11

$$f(x,y) = e^{-2x^2+xy-5y^2} \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть функции* $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, *определенная в окрестности* $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ *точки* $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^m)$, *имеет в точке* x_0 *частные производные по каждой из переменных* $x^1, ..., x^m$.
Тогда для того, чтобы функция имела в x_0 *локальный экстремум, необходимо, чтобы в этой точке были выполнены равенства*

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0, \quad ..., \quad \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) = 0 \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть функции* $f : U(x_0) \to \mathbb{R}-$ *функция класса* $C^{(2)}(U(x_0); \mathbb{R})$, *определенная в окрестности* $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ *точки* $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^m) \in \mathbb{R}^m$, *и пусть* x_0 – *критическая точка этой функции* f.
Если в тейлоровском разложении

$$f(x_0^1 + h^1, ..., x_0^m + h^m) = f(x_0^1, ..., x_0^m) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h^i h^j + o(||h||^2) \tag{3}$$

функции в точке x_0 *квадратичная форма*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)h^i h^j \equiv \partial_{ij} f(x_0)h^i h^j. \tag{4}$$

a) знакоопределена, то в точке x_0 *функция имеет локальный экстремум, который является строгим локальным минимумом, если квадратичная форма (4) положительно определена, и строгим локальным максимумом, если она отрицательно определена;*
b) может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 *функция экстремума не имеет.*

В соответствии с необходимыми условиями (2) напишем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (-4x + y)e^{-2x^2+xy-5y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (-10y + x)e^{-2x^2+xy-5y^2} = 0 \end{cases}$$

из которой находим критическую точку $(0, 0)$.
Поскольку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (16x^2 - 8xy + y^2 - 4)e^{-2x^2+xy-5y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (-4x^2 + 41xy - 10y^2 + 1)e^{-2x^2+xy-5y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (x^2 - 20xy + 100y^2 - 10)e^{-2x^2+xy-5y^2}$$

то в точке $(0, 0)$ квадратичная форма $\partial_{ij} f(x_0) h^i h^j$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$$

т.е. она отрицательно определена, и, следовательно, в этой точке функция имеет локальный максимум.