Maximilian Roth

Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen E. Wir betrachten zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ und $E^{\mathcal{B}}$ Äquivalenzrelationen sind. Ferner ist jede Äquivalenzklasse unendlich und es gibt unendlich viele Äquivalenzklassen (in beiden Strukturen). Zeige, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ein nichtleeres Back-&-Forth System haben.

Aufgabe 2 (5 Punkte).

(a) Sei $\mathcal{L} = \{P\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Relationszeichen P besteht. Schreibe eine Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, so dass $P^{\mathcal{A}}$ als auch $A \setminus P^{\mathcal{A}}$ unendlich sind.

(b) Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ die Sprache, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Schreibe eine Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, in denen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A mit genau einer Klasse der Größe n für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist.

(c) Für zwei $\mathcal{L}$-Strukturen wie in (b), ist die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein nichtleeres Back-&-Forth System?

Eine Theorie ist eine Menge T von $\mathscr{L}$-Aussagen.

- a)
  $T = A_1 \cup A_2$
  $A_1 = \{\exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_i \doteq x_j \wedge P(x_i, x_j))) | n \in \mathbb{N}\}$
  Also keine zwei Variablen sind gleich und alle n sind in Relation

$\Rightarrow$ Es gibt min n Elemente in P $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Elemente in P

$A_2 = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j} (\neg x_i \doteq x_j \wedge \neg P(x_i, x_j))) | n \in \mathbb{N}\}$
Es sind also mindestens n Elemente nicht in P $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Elemente, die nicht in P liegen.

Aus $T = A_1 \cup A_2$ folgt, dass unendlich viele Elemente in P sind und unendlich viele es nicht sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte).

Sei R ein zweistelliges Relationszeichen. Ein *Zufallsgraph* ist ein Graph $\mathcal{G}$, der gesehen als $\{R\}$-Struktur (siehe Aufgabe 4, Blatt 2) die folgende Eigenschaft hat: Für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B der Grundmenge gibt es einen Punkt c, so dass

$$(a, c) \in R^{\mathcal{G}}, \text{ aber } (b, c) \notin R^{\mathcal{G}}$$

für alle a aus A und b aus B.

(a) Gibt es endliche Zufallsgraphen? Wenn ja, beschreibe diese vollständig.

(b) Sei

$$n = \sum_{i=0}^{k} [n]_i \cdot 2^i,$$

die binäre Darstellung von der natürlichen Zahl n, wobei $[n]_i = 0, 1$ für $0 \leq i \leq k$. Sei $\mathcal{A}$ die $\{R\}$-Struktur mit Universum $\mathbb{N}$ und der Interpretation:

$$R^{\mathcal{A}}(n, m) \;\Leftrightarrow\; [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1$$

Zeige, dass $\mathcal{A}$ ein Graph ist. Zeige weiter, dass $\mathcal{A}$ ein Zufallsgraph ist.

(c) Sind je zwei Zufallsgraphen, gesehen als $\{R\}$-Strukturen, elementar äquivalent?
(Hinweis: Back-&-Forth.)

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ in der Sprache $\mathcal{L}$. Gegeben eine atomare Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A, zeige, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

(b) Zeige nun, dass die obige Äquivalenz auch für jede quantorenfreie Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A gilt. Argumentiere dabei induktiv über den Aufbau von ψ.

(c) Gegeben die Formel $\theta[x_1, \ldots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$, wobei ψ quantorenfrei ist, und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A, zeige nun, dass

$$\mathcal{A} \models \theta[a_1, \ldots a_n] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \theta[a_1, \ldots a_n].$$

Gilt die Rückrichtung?