Maximilian Roth

Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $\varphi[x]$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Angenommen, dass für jedes Modell $\mathcal{M}$ von T die Menge $\varphi(M) := \{m \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi[m]\}$ endlich ist, zeige, dass es eine natürliche Zahl D gibt, so dass für jedes Modell $\mathcal{M}$ von T die Menge $\varphi(M)$ weniger als D Elemente hat.
Hinweis: Schreibe eine geeignete Theorie $T \subset T^*$ und benutze Kompaktheit.

ZZ: Es gibt ein D $\in \mathbb{N}$: Für alle Modelle $\mathcal{M}$ gilt: $|\varphi(M)| < D$

Beweis:

Wir sollen also zeigen, dass in $\mathcal{M}$ nicht gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$\varphi_n = \exists x_1, \ldots, x_n (\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_i \doteq x_j \wedge \varphi[x_i]))$

Das heißt es ist zu zeigen: $T^* = T \cup \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist widersprüchlich / nicht konsistent

Sei $\mathcal{A} \models T^*$, dann gilt mit den φ_n, dass es unendlich viele Belegungen gibt mit $\mathcal{M} \models \varphi[x]$
$\Rightarrow \varphi(M)$ ist undendlich groß.
$\Rightarrow T^*$ ist nicht konsistent.

$\overset{Kompatkh.}{\Rightarrow}$ eine endliche Teilmenge von $\{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist widersprüchlich.
Also: $\exists n_1, \ldots, n_k$ so dass $T \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ widersprüchlich.

Da $\varphi_n \to (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)$ folgt, wenn $m = max(\{n_1, \ldots, n_k\})$ ist, dann gilt:
$T \cup \{\varphi_m\}$ ist widersprüchlich.

$\overset{Auss.}{\Rightarrow} T \vdash \neg\varphi_m \Rightarrow \forall \mathcal{M} : |\varphi(M)| < m$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen $<$.

(a) Schreibe eine Theorie T, deren Modelle genau alle linear geordneten Mengen ohne Endpunkte sind.

(b) Ist T vollständig? Gibt es eine einzige Vervollständigung?

- a)
  Wir schreiben auf welche Eigenschaften wir benötigen und formulieren sie als Aussagen:

  - Irreflexiv:
    $\forall x \neg x < x$
  - Transitiv:
    $\forall x, y, z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$
  - Total:
    $\forall x, y(x < y \vee x \doteq y \vee y < x)$
  - Keine Endpunkte:
    $\forall x \exists y \quad x < y$
    $\forall x \exists y \quad y < x$

  T ist dann die Vereinigung aller dieser Aussagen.

- b)
  $R = (\mathbb{R}, \{<\})$ und $Z = (\mathbb{Z}, \{<\})$ sind offensichtlich Strukturen, die T erfüllen.
  Für R gilt jedoch, dass zwischen 2 Zahlen unendlich viele weitere liegen:

  $\forall x, y \exists z(x < y \rightarrow (x < z \wedge z < y))$

  Dies gilt nicht für Z (zwischen 1 und 2 liegt keine ganze Zahl).
  Wäre T vollständig müsste entweder die Aussage oder ihre Negation in T gelten.
  Da dies offenbar nicht der Fall ist,
  wir haben 2 Modelle gefunden in denen jeweils 1 davon gilt,
  kann T nicht vollständig sein.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen E und T die $\mathcal{L}$-Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, in welchen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A mit genau einer Klasse der Größe n für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist (siehe Aufgabe 2 (b), Blatt 3).

(a) Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges Modell von T. Zeige, dass es ein Modell $\mathcal{N}$ von T gibt, so dass $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ und $E^{\mathcal{N}}$ eine unendliche Äquivalenzklasse hat.

Hinweis: Erweitere $\mathcal{L}$ zu einer Sprache $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c\}$ mit einem Konstantenzeichen c und betrachte $\text{Diag}(\mathcal{M}) \cup T^*$ für eine geeignete Menge T^* von $\mathcal{L}^*$-Aussagen. Zeige mit Hilfe von Kompaktheit, dass diese Formelmenge konsistent ist und erhalte dadurch eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$.

(b) Zeige, dass es ein zweites Modell $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}'$ gibt, so dass $\mathcal{N}$ zwei verschiedene unendliche $E^{\mathcal{N}}$-Äquivalenzklassen hat.

(c) Beschreibe alle abzählbaren Modelle von T. Wieviele gibt es, bis auf Isomorphie?

- a)
  ZZ: Es gibt ein Modell $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N} : E^{\mathcal{N}}$ hat eine undendliche Äquivalenzklasse.

  Beweis:
  Wir erweitern unsere Sprache nun um ein c, damit wir folgende Aussagen φ_n beschreiben können:
  $\varphi_n = \exists x_1, \dots, x_n(\bigwedge_{i \neq j}(\neg x_i \doteq x_j \wedge E(x_i, c)))$

  Das c soll später also mit unendlich vielen x_i in einer Äquivalenzklasse sein.
  Wir beweisen durch Widerspruch, dass ein $\mathcal{N}$ wie in der Aufgabe existiert:

  - Annahme: $\text{Diag}(\mathcal{M}) \cup \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist widersprüchlich
    $\overset{Kompatkh.}{\Rightarrow} \exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} : Diag(\mathbb{M}) \cup \{\varphi_{n1}, \dots, \varphi_{nk}\}$ ist widersprüchlich.

    Sei wieder wie in 1 $n = max(\{n_1, \dots, n_k\})$
    $\Rightarrow Diag(\mathcal{M}) \cup \{\varphi_n\}$ ist widersprüchlich.

    Sei nun [m] die Äquivalenzklasse mit genau n Elementen und $c^{\mathcal{M}*} = m$, wobei $\mathcal{M}^* = \mathscr{L}^*(\mathcal{M})$ ist.

    $\Rightarrow \mathcal{M}^* \models Diag(\mathcal{M}) \cup \{\varphi_n\}$ Widerspruch, da nicht konsistent!

  $\Rightarrow Diag(\mathcal{M}) \cup \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist konsistent.

  c ist mit unendlich vielen $x_i \in M$ in einer Äquivalenzklasse, damit existiert ein

$\mathcal{N}$ wie in der Aufgabe.

- b)
  ZZ: Es gibt ein Modell $\mathcal{N}$ für das $E^{\mathcal{N}}$ genau zwei undendliche Äquivalenzklassen besitzt

  Beweis:
  Diesmal ist unser $\mathscr{L}^* = \mathscr{L} \cup \{c, d\}$
  Wir formulieren jetzt die Anforderungen wieder als Aussagen:

  - Es gibt zwei undendliche Äquivalenzklassen:
    $\varphi_n = \exists x_1, \ldots, x_n(\bigwedge_{i \neq j}(\neg x_i \doteq x_j \wedge E(x_i, c)))$
    $\psi_m = \exists x_1, \ldots, x_m(\bigwedge_{i \neq j}(\neg x_i \doteq x_j \wedge E(x_i, d)))$

  - Diese beiden sind verschieden:
    $\neg E(c, d)$

  Dann ist die neue Theorie T^* :
  $T^* = Diag(\mathcal{M}) \cup \{\varphi_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi_m | m \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg E(c, d)\}$

  Von hier an geschieht alles analog zu Aaufgabe a)

- c)
  Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell mit genau n Äquivalenzklassen die unendlich groß sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ wie in Aufgabe 2. Wir betrachten wieder die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ mit der natürlichen Ordnung.

a) Ist die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen von $\mathcal{Z}$ nichtleer?

b) Bildet diese Kollektion ein Back-&-Forth System?

- a)
  ZZ: S ist nichtleer.

  Beweis:
  Sei $\mathcal{A} = (\{1\}, \{<\})$ Struktur (gilt, da $<$ keine Elemente erzeugt).
  Dann ist die Abbildung: $\{1\} \to \{1\}, 1 \mapsto 1$ eine Isomorphie zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ offensichtlich endlich erzeugt und Unterstruktur ist, ist S nichtleer.

- b)
  Nein, da wir leicht ein Gegenbeispiel finden können.

  $\mathcal{A} = (\{1, 3\}, \{<\})$ und $\mathcal{B} = (\{1, 2\}, \{<\})$ sind endlich erzeugte Unterstrukturen.

  Aber ist F bereits vorhanden mit $F : \{1, 3\} \to \{1, 2\}, F : 1 \mapsto 1, F : 3 \mapsto 2$,
  dann kann $\mathcal{A}$ nicht auf A = {1,2,3} erweitert werden,
  da dann durch 1 $<$ 2 $<$ 3 auch
  F(1) $<$ F(2) $<$ F(3) gelten müsste, das ist jedoch 1 $<$ F(2) $<$ 2, es gibt aber kein solches $F(2) \in \mathbb{Z}$.