Logik für Studierende der Informatik
Blatt 8
Abgabe: 18.12.2018 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (10 Punkte).
Sei $\mathcal{L} = \{0, f\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f und einem Konstantenzeichen 0 besteht. Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$ mit folgenden Interpretationen:

$$0^{\mathcal{N}} = 0 \text{ und } f^{\mathcal{N}}(x) := x + 1.$$

(a) Zeige, dass es für jedes $n \neq 0$ in $\mathbb{N}$ ein k gibt, so dass $n = f^k(0) := \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{k}(0)$.

(b) Schreibe eine $\mathcal{L}$-Aussage, welche in $\mathcal{N}$ gilt und besagt, dass jedes $0 \neq n \in \mathbb{N}$ im Bild von $f^{\mathcal{N}}$ liegt.

(c) Zeige, dass es eine elementar Erweiterung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{N}$ und ein Element m in M derart gibt, dass $m \neq f^k(0)$ für alle k in $\mathbb{N}$.

(d) Beschreibe drei paarweise nicht isomorphe abzählbare Modelle des vollständigen Diagramms $\text{Diag}(\mathcal{N})$ von $\mathcal{N}$.

(e) Wie sehen abzählbare Modelle im Allgemein aus (eine informelle Beschreibung genügt)? Wieviele gibt es, bis auf Isomorphie?

Aufgabe 2 (5 Punkte).
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen $<$. Wir betrachten die beiden $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, <)$ und $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ mit den natürlichen Ordnungen. Sei T die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen, welche in $\mathcal{Z}$ gelten.
Zeige, dass die Theorie $\text{Diag}^{at}(\mathcal{R}) \cup T$ konsistent ist (siehe Aufgabe 4 (b), Blatt 5). Insbesondere lässt sich die *dichte* Ordnung $\mathcal{R}$ in eine *diskrete* Ordnung einbetten.

Aufgabe 3 (5 Punkte).
Sei $A \subset \mathbb{N}^k$ eine (primitiv) rekursive Menge. Zeige, dass die Teilmenge $B \subset \mathbb{N}^k$ genau dann (primitiv) rekursiv ist, wenn beide Teilmengen $A \cap B$ und $A \cup B$ (primitiv) rekursiv sind.

DIE ÜBUNGSBLÄTTER MÜSSEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN. ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IN DEN (MIT DEN NUMMERN DER ÜBUNGSGRUPPEN GEKENNZEICHNETEN) FÄCHERN IM EG DES GEBÄUDES 51.