

Lecture 20: Black-box optimization and reinforcement learning

1. 问题背景

在本实验中，我们主要解决两个优化问题：

1. **最小二乘问题**：目标是通过随机搜索找到最优解，最小化目标函数。
2. **Himmelblau 函数优化**：通过随机搜索与 Nelder-Mead 方法寻找全局最优解。
此外，实验实现了对 Flappy Bird 动态系统的模拟与策略优化，目标是通过优化奖励函数改进策略性能。

这些问题的核心在于：设计和分析优化算法，验证其性能并解决实际优化问题中的挑战。

2. 模型分析

2.1 最小二乘问题

目标函数：

- $$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

性质：

- 凸函数：目标函数是二次型，其 Hessian 矩阵 $A^T A$ 为半正定，因此 $f(x)$ 是凸函数。
- 光滑函数： $f(x)$ 对 x 可微，且其梯度为

$$\nabla f(x) = A^T (Ax - b)$$

，梯度连续。

- **可行域：**
定义在整个 R_n 空间。

2.2 Himmelblau 函数

目标函数：

$$f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$$

- **性质：**
 - 非凸函数：目标函数存在多个局部极小值点，不满足凸函数性质。
 - 光滑函数：梯度连续，其一阶导数分别为：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1(x_1^2 + x_2 - 11) + 2(x_1 + x_2^2 - 7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_1^2 + x_2 - 11) + 4x_2(x_1 + x_2^2 - 7)$$

- **可行域：**
定义在二维空间 R_2 。

2.3 Flappy Bird 动态系统

状态由速度和高度 (v, h) 表示，通过策略 π 控制向上的加速度 aaa。

奖励函数为：

$$R = \sum_t -a_t - \text{penalty for negative heights}$$

目标是通过优化策略参数 θ 最大化奖励函数。

3. 优化方法

3.1 随机搜索

- 描述：**
在每次迭代中沿随机方向 d 搜索最优步长 η ，使用黄金分割法在搜索区间内优化目标函数。
- 优点：**
对目标函数的光滑性和凸性要求较低，适用于复杂和非凸问题。
- 缺点：**
搜索效率较低，对初始点敏感。

3.2 Nelder-Mead 算法

- 描述：**
通过单纯形顶点的扩展、收缩和缩放调整目标函数值，找到局部最优解。
- 优点：**
适用于非凸和不光滑函数，无需计算梯度。
- 缺点：**
局部搜索能力强，但容易陷入局部最优。

3.3 Flappy Bird 策略优化

策略为线性模型：

$$\pi(s) = \theta^T s$$

使用随机搜索优化参数 θ ，目标是最大化奖励函数。

4. 数值实验

4.1 最小二乘问题

随机搜索算法用于求解：

- 初始点：** 随机生成的向量 b。
- 步长选择：** 通过黄金分割法确定最优步长 η 。
- 结果：**
目标函数值逐渐下降，收敛性较好。

4.2 Himmelblau 函数优化

比较两种算法：

- 随机搜索和 Nelder-Mead 的目标值下降趋势表明：
 - Nelder-Mead 的收敛速度更快，但可能收敛到局部最优点。
 - 随机搜索能探索全局空间，找到更优解。

4.3 Flappy Bird 模拟与优化

- 初始策略表现较差，系统频繁坠落。
 - 通过优化参数 θ ，新策略显著提高了飞行高度和时间，奖励函数值增加。
-

5. 遇到的问题及解决办法

1. Matplotlib 图像绘制错误

- **问题：**调用 `gca(projection='3d')` 时出现 `TypeError`。
- **原因：**`gca()` 不支持 `projection` 参数。
- **解决办法：**使用 `add_subplot(111, projection='3d')` 替代。

2. 随机搜索收敛性不足

- **问题：**初始点导致收敛较慢。
 - **解决办法：**对搜索方向 d 和初始点进行标准化。
-

6. 结果分析

- 解的质量：
 - 随机搜索在非凸问题上表现良好，找到较优解。
 - Nelder-Mead 在光滑非凸问题中更高效，但易陷入局部最优。
- 计算代价：
 - 随机搜索对计算资源需求较高。
 - Nelder-Mead 因无需梯度计算，整体代价较低。