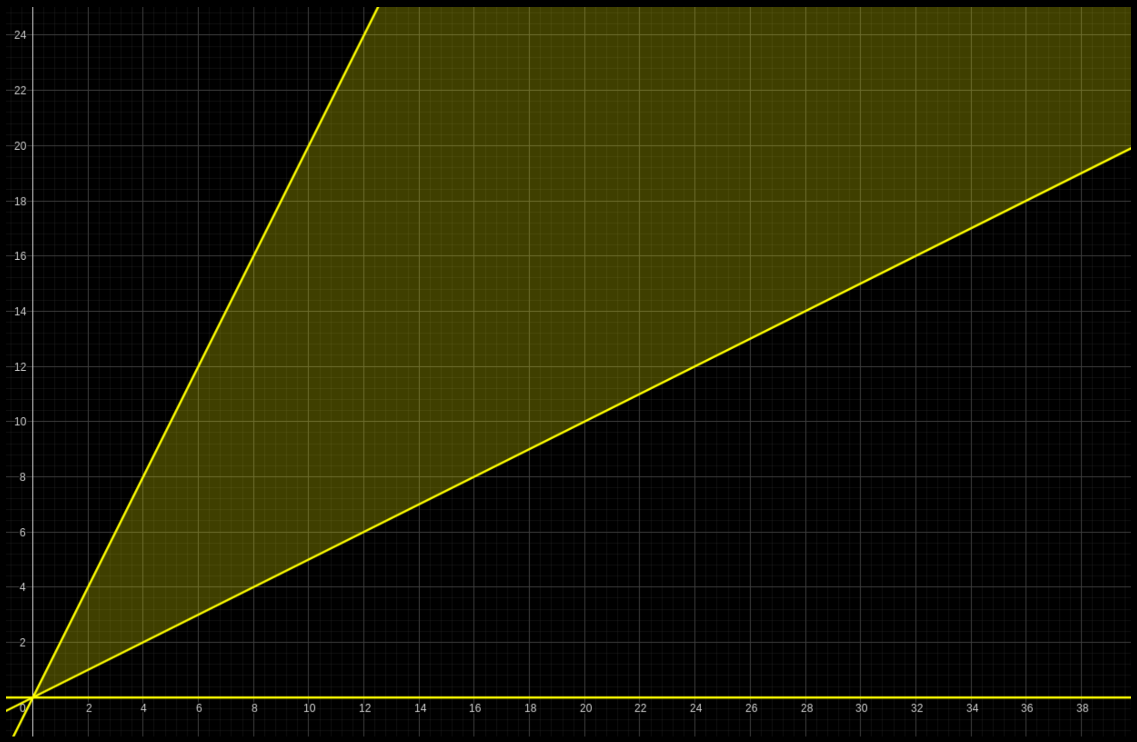
5.18.3

Доказать, что множество $\mathscr{X} = \{(x_1, x_2) =: x \in \mathbb{R}^2 |\ (2x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2 \le 0) \wedge (x_2 \ge 0)\}$ является выпуклым конусом и изобразить его на плоскости.



◀ Если $\mathscr{X}$ – выпуклое множество, по определению можно записать, что

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \ge 0, \forall x, y \in \mathscr{X} \implies ((x + y) \in \mathscr{X}) \wedge (\lambda x \in \mathscr{X}))$$

Заметим сначала, что
$$2(\lambda x_1)^2 - 5(\lambda x_1)(\lambda x_2) + 2(\lambda x_2)^2 = \lambda^2(2x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2) \le 0$$
и что знак неравенства не изменился.
Далее, из определения $\mathscr{X}$ имеем

$$\begin{cases} 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2 \le 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{1}$$

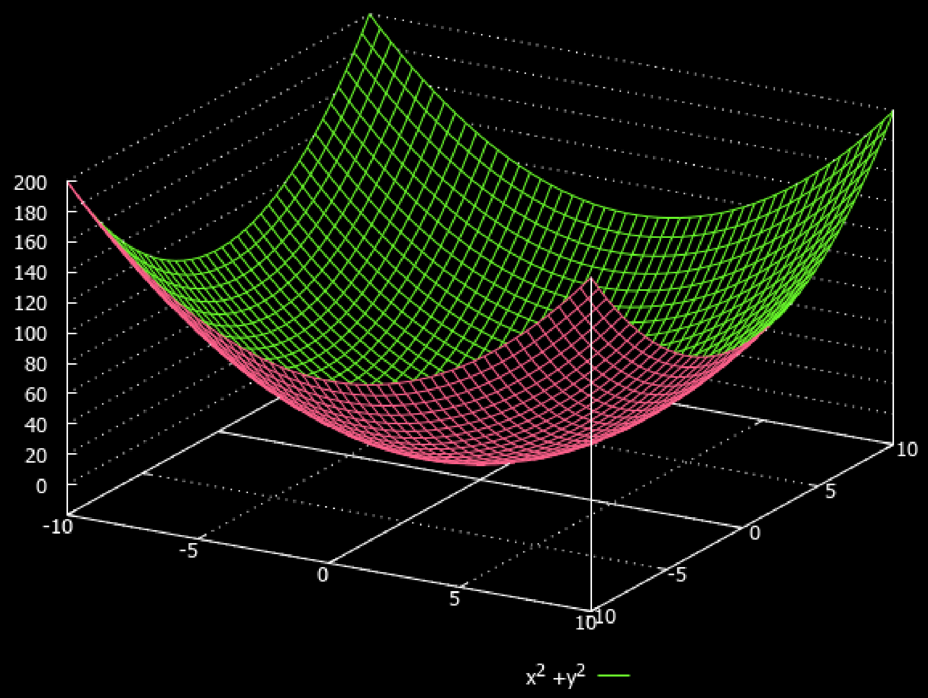
$$\begin{cases} 2y_1^2 - 5y_1y_2 + 2y_2^2 \le 0 \\ y_2 \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

Из (1) и (2) очевидно следует $x_1 \ge 0,\ y_1 \ge 0$.

$2(x_1+y_1)^2 - 5(x_1+y_1)(x_2+y_2) + 2(x_2+y_2)^2 = 2x_1^2 + 4x_1y_1 + 2y_1^2 - 5x_1x_2 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 - 5y_1y_2 + 2x_2^2 + 4x_2y_2 + 2y_2^2 =$
$= (2x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2) + (2y_1^2 - 5y_1y_2 + 2y_2^2) + 4x_1y_1 + 4x_2y_2 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 \le 4(x_1y_1 + x_2y_2) - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 \le$
$\le$ [Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского] $\le 4(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}) - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 \le$
$\le$ [Воспользуемся первым условием в (1) и (2)] $\le 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \sqrt{x_1x_2y_1y_2} - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 = -5(x_1y_2 - 2\sqrt{x_1y_2} \cdot \sqrt{x_2y_1} + x_2y_1) \le$
$\le -5(\sqrt{x_1y_2} - \sqrt{x_2y_1})^2 \le 0$ ▶

5.22.24

Выписать уравнение гиперплоскости, опорной к множеству $\mathscr{X} = \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 |\ x^3 \geq (x^1)^2 + (x^2)^2\}$ и отделяющей его от точки $M(\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{17}{18})$.



◀ Пусть $f(x) = f(x^1, x^2, x^3) = (x^1)^2 + (x^2)^2 - x^3,\ x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$−гладкая поверхность. Поскольку матрица $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f$ вторых производных положительна, функция f является выпуклой.

Следовательно, $\mathscr{X}$ является выпуклым множеством.

Спроецируем точку M на f по оси x^3 в точку N:

$$f(\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, x^3) = 0$$

$$x^3 = \frac{160}{81}$$

$\nabla f|_N = (\frac{8}{3}, \frac{8}{9}, -1)$.

$\nabla f|_N \begin{pmatrix} x^1 - \frac{4}{3} \\ x^2 - \frac{4}{9} \\ x^3 - \frac{160}{81} \end{pmatrix} = \frac{8}{3}(x^1 - \frac{4}{3}) + \frac{8}{9}(x^2 - \frac{4}{9}) - x^3 + \frac{160}{81}$ ▶