

## Disclaimer

Auch in diesem Dokument können sich Fehler befinden!

Sie sind nicht die Musterlösung der Aufgaben, sondern selbst erstellte Lösungen.

Als generelle Lektüre kann ich nur das Skript von Markus Junker aus dem WS 17/18 empfehlen:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/junker/skripte/InfoLogik.pdf>

Hier ist vieles sehr genau und verständlich erklärt.

### Aufgabe 1 (4 Punkte).

Zeige mit Hilfe des Vollständigkeitssatzes, dass eine konsistente Theorie genau dann vollständig ist, wenn je zwei Modelle elementar äquivalent sind.

Sei  $T$  konsistente Theorie,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$   $\mathcal{L}$ -Strukturen,  $\mathcal{A} \models T, \mathcal{B} \models T$

ZZ:  $T$  vollständig  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$

Beweis:

- $T$  vollständig  $\Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$   
 $T$  vollständig und  $\chi$   $\mathcal{L}$ -Aussage  
 Gilt nun  $\mathcal{A} \models \chi$ :

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{A} \models \chi \\
 \xLeftrightarrow{\mathcal{A} \models T} T \vdash \chi \\
 \xLeftrightarrow{\mathcal{B} \models T} \mathcal{B} \models \chi \\
 \xRightarrow{\text{B analog}} \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}
 \end{array}$$

- $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow T$  vollständig  
 Sei  $\chi$   $\mathcal{L}$ -Aussage

$$\begin{array}{l}
 - T \not\vdash \chi \\
 \xRightarrow{\mathcal{A} \models T} \mathcal{A} \not\models \chi \\
 \xRightarrow{\chi \text{ } \mathcal{L}\text{-Auss.}} \mathcal{A} \vdash \neg \chi
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} - T \vdash \chi \\ \quad \stackrel{\mathcal{B} \models T}{\Rightarrow} \mathcal{B} \vdash \chi \end{array}$$

Da  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$  kann nicht gleichzeitig  $T \vdash \chi$  und  $T \not\vdash \chi$  gelten.  
 $\Rightarrow T$  vollständig

**Aufgabe 2** (6 Punkte).

Sei  $\mathcal{S}$  die Kollektion aller Teilmengen von  $\{1, 2, 3, 4\}$  mit höchstens 2 Elementen. Die Menge  $\mathcal{S}$  ist partiell geordnet bezüglich Inklusion (siehe Appendix A im Skript).

- (a) Gibt es eine obere Schranke für  $\Gamma = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$  in  $\mathcal{S}$ ?
- (b) Beschreibe alle maximalen Elemente von  $\mathcal{S}$ .
- (c) Zeige, dass jede linear geordnete Teilmenge  $\Gamma$  von  $\mathcal{S}$  eine obere Schranke besitzt.

- a)

ZZ: Es gibt keine obere Schranke  $B$  für  $\Gamma$

Beweis:

$B$  müsste Obermenge von  $\{\}, \{1\}, \{2\}$  und  $\{3\}$  sein und damit mindestens 1,2,3 enthalten.

$\Rightarrow |B| \geq 3$  Damit ist  $B$  nicht in  $\mathcal{S}$ . Widerspruch!

$\Rightarrow$  Es gibt keine obere Schranke für  $\Gamma$

- b)

Die maximalen Elemente müssen 2-elementige Mengen sein.

Wären sie kleiner, wären sie selbst Teilmenge einer solchen.

Wären sie größer, wären sie nicht mehr in  $\mathcal{S}$ .

Damit sind alle 2-elementigen Teilmengen maximale Elemente.

## • c)

$\mathcal{S}$  sind alle maximal 2-Elementigen Teilmengen von  $\{1,2,3,4\}$

$\Rightarrow \Gamma$  sind ebenfalls solche, aber nicht alle.

$\Rightarrow \forall A \in \Gamma$  ist Teilmenge von  $\{1,2,3,4\}$

$\bigcup_{A \in \Gamma}$  wäre obere Schranke für  $\Gamma$ , da es alle Elemente dessen enthält.

Aber liegt  $\bigcup_{A \in \Gamma}$  auch in  $\mathcal{S}$ ?

Wir zeigen, dass  $\bigcup_{A \in \Gamma}$  maximal 2-Elementige Teilmenge von  $\{1,2,3,4\}$  ist.

Das ist dann der Fall, wenn für  $A, B \in \Gamma : (A \cup B) \in \mathcal{S}$

Da  $\mathcal{S}$  linear geordnet ist können wir unterteilen in:

$$- A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \in \mathcal{S}$$

$$- A = B \Rightarrow A \cup B = A \in \mathcal{S}$$

$$- B \subset A \Rightarrow A \cup B = A \in \mathcal{S}$$

Damit folgt, dass  $\bigcup_{A \in \Gamma} \in \mathcal{S}$  und damit obere Schranke ist.

**Aufgabe 3** (4 Punkte).

Zeige, dass jedes maximale Element einer linear geordneten Menge  $(\mathcal{S}, \leq)$  das größte Element sein muss. Insbesondere gibt es höchstens ein maximales Element in  $\mathcal{S}$ .

Muss  $\mathcal{S}$  ein maximales Element besitzen?

## • a)

ZZ: Sei  $(S, \leq)$  linear geordnet x maximales Element  $\Rightarrow$  x größtes Element

Beweis:

Sei x maximales Element von S, also gelte:

$$\nexists y : x < y \Leftrightarrow \forall y : \neg x < y \quad (x \not< y) \quad \Leftrightarrow \forall y : y \leq x$$

Wenn  $x \neq y$  folgt mit linearer Ordnung  $y < x$

$\Rightarrow x$  ist größtes Element

- b)

ZZ: Sei  $(S, \leq)$  linear geordnet, dann gibt es höchstens 1 maximales Element

Beweis:

Annahme:  $x$  und  $y$  sind maximale Elemente und  $x \neq y$

$$\Rightarrow \nexists z : x < z \text{ und } \nexists z : y < z$$

$$\text{linear und } x \neq y \Rightarrow x < y \text{ oder } y < x$$

Damit gibt es für eines der beiden ein größeres Element.

- c)

$(0,1)$  hat im offenen Intervall kein maximales Element in  $\mathbb{R}$

#### Aufgabe 4 (6 Punkte).

Ein offenes Intervall  $I$  von  $\mathbb{R}$  hat *beschränkte Länge*, falls  $I = (a, b)$ , mit  $a \leq b$  aus  $\mathbb{R}$  (In diesem Fall ist  $b - a$  die *Länge* von  $I$ ). Sei  $\mathcal{S}$  die Kollektion aller offenen Intervalle beschränkter Länge von  $\mathbb{R}$ . Durch Inklusion wird  $\mathcal{S}$  partiell angeordnet.

- Zeige, dass je zwei Elemente aus  $\mathcal{S}$  eine obere Schranke in  $\mathcal{S}$  haben.
- Zeige, dass die Kollektion  $\Gamma = \{(0, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  linear geordnet ist. Besitzt  $\Gamma$  eine obere Schranke in  $\mathcal{S}$ ?
- Gibt es maximale Elemente in  $\mathcal{S}$ ?

- a)

ZZ: Seien  $x, y \in \mathcal{S} : \exists z \in \mathcal{S} : y \leq z$  und  $x \leq z$

Beweis:

Sei  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ .

Dann sei  $z = (\max x_1, y_1, \max x_2, y_2)$

$$\Rightarrow x \subseteq z \text{ und } y \subseteq z$$

$$\Rightarrow x \leq z \text{ und } y \leq z$$

$$\Rightarrow z \text{ ist obere Schranke von } x \text{ und } y$$

- b)

– ZZ:  $\Gamma = \{0, n\}_{n \in \mathbb{N}}$  linear geordnet

Beweis:

Seien  $a, b \in \Gamma$  und  $a \neq b \Rightarrow (0, n_a) \neq (0, n_b)$   
 $\Leftrightarrow \{0, \dots, n_a\} \subset \{0, \dots, n_b\}$  oder  $\{0, \dots, n_b\} \subset \{0, \dots, n_a\}$   
 $\Leftrightarrow a < b$  oder  $b < a$   
 $\Leftrightarrow \Gamma$  ist linear geordnet

- ZZ: Es gibt keine obere Schranke

Beweis:

Annahme: Es gibt eine obere Schranke  $B = (0, \dots, b)$

$\Rightarrow \{0, \dots, n\} \subseteq \{0, \dots, b\}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow b > n, \forall n \in \mathbb{N}$  Widerspruch!

Es gibt keine obere Schranke.

- c)

ZZ: Es gibt kein maximales Element

Beweis:

- Version 1:

Die Def. des maximalen Elements fordert eine obere Schranke,  
 da es keine gibt, gibt es auch kein maximales Element.

- Version 2:

Wenn es ein  $n = (0, \dots, n)$  gibt, gibt es auch immer ein  $m = (0, \dots, n+1)$

$\Rightarrow$  es gibt kein Element in  $\Gamma$ , für das es kein größeres gibt.