Maximilian Roth

Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Beschreibe vollständig alle (induzierten Funktionen der) Terme in n Variablen bezüglich der Struktur mit Universum $\mathbb{R}$ in der leeren Sprache sowie der Struktur $(\mathbb{R}, 1, +, -)$ und der Struktur $(\mathbb{R}, +, -, \cdot)$.

- i) $\mathfrak{A}_1 = (\mathbb{R}, \emptyset)$
  Die einzigen Terme sind die Variablen, also Elemente aus $\mathbb{R}$
  Für n Variablen sind die möglichen induzierten Funktionen:

  $f_i^{\mathfrak{A}_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$

- ii) $\mathfrak{A}_2 = (\mathbb{R}, \{1, +, -\})$
  Wieder hat man die Variablen als Terme, nun kommen jedoch noch die Terme aus den Funktionen hinzu, also von $+$,- und 1.
  Weiter sind die induzierten Funktionen:

  $f_i^{\mathfrak{A}_2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$
  $1^{\mathfrak{A}_2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto 1$
  $c^{\mathfrak{A}_2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto z_0 + \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot x_i, z_i \in \mathbb{Z}$

- iii) $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{R}, \{+, -, \cdot\})$
  Auch hier die Variablen als Terme, sowie die von $+$, - und $\cdot$.
  Die induzierten Funktionen sind:

  $f_i^{\mathfrak{A}_3} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$
  $c^{\mathfrak{A}_3} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{e} z_i \cdot x_1^{p_{1,i}} \cdot ... \cdot x_n^{p_{n,i}}$,
  wobei gilt: $z_i \in \mathbb{Z}, p_{j,i} \in \mathbb{N}, p_{j,i} = 0, \forall 1 \leq j \leq n \Rightarrow z_i = 0$ und e endlich.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

(a) Beschreibe die von der Menge $\mathbb{N}$ erzeugte Unterstruktur der Struktur $\mathbb{R}$ in der leeren Sprache. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

(b) Beschreibe die von $\mathbb{N}$ erzeugte Unterstruktur der Struktur $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$. Ist die davon erzeugte Unterstruktur endlich erzeugt?

- a)
  Da wir keine Funktionen haben ist $\mathbb{N}$ selbst die kleinste Unterstruktur von $\mathbb{R}$, die $\mathbb{N}$ in ihrem Universum enthält. Dies liegt daran, dass kein Element durch ein anderes erzeugt werden kann und damit benötigt man das gesamte $\mathbb{N}$ zum erzeugen.

  Wir zeigen daher, dass $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, \emptyset)$ Unterstruktur ist:

  Es muss gelten $Id_A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist Einbettung, da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ trivial

  - i) injektiv:
    Klar, da $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto n$
  - ii) starker $\mathscr{L} - Homomorphismus$:
    Ebenso klar, da mit der leeren Sprache alle Voraussetzungen automatisch erfüllt sind.

  $\Rightarrow \mathfrak{A}$ ist Unterstruktur von $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, \emptyset)$.

  Des Weiteren ist $\mathbb{N}$ nicht endlich und $< \mathbb{N} >_{\mathfrak{A}}$ somit nicht endlich erzeugt.

- b)
  Die von $\mathbb{N}$ erzeugte Unterstruktur $\mathfrak{D} =< \mathbb{N} >_{\mathfrak{C}}$ von $\mathfrak{C} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ ist gerade $\mathbb{Z}$,
  da mit - auch alle negativen Zahlen erzeugt werden können:

  $\underbrace{-1 - 1 ... - 1 - 1}_{\text{m Mal}}$ erzeugt $-m \in < \mathbb{N} >_{\mathfrak{C}}, m \in \mathbb{N}$

  Da $\mathbb{Z}$ unter $+$ und - abgeschlossen ist und $0, 1 \in \mathbb{Z}$ gilt auch $\mathbb{Z} =< \mathbb{N} >_{\mathfrak{C}}$.

  Weil $\mathbb{Z}$ durch 1 erzeugt werden kann gilt:
  $< 1 >_{\mathfrak{C}} =< \mathbb{N} >_{\mathfrak{C}}$, also ist $< \mathbb{N} >_{\mathfrak{C}}$ endlich erzeugt.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

(a) In der Sprache $\mathcal{L} = \{c, <\}$ seien c ein Konstantenzeichen und $<$ ein zweistelliges Relationszeichen. Betrachte die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{Z}_1$ mit Universum $\mathbb{Z}$ und den Interpretationen $c^{\mathcal{Z}_1} = 5$ sowie $<^{\mathcal{Z}_1}$ als die übliche lineare Ordnung. Ferner sei $\mathcal{Z}_2$ die $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und Interpretationen:

$$c^{\mathcal{Z}_2} = -3 \text{ und } n <^{\mathcal{Z}_2} m, \text{ falls } m < n.$$

Zeige, dass $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

(b) Sei d ein weiteres Konstantenzeichen. Wir betrachten nun die Sprache $\mathcal{L}' = L \cup \{d\}$ und erweitern die obigen beiden Strukturen zu $\mathcal{L}'$-Strukturen $\mathcal{Z}_1'$ und $\mathcal{Z}_2'$, indem wir d wie folgt interpretieren:

$$d^{\mathcal{Z}_1'} = 0 = d^{\mathcal{Z}_2'}.$$

Sind $\mathcal{Z}_1'$ und $\mathcal{Z}_2'$ isomorphe $\mathcal{L}'$-Strukturen?

- a)
  ZZ: $\mathscr{Z}_1$ und $\mathscr{Z}_2$ sind isomorph.
  Bew:
  Wir wählen die folgende Abbildung und überprüfen auf surjektive Einbettung:

  $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
  $n \mapsto -n + 2$

  F ist offensichtlich bijektiv, daher müssen wir nur noch den starken L-Hom. zeigen:

  - ☐ Es gibt nur ein Konstantenzeichen in $\mathscr{L}$, nämlich c:
    $F(c^{\mathscr{Z}_1}) = F(5) = -3 = c^{\mathscr{Z}_2}$
  - ☐ Es gibt keine weiteren Funktionszeichen
  - ☐ Es gibt nur das Relationszeichen $<$ in $\mathscr{L}$:
    $<^{\mathscr{Z}_1} (n, m)$
    $\Leftrightarrow n < m$
    $\Leftrightarrow -m < -n$
    $\Leftrightarrow -m + 2 < -n + 2$
    $\Leftrightarrow F(m) < F(n)$
    $\Leftrightarrow F(n) <^{\mathscr{Z}_2} F(m)$
    $\Leftrightarrow <^{\mathscr{Z}_2} (F(n), F(m))$

  $\Rightarrow$ Damit folgt, dass F surj. Einbettung, also gilt: $\mathscr{Z}_1 \simeq \mathscr{Z}_2$

- b)
  Weil $<$ durch G ($\mathscr{L}$-Hom.) beachtet wird muss gelten:

  $|\{G(0), ..., G(5)\}| = |\{-3, ..., 0\}|$
  Dies gilt aber offensichtlich nicht, also kann G nicht injektiv sein.
  Widerspruch $\mathscr{X'}_1$ und $\mathscr{X'}_2$ sind nicht isomorph.

  Veranschaulicht:

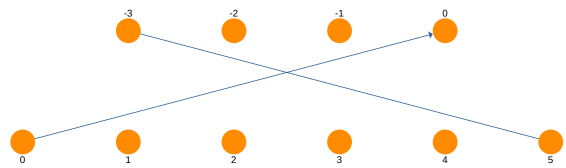

Abbildung 1: Veranschaulichung

$4 < 5 \Rightarrow F(5) <^{\mathscr{X'}_2} F(4) \Rightarrow -3 < F(4) \Rightarrow F(4) \in \{-2, -1, ...\}$
$0 < 4 \Rightarrow F(4) <^{\mathscr{X'}_2} F(0) \Rightarrow F(4) < 0 \Rightarrow F(4) \in \{-1, -2, ...\}$
$\Rightarrow F(4) \in \{-2, -1\}$

Das gilt analog aber auch für 3,2,1 und damit ist F nicht mehr injektiv, da 4 Zahlen auf 2 abgebildet werden müssen. Widerspruch!

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Ein *Graph* (V, E) ist eine nichtleere Menge V von *Punkten* zusammen mit einer Menge E, welche aus 2-elementigen Teilmengen von V (oder *Kanten*) besteht. Ein Teilgraph von (V, E) ist ein Graph (V', E') derart, dass $V' \subset V$ und $E' \subset E$.

(a) Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen R. Begründe, dass jeder Graph als $\mathcal{L}$-Struktur betrachtet werden kann.

(b) Zeige, dass jede $\mathcal{L}$-Unterstruktur eines Graphen ein Teilgraph ist.

(c) Ist jeder Teilgraph eines Graphen eine Unterstruktur von diesem?

- a)
  Wenn der Graph G = (V,E) ist, dann wählen wir für unsere {R}-Struktur $\mathfrak{G}$ das Universum V und alle Kanten aus E sind in $R^{\mathfrak{G}}$.

- b)
  <u>ZZ:</u> Sei $\mathfrak{G} = (V, \{R\})\mathscr{L}$-Struktur des Graphen G und $\mathfrak{G}' = (V', \{R\})$ Unterstruktur, dann folgt G' ist Teilgraph von G.

  <u>Bew:</u>
  Da $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ folgt auch $V' \subset V$.
  Weiters muss $Id_{V'} : V' \to V$ Einbettung sein,
  also gilt für alle $(x, y) \in R^{\mathfrak{G}'} \Leftrightarrow (Id_{V'}(x), Id_{V'}(y)) = (x, y) \in R^{\mathfrak{G}}$
  Es gilt $E' = \{\{x, y\} | x, y \in V', (x, y) \in R^{\mathfrak{G}'}\}$
  und damit aufgrund von $R^{\mathfrak{G}'} \subset R^{\mathfrak{G}}$ auch $E' \subset E$.

- c)
  Gegenbeispiel:

$\mathfrak{B}$

Abbildung 2: B

$\mathfrak{A}$

Abbildung 3: A

V = {a,b}
E = {{a,b}}

V' = {a,b}
E' = $\emptyset$

Wenn $\mathfrak{A}$ Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ ist, so muss $Id_{V'} : V' \to V$ Einbettung sein und damit starker $\mathscr{L}$-Hom.

Damit muss für alle n-stelligen Relationszeichen R gelten:
$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (F(a_1), ..., F(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$.

Für das Relationszeichen R aus unserer Sprache gilt jedoch:
$(a, b) \notin R^{\mathfrak{A}}$, aber $(F(a), F(b)) = (a, b) \in R^{\mathfrak{B}}$.

Damit ist $Id_{V'}$ keine Einbettung, also ist $\mathfrak{A}$ keine Unterstruktur von $\mathfrak{B}$.

Anmerkung zu 2,3,4

Definition 2.3. Eine *Einbettung* der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $F : A \to B$, welche mit den Interpretationen kompatibel ist. Dies bedeutet, dass

- für jedes Konstantenzeichen c aus $\mathcal{L}$ ist $F(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$;
- für jedes Funktionszeichen f aus $\mathcal{L}$ mit Stelligkeit n und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A gilt

$$F(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(F(a_1), \ldots, F(a_n));$$

- für jedes Relationszeichen R aus $\mathcal{L}$ mit Stelligkeit m gilt

$$(a_1, \ldots, a_m) \text{ liegt genau dann in } R^{\mathcal{A}}, \text{ wenn } (F(a_1), \ldots, F(a_m)) \text{ in } R^{\mathcal{B}} \text{ liegt.}$$

Ein *Isomorphismus* ist eine surjektive Einbettung. Falls es einen Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt, bezeichnen wir dies mit $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Bemerkung 2.4. Die Relation $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation zwischen $\mathcal{L}$-Strukturen.

Definition 2.5. Gegeben zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, sagen wir, dass $\mathcal{A}$ eine *Unterstruktur* von $\mathcal{B}$ ist, falls $A \subset B$ gilt und die mengentheoretische Inklusion $\mathrm{Id}_A : A \to B$ eine Einbettung ist. Wir schreiben $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Abbildung 4: Bedingungen Unterstruktur, Isomorphie, Einbettung