

Universität Bremen
Fachbereich 01
Physik B.Sc.

Dynamische und statistische Eigenschaften der Emission von atomaren Lasersystemen

Begründung und Auswertung von Master- und
Ratengleichungsmodellen

Bachelorarbeit vorgelegt von

Lena Anneke Brinkhoff

31. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	4
2.1	Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	4
2.2	Jaynes-Cummings-Modell	7
2.3	Statistische Beschreibung der Licht-Materie- Wechselwirkung	12
2.3.1	Statistischer Operator	12
2.3.2	Photonenstatistik	12
2.3.3	Korrelationsfunktion	14
2.3.4	Photonen „bunching“ und „antibunching“	17
2.4	Dynamik des Systems	18
2.4.1	Von-Neumann-Gleichung	18
2.4.2	Mastergleichung	18
2.4.3	Reservoirankopplung	19
2.4.4	Mastergleichung mit dissipativen Termen	24
2.4.5	Intensive Ratengleichungen	26
2.4.6	Extensive Ratengleichungen	27
2.4.7	Relaxationsoszillationen	28
3	Numerische Resultate	30
3.1	Ergebnisse der intensiven Ratengleichungen	31
3.1.1	Kennlinien	31
3.1.2	An der Laserschwelle	32
3.1.3	Relaxationsoszillationen	34
3.1.4	Oberhalb und unterhalb der Laserschwelle	35
3.2	Vergleich der intensiven und extensiven Ratengleichungen	37
3.3	Mastergleichung	39
3.3.1	Unterhalb der Laserschwelle	39
3.3.2	In der Nähe der Laserschwelle	40
3.3.3	Oberhalb der Laserschwelle	40
3.4	Vergleich von Raten- und Mastergleichung	41
3.5	Fazit der numerischen Ermittlungen	42
4	Zusammenfassung und Ausblick	43
	Literaturverzeichnis	46

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit werden Lasermodelle diskutiert, deswegen soll zuerst ein kleiner **historischer Überblick** darüber gegeben werden, wie es zur Erfindung des Lasers kam.

Das Jahr 1905 lässt sich als Beginn einer historischen Reihe ansehen, die zur Erfindung des Lasers führte. In diesem Jahr postulierte A. Einstein Lichtteilchen. Er konnte mit ihnen den photoelektrischen Effekt erklären und nannte sie deshalb Photonen. Elf Jahre später erkannte er die Wechselwirkung des Lichtes mit Materie und führte die Begriffe der drei grundlegenden Prozesse der Licht-Materie-Wechselwirkung - Spontane Emission, stimulierte Emission und Absorption - in die Quantentheorie der Strahlung ein. R. Ladenburg gelang es 1928, stimulierte Emission experimentell tatsächlich nachzuweisen. Nach weiteren 26 Jahren, im Jahre 1954, beschäftigten sich R. Hanbury Brown und R.Q. Twiss experimentell mit den Intensitäts-Intensitäts-Korrelationen des Lichtes. Dabei ging es zwar nicht um Laserlicht, sondern um das von Sternen ausgesandte Licht, aber auf eine ähnliche Weise spielen Korrelationen bei den in dieser Arbeit betrachteten Lasern eine Rolle bei der Charakterisierung der Lichtart. 1955 wurde dann die Strahlungsquelle im Mikrowellenbereich, der MASER („Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation“) von C. Towns erfunden. Weitere fünf Jahre vergingen und es folgte die Erfindung des LASERs („Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation“) durch T.H. Maiman im Jahre 1960.

Laser sind Quellen kohärenter Strahlung. Das emittierte Licht kann monochromatisch sein aus einem Wellenlängenbereich im sichtbaren Spektrum oder darüber hinaus. Es kann allerdings auch eine Summe von Frequenzen enthalten, wenn es sich z.B. um kurze Pulse handelt.

Technisch umgesetzt wird der Laser mit drei wesentlichen Komponenten. Benötigt werden ein aktives Medium, ein Pumpprozess des aktiven Mediums und ein optischer Resonator, der die Auskopplung von Licht ermöglicht (z.B. durch teildurchlässige Spiegel). In dem aktiven Medium wird durch selektives Pumpen Besetzungsinversion aufgebaut und durch stimulierte Emission eine elektromagnetische Welle verstärkt. Der Resonator ist dafür zuständig die von dem Medium emittierte Strahlung in einer oder mehreren Moden zu speichern, wodurch Verstärkung durch stimulierte Emission ermöglicht wird.

Die einzelnen Prozesse werden im Folgenden kurz beschrieben: Bei der Absorption wird das aktive Material angeregt und gleichzeitig die Zahl der Photonen reduziert (im Bild des quantenmechanisch beschriebenen elektromagnetischen Feldes). Im Falle von spontaner Emission wechselt dieser angeregte Zustand spontan, das heißt ohne äußere Einflüsse, wieder in den niedrigeren Energiezustand. Die Energiedifferenz wird in Form eines Photons abgestrahlt. Bei stimulierter Emission wird durch ein bereits existierendes Photon im Resonator die Aussendung eines weiteren Photons angeregt, welches dann die gleichen Eigenschaften (Frequenz, Phase, Polarisation und Ausbreitungsrichtung) aufweist. Folglich wird durch stimulierte Emission das Licht verstärkt, worin das Grundprinzip des Lasers liegt.

Im thermischen Gleichgewicht ist diese Verstärkung jedoch aufgrund der Reabsorption der Photonen nicht möglich. Für das Einsetzen von stimulierter Emission wird eine stärkere Besetzung des angeregten Zustandes im Gegensatz zum unangeregten Zustand gefordert (Besetzungsinversion). Um Besetzungsinversion aufzubauen, wird von außen Energie zugeführt und z.B. durch einen weiteren Laser (optisches Pumpen).

Nach diesem Prinzip arbeiten insbesondere auch Halbleiterlaser, auf welche sich die technologische Entwicklung optoelektronischer Bauelemente im Laufe der letzten Jahrzehnte konzentriert hat. Vor allem steht dabei die Miniaturisierung, Effizienzsteigerung, sowie die Erschließung neuer Wellenlängenbereiche im Vordergrund. Ein neues und vielversprechendes aktives Material sind **Halbleiter-Quantenpunkte**. Diese werden z.B. realisiert als "Inseln" aus einigen zehntausend Atomen in Halbleiterkristallen (s. Abb.1.1) und können mittels moderner Wachstumsverfahren (z.B. durch Molekularstrahlepitaxie) hergestellt werden. Quantenpunkte wurden in den letzten Jahren intensiv experimentell und theoretisch untersucht und werden bereits in technologischen Anwendungen eingesetzt.

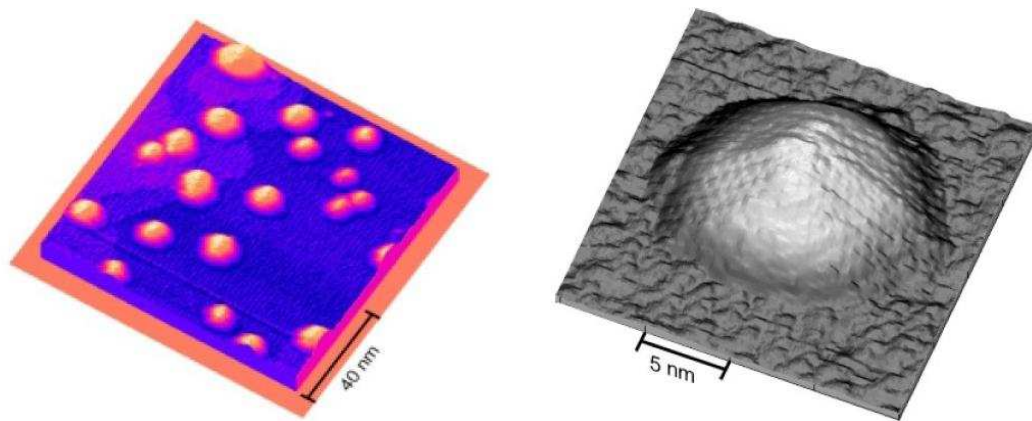


Abbildung 1.1: Links: Mehrere Indiumarsenid-Quantenpunkte (orange-farbene "Inseln") auf einer Substratschicht aus Galliumarsenid, aufgenommen mit einem Rastertunnelmikroskop. Rechts: Detailansicht eines einzelnen Indiumarsenid-Quantenpunktes, aufgenommen mit einem Rastertunnelmikroskop. Die kleinen "Buckel" auf den Seitenflächen entsprechen jeweils zwei Arsenatomen [Mü01].

Der typische Quantenpunkt-Mikrokavitätslaser ist so aufgebaut, dass sich einige hun-

dert oder mehr Quantenpunkte im Resonator befinden. Die Größe der dafür verwendeten Resonatoren liegt im Mikrometerbereich (Mikroresonatoren). Die Quantenpunkte realisieren mit ihrer geringen Größe von nur wenigen Nanometern Systeme mit grundlegend neuen physikalischen Eigenschaften. Sie sind Elektronenkäfige, vergleichbar mit einem Potentialtopf, in denen sich die Ladungsträger nicht mehr frei bewegen und deren Energie vollständig quantisiert ist. Quanteneffekte spielen daher eine dominante Rolle in diesen Systemen. Wegen ihrer diskreten Energieniveaus bilden die Quantenpunkte Bedingungen ähnlich denen in einem einzelnen Atom und grundlegende Eigenschaften können mit gewissen Einschränkungen durch entsprechende atomare Modelle beschrieben werden. Halbleitereffekte spielen jedoch eine Rolle und können zu Abweichungen vom atomaren Verhalten führen. Diese zu beschreiben ist Gegenstand aktueller Forschung [GWLJ07].

Im Hinblick auf die Gemeinsamkeiten von Quantenpunkt- und atomaren Systemen ist für die Beschreibung der komplizierteren Halbleitersysteme ein Verständnis der etablierten atomaren Modelle von fundamentaler Bedeutung. In der vorliegenden Arbeit wird nicht direkt das Modell eines Quantenpunktes, sondern das **Jaynes-Cummings-Modell** studiert, welches ein einzelnes Atom mit zwei diskreten Energiezuständen in Wechselwirkung mit einer Mode des elektromagnetischen Feldes (Resonatormode) beschreibt. Für dieses System werden Gleichungen aufgestellt, welche die Licht-Materie-Wechselwirkung theoretisch beschreiben und eine Grundlage zur numerischen Berechnung dieser Wechselwirkung bilden. Obwohl das diskutierte Jaynes-Cummings-Modell für einen einzelnen Emitter gilt, gibt es Erweiterungsmöglichkeiten zur Beschreibung vieler atomarer Emitter in Wechselwirkung mit der Kavitätsmode. Diese Erweiterung kann aber auch näherungsweise in Form von Ratengleichungen oder Mastergleichungen formuliert werden. Bei beiden handelt es sich um Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Mastergleichung beschreibt die Dynamik der Wahrscheinlichkeiten eines Systems und die Ratengleichungen liefern die zeitlichen Verläufe der Besetzungswahrscheinlichkeiten des oberen und unteren Niveaus und die der mittleren Photonenzahl. In dessen Zusammenhang können die letztgenannten Modelle ebenfalls betrachtet werden.

Die Arbeit ist in **vier Kapitel** gegliedert. Nach dieser Einführung werden im 2. Kapitel die theoretischen Grundlagen der quantenoptischen Beschreibung eines Zwei-Niveau-Systems in Wechselwirkung mit einer Mode des elektromagnetischen Felds dargestellt: die Quantisierung des elektromagnetischen Felds, das Jaynes-Cummings-Modell und eine Einführung der statistischen Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung durch den Dichteoperator. Daraus resultiert die von-Neumann-Gleichung, welche die Dynamik des Lasersystems beschreibt. Durch Näherungen werden daraus die Mastergleichungen sowie die extensiven und intensiven Ratengleichungen hergeleitet. Im 3. Kapitel werden diese Gleichungen numerisch ausgewertet, diskutiert und verglichen. Die Arbeit wird im 4. Kapitel mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick abgeschlossen.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

2.1 Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Spontane Emission wird verursacht durch die Feldfluktuation im Vakuum, das heißt $\langle 0|E^2|0\rangle \neq 0$, und kann somit mittels des quantisierten, elektromagnetischen Feldes dargestellt werden.

Unter der Annahme, dass es sich um eine einzelne Mode der Frequenz Ω im Vakuum handelt, wird dieses quantisierte Feld hergeleitet.

Das klassische monochromatische elektrische Feld ist gegeben durch

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x q(t) \sqrt{\frac{2\Omega^2}{\epsilon_0 V}} \sin(kz). \quad (2.1)$$

Es propagiert in z-Richtung und \vec{e}_x ist der Einheitsvektor in x-Richtung, $q(t)$ die zeitabhängige Feldamplitude des Feldes, V das betrachtete, endliche Volumen und ϵ_0 die Permittivität des Vakuums oder auch elektrische Feldkonstante.

Die Bewegungsgleichungen für das elektromagnetische Feld können aus den Maxwellgleichungen im Vakuum hergeleitet werden. Das elektromagnetische Feld wird durch die folgenden Maxwellgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{E} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei ist μ_0 die Permeabilität des Vakuums oder auch magnetischen Feldkonstante und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit. Es gilt $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$.

Aus (2.1) und (2.2) folgt das klassische magnetische Feld:

$$\vec{B}(z, t) = \vec{e}_y \frac{\dot{q}(t)}{\Omega^2} \sqrt{\frac{2\Omega^2}{\epsilon_0 V}} k \cos(kz). \quad (2.3)$$

Die klassische Hamiltonfunktion ist das Integral über die Energiedichte:

$$H = \frac{1}{2} \int dV [\epsilon_0 E^2 + 1/\mu_0 B^2] \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2} [\Omega^2 q^2(t) + p^2(t)]. \quad (2.5)$$

Einsetzen von (2.1) und (2.3) in (2.4) ergibt die Hamiltonfunktion eines harmonischen Oszillators der Masse $m = 1$ (2.5). An dieser Stelle erfolgt die Quantisierung. Das Korrespondenzprinzip wird genutzt und die generalisierte Koordinate q , die den Ort festlegt, wird durch den korrespondierenden quantenmechanischen Ortsoperator \hat{q} ersetzt und der generalisierte Impuls $p = \dot{q}$ durch den Impulsoperator \hat{p} . Dies führt von der Hamilton-Funktion zum Hamilton-Operator. Die genannten Operatoren gehorchen der Vertauschungsrelation $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$.

Außerdem werden bosonische Erzeugungsoperator b^\dagger und Vernichtungsoperator b eingeführt, die in diesem Fall Photonen erzeugen und vernichten. Unter Verwendung der Definitionen $b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega\hat{q} - i\hat{p})$ und $b = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Omega}}(\Omega\hat{q} + i\hat{p})$, resultiert der Hamiltonoperator eines harmonischen Oszillators mit der Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\Omega$:

$$H = E_0 + \hbar\Omega b^\dagger b = \hbar\Omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right). \quad (2.6)$$

Betrachtet wird dieses Problem im Fockraum, welcher sich aus dem direkten Produkt von n -Teilchen-Hilberträumen zusammensetzt und verschiedene Teilchenzahlen zulässt.

$|n\rangle$ sei ein Photonenzustand im Fockraum (Fockzustand). Er ist der normierte Eigenzustand des Hamiltonoperators sowie des Photonenzahloperators $n = b^\dagger b$. Dieser Zustand hat immer eine feste Photonenzahl und kann durch n -malige Anwendung des Erzeugungs-Operators auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ generiert werden:

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^\dagger)^n|0\rangle$. Da es sich um einen bosonischen Zustand handelt, kann dieser eine beliebige Anzahl von Photonen enthalten.

Erzeugungsoperator b^\dagger angewandt auf den Photonenzustand erhöht die Photonenzahl n des Photonenzustands $|n\rangle$ um eins (siehe (2.7) mit $\sqrt{n+1}$ für die Normierung des Zustands $|n+1\rangle$). Der Vernichtungsoperator b erniedrigt die Photonenzahl um eins (siehe (2.8) mit \sqrt{n} für die Normierung des Zustands $|n-1\rangle$). Beide können also verschiedene Photonenzahlen generieren:

$$b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.7)$$

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.8)$$

Aus (2.8) folgt, dass $b|0\rangle = 0$. Es gibt keine negativen Photonenzahlen, daher ist die Regel: Bevor ein Photon vernichtet werden kann, muss es erst erzeugt werden.

Außerdem lässt sich anhand von (2.7) und (2.8) der oben genannte Photonenzahl-operator $b^\dagger b$ berechnen. Wird dieser auf seinen Eigenzustand $|n\rangle$ angewandt, ergibt sich als Eigenwert genau die Photonenzahl n :

$$b^\dagger b |n\rangle = n |n\rangle.$$

Der Energieeigenwert des Zustands $|n\rangle$ ist folglich:

$$H|n\rangle = \hbar\Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle.$$

Im Folgenden soll ein System mit nur einem Elektron pro Atom betrachtet werden. Dadurch kann die Coulomb-Wechselwirkung, die durch den longitudinalen Anteil des elektromagnetischen Feldes beschrieben wird (in Coulomb-Eichung), vernachlässigt werden und es genügt das elektromagnetische Feld durch seinen transversalen Anteil zu beschreiben. Für das **quantisierte Feld** ergibt sich schließlich:

$$E_x(z, t) = \epsilon_\Omega (b + b^\dagger) \sin(kz), \quad (2.9)$$

wobei $\epsilon_\Omega = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{\epsilon_0 V}}$ die Vakuumfeldamplitude ist. [Car99], [MS99]

2.2 Jaynes-Cummings-Modell

Das Jaynes-Cummings-Modell beschreibt ein **Zwei-Niveau-System**, das mit einer Mode des quantisierten elektromagnetischen Feldes wechselwirkt (vgl. [JC63]). Im Folgenden betrachtet wird ein atomares System mit zwei Zuständen (siehe Abb.2.1).

Der obere, angeregte Zustand $|\alpha\rangle$ und der untere Zustand $|\beta\rangle$ liegen im energetischen Abstand $\hbar\omega_{\alpha\beta}$. Der Hamiltonoperator H_{JC} für dieses System setzt sich aus drei Termen zusammen (vgl. [Car99]). Berücksichtigt wird dabei zunächst das freie Atom, welches durch den Hamiltonoperator H_0^{Atom} beschrieben wird. Der freie Anteil des elektromagnetischen Feldes wird durch H_0^{Feld} repräsentiert und die Wechselwirkung zwischen Atom und Photon durch den Wechselwirkungs-Hamiltonoperator H^{WW} .

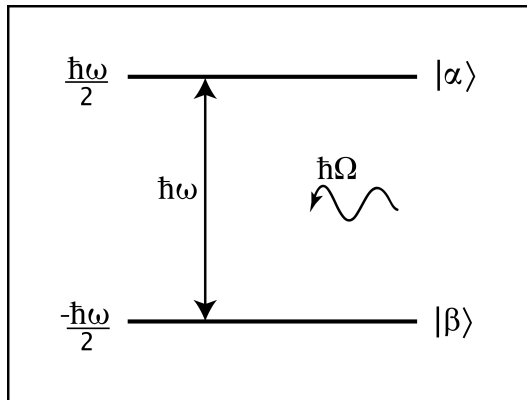


Abbildung 2.1: Darstellung des Zwei-Niveau-Systems: Der obere Zustand $|\alpha\rangle$ liegt bei einer Energie von $E_\alpha = \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2}$ und der untere Grundzustand $|\beta\rangle$ bei einer Energie von $E_\beta = -\frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2}$.

$$H_{JC} = H_0^{Atom} + H_0^{Feld} + H^{WW}. \quad (2.10)$$

Die atomaren Zustände des Systems sind $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|\beta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Aufsteigeoperator σ_+ sowie der Absteigeoperator σ_- des Atoms sind Fermionen-Operatoren. σ_+ versetzt das Atom vom Grundzustand in den angeregten Zustand und der σ_- bewirkt genau das Gegenteil:

$$\begin{aligned} \sigma_+|\beta\rangle &= |\alpha\rangle, & \sigma_+|\alpha\rangle &= 0, \\ \sigma_-|\alpha\rangle &= |\beta\rangle, & \sigma_-|\beta\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Die Wechselwirkung koppelt ausschließlich an Zustände mit ± 1 Photon, da im Falle der Anregung des Atoms in den Zustand $|\alpha\rangle$ ein Photon absorbiert wird ($\rightarrow -1$) und im Falle, dass das Atom in den unteren Zustand $|\beta\rangle$ wechselt, wird ein Photon emittiert ($\rightarrow +1$). Es genügt also im Folgenden 2×2 -Matrizen zu betrachten und die vier verschiedene Erwartungswerte für dieses System sind: $\langle\alpha, n|\alpha, n\rangle$, $\langle\alpha, n|\beta, n+1\rangle$, $\langle\beta, n+1|\alpha, n\rangle$ und $\langle\beta, n+1|\beta, n+1\rangle$.

σ_+ und σ_- folgen aus den paulischen Spinmatrizen. Eine von ihnen σ_z wird in den folgenden Erläuterungen explizit benutzt:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Damit lassen sich die einzelnen Terme des Hamiltonoperators in Matrixdarstellung repräsentieren, wenn $|j, n\rangle$ den Gesamtzustand des Systems beschreibt, wobei

$j \in \{\alpha, \beta\}$ und für die Atomzustände steht und n für die Photonenzustände. Im Folgenden diskutieren wir die einzelnen Anteile des Hamiltonoperators in der gewählten Matrixdarstellung.

Atom:

$$\begin{aligned} \langle j, n | H_0^{Atom} | j', n' \rangle &= \begin{pmatrix} \langle \alpha, n | H_0^{Atom} | \alpha, n \rangle & \langle \alpha, n | H_0^{Atom} | \beta, n+1 \rangle \\ \langle \beta, n+1 | H_0^{Atom} | \alpha, n \rangle & \langle \beta, n+1 | H_0^{Atom} | \beta, n+1 \rangle \end{pmatrix} \\ H_0^{Atom} &= \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \delta_{nn'} = \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2} \sigma_z \delta_{nn'} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Der Hamiltonoperator des freien Atoms wirkt nur auf die atomaren Zustände j bzw. j' , da H_0^{Atom} in einem anderen Unterraum wirkt als H_0^{Feld} . Es ergibt sich eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2}$ für das obere und $-\frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2}$ für das untere Niveau.

Feld:

$$\begin{aligned} \langle j, n | H_0^{Feld} | j', n' \rangle &= \begin{pmatrix} \langle \alpha, n | H_0^{Feld} | \alpha, n \rangle & \langle \alpha, n | H_0^{Feld} | \beta, n+1 \rangle \\ \langle \beta, n+1 | H_0^{Feld} | \alpha, n \rangle & \langle \beta, n+1 | H_0^{Feld} | \beta, n+1 \rangle \end{pmatrix} \\ H_0^{Feld} &= \hbar\Omega \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} \delta_{jj'} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Auf ähnliche Weise wirkt der Hamiltonoperator der freien Photonen, aber eben nur auf die Photonenzustände n bzw. n' . Auch dies liefert eine Diagonalmatrix mit den Energieeigenwerten der Photonen, die hier allerdings explizit von der Photonenanzahl abhängen. Das bedeutet also, dass die freien Anteile, H_0^{Atom} und H_0^{Feld} , den Zustand $|j, n\rangle$ des Systems nicht ändern.

Wechselwirkung:

$$\langle j, n | H^{WW} | j', n' \rangle = \begin{pmatrix} \langle \alpha, n | H^{WW} | \alpha, n \rangle & \langle \alpha, n | H^{WW} | \beta, n+1 \rangle \\ \langle \beta, n+1 | H^{WW} | \alpha, n \rangle & \langle \beta, n+1 | H^{WW} | \beta, n+1 \rangle \end{pmatrix}$$

Bei der Wechselwirkung zwischen Atom und Photonen wird von der Dipolnäherung ausgegangen. Damit ist der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator das Skalarprodukt aus dem Dipoloperator \vec{d} und elektrischen Feldvektor \vec{E} :

$$H^{WW} = -e\vec{r}\vec{E} = -\vec{d}\vec{E},$$

wobei \vec{d} die Dipolmatrixelemente $d_{\alpha\beta}$ und $d_{\beta\alpha}$ besitzt:

$$\langle j | \vec{d} | j' \rangle = \begin{pmatrix} 0 & d_{\alpha\beta} \\ d_{\beta\alpha} & 0 \end{pmatrix} = d_{\alpha\beta} \sigma_+ + d_{\beta\alpha} \sigma_-.$$

Die Dipolnäherung ist dadurch gerechtfertigt, dass die räumliche Ausdehnung des Atoms klein gegenüber der Lichtwellenlänge ist. Aufgrund dieser Tatsache ist das Lichtfeld praktisch konstant über dem System. Wird die Dipolnäherung für den Wechselwirkungs-Hamiltonoperator eingesetzt und darin wiederum das quantisierte Feld $E = \epsilon_\Omega (b + b^\dagger) u(\vec{r})$ mit $u(\vec{r}) = \sin(\vec{k}\vec{r})$, entstehen zunächst vier Terme:

$$H^{WW} = -d_{\alpha\beta} \epsilon_\Omega u(\vec{r}) [b\sigma_+ + \underbrace{b^\dagger\sigma_+ + b\sigma_-}_{RWA} + b^\dagger\sigma_-]$$

Diese beiden gekennzeichneten Terme werden in der sogenannten rotating wave approximation (RWA) vernachlässigt, siehe unten.

RWA:

Diese Näherung ist gültig, wenn $\omega_{\alpha\beta} \approx \Omega$ und die Intensität gering ist. Sie besteht darin, Teile des Hamiltonoperators zu vernachlässigen, die zu Termen führen, die gegenüber anderen auftauchenden Termen schnelle Oszillationen beschreiben. Die Begründung ist, dass sich die schnellen Oszillationen herausmitteln, da sie am Ende ebenso viel negative wie positive Werte annehmen. Im folgenden Absatz sind die einzelnen Terme im Wechselwirkungsbild dargestellt. Je nach Kombinationsart der Operatoren addieren oder subtrahieren sich die Frequenzen. Es entstehen große oder kleine Frequenzen, also schnelle und langsame Oszillationen. [Car99]

- a) $b\sigma_+ \sim e^{i(\Omega-\omega)t}$
- b) $b^\dagger\sigma_+ \sim e^{i(\Omega+\omega)t} \rightarrow \text{vernachlässigbar}$
- c) $b\sigma_- \sim e^{-i(\Omega+\omega)t} \rightarrow \text{vernachlässigbar}$
- d) $b^\dagger\sigma_- \sim e^{-i(\Omega-\omega)t}$

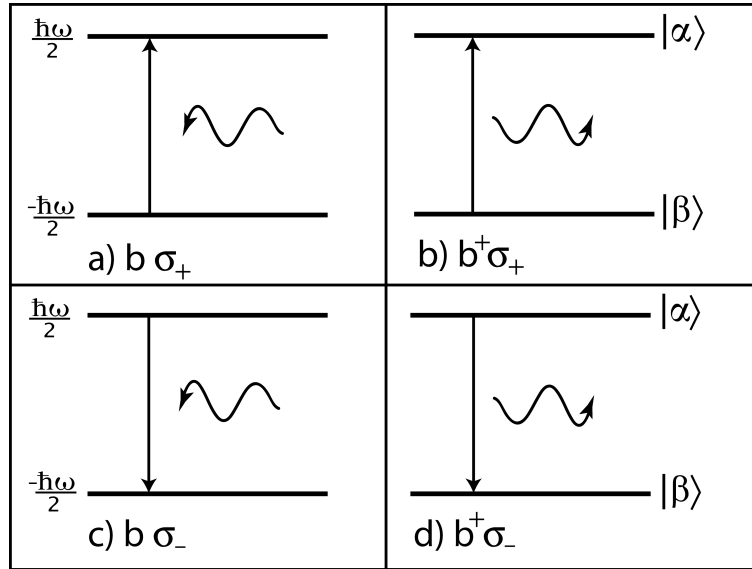


Abbildung 2.2: Zur Veranschaulichung der verschiedenen Prozesse in 1. Ordnung Störungstheorie: a) Absorption eines Photons und Anregung des Atoms, b) Emission eines Photons und Anregung des Atoms, c) Absorption eines Photons und Übergang des Atoms in das untere Niveau, d) Emission eines Photons und Übergang des Atoms in das untere Niveau

Die folgende Diskussion bezieht sich nicht auf die elementaren Wechselwirkungen im Hamilton-Operator, die in Störungstheorie erster Ordnung als Wechselwirkungsprozesse auftreten und in Abb. 2.2 dargestellt sind.

Die physikalische Bedeutung von Term a) ist dann, dass das Atom angeregt wird, also in das obere Niveau gebracht wird (Wirkung von σ_+) und zwar durch absorbie-

ren eines Photons (Wirkung von b). Genau andersherum ist Term d) zu verstehen. Das Atom geht in den unteren Zustand über, also wird der obere Zustand vernichtet (Wirkung von σ_-), während ein Photon emittiert wird (Wirkung von b^\dagger). Die Prozesse in den Termen b) und c) sind quantenmechanisch erlaubt, haben aber geringe Wahrscheinlichkeiten, da sie eine Ungleichgewichtigkeit der Energieerhaltung aufweisen. Term b) beinhaltet Energieverlust im atomaren und photonischen System, da das Atom in den Grundzustand geht und dabei ein Photon absorbiert. Term c) drückt einen gleichzeitigen Energiegewinn im atomaren und photonischen System aus, denn das Atom wird angeregt, wobei gleichzeitig ein Photon emittiert wird.

Somit besteht der Wechselwirkungsanteil in RWA nur noch aus zwei Termen und wird unter Einbezug der Licht-Materie-Kopplungskonstanten $g = -d_{\alpha\beta}\epsilon_\Omega u(\vec{r})$ bzw. $g^* = -d_{\beta\alpha}\epsilon_\Omega u(\vec{r})$ und mittels (2.11) ausgedrückt als

$$H^{WW} = g \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_b + g^* \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{n+1} & 0 \end{pmatrix}}_{b^\dagger} \quad (2.14)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & g\sqrt{n+1} \\ g^*\sqrt{n+1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Da es sich in diesem Teil um die Kopplung zwischen Atom und Photonen handelt, enthält der Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators H^{WW} atomare sowie photonische Operatoren, die auf den Gesamtzustand des Systems wirken und somit den Zustand $|j, n\rangle$ durch die Wechselwirkung ändern. Ausgedrückt wird dies dadurch, dass H^{WW} nur Einträge auf den Nebendiagonalen hat. Aus (2.15) lässt sich entnehmen, dass Kopplung nur zwischen Zuständen $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ stattfindet, die sich um ± 1 Photon unterscheiden.

Aus dem oben diskutierten freien Atom- und Feldanteil und dem Wechselwirkungsoperator ((2.12) - (2.15)) fügt sich der **Jaynes-Cummings-Hamiltonoperator** wie folgt zusammen:

$$H_{JC} = \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2}\sigma_z + \hbar\Omega b^\dagger b + gb\sigma_+ + g^*b^\dagger\sigma_-, \quad (2.16)$$

$$\underline{\underline{H}}_{JC} = \frac{\hbar\omega_{\alpha\beta}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \hbar\Omega \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & g\sqrt{n+1} \\ g^*\sqrt{n+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

wobei die Matrixdarstellung wie folgt gewählt ist:

$$\underline{\underline{H}}_{JC} = \begin{pmatrix} \langle \alpha, n | H_{JC} | \alpha, n \rangle & \langle \alpha, n | H_{JC} | \beta, n+1 \rangle \\ \langle \beta, n+1 | H_{JC} | \alpha, n \rangle & \langle \beta, n+1 | H_{JC} | \beta, n+1 \rangle \end{pmatrix}.$$

Werden die einzelnen Photonenzahlen betrachtet, entsteht für den gesamten Jaynes-Cummings-Hamiltonoperator $\underline{\underline{H}}_{JC}$ eine Matrix in Blockdiagonalform:

$$\underline{\underline{H}}_{JC} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{H}}_{JC}(n=0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \underline{\underline{H}}_{JC}(n=1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{H}}_{JC}(n=2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\underline{H}}_{JC}(n=3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

2.3 Statistische Beschreibung der Licht-Materie-Wechselwirkung

2.3.1 Statistischer Operator

Der statistische Operator oder Dichteoperator ρ , wird benötigt, wenn sich ein System nicht als reiner Zustand darstellen lässt. Er ist gegeben durch:

$$\rho = \sum_{jj'nn'} \rho_{jn,j'n'} |j'n'\rangle \langle jn|, \quad (2.18)$$

wobei $\rho_{jn,j'n'} = \langle j'n' | \rho | jn \rangle$ die Matrixelemente der Dichte-Matrix sind. Die Diagonalelemente $p_{jn} = \rho_{jn,jn}$ entsprechen der Wahrscheinlichkeit, dass der entsprechende Zustand realisiert ist. $|j'n'\rangle \langle jn|$ ist der Projektor auf den wechselwirkungsfreien Zustand $|j'n'\rangle$.

Allgemein ergibt sich der Erwartungswert einer Observablen O durch Spurbildung über das Produkt von Dichteoperator und Observablen $\langle O \rangle = Sp\{\rho O\}$. Wird die Spur der Dichtematrix über die Photonenzustände gebildet, ist das Ergebnis die auf die Atome reduzierte Dichtematrix, die nicht mehr von den Photonenzuständen abhängig ist:

$$Sp_{Pt} \{\rho\} = \sum_n \langle n | \rho | n \rangle = \sum_{jj'} \rho_{jj'} |j'\rangle \langle j|,$$

$$\text{wobei } \rho_{jj'} = \sum_n \rho_{jn,j'n} = \sum_n \begin{pmatrix} \rho_{\alpha n, \alpha n} & \rho_{\alpha n, \beta n} \\ \rho_{\beta n, \alpha n} & \rho_{\beta n, \beta n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{\alpha\alpha} & \rho_{\alpha\beta} \\ \rho_{\beta\alpha} & \rho_{\beta\beta} \end{pmatrix}.$$

Andersherum resultiert aus der Spurbildung über die Atom-Zustände die auf die Photonen reduzierte Dichte-Matrix.

$$Sp_{At} \{\rho\} = \sum_j \langle j | \rho | j \rangle = \sum_{nn'} \rho_{nn'} |n'\rangle \langle n|,$$

$$\text{wobei } \rho_{nn'} = \sum_j \rho_{jn,jn'} = \rho_{\alpha n, \alpha n'} + \rho_{\beta n, \beta n'}.$$

Die Diagonalelemente der Matrix ρ_{nn} liefern die **Photonenstatistik** p_n

$$p_n := \rho_{nn} = \sum_j \rho_{jn,jn}, \quad (2.19)$$

die die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Photonenzahl angibt, p_n ist also die Wahrscheinlichkeit, genau n Photonen in der Mode vorzufinden. [UGA⁺07]

Die Photonenstatistik ist wichtig zur Charakterisierung von verschiedenen Lichtarten. Diese Lichtarten und ihre jeweiligen Statistiken werden daher jetzt im Folgenden Kapitel vorgestellt.

2.3.2 Photonenstatistik

Die Photonenstatistiken für thermische und kohärente Lichtquellen sind unterschiedlich.

Bei **thermischem Licht** befinden sich die Photonen im thermischen Gleichgewicht (z.B. Schwarzkörperstrahlung). Die Photonen weisen eine Bose-Einstein-Verteilung auf, deren Maximum bei null Photonen liegt (siehe Abb.2.3a, blaue Kurve). Es ist damit am wahrscheinlichsten kein Photon in der Resonatormode zu finden.

Die mittlere Energie des Lichtes ist $\langle H \rangle = Sp\{\rho H\} = \hbar\Omega(\langle b^\dagger b \rangle + \frac{1}{2})$ (siehe (2.6)) und für den statistischen Operator ρ (siehe 2.18), der das thermische System beschreibt, folgt:

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Sp\{e^{-\beta H}\}} \quad (2.20)$$

mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$, wobei k_B für die Boltzmannkonstante und T für die Temperatur des Systems steht.

Aus dem Dichteoperator bzw. aus den Diagonaleinträgen der Dichtematrix resultiert dann die Photonenstatistik für thermisches Licht:

$$p_n^{th} = e^{-\beta n \hbar \Omega} (1 - e^{-\beta \hbar \Omega}). \quad (2.21)$$

Die Bose-Einstein-Funktion für die mittlere Anzahl der Photonen lautet:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta n \hbar \Omega} - 1}.$$

Bei **kohärentem Licht** besitzen die Lichtwellen eine feste Phasenbeziehung. Die Photonen sind poissonverteilt und das Wahrscheinlichkeitsmaximum zeigt sich gerade bei der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle$. Statistisch vorzufinden sind also $\langle n \rangle$ Photonen (siehe Abb. 2.3b, grüne Kurve).

Zur Beschreibung von kohärentem Licht werden in der Quantenmechanik im Allgemeinen die sogenannten Glauber-Zustände verwendet. Sie sind kohärente Zustände, welche die Unschärferelation ($\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$) minimieren. Außerdem sind kohärente Zustände $|\varphi\rangle$ Eigenzustände des Vernichtungsoperators $b|\varphi\rangle = \varphi|\varphi\rangle$. In diesem Zusammenhang lässt sich zeigen, dass folgende Faktorisierungsbedingung gilt:

$$\langle \psi | b^\dagger b | \psi \rangle = \langle \psi | b^\dagger | \psi \rangle \langle \psi | b | \psi \rangle. \quad (2.22)$$

Das Betragsquadrat des Eigenwerts zum Vernichtungsoperator entspricht der mittleren Photonenzahl (vgl.(2.8)). Die normierten Glauber-Zustände ($\langle \varphi | \varphi \rangle = 1$) lassen sich als Superposition von Photonenzahl-Zuständen ausdrücken:

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n | \varphi \rangle = e^{-\frac{|\varphi|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Es folgt die Wahrscheinlichkeit p_n^{ko} im kohärenten Zustand $|\varphi\rangle$ n Photonen vorzufinden:

$$p_n^{ko} = |\langle n | \varphi \rangle|^2 = e^{-|\varphi|^2} \frac{|\varphi|^{2n}}{n!}. \quad (2.23)$$

Bei dieser Photonenstatistik handelt es sich um eine Poisson-Verteilung und die mittlere Photonenzahl ist gerade $\langle n \rangle = |\varphi|^2$.

Außer diesen beiden klassischen Lichtarten gibt es z.B. noch **Sub-Poisson-Licht**. Es ist das Licht eines Einzelphotonemitters und hat daher die besondere Eigenschaft, dass keine direkt aufeinander folgenden Photonen emittiert werden können, da für eine zweite Emittierung erst wieder eine Anregung stattfinden muss. Dieses Verhalten gibt die sub-poissonische Photonenstatistik wieder und wird mit Hilfe eines Fock-Zustandes beschrieben, der im Gegensatz zum Glauber-Zustand eine feste Zahl von Photonen enthält. Aufgrund der diskreten Photonenzahl ist die dazugehörige Statistik ein Kronecker-Delta $\delta_{n=\langle n \rangle}$, die wegen der Unschärferelation allerdings eher einer gequetschten Poisson-Verteilung ähnelt. Die Poisson-Verteilung würde dabei schmaler werden und ein höheres Maximum aufweisen (siehe Abb.2.3c, rote Kurve). [MS92], [GBM⁺93]

Mit dem Ergebnis der Photonenstatistik bei einem Laser lässt sich Aussage darüber treffen, ob er kohärentes Licht (Laserlicht) oder thermisches Licht emittiert. Ein atomares System, wie es durch das Jaynes-Cummings-Modell beschrieben ist, befindet sich unterhalb der Laserschwelle, wenn die zugehörige Photonenstatistik eine Bose-Einstein-Verteilung aufweist und oberhalb bei einer Poisson-Verteilung. Die Laserschwelle ist der Punkt, an dem das System beginnt kohärentes Licht zu emittieren. [AGS66]

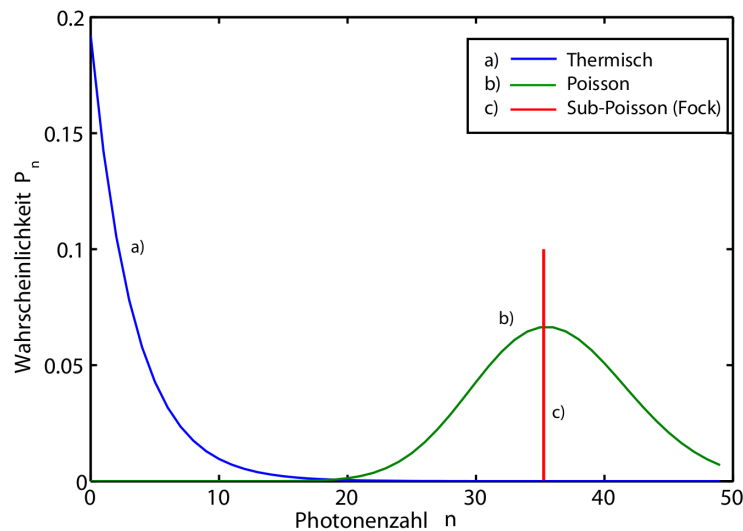


Abbildung 2.3: Die Wahrscheinlichkeit p_n in Abhängigkeit der Photonenzahl n . Darstellung von drei unterschiedlichen Photonenstatistiken: a) Bose-Einstein-Verteilung, b) Poisson-Verteilung, c) Sub-Poisson-Verteilung

2.3.3 Korrelationsfunktion

Die Kohärenz von Feldern ermöglicht Interferenzerscheinungen. Ein typisches Beispiel aus der klassischen Physik ist das Doppelspaltexperiment, bei dem durch Beleuchtung eines Doppelspaltes ein charakteristisches Interferenzmuster auf einem

Schirm am Orte r erzeugt wird. Der Lichtstrahl benötigt von der Quelle zum Schirm die Zeit t . Das Lichtfeld lässt sich in einen positiven und negativen Frequenzanteil zerlegen: $E(r, t) = E^+(r, t) + E^-(r, t)$.

Die Intensität des Lichtes definiert sich dann durch $|E|^2 = E^+ \cdot E^-$. Detektiert oder gesehen werden kann nur der reelle, positive Anteil. So kommen auf dem Schirm zwei positive Anteile zusammen. Einerseits das Feld ausgehend vom ersten Spalt mit der Spalt-Position r_1 und der Zeit t_1 , die vom Zeitpunkt der Lichtaussendung bis dahin vergeht. Andererseits das Feld ausgehend vom zweiten Spalt mit der Spalt-Position r_2 und der Zeit t_2 , die vom Zeitpunkt der Lichtaussendung bis dahin vergeht (siehe Abb.2.4).

→ $E^+(r, t) = E^+(r_1, t_1) + E^+(r_2, t_2)$.

Bei Ermittlung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Photonen tritt ein dritter Term auf. Es handelt sich um den Interferenzterm, der durch den Überlapp der Wellenfunktionen beider Lichtanteile gegeben ist.

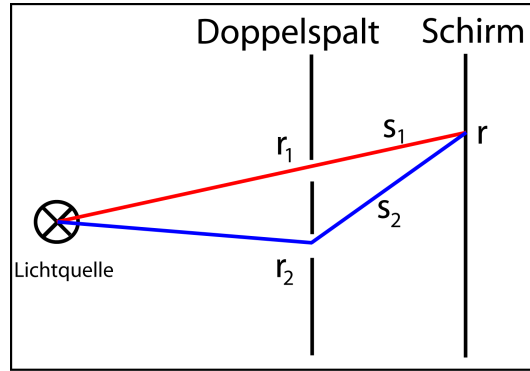


Abbildung 2.4: Das Doppelspaltexperiment mit dem ersten Lichtstrahl (rot) und dem zweiten (blau)

$$\langle |E^+(r, t)|^2 \rangle = \langle |E^+(r_1, t_1)|^2 \rangle + \langle |E^+(r_2, t_2)|^2 \rangle + 2\text{Re}\langle E^-(r_1, t_1)E^+(r_2, t_2) \rangle.$$

Die für die Interferenz verantwortliche Verbindung der Wellenamplituden ist durch die **Korrelationsfunktion erster Ordnung** $g^{(1)}$ gegeben:

$$g^{(1)}(r_1, t_1, r_2, t_2) = \langle E^-(r_1, t_1)E^+(r_2, t_2) \rangle. \quad (2.24)$$

Für ein quantisiertes Lichtfeld lässt sich der Erwartungswert in zweiter Ordnung wie folgt ausdrücken:

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = Sp\{\rho E^-(x_1)E^+(x_2)\}, \quad (2.25)$$

mit $x_1 = \{r_1, t_1\}$ und $\{x_2 = r_2, t_2\}$.

Die verschiedenen Frequenzanteile für eine Mode sind dabei

$$E^+(x) = \epsilon_\Omega b e^{-i\Omega t} \sin(kz) \quad \text{und} \quad E^-(x) = \epsilon_\Omega b^\dagger e^{i\Omega t} \sin(kz).$$

Der positive Frequenzanteil wird unter Vernichtung von Photonen detektiert, deswegen taucht in der Gleichung für $E^+(x)$ der Vernichtungsoperator auf.

$$\Rightarrow g^{(1)}(x_1, x_2) = \epsilon_\Omega^2 \sin(kz_1) \sin(kz_2) e^{-i\Omega(t_1 - t_2)} Sp\{\rho b^\dagger b\}. \quad (2.26)$$

Die Definition der Kohärenz erster Ordnung gilt analog auch für höhere Ordnungen, da sich klassische Zustände im Allgemeinen faktorisieren lassen und kohärente laut (2.22) auch. Bei der Betrachtung von (2.26) wird deutlich, dass die Korrelationsfunktion erster Ordnung nicht von der Photonenstatistik, sondern nur von der mittleren Photonenzahl $\langle n \rangle = Sp\{\rho b^\dagger b\}$ abhängt. Wird die Korrelationsfunktion mittels Auf- und Absteigeoperatoren in Abhängigkeit der Zeit beschrieben, lautet sie:

$$g^{(1)}(t) = \langle b^\dagger(t)b(t) \rangle = \langle n \rangle. \quad (2.27)$$

Für die **Korrelationsfunktion zweiter Ordnung** bezüglich der Verzögerungszeit τ gilt:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t+\tau)b(t+\tau)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle \langle b^\dagger(t+\tau)b(t+\tau) \rangle}. \quad (2.28)$$

In Bezug auf das vorherige Beispiel ist τ die retardierte Zeit $\tau = t - \frac{s_{12}}{c}$, wenn s_{12} der Abstand zwischen Spalt 1 und Spalt 2 ist.

Anders als die Korrelationsfunktion erster Ordnung hängt $g^{(2)}(\tau)$ von der Photonstatistik p_n (siehe unten) ab. Für den Fall $\tau = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\tau = 0) &= \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t)b(t)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2} \\ &= \frac{\langle b^\dagger(t)b(t)b^\dagger(t)b(t) \rangle - \langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2} = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle^2}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

wobei $\langle n \rangle = Sp\{\rho n\} = \sum_{jn} n \rho_{jn} = \sum_n n \sum_j \rho_{jn} \sum_n n p_n$ und $\langle n^2 \rangle = Sp\{\rho n^2\} = \sum_n n^2 p_n$.

Die verschiedenen Ergebnisse für $g^{(2)}(\tau = 0)$ lassen sich wie folgt charakterisieren:

- a) $g^{(2)}(\tau = 0) = 2 \Rightarrow$ thermisches Licht, Bose-Einstein-Statistik,
- b) $g^{(2)}(\tau = 0) = 1 \Rightarrow$ kohärentes Licht, Poisson-Statistik,
- c) $g^{(2)}(\tau = 0) = 0 \Rightarrow$ Licht eines Einzelphotonemitters, Sub-Poisson-Statistik.

In Abbildung 2.5 ist $g^{(2)}(\tau)$ gegen τ für die drei genannten Anfangswerte $g^{(2)}(\tau = 0) = 2, 1$ und 0 dargestellt. Zu erkennen ist, dass mit wachsender Verzögerungszeit τ jede Art von Korrelation verschwindet, also für $\lim \tau \rightarrow \infty$ ergibt sich $g^{(2)}(\tau = 0) = 1$. [Car99], [UGA⁺07]

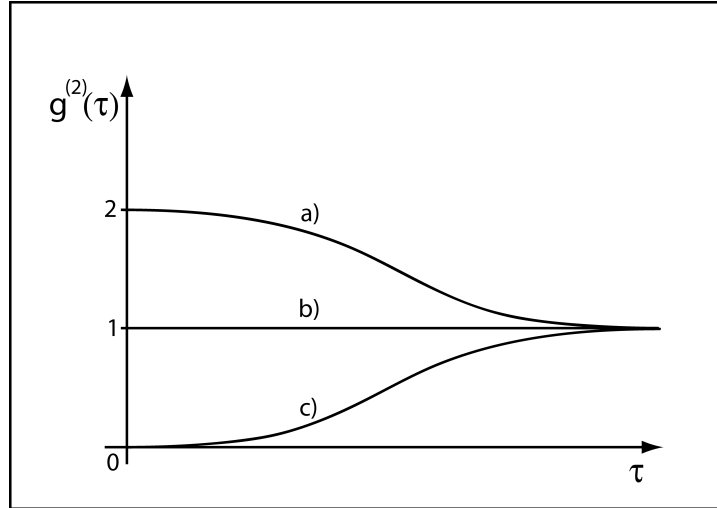


Abbildung 2.5: Korrelationsfunktion zweiter Ordnung in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit a) für die Bose-Einstein-Statistik, b) für die Poisson-Statistik und c) für die Sub-Poisson-Statistik

2.3.4 Photonen „bunching“ und „antibunching“

Die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung reflektiert die Wahrscheinlichkeit, dass Photonen zeitlich korrelieren, für den Fall $\tau = 0$ also Photonenpaare zum gleichen Zeitpunkt vorzufinden. Diese Paarbildung resultiert nicht aufgrund von Wechselwirkung, sondern wegen der statistischen Eigenschaften des Lichtes.

Bei thermischem Licht gibt es eine verstärkte Wahrscheinlichkeit zwei Photonen simultan zu detektieren (zeigt sich durch $g^{(2)}(\tau = 0) = 2$). Diese Tatsache wird „bunching“ genannt und zwar deswegen, weil es möglich ist einen „Photonenklumpen“ vorzufinden. Dieses Verhalten wird in Abbildung 2.6a veranschaulicht. Jede Linie in dem Bild stellt ein Photon dar.

Im Gegensatz dazu tritt bei sub-poissonischen Licht „antibunching“ auf (Abb.2.6c), das heißt der Erwartungswert zwei Photonen gleichzeitig zu messen ist reduziert (hier sogar gleich null, wegen $g^{(2)}(\tau = 0) = 0$). Es tauchen keine Photonenpaare auf. Die zeitliche Statistik von kohärentem Licht ist zufällig und wird durch $g^{(2)}(\tau = 0) = 1$ wiedergespiegelt. Ob mehrere Photonen auf einmal emittiert werden oder gerade nicht, ist nicht vorhersagbar (siehe Abb.2.6b).

Im Allgemeinen gilt für bunching: $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ und für antibunching $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$. [Gie08]

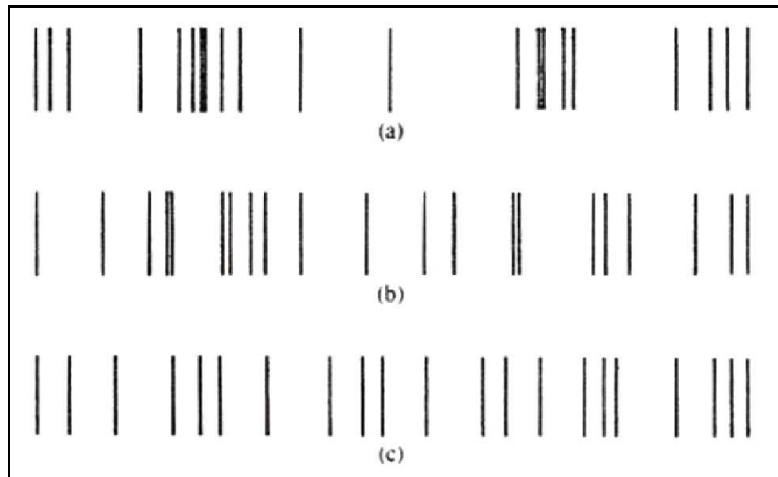


Abbildung 2.6: Aufgetragen ist das Vorkommen eines Photons gegen die Zeit a) für die Bose-Einstein-Statistik, b) für die Poisson-Statistik und c) für die Sub-Poisson-Statistik [Lou03]

2.4 Dynamik des Systems

2.4.1 Von-Neumann-Gleichung

Die Dichtematrix liefert die vollständige Beschreibung des Systemzustandes. Zur Beschreibung von dynamischen Prozessen dient in der klassischen Mechanik die Liouville-Gleichung und in der Quantenmechanik ihr Analogon die **von-Neumann'sche Bewegungsgleichung**. Die zeitliche Entwicklung von ρ wird anhand des Kommutators von Hamiltonoperator und Dichte-Matrix ermittelt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H_{JC}, \rho]. \quad (2.30)$$

Ausgeschrieben führt diese Gleichung zu

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle j, n | \rho | j' n' \rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{jn, j'n'} = \langle j, n | H_{JC} \rho - \rho H_{JC} | j' n' \rangle \\ &= \sum_{j'' n''} (H_{jn, j'' n''} \rho_{j'' n'', j' n'} - \rho_{jn, j'' n''} H_{j'' n'', j' n'}). \end{aligned}$$

Für die jeweiligen Matrixelemente ergibt sich:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -g * \sqrt{n+1} \rho_{\alpha n, \beta n+1} + g \sqrt{n+1} \rho_{\beta n+1, \alpha n} \quad (2.31)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \beta n+1} = g * \sqrt{n+1} \rho_{\alpha n, \beta n+1} - g \sqrt{n+1} \rho_{\beta n+1, \alpha n} \quad (2.32)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} = [\hbar(\omega_{\alpha\beta} - \Omega) - i\gamma] \rho_{\alpha n, \beta n+1} - g \sqrt{n+1} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}) \quad (2.33)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \alpha n} = [\hbar(\omega_{\alpha\beta} - \Omega) - i\gamma] \rho_{\alpha n, \beta n+1} + g^* \sqrt{n+1} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}) \quad (2.34)$$

Gl. (2.31) und (2.32) präsentieren die Änderung der diagonalen Dichte-Matrixelemente aufgrund der Licht-Materie-Wechselwirkung, Gl. (2.33) und (2.34) beschreiben die Änderung der nichtdiagonalen Elemente. Hier ist γ eine phänomenologisch eingeführte Dämpfung der Nichtdiagonalelemente. Sie wird im weiteren Kapitel 2.4.3 erklärt. [Car99]

2.4.2 Mastergleichung

Zur Vereinfachung der Bewegungsgleichungen wird die **adiabatische Näherung** für die Nichtdiagonalelemente verwendet. Sie separiert die Bewegung von Diagonal- und Nichtdiagonalelementen und setzt voraus, dass die zeitliche Änderung der Wechselwirkungsamplituden $\rho_{\alpha n, \beta n+1}$ (2.33) und $\rho_{\beta n+1, \alpha n}$ (2.34) im Verhältnis zu den Wahrscheinlichkeitsamplituden $p_{\alpha n} = \rho_{\alpha n, \alpha n}$ und $p_{\beta n+1} = \rho_{\beta n+1, \beta n+1}$ sehr klein ist.

Die nichtdiagonalen Einträge (2.33) werden dann adiabatisch eliminiert:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \beta n+1} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \alpha n} \stackrel{!}{=} 0$$

Damit folgt für die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix:

$$\rho_{\alpha n, \beta n+1} = \frac{g\sqrt{n+1}}{\hbar^2(\omega_{\alpha\beta} - \Omega) - i\hbar\gamma} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}) = \rho_{\beta n+1, \alpha n}^*. \quad (2.35)$$

Wird (2.35) in (2.31) oder (2.32) eingesetzt, ist das Ergebnis ein geschlossenes Gleichungssystem für die diagonalen Dichtematrixelemente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n} = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\alpha n, \alpha n} = -\frac{n+1}{\tau} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}), \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1} = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\beta n+1, \beta n+1} = \frac{n+1}{\tau} (\rho_{\alpha n, \alpha n} - \rho_{\beta n+1, \beta n+1}) \quad (2.37)$$

mit der spontanen Emissionsrate

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{\hbar} \frac{|g|^2}{\hbar} \frac{\gamma^2}{(\omega_{\alpha\beta} - \Omega)^2 + \gamma^2}$$

in die betrachtete Mode.

Dies sind die **Mastergleichungen** des Jaymes-Cummings-Model.

2.4.3 Reservoirankopplung

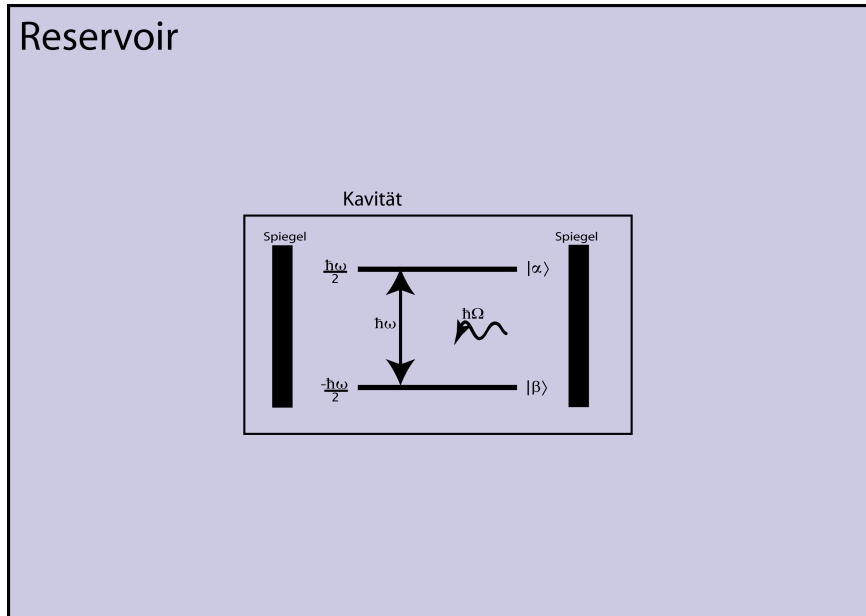


Abbildung 2.7: Veranschaulichung der Reservoirkopplung: Das System, bestehend aus einer Kavität, zwei Resonatorspiegeln und einem Zwei-Niveau-System, ist umgeben von einem Reservoir, welches Wechselwirkungsprozesse symbolisiert.

Wir betrachten nun das System modellhaft eingebettet in ein thermisches Reservoir, wie in Abbildung 2.7 dargestellt ist. Hier wird das Reservoir angekoppelt, um Relaxation und Verluste in nichtlasende Moden zu beschreiben. Das Reservoir hat ein breites, kontinuierliches Spektrum an harmonischen Oszillator-Frequenzen. Die System-Reservoir-Ankopplung führt zur Systemrelaxation in den thermischen Gleichgewichtszustand.

Dabei werden die Nichtdiagonalelemente der System-Dichtematrix (2.33), (2.33) ausgedämpft, $\rho_{\alpha n, \beta n+1} = \rho_{\beta n+1, \alpha n} \rightarrow 0$. Es handelt sich um das sogenannte Dephasieren, welches in (2.33), (2.34) durch γ beschrieben wird. Die Diagonalelemente ergeben die Besetzungswahrscheinlichkeit im thermischen Gleichgewicht. Diesem Gleichgewichtszustand wirkt das sogenannte optische Pumpen entgegen, welches modellhaft durch ein weiteres Reservoir beschrieben werden kann. Dem System wird dabei Energie in Form von Licht zugeführt. Haben die zugeführten Photonen die passende Energie $\hbar\omega_{\alpha\beta}$, regen sie das Atom an und können zur Besetzungsinversion führen. Diese ist erreicht, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass der $|\alpha\rangle$ -Zustand besetzt ist höher ist als die des $|\beta\rangle$ -Zustandes.

Durch eine weitere Reservoirankopplung kann der Verlust von Photonen in Moden beschrieben werden, die nicht die passende Frequenz $\omega_{\alpha\beta}$ besitzen und sich daher nicht in der Kavität befinden. Die Kavität kann auch noch „Verlustmoden“ haben, diese sind hier aber nicht von Relevanz.

Die Verluste wegen der nicht 100-prozentigen Reflektivität der Resonatorspiegel (nötig für Auskopplung des Laserstrahls), werden erneut durch Reservoirankopplung geschildert. Aufgrund der Frequenzenvielfalt eines Reservoirs ist das Hinzukommen dieses oder mehrerer Photonen nicht von Bedeutung für den Zustand des Reservoirs, indes aber für den Zustand des Zwei-Niveau-Systems. Die Kopplung des Systems an ein Bad führt daher zu Dämpfungen (Dissipation).

Die Reservoirankopplung wird in der sogenannten Born-Markov-Näherung durchgeführt. Die System-Bad-Wechselwirkung wird dabei nur bis zur 2.Ordnung berücksichtigt (Born'sche Näherung) und die „Gedächtniseffekte“ des Systems vernachlässigt (Markov'sche Näherung).

Die beschriebene Prozedur soll nun im Allgemeinen für ein beliebiges Reservoir dargestellt werden. Betrachtet wird der Hamiltonoperator H_G für das Gesamtsystem bestehend aus einem System und einem Reservoir, der unter Berücksichtigung der RWA wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} H_G &= \underbrace{H_S + H_R}_{H_0} + H_{SR} \\ &= H_S + \sum_i \hbar\omega_i^R b_i^\dagger b_i + \sum_i \hbar(\kappa_i a^\dagger b_i + \kappa_i^* a b_i^\dagger). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Der erste Term H_S stellt ein ungestörte System dar, der zweite Term H_R repräsentiert das ungestörte Reservoir und der dritte H_{SR} die gegenseitige Wechselwirkung von System und Reservoir, wobei κ die Kopplungskonstante ist.

Der Dichte-Operator des Gesamtsystems sei $\chi(t)$ und der des Systems $\rho(t)$. Also ist $\rho(t)$ nur ein reduzierter Teil von $\chi(t)$ und ergibt sich aus der Spurbildung über die

Reservoir-Zustände:

$$\rho(t) = Sp_R\{\chi(t)\}. \quad (2.39)$$

Die Von-Neumann-Gleichung für χ ist $\dot{\chi} = \frac{1}{i\hbar}[H_G, \chi]$. Bei Betrachtung dieser Gleichung für die Dynamik des gesamten Systems im Wechselwirkungs-Bild ist zu erkennen, dass H_0 schnelle Bewegungen erzeugt und H_{SR} langsame. Dies lässt eine Separation zu. Der langsame Bewegungsanteil $\tilde{\chi}(t)$ kann definiert werden durch

$$\tilde{\chi}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \chi(t) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}. \quad (2.40)$$

Unter Verwendung von (2.38) und (2.39) folgt:

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_{SR}(t), \tilde{\chi}], \quad (2.41)$$

wobei $\tilde{H}_{SR}(t)$ explizit zeitabhängig ist:

$$\tilde{H}_{SR}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} H_{SR} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}.$$

Einsetzen von (2.40) in (2.41) und formale Integration über die Zeit liefert eine exakte Gleichung:

$$\dot{\tilde{\chi}} = \underbrace{\frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_{SR}(t), \chi(0)]}_{1. \text{ Ordnung}} - \underbrace{\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]]}_{2. \text{ Ordnung}}. \quad (2.42)$$

Born-Markov-Näherung

Angenommen wird, dass die Wechselwirkung zur Zeit $t = 0$ beginnt und vorher keine Korrelation zwischen dem System und dem Reservoir vorliegt. Dann ist $\chi(0) = \tilde{\chi}(0)$ bzw. $\chi(0) = \rho(0)R_0$. Der Dichte-Operator des Reservoirs R_0 , der als zeitlich konstant angenommen wird, da sich das Bad permanent im thermischen Gleichgewicht befindet und der Dichte-Operator des Systems $\rho(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ faktorisieren. Spurbildung über die Reservoir-Zustände führt von (2.42) zu

$$\dot{\tilde{\rho}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Sp_R[\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\chi}(t')]]. \quad (2.43)$$

Die erste Vereinfachung findet unter der Annahme statt, dass $Sp_R\{[\tilde{H}_{SR}(t)R_0]\} = 0$ ist. Somit lässt sich $\frac{1}{i\hbar}Sp_R\{[\tilde{H}_{SR}(t), \chi(0)]\}$ eliminieren. Wegen der schwachen Wechselwirkung zwischen System und Reservoir sind die Abweichungen von $\chi(t)$ zu allen Zeitpunkten linear im Wechselwirkungs-Hamiltonoperator:

$$\tilde{\chi}(t) = \tilde{\rho}(t)R_0 + O(H_{SR}) \quad (2.44)$$

Das ist der erste Hauptbestandteil der Born-Markov-Näherung, die **Born-Näherung**. Vernachlässigt werden alle Wechselwirkungsprozesse, die höher als 2.Ordnung im H_{SR} sind. Aus (2.43) ergibt sich dann:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Sp_R[\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t')R_0]] \quad (2.45)$$

An diesem Integral wird dann die zweite Näherung angewandt, die **Markov-Näherung**. Hierbei wird angenommen, dass die Zeitentwicklung von $\tilde{\rho}(t)$ nicht von der Vergangenheit ($t' < t$) des Systems abhängt, also dass das Verhalten des Systems beziehe sich lediglich auf den gegenwärtigen Zustand bezieht. Dann wird $\tilde{\rho}(t')$ durch $\tilde{\rho}(t)$ ersetzt und kann vor das Integral gezogen werden:

$$\dot{\tilde{\rho}}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Sp_R[\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \tilde{\rho}(t)R_0]]. \quad (2.46)$$

Eine andere Art diese Näherung zu rechtfertigen wäre, dass die Zeitskala der Korrelation sehr klein gegenüber der Zeitskala der Systemsänderung ist und somit die Korrelationsfunktion so schnell zerfällt, dass sie vernachlässigt werden kann. Dies wird in (2.46) allerdings nicht sichtbar. [Car99]

Lindblad-Terme

Betrachten wir die genäherte Von-Neumann-Gleichung (2.46) wieder in Operator-darstellung und setzen $H_{SR} = \sum_i \hbar(\kappa_i a^\dagger b_i + \kappa_i^* a b_i^\dagger)$ mit $a \in \{b, \sigma_-\}$ und $a^\dagger \in \{b^\dagger, \sigma_+\}$ ein, äußert sich die System-Reservoir-Kopplung durch sogenannte **Lindblad-Terme**:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H_0, \rho] + \sum_k \frac{\zeta_k}{2} \mathcal{L} \rho. \quad (2.47)$$

ζ_k steht für die Zeitkonstanten, auf die die Born-Markov-Näherung für das jeweilige Reservoir führt. \mathcal{L} ist der sogenannte Superoperator, der die am jeweiligen Prozess beteiligten Operatoren a^\dagger, a in charakteristischer Anordnung beinhaltet:

$$\mathcal{L} \rho = \left(2a_k \hat{\rho} a_k^\dagger - a_k^\dagger a_k \hat{\rho} - \hat{\rho} a_k^\dagger a_k \right).$$

Es wird deutlich warum in (2.42) der Term erster Ordnung null ist, denn Einsetzen von H_{SR} beinhaltet $\langle b_i \rangle = Sp_R\{b_i R_0\}$ und $\langle b_i^\dagger \rangle = Sp_R\{b_i^\dagger R_0\}$, und im Gleichgewicht gilt $\langle b_i \rangle = \langle b_i^\dagger \rangle = 0$.

Die hier hergeleitete Reservoirankopplung in Form von Lindblad-Termen (2.47) benutzen wir im Folgenden für das Jaynes-Cummings-Modell. (Streng genommen ist dies nicht möglich, da der Jaynes-Cummings-Hamiltonoperator eben gerade Kopplung beinhaltet, die für die Born-Markov-Näherung und somit für die Lindblad-Terme vernachlässigt wurde. Trotz dieses Defizits ist es gebräuchlich, das hier auf diese Weise zu handhaben.)

Nähere Beschreibung der Verlustmechanismen

Jeder Verlustmechanismus wird durch eine Reservoirankopplung modelliert und lässt sich durch einen Lindblad-Term beschreiben. Es werden hier zwei wesentliche Verluste berücksichtigt: Erstens die Dissipation durch spontane Emission von Photonen in sogenannte nichtlasende Moden und zweitens die Kavitätsverluste.

Die Ursache für den ersten Dissipationsterm liegt darin, dass das Atom nicht ausschließlich Licht mit der Frequenz $\omega_{\alpha\beta}$ in die Lasermode emittiert, sondern auch Licht anderer Frequenzen, welches in nichtlasende Moden eingeht. Damit lässt sich eine spontane Emissionsrate in nichtlasende Moden $\frac{1}{\tau_{nl}}$ und eine in die lasende Mode $\frac{1}{\tau}$ definieren. Werden die beiden addiert, ist das Ergebnis die **totale spontane Emissionsrate** $\frac{1}{\tau_{sp}} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{nl}}$, mit einem hier angenommenen typischen Wert von $1ns^{-1}$.

Um auszudrücken wie hoch der Anteil der gesamten spontanen Emission in die Lasermode ist, lässt sich der wichtige **β -Faktor** einführen (vgl. [GWLJ07]):

$$\beta = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau_{sp}}} = \frac{\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{nl}}}. \quad (2.48)$$

Typische Werte liegen zwischen 10^{-6} und 1, wobei 10^{-6} für herkömmliche Laser und ein Wert nahe 1 in Mikrokavitätslasern gilt.

Zum einen gibt es also Dissipation, da die spontane Emission in nichtlasende Moden zu einem Abbau der Anregung im atomaren System führt. Sie wird durch den folgenden Lindblad-Term beschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho|_{nl} = \frac{1}{2\tau_{nl}}[2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-]. \quad (2.49)$$

Die zuständigen Operatoren σ_+, σ_- sind fermionisch, da sich bei spontaner Emission der Zustand des Atoms ändert und sie somit auf den elektronischen Teil des Systems wirken. Die Photonen in der Lasermode sind nicht direkt beeinflusst von der spontanen Emission in nichtlasende Moden.

Zum anderen wird wie gesagt Dämpfung durch Kavitätsverluste verursacht, weil die Spiegel keine 100-prozentige Reflektivität aufweisen bzw. aufweisen dürfen. Die zugehörige Kavitätsverlustrate ist $\kappa = \frac{\Omega}{Q}$, wobei Q der Qualitätsfaktor der Kavität ist. Realistische Werte für κ liegen im Bereich von 0,1 bis $1ps^{-1}$ in dem hier betrachteten Systemen. Der Lindblad-Term für die Kavitätsverluste ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho|_{Kav} = \frac{\kappa}{2}[2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b]. \quad (2.50)$$

Hier kommen die photonischen Operatoren b^\dagger, b vor, da dieser Prozess nur auf die photonischen Freiheitsgrade wirkt, unabhängig davon, wie der atomare Zustand ist. Die Kavitätsverluste haben keinen Einfluss auf die atomaren Besetzungswahrscheinlichkeiten. Der hier auftretende Prozess macht sich dadurch bemerkbar, dass die mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ exponentiell zerfällt.

Nähere Beschreibung des inkohärenten Pumpens

Das Pumpen des Systems ist kein Verlustmechanismus. Trotzdem wird er zu den Verlustmechanismen dazugezählt, nämlich als negativer Verlust. Wir nehmen an, das Atom werde durch äußere Energie, zum Beispiel durch einen anderen Laser, optisch angeregt. In dem hier zugehörigen Lindblad-Term ist die Pumprate P enthalten ebenfalls mit in Einheiten von ps^{-1} :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho|_P = \frac{P}{2}[2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+\sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-]. \quad (2.51)$$

Wird für den Aufsteigeoperator hier $\sigma_+ = |\alpha\rangle\langle\beta|$ und für den Absteigeoperator $\sigma_- = |\beta\rangle\langle\alpha|$ eingesetzt, ergibt sich für die Matrixelemente von $\rho_{jn,j'n'}$ nur ein Beitrag, wenn $j = j'$, explizit also für $j = \alpha$:

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{\alpha,n}|_P = Pp_{\beta n} \quad (2.52)$$

und für $j = \beta$:

$$\frac{\partial}{\partial t}p_{\beta,n}|_P = -Pp_{\beta n}. \quad (2.53)$$

Eine wichtige Aussage über die Auswirkungen des Lindblad-Termes zum Pumpprozess kann getroffen werden, wenn die Spur über die atomaren Zustände j gebildet wird. Das Ergebnis ist $\frac{\partial}{\partial t}p_n|_P = 0$ und zeigt explizit, dass das Pumpen des Systems keinen direkten Einfluss auf die Photonen in der Lasermode hat.

Wird die Spur über die photonischen Zustände betrachtet, $\frac{\partial}{\partial t}f_\alpha|_P = Pf_\beta$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t}f_\beta|_P = -Pf_\beta$, wird deutlich, dass die Pumprate proportional zur Besetzungswahrscheinlichkeit des unteren Niveaus $|\beta\rangle$ ist. Das ist von besonderer Bedeutung, denn für den Fall, dass das System nahezu vollständig invertiert ist, wird f_β sehr klein und es ist kein Pumpen mehr möglich. Es kommt zu Sättigungseffekten.

2.4.4 Mastergleichung mit dissipativen Termen

Unter der Berücksichtigung der drei genannten Lindblad-Terme erhalten wir für (2.36) und (2.37) die folgenden **Mastergleichungen mit dissipativen Termen**:

$$\dot{p}_{\alpha,n} = - \underbrace{\frac{n+1}{\tau}(p_{\alpha,n} - p_{\beta,n+1})}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{1}{\tau_{nl}}p_{\alpha,n}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\kappa((n+1)p_{\alpha,n+1} - np_{\alpha,n})}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\tilde{P}p_{\beta,n}}_{\textcircled{4}}, \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{\beta,n+1} = & \underbrace{\frac{n+1}{\tau}(p_{\alpha,n} - p_{\beta,n+1})}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\frac{1}{\tau_{nl}}p_{\alpha,n+1}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\kappa((n+2)p_{\beta,n+2} - (n+1)p_{\beta,n+1})}_{\textcircled{3}} \\ & - \underbrace{\tilde{P}p_{\beta,n+1}}_{\textcircled{4}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Die einzelnen Beiträge beschreiben die folgenden physikalischen Prozesse:

- ① spontane und stimulierte Emission ohne Verlustmechanismen
- ② spontane Emission in nichtlasende Moden
- ③ Kavitätsverluste
- ④ Pumpen

Begriffe der spontanen und stimulierten Emission und der Absorption

Bei der Emission wird zwischen spontaner Emission und stimulierter Emission unterschieden. **Spontane Emission** ist die zufällige Abstrahlung eines Photons dadurch, dass das Atom vom angeregten Zustand in den Grundzustand wechselt.

Stimulierte Emission bedeutet, dass die Abstrahlung eines Photons von außen induziert ist und zwar durch vorhandene Photonen in der Kavität. Entspricht die Photonenergie der Energiedifferenz $\hbar\omega_{\alpha\beta}$ wird entweder das Atom angeregt oder verrichtet induzierte Emission. Ist in einem Lasersystem stimulierte Emission vorhanden, so überwiegt sie gegenüber der spontanen Emission, weil stimulierte Emission proportional zu der mittleren Photonenzahl ist und diese groß ist.

Bei der **Absorption** wird ein Photon vom Atom absorbiert ($b\sigma_+$) und dadurch angeregt.

Gleichungen (2.54) und (2.55) gelten zur Betrachtung eines einzelnen Emitters. Für das Verhalten von mehreren angeregten Emitttern lässt sich eine Mastergleichung bezüglich der Anzahl N der angeregten Emitter formulieren, so wird aus (2.54):

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_{n,N} = & - \underbrace{\frac{1}{\tau} n N p_{n,N}}_{1a} + \underbrace{\frac{1}{\tau} (n-1)(N+1) p_{n-1,N+1}}_{1b} - \underbrace{\frac{1}{\tau} N p_{n,N}}_{1c} + \underbrace{\frac{1}{\tau} (N+1) p_{n-1,N+1}}_{1d} \\
 & - \underbrace{\frac{1}{\tau_{nl}} N p_{n,N}}_{2a} + \underbrace{\frac{1}{\tau_{nl}} (N+1) p_{n,N+1}}_{2b} - \underbrace{\kappa n p_{n,N}}_{3a} + \underbrace{\kappa (n+1) p_{n+1,N}}_{3b} \\
 & + \underbrace{\tilde{P} p_{n,N-1}}_{4a} - \underbrace{\tilde{P} p_{n,N}}_{4b}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Auch hier beschreiben die einzelnen Beiträge die folgenden physikalischen Prozesse:

- 1a und 1b) stimulierte Emission in die Lasermode
- 1c und 1d) spontane Emission in die Lasermode
- 2a und 2b) spontane Emission in nichtlasende Moden
- 3a und 3b) Kavitätsverluste
- 4a und 4b) Pumpen

Abbildung 2.8 (b.w.) stellt die Wirkung der einzelnen Terme anschaulich dar. Die Abszisse beschreibt die Photonenzahl n und die Ordinate die Atomanzahl N , jeder Punkt steht für einen möglichen Zustand des Systems mit n Photonen und N angeregten Emitttern. Die Wahrscheinlichkeit jedes Zustandes wird durch das entsprechende Matricelement der Dichtematrix beschrieben. Zum Beispiel beschreibt

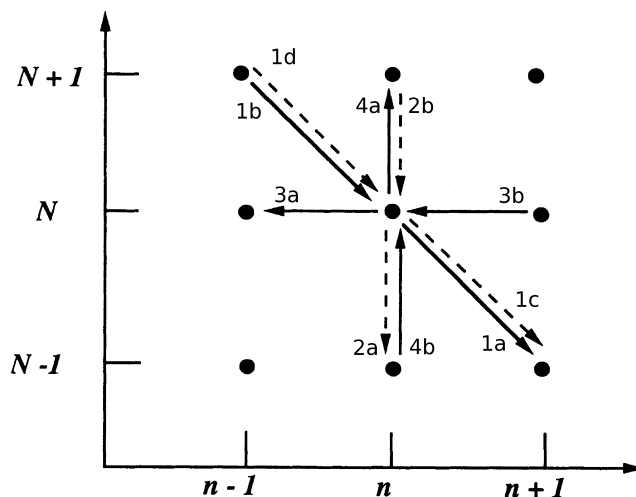


Abbildung 2.8: Zur Beschreibung der einzelnen Prozesse in einem System von N angeregten Atomen und n Photonen. Die Zahlen beziehen sich auf die einzelnen Beiträge in Gl.(2.56). [RC94]

der Term $1b$ für stimulierte Emission in die Lasermode die Wahrscheinlichkeit der Systemänderung vom Zustand $n-1, N+1$ in den Zustand n, N , welches durch den durchgezogenen Pfeil vom linken, oberen Punkt zum Mittelpunkt angedeutet wird. Dabei gewinnt das System also ein Photon, indem ein angeregtes Atom in seinen Grundzustand geht. Die Pfeile zur Kennzeichnung von spontaner Emission ($1c, 1d, 2a, 2b$) sind hier gestrichelt dargestellt, da sie im Gegensatz zu stimulierter Emission nicht so relevant sind. Die horizontalen Pfeile deuten die Kavitätsverluste ($3a, 3b$) an. Sie verlaufen in negative x -Richtung, denn bei diesen Prozessen verliert das System ein Photon, wobei die Anzahl der angeregten Emmitter aber konstant bleibt. [RC94]

2.4.5 Intensive Ratengleichungen

Obwohl die Mastergleichung numerisch gelöst werden kann (wird in der vorliegenden Arbeit in Kapitel 3.3 gezeigt), soll im Folgenden eine Näherung beschrieben werden, um das Lasermode mit möglichst geringem Aufwand numerisch berechnen zu können. Diese führt zu den sogenannten Ratengleichungen und besteht darin, dass ausgehend von den Mastergleichungen die Korrelation zwischen Atom und Photonen vollständig vernachlässigt wird.

$$\rho_{jn,jn} \approx \rho_{jj} \cdot \rho_{nn} \quad \Leftrightarrow \quad p_{jn} \approx f_j \cdot p_n, \quad (2.57)$$

wobei $f_j = \sum_n p_{jn}$ und $p_n = \sum_j p_{jn}$.

Es resultieren geschlossene Gleichungen für die Besetzungswahrscheinlichkeiten f_α und f_β , die in der Summe eins ergeben ($f_\alpha + f_\beta = 1$) und für den Erwartungswert der Photonenzahl $\langle n \rangle$ (vgl.[YB89], [GWLJ07]). Diese Gleichungen lassen sich sogar analytisch berechnen. Durch die Faktorisierung in (2.57) verlieren wir hier

allerdings die Korrelationen und die Photonenstatistik. Stattdessen wird die mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ verwendet, die mit der Annahme keine Korrelation zu haben $\langle nN \rangle = \langle n \rangle \langle N \rangle$, zu den „intensiven“ Ratengleichungen führt:

$$\dot{f}_\alpha = -\frac{f_\alpha - f_\beta}{\tau_{sp}} \beta \langle n \rangle - \frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} + P f_\beta = -\dot{f}_\beta, \quad (2.58)$$

$$\dot{\langle n \rangle} = N_A \left(\frac{f_\alpha - f_\beta}{\tau_{sp}} \beta \langle n \rangle + \frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} \right) - \kappa \langle n \rangle, \quad (2.59)$$

wobei N_A die Anzahl der Emitter ist.

(„Intensiv“ deswegen, weil sich der Pumprterm nicht mit der Anzahl N_A der Atome ändert und daher eine Pumprate pro Atom resultiert und nicht für das Gesamtsystem. Dies wird im nächsten Kapitel nochmal aufgegriffen.)

Die Ratengleichungen sind also von einem Atom ($N_A = 1$) auf mehrer Atome übertragbar, indem der Emissions- und Absorptionsterm in (2.59) mit der Emitteranzahl multipliziert wird.

Die Bedeutung der einzelnen Terme ist folgendermaßen zu interpretieren:

- $\frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} \beta \langle n \rangle \stackrel{(2.48)}{=} \frac{f_\alpha}{\tau} \langle n \rangle \sim$ stimulierte Emission in die Lasermode
- $\frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} \sim$ totale spontane Emission
- $\frac{f_\beta}{\tau_{sp}} \langle n \rangle \beta \stackrel{(2.48)}{=} \frac{f_\beta}{\tau} \langle n \rangle \sim$ Absorption

Die Relation von stimulierter Emission und Absorption hängt von der Besetzungsinversion ab: $\frac{f_\alpha - f_\beta}{\tau} \langle n \rangle \sim$ Besetzungsinversion.

Ohne Absorption des unteren Zustands $|\beta\rangle$ ergibt sich für die Ratengleichungen:

$$\dot{f}_\alpha = -\frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} \beta \langle n \rangle - \frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} + P(1 - f_\alpha) = -\dot{f}_\beta, \quad (2.60)$$

$$\dot{\langle n \rangle} = N_A \left(\frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} \beta \langle n \rangle + \frac{f_\alpha}{\tau_{sp}} \right) - \kappa \langle n \rangle. \quad (2.61)$$

Oberhalb der Laserschwelle, also für hohe Pumpraten, ist dies eine gute Näherung, da bei starker Inversion $f_\beta \rightarrow 0$. Die Leistung eines Systems, was quasi keine Absorptionseffekte besitzt, ist größer einzuschätzen als mit Absorption. Die Unterschiede werden in den numerischen Ergebnissen in Kapitel 3.1 genauer diskutiert.

2.4.6 Extensive Ratengleichungen

In (2.58) ist P eine intensive Größe, sie ist die Pumprate pro Atom und ändert sich nicht, wenn die Anzahl der Atome variiert wird. In der Mastergleichung (2.56) ist P eine extensive Größe, da sie sich automatisch mit der angeregten Atomanzahl N verändert. Zum direkten Vergleich der Mastergleichung für mehrere angeregte

Emitter (2.54) mit den Ratengleichungen werden nicht wie in (2.59) der Emissions- und der Absorptionsterm mit N_A multipliziert, sondern an jeder Stelle die Besetzungswahrscheinlichkeit des angeregten Zustandes f_α durch $N_A f_\alpha$ ersetzt. Dieses Produkt entspricht dann dem Erwartungswert für die Anzahl der angeregten Emitter $\langle N \rangle = N_A f_\alpha$. Durch diese Umformung wird die Pumprate $\tilde{P} = P(N_A - \langle N \rangle)$ zu einer extensiven Größe, sie ist die Pumprate des Gesamtsystems.

An diesem Term wird außerdem eine Näherung vorgenommen, die vor allem für große N_A gut ist. Vernachlässigt wird der Term $P\langle N \rangle$, sodass $\tilde{P} = P N_A$ bleibt.

Des Weiteren wird in den folgenden neu definierten Gleichungen keine Absorption des unteren Niveaus berücksichtigt, da dieser Absorptionsterm in der Mastergleichung ebenfalls weggelassen wird. Wir erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \langle \dot{N} \rangle &= -\frac{\langle n \rangle \langle N \rangle}{\tau} - \frac{\langle N \rangle}{\tau_{sp}} + \tilde{P}, & (2.62) \\ \langle \dot{n} \rangle &= \frac{\langle n \rangle \langle N \rangle}{\tau} + \frac{\langle N \rangle}{\tau_{sp}} - \kappa \langle n \rangle, & (2.63) \end{aligned}$$

wobei auch hier $\langle nN \rangle = \langle n \rangle \langle N \rangle$ gesetzt wird (vgl.(2.57)).

Später (Kapitel 3.4) werden diese Gleichungen mit der Mastergleichung (2.56) verglichen, um den Einfluss der Näherung überprüfen zu können.

2.4.7 Relaxationsoszillationen

In der Nähe der Laserschwelle weist der zeitliche Verlauf der Ratengleichungen oszillatorisches Verhalten in der mittleren Photonenzahl und in den Besetzungswahrscheinlichkeiten auf (vgl. Kapitel 3.1.2, 3.1.3). Es handelt sich um die sogenannten Relaxationsoszillationen, die als Einschwingvorgang des Systems interpretiert werden können. Für (2.60) und (2.61) kann die Formel für die Relaxationsoszillation analytisch berechnet werden, genauer gesagt der Teil der Ratengleichungen, in dem f_α und $\langle n \rangle$ kleinen Schwankungen unterliegen. Die stationären Werte $\langle \bar{n} \rangle$ und \bar{f}_α erhalten wir, indem $\langle \dot{n} \rangle$ (2.61) und $\langle \dot{f}_\alpha \rangle$ (2.60) gleich null gesetzt werden. In (2.61) wird hier der Term der spontanen Emission vernachlässigt, da er oberhalb der Laserschwelle klein gegenüber dem stimulierten Emissionsterm ist. $\langle \bar{n} \rangle$ sei der stationäre Wert der mittleren Photonenzahl und ϵ eine kleine Abweichung von diesem, sodass

$$\langle n \rangle = \langle \bar{n} \rangle + \epsilon. \quad (2.64)$$

Mit (2.64) in (2.61) ergibt sich:

$$\frac{d(\langle \bar{n} \rangle + \epsilon)}{dt} = \frac{N_A f_\alpha}{\tau} (\langle \bar{n} \rangle + \epsilon) - \kappa (\langle \bar{n} \rangle + \epsilon) \quad \stackrel{\langle \dot{n} \rangle = 0}{=} \dot{\epsilon}$$

Auch für die Besetzungswahrscheinlichkeit des oberen Niveaus sei \bar{f}_α der stationäre Wert und η eine kleine Änderung dieses Wertes, sodass

$$f_\alpha = \bar{f}_\alpha + \eta. \quad (2.65)$$

Mit (2.65) ergibt sich:

$$\dot{\epsilon} = \frac{N}{\tau}(\eta\langle\bar{n}\rangle + \eta\epsilon) \stackrel{\epsilon \ll \langle\bar{n}\rangle}{\approx} \frac{N\eta}{\tau}\langle\bar{n}\rangle. \quad (2.66)$$

Analog berechnet wird $\dot{\eta}$ und das Ergebnis dafür ist:

$$\dot{\eta} = -\kappa\epsilon - \frac{PN}{\kappa\tau}\eta. \quad (2.67)$$

Gleichungen (2.66) und (2.67) zusammen führen auf die Gleichung für einen gedämpften harmonischen Oszillator:

$$\ddot{\epsilon} + \gamma\dot{\epsilon} + \omega_0^2\epsilon = 0, \quad (2.68)$$

wobei $\gamma = \frac{PN}{\kappa\tau}$ (2.68a) die Dämpfungskonstante ist und $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}\langle\bar{n}\rangle}$ (2.68b) die Eigenfrequenz des ungedämpften harmonischen Oszillators.

Die Frequenz des gedämpften harmonischen Oszillators lautet:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (2.69)$$

Letztlich erhalten wir die Gleichung für die **Relaxationsoszillation**:

$$\langle n \rangle = \langle \bar{n} \rangle + Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi). \quad (2.70)$$

A steht für die Anfangsamplitude der Relaxationsoszillation, t ist die Zeit und ϕ die Phasenverschiebung zwischen numerisch und analytisch berechneter Kurve. Gleichung (2.70) zeigt explizit, dass die Dämpfung des Systems exponentiellen Charakter hat und dass das Systemverhalten im Bereich der Laserschwelle sich als das eines gedämpften harmonischen Oszillators beschreiben lässt. [ME88]

Kapitel 3

Numerische Resultate

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse des bisher theoretisch vorgeführten Modell der Photon-Elektron-Wechselwirkung im Zwei-Niveau-System präsentiert werden. Dafür werden alle drei Arten der Ratengleichungen, also die intensive Ratengleichung mit und ohne Absorptionsterm und die extensive Ratengleichung, sowie die Mastergleichung numerisch berechnet.

Begonnen wird in Kapitel 3.1 mit der Präsentation und Diskussion der Resultate von den intensiven Ratengleichungen und mit der Darstellung der Relaxationsoszillationen. Es folgt in Kapitel 3.2 die Betrachtung der Unterschiede zwischen intensiven und extensiven Ratengleichungen. Kapitel 3.3 beinhaltet die Mastergleichungsergebnisse und in Kapitel 3.4 werden diese mit den Ergebnissen der extensiven Ratengleichungen verglichen.

Zur Lösung dieser mathematischen Probleme und zur graphischen Darstellung der Ergebnisse wird hier Matlab 7.5 verwendet. Bei der differentialgleichungslösenden numerischen Methode handelt es sich im Wesentlichen um das sogenannte Runge-Kutta-Verfahren 4./5. Ordnung „ode45“, außerdem wird der Matlabsolver „ode15s“ benutzt.

3.1 Ergebnisse der intensiven Ratengleichungen

3.1.1 Kennlinien

Zunächst werden die intensiven Ratengleichungen (2.58) und (2.59) numerisch berechnet.

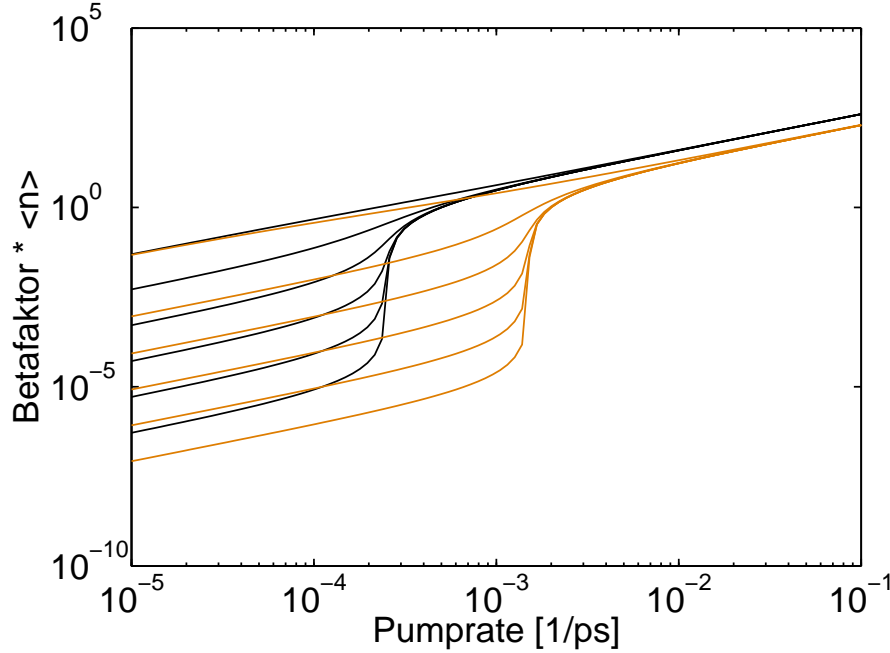


Abbildung 3.1: Kennliniendiagramm der mittleren Photonenzahl skaliert mit dem β -Faktor gegenüber der Pumprate für die Parameter $\tau_{sp} = 1ns$, $\kappa = \frac{1}{5ps}$ und $N_A = \frac{10^3}{\beta}$. Die verschiedenen Kennlinien beginnen oben mit $\beta = 1$ und enden unten mit 10^{-5} . Die schwarzen Kurven repräsentieren die intensiven Ratengleichungen ohne Absorption und die orangen mit Absorption.

In Abbildung 3.1 ist $\beta\langle n \rangle$ gegen P aufgetragen. Diese Art der Auftragung liefert die sogenannten Kennlinien, die einen Sprung an der Stelle liefern, an der das System beginnt kohärentes Licht zu emittieren, dadurch dass Besetzungsinversion aufgebaut wurde (Laserschwelle). Der ausgewählte Parametersatz ist hier: $\tau_{sp} = 1ns$, $\kappa = \frac{1}{5ps}$ und $N_A = \frac{10^3}{\beta}$ (Parametersatz 1). Die Pumprate P variiert von $10^{-5}ps^{-1}$ bis $10^{-1}ps^{-1}$ und es werden fünf verschiedene β -Faktoren $1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ und 10^{-5} von oben nach unten betrachtet. Die orangen Kurven repräsentieren die genannten Gleichungen (2.58) und (2.59). Zu erkennen ist, dass unterhalb der Laserschwelle die unteren vier Linien äquidistant sind, während die Kurve für $\beta = 1$ sich mit einer etwas größeren Distanz absetzt. Für $\beta = 1$ zeigen die Kennlinien keinen Sprung. Die Ursache dessen ist, dass sie nicht genügend Informationen enthalten, um für den maximalen β -Faktor einen Übergang von thermischen zu kohärentem Licht deutlich zu machen. Im Rahmen der Mastergleichung würde mit wachsender Pumprate ein Übergang von näherungsweise thermischen zu näherungsweise kohärentem Licht sichtbar sein [Gie08].

In (2.58) und (2.59) lassen wir nun den Absorptionsterm weg. Es resultieren die schwarzen Kurven, die unterhalb der Laserschwelle alle fünf im gleichen Abstand liegen, der genau $\frac{1}{\beta}$ beträgt, was auch für den Sprung von unterhalb nach oberhalb der Schwelle gilt.

Gibt es keine Absorption des unteren Niveaus, das heißt die Besetzungswahrscheinlichkeit des unteren Niveaus erfährt durch Reabsorption von Photonen keine Änderung, überwindet das System die Laserschwelle bereits bei einer kleineren Pumprate als mit Absorption, weswegen die schwarzen und die orangen Kurven in x-Richtung um ca. eine Größenordnung zueinander verschoben sind. In y-Richtung liegen die Kurven für das System ohne Absorption etwas höher, da die mittlere Photonenzahl $\langle n \rangle$ für den Fall ohne Absorption höher ist als mit Absorption (siehe Abb. 3.3).

3.1.2 An der Laserschwelle

Nun werden wir das Verhalten der Besetzungswahrscheinlichkeiten an der Laserschwelle diskutieren, deren zeitliche Entwicklung im Folgenden gezeigt ist.

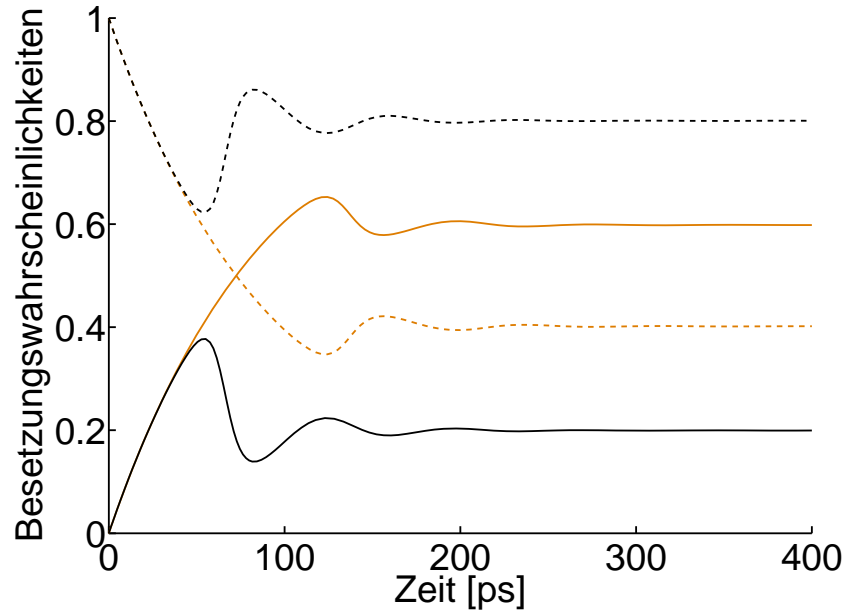


Abbildung 3.2: Zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten des oberen Niveaus (f_α durchgezogene Linie) und des unteren (f_β gestrichelte Linie) für den Fall mit Absorption (orange) und ohne (schwarz), $\beta = 10^{-1}$, $\tau_{sp} = 1\text{ns}$, $P = 10^{-2}\text{ps}^{-1}$, $\kappa = \frac{1}{5\text{ps}}$ und $N = \frac{10^3}{\beta}$.

Ausgewählt ist der Parametersatz 1 mit $\beta = 10^{-1}$ und $P = 10^{-2}\text{ps}^{-1}$, für den sich das System an der Laserschwelle befindet. Die durchgezogenen Linien sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten des oberen Niveaus f_α und die gestrichelten die für das untere f_β . Die stationären Besetzungswahrscheinlichkeiten für den Fall mit Absorption (orange) ergeben $f_\alpha \approx 0,6$ und $f_\beta \approx 0,4$. Folglich ist das System invertiert und stimulierte Emission findet statt. In Abb. 3.3 ist die dazugehörige Kurve für die

zeitliche Entwicklung der mittleren Photonenzahl illustriert. Die mittlere Photonenzahl im stationären Regime beträgt $\langle n \rangle \approx 1,9$. (Beachtet werden muss, dass in der graphischen Darstellung $\langle n \rangle$ mit β skaliert ist $\leftrightarrow \beta \langle n \rangle \approx 19$.)

Der Fall ohne Absorption (schwarz) verhält sich anders. Es ergibt sich $f_\alpha \approx 0,2$ und $f_\beta \approx 0,8$, das heißt es liegt ausschließlich spontane Emission vor, da keine Inversion des Systems erfolgt. In Abb. 3.3 ist zu sehen, dass trotzdem ungefähr 3,9 Photonen emittiert werden, also sogar mehrere als für den gerade diskutierten Fall mit Absorption (wie in Kapitel 2.4.5, S.24 vorausgesagt wurde). Das hier keine Besetzungsinversion zur stimulierten Emission nötig ist, liegt am Fehlen des Absorptionsterms. Spontane Emission erfolgt unabhängig von der mittleren Photonenzahl beim Vorhandensein einer Besetzungswahrscheinlichkeit im oberen Niveau (mit einer Rate proportional zu dieser) und stimulierte Emission kann einsetzen, sobald die mittlere Photonenzahl im Resonator von Null verschieden ist, siehe (2.60). Nur bei Berücksichtigung der Reabsorption von Photonen durch die Atome muss die stimulierte Emissionsrate die Absorptionsrate überkompensieren, was entsprechend (2.58) eine Inversion der Atome erfordert. Schlüssig wird diese Tatsache unter der Beachtung, dass sich das System ohne Absorption für gleiche Parameter bereits bei einer niedrigeren Pumprate oberhalb der Laserschwelle befindet als das mit Absorption der Fall ist (vgl. Abb. 3.1).

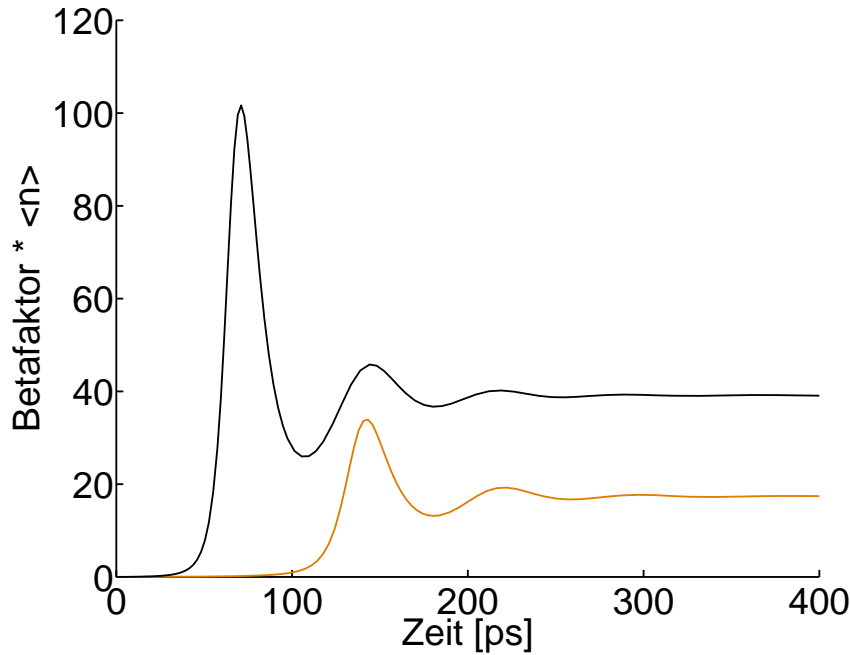


Abbildung 3.3: Mittlere Photonenzahl multipliziert mit dem Betafaktor gegenüber der Zeit (orange mit Absorption, schwarz ohne)

Aus Abb. 3.3 lässt sich außerdem entnehmen, dass das System ohne Absorption (schwarz) des unteren Niveaus schneller und stärker Licht emittiert als es mit Absorption (orange) der Fall ist.

3.1.3 Relaxationsoszillationen

Typisch für den zeitlichen Verlauf der Besetzungswahrscheinlichkeiten und der mittleren Photonenzahl in der Umgebung der Laserschwelle ist, dass Relaxationsoszillationen auftreten, wie in Kapitel 2.4.7 bereits erwähnt wurde. Abb. 3.2 und 3.3 zeigen die Oszillationen im zeitlichen Verlauf. Es gibt also einen Einschwingvorgang bis sich ein stationärer Wert eingestellt hat. In Abb. 3.4 ist die analytische (2.70) (rot) und die numerische (schwarz) Lösung für Relaxationsoszillation der mittleren Photonenzahl (2.61) dargestellt.

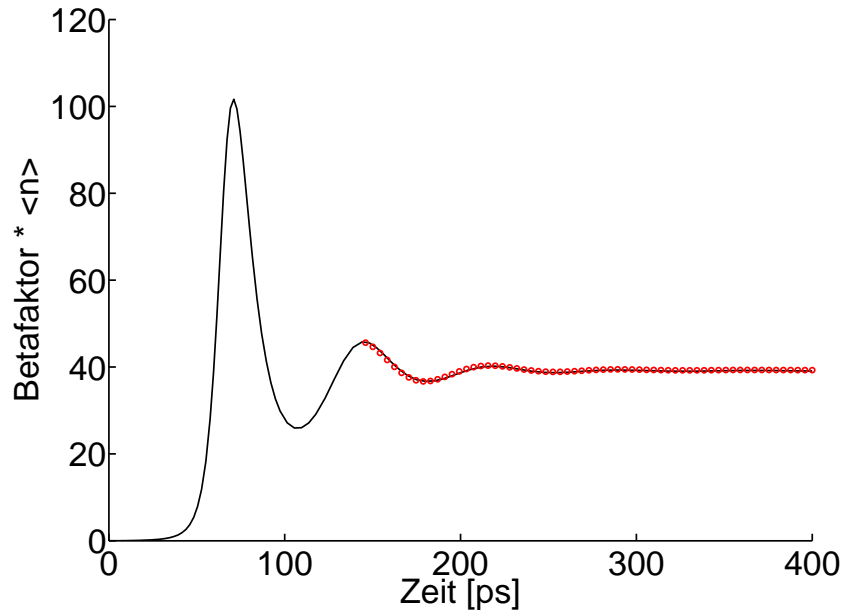


Abbildung 3.4: Zeitliche Entwicklung der mittleren Photonenzahl für den gleichen Parametersatz wie in Abb. 3.3: Parametersatz 1 mit $\beta = 10^{-1}$ und $P = 10^{-2} \text{ps}^{-1}$ (schwarz) mit zugehöriger analytischer Lösung (rot).

Das erste steile Ansteigen des Photonenerwartungswertes (siehe Abb. 3.3, 3.4) ist im Vergleich zu den folgenden Amplituden besonders hoch. Die Ursache liegt bei der anfänglich zu hohen Besetzungsinversion. Sie ist höher als zum Überwinden der Laserschwelle erforderlich ist. Der Teil des Überschießens wurde in die analytische Berechnung nicht mit einbezogen, da die Berechnung nur für kleine Schwankung gilt. Die Anfangsamplitude wird der numerischen Lösung entnommen (Abb. 3.4), sowie auch der stationäre Wert der mittleren Photonenzahl. Der Beginn $t = 0$ für die analytische Kurve wird so gewählt, dass sich für die Phasenverschiebung der beiden Kurven null ergibt ($\phi = 0$). Die Eigenfrequenz des harmonischen Oszillator (2.68b), die Frequenz des gedämpften harmonischen Oszillators (2.69) und die Dämpfungskonstante (2.68a) lassen sich damit berechnen und ergeben folgende Werte:

$$\omega_0 = 0,0883 \text{ps}^{-1}, \quad \omega = 0,0847 \text{ps}^{-1}, \quad \gamma = 0,05.$$

Um die Erscheinung der Relaxationsoszillationen besser verstehen zu können, dient Abb. 3.5. Hier ist die zeitliche Entwicklung der Anzahl der angeregten Emitter (violett) aus (2.62) ohne Näherung des Pumprterms (\tilde{P} ist hier $P(N_A - \langle N \rangle)$) im Vergleich zu der des Photonenerwartungswertes (schwarz) illustriert. Deutlich wird, dass die beiden Kurven ein gewisses gegenphasiges Verhalten aufweisen. Dies ist leicht verständlich, wenn beachtet wird, dass die Terme der spontanen ($\frac{f_\alpha}{\tau_{sp}}$) und der stimulierten ($\frac{f_\alpha}{\tau} \langle n \rangle$) Emission in der Gleichung für die Besetzungswahrscheinlichkeit des oberen Niveaus ein negatives Vorzeichen haben und in der für die mittlere Photonenzahl ein positives (vgl. (2.62), (2.63)).

Physikalisch lässt sich das Verhalten folgendermaßen erklären: Als erstes werden knapp 4000 Atome angeregt, obwohl zum Lasen nur 2000 benötigt werden. Bis zum ersten Maximum der violetten Kurve baut sich Besetzungsinversion auf. Zum Zeitpunkt der ersten maximalen angeregten Emitterzahl beginnt das System durch stimulierte Emission Laserlicht auszusenden und die Photonenzahl geht auf ihren ersten Maximalwert, während die Anzahl der angeregten Emitter abgebaut wird. Durch Resonatorverluste des Systems, fällt die mittlere Photonenzahl ab; das System befindet sich wieder unterhalb der Laserschwelle. Durch den ständigen Pumpprozess werden erneut Atome angeregt und die Kurve für die Anzahl der angeregten Emitter steigt folglich, während die für die mittlere Photonenzahl abfällt. Da der erste Minimalwert der angeregten Emitterzahl nicht wie bei $t = 0$ bei Null liegt, sind noch restliche angeregte Atome vorhanden und somit werden nicht mehr ganz so viele angeregt wie beim ersten Anstieg der Kurve, allerdings immernoch mehr als nötig sind. Diese Schwankungen setzen sich so lange fort, bis das System schließlich einen stationären Wert annimmt. Dieses Verhalten entspricht jenes eines gedämpften harmonischen Oszillators.

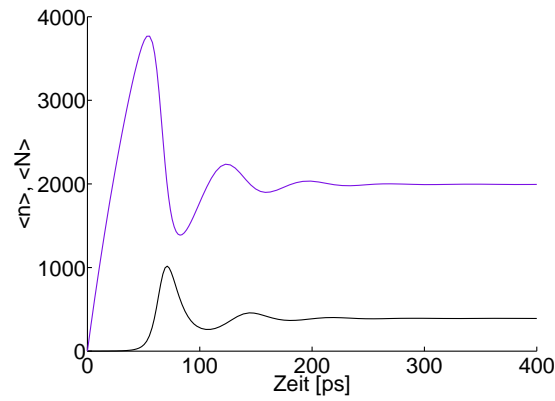


Abbildung 3.5: Zeitliche Entwicklung der Zahl der angeregten Emitter (violett) für den gleichen Parametersatz wie in Abb. 3.3 und 3.4 im direkten Vergleich zum zeitlichen Verlauf der mittleren Photonenzahl (schwarz): Parametersatz 1 mit $\beta = 10^{-1}$ und $P = 10^{-2} \text{ps}^{-1}$

3.1.4 Oberhalb und unterhalb der Laserschwelle

Abb. 3.6 illustriert die Besetzungswahrscheinlichkeiten des Systems mit Absorption gegenüber der Zeit (2.60). Ausgewählt ist der Parametersatz 1 für zwei verschiedene Pumpraten. Einmal mit $P = 10^{-4} \text{ps}^{-1}$ für einen Zustand unterhalb der Laserschwelle (orange) und mit $P = 10^{-1} \text{ps}^{-1}$ für einen Systemzustand oberhalb der Laserschwelle (grün).

Unterhalb der Schwelle entwickelt sich f_α (durchgezogene Linie) zu einem stationären Wert von $f_\alpha \approx 0,1$ und f_β (gestrichelte Linie) zu $f_\beta \approx 0,9$. Der Systemzu-

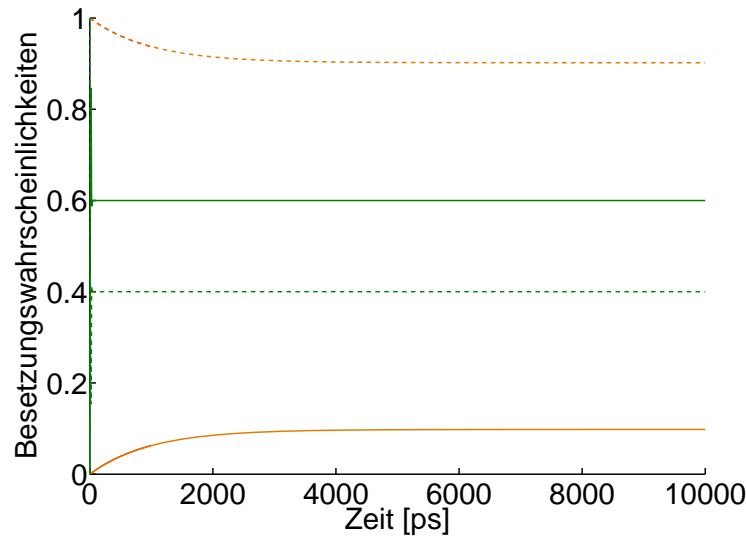


Abbildung 3.6: Besetzungswahrscheinlichkeiten des oberen Niveaus (f_α durchgezogene Linie) und des unteren (f_β gestrichelte Linie) für den Fall unterhalb der Laserschwelle (orange) mit $P = 10^{-4} \text{ ps}^{-1}$ und oberhalb (grün) mit $P = 10^{-1} \text{ ps}^{-1}$ der Laserschwelle (Parametersatz 1).

stand ist weit von einer Besetzungsinversion entfernt und in diesem Fall reicht der Anteil der spontanen Emission nicht dafür aus, dass Laserlicht ausgesandt wird. Wie in Abb. 3.7 (links) zu erkennen ist, liegt der Photonenerwartungswert weit unter 1. Oberhalb der Schwelle ist $f_\alpha \approx 0,6$ und somit höher als $f_\beta \approx 0,4$; das System ist invertiert und es ist durch stimulierte Emission eine Photonenzahl von ca. 20 zu erwarten (s. Abb. 3.7 rechts, beachtet werden muss wieder die Skalierung mit β). Der Fall unterhalb der Laserschwelle weist einen langsameren Zeitverlauf auf als der oberhalb, welches durch die Abwesenheit von stimulierter Emission zu begründen ist.

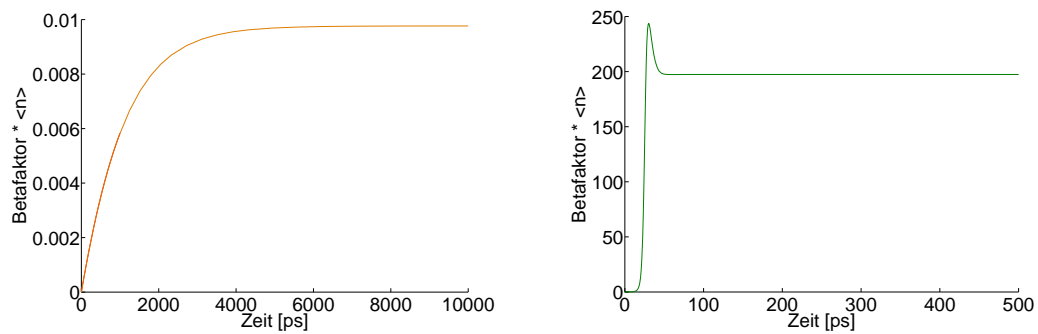


Abbildung 3.7: Mittlere Photonenzahl unterhalb der Laserschwelle (links) mit $P = 10^{-4} \text{ ps}^{-1}$ und oberhalb der Laserschwelle (rechts) mit $P = 10^{-1} \text{ ps}^{-1}$ (Parametersatz 1).

3.2 Vergleich der intensiven und extensiven Ratengleichungen

In Kapitel 2.4.5 und 2.4.6 hatten wir zwei Varianten des Ratengleichungsmodells studiert, die sich in ihrer Art die Besetzungswahrscheinlichkeiten zu beschreiben unterscheiden. Die intensiven Ratengleichungen liefern f_α , also die Besetzungswahrscheinlichkeit pro Atom, und die extensiven Ratengleichungen geben Information über die mittlere Anzahl der angeregten Emitter $\langle N \rangle$, also über den Zustand des Gesamtsystems.

In Abb. 3.8 wird nun ein Vergleich der intensiven Ratengleichungen (2.60),(2.61) (blaue Kurven) zu den extensiven Ratengleichungen (2.62),(2.63) (rote Kurven) vorgenommen. Dafür werden zunächst die Kennlinien in einem Diagramm mit $\beta \langle n \rangle$ über \tilde{P} betrachtet. Die Parameter sind $\tau_{sp} = 1ns$, $\kappa = \frac{1}{500ps}$ und $N_A = \frac{7}{\beta}$ (Parametersatz 2) wieder für fünf verschiedene β -Faktoren $1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ und 10^{-5} von oben nach unten.

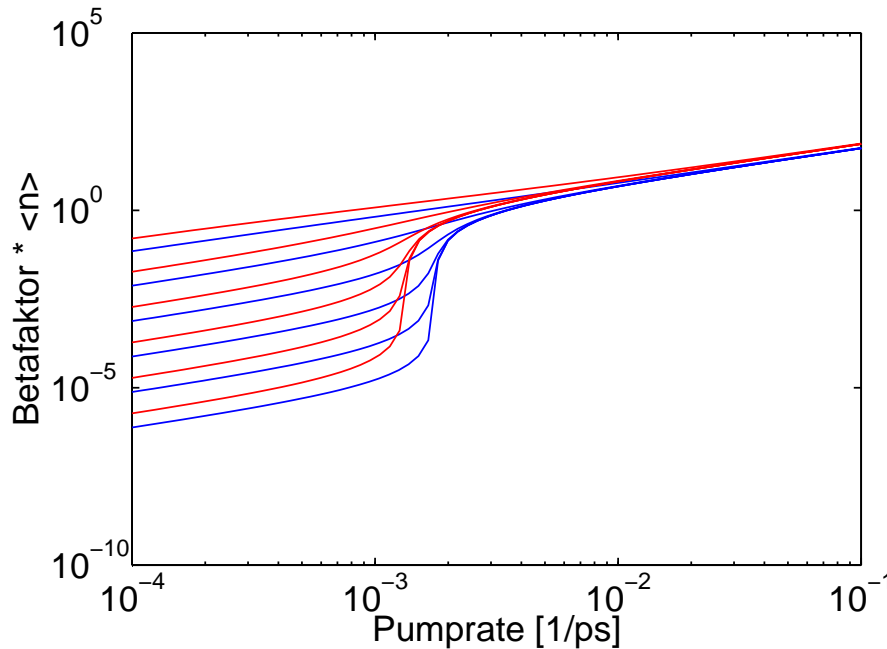


Abbildung 3.8: Kennlinien für die intensiven (blau) und extensiven (rot) Ratengleichungen mit den Parametern $\tau_{sp} = 1ns$, $\kappa = \frac{1}{500ps}$, $\beta = 1$ bis 10^{-1} , $N_A = \frac{7}{\beta}$, oben beginnend mit $\beta = 1$ bis 10^{-5} . Die Pumprate ist hier \tilde{P} .

Zu erkennen ist, dass die Distanzen zwischen den Kurven beider Gleichungen den selben Abstand aufweisen, nur liegen die intensiven Ratengleichungs-Kurven insgesamt etwas niedriger in y-Richtung und höher in x-Richtung als die der extensiven. Der Grund dafür ist, dass die intensiven Ratengleichungen durch das Auftauchen der Besetzung des unteren Niveaus zusammen mit der Pumprate zu einem Sättigungseffekt führen. Diese macht sich dadurch bemerkbar, dass der Pumpterm Pf_β

mit der Besetzungswahrscheinlichkeit des unteren Niveaus reguliert wird. Steigt die Inversion, reduziert sich automatisch die Pumprate. Zusätzlich wäre eigentlich eine Abflachung der Kurve mit Sättigungseffekt im Bereich von hohen Pumpraten zu erwarten, was hier aber nicht zum Einsatz kommt, da sich bei dem gewählten Parametersatz selbst bei hohen Pumpraten der Wert von f_β nicht unter 0,4 entwickelt. Diese Pumpsättigung ist in den extensiven Ratengleichungen nicht gegeben, da der Pumpterm $\hat{P} = PN_A$ durch die in Kapitel 2.4.6 vorgenommene Näherung keine Regulierung erfährt, sondern konstant bleibt. Die extensiven Ratengleichungen erreichen vergleichsweise also einen höheren Erwartungswert für die Photonenzahl und überwinden die Laserschwelle schneller.

In Abb. 3.9 wird dieser Unterschied nochmal in der Zeitentwicklung des Photonenerwartungswertes gezeigt. Abgebildet sind beide Systeme oberhalb der Laserschwelle für den Parametersatz 2 mit $\beta = 10^{-1}$ und $P = 10^{-1} ps^{-1}$. Das System der extensiven Ratengleichungen erreicht schneller seinen stationären Wert und emittiert hier 10 Photonen mehr als das der intensiven Ratengleichungen.

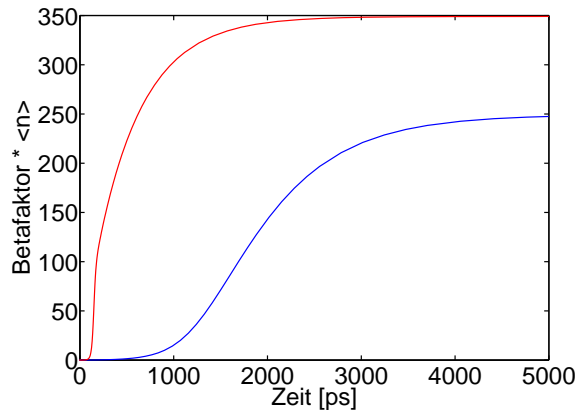


Abbildung 3.9: Mittlere Photonenzahl für die intensiven Ratengleichungen (blau) und für die extensiven (rot) für $\tau_{sp} = 1ns$, $\kappa = \frac{1}{500ps}$, $\beta = 10^{-1}$, $P = 10^{-1} \frac{1}{ps}$, $N = 7$

3.3 Mastergleichung

Zuletzt wird nun die Mastergleichung (2.56) untersucht. Der Vorteil an ihr ist, dass nicht nur die Besetzungswahrscheinlichkeiten und die mittlere Photonenzahl ermittelt werden können, sondern auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der angeregten Emitter, die Photonenstatistik p_n (2.19) und der stationäre Wert der Korrelationsfunktion $g^2(0)$ (2.29).

3.3.1 Unterhalb der Laserschwelle

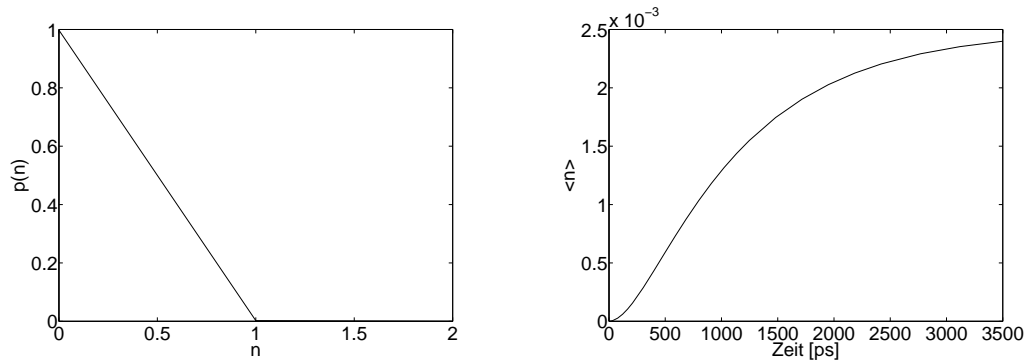


Abbildung 3.10: Links: Das stationäre Ergebnis der Photonenzahlstatistik, aufgetragen ist Wahrscheinlichkeit p_n n Photonen zu haben. Rechts: Mittlere Photonenzahl über der Zeit, beides für den Parametersatz 3.

Der Parametersatz 3: $\tau_{sp} = 1ns$, $\kappa = \frac{1}{250ps}$, $\beta = 1$ und $P = 10^{-5}ps^{-1}$ liefert das in Abb. 3.10 (links) illustrierte stationäre Ergebnis für die Photonenzahlstatistik. Aufgetragen ist der Wahrscheinlichkeitswert p_n gegen die Photonenzahl n . Die statistische Verteilung der Photonen hat ihren Maximalwert bei null. Die Kurve ist boltzmannverteilt (vgl. Kapitel 2.3.2). Im stationären Regime sind $\langle N \rangle = 9 \cdot 10^{-3}$ Atome des Gesamtsystems angeregt und die Korrelationsfunktion ergibt einen Wert von $g^2(0) = 1,7$. Das System befindet sich somit unterhalb der Laserschwelle und emittiert thermisches Licht.

Diese Aussage stimmt auch mit Abb. 3.10 (rechts) überein, in der die zeitliche Entwicklung der mittleren Photonenzahl zu sehen ist. Der stationäre Erwartungswert liegt bei $\langle n \rangle = 2,4 \cdot 10^{-3}$ Photonen, also weit unter 1.

3.3.2 In der Nähe der Laserschwelle

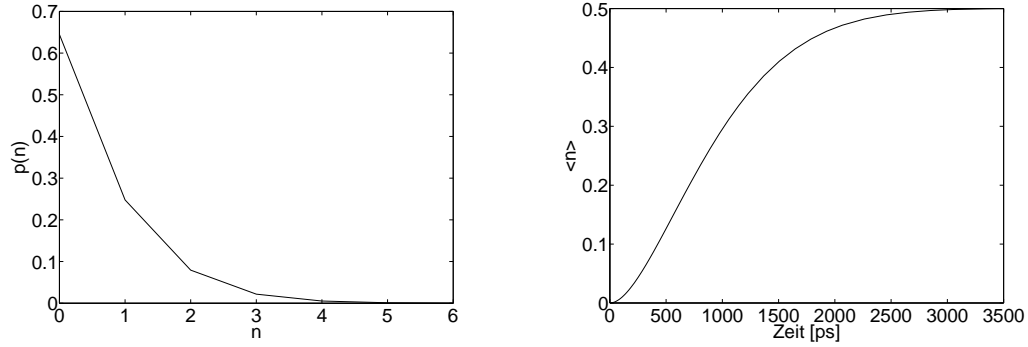


Abbildung 3.11: Links: Das stationäre Ergebnis der Photonenzahlstatistik, aufgetragen ist Wahrscheinlichkeit p_n n Photonen zu haben. Rechts: Mittlere Photonenzahl über der Zeit, beides für den Parametersatz 3 mit $P = 2 \cdot 10^{-3}$.

Abb. 3.11 (links) zeigt die Photonenzahlstatistik im stationären Regime für den Parametersatz 3 diesmal allerdings mit $P = 2 \cdot 10^{-3} \text{ ps}^{-1}$. Es liegt auch hier in guter Näherung eine Bose-Einstein-Verteilung vor, der Maximalwert der Kurve liegt bei Null Photonen. Es gibt im stationären Zustand $\langle N \rangle = 1,4$ angeregte Emitter. Der stationäre Wert der Korrelationsfunktion beträgt hier $g^2(0) = 1,5$, was darauf hinweist, dass das Licht nicht mehr thermisch ist, sondern sich auf der Schwelle zu kohärenter Strahlung befindet (vgl. Kapitel 2.3.3). Abb 3.11 (rechts) zeigt, dass der stationäre Wert der mittleren Photonenzahl bei $\langle n \rangle = \frac{1}{2}$ liegt. Es wird oft als Kriterium für die Laserschwelle verwendet, dass unterhalb (oberhalb) der Schwelle $\langle n \rangle \ll 1$ ($\langle n \rangle > 1$) gilt. Der Übergangsbereich ist fließend und genau in diesem Übergangsbereich befindet sich dieses zweite Beispiel.

3.3.3 Oberhalb der Laserschwelle

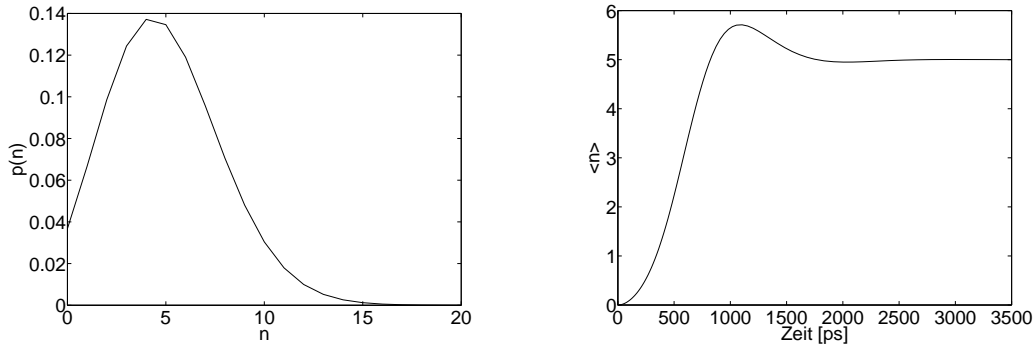


Abbildung 3.12: Links: Das stationäre Ergebnis der Photonenzahlstatistik, aufgetragen ist Wahrscheinlichkeit p_n n Photonen zu haben. Rechts: Mittlere Photonenzahl über der Zeit, beides für den Parametersatz 3 mit $P = 2 * 10^{-2}$.

Nun wird die Pumprate des Parametersatzes 3 nochmals erhöht auf einen Wert von

$P = 2 \cdot 10^{-2}$ mit der Intention das System damit über die Laserschwelle gebracht zu haben. Tatsächlich ist dieses Mal die Photonenstatistik anders verteilt (siehe Abb. 3.12 links) und zwar ergibt sich eine Poissonverteilung. Der stationäre Erwartungswert der angeregten Emitter beträgt $\langle N \rangle = 3,9$ und die Korrelationsfunktion ergibt hier $g^2(0) = 1,1$. In Abb. 3.12 (rechts) lässt sich im stationären Regime ein Photonenwartungswert von $\langle n \rangle = 5$ ablesen.

Zu bemerken ist, dass die Photonenzahl des Kurvenmaximums der Photonenstatistik hier (und eben so bei den anderen beiden diskutierten Fällen) nicht denselben Wert wie die mittlere Photonenzahl hat. Aus $\langle n \rangle = \sum_n np_n$ folgt, dass die Annäherung des Photonenwartungswertes an den Wahrscheinlichkeitswert erst für eine viel größere Anzahl von Photonen auftritt (Gesetz der großen Zahlen).

Alle Ergebnisse des zuletzt gewählten Parametersatzes weisen auf die Emission kohärenten Lichtes für ein Systemzustand oberhalb der Laserschwelle hin.

3.4 Vergleich von Raten- und Mastergleichung

Abschließend überprüfen wir nun noch, wie in Kapitel 2.4.6 versprochen, die Güte der Näherung in den Ratengleichungen, also das Faktorisieren der Zustände ($\langle nN \rangle = \langle n \rangle \langle N \rangle$), indem wir die extensiven Ratengleichungen (2.62), (2.63) mit der Mastergleichung (2.56) vergleichen.

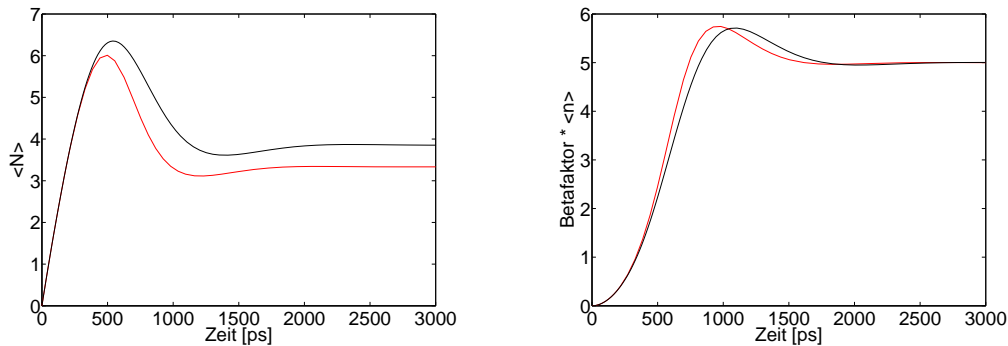


Abbildung 3.13: Links: Erwartungswert der Zahl der angeregten Atome für die extensiven Ratengleichungen (rot) und die Mastergleichung (schwarz) und rechts: Mittlere Photonenzahl für die extensiven Ratengleichungen (rot) und die Mastergleichung (schwarz), beides für den Parametersatz 4.

Abb. 3.12 (links) zeigt die mittlere Zahl der angeregten Emitter für die extensiven Ratengleichungen (rot) und die Mastergleichung (schwarz). Die Parameter sind $\tau_{sp} = 1ns$, $\kappa = \frac{1}{500ps}$, $\beta = 10^{-1}$, $P = \tilde{P} = 10^{-1} \frac{1}{ps}$ (Parametersatz 4). Die Kurven haben während des Aufbaus der Inversion die gleiche Steigung, das heißt beide Systeme werden gleich schnell invertiert, allerdings weist die Mastergleichung einen höheren stationären Erwartungswert auf als die Ratengleichung.

Wird zusätzlich Abb. 3.13 (rechts), der zeitliche Verlauf der mittleren Photonenzahl ebenfalls für den Parametersatz 4, betrachtet, lässt sich die Aussage treffen, dass das

durch die Ratengleichungen beschriebene System ca. „ein halbes angeregtes Atom“ weniger benötigt, um gleiche Leistung zu liefern, denn der stationäre photonische Erwartungswert ist für beide Gleichungen derselbe.

Durch die in der Mastergleichung einbezogene Korrelation zwischen Photonen und Atomen, liegt dort eine größere Dämpfung vor als in dem Ratengleichungssystem. Dies führt zu dem bereits erwähnten Phänomen, dass der Erwartungswert der angeregten Atome für dieselbige Effizienz in (2.56) höher liegt als in (2.62).

Die Näherung in den Ratengleichungen ist somit offensichtlich. Die Abweichung in Abb. 3.12 ist logisch erklärbar und außerdem verändert sich das prinzipielle Systemverhalten durch die Näherung nicht. Ihre Gültigkeit erhält die Faktorisierung aufgrund dessen, dass für die mittlere Photonenzahl fast keine Abweichung der Kurven zu erkennen ist.

3.5 Fazit der numerischen Ermittlungen

Wir haben die vorgestellten Methoden numerisch verglichen und folgende Feststellungen gemacht:

Der Systemzustand hängt auf extrem sensible Weise von der Wahl einzelnen Raten ab. Prinzipiell beachtet werden muss, dass die Wahl einer großen spontanen Emissionsrate (z.B. $\tau_{sp} = \frac{1}{100} ps^{-1}$ anstelle von $\frac{1}{1000} ps^{-1}$) dadurch ausgeglichen werden kann, dass die Kavitätsverluste um die gleiche Größenordnung erhöht werden (vgl.(2.59)). Um Besetzungsinversion zu erzielen, wird je nachdem, ob mehrere oder nur ein Emitter zum System gehören, eine Pumprate von 10^{-5} bis $1 ps^{-1}$ benötigt (vgl.(2.59), (2.58)). Dies wird über die Skalierung von N_A mit dem Betafaktor realisiert $\rightarrow \frac{N_A}{\beta}$.

Die Ergebnisse für die Kennlinien der Laserschwellen lassen sich allgemein dazu zusammen fassen, dass die Schwelle mit fallendem β -Faktor steigt und sie insgesamt bei einem System mit Absorption des unteren Niveaus größer als bei einem System ohne Absorption sind.

Obwohl die Ergebnisse der Ratengleichungen sich relativ gut mit denen der Mastergleichung decken, distanziert sich die Mastergleichung doch enorm von den Ratengleichungen in Hinblick auf die Ergebnisfülle und den dadurch tieferen Einblick in das System. Insbesondere ist die Photonenstatistik ein zusätzliches Ergebnis und die Korrelationsfunktion bestätigt die theoretischen Vorhersagen aus Kapitel 2.3.3, denn die stationären Werte der Korrelationsfunktion liegen bei kohärentem Licht in der Nähe von 1 und bei thermischen Licht in der Nähe von 2.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Licht-Materie-Wechselwirkung anhand eines bzw. mehrerer Zwei-Niveau-Systeme im Rahmen des Jaynes-Cummings-Modells untersucht. Für die Beschreibung dieses Lasersystems wurden drei verschiedene Modelle zur Beschreibung eines Lasersystems vorgestellt: Die Von-Neumann-Gleichung, die Mastergleichung und die Ratengleichungen. Der Hamiltonoperator des Jaynes-Cummings-Modells beinhaltet den energetischen Zustand der freien Photonen und Elektronen, sowie den Anteil ihrer gegenseitigen Wechselwirkung. Die Dichtematrix enthält alle quantenstatistischen Informationen des Systemzustandes, insbesondere enthalten ihre Nichtdiagonaleinträge die Wechselwirkungen. Aus der Dichtematrix und dem Hamiltonoperator ergibt sich die Bewegungsgleichung für das von uns betrachtete Lasersystem, die Von-Neumann-Gleichung. Dissipation des Systems wurde jeweils durch Ankopplung eines Reservoirs modelliert und äußert sich in Born-Markov-Näherung in Form von Lindblad-Termen für jedes angekoppelte Reservoir. In der Von-Neumann-Gleichung beschreiben diese explizit den Verlust durch spontane Emission in nichtlasende Moden, die Kavitätsverluste und das Pumpen, welches als ein umgekehrter Verlust betrachtet wurde.

Für die Herleitung der Mastergleichung wurden die Nichtdiagonaleinträge der Bewegungsgleichung adiabatisch eliminiert. Ergebnis ist ein geschlossenes Gleichungssystem für die Diagonalelemente, welche den Wahrscheinlichkeiten jeweiliger Systemzustände entsprechen. Die Mastergleichung erlaubt trotz der genannten Näherung die Berechnung von Korrelationsgrößen, die über die mittlere Photonenzahl und über die mittlere Anzahl der angeregten Emitter hinausgehen. Wir haben besonders Augenmerk auf die Photonenkorrelation zweiter Ordnung gerichtet, die Rückschlüsse darüber gibt, ob das gewählte System thermisches oder kohärentes Licht emittiert. Diese Fragestellung hat zentrale Bedeutung für die Charakterisierung von aktuellen Halbleiterlasersysteme, wo über die Photonenkorrelation Rückschlüsse auf das Verhalten an der Laserschwelle gezogen werden können [UGA⁺07, SHR⁺06].

Ausgehend von der Mastergleichung wurde, um die Ratengleichungen zu erhalten, eine weitere Näherung durch die Vernachlässigung der Korrelationen zwischen Atom und Photonen durchgeführt, was auf ein geschlossenes Gleichungssystem für die mittlere Anzahl der angeregten Emitter und für die mittlere Photonenzahl in der Kavität führte. Unsere Auswertung beschränkte sich hierbei auf den zeitlichen Verlauf der mittleren Photonenzahl und der mittleren Anzahl der angeregten Emitter

und somit der Besetzungsinversion. Mittels der stationären Photonenerwartungswerte wurden Kennlinien erstellt, aus denen die verschiedenen Laserswellen abgelesen werden konnten. Außerdem wurden die Unterschiede eines Systems mit und ohne Absorption durch das untere Niveau diskutiert. Dies ist auch wichtig für Halbleiterlaser, wo Reabsorption eine Rolle spielt und daher atomare Modelle ohne Reabsorption keine guten Ergebnisse liefern [GWLJ07].

Obwohl in den Ratengleichungen durch die vorgenommene Faktorisierung des photonischen und elektronischen Systems keine Photonenstatistik mehr berechnet werden kann, sind sie der Mastergleichung in Hinblick auf den Rechenaufwand, insbesondere für kleine β -Faktoren, vorzuziehen. Im direkten Vergleich von Master- und Ratengleichungen haben sich keine relevanten Abweichungen ergeben, was zeigt, dass die Faktorisierung in dem untersuchten Fall einen vernachlässigbaren Einfluss auf die stationären Ergebnisse hat. Außerdem haben wir durch die vergleichsweise einfache Form der Ratengleichungen einen analytischen Ausdruck für die Relaxationsoszillationen für den Fall kleiner Amplituden herleiten können und gezeigt, dass sich diese durch einen gedämpften harmonischen Oszillator beschreiben lassen. Die Frequenz der Oszillation hängt dabei von allen Zeitkonstanten des Systems (spontane Emissionszeit, Kavitätslebensdauer und Pumprate), sowie von der Anzahl der Emitter ab.

Ein wichtiger Punkt dieser Arbeit liegt in den Korrelationen zwischen Atom und Photonen, die wir nur durch die Mastergleichung erhalten. Insgesamt liefert sie mehr Informationen über den Systemzustand, die wichtig für die vollständige Interpretation sind und gebraucht werden, um für den experimentellen Bereich der Physik Ergebnisse liefern zu können.

In weiterführenden Untersuchungen ließe sich zunächst die Mastergleichung für größere Pumpraten als $2 \cdot 10^{-2} ps^{-1}$ berechnen, um die Kennlinien der Master- und Ratengleichungen zu vergleichen. Dies war nicht möglich, da für die Rechnerkapazität, die im Rahmen meiner Bachelorarbeit gegeben war, eine Grenze bestand, denn für größere Parameter müsste auch eine größere Matrix für den statistischen Operator gewählt werden.

Darüber hinaus wäre noch die numerische Berechnung im Dichtematrixformalismus für einen Ein-Atom-Emitter [Gol08] sowie für mehrere Emitter von Interesse, um beispielsweise Rabioszillationen zu beobachten, aber auch um die einzelnen dissipativen Effekte näher untersuchen zu können.

Die hier behandelten Modelle beziehen sich alle auf ein System, was nur als Zwei-Niveau-Lasersystem betrachtet werden konnte, weil ausgehend von einem Vier-Niveau-System die restlichen Übergänge als vernachlässigbar schnell angenommen wurden. In Hinblick auf die in der Einleitung erwähnten Quantenpunkte könnte ein Quantenpunkt-Laser mit vier Niveaus betrachtet werden, welches einem realistischen Lasersystem näher kommen würde.

Danksagung

Zu aller erst bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Frank Jahnke für die Themenstellung dieser Arbeit, seine Bemühungen das benötigte Fachwissen zu übermitteln und für seine stetige und freundliche Betreuung.

Des weiteren richtet sich mein Dank an Herrn Prof. Dr. Czycholl, der durch seine guten und klaren Vorlesungen meine Begeisterung für die Quantenmechanik geweckt hat.

Für eine angenehme Arbeitsatmosphäre bedanke ich mich bei der gesamten Arbeitsgruppe *Theoretische Halbleiterphysik*. Ganz besonders hervorheben möchte ich Dr. Christopher Gies, der mir bei jeglichen Problemen half und sich bei der inhaltlichen Korrektur dieser Arbeit sehr viel Mühe gegeben hat. Ihm und Michael Lorke danke ich außerdem für ein wunderbares Büroleben mit ständiger Hilfsbereitschaft (und Kaffeeproduktion).

Vielen Dank an Dr. Paul Gartner und Dr. Jan Wiersig für die Beantwortung von spontanen Fragen. Sandra Ritter gilt mein herzlicher Dank für ihre pausenlosen und aufopferungsvollen Bemühungen.

Eine große Bereicherung während der Anfertigungszeit dieser Arbeit war mein Kollege Elias Goldmann. Zunächst war es eine große Hilfe die anfängliche Anreicherung an neuem Fachwissen zu teilen, darüber hinaus fühlte ich mich durch seine frische, fürsorgliche und fröhliche Art außerordentlich beglückt. Zu einer vernünftigen und artgerechten Arbeitsmoral trugen ebenfalls Joscha Schmiedt, Lennart Hilbert, Marco Linke (Mirco Lanke), Moritz Krieger und Chris Mitchell bei.

Für das Überstehen meiner bisherigen Studienzeit und die tägliche Aufmunterung bedanke ich mich bei Sebastian Matberg, Henning Klaer, Antje Buss und insbesondere bei Konstantin Finke meinem ständigen Begleiter und Unterstützer.

Zuletzt danke ich noch Marianne Brinkhoff für die Überprüfung der Rechtschreibung dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

- [AGS66] F.T. Arecchi, E. Gatti, and A. Sona. Time distribution of photons from coherent and Gaussian sources. *Physics Letters*, 20(1):27–29, 1966.
- [Car99] H. Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics*. Springer, 1999.
- [GBM⁺93] C. Ginzler, H.J. Briegel, U. Martini, B.G. Englert, and A. Schenzle. Quantum optical master equations: The one-atom laser. *Physical Review A*, 48(1):732–738, 1993.
- [Gie08] Christopher Gies. *Theory for Light-Matter Interaction in Semiconductor Quantum Dots*. PhD thesis, Universität Bremen, 2008.
- [Gol08] E. Goldmann. Lasermodele im Jaynes-Cummings-Modell. *Bachelorarbeit*, 1(1), 2008.
- [GWLJ07] C. Gies, J. Wiersig, M. Lorke, and F. Jahnke. Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers. *Physical Review A*, 75(1):13803, 2007.
- [JC63] E.T. Jaynes and F.W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 51(1):89–109, 1963.
- [Lou03] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, 2003.
- [ME88] P.W. Milonni and J.H. Eberly. *Lasers*. Wiley New York, 1988.
- [MS92] Y. Mu and C.M. Savage. One-atom lasers. *Physical Review A*, 46(9):5944–5954, 1992.
- [MS99] P. Meystre and M. Sargent. *Elements of Quantum Optics*. Springer, 1999.
- [Mü01] Max-Planck-Gesellschaft München. Atomare Struktur von Quantenpunkten entschlüsselt. *PRI C 7 / 2001 (25)*, 2001.
- [RC94] P.R. Rice and H.J. Carmichael. Photon statistics of a cavity-QED laser: A comment on the laser-phase-transition analogy. *Physical Review A*, 50(5):4318–4329, 1994.

- [SHR⁺06] S. Strauf, K. Hennessy, MT Rakher, Y.S. Choi, A. Badolato, LC Andreani, EL Hu, PM Petroff, and D. Bouwmeester. Self-Tuned Quantum Dot Gain in Photonic Crystal Lasers. *Physical Review Letters*, 96(12):127404, 2006.
- [UGA⁺07] S.M. Ulrich, C. Gies, S. Ates, J. Wiersig, S. Reitzenstein, C. Hofmann, A. Löffler, A. Forchel, F. Jahnke, and P. Michler. Photon Statistics of Semiconductor Microcavity Lasers. *Physical Review Letters*, 98(4):43906, 2007.
- [YB89] H. Yokoyama and S.D. Brorson. Rate equation analysis of microcavity lasers. *Journal of Applied Physics*, 66:4801, 1989.