Maximilian Roth

Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sei $\mathcal{L}_0$ eine Teilmenge der Sprache $\mathcal{L}$. Jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ kann in kanonischer Weise als $\mathcal{L}_0$-Struktur $\mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ betrachtet werden. Zeige durch Induktion über den Aufbau der $\mathcal{L}_0$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$, dass für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0 \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

<u>ZZ:</u> $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \upharpoonright \mathscr{L}_0 \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$

<u>Beweis:</u>
Zunächst nennen wir $\mathfrak{A} \upharpoonright \mathscr{L}_0$ im Folgenden $\mathfrak{B}$ Wir machen eine Induktion über den Formelaufbau (wie üblich zeigen wir nur den Induktionsschritt).

- Terme:
  - $t = c$
    $t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] = c = t^{\mathfrak{B}}[a_1, \ldots, a_n]$
  - $t = x_i$
    $t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] = x_i = t^{\mathfrak{B}}[a_1, \ldots, a_n]$
  - $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ $t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}) \overset{I.V.}{=} f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{B}}) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{B}})$

- atomare Formeln:

  - $\varphi = t_1 \doteq t_2$
    $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n] \doteq t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]$
    $\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}[a_1, \dots, a_n] \doteq t_1^{\mathfrak{B}}[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$

  - $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$
    $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}, \dots, t_n^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}}$
    $\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{B}}, \dots, t_n^{\mathfrak{B}}) \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{B}}, \dots, t_n^{\mathfrak{B}}) \in R^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$

- quantorenfreie Formeln:

  - $\varphi = \neg\psi$
    $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \nvDash \psi[a_1, \dots, a_n] \overset{I.V.}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \nvDash \psi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$
  - $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$
    $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$
    $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi_1[a_1, \dots, a_n]$ oder $\mathfrak{A} \vDash \psi_2[a_1, \dots, a_n]$
    $\overset{I.V.}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \vDash \psi_1[a_1, \dots, a_n]$ oder $\mathfrak{B} \vDash \psi_2[a_1, \dots, a_n]$
    $\Leftrightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$

- Formeln mit Quantoren:

  - $\varphi = \exists\psi$
    $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$
    $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi[a_1, \dots, a_n, a]$
    $\overset{I.V.}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \vDash \psi[a_1, \dots, a_n, a]$
    $\mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n]$

Aufgabe 2 (6 Punkte). Forme folgende Formeln in pränexe Normalform um:

(a) $\forall x \forall y \Big(\neg(x \doteq y) \longrightarrow \exists z \big(\neg(z \doteq x) \wedge \neg(z \doteq y) \big) \Big)$.

(b) $\forall x \forall y \Bigg(\neg(x \doteq y) \longrightarrow \forall z \exists u \Big(\big(\neg(z \doteq x) \wedge \neg(z \doteq y) \big) \longrightarrow (z \doteq u) \Big) \Bigg)$.

(c) $\Bigg((g(x,y,z) \doteq 1) \longleftrightarrow \Big(\big((z \doteq 0) \wedge (f(x,y) \doteq 1) \big) \vee \exists w \big((w < x+y+1) \wedge \big((x \doteq y+w) \vee (y \doteq x+w) \big) \big) \Big) \Bigg)$

- a)
  $\forall x \forall y (\neg x \doteq y \rightarrow \exists z (\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y))$
  $\sim \forall x \forall y (x \doteq y \vee \exists z (\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y))$
  $\sim \forall x \forall y \exists z (x \doteq y \vee (\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y))$

- b)
  $\forall x \forall y (\neg x \doteq y \rightarrow \forall z \exists u ((\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y) \rightarrow z \doteq u))$
  $\sim \forall x \forall y (x \doteq y \vee \forall z \exists u ((\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y) \rightarrow z \doteq u))$
  $\sim \forall x \forall y \forall z \exists u (x \doteq y \vee ((\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y) \rightarrow z \doteq u))$

- c)
  $(gxyz \doteq 1 \leftrightarrow ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))))$

  $\sim ((gxyz \doteq 1 \rightarrow ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w)))) \wedge (((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \rightarrow gxyz \doteq 1))$

  $\sim ((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w)))) \wedge (\neg((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \vee gxyz \doteq 1))$

  $\sim \exists w ((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w)))) \wedge (\neg((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \vee gxyz \doteq 1))$

  $\sim \exists w ((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w)))) \wedge (\neg \exists w ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \vee gxyz \doteq 1))$

  $\sim \exists w ((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w)))) \wedge (\forall w \neg ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \vee gxyz \doteq 1))$

$\sim \exists w \forall v((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x + y + 1 \wedge (x \doteq y + w \vee y \doteq x+w)))) \wedge (\neg((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (v < x+y+1 \wedge (x \doteq y+v \vee y \doteq x+v))) \vee gxyz \doteq 1))$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Eine Unterstruktur $\mathcal{A}$ der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ heißt *elementar*, bezeichnet mit $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, falls für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A folgende Implikation gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ aus $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ folgt.

(b) Sei nun T eine Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass es für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ eine quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ gibt, so dass

$$T \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(\varphi[x_1, \ldots, x_n] \longleftrightarrow \psi[x_1, \ldots, x_n] \Big).$$

.

Zeige, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ folgt, falls beide Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Modelle von T sind.

- a)
  <u>ZZ:</u> $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$
  <u>Bew:</u>

  Definition 2.14. Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent*, wir schreiben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, falls sie dieselben Aussagen erfüllen. Dies bedeutet, dass für jede Aussage χ,

  $$\text{falls } \mathcal{A} \models \chi, \text{ dann } \mathcal{B} \models \chi.$$

  Da die $\mathscr{L}$-Aussagen eine Teilmenge der $\mathscr{L}$-Formeln ist folgt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

- b)
  <u>ZZ:</u> Sei $\mathfrak{A} \vDash T, \mathfrak{B} \vDash T, \mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$ dann folgt $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$
  <u>Beweis:</u>
  Für alle $\mathscr{L}$-Formeln φ und alle $a_i \in A$ soll also gelten:
  $\mathfrak{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_i, \ldots, a_n]$

  Mit T folgt:
  $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \vDash \psi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \psi[a_i, \ldots, a_n]$

  Aus Blatt 3 Aufgabe 4 b) folgt obiges mit quantorenfreiem ψ und $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$

  $\Rightarrow \mathfrak{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow \mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und $c_1, \ldots, c_n$ neue Konstantenzeichen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ sich zu einer Struktur in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ erweitern läßt.

(b) Sind alle solche Erweiterungen isomorph als $\mathcal{L}'$-Strukturen?

(c) Zeige, dass die $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann allgemeingültig ist, wenn die $\mathcal{L}'$-Aussage $\varphi[c_1, \ldots, c_n]$ allgemeingültig ist.

- a)
  Sei $a \in A$, dann gilt mit $c_i^{\mathfrak{A}'} = a, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$,
  dass $\mathfrak{A}' = (A, \mathscr{L}') \quad \mathscr{L}'$-Struktur ist.

- b)
  Nein, wir beweisen mit Gegenbeispiel.
  Sei $\mathfrak{A}' = (A, \mathscr{L}')$ mit $c_i^{\mathfrak{A}'} = a, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, a \in A$
  und Sei $\mathfrak{A}'' = (A, \mathscr{L}')$ mit $c_i^{\mathfrak{A}''} = a_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \in A$ und $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$
  Es gilt: $\mathfrak{A}' \vdash c_i \doteq c_j$, aber $\mathfrak{A}'' \nvdash c_i \doteq c_j$ für $i \neq j$
  $\Rightarrow \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind nicht isomorph.

- c)
  <u>ZZ:</u> $\vdash \varphi[x_1, \ldots, x_n] \Rightarrow \vdash \varphi[c_1, \ldots, c_n]$

  <u>Beweis:</u>
  Wenn $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ allgemeingültig ist, dann ist die Auswertung von den c_i egal, da φ für jeden Wert wahr ist.
  $\Rightarrow \vdash \varphi[c_1, \ldots, c_n]$

  Wenn $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ nicht allgemeingültig ist, dann gibt es $x_1, \ldots, x_n$ für die φ falsch wird.
  Setzen wir nun $c_i^{\mathfrak{A}'} = x_i$, dann ist $\varphi[c_1, \ldots, c_n]$ ebenso falsch und kann damit nicht allgemeingültig sein.