Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Definition 2.14. Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent*, wir schreiben $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, falls sie dieselben Aussagen erfüllen. Dies bedeutet, dass für jede Aussage χ,

$$\text{falls } \mathcal{A} \models \chi, \text{ dann } \mathcal{B} \models \chi.$$

Abbildung 1: ./el-Eq

Definition 2.46. Eine Theorie T ist *widerspruchsfrei*, falls keine Aussage χ derart existiert, dass $T \vdash \chi$ und $T \vdash \neg\chi$. Ansonsten ist T widersprüchlich.
Eine widerspruchsfreie Theorie ist vollständig, falls $T \vdash \chi$ oder $T \vdash \neg\chi$, für jede Aussage χ.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Zeige mit Hilfe des Vollständigkeitssatzes, dass eine konsistente Theorie genau dann vollständig ist, wenn je zwei Modelle elementar äquivalent sind.

Sei T konsistente Theorie, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \mathscr{L}$-Strukturen, $\mathcal{A} \models T, \mathcal{B} \models T$

<u>ZZ:</u> T vollständig $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

<u>Beweis:</u>

- T vollständig $\Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$
  T vollständig und $\chi \mathscr{L}$-Aussage
  Gilt nun $\mathcal{A} \models \chi$:

  $\mathcal{A} \models \chi$

$\overset{\mathcal{A}\models T}{\Leftrightarrow} T \vdash \chi$
$\overset{\mathcal{B}\models T}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi$
$\overset{\text{B analog}}{\Rightarrow} \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

- $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow$ T vollständig
  Sei $\chi \mathscr{L}$-Aussage

  - $T \nvdash \chi$
    $\overset{\mathcal{A}\models T}{\Rightarrow} \mathcal{A} \nvdash \chi$
    $\overset{\chi \mathscr{L}\text{-Auss.}}{\Rightarrow} \mathcal{A} \vdash \neg\chi$

  - $T \vdash \chi$
    $\overset{\mathcal{B}\models T}{\Rightarrow} \mathcal{B} \vdash \chi$

  Da $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ kann nicht gleichzeitig $T \vdash \chi$ und $T \nvdash \chi$ gelten.
  $\Rightarrow$ T vollständig

Wir schreiben $x < y$, falls $x \leq y$ aber $x \neq y$.
Eine partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{S}$ ist *total*, oder *linear*, falls $x < y$ oder $y < x$ für alle $x \neq y$ aus $\mathcal{S}$.
Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{S}$.

- Ein Element x ist eine *obere Schranke* für die Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls $\gamma \leq x$ für alle γ aus Γ.
- Das Element x ist *maximal* in $\mathcal{S}$, falls die einzige obere Schranke der Teilmenge $\{x\}$ von $\mathcal{S}$ das Element x selbst ist, oder äquivalent dazu, dass kein y aus $\mathcal{S}$ mit $x < y$ existiert.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{S}$ die Kollektion aller Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$ mit höchstens 2 Elementen. Die Menge $\mathcal{S}$ ist partiell geordnet bezüglich Inklusion (siehe Appendix A im Skript).

(a) Gibt es eine obere Schranke für $\Gamma = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ in $\mathcal{S}$?

(b) Beschreibe alle maximalen Elemente von $\mathcal{S}$.

(c) Zeige, dass jede linear geordnete Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$ eine obere Schranke besitzt.

- a)
  ZZ: Es gibt keine obere Schranke B für Γ
  Beweis:
  B müsste Obermenge von {},{1},{2} und {3} sein und damit mindestens 1,2,3 enthalten.
  $\Rightarrow |B| \geq 3$ Damit ist B nicht in S. Widerspruch!

  $\Rightarrow$ Es gibt keine obere Schranke für Γ

- b)
  Die maximalen Elemente müssen 2-elementige Mengen sein.
  Wären sie kleiner, wären sie selbst Teilmenge einer solchen.
  Wären sie größer, wären sie nicht mehr in S.
  Damit sind alle 2-elementigen Teilmengen maximale Elemente.

- c)
  $\mathcal{S}$ sind alle maximal 2-Elementigen Teilmengen von {1,2,3,4}
  $\Rightarrow \Gamma$ sind ebenfalls solche, aber nicht alle.
  $\Rightarrow \forall A \in \Gamma$ ist Teilmenge von {1,2,3,4}

  $\bigcup_{A\in\Gamma}$ wäre obere Schranke für Γ, da es alle Elemente dessen enthält.

  Aber liegt $\bigcup_{A\in\Gamma}$ auch in $\mathcal{S}$?

  Wir zeigen, dass $\bigcup_{A\in\Gamma}$ maximal 2-Elementige Teilmenge von {1,2,3,4} ist.
  Das ist dann der Fall, wenn für $A, B \in \Gamma : (A \cup B) \in \mathcal{S}$

  Da $\mathcal{S}$ linear geordnet ist können wir unterteilen in:

  - $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \in \mathcal{S}$

  - $A = B \Rightarrow A \cup B = A \in \mathcal{S}$

  - $B \subset A \Rightarrow A \cup B = A \in \mathcal{S}$

  Damit folgt, dass $\bigcup_{A\in\Gamma} \in \mathcal{S}$ und damit obere Schranke ist.

Wir schreiben $x < y$, falls $x \leq y$ aber $x \neq y$.
Eine partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{S}$ ist *total*, oder *linear*, falls $x < y$ oder $y < x$ für alle $x \neq y$ aus $\mathcal{S}$.
Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{S}$.

- Ein Element x ist eine *obere Schranke* für die Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls $\gamma \leq x$ für alle γ aus Γ.
- Das Element x ist *maximal* in $\mathcal{S}$, falls die einzige obere Schranke der Teilmenge $\{x\}$ von $\mathcal{S}$ das Element x selbst ist, oder äquivalent dazu, dass kein y aus $\mathcal{S}$ mit $x < y$ existiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Zeige, dass jedes maximale Element einer linear geordneten Menge $(\mathcal{S}, \leq)$ das größte Element sein muss. Insbesondere gibt es höchstens ein maximales Element in $\mathcal{S}$.
Muss $\mathcal{S}$ ein maximales Element besitzen?

- a)
  ZZ: Sei (S,$\leq$) linear geordnet x maximales Element $\Rightarrow$ x größtes Element
  Beweis:
  Sei x maximales Element von S, also gelte:

  $\nexists y : x < y \Leftrightarrow \forall y : \neg x < y \quad (x \nleq y) \quad \Leftrightarrow \forall y : y \leq x$

  Wenn $x \neq y$ folgt mit linearer Ordnung $y < x$
  $\Rightarrow x$ ist größtes Element

- b)
  ZZ: Sei (S, $\leq$) linear geordnet, dann gibt es höchstens 1 maximales Element
  Beweis:
  Annahme: x und y sind maximale Elemente und $x \neq y$

  $\Rightarrow \nexists z : x < z$ und $\nexists z : y < z$
  $\overset{\text{linear und } x \neq y}{\Rightarrow} x < y$ oder $y < x$
  Damit gibt es für eines der beiden ein größeres Element.

- c)
  (0,1) hat im offenen Intervall kein maximales Element in $\mathbb{R}$. Alternativ: $(\mathbb{N}, \leq)$

Wir schreiben $x < y$, falls $x \leq y$ aber $x \neq y$.
Eine partielle Ordnung $\leq$ auf $\mathcal{S}$ ist *total*, oder *linear*, falls $x < y$ oder $y < x$ für alle $x \neq y$ aus $\mathcal{S}$.
Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf $\mathcal{S}$.

- Ein Element x ist eine *obere Schranke* für die Teilmenge Γ von $\mathcal{S}$, falls $\gamma \leq x$ für alle γ aus Γ.
- Das Element x ist *maximal* in $\mathcal{S}$, falls die einzige obere Schranke der Teilmenge $\{x\}$ von $\mathcal{S}$ das Element x selbst ist, oder äquivalent dazu, dass kein y aus $\mathcal{S}$ mit $x < y$ existiert.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**
Ein offenes Intervall I von $\mathbb{R}$ hat *beschränkte Länge*, falls $I = (a, b)$, mit $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$ (In diesem Fall ist $b - a$ die *Länge* von I). Sei $\mathcal{S}$ die Kollektion aller offenen Intervalle beschränkter Länge von $\mathbb{R}$. Durch Inklusion wird $\mathcal{S}$ partiell angeordnet.

(a) Zeige, dass je zwei Elemente aus $\mathcal{S}$ eine obere Schranke in $\mathcal{S}$ haben.

(b) Zeige, dass die Kollektion $\Gamma = \{(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ linear geordnet ist. Besitzt Γ eine obere Schranke in $\mathcal{S}$?

(c) Gibt es maximale Elemente in $\mathcal{S}$?

- a)
  <u>ZZ:</u> Seien $x, y \in S : \exists z \in S : y \leq z$ und $x \leq z$
  <u>Beweis:</u>
  Sei $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.

  Dann sei $z = (min\{x_1, y_1\}, max\{x_2, y_2\})$
  $\Rightarrow x \subseteq z$ und $y \subseteq z$
  $\Rightarrow x \leq z$ und $y \leq z$
  $\Rightarrow z$ ist obere Schranke von x und y

- b)

  - <u>ZZ:</u> $\Gamma = \{0, n\}_{n \in \mathbb{N}}$ linear geordnet
    <u>Beweis:</u>
    Seien $a, b \in \Gamma$ und $a \neq b \Rightarrow (0, n_a) \neq (0, n_b)$
    $\Leftrightarrow \{0, \ldots, n_a\} \subset \{0, \ldots, n_b\}$ oder $\{0, \ldots, n_b\} \subset \{0, \ldots, n_a\}$
    $\Leftrightarrow a < b$ oder $b < a$
    $\Leftrightarrow \Gamma$ ist linear geordnet

- <u>ZZ:</u> Es gibt keine obere Schranke
  <u>Beweis:</u>
  Annahme: Es gibt eine obere Schranke $B = (0, \dots, b)$
  $\Rightarrow \{0, \dots, n\} \subseteq \{0, \dots, b\}, \forall n \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow b > n, \forall n \in \mathbb{N}$ Widerspruch!

  Es gibt keine obere Schranke.

- c)
  <u>ZZ:</u> Es gibt kein maximales Element
  <u>Beweis:</u>

  - Version 1:
    Die Def. des maximalen Elements fordert eine obere Schranke,
    da es keine gibt, gibt es auch kein maximales Element.

  - Version 2:
    Wenn es ein n = (0,...,n) gibt, gibt es auch immer ein m = (0,...,n+1)
    $\Rightarrow$ es gibt kein Element in Γ, für dass es kein größeres gibt.

    Analog, in die negativen Zahlen hinein.