# **Лекція №3 (продовження)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Тема:** | | Цілочисельні задачі лінійного програмування. | |
| **ПЛАН**  1 Приклади економічних задач цілочисельного програмування. Постанова задачі.  2 Геометричний метод рішення задач цілочисельного програмування.  3 Метод Гоморі. | | | |
| **Час:** | 2 год. | | |
| **Література:** | | | [1] с.175-185 |

3.1 Приклади задач цілочисельного програмування. Постанова задачі

Екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочисельні значення, називається задачею цілочисельного програмування.

У математичному програмуванні в задачі цілочисельного програмування цільова функція і функції в системі обмежень можуть бути лінійними, нелінійними, змішаними. Обмежимося випадком, коли цільова функція і функції в системі обмежень є лінійними.

Постановка задачі ЦП (випадок лінійної ц.ф. і функцій обмежень).

Знайти максимум функції

 (1)

при умовах



(2)

(3)

У цеху підприємства вирішено установити додаткове обладнання, для розміщення якого виділено  м2 площі. На придбання обладнання підприємство може затратити 10 тис. руб. При цьому можна купити обладнання двох видів. Комплект обладнання I-го виду коштує 1 тис. руб. і дозволить збільшити випуск продукції на 2 од.; комплект обладнання II-го виду коштує 3 тис. руб. і збільшить виробництво на 4 од. Для установки комплекту обладнання I-го виду потрібно 2 м2 площі, а другого виду – 1 м2. Визначити такий набір обладнання, що дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Обладнання | Вартість | Виробництво | Займана площа |  |
| I виду | 1 тис. | 2 ед. | 2 м2 |  |
| II виду | 3 тис. | 4 ед. | 1 м2 |  |
| Обмеження | 10 тис. |  | м2 |  |

Рішення.

Складемо математичну модель задачі.

Нехай підприємство придбає  комплектів обладнання I-го виду і  комплектів II-го.

Тоді одержимо систему обмежень

.

Загальне збільшення випуску продукції . За своїм економічним змістом змінні  і можуть приймати тільки цілі значення.

Таким чином, маємо математичну задачу:





**3.2 Геометричний метод розв’язку задач цілочисельного програмування**

Тому що в задачі дві змінні, то розв’язок її можна знайти геометрично. Для цього спочатку побудуємо багатокутник розв’язків задачі (1)-(3).

  

  





6

5

4



3

2

1

0

10

2





1

3

4

5

6

7



















Умові (4) задовольняють координати лише 12 точок багатокутника . Максимуму функція  досягає в точці  на безлічі цілих точок ; .

Таким чином, варто придбати 1 комплект обладнання I-го виду і 3 комплекти обладнання II-го виду, що збільшить виробництво продукції на 14 од.

Якщо шукати розв’язок (1)-(3) симплекс-методом, то він може бути як цілочисельним, так і ні. Для розв’язку цілочисельних задач потрібні спеціальні методи.

**3.3 Метод Гоморі**

Спочатку розв’язують задачу (1)-(2) звичайним симплекс-методом без врахування умови (3). Після чого знаходять оптимальний план і переглядають його компоненти. Якщо серед них дробових чисел немає, то план є оптимальним і для задачі (1)-(3). Якщо ж є  дробові, то до системи рівнянь (2) додають нерівність



. (4)

Тут  і  – величини з останньої симплекс-таблиці (рядок ).  і  – дробові частини чисел  і .

Якщо дробових  декілька, то вибирають  з максимальною дробовою частиною.

Потім розв’язують задачу (1), (2), (4). Якщо в новому плані змінні приймають дробові значення, то додають ще одну нерівність, і процес обчислень повторюють. Процес повторюють доти, поки або не одержать цілочисельний розв’язок задачі, або не прийдуть до висновку про її нерозв'язність.

Алгоритм.

1. Використовуючи симплекс-метод знаходять розв’язок задачі (1)-(2) без врахування умови (3).
2. Складають додаткове обмеження для дробової змінної в оптимальному плані з максимальною дробовою частиною.
3. Використовуючи двоїстий симплекс-метод знаходять розв’язок задачі (1)-(2), (4).
4. Перевіряють цілочисельність отриманого оптимального плану. У разі потреби додають додаткове обмеження.

Приклад.





|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базис |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |  |
|  |  |  |  |  |  |
| 1 |  | 0 | 13 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 13/1 |
| 2 |  | 0 | 6 | 1 | –1 | 0 | 1 | 0 | 6/1 |
| 3 |  | 0 | 9 | –3 | 1 | 0 | 0 | 1 |  |
| 4 |  |  | 0 | –3 | –2 | 0 | 0 | 1 |  |
| 1 |  | 0 | 7 | 0 | 2 | 1 | –1 | 0 |  |
| 2  3 |  | 3  0 | 6  27 | 1  0 | –1  –2 | 0  0 | 1  3 | 0  1 |  |
| 4 |  |  | 18 | 0 | –5 | 0 | 3 | 0 |  |
| 1  2  3 |  | 2  3  0 | 7/2  19/2  34 | 0  1  0 | 1  0  0 | 1/2  1/2  1 | –1/2  1/2  2 | 0  0  1 |  |
|  |  |  | 71/2 | 0 | 0 | 5/2 | 1/2 | 0 |  |

 – оптимальний план задачі (1)-(2). Але числа  і  не є цілими.

.

Складемо умову Гоморі для змінної .







Додаємо цю нерівність у симплекс-таблицю і розв’язуємо задачу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Базис |  |  | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  |  |  |  |  |  |
| 1  2  3 |  | 2  3  0 | 7/2  19/2  34 | 0  1  0 | 1  0  0 | 1/2  1/2  1 | –1/2  1/2  2 | 0  0  1 | 0  0  0 |
| 4 |  | 0 | –1 | 0 | 0 | –1 | –1 | 0 | 1 |
| 5 |  |  | 71/2 | 0 | 0 | 5/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| 1  2  3  4 |  | 2  3  0  0 | 4  9  32  1 | 0  1  0  0 | 1  0  0  0 | 1  0  –1  1 | 0  0  0  1 | 0  0  1  0 | –1/2  1/2  2  –1 |
|  |  |  | 35 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1/2 |







Розв’язуємо двоїстим симплекс-методом, тому що в стовпці  якщо .

Надана задача цілочисельного програмування має оптимальний план .

.