

Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!

Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf>

Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Sei \mathcal{L} die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen E . Wir betrachten zwei \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ und $E^{\mathcal{B}}$ Äquivalenzrelationen sind. Ferner ist jede Äquivalenzklasse unendlich und es gibt unendlich viele Äquivalenzklassen (in beiden Strukturen). Zeige, dass \mathcal{A} und \mathcal{B} ein nichtleeres Back-&-Forth System haben.

Siehe auch Aufbau Back & Forth am Ende des Dokuments.

Beweis:

Wir sollen zeigen, dass es ein nicht leeres Back and Forth System gibt, also müssen wir uns zuerst eines aussuchen.

Hierfür empfiehlt es sich zuerst mit folgendem S anzufangen:

$S = \{F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D} \mid F \text{ Isomorphismus}, \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}, \text{ wobei } \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \text{ endlich erzeugt}\}$ ist.

Mit $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ ist gemeint, dass \mathfrak{C} Unterstruktur von \mathfrak{A} ist.

Zeigen wir also nun, dass S ein nichtleeres Back and Forth System ist.

- S ist nichtleer

Sei gegeben: $\mathfrak{C} = (\{c\}, \{E^{\mathfrak{C}}\})$, $\mathfrak{D} = (\{d\}, \{E^{\mathfrak{D}}\})$

Dann gilt, dass $F : \{c\} \rightarrow \{d\}, c \mapsto d$ Isomorphismus ist

(Die von $\{c\}$ und $\{d\}$ erzeugten Mengen sind wieder $\{c\}$ bzw. $\{d\}$ und offensichtlich endlich erzeugt),

da F klar bijektiv und E in beiden Strukturen Äquivalenzrelation ist, womit F auch starker \mathcal{L} -Hom. ist.

$\Rightarrow S$ ist nicht leer.

- S ist Back & Forth System

– Back:

Sei $F \in S$ und $b \in B \setminus \text{Im}(F)$

1. Falls dieses b in Äquivalenzrelation mit einem b' aus dem Bild $\text{Im}(F)$ steht.

Suchen wir ein $a \in A$ für das gilt $(a, F^{-1}(b')) \in E^{\mathfrak{A}}$ und setzen $F'(a) = b$.

2. Falls dieses b in keiner Äquivalenzrelation steht darf das dazugehörige a dies auch nicht tun.

Also suchen wir ein a für das gilt: $(a, a') \notin E^{\mathfrak{A}}, \forall a' \in \text{Dom}(F)$ und setzen $F'(a) = b$.

– Forth:

Sei $F \in S$ und $a \in A \setminus \text{Dom}(F)$

1. Falls a in einer Äquivalenzrelation mit einem a' steht.

Dann suchen wir ein b , sodass gilt $(b, F(a')) \in E^{\mathfrak{B}}$ und setzen $F'(a) = b$.

2. Falls a in keiner Äquivalenzrelation steht.

Dann suchen wir ein b , sodass $(b, b') \notin E^{\mathfrak{B}}, \forall b' \in \text{Im}(F)$ und setzen $F(a) = b$.

\Rightarrow S ist Back & Forth System.

\Rightarrow S ist nichtleeres Back & Forth System.

Aufgabe 2 (5 Punkte).

- Sei $\mathcal{L} = \{P\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Relationszeichen P besteht. Schreibe eine Theorie, deren Modelle genau die \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} sind, so dass $P^{\mathcal{A}}$ als auch $A \setminus P^{\mathcal{A}}$ unendlich sind.
- Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ die Sprache, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Schreibe eine Theorie, deren Modelle genau die \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} sind, in denen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A mit genau einer Klasse der Größe n für jedes n aus \mathbb{N} ist.
- Für zwei \mathcal{L} -Strukturen wie in (b), ist die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein nichtleeres Back-&-Forth System?

Eine Theorie ist eine Menge T von \mathcal{L} -Aussagen.

Eine \mathcal{L} -Aussage wiederum ist eine Formel ohne freie Variablen, das heißt entweder gibt es keine Individuenvariablen oder sie sind im Wirkungsbereich eines Quantors.

• a)

Achtung hier hatte ich vorher eine 2-stellige Relation, in der Aufgabe wurde jedoch von einer 1-stelligen gesprochen.

$$T = A_1 \cup A_2$$

$$A_1 = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_i \doteq x_j \wedge P(x_i))) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Also keine zwei Variablen sind gleich und alle n sind in Relation

\Rightarrow Es gibt min n Elemente in $P \ \forall n \in \mathbb{N}$

\Rightarrow Es gibt unendlich viele Elemente in P

$$A_2 = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_i \doteq x_j \wedge \neg P(x_i))) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Es sind also mindestens n Elemente nicht in $P \ \forall n \in \mathbb{N}$

\Rightarrow Es gibt unendlich viele Elemente, die nicht in P liegen.

Aus $T = A_1 \cup A_2$ folgt, dass unendlich viele Elemente in P sind und unendlich viele es nicht sind.

• b)

Zunächst die Aussagen für eine Äquivalenzrelation:

$$A_{\text{reflexiv}} = \{\forall x (E(x, x))\}$$

$$A_{\text{symmetrisch}} = \{\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))\}$$

$$A_{\text{transitiv}} = \{\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \rightarrow E(x, z))\}$$

Und nun die für die n -elementigen Äquivalenzklassen $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \{\forall x_1, \dots, \forall x_n, \forall a (\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_1 \doteq x_j) \wedge E(x_i, x_j) \wedge (\neg a \doteq x_i) \wedge \neg E(a, x_i))\}$$

Auf deutsch:

Es gibt n verschiedene Elemente der Form x_i .

Alle x_i sind in einer Relation miteinander.

Es gibt ein a , dass von allen x_i verschieden ist.

a steht mit keinem x_i in Relation.

Daraus folgt in A_i gibt es genau i verschiedene Elemente, die in Relation zu einander stehen keines mehr keines weniger.

Mit $T = A_{\text{reflexiv}} \cup A_{\text{symmetrisch}} \cup A_{\text{transitiv}} \cup A_i, \forall i \in \mathbb{N}$ besitzt T genau die nötigen Eigenschaften.

• c)

Bei diesem Back & Forth System haben wir ein S gegeben:

$S = \{\text{partieller Iso. mit endl. erz. Unterstrukturen wie in b)}\}$ und sollen zeigen, dass es kein nichtleeres B & F System gibt.

Beweis:

Angenommen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind Strukturen wie in b) beschrieben, also $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T_b$

Und sei F bereits folgendermaßen: $F(a) = b$, wobei die Äquivalenzklasse von a $\{a, a'\}$ und die von b $\{b\}$ ist.

Forth würde nun versuchen ein passendes $b' \in B$ für a' zu finden, sodass die Isomorphie erhalten bleibt, also (u.a.) gilt:

$$(a, a') \in E^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (F(a), F(a')) = (b, b') \in E^{\mathfrak{B}}.$$

Es gibt aber nur dieses eine b in der Äquivalenzklasse und für eine Isomorphie muss Injektivität gelten.

\Rightarrow Es gibt also kein F' , dass auch a' entsprechend abbildet und in S liegt.

$\Rightarrow S$ ist nicht Back & Forth System (S ist trotzdem nichtleer).

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Sei R ein zweistelliges Relationszeichen. Ein *Zufallsgraph* ist ein Graph \mathcal{G} , der gesehen als $\{R\}$ -Struktur (siehe Aufgabe 4, Blatt 2) die folgende Eigenschaft hat: Für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B der Grundmenge gibt es einen Punkt c , so dass

$$(a, c) \in R^{\mathcal{G}}, \text{ aber } (b, c) \notin R^{\mathcal{G}}$$

für alle a aus A und b aus B .

(a) Gibt es endliche Zufallsgraphen? Wenn ja, beschreibe diese vollständig.

(b) Sei

$$n = \sum_{i=0}^k [n]_i \cdot 2^i,$$

die binäre Darstellung von der natürlichen Zahl n , wobei $[n]_i = 0, 1$ für $0 \leq i \leq k$. Sei \mathcal{A} die $\{R\}$ -Struktur mit Universum \mathbb{N} und der Interpretation:

$$R^{\mathcal{A}}(n, m) \Leftrightarrow [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1$$

Zeige, dass \mathcal{A} ein Graph ist. Zeige weiter, dass \mathcal{A} ein Zufallsgraph ist.

(c) Sind je zwei Zufallsgraphen, gesehen als $\{R\}$ -Strukturen, elementar äquivalent? (Hinweis: Back-&-Forth.)

• a)

Annahme: $\mathfrak{G} = (G, \{R^{\mathfrak{G}}\})$ ist endlicher Zufallsgraph.

Dann müsste mit $A = G$ und $B = \emptyset$ gelten:

$$\exists c : (a, c) \in R^{\mathfrak{G}} \text{ und } (b, c) \notin R^{\mathfrak{G}}, \forall a \in A, b \in B$$

Da jedoch $c \in A$ gilt folgt $(c, c) \in R^{\mathfrak{G}}$,

aber es darf keine Schlingen geben (zweielementige Teilmengen waren gefordert).

\Rightarrow Es gibt keinen endlichen Zufallsgraphen.

• b)

– ZZ: $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \{R\})$ ist Graph

Beweis:

Es muss Symmetrie und Irreflexivität gezeigt werden (Def. Graph)

* Symmetrie:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ zu Basis 2 und gelte $R(n, m)$

$$\Rightarrow R(n, m) \Leftrightarrow [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1 \Leftrightarrow [n]_m \text{ oder } [m]_n = 1 \Leftrightarrow R(m, n)$$

* Irreflexivität:

Sei $n \in \mathbb{N}$ zur Basis 2.

Würde hier gelten $R(n,n) \Rightarrow [n]_n = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^m [n]_i = 1 \cdot 2^n + \sum_{i=0, i \neq n}^m [n]_i \cdot 2^i \geq n$

Das hieße, dass die binäre Darstellung von n größer ist als n selbst. Widerspruch!

$\Rightarrow \mathfrak{A}$ ist Graph

– ZZ: $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \{R\})$ ist Zufallsgraph

Beweis:

Seien $A, B \subset \mathbb{N}$ endlich und disjunkt und sei Ohne Einschränkung $\max(A) > \max(B)$, sowie $|A| = n$.

Setze nun $c = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_n}, a_i \in A$

$\Rightarrow [c]_a = 1 \Rightarrow R(c, a), \forall a \in A$

Also ist c mit allen Elementen aus A verbunden.

Wir zeigen, dass c mit keinem Element in B verbunden ist:

$[b]_c = 0$, da wenn $[b]_c = 1$ folgt, dass $b < [b]_c \cdot 2^c = 2^c$ (da $c > b, \forall b \in B$).

Und $[c]_b = 0, \forall b \in B$, da wenn $[c]_b = 1$ ein $a_i = b$ existieren müsste. Widerspruch zu Disjunktheit von A und B .

$\Rightarrow \mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \{R\})$ ist Zufallsgraph.

• c)

Aufgabe 4 (6 Punkte).

- (a) Sei \mathcal{A} eine Unterstruktur von \mathcal{B} in der Sprache \mathcal{L} . Gegeben eine atomare Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ und Elemente a_1, \dots, a_n aus A , zeige, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

- (b) Zeige nun, dass die obige Äquivalenz auch für jede quantorenfreie Formel $\psi[x_1, \dots, x_n]$ und Elemente a_1, \dots, a_n aus A gilt. Argumentiere dabei induktiv über den Aufbau von ψ .
- (c) Gegeben die Formel $\theta[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$, wobei ψ quantorenfrei ist, und Elemente a_1, \dots, a_n aus A , zeige nun, dass

$$\mathcal{A} \models \theta[a_1, \dots, a_n] \implies \mathcal{B} \models \theta[a_1, \dots, a_n].$$

Gilt die Rückrichtung?

• a)

Das hier ist eine Induktion über den Formelaufbau. Wir schreiben hier nur den Induktionsschritt auf.

Beweis:

Weil $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ ist folgt, dass die Identitätsabbildung $Id_A : A \rightarrow B$ Einbettung ist.

Daraus folgt, dass alle Terme, also Konstanten, Individuenvariablen und Funktionen in \mathfrak{B} genauso ausgewertet werden wie in \mathfrak{A}

(Die Umkehrung gilt jedoch nicht, da nicht jedes Element aus B in A sein muss).

Atomare Formeln können entweder aus Relationen R oder der logischen Gleichheit \doteq bestehen. Seien t_1, \dots, t_n \mathcal{L} -Terme.

– n -stellige Relation R , also $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$

Es gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_m]$

$$\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_m], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_m]) \in R^{\mathfrak{A}}$$

$$\stackrel{Id_A \text{ Einbettung}}{\Leftrightarrow} (t_1^{\mathfrak{B}}[a_1, \dots, a_m], \dots, t_n^{\mathfrak{B}}[a_1, \dots, a_m]) \in R^{\mathfrak{B}}$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_m]$$

- logische Gleichheit \doteq , also $\varphi = t_1 \doteq t_2$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\models \varphi[a_1, \dots, a_m] \\ \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_m] &\doteq t_2^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_m] \\ \Leftrightarrow t_1^{\mathfrak{B}}[a_1, \dots, a_m] &\doteq t_2^{\mathfrak{B}}[a_1, \dots, a_m] \\ \mathfrak{B} &\models \varphi[a_1, \dots, a_m] \end{aligned}$$

- b)

Dies ist wieder eine Induktion über den Formelaufbau und ähnliche Aufgaben können gut noch öfter kommen.

Es reicht im Folgenden \neg und \vee zu betrachten, da sich alle anderen Junktoren daraus aufbauen lassen.

(\neg, \vee) ist sog. vollständiges Junktorensystem.

- Unsere Formel ist atomar. Dann haben wir die Korrektheit schon in a) bewiesen.

- Gilt $\varphi = \neg\psi$, dann folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\models \varphi[a_1, \dots, a_n] \\ \Leftrightarrow \mathfrak{A} &\not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \stackrel{I.V.}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} &\not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \Leftrightarrow \mathfrak{B} &\models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{aligned}$$

Wir nutzen hier die Induktionsvoraussetzung, da ψ auch wieder Quantorenfreie Formel sein kann.

- Gilt: $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$, dann folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\models \varphi[a_1, \dots, a_n] \\ \Leftrightarrow \mathfrak{A} &\models \psi_1[a_1, \dots, a_n] \text{ oder } \mathfrak{A} \models \psi_2[a_1, \dots, a_n] \\ \stackrel{I.V.}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} &\models \psi_1[a_1, \dots, a_n] \text{ oder } \mathfrak{B} \models \psi_2[a_1, \dots, a_n] \\ \Leftrightarrow \mathfrak{B} &\models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass jede Quantorenfreie Formel, wenn sie in einer Unterstruktur gilt auch in der Oberstruktur gilt.

- c)

Nach Aufgabe gilt: $\Theta[a_1, \dots, a_n] = \exists a \psi[a_1, \dots, a_n, a]$, wobei ψ Quantorenfrei ist.

Das heißt aus $\mathfrak{A} \models \Theta[a_1, \dots, a_n]$ folgt, dass ein $a \in A$ existiert, dass ψ wahr macht. Da $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und damit $A \subseteq B$ folgt, dass auch $a \in B$ und damit:

$\mathfrak{B} \models \exists a\psi[a_1, \dots, a_n, a]$, also auch $\mathfrak{B} \models \Theta[a_1, \dots, a_n]$

Die Rückrichtung gilt nicht, da das erfüllende $b \in B$ nicht unbedingt auch in A sein muss.

Aufbau Back & Forth

Das finden eines nichtleeren Back & Forth Systems S wird dazu genutzt, um zu zeigen, dass zwei Strukturen elementar äquivalent sind.

Korollar 2.20. *Falls ein nicht-leeres Back-&-Forth System S zwischen den \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} existiert, sind \mathcal{A} und \mathcal{B} elementar äquivalent.*

Das heißt, wenn eine partielle elementare Abbildung von der einen in die andere Struktur existiert:

Bemerkung 2.19. Ein Isomorphismus von \mathcal{A} und \mathcal{B} ist immer eine elementare Abbildung. Wenn eine partielle elementare Abbildung von \mathcal{A} nach \mathcal{B} existiert, dann sind \mathcal{A} und \mathcal{B} elementar äquivalent.

In der Bemerkung [2.17](#), zeigen wir, dass jede Abbildung aus S eine elementare partielle Abbildung von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ist.

Was wiederum der Fall ist, wenn folgendes gilt:

Definition 2.18. Für zwei \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} und Teilmengen $\emptyset \neq C \subset A$ und $D \subset B$ ist eine partielle Abbildung $F : C \rightarrow D$ *elementar*, falls

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \text{ genau dann gilt, wenn } \mathcal{B} \models \varphi[F(c_1), \dots, F(c_n)],$$

für alle Elemente c_1, \dots, c_n aus C und jede Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$.

Also suchen wir stets (falls nicht gegeben) eine Kollektion S mit den Eigenschaften:

$S = \{F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D} \mid \text{Isomorphismus} \mid \mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}, \mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}, \text{ wobei } \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \text{ endlich erzeugt}\}$ ist. Mit $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ ist gemeint, dass \mathfrak{C} Unterstruktur von \mathfrak{A} ist.

Falls dieses S kein nichtleeres Back & Forth System ist, können wir ein weiter eingeschränktes S suchen.

Hier hängt die Einschränkung vom konkreten Fall ab, schaut einfach, wo das Problem für euer erstes S lag.

Es kann natürlich aus sein, dass keins existiert, wenn dies der Fall ist seht ihr das aber in der Regel schnell.

Habt ihr ein S, dann zeigt die nötigen Eigenschaften:

- S ist nichtleer
- S ist Back & Forth System

– Back:

Sei $F \in S$, also F bildet von C nach D isomorph ab und gelte $b \in B \setminus \text{Im}(F)$.
Dann muss für dieses beliebige b gelten, dass ein $a \in A \setminus \text{Dom}(F)$ und damit ein F' existiert mit :

$$F': A \cup \{a\} \rightarrow B \cup \{b\},$$

also ein $F'(a) = b$, welches nur für a anders abbildet und die Isomorphie-Eigenschaften erhält.

Wenn b also mit x in einer Relation war,
so muss dies auch für a und $F'^{-1}(x)$ der Fall sein usw.

Wenn wir zeigen können, dass wir immer ein solches a finden ist Back fertig, falls nicht stimmt S nicht.

– Forth:

Ziemlich gleich zu Back

$F \in S$ und $a \in A \setminus \text{Dom}(F)$ beliebig

Falls wir ein $b \in B \setminus \text{Im}(F)$ finden, für das wir $F'(a) = b$ setzen können
(wieder ist F' nur bei a zu F unterschiedlich) und dass die Isomorphie behält
sind wir mit Forth fertig.

Haben wir beides erfolgreich gezeigt gibt es ein nichtleeres Back & Forth System und die Strukturen sind elementar äquivalent.