49

$$f(x) = x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2 + (x_4-1)^2 \to \min \tag{1}$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \tag{2}$$

$$x_4 \geq 0 \tag{3}$$

Обобщенная функция Лагранж

Поскольку $g_1(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2$ и $g_2(x) = -x_4$ есть функции линейные, ограничений типа равенств нет и

$$\exists x^* \in \mathbb{R}^4 : g_1(x^*) < 0,\ g_2(x^*) < 0$$

можно применить классическое правило множителей Лагранжа

$$F(x,\lambda_1) = x_1^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2 + (x_4-1)^2 - \lambda_1(2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2) \tag{4}$$

Неотрицательность

$$\lambda_1 \geq 0 \tag{5}$$

Стационарность

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x,\lambda) = 2x_1 - 2\lambda_1 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(x,\lambda) = 2(x_2-1) - \lambda_1 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}(x,\lambda) = 2x_3 - \lambda_1 = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_4}(x,\lambda) = 2(x_4-1) + \lambda_1 = 0 \tag{9}$$

Дополняющяя нежесткость

$$\lambda_1(2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2) = 0 \tag{10}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то из уравнений $(6) - (9)$ получим $x = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, на котором $g(x) = 2 > 0$.

Тогда

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \tag{11}$$

$$\lambda_1 = x_1 \tag{12}$$

Из (12) получаем

$$x_2 = 1 + \frac{x_1}{2},\ x_3 = \frac{x_1}{2},\ x_4 = 1 - \frac{x_1}{2} \tag{13}$$

Подставляя в (11), получаем

$$x_1 = \frac{4}{7} \tag{14}$$

Откуда $\lambda_1 > 0,\ x_4 \geq 0,\ x^0 = (\frac{4}{7}, \frac{9}{7}, \frac{2}{7}, \frac{5}{7})$ − точка минимума функции f и $f(x^0) = \frac{4}{7}$.