

Delaunay Triangulation Algorithm

June 22, 2019

Abstract

이 저작물은 베를린 자유대학 Faniry H. Razafindrazaka 박사의 아래 논문을 들로네 삼각분할에 대해서만 번역한 것입니다. 번역자 정요한. http://page.mi.fu-berlin.de/FANIRY/files/faniry_aims.pdf

1 introduction

점들로 이루어진 집합에 대해 들로네 삼각분할을 수행 하는 것은 계산 기하학의 1 고전적인 문제다. 이 문제는 1934년에 프랑스인 수학자 Boris Nikolaevich Delone(Delaunay)가 1934년 발견하였다. 이 문제에 대해서 수학자와 컴퓨터 과학자들이 많은 알고리즘들을 제시하고 있다. 그 중, 1985년에 Guibas 와 Stolfi가 제안한 분할정복 기법을 이용하여 $O(n \log n)$ 에 수행 가능 하다. 그리고 조금 후, Steve Fortune은 이와 같은 복잡도를 가지는 Sweepline 알고리즘을 제시했다. 이 알고리즘은 voronoi diagram을 위해 작성된 것이다. 그런데 이 알고리즘은 구현하기 힘들기에 엔지니어들은 이것보다는 incremental insertion 알고리즘을 사용한다. 이 알고리즘은 단순명료하고 구현이 그렇게 어렵지 않다. Guibas와 Stolfi가 제시한 incremental insertion은 점을 찾는데 걷기 전략walking strategy를 이용하는데 그 복잡도가 $O(n^{1/2})$ 이다. Mucke는 이 알고리즘을 개선하여 $O(n^{1/3})$ 복잡도를 달성하였다. 이 알고리즘들은 좋은 구현법이지만, 최적 알고리즘은 아니다. 우리는 점을 찾는데에 DAG(Directed Acyclic Graph)-based 자료구조를 사용한 최적 랜덤화 incremental algorithm을 사용할 것이다. 이 알고리즘은 평균 시간복잡도 $O(n \log n)$ 이며, 공간복잡도 $O(n)$ 을 소요한다.

(generating artificial terrains with delaunay triangulation 은 번역을 제외한다.)

이 작업은 두 부분으로 나뉜다. 첫 번째 파트는 들로네 삼각분할과 알고리즘의 이론적인 분석이고, 두 번째 파트는 지역 생성과 관련한 알고리즘의 응용이다. 들로네 삼각분할은 보로노이 다이어그램과 쌍대dual로 알려져있다. 챕터 2에서 이에 대해 이야기할 것이며, 들로네 삼각형의 특성인 empty circle 특징 부터 지역적 최대-최소 각도 특징까지 학습할 것이다. 챕터 3에서는 몇 알고리즘들이 주어질 것이며, 랜덤화 incremental method와 비교해볼 것이다. 특히 분할정복 기법과 plane sweep 알고리즘이 될 것이다. 챕터 4에서는 DAG-based 자료구조를 이용한 알고리즘을 이야기 할 것이다. 알고리즘의 모든 부분의 스토코드가 제공 될 것이며, 확률론과 backwards analysis에서 사용되는 기본적인 도구를 이용하여 - 최대한 간략하게 알고리즘에 대한 분석을 수행하고자 한다.

2 보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할

이 섹션에서는 voronoi cells, half-planes의 정의를 알아볼 것이다. 그리고 나서 들로네 삼각분할의 쌍대 특징에 대해 이야기 해 볼 것이다.

2.1 보로노이 다이어그램

2.1.1 보로노이 셀

$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ 을 유클리디안 평면에 존재하는 구역안에 있는 점의 집합이라 하자. 이 평면 위에 존재하는 구역을 보로노이 셀이라고 하며 다음 조건을 만족한다. 구역 p_i 에 가까이 존재하는 모든 점들은 보로노이 셀 $\mathcal{V}(p_i)$ 라 한다.

$$\mathcal{V}(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, p_i) \leq d(x, p_j), \forall i \neq j\}$$

즉, 다른 점들보다 점 p_i 와 가까운 공간을 대해 $\mathcal{V}(p_i)$ 라고 한다. 공간상의 어떤 지점들은 하나 이상의 점들과 같은 거리를 가지고 있다. 이 지점들의 집합을 voronoi diagram 이라고 한다. $\mathcal{V}(\mathcal{P})$.

2.1.2 Example

평면 위의 세 구역을 고려해보자. 기하학적으로, 보로노이 다이어그램은 세 지점이 이루는 삼각형을 수직이등분하게된다. 이 세 선은 이 삼각형의 외접원의 중심에서 교차하게 된다.

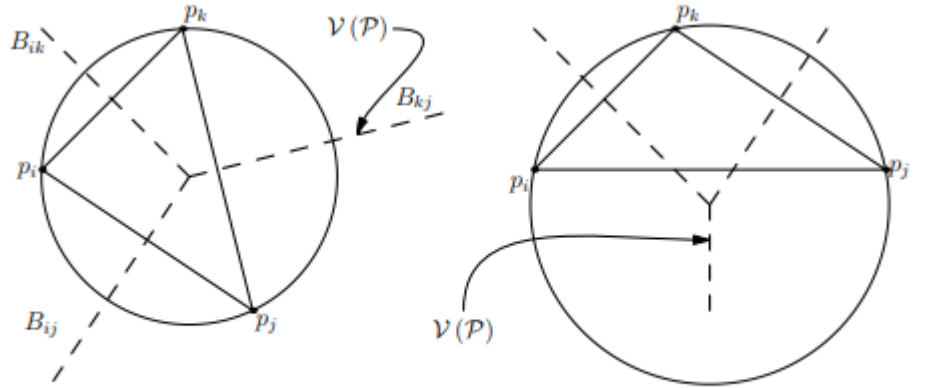


Figure 2.1: Three sites: bisectors meet at the circumcenter

2.1.3 Half-Planes

$H(p_i, p_j)$ 를 B_{ij} 에 의해 나누어지고 p_i 를 포함하는 반평면이라고 한다. $H(p_i, p_j)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$H(p_i, p_j) = \{x \in \mathbb{R}^2 | d(x, p_i) < d(x, p_j)\}, i \neq j,$$

이 표기를 이용하여 보로노이 다이어그램을 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\mathcal{V}(p_i) = \bigcap_{j \neq i} H(p_i, p_j), \forall j.$$

교집합은 i 와 다른 모든 j 에 대해 수행한다.

2.2 Dual of $\mathcal{V}(\mathcal{P})$

definition 2.2.1 평면 그래프 G 에 대한 쌍대는 다음과 같이 생성될 수 있다. G 의 각 면은 vertex로 표현되고, 그 vertex 간에 간선을 그리면 간선 $e \in E(G)$ 은 기존 그래프에서 경계를 맞대고 있는 면들을 표현한다.

definition 2.2.2 점 집합 \mathcal{P} 의 삼각분할은 부분 평면 S, \dots 문소리고 해석안됨

2.2.1 Construction

1934년, 들로네는 보로노이 다이어그램의 쌍대 그래프가 보로노이 셀 \mathcal{P} 을 삼각분할 한다는 것을 증명했다. 보로노이 셀을 삼각분할 한 것을 들로네 삼각분할 $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ 라 한다. 아래 그림은 보로노이 다이어그램 $n = 11$ 셀과 그에 대응하는 쌍대 그래프, 들로네 삼각분할이다.

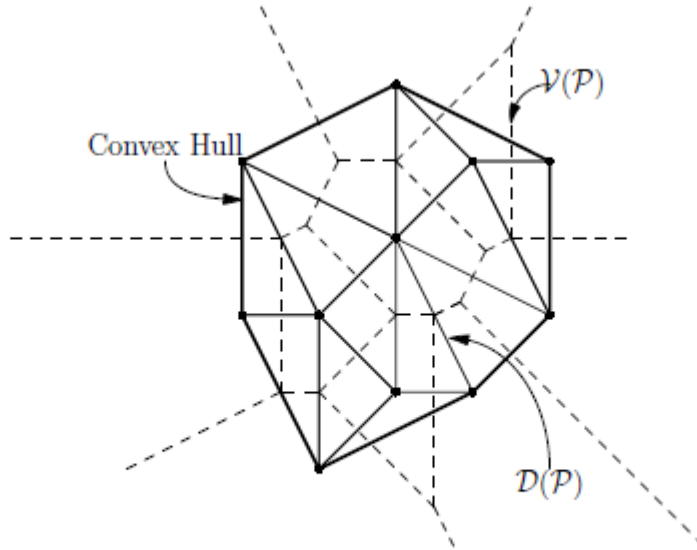


Figure 2.2: Voronoi diagram, Delaunay triangulation and the convex hull of $n = 11$ sites

2.2.2 Duality Properties

이 보로노이 다이어그램 그래프의 쌍대 그래프는 edges, vertices, faces에 대해 일대일 대응하는 성격을 띤다. 아래는 그 관찰에 대해 정리한 것이다.

D1. $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ 는 $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ 의 쌍대 그래프이다.

D2. 네 점 \mathcal{P} 가 같은 외접원 안에 포함되지 않는다면, $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ 는 삼각분할이다.
(see 2.3.2)

D3. $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ 의 모든 삼각형은 $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ 의 vertex와 대응한다.

D4. $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ 의 모든 edge은 $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ 의 edge와 1:1 대응한다.

D5. $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ 의 모든 vertex는 $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ 의 faces(cell)와 1:1 대응한다.

D6. $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ 의 외곽 경계는 \mathcal{P} 의 convex hull 이다.

D7. $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ 의 열등 삼각형들은 vertex를 포함하지 않는다.

Remark 2.2.3

2.3 The Delaunay triangulation

3 The Algorithm