Maximilian Roth

Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}_0$ eine Teilmenge der Sprache $\mathcal{L}$. Jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ kann in kanonischer Weise als $\mathcal{L}_0$-Struktur $\mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ betrachtet werden. Zeige durch Induktion über den Aufbau der $\mathcal{L}_0$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$, dass für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0 \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Forme folgende Formeln in pränexe Normalform um:

(a) $\forall x \forall y \Big(\neg(x \doteq y) \longrightarrow \exists z\big(\neg(z \doteq x) \wedge \neg(z \doteq y)\big)\Big)$.

(b) $\forall x \forall y \Bigg(\neg(x \doteq y) \longrightarrow \forall z \exists u\Big(\big(\neg(z \doteq x) \wedge \neg(z \doteq y)\big) \longrightarrow (z \doteq u)\Big)\Bigg)$.

(c) $\Bigg(\big(g(x,y,z) \doteq 1\big) \longleftrightarrow \Big(\big((z \doteq 0) \wedge (f(x,y) \doteq 1)\big) \vee \exists w\big((w < x+y+1) \wedge \big((x \doteq y+w) \vee (y \doteq x+w)\big)\big)\Big)\Bigg)$

- a)
  $\forall x \forall y(\neg x \doteq y \rightarrow \exists z(\neg z \doteq x \wedge \neg x \doteq y))$
  $\sim \forall x \forall y(x \doteq y \vee \exists z(\neg z \doteq x \wedge \neg x \doteq y))$
  $\sim \forall x \forall y \exists z(x \doteq y \vee (\neg z \doteq x \wedge \neg x \doteq y))$

- b)
  $\forall x \forall y(\neg x \doteq y \rightarrow \forall z \exists u((\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y) \rightarrow z \doteq u))$
  $\sim \forall x \forall y(x \doteq y \vee \forall z \exists u((\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y) \rightarrow z \doteq u))$
  $\sim \forall x \forall y \forall z \exists u(x \doteq y \vee ((\neg z \doteq x \wedge \neg z \doteq y) \rightarrow z \doteq u))$

- c)
  $(gxyz \doteq 1 \leftrightarrow ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w(w < x + y + 1 \wedge (x \doteq y + w \vee y \doteq x + w))))$

  $\sim ((gxyz \doteq 1 \rightarrow ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w(w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w)))) \wedge (((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w(w < x + y + 1 \wedge (x \doteq y + w \vee y \doteq x + w))) \rightarrow gxyz \doteq 1))$

  $\sim ((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w(w < x + y + 1 \wedge (x \doteq y + w \vee y \doteq x + w)))) \wedge (\neg((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w(w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \vee gxyz \doteq 1))$

  $\sim \exists w((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x + y + 1 \wedge (x \doteq y + w \vee y \doteq x + w)))) \wedge (\neg((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee \exists w(w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \vee gxyz \doteq 1))$

  $\sim \exists w((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x + y + 1 \wedge (x \doteq y + w \vee y \doteq x + w)))) \wedge (\neg \exists w((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \vee gxyz \doteq 1))$

  $\sim \exists w((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x + y + 1 \wedge (x \doteq y + w \vee y \doteq x + w)))) \wedge (\forall w \neg((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x+y+1 \wedge (x \doteq y+w \vee y \doteq x+w))) \vee gxyz \doteq 1))$

  $\sim \exists w \forall v((\neg gxyz \doteq 1 \vee ((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (w < x + y + 1 \wedge (x \doteq y + w \vee y \doteq x+w)))) \wedge (\neg((z \doteq 0 \wedge fxy \doteq 1) \vee (v < x+y+1 \wedge (x \doteq y+v \vee y \doteq x+v))) \vee gxyz \doteq 1))$

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Eine Unterstruktur $\mathcal{A}$ der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ heißt *elementar*, bezeichnet mit $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, falls für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus A folgende Implikation gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ aus $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ folgt.

(b) Sei nun T eine Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass es für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ eine quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ gibt, so dass

$$T \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \Big(\varphi[x_1, \ldots, x_n] \longleftrightarrow \psi[x_1, \ldots, x_n] \Big).$$

.

Zeige, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ folgt, falls beide Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Modelle von T sind.

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und $c_1, \ldots, c_n$ neue Konstantenzeichen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ sich zu einer Struktur in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ erweitern läßt.

(b) Sind alle solche Erweiterungen isomorph als $\mathcal{L}'$-Strukturen?

(c) Zeige, dass die $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann allgemeingültig ist, wenn die $\mathcal{L}'$-Aussage $\varphi[c_1, \ldots, c_n]$ allgemeingültig ist.