## Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

**Aufgabe 6** (4 Punkte)**.**
Sei $T$ eine vollständige rekursiv axiomatisierbare $\mathcal{L}$-Theorie. Zeige, dass $T$ entscheidbar ist.

<u>ZZ:</u> Sei T vollständig und rekursiv axiomatisierbar.
Zeige, dass T entscheidbar.

Damit T entscheidbar ist muss $\{\ulcorner\varphi\urcorner | T \vdash \varphi\}$ rekursiv sein (Def. 3.30).
Dafür wiederum müssen die folgenden Mengen rekursiv <u>aufzählbar</u> sein.

- $\{\ulcorner\varphi\urcorner | T \vdash \varphi\}$ rekursiv aufzählbar
  Folgt aus Lemma 3.32 (3), da T rek. axiomatisierbar

- $\mathbb{N} \backslash \{\ulcorner\varphi\urcorner | T \vdash \varphi\}$
  $= \mathbb{N} \backslash \{\ulcorner\varphi\urcorner | \varphi \text{ Aussage}\} \cup \{\ulcorner\varphi\urcorner | T \vdash \neg\varphi\}$ (T vollständig)

  Wir zeigen, dass jeder Teil rekursiv aufzählbar ist:

  - $\mathbb{N} \backslash \{\ulcorner\varphi\urcorner | \varphi \text{ Aussage}\}$ ist rekursiv aufzählbar,
    da letzteres nach Lemma 3.28 (2) primitiv <u>rekursiv</u> ist und damit auch das komplement rekursiv aufzählbar ist.

  - $\{\ulcorner\varphi\urcorner | T \vdash \neg\varphi\}$
    $= \{\ulcorner\varphi\urcorner | \varphi \text{ Aussage}\} \cap \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in \{\ulcorner\varphi\urcorner | T \vdash \varphi\}\}$
    Wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, rekursiv mit $f(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$

    Die Aussagen, deren Negat in T wahr ist.

Wir wissen bereits, dass $\{\lceil\varphi\rceil|\varphi$ Aussage$\}$ rekursiv aufzählbar ist, fehlt also nur noch:

$M = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}\}$

Nach Lemma 3.22 (1) müssen wir nur eine Fkt. $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ finden,
so dass gilt Im(x) = M, damit M rekursiv aufzählbar ist.

Da $\{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}$ rekursiv <u>aufzählbar</u> ist folgt:
$\overset{Lemma 3.22(1)}{\Rightarrow}$ $\exists$rekursive Fkt. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : Im(g) = \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}$

Sei nun h rekursiv wie folgt:
$h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,
$h(n,m) = \begin{cases} n, & \text{falls } f(n) = g(m) \\ \psi, & \text{sonst} \end{cases}$
Wobei $\psi$ fest und $\psi \in \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}\}$

$Im(h) = M = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}\}$, da:

* $\psi \in M$

* n nur im Bild ist, wenn $f(n) \in Img(g) = \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}$ und damit $n \in M = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}\}$.

Allerdings muss für die Fkt. $x$ gelten, dass $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aber $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
D.h. wir brauchen noch eine rekursiv aufzählbare bijektive Fkt. $i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$

Dann ist $x = h \circ i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv aufzählbar und
$Im(h \circ i) = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}\}$

$\Rightarrow$ M ist rekursiv aufzählbar

Jeder Teil ist rekursiv aufzählbar $\Rightarrow \mathbb{N} \setminus \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}$ ist rekursiv aufzählbar.

$\Rightarrow \{\lceil\varphi\rceil | T \vdash \varphi\}$ ist rekursiv.

$\Rightarrow$ T ist entscheidbar.

**Lemma 3.22.** *Eine Teilmenge* $A \subset \mathbb{N}$ *ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie leer oder gleich* $f(\mathbb{N})$ *ist, für eine rekursive Funktion* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Abbildung 1: Lemma 3.22

**Lemma 3.28.** *Folgende Teilmengen von* $\mathbb{N}$ *sind primitiv rekursiv:*

- $\{\ulcorner t \urcorner \mid t \in \mathbb{TERM}\}$;
- $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in \mathbb{FORM}\}$;
- $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi[x] \in \mathbb{FORM}$ *mit höchstens einer freien Variable* $x\}$;
- $\{\ulcorner \chi \urcorner \mid \chi$ *Aussage*$\}$.

Abbildung 2: Lemma 3.28

**Lemma 3.32.** *Wenn* $T$ *rekursiv axiomatisierbar ist, dann ist die Menge* $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \varphi\}$ *rekursiv aufzählbar.*

Abbildung 3: Lemma 3.32