# Skript Modelltheorie

Lukas Metzger

14. November 2018

## 0 Motivation

Aus der Linearen Algebra

- $K$-Vektorräume, Untervektorräume, Homomorphismen
- Gruppen, Untergruppen, Homomorphismen
- Ringe, Unterringe, Homomorphismen
- Körper, Teilkörper, Homomorphismen

Entwicklungsschritte

- Suche nach allgemeiner Theorie $\Rightarrow$ universelle Algebra.
- Modelltheorie (universelle Algebra + Logik)
- Kategorientheorie

Beispiel von Ax

Sei $K$ ein Körper, und $P(X) \in K[X]$. $P$ definiert eine Abbildung $\tilde{P} : K \to K$.

$P$ hat die Hopf-Eigenschaft, wenn gilt:

Wenn $\tilde{P}$ injektiv ist, dann ist $\tilde{P}$ surjektiv.

Jedes Polynom hat über einem endlichen Körper die Hopf-Eigenschaft.

Formalisierung der Hopf-Eigenschaft

$$\forall y \forall z (P(y = P(z) \to y = z)$$
$$\forall w \exists v P(v) = w$$

Für jedes $n$

$$\forall x_0, \ldots, x_n \left( \forall y \forall z \left( \sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \to y = z \right) \to \forall w \exists v \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w \right)$$

Logik

$$\underset{\text{log. äquivalent}}{\sim} \forall x_0, \ldots \forall x_n \forall w \exists v \exists y \exists z \left( \sum_{i=0}^{n} x_i y^i = \sum_{i=0}^{n} x_i z^i \right) \to \sum_{i=0}^{n} x_i v^i = w$$

**Beispiel 0.1.**

$$\mathbb{F}_{p^n} \underset{\text{erfüllt}}{\models} HE(n) \underset{\forall\exists-\text{Präservation}}{\Rightarrow} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}}_{\tilde{\mathbb{F}}_p = \text{ der algebraische Abschluss von } \mathbf{F_p}} \models HE(n)$$

**Beispiel 0.2.** Aus dem Kompaktheitssatz folgt: $\mathbb{C} = \lim\limits_{p \to \infty} \tilde{\mathbb{F}}_p$

# 1 Grundbegriffe

## 1.1 $\mathcal{L}$-Strukturen

**Beispiel 1.1.** Der angeordnete Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \underbrace{+, \cdot}_{\text{zweistellig}}, \underbrace{-}_{\text{einstellig}}, \underbrace{0, 1}_{\text{konstanten}}, \underbrace{<}_{\text{zweistellige Relation}})$

**Definition 1.2** ($\mathcal{L}$-Struktur)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Menge von

- Funktionszeichen $f_i \quad (i \in I)$
- Relationszeichen $R_j \quad (j \in J)$

Jedes Zeichen hat ein festes $n \in \mathbb{N}$ als Stelligkeit (arity).

$\mathcal{L}$ heißt Sprache / Signatur / similarity type.

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ besteht aus

- einer nicht-leeren Menge $A$ (Universum, Träger, Grundmenge)

- einer $n$-stellige Funktion $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$ für jedes $n$-stellige Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$

- einer $n$-stellige Relation $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ für jedes $n$-stellige Relationszeichen $R \in \mathcal{L}$

$\underline{n = 0}$

$A^0 = \{\emptyset\}$

0-stellige Funktion in $\mathfrak{A}$: $f^{\mathfrak{A}} : \{\emptyset\} \to A$ ist eindeutig bestimmt durch $f(\emptyset) \in A$. Daher entsprechen 0-stellige Funktionen den Konstanten.

0-stellige Relationen in $\mathfrak{A}$:

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq \{\emptyset\} \begin{cases} \text{entweder} & R = \{\emptyset\} \mathrel{\widehat{=}} \text{wahr} \\ \text{oder} & R = \emptyset \mathrel{\widehat{=}} \text{falsch} \end{cases}$$

Daher entsprechen 0-stellige Relationszeichen den Aussagenvariablen

**Beispiel 1.3.** a) Zu jeder Menge $A \neq \emptyset$ und jeder Sprache $\mathcal{L}$ kann ich eine $\mathcal{L}$-Struktur mit Träger $A$ finden!

b) $\mathcal{L} = \{R\}$, $R$ 2-stelliges Relationssymbol

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= (\mathbb{Q}, <), \qquad \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_1} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \\ \mathfrak{Q}_2 &= (\mathbb{Q}, <), \qquad \text{d.h.} \quad R^{\mathfrak{Q}_2} = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid q_1 < q_2\} \end{aligned}$$

sind zwei verschiedene $\mathcal{L}$-Strukturen auf $\mathbb{Q}$.

c) $\mathcal{L}_{HGr} = \{\circ\}$ und $\mathcal{L}_G r = \{\circ, {}^{-1}, e\}$

Gruppen sind $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit:

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ

- $e^{\mathfrak{G}} \circ^{\mathfrak{G}} g = g \circ^{\mathfrak{G}} e^{\mathfrak{G}} = g$ für alle $g \in G$

- $g \circ^{\mathfrak{G}} g^{-1^{\mathfrak{G}}} = g^{-1^{\mathfrak{G}}} = e^{\mathfrak{G}}$

Alternativ sind Gruppen $\mathcal{L}_{HGr}$-Strukturen $\mathfrak{G}$ mit

- $\circ^{\mathfrak{G}}$ ist assoziativ

- es gibt ein neutrales Element

- es gibt inverse Elemente

**Definition 1.4.** Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. $h : A \to B$ heißt

a) $\mathcal{L}$-Homomorphismus, falls

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

für alle $n$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$, und $n$-stellige $f \in \mathcal{L}$ und

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (h(a_1), \ldots, h(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

für alle $n$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$, und $n$-stellige $R \in \mathcal{L}$.

b) Starker Homomorphismus, falls zusätzlich $\Leftrightarrow$ im zweiten Teil gilt.

c) $\mathcal{L}$-Einbettung falls $h$ injektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist.

d) $\mathcal{L}$-Isomorphismus falls $h$ bijektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus ist und $h^{-1}$ ebenfalls.

e) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen $\mathcal{L}$-Isomorph falls es ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt.

f) Ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ heißt $\mathcal{L}$-Automorphismus.

g) Falls $A \subseteq B$, dann heißt $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Unterstruktur von $\mathfrak{B}$ beziehungsweise $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Oberstruktur von $\mathfrak{A}$, falls die Identität $id_A : A \to B$ eine $\mathcal{L}$-Einbettung ist.

**Bemerkung 1.5.** Falls $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, dann wird jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ durch vergessen zu einer $\mathcal{L}'$-Struktur $\mathfrak{A}_{\restriction \mathcal{L}'}$ (Redukt von $\mathfrak{A}$).

**Bemerkung 1.6.** Jeder Halbgruppenhomomorphismus zwischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus.

Falls $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen sind und $h : G_1 \to G_2$ $L_{HGr}$ Homomorphismus (genau genommen $G_{1 \restriction \mathcal{L}_{HGr}}$ und $G_{2 \restriction \mathcal{L}_{HGr}}$) dann ist $h$ automatisch ein $\mathcal{L}_{Gr}$-Homomorphismus.

Dies stimmt nicht für Monoide statt Gruppen.

**Bemerkung 1.7.**

1) Wenn $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein injektiver Homomorphismus ist (d.h. es existiert Sprache $\mathcal{L}$, die im Hintergrund fest ist, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind $\mathcal{L}$-Strukturen, $h$ ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus) dann existiert auf $h(A)$ eine $\mathcal{L}$-Struktur $h(\mathfrak{A})$, so dass $h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} h(\mathfrak{A})$, aber $h(\mathfrak{A})$ ist nicht notwendigerweise Unterstruktur von $\mathfrak{B}$.

2) Der Schnitt von $\mathcal{L}$-Unterstrukturen ist wieder eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur.

**Folgerung 1.8.** Wenn $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $C \subset A$ ist, dann existiert die von $C$ erzeugte $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\langle C \rangle_{\mathcal{L}} = \langle C \rangle$ das heißt die kleinste Unterstruktur von $\mathfrak{A}$, deren Trägermenge $C$ enthält.

Die Trägermenge von $\langle C \rangle$ erhält man dadurch, dass man $C$ unter den Funktionen $f^{\mathfrak{A}}$ abschließt.

$R^{\langle C \rangle}$ ist dann $R^{\mathfrak{A}} \cap \langle C \rangle \times \cdots \times \langle C \rangle$

## 1.2 $\mathcal{L}$-Formeln

Verwendete Symbole:

- Funktions- und Relationszeichen aus $\mathcal{L}$:

$$f_i, R_j, \ldots, +, \circ, \leq$$

- Gleichheitszeichen: $\doteq$ (Zieglersche Konvention)
- Klammern: ()
- Quantoren: $\forall \quad \exists$
- aussagenlogische Junktoren: $\underset{\text{Negation}}{\neg}, \underset{\text{und}}{\wedge}, \underset{\text{oder}}{\vee}, \underset{\text{Implikation}}{\rightarrow}, \underset{\text{Äquivalent}}{\leftrightarrow}, \underset{\text{Falsum}}{\perp}, \underset{\text{Verum}}{\top}$
- Individuenvariablen: $v_0, v_1, \ldots$

**Definition 1.9** ($\mathcal{L}$-Terme)**.** $\mathcal{L}$-Terme sind:

- Individuenvariablen
- Wenn $f$ ein $n$-stelliges Funktionszeichen in $\mathcal{L}$ ist und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind $\mathcal{L}$-Terme dann ist $f\tau_1 \ldots \tau_n$ ein $\mathcal{L}$-Term.

**Bemerkung 1.10.**

- Es gilt die eindeutige Lesbarkeit der Terme
- Bei Zeichen wie $+, \cdot$ schreibt man traditionell $v_1 + v_2$ statt $+v_1v_2$ muss aber bei Verschachtelungen klammern.

**Definition 1.11** (Auswertung von Termen in Strukturen)**.** Eine Belegung der Individuenvariablen mit Elementen einer Struktur für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \{v_0, v_1, \dots\} \to A$.

Die Auswertung von einem Term in einer Struktur bezüglich einer Belegung $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ist induktiv definiert durch:

$$\begin{aligned} v_i^{\mathfrak{A}}[\beta] &:= \beta(v_i) \\ f\tau_1 \dots \tau_n{}^{\mathfrak{A}}[\beta] &:= f^{\mathfrak{A}}(\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \end{aligned}$$

**Definition 1.12** ($\mathcal{L}$-Formeln)**.** $\mathcal{L}$-Formeln sind

- $\bot \quad \top$
- $\tau_1 \doteq \tau_2$ für $\mathcal{L}$-Terme $\tau_1, \tau_2$
- $R\tau_1 \dots \tau_n$ für $\mathcal{L}$-Terme $\tau_1, \dots, \tau_n$ und $n$-stelliges $R \in \mathcal{L}$

**Definition 1.13** (Auswertung von $\mathcal{L}$-Formeln in Strukturen)**.**
$\mathfrak{A}$ ist Modell von $\varphi$ unter $\beta$ oder formal $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$

- stets gilt $\mathfrak{A} \models \top[\beta]$
- nie gilt $\mathfrak{A} \models \bot[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models \ulcorner \tau_1 \doteq \tau_2 \urcorner[\beta] \Leftrightarrow \tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta] = \tau_2^{\mathfrak{A}}[\beta]$
- $\mathfrak{A} \models R\tau_1 \dots \tau_n[\beta] \Leftrightarrow (\tau_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{A}}[\beta]) \in R^{\mathfrak{A}}$
- Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ $\mathcal{L}$-Formeln sind, dann auch

| | |
|---|---|
| $\neg\varphi$ | $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi[\beta]$ |
| $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ | $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ und $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$ |
| $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ oder $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$ |
| $(\varphi_1 \to \varphi_2)$ | $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \to \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow$ Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta]$ dann $\mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta]$ |
| $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ | $\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\beta])$ |
| $\exists v_i \varphi$ | Es gibt ein $a \in A$ so dass $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta \frac{a}{v_i}\right]$ |
| $\forall v_i \varphi$ | Für alle $a \in A$ gilt dass $\mathfrak{A} \models \varphi\left[\beta \frac{a}{v_i}\right]$ |

**Beispiel 1.14.** $\underbrace{\forall v_0 \, ((\forall v_1 \quad \underbrace{Rv_0v_1}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_1} \quad ) \vee Rv_1v_0)}_{\text{Wirkungsbereich } \forall v_0}$

Variablen im Wirkungsbereich eines Quantors heißen gebundene Variablen, alle anderen heißen freie Variablen.

**Bemerkung 1.15.** $\tau^{\mathfrak{A}}[\beta]$ beziehungsweise $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ hängt nur insofern von $\beta$ ab, als man wissen muss, was $\beta$ mit den freien Variablen macht.

**Definition 1.16** ($\mathcal{L}$-Aussage)**.** Eine $\mathcal{L}$-Aussage ($\mathcal{L}$-Satz, geschlossene Formel) ist eine $\mathcal{L}$-Formel ohne freie Variablen.

**Satz 1.17.** Für $\mathcal{L}$-Aussagen $\varphi$ ist $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ unabhängig von $\beta$.

Man schreibt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi$$
$$\mathfrak{A} \not\models \varphi$$

**Definition 1.18.**

1) Eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi$ ist allgemeingültig ($\models \varphi, \vdash \varphi$), falls $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ für alle $\mathfrak{A}$ und $\beta$.

2) $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi$ und $\psi$ sind logisch äquivalent ($\varphi \sim \psi$), falls

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

für alle $\mathfrak{A}$ und $\beta$.

3) $\psi$ folgt aus $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$, falls:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_i[\beta] \text{ für alle } i \in I \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \psi[\beta] \text{ für alle } \mathfrak{A} \text{ und } \beta$$

**Bemerkung 1.19.** $\varphi \sim \psi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$

**Bemerkung 1.20.** Für $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ und eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi$ gilt: $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$

**Satz 1.21.** Jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi$ ist äquivalent zu einer $\mathcal{L}$-Formel in der folgenden Form:

$$\underbrace{Q_1 v_{i_1} \ldots Q_n v_{i_n}}_{\text{pränexe Normalform}} \underbrace{\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{k \in K_j} (\neg)\varphi_1 i, j}_{\text{disjunktive Normalform}}$$

mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$.

## 1.3 Theorien

**Definition 1.22.** 1) Eine $\mathcal{L}$-Theorie $T$ ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen.

2) Eine Struktur $\mathfrak{A}$ ist Modell einer Theorie $T$, $\mathfrak{A} \models T$, falls $\mathfrak{A} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in T$..

3) $\mathrm{Mod}(T) = \{\mathfrak{A}\ \mathcal{L}\text{-Struktur} \mid \mathfrak{A} \models T\}$ heißt Modellklasse von $T$.
Achtung: $\mathrm{Mod}(T)$ ist im Allgemeinen keine Menge!

4) $T$ ist konsistent (bzw. Widerspruchsfrei) falls $T$ mindestens ein Modell hat (d.h. $\mathrm{Mod}(T) \neq \emptyset$).

5) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von $\mathcal{L}$-Strukturen heißt elementar, falls es eine Theorie $T$ gibt mit $\mathrm{Mod}(T) = \mathcal{K}$.

6) Sei $\mathfrak{A}$ $\mathcal{L}$-Struktur. Dann ist

$$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

die vollständige Theorie von $\mathfrak{A}$.

7) Zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, falls $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

**Beispiel 1.23.**

1) Wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist und $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{B}$ bereits isomorph zu $\mathfrak{A}$.

2) $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$, da

$$(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1) \not\models \exists v_0(v_0 \cdot v_0 = 1 + 1)$$
$$(\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \models \exists v_0(v_0 \cdot v_0 = 1 + 1)$$

3) $(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1) \equiv (\mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1)$ mit $\overline{\mathbb{Q}} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{ es gibt ein } P \in \mathbb{Q}[X] \text{ so dass } P(c) = 0\}$ (algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$) (Beweis dazu ist nicht trivial)

**Definition 1.24.** Seien $T, T'$ $\mathcal{L}$-Theorien, $\varphi$ $\mathcal{L}$-Aussage

1) $T \vdash \varphi$, falls gilt

$$\mathfrak{A} \models T \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi$$

für alle $\mathfrak{A}$.

2) $T^{\vdash} := \{\varphi\ \mathcal{L}\text{-Aussage}n \mid T \vdash \varphi\}$ heißt der deduktive Abschluss von $T$.

3) $T$ ist deduktiv abgeschlossen $:\Leftrightarrow T = T^{\vdash}$.

4) $T$ und $T'$ heißen äquivalent $T \equiv T'$ falls $T^{\vdash} = T'^{\vdash}$.

**Bemerkung 1.25.**

- $T \subseteq T^{\vdash} = T^{\vdash^{\vdash}}$
- $\mathfrak{A} \models T \Rightarrow \mathfrak{A} \models T^{\vdash}$ beziehungsweise $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T^{\vdash})$
- $T^{\vdash}$ ist die maximale Theorie $T' \supseteq T$ mit der Eigenschaft $\mathrm{Mod}(T) = \mathrm{Mod}(T^{\vdash})$

**Bemerkung 1.26.** Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\varphi' \sim \varphi$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi'$.

Daher unterscheidet man ab sofort logisch äquivalente Formeln nicht mehr.

Formal: definiere $\mathfrak{A} \models \varphi/\sim$ für Äquivalenzklassen $[\varphi] = \varphi/\sim = \{\varphi' \mid \varphi \sim \varphi'\}$

**Satz 1.27** (Tarski-Lindenbaum-Algebren)**.** Die $\mathcal{L}$-Formeln bis auf logische Äquivalenz bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{L})$. Die Formeln deren freie Variablen in $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ enthalten sind bilden eine boolesche Algebra $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ das bedeutet:

$\mathcal{F}_i(\mathcal{L})$ ist eine partielle Ordnung $[\varphi] \leq [\psi]$ falls $\vdash (\varphi \to \psi)$ mit

- einem maximalen Element $[\top]$
- einem minimalen Element $[\bot]$
- je zwei Elemente $[\varphi], [\psi]$ haben
  - ein Supremum $[(\varphi \vee \psi)]$
  - ein Infimum $[(\varphi \wedge \psi)]$
- jedes Element $[\varphi]$ hat ein Komplement $\neg\varphi$ das heißt
  - $[(\varphi \wedge \neg\varphi)] = [\bot]$ und
  - $[(\varphi \vee \neg\varphi)] = [\top]$

Die Boolesche Algebra ist dann die Struktur $(\mathcal{F}_i(\mathcal{L}), \wedge, \vee, \neg, \top, \bot)$ wobei $[\varphi] \wedge [\psi] = [(\varphi \wedge \psi)]$ etc.

**Definition 1.28.** Wenn $\mathfrak{B} = (B, \cap, \cup^C, 0, 1)$ beziehungsweise $(B, \subseteq)$ eine Boolesche Algebra ist, dann ist

$$\mathfrak{B}^* = (B, \cup, \cap, {}^C, 1, 0) \text{ beziehungsweise } (B, \supseteq)$$

ebenfalls eine Boolesche Algebra, die duale Algebra und

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}^*, b \mapsto b^C$$

ist Isomorphismus Boolescher Algebren. Insbesondere gilt

$$(a \cup b)^C = a^C \cap b^C$$
$$(a \cap b)^C = a^C \cup b^C$$

**Satz 1.29** (Stonescher Repräsentationssatz)**.** Jede Boolesche Algebra ist Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra.

**Bemerkung 1.30.** $\varphi \vdash \psi$ ist partielle Ordnung auf den Äquivalenzklassen $[\varphi]$.

- reflexiv: $\varphi \vdash \varphi$
- transitiv: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \chi \Rightarrow \varphi \vdash \chi$
- antisymmetrisch: $\varphi \vdash \psi, \psi \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \sim \psi$

**Definition 1.31** (Filter)**.** Ein Filter in einer Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ ist eine Teilmenge $F \subseteq B$ mit

- $1 \in F, 0 \notin F$
- Wenn $b \in F, b \subseteq b'$ dann $b' \in F$
- Wenn $b_1, b_2 \in F$, dann auch $b_1 \cap b_2 \in F$

**Bemerkung 1.32.** Das duale Konzept heißt Ideal.

**Beispiel 1.33.**

- Wenn $0 \neq b \in B$, dann ist
$$\langle b \rangle := \{b^i \in B \mid b \subseteq b'\}$$
ein Filter, der von $b$ erzeugt Hauptfilter.
- $\mathfrak{P}(\mathbb{N}) = \text{Pot}(\mathbb{N})$ der Frechet-Filter ist
$$\{X \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus X \text{ endlich}\}$$
- Sei $T$ eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie, dann ist $T^{\vdash}$ ein Filter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ der von $T$ erzeugte Filter.

**Bemerkung 1.34.**

$$\begin{aligned} T \text{ ist inkonsistent} &\iff \bot \in T^{\vdash} \\ &\iff \text{alle } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ liegen in } T^{\vdash} \\ &\iff \text{es gibt ein } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \text{ mit } T \vdash \varphi \text{ und } T \vdash \neg\varphi \end{aligned}$$

**Definition 1.35.** 1) Eine $\mathcal{L}$-Theorie $T$ heißt vollständig, falls für jede $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L})$ entweder $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$ (insbesondere sind vollständige Theorien konsistent)

2) Ein Filter in einer Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ heißt Ultrafilter, falls $F$ Filter ist und für alle $b \in B$ gilt entweder $b \in F$ oder $b^C \in F$.

**Bemerkung 1.36.** 1) $T$ ist vollständig $\Leftrightarrow$ $T^\vdash$ ist Ultrafilter in $\mathcal{F}_0(\mathcal{L})$

2) $\mathfrak{A}$ ist $\mathcal{L}$-Struktur, dann ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}) \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ vollständig. Man schreibt auch $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})^\vdash$.

**Definition 1.37.** $\mathfrak{A}$ sei eine $\mathcal{L}$-Struktur.

1) Definiere

$$\mathcal{L}_A := \mathcal{L} \mathbin{\dot\cup} \{c_a \mid a \in A\}$$

$\mathfrak{A}$ wird kanonisch zu einer $\mathcal{L}_A$-Struktur $\mathfrak{A}_A$ expandiert durch

$$c_a^{\mathfrak{A}_A} = a$$

2) Das atomare Diagramm von $\mathfrak{A}, \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ besteht aus allen atomaren und negiert-atomaren $\mathcal{L}_A$-Aussagen, die in $\mathfrak{A}$ gelten

$$\mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomar oder } \varphi = \neg\psi, \psi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Das positive atomare Diagramm ist

$$\mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A}) = \{\varphi \text{ atomare } \mathcal{L}_A\text{-Aussage} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

3) Das elementare Diagramm von $\mathfrak{A}$ ist

$$\mathrm{Diag}_{\mathfrak{A}}(a) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) = \{\varphi \; \mathcal{L}_A\text{-Aussage}|\mathfrak{A}| = \varphi\}$$

**Satz 1.38.** $h : A \to B$ ist $\mathcal{L}$-Einbettung $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$ wobei $\mathfrak{B}_h = (\mathfrak{B}, (h(a))_{a\in A})$.

*Beweis.* $h$ injektiv

$\Leftrightarrow$ für alle $a \neq a'$ gilt $h(a) \neq h(a')$

$\Leftrightarrow$ für alle $a \neq a'$ gilt $\mathfrak{B}_h \models \underbrace{\neg c_a = c_a'}_{\in \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})}$

$h$ starker Homomorphismus

$\Leftrightarrow$ für alle $n$ und $a_1, \ldots, a_n$

$$\begin{cases} \text{falls } f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \overset{(\neq)}{=} a, \text{ dann } f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \overset{(\neq)}{=} h(a) \\ \text{falls (nicht) } R^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \text{ dann (nicht) } R^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{B}_h \models (\neg) f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_a \\ \mathfrak{B}_h \models (\neg) R(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \end{cases}$$

□

**Satz 1.39.** $h : A \to B$ ist $\mathcal{L}$-Homomorphismus $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Diag}^+(\mathfrak{A})$

*Beweis.* Wie eben. □

# 2 Elementar Unterstrukturen und Kompaktheit

## 2.1 Elementare Unterstrukturen

**Definition 2.1.** Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen.

1) $h : A \to B$ heißt elementare Abbildung, wenn für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi = \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ gilt:

   Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$, dann $\mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})$. Durch Betrachten von $\neg\varphi$ folgt

   $$\mathfrak{A} \models \varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))$$

2) $\mathfrak{A}$ heißt elementare Unterstruktur von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, falls $A \subseteq B$ und $id_A : A \to B$ elementare Abbildung.

**Bemerkung 2.2.** $h : A \to B$ elementar $\Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \supseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \mathrm{Diag}(\mathfrak{A})$

Also: Wenn $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ dann $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$.

Die Umkehrung gilt nicht!

Aber

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \not\Leftrightarrow (\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \text{ und } \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B})$$

**Beispiel 2.3.** $(\mathbb{N},<) \supseteq (\mathbb{N}\setminus\{0\},<)$

$(\mathbb{N},<) \cong (\mathbb{N}\setminus\{0\},<)$ also $(\mathbb{N},<) \equiv (\mathbb{N}\setminus\{0\},<)$

Variante 1: Sauber beweisen per Induktion über den Aufbau der Formeln

Variante 2: Ist klar

$(\mathbb{N}\setminus\{0\},<) \not\preccurlyeq (\mathbb{N},<)$ da $(\mathbb{N}\setminus\{0\},<) \models \neg\exists x\, x<1$ aber $(\mathbb{N},<) \not\models \exists x\, x<1$.

**Beispiel 2.4.** $\mathcal{L} = \{E\}$ $E$ zweistelliges Relationssymbol, $T = E$ ist Äquivalenzrelation

Falls $\mathfrak{A} \models T$ und $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ beliebige Oberstruktur. Dann bleibt Äquivalenz aus $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ erhalten und umgekehrt, aber es können Äquivalenzklassen in der Oberstruktur dazu kommen und größer werden.

1) Wenn eine endliche Zahl von Äquivalenzklassen existieren, dann bleibt die Anzahl in der elementaren Oberstruktur erhalten.

2) Wenn eine endliche Äquivalenzklasse existiert, dann bleibt deren Größe in der elementaren Oberstruktur erhalten.

3) Wenn jede Äquivalenzklasse $n$ Elemente hat, dann hat auch in jeder Oberstruktur jede Äquivalenzklasse $n$ Elemente.

4) Für jedes $n \in N\setminus\{0\}$ gibt es genau eine Äquivalenzklasse mit $n$ Elementen und keine unendliche Klasse. In einer Elementaren Oberstruktur kommen nur unendliche große Äquivalenzklassen dazu.

**Satz 2.5** (Tarskis Test)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, und $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, und $A \subseteq B$. Dann ist $A$ genau dann Träger einer elementaren Unterstruktur von $\mathfrak{B}$, wenn für alle $\mathcal{L}_A$-Formeln $\varphi(v_0) \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A)$, die in $\mathfrak{B}$ erfüllt sind, gilt dass sie mit einem $a \in A$ erfüllt sind.

Das heißt wenn $\mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$, dann existiert $x \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$.

*Beweis.* $\underline{\Rightarrow}$ Angenommen $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0)$ (wegen $\preccurlyeq$).

Also existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$, somit $\mathfrak{B} \models \varphi(a)$ (wegen $\preccurlyeq$)

$\underline{\Leftarrow}$

1) $\mathfrak{B} \models \exists v_0 v_0 \doteq v_0$

Also gibt es $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models a \doteq a$ insbesondere $A \neq \emptyset$.

2) Seien $f \in \mathcal{L}$ $n$-stellig, $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\mathfrak{B} \models \exists v_0 f a_1 \ldots a_n \doteq v_0$$

*Bedingung:* es existiert $a \in A$ mit $\mathfrak{B} \models f a_1 \ldots a_n \doteq a$.

Also $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$, das heißt $A$ ist Träger einer Unterstruktur.

3) Zeige per Induktion übe den Aufbau der $\mathcal{L}_A$-Formeln

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$$

- Induktionsanfang: $\varphi$ Atomar

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} &\Leftrightarrow id_A : A \to B \mathcal{L}_A\text{-Einbettung} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}_h \models \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}_A) = \mathrm{Diag}(\mathfrak{A}) \\ &\Leftrightarrow \text{für alle atomaren Formeln } \varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_A) \text{ gilt: } (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi) \end{aligned}$$

- Induktionsschritte

$$\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \underset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \not\models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi$$

$$\mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \mathfrak{A} \models \varphi_1 \\ \text{und} \\ \mathfrak{A} \models \varphi_2 \end{matrix}\right. \underset{\text{IV}}{\Longleftrightarrow} \left.\begin{matrix} \mathfrak{B} \models \varphi_1 \\ \text{und} \\ \mathfrak{B} \models \varphi_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \exists v_0 \varphi(v_0) &\Leftrightarrow \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \varphi(a) \\ &\underset{\text{IV}}{\Leftrightarrow} \text{ex. } a \in A \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a) \\ &\Rightarrow \text{ex. } a \in B \text{ mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \exists v_0 \varphi(v_0) \end{aligned}$$

Da $\{\neg, \wedge, \exists\}$ ein vollständiges Junktoren-Quantoren-System bilden ist die Aussage damit gezeigt.

$\square$

**Folgerung 2.6.** Sei $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Struktur, $S \subseteq B$. Dann existiert eine elementare Unterstruktur $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ mit $S \subseteq A$ und $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

*Beweis.* Definiere induktiv $S_i$ für $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_0 &\coloneqq S \\ S_{i+1} &\coloneqq S_i \cup \{a_\varphi \mid \varphi(x)\ \mathcal{L}_{S_i}\text{-Formel}\mathfrak{B} \models \exists\varphi(x) \text{ und } a_\varphi \text{ ist ein Element mit } \mathfrak{B} \models \varphi(a_\varphi)\} \\ S_\omega &\coloneqq \bigcup_{i \in \omega} S_i \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist $S_\omega$ Träger einer elementaren Unterstruktur $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$.

Denn: Wenn $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x), \varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_\omega})$.

Also existiert $n$ mit $\varphi \in \mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_n})$, dann existiert $a_\varphi \in S_{n+1} \subseteq S_\omega$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi(a_\varphi)$. Das heißt Tarskis Test gilt.

*Behauptung:* $|S_\omega| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$

Per Induktion $|S_i| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$

$\underline{i = 0}$

$$|S_0| = |S| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$$

$\underline{i \to i+1}$

$$\begin{aligned} |S_{i+1}| &\leq |S_i| + \underbrace{|\mathcal{F}_1(\mathcal{L}_{S_i})|}_{\text{endliche Folgen mit Zeichen aus } Z(S_i)} \\ &\leq |S_i| + |Z(S_i)^{<\omega}| \\ &= |S_i| + |Z(S_i)| \\ &= |S_i| + |\mathcal{L}| + \aleph_0 + |S_i| \\ &= |\mathcal{L}| + |S_i| + \aleph_0 \\ &\overset{\text{IV}}{\leq} |\mathcal{L}| + \max\{|\mathcal{L}|, |S|, \aleph_0\} + \aleph_0 \\ &= \max\{|L|, |S|, \aleph_0\} \end{aligned}$$

wobei

$$Z(S_i) = \mathcal{L} \cup \{v_0, v_1, \dots\} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \exists, \forall\} \cup S_i$$

□

**Bemerkung 2.7.** Für $|\mathcal{L}| = |S| = \aleph_0$ heißt die Folgerung auch Satz von Löwenheim.

Sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \dots$ eine gerichtete Vereinigung.

Es gibt eine eindeutig bestimmte $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}_\omega$ auf $\bigcup_{i \in \omega} A_i$, so dass $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_\omega$ für alle $i$.

**Satz 2.8.** Falls $\mathfrak{A}_0 \preccurlyeq \mathfrak{A}_1 \preccurlyeq \mathfrak{A}_2 \preccurlyeq \dots$ dann gilt $\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \mathfrak{A}_\omega$ für alle $i$.

*Beweis.* Induktion über den Aufbau der Formeln: $\mathfrak{A}_i \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A}_\omega \models \varphi$ für $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{L}_{A_i})$

Atomar: da $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_\omega$

Negation und Konjunktion: wie letztes Mal

Existenzquantor: $\mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi(x)$ dann $\mathfrak{A}_i \models \varphi(a)$ für ein $a \in A_i$.

$\overset{\text{IV}}{\Rightarrow} \mathfrak{A}_\omega \models \varphi(a)$ also $\mathfrak{A}_\omega \models \exists x \varphi(x)$.

$\mathfrak{A}_\omega \models \exists x \varphi(x)$, dann $\mathfrak{A}_\omega \models \varphi(a)$ für ein $a \in A_\omega$. Das heißt ex existiert $n \geq i$ mit $a \in A_n$.

Also gilt $\mathfrak{A}_n \models \varphi(a)$ und somit

$$\mathfrak{A}_i \preccurlyeq \mathfrak{A}_n \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi()x$$

□

## 2.2 Kompaktheitssatz und Ultraprodukte

**Satz 2.9** (Kompaktheitssatz)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und $T$ eine $\mathcal{L}$-Theorie.

$T$ hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teiltheorie $T_0 \subseteq T$ ein Modell hat.

**Folgerung 2.10** (Satz von Löwenheim-Skolem-Tarski aufwärts)**.** Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathfrak{A}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur. Dann existiert zu jeder Kardinalzahl $\kappa \geq \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$ ein $\mathfrak{B} \succcurlyeq \mathfrak{A}$ mit $|B| = \kappa$.

*Beweis.* Betrachte $\mathcal{L}^c := \mathcal{L}_A \mathbin{\dot\cup} \{c_i \mid i < \kappa\}$

und die $\mathcal{L}^C$-Theorie $T^c := \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A) \ \cup \ \{\neg c_i \doteq c_j \mid i \neq j\}$

Zeige mit dem Kompaktheitssatz: $T^c$ ist konsistent.

Sei $T_0 \subseteq_{\text{endl}} T^c$.

Dann $T_0 \subseteq \mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\neg c_i \doteq c_j \mid i, j \in$ endlicher Menge$\}$.

$\mathfrak{A}$ wird Modell von $T_0$, indem man die endlich vielen Konstanten in $T_0$ durch beliebige, paarweise verschiedene Elemente von $A$ interpretiert.

Sei $\mathcal{L}' \models T^c$.

Dann ist $\underbrace{\mathcal{L}' \restriction_{\mathcal{L}}}_{\text{Redukt auf } \mathcal{L}} \succcurlyeq \mathfrak{A}$ und $|B'| \geq \kappa$.

Wähle Teilmenge $S \subseteq B$, die $A$ enthält und so, dass $|S| = \kappa$. Wende Folgerung 2.6 auf $\mathfrak{B}'_A$ an.

Dann erhält man $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}'_A$ in $\mathcal{L}_A$ mit $|B| \geq |S| = \kappa$ und $|B| \leq \max\{|\mathcal{L}_A|, |S|, \aleph_0\} = \kappa$

Und

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \text{ in } \mathcal{L}_A \\ \mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{B}' \text{ in } \mathcal{L}_A \\ A \subseteq B' \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$$

$\square$

Ultraprodukte

Seien $\mathfrak{A}_i$ $\mathcal{L}$-Strukturen ($i \in I$) und sei

$$\prod_{i \in I} A_i = \{p : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid p(i) \in A_i\}$$

Mit dem Auswahlaxiom gilt:

$$A_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

Definiere $\mathcal{L}$-Struktur $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ auf $\prod_{i \in I} A_i$.

$$\begin{array}{rcl} f^{\mathfrak{A}}(p_1, \ldots, p_n) = p & \Leftrightarrow & \text{für alle } i \in I \; p(i) = f^{\mathfrak{A}_i}(p_1(i), \ldots, p_n(i) \\ (p_1, \ldots, p_n) \in R^{\mathfrak{A}} & \Leftrightarrow & \text{für alle } i \in I \; (p_1(i), \ldots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \end{array}$$

Betrachte Ultrafilter $\mathcal{U}$ in $\mathrm{Pot}(I)$ also

- $\mathcal{U} \subsetneq \mathrm{Pot}(I), \emptyset \notin \mathcal{U}$
- Wenn $X \in \mathcal{U}, X \subseteq Y$, dann $Y \in \mathcal{U}$
- Wenn $X, Y \in \mathcal{U}$, dann $X \cap Y \in \mathcal{U}$

- Wenn $X \subseteq I$, dann entweder $X \in \mathcal{U}$ oder $I \setminus X \in \mathcal{U}$.

Ultrafilter $\mathcal{U}$ definiert eine Art Maß auf $\operatorname{Pot}(I)$

$$\mu_{\mathcal{U}} = \chi_{\mathcal{U}} : X \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } X \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{wenn } X \notin \mathcal{U} \end{cases}$$

$X$ mit $X \in \mathcal{U}$ heißt auch $\mathcal{U}$-groß.

**Lemma 2.11.** Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ definiert eine Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{U}}$ auf $\prod_{i \in I} A_i$ durch

$$p \sim_{\mathcal{U}} p' :\Leftrightarrow \{i \in I \mid p(i) = p'(i)\} \in \mathcal{U}$$

*Beweis.*

- Reflexiv: klar, da $I \in \mathcal{U}$
- Symmetrie: klar per Definition
- Transitivität: $p \sim_{\mathcal{U}} p' \sim_{\mathcal{U}} p''$

$$\{i \mid p(i) = p''(i)\} \supseteq \{i \mid p(i) = p'(i)\} \cap \{i \mid p'(i) = p''(i)\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

$\square$

**Definition 2.12.** Seien $\mathfrak{A}_i (i \in I)$ $\mathcal{L}$-Strukturen, $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $I$.

Das Ultraprodukt der $\mathfrak{A}_i$ bezüglich $\mathcal{U}$ ist die $\mathcal{L}$-Struktur

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / \sim_{\mathcal{U}}$$

mit Träger $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$ und

$$\begin{aligned} (p_1/\sim_{\mathcal{U}}, \ldots, p_m/\sim_{\mathcal{U}}) \in R^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\sim_{\mathcal{U}}} \quad &:\Leftrightarrow \quad \{i \mid (p_1(i), \ldots, p_n(i)) \in R_i^{\mathfrak{A}}\} \in \mathcal{U} \\ f^{\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\sim_{\mathcal{U}}}(p_1/\sim_{\mathcal{U}}, \ldots, p_m/\sim_{\mathcal{U}}) = p/\sim_{\mathcal{U}} \quad &:\Leftrightarrow \quad \{i \mid f^{\mathfrak{A}_i}(p_1(i), \ldots, p_n(i) = p(i)\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

*Beweis.* <u>Wohldefiniertheit</u>

Seien $p_1 \sim_{\mathcal{U}} p'_1, \ldots, p_n \sim_{\mathcal{U}} p'_n$ zu zeigen ist

$$X := \{i \mid (p_1(i), \ldots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i \mid (p'_1(i), \ldots, p'_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Sei $X_j = \{i \mid p_j(i) = p'_j(i)\} \in \mathcal{U}$.

Falls $X \in \mathcal{U}$ auf $X \cap X_1 \cap \cdots \cap X_n \in \mathcal{U}$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} (p_1(i), \ldots, p_n(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i} \\ p_1(i) = p_1'(i) \\ \vdots \\ p_n(i) = p_n'(i) \end{array}\right\} \Rightarrow (p_1'(i), \ldots, p_n'(i)) \in R^{\mathfrak{A}_i}$$

Analog für Funktionszeichen.

Warum existiert überhaupt solch ein $p_{\mathcal{U}}$?

Man sieht, dass $f^{\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i}(p_1, \ldots, p_n)/\mathcal{U}$ es tut.

Falls $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ für alle $i \in I$ dann heißt $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}/\mathcal{U} = \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$ auch Ultrapotenz von $\mathfrak{A}$. $\square$

**Satz 2.13** (Satz von Łos)**.** Sei $\varphi$ eine $\mathcal{L}$-Aussage dann gilt

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$$

Insbesondere

- falls $\mathfrak{A}_i \models T$ für alle $i$, dann $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models T$
- falls $\mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_j$ für alle $i \in I$, dann $\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \equiv \mathfrak{A}_i$

**Folgerung 2.14.**

$$\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}, \quad a \mapsto (a, a, \ldots, a, a)/\mathcal{U}$$

ist elementare Einbettung, das heißt

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{A}^I/\mathcal{U}$$

*Beweis.* zum Satz von Łos (Skizze)

Induktion über den Aufbau der Formeln

- $\varphi$ atomar: Entweder Induktion über den Aufbau der Terme oder betrachte termreduzierte Formeln. Dazu sei $f$ einstellig und $c$ Konstante eine atomare Formel ist auch $ffc \doteq c$, diese ist aber äquivalent zu $\exists x(fc \doteq x \wedge fx \doteq c)$. Das heißt ohne Einschränkung kann man nur atomare Formeln der Formen $R\tau_1 \ldots \tau_n$ oder $\tau_1 \doteq \tau_2$ oder $f\tau_1 \ldots \tau_n \doteq \tau$ betrachten, wobei $\tau_i, \tau$ Konstanten oder Individuenvariablen sind.

- Satz von Łos für termreduzierte atomare Formeln ist im Wesentlichen die Definition der $\mathcal{L}$-Struktur auf $\prod A_i/\sim_{\mathcal{U}}$.

- Induktion:

  Für und

$$\begin{aligned}
&\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models (\varphi \wedge \psi) \\
\Leftrightarrow &\prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \phi \text{ und } \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \psi \\
\Leftrightarrow &I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U} \text{ und } I_\psi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \psi\} \in \mathcal{U} \\
\Leftrightarrow &\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi \wedge \psi\} = I_\varphi \cap I_\psi \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

  Für nicht

$$\begin{aligned}
&\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \neg\varphi \\
\Leftrightarrow &\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \not\models \varphi \\
\Leftrightarrow &I_\varphi = \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi\} \notin \mathcal{U} \\
\overset{\text{Ultra}}{\Leftrightarrow} &I \setminus I_\varphi \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \neg\varphi\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

  Für Existenz

$$\begin{aligned}
&\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \exists x\varphi \\
\Leftrightarrow &\text{ex existiert } p \text{ mit } \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \varphi(p/\mathcal{U}) \\
\overset{\text{Ind.}}{\Leftrightarrow} &\text{es existiert } p \text{ mit } \{i \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(p(i))\} \in \mathcal{U} \\
\Leftrightarrow &\{i \mid \text{ex } p(i) \in A_i \text{ mit } \mathfrak{A}_i \models \varphi(p(i))\} \in \mathcal{U} \\
\Leftrightarrow &\{i \mid \mathfrak{A}_i \models \exists x\varphi\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 2.15.** • $\langle i\rangle = \{X \subseteq I \mid i \in X\}$ Ultrafilter, der von $i$ erzeugte Haupt-Ultrafilter

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\langle i\rangle \cong \mathfrak{A}_i$$

- Mit Lemma von Zorn (bzw. AC): Jeder eigentliche Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.

**Definition 2.16.** Sei $I$ eine unendliche Menge, betrachte Filter der $\omega$-endlichen Mengen

$$\mathcal{F} = \{X \mid I \setminus X \text{ endlich}\}$$

$\mathcal{F}$ kann zu Ultrafilter $\mathcal{U}$ erweitert werden. Solche Ultrafilter heißen freie Ultrafilter. Dies sind die nicht-Haupt-Ultrafilter.

**Bemerkung 2.17.** Wenn $\mathfrak{A}$ endlich ist, dann ist $\mathfrak{A}^I/\mathcal{U} \cong \mathfrak{A}$.

Wenn $\mathfrak{A}$ unendlich ist und $\mathcal{U}$ frei ist, dann ist häufig $\mathfrak{A} \precneqq \prod \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$.

Wenn $|A_i| < |A_{i+1}|$ endlich ist und $\mathcal{U}$ frei, dann ist

$$\left|\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}\right| = 2^{\aleph_0}$$

Wenn $|A_i| = \aleph_0$ für alle $i$ und $\mathcal{U}$ frei,

$$\left|\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}\right| = 2^{\aleph_0}$$

**Satz 2.18.** Seien $\mathfrak{A}_i (i \in \mathbb{N})$ endliche $\mathcal{L}$-Strukturen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei nur endlich oft $|A_i| \leq n$. Sei $\mathcal{U}$ freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Dann ist

$$\left|\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}\right| = 2^{\aleph_0}$$

*Beweis.*

$$\left|\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i\right| \leq \sup\{|A_i| \mid i \in \mathbb{N}\}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Damit

$$\left|\prod A_i/\mathcal{U}\right| \leq 2^{\aleph_0}$$

<u>Für $\geq$:</u> Ohne Einschränkung sei $|A_i| \leq |A_{i+1}|$ und $|A_i| = \{0, \ldots, n_i\}$ mit $n_i = |A_i| - 1$.

Für $r, s \in \mathbb{R} \cap [0, 1)$ konstruiere $p_r \in \prod_{i \in I} A_i$ mit $r \neq s$, dann stimmen $p_r$ und $p_s$ nur auf endlich vielen Indizes überein.

$$p_r(i) :\Leftrightarrow j \Leftrightarrow r \in \left[\frac{j}{|A_i|}, \frac{j+1}{|A_i|}\right)$$

$$\Rightarrow p_r \nsim_{\mathcal{U}} p_s$$

$\square$

*Beweis.* zum Kompaktheitssatz

Sei $T$ eine endlich erfüllbare $\mathcal{L}$-Theorie. Zu zeigen ist $T$ ist konsistent.

Sei $I = \mathrm{Pot}_{<\aleph_0}(T) = \{T_0 \mid T_0 \subseteq_{\mathrm{endl}} T\}$.

Für $T_0 \subseteq_{\mathrm{endl}} T$ d.h. $T_0 \in I$ sei $\langle T_0 \rangle = \{T_1 \in I \mid T_0 \subseteq T_1\}$.

Sei weiter $\mathcal{F} = \{\mathcal{X} \subseteq I \mid \text{ ex. } T_0 \in I \text{ mit } \langle T_0 \rangle \subseteq \mathcal{X}\}$.

$\mathcal{F}$ ist Filter auf $I$:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- Monotonie: per Definition
- $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{F}$, dann existiert $T_i \subseteq_{\mathrm{endl}} T$ mit $\langle T_i \rangle \subseteq \mathcal{X}_i$. Dann gilt
$$\langle T_1 \cup T_2 \rangle = \langle T_1 \rangle \cap \langle T_2 \rangle \subseteq \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$$

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ erweitert. Wähle für jedes $T_0 \in I$ ein Modell $\mathfrak{M}_{T_0} \models T_0$ und setze $\mathfrak{M} :- \prod_{T_0 \in I} \mathfrak{M}_{T_0} / \mathcal{U}$.

Mit Satz von Łos: prüfe, dass $\varphi \in T \Rightarrow \mathfrak{M} \models \varphi$.

$$\{T_1 \in I \mid \mathfrak{M}_{T_1} \models \varphi\} \supseteq \{T1 \in I \mid \varphi \in T_1\} = \langle \{\varphi\} \rangle \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$$

$\square$

**Definition 2.19.** $(X, \mathcal{O})$ heißt topologischer Raum und $\mathcal{O}$ heißt Topologie auf $X$), falls

- $\mathcal{O} \subseteq$ Pot(X)
- $\mathcal{O}$ ist abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte und beliebiger Vereinigungen
- Insbesondere $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

$U \in \mathcal{O}$ heißt offen bzw. offene Menge, $A \subseteq X$ mit $X \setminus A \in \mathcal{O}$ heißt abgeschlossen bzw. abgeschlossene Menge.

**Definition 2.20.** $Q \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ heißt Basis einer Topologie $\mathcal{O}$, falls $Q$ abgeschlossen ist bezüglich endlicher Schnitte.

Dann ist $\mathcal{O} = \{\bigcup Q_i \mid Q_i \in Q\} \cup \{\emptyset, X\}$ eine Topologie, und zwar die kleinste, in der alle Mengen aus $Q$ offen sind.

**Definition 2.21.** Eine Abbildung heißt stetig, falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind.

Sei $\mathfrak{B}$ eine Boolesche Algebra und $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ die Menge der Ultrafilter in $\mathfrak{B}$. Damit ist $\mathcal{U} \in \operatorname{Pot}(B)$ also $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}} \in \operatorname{Pot}(\operatorname{Pot}(B))$.

Für $a \in B$, definiere

$$[[a]] := \{U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{B}} \mid a \in U\} \subseteq \mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$$

**Satz 2.22.**

1) $[[\cdot]] : \mathfrak{B} \hookrightarrow \operatorname{Pot}(\mathcal{U}_{\mathfrak{B}})$ ist Einbettung Boolescher Algebren (Teil des Stoneschen Repräsentationssatzes)

2) $\{[[a]] \mid a \in B\}$ ist Basis einer Topologie auf $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$.

**Definition 2.23.** $\mathcal{U}_{\mathfrak{B}}$ heißt auch Stone-Raum $S(\mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$.

*Beweis.*

1)
   - $[[0]] = \emptyset$, da $0 \notin U$ per Definition
   - $[[1]] = U_{\mathfrak{B}}$, da $1 \in U$ für jedes $U$
   - $[[a \cap b]] = [[a]] \cap [[b]]$ folgt aus den Filtereigenschaften
   - $[[a \cup b]] = [[a]] \cup [[b]]$ folgt aus de Morgan und dem nächsten Schritt
   - $[[a^c]] = \{U \mid a^c \in U\} \overset{\text{ultra}}{=} \{U \mid a \notin U\} = [[a]]^c$

   Das heißt $[[\cdot]]$ ist Homomorphismus der Booleschen Algebra.

   Fehlt noch injektivität: Seien $a \neq b$: Zu zeigen ist, es existiert ein Ultrafilter $U$ der $a$ und $b$ trennt, das heißt $a \in U \Leftrightarrow b \notin U$.

   Es gilt $a \not\subseteq b$ oder $b \not\subseteq a$ das heißt $a \cap b^c \neq \emptyset$ oder $a^c \cap b \neq \emptyset$.

   Es existiert also ultrafilter $U$ mit $a \cap b^c \in U$ oder $a^c \cap b \in U$.

   Falls z.B. $a \cap b^c \in U$, dann ist $a \in U, b^c \in U \Rightarrow b \notin U$.

2) Wegen $[[a]] \cap [[b]] = [[a \cap b]]$

□

**Bemerkung 2.24.** Die Basis-offenen Mengen $[[a]]$ sind auch abgeschlossen, da $[[a]]^c = [[a^c]]$.

Mengen die offen und abgeschlossen sind heißen clopen.

Topologische Räume mit einer Basis aus clopen Mengen sind total unzusammenhängend.

**Definition 2.25.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt kompakt, falls die endliche Überdeckungseigenschaft gilt:

Falls $X = \bigcup_{i \in I}\{U_i \mid U_i \text{ offen}\}$ dann existiert $I_0 \subseteq_{\text{endl}} I$ mit $X = \bigcup\{U_i \mid i \in I_0\}$

Oder in äquivalenter Formulierung: $\bigcap\{A_i \mid A_i \text{ abgeschlossen}, i \in I\} = \emptyset$ dann existiert $I_0 \subseteq_{\text{endl}} I$ mit $\bigcap\{A_i \mid i \in I_0\} = \emptyset$.

**Satz 2.26.** Der Stone-Raum ist kompakt.

**Bemerkung 2.27.** Der Kompaktheitssatz ist äquivalent zur Kompaktheit von $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$.

Ohne Einschränkung sei $\perp \notin T$

$$T \text{ inkonsistent} \qquad \Leftrightarrow \qquad \bigcap_{\varphi \in T} [[\varphi]] = \emptyset$$

und nach Kompaktheitssatz sagt es gibt endliches $T_0 \subseteq T$ so dass $T_0$ inkonsistent ist.

Und mit der Kompaktheit von $S(\mathcal{F}_0(\mathcal{L}))$ existieren $\varphi_0, \ldots, \varphi_n \in T$ mit $[\varphi_0[]] \cap \cdots \cap [[\varphi_n]] = \emptyset$.

Wir können im ersten Fall $T_0 = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ mit $\varphi_i$ aus dem zweiten Teil wählen.

### 2.2.1 Beispiele und Anwendungen

**Satz 2.28** (Test von Vaught)**.** $T$ sei eine konsistente $\mathcal{L}$-Theorie ohne endliche Modelle und es gebe $\kappa > \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\}$, so dass $T$ bis auf Isomorphie höchstens genau ein Modell der Kardinalität $\kappa$ hat. ($T$ ist $\kappa$-Kategorisch)

Dann ist $T$ vollständig.

*Beweis.* Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ zu zeigen ist $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. $A$ und $B$ sind nach Voraussetzung unendlich.

Sei $\kappa' > \max\{\kappa, |A|, |B|\}$. Nach Löwenheim-Skolem-Tarski gibt es $\mathfrak{A}' \succcurlyeq \mathfrak{A}, \mathfrak{B}' \succcurlyeq \mathfrak{B}$ mit $|A'| = |B'| = \kappa'$ und wiederum nach Löwenheim-Skolem-Tarski existieren $\mathfrak{A}'' \preccurlyeq \mathfrak{A}', \mathfrak{B}'' \preccurlyeq \mathfrak{B}'$ mit $|A''| = |B''| = \kappa$. Damit gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}'' \cong \mathfrak{B}'' \equiv \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$ und $\cong \Rightarrow \equiv$. □

**Beispiel 2.29.** 1) $K$-Vektorräume, bis auf Isomorphie ist ein $K$-Vektorraum durch seine Dimension bestimmt. $\dim_K(V) \geq |K| + \aleph_0 \Rightarrow |V| = \dim_K(V)$.

Übliche Axiomatisierung: $\mathcal{L}_{K\text{-VR}} = \{+, -, 0, (\lambda_k)_{k \in K}\}$ und

$$\begin{aligned} T_{K\text{-VR}} = &\text{ abelsche Gruppe} \\ &\cup \{\forall v \lambda_k v + \lambda_{k'} v = \lambda_{k+k'} v \mid k, k' \in K\} \\ &\cup \{\forall v \lambda_1 v = v\} \\ &\cup \dots \\ &\cup \{\text{es gibt unendlich viele Elemente}\} \end{aligned}$$

Aus LA: $T_{K\text{-VR}}$ ist $\kappa$-kategorisch für alle $\kappa \geq |K| + \aleph_0$.

Axiomatisierung von Vektorräumen über variablen Körpern

$$\mathcal{L} = \{+_V, -_V, 0_V, +_K, \cdot_K, -_K, 0_k, 1_k, V, K\}$$

mit $V, K$ einstellige Relationszeichen und man drückt aus $V, K$ ist Partition des Universums.

$$\begin{aligned} &\forall x (Vx \vee Kx) \\ &\neg \exists x (Vx \wedge Kx) \end{aligned}$$

und zusätzlich $+_V, -_V, 0_V$ ist abelsche Gruppe auf $V$ und z.B. $\forall x \forall y (Kx \to (x +_V y = 0_K))$.

$+_K, \cdot_k, \dots$ ist Körper auf $K$ und zusätzlich noch die Vektorraumaxiome.

2) Offene dichte lineare Ordnungen $\mathcal{L} = \{<\}$. Die Theorie dazu nennen wir $T_{DLO}$.

- offen: kein Maximum und kein Minimum
- dicht: $\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y))$

Beispiele sind $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$

*Satz von Cantor:* $T_{DLO}$ ist $\aleph_0$-kategorisch

*Beweis.* Seien $(A,<),(B,<)$ abzählbare, offene, dichte lineare Ordnungen.

Seien $\{a_i \mid i \in \omega\} = A, \{b_i \mid b \in \omega\} = B$ Aufzählungen der Universen.

Konstruiere induktiv ordnungserhaltende Bijektion $\beta : A \to B$ und setze $\beta(a_0) = b_0$.

<u>Ungerade Induktionsschritte:</u> Sei $\beta$ bereits auf $A_n = \{a_{i_0}, \ldots, a_{i_n}\}$ definiert, $|A_n|$ ist ungerade. Idee: stelle sicher, dass $\beta$ surjektiv wird.

Wähle $j$ minimal mit $b_j \notin \beta(A_n)$. Wähle $a_{i_{n+1}}$ so, dass $\beta(a_j) \coloneqq b_j$ eine ordnungserhaltende Fortsetzung des bisher konstruierten $\beta$ ist. $a_{i_{n+1}}$ existiert, da offen und dicht, setze $b_{i_{n+1}} = b_j$.

<u>Gerade Induktionsschritte:</u> Idee: Stelle sicher, dass $\beta$ totale Funktion ist.

Sei $j$ der kleinste Index, so dass $\beta(a_j)$ noch nicht definiert ist. Wähle $b_{i_{n+1}}$ so, dass $a_{i_{n+1}} \coloneqq a_{i_{n+1}} \coloneqq a_j \mapsto b_{i_{n+1}}$ ordnungserhaltende Fortsetzung ist. $\square$

Folgerung: $T_{DLO}$ ist vollständig.

Aber: Für $k > \aleph_0$, gibt es $2^\kappa$ viele Modelle der Mächtigkeit $\kappa$, die paarweise $\ncong$.

<u>Anwendungen</u>

- Vollständigkeit von Theorien
- Nichtstandardmodelle

  Nichtstandard-Modelle der Peano-Arithmetik

  $$(\mathbb{N},+,\cdot) \precneqq \mathbb{N}^*$$

  Nichtstandard-Analysis

  $$(\mathbb{R},+,\cdot,<) \precneqq \mathbb{R}^*$$

  Unendliches Modell der Theorie der endlichen Körper der Charakteristik $p$, pseudoendlicher Körper

  $$\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}/\mathcal{U}$$

  Besonderer Automorphismus

  $$\prod_{p \text{ prim}} (\tilde{\mathbb{F}}_p, \mathrm{Frob}\colon x \mapsto x^p)/\mathcal{U} = (\mathbb{C},\alpha)$$

- Transfer-Prinzipien

  $\mathcal{L}_{K_p} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$

  Eine $\mathcal{L}_{K_p}$-Aussage $\varphi$ gilt in allen Körpern der Charakteristik $0 \Leftrightarrow$ ex existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\varphi$ in allen Körpern der Charakteristik $p$ mit $p \geq n_0$ gilt.

- Nicht-Axiomatisierbarkeit

# 3 Quantorenelimination

**Beispiel 3.1.** $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1)$ hat keine Quantorenelimination: $\exists y\ y \cdot y = 0$ ist in $\mathfrak{R}$ nicht äquivalent zu einer Formel ohne Quantoren.

$\mathfrak{R}' = (\mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1, \leq)$ hat Quantorenelimination hier gilt dann:

$$\exists y\ y \cdot y = x \qquad \sim \qquad 0 \leq x$$

## 3.1 Erhaltungssätze (Präservationssätze)

**Definition 3.2.** $\varphi$ $\mathcal{L}$-Formel heißt

- quantorenfrei, wenn kein Quantor $\forall, \exists$ in $\varphi$ vorkommt
- universell, wenn $\varphi$ von der Form ist:

$$\forall v_{i_1} \dots \forall v_{i_n} \psi \qquad n \in \mathbb{N}, \psi \text{ quantorenfrei}$$

- existenziell, wenn $\varphi$ von der Form ist:

$$\exists v_{i_1} \dots \exists v_{i_n} \psi \qquad n \in \mathbb{N}, \psi \text{ quantorenfrei}$$

- $\forall\exists$-Formel

$$\forall v_{i_1} \dots \forall v_{i_n} \exists v_{i_{n+1}} \dots v_{i_m} \psi \qquad n \leq m \in \mathbb{N}, \psi \text{ quantorenfrei}$$

**Bemerkung 3.3.** $(\forall x \varphi \wedge \forall y \psi)$ ist nicht universell aber äquivalent zu einer universellen Formel.

**Bemerkung 3.4.** Quantorenfreie, universelle, existentielle und $\forall\exists$-Formeln sind bis auf logische Äquivalenz abgeschlossen unter $\wedge, \vee$.

Quantorenfreie Formeln sind abgeschlossen unter $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

$\neg$ universell $\sim$ existentiell

$\neg$ existentiell $\sim$ universell

**Lemma 3.5.** Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ und $\varphi$ eine $\mathcal{L}_A$-Formel

1) Wenn $\varphi$ universell ist: $\mathfrak{B} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$

2) Wenn $\varphi$ existentiell ist: $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$

*Beweis.* 1) $\varphi = \varphi(\overline{a}) = \forall v_{i_1}, \ldots \forall v_{i_n} \psi(\overline{v}, \overline{a})$ mit $\psi$ quantorenfrei

$\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a})$

d.h. für jedes $\overline{b} \in B$ gilt $\mathfrak{B} \models \psi(\overline{b}, \overline{a})$

Insbesondere für jedes $\overline{b} \in A$ gilt $\mathfrak{B} \models \psi(\overline{b}, \overline{a})$ quantorenfrei

$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ : für jedes $\overline{b} \in A$ gilt $\mathfrak{A} \models \psi(\overline{b}, \overline{a})$

das heißt $\mathfrak{A} \models \underbrace{\forall \overline{v}\ \psi(\overline{v}, \overline{a})}_{\varphi(\overline{a})}$

2) analog

□

**Lemma 3.6** (Zieglers Trennungslemma)**.** Seien $T, T'$ Theorien und $\mathcal{H}$ eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen mit:

- $\perp, \top \in \mathcal{H}$
- $\mathcal{H}$ abgeschlossen unter $\wedge, \vee$

Dann sind äquivalent:

1) Für $\mathfrak{A} \models T, \mathfrak{B} \models T'$ gibt es $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi, \mathfrak{B} \models \neg\varphi$ ($\varphi$ trennt $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$)

2) Es gibt $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $T \vdash \varphi, T' \vdash \neg\varphi$ ($\varphi$ trennt $T$ von $T'$)

*Beweis.* $\underline{2) \Rightarrow 1)}$: klar

$\underline{1) \Rightarrow 2)}$: Sei $\mathfrak{A} \models T$ und sei $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}} := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$

$\mathcal{H}_{\mathfrak{A}} \cup T'$ ist inkonsistent.

$\mathfrak{B} \models \mathcal{H}_{\mathfrak{A}} \cup T'$ nach Voraussetzung existiert $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ (d.h. $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{A}}$) und damit $\mathfrak{B} \models \neg\varphi$ ↯

Kompaktheit: Es gibt $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}_{\mathfrak{A}}$ mit $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup T'$ ist inkonsistent. Und damit $T' \cup \{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n\}$ ist inkonsistent.

$\Leftrightarrow T' \vdash \neg(\underbrace{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n}_{\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{H}_{\mathfrak{A}}})$

$T \cup \{\neg\varphi_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A} \models T\}$ ist inkonsistent.

Kompaktheit: Es gibt $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m \models T$ mit

$$\begin{aligned}
&T \cup \{\neg\varphi_{\mathfrak{A}_1}, \ldots, \neg\varphi_{\mathfrak{A}_n}\} \text{ inkonsistent} \\
\Leftrightarrow &T \cup \{\neg\varphi_{\mathfrak{A}_1} \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_{\mathfrak{A}_n}\} \text{ inkonsistent} \\
\Leftrightarrow &T \cup \{\neg(\varphi_{\mathfrak{A}_1} \vee \cdots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n})\} \text{ inkonsistent} \\
\Leftrightarrow &T \vdash \underbrace{\varphi_{\mathfrak{A}_1} \vee \cdots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n}}_{\in \mathcal{H}}
\end{aligned}$$

Andererseits:

$$T' \vdash \neg\varphi_{\mathfrak{A}_1} \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_{\mathfrak{A}_n} \qquad \sim \qquad \neg(\varphi_{\mathfrak{A}_1} \vee \cdots \vee \varphi_{\mathfrak{A}_n})$$

□

<u>Notationen:</u> Sei $\Delta$ Menge von $\mathcal{L}$-Formeln, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen, $h : A \to B$

$$h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} :\Leftrightarrow h \text{ erhält die Gültigkeit von } \Delta\text{-Formeln mit Parametern aus } A$$

Das heißt

$$\mathfrak{A} \models \delta(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \delta(h(\overline{a}))$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{B}_h \models \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}_A) = \{\delta(\overline{a}) \mid \mathfrak{A} \models \delta(\overline{a}), \overline{a} \in A, \delta \in \Delta\}$$

- $\Delta$ atomar: $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \Leftrightarrow h$ Homomorphismus
- $\Delta$ atomar, negiert atomar $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \Leftrightarrow h$ Einbettung

- $\Delta$ quantorenfrei $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \Leftrightarrow h$ Einbettung

- $\Delta$ alles $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \Leftrightarrow h$ elementar

**Lemma 3.7.** Sei $T$ eine $\mathcal{L}$-Theorie, $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. $\Delta$ abgeschlossen bezüglich $\hat{\exists}$ (Umbenennung von Variablen)

$(v_0 \doteq c) \nsim v_1 \doteq c$

Dann sind äquivalent

1) Jedes $\varphi \in \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A})$ ist konsistent mit $T$ (d.h. es existiert $\mathfrak{M}_\varphi \models T \cup \{\varphi\}$)

2) Es gibt $\mathfrak{B} \models T$ und $h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}$ (d.h. es existiert $\mathfrak{B} \models T \cup \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}_A)$)

*Beweis.* $\underline{2) \Rightarrow 1)}$: klar

$\underline{1) \Rightarrow 2)}$: Zeige mit Kompaktheit: $T \cup \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}_A)$ ist konsistent.

Angenommen nicht. Dann gibt es $\delta_i(a_i)$ mit $T \cup \{\delta_1(\overline{a_1}, \dots, \delta_n(\overline{a_n}))\}$ inkonsistent

Ohne Einschränkung mit $\overline{a} = \overline{a_1} \cap \cdots \cap \overline{a_n}$

$$T \cup \{ \underbrace{\delta_1(\overline{a}), \dots, \delta_n(\overline{a})}_{\text{ersetze durch } \delta(\overline{a}) = \delta_1(\overline{a}) \wedge \cdots \wedge \delta_n(\overline{a})} \}$$

$\delta(\overline{a}) \in \Delta$

$T \cup \{\delta(\overline{a})\}$ inkonsistent, das heißt $T \vdash \neg\delta(\overline{a})$

$T$ $\mathcal{L}$-Theorie, $\overline{a}$ Konstanten $\notin \mathcal{L}$

Mit Logik folgt: $T \vdash \forall\overline{x}\neg\delta(\overline{x}) \sim \neg \underbrace{\exists\overline{x}\delta(\overline{x})}_{\in\Delta}$

$\mathfrak{A} \models \delta(\overline{a}a)$ d.h. $\mathfrak{A} \models \exists\overline{x}\delta(\overline{x})$ aber $T \vdash \neg\exists\overline{x}\delta(\overline{x})$ $\lightning$ zu 1) $\square$

**Folgerung 3.8.** Betrachte $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{B}$ und $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$.

$$\begin{array}{ccc}
\text{Jedes } \varphi \in \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}) \text{ ist konsistent mit } T & \Leftrightarrow & \text{es gibt } \mathfrak{B}' \models T \text{ und } h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{Th}_\Delta(\mathfrak{B}) & & \text{es gibt } \mathfrak{B}' \models T \text{ und } h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathfrak{A} \Rrightarrow_\Delta \mathfrak{B} & & \text{es gibt } \mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B} \text{ und } h : \mathfrak{A} \to_\Delta \mathfrak{B}'
\end{array}$$

**Satz 3.9.** Seien $T, T'$ $\mathcal{L}$-Theorien. Es sind äquivalent:

1) Es gibt universelle $\mathcal{L}$-Aussage $\varphi$, die $T$ von $T'$ trennt (d.h. $T \vdash \varphi, T' \vdash \neg\varphi$)

2) Wenn $\mathfrak{A} \models T, \mathfrak{B} \models T'$, dann ist $\mathfrak{B}$ keine Unterstruktur von $\mathfrak{A}$

*Beweis.* $\underline{1) \Rightarrow 2)}$: $\mathfrak{A} \models T$, also $\mathfrak{A} \models \varphi$, $\varphi$ universell.

Wenn $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, dann $\mathfrak{B} \models \varphi$ (Lemma) also $\mathfrak{B} \not\models T'$.

$\underline{\neg 1) \Rightarrow \neg 2)}$: Trennungslemma: es gibt $\mathfrak{A} \models T, \mathfrak{B} \models T'$ und keine universelle Aussage trennt $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{A} \Rrightarrow_\forall \mathfrak{B}$

äquivalent: $\mathfrak{B} \Rrightarrow_\exists \mathfrak{A}$

Folgerung: Es gibt ein $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ mit $h : \mathfrak{B} \to_\exists \mathfrak{A}'$

Da qf $\subseteq \exists$ insbesondere $\mathfrak{B} \models T' \subseteq \mathfrak{A}' \models T$ □

**Folgerung 3.10.** Sei $T$ $\mathcal{L}$-Theorie und $\varphi$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Dann sind äquivalent:

1) Es gibt universelles $\psi$ mit $T \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})$

2) Falls $\mathfrak{A} \models T, \mathfrak{B} \models T, \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$

   Für alle $\overline{a} \in A$ gilt: $\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$

*Beweis.* $\underline{1) \Rightarrow 2)}$:

$$\mathfrak{B} \models \varphi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi(\overline{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$$

$\underline{2) \Rightarrow 1)}$: Seien $\overline{c}$ neue Konstanten (für $\overline{a}$) und

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_c &= \mathcal{L} \cup \{\overline{c}\} \\
T^+ &= T \cup \{\varphi(\overline{c})\} \\
T^- &= T \cup \{\neg\varphi(\overline{c})\}
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}_c$-Theorien

2) sagt Unterstrukturen von Modellen von $T^+$ die Modelle von $T$ sind, sind Modelle von $T^+$ also nicht Modelle von $T^-$-

Mit dem Satz folgt: Es gibt eine universelle $\mathcal{L}_c$ Aussage $\psi^{(c)}$ die $T^+$ von $T^-$ trennt, das heißt

$$T^+ \vdash \psi(\overline{c}), T \vdash \neg\psi(\overline{c})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} T \cup \{\varphi(\overline{c}) \vdash \psi(\overline{c})\} \qquad\qquad & T \vdash \varphi(\overline{c}) \to \psi(\overline{c}) \\ T \cup \{\varphi(\overline{c})\} \vdash \psi(\overline{c}) \qquad\qquad & T \vdash \neg\varphi(\overline{c}) \to \neg\psi(\overline{c}) \end{aligned}$$

$\overline{c}$ kommt in $T$ vor, also:

$$\begin{aligned} T &\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \\ T &\vdash \forall x(\neg\varphi(x) \to \neg\psi(x)) \end{aligned}$$

$$T \vdash \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$$

$\square$