

---

## Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!

Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf>

Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

### Aufgabe 1 (6 Punkte).

Die Sprache  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$  der  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume besteht aus einem Konstantenzeichen  $0$ , einem binären Funktionszeichen  $+$  sowie aus einstelligen Funktionszeichen  $(\lambda_q)_{q \in \mathbb{Q}}$  für die Skalarmultiplikation mit  $q$ . Jeder  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum lässt sich als  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$ -Struktur betrachten.

- (a) Schreibe in der Sprache  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$  eine Theorie  $T$ , deren Modelle genau alle  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume sind. Ist diese Theorie endlich axiomatisierbar?
- (b) Sei  $V$  ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Falls  $V \neq 0$ , zeige, dass es eine elementare Erweiterung  $V'$  von  $V$  (als  $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$ -Struktur) gibt, so dass  $\dim_{\mathbb{Q}} V' \geq 2$ .
- (c) Sei nun  $\mathcal{K}$  eine axiomatisierbare Klasse von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen derart, dass jeder Vektorraum  $V$  aus  $\mathcal{K}$  endlichdimensional ist. Schließe daraus, daß  $\mathcal{K}$  nur aus dem trivialen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum besteht.

### Aufgabe 2 (8 Punkte).

Sei  $\mathcal{L} = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$  die Sprache, welche aus einstelligen Relationszeichen  $P_i$  besteht.

- (a) Gib eine Theorie  $T$  an, in deren Modellen  $\mathcal{M}$  die Kollektion  $\{P_i^{\mathcal{M}} : i \in \mathbb{N}\}$  aus unendlichen, paarweise disjunkten Mengen besteht.
- (b) Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass jedes Modell  $\mathcal{M}$  von  $T$  eine elementare Erweiterung  $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$  derart besitzt, dass es unendlich viele Elementen in  $N \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i^{\mathcal{N}}$  gibt.
- (c) Mit Hilfe eines Back-and-Forth-Systems zeige, dass je zwei Modelle, in denen das Komplement von  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i^{\mathcal{N}}$  unendlich ist, elementar äquivalent sind.
- (d) Schließe daraus, dass  $T$  vollständig ist.

- a)

Unsere Theorie muss enthalten:

- Jedes  $P_i^{\mathcal{M}}$  hat unendlich viele verschiedene Elemente
- Je zwei  $P_i, P_j$  haben kein gleiches Element

Und als Theorie:

$$T = \{\exists k_1, \dots, k_n (\bigwedge_{i \neq j} \neg k_i \doteq k_j) \wedge P_x(k_i) \mid n, x \in \mathbb{N}, i, j \leq n\} \\ \cup \{\neg \exists x (P_i(x) \wedge P_j(x)) \mid i \neq j \in \mathbb{N}\}$$

• c)

Wir zeigen, dass es ein nichtleeres Back & Forth-System mit der Kollektion  $S$  gibt.

- $S$  ist nichtleer

Seien  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  solche Strukturen.

Wenn gilt  $n \in P_i^{\mathcal{N}}$ , sowie  $m \in P_j^{\mathcal{M}}$ , dann ist  $F : \{n\} \rightarrow \{m\}$  partieller Iso.

Dies geht immer, da die  $P_i$  existieren und unendlich groß sein müssen.

$\Rightarrow S$  ist nichtleer

- Back & Forth-System

$$* \quad \boxed{\text{Back}} \\ \text{Sei } F \in S, n \in N \setminus \text{Im}(F)$$

Wir unterscheiden in:  $n$  ist in einer Menge  $P_i$  und  $N$  ist nicht in einer Menge  $P_i$

$$\cdot \quad n \in P_i^{\mathcal{N}}, i \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow m \in P_i^{\mathcal{M}} \setminus \text{Dom}(F)$$

.

**Aufgabe 3** (6 Punkte).

(a) Zeige, dass die Abstandsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  primitiv rekursiv ist.  
 $(x, y) \mapsto |x - y|$

(b) Zeige, dass die Funktion  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  primitiv rekursiv ist.  
 $(n, m) \mapsto n \underbrace{\cdot \cdot \cdot}_m^n$   $m$  Mal

**Hinweis:** Zeige zuerst, dass die Funktion  $(x, y) \mapsto x^y$  primitiv rekursiv ist.

- a)  
 $|x - y| := (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$   
 Sowohl  $+$ , als auch  $\dot{-}$  sind p. rek.

- b)  
 Wir zeigen  $x^y$  p. rek.:  

$$x^y := \begin{cases} 1, & \text{falls } y = 0 \\ x \cdot x^{y-1}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Und damit jetzt:

$$f(n, m) = \begin{cases} n, & \text{falls } m = 0 \\ n^{f(n, m-1)}, & \text{sonst} \end{cases}$$