Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

`https://www.museumsnacht.ch/`

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorräume besteht aus einem Konstantenzeichen 0, einem binären Funktionszeichen $+$ sowie aus einstelligen Funktionszeichen $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ für die Skalarmultiplikation mit q. Jeder $\mathbb{Q}$-Vektorraum lässt sich als $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$-Struktur betrachten.

(a) Schreibe in der Sprache $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$ eine Theorie T, deren Modelle genau alle $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind. Ist diese Theorie endlich axiomatisierbar?

(b) Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Falls $V \neq 0$, zeige, dass es eine elementare Erweiterung V' von V (als $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$-Struktur) gibt, so dass $\dim_{\mathbb{Q}} V' \geq 2$.

(c) Sei nun $\mathcal{K}$ eine axiomatisierbare Klasse von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen derart, dass jeder Vektorraum V aus $\mathcal{K}$ endlichdimensional ist. Schließe daraus, daß $\mathcal{K}$ nur aus dem trivialen $\mathbb{Q}$-Vektorraum besteht.

- a)
  Für $a, b \in \mathbb{Q}$
  $T =$
  $\{\forall u \forall v \forall w (u + (v + w)) \doteq ((u + v) + w)\} \cup$
  $\{\forall v \forall w ((v + w) \doteq (w + v))\} \cup$
  $\{\forall v (v + 0) \doteq v\} \bigcup \cup$
  $\{\forall v \exists w (v + w) \doteq 0\} \cup$

  Und für alle a,b $\in \mathbb{Q}$
  $\{\forall v \forall w (\lambda_a(v + w) \doteq (\lambda_a(v) + \lambda_a(w)))\} \cup$
  $\{\forall v \lambda_1(v) \doteq v\} \cup$
  $\{\forall v (\lambda_{a+b}(v) \doteq (\lambda_a(v) + \lambda_b(v)))\} \cup$
  $\{\forall v (\lambda_{a\cdot b}(v) \doteq \lambda_a(\lambda_b(v)))\}$

Nein, da dies für alle a,b gelten muss und es damit unendlich viele Aussagen sind.

- b)
  Wir suchen also eine elementare Erweiterung V' in der gilt: $\exists c \exists v$: c und v sind linear unabhängig.
  Formal: $V' \models Diag(V) \cup \{\neg \lambda_q(d_v) \doteq c | q \in \mathbb{Q}\}$
  d_v benötigen wir, um die Formel klar für ein v auszudrücken

  Also erweitern wir unsere Sprache um die $d_v, \forall v \in V \backslash \{0\}$, sowie das c.

  Jetzt nutzen wir den Kompaktheitssatz:
  Seien also $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$
  Wenn wir jetzt c wie folgt interpretieren:
  $c^{V'} \in V \backslash \{\lambda_{q_1}, \ldots, \lambda_{q_n}\}$, dann ist:
  $V' \models Diag(V) \cup \{\neg \lambda_{q_1}(d_v) \doteq c, \ldots, \neg \lambda_{q_n}(d_v) \doteq c\}$ und damit konsistent.

  $\Rightarrow$ Nach Kompaktheitssatz ist damit $Diag(V) \cup \{\neg \lambda_q(d_v) \doteq c | q \in \mathbb{Q}\}$ konsistent.

  Damit existiert ein V' mit den Eigenschaften.

- c)
  Wir nehmen an, dass $\mathcal{K}$ nicht nur aus dem trivialen Vektorraum besteht und führen dies zum Widerspruch.

  Stimmt dies, so existiert ein $\mathbb{Q} - VR$ V mit $dim V \geqslant 1$
  V kann dabei jede beliebige Dimension > 0 haben.
  Wenn T $\mathcal{K}$ axiomatisiert, dann muss T also alle Dimensionen zulassen.

  Sprich: Für beliebige $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ muss gelten:
  $T \cup \{$Es gibt k_i lin. unab. Vektoren $| 1 \leqslant i \leqslant n\}\}$
  $\overset{Kompakth.}{\Rightarrow}$ T lässt beliebige Dimensionen zu.

  Widerspruch zu $\mathcal{K}$ endlichdimensional.
  $\Rightarrow \mathcal{K}$ ist nur der triviale VR.

Aufgabe 2 (8 Punkte).
Sei $\mathcal{L} = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Sprache, welche aus einstelligen Relationszeichen P_i besteht.

(a) Gib eine Theorie T an, in deren Modellen $\mathcal{M}$ die Kollektion $\{P_i^{\mathcal{M}} : i \in \mathbb{N}\}$ aus unendlichen, paarweise disjunkten Mengen besteht.

(b) Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass jedes Modell $\mathcal{M}$ von T eine elementare Erweiterung $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ derart besitzt, dass es unendlich viele Elementen in $N \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^{\mathcal{N}}$ gibt.

(c) Mit Hilfe eines Back-and-Forth-Systems zeige, dass je zwei Modelle, in denen das Komplement von $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^{\mathcal{N}}$ unendlich ist, elementar äquivalent sind.

(d) Schließe daraus, dass T vollständig ist.

- a)
  Unsere Theorie muss enthalten:

  - Jedes $P_i^{\mathcal{M}}$ hat unendlich viele verschiedene Elemente

  - Je zwei P_i, P_j haben kein gleiches Element

  Und als Theorie:
  $T = \{\exists k_1, \dots, k_n (\bigwedge_{i \neq j} \neg k_i \doteq k_j) \wedge P_x(k_i) | n, x \in \mathbb{N}, i, j \leqslant n\}$
  $\cup \{\neg \exists x (P_i(x) \wedge P_j(x)) | i \neq j \in \mathbb{N}\}$

- b)
  Es soll also unendlich viele verschiedene Elemente c geben für die gilt: $\neg P_i(c), \forall i$

  Wir wollen also zeigen, dass folgendes konsistent ist:
  $Diag(\mathcal{M}) \cup \{\neg(c_i \doteq c_j | i \neq j)\} \cup \{\neg P_i(c_j) | i, j \in \mathbb{N}\}$ konsistent ist.

  Dafür müssen wir die Sprache wie folgt um unendlich viele Konstanten erweitern:
  $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{c_1, c_2, \dots\}$
  und nutzen dann den Kompaktheitssatz.

  Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $m_1, \dots, m_n \in P_{n+1}^{\mathcal{M}}$ (geht da unendlich groß)
  Seien nun auch $c_i^{\mathcal{M}} = m_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, dann gilt:

  $\mathcal{M} \models Diag(\mathcal{M}) \cup \{\neg c_i \doteq c_j | i \neq j, i, j \leqslant n\} \cup \{\neg P_i(c_j) | 1 \leqslant i, j \leqslant n, \}$

Also ist $Diag(\mathcal{M}) \cup \{\neg c_i \doteq c_j | i \neq j, i, j \leqslant n\} \cup \{\neg P_i(c_j) | 1 \leqslant i, j \leqslant n,\}$ konsistent.

$\overset{Kompakth.}{\Rightarrow} Diag(\mathcal{M}) \cup \{\neg(c_i \doteq c_j | i \neq j)\} \cup \{\neg P_i(c_j) | i, j \in \mathbb{N}\}$ ist konsistent.
Wenn wir also ein $\mathcal{N}'$ haben, dass Modell davon ist, dann ist $\mathcal{N}' \restriction \mathscr{L}$ unser $\mathcal{N}$.

- c)
  Wir zeigen, dass es ein nichtleeres Back & Forth-System mit der Kollektion S gibt.

  - S ist nichtleer
    Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ solche Strukturen.
    Wenn gilt $n \in P_i^{\mathcal{N}}$, sowie $m \in P_j^{\mathcal{M}}$, dann ist $F : \{n\} \to \{m\}$ partieller Iso.
    Dies geht immer, da die P_i existieren und unendlich groß sein müssen.
    $\Rightarrow$ S ist nichtleer

  - Back & Forth-System

    * $\boxed{\text{Back}}$
      Sei $F \in S, n \in N \backslash Im(F)$

      Wir unterscheiden in: <u>n ist in einer Menge P_i</u> und <u>n ist nicht in einer Menge P_i</u>

      · $n \in P_i^{\mathcal{N}}, i \in \mathbb{N}$
        $\Rightarrow m \in P_j^{\mathcal{M}} \backslash Dom(F)$
        Dabei muss m möglicherweise passend gewählt werden, wenn bereits ein $n' \in P_i^{\mathcal{N}}$ in Im(F) ist.
        Es ist jedoch immer möglich ein m zu finden, da alle P_k unendlich groß sind und es unendlich viele davon gibt.

      · $n \notin P_i^{\mathcal{N}}, i \in \mathbb{N}$
        $\Rightarrow m \in M \backslash \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i^{\mathcal{M}} \cap M \backslash Dom(F)$
        Das ist ebenfalls immer möglich, da $M, M \backslash \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i^{\mathcal{M}}$ unendlich groß sind und Dom(F) endlich groß.

    * $\boxed{\text{Forth}}$ ist analog.

- d)
  $\overset{A1, Blatt6}{\Rightarrow}$ T vollständig $\Leftrightarrow$ je zwei Modelle von T sind elementar äquivalent.

  Seien also $\mathcal{M}_1 \vDash T, \mathcal{M}_2 \vDash T$ Modelle
  $\overset{b)}{\Rightarrow} \mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{N}_1, \mathcal{M}_2 \preceq \mathcal{N}_2$
  $\overset{c)}{\Rightarrow} \mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}_2 \equiv \mathcal{M}_2$
  $\Rightarrow$ T ist vollständig.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

(a) Zeige, dass die Abstandsfunktion $\begin{array}{rccc} |\cdot| : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

(b) Zeige, dass die Funktion $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}_{m \text{ Mal}} \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass die Funktion $(x,y) \mapsto x^y$ primitiv rekursiv ist.

- a)
  $|x-y| := (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$
  Sowohl $+$, als auch $\dot{-}$ sind p. rek.

- b)
  Wir zeigen x^y p. rek.:
  $$x^y := \begin{cases} 1, & \text{falls } y = 0 \\ x \cdot x^{y-1}, & \text{sonst} \end{cases}$$
  Und damit jetzt:
  $$f(n,m) = \begin{cases} n, & \text{falls } m = 0 \\ n^{f(n,m-1)}, & \text{sonst} \end{cases}$$