Maximilian Roth

Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen E. Wir betrachten zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ und $E^{\mathcal{B}}$ Äquivalenzrelationen sind. Ferner ist jede Äquivalenzklasse unendlich und es gibt unendlich viele Äquivalenzklassen (in beiden Strukturen). Zeige, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ein nichtleeres Back-&-Forth System haben.

Siehe auch Aufbau Back & Forth am Ende des Dokuments.

Beweis:
Wir sollen zeigen, dass es ein nicht leeres Back and Forth System gibt, also müssen wir uns zuerst eines aussuchen.

Hierfür empfiehlt es sich zuerst mit folgendem S anzufangen:
$S = \{F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \mathscr{L} - Isomorphismus | \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{D} \subset \mathfrak{B},$ wobei $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ endlich erzeugt$\}$ ist.
Mit $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ ist gemeint, dass $\mathfrak{C}$ Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ ist.

Zeigen wir also nun, dass S ein nichtleeres Back and Forth System ist.

- S ist nichtleer
  Sei gegeben: $\mathfrak{C} = (\{c\}, \{E^{\mathfrak{C}}\}), \mathfrak{D} = (\{d\}, \{E^{\mathfrak{D}}\})$

  Dann gilt, dass $F : \{c\} \to \{d\}, c \mapsto d$ Isomorphismus ist
  (Die von {c} und {d} erzeugten Mengen sind wieder {c} bzw. {d} und offensichtlich endlich erzeugt),
  da F klar bijektiv und E in beiden Strukturen Äquivalenzerelartion ist, womit F auch starker $\mathscr{L}$-Hom. ist.
  $\Rightarrow$ S ist nicht leer.

- S ist Back Forth System
  - $\boxed{\text{Back:}}$
    Sei $F \in S$ und $b \in B \backslash Im(F)$

    1. Falls dieses b in Äquivalenzerelation mit einem b' aus dem Bild Im(F) steht.
    Suchen wir ein $a \in A$ für das gilt $(a, F^{-1}(b')) \in E^{\mathfrak{A}}$ und setzen F'(a) = b.

    2. Falls dieses b in keiner Äquivalenzerelation steht darf das dazugehörige a dies auch nicht tun.
    Also suchen wir ein a für das gilt: $(a, a') \notin E^{\mathfrak{A}}, \forall a' \in Dom(F)$ und setzen F'(a) = b.

  - $\boxed{\text{Forth:}}$
    Sei $F \in S$ und $a \in A \backslash Dom(F)$

    1. Falls a in einer Äquivalenzerelation mit einem a' steht.
    Dann suchen wir ein b, sodass gilt $(b, F(a')) \in E^{\mathfrak{B}}$ und setzen F'(a) = b.

    2. Falls a in keiner Äquivalenzerelation steht.
    Dann suchen wir ein b, sodass $(b, b') \notin E^{\mathfrak{B}}, \forall b' \in Im(F)$ und setzen F(a) = b.

  $\Rightarrow$ S ist Back & Forth System.

$\Rightarrow$ S ist nichtleeres Back & Forth System.

Aufgabe 2 (5 Punkte).

(a) Sei $\mathcal{L} = \{P\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Relationszeichen P besteht. Schreibe eine Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, so dass $P^{\mathcal{A}}$ als auch $A \setminus P^{\mathcal{A}}$ unendlich sind.

(b) Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ die Sprache, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Schreibe eine Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, in denen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A mit genau einer Klasse der Größe n für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist.

(c) Für zwei $\mathcal{L}$-Strukturen wie in (b), ist die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein nichtleeres Back-&-Forth System?

Eine Theorie ist eine Menge T von $\mathscr{L}$-Aussagen.
Eine $\mathscr{L}$-Aussage wiederum ist eine Formel ohne freie Variablen, das heißt entweder gibt es keine Individuenvariablen oder sie sind im Wirkungsbereich eines Quantors.

- a)
  $T = A_1 \cup A_2$
  $A_1 = \{\exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_i \doteq x_j \wedge P(x_i, x_j)))| n \in \mathbb{N}\}$
  Also keine zwei Variablen sind gleich und alle n sind in Relation
  $\Rightarrow$ Es gibt min n Elemente in P $\forall n \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Elemente in P

  $A_2 = \{\exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_i \doteq x_j \wedge \neg P(x_i, x_j)))| n \in \mathbb{N}\}$
  Es sind also mindestens n Elemente nicht in P $\forall n \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Elemente, die nicht in P liegen.

  Aus $T = A_1 \cup A_2$ folgt, dass unendlich viele Elemente in P sind und unendlich viele es nicht sind.

- b)
  Zunächst die Aussagen für eine Äquivalenzerelation:
  $A_{reflexif} = \{\forall x(E(x, x))\}$
  $A_{symmetrisch} = \{\forall x \forall y(E(x, y) \rightarrow E(y, x))\}$
  $A_{transitiv} = \{\forall x \forall y \forall z((E(x, y) \wedge E(y, z)) \rightarrow E(x, z))\}$

  Und nun die für die n-elementigen Äquivalenzklassen $\forall n \in \mathbb{N}$:
  $A_n = \{\forall x_1, ..., \forall x_n, \forall a(\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_1 \doteq x_j) \wedge E(x_i, x_j) \wedge (\neg a \doteq x_i) \wedge \neg E(a, x_i))\}$

  Auf deutsch:
  Es gibt n verschiedene Elemente der Form x_i.
  Alle x_i sind in einer Relation miteinander.
  Es gibt ein a, dass von allen x_i verschieden ist.
  a steht mit keinem x_i in Relation.

  Daraus folt in A_i gibt es genau i verschiedene Elemente, die in Relation zu einander stehen keines mehr keines weniger.

  Mit $T = A_{reflexif} \cup A_{symmetrisch} \cup A_{transitiv} \cup A_i, \forall i \in \mathbb{N}$ besitzt T genau die nötigen Eigenschaften.

- c)
  Bei diesem Back & Forth System haben wir ein S gegeben:

S = {partieller Iso. mit endl. erz. Unterstrukturen wie in b)} und sollen zeigen, dass es kein nichtleeres B & F System gibt.

Beweis:
Angenommen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind Strukturen wie in b) beschrieben, also $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T_{b)}$
Und sei F bereits folgendermaßen: F(a) = b, wobei die Äquivalenzklasse von a {a,a'} und die von b {b} ist.

Forth würde nun versuchen ein passendes $b' \in B$ für a' zu finden, sodass die Isomorphie erhalten bleibt, also (u.a.) gilt:
$(a, a') \in E^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (F(a), F(a')) = (b, b') \in E^{\mathfrak{B}}$.
Es gibt aber nur dieses eine b in der Äquivalenzklasse und für eine Isomorphie muss Injektivität gelten.

⇒ Es gibt also kein F', dass auch a' entsprechend abbildet und in S liegt.
⇒ S ist nicht Back & Forth System (S ist trotzdem nichtleer).

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Sei R ein zweistelliges Relationszeichen. Ein *Zufallsgraph* ist ein Graph $\mathcal{G}$, der gesehen als $\{R\}$-Struktur (siehe Aufgabe 4, Blatt 2) die folgende Eigenschaft hat: Für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B der Grundmenge gibt es einen Punkt c, so dass

$$(a, c) \in R^{\mathcal{G}}, \text{ aber } (b, c) \notin R^{\mathcal{G}}$$

für alle a aus A und b aus B.

(a) Gibt es endliche Zufallsgraphen? Wenn ja, beschreibe diese vollständig.

(b) Sei

$$n = \sum_{i=0}^{k} [n]_i \cdot 2^i,$$

die binäre Darstellung von der natürlichen Zahl n, wobei $[n]_i = 0, 1$ für $0 \leq i \leq k$. Sei $\mathcal{A}$ die $\{R\}$-Struktur mit Universum $\mathbb{N}$ und der Interpretation:

$$R^{\mathcal{A}}(n, m) \;\Leftrightarrow\; [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1$$

Zeige, dass $\mathcal{A}$ ein Graph ist. Zeige weiter, dass $\mathcal{A}$ ein Zufallsgraph ist.

(c) Sind je zwei Zufallsgraphen, gesehen als $\{R\}$-Strukturen, elementar äquivalent? (Hinweis: Back-&-Forth.)

- a)
  Annahme: $\mathfrak{G} = (G, \{R^{\mathfrak{G}}\})$ ist endlicher Zufallsgraph.
  Dann müsste mit A = G und B = $\emptyset$ gelten:
  $\exists c : (a, c) \in R^{\mathfrak{G}}$ und $(b, c) \notin R^{\mathfrak{G}}, \forall a \in A, b \in B$
  Da jedoch $c \in A$ gilt folgt (c,c) $\in R^{\mathfrak{G}}$,
  aber es darf keine Schlingen geben (zweielementige Teilmengen waren gefordert).

  $\Rightarrow$ Es gibt keinen endlichen Zufallsgraphen.

- b)

  - <u>ZZ:</u> $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \{R\})$ ist Graph
    <u>Beweis:</u>
    Es muss Symmetrie und Irreflexivität gezeigt werden (Def. Graph)

    * Symmetrie:
      Seien $n, m \in \mathbb{N}$ zu Basis 2 und gelte R(n,m)
      $\Rightarrow R(n, m) \Leftrightarrow [m]_n = 1$ oder $[n]_m = 1 \Leftrightarrow [n]_m$ oder $[m]_n = 1 \Leftrightarrow R(m, n)$

    * Irreflexivität:
      Sei $n \in \mathbb{N} zur Basis 2$.
      Würde hier gelten R(n,n) $\Rightarrow [n]_n = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{m} [n]_i = 1 \cdot 2^n + \sum_{i=0, i \neq n}^{m} [n]_i \cdot 2^i \gneq n$
      Das hieße, dass die binäre Darstellung von n größer ist als n selbst. Widerspruch!

    $\Rightarrow$ A ist Graph

  - <u>ZZ:</u> $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \{R\})$ ist Zufallsgraph
    <u>Beweis:</u>
    Seien $A, B \subset \mathbb{N}$ endlich und disjunkt und sei Ohne Einschränkung $max(A) > max(B)$, sowie $|A| = n$.
    Setze nun $c = 2^{a_1} + \ldots 2^{a_n}, a_i \in A$
    $\Rightarrow [c]_a = 1 \Rightarrow R(c, a), \forall a \in A$
    Also ist c mit allen Elementen aus A verbunden.

    Wir zeigen, dass c mit keinem Element in B verbunden ist:
    $[b]_c = 0$, da wenn $[b]_c = 1$ folgt, dass $b < [b]_c \cdot 2^c = 2^c$ (da $c > b, \forall b \in B$).
    Und $[c]_b = 0, \forall b \in B$, da wenn $[c]_b = 1$ ein $a_i = b$ existieren müsste. Widerspruch zu Disjunktheit von A und B.

    $\Rightarrow \mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \{R\})$ ist Zufallsgraph.

- c)

Aufgabe 4 (6 Punkte).

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ in der Sprache $\mathcal{L}$. Gegeben eine atomare Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A, zeige, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

(b) Zeige nun, dass die obige Äquivalenz auch für jede quantorenfreie Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A gilt. Argumentiere dabei induktiv über den Aufbau von ψ.

(c) Gegeben die Formel $\theta[x_1, \ldots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$, wobei ψ quantorenfrei ist, und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A, zeige nun, dass

$$\mathcal{A} \models \theta[a_1, \ldots a_n] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \theta[a_1, \ldots a_n].$$

Gilt die Rückrichtung?

- a)
  <u>Beweis:</u>
  Weil $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ist folgt, dass die Identitätsabbildung $Id_A : A \to B$ Einbettung ist. Daraus folgt, dass alle Terme, also Konstanten, Individuenvariablen und Funktionen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleich ausgewertet werden.

  Atomare Formeln können entweder aus Relationen R oder der logischen Gleichheit $\doteq$ bestehen. Seien $t_1, ..., t_n$ L-Terme.

  - n-stellige Relation R, also $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$

    Es gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_m]$
    $\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_m], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}[a_1,\ldots,a_m]}) \in R^{\mathfrak{A}}$
    $\overset{Id_A Einbettung}{\Leftrightarrow} (t_1^{\mathfrak{B}}[a_1, \ldots, a_m], \ldots, t_n^{\mathfrak{B}[a_1,\ldots,a_m]}) \in R^{\mathfrak{B}}$
    $\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_m]$

- logische Gleichheit $\doteq$, also $\varphi = t_1 \doteq t_2$

  $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_m]$
  $\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_m] \doteq t_2^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_m]$
  $\Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}[a_1, \ldots, a_m] \doteq t_2^{\mathfrak{B}}[a_1, \ldots, a_m]$

$\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_m]$

Aufbau Back & Forth

Das finden eines nichtleeren Back & Forth Systems S wird dazu genutzt, um zu zeigen, dass zwei Strukturen elementar äquivalent sind.

Korollar 2.20. *Falls ein nicht-leeres Back-&-Forth System $\mathcal{S}$ zwischen den $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ existiert, sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent.*

Das heißt, wenn eine eine partielle elementare Abbildung von der einen in die andere Struktur existiert:

> **Bemerkung 2.19.** Ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist immer eine elementare Abbildung. Wenn eine partielle elementare Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ existiert, dann sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent.
>
> In der Bemerkung 2.17, zeigen wir, dass jede Abbildung aus S eine elementare partielle Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Was wiederum der fall ist, wenn folgendes gilt:

> **Definition 2.18.** Für zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und Teilmengen $\emptyset \neq C \subset A$ und $D \subset B$ ist eine partielle Abbildung $F : C \to D$ *elementar*, falls
>
> $$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \text{ genau dann gilt, wenn } \mathcal{B} \models \varphi[F(c_1), \ldots, F(c_n)],$$
>
> für alle Elemente $c_1, \ldots, c_n$ aus C und jede Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$.

Also suchen wir stets (falls nicht gegeben) eine Kollektion S mit den Eigenschaften:

$S = \{F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \mathscr{L} - Isomorphismus | \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{D} \subset \mathfrak{B},$ wobei $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ endlich erzeugt$\}$ ist.
Mit $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ ist gemeint, dass $\mathfrak{C}$ Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ ist.

Falls dieses S kein nichtleeres Back & Forth System ist, können wir ein weiter eingeschränktes S suchen.
Hier hängt die Einschränkung vom konkreten Fall ab, schaut einfach, wo das Problem für euer erstes S lag.
Es kann natürlich aus sein, dass keins existiert, wenn dies der Fall ist seht ihr das aber in der Regel schnell.

Habt ihr ein S, dann zeigt die nötigen Eigenschaften:

- S ist nichtleer
- S ist Back & Forth System
  - $\boxed{\text{Back:}}$
    Sei $F \in S$, also F bildet von C nach D isomorph ab und gelte $b \in B \backslash Im(F)$. Dann muss für dieses beliebige b gelten, dass ein $a \in A \backslash Dom(F)$ und damit ein F'$existiertmit$:

    F': A$\cup \{a\} \rightarrow B \cup \{b\}$,

    also ein F'(a) = b, welches nur für a anders abbildet und die Isomorphie-Eigenschaften erhält.
    Wenn b also mit x in einer Relation war,
    so muss dies auch für a und $F'^{-1}(x)$ der Fall sein usw.

    Wenn wir zeigen können, dass wir immer ein solches a finden ist Back fertig, falls nicht stimmt S nicht.
  - $\boxed{\text{Forth:}}$
    Ziemlich gleich zu Back

    $F \in S$ und $a \in A \backslash Dom(F)$ beliebig
    Falls wir ein $b \in B \backslash Im(F)$ finden, für das wir F'(a) = b setzen können (wieder ist F' nur bei a zu F unterschiedlich) und dass die Isomorphie behält sind wir mit Forth fertig.

Haben wir beides erfolgreich gezeigt gibt es ein nichtleeres Back & Forth System und die Strukturen sind elementar äquivalent.