40

Проверить, является ли функция f выпуклой (вогнутой) на заданном множестве $\mathscr{X}$, или указать области, в которых f является выпуклой или вогнутой:

$$f(x) = -2(x^1)^3 - 3(x^2)^2 - (x^3)^3 + 4x^1x^2 + 7x^3 + 18, \quad \mathscr{X} = \{(x^1, x^2, x^3) = x \in \mathbb{R}^3 |\ (x^2 \geq 0) \wedge (x^3 \geq 0)\}$$

◄

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \begin{pmatrix} -12x^1 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6x^3 \end{pmatrix}$$

Выпуклость

$$\Delta_1 = -12x^1 > 0 \implies x^1 < 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -12x^1 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 72x^1 - 16 < 0 \text{ так как } x^1 < 0$$

Следовательно, в силу критерия Сильвестра матрица не является положительно определенной и функция не является выпуклой.

Вогнутость

$$\Delta_1 = -12x^1 < 0 \text{ при } x^1 > 0$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -12x^1 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 72x^1 - 16 > 0 \text{ при } x^1 > \frac{2}{9}$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -12x^1 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6x^3 \end{vmatrix} = (72x^1 - 16)(-6x^3) < 0 \text{ при } x^3 > 0$$

В силу критерия Сильвестра матрица является отрицательно определенной и функция f является вогнутой на множестве $\mathscr{X} \supset \mathscr{Y} = \{(x^1, x^2, x^3) = x \in \mathbb{R}^3 |\ (x^1 > \frac{2}{9}) \wedge (x^3 > 0)\}$ ►