 4.2, die in Abbildung 4.4 (d) als gestrichelte Linien gezeigt sind. Diese Verstärkung resultiert daraus, dass in der Kavität durch den Purcell-Effekt die Emission von Photonen in die Kavitätsmode erhöht wird.

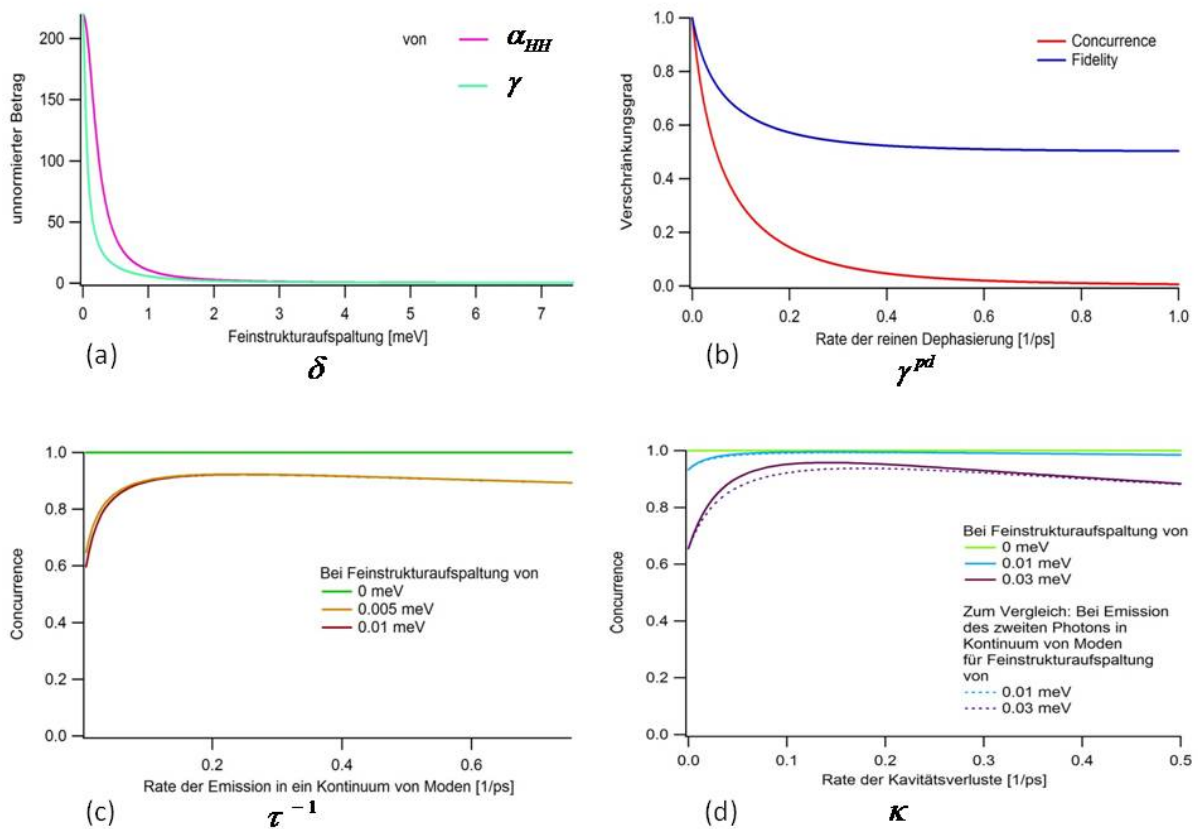


Abbildung 4.4: Das Exziton-Photon wird in die Kavitätsmode emittiert: (a) unnormierte Beträge von $\alpha_{HH} = \alpha_{VV}$ und γ bei Variation der Feinstrukturaufspaltung; Verhalten des Verschränkungsgrades bei der Variation von (b) der Rate der reinen Dephasierung, (c) der Rate der Emission in ein Kontinuum von Moden und (d) der Rate der Kavitätsverluste.

Die numerischen Ergebnisse zeigen auch in diesem Fall eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung³.

Normierung der Zweiphotonen-Dichtematrix

Die Normierung aller Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix wird wie in Abschnitt 3.4 beschrieben mit

$$A = \frac{1}{\alpha_{HH} + \beta_{HV} + \beta_{VH} + \alpha_{VV}}$$

vorgenommen. Dies resultiert aus der Überlegung, dass $\text{Sp}(\rho_{Ph}^{QT}) = 1$ sein soll. Für den Fall, dass die Elemente von ρ_{Ph}^{QT} mit Erwartungswerten

$$G_{ijkl}^{(2)} = \langle \sigma_i^\dagger \sigma_j^\dagger \sigma_k \sigma_l \rangle$$

gebildet werden, sind die zur Normierung eingesetzten Elemente (hier: α_{HH} , α_{VV}) tatsächlich diagonal in der zugehörigen Dichtematrix. Man benötigt nur die reduzierte elektronische Dichtematrix, deren Spur gleich 1 ist, um die Erwartungswerte zu bilden. Daher stellt der Normierungsfaktor A in diesem Fall eine sinnvolle Wahl dar und die Rechnung liefert immer einen endlichen Wert für A . Dies ergibt sich auch aus der analytischen Lösung für α_{HH} und α_{VV} (siehe Anhang E). Physikalisch kann man sich vorstellen, dass A die Wahrscheinlichkeit, dass auf jeden Fall einer der möglichen Zerfallswege der Kaskade genommen wurde, auf eins normiert.

Im Falle gemischter Operatoren im Erwartungswert

$$\langle \sigma_i^\dagger b_j^\dagger b_k \sigma_l \rangle$$

ist die Bedeutung von A unklar. Die Elemente α_{HH} und α_{VV} stellen wohl nicht-diagonale Elemente einer größeren zugehörigen Zweiphotonen-Dichtematrix dar. Aus diesem Grund macht ihre Verwendung zur Normierung keinen Sinn mehr, ferner werden sie auch dephasiert und gehen daher gegen Null (abgebildet als magentafarbene Kurve in 4.4 (a)). Weil sie dabei ab einem gewissen Zeitpunkt ein konstantes Verhältnis zum unnormierten γ einnehmen, ergibt sich ein unphysikalisches Verhalten der normierten Größe γ und der durch sie berechneten Verschränkungsmaße. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 4.5 die Entwicklung der mithilfe von

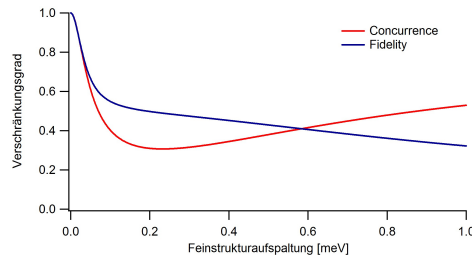


Abbildung 4.5: Abhängigkeit des Verschränkungsgrades von δ bei Normierung der gemischten Erwartungswerte durch A zeigt kein physikalisch sinnvolles Verhalten.

A normierten Concurrence und Fidelity bei Variation der Feinstrukturaufspaltung. Es zeigt sich ein unphysikalisches Anstieg der Concurrence mit steigender Feinstrukturaufspaltung. Die Fidelity sinkt unter den Wert 0.5 ab, was bedeutet, dass $(\alpha_{HH} + \alpha_{VV}) < 1$ beträgt und somit die Spur nicht erhalten ist. Man sieht auch, dass sich das Verhalten des normierten γ wie erwartet gestaltet, solange die Prozesse, die α_{HH} und α_{VV} zerstören, nicht sehr stark sind. Zum

³Anhang D

Teil ist dies zudem der Bereich, in dem sich physikalisch sinnvolle δ bewegen. Um den Vergleich der erhaltenen Werte für den Verschränkungsgrad mit denen der im Vorfeld betrachteten Modelle anstellen zu können, wurden daher auch die in Abbildung 4.4 (b), (c) und (d) dargestellten Kurven auf die in Abschnitt 3.4 beschriebene Weise normiert. In [21] wurde ebenfalls diese Normierung verwendet. Trotzdem ist fraglich, ob dies gerechtfertigt ist und Ergebnisse von wirklicher physikalischer Bedeutung liefert.

Ein ähnliches Normierungsproblem tritt auf, wenn man das in der Quantenoptik üblicherweise verwendete $g^{(2)}$ für sehr kleine Photonenzahlen betrachtet.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden zunächst die theoretischen Grundlagen von Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, Jaynes-Cummings-Wechselwirkung und Lindblad-Theorie der Dissipation aufgearbeitet. So konnte ein Modell des Systems der Biexziton-Exziton-Kaskade in einem Halbleiter-Quantenpunkt entwickelt werden, welches die Wechselwirkung zwischen dem elektronischen System und einem Lichtfeld und die Prozesse der Emission in ein Kontinuum von Moden, reine Dephasierung und Kavitätsverluste berücksichtigt. Es liefert Bewegungsgleichungen für die Dichtematrix des Systems, welche sich numerisch lösen lassen, sodass man unter Verwendung des Quanten-Regressions-Theorems die Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix errechnen kann. Aus diesen ergibt sich der Verschränkungsgrad in Form von Fidelity und Concurrence. Darüber hinaus wurde die analytische Lösung der Bewegungsgleichungen für die Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix nachvollzogen, und die so erhaltenen Ergebnisse konnten mit der numerischen Berechnung abgeglichen werden.

Dabei wurden drei verschiedene Betrachtungen angestellt: Zum einen wurde der Fall untersucht, dass sowohl das Biexziton- als auch das Exziton-Photon in ein Kontinuum von Moden emittiert wurde, unter Nutzung der Erwartungswerte $\langle \sigma_i^\dagger \sigma_j^\dagger \sigma_k \sigma_l \rangle$. Hierbei sollte erst einmal der Einfluss einer Kavität ausgeschlossen (A) und dann dazugenommen (B) werden. Zum anderen haben wir den Fall betrachtet, dass das Exziton-Photon in die Kavitätsmode abgegeben wird, wobei die Erwartungswerte $\langle \sigma_i^\dagger b_j^\dagger b_k \sigma_l \rangle$ verwendet werden mussten (C). Man stellt folgendes fest:

1. Ist eine Feinstrukturaufspaltung der Exziton-Energien vorhanden, so verringert diese den Verschränkungsgrad des im Kaskadenzerfall erzeugten Photonenpaares monoton. Bei sehr großer Feinstrukturaufspaltung reduziert sich die Korrelation auf ein klassisch erreichbares Maß: Die Fidelity nimmt den Wert $f^+ = 0.5$ an und die Concurrence verschwindet. Dies geschieht in allen drei Fällen A, B und C.
 2. Reine Dephasierung vernichtet die Verschränkung des Photonenpaares ebenfalls umso mehr, je stärker sie auftritt. Allerdings scheint sie im Fall C einen größeren Einfluss zu haben als in den anderen Fällen.
 3. Die Rate der Emission in das Kontinuum von Moden kann im System vorhandene Verschränkung nicht vermindern. Ist der Verschränkungsgrad durch andere Einflüsse nicht maximal, so lässt er sich durch eine höhere Emissionsrate τ^{-1} für A und B bis aufs Höchstmaß vergrößern, bei C bis auf einen stationären Wert unter eins. Dies ist allerdings wahrscheinlich nur ein Artefakt dessen, dass kein Pump-Prozess in unser Modell eingebunden wurde, und wird in der Realität nicht vorkommen.
 4. Kavitätsverluste wirken sich nur in den Fällen B und C auf den Verschränkungsgrad aus und wie in 3. nur, falls dieser durch einen anderen Prozess schon vermindert wurde. Dabei bewirkt eine Steigerung der Kavitätsverluste zunächst eine Erhöhung des Verschränkungsgrades bis zu einem Maximum und dann wieder sein Absinken. Dieses Maximum liegt im Fall C höher als bei B, weil durch den Purcell-Effekt die Emission in die Kavitätsmode begünstigt wird.
- Insgesamt haben Feinstrukturaufspaltung und reine Dephasierung den stärksten Einfluss auf den Verschränkungsgrad. Die Raten der Emission in ein Modenkontinuum und der Kavitätsverluste sind ihnen untergeordnet, können für gegebenes δ oder γ^{pd} den Verschränkungsgrad aber optimieren.

Für alle in diesem Abschnitt numerisch berechneten Ergebnisse war es möglich, sie mit der in diesen Spezialfällen vorhandenen analytischen Lösung abzugleichen. So soll sichergestellt werden,

dass das entwickelte Computerprogramm verlässlich ist, da es die Grundlage für eine Erweiterung des Modells darstellt. Im Zuge einer solchen werden die Bewegungsgleichungen komplexer, sodass sie eine realitätsnähere Beschreibung bieten, gleichzeitig analytisch aber nicht mehr gelöst werden können. Die numerischen Ergebnisse lagen immer in sehr guter Übereinstimmung mit den analytisch erhaltenen, daher kann man davon ausgehen, dass das entwickelte Programm auch bei Erweiterungen des Modells zuverlässige Ergebnisse liefern wird.

Ausblick

Der nächste Schritt in der Betrachtung der Erzeugung verschränkter Photonenpaare im Halbleiter-Quantenpunkt wäre die Einbindung eines Pump-Prozesses in das Modell. Dabei würde das System aus dem Grundzustand wieder in das Biexziton-Niveau befördert, wodurch wiederholte Kaskadenemissionen stattfinden könnten. Außerdem könnten weitere Niveaus (z.B. die p-Schale des Quantenpunkts), die bei der Erzeugung des Biexziton-Zustands involviert sein können, in das Modell eingebunden werden. Damit gingen Relaxationsprozesse zwischen den Niveaus mit einer endlichen Relaxationszeit und Dephasierung einher. Ferner wäre es interessant unterschiedliche Energien und Positionierungen der Kavitätsmoden sowie eine asymmetrische Verstimmung der Exziton-Niveaus zu betrachten. In [7] beispielsweise werden die Exziton-Niveaus aufgrund der Feinstrukturaufspaltung auf die von uns verwendeten ϵ_H und ϵ_V verschoben, aber die Energien der Kavitätsmoden stimmen jeweils mit einer der Übergangsenergien überein: $\hbar\Omega_H = \epsilon_H$, $\hbar\Omega_V = \epsilon_V$. Um diese Situation experimentell zu erreichen, würde man eine Kavität benötigen, die zwei Moden unterschiedlicher Energien hat, wobei es möglich sein muss, beide sehr präzise auf die Exzitonen-Energien abzustimmen. Bei der Untersuchung solcher Variationen des Modells sollte daher nicht vergessen werden, welche Spezifikationen im Experiment auch realisierbar sind. Ebenfalls in Hinblick auf die Verwertbarkeit der getroffenen Aussagen für Experimentatoren, also für die Eignung beim Bau von Anwendungen, wäre es lohnend nicht nur den Verschränkungsgrad eines in Kaskadenzerfall entstehenden Photonenpaares zu betrachten, sondern auch die Rate, mit der solche Paare erzeugt werden.

6 Anhang

A: Zeitordnung bei der Korrelationsfunktion 2. Ordnung

Es ist zu beachten, dass

$$G_{ijkl}^{(2)}(t, t') = \langle : \sigma_i^+(t) \sigma_j^+(t') \sigma_k(t') \sigma_l(t) : \rangle$$

ist, sodass die $:$ -Notation sicherstellt, dass die Operatoren dazwischen sowohl Normalordnung als auch Zeitordnung befolgen: Es stehen demnach die Erzeugungsoperatoren links von den Vernichtungsoperatoren, wobei die Zeitargumente der Erzeuger von links nach rechts ansteigen, die der Vernichter von rechts nach links [22] (Kapitel 6.1.1). Damit lassen sich die zu berechnenden Integrale nach

$$\begin{aligned} & \int_{tm}^{tM} dt \int_{tm'}^{tM'} dt' G_{i,j,k,l}^{(2)}(t, t') \\ = & \int_{tm}^{tM} dt \int_{tm'-t}^{tM'-t} d\theta G_{i,j,k,l}^{(2)}(t, \theta) \\ = & \int_{tm}^{tM} dt \left[\int_{tm'-t}^0 G_{i,j,k,l}^{(2)}(t, \theta) d\theta + \int_0^{tM'-t} G_{i,j,k,l}^{(2)}(t, \theta) d\theta \right] \\ = & \int_{tm}^{tM} dt \left[\int_{tm'-t}^0 \langle : \sigma_i^+(t) \sigma_j^+(t+\theta) \sigma_k(t+\theta) \sigma_l(t) : \rangle d\theta + \int_0^{tM'-t} \langle : \sigma_i^+(t) \sigma_j^+(t+\theta) \sigma_k(t+\theta) \sigma_l(t) : \rangle d\theta \right] \\ = & \int_{tm}^{tM} dt \left[\int_{tm'-t}^0 \langle \sigma_j^+(t+\theta) \sigma_i^+(t) \sigma_l(t) \sigma_k(t+\theta) \rangle d\theta + \int_0^{tM'-t} \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^+(t+\theta) \sigma_k(\theta) \sigma_l(t) \rangle (t, t+\theta) d\theta \right] \end{aligned}$$

umformen. Man sieht, dass der Beitrag $G_{ijkl}^{(2)}(t, \theta < 0) = 0$ sein muss¹, sodass

$$\begin{aligned} \int_{tm}^{tM} dt \int_{tm'}^{tM'} dt' g_{ijkl}^{(2)} &= A \cdot \int_{tm}^{tM} dt \int_{tm'}^{tM'} dt' G_{ijkl}^{(2)}(t, t') \\ &= A \cdot \int_{tm}^{tM} dt \int_{tm'}^{tM'} dt' \langle : \sigma_i^+(t) \sigma_j^+(t') \sigma_k(t') \sigma_l(t) : \rangle \\ &= A \cdot \int_{tm}^{tM} dt \int_{tm'}^{tM'} dt' \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^+(t') \sigma_k(t') \sigma_l(t) \rangle \end{aligned}$$

gilt und man die $:$ -Notation hier nicht braucht.

B: $G^{(2)}$ für $\theta < 0$

Am Beispiel von

$$\langle \sigma_{H1}^+(t+\theta) \sigma_{H2}^+(t) \sigma_{H2}(t) \sigma_{H1}(t+\theta) \rangle \text{ für } \theta < 0,$$

¹Anhang B

ist gut erkennbar, dass die betrachteten Erwartungswerte für $\theta < 0$ Null sind:

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_{H1}^+(t+\theta) \sigma_{H2}^+(t) \sigma_{H2}(t) \sigma_{H1}(t+\theta) \rangle &= \langle \sigma_{H2}^+(t') \sigma_{H1}^+(t' + |\theta|) \sigma_{H1}(t' + |\theta|) \sigma_{H2}(t') \rangle \\
&= \text{Sp} \{ \sigma_{H1} [\sigma_{H2} \rho(t') \sigma_{H2}^\dagger]_\theta \sigma_{H1}^\dagger \} \\
&= \text{Sp} \{ |H\rangle \langle B| [|G\rangle \langle H| \rho(t') |H\rangle \langle G|]_\theta |B\rangle \langle H| \} \\
&= \langle B| [|G\rangle \langle H| \rho(t') |H\rangle \langle G|]_\theta |B\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Man wendet hierbei das Quanten-Regressions-Theorem wie in Abschnitt 3.4 beschrieben an. Dabei erhält die neue Matrix $\tilde{\rho} = [\sigma_{H2} \rho(t') \sigma_{H2}^\dagger]_\theta$, mit der die Zeitentwicklung in θ folgt, als Anfangsbedingung $\langle G | \tilde{\rho}(\theta = 0) | G \rangle = \langle H | \rho(t') | H \rangle$ (für die anderen zu betrachtenden Erwartungswerte wird der Grundzustand von $\tilde{\rho}$ entsprechend mit anderen Elementen von ρ gefüllt). Alle Matrixelemente außer dem Grundzustand sind demnach anfangs gleich Null, am Ende der θ -Entwicklung wird allerdings als $G^{(2)}$ der Eintrag $\langle B | \tilde{\rho}(\theta_{end}) | B \rangle$ abgefragt. Da in den Bewegungsgleichungen, nach denen die Zeitentwicklung folgt, kein Prozess enthalten ist, der das System aus dem Grundzustand in den Biexziton-Zustand bringen kann, gibt es keinen Beitrag zu den $G^{(2)}$ -Funktionen für $\theta < 0$.

C: Analytische Lösung der Bewegungsgleichungen für das System ohne Kavität

Ohne Kavitätseinfluss ist die Zeitentwicklung der Dichtematrix des Kaskadensystems durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho = & - i \sum_{\chi=\{B, X_H, X_V, G\}} [| \chi \rangle \epsilon_\chi \langle \chi | \rho - \rho | \chi \rangle \epsilon_\chi \langle \chi |] \\
& - \sum_{\substack{\chi, \chi' = G, X_H, X_V, B \\ \chi \neq \chi'}} \frac{\gamma_{\chi, \chi'}^{pd}}{4} (| \chi \rangle \langle \chi | \rho | \chi' \rangle \langle \chi' | + | \chi' \rangle \langle \chi' | \rho | \chi \rangle \langle \chi |) \\
& + \frac{1}{2\tau} [2 | X_V \rangle \langle B | \rho | B \rangle \langle X_V | - | B \rangle \langle B | \rho - \rho | B \rangle \langle B |] \\
& + \frac{1}{2\tau} [2 | X_H \rangle \langle B | \rho | B \rangle \langle X_H | - | B \rangle \langle B | \rho - \rho | B \rangle \langle B |] \\
& + \frac{1}{2\tau} [2 | G \rangle \langle X_V | \rho | X_V \rangle \langle G | - | X_V \rangle \langle X_V | \rho - \rho | X_V \rangle \langle X_V |] \\
& + \frac{1}{2\tau} [2 | G \rangle \langle X_H | \rho | X_H \rangle \langle G | - | X_H \rangle \langle X_H | \rho - \rho | X_H \rangle \langle X_H |]
\end{aligned}$$

gegeben. Für die einzelnen Elemente von ρ ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{B,B} &= -\frac{2}{\tau} \rho_{B,B}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{X_H, X_H} &= \frac{1}{\tau} \rho_{B,B} - \frac{1}{\tau} \rho_{X_H, X_H}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{X_V, X_V} &= \frac{1}{\tau} \rho_{B,B} - \frac{1}{\tau} \rho_{X_V, X_V}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{G, G} &= \frac{1}{\tau} \rho_{X_H, X_H} + \frac{1}{\tau} \rho_{X_V, X_V}, \\
\frac{\partial}{\partial t} \rho_{X_V, X_H} &= -\frac{1}{\tau} \rho_{X_V, X_H} - \frac{\gamma^d}{2} \rho_{X_V, X_H} + i \delta \rho_{X_V, X_H},
\end{aligned}$$

wobei $\delta = (\epsilon_H - \epsilon_V)$ ist. Sie werden durch

$$\begin{aligned}
\rho_{B,B}(t) &= e^{-\frac{2t}{\tau}} \rho_{B,B}(t=0) \\
\rho_{X_V,X_V}(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} [\rho_{X_V,X_V}(0) + \rho_{B,B}(0)] - e^{-\frac{2t}{\tau}} \rho_{B,B}(0) \\
\rho_{X_H,X_H}(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} [\rho_{X_H,X_H}(0) + \rho_{B,B}(0)] - e^{-\frac{2t}{\tau}} \rho_{B,B}(0) \\
\rho_{G,G}(t) &= 1 - \rho_{X_V,X_V}(t) - \rho_{X_H,X_H}(t) - \rho_{B,B}(t) \\
&= 1 + e^{-\frac{2t}{\tau}} \rho_{B,B}(0) - e^{-\frac{t}{\tau}} [\rho_{X_V,X_V}(0) + \rho_{X_H,X_H}(0) + 2\rho_{B,B}(0)] \\
&= 1 + e^{-\frac{2t}{\tau}} \rho_{B,B}(0) - e^{-\frac{t}{\tau}} [1 + \rho_{B,B}(0) - \rho_{G,G}(0)] \\
\rho_{X_V,X_H}(t) &= e^{-\frac{t}{\tau} - \frac{\gamma^d t}{\tau} + i\delta t} \rho_{X_V,X_H}(0)
\end{aligned}$$

gelöst. Damit ergeben sich die gesuchten Erwartungswerte zu

$$\begin{aligned}
g_{HHHH}^{(2)} &= Sp\{\sigma_{H1}^+(t)\sigma_{H2}^+(t+\theta)\sigma_{H2}(t+\theta)\sigma_{H1}(t)\rho\} \\
&= Sp\{\sigma_{H2}(\theta) [\sigma_{H1}\rho(t)\sigma_{H1}^+] \sigma_{H2}^+(\theta)\} \\
&= Sp\{\sigma_{H2} [\sigma_{H1}\rho(t)\sigma_{H1}^+]_{\theta} \sigma_{H2}^+\} \\
&= Sp\{|G\rangle\langle X_H| [|H\rangle\langle B|\rho(t)\langle X_H|]_{\theta} |X_H\rangle\langle G|\} \\
&= \langle X_H| [|X_H\rangle\rho_{B,B}(t)\langle X_H|]_{\theta} |X_H\rangle \\
&= \langle X_H|\tilde{\rho}_{X_H,X_H}(\theta)|X_H\rangle \\
&= \tilde{\rho}_{X_H,X_H}(\theta) = e^{-\frac{\theta}{\tau}} \cdot \tilde{\rho}_{H,H}(\theta=0) = e^{-\frac{\theta}{\tau}} e^{-\frac{2t}{\tau}}.
\end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\begin{aligned}
g_{VVVV}^{(2)} &= Sp\{\sigma_{V1}^+(t)\sigma_{V2}^+(t+\theta)\sigma_{V2}(t+\theta)\sigma_{V1}(t)\rho\} \\
&= e^{-\frac{\theta}{\tau}} e^{-\frac{2t}{\tau}},
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
g_{HHVV}^{(2)} &= Sp\{\sigma_{H1}^+(t)\sigma_{H2}(t+\theta)\sigma_{V2}(t+\theta)\sigma_{V1}(t)\rho\} \\
&= Sp\{\sigma_{V2} [\sigma_{V1}\rho(t)\sigma_{H1}^+]_{\theta} \sigma_{H2}^+\} \\
&= Sp\{|G\rangle\langle X_V| [|X_V\rangle\langle B|\rho(t)\langle X_H|]_{\theta} |X_H\rangle\langle G|\} \\
&= \langle X_V| [|X_V\rangle e^{-\frac{2t}{\tau}} \langle X_H|]_{\theta} |X_H\rangle \\
&= \tilde{\rho}_{X_V,X_H}(\theta) = e^{-\frac{2t}{\tau}} e^{-\frac{\theta}{\tau}} e^{-\frac{\gamma^d \theta}{2}} e^{i\delta \theta}.
\end{aligned}$$

Man sieht, dass ohne reine Dephasierung und Feinstrukturaufspaltung ($\delta = \gamma^d = 0$) maximale Verschränkung vorliegt: $g_{HHVV}^{(2)} = g_{HHHH}^{(2)} = g_{VVVV}^{(2)}$. Durch Integration lassen sich hieraus die Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix bestimmen:

$$\alpha_{HH} = \alpha_{VV} = A \cdot \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\theta \exp(-\theta/\tau) \exp(-2t/\tau) = A \cdot \frac{\tau^2}{2}$$

und

$$\gamma = A \cdot \int_0^\infty dt \int_0^\infty \exp(-2t/\tau) \exp(-\gamma^{pd}\theta/2) \exp(i\delta\theta) \exp(-\theta/\tau) d\theta = A \cdot \frac{\tau}{2(\frac{\gamma^{pd}}{2} - i\delta + \frac{1}{\tau})}$$

wobei der Normierungsfaktor $A = 1/\tau^2$ beträgt.

D: Analytische Lösung mit Kavität

Unter Berücksichtigung des Einflusses einer Kavität ergeben sich die Bewegungsgleichungen für die Dichtematrix des Systems nach Gleichung (3.12) als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho = & - i[H_0, \rho] \\ & - ig b_V^\dagger |G\rangle \langle X_V| \rho + ig \rho |G\rangle \langle X_V| b_V^\dagger \\ & - ig^* b_V |X_V\rangle \langle G| \rho + ig^* \rho |X_V\rangle \langle G| b_V \\ & - ig b_H^\dagger |G\rangle \langle X_H| \rho + ig \rho |G\rangle \langle X_H| b_H^\dagger \\ & - ig^* b_H |X_H\rangle \langle G| \rho + ig^* \rho |X_H\rangle \langle G| b_H \\ & + \frac{1}{2\tau} [2|X_V\rangle \langle B| \rho |B\rangle \langle X_V| - |B\rangle \langle B| \rho - \rho |B\rangle \langle B|] \\ & + \frac{1}{2\tau} [2|X_H\rangle \langle B| \rho |B\rangle \langle X_H| - |B\rangle \langle B| \rho - \rho |B\rangle \langle B|] \\ & + \frac{1}{2\tau} [2|G\rangle \langle X_V| \rho |X_V\rangle \langle G| - |X_V\rangle \langle X_V| \rho - \rho |X_V\rangle \langle X_V|] \\ & + \frac{1}{2\tau} [2|G\rangle \langle X_H| \rho |X_H\rangle \langle G| - |X_H\rangle \langle X_H| \rho - \rho |X_H\rangle \langle X_H|] \\ & - \sum_{\substack{\chi, \chi' = G, X_H, X_V, B \\ \chi \neq \chi'}} \frac{\gamma_{\chi, \chi'}^{pd}}{4} (|\chi\rangle \langle \chi| \rho |\chi'\rangle \langle \chi'| + |\chi'\rangle \langle \chi'| \rho |\chi\rangle \langle \chi|) \\ & - \frac{\kappa}{2} [2b_H \rho b_H^\dagger - b_H^\dagger b_H \rho - \rho b_H^\dagger b_H] \\ & - \frac{\kappa}{2} [2b_V \rho b_V^\dagger - b_V^\dagger b_V \rho - \rho b_V^\dagger b_V]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Um die Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix zu errechnen, nutzt man diese Bewegungsgleichung zweimal: Einmal für die Zeitentwicklung von ρ in t , und dann für die Zeitentwicklung der nach Quanten-Regressions-Theorem transformierten Dichtematrix $\tilde{\rho}$ in θ . Aus den so erhaltenen Elementen von ρ und $\tilde{\rho}$ werden die Erwartungswerte $\langle \sigma_i^\dagger(t) O_j^\dagger(t') O_k(t') \sigma_l(t) \rangle$ berechnet, wobei $O_j^\dagger(t') O_k(t')$ entweder $\sigma_j^\dagger(t') \sigma_k(t')$ oder $b_j^\dagger(t') b_k(t')$ ist, und $i, j, k, l \in \{H1, H2, V1, V2\}$ im Fall der σ -Operatoren und $j, k \in \{H, V\}$ im Fall der b -Operatoren bezeichnet. Ferner müssen diese Erwartungswerte über beide Zeiten von Null bis ∞ integriert werden, und stellen dann die Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix ρ_{ph}^{QT} dar. Die Idee bei der Herleitung ihrer analytischen Lösung ist es, dass sich beide Zeitentwicklungen und -integrale trennen lassen. Betrachte dazu noch einmal

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_i^\dagger(t) O_j^\dagger(t') O_k(t') \sigma_l(t) \rangle \\ & = \text{Sp}\{\sigma_i^\dagger(t) O_j^\dagger(t') O_k(t') \sigma_l(t) \rho\} \\ & = \text{Sp}\{O_k(\theta) [\sigma_l \rho(t) \sigma_i^\dagger] O_j^\dagger(\theta)\}. \end{aligned}$$

Man sieht, dass die t -Abhängigkeit nun nur von ρ getragen wird. Für die von uns benötigten Elemente der Zweiphotonen-Dichtematrix ist

$$\tilde{\rho}(\theta = 0) = [\sigma_l \rho(t) \sigma_i^\dagger]$$

immer gleich

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\theta = 0) &= [|X_{l'}\rangle\langle B| \rho(t) |B\rangle\langle X_{i'}|] \\ &= [|X_{l'}\rangle\rho_{|B,0,0\rangle,|B,0,0\rangle}(t)\langle X_{i'}|],\end{aligned}$$

wobei $l', i' \in \{H, V\}$ sind. Nun folgt aus Gl. (5.1), dass

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{|B,0,0\rangle,|B,0,0\rangle} = -\frac{2}{\tau}\rho_{|B,0,0\rangle,|B,0,0\rangle}$$

ist. Es ergibt sich daraus

$$\rho_{|B,0,0\rangle,|B,0,0\rangle}(t) = \exp(-2t/\tau).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}&\langle \sigma_i^\dagger(t) O_j^\dagger(t') O_k(t') \sigma_l(t) \rangle \\ &= \exp(-2t/\tau) \text{Sp}\{O_k(\theta) [|X_{l'}\rangle\langle X_{i'}|] O_j^\dagger(\theta)\} \\ &= \exp(-2t/\tau) \text{Sp}\{O_k[\tilde{\rho}(\theta)] O_j^\dagger\}\end{aligned}$$

und lassen $\tilde{\rho}(\theta)$ sich nach Gl. (5.1) bis zur Zeit θ mit der Anfangsbedingung $\tilde{\rho}(\theta = 0) = |X_{l'}\rangle\langle X_{i'}|$ entwickeln. Anschließend bildet man $\text{Sp}\{O_k[\tilde{\rho}(\theta)] O_j^\dagger\}$ und fragt dadurch eines der Elemente von $\tilde{\rho}$ ab. Es bleibt daher zu berechnen

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty dt \int_0^\infty d\theta \exp(-2t/\tau) \text{Sp}\{O_k[\tilde{\rho}(\theta)] O_j^\dagger\} \\ &= \frac{\tau}{2} \int_0^\infty d\theta \text{Sp}\{O_k[\tilde{\rho}(\theta)] O_j^\dagger\}.\end{aligned}$$

Dieses Integral über θ wird in den nächsten beiden Abschnitten konkret für die beiden Fälle $O_j^\dagger(t') O_k(t') = \sigma_j^\dagger(t') \sigma_k(t')$ oder $O_j^\dagger(t') O_k(t') = b_j^\dagger(t') b_k(t')$ bestimmt.

Emission beider Photonen in Kontinuum von Moden

Im Fall, dass man an der Verschränkung zweier in ein Kontinuum von Moden emittierten Photonen interessiert ist, sind die Erwartungswerte $\langle \sigma_i^\dagger \sigma_j^\dagger \sigma_k \sigma_l \rangle$ zu nutzen, um die Zweiphotonen-Dichtematrix zu errechnen.

Zur Bildung von α_{HH} werden die Dichtematrixelemente

$$\begin{aligned}\rho_{|X_H,0,0\rangle,|X_H,0,0\rangle} &= p_H, \\ \rho_{|G,1,0\rangle,|G,1,0\rangle} &= q_H, \\ -ig\rho_{|X_H,0,0\rangle,|G,1,0\rangle} &= \Psi_H, \\ ig^*\rho_{|G,1,0\rangle,|X_H,0,0\rangle} &= \Psi_H^*,\end{aligned}$$

benötigt. Sie ergeben sich mit $\Psi_H = \Psi_H^{Re} + i\Psi_H^{Im}$, $\Gamma = 1/(2\tau) + \gamma^{pd}/2 + \kappa/2$ und $\delta_H = \epsilon_H - \Omega_H$ aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} p_H &= -\tau^{-1} p_H - 2\Psi_H^{Re}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi_H^{Re} &= -\Gamma \Psi_H^{Re} + \delta_H \Psi_H^{Im} + g^2 p_H - g^2 q_H, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi_H^{Im} &= -\delta_H \Psi_H^{Re} - \Gamma \Psi_H^{Im}, \\ \frac{\partial}{\partial t} q_H &= 2\Psi_H^{Re} - \kappa q_H,\end{aligned}$$

sodass man das Gleichungssystem als

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p_H \\ \Psi_H^{Re} \\ \Psi_H^{Im} \\ q_H \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tau^{-1} & 2 & 0 & 0 \\ -g^2 & \Gamma & -\delta_H & g^2 \\ 0 & \delta_H & \Gamma & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_H \\ \Psi_H^{Re} \\ \Psi_H^{Im} \\ q_H \end{pmatrix}$$

schreiben kann. Demnach ist

$$- \begin{pmatrix} p_H \\ \Psi_H^{Re} \\ \Psi_H^{Im} \\ q_H \end{pmatrix} \Big|_{\theta=0} = - \begin{pmatrix} \tau^{-1} & 2 & 0 & 0 \\ -g^2 & \Gamma & -\delta_H & g^2 \\ 0 & \delta_H & \Gamma & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^\infty p_H \\ \int_0^\infty \Psi_H^{Re} \\ \int_0^\infty \Psi_H^{Im} \\ \int_0^\infty q_H \end{pmatrix}$$

und durch invertieren der Matrix lässt sich

$$\begin{pmatrix} \int_0^\infty p_H \\ \int_0^\infty \Psi_H^{Re} \\ \int_0^\infty \Psi_H^{Im} \\ \int_0^\infty q_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^{-1} & 2 & 0 & 0 \\ -g^2 & \Gamma & -\delta_H & g^2 \\ 0 & \delta_H & \Gamma & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \kappa \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_H \\ \Psi_H^{Re} \\ \Psi_H^{Im} \\ q_H \end{pmatrix} \Big|_{\theta=0}$$

gewinnen. Somit ist

$$\begin{aligned} \alpha_{HH}^{unnormiert} &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\theta p_H(\theta) \exp(-2t/\tau) \\ &= \tau/2 \int_0^\infty d\theta p(\theta) \\ &= \tau/2 \left(\begin{pmatrix} \tau^{-1} & 2 & 0 & 0 \\ -g^2 & \Gamma & -\delta_H & g^2 \\ 0 & \delta_H & \Gamma & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \kappa \end{pmatrix}^{-1} \right)_{11} \\ &= (M_\alpha)_{11} \\ &= \frac{\tau^2}{2} \frac{1}{1 + 2\tau g^2 \frac{\kappa \Gamma}{\kappa(\Gamma^2 + \delta_H^2) + 2\Gamma g^2}}. \end{aligned}$$

Es erfolgt eine analoge Rechnung für α_{VV} , indem δ_H durch $\delta_V = \epsilon_V - \Omega_V$ ersetzt wird. In allen Rechnungen für diese Arbeit wurde die Kavitätsmode genau auf die Exziton-Energien für $\delta = \epsilon_H - \epsilon_V = 0$ gelegt, sodass $\delta_H = \delta_V = 0$ sind. Damit ist $\alpha_{VV} = \alpha_{HH}$.

Die Berechnung von γ^* erfolgt nach dem selben Prinzip, hier sind die Dichtematrixelemente

$$\begin{aligned} \rho_{|X_V,0,0\rangle,|X_H,0,0\rangle} &= p, \\ \rho_{|G,0,1\rangle,|G,1,0\rangle} &= q, \\ -ig\rho_{|X_V,0,0\rangle,|G,1,0\rangle} &= \Psi_H, \\ ig^*\rho_{|G,0,1\rangle,|X_H,0,0\rangle} &= \Psi_V \end{aligned}$$

von Relevanz. Mit den Summen und Differenzen

$$\begin{aligned} \Psi_s &= \frac{\Psi_H + \Psi_V}{2}, \\ \Psi_d &= \frac{\Psi_H - \Psi_V}{2}, \\ \delta_s &= \frac{\delta_H + \delta_V}{2}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$\delta_d = \frac{\delta_H - \delta_V}{2}, \tag{6.3}$$

sodass $\Psi_H = \Psi_s + i\Psi_d$ und $\Psi_V = \Psi_s - i\Psi_d$ ergibt. Man erhält damit das Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p \\ \Psi_s \\ \Psi_d \\ q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tau^{-1} + \gamma^{pd}/2 - i\delta & 2 & 0 & 0 \\ -g^2 & \Gamma + i\delta_d & -\delta_s & g^2 \\ 0 & \delta_s & \Gamma + i\delta_d & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \kappa + \gamma^{pd}/2 - i\delta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \Psi_s \\ \Psi_d \\ q \end{pmatrix}.$$

Auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_{unnormiert}^* &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\theta p(\theta) \exp(-2t/\tau) \\ &= \tau/2 \int_0^\infty d\theta p(\theta) \\ &= \left(\begin{pmatrix} \tau^{-1} + \gamma^{pd}/2 - i\delta & 2 & 0 & 0 \\ -g^2 & \Gamma + i\delta_d & -\delta_s & g^2 \\ 0 & \delta_s & \Gamma + i\delta_d & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \kappa + \gamma^{pd}/2 - i\delta_c \end{pmatrix} \right)_{11} \\ &= (M_\gamma)_{11} \\ &= \frac{\tau}{2} \frac{1}{(1 + \tau\gamma^{pd}/2 - i\tau\delta) + 2\tau g^2 \frac{(\Gamma + i\delta_d)(\kappa + \gamma^{pd}/2 - i\delta_c)}{[(\Gamma + i\delta_d)^2 + \delta_s^2] (\kappa + \gamma^{pd}/2 - i\delta_c) + 2g^2 (\Gamma + i\delta_d)}}. \end{aligned}$$

Dabei ist in unserem Fall $\delta_c = \Omega_H - \Omega_V = 0$, und wegen $\delta_H = -\delta_V = -\delta/2$ sind $\delta_s = 0$, $\delta_d = -\delta/2$.

Emission des Exziton-Photons in die Kavitätsmode

Falls der zweite Übergang durch die Kavität vermittelt wird und die Verschränkung eines Biexziton-Photons mit einem Exziton-Photon in der Kavitätsmode betrachtet werden soll, errechnen sich α und γ als Element $(M_\alpha)_{41}$ bzw. $(M_\gamma)_{41}$ der entsprechenden Matrix:

$$\begin{aligned} \alpha_{HH} &= (M_\alpha)_{41} = \frac{2g^2\Gamma}{\frac{\Gamma^2\kappa + \delta_H^2\kappa + 2\Gamma g^2}{\tau} + 2g^2\Gamma\kappa}, \\ \gamma^* &= (M_\gamma)_{41} = \frac{2g^2(\Gamma + i\delta_d)}{[(\Gamma + i\delta_d)^2 + \delta_s^2] \left(\kappa + \frac{\gamma^{pd}}{2} - i\delta_c \right) + 2g^2(\Gamma + i\delta_d)}. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] S. Anders, C. S. Kim, B. Klein, Mark W. Keller, R. P. Mirin, and A. G. Norman. Bimodal size distribution of self-assembled $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ quantum dots. *Phys. Rev. B*, 66:125309, 2002.
- [2] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W.K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolski-rosen channels. *Physical Review Letters*, 70, 1993.
- [3] D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger. *The Physics of Quantum Information*. Springer, 2001.
- [4] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eible, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390, 2007.
- [5] D. Bruss. Characterizing entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 1, 2002.
- [6] D. Bruss and G. Leuchs (Eds.). *Lectures on Quantum Information*. WILEY-VCH, 2007.
- [7] A. Carmele, F. Milde, M. Dachner, M.B. Harouni, R. Roknizadhe, M. Richter, and A. Knorr. Formation dynamics of an entangled photon pair: A temperature-dependent analysis. *Physical Review*, B(81):195319, 2010.
- [8] H.J. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics 1 (2nd Edition)*. Springer, 2002.
- [9] A. Einstein, B. Podolski, and N. Rosen. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete. *Physical Review*, 47, 1935.
- [10] A. Ekert. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Physical Review Letters*, 67, 1991.
- [11] C.W. Gardiner. *Quantum Noise*. Springer, 1992.
- [12] P. Gartner. *Private Kommunikation*.
- [13] C. Gies, J. Wiersig, and F. Jahnke. Quantum statistical properties of the light emission from quantum dots in microcavities. In P. Michler, editor, *Single Semiconductor Quantum Dots*. Springer, 2009.
- [14] E.T. Jaynes and F.W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1), 1963.
- [15] P. Meystre and M. SargentIII. *Elements of Quantum Optics*. Springer, 1998.
- [16] P. Michler. Nonclassical light from single semiconductor quantum dots. In P. Michler, editor, *Single Quantum Dots*. Springer, 2003.
- [17] M.A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C.A. Sackett, W.M. Itano, C. Monroe, and D.J. Wineland. Experimental violation of a bell’s inequality with efficient detection. *Nature*, 409, 2001.
- [18] A. Shields. Semiconductor quantum light sources. *nature photonics*, 1, 2007.

- [19] A. J. Shields, R. M. Stevenson, and R. J. Young. Entangled photon generation by quantum dots. In P. Michler, editor, *Single Semiconductor Quantum Dots*. Springer, 2009.
- [20] P. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Journal of Computing*, 26, 1997.
- [21] F. Troiani, J.I. Perea, and C. Tejedor. Cavity-assisted generation of entangled photon pairs by a quantum-dot cascade decay. *Physical Review*, B(74):235310, 2006.
- [22] W. Vogel and D.-G. Welsch. *Quantum Optics (3rd Edition)*. WILEY-VCH, 2006.
- [23] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Violation of bell's inequality under strict einstein locality conditions. *Physical Review Letters*, 81, 1998.