Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!
Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:
`http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf`
Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$g(x_1, \ldots, x_k, y) = \sum_{z<y} f(x_1, \ldots, x_k, z)$$

auch (primitiv) rekursiv ist, wobei die leere Summe Wert 0 hat.

(b) Zeige, dass die Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche aus den Potenzen von 2 besteht, primitiv rekursiv ist.

(c) Schließe daraus, dass die Funktion $x \mapsto$ Anzahl von Potenzen von 2, welche echt kleiner als x sind, eine primitiv rekursive Funktion ist.

- a)
  $$g(x_1, \ldots, x_k, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } y = 0 \\ g(x_1, \ldots, x_k, y \dot{-} 1) + f(x_1, \ldots, x_k, y \dot{-} 1), & \text{sonst} \end{cases}$$
- b)
  Wegen Lemma 3.9 im Skript ist
  $C = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | \exists z < y(z \in PRIM \backslash \{2\} \wedge z|x)\}$ primitiv rekursiv
  (weil PRIM,$\{2\}$ und $\{(z, x) \in \mathbb{N}^2 | 1 \leqslant z < x \wedge z|x\}$ primitiv rekursiv sind).
  Somit ist auch die Menge B gegeben durch die Charakteristische-Fkt:
  $\chi_B(x) = \chi_C(x, S(x))$ primitiv rekursiv.
  Man sieht, dass $\mathbb{N} \backslash B$ die Menge aller Zweierpotenzen ist.

Lemma 3.9. *Wenn $A \subset N^{k+1}$ eine (primitiv) rekursive Teilmenge ist, dann sind*

- $B = \{(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \forall z < y \Big((x_1, \ldots, x_k, z) \in A\Big)\}$

27

- $C = \{(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid \exists z < y \Big((x_1, \ldots, x_k, z) \in A\Big)\}$

auch (primitiv) rekursiv.

Abbildung 1: Lemma 3.9

- c)

  $$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ g(x \dot{-} 1) + \chi_{2en}(x \dot{-} 1), & \text{sonst} \end{cases}$$

  Da χ_{2en} p. rek. ist ist auch g p. rek.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

(a) Zeige, dass die leere Menge primitiv rekursiv ist. Schließe daraus, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ primitiv rekursiv ist.

(b) Zeige, dass die Diagonale $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = y\}$ eine primitiv rekursive Teilmenge von $\mathbb{N}^2$ ist.

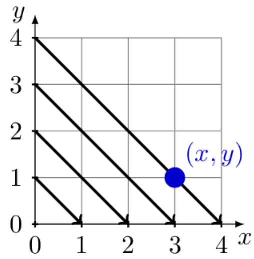
- a)
  Die Charakteristische-Fkt. der leeren Menge ist die konstante 0-Fkt.
  Diese ist bekanntermaßen p. rek.

  Mit Korollar 3.8 folgt die zweite Behauptung direkt mit A = $\emptyset$:

Korollar 3.8. *Sind $A \subset B \subset N^k$ Teilmengen derart, dass $B \setminus A$ endlich und A (primitiv) rekursiv ist, so ist B (primitiv) rekursiv.*

- b)
  $\chi_\Delta(x, y) = h(|x - y|)$
  Wobei für h gilt:
  $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
  h und $|x - y|$ sind p. rek $\Rightarrow$ Δ ist p. rek.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**



Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & \binom{x+y+1}{2} + x \end{array}$$

bestimmt eine Aufzählung von $\mathbb{N}^2$, wie im obigen Diagramm: das Element $(0,0)$, mit Wert $0 = \alpha(0,0)$, ist das kleinste Element. Sein Nachfolger ist $(0,1)$ mit Wert $1 = \alpha(0,1)$. Auf jeder Diagonale ist der Nachfolger von $(x, y{+}1)$ der Punkt $(x{+}1, y)$. Der Nachfolger von $(x,0)$ ist der Punkt $(0, x{+}1)$.

(a) Schließe aus der Identität

$$1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2},$$

dass die Funktion α injektiv ist.

HINWEIS: Auf der Gerade im Diagramm, welche den Punkt (x,y) enthält, gibt es genau x viele Vorgänger von (x,y). Wie viele Punkte gibt es auf den vorigen Geraden? Was ist der Zusammenhang mit $\alpha(x,y)$?

(b) Zeige mit Induktion, dass jedes n aus $\mathbb{N}$ im Bildbereich von α liegt. Schließe daraus, dass α eine Bijektion ist.

(c) Zeige, dass α primitiv rekursiv ist.

- a)
  <u>Gegenannahme:</u> Sei $\alpha(x,y) = \alpha(x',y')$, aber $(x,y) \neq (x',y')$

  – und x+y = x'+y'
    $\Rightarrow \alpha(x,y) = \binom{x+y+1}{2} + x = \binom{x'+y'+1}{2} + x' = \alpha(x',y')$
    $\Leftrightarrow x = x' \Rightarrow y = y'$ Widerspruch!

- und $x + y < x' + y'$

  $\Leftrightarrow \alpha(x,y) = \binom{x+y+1}{2} + x = \binom{x'+y'+1}{2} + x' = \alpha(x,y)$
  $\Leftrightarrow 1 + \cdots + (x+y) + x = 1 + \cdots + (x'+y') + x'$
  $\overset{x+y<x'+y'}{\Rightarrow} x = (x+y+1) + \cdots + (x'+y') + x'$

  Widerspruch!

$\Rightarrow \alpha$ ist injektiv.

- b)
  Wir zeigen via Induktion über $n \in \mathbb{N}$

  - IA: n = 1
    $n = 1 = \alpha(0,1) = \binom{0+1+1}{2} + 0 = \binom{2}{2} + 0 = 1 + 0 = 1$

  - IV: Gelte für ein n: $n = \alpha(j,h)$

  - IS: $n \to n+1$
    $n + 1 = \alpha(x,y) + 1$

    * Fall 1: y=0
      $\overset{Hinweis}{\Rightarrow} n + 1 = \alpha(0, x+1)$

    * Fall 2: $y \neq 0$
      $\overset{Hinweis}{\Rightarrow} n + 1 = \alpha(x+1, y-1)$
      $= \binom{x+1+y-1+1}{2} + x + 1$
      $= \binom{x+1+y}{2} + x + 1$
      $= \alpha(j,h) + 1$

  Aus injektiv und surjektiv folgt bijektiv.

- c)
  $\alpha(x,y) = g(x+y) + x = g(x+y) + \Pi_1^2(x,y)$

  $$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ g(n \dot{-} 1) + n, (\text{ oder } \Pi_1^1(n)), & \text{sonst} \end{cases}$$
  Damit ist α p. rek.

(d) Zeige, dass die Funktionen β_1 und β_2 mit $\alpha^{-1} = (\beta_1, \beta_2)$ primitiv rekursiv sind.
HINWEIS: $\alpha(x, y) \geq \max\{x, y\}$.

Sei nun die Fibonacci Folge:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geq 2.$$

(e) Zeige mit Hilfe der Funktionen β_1 und β_2, dass die Funktion $h(n) = \alpha(a_n, a_{n+1})$ primitiv rekursiv ist. Insbesondere ist die Funktion $n \mapsto a_n = \beta_1(h(n))$ auch primitiv rekursiv.

- d)
  Wir sollen zeigen, dass die Umkehrfunktion von $\alpha(x, y) = n$, also $\alpha^{-1}(n) = (\beta_1(n), \beta_2(n))$ p. rek. ist.
  α^{-1} ist offensichtlich p. rek., wenn β_1 und β_2 es sind.

  Dazu suchen wir also zunächst diese beiden Funktionen und zeigen dann, dass sie p. rek. sind.

  Wir definieren zunächst d(n), die uns für eine Zahl die ursprüngliche Diagonale gibt wie folgt:
  $d(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ d(z) + (z + 2 \dot{-} \alpha(0, d(z) + 1)), & \text{falls } n = z + 1 \end{cases}$
  d(n) ist offenbar p. rek.

  Sei nun $\beta_2(n) = n \dot{-} \alpha(0, d(n))$, dann ist auch β_2 p. rek.

  Und zuletzt $\beta_1(n) = d(n) \dot{-} \beta_2(n)$ (auch klar p. rek.)
  $\Rightarrow \alpha^{-1}$ ist primitiv rekursiv.

- e)
  Es gilt: $h(n + 1) = \alpha(a_{n+1}, a_{n+2}) = \alpha(\beta_2(h(n)), \beta_1(h(n)) + \beta_2(h(n)))$,
  Da $a_{n+1} = \beta_2(h(n))$ und
  $a_{n+2} = \beta_1(h(n)) + \beta_2(h(n))$ ist.

  Es gilt also:
  $h(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ \alpha(\beta_2(h(z)), \beta_1(h(z)) + \beta_2(h(z))), & \text{falls } n = z + 1 \end{cases}$
  $\Rightarrow$ h(n) ist primitiv rekursiv.