Maximilian Roth

Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{0, f\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f und einem Konstantenzeichen 0 besteht. Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$ mit folgenden Interpretationen:

$$0^{\mathcal{N}} = 0 \text{ und } f^{\mathcal{N}}(x) := x + 1.$$

(a) Zeige, dass es für jedes $n \neq 0$ in $\mathbb{N}$ ein k gibt, so dass $n = f^k(0) := \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{k}(0)$.

(b) Schreibe eine $\mathcal{L}$-Aussage, welche in $\mathcal{N}$ gilt und besagt, dass jedes $0 \neq n \in \mathbb{N}$ im Bild von $f^{\mathcal{N}}$ liegt.

(c) Zeige, dass es eine elementar Erweiterung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{N}$ und ein Element m in M derart gibt, dass $m \neq f^k(0)$ für alle k in $\mathbb{N}$.

(d) Beschreibe drei paarweise nicht isomorphe abzählbare Modelle des vollständigen Diagramms $\mathrm{Diag}(\mathcal{N})$ von $\mathcal{N}$.

(e) Wie sehen abzählbare Modelle im Allgemeinen aus (eine informelle Beschreibung genügt)? Wieviele gibt es, bis auf Isomorphie?

Im folgenden steht f immer für $f^{\mathcal{N}}$

- a)
  Wir zeigen mit Induktion über n:

  - IA: n = 1
    $f^1(0) = 0 + 1 = 1$

  - IV: Gelte die Beh. für ein n mit $f^k(0) = n$

  - IS: $n \rightarrow n + 1$:
    $n + 1 = f^1(n) \overset{IV}{=} f^1(f^k(0)) = f^{k+1}(0)$

- b)
  $\forall n(\neg n \doteq 0 \to \exists x(f(x) \doteq n))$

- c)
  Sei $\varphi_k = m \doteq f^k(0), k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$
  Dann gilt mit $m \neq f^k(0), \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ auch $\neg\varphi_k, \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

  Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{M}$ existiert und dann, dass es elementare Erweiterung ist:

  - $\mathcal{M}$ existiert:
    Wir zeigen, dass $\mathcal{N}$ und $\neg\varphi_k, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ sich nicht wiedersprechen,
    also dass $T = Diag(\mathcal{N}) \cup \{\neg\varphi_k | k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ konsistent ist.

  - $\mathcal{M}$ ist elementare Erweiterung von $\mathcal{N}$

- d)

- e)

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen $<$. Wir betrachten die beiden $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <)$ und $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ mit den natürlichen Ordnungen. Sei T die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen, welche in $\mathcal{Z}$ gelten.
Zeige, dass die Theorie $\mathrm{Diag}^{at}(\mathcal{R}) \cup T$ konsistent ist (siehe Aufgabe 4 (b), Blatt 5). Insbesondere lässt sich die *dichte* Ordnung $\mathcal{R}$ in eine *diskrete* Ordnung einbetten.

Wir zeigen die Konsistenz für eine endliche Teilmenge $\Sigma \subseteq_{endlich} Diag^{at}(\mathcal{R})$, um danach den Kompaktheitssatz anzuwenden.

Nun überlegen wir uns, welche Aussagen in Σ sein können: Alle die, die etwas darüber aussagen, dass ein Element strikt kleiner, als ein anderes ist.

Da Σ endlich ist können auch nur endlich viele Elemente aus $\mathbb{R}, \{r_1, \ldots, r_n\}$ darin vorkommen.

Es gilt weiter, wenn O.B.d.A. gilt: $r_1 < \cdots < r_n$, dann gilt auch:

$$\underline{\bigwedge_{i=1}^{n-1} r_i < r_{i+1}} \vdash A \in \Sigma$$

(mit dem wissen, dass $<$ die natürliche Ordnung ist und damit ihren Regeln unterliegt)

Um obige Formel ausdrücken zu können benötigen wir eine Sprache mit entsprechenden Konstantenzeichen: $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{d_{r_1}, \ldots, d_{r_n}\}$

Sei also $\psi = \bigwedge_{i=1}^{n-1} r_i < r_{i+1}$, dann gilt $\psi \models \Sigma$

Wenn Z^* eine L^*-Struktur ist mit $d_{r_i}^{Z^*} = i$ ist folgt:

$\Rightarrow Z^* \models \psi$ und $Z^* \models T$
$\Rightarrow Z^* \models \Sigma \cup T$ (und damit konsistent)
$\overset{Kompakth.}{\Rightarrow} Diag^{at}(\mathcal{R}) \cup T$ konsistent

- Man kann eine dichte lineare Ordnung in eine diskrete einbetten
  Z ist diskret mit T, aber elementare Erweiterung von der dichten Ordnung $\mathcal{R}$

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Sei $A \subset \mathbb{N}^k$ eine (primitiv) rekursive Menge. Zeige, dass die Teilmenge $B \subset \mathbb{N}^k$ genau dann (primitiv) rekursiv ist, wenn beide Teilmengen $A \cap B$ und $A \cup B$ (primitiv) rekursiv sind.

Lemma 3.6. *Falls A und B (primitiv) rekursive Teilmengen von $\mathbb{N}^k$ sind, dann sind*

- *$A \cup B$;*
- *$A \cap B$;*
- *$A \setminus B$;*
- *$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)) \in A\}$, für alle (primitiv) rekursive Funktionen $f_1, \ldots, f_k$;*

auch (primitiv) rekursiv.

ZZ: B (prim.) rek. $\Leftrightarrow A, A \cup B, A \cap B$ (prim.) rek.

- "$\Rightarrow$":
  Folgt direkt mit Lemma 3.6
- "$\Leftarrow$":
  Es gilt $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus (A \cap B))$ (siehe Venn-Diagramm)
  Weiter gilt:

Definition 3.4. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}^k$ ist *(primitiv) rekursiv*, falls ihre charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} \chi_A : \quad & \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \\ & (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } (x_1, \ldots, x_k) \in A \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

(primitiv) rekursiv ist.

Und X\Y ist prim. rek., da $\chi_{X \setminus Y} = \chi_X \dot{-} \chi_Y$ prim. rek. ist. (Nach Bsp. 3.2)

Beispiel 3.2. Diese Funktionen sind in PREK:

- $$+: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$
- $$x \dot{-} 1: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0, \text{ falls } x = 0 \\ z, \text{ falls } x = z+1 \end{cases} \end{array}$$
- $$x \dot{-} y: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x, \text{ falls } y = 0 \\ (x \dot{-} z) \dot{-} 1, \text{ falls } y = z+1 \end{cases} \end{array}$$

  Beschränkte Differenz
- $$x \cdot y: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0, \text{ falls } y = 0 \\ x \cdot z + x, \text{ falls } y = z+1 \end{cases} \end{array}$$
- $$!: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 = S(0), \text{ falls } x = 0 \\ x \cdot z! \text{ falls } x = z+1 \end{cases} \end{array}$$