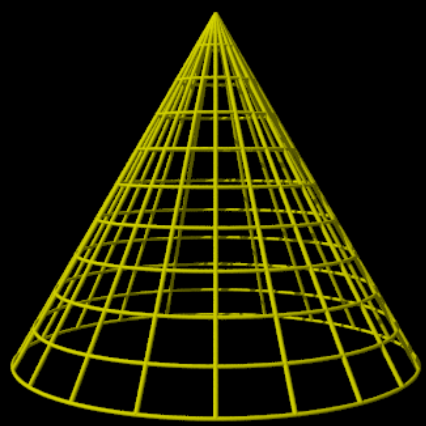
19

Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота h воронки, чтобы ее объем V был наибольшим?



Условие переписывается в виде следующей системы.

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h \to \max \tag{1}$$

$$r^2 + h^2 = 20 \tag{2}$$

$$r > 0,\ h > 0 \tag{3}$$

Обобщенная функция Лагранжа

$$F(r, h, \lambda_0, \mu) = -\lambda_0\frac{\pi}{3}r^2h + \mu(r^2 + h^2 - 20) \tag{4}$$

Неотрицательность

$$\lambda_0 \geq 0 \tag{5}$$

Стационарность

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, h, \lambda_0, \mu) = -\lambda_0\frac{2\pi}{3}rh + 2\mu r = 0 \tag{6}$$

$$r(-\lambda_0\frac{2\pi}{3}h + 2\mu) = 0 \tag{7}$$

Поскольку $r > 0$,

$$-\lambda_0\frac{2\pi}{3}h + 2\mu = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial h}(r, h, \lambda_0, \mu) = -\lambda_0\frac{\pi}{3}r^2 + 2\mu h = 0 \tag{9}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то из (8) имеем $\mu = 0$, чего не может быть.
$\lambda_0 \neq 0$, тогда без ограничения общности считаем $\lambda_0 = 1$. Из (8) получаем

$$h = \frac{3\mu}{\pi} \tag{10}$$

Подставляя в (9),

$$-\frac{\pi}{3}r^2 + \frac{6\mu^2}{\pi} = 0 \tag{11}$$

$$r^2 = \frac{18\mu^2}{\pi^2} \tag{12}$$

Подставляя в (2) формулы (10) и (12), получим

$$\frac{18\mu^2}{\pi^2} + \frac{9\mu^2}{\pi^2} = 20 \tag{13}$$

$$\mu^2 = \frac{20\pi^2}{27} \tag{14}$$

Из (10) и (3), очевидно, $\mu \geq 0$. Тогда $\mu = \sqrt{\frac{20}{27}}\pi$. На основании формул (10), (12) и неравенств (3) получаем

$$r = 2\sqrt{\frac{10}{3}}, \quad h = 2\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad V = \frac{800\pi}{27} \tag{15}$$

Проверим условие оптимальности второго порядка:

$$2r \cdot l_1 + 2h \cdot l_2 = 0 \tag{16}$$

Откуда

$$l_1 = -l_2\frac{h}{r} = -l_2\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, h, 1, \mu) = -4\pi\sqrt{\frac{5}{27}} + 4\pi\sqrt{\frac{5}{27}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial h}(r, h, 1, \mu) = -\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}(r, h, 1, \mu) = 2\sqrt{\frac{20}{27}}\pi$$

то

$$l^T \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} \\ -\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} & 2\sqrt{\frac{20}{27}}\pi \end{pmatrix} l = -8\pi\sqrt{\frac{10}{27}}\, l_1 l_2 + 4\pi\sqrt{\frac{5}{27}}\, l_2^2 =$$

$$= l_2^2\ (\frac{8\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{10}{27}} + 4\pi\sqrt{\frac{5}{27}}) = 12\pi\sqrt{\frac{5}{27}}\ l_2^2 > 0 \text{ для каждого ненулевого вектора } l.$$

Значит, найденный план дает $\max V(r, h)$.

Ответ: $h = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$ см.