

26

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 24 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad d_* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad d^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Первая фаза

Возьмем вектор $\tilde{x} = (1, 1, 4, 3, -1)$. Найдем невязки:

$$w_1 = -1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3$$

$$w_2 = 24 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = 6$$

$$w_3 = 6 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = -2$$

Задача первой фазы

$$\begin{aligned} & -x_6 - x_7 - x_8 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} -x_1 + 3x_5 + x_6 = -1 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_7 = 24 \\ x_2 + 3x_4 + 2x_5 - x_8 = 6 \end{cases} \\ & 1 \leq x_1 \leq 6, \quad 1 \leq x_2 \leq 6, \quad 0 \leq x_3 \leq 4, \quad -2 \leq x_4 \leq 3, \quad -1 \leq x_5 \leq 4, \\ & 0 \leq x_6, \quad 0 \leq x_7, \quad 0 \leq x_8 \end{aligned}$$

Начальный базисный план для задачи

$$x = (1, 1, 4, 3, -1, 3, 6, 2), \quad J_{\text{в}} = \{6, 7, 8\} \quad J_{\text{н}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

.

$$\check{c} = (0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1)$$

Итерация 1

Шаг 1

$$A_{\text{в}}^T u = \check{c}_{\text{в}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \implies u = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 2

$$\Delta_1 = 0 - [-1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0, \quad x_1 = d_{*1};$$

$$\Delta_2 = 0 - [0, 2, 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 > 0, \quad x_2 = d_{*2}, \quad \text{критерий нарушается при } j_* = 2.$$

Шаг 3

$$l_2 = 1, \quad l_i = 0, \quad i = 1, 3, 4, 5.$$

$$A_{\text{Б}} l_{\text{Б}} = -a_2 \operatorname{sign} \Delta_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \Longrightarrow l_{\text{Б}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 4

$$\theta_2 = 6 - 1 = 5, \quad \theta_7 = \frac{6 - 0}{2} = 3, \quad \theta_8 = \infty$$

$$\theta = 3 \text{ при } j_0 = 7$$

Шаг 5

$$\bar{x} = x + \theta l$$

$$\bar{x} = (1, 4, 4, 3, -1, 3, 0, 5), \quad J_{\text{Б}} = \{2, 6, 8\}$$

Итерация 2**Шаг 1**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \Longrightarrow u = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 2

$$\Delta_1 = 0 - [-1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0, \quad x_1 = d_{*1};$$

$$\Delta_3 = 0 - [0, 4, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = 2 > 0, \quad x = d_3^*;$$

$$\Delta_4 = 0 - [0, 0, 3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = -3 < 0, \quad x = d_4^*, \text{ критерий нарушается при } j_* = 4.$$

Шаг 3

$$l_4 = -1, \quad l_i = 0, \quad i = 1, 3, 5, 7$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \implies l_{\text{б}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Шаг 4

$$\theta_4 = 3 - (-2) = 5, \quad \theta_8 = \frac{5-0}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\theta = \frac{5}{3} \text{ при } j_0 = 8$$

Шаг 5

$$\bar{x} = (1, 4, 4, \frac{4}{3}, -1, 3, 0, 0), \quad J_{\text{б}} = \{2, 4, 6\}$$

Итерация 3**Шаг 1**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \implies u = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 2

$$\Delta_1 = 0 - [-1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 < 0, \quad x_1 = d_{*1}$$

$$\Delta_3 = 0 - [0, 4, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta_5 = 0 - [3, 0, 3] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 > 0, \quad x_5 = d_{*5}, \text{ критерий нарушается при } j_* = 5.$$

Шаг 3

$$l_5 = 1, \quad l_i = 0, \quad i = 1, 3, 7, 8$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{array} \right] \Longrightarrow l_{\text{в}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -3 \end{bmatrix}$$

Шаг 4

$$\theta_4 = \frac{\frac{4}{3} - (-2)}{\frac{2}{3}} = 5, \quad \theta_5 = 4 - (-1) = 5, \quad \theta_6 = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

$$\theta = 1 \text{ при } j_0 = 6$$

Шаг 5

$$\bar{x} = (1, 4, 4, \frac{2}{3}, 0, 0, 0, 0), \quad J_{\text{в}} = \{2, 4, 5\}$$

Поскольку все искусственные переменные равны нулю и не входят в базис, первая фаза завершается.

Вторая фаза**Итерация 1****Шаг 1**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right] \Longrightarrow u = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 2

$$\Delta_1 = -4 - [-1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -5 < 0, \quad x_1 = d_{*1}$$

$$\Delta_3 = 8 - [0, 4, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -8 < 0, \quad x_3 = d_3^*, \text{ критерий нарушается при } j_* = 3$$

Шаг 3

$$l_3 = -1, \quad l_1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right] \Longrightarrow l_{\text{в}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 4

$$\theta_2 = \frac{6-4}{2} = 1, \quad \theta_3 = 4 - 0 = 4, \quad \theta_4 = \frac{\frac{2}{3} - (-2)}{\frac{2}{3}} = 4$$

$$\theta = 1 \text{ при } j_0 = 2$$

Шаг 5

$$\bar{x} = (1, 6, 3, 0, 0), \quad J_{\text{в}} = \{3, 4, 5\}$$

Итерация 2

Шаг 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right] \Longrightarrow u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 2

$$\Delta_1 = -4 - [-1, 0, 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -5 < 0 \quad x_1 = d_{*1}$$

$$\Delta_2 = 8 - [0, 2, 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 > 0, \quad x_2 = d_2^*$$

Выполнены условия критерия оптимальности базисного плана.
Значит, план $x = (1, 6, 3, 0, 0)$ оптимальный.