Maximilian Roth

# Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.**
Zeige, dass die folgenden $\mathcal{L}$-Formeln allgemeingültig sind.

(a) $\Big(\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \wedge \psi)\Big)$, falls $x$ nicht frei in $\psi$ vorkommt.

(b) $\Big(\exists x\forall y\varphi[x,y] \rightarrow \forall y\exists x\varphi[x,y]\Big)$.

- a)
  Sei $\mathfrak{A}$ beliebige $\mathscr{L}$-Struktur.

  Annahme: $\mathfrak{A} \nvdash (\exists x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \wedge \psi))$
  $\Rightarrow$ es gibt eine Belegung $x_1, \ldots, x_n : \mathfrak{A} \vdash \exists x(\varphi \wedge \psi)$, aber $\mathfrak{A} \nvdash (\exists x\varphi \wedge \psi)$
  Aus $\mathfrak{A} \vdash \exists x(\varphi \wedge \psi)$ folgt aber: $\mathfrak{A} \vdash \exists x\varphi$ und $\mathfrak{A} \vdash \exists x\psi$
  $\overset{\text{x nicht frei in } \psi}{\Rightarrow} \mathfrak{A} \vdash \psi$
  $\Rightarrow \mathfrak{A} \vdash (\exists x\varphi \wedge \psi)$ Widerspruch! Es gilt $\mathfrak{A} \vdash (\exists x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \wedge \psi))$

- b)
  Sei $\mathfrak{A}$ beliebige $\mathscr{L}$-Struktur.

  Gilt $\mathfrak{A} \vdash \exists x\forall y\varphi[x,y]$, dann folgt:
  Es gibt ein $a \in A : \mathfrak{A} \vdash \forall y\varphi[a,y]$ d.h.:
  Für alle $b \in A$ gilt: $\mathfrak{A} \vdash \varphi[a,b]$
  $\Rightarrow \vdash \forall y\exists x\varphi[x,y]$ nämlich mindestens a

**Aufgabe 2** (6 Punkte)**.**
Leite die folgenden $\mathcal{L}$-Formeln aus dem Hilbertkalkül (für $\mathcal{L}$) ab.

(a) $\Big(\exists x\,(\varphi\wedge\psi)\to(\exists x\varphi\wedge\psi)\Big)$, falls $x$ nicht frei in $\psi$ vorkommt.

(b) $\Big(\exists x\forall y\,(f(y)\doteq x)\to\forall y\forall z\,(f(y)\doteq f(z))\Big)$, wobei $\mathcal{L}$ das einstellige Funktionszeichen $f$ enthält.

**Definition 2.4.4** **(a)** *Eine $\mathcal{L}$-Formel heißt $\underline{\mathcal{L}\text{-Tautologie}}$, falls sie von der Form $F\frac{\varphi_1}{A_1}\dots\frac{\varphi_n}{A_n}$ für $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi_i$ und eine aussagenlogische Tautologie $F(A_1,\dots,A_n)$ ist.*

**(b)** *Folgende $\mathcal{L}$-Formeln heißen $\underline{\mathcal{L}\text{-Gleichheitsaxiome}}$:*

| | |
|---|---|
| [Reflexivität] | $\forall v_0\, v_0\doteq v_0$ |
| [Symmetrie] | $\forall v_0\forall v_1\,(v_0\doteq v_1\leftrightarrow v_1\doteq v_0)$ |
| [Transitivität] | $\forall v_0\,\forall v_1\forall v_2((\,v_0\doteq v_1\wedge v_1\doteq v_2)\to v_0\doteq v_2)$ |
| [Kongruenz] | $\forall v_1\dots\forall v_{2n}\,((v_1\doteq v_{n+1}\wedge\cdots\wedge v_n\doteq v_{2n})\to f v_1\dots v_n\doteq f v_{n+1}\dots v_{2n})$ |
| | $\forall v_1\dots\forall v_{2n}\,((v_1\doteq v_{n+1}\wedge\cdots\wedge v_n\doteq v_{2n})\to(Rv_1\dots v_n\leftrightarrow Rv_{n+1}\dots v_{2n}))$ |

*für alle $n$-stelligen Funktionszeichen $f$ und $n$-stelligen Relationszeichen $R$ in $\mathcal{L}$ $(n\in\mathbb{N})$*

**(c)** *Ein $\underline{\mathcal{L}\text{-}\exists\text{-Axiom}}$ ist eine Formel der Form $(\varphi\frac{\tau}{v_i}\to\exists v_i\,\varphi)$ für eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi$, einen $\mathcal{L}$-Term $\tau$ und eine Variable $v_i$, die frei für $\tau$ in $\varphi$ ist.*

**Lemma 2.4.6** *Angenommen $(\varphi\to\psi)$ ist eine allgemeingültige $\mathcal{L}$-Formel.*

<u>Modus Ponens</u>[23]*: Wenn $\varphi$ ebenfalls allgemeingültig ist, dann ist auch $\psi$ allgemeingültig.*

<u>$\exists$-Einführungsregel</u>*: Wenn $v_i$ nicht frei in $\psi$ ist, dann ist auch $(\exists v_i\,\varphi\to\psi)$ allgemeingültig.*

- a)
  - Version 1:
    Nach Definition enthält das Hilbert-Kalkül alle $\mathscr{L}$-Tautologien als Axiome.
    $\overset{1a)}{\Rightarrow}\vdash(\exists x(\varphi\wedge\psi)\to(\exists x\varphi\wedge\psi))$
  - Version 2:
    Nach $\exists$-Axiom: $\vdash(\varphi\to\exists x\varphi)$
    Wir wissen auch: $\vdash((\varphi\to\exists x\varphi)\to((\varphi\wedge\psi)\to(\exists x\varphi\wedge\psi)))$
    Wenden wir nun Modus Ponens ($\vdash(\varphi\to\psi)$ und $\vdash\varphi\Rightarrow\vdash\psi$) an
    $\vdash((\varphi\wedge\psi)\to(\exists x\varphi\wedge\psi))$

Und zuletzt mit der $\exists$-Einführungsregel (x ist nicht frei in $(\exists x\varphi \wedge \psi)$):
$\vdash (\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \psi))$

- b)

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L}$ sei $T$ eine Theorie und $\chi$, $\theta_1$, $\theta_2$ Aussagen derart, dass $(\theta_1 \to \theta_2)$ aus $T \cup \{\chi\}$ folgt. Zeige, dass

$$T \cup \{\neg\theta_2\} \models (\chi \to \neg\theta_1).$$

Beweis:
Sei $\mathfrak{A} \models T \cup \{\neg\Theta_2\}$ $\mathfrak{A} \models \chi$
$\overset{Aufgabe}{\Rightarrow} \mathfrak{A} \models (\Theta_1 \to \Theta_2)$
$\overset{\neg\Theta_2}{\Rightarrow} \mathfrak{A} \models \neg\Theta_1$
$\Rightarrow \mathfrak{A} \models (\chi \to \Theta_1)$

**Aufgabe 4** (6 Punkte)**.**
Wir arbeiten in der Sprache $\mathcal{L}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen $<$ besteht. Sei $\mathcal{R}$ die $\mathcal{L}$-Struktur $(\mathbb{R}, <)$. Mit $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Sprache $\mathcal{L} \cup \{d_r\}_{r\in\mathbb{R}}$, wobei $\{d_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ eine Menge neuer paarweise verschiedener Konstantenzeichen ist. Beachte, dass $\mathcal{R}$ in natürlicher Weise als $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Struktur gesehen werden kann.

(a) Gegeben eine Einbettung $F$ von $\mathcal{R}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$, zeige, dass $F(\mathbb{R})$ die Grundmenge einer Unterstruktur $F(\mathcal{R})$ von $\mathcal{M}$ ist. Ferner ist $F(\mathcal{R})$ isomorph zu $\mathcal{R}$.

(b) Sei $\text{Diag}^{at}(\mathcal{R})$ die Menge aller quantorenfreien $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Aussagen, welche in $\mathcal{R}$ gelten. Zeige, dass eine $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Struktur $\mathcal{N}$ genau dann ein Modell von $\text{Diag}^{at}(\mathcal{R})$ ist, wenn die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \to & N \\ & r & \mapsto & d_r^{\mathcal{N}} \end{array}$$

eine Einbettung liefert.

(c) Sei nun $\text{Diag}(\mathcal{R})$ die Menge aller $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Aussagen, welche in $\mathcal{R}$ gelten. Zeige, dass eine $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Struktur $\mathcal{N}$ genau dann ein Modell von $\text{Diag}(\mathcal{R})$ ist, wenn für die obige Abbildung $F : \mathbb{R} \to N$ gegeben durch $r \mapsto d_r^{\mathcal{N}}$ gilt, dass $F(\mathcal{R})$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$ ist (siehe Blatt 4, Aufgabe 3). Insbesondere ist $F$ eine elementare Abbildung (siehe Skript).

- a)
  <u>Beweis:</u>

  - Universum einer Unterstruktur von $\mathfrak{M}$

    Da $\mathscr{L}$ weder Funktions- noch Konstantenzeichen hat ist jede Teilmenge von M auch Grundmenge einer Unterstruktur.
    Und da $F(\mathbb{R}) \subseteq M \Rightarrow F(\mathbb{R})$ ist Grundmenge einer Unterstruktur von $\mathfrak{M}$.

  - $F(\mathcal{R}) \simeq \mathcal{R}$

    Achtung informell: Wir nehmen die 'vorhandene' Einbettung F und betrachten nur die Unterstruktur $F(\mathcal{R})$ als 'Ziel'. Da F inj. folgt die neue Einbettung ist bij.

    * Wir zeigen zunächst, dass $F(\mathcal{R})$ Unterstruktur von $\mathfrak{M}$ ist.

      · Wir wissen bereits, dass $F(\mathcal{R}) \subseteq M$ ist.

      · Also bleibt noch, dass $Id_{F(\mathbb{R})} : F(\mathbb{R}) \to M$ Einbettung ist.
        Dafür müssen wir zeigen, dass $Id_{F(\mathbb{R})}$ mit $<$ kompatibel ist,
        dies wissen wir aber bereits, da F schon Einbettung war.

      Daraus folgt, dass $F(\mathcal{R})$ Unterstruktur von $\mathfrak{M}$ ist.

    * Nun ist die eingeschränkte Funktion
      $G : \mathcal{R} \to F(\mathcal{R}), G : r \mapsto F(r)$ eine Einbettung von $\mathcal{R}$ in $F(\mathcal{R})$.

    * Da F injektiv war und $|\mathcal{R}| = |F(\mathcal{R})| \Rightarrow$ G bijektiv.

    $\Rightarrow F(\mathcal{R}) \simeq \mathcal{R}$.

- b)
  ZZ: $\mathfrak{N} \models Diag^{at}(\mathcal{R}) \Leftrightarrow$ F Einbettung

  Beweis:

  - F Einbettung $\Rightarrow \mathcal{N} \models Diag^{at}(\mathcal{R})$
    Sei $\varphi$ quantorenfreie $\mathscr{L}(\mathbb{R})$-Aussage

    $\mathcal{N} \models \varphi$
    $\overset{F(\mathcal{R}) \subset \mathcal{N} \text{ 4 b) Blatt 3}}{\Leftrightarrow} F(\mathcal{R}) \models \varphi$
    $\overset{F(\mathcal{R}) \simeq \mathcal{R}}{\Leftrightarrow} \mathcal{R} \models \varphi$
    $\overset{Aufgabe}{\Leftrightarrow} \varphi \in Diag^{at}(\mathcal{R})$

    $\Rightarrow \mathcal{N} \models Diag^{at}(\mathcal{R})$

  - $\mathcal{N} \models Diag^{at}(\mathcal{R}) \Rightarrow$ F Einbettung

    * F ist offensichtlich injektiv.

    * Konstanten, Funktionen und Relationen sind kompatibel:

      · Konstanten:
      $F(d_r^{\mathcal{R}}) = F(r) = F(d_r^{\mathcal{N}})$

      · Funktionen: Nicht vorhanden

      · Relationen:
      $(s,t) \in <^{\mathcal{R}} \Leftrightarrow d_s < d_t \in Diag^{at}(\mathcal{R})$
      $\Leftrightarrow \mathcal{N} \models d_s < d_t \Leftrightarrow (d_s, d_t) \in <^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow (F(s), F(t)) \in <^{\mathcal{N}}$

      Wir haben gekonnt $(s,t)$, was keine quantorenfreie $\mathscr{L}(\mathcal{R})$-Aussage ist zu $d_s < d_t$, was eine solche ist überführt.
      Dann haben wir nur noch die Annahme genutzt.

    $\Rightarrow$ F ist Einbettung

**Aufgabe 4** (6 Punkte)**.**

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ in der Sprache $\mathcal{L}$. Gegeben eine atomare Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$, zeige, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

(b) Zeige nun, dass die obige Äquivalenz auch für jede quantorenfreie Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$ gilt. Argumentiere dabei induktiv über den Aufbau von $\psi$.

Abbildung 1: Von Blatt 3

- c)
  Diag($\mathcal{R}$) $= \{\varphi \mathscr{L} - Auss | \mathcal{R} \vDash \varphi\}$

  ZZ: Wenn $\mathcal{N} \mathscr{L}(\mathbb{R})$-Struktur: $\mathcal{N} \vDash Diag(\mathcal{R}) \Leftrightarrow F(\mathcal{R}) \preceq \mathcal{N}$

  Beweis:

  - $\mathcal{N} \vDash Diag(\mathcal{R}) \Rightarrow F(\mathcal{R}) \preceq \mathcal{N}$
    Aus a) wissen wir, dass $F(\mathcal{R}) \subset \mathcal{N}$, aus b), dass F Einbettung ist.

    Sei $\varphi$ $\mathscr{L}(\mathbb{R})$-Formel

$$\begin{aligned} & F(\mathcal{R} \vDash \varphi[r_1, \ldots, r_n]) \\ & \Rightarrow F(\mathcal{R} \vDash \varphi[r_1^{F(\mathcal{R})}, \ldots, r_n^{\mathcal{R}}]) \\ \overset{\text{R als } \mathscr{L}(\mathcal{R})\text{-Struktur } \simeq F(\mathcal{R})}{\Rightarrow} & \mathcal{R} \vDash \varphi[d_{r_1}^{\mathcal{R}}, \ldots, d_{r_n}^{\mathcal{R}}] \\ \overset{Aufgabe}{\Rightarrow} & \varphi[d_{r_1}^{\mathcal{R}}, \ldots, d_{r_n}^{\mathcal{R}}] \in Diag(\mathcal{R}) \\ & \Rightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi[d_{r_1}^{F(\mathcal{R})}, \ldots, d_{r_n}^{F(\mathcal{R})}] \\ & \Rightarrow \mathcal{N} \vDash \varphi[r_1, \ldots, r_n] \end{aligned}$$

    Da dies für alle $\varphi$ gilt folgt: $F(\mathcal{R}) \preceq \mathcal{N}$

  - $F(\mathcal{R} \preceq \mathcal{N}) \Rightarrow \mathcal{N} \vDash Diag(\mathcal{R})$

    Sei $\varphi \in Diag(\mathcal{R})$, also $\mathscr{L}$- Aussage.
    $\overset{Aufgabe}{\Leftrightarrow} \mathcal{R} \vDash \varphi$
    $\overset{\mathcal{R} \simeq F(\mathcal{R})}{\Leftrightarrow} F(R) \vDash \varphi$
    $\overset{F(\mathcal{R}) \preceq \mathcal{N}}{\Leftrightarrow} \mathcal{N} \vDash \varphi$

$\mathcal{N} \vDash Diag(\mathcal{R})$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.**

Eine Unterstruktur $\mathcal{A}$ der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ heißt *elementar*, bezeichnet mit $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, falls für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$ folgende Implikation gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

Abbildung 2: Von Blatt 4