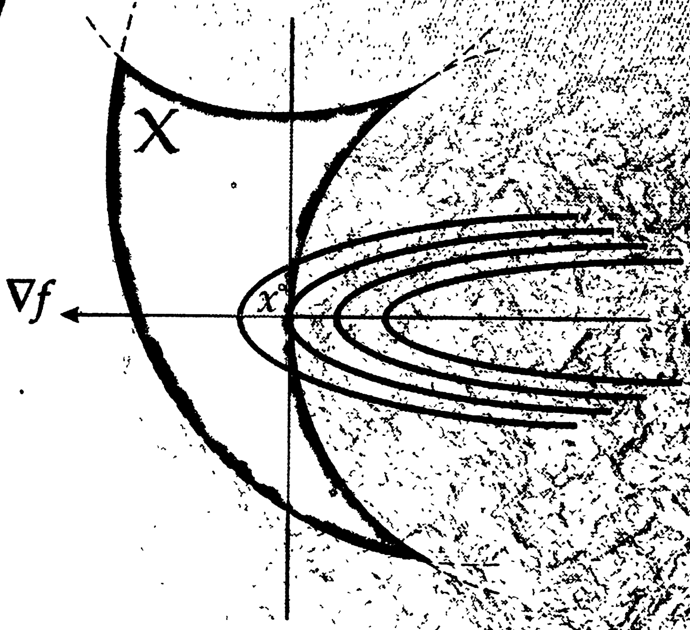
В. В. Альсевич
В. В. Крахотко

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ:

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАНИЯ



УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

УДК 517.977(075.8)
ББК 22.18я73
А45

Рецензенты:
кафедра высшей математики БГТУ
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *В. М. Марченко*);
доктор физико-математических наук, профессор *Л. И. Минченко*

Альсевич, В. В.

А45 Методы оптимизации : упражнения и задания : учеб. пособие / В. В. Альсевич, В. В. Крахотко. — Мн. : БГУ, 2005. — 405 с.
ISBN 985-485-353-5.

В данном пособии в сжатой форме дается весь объем теоретического материала, входящего в курс по методам оптимизации в конечномерных и функциональных пространствах, приводится подробное решение типовых задач, а также достаточно большой набор вариантов заданий для проведения практических занятий и для самостоятельного изучения каждой темы.

Помимо классического материала, рассматриваются также решения нетрадиционных задач: симплекс-метод для задач линейного программирования с двухсторонними прямыми ограничениями, метод потенциалов для транспортных задач с пропускными способностями и др.

Предназначено для студентов математических, экономических и технических специальностей учреждений, обеспечивающих получение высшего образования. Может быть использовано студентами других специальностей, а также специалистами, интересующимися решением оптимизационных задач.

УДК 517.977(075.8)
ББК 22.18я73

ISBN 985-485-353-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

К настоящему времени имеется множество учебников и учебных пособий, в которых рассматриваются задачи оптимизации. Однако до сих пор нет книги, содержащей в сжатой форме весь объем теоретического материала, входящего в курс "Методы оптимизации", и достаточный набор вариантов заданий для самостоятельного изучения каждой темы. Данное пособие подготовлено в соответствии с программами по курсу "Методы оптимизации" на факультете прикладной математики и информатики (ФПМИ) Белгосуниверситета по специальностям "Прикладная математика", "Экономическая кибернетика", "Информатика", "Актуарная математика", "Компьютерная безопасность" и в основном следует идеям, изложенным в книгах [3, 12]. В нем содержатся понятия и утверждения, которые необходимо знать при решении задач, входящих в курс по методам оптимизации в конечномерных и функциональных пространствах, дается подробное решение всех типовых задач, а также приводится достаточно большой набор вариантов заданий для проведения практических занятий и для самостоятельного изучения каждой темы. Имеются достаточно трудные задачи, рассчитанные на подготовленного студента.

Помимо классического материала, приводится также решение нетрадиционных задач: симплекс-метод для задач линейного программирования с двухсторонними прямыми ограничениями, метод потенциалов для транспортных задач с пропускными способностями и др.

Для решения классических задач линейного программирования с односторонними прямыми ограничениями используются как традиционный табличный метод, так и метод обратной матрицы без применения таблиц. Одна из глав содержит сведения из выпуклого анализа. Это объясняется тем, что для класса выпуклых задач можно построить методы, гарантирующие решение любой задачи класса с заданной точностью.

В пособие не включены некоторые разделы оптимизационных задач, в частности задачи бродячего торговца, параметрического программирования, теории расписаний, игровые задачи и др. Все они входят в курс "Исследование операций", который авторы предлагаемого издания не читают на ФПМИ.

Задачи в основном носят иллюстративный характер, поэтому в большинстве случаев используются условные наименования единиц измерения (в особенности денежных).

Идеи некоторых задач заимствованы из книг [1, 4, 5, 7, 17, 19, 21—23, 26—28, 30].

К сожалению, ответы и решения для заданий и упражнений в пособии не приводятся, иначе его объем был бы вдвое больше предлагаемого.

Цель данного пособия — выработать навыки применения методов оптимизации и алгоритмов решения оптимизационных задач на высоком профессиональном уровне, подготовить студентов к внедрению этих методов и алгоритмов в современное производство и управление народным хозяйством.

Авторы признательны сотрудникам кафедры методов оптимального управления Белгосуниверситета за ценные советы при подготовке пособия, а также предоставление некоторого материала и выражают им огромную благодарность.

Все замечания по данному пособию просим присылать на кафедру методов оптимального управления Белгосуниверситета по адресу: *220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4.*

Глава 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (ЛП)

§ 1. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Линейным программированием (ЛП) называют раздел математики, исследующий задачи оптимизации (максимизации или минимизации) линейных функций на множествах конечномерного пространства, описываемых линейными уравнениями и неравенствами. Классическим численным методом решения задач ЛП является симплекс-метод, разработанный американским математиком Дж. Данцигом в 1947 г. [16].

1.1. Производственные задачи. Математические модели. Основные определения

Пример 1.1. Предприятие выпускает два вида продукции A_1, A_2. Для их изготовления необходимо затратить такие производственные факторы, как сырье, физический труд и управленческий труд. Затраты ресурсов на единицу продукции каждого вида, ежедневный объем имеющихся ресурсов, а также прибыль на единицу продукции (в условных денежных единицах — сокращенно д. е.) приведены в табл. 1.1. Требуется составить план ежедневного выпуска продукции, при котором получаемая прибыль будет максимальной.

Таблица 1.1

Тип ресурсов	Затраты ресурсов на единицу продукции вида		Объем ресурсов
	A_1	A_2	
Сырье (кг)	8	25	800
Физический труд (чел.-ч)	8	5	640
Управленческий труд (чел.-ч)	1	5	145
Прибыль на ед. продукции (д. е.)	80	70	

Прежде всего составим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество единиц продукции вида A_j, $j=1, 2$, которое предприятие планирует выпустить за сутки. Тогда $80x_1$ — прибыль от реализации продукции вида A_1 и $70x_2$ — вида A_2, $\varphi(x)=80x_1+70x_2$ — прибыль от реализации всей продукции. Отразим в модели ограничения на факторы. Имеем: $8x_1$ — количество сырья, необходимое для изготовления продукции вида A_1; $25x_2$ — вида A_2; $8x_1+25x_2$ — всей продукции. Поскольку в наличии имеется 800 кг сырья, то получаем $8x_1+25x_2\le 800$. Затраты физического труда: $8x_1$ — количество человеко-часов, необходимое для производства продукции вида A_1; $5x_2$ — вида A_2; $8x_1+5x_2$ — всей продукции. Поскольку в течение суток можно использовать 640 чел.-ч физического труда, то получим $8x_1+5x_2 \le 640$. Аналогично имеем для затрат управленческого труда $x_1+5x_2 \le 145$. Из физического смысла переменных следует, что они неотрицательны: продукция либо выпускается ($x_j>0$), либо — нет ($x_j=0$).

Производственная задача свелась к решению следующей математической задачи:

$$\varphi(x)=80x_1+70x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 8x_1+25x_2 \le 800, \\ 8x_1+\ \ 5x_2 \le 640, \\ \ \ x_1+\ \ 5x_2 \le 145, \end{cases} \tag{1.1}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Задача (1.1) называется ***математической моделью производственной задачи***, сформулированной в примере 1.1. Неизвестные x_1, x_2 называются ***переменными задачи***.

Пример 1.2. В мастерскую по выпуску некоторых изделий поступает материал в рулонах, в каждом из которых 10 м^2 материала. Для изготовления каждого изделия требуются заготовки трех видов *А*, *Б*, *В* по 3,4 м^2, 5,4 м^2, 3,0 м^2 каждая соответственно. На каждое изделие требуется 6 заготовок вида *А*, 4 заготовки вида *Б* и 7 заготовок вида *В*. Известны пять способов раскроя одного рулона. Количество заготовок, получаемых из каждого рулона при всех способах раскроя, приведено в табл. 1.2. Необходимо определить, какое количество рулонов материала требуется раскроить каждым из указанных способов для изготовления 100 изделий, чтобы отходы были минимальными.

Таблица 1.2

		Способ раскроя				
		I	II	III	IV	V
Количество	*А*	2	1	1	—	—
заготовок	*Б*	—	1	—	1	—
вида	*В*	1	—	2	1	3

Составим математическую модель задачи.

Обозначим через x_j количество рулонов материала, необходимое для раскроя на заготовки по j-му способу $(j=\overline{1,5})$. Тогда количество заготовок вида *А*, полученных при раскрое первым способом, будет $2x_1$, вторым и третьим — соответственно x_2 и x_3, а всего заготовок вида A равно $2x_1+x_2+x_3$. Поскольку требуется изготовить 100 изделий, а на каждое из них необходимо 6 заготовок вида A, то всего заготовок вида A требуется 600 шт. Отсюда будем иметь $2x_1+x_2+x_3=600$. Аналогично получим условия на заготовки видов $Б$ и $В$ соответственно: $x_2+x_4=400$, x_1+ $+2x_3+x_4+3x_5=700$. Из физического смысла переменных x_j следует их неотрицательность: если j-й способ раскроя рулонов используется, то $x_j>0$, в противном случае — $x_j=0$. Найдем величину отходов. При первом способе раскроя отходы материала из одного рулона равны $10-$ $-(3{,}4\cdot 2+3)=0{,}2$ (м^2), а из x_1 рулонов — $0{,}2x_1$. Аналогично при втором способе раскроя: из одного рулона отходы равны $10-(3{,}4+5{,}4)=$ $=1{,}2$ (м^2), а из x_2 рулонов — $1{,}2x_2$. Для третьего, четвертого и пятого способов получаем соответственно: $(10-(3{,}4+3\cdot 2))x_3=0{,}6x_3$; $(10-(5{,}4+$ $+3))x_4=1{,}6x_4$; $(10-3\cdot 3)x_5=x_5$. Итак, количество отходов равно $0{,}2x_1+$ $+1{,}2x_2+0{,}6x_3+1{,}6x_4+x_5$ (м^2).

Таким образом, производственная задача свелась к решению следующей математической задачи:

$$\varphi(x)=0{,}2x_1+1{,}2x_2+0{,}6x_3+1{,}6x_4+x_5\to\min,$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 = 600,\\ x_2+x_4=400,\\ x_1+2x_3+x_4+3x_5=700,\end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$$

Задача (1.2) является математической моделью производственной задачи, сформулированной в примере 1.2. Как и в (1.1), x_j, $j=\overline{1,5}$, — переменные задачи (1.2).

Пример 1.3 (задача о рационе). Требуется приготовить наиболее дешевый рацион для кормления животных, состоящий из трех видов пищи A_1, A_2, A_3 и обязательно содержащий два типа полезных веществ B_1, B_2 в пределах, не менее требуемых для нормального развития. Каждый вид пищи содержит эти питательные вещества в определенных пропорциях. Все данные приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Тип питательного вещества	Содержание питательного вещества в единице пищи (г)			Нижние пределы полезного вещества (г)
	A_1	A_2	A_3	
B_1	1	1	2	1
B_2	2	1	1	2
Стоим. ед. пищи (д. е.)	5	1	3	

Составим математическую модель. Обозначим через x_j количество единиц пищи вида A_j, $j=\overline{1,3}$, которое необходимо приготовить. Тогда стоимость рациона будет равна $\varphi(x)=5x_1+x_2+3x_3$. Поскольку питательного вещества типа B_1 содержится в единице пищи вида A_1 и A_2 по 1 г, а в пище вида A_3 — 2 г, то всего в рационе будет $x_1+x_2+2x_3$ (г). По условию задачи в рационе должно быть не менее 1 г питательного вещества типа B_1, следовательно, получим ограничение $x_1+x_2+2x_3\geq 1$. Аналогично будем иметь для питательного вещества типа B_2: $2x_1+x_2+x_3\geq 2$. Из физического смысла переменных следует их неотрицательность: $x_j\geq 0$, $j=\overline{1,3}$.

Итак, задача о рационе свелась к решению следующей задачи:

$$\varphi(x)=5x_1+x_2+3x_3\to\min,$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\geq 1,\\ 2x_1+x_2+x_3\geq 2,\end{cases}\qquad (1.3)$$

$$x_j\geq 0,\ \ j=\overline{1,3}.$$

Задача (1.3) является математической моделью задачи о рационе.

Все три задачи (1.1)—(1.3) характеризуются тем, что в них максимизируются или минимизируются линейные функции нескольких переменных, которые удовлетворяют линейным уравнениям или неравенствам. Такие задачи называются задачами ***линейного программирования*** (ЛП).

Рассмотрим задачу (1.1). В ней количество переменных $n=2$, количество ограничений $m=3$ (условия неотрицательности переменных в число m не входят). В общем случае задача ЛП типа (1.1) имеет вид

$$\varphi(x)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leq b_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leq b_m,\end{cases}\qquad (1.4)$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Задача (1.1) получается из (1.4) при $n=2$, $m=3$, $c_1=80$, $c_2=70$; $b_1=800$, $b_2=640$, $b_3=145$; $a_{11}=8$, $a_{12}=25$, $a_{21}=8$, $a_{22}=5$, $a_{31}=1$, $a_{32}=5$.

Задача (1.4) записана в координатной форме. Введем обозначения

$$c=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

В дальнейшем все векторы будем понимать как векторы-столбцы. Действия над векторами и матрицами будем осуществлять по правилам матричного исчисления. Вводя знак транспонирования "′" и предполагая, что для двух векторов d, f одинаковой размерности запись $d \le f$ означает совокупность покоординатных неравенств $d_j \le f_j$ для всех j, задачу (1.4) можем записать в виде

$$\varphi(x) = c'x \to \max, \quad Ax \le b, \quad x \ge 0. \tag{1.5}$$

Для задачи (1.1) имеем

$$c = \begin{pmatrix} 80 \\ 70 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 800 \\ 640 \\ 145 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 8 & 25 \\ 8 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Аналогично задачи (1.2), (1.3) в общем случае, используя векторно-матричную форму, можно записать в виде

$$\varphi(x) = c'x \to \min, \quad Ax = b, \quad x \ge 0, \tag{1.6}$$

$$\varphi(x) = c'x \to \min, \quad Ax \ge b, \quad x \ge 0. \tag{1.7}$$

В ЛП, исходя из физического смысла элементов производственных задач, принято называть: вектор c — ***вектором стоимости*** (координаты c_j — ***коэффициентами стоимости***), вектор b — ***вектором ограничений*** (***вектором ресурсов***), матрицу A — ***матрицей условий*** (***матрицей затрат***), столбцы a_j матрицы A — ***векторами условий***. Функцию $\varphi(x) = c'x$ называют ***целевой функцией*** задачи, ограничение $Ax \le b$ (для задач (1.6), (1.7) соответственно $Ax = b$, $Ax \ge b$) — ***основным ограничением***, неравенство $x \ge 0$ — ***прямым ограничением*** задачи.

Каждый вектор x, удовлетворяющий всем ограничениям задачи, называется ***планом***, множество $X = \{x \colon Ax \le b, x \ge 0\}$ — ***множеством планов*** задачи (1.5) (для задач (1.6), (1.7) имеем соответственно: $X = \{x \colon Ax = b, x \ge 0\}$, $X = \{x \colon Ax \ge b, x \ge 0\}$). План $x^0 \in X$, являющийся решением задачи $c'x^0 = \max c'x$, $x \in X$, — называется ***оптимальным планом***.

Задания

При различных сочетаниях вариантов таблиц *а* и *б* (а где необходимо, и табл. *в*, *г*) построить математические модели следующих задач.

1.1. Известна производственная мощность предприятия по изготовлению изделий типа A_1 и A_2 в сутки. Кроме того, известно, что отдел технического контроля (ОТК) пропускает в сутки не более заданного количества изделий того или другого типа (см. табл. 1.4*а*). Требуется спланировать выпуск продукции так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль (прибыль от реализации одного изделия задана в табл. 1.4*б*).

Таблица 1.4а

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Производственная мощность предприятия изделий (шт.)	A_1	120	140	180	50	160	200	500	280	40	70
	A_2	180	200	300	70	120	240	200	120	60	40
Возможности ОТК (шт.)		200	260	400	100	200	380	600	360	80	100

Таблица 1.4б

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прибыль от реализации одного изделия (д. е.)	A_1	40	10	50	30	70	60	20	80	90	50
	A_2	10	40	60	50	40	50	30	100	60	30

1.2. На изготовление изделий типа A_1 и A_2 расходуются три вида материалов B_1, B_2, B_3. Количество материала каждого вида (в кг), необходимое для изготовления одного изделия любого типа, а также имеющиеся на складе ресурсы материалов заданы в табл. 1.5*а*. Цена одного изделия каждого типа дана в табл. 1.5*б*.

Требуется спланировать выпуск изделий таким образом, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Таблица 1.5а

Варианты	Вид материала	Затраты материала на 1 изделие (кг)		Ресурсы (кг)
		A_1	A_2	
1	B_1	3	—	60
	B_2	—	1	50
	B_3	2	1	80
2	B_1	2	1	100
	B_2	1	—	40
	B_3	1	1	80
3	B_1	4	5	160
	B_2	2	1	62
	B_3	—	4	96
4	B_1	1	3	180
	B_2	2	1	180
	B_3	1	1	100
5	B_1	1	1	80
	B_2	3	10	590
	B_3	3	1	210

Таблица 1.5б

Варианты	Цена 1 изделия (д. е.)	
	A_1	A_2
1	10	30
2	15	25
3	25	10
4	40	60
5	70	80
6	100	20
7	50	40
8	10	40
9	30	25
10	40	30
11	50	20
12	10	60
13	70	90
14	60	70
15	20	50

1.3. Для производства двух видов изделий A_1 и A_2 используется токарное (Т), фрезерное (Ф) и шлифовальное (Ш) оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида и общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования приведены в табл. 1.6*а*, прибыль от реализации одного изделия каждого вида дана в табл. 1.6*б*. Найти план выпуска изделий A_1, A_2, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Таблица 1.6а

Варианты	Тип оборудования	Затраты времени на обработку 1 изделия (ст.-ч)		Общий фонд раб. времени оборудов. (ст.-ч)
		A_1	A_2	
1	Ф	9	9	225
	Т	6	3	120
	Ш	1	6	90
2	Ф	3	4	240
	Т	6	4	372
	Ш	1	4	160
3	Ф	6	8	504
	Т	5	11	550
	Ш	15	5	945
4	Ф	2	4	240
	Т	2	1	162
	Ш	1	7	350
5	Ф	3	1	150
	Т	8	1	320
	Ш	1	2	200

Таблица 1.6б

Варианты	Прибыль от реализации 1 изделия (д. е.)	
	A_1	A_2
1	50	100
2	100	80
3	60	30
4	40	120
5	150	200
6	250	100
7	300	100
8	450	300
9	200	250
10	80	160
11	90	200
12	100	200
13	140	210
14	160	250
15	180	200

1.4. Завод производит два вида продукции A_1 и A_2. Мощности цехов по сборке обоих видов продукции даны в табл. 1.7*а*. В этой же таблице представлены возможности механических цехов, оснащенных взаимозаменяемым оборудованием, которые могут производить детали для определенного количества изделий вида A_1 либо для изделий вида A_2, либо любую комбинацию, ограниченную этими данными.

От реализации каждой тысячи изделий вида A_1 и A_2 завод получает прибыль (см. табл. 1.7*б*). Найти такой план выпуска продукции, который обеспечит максимальную прибыль.

Таблица 1.7а

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Мощности мех. цехов (тыс. шт.)	A_1	120	150	90	100	120	160	180	210	200	180
	A_2	40	50	30	50	60	80	60	70	100	90
Мощности цехов по сборке (тыс. шт.)	A_1	90	120	81	90	110	140	150	180	180	150
	A_2	30	40	25	45	50	70	50	60	80	80

Таблица 1.7б

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прибыль от реализации 1 тыс. шт. (д. е.)	A_1	2	4	3	5	6	2	3	4	5	3
	A_2	3	5	2	3	2	7	9	13	15	10

1.5. Для изготовления изделий типа A_1 и A_2 склад может выделить ежедневно не более определенного количества металла. Ресурсы склада, суточная мощность предприятия по выпуску изделий каждого типа, а также количество металла, необходимое для производства одного изделия каждого типа, приведены в табл. 1.8*а*. Требуется найти такой выпуск продукции, чтобы получить максимальную прибыль (данные см. в табл. 1.8*б*).

Таблица 1.8а

Варианты	Затраты металла на изготовление 1 изделия (кг)		Ресурсы склада (кг)	Мощность завода по изготовлению изделий (шт.)	
	A_1	A_2		A_1	A_2
1	2	1	80	30	40
2	2	3	240	90	60
3	1	2	160	120	60
4	3	2	240	40	90
5	4	5	400	60	60
6	3	4	240	60	30
7	1	3	90	60	20
8	1	4	160	120	35
9	5	2	100	14	40
10	3	5	150	40	24

Таблица 1.8б

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прибыль от реализации 1 изделия (д. е.)	A_1	3	2	3	3	8	5	6	8	5	4
	A_2	5	3	4	2	3	4	2	5	9	7

1.6. Завод производит продукцию видов A_1 и A_2, для чего в течение суток требуется некоторое сырье, а также затраты времени основного оборудования на расфасовку продукции вида A_1 и автоматов на расфасовку продукции вида A_2. Затраты сырья и рабочего времени на производство и расфасовку 1 т продукции того или другого вида, а также имеющиеся в течение суток запасы сырья и фонд рабочего времени основного оборудования и автоматов приведены в табл. 1.9*а*. Величина прибыли от реализации 1 т продукции обоих видов дана в табл. 1.9*б*. Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

Таблица 1.9а

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Затраты сырья на 1 т продукции	A_1	2	2	2	4	3	6	5	4	5	8
	A_2	1	3	4	3	5	7	6	6	4	5
Затраты рабочего времени на расфасовку 1 т продукции (маш.-ч)	Осн. оборуд. для A_1	1	0,5	0,4	0,6	0,4	0,4	0,8	0,5	0,5	0,6
	Автоматов для A_2	0,5	0,8	0,5	0,4	0,8	0,8	0,7	0,6	0,4	0,3
Ресурс сырья (т)		30	60	100	120	150	168	150	144	200	400
Фонд рабочего времени (маш.-ч)	Осн. оборуд.	14	10	16	15	18	10	16	14	15	18
	Автоматов	10	8	10	12	16	16	14	12	15	15

Таблица 1.9б

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Прибыль от реализации 1 т продукции (д. е.)	A_1	30	40	45	35	28	50	35	60	50	45
	A_2	50	60	60	70	40	26	28	30	30	35

1.7. Для изготовления изделий двух моделей на фабрике используются 2 вида сырья. Ресурсы рабочей силы и материала, затраты труда и материала для изготовления каждого изделия, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены соответственно в табл. 1.10*а*, *б*. Составить план выпуска продукции по ассортименту, максимизирующий прибыль.

Таблица 1.10а

Варианты	Производственные факторы	Ресурсы	Затраты ресурсов на 1 изделие по моделям	
			№ 1	№ 2
1	Раб. вр. (чел.-ч)	1000	1	2
	Сырье 1 с. ($м^2$)	800	2	1
	Сырье 2 с. ($м^2$)	600	2	0
2	Раб. вр. (чел.-ч)	1200	2	3
	Сырье 1 с. ($м^2$)	600	2	1
	Сырье 2 с. ($м^2$)	250	1	0
3	Раб. вр. (чел.-ч)	1800	3	2
	Сырье 1 с. ($м^2$)	1400	1	2
	Сырье 2 с. ($м^2$)	1200	3	0
4	Раб. вр. (чел.-ч)	1200	3	4
	Сырье 1 с. ($м^2$)	900	3	2
	Сырье 2 с. ($м^2$)	540	0	2
5	Раб. вр. (чел.-ч)	900	4	3
	Сырье 1 с. ($м^2$)	800	4	2
	Сырье 2 с. ($м^2$)	600	0	3

Таблица 1.10б

Варианты	Прибыль от реализации ед. продукции (д. е.)	
	№ 1	№ 2
1	40	60
2	50	80
3	60	120
4	70	120
5	50	100
6	60	30
7	80	50
8	90	40
9	120	80
10	140	100
11	90	30
12	110	90
13	120	100
14	40	90
15	80	110

1.8. На звероферме могут выращиваться два вида ценных пушных зверей. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используют 3 типа кормов. Количество корма каждого типа, которое должны ежедневно получать звери, приведено в табл. 1.11*а*. В ней же указано общее количество корма каждого типа, которое может быть использовано зверофермой. Доход от реализации одной шкурки каждого зверя задан в табл. 1.11*б*. Определить, сколько зверей каждого вида следует выращивать на звероферме, чтобы доход от реализации их шкурок был максимальным.

1.9. Для выпуска продукции двух видов фабрика использует необходимые производственные факторы: сырье (С), физический труд (ФТ) и автоматическую обработку на станках (АОС). Нормы затрат факторов на 1 единицу продукции данного вида, общее количество имеющихся ежедневно ресурсов каждого типа, прибыль от реализации единицы продукции приведены в табл. 1.12*а*, 1.12*б*. Определить, сколько продукции каждого вида следует ежедневно выпускать, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

Таблица 1.11а

Варианты	Тип корма	Количество ед. корма, ежедневно получаемое зверем		Общее количество корма
		1-го вида	2-го вида	
1	I	2	3	180
	II	4	1	240
	III	8	27	1350
2	I	3	1	240
	II	9	2	630
	III	5	3	600
3	I	2	5	600
	II	4	5	1000
	III	4	15	1500
4	I	3	4	600
	II	2	2	380
	III	5	8	1120
5	I	4	1	400
	II	8	1	720
	III	2	1	300

Таблица 1.11б

Варианты	Доход от реализации 1 шкурки (д. е.)	
	1-го вида	2-го вида
1	300	400
2	200	600
3	400	900
4	350	700
5	250	340
6	480	300
7	500	400
8	380	200
9	350	210
10	550	400
11	260	320
12	400	360
13	350	260
14	360	420
15	400	460

Таблица 1.12а

Варианты	Наименование факторов	Затраты производственных факторов на 1 ед. продукции		Ресурс факторов
		1-го вида	2-го вида	
1	С (т)	0,2	0,3	60
	ФТ (чел.-ч)	1,5	2,7	513
	АОС (ст.-ч)	0,2	0,1	40
2	С (т)	0,1	0,01	25
	ФТ (чел.-ч)	2,5	1,5	750
	АОС (ст.-ч)	0,1	0,12	48
3	С (т)	0,2	0,6	105
	ФТ (чел.-ч)	1,4	2,1	420
	АОС (ст.-ч)	0,2	0,1	50
4	С (т)	0,3	0,45	105
	ФТ (чел.-ч)	0,7	1,4	280
	АОС (ст.-ч)	0,16	0,4	76
5	С (т)	0,2	0,1	100
	ФТ (чел.-ч)	1,2	1,8	720
	АОС (ст.-ч)	0,2	0,45	157,5

Таблица 1.12б

Варианты	Прибыль от реализации 1 ед. продукции (д. е.)	
	1-го вида	2-го вида
1	60	80
2	40	90
3	50	80
4	45	70
5	55	100
6	90	40
7	100	60
8	80	60
9	40	30
10	70	50
11	50	85
12	60	90
13	75	50
14	100	75
15	90	110

1.10. Для производства некоторого сплава используют 4 различных шихтовых материала A_1, A_2, A_3, A_4. Химический состав сплава определяется содержанием в нем химических элементов B_1 и B_2. Готовый сплав должен иметь строго определенный состав, который задается долями (в %) химических элементов в готовом продукте. При этом известно содержание (в %) каждого химического элемента во всех видах шихтового материала (см. табл. 1.13*а*). Задана также стоимость каждого шихтового материала (табл. 1.13*б*). Определить необходимое количество шихтовых материалов, обеспечивающее получение заданного количества сплава при минимальной общей стоимости используемых шихтовых материалов.

Таблица 1.13а

Варианты	Химические элементы	Содержание (в %) химических элементов в шихтовом материале				Химический состав сплава (в %)	Заданное количество сплава (т)
		A_1	A_2	A_3	A_4		
1	B_1	30	10	40	40	57,5	800
	B_2	20	10	20	30	42,5	
2	B_1	20	10	40	50	65	400
	B_2	10	10	10	30	35	
3	B_1	50	20	50	10	62,5	400
	B_2	40	10	10	10	37,5	
4	B_1	10	0	20	30	45	700
	B_2	10	10	10	40	55	
5	B_1	50	10	10	20	42	1200
	B_2	40	10	20	30	58	

Таблица 1.13б

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Стоимость 1 т шихты (д. е.)	A_1	100	60	90	70	80	75	65	70	95	105
	A_2	120	100	40	60	90	90	55	110	45	125
	A_3	70	80	50	15	100	105	10	90	55	75
	A_4	30	170	120	140	140	150	110	160	110	40

1.11. Полосы листового проката заданной длины требуется разрезать на заготовки трех типов А, Б, В соответствующей длины для производства необходимого количества изделий. На каждое изделие требуется определенное количество заготовок каждого типа. Известны 5 способов разреза одной полосы и количество заготовок, нарезанных из одной полосы при каждом способе раскроя (все данные приведены в табл. 1.14*а—в*). Определить, какое количество полос проката нужно разрезать каждым способом для изготовления указанного количества изделий, чтобы отходы при этом были минимальными.

1.12. Найти оптимальное сочетание посевов трех культур A_1, A_2 и A_3, обеспечивающее максимальную прибыль от реализации произведенной продукции. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется следующими показателями: урожайностью (У), затратами труда механизаторов (ТМ) и затратами конно-ручного труда (КРТ). Все показатели, в том числе и ресурсы, количество посевных площадей, прибыль от реализации 1 ц продукции приведены в табл. 1.15*а—г*.

Таблица 1.14а

Варианты	Виды заготовок	Кол-во заготовок для изготовления 1 изд.	Количество заготовок, получаемых при каждом способе разреза					Длина заготовок (см)
			I	II	III	IV	V	
1	А	4	2	1	1	—	—	52
	Б	2	—	1	—	2	—	61
	В	3	—	—	1	—	1	70
2	А	6	3	1	1	—	—	42
	Б	5	—	1	—	1	—	70
	В	3	—	—	1	—	1	72
3	А	1	1	1	—	—	—	90
	Б	3	1	—	2	1	—	58
	В	3	—	1	—	1	2	52
4	А	3	2	1	1	—	—	90
	Б	2	—	1	—	1	—	105
	В	4	—	—	1	1	3	60

Таблица 1.14б

Варианты	Длина полос проката (см) для вариантов *а*			
	1*а*	2*а*	3*а*	4*а*
1	123	127	149	196
2	124	128	150	197
3	125	129	151	198
4	126	130	152	199
5	127	131	153	200
6	128	132	—	201
7	129	133	—	202
8	130	134	—	203
9	—	135	—	204

Таблица 1.14в

Варианты	Количество изделий (шт.) для вариантов *а*	
	1*а*, 3*а*	2*а*, 4*а*
1	50	60
2	60	90
3	70	71
4	80	66
5	90	30
6	100	102
7	110	108
8	120	120
9	130	150

Таблица 1.15а

Варианты	Показатели эффективности (чел.-дн.)	A_1	A_2	A_3
1	ТМ	2	3	4
	КРТ	1	3	2
2	ТМ	1	3	2
	КРТ	0,5	1	2
3	ТМ	0,5	1	2
	КРТ	0,5	2	1
4	ТМ	1	0,5	2
	КРТ	0,5	1	3
5	ТМ	1	1	4
	КРТ	2	1	3

Таблица 1.15б

Варианты	Прибыль от реализации 1 ц продукции (д. е.)		
	A_1	A_2	A_3
1	10	30	50
2	15	25	40
3	14	25	45
4	16	27	55
5	20	29	50
6	25	35	50
7	20	30	45
8	15	30	50
9	20	35	45
10	22	30	45

Таблица 1.15в

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Урожайность (ц/га)	A_1	20	25	30	35	23	27	32	30	25	28
	A_2	10	15	16	20	22	18	15	17	19	20
	A_3	100	90	110	95	115	110	100	110	100	90

Таблица 1.15г

Варианты	Наименование показателей	Ресурсы для вариантов *а*				
		1*а*	2*а*	3*а*	4*а*	5*а*
1	Пашня (га)	7000	5000	5000	4900	6000
	ТМ (чел.-дн.)	22000	14000	8200	8400	15000
	КРТ (чел.-дн.)	15000	8500	9250	12600	13500
2	Пашня (га)	6000	5000	5000	5040	5100
	ТМ (чел.-дн.)	20000	13000	10000	8680	12000
	КРТ (чел.-дн.)	13000	8200	7000	12880	12000
3	Пашня (га)	6000	6000	5500	5110	6600
	ТМ (чел.-дн.)	21000	15000	10250	8750	13500
	КРТ (чел.-дн.)	14000	10500	8750	12950	13500
4	Пашня (га)	5000	6000	6000	5250	5400
	ТМ (чел.-дн.)	17000	14000	12000	8820	12300
	КРТ (чел.-дн.)	12000	11250	9000	12250	12000
5	Пашня (га)	5500	5500	6500	4970	5700
	ТМ (чел.-дн.)	20000	12500	12250	8540	12000
	КРТ (чел.-дн.)	14000	10500	9250	12810	12300

1.13. В сплав входит не более определенного числа процентов металла A_1 и не менее — металла A_2. Для составления сплава используются три вида сырья А, Б, В, содержащего металлы A_1, A_2 и другие вещества. Стоимость различных видов сырья и процентное содержание в нем соответствующих составляющих сплава даны в табл. 1.16*а*, *б*. Определить состав сырьевых материалов (шихты), обеспечивающий минимальную стоимость 1 кг сплава.

Таблица 1.16а

Варианты	Компоненты сплава	Содержание компонентов в сырье вида (%)			Пределы содержания металлов в сплаве
		А	Б	В	
1	A_1	70	75	90	80
	A_2	5	7	2	4
2	A_1	80	85	87	86
	A_2	4	4	7	5
3	A_1	70	76	85	78
	A_2	3	1	6	2
4	A_1	75	78	82	80
	A_2	5	5	9	6

Таблица 1.16б

Варианты	Стоимость сырья (д. е./кг)		
	А	Б	В
1	6	4	12
2	9	5	9
3	5	12	3
4	9	5	7
5	6	4	2
6	5	10	3
7	6	5	4
8	7	3	5

Окончание табл. 1.16а

Варианты	Компоненты сплава	Содержание компонентов в сырье вида (%) А	Б	В	Пределы содержания металлов в сплаве
5	A_1	77	80	84	82
	A_2	5	5	9	6
6	A_1	83	90	88	89
	A_2	4	7	4	5
7	A_1	83	88	90	89
	A_2	5	5	8	6
8	A_1	72	78	87	80
	A_2	4	1	10	2
9	A_1	71	86	77	79
	A_2	4	7	2	3
10	A_1	69	75	84	77
	A_2	4	2	7	3
11	A_1	69	89	69	79
	A_2	5	2	7	4
12	A_1	68	68	88	78
	A_2	6	8	4	5

Окончание табл. 1.16б

Варианты	Стоимость сырья (д. е./кг) А	Б	В
9	6	4	14
10	8	6	3
11	5	4	3
12	9	5	3
13	5	2	4
14	6	7	1
15	8	5	6
16	5	4	7
17	9	7	6
18	6	1	6
19	9	9	7
20	6	6	4
21	7	6	4
22	8	8	5
23	8	5	10
24	8	12	5

1.14. Стальные прутья заданной длины необходимо разрезать на заготовки определенной длины. Требуемое количество заготовок данного типа, возможные варианты разреза и длина прутьев заданы в табл. 1.17*а*—*в*. Определить, сколько прутьев необходимо разрезать по каждому из возможных вариантов, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого типа при минимальных отходах.

Таблица 1.17а

Варианты	Длина заготовок соответствующего типа (см)		Способы разреза I	II	III	IV	V	VI
1	А	52	2	1	1	—	—	—
	Б	60	—	1	—	2	1	—
	В	35	1	1	2	—	2	4
2	А	60	2	1	1	—	—	—
	Б	70	—	1	—	2	1	—
	В	54	—	—	1	—	1	2
3	А	60	3	2	1	—	—	—
	Б	80	—	1	—	2	1	—
	В	90	—	—	1	—	1	2

Таблица 1.17б

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество заготовок соответствующего типа (шт.)	А	40	50	60	50	40	50	40	30	30	50
	Б	36	30	20	20	20	70	60	50	60	80
	В	20	20	10	10	10	30	20	10	20	20

Таблица 1.17в

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Длина прутьев для вариантов *a* (см)	1*a*	147	148	149	150	151	152	153	154	—	—
	2*a*	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
	3*a*	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209

1.15. Необходимо составить смесь, в которую должно входить не менее определенного количества химических веществ видов А, Б, В. Количество единиц химических веществ, содержащихся в 1 кг сырьевых материалов A_1, A_2, A_3, нижние пределы содержания химических элементов в смеси и цены сырья каждого типа заданы в табл. 1.18*а—в*. Составить наиболее дешевую смесь, содержащую не менее заданного количества химических веществ каждого вида.

Таблица 1.18а

Варианты		1	2	3	4	5
Нижние пределы вещества соответствующего вида	А	15	16	14	16	16
	Б	17	16	17	17	17
	В	15	15	15	16	15

Таблица 1.18б

Варианты		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Стоимость 1 кг сырья соответствующего типа (д. е.)	A_1	10	30	100	80	50	70	40	80	30	80
	A_2	20	10	50	50	30	90	70	90	70	50
	A_3	30	40	60	10	20	100	10	70	60	30

Таблица 1.18в

Варианты	Вещество	Кол-во единиц вещества, содержащегося в 1 кг сырья соответствующего типа		
		A_1	A_2	A_3
1	А	20	30	10
	Б	16	20	18
	В	15	10	20
2	А	25	45	5
	Б	14	26	20
	В	15	5	25
3	А	22	36	8
	Б	13	29	21
	В	15	12	18
4	А	18	24	12
	Б	15	23	19
	В	15	9	21
5	А	21	33	9
	Б	12	32	22
	В	15	7	23

1.2. Графический метод решения

Рассмотрим задачу (1.4) (или (1.5)). Каждое из m основных ограничений-неравенств $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$, $i = \overline{1,m}$, и n прямых ограничений $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, определяет в n-мерном пространстве переменных x_j, $j = \overline{1,n}$, некоторое полупространство. Таким образом, множество планов X задачи ЛП (1.4) представляет собой множество, образованное пересечением $m+n$ полупространств указанного вида. Аналогично получим для задачи (1.7). Такие ***множества*** называют ***многогранными*** (если множество ограничено — ***многогранником***). Для задачи ЛП с $n = 2$ и произвольным m этот многогранник легко строится графически на плоскости $\mathbf{R}^2$. На рис. 1.1 изображено множество планов задачи (1.1)[1]. Точки O, K, L, M, N — ***угловые*** (***крайние***) точки многогранника (***вершины***), т. е. такие точки, которые не являются внутренними ни для одного ненулевого отрезка, целиком принадлежащего множеству X. Отрезки $[OK]$, $[KL]$, $[LM]$, $[MN]$, $[ON]$ называют ***ребрами*** многогранника.

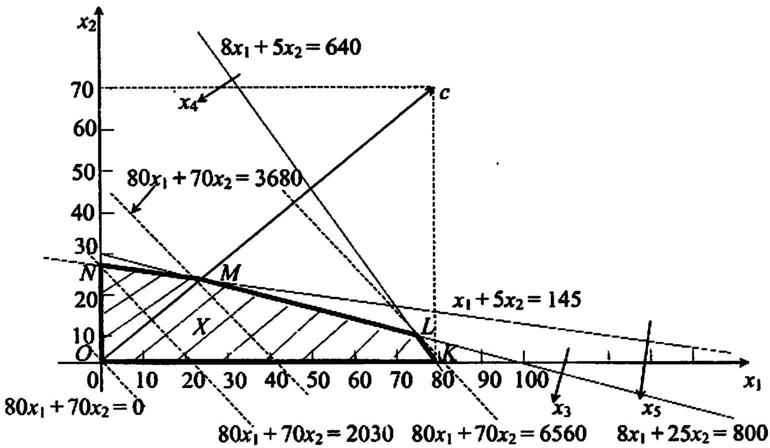


Рис. 1.1

Множество точек x, удовлетворяющих уравнению $c'x = \alpha$ при заданном α, называется ***множеством уровня*** (для $\mathbf{R}^2$ — ***линией уровня***) целевой функции задачи ЛП. Для задачи (1.1) при различных $\alpha \equiv \text{const}$ множества уровня — прямые $80x_1 + 70x_2 = \alpha$. Нормалью к этим прямым явля-

[1] Для дополнительных переменных x_3, x_4, x_5 и соответствующих координатных осей пояснение будет приведено ниже.

ется вектор $c=(80;\ 70)$. На рис. 1.1 изображен вектор c, а также линии уровня целевой функции, проходящие через вершины множества X, которыми являются прямые, перпендикулярные вектору c (на рис. 1.1 они изображены штриховыми линиями).

Известно, что любая функция $f(x)$ возрастает в направлении градиента $\operatorname{grad} f(x)=(\partial f/\partial x_1, ..., \partial f/\partial x_n)$. Для целевой функции задачи ЛП градиентом является вектор c. Таким образом, целевая функция $c'x$ возрастает в направлении вектора c. Поэтому, двигаясь в направлении вектора c до тех пор, пока множества уровня имеют общие точки с множеством планов X, найдем точку x^0, в которой линия уровня в последний раз касается множества X. Это и будет точка максимума: $c'x^0=\max c'x,\ x\in X$. Из рис. 1.1 видно, что такой точкой x^0 является точка L, имеющая координаты $x_1^0=75$, $x_2^0=8$ (пересечение прямых $8x_1+5x_2=640$, $8x_1+25x_2=$ $=800$). При этом максимальное значение целевой функции будет равно $\varphi_{max}=6560$.

Заметим, что множество уровня в последний раз может касаться множества планов не в одной точке (вершине), а по ребру. В таком случае каждая точка этого ребра — оптимальный план. В n-мерном пространстве множество уровня может касаться k-мерной грани, $k\leq n-1$. В этом случае все точки грани — оптимальные планы. Может случиться и такая ситуация, когда множество планов не ограничено, а вектор c направлен в сторону неограниченности множества планов, так что точки последнего касания множества уровня с множеством планов удалены в бесконечность. В таком случае целевая функция неограниченно возрастает на множестве планов, и задача не имеет решения.

В этом состоит ***графический метод*** решения задач ЛП вида (1.5) (или (1.7)). Для таких задач он удобен только при $n=2$. При $n\geq 3$ его реализация весьма затруднительна и почти не используется.

Задания

1.16. Решить графически задачи 1.1—1.9[1].

1.17. Из приведенных ниже целевых функций *а* с ограничениями *б* или *в* сформировать задачи ЛП как на максимум, так и на минимум и решить их графически.

а) *Целевые функции:*

1. $\varphi=\ 3x_1+2x_2$. **2.** $\varphi=\ 2x_1+3x_2$. **3.** $\varphi=-2x_1+3x_2$.

---

[1] Для некоторых задач необходимо иметь целочисленное решение. Это, в частности, касается заданий 1.2, 1.3, 1.5, 1.7—1.9, 1.11, 1.14. В настоящем пособии в основном числовые данные подобраны так, что получаются целочисленные решения. Если это не так, следует обращаться к п. 10.4.

4. $\varphi = 3x_1 + 8x_2$.
5. $\varphi = 3x_1 - 8x_2$.
6. $\varphi = 2x_1 + x_2$.
7. $\varphi = x_1 + x_2$.
8. $\varphi = 2x_1 + 5x_2$.
9. $\varphi = x_1 - x_2$.
10. $\varphi = -4x_1 + 2x_2$.
11. $\varphi = 4x_1 + 3x_2$.
12. $\varphi = x_1 + 2x_2$.
13. $\varphi = -x_1 + 2x_2$.
14. $\varphi = 3x_1 - x_2$.
15. $\varphi = 2x_1 - x_2$.
16. $\varphi = -3x_1 + 2x_2$.
17. $\varphi = -4x_1 + 3x_2$.
18. $\varphi = 2x_1 - 6x_2$.
19. $\varphi = x_1 + 4x_2$.
20. $\varphi = -x_1 + x_2$.
21. $\varphi = 4x_1 + 6x_2$.
22. $\varphi = 6x_1 + 6x_2$.
23. $\varphi = -8x_1 + 4x_2$.
24. $\varphi = -2x_1 + x_2$.
25. $\varphi = -x_1 + (1/2)x_2$.
26. $\varphi = -3x_1 + 7x_2$.
27. $\varphi = -3x_1 + x_2$.
28. $\varphi = -x_1 + 4x_2$.
29. $\varphi = 3x_1 + x_2$.
30. $\varphi = -4x_1 + x_2$.

б) Ограничения:

1. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ 10x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 20, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 7, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 17, \\ x_1 - 25x_2 \le 0, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4. $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 \le 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

5. $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 40, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_2 \ge 0.$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ -7x_1 + 2x_2 \le 14, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

7. $\begin{cases} x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 52, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -4, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 20, \\ x_1 \le 9, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

10. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

11. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 - (1/2)x_2 \le 5, \\ -7x_1 + x_2 \le 14, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

12. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

в) Ограничения:

1. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -9x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 8x_1 + x_2 \le 48, \\ 6x_1 + 6x_2 \le 24, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

6. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \ge -15, \\ -6x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \le -3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 - x_2 \ge -6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_2 \ge 0.$

10. $\begin{cases} x_2 \le 2, \\ -x_1 + x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

11. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ -x_1 + x_2 \ge -5, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

12. $\begin{cases} x_2 \le 4, \\ -4x_1 + 7x_2 \ge -28, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

13. $\begin{cases} x_1 \le 4, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_2 \ge 0.$

14. $\begin{cases} x_1 \le 4, \\ x_1 - x_2 \ge -4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$ $x_2 \ge 0.$

15. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 \ge -6, \end{cases}$ $x_2 \ge 0.$

17. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 8. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \ge -20, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 5x_1 + 8x_2 \le 40, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

19. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \ge -12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

20. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -2, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - 2x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

22. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \ge -12, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \end{cases}$ $x_2 \ge 0.$

23. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le -2, \\ x_1 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

24. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 2x_2 \ge -8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0.$

Задачи[1] типа (1.6) и даже более сложные, в которых есть ограничения-равенства и ограничения-неравенства, иногда тоже можно решить графически, если $n - m_1 = 2$, где n — число переменных, m_1 — число ограничений-равенств. Покажем это на примерах.

---

[1] В дальнейшем текст, набранный мелким шрифтом, кроме заданий, можно опускать при изучении основного курса. Он приведен для более полного ознакомления с имеющимися возможностями решения задач.

Пример 1.4. Рассмотрим задачу

$$\varphi(x) = 3,2x_1 + 1,2x_2 + 0,6x_3 + 1,6x_4 + x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 600, \\ x_2 + x_4 = 400, \\ 2x_3 + x_4 + x_5 = 700, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

В ней $n = 5$, $m_1 = 3$, т. е. $n - m_1 = 2$. Разделим первое равенство на 2. Тогда, вычитая из третьего равенства второе, получим

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 300, \\ x_2 + x_4 = 400, \\ -x_2 + 2x_3 + x_5 = 300, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5},$$

откуда можем исключить переменные x_1, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_1 = 300 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ x_4 = 400 - x_2, \\ x_5 = 300 + x_2 - 2x_3. \end{cases} \tag{1.9}$$

Подставив эти выражения в целевую функцию, будем иметь: $\varphi = 1900 - x_2 - 3x_3$. Учитывая, что $x_1 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, из (1.9) получим задачу ЛП вида (1.5) с двумя переменными (только целевая функция минимизируется):

$$\overline{\varphi} = -x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 300, \\ x_2 \leq 400, \\ -x_2 + 2x_3 \leq 300, \end{cases} \tag{1.10}$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Графическое решение последней задачи представлено на рис. 1.2. На рисунке изображен не сам вектор c, а указано его направление и изображена прямая, на которой он лежит.

Решением задачи (1.10) является точка M, имеющая координаты $x_2^0 = 300$, $x_3^0 = 300$, при этом $\overline{\varphi}_{\min} = -1200$. Тогда для исходной задачи $\varphi_{\min} = 1900 + \overline{\varphi}_{\min} = 700$. Из (1.9) находим $x_1^0 = 0$, $x_4^0 = 100$, $x_5^0 = 0$. Числа x_1^0, x_4^0, x_5^0 можно найти и геометрически, если ввести дополнительные координатные оси, как показано на рис. 1.2. Заметим, что дополнительные оси направлены в сторону множества X. Чтобы найти масштаб, например, для x_5, достаточно изобразить на рисунке третье ограничение из (1.8) при $x_5 = 1$ (на рис. 1.2 изображена прямая при $x_5 = 50$: $-x_2 + 2x_3 + 50 = 150$). Итак, решение исходной задачи $x^0 = (0; 300; 300; 100; 0)$, $\varphi_{\min} = 700$.

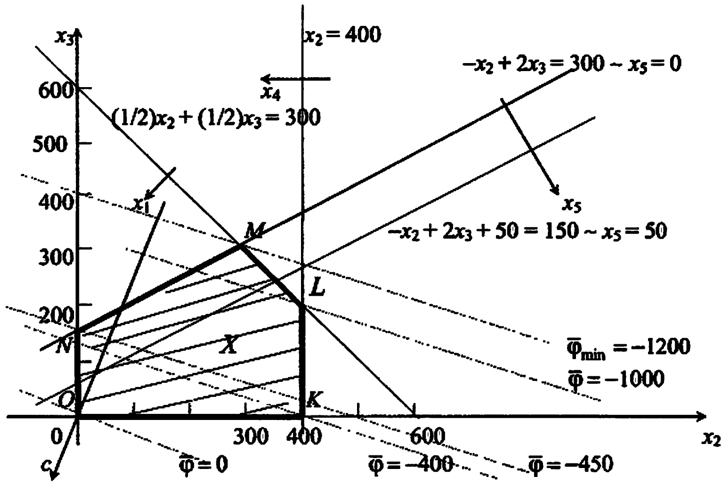


Рис. 1.2

Пример 1.5.

$$\varphi = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 6x_3 - x_4 = 26, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 32, \\ 5x_1 + 12x_2 + 24x_3 \geq 102, \end{cases} \qquad (1.11)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

Здесь $n = 4$, $m_1 = 2$ (первые два основные ограничения являются равенствами), т. е. $n - m_1 = 2$. Два ограничения-равенства методом последовательных исключений заменим эквивалентными

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20, \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,4},$$

откуда имеем

$$\begin{cases} x_1 = 20 - 2x_2 - 5x_3, \geq 0 \quad 2x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ x_4 = -6 + 3x_2 + x_3. \end{cases} \qquad (1.12)$$

Поскольку $x_1 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, то из (1.12) получим

$$2x_2 + 5x_3 \leq 20,\ 3x_2 + x_3 \geq 6,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \qquad (1.13)$$

Заменим в целевой функции задачи (1.11) и в третьем ограничении-неравенстве x_1 и x_4 их выражениями из (1.12): $\varphi = 48 + 2x_2 - 12x_3 \to \max$, $2x_2 - x_3 \geq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, и объединим их с (1.13). Получим следующую задачу ЛП:

$$\bar{\varphi} = 2x_2 - 12x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 5x_3 \leq 20, \\ 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ 2x_2 - x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Эта задача имеет вид (1.5) (если второе и третье неравенства умножить на -1) и в ней две переменные. Поэтому ее можем решить графически (см. рис. 1.3).

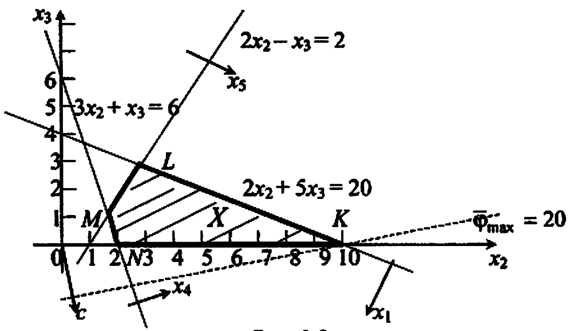


Рис. 1.3

Точкой максимума функции $\bar{\varphi}(x)$ является точка K с координатами $x_2^0 = 10$, $x_3^0 = 0$, при этом $\varphi_{max} = \bar{\varphi}_{max} + 48 = 68$. Из (1.12) находим $x_1^0 = 0$, $x_4^0 = 24$. Таким образом, решением задачи (1.11) является $x^0 = (0; 10; 0; 24)$, $\varphi_{max} = 68$.

Задания

1.18. Из приведенных ниже целевых функций *а* и ограничений *б* или *в* сформировать задачи ЛП как на максимум, так и на минимум. Решить графически эти задачи, а также задачи 1.10—1.15.

а) Целевые функции:

1. $\varphi = 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - x_4$.	**6.** $\varphi = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$.	**11.** $\varphi = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4$.
2. $\varphi = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 8x_4$.	**7.** $\varphi = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$.	**12.** $\varphi = 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 + x_4$.
3. $\varphi = 3x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4$.	**8.** $\varphi = 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4$.	**13.** $\varphi = 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4$.
4. $\varphi = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4$.	**9.** $\varphi = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$.	**14.** $\varphi = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4$.
5. $\varphi = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$.	**10.** $\varphi = 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4$.	**15.** $\varphi = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4$.

б) Ограничения:

1. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4=7, \\ 2x_1+4x_2+x_3+3x_4=10, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

2. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+3x_2+2x_3+x_4=2, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

3. $\begin{cases} -x_1+4x_2-x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+2x_4=1, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

4. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=8, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+2x_4=6, \\ 2x_1+x_2+3x_3+3x_4=8, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

6. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+4x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

7. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-x_4=3, \\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=2, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

8. $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ 3x_1+x_2+2x_3-2x_4=9, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

в) Ограничения:

1. $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3-3x_4=8, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4=6, \\ 2x_1+x_2-x_3-4x_4 \le 10, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

2. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-3x_4=6, \\ -x_1+2x_2+x_3+2x_4=9, \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4 \ge -57, \\ 3x_1-3x_2-2x_3-2x_4 \le 24, \end{cases}$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \ge 0.$

3. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3+x_4=6, \\ 3x_1+2x_2+4x_3-x_4=10, \\ -3x_1+7x_2+x_3-x_4 \le 2, \\ 20x_1-20x_2+2x_3+3x_4 \ge 87, \end{cases}$
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \ge 0.$

4. $\begin{cases} 4x_1-x_2+3x_3+2x_4=5, \\ -2x_1+x_2+x_3+2x_4=1, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=3, \\ 2x_1+2x_2-x_3+40x_4 \ge -1, \end{cases}$
$x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

5. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+2x_4=15, \\ 3x_1+x_2+2x_3-x_4=30, \\ -4x_1+x_2+x_3+2x_4 \ge 15, \\ 2x_1-x_2+4x_3-15x_4 \ge -9, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

6. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=6, \\ x_1-x_2+2x_3+9x_4=10, \\ 3x_1+x_2-2x_3-9x_4 \le 6, \\ 18x_1+3x_2+x_3-x_4 \ge 30, \end{cases}$
$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

7. $\begin{cases} -x_1+x_2-5x_3-x_4=10, \\ 2x_1-3x_2+25x_3+4x_4=10, \\ 10x_1+x_2+5x_3+3x_4\ge 20, \\ -37x_1+3x_2+40x_3+x_4\ge 40, \end{cases}$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\le 0.$

8. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-x_4=14, \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=22, \\ 22x_1-x_2-7x_3-\cdot x_4\ge 4, \\ -9x_1-3x_2-3x_3+2x_4\le 10, \end{cases}$
$x_1\ge 0,\ x_2\le 0,\ x_3\ge 0,\ x_4\ge 0.$

1.3. Нормальная и каноническая формы задач ЛП

Как мы видели в п. 1.2, решать задачи ЛП графически можно, если они имеют вид (1.5) (или (1.7)) с $n=2$ (или сводятся к такому виду, что весьма трудоемко). На практике встречаются задачи с десятками тысяч ограничений и сотнями тысяч переменных. Для задач ЛП больших размеров используется симплекс-метод. Он разработан для одной из форм задач ЛП, а именно канонической. В ЛП выделяют две основные формы задач. Задача вида (1.5) при $b\ge 0$ называется ***задачей ЛП в нормальной форме***. Задача вида

$$\varphi = c'x \to \max,\ Ax=b,\ x\ge 0\ (b\ge 0), \tag{1.14}$$

называется ***задачей ЛП в канонической форме***.

Любая задача ЛП может быть сведена к канонической форме. Это доказывает общность канонической задачи. Укажем совокупность преобразований, позволяющих любую задачу ЛП свести к канонической форме, при этом задачи будут эквивалентны (имеют одинаковые решения).

1. Линейная задача минимизации $c'x\to\min$, $x\in X$, сводится к задаче максимизации, если у целевой функции изменить знак: $-c'x\to\max$, $x\in X$.

2. Если в основных ограничениях параметр b_i отрицателен, тогда i-е ограничение умножаем на -1.

3. Пусть среди основных ограничений имеется неравенство $a_{i1}x_1+$ $+\ldots+a_{in}x_n\le b_i$, тогда вводим ***свободную переменную*** $x_{n+1}\ge 0$ и добавляем ее к левой части i-го неравенства, заменив его эквивалентными соотношениями: $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i$, $x_{n+1}\ge 0$, если $b_i\ge 0$. Свободная переменная имеет физический смысл объема свободного (не использованного в плане) ресурса. Если $b_i<0$, дополнительно применяем преобразование 2.

4. Пусть имеется неравенство противоположного смысла, т. е. $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\ge b_i$. Тогда оно заменяется эквивалентными соотноше-

ниями: 1) $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n-x_{n+1}=b_i$, $x_{n+1}\ge 0$, если $b_i>0$; 2) $-a_{i1}x_1-\ldots-a_{in}x_n+x_{n+1}=-b_i$, $x_{n+1}\ge 0$, если $b_i\le 0$.

5. Если для какой-либо переменной нет прямого ограничения или $x_j\le 0$, тогда в задаче заменяем ее разностью двух неотрицательных переменных: $x_j=x_j^1-x_j^2$, $x_j^1\ge 0$, $x_j^2\ge 0$, — в первом случае или $x_j=-x_j^1$, $x_j^1\ge 0$, — во втором.

6. В некоторых задачах прямые ограничения являются двухсторонними, т. е. имеют вид $0\le x_j\le d_j$. В самом деле, если в примере 1.1 известно, что продукция какого-либо типа, например A_1, может быть реализована только в объеме, не более известного, то и получаем двухстороннее ограничение. При решении задач симплекс-методом ограничение $x_j\le d_j$ относят к основным ограничениям и применяют преобразование 3.

7. Пусть двухстороннее прямое ограничение имеет вид[1] $\underline{d}_j\le x_j\le\overline{d}_j$. В производственной задаче нижнее ограничение может возникнуть, например, в том случае, если известно, что продукции j-го вида должно быть обязательно произведено не менее заданного количества. Такие ограничения предварительно сводим к эквивалентным: $0\le x_j-\underline{d}_j\le\overline{d}_j-\underline{d}_j$ или $0\le z_j\le d_j$, где $z_j=x_j-\underline{d}_j$, $d_j=\overline{d}_j-\underline{d}_j$, и, заменив в целевой функции и основных ограничениях x_j на $z_j+\underline{d}_j$, применяем преобразование 6.

8. Если какое-либо основное ограничение является двухсторонним[2]: $\underline{b}_i\le a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n\le\overline{b}_i$, то рассматриваем его как два отдельных ограничения и к ним применяем преобразования 2—4.

Замечание 1.1. Вместо преобразования 8 можно применить другое (см. 8*а*).

8*а*. Заменим сперва двухстороннее ограничение на эквивалентные (согласно преобразованию 3): $\underline{b}_i+x_{n+1}\le a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+1}=\overline{b}_i$, $x_{n+1}\ge 0$, которые можем теперь переписать в виде: $a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i$, $0\le x_{n+1}\le\overline{b}_i-\underline{b}_i$. Далее к двухстороннему прямому ограничению $0\le x_{n+1}\le\overline{b}_i-\underline{b}_i$ примсняем преобразование 6.

---

[1] В п. 1.11 приведена реализация симплекс-метода для задач с двухсторонними прямыми ограничениями без сведения к каноническим задачам вида (1.9).

[2] Задача с двухсторонними основными ограничениями называется ***интервальной задачей ЛП.*** Для ее решения без сведения к канонической задаче вида (1.9) разработаны другие методы, в частности ***адаптивный метод*** [3].

При указанных преобразованиях получим задачу ЛП в канонической форме, которая эквивалентна исходной, поскольку их решения либо полностью совпадают (преобразования 1—4, 6), либо могут быть получены друг из друга (преобразования 5, 7, 8).

Пример 1.6.

$$\varphi = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 \leq -4, \\ x_1 + 3x_3 \geq -2, \end{cases} \tag{1.15}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0.$$

Сведем задачу (1.15) к канонической форме. Поскольку для переменной x_3 нет прямого ограничения, то заменяем ее разностью двух неотрицательных переменных: $x_3 = x_3^1 - x_3^2$, $x_3^1 \geq 0$, $x_3^2 \geq 0$. Для x_2 делаем замену $x_2 = -x_2^1$, $x_2^1 \geq 0$. Задачу минимизации сводим к задаче максимизации: $-\varphi = -5x_1 + 2x_2^1 + 3x_3^1 - 3x_3^2 \to \max$. Поскольку $b_1 = -1 < 0$, $b_3 = -4 < < 0$, $b_4 = -2 < 0$, соответствующие ограничения предварительно умножаем на -1: $-4x_1 + 2x_2^1 + 3x_3^1 - 3x_3^2 = 1$; $3x_1 + x_2^1 - x_3^1 + x_3^2 \geq 4$; $-x_1 - 3x_3^1 + + 3x_3^2 \leq 2$. Теперь второе и третье ограничения будут неравенствами противоположного смысла, поэтому заменяем их соответственно следующими: $x_1 + x_2^1 - x_4 = 1$, $x_4 \geq 0$, и $3x_1 + x_2^1 - x_3^1 + x_3^2 - x_5 = 4$, $x_5 \geq 0$. Четвертое ограничение является неравенством, заменяем его соотношениями $-x_1 - 3x_3^1 + 3x_3^2 + x_6 = 2$, $x_6 \geq 0$. Итак, задача (1.15) эквивалентна следующей задаче ЛП в канонической форме:

$$-5x_1 + 2x_2^1 + 3x_3^1 - 3x_3^2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2^1 + 3x_3^1 - 3x_3^2 = 1, \\ x_1 + x_2^1 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2^1 - x_3^1 + x_3^2 - x_5 = 4, \\ -x_1 + 3x_3^1 + 3x_3^2 + x_6 = 2, \end{cases} \tag{1.16}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Задания

1.19. Свести к канонической форме задачи ЛП, сформулированные в заданиях 1.1—1.9, 1.12—1.15, 1.17, 1.18.

1.20. Сформировать задачи ЛП (как на максимум, так и на минимум) из целевых функций *а* и ограничений *б*, отбросив, где необходимо, лишние переменные в целевых функциях, и свести их к канонической форме.

а) Целевые функции:

1. $\varphi = x_1 - 3x_2 - 3x_3.$

2. $\varphi = -2x_1 - 2x_2 + x_3.$

3. $\varphi = -3x_1 + x_2 - x_3.$

4. $\varphi = 2x_1 - 4x_2 - 4x_3.$

5. $\varphi = 3x_1 - 5x_2 + 4x_3.$

6. $\varphi = x_1 + 2x_2 - x_3.$

7. $\varphi = 2x_1 - 3x_2 - x_3.$

8. $\varphi = 2x_1 + x_2 - x_3.$

9. $\varphi = -x_1 + x_2 - 5x_3.$

10. $\varphi = -x_1 - 5x_2 + x_3.$

11. $\varphi = 5x_1 + 2x_2 - x_3.$

12. $\varphi = 3x_1 + 5x_2 + 3x_3.$

13. $\varphi = -2x_1 - x_2 + x_3.$

14. $\varphi = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4.$

15. $\varphi = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4.$

16. $\varphi = 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4.$

17. $\varphi = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4.$

18. $\varphi = -2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4.$

19. $\varphi = 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + x_4.$

20. $\varphi = 30x_1 + 15x_2 + 10x_3 - 5x_4.$

б) Ограничения:

1.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 1, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

2.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \\ -x_1 + x_3 \ge -2, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

3.
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge -5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4, \\ 2x_3 \le 8, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

4.
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 14, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \ge -6, \\ x_2 \le 7, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

5.
$$\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \ge -14, \\ x_1 - x_2 - x_3 \ge -5, \\ x_2 + 2x_3 \le 2, \end{cases} \quad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

6.
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge -5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 4, \\ x_3 \le 4, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0.$$

7.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -14, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ x_2 \le 7, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$$

8.
$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \le 6, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 5, \end{cases} \quad x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

9. $\begin{cases} 5x_1+3x_2+x_3=10, \\ -x_1+x_2+x_3\le 1, \\ 5x_1+x_2-2x_3=10, \end{cases}$
$x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0.$

10. $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=1, \\ -2x_1-x_2-x_3=-2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=1,2,3.$

11. $\begin{cases} 8x_1+2x_2+x_3=8, \\ -x_1+x_2+5x_3\ge -5, \\ 4x_1+x_2+3x_3=4, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=1,2,3.$

12. $\begin{cases} 2x_1+6x_2+x_3=6, \\ x_1-x_2-2x_3\ge -5, \\ x_1+8x_2-x_3=8, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=1,2,3.$

13. $\begin{cases} 5x_1+x_2-x_3=15, \\ x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 6x_1-x_2+2x_3=21, \end{cases}$
$x_2\ge 0,\ x_3\ge 0.$

14. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_1+3x_2-4x_3=-2, \\ x_2-5x_3=-5, \end{cases}$
$x_2\ge 0,\ x_3\ge 0.$

15. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+5x_2+4x_3=3, \\ -x_1-4x_2-5x_3=-2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=1,2,3.$

16. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4=2, \\ 5x_1+2x_2+3x_4=3, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

17. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3-x_4=2, \\ -x_1+2x_2+x_3-2x_4=-3, \\ 4x_1-x_2-x_3+3x_4=8, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

18. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1, \\ -3x_1+x_2-x_3-2x_4=-2, \\ 10x_1+4x_2+6x_4=6, \end{cases}$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\le 0,\ x_4\ge 0.$

19. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=7, \\ -3x_1-2x_2-x_3+x_4=-10, \\ x_1-x_2+2x_3-2x_4\le 2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

20. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4=2, \\ -x_1+2x_2-x_3-x_4=8, \\ 3x_1+5x_2+5x_3\le 15, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

21. $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3-3x_4=10, \\ x_1-2x_2-x_3-4x_4=-12, \\ 2x_1+5x_2+6x_3+5x_4=-20, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

22. $\begin{cases} -2x_1-4x_2-3x_3+15x_4=7, \\ 20x_1+30x_2+x_3+x_4\ge 30, \\ 7x_1+10x_2+2x_3+7x_4\le 10, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

23. $\begin{cases} 3x_1+x_3+4x_4=5, \\ -10x_2-20x_3+15x_4=60, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+3x_4\le 9, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

24. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=7, \\ -3x_1-2x_2-x_3+x_4=-10, \\ -x_1+x_2-2x_3+2x_4\ge -2, \end{cases}$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\le 0,\ x_4\ge 0.$

1.4. Базисный план. Критерий оптимальности. Физический смысл оценок

Рассмотрим каноническую задачу ЛП (1.14): $c'x \to \max$, $Ax = b$, $x \geq 0$ ($b \geq 0$).

Предположим, что $m < n$, rank $A = m$, $X \neq \varnothing$. Как и для задачи (1.5), множество планов задачи (1.14) является некоторым выпуклым многогранным множеством с вершинами, ребрами, гранями. На рис. 1.4 изображены такие множества для $n = 2$, $m = 1$ и $n = 3$, $m = 1$.

Как видно из решенных графическим методом примеров, среди оптимальных планов всегда присутствует вершина множества планов. Следовательно, значение целевой функции достаточно вычислить лишь в вершинах множества планов. Поскольку их конечное число, то, выбрав затем точку с максимальным значением целевой функции, найдем решение задачи ЛП. Для численного отыскания решения используется симплекс-метод, суть которого состоит в переходе на каждой итерации от одной вершины множества планов к другой только вдоль тех ребер, вдоль которых целевая функция возрастает, тем самым уменьшая количество вычислений.

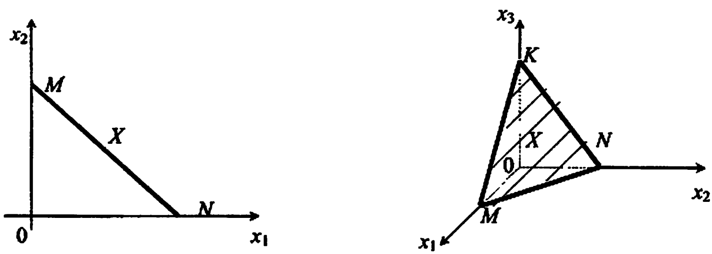


Рис. 1.4

Д. Данциг аналитически сформулировал геометрическое понятие вершины множества планов и первым описал указанную выше геометрическую интерпретацию решения задачи ЛП в виде алгоритма симплекс-метода. Этим аналитическим понятием вершины является базисный план, который лежит в основе алгоритма симплекс-метода.

План x называется ***базисным***, если $n - m$ его координат нулевые, а остальным m координатам соответствуют линейно независимые векторы условий. Обозначим: $J = \{1, 2, ..., n\}$, $I = \{1, 2, ..., m\}$, $J_Б \subset J$ — совокупность индексов линейно независимых векторов условий a_j (столбцов матрицы A), $J_Н = J \setminus J_Б$, $x_Б = (x_j,\ j \in J_Б)$, $x_Н = (x_j, j \in J_Н)$. Множество $J_Б$ будем называть ***базисным множеством индексов***, $J_Н$ — ***небазисным***. Из определения базисного плана следует $x_Н=0$. Матрицу, составленную из линейно независимых векторов условий $A_Б = (a_j, j\in J_Б)$, назовем ***базисной матрицей***; совокупность этих векторов $a_j, j\in J_Б$, — ***базисом*** базисного плана; x_j, $j\in J_Б$, — ***базисными переменными***; $x_j, j\in J_Н$, — ***небазисными переменными***.

Базисный план называется ***невырожденным***, если $x_Б > 0$.

Пример 1.7. Рассмотрим задачу (1.1). Сведем ее к канонической форме

$$\varphi = 80x_1 + 70x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 25x_2 + x_3 & = 800, \\ 8x_1 + \ \ 5x_2 \quad + x_4 & = 640, \\ \ \ x_1 + \ \ 5x_2 \qquad\quad + x_5 & = 145, \end{cases} \tag{1.17}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Для этой задачи имеем

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 80 \\ 70 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 800 \\ 640 \\ 145 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 8 & 25 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переменные x_3, x_4, x_5 свободные. На рис. 1.1 для них введены дополнительные оси, как это было показано в примере 1.4. Легко видеть, что базисным планом будет вектор x = (0; 0; 800; 640; 145) с базисной матрицей $A_Б = (a_3, a_4, a_5) = E$. Более того, этот план невырожденный: $x_Б$ =(800; 640; 145) > 0. Здесь $J_Б = \{3, 4, 5\}$, $J_Н = \{1, 2\}$, $x_Н$ = (0; 0), $A_Н = (a_1, a_2)$, $c_Б$ = = (0; 0; 0), $c_Н$ = (80; 70).

Таким образом, полученный базисный план в проекции на плоскость переменных x_1, x_2 является вершиной множества X (на рис. 1.1 — это точка O для исходной задачи (1.1)). Можно проверить, что все вершины множества X планов задачи (1.1) представляют проекции на плоскость переменных x_1, x_2 некоторых вершин множества планов задачи (1.17).

Задача ЛП называется ***невырожденной***, если все ее базисные планы не вырождены.

Упражнение. Показать, что вершины множества планов невырожденной задачи (1.14), и только они, — базисные планы.

По базисной матрице $A_Б$ подсчитаем m-вектор $u' = c'_Б A_Б^{-1}$ (он называется ***вектором потенциалов***), а также числа (***оценки***)

$$\Delta_j = c_j - u'a_j = c_j - c'_Б A_Б^{-1} a_j,\ j=\overline{1,n}. \tag{1.18}$$

Очевидно, $\Delta_j = 0, j \in J_Б$. С помощью оценок приращение целевой функции на планах x и $\overline{x} = x + \Delta x$ представимо в виде

$$\Delta\varphi(x) = c'\overline{x} - c'x = c'\Delta x = \sum_{j\in J_Н} \Delta_j \Delta x_j. \tag{1.19}$$

Отсюда ясен ***физический смысл оценок***: *оценка Δ_j является скоростью изменения целевой функции при увеличении небазисной переменной x_j базисного плана при неизменных остальных небазисных, при этом базисные меняются так, что вектор $\overline{x} = x + \Delta x$ удовлетворяет основным ограничениям $A\overline{x} = b$.*

Теорема 1.1 (критерий оптимальности). *Для оптимальности базисного плана достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_j \le 0,\ j \in J_Н. \tag{1.20}$$

Рассмотрим приведенный выше базисный план задачи (1.17) x =(0; 0; 800; 640; 145). Поскольку $A_Б = E$, то $A_Б^{-1} = E$, $A_Б^{-1} a_j = a_j$, $j = \overline{1,5}$. Кроме того, $c_Б = (0; 0; 0)$. Следовательно, $\Delta_1 = c_1 - c'_Б a_1 = c_1 = 80$, $\Delta_2 = c_2 - c'_Б a_2 =$ $= c_2 = 70$. Для базисных индексов имеем $\Delta_j = 0, j = 3, 4, 5$. Видим, что критерий оптимальности (1.20) не выполняется — базисный план неоптимальный. Поэтому следует перейти к другому базисному плану (иными словами, перейти в новую вершину множества планов). Исходя из указанного выше физического смысла оценок Δ_j, целесообразнее двигаться в том направлении, вдоль которого скорость увеличения целевой функции наибольшая, т. е. в том направлении, которому соответствует наибольшая оценка. Однако прежде, чем выбрать это направление, следует проверить разрешимость задачи.

1.5. Достаточное условие неразрешимости задачи ЛП

Рассмотрим вектор $d_j = A_Б^{-1} a_j$. Как известно из линейной алгебры, координаты вектора d_j — это координаты вектора a_j в базисе a_i, $i \in J_Б$. Обозначим их через x_{ij}, $i \in J_Б$.

Исходя из физического смысла оценок, построим вектор $\overline{x} = x + \Delta x$ следующим образом. Пусть $j_0 \in J_Н$ — некоторый индекс, для которого не выполняется неравенство (1.20). Тогда

$$\Delta x_{j_0} = \theta \geq 0,\ \Delta x_j = 0,\ j \in J_\text{Н} \backslash j_0,\ \Delta x_i = -\theta x_{ij_0},\ i \in J_\text{Б}. \quad (1.21)$$

Последние равенства в (1.21) следуют из соотношений $Ax = b$, $A(x + \Delta x) = b$, которые эквивалентны равенству $A\Delta x = 0$, откуда $\Delta x_\text{Б} = -A_\text{Б}^{-1} A_\text{Н} \Delta x_\text{Н} = -\theta A_\text{Б}^{-1} a_{j_0}$. Следовательно, будем иметь:

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{j_0} = \theta \geq 0, \quad \bar{x}_j = 0, \quad j \in J_\text{Н} \setminus j_0; \\ &\bar{x}_i = x_i - \theta x_{ij_0}, \quad i \in J_\text{Б}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из приведенных формул (1.22) и формулы приращения целевой функции получим следующее утверждение.

Теорема 1.2 (достаточное условие неразрешимости задачи). *Пусть для некоторого номера $j_0 \in J_\text{Н}$ такого, что $\Delta_{j_0} > 0$, выполняются неравенства*

$$x_{ij_0} \leq 0, \qquad i \in J_\text{Б}. \quad (1.23)$$

Тогда целевая функция задачи (1.14) *неограниченно возрастает на множестве планов при увеличении координаты x_{j_0}.*

Итак, если критерий оптимальности (1.20) не выполняется, но ни для одного $j_0 \in J_\text{Н}$ не выполняются и соотношения (1.23), тогда переходим к новому базисному плану.

1.6. Итерация симплекс-метода

Как уже указывалось в п. 1.4, переход от неоптимального базисного плана x к другому базисному плану желательно осуществлять в направлении максимального возрастания целевой функции, т. е. вдоль того направления, которому соответствует максимальная небазисная оценка, т. е. выбираем номер $j_0 \in J_\text{Н}$, для которого

$$\Delta_{j_0} = \max_{j \in J_\text{Н}} \Delta_j. \quad (1.24)$$

Замечание 1.2. В качестве j_0 можно выбирать любой номер из $J_\text{Н}$, для которого оценка положительна. При этом целевая функция не будет убывать. При реализации симплекс-метода на ЭВМ программа выбирает первый же номер j_0, для которого $\Delta_{j_0} > 0$.

Затем вычисляем величины $\theta_i = x_i / x_{ij_0}$ для всех $i \in J_\text{Б}$, для которых $x_{ij_0} > 0$. Очевидно, θ_i — это значение θ, при котором переменная $\bar{x}_i$ становится нулевой (см. (1.22)). Находим номер $i_0 \in J_\text{Б}$ такой, что

$$\theta_{i_0} = \min_{\substack{i \in J_Б \\ x_{ij_0} > 0}} \frac{x_i}{x_{ij_0}} = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} = \theta^0. \tag{1.25}$$

Число θ^0 — максимальный шаг движения от рассматриваемой вершины (базисного плана) до следующей. Заменяем базисное множество индексов $J_Б$ на новое: $\bar{J}_Б = (J_Б \setminus i_0) \cup j_0$. При этом новый базисный план $\bar{x}$ получается по формулам

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{j_0} = \theta^0 = \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}}, \qquad \bar{x}_i = 0, \qquad i \in \bar{J}_Н = J \setminus \bar{J}_Б; \\ &\bar{x}_i = x_i - \frac{x_{i_0}}{x_{i_0 j_0}} x_{ij_0}, \qquad i \in \bar{J}_Б \setminus j_0, \end{aligned} \tag{1.26}$$

а координаты векторов a_j, $j = \overline{1,n}$, при переходе от старого базиса к новому получаются по формулам

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{j_0 j} = \frac{x_{i_0 j}}{x_{i_0 j_0}}, \qquad j = \overline{1,n}; \\ &\bar{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{i_0 j} x_{ij_0}}{x_{i_0 j_0}}, \qquad i \in \bar{J}_Б \setminus j_0, \qquad j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Описанный переход $x \to \bar{x}$ от старого базисного плана x к новому $\bar{x}$ называется ***симплексной итерацией***. Последовательное преобразование базисного плана с помощью симплексных итераций называется ***симплекс-методом ЛП***.

1.7. Табличная реализация симплекс-метода

Для решения задач ЛП вручную используют табличную реализацию симплекс-метода, основанную на преобразовании симплексных таблиц. Пусть $J_Б = \{i_1, \ldots, i_m\}$. Тогда, учитывая указанные выше обозначения, симплекс-таблица имеет вид, изображенный на рис. 1.5.

В столбце $b(x_Б)$ стоят базисные координаты базисного плана x, поскольку из равенства $A_Б x_Б + A_Н x_Н = b$ при $x_Н = 0$ имеем $x_Б = A_Б^{-1} b$, т. е. базисные переменные базисного плана — это координаты вектора b в текущем базисе. Оценки Δ_j подсчитываем по формуле (1.18), которую можно переписать в виде

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i \in J_Б} c_i x_{ij}. \tag{1.28}$$

Переход от одной симплекс-таблицы к другой производится по указанным выше правилам. Сначала находим номер j_0 по формуле (1.24). На рис. 1.5 j_0-й столбец отмечен стрелкой в сторону таблицы. Этот ***столбец*** называется ***ведущим***. Затем по формуле (1.25) определяем номер i_0. На рис. 1.5 i_0-я строка отмечена стрелкой от таблицы. Эту ***строку*** называют ***ведущей***. На пересечении ведущих столбца и строки находится ***ведущий элемент***. На рис. 1.5 он обведен овальной линией. В следующей симплекс-таблице в базис вводим вместо вектора a_{i_0} вектор a_{j_0}, а все новые элементы подсчитываем по формулам (1.26), (1.27). Как легко видеть, новые элементы ведущей строки получаются из старых делением на ведущий элемент, а все остальные элементы — по ***правилу прямоугольника***. Для этого с помощью элементов x_{ij} (или x_i) и $x_{i_0j_0}$ строим прямоугольник (на рис. 1.5 он изображен для подсчета элемента x_{ij}). Затем из элемента x_{ij} (или x_i) вычитаем (на это указывает знак "–" у клетки) произведение элементов $x_{i_0j} \times x_{ij_0}$ (или $x_{i_0} \times x_{ij_0}$), стоящих на "побочной" диагонали, деленное на ведущий элемент $x_{i_0j_0}$. В результате получим новый элемент $\overline{x}_{ij}$ (или $\overline{x}_i$), который заносим в ту клетку новой таблицы, в которой находился элемент x_{ij} (или x_i).

$c_Б \backslash c_j$			c_1	...	c_j	...	c_{j_0}	...	c_n		
	b, a_j / Базис	$b(x_Б)$	a_1	...	a_j	...	a_{j_0}	...	a_n	θ	
c_{i_1}	a_{i_1}	x_{i_1}	$x_{i_1 1}$	...	$x_{i_1 j}$	...	$x_{i_1 j_0}$	...	$x_{i_1 n}$		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		
c_i	a_i	x_i	x_{i1}	...	x_{ij} $\boxed{-}$	...	$\boxed{\times}$ x_{ij_0}	...	x_{in}	θ_i	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		
c_{i_0}	a_{i_0}	x_{i_0}	$x_{i_0 1}$	...	$x_{i_0 j}$ $\boxed{\times}$	...	$\boxed{:}$ $x_{i_0 j_0}$	...	$x_{i_0 n}$	θ^0	$\Rightarrow$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		
c_{i_m}	a_{i_m}	x_{i_m}	$x_{i_m 1}$	...	$x_{i_m j}$	...	$x_{i_m j_0}$	...	$x_{i_m n}$		
Δ_j			Δ_1	...	Δ_j	...	Δ_{j_0}	...	Δ_n		
							$\Uparrow$				

Рис. 1.5

Числа Δ_j можно подсчитать тоже по правилу прямоугольника или же по определению (1.28).

Пример 1.8. Рассмотрим задачу (1.1) (или, что то же самое, (1.17)). Как указывалось в п. 1.4, $A_Б = (a_3, a_4, a_5) = E$. Тогда $x_Б = A_Б^{-1}b = b$ и, кроме того, все векторы a_j имеют в базисе a_3, a_4, a_5 те же координаты, что и в ограничениях (1.17). Таким образом, все данные для решения задачи представляем в виде табл. 1.19.

Поскольку $\Delta_1 = 80 > 0$, $\Delta_2 = 70 > 0$, то начальный базисный план не оптимален. Проверяем условия неразрешимости задачи. Они не выпол-

Таблица 1.19

$c_Б$ \ c			80	70	0	0	0	
	Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_i
0	a_3	800	8	25	1	0	0	100
0	a_4	640	8	5	0	1	0	80 ⇒
0	a_5	145	1	5	0	0	1	145
Δ_j			80	70	0	0	0	
			⇑					

няются: все $x_{ij} \geq 0$, $i = 3, 4, 5$, $j = 1, 2$. По описанным выше правилам переходим сначала к новой табл. 1.20. Новый базис состоит из векторов a_3, a_1, a_5.

Получили новый базисный план задачи (1.17): $x = (80; 0; 160; 0; 65)$. В проекции на плоскость $\{x_1, x_2\}$ это будет точка $K(80; 0)$ (см. рис. 1.1).

Таблица 1.20

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_i
a_3	160	0	20	1	−1	0	8 ⇒
a_1	80	1	5/8	0	1/8	0	128
a_5	65	0	35/8	0	−1/8	1	104/7
Δ_j		0	20	0	−10	0	
			⇑				

Таблица 1.21

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	8	0	1	1/20	−1/20	0
a_1	75	1	0	−1/32	5/32	0
a_5	30	0	0	−7/32	3/32	1
Δ_j		0	0	−1	−9	0

Из табл. 1.20 видим, что план неоптимальный. Переходим к новому. В табл. 1.21 все Δ_j неположительные. Полученный базисный план является оптимальным. Для задачи (1.17) $x^0 = (75; 8; 0; 0; 30)$. Для исходной задачи (1.1) $x_1^0 = 75; x_2^0 = 8$. Максимальное значение целевой функции равно $\varphi_{\max} = 6560$. Величина $x_5^0 = 30$ на языке производственной задачи означает неиспользованный "ресурс", а для нашей задачи — это 30 часов неиспользованного управленческого труда при изготовлении продукции обоих видов.

Пример 1.9. Рассмотрим задачу

$$\varphi = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 - 5x_2 \leq 5, \end{cases} \tag{1.29}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Ее каноническая форма

$$\varphi = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 5x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \tag{1.30}$$
$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

Базис составляют векторы a_3, a_4. Начальный базисный план $x = (0; 0; 6; 5)$. Из табл. 1.22 видим, что он неоптимальный: $\Delta_1 = \Delta_2 = 1 > 0$. (Заметим, что $\max\Delta_j$ достигается на двух элементах. В качестве ведущего столбца можно выбрать любой.) Переходим к новому базисному плану $x = (5; 0; 16; 0)$ (табл. 1.23). Этот план тоже неоптимальный.

Таблица 1.22

$c_Б$ \ c			1	1	0	0		
	Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	θ_i	
0	a_3	6	–2	3	1	0	–	
0	a_4	5	1	–5	0	1	5	⇒
Δ_j			1	1	0	0		
			⇑					

Таблица 1.23

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_3	16	0	–7	1	2
a_1	5	1	–5	0	1
Δ_j		0	6	0	–1

Из табл. 1.23 следует, что задача не имеет решения: $\Delta_2 = 6 > 0$, причем $x_{32} = -7 < 0$, $x_{12} = -5 < 0$, т. е. выполняется достаточное условие неразрешимости задачи (см. теорему 1.2), согласно которому $\varphi_{\max} \to +\infty$ на множестве планов задачи (1.30), а следовательно, и задачи (1.29).

Задания

1.21. Решить симплекс-методом задачи ЛП, сформированные в заданиях 1.1—1.9, 1.17 с ограничениями *б* и 1.20 с ограничениями 1*б*—7*б*.

1.8. Первая фаза симплекс-метода

При решении задачи (1.1) симплекс-методом мы смогли легко указать начальный базисный план, поскольку задача (1.1) представляет собой задачу ЛП в нормальной форме $c'x \to \max$, $Ax \le b$, $x \ge 0$ $(b \ge 0)$. Если ввести вектор свободных переменных $x_{СВ} = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$, то задача сводится к эквивалентной форме: $c'x \to \max$, $Ax + x_{\text{СВ}} = b$, $x \geq 0$, $x_{\text{СВ}} \geq 0$ с базисной матрицей $A_Б = (a_{n+1} = e_1, \ldots, a_{n+m} = e_m) = E$, где $e_i = (0; \ldots; 0; 1; 0; \ldots; 0)$ — единичный m-вектор, у которого 1 стоит на i-м месте. Этим фактом выше пользовались при решении задач симплекс-методом, т. е. был известен начальный базисный план. Кроме того, выше предполагалось, что $\operatorname{rank} A = m$ и $X \neq \varnothing$. Однако, когда приступают к решению задачи ЛП, все эти три условия не всегда известны. Возникает вопрос: как же начать решение? Ответ дает первая фаза симплекс-метода.

По параметрам задачи (1.14) $c'x \to \max$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $(b \geq 0)$ строим вспомогательную задачу

$$-e'x_И \to \max,\ Ax + x_И = b,\ x \geq 0,\ x_И \geq 0, \tag{1.31}$$

где $x_И = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ — m-вектор искусственных переменных, $e = (1; \ldots; 1)$. Очевидно, задача (1.31) всегда имеет решение.

Лемма 1.1. *Для того чтобы множество планов задачи* (1.14) *было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы в решении задачи* (1.31) *искусственные переменные были нулевыми*: $x_И = 0$.

Для задачи (1.31) начальный базисный план имеет вид: $x = 0$, $x_И = b$ с базисной матрицей $A_Б = (a_{n+1} = e_1, \ldots, a_{n+m} = e_m) = E$.

Решение задачи (1.31) симплекс-методом называется ***первой фазой симплекс-метода***.

После первой фазы будет построен оптимальный план $(x^*,\ x_И^*)$ и матрица $A_Б^*$ задачи (1.31), обладающие одним из следующих трех свойств:

1) $x_И^* \neq 0$; 2) $x_И^* = 0$, базисная матрица $A_Б^*$ состоит из векторов условий только исходной задачи (1.14); 3) $x_И^* = 0$, в базисной матрице $A_Б^*$ имеются искусственные векторы условий задачи (1.31).

Проанализируем каждое из свойств.

1) Если $x_И^* \neq 0$, то, согласно лемме 1.1, множество планов исходной задачи (1.14) пусто.

2) Во втором случае x^* — базисный план задачи (1.14) с базисной матрицей $A_Б^*$. Он берется в качестве начального базисного плана для исходной задачи и к нему применяется симплекс-метод. Этот этап называется ***второй фазой симплекс-метода***, а вся описанная процедура — ***двухфазным симплекс-методом*** решения задачи (1.14).

3) Пусть $x_{i_*}^* = 0$, $i_* \in J_И \cap J_Б^*$, где $J_И = \{m + 1, \ldots, m + n\}$, т. е. $x_{i_*}^*$ — искусственная базисная переменная решения задачи (1.31). Для каждого вектора $(A_Б^*)^{-1} a_j$, $j \in J$, подсчитаем i_*-ю координату.

а) Если $x_{i_* j_*} \neq 0$ при некотором $j_* \in J$, то элемент i_* удаляем из $J_Б^*$ и вместо него вводим j_*. При этом все векторы условий запишем в новом базисе, для чего таблицу преобразуем по тем же правилам, что и при построении новой симплекс-таблицы.

б) Если $x_{i_* j_*} = 0$, $j \in J$, то это означает, что $(i_* - n)$-е равенство из основных ограничений есть следствие других равенств задачи. Из множества I удалим элемент $i_* - n$, из матрицы A — $(i_* - n)$-ю строку, из матрицы $A_Б^*$ — i_*-ю строку и столбец a_{i_*}. Размер задачи (1.31) уменьшается на единицу. Перебрав все искусственные базисные переменные, построим базисную матрицу $\overrightarrow{A}_Б^*$ задачи (1.31) без искусственных векторов условий. При этом из основных ограничений исходной задачи будут удалены все линейно зависимые равенства. Далее поступаем, как и в случае 2.

Из первой фазы симплекс-метода следуют ***два свойства канонических задач ЛП*** (1.14): 1) *если $X \neq \varnothing$, то существуют базисные планы*; 2) *среди оптимальных планов существуют базисные.*

Пример 1.10. Рассмотрим задачу о рационе (1.3). Сводим ее к каноническому виду

$$-5x_1 - x_2 - 3x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 2, \end{cases} \tag{1.32}$$
$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,5}.$$

Строим задачу первой фазы

$$-x_6 - x_7 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_7 = 2, \end{cases} \tag{1.33}$$
$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,7}.$$

Переменные x_4, x_5 — свободные, x_6, x_7 — искусственные. Начальный базисный план $x = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 1;\ 2)$ с базисной матрицей $A_Б = (a_6, a_7) = E$. Далее используем симплекс-метод, как в п. 1.7. Результаты вычислений приведены в табл. 1.24—1.26. В табл. 1.26 все $\Delta_j \leq 0$, следовательно, полученный план (1; 0; 0; 0; 0; 0; 0;) — оптимальный план задачи (1.33). Поскольку искусственные переменные равны нулю ($x_6 = 0$, $x_7 = 0$) и искусственные векторы a_6, a_7 не входят в базис, то переходим ко второй фазе,

Таблица 1.24

c / $c_Б$	Базис	$b(x_Б)$	0 a_1	0 a_2	0 a_3	0 a_4	0 a_5	−1 a_6	−1 a_7	θ_i
−1	a_6	1	1	1	2	−1	0	1	0	1
−1	a_7	2	2	1	1	0	−1	0	1	1
Δ_j			3	2	3	−1	−1			

⇑ ⇒

Таблица 1.25

Базис	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	θ_i
a_1	1	1	1	2	−1	0	1	0	
a_7	0	0	−1	−3	2	−1	−2	1	0
Δ_j		0	−1	−3	2	−1			

⇑ ⇒

Таблица 1.26

Базис	b	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_1	1	1	1/2	1/2	0	−1/2	0	1/2
a_4	0	0	−1/2	−3/2	1	−1/2	−1	1/2
Δ_j		0	0	0	0	0		

Таблица 1.27

c / $c_Б$	Базис	$b(x_Б)$	−5 a_1	−1 a_2	−3 a_3	0 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7
−5	a_1	1	1	1/2	1/2	0	−1/2	0	1/2
0	a_4	0	0	−1/2	−3/2	1	−1/2	−1	1/2
Δ_j			0	3/2	−1/2	0	−5/2		

⇑ ⇒

Таблица 1.28

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
a_2	2	2	1	1	0	−1	0	1
a_4	1	1	0	−1	1	−1	−1	1
Δ_j		−3	0	−2	0	−1	0	1

взяв за начальный базисный план точку $x = (1; 0; 0; 0; 0)$ с базисной матрицей $A_Б = (a_1, a_4)$. Результаты вычислений приведены в табл. 1.27, 1.28.

Заметим, что искусственные векторы можно не вносить в симплекс-таблицы, если нас не будет интересовать анализ задачи (см. § 2). Если же мы оставляем эти векторы для дальнейших исследований, то знак Δ_j для искусственных индексов не учитываем.

В табл. 1.28 получен оптимальный план задачи (1.32): $x = (0; 2; 0; 1; 0)$. Для исходной задачи (1.3) оптимальный план $x^0 = (0; 2; 0)$, при этом $\varphi_{\min} = 2$. Переменная $x_4^0 = 1$ означает, что в рационе питательного вещества первого вида на единицу больше заданного нижнего предела.

Замечание 1.3. Количество искусственных переменных может быть меньше m, если после сведения задачи ЛП к канонической форме имеются единичные векторы.

Пример 1.11.

$$\varphi = 3x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - \ 5x_2 + 2x_3 = 15, \\ \ \ x_1 - 10x_2 + 5x_3 \le 10, \end{cases} \tag{1.34}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Сведем задачу к канонической форме

$$\varphi = 3x_1 + 5x_2^1 - 5x_2^2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - \ 5x_2^1 + \ 5x_2^2 + 2x_3 \qquad = 15, \\ \ \ x_1 - 10x_2^1 + 10x_2^2 + 5x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

Как видим, имеется единичный вектор $a_4 = e_2$, поэтому для задачи первой фазы достаточно ввести одну искусственную переменную:

$$-x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - \ 5x_2^1 + \ 5x_2^2 + 2x_3 \qquad + x_5 = 15, \\ \ \ x_1 - 10x_2^1 + 10x_2^2 + 5x_3 + x_4 \qquad = 10, \end{cases} \tag{1.35}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Начальный базисный план для задачи (1.35) x = (0; 0; 0; 0; 10; 15) с базисной матрицей $A_Б = (a_5 = e_1, a_4 = e_2) = E$. Решение первой фазы представлено в табл. 1.29, 1.30.

Таблица 1.29

c / $c_Б$	Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2^1	a_2^2	a_3	a_4	θ_i	
			0	0	0	0	0		
–1	a_5	15	–2	–5	5	2	0	3	
0	a_4	10	1	–10	10	5	1	1	⇒
Δ_j			–2	–5	5	2	0		
					⇑				

Таблица 1.30

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2^1	a_2^2	a_3	a_4
a_5	10	–5/2	0	0	–1/2	–1/2
a_2^2	1	1/10	–1	1	1/2	1/10
Δ_j		–5/2	0	0	–1/2	–1/2

В табл. 1.30 все $\Delta_j \le 0$, следовательно, получен оптимальный план задачи первой фазы (1.35): $x = (0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 10)$. Но поскольку искусственная переменная ненулевая ($x_5 = 10 \ne 0$), то, согласно лемме 1.1, ограничения задачи (1.34) несовместны: $X = \varnothing$.

Пример 1.12.

$$\varphi = 3x_1 + x_2 + 8x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 9x_2 - x_3 = 9, \end{cases} \tag{1.36}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Задача первой фазы имеет вид

$$-x_4 - x_5 - x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 4x_1 + 9x_2 - x_3 + x_6 = 9, \end{cases} \tag{1.37}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Решение задачи (1.37) приведено в табл. 1.31—1.33. В табл. 1.31 $\min\theta_i$ достигается на трех элементах. В качестве ведущей строки можно выбрать любую.

В табл. 1.33 все $\Delta_j = 0$, следовательно, получен оптимальный план задачи первой фазы (1.37): $x = (0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$. Все искусственные пере-

Таблица 1.31

$c_Б$	Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	θ_i	
–1	a_4	5	2	5	1	1	⇒
–1	a_5	2	1	2	–1	1	
–1	a_6	9	4	9	–1	1	
Δ_j			7	16	–1		
				⇑			

Таблица 1.32

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	θ_i	
a_2	1	2/5	1	1/5	5/2	
a_5	0	1/5	0	–7/5	0	⇒
a_6	0	2/5	0	–14/5	0	
Δ_j		3/5	0	–21/5		
		⇑				

Таблица 1.33

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3
a_2	1	0	1	3
a_1	0	1	0	–7
a_6	0	0	0	0
	Δ_j	0	0	0

менные равны нулю, но в базис входит искусственный вектор a_6. Поскольку для всех векторов условий задачи (1.36) координата x_{6j}, $j=\overline{1,3}$, в базисе $\{a_2, a_1, a_6\}$ нулевая, то, согласно свойству 3б решения задачи первой фазы, третье ограничение в задаче (1.36) является линейной комбинацией первых двух. Его можно отбросить. В табл. 1.33 вычеркиваем третью строку. Получим уменьшенный базис $\{a_2, a_1\}$, не содержащий искусственных векторов. Теперь можно перейти ко второй фазе. В качестве начального базисного плана берем $x = (0;\ 1;\ 0)$ с базисной матрицей $A_Б = (a_2, a_1)$. Результаты решения представлены в табл. 1.34, 1.35.

Таблица 1.34

c			3	1	8	
$c_Б$	Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	θ_i
1	a_2	1	0	1	3	1/3
3	a_1	0	1	0	–7	—
Δ_j			0	0	26	

$\Rightarrow$

Таблица 1.35

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3
a_3	1/3	0	1/3	1
a_1	7/3	1	7/3	0
Δ_j		0	–26/3	0

В табл. 1.35 получен оптимальный план задачи (1.36): $x^0 = (7/3;\ 0;\ 1/3)$, при этом $\varphi_{max} = 29/3$.

Пример 1.13.

$$\varphi = 5x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \end{cases} \qquad (1.38)$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Заменой $x_2 = x_2^1 - x_2^2$, $x_2^1 \ge 0$, $x_2^2 \ge 0$, приведем задачу (1.38) к каноническому виду, а затем запишем задачу первой фазы

$$-x_4 - x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2^1 + 3x_2^2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - 3x_2^1 + 3x_2^2 + x_3 + x_5 = 6, \end{cases} \qquad (1.39)$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Решение задачи (1.39) представлено в табл. 1.36, 1.37. Поскольку в табл. 1.37 все $\Delta_j \le 0$, то получен оптимальный план задачи (1.39): $x = (0;\ 0;\ 2;\ 0;\ 0;\ 0)$. Обе искусственные переменные равны нулю, но в базис входит искусственный вектор a_5. Среди координат x_{5j}, $j=\overline{1,3}$, есть ненулевые, например $x_{51} = -1$.

Таблица 1.36

c / $c_Б$	Базис	$b(x_Б)$	0	0	0	0	
			a_1	a_2^1	a_2^2	a_3	θ_i
–1	a_4	6	2	–3	3	2	2 ⇒
–1	a_5	6	1	–3	3	1	2
Δ_j			3	–6	6 ⇑	3	

Таблица 1.37

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2^1	a_2^2	a_3
a_2^2	2	2/3	–1	1	2/3
a_5	0	–1	0	0	–1
Δ_j		–1	0	0	–1

Заменим в базисе вектор a_5 вектором a_1 и преобразуем табл. 1.37 по тем же правилам, как это делали до сих пор, взяв в качестве ведущего элемента $x_{51} = -1$. Получим табл. 1.38, которую используем для второй фазы, поскольку в базисе нет искусственных векторов.

Таблица 1.38

c / $c_Б$	Базис	$b(x_Б)$	5	1	–1	1
			a_1	a_2^1	a_2^2	a_3
–1	a_2^2	2	0	–1	1	0
5	a_1	0	1	0	0	1
Δ_j			0	0	0	–4

Поскольку в табл. 1.38 все $\Delta_j \le 0$, то оптимальный план задачи в канонической форме $x^0 = (0; 0; 2; 0)$. В силу того, что $x_2 = x_2^1 - x_2^2$, имеем $x_2^0 = -2$. Итак, оптимальный план задачи (1.38): $x^0 = (0; -2; 0)$, при этом $\varphi_{max} = -2$.

Задания

1.22. Используя первую фазу симплекс-метода, решить задачи ЛП, сформированные в заданиях 1.10—1.15, 1.17 с ограничениями *в*, 1.18, 1.20 с ограничениями 8*б*—24*б*.

1.9. Неединственность оптимального плана

Иногда требуется выяснить, единственный оптимальный план в задаче или имеются другие оптимальные планы. Заметим, что если есть два оптимальных плана, то и все точки отрезка, их соединяющего, являются оптимальными планами. Из второго свойства канонических задач ЛП (п. 1.8) следует, что среди оптимальных планов есть базисный. Поэтому будем говорить о неединственности оптимальных планов исходя из оценок базисного плана. Справедливо утверждение.

Теорема 1.3 (критерий неединственности). *Для неединственности оптимального базисного плана необходимо, а в случае его невырожденности и достаточно, чтобы среди небазисных оценок были нулевые.*

Замечание 1.4. Базисный оптимальный план, вообще говоря, может быть и единственным среди множества оптимальных планов в случае неограниченности множества планов. Так, если x — оптимальный невырожденный базисный план и для некоторого $j_0 \in J_{\text{Н}}$ имеем $\Delta_{j_0} = 0$, $x_{ij_0} \le 0$, $i \in J_{\text{Б}}$, то это означает, что оптимальными будут все точки луча $\overline{x} = x + \Delta x(\theta)$, $\theta \ge 0$, где $\Delta x(\theta)$ построено по правилам (1.21).

Пример 1.14. Рассмотрим задачу примера 1.1, в которой прибыль на единицу продукции положим равной 80 и 250 д. е. При решении этой задачи с прежней заданной прибылью оптимальным был план $x^0 = (75;\ 8;\ 0;\ 0;\ 30)$, где $x_5^0 = 30$ — неиспользованный ресурс (см. табл. 1.21). Подставим теперь новый вектор c в эту же таблицу и проверим план x^0 на оптимальность. Имеем: $J_{\text{Б}} = \{2,\ 1,\ 5\}$, $J_{\text{Н}} = \{3,\ 4\}$, $c_{\text{Б}} = (250;\ 80;\ 0)$, $c_{\text{Н}} = (0;\ 0)$. Тогда $\Delta_3 = c_3 - \sum\limits_{i \in J_{\text{Б}}} c_i x_{i3} = -250 \cdot (1/20) + 80 \cdot (1/32) = -10 < 0$, $\Delta_4 = 250 \cdot (1/20) - 80 \times$ $\times (5/32) = 0$. Таким образом, план x^0 оптимальный и с новым вектором прибыли. План невырожденный: $x_{\text{Б}}^0 = (75;\ 8;\ 30) > 0$. Среди небазисных оценок имеется нулевая: $\Delta_4 = 0$. Следовательно, по достаточному условию критерия оптимальности есть и другие оптимальные планы. Действительно, из графического решения (см. рис. 1.1) можно определить, что решением будет и вершина M, имеющая координаты $x_1^* = 25$, $x_2^* = 24$. При этом $x_4^* = 320$, $\varphi(x^0) = \varphi(x^*) = 8000$ д. е. Тогда все точки отрезка ML тоже будут оптимальными планами, т. е. точки $x^\lambda = \lambda x^0 + (1-\lambda)x^*$, $0 \le \lambda \le 1$. В координатной форме имеем: $x_1^\lambda = 75\lambda + 25(1-\lambda) = 25 + 50\lambda$, $x_2^\lambda = 24 -$ -16λ, $0 \le \lambda \le 1$.

Пример 1.15. Рассмотрим следующую задачу:

$$\varphi(x) = 14x_1 + 24x_2 \to \max, \quad \begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + \ \ 3x_2 \le 18, \\ 7x_1 + 12x_2 \le 66, \end{cases} \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Покажем, что план $x_1^0=6$, $x_2^0=2$ будет оптимальным. Сведем задачу к канонической. Получим, что все свободные переменные при этом плане равны нулю, поскольку все ограничения на этом плане активны (проверьте!). Возьмем в качестве базисных переменные x_1^0, x_2^0, x_4^0. План вырожденный: $x_4^0=0$. Подсчитаем вектор потенциалов, который можно найти из системы уравнений $u'a_j = c_j, j\in J_Б=\{1, 2, 4\}$. Поскольку матрица A для канонической задачи имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 7 & 12 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

то

$$\begin{cases} u_1+2u_2+\ \ 7u_3=14,\\ 2u_1+3u_2+12u_3=24,\\ \qquad u_2 \qquad\quad\ = \ 0.\end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 2$. Далее находим небазисные оценки $\Delta_j=c_j-u'a_j$, $j\in J_Н = \{3, 5\}$: $\Delta_3=-u_1=0$, $\Delta_5=-u_3=-2<0$. Следовательно, план оптимальный. Несмотря на то, что имеется нулевая небазисная оценка, утверждать, что есть другие оптимальные планы, не можем, поскольку план вырожденный. Более того, можно проверить, что оптимальный план единственный (предоставляется читателю в качестве упражнения графически решить эту задачу и удостовериться в единственности оптимального плана).

Пример 1.16. Рассмотрим задачу

$$\varphi(x)=2x_1-4x_2\to\max,$$

$$\begin{cases}-2x_1+\ x_2\le 2,\\ \quad\ x_1-2x_2\le 2,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Сведя ее к канонической форме, получим матрицу основных ограничений

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Покажем, что план $x^0 = (2; 0; 6; 0)$ будет оптимальным базисным с базисной матрицей $A_Б = (a_1, a_3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Определим потенциалы из уравнений $c_j - u'a_j = 0,\ j = 1, 3$: $2 + 2u_1 - u_2 = 0,\ -u_1 = 0$. Отсюда получаем $u_1 = 0$, $u_2 = 2$. Подсчитаем небазисные оценки $\Delta_j, j = 2, 4$: $\Delta_2 = c_2 - u'a_2 = -4 + 4 = 0$, $\Delta_4 = -2 < 0$. Критерий оптимальности выполняется: план оптимален. Оптимальный план не единственный, поскольку он не вырожден и есть нулевая небазисная оценка $\Delta_2 = 0$. Найдем $A_Б^{-1}a_2$. Поскольку $A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, то $A_Б^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} < 0$. Таким образом, согласно замечанию 1.4, оптимальными будут и точки луча $x(\theta) = x^0 + \Delta x(\theta)$, $\theta \geq 0$, который в координатной форме, согласно формулам (1.21), (1.22), принимает вид $x_1(\theta) = 2 + 2\theta$, $x_2(\theta) = \theta$, $\theta \geq 0$. Максимальное значение целевой функции при этом равно $\varphi_{max} = 4$.

Задания

1.23. Выяснить, является оптимальный план единственным или нет (если он существует) для задач 1.1—1.15, 1.17, 1.18, 1.20. Если существуют другие оптимальные планы, найти их.

1.24. Выяснить, является ли единственным оптимальный план в задаче примера 1.13.

1.10*. Метод обратной матрицы (мультипликативный метод)[1]

Как видно из предыдущего материала, важную роль во всех вычислениях играет обратная матрица $A_Б^{-1}$. Обозначим через $(A_Б^{-1})_k$ и $(A_Б^{-1})_{k+1}$ матрицы, обратные к базисным на k-й и (k+1)-й итерациях соответственно. Пусть $J_Б^k$, $J_Б^{k+1}$ — множества базисных индексов соответственно на k-й и (k+1)-й итерациях, причем в множестве $J_Б^{k+1}$ индекс j_0 занимает то же место, что и индекс i_0 в $J_Б^k$. Тогда матрицы $(A_Б^{-1})_k$, $(A_Б^{-1})_{k+1}$ связаны соотношением

$$(A_Б^{-1})_{k+1} = D_k (A_Б^{-1})_k, \tag{1.40}$$

где

[1] Пункты, помеченные *, могут быть опущены при изучении основного курса.

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -x_{i_1 j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -x_{i_2 j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x_{i_m j_0}/x_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i_0 \\ \\ \\ \end{matrix}. \qquad (1.41)$$

Поскольку, как мы видели выше, начальная матрица $A_Б^{-1}$, как правило, единичная, то из (1.40) получаем

$$(A_Б^{-1})_{k+1} = D_k D_{k-1} \dots D_1 .$$

Опишем ***алгоритм решения задачи*** (1.14) с использованием обратной матрицы.

Пусть перед k-й итерацией известны $J_Б^k$, $(x_Б)^k = (A_Б^{-1})_k b$.

k-я итерация.

1. Подсчитываем $u' = c_Б'(A_Б^{-1})_k$.
2. Проверяем условия оптимальности, для чего подсчитываем $\Delta_j = c_j - u'a_j$, $j \in J_Н^k$. Если $\Delta_j \le 0$, $j \in J_Н^k$, то план $x^0 = \{(x_Б)^k, (x_Н)^k = 0\}$ оптимальный. Подсчитываем $\varphi_{\max} = \varphi(x^0)$, и решение прекращается. В противном случае переходим к следующему плану. Заметим, что в случае неоптимального плана не надо подсчитывать все Δ_j, а как только найдется индекс $j_0 \in J_Н^k$, для которого $\Delta_{j_0} > 0$, переходим к следующему шагу.
3. Находим x_{ij_0}, $i \in J_Б^k$: $(x_{ij_0}, i \in J_Б^k)' = (A_Б^{-1})_k a_{j_0}$ (координаты вектора a_{j_0} в базисе a_i, $i \in J_Б^k$).
4. Проверяем условие неразрешимости задачи: если $x_{ij_0} \le 0$, $i \in J_Б^k$, то $\varphi \to +\infty$ (задача не имеет решения), и решение задачи прекращаем. В противном случае переходим к следующему шагу.
5. По формуле (1.25) находим i_0.
6. Формируем $J_Б^{k+1} = J_Б^k \setminus \{i_0\} \cup \{j_0\}$.
7. По формуле (1.41) подсчитываем D_k, а затем по формуле (1.40) подсчитываем $(A_Б^{-1})_{k+1}$. Наконец, подсчитываем $(x_Б)^{k+1} = (A_Б^{-1})_{k+1} b$. Переходим к следующей итерации.

Пример 1.17. Рассмотрим задачу примера 1.13.

1-я фаза. Для упрощения записей, переобозначив в задаче (1.39) переменные $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2^1$, $x_3 = x_2^2$, $x_4 = x_3$, $x_5 = x_4$, $x_6 = x_5$, будем иметь: $c' = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ -1;\ -1)$, $J_Б^1 = \{5,\ 6\}$,

$$c_Б = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \end{array},\quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$(A_Б^{-1})_1 = E,\ (x_Б)^1 = (x_5,\ x_6) = (6;\ 6).$$

Итерация 1.

1. $u' = c_Б'(A_Б^{-1})_1 = c_Б' = (-1;\ -1)$.
2. $\Delta_1 = c_1 - u'a_1 = 3 > 0$: план неоптимальный. Полагаем $j_0 = 1$.
3. Поскольку $x_{51} = 2 > 0$, $x_{61} = 1 > 0$, то переходим к следующему шагу.
4. Находим θ_i, $i = 5,\ 6$: $\theta_5 = \dfrac{x_5}{x_{51}} = \dfrac{6}{2} = 3$, $\theta_6 = \dfrac{x_6}{x_{61}} = \dfrac{6}{1} = 6$. Поскольку $\min\{\theta_5, \theta_6\} = 3 = \theta_5$, то полагаем $i_0 = 5$.
5. Формируем $J_Б^2 = \{1,\ 6\}$, $(c_Б')_2 = (0;\ -1)$. Имеем $x_{i_0 j_0} = x_{51} = 2$.
6. Подсчитываем

$$(A_Б^{-1})_2 = D_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix},\ (x_Б)^2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_6 \end{pmatrix} = (A_Б^{-1})_2 b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итерация 2.

1. $u' = (0;\ -1)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (1/2;\ -1)$.
2. $\Delta_2 = c_2 - u'a_2 = -(1/2, -1)(-3; -3)' = 3/2 - 3 = -3/2 < 0$, $\Delta_3 = c_3 - u'a_3 = -(1/2;\ -1)(3;\ 3)' = 3/2 > 0$ — план неоптимальный; $j_0 = 3$.
3. Подсчитываем $\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{63} \end{pmatrix} = (A_Б^{-1})_2 a_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.
4. Поскольку $x_{13} > 0$, $x_{63} > 0$, то переходим к шагу 5.
5. Находим θ_i: $\theta_1 = \dfrac{x_1}{x_{13}} = 3 : (3/2) = 2$, $\theta_6 = \dfrac{x_6}{x_{63}} = 3 :\ (3/2) = 2$. Поскольку $\min\{\theta_1,\ \theta_6\} = \theta_1 = \theta_6$, то полагаем $i_0 = 6$ — искусственный индекс. Тогда $x_{i_0 j_0} = x_{63} = 3/2$.

6. Формируем $J_Б^3 = \{1, 3\}$, $(c_Б)_3 = (0;\ 0)$.

7. Подсчитываем

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix},\ (A_Б^{-1})_3 = D_2 (A_Б^{-1})_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$(x_Б)^3 = (x_1,\ \ x_3)' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итерация 3.

1. $u' = (c'_Б)_3 (A_Б^{-1})_3 = (0;\ 0)$.
2. $\Delta_2 = \Delta_4 = 0$, $\Delta_5 = \Delta_6 = -1 < 0$: план первой фазы оптимальный.
3. Поскольку искусственные переменные нулевые ($x_5 = x_6 = 0$) и в базис не входят векторы, соответствующие искусственным переменным, то переходим ко 2-й фазе с начальным базисным планом $x = (0;\ 0;\ 2;\ 0)$ (для исходной задачи $x = (0; -2; 0)$).

2-я фаза. Имеем

$$c' = (5;\ 1;\ -1;\ 1),\ \ J_Б = \{1,\ 3\},\ \ A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix},\ c'_Б = (5;\ \ -1).$$

Итерация 1.

$$u' = (5;\ -1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(5\frac{1}{3};\ \ -5\frac{2}{3}\right);$$

$$\Delta_2 = c_2 - u'a_2 = 1 - (16/3;\ \ -17/3) \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\Delta_4 = c_4 - u'a_4 = 1 - (16/3;\ \ -17/3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0.$$

План оптимальный. Имеем $x^0 = (0; -2; 0)$, $\varphi_{\max} = 2$.

Задания

1.25. Используя мультипликативный метод, решить задачи 1.1—1.20.

1.11*. Симплекс-метод для задач с двухсторонними прямыми ограничениями

Каноническая задача ЛП с двухсторонними прямыми ограничениями имеет вид

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ d_* \le x \le d^*, \tag{1.42}$$

а ***нормальная задача*** записывается в форме

$$c'x \to \max,\ Ax \le b,\ d_* \le x \le d^*. \tag{1.43}$$

Величина d_j^* для производственной задачи может представлять собой прогнозируемый спрос на j-й вид продукции, выпускаемой предприятием, а величина d_{*j}, например, — обязательный заказ.

Как и классическая задача в нормальной форме (1.5), задача (1.43) введением вектора свободных переменных $x_{\text{СВ}}$ сводится к канонической (1.42):

$$c'x \to \max,\ Ax + x_{\text{СВ}} = b,\ d_* \le x \le d^*,\ x_{\text{СВ}} \ge 0. \tag{1.44}$$

Поскольку в задаче (1.43) имеются двухсторонние прямые ограничения, то вместо ограничения $x_{\text{СВ}} \ge 0$ в задаче (1.44) можно указать более точные границы:

$$d_{n+i}^* = \max_{d_* \le x \le d^*}(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) = b_i - \sum_{j=1}^{n} \begin{cases} a_{ij}d_{*j}, \text{ если } a_{ij} \ge 0; \\ a_{ij}d_j^*, \text{ если } a_{ij} < 0; \end{cases} \tag{1.45}$$

$$d_{*n+i} = \min_{d_* \le x \le d^*}(b_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j) = b_i - \sum_{j=1}^{n} \begin{cases} a_{ij}d_j^*, & \text{если } a_{ij} \ge 0; \\ a_{ij}d_{*j}, & \text{если } a_{ij} < 0; \end{cases} \quad i = \overline{1,m}.$$

Однако при решении задач, как правило, берут только верхние границы d_{n+i}^*, $i = \overline{1,m}$, а нижние полагают равными нулю: $d_{*n+i} = 0$, $i = \overline{1,m}$. Заметим, что если верхняя граница какой-либо свободной переменной отрицательная, то это означает, что ограничения задачи несовместны: $X = \varnothing$.

Все остальные задачи ЛП сводятся к канонической аналогично, как показано в п. 1.3 (преобразования 1, 3, 4, 8), причем в преобразовании 4 соотношения *а* и *б* объединяются в одно *а*, поскольку в задачах с двухсторонними прямыми ограничениями знак b_i не имеет значения.

Рассмотрим задачу в канонической форме (1.42). Пусть, как и в задаче (1.14), выполняются условия: 1) $X \ne \varnothing$; 2) $\operatorname{rank} A = m$ ($m < n$).

План x называется ***базисным***, если $n - m$ его координат принимают одно из граничных значений ($x_j = d_{*j} \vee d_j^*$), а остальным m координатам

$$x_{j_1}, \ldots, x_{j_m} \tag{1.46}$$

соответствуют линейно независимые векторы условий

$$a_{j_1}, \dots, a_{j_m}. \qquad (1.47)$$

Множество $J_Б = \{ j_1, \dots, j_m \}$ назовем ***базисным множеством индексов***, $J_Н = \{1, \dots, n\} \backslash J_Б$ — ***небазисным***, векторы (1.47) ***базисом базисного плана***, координаты (1.46) — ***базисными координатами*** плана, остальные — ***небазисными***. ***Базисный план*** x называется ***невырожденным***, если базисные координаты не лежат на границах $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in J_Б$.

Как видим из приведенных определений, из них непосредственно вытекают аналогичные определения для задачи (1.14) (см. п. 1.4).

Понятия вектора потенциалов и оценок вводятся, как и в п. 1.4. Критерий оптимальности несколько отличается от теоремы 1.1.

Теорема 1.4 (критерий оптимальности). *Для оптимальности базисного плана x в задаче* (1.42) *достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$\Delta_j \le 0 \text{ при } x_j = d_{*j}; \ \Delta_j \ge 0 \text{ при } x_j = d_j^*, j \in J_Н. \qquad (1.48)$$

Как видим, условия (1.20) являются непосредственным следствием условий (1.48).

Опишем ***алгоритм решения задачи*** (1.42). Он похож на приведенный в п. 1.10*.

Пусть x — базисный план, $J_Б$ — базисное множество индексов.

1. Решаем систему уравнений $a'_j u = c_j$, $j \in J_Б$, относительно вектора потенциалов.
2. Подсчитываем небазисные оценки $\Delta_j = c_j - a'_j u$, $j \in J_Н$.
3. Проверяем условия оптимальности (1.48). Если они выполняются, план x оптимальный и решение заканчивается вычислением на этом плане значения целевой функции. Если условия (1.48) не выполняются, переходим к следующему шагу.
4. Определяем индекс j_0. Этот индекс можно взять произвольным из множества $J_Н^1 \subseteq J_Н$, где $J_Н^1$ — подмножество небазисных индексов, для которых не выполняются условия (1.48). Однако, если исходить из условия максимального возрастания целевой функции на данной итерации, то выбираем j_0 согласно соотношению $|\Delta_{j_0}| = \max\limits_{j \in J_Н^1} |\Delta_j|$.
5. Новый базисный план строим по правилам

$$\bar{x}_j = x_j + \theta^0 l_j, \ \theta^0 \ge 0, \ j \in J, \qquad (1.49)$$

где $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — допустимое направление из точки x; θ^0 — максимально возможный шаг вдоль него. Направление l находим, решая систему уравнений

$$l_{j_0} = \operatorname{sgn}\Delta_{j_0},\ l_j = 0, j \in J_{\text{Н}} \setminus j_0;\ A_{\text{Б}} l_{\text{Б}} = -A_{\text{Н}} l_{\text{Н}} = -a_{j_0} \operatorname{sgn}\Delta_{j_0}. \quad (1.50)$$

6. Шаг θ^0 определяем из условия

$$\theta^0 = \min\{\theta_{j_0},\ \ \theta_{i_0}\}, \quad (1.51)$$

где

$$\theta_{i_0} = \min_{i \in J_{\text{Б}}} \theta_i,\ \theta_{j_0} = d^*_{j_0} - d_{*j_0}, \quad (1.52)$$

$$\theta_i = \begin{cases} \dfrac{d^*_i - x_i}{l_i}, & \text{если } l_i > 0, \\ \dfrac{d_{*i} - x_i}{l_i}, & \text{если } l_i < 0, \\ \infty, & \text{если } l_i = 0,\ i \in J_{\text{Б}}. \end{cases} \quad (1.53)$$

Если $\theta^0 = \infty$, то решение заканчиваем: целевая функция не ограничена на множестве планов. В противном случае переходим к следующему шагу.

7. *а*) В случае $\theta^0 = \theta_{j_0}$ подсчитываем новый план $\bar{x}$ по формулам (1.49), при этом j_0-я координата переходит с одной границы на другую и условия оптимальности (1.48) для этой координаты будут выполняться, поскольку базис не поменялся. Если и для остальных небазисных координат условия (1.48) выполняются, решение заканчивается. План $\bar{x}$ оптимален. В противном случае переходим к шагу 4.

б) В случае $\theta^0 = \theta_{i_0}$ подсчитываем план $\bar{x}$ по формулам (1.49), заменяем базисное множество индексов $\bar{J}_{\text{Б}} = (J_{\text{Б}} \setminus i_0) \cup j_0$ и переходим к шагу 1.

Критерий неединственности оптимального базисного плана такой же, как и для задачи (1.14) (см. п. 1.9, теорема 1.3).

Замечание 1.5. Начальный базисный план для некоторых задач строится легко. В частности, для задач в нормальной форме, у которых все элементы каждого столбца матрицы A имеют одинаковый знак. В этом случае при определении верхних границ вектора свободных переменных $x_{\text{СВ}}$ (см. (1.45)) максимум достигается на одних и тех же элементах $\tilde{x}_j$, $j=\overline{1,n}$, для всех d^*_{n+i}, $i=\overline{1,m}$. И тогда начальный базисный план будет $(\tilde{x},\ \ x_{n+i}=d^*_{n+i},\ \ i=\overline{1,m})$ с базисным множеством индексов $J_Б =$ $=\{n+i,\ i=\overline{1,m}\}$.

Пример 1.18. Рассмотрим задачу (1.1), в которой заменим прямые односторонние ограничения на двухсторонние:

$$\varphi(x)=80x_1+70x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 8x_1+25x_2 \le 800, \\ 8x_1+\ \ 5x_2 \le 640, \\ \ \ x_1+\ \ 5x_2 \le 145, \end{cases}$$

$$3 \le x_1 \le 78,\ 0 \le x_2 \le 28.$$

Сведем задачу к канонической форме

$$\varphi(x)=80x_1+70x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 8x_1+25x_2+x_3 \qquad\qquad = 800, \\ 8x_1+\ \ 5x_2 \qquad +x_4 \qquad = 640, \\ \ \ x_1+\ \ 5x_2 \qquad\qquad +x_5 = 145, \end{cases} \tag{1.54}$$

$$3 \le x_1 \le 78,\ 0 \le x_2 \le 28,\ 0 \le x_3 \le 776,\ 0 \le x_4 \le 616,\ 0 \le x_5 \le 142,$$

где верхние границы для x_3, x_4, x_5 определены согласно формулам (1.45). Возьмем в качестве начального базисного плана вектор x = (3; 0; 776; 616; 142), причем $J_Б=\{3, 4, 5\}$, $J_Н=\{1, 2\}$.

Итерация 1.

1. Составляем уравнения для потенциалов: $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$.
2. Подсчитываем небазисные оценки: $\Delta_1=80$, $\Delta_2=70$.
3. Обе оценки положительны, а значения x_i, $i=1$, 2, лежат на нижней границе — условия оптимальности (1.48) не выполняются.
4. В качестве j_0 берем $j_0=1$.
5. Находим направление l из точки x по формулам (1.50): $l_1=1$, $l_2=0$, $l_3=-8$, $l_4=-8$, $l_5=-1$.
6. Подсчитываем шаг вдоль этого направления (см. (1.51)—(1.53)): $\theta_3=$ $=(0-776):(-8)=97$, $\theta_4=(0-616):(-8)=77$, $\theta_5=(0-142):(-1)=$ $=142$; $\theta_1=78-3=75$, откуда $\theta^0=\theta_1=75$, т. е. $\theta^0=\theta_{j_0}$.
7. Подсчитываем новый базисный план по формулам (1.49): $x_1=78$, $x_2=0$, $x_3=776-8\cdot75=176$, $x_4=616-8\cdot75=16$, $x_5=142-1\cdot75=67$. По-

скольку базис не меняется, то небазисные оценки остаются прежними. Но $\Delta_2 > 0$ при $x_2 = d_{*2} = 0$ и условия оптимальности не выполняются. Поэтому переходим к подсчету нового плана, взяв $j_0 = 2$.

Итерация 2.

1. Находим $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, $l_3 = -25$, $l_4 = -5$, $l_5 = -5$.
2. Подсчитываем шаг: $\theta_3 = (0 - 176) : (-25) = 7{,}04$; $\theta_4 = (0 - 16) : (-5) = 3{,}2$; $\theta_5 = (0 - 67) : (-5) = 13{,}4$; $\theta_2 = 28$. Следовательно, $\theta^0 = \theta_{i_0} = \theta_4 = 3{,}2$.
3. Новый базисный план $x = (78; 3{,}2; 96; 0; 51)$, новое базисное множество индексов $J_Б = \{2, 3, 5\}$. Тогда $J_Н = \{1, 4\}$.

Последующие итерации представлены ниже.

Итерация 3.

1. Уравнения для потенциалов $25u_1 + 5u_2 + 5u_3 = 70$, $u_1 = 0$, $u_3 = 0$. Отсюда получаем $u_1 = 0$, $u_2 = 14$, $u_3 = 0$.
2. $\Delta_1 = 80 - 8 \cdot 14 = -32 < 0$ при $x_1 = d_1^* = 78$ (условие оптимальности не выполняется (–)); $\Delta_4 = 0 - 14 = -14 < 0$ при $x_4 = d_{*4} = 0$ (условие оптимальности выполняется (+)).
3. Полагаем $j_0 = 1$, $l_1 = -1$, $l_4 = 0$. Тогда $l_2 = 1{,}6$, $l_3 = -32$, $l_5 = -7$.
4. Подсчитываем шаг: $\theta_{j_0} = \theta_1 = 75$; $\theta_2 = 15{,}5$; $\theta_3 = 3$; $\theta_5 = 7\frac{2}{7}$; $\theta^0 = \theta_3 = {}$ $= 3 = \theta_{i_0}$.
5. Новый план $x = (75; 8; 0; 0; 30)$, новое базисное множество индексов $J_Б = \{1, 2, 5\}$. Тогда $J_Н = \{3, 4\}$.

Итерация 4.

1. Уравнения для потенциалов $8u_1 + 8u_2 + u_3 = 80$, $25u_1 + 5u_2 + 5u_3 = 70$, $u_3 = 0$. Получаем $u_1 = 1$, $u_2 = 9$, $u_3 = 0$.
2. $\Delta_3 = -1 < 0$ при $x_3 = d_{*3} = 0$ (+); $\Delta_4 = -9 < 0$ при $x_4 = d_{*4} = 0$ (+). Условия оптимальности выполняются — план $x = (75; 8; 0; 0; 30)$ оптимальный: $\varphi_{\max} = 80 \cdot 75 + 70 \cdot 8 = 6560$.

Для построения начального базисного плана и выяснения совместности ограничений задачи (1.42) используется ***первая фаза***. Пусть $\tilde{x}$ — n-вектор, координаты которого принимают одно из граничных значений: $\tilde{x}_j = d_{*j} \vee d_j^*$, $j = \overline{1, n}$. Можно взять минимальную по модулю границу. Подсчитаем на нем ***невязки*** $\omega_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j$, $i = \overline{1, m}$. ***Задача первой фазы*** имеет вид

$$
\begin{gathered}
-\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max, \\
Ax + A_И x_И = b, \qquad\qquad (1.55) \\
d_* \le x \le d^*,\ 0 \le x_{n+i} \le |\omega_i|, \quad i = \overline{1,m},
\end{gathered}
$$

где $x_И = (x_{n+i},\ i = \overline{1,m})$ — вектор искусственных переменных, матрица $A_И$ состоит из столбцов $a_{n+i},\ i = \overline{1,m}$, у которых на i-м месте стоит 1, если $\omega_i \ge 0$, и -1, если $\omega_i < 0$, а остальные элементы нулевые.

Задача (1.55) всегда имеет решение. Начальный базисный план для нее строится легко: $(\tilde{x},\ \ x_{n+i} = |\omega_i|,\ \ i = \overline{1,m})$ с базисным множеством индексов $J_Б = J_И = \{n+i,\ i = \overline{1,m}\}$, т. е. $A_Б = A_И$.

Если на какую-либо переменную, например x_{j_*}, не накладываются прямые ограничения, тогда *один из способов* построения задачи первой фазы состоит в следующем. Полагаем $\tilde{x}_{j_*} = 0$, а базисное множество индексов задачи первой фазы имеет вид $J_Б = \{j_*, n+i,\ i = \overline{1,m},\ i \ne i_*\}$, где i_* — такой индекс, для которого $a_{i_* j_*} \ne 0$. *Второй способ* состоит в исключении переменной x_{j_*}, для чего из i_*-го основного ограничения задачи (1.42) определяем x_{j_*}, подставляем ее в целевую функцию и в остальные ограничения задачи, уменьшив количество основных ограничений на одно. Задачу первой фазы строим для преобразованной исходной задачи. *Третий способ*, по-видимому наиболее рациональный, состоит в следующем. Полагаем $\tilde{x}_{j_*} = (b_{i_*} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne j_*}}^{n} a_{i_* j} \tilde{x}_j) / a_{i_* j_*}$, где $\tilde{x}_j = d_{*j} \vee d_j^*,\ \ j = \overline{1,n}$, $j \ne j_*$, и подставляем этот вектор $\tilde{x}$ во все остальные основные ограничения исходной задачи для определения невязок $\omega_i,\ i = \overline{1,m},\ i \ne i_*$. При формировании задачи первой фазы искусственная переменная x_{n+i_*} не вводится, а базисное множество $J_Б$ для начального базисного плана задачи первой фазы такое же, как при первом способе. Наконец, *четвертый способ* состоит в замене в исходной задаче переменной x_{j_*} разностью двух неотрицательных переменных, как показано в п. 1.3. Этот способ применяется также в случае, если в задаче имеется несколько переменных без прямых ограничений на них.

Задачу (1.55) решаем по алгоритму, описанному выше. Пусть $(x^*, x_И^*)$ — решение задачи (1.55). Между этим решением и множеством планов X задачи (1.42) существует связь, которая выражается той же леммой 1.1, что и для задач с односторонними прямыми ограничениями: *необходимым и достаточным условием совместности ограничений задачи* (1.42) *является условие:* $x_И^* = 0$.

Таким образом, если $x_И^* \neq 0$, то $X = \varnothing$, и после первой фазы решение заканчиваем. Если же $x_И^* = 0$ и $J_Б \cap J_И = \varnothing$, то переходим ко второй фазе — решению исходной задачи (1.42) с начальным базисным планом x^* и базисным множеством $J_Б$. Если же $x_И^* = 0$, но $J_Б \cap J_И \neq \varnothing$, тогда решаем следующую задачу[1]:

$$\begin{gathered} c'x \to \max, \\ Ax + A_{буф}x_{буф} = b, \\ d_* \le x \le d^*,\ 0 \le x_j \le 0,\ j \in J_{буф}, \end{gathered} \tag{1.56}$$

где $J_{буф} = J_Б \cap J_И$, взяв в качестве начального базисного плана $(x^*,\ x_{буф}^* = 0)$ с базисным множеством $J_Б$. Эта задача, очевидно, эквивалентна задаче (1.42). Поэтому ее решение $(x^0,\ x_{буф}^0 = 0)$ и даст решение x^0 задачи (1.42). Заметим, что в процессе решения задачи (1.56) из $J_Б$ будут выводиться элементы из $J_{буф}$, поэтому их можно удалять из задачи (1.56) вместе с соответствующими столбцами матрицы $A_{буф}$ и координатами вектора $x_{буф}$.

Пример 1.19. Решим следующую задачу:

$$\begin{gathered} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max, \\ \begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 = 5, \\ \ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \end{cases} \\ 1 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 4,\ 1 \le x_3 \le 2. \end{gathered}$$

Возьмем вектор $\tilde{x} = (1;\ 0;\ 1)$. Подсчитаем невязки: $\omega_1 = 5 - 5 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$; $\omega_2 = 7 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 2$. Задача первой фазы имеет вид

$$\begin{gathered} -x_4 - x_5 \to \max, \\ \begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad = 5, \\ \ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 = 7, \end{cases} \\ 1 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 4,\ 1 \le x_3 \le 2,\ 0 \le x_4 \le 3,\ 0 \le x_5 \le 2. \end{gathered}$$

---

[1] Иногда эту задачу называют ***буферной***.

Начальный базисный план для нее: $x = (1; 0; 1; 3; 2)$, $J_Б = \{4, 5\}$, $J_Н = \{1, 2, 3\}$.

Итерация 1.

1. $u_1 = 1$; $u_2 = -1$.
2. $\Delta_1 = -5 + 1 = -4 < 0$ при $x_1 = d_{*1} = 1$ (+); $\Delta_2 = -1 + 2 = 1 > 0$ при $x_2 = d_{*2} = 0$ (–); $\Delta_3 = -3 + 4 = 1 > 0$ при $x_3 = d_{*3} = 1$ (–).
3. $j_0 = 2$, $l_2 = 1$, $l_1 = l_3 = 0$.
4. $l_4 = 1$; $l_5 = -2$.
5. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 4 - 0 = 4$; $\theta_4 = (3-3):1 = 0$; $\theta_5 = (0-2):(-2) = 1$; $\theta^0 = \theta_4 = 0 = \theta_{i_0}$; $i_0 = 4$.
6. План остается прежним, поскольку $\theta^0 = 0$: $x = (1; 0; 1; 3; 2)$. Меняется $J_Б$: $J_Б = \{2, 5\}$. Тогда $J_Н = \{1, 3, 4\}$.

Итерация 2.

1. $u_1 + 2u_2 = 0$, $u_2 = -1$. Отсюда получаем $u_1 = 2$, $u_2 = -1$.
2. $\Delta_1 = -9 < 0$ при $x_1 = d_{*1} = 1$ (+); $\Delta_3 = -2 < 0$ при $x_3 = d_{*3} = 1$ (+); $\Delta_4 = -1 - (-1)\cdot 2 = 1 > 0$ при $x_4 = d_4^* = 3$ (+).

План оптимальный. Но искусственные переменные ненулевые ($x_4 = 3$, $x_5 = 2$), поэтому ограничения исходной задачи несовместны.

Пример 1.20. Рассмотрим задачу

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 26, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 16, \end{cases}$$

$$1 \le x_1 \le 6;\ 2 \le x_2 \le 7;\ 0 \le x_3 \le 8;\ 1 \le x_4 \le 12.$$

Возьмем $\tilde{x} = (6;\ 2;\ 0;\ 1)$. Тогда $\omega_1 = 7$, $\omega_2 = 5$. Задача первой фазы

$$-x_5 - x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad = 26, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad + x_6 = 16, \end{cases}$$

$$1 \le x_1 \le 6;\ 2 \le x_2 \le 7;\ 0 \le x_3 \le 8;\ 1 \le x_4 \le 12;\ 0 \le x_5 \le 7;\ 0 \le x_6 \le 5.$$

Начальный базисный план $x = (6;\ 2;\ 0;\ 1;\ 7;\ 5)$, $J_Б = \{5, 6\}$, $J_Н = \{1, 2, 3, 4\}$.

Итерация 1.

1. $u_1 = -1$; $u_2 = -1$.
2. $\Delta_1 = 3 > 0$ (+); $\Delta_2 = 5 > 0$ (–); $\Delta_3 = 1 > 0$ (–); $\Delta_4 = 2 > 0$ (–).

3. $j_0 = 2$, $l_2 = 1$, $l_1 = l_3 = l_4 = 0$.
4. $l_5 = -3$, $l_6 = -2$.
5. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 5$; $\theta_5 = 7/2$; $\theta_6 = 5/2$; $\theta^0 = 7/3 = \theta_5$, т. е. $i_0 = 5$.
6. Новый план $x = (6;\ 13/3;\ 0;\ 1;\ 0;\ 1/3)$, $J_Б = \{2, 6\}$, $J_Н = \{1, 3, 4, 5\}$.

Итерация 2.
1. $3u_1 + 2u_2 = 0$; $u_2 = -1$. Отсюда получаем $u_1 = 2/3$; $u_2 = -1$.
2. $\Delta_1 = -1/3 < 0$ (–). Остальные Δ_j можно не подсчитывать.
3. $j_0 = 1$, $l_1 = -1$, $l_3 = l_4 = l_5 = 0$.
4. $3l_2 = 2$; $2l_2 + l_6 = 1$. Отсюда имеем $l_2 = 2/3$, $l_6 = -1/3$.
5. $\theta_{j_0} = \theta_1 = 5$; $\theta_2 = 4$; $\theta_6 = 1$. Таким образом, $\theta^0 = \theta_6 = 1$, т. е. $i_0 = 6$.
6. Новое базисное множество $J_Б = \{1, 2\}$. Новый план $x = (5;\ 5;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0)$.

Итерация 3.
1. $2u_1 + u_2 = 0$; $3u_1 + 2u_2 = 0$. Отсюда $u_1 = u_2 = 0$.
2. $\Delta_3 = 0$ (+); $\Delta_4 = 0$ (+); $\Delta_5 = -1 < 0$ (+); $\Delta_6 = -1 < 0$ (+).

Условия оптимальности выполняются. План оптимален. Поскольку искусственные переменные равны нулю ($x_5 = x_6 = 0$) и в базисном множестве $J_Б$ нет искусственных индексов, переходим ко второй фазе — решению исходной задачи с начальным базисным планом $x = (5;\ 5;\ 0;\ 1)$ и базисным множеством $J_Б = \{1,\ 2\}$. Решение проводится аналогично примеру 1.18. Закончить решение предлагается самостоятельно.

Пример 1.21.

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 50, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 40, \\ 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 130, \end{cases}$$
$$1 \le x_1 \le 14,\ 0 \le x_2 \le 18,\ 0 \le x_3 \le 20,\ 0 \le x_4 \le 30.$$

Возьмем $\tilde{x} = (1;\ 18;\ 0;\ 0)$. Подсчитаем невязки $\omega_1 = 50 - 3 - 36 = 11 > 0$, $\omega_2 = 40 - 3 - 18 = 19 > 0$, $\omega_3 = 130 - 9 - 72 = 49 > 0$.

Задача первой фазы:

$$-x_5 - x_6 - x_7 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \phantom{{}+x_6+x_7} = 50, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \phantom{{}+x_5} + x_6 \phantom{{}+x_7} = 40, \\ 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 \phantom{{}+x_5+x_6} + x_7 = 130, \end{cases}$$
$$1 \le x_1 \le 14, \quad 0 \le x_2 \le 18, \quad 0 \le x_3 \le 20, \quad 0 \le x_4 \le 30,$$
$$0 \le x_5 \le 11, \quad 0 \le x_6 \le 19, \quad 0 \le x_7 \le 49.$$

Начальный базисный план этой задачи: $x = (1;\ 18;\ 0;\ 0;\ 11;\ 19;\ 49)$, $J_Б = \{5, 6, 7\}$. Тогда $J_Н = \{1, 2, 3, 4\}$.

Итерация 1.

1. $u_1 = -1;\ u_2 = -1;\ u_3 = -1.$
2. $\Delta_1 = 3+3+9 = 15 > 0$ (–). Тогда $j_0 = 1$.
3. $l_1 = 1,\ l_2 = l_3 = l_4 = 0.$
4. $l_5 = -3,\ l_6 = -3,\ l_7 = -9.$
5. $\theta_{j_0} = \theta_1 = 14-1 = 13$; $\theta_5 = 11/3$, $\theta_6 = 19/3$, $\theta_7 = 49/9$. Итак, $\theta^0 = \theta_5 = 11/3$, т. е. $i_0 = 5$.
6. Новый план $x = (14/3;\ 18;\ 0;\ 0;\ 0;\ 8;\ 16)$, $J_Б = \{1, 6, 7\}$, $J_Н = \{2, 3, 4, 5\}$.

Итерация 2.

1. Уравнения для потенциалов: $3u_1 + 3u_2 + 9u_3 = 0$; $u_2 = -1$; $u_3 = -1$. Отсюда получаем $u_1 = 4$.
2. $\Delta_2 = -2\cdot 4 - 1\cdot(-1) - 4\cdot(-1) = -3 < 0$ (–). Итак, $j_0 = 2$.
3. $l_2 = -1,\ l_3 = l_4 = l_5 = 0.$
4. Уравнения для $l_j,\ j \in J_Б$: $3l_1 = 2$, $3l_1 + l_6 = 1$, $9l_1 + l_7 = 4$. Решая эту систему, получим $l_1 = 2/3$, $l_6 = -1$, $l_7 = -2$.
5. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 18$; $\theta_1 = (14 - 14/3):(2/3) = 14$, $\theta_6 = (-8):(-1) = 8$, $\theta_7 = (-16):(-2) = 8$. Таким образом, $\theta^0 = \theta_6 = 8$, т. е. $i_0 = 6$.
6. Новый план $x = (10;\ 10;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$, $J_Б = \{1, 2, 7\}$, $J_Н = \{3, 4, 5, 6\}$.

Итерация 3.

1. Уравнения для потенциалов: $3u_1 + 3u_2 + 9u_3 = 0$; $2u_1 + u_2 + 4u_3 = 0$; $u_3 = -1$. Решая эту систему, получим $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = -1$.
2. $\Delta_3 = -1+2-1 = 0$ (+), $\Delta_4 = -1-4+5 = 0$ (+), $\Delta_5 = -1-1 = -2 < 0$ (+), $\Delta_6 = -1-2 = -3 < 0$ (+).

План первой фазы оптимален. Все искусственные переменные равны нулю, но в базисе есть искусственный вектор a_7. Решаем следующую задачу:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 50, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 40, \\ 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + x_7 = 130, \end{cases} \tag{1.57}$$

$$1 \le x_1 \le 14,\quad 0 \le x_2 \le 18,\quad 0 \le x_3 \le 20,\quad 0 \le x_4 \le 30,$$

$$0 \le x_7 \le 0.$$

Поскольку в этой задаче дополнительная переменная x_7 всегда нулевая, то последняя задача эквивалентна исходной. Начальный базисный план для этой задачи: $x = (10;\ 10;\ 0;\ 0)$, $J_Б = \{1, 2, 7\}$. Вспомогательную переменную в дальнейшем не рассматриваем (она всегда нулевая).

Итерация 1.

1. Уравнения для потенциалов $3u_1 + 3u_2 + 9u_3 = 1$, $2u_1 + u_2 + 4u_3 = 1$, $u_3 = 0$. Решая эту систему, получим $u_1 = 2/3$, $u_2 = -1/3$, $u_3 = 0$.
2. $\Delta_3 = -2 - 2/3 - 1/3 = -3 < 0$ (+), $\Delta_4 = -1 - 2/3 + 2/3 = -1 < 0$ (+).

План $x = (10;\ 10;\ 0;\ 0)$ оптимален. Максимальное значение целевой функции равно $\varphi_{max} = 20$.

Замечание 1.6. Поскольку после первой фазы в базисе остался искусственный вектор, возможно, $\operatorname{rank} A < m$. Чтобы проверить это, достаточно подсчитать $A_Б^{-1}A$, где A — матрица основных ограничений исходной задачи. И если в этом произведении какая-либо строка нулевая, то это означает, что соответствующее основное ограничение исходной задачи является линейной комбинацией остальных.

В нашей задаче после первой фазы базисная матрица имеет вид $A_Б = (a_1, a_2, a_7) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $A_Б^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Подсчитаем

$A_Б^{-1}A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 9 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Итак, третье ограничение исходной задачи представляет собой линейную комбинацию первых двух. Нетрудно проверить, что третье ограничение получается прибавлением к первому удвоенного второго. Поэтому после первой фазы вместо вспомогательной задачи (1.57) можно решать следующую задачу:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 50, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 40, \end{cases}$$

$$1 \le x_1 \le 14,\quad 0 \le x_2 \le 18,\quad 0 \le x_3 \le 20,\quad 0 \le x_4 \le 30.$$

Начальный базисный план тот же, что и в задаче (1.57): $x = (10;\ 10;\ 0;\ 0)$, но базисное множество $J_Б = \{1, 2\}$, т. е. без вектора a_7.

Пример 1.22. Рассмотрим задачу примера 1.21, в которой будем считать, что на переменную x_2 не накладываются прямые ограничения. Будем иметь

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 50, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 40, \\ 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 130, \end{cases} \tag{1.58}$$
$$1 \le x_1 \le 14, \quad 0 \le x_3 \le 20, \quad 0 \le x_4 \le 30.$$

Для построения начального базисного плана возьмем $\tilde{x} = (1;\ 0;\ 20;\ 0)$. Тогда $\omega_1 = 27$, $\omega_2 = 57$, $\omega_3 = 141$. Задача первой фазы имеет вид

$$-x_5 - x_6 - x_7 \to \max,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 40, \\ 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + x_7 = 130, \end{cases} \tag{1.59}$$
$$1 \le x_1 \le 14, \quad 0 \le x_3 \le 20, \quad 0 \le x_4 \le 30,$$
$$0 \le x_5 \le 27, \quad 0 \le x_6 \le 57, \quad 0 \le x_7 \le 141.$$

Для задачи (1.59) в качестве начального базисного плана берем $x = (1;\ 0;\ 20;\ 0;\ 27;\ 57;\ 141)$. В качестве базисного множества $J_Б$ можно взять одно из следующих множеств: $J_Б = \{2, 5, 6\}$, $J_Б = \{2, 5, 7\}$, $J_Б = \{2, 6, 7\}$. Очевидно, в каждом случае базисная матрица $A_Б$ будет невырожденной.

Рассмотрим второй способ построения задачи первой фазы. Исключим переменную x_2 из задачи (1.58), например, определив ее из второго основного ограничения:

$$x_2 = 40 - 3x_1 + x_3 - 2x_4. \tag{1.60}$$

Подставим последнее выражение в целевую функцию и остальные ограничения задачи (1.58). Получим следующую задачу:

$$40 - 2x_1 - x_3 - 3x_4 \to \max,$$
$$-3x_1 + 3x_3 - 3x_4 = -30, \tag{1.61}$$
$$1 \le x_1 \le 14, \quad 0 \le x_3 \le 20, \quad 0 \le x_4 \le 30.$$

Первое и третье ограничения оказались одинаковыми, что было показано выше в примере 1.21. Задача (1.61) весьма проста. Но и для нее, и для более сложных задач задача первой фазы строится, как было показано в примерах 1.20, 1.21. Так, взяв $\tilde{x} = (1;\ 0;\ 0)$, получим $\omega = -27$, и задача первой фазы примет вид

$$-x_5 \to \max,$$
$$-3x_1+3x_3-3x_4-x_5=-30, \tag{1.62}$$
$$1\le x_1\le 14,\quad 0\le x_3\le 20,\quad 0\le x_4\le 30,\ 0\le x_5\le 27.$$

Начальный базисный план этой задачи (1; 0; 0; 27) с базисным множеством $J_Б=\{5\}$. Решив задачу (1.62) и определив ее оптимальный план, переходим к решению задачи (1.61), если ограничения совместны. Оптимальный план задачи (1.61) затем подставляем в равенство (1.60) для определения оптимального значения переменной x_2.

Рассмотрим третий способ. Пусть $\tilde{x}=1$, $\tilde{x}_3=0$, $\tilde{x}_4=0$. Подставляя эти значения в равенство (1.60), получим $\tilde{x}_2=37$. Тогда $\omega_1=-27$, $\omega_3=-27$. Здесь $\omega_2=0$, и искусственную переменную для второго ограничения не вводим. Таким образом, задача первой фазы примет вид

$$-x_5-x_6\to\max,$$
$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3+\ \ x_4-x_5 &= 50,\\ 3x_1+\ \ x_2-x_3+2x_4 &= 40,\\ 9x_1+4x_2-x_3+5x_4 \quad -x_6 &=130,\end{cases}$$
$$1\le x_1\le 14,\quad 0\le x_3\le 20,\quad 0\le x_4\le 30,$$
$$0\le x_5\le 27,\quad 0\le x_6\le 27.$$

Начальный базисный план для этой задачи (1; 37; 0; 0; 27; 27) с базисным множеством $J_Б=\{2, 5, 6\}$.

Задания

1.26. Решить задачу 1.2, варианты 4*а*, 5*а* при дополнительных ограничениях на выпуск продукции: 4*а*) $d_{*1}=10$, $d_{*2}=5$, $d_1^*=85$, $d_2^*=50$; 5*а*) $d_{*1}=5$, $d_{*2}=0$, $d_1^*=68$, $d_2^*=56$.

1.27. Решить задачу 1.3, добавив к вариантам табл. 1.6*а* дополнительные ограничения на выпуск продукции, заданные в табл. 1.39.

Таблица 1.39

Варианты	d_{*1}	d_{*2}	d_1^*	d_2^*
1	5	1	18	14
2	10	2	60	35
3	5	5	60	45
4	10	15	70	48
5	5	20	35	95

1.28. По исходным данным, представленным в табл. 1.40, сформировать задачи ЛП на максимум в канонической форме и решить их.

Таблица 1.40

Варианты	Матрица основных ограничений A	Вектор ресурсов b	Вектор стоимости c	Вектор нижних ограничений d_*	Вектор верхних ограничений d^*
1	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{matrix}$	−4 25 6	6 3 −2 −1 −14	1 −1 −2 1 −3	4 3 2 4 1
2	$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{matrix}$	−9 10 −21	9 −2 3 −3 14	−3 1 −2 −1 −4	2 4 3 5 1
3	$\begin{matrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$	3 9 2	2 7 14 −2 4	−3 −1 1 −2 −4	1 3 4 2 1
4	$\begin{matrix} 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}$	0 24 −1	2 4 9 −4 16	1 −3 0 −1 1	6 2 4 3 5
5	$\begin{matrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	30 −11 2	5 0 −4 15 5	2 0 1 0 −1	10 4 5 4 3
6	$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	16 −6 2	−7 0 −3 1 −1	1 −4 −1 −4 −5	8 1 4 2 1
7	$\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{matrix}$	−10 1 14	−9 5 2 6 1	0 −1 −3 −2 −6	6 7 4 3 0
8	$\begin{matrix} 3 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	−3 −15 4	9 1 0 −4 4	0 1 0 −3 −4	4 5 4 2 1

Продолжение табл. 1.40

Варианты	Матрица основных ограничений A	Вектор ресурсов b	Вектор стоимости c	Вектор нижних ограничений d_*	Вектор верхних ограничений d^*
9	$\begin{matrix} 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -6 \\ -8 \\ 7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{matrix}$
10	$\begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 \\ 8 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -10 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$
11	$\begin{matrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -2 \\ 12 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}$
12	$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 \\ 16 \\ 22 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{matrix}$
13	$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ -11 \\ -6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \\ 9 \end{matrix}$
14	$\begin{matrix} 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -12 \\ 12 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ 10 \\ 2 \\ -7 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{matrix}$
15	$\begin{matrix} -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 13 \\ 49 \\ 42 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 2 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ 10 \\ 8 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$
16	$\begin{matrix} 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5 \\ 0 \\ 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 10 \\ 4 \\ -4 \\ 3 \\ 8 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$

Продолжение табл. 1.40

Варианты	Матрица основных ограничений A	Вектор ресурсов b	Вектор стоимости c	Вектор нижних ограничений d_*	Вектор верхних ограничений d^*
17	4 0 0 –1 2 0 0 1 0 3 0 2 0 1 0	1 3 3	12 2 0 5 3	–1 0 –4 1 1	4 4 1 5 6
18	2 1 0 0 0 0 0 3 4 0 3 1 0 0 2	6 11 19	11 2 2 8 6	–2 –1 1 1 2	3 4 6 6 7
19	0 2 1 0 4 0 0 3 2 0 2 0 0 0 1	25 35 9	4 8 7 6 16	3 5 6 1 1	5 8 10 4 3
20	0 0 1/2 4 0 0 0 0 3 1 2 1 2 0 0	29 23 8	0 1 2 17 3	1 –1 2 3 1	4 3 5 8 4
21	2 1 0 0 0 0 3 1 0 0 1 0 0 2 4	12 14 30	8 8 1 4 7	1 2 1 3 4	5 4 3 6 7
22	1 2 0 0 0 0 –2 3 0 0 –1 0 0 2 3	4 6 2	–1 –6 6 2 1	2 –1 1 2 0	4 3 4 5 4
23	0 –2 1 0 0 0 0 0 4 1 –2 3 0 1 0	1 37 8	–2 –5 0 4 0	–1 –2 1 3 2	3 4 6 8 7
24	0 0 4 1 0 2 0 0 3 4 0 2 5 0 0	4 8 15	4 2 13 9 6	1 2 1 –1 0	7 8 6 5 6

Варианты	Матрица основных ограничений A	Вектор ресурсов b	Вектор стоимости c	Вектор нижних ограничений d_*	Вектор верхних ограничений d^*
25	0 0 0 −3 4 4 2 0 0 0 1 0 3 1 0	−3 16 5	4 0 0 −8 4	0 −1 −2 1 −4	4 4 3 5 2
26	−1 0 0 0 3 0 2 4 0 0 0 1 0 3 2	−1 24 6	−4 8 8 0 −3	1 1 0 −2 −1	6 6 4 3 4
27	0 0 0 4 3 0 2 1 0 0 −3 0 1 0 1	21 4 13	−1 −4 −2 4 1	−2 −3 1 2 3	4 3 5 6 7
28	0 0 3 −1 0 2 4 0 0 0 3 0 0 1 2	0 −4 8	10 4 3 2 8	0 −4 −6 −2 0	5 0 1 3 4
29	0 −1 4 0 0 1 0 0 3 2 0 0 1 2 0	12 13 10	3 0 1 15 9	−4 −2 0 −1 −3	1 4 5 3 2
30	2 −1 0 0 0 1 0 0 −2 1 0 4 1 0 0	−2 −1 4	6 8 3 0 1	−1 −2 1 0 −4	4 3 5 4 2
31	1 0 0 0 −2 0 0 −2 3 1 2 1 0 0 0	10 −7 11	−2 −1 −4 9 7	1 3 −4 −4 −6	6 8 2 1 0
32	1 2 1 0 0 0 0 2 1 0 2 0 0 −1 2	1 4 6	7 4 3 −3 4	0 −1 1 0 1	4 5 6 5 7

Продолжение табл. 1.40

Варианты	Матрица основных ограничений A	Вектор ресурсов b	Вектор стоимости c	Вектор нижних ограничений d_*	Вектор верхних ограничений d^*
33	$\begin{matrix} 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{matrix}$	2 2 2	2 8 4 7 −3	−4 −1 0 0 −2	0 4 6 5 5
34	$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & 0 \end{matrix}$	7 2 6	−4 2 1 12 10	0 −1 −1 −5 −6	4 3 4 2 1
35	$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{matrix}$	0 6 −1	−6 −1 0 3 6	1 0 1 0 1	8 4 6 6 7
36	$\begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{matrix}$	6 −2 6	−4 4 5 6 10	−4 −1 −5 −3 −4	2 4 1 3 2
37	$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	0 6 5	2 1 0 0 1	0 1 1 2 1	4 5 6 8 7
38	$\begin{matrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}$	6 0 5	3 0 0 3 5	−2 −2 −3 −5 −3	3 4 5 1 2
39	$\begin{matrix} 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}$	−15 15 7	3 1 1 3 1	−3 −1 0 0 2	3 4 5 6 8
40	$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{matrix}$	−8 2 1	2 1 1 −3 1	−2 −1 0 −2 0	3 4 6 4 5

Варианты	Матрица основных ограничений A	Вектор ресурсов b	Вектор стоимости c	Вектор нижних ограничений d_*	Вектор верхних ограничений d^*
41	$\begin{matrix} -1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{matrix}$
42	$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$
43	$\begin{matrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ -2 \\ 12 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{matrix}$
44	$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$

1.29. Из приведенных ниже целевых функций *а* и ограничений *б* сформировать задачи на максимум и решить их.

а) Целевые функции:

1. $\varphi = 3x_1 + 2x_2$.
2. $\varphi = 2x_1 + 3x_2$.
3. $\varphi = 3x_1 + 8x_2$.
4. $\varphi = x_1 + 4x_2$.
5. $\varphi = 4x_1 + 3x_2$.
6. $\varphi = x_1 + 2x_2$.
7. $\varphi = 4x_1 + 6x_2$.
8. $\varphi = 6x_1 + 6x_2$.
9. $\varphi = 2x_1 + x_2$.
10. $\varphi = x_1 + x_2$.
11. $\varphi = 2x_1 + 5x_2$.
12. $\varphi = 3x_1 + x_2$.

б) Ограничения:

1. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 7, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 17, \\ x_1 - 25x_2 \le 0, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 1.$

2. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ -7x_1 + 2x_2 \le 14, \end{cases}$ $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 1.$

3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge -1/2,\ x_2 \ge 0.$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge -4, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 20, \end{cases}$ $0 \le x_1 \le 9,\ x_2 \ge -3.$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 - (1/2)x_2 \le 5, \\ -7x_1 + x_2 \le 14, \end{cases}$ $x_1 \ge -1,\ x_2 \ge 0.$

6. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - 2x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 1,\ x_2 \ge 2.$

1.30. Из целевых функций 1.20*а* и приведенных ниже ограничений *а* и *б* сформировать задачи ЛП на максимум, отбросив в целевых функциях, где необходимо, лишнюю переменную, и решить задачи симплекс-методом.

а) Ограничения:

1. $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 21, \end{cases}$$
$3 \le x_1 \le 4,\ -13 \le x_2 \le 3,\ -8 \le x_3 \le 3.$

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ x_2 - 5x_3 = -5, \end{cases}$$
$-20 \le x_1 \le 2,\ 0 \le x_2 \le 10,\ 1 \le x_3 \le 3.$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3, \\ -x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -2, \end{cases}$$
$20/3 \le x_1 \le 38/3,\ -23/3 \le x_2 \le -11/3,$
$2 \le x_3 \le 4.$

4. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3, \end{cases}$$
$0 \le x_1 \le 1/2,\ -11/4 \le x_2 \le 3/2,$
$-25/4 \le x_3 \le 7/2,\ 0 \le x_4 \le 2.$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 8, \end{cases}$$
$0 \le x_1 \le 2,\ -4 \le x_2 \le 10,$
$-33 \le x_3 \le -1,\ -5 \le x_4 \le 4.$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ 10x_1 + 4x_2 + 6x_4 = 6, \end{cases}$$
$-7 \le x_1 \le 11,\ -4 \le x_2 \le 5,$
$-7 \le x_3 \le 14,\ -19 \le x_4 \le 11.$

б) К приведенным ниже основным ограничениям добавить следующие прямые ограничения:

$$0 \le x_1 \le 5,\ 0 \le x_2 \le 3,\ 1 \le x_3 \le 5,\ 2 \le x_4 \le 10.$$

1. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \le 2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 15. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -12, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4 = -20. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 15x_4 = 7, \\ 20x_1 + 30x_2 + x_3 + x_4 \ge 30, \\ 7x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 7x_4 \le 10. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + 4x_4 = 5, \\ -10x_2 - 20x_3 + 15x_4 = 60, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \le 9. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -10, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \ge -2. \end{cases}$$

1.31. Решить задачи 1.28 (варианты 1—24) при отсутствии прямых ограничений на первую переменную.

1.32. Решить задачи 1.28 (варианты 25—44) при отсутствии прямых ограничений на вторую и третью переменные.

§ 2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Настоящий параграф является продолжением предыдущего. В нем приводится другой метод решения задач линейного программирования — двойственный симплекс-метод. Основная же цель настоящего параграфа — анализ решения задач ЛП.

2.1. Анализ задач ЛП. Двойственные задачи

При решении конкретных практических задач ЛП важно не только получить оптимальный план, но еще необходимо провести анализ решения задачи. На практике значения многих параметров задачи редко известны точно. Следовательно, решение практической задачи нельзя считать законченным, если найден оптимальный план. Например, для производственной задачи могут возникнуть следующие вопросы.

1. Как влияет на максимальную прибыль изменение различных параметров задачи, в частности изменение ресурсов? Какие из ресурсов с точки зрения получения максимальной прибыли ценнее, т. е. какие из ресурсов выгоднее увеличивать или уменьшать в первую очередь, чтобы это вело к увеличению максимальной прибыли?

2. Как быстро скорректировать оптимальный план, если изменились параметры задачи?

Исследование влияния изменения параметров задачи на изменение максимального значения целевой функции называется ***анализом чувствительности***.

Провести анализ чувствительности и дать ответ на поставленные вопросы позволяют двойственные задачи и так называемый двойственный симплекс-метод. Этот метод, кроме того, дает возможность упростить решение некоторых задач ЛП, а именно избежать первой фазы прямого симплекс-метода, рассмотренного в § 1, в частности, для задач типа задачи о рационе.

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме (1.14):

$$\varphi = c'x \to \max, \ Ax = b, \ x \geq 0 \ \ (b \geq 0). \tag{2.1}$$

Каждому i-му основному ограничению этой задачи ($i = \overline{1,m}$) поставим в соответствие ***двойственную переменную*** y_i, $i = \overline{1,m}$, и рассмотрим следующую задачу:

$$\psi = b'y \to \min, \ A'y \geq c. \tag{2.2}$$

Задача (2.2) называется ***двойственной*** к задаче (2.1), вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)$, удовлетворяющий ограничению $A'y \geq c$, — ***двойственным планом*** задачи ЛП.

Для любой задачи ЛП можем построить двойственную, поскольку любую задачу ЛП можно заменить эквивалентной ей канонической, для которой мы знаем, как строится двойственная.

Пример 2.1. Рассмотрим производственную задачу примера 1.1. Каноническая задача к задаче (1.1) имеет вид (1.17). Каждому i-му основному ограничению задачи (1.17) ставим в соответствие двойственную переменную y_i:

$$\varphi = 80x_1 + 70x_2 \to \max,$$

$$\left\{\begin{array}{l} 8x_1 + 25x_2 + x_3 = 800, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_4 = 640, \\ x_1 + 5x_2 + x_5 = 145, \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\right. \tag{2.3}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Тогда двойственная задача имеет вид

$$\psi = 800y_1 + 640y_2 + 145y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 8y_1 + 8y_2 + y_3 \geq 80, \\ 25y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq 70, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

Анализируя этот пример, видим, что для задачи в нормальной форме $c'x \to \max$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $(b \geq 0)$ двойственная задача такова: $b'y \to \min$, $A'y \geq c, y \geq 0$.

Замечание 2.1. Задачи (2.3) и (2.4) ***взаимно двойственны***: если задачу (2.4) свести к канонической, а затем построить к ней двойственную, то это будет задача (2.3).

Пример 2.2. Построим двойственную задачу к задаче (1.15) примера 1.6. Предварительно сводим задачу (1.15) к канонической форме (1.16), а затем строим для нее двойственную:

$$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 4\bar{y}_3 + 2\bar{y}_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} -4\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 3\bar{y}_3 - \bar{y}_4 \geq -5, \\ 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 \geq 2, \\ 3\bar{y}_1 - \bar{y}_3 - 3\bar{y}_4 \geq 3, \\ -3\bar{y}_1 + \bar{y}_3 + 3\bar{y}_4 \geq -3, \\ -\bar{y}_2 \geq 0, \ -\bar{y}_3 \geq 0, \ \bar{y}_4 \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, третье и четвертое неравенства можно заменить одним равенством, а последние три ограничения рассматривать как прямые ограничения на двойственные переменные. Поэтому имеем

$$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 4\bar{y}_3 + 2\bar{y}_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} -4\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + 3\bar{y}_3 - \bar{y}_4 \ge -5, \\ 2\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 \ge 2, \\ 3\bar{y}_1 - \bar{y}_3 - 3\bar{y}_4 \ge 3, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\bar{y}_2 \le 0,\ \bar{y}_3 \le 0,\ \bar{y}_4 \ge 0.$$

Полученная задача будет двойственной к задаче (1.16), которая является канонической формой задачи (1.15). Поэтому задачу (2.5) можно считать двойственной к задаче (1.15), если в (2.5) заменить min на max (поскольку исходная задача на минимум, то двойственная должна быть на максимум).

Если сравнить задачи (1.15) и (2.5), то трудно найти в них общие параметры, что как бы предполагает обязательное сведение исходной задачи к канонической форме, а затем построение двойственной к ней. Но можно и непосредственно по исходной задаче построить двойственную к ней. Покажем это на примере 2.2. Для этого в задаче (2.5) заменим min на max, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$, $\bar{y}_4$ — соответственно на y_1, $-y_2$, y_3, y_4, $y_i \ge 0$, $i = \overline{1,4}$, и умножим первое и третье основные ограничсния в задаче (2.5) на –1. В итоге получим

$$y_1 + y_2 - 4y_3 - 2y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4 \le 5, \\ 2y_1 - y_2 + y_3 \ge 2, \\ -3y_1 + y_3 + 3y_4 = -3, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$y_2 \ge 0,\ y_3 \le 0,\ y_4 \ge 0.$$

Задача (2.6) эквивалентна задаче (2.5), а следовательно, является двойственной к задаче (1.15), но теперь, если сравнить задачи (1.15) и (2.6), у них общие параметры.

Замечание 2.2. Если к задаче (2.6) построить двойственную, поступая аналогично, как это было сделано выше, то получим задачу (1.15), т. е. задачи (1.15) и (2.6) взаимно двойственны.

Таким образом, сравнивая задачи (1.15) и (2.6) и учитывая их взаимную двойственность, можно указать общие правила построения двойственной задачи для задачи ЛП в любой форме (не обязательно канонической). Приведем эти правила.

1. Каждому основному ограничению прямой задачи ставим в соответствие двойственную переменную.

2. max (min) заменяем на min (max).

3. $A \to A'$, $b \leftrightarrow c$.

4. *а*) ***При переходе от задачи на максимум к задаче на минимум***, если на переменную прямой задачи наложено ограничение ≥ 0 (≤ 0), тогда в двойственной задаче соответствующее основное ограничение имеет тот же знак $\geq$ ($\leq$). *При переходе от задачи* (2.6) *к* (1.15), *считая* (2.6) *прямой, а* (1.15) *двойственной к ней, прямым ограничениям в* (2.6) y_2, $y_4 \geq 0$ ($y_3 \leq 0$) *соответствует в задаче* (1.15) *для второго и четвертого основных ограничений тот же знак* $\geq$ (*для третьего — знак* $\leq$). Наоборот, если основное ограничение прямой задачи имеет знак $\geq$ ($\leq$), то в двойственной задаче прямое ограничение на соответствующую переменную имеет противоположный знак $\leq$ ($\geq$). *При переходе от задачи* (2.6) *к* (1.15) *в* (2.6) *первое основное ограничение имеет знак* $\leq$ (*а второе — знак* $\geq$), *в то же время в двойственной задаче* (1.15) *имеем* $x_1 \geq 0$ ($x_2 \leq 0$). *б*) ***При переходе от задачи на минимум к задаче на максимум*** все знаки, указанные выше для двойственной задачи, меняются на противоположные. (*Ср. самостоятельно при переходе от задачи* (1.15) *к двойственной задаче* (2.6).) *в*) Наконец, в *обоих случаях*, если на переменную нет прямого ограничения, то соответствующее основное ограничение двойственной задачи имеет знак =, и, наоборот, если основное ограничение прямой задачи имеет знак =, тогда в двойственной задаче для соответствующей двойственной переменной нет прямого ограничения. *В задаче* (1.15) *на* x_3 *нет прямого ограничения, а в двойственной задаче* (2.6) *третье основное ограничение имеет знак равенства.*

Задания

2.1. Построить двойственные задачи к задачам ЛП, сформированным в заданиях 1.1—1.15, 1.17, 1.18, 1.20.

2.2. Теория двойственности

В дальнейшем план исходной задачи будем называть ***прямым планом***, план двойственной задачи — ***двойственным планом***. ***Множество прямых планов*** обозначим X, ***множество двойственных планов*** — Y. Как уже указывалось в п. 2.1, для любой задачи ЛП можно построить двойственную задачу. Здесь же мы везде подразумеваем двойственные задачи для задач ЛП в канонической форме (хотя все утверждения с некоторыми изменениями будут справедливы и для любых задач ЛП).

Обозначим через x^0, y^0 оптимальные планы прямой (2.1) и двойственной (2.2) задач. Прямая и двойственная задачи ЛП имеют не только общие параметры. Их планы и решения связаны между собой. Приведем основные соотношения, устанавливающие эту связь. Они составляют ***теорию двойственности***. В основе этой теории лежат теоремы существования и двойственности, которые, в свою очередь, вытекают из следующего утверждения.

Основное неравенство теории двойственности: на каждой паре из прямого x и двойственного y планов выполняется неравенство $\varphi(x) \le \psi(y)$.

Теорема 2.1 (существования). *Для существования решения задачи ЛП необходимо и достаточно, чтобы не были пустыми множества прямых и двойственных планов.*

Теорема 2.2 (двойственности). *Для существования решения прямой задачи ЛП необходимо и достаточно, чтобы существовало решение двойственной задачи, при этом значения целевых функций на оптимальных планах одинаковы*: $\varphi_{\max} = \psi_{\min}$.

Следствие 2.1 (достаточное условие несовместности ограничений). *Если двойственная задача не разрешима в силу неограниченности целевой функции на множестве планов, тогда множество прямых планов пусто.*

Следствие 2.2 (достаточное условие оптимальности). *Если на некоторых прямом x^* и двойственном y^* планах выполняется равенство* $\varphi(x^*) = \psi(y^*)$, то x^*, y^* *— решения задач* (2.1) *и* (2.2) *соответственно.*

Замечание 2.3. Можно показать, что $b'u = c'x^0$, где u — вектор потенциалов, соответствующий оптимальному плану x^0, т. е., согласно следствию 2.2, u — оптимальный двойственный план.

Следующее утверждение касается задач не в канонической, а в любой другой форме, в частности в нормальной.

Следствие 2.3 (условия дополняющей нежесткости). *Пусть x^0, y^0 — решения прямой и двойственной задач. Если какое-то основное ограничение-неравенство прямой задачи на оптимальном плане пассивно (т. е. имеет строгий знак неравенства), то соответствующая координата двойственного оптимального плана нулевая. И наоборот, если какая-либо координата двойственного плана ненулевая, то соответствующее основное ограничение-неравенство прямой задачи на оптимальном плане активно (т. е. имеет знак равенства* =). *Математически это можно записать следующим образом:*

$$y_i^0(a_{i1}x_1^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 - b_i) = 0, \; i = \overline{1,m}. \qquad (2.7)$$

Замечание 2.4. Поскольку прямая и двойственная задачи взаимно двойственны, то следствие 2.3 справедливо, если поменять в нем местами прямую и двойственные задачи, т. е. справедливо равенство

$$x_j^0(c_j - a_{1j}y_1^0 - \ldots - a_{mj}y_m^0) = 0, \ j = \overline{1,n}. \tag{2.8}$$

При небольших размерах задач ЛП теория двойственности иногда помогает решать задачи ЛП (или хотя бы находить двойственный оптимальный план, если известен прямой оптимальный план). Так, оптимальный двойственный план y^0 можно извлечь из последней таблицы прямого симплекс-метода, соответствующего оптимальному прямому плану x^0. Из теории двойственности следует, что оптимальный двойственный план y^0 равен вектору потенциалов u, соответствующему оптимальному плану x^0. А поскольку $\Delta_j = c_j - u'a_j$, то i-я координата $y_i^0 = c_{k_i} - \Delta_{k_i}$, где $k_i \in J_Б$, $J_Б$ — базисное множество индексов первоначальной таблицы ($a_{k_i} = e_i$, e_i — единичный вектор условий: $e_i = (0; \ldots; 0; 1; 0; \ldots; 0)$).

Пример 2.3. Рассмотрим задачу (1.1). Двойственная задача к ней имеет вид (2.4). Согласно п. 1.7, в табл. 1.19 $J_Б = \{3, 4, 5\}$, т. е. $a_3 = e_1$, $a_4 = e_2$, $a_5 = e_3$. В табл. 1.21, соответствующей оптимальному плану $x^0 =$ $= (75; 8; 0; 0; 30)$, $y_1^0 = c_3 - \Delta_3 = 1$; $y_2^0 = c_4 - \Delta_4 = 9$; $y_3^0 = c_5 - \Delta_5 = 0$.

Оптимальный двойственный план y^0 можно было бы найти по известному прямому оптимальному плану x^0. Для этого используем соотношения двойственности, в частности следствие 2.3. Поскольку $x_1^0 = 75 \neq 0$, $x_2^0 = 8 \neq 0$, то, согласно равенствам (2.8), первое и второе основные ограничения двойственной задачи должны быть активными на оптимальном двойственном плане y^0. Далее, поскольку третья свободная переменная ненулевая: $x_5^0 = 30 \neq 0$, то третье основное ограничение прямой задачи на оптимальном плане пассивно, а тогда, согласно равенствам (2.7), третья переменная двойственного оптимального плана нулевая. В итоге получим систему уравнений для отыскания оптимального двойственного плана:

$$\begin{cases} 8y_1^0 + 8y_2^0 + y_3^0 = 80, \\ 25y_1^0 + 5y_2^0 + 5y_3^0 = 70, \\ y_3^0 = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Решая эту систему, находим: $y_1^0 = 1$, $y_2^0 = 9$, $y_3^0 = 0$.

Замечание 2.5. Если мы заранее не знаем, что x^0 — оптимальный план, то, проверив, является ли вектор x^0 планом, составляем систему

(2.9), находим y^0, а затем подсчитываем значения $c'x^0$ и $b'y^0$. И если $c'x^0 = b'y^0$, то, согласно следствию 2.2, x^0, y^0 — оптимальные планы.

2.3. Физический смысл двойственных переменных. Анализ чувствительности

Помимо указанных в п. 2.2 соотношений двойственности, имеются и другие, одно из которых следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $x^0 = x_b^0$ — оптимальный невырожденный базисный план канонической задачи* (2.1), *соответствующий вектору b. Тогда оптимальный двойственный план единственный, а его координаты y_i^0 удовлетворяют равенствам*

$$y_i^0 = \frac{\partial(c'x_b^0)}{\partial b_i}, \ i = \overline{1,m}. \qquad (2.10)$$

Таким образом, лемма 2.1 дает ответ на первый вопрос, поставленный в п. 2.1. В терминах производственной задачи равенства (2.10) означают, что y_i^0 — ***мера (степень) чувствительности*** максимальной прибыли к изменению i-го ресурса: если $y_i^0 > 0$, то увеличение объема i-го ресурса ведет к увеличению максимальной прибыли и тем эффективнее, чем больше y_i^0; при $y_i^0 < 0$ к увеличению максимальной прибыли ведет уменьшение объема i-го ресурса.

Из (2.10) следует, что приращение максимального значения целевой функции равно

$$\Delta\varphi_{\max} = y_1^0 \Delta b_1 + \ldots + y_m^0 \Delta b_m. \qquad (2.11)$$

Заметим, однако, что все указанные рассуждения справедливы не при любых изменениях ресурсов, а лишь при некоторых в окрестности заданного значения вектора b. Ниже указан метод нахождения пределов изменения вектора ресурсов (см. пример 2.6).

Итак, чтобы провести анализ решения задачи ЛП, необходимо знать оптимальный двойственный план, который можно найти, как было показано в п. 2.2.

Пример 2.4. Вернемся к задаче (1.1). В примере 2.3 найден оптимальный двойственный план для этой задачи: $y^0 = (1;\ 9;\ 0)$. Таким образом, исходя из физического смысла двойственных переменных, получаем, что изменение третьего "ресурса" в окрестности $b_3 = 145$ не ведет вообще к изменению максимального значения целевой функции (это видно и из рис. 1.1: изменение b_3 в пределах от 115 до $+\infty$ не влияет на максимальное значение целевой функции). В то же время увеличение b_1 и b_2 ведет к увеличению максимума целевой функции, причем вариации b_2 ведут к большему изменению целевой функции, чем такие же вариации b_1. Другими словами, согласно физическому смыслу ресурсов примера 1.1, получаем, что использование физического труда более эффективно, поскольку приносит дополнительную прибыль в 9 д. е. на каждый дополнительный час рабочего времени. Увеличение сырья на 1 кг дает дополнительную прибыль в 1 д. е., т. е. в $9:1=9$ раз меньшую, чем при увеличении на 1 ч физического труда.

То же можно сказать и для задачи о рационе (пример 1.10), для которой из табл. 1.28 находим: $y_1^0=c_6-\Delta_6=0$, $y_2^0=c_7-\Delta_7=-1$. Здесь уменьшение нижнего предела второго полезного питательного вещества в окрестности $b_2=2$ ведет к уменьшению стоимости рациона, в то время как незначительные изменения нижнего предела первого полезного питательного вещества не влияют на стоимость рациона.

Как известно, для базисного плана основное ограничение $Ax=b$ принимает вид $A_Б x_Б=b$. Следовательно, базисный план можно построить по базисной матрице $A_Б$: $x_Б=A_Б^{-1}b$, $x_Н=0$. В связи с этим вместо определения базисного плана, данного в п. 1.4, можно ввести сначала понятие базисной матрицы как неособой $(m\times m)$-подматрицы $A_Б$ матрицы A, удовлетворяющей неравенству $A_Б^{-1}b\geq 0$, а затем построить базисный план.

Используем этот факт для того, чтобы проанализировать влияние изменения ресурсов на изменение целевой функции, другими словами, провести ***анализ чувствительности*** по вектору ресурсов.

Пример 2.5. Опять обратимся к задаче (1.1). Ее оптимальный план приведен в табл. 1.21. В этой же таблице базисная матрица $A_Б=(a_2, a_1, a_5)$. Обратная к ней находится на месте единичных векторов условий канонической задачи (1.17), поскольку $A_Б^{-1}(a_3,\ a_4,\ a_5)=A_Б^{-1}E=A_Б^{-1}$. Таким образом, из табл. 1.21 выписываем

$$A_Б^{-1}=\begin{pmatrix} 1/20 & -1/20 & 0\\ -1/32 & 5/32 & 0\\ -7/32 & 3/32 & 1\end{pmatrix}.$$

Как уже указывалось выше, базисные координаты базисного плана — это координаты вектора b в текущем базисе, т. е. $x_Б=A_Б^{-1}b$. Используем это. Изменим в задаче (1.1) ресурс b_1. Положим $b_1=640$, т. е.

$\Delta b_1=-160$. Тогда новый вектор $\bar{b}=(640;640;145)$. Легко подсчитать, что $A_Б^{-1}\bar{b}=(0;\ 80;\ 65)\geq 0$. Таким образом, для задачи (1.17) с новым вектором $\bar{b}$ план $x_{\bar{b}}=(80;0;0;0;65)$ будет базисным. Более того, он оптимальный, поскольку, подставив $\bar{b}$ в табл. 1.21 вместо вектора b, будем иметь те же $\Delta_j\leq 0$. Подсчитаем значение целевой функции на этом плане: $\varphi(x_{\bar{b}})=6400$. При этом приращение целевой функции по сравнению со значением на плане x_b^0 равно $\Delta\varphi_1=y_1^0\cdot\Delta b_1=1\cdot(-160)=-160$.

Изменим теперь ресурс b_2, положив $\tilde{b}_2=480$, т. е. $\Delta b_2=-160$. Новый вектор $\tilde{b}=(800;\ 480;\ 145)$. Для него имеем $A_Б^{-1}\tilde{b}=(16;\ 50;\ 15)>0$, т. е. план $x_{\tilde{b}}=(50;\ 16;\ 0;\ 0;\ 15)$ базисный и оптимальный, причем $\varphi(x_{\tilde{b}})=5120$, $\Delta\varphi_2=y_2^0\cdot\Delta b_2=9\cdot(-160)=-1440$. Как видим, при уменьшении второго ресурса b_2 на 160 ед. целевая функция уменьшилась в $(-1440):(-160)=9$ раз быстрее, чем при уменьшении на столько же единиц первого ресурса b_1, о чем было сказано выше. То же получим при увеличении ресурсов b_1 и b_2. На языке производственной задачи можем сказать, что эффект будет в 9 раз большим, если есть возможность привлечения дополнительного физического труда, чем увеличение на столько же единиц сырья.

Эта же задача позволяет выяснить, оправдано ли привлечение сверхурочного труда, за каждый час которого необходимо дополнительно доплачивать, например, 3 д. е. Если использовать 100 ч сверхурочного труда, то прибыль от реализации дополнительной продукции будет равна $\Delta\varphi=y_2^0\cdot\Delta b_2=9\cdot 100=900$ д. е., а доплата за сверхурочные часы равна 300 д. е., т. е. чистая прибыль равна $900-300=600$ д. е. Следовательно, предприятию выгодно привлекать рабочих на сверхурочные работы.

Как указывалось выше, все эти рассуждения справедливы не для любых изменений вектора ресурсов, а, как теперь легко видеть, только для тех, для которых $A_Б^{-1}(b+\Delta b)\geq 0$, где $A_Б$ соответствует оптимальному плану x^0. При выполнении условия $A_Б^{-1}(b+\Delta b)\geq 0$ оптимальный двойственный план y^0 будет оставаться одним и тем же (говорят, ***устойчивым к изменению вектора ресурсов***). Оптимальный план $x_{b+\Delta b}^0$, а также максимальное значение φ_{max} при этом могут измениться, но базис и двойственный оптимальный план y^0 останутся неизменными.

Пример 2.6. Продолжим анализ задачи (1.1). Найдем пределы изменения вектора ресурсов, для которых двойственный оптимальный план остается неизменным. Для канонической формы (1.17) этой задачи имеем

$$A_Б^{-1}(b+\Delta b)=\begin{pmatrix} 1/20 & -1/20 & 0 \\ -1/32 & 5/32 & 0 \\ -7/32 & 3/32 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 800+\Delta b_1 \\ 640+\Delta b_2 \\ 145+\Delta b_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8+(1/20)\Delta b_1-(1/20)\Delta b_2 \\ 75-(1/32)\Delta b_1+(5/32)\Delta b_2 \\ 30-(7/32)\Delta b_1+(3/32)\Delta b_2+\Delta b_3 \end{pmatrix}\geq 0$$

или

$$\begin{aligned} (1/20)\Delta b_1-(1/20)\Delta b_2 \quad &\geq -8, \\ -(1/32)\Delta b_1+(5/32)\Delta b_2 \quad &\geq -75, \\ -(7/32)\Delta b_1+(3/32)\Delta b_2+\Delta b_3 &\geq -30. \end{aligned}$$

Решая последнюю систему неравенств, получим следующие результаты.

а) Полагая $\Delta b_2=\Delta b_3=0$, из первого неравенства находим $\Delta b_1\geq -160$, из второго — $\Delta b_1\leq 2400$, из третьего — $\Delta b_1\leq 137\frac{1}{7}$, т. е. при неизменных ресурсах b_2 и b_3 и изменении b_1 в пределах от 640 до $937\frac{1}{7}$ двойственный оптимальный план остается постоянным, и поскольку $y_1^0=1>0$, то при увеличении сырья от 800 до $937\frac{1}{7}$ кг максимальная прибыль будет увеличиваться, а при уменьшении от 800 до 640 кг — уменьшаться.

б) При $\Delta b_1=0$, $\Delta b_3=0$ находим: $-320\leq\Delta b_2\leq 160$, т. е. при неизменных b_1 и b_3 и $320\leq b_2\leq 800$ оптимальный двойственный план не меняется, и поскольку $y_2^0=9>0$, то, как и в случае *а*, увеличение физического труда от 640 до 800 ч ведет к увеличению максимальной прибыли, а уменьшение от 640 до 320 ч — к уменьшению максимальной прибыли.

в) При $\Delta b_1=\Delta b_2=0$ находим: $\Delta b_3\geq -30$. Таким образом, при неизменных b_1 и b_2 и $115\leq b_3<\infty$ оптимальный двойственный план постоянен, а поскольку $y_3^0=0$, то в этом случае максимальная прибыль не меняется.

При одновременном изменении всех ресурсов можно проверить, выполняется ли условие $A_Б^{-1}(b+\Delta b)\geq 0$. И если оно выполняется, то оптимальный двойственный план остается прежним, а изменение максимального значения целевой функции определяется равенством (2.11). Пусть, например, $\Delta b_1 = 160$, $\Delta b_2 = -160$, $\Delta b_3 = 50$. Тогда получим

$$A_Б^{-1}(b+\Delta b)=\begin{pmatrix} 1/20 & -1/20 & 0 \\ -1/32 & 5/32 & 0 \\ -7/32 & 3/32 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 960 \\ 480 \\ 195 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 24 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix}>0.$$

Оптимальный прямой план равен x^0 = (45; 24; 0; 0; 30). Поскольку $A_Б^{-1}(b+\Delta b)>0$, то двойственный оптимальный план прежний: y^0 = (1; 9; 0), а максимальная прибыль при этом изменится на величину $\Delta\varphi = =1\cdot 160-9\cdot 160=-8\cdot 160=-1280$, т. е. уменьшится на 1280 д. е. и будет равна $\varphi_{\max}$ = 5280 д. е.

Можно исследовать и одновременное изменение всех трех координат вектора b. Считая b_1, b_2, b_3 переменными, перепишем неравенство $A_Б^{-1}b\geq 0$ в виде векторного уравнения $A_Б^{-1}b-a=0$, где $a=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, $\alpha_i\geq 0$, $i=\overline{1,3}$, или, по-другому, $b=A_Б a$, $a\geq 0$. Придавая переменным α_i, $i=\overline{1,3}$, различные неотрицательные значения, получим совокупность всех значений вектора ресурсов b, при которых будет один и тот же оптимальный двойственный план. Для задачи (1.1) (или (1.17)) имеем

$$b=\begin{pmatrix} 25 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},\ \alpha_i\geq 0,\ i=\overline{1,3},$$

или $b_1=25\alpha_1+8\alpha_2$, $b_2=5\alpha_1+8\alpha_2$, $b_3=5\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_i\geq 0$, $i=\overline{1,3}$.

Возьмем теперь $\Delta b_1=160$, $\Delta b_2=-180$, $\Delta b_3=0$, т. е. $\bar{\bar{b}}=(980;\ 460;\ 145)$. Тогда получим $x_Б=A_Б^{-1}\bar{\bar{b}}=\left(25;\ \dfrac{1340}{32};\ -\dfrac{700}{32}\right)$. Поскольку $x_5 = =-\dfrac{700}{32}<0$, то $x=\left(\dfrac{1340}{32};\ 25;\ 0;\ 0;\ -\dfrac{700}{32}\right)\notin X$. Как поступить в этом случае? Надо ли решать задачу заново или можно каким-то образом использовать полученное решение с прежним вектором ресурсов? Оказывается, второе более рационально, в чем помогает двойственный симплекс-метод (см. п. 2.6).

Задания

2.2. По решению задач 1.1—1.15, 1.17, 1.18, 1.20 найти оптимальный двойственный план, если он существует, и, исходя из физического смысла оптимального двойственного плана, провести анализ чувствительности. Для задач, имеющих решение, установить границы изменения вектора ресурсов, при которых устойчив двойственный оптимальный план. Взяв одно из значений вектора ресурсов из пределов устойчивости оптимального двойственного плана, найти оптимальный прямой план и изменение максимального значения целевой функции.

2.4. Основные определения двойственного симплекс-метода. Критерий оптимальности двойственного базисного плана

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме (2.1): $\varphi(x) = c'x \to \max$, $Ax = b$, $x \geq 0$ $(b \geq 0)$. Согласно п. 2.1, двойственная к ней имеет вид $\psi(y) = b'y \to \min$, $A'y \geq c$.

Двойственный план называется ***базисным с двойственной базисной*** $m \times m$***-матрицей*** $A_Б$, если $\det A_Б \neq 0$ и на векторе y ограничения двойственной задачи имеют вид

$$A'_Б y = c_Б, \quad A'_Н y \geq c_Н. \tag{2.12}$$

Двойственный базисный план называется ***невырожденным***, если на нем $A'_Н y > c_Н$.

Исходя из определения вектора потенциалов и оценок в прямой задаче (см. § 1) и приведенного определения двойственного базисного плана, получаем, что двойственный базисный план — это не что иное, как вектор потенциалов, построенный по двойственной базисной матрице $A_Б$, т. е. такой невырожденной матрицей $A_Б$, для которой $\Delta_Н \leq 0$, где $\Delta_Н$ — вектор небазисных оценок, построенных по этой же матрице. А тогда двойственный базисный план не вырожден, если $\Delta_Н < 0$. Заметим, однако, что вектор x, для которого $A_Б x_Б + A_Н x_Н = b$, может не быть прямым базисным планом, более того, может не удовлетворять прямым ограничениям, т. е. не быть планом прямой задачи. Несмотря на это, оставим определение оценок прежним. В связи с этим введем следующие понятия.

Вектор $æ \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющий основным ограничениям прямой задачи, называется ***псевдопланом***. Вектор æ с координатами $æ_Б = A_Б^{-1} b$, $æ_Н = 0$, подсчитанный по двойственной базисной матрице $A_Б$, называется ***базисным псевдопланом*** задачи (2.1).

Из последнего определения следует, что если базисный псевдоплан æ удовлетворяет прямым ограничениям, то он является базисным планом прямой задачи, а соответствующий вектор оценок — двойственным базисным планом. Более того, они оптимальные, о чем говорит следующее утверждение.

Теорема 2.3 (критерий оптимальности). *Для оптимальности двойственного базисного плана y^0 достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$æ_Б \geq 0. \tag{2.13}$$

Базисный псевдоплан, соответствующий оптимальному двойственному плану y^0, является оптимальным прямым базисным планом: $x^0 = æ$.

Теорема 2.4 (достаточное условие отсутствия прямых планов). *Если для некоторого $i_0 \in J_Б$ выполняются соотношения $æ_{i_0} < 0$, $x_{i_0 j} \geq 0$, $j \in J_Н$, где $x_{i_0 j}$ — i_0-я координата вектора a_j в текущем базисе, тогда двойственная целевая функция неограниченно убывает и, согласно следствию 2.1, множество прямых планов пусто.*

2.5. Алгоритм двойственного симплекс-метода. Табличная реализация двойственного симплекс-метода

Алгоритм двойственного симплекс-метода состоит в следующем.

Пусть имеется некоторая двойственная базисная матрица $A_Б$.

1. Решая систему уравнений $A'_Б u = c_Б$, находим вектор потенциалов u.
2. Подсчитываем оценки $\Delta_j = c_j - u' a_j$, $j \in J_Н$.
3. Находим базисный псевдоплан, для чего полагаем $æ_Н = 0$ и определяем $æ_Б = A_Б^{-1} b$.
4. Проверяем критерий оптимальности (2.13). Если он выполняется, решение задачи заканчивается: выписываем оптимальный прямой план $x_Б^0 = æ_Б$, $x_Н^0 = 0$. Если хотя бы одна координата базисного псевдоплана отрицательна, переходим к следующему шагу.
5. Проверяем достаточное условие отсутствия планов. Если это условие выполняется, решение задачи заканчиваем. Если же для всех $æ_i < 0$, $i \in J_Б$, найдется хотя бы одна координата $x_{ij_i} < 0$, тогда переходим к следующему шагу.
6. Определяем $\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min\limits_{\substack{j \in J_Н \\ x_{i_0 j} < 0}} (\Delta_j / x_{i_0 j}) = \Delta_{j_0} / x_{i_0 j_0}$. Номер i_0 выбираем либо любым из множества индексов $J_Б^1$, для которых не выполняются

условия оптимальности, либо из условия $æ_{i_0} = \min\limits_{i \in J_Б^1} æ_i$. Заменяем в базисе вектор a_{i_0} на новый вектор a_{j_0} и переходим к шагу 1.

При табличной реализации двойственного симплекс-метода построение новых двойственного базисного плана (или, что то же самое, вектора потенциалов), базисного псевдоплана и координат векторов a_j в новом базисе производится, как и при реализации прямого симплекс-метода, по элементу $x_{i_0 j_0}$. В таблице прямого симплекс-метода отбрасываем $c_Б$-столбец, θ-столбец, c-строку, добавляем σ-строку. Таким образом, как и в прямом симплекс-методе, i_0-я строка называется ***ведущей строкой***, j_0-й столбец — ***ведущим столбцом***, элемент $x_{i_0 j_0}$ — ***ведущим элементом***. Построение новой таблицы производится по тому же правилу прямоугольника, как и для прямого симплекс-метода.

При решении задач ЛП двойственным симплекс-методом наиболее сложным представляется построение начального двойственного базисного плана, или, что то же самое, выбор двойственной базисной матрицы. Однако для некоторых задач начальный двойственный базисный план строится просто. Одной из таких задач является ***задача о рационе*** или подобные ей задачи, например задачи о диете, о смесях и др. (см. задачу (1.3) или в общем виде задачу (1.7)):

$$c'x \to \min, \; Ax \geq b, \; x \geq 0. \tag{2.14}$$

Особенности этой задачи состоят в том, что вектор c неотрицательный, а основные ограничения имеют знак неравенства $\geq$. Это позволяет легко построить начальный двойственный базисный план.

Сведем задачу (2.14) к канонической форме

$$-c'x \to \max, \; Ax - x_{СВ} = b, \; x \geq 0, \; x_{СВ} \geq 0.$$

Двойственной к ней будет задача

$$b'y \to \min, \; A'y \geq -c, \; -y \geq 0.$$

В качестве двойственной базисной матрицы берем $A_Б = (a_{n+1} = -e_1, \ldots, a_{n+m} = -e_m) = -E$, поскольку $\Delta_Б = 0$, $\Delta_Н = -c \leq 0$. Вектор $y = u = 0$ будет двойственным базисным планом. Базисный псевдоплан имеет вид $æ_Б = -b$, $æ_Н = 0$.

Пример 2.7. Решим задачу о рационе (1.3) (см. пример 1.3). Каноническая форма для нее имеет вид (1.32). Двойственная задача:

$$\psi = y_1 + 2y_2 \to \min, \; \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq -5, \\ y_1 + y_2 \geq -1, \\ 2y_1 + y_2 \geq -3, \end{cases} \quad y_1 \leq 0, \quad y_2 \leq 0.$$

Вектор $y = u = (0;\ 0)$ будет двойственным базисным планом с двойственной базисной матрицей $A_Б = (a_4,\ a_5) = -E$. Вектор оценок $\Delta = (-5;\ -1;\ -3;\ 0;\ 0)$, базисный псевдоплан $æ = (0;\ 0;\ 0;\ -1;\ -2)$. Строим двойственную симплекс-таблицу (табл. 2.1). Поскольку $A_Б = -E$, то все векторы условий в ней с обратным знаком.

Таблица 2.1

Базис	$æ_Б$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_4	−1	−1	−1	−2	1	0
a_5	−2	−2	−1	−1	0	1
Δ		−5	−1	−3	0	0
σ		5/2	1	3		

$\Uparrow$ $\Rightarrow$

Таблица 2.2

Базис	$æ_Б$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_4	1	1	0	−1	1	−1
a_2	2	2	1	1	0	−1
Δ		−3	0	−2	0	−1

Поскольку в табл. 2.1 $æ_4 = -1 < 0$, $æ_5 = -2 < 0$, то двойственный базисный план не оптимальный. Берем $æ_{i_0} = \min\limits_{i=4,5} æ_i = -2$. Строка a_5 будет ведущей. Находим $\sigma_j = \Delta_j / x_{i_0 j}$, $x_{i_0 j} < 0$. Затем берем $\sigma^0 = \sigma_{j_0} = \min \sigma_j = \sigma_2 = 1$. Столбец a_2 будет ведущим. На пересечении имеем ведущий элемент $x_{52} = -1$. По этому элементу строим новый план.

В табл. 2.2 все $æ_i > 0$. Получили оптимальный двойственный план для канонической задачи (1.32). Он находится в строке Δ под $a_4 = -e_1$, $a_5 = e_2$ и получается из равенств $\Delta_4 = 0 = -c_4 - y^{0'} a_4 = y^{0'} e_1 = y_1^0$, $\Delta_5 = -1 = y_2^0$: $y^0 = (0;\ -1)$. Но главное в другом: получили прямой оптимальный план $x^0 = (0;\ 2;\ 0;\ 1;\ 0)$ для задачи (1.32), а для исходной задачи (1.3) он имеет вид $x^0 = (0;\ 2;\ 0)$. Минимальное значение целевой функции равно $\varphi_{\min} = 2$.

Как видим, с помощью двойственного симплекс-метода для задачи (1.3) получили оптимальный план за одну итерацию, в то время как при использовании двухфазного симплекс-метода потребовалось три итерации.

Пример 2.8.

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ -2x_2 - x_3 \geq 3, \\ x_1 + x_3 \geq 5, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Составляем двойственную симплекс-таблицу 2.3. Поскольку в табл. 2.3 все $æ_i < 0$, то двойственный базисный план $y = (0;\ 0;\ 0)$ не оптимальный. Но для $æ_5 = -3 < 0$ имеем $x_{5i} \ge 0$, $i \in J_{\text{Н}} = \{1,\ 2,\ 3\}$, т. е. выполняются условия теоремы 2.4, согласно которой ограничения задачи (2.15) несовместны: $X = \varnothing$.

Таблица 2.3

Базис	$æ_Б$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_4	–3	–1	–1	0	1	0	0
a_5	–3	0	2	1	0	1	0
a_6	–5	–1	0	–1	0	0	1
Δ		–3	–1	–2	0	0	0

Замечание 2.6. Как и для прямого симплекс-метода, вместо табличной реализации можно использовать мультипликативный метод для решения примеров 2.7, 2.8. Предоставляем это сделать читателю в качестве упражнения.

Задания

2.3. Решить двойственным симплекс-методом задачу задания 1.14.

2.4. Из следующих целевых функций *а* и ограничений *б* сформировать задачи ЛП, отбросив, где необходимо, в целевых функциях лишние переменные, и решить эти задачи двойственным симплекс-методом. Указать оптимальный двойственный план, если он существует.

а) Целевые функции:

1. $\varphi = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min.$
2. $\varphi = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min.$
3. $\varphi = 40x_1 + 30x_2 + 20x_3 \to \min.$
4. $\varphi = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min.$
5. $\varphi = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min.$
6. $\varphi = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min.$
7. $\varphi = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \min.$
8. $\varphi = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \min.$
9. $\varphi = 11x_1 + 8x_2 \to \min.$
10. $\varphi = 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \min.$
11. $\varphi = x_1 + 2x_2 \to \min.$
12. $\varphi = 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 \to \min.$
13. $\varphi = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min.$
14. $\varphi = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min.$
15. $\varphi = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \min.$
16. $\varphi = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min.$
17. $\varphi = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 10x_4 \to \min.$
18. $\varphi = 8x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min.$
19. $\varphi = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min.$
20. $\varphi = 10x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to \min.$
21. $\varphi = 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \to \min.$
22. $\varphi = 5x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min.$

б) Ограничения:

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ x_1 + x_3 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ 2,\ 3.$

2. $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 4, \end{cases}$$
$x_j \ge 0,\ \ j = 1,\ 2,\ 3.$

3. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3\ge 5, \\ x_1+x_2+2x_3\ge 10, \\ -2x_1+3x_2-x_3\ge 2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

4. $\begin{cases} 5x_1+\ \ x_2\ge 10, \\ x_1+\ \ x_2\ge\ 6, \\ 4x_1+9x_2\ge 36, \end{cases}$
$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$

5. $\begin{cases} x_1-6x_2+3x_3\ge 6, \\ -x_1+2x_2\ge 5, \\ -x_1+x_2-x_3\ge 2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

6. $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3\ge 1, \\ 3x_1+2x_2-x_3\ge 2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

7. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3\ge 2, \\ -3x_1+7x_2+10x_3\ge 1, \\ -x_1+x_2+x_3\ge 1, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

8. $\begin{cases} 2x_1-x_2\qquad\ge 4, \\ -x_1+x_2-x_3\ge 5, \\ -x_1-x_2+x_3\ge 4, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

9. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+4x_4\ge 1, \\ -3x_1+x_2+2x_3-x_4\ge 3, \\ -x_1-2x_2-x_3+\frac{1}{2}x_4\ge 2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

10. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3\ge 5, \\ x_1+x_2+2x_3\ge 10, \\ -2x_1+3x_2-x_3\ge 2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

11. $\begin{cases} 5x_1-x_2+x_3-x_4\ge 5, \\ -x_1+3x_2-4x_3-2x_4\ge 4, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+x_4\ge 1, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

12. $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3-x_4\ge 2, \\ 2x_1-4x_2+2x_3+2x_4\ge 2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

13. $\begin{cases} x_1+x_2-32x_3\ge 3, \\ x_1-x_2+x_3\ge 1, \\ 2x_1+x_2-x_3\ge 1, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

14. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3\ge 1, \\ 2x_1+x_2-x_3\ge 2, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

15. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+5x_4\ge 5, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4\ge 2, \\ x_1+x_2+x_4\ge 1, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

16. $\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_4\ge 12, \\ x_1-2x_3\ge 2, \\ x_1+x_2-3x_4\ge 1, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

17. $\begin{cases} 2x_1\qquad-\ x_3\qquad\ge 2, \\ \qquad x_2-3x_3+\ x_4\ge 1, \\ 3x_1\qquad\qquad-2x_4\ge 3, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4}.$

18. $\begin{cases} -2x_1-x_2+x_3\ge 5, \\ -x_1+x_2\ge 1, \\ x_2-3x_3\ge 3, \end{cases}$
$x_j\ge 0,\ j=1,2,3.$

19. $\begin{cases} x_1 - x_3 \ge 1, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ -x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, 3.$

20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 \ge 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \ge 1, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4}.$

21. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 \ge 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 \ge 1, \\ 2x_1 - x_4 \ge 4, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4}.$

22. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ 3x_2 - x_3 \ge 3, \\ x_1 + x_3 \ge 5, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, 3.$

2.6. Решение задачи при изменении вектора ресурсов

Пример 2.9. Продолжим анализ решения задачи (1.1). В конце п. 2.3 для нового вектора $\bar{\bar{b}} = (960; \ 460; \ 145)$ в производственной задаче (1.1) мы не смогли указать оптимальный план сразу, поскольку оказалось, что $A_Б^{-1}b$ не удовлетворяет условию неотрицательности. Теперь мы можем, не решая задачу заново, найти оптимальный план с помощью двойственного симплекс-метода.

Исходя из определения псевдоплана, мы имеем $æ_5 < 0$ (см. п. 2.3). На данном шаге двойственный план не оптимальный. Требуется построить новый. Для этого используем табл. 1.21. В ней базисная матрица $A_Б = (a_2, a_1, a_5)$. Поэтому после замены элементов столбца b координатами вектора $A_Б^{-1}b$ получим начальную табл. 2.4 для применения двойственного симплекс-метода.

Таблица 2.4

Базис	$æ_Б$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_2	25	0	1	1/20	−1/20	0	
a_1	1340/32	1	0	−1/32	5/32	0	
a_5	−700/32	0	0	−7/32	3/32	1	⇒
Δ		0	0	−1	−9	0	
σ				32/7			
				⇑			

Одна итерация двойственного симплекс-метода, примененная к табл. 2.4, приводит к табл. 2.5 с оптимальным планом $x^0_{\bar{b}} = (45; \ 20)$ для задачи (1.1) с вектором $\bar{b}$. При этом $\varphi_{max} = 5000$.

Таблица 2.5

Базис	$æ_Б$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_2	20	0	1	0	–1/35	8/35
a_1	45	1	0	0	1/7	–1/7
a_3	100	0	0	1	–3/7	–32/7
Δ		0	0	0	–66/7	–32/7

Если теперь найдем приращение целевой функции $\Delta\varphi=5000-6560=-1560$, то оно не удовлетворяет соотношению $\Delta\varphi=y_1^0\Delta b_1+y_2^0\Delta b_2+y_3^0\Delta b_3$ $(-1560\neq 1\cdot 160-9\cdot 180=-1460)$, поскольку вариация $\|\Delta b\|$ выводит вектор ресурсов b за пределы устойчивости оптимального двойственного базисного плана исходной задачи. Из табл. 2.5 находим оптимальный двойственный план для новой задачи с вектором $\bar{b}$. Он находится так же, как и ранее, в Δ-строке под единичными векторами условий: $y_1^0=c_3-\Delta_3=0$; $y_2^0=c_4-\Delta_4=66/7$; $y_3^0=c_5-\Delta_5=32/7$.

Задания

2.5. Для задач 1.1—1.15, 1.17, 1.18, 1.20, взяв значение вектора ресурсов из-за пределов устойчивости оптимального двойственного плана, найденных в задании 2.2, найти оптимальный план, используя двойственный симплекс-метод, а также указать оптимальный двойственный план для задачи с новым вектором ресурсов.

2.7*. Анализ чувствительности при изменении вектора стоимости

Введем функцию $\gamma(c)=\max c'x$, $x\in X$, где X — множество планов задачи ЛП. Обозначим через $X^0(c)$ множество оптимальных планов. Функция $\gamma(c)$ характеризует зависимость максимального значения целевой функции от вектора стоимости. Множество $X^0(c)$ при каждом c является непустым выпуклым компактом. Напомним, что если $\Delta_j(c)<0$, $j\in J_Н$, то $X^0(c)$ состоит из единственного элемента (т. е. оптимальный план x^0 единственный, см. п. 1.9).

Обозначим через

$$\nu_i^+=\frac{\partial\gamma(c)}{\partial c_i^+},\quad \nu_i^-=\frac{\partial\gamma(c)}{\partial c_i^-} \tag{2.16}$$

правую и левую частные производные по c_i от функции $\gamma(c)$. Числа ν_i^+, ν_i^- называются ***правым*** и ***левым коэффициентами чувствительности*** целевой функции по i-й компоненте вектора стоимости.

Физический смысл коэффициентов чувствительности следует из определения (2.16): $\nu_i^+(\nu_i^-)$ — *скорость изменения максимального зна-*

чения целевой функции при изменении компоненты c_i (остальные компоненты вектора с фиксированы) в правой (левой) окрестности исходного значения.

Лемма 2.2. *Коэффициент чувствительности ν_i^+ (ν_i^-) равен максимальной (минимальной) i-й координате среди всех оптимальных планов задачи ЛП:*

$$\nu_i^+ = \max_{x_i \in X_i^0(c)} x_i, \qquad \nu_i^- = \min_{x_i \in X_i^0(c)} x_i, \qquad i = \overline{1,n},$$

где $X_i^0(c)$ — проекция множества $X^0(c)$ на ось Ox_i. Если оптимальный план x^0 единственный, то $\nu_i^+ = \nu_i^- = x_i^0$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть для вектора c найден оптимальный план x^0, например, с помощью симплекс-таблиц. Найдем $\overline{x}^0$ при измененном векторе $\overline{c} = c + \Delta c$. Поскольку другие параметры задачи не поменялись, то естественно воспользоваться последней симплекс-таблицей при нахождении x^0. Для этого в ней следует поменять вектор c на $\overline{c}$ и подсчитать $\Delta_j(\overline{c})$, $j \in J_{\text{Н}}$. Если план x^0 не вырожден, то условия

$$\Delta_j(\overline{c}) \le 0, \quad j \in J_{\text{Н}}, \tag{2.17}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $\overline{x}^0 = x^0$, т. е. план x^0 остался оптимальным и при новом векторе $\overline{c}$.

Соотношения (2.17) используют и для выяснения пределов изменения вектора c, в которых план x^0 не меняется (***устойчив по отношению к изменению вектора стоимости***).

Замечание 2.7. Если в векторе c меняются только небазисные координаты, то достаточно подсчитать только соответствующие оценки Δ_j.

Пример 2.10. Рассмотрим задачу (1.1). Ее решение представлено в табл. 1.21. Поскольку $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 < 0$, то оптимальный план $x^0 = (75;\ 8)$ единственный, а это означает, что $\nu_1^+ = \nu_1^- = \nu_1 = x_1^0 = 75$, $\nu_2 = 8$. Из смысла коэффициентов чувствительности следует, что максимальная прибыль предприятия в 9,375 раза ($\nu_1 : \nu_2$) чувствительнее к изменению прибыли на единицу продукции первого типа, чем второго.

Найдем пределы изменения вектора c по каждому типу продукции. Изменим вектор $c = (80;\ 70)$ на $\overline{c} = (80 + \Delta c_1;\ 70 + \Delta c_2)$. Из табл. 1.21 следует, что это базисные координаты вектора c. Из определения вектора потенциалов u для измененных значений вектора c получаем $\Delta u' = \Delta c_{\text{Б}}' A_{\text{Б}}^{-1}$. Тогда для небазисных оценок получаем $\Delta_j(\overline{c}) = \Delta_j(c) - \Delta u' a_j = \Delta_j(c) - \Delta c_{\text{Б}}' A_{\text{Б}}^{-1} a_j$. Таким образом, используя данные табл. 1.21 и условия оптимальности, получаем систему неравенств

$$\begin{aligned} \Delta_3(\overline{c}) &= -1-(1/20)\Delta c_2+(1/32)\Delta c_1 \le 0, \\ \Delta_4(\overline{c}) &= -9+(1/20)\Delta c_2-(5/32)\Delta c_1 \le 0. \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Фиксируя c_2 ($\Delta c_2 = 0$), получим $-57{,}6 \le \Delta c_1 \le 32$, т. е. при изменении прибыли на единицу продукции первого типа в пределах от 22,4 до 112 д. е. и неизменной прибыли на единицу продукции второго типа оптимальным остается выпуск $x^0 = (75;\ 8)$. Аналогично получаем, если фиксировать c_1 ($\Delta c_1 = 0$): $-20 \le \Delta c_2 \le 180$, т. е. при изменении прибыли на единицу продукции второго типа в пределах от 50 до 250 д. е. оптимальным планом будет $x^0 = (75;\ 8)$.

Можно рассмотреть и совместное изменение координат вектора c. Для этого перепишем неравенства (2.18) по-другому: $(1/20)\overline{c}_2 - -(1/32)\overline{c}_1 \ge 0$, $-(1/20)\overline{c}_2 + (5/32)\overline{c}_1 \ge 0$. Сведем их к равенствам $8\overline{c}_2 - 5\overline{c}_1 = =\alpha$; $-8\overline{c}_2 + 25\overline{c}_1 = \beta$; $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$. Решая эту систему относительно $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, получим $\overline{c}_1 = (\alpha+\beta)/20$, $\overline{c}_2 = (5\alpha+\beta)/32$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$. Придавая α, β любые неотрицательные значения, получим значения $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, для которых план $x^0 = (75;\ 8)$ будет оставаться оптимальным.

Таблица 2.6

$c_j \setminus c_Б$			115	70	0	0	0	
	Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	θ_i
70	a_2	8	0	1	1/20	–1/20	0	160 ⇒
115	a_1	75	1	0	–1/32	5/32	0	
0	a_5	30	0	0	–7/32	3/32	1	
Δ_j			0	0	3/32 ⇑	–463/32	0	

Пусть $\overline{c}$ выходит за пределы устойчивости оптимального плана. Возьмем $\overline{c}_1 = 115$. Заменим в табл. 1.21 вектор $c = (80;\ 70)$ на вектор $\overline{c} = (115;\ 70)$. Получим табл. 2.6, в которой условия оптимальности не выполняются ($\Delta_3 > 0$). Строим новый план (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Базис	$b(x_Б)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_3	160	0	20	1	–1	0
a_1	80	1	5/8	0	1/8	0
a_5	65	0	35/8	0	–1/8	1
Δ_j		0	–15/8	0	–115/8	0

В табл. 2.7 получен оптимальный план. Одна итерация прямого симплекс-метода дала оптимальный план с новым вектором стоимости: $x^0 = (80;\ 0)$. Максимальная прибыль при этом равна $\gamma(\overline{c}) = 115 \cdot 80 = =9200$ д. е.

Задания

2.6. Провести анализ решения при изменении вектора стоимости для задач 1.1—1.13, 1.15. Установить пределы изменения вектора стоимости, в которых оптимальный прямой план не меняется (устойчив к изменениям вектора стоимости). При векторе стоимости из-за пределов устойчивости оптимального прямого плана найти новый оптимальный план.

2.8*. Анализ чувствительности при изменении размеров задачи

Рассмотрим теперь изменение размеров задачи. Остановимся лишь на увеличении числа основных ограничений.

Пусть добавляется одно из ограничений

$$a'x \le \beta,\ a'x \ge \beta,\ a'x = \beta, \tag{2.19}$$

где $\beta \ge 0$. Если оптимальный план x^0 исходной задачи удовлетворяет дополнительному ограничению, то он будет оптимальным и в новой задаче. Поэтому рассмотрим случай, когда x^0 не удовлетворяет дополнительному ограничению.

Рассмотрим первое ограничение из (2.19). Заменим его эквивалентными соотношениями

$$a'x + x_{n+1} = \beta,\ x_{n+1} \ge 0.$$

Добавив их к исходной задаче, получим новую задачу

$$c'x \to \max,\ Ax = b,\ a'x + x_{n+1} = \beta,\ x \ge 0,\ x_{n+1} \ge 0.$$

Для оптимального базисного плана x^0 исходной задачи имеем $x^0_{\text{Н}} = 0$, $x^0_{\text{Б}} = A^{-1}_{\text{Б}} b$. Следовательно, основное дополнительное ограничение может быть записано в виде $a'_{\text{Б}} A^{-1}_{\text{Б}} b + x_{n+1} = \beta$. Если x^0 не удовлетворяет дополнительному ограничению, то $x_{n+1} = \beta - a'_{\text{Б}} A^{-1}_{\text{Б}} b < 0$, т. е. ($x^0$, x_{n+1}) — базисный псевдоплан. Отсюда становится ясным, как поступать дальше. Необходимо в симплекс-таблицу, соответствующую оптимальному плану x^0, добавить еще одну строку и один столбец $a_{n+1} = e_{n+1}$ (в Δ-строке добавится элемент $\Delta_{n+1} = 0$) и применить двойственный симплекс-метод. Заметим, что для новой задачи будем иметь $\overline{J}_{\text{Б}} = \{J_{\text{Б}},\ n+1\}$,

$$\overline{A}_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} A_{\text{Б}} & 0 \\ a'_{\text{Б}} & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}^{-1}_{\text{Б}} = \begin{pmatrix} A^{-1}_{\text{Б}} & 0 \\ -a'_{\text{Б}} A^{-1}_{\text{Б}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нетрудно использовать и мультипликативный метод для дальнейшего решения задачи.

Если рассматривается второе ограничение из (2.19), то его предварительно заменяют эквивалентными соотношениями $a'x - x_{n+1} = \beta$, $x_{n+1} \geq 0$. В этом случае $\overline{J}_Б = \{J_Б, n+1\}$,

$$\overline{A}_Б = \begin{pmatrix} A_Б & 0 \\ -a'_Б & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A}_Б^{-1} = \begin{pmatrix} A_Б^{-1} & 0 \\ a'_Б A_Б^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, для третьего ограничения (2.19) поступаем, как и для первого, только с учетом, что $x_{n+1} = 0$ (всегда!). Последнее означает, что если даже $x_{n+1} = \beta - a'_Б A_Б^{-1} b > 0$, то следует сделать итерацию двойственного симплекс-метода для вывода из базиса вектора $a_{n+1} = e_{n+1}$.

Пример 2.11. Рассмотрим задачу (1.1). Предположим, что продукция предприятия должна пройти еще одну обработку, например, отдел технического контроля за сутки может пропустить не более 82 единиц изделий того или иного типа. Получим дополнительное ограничение $x_1 + x_2 \leq 82$ (здесь $\beta = 82$, $a_{41} = a_{42} = 1$). Сведение ограничения к канонической форме приводит к соотношениям $x_1 + x_2 + x_6 = 82$, $x_6 \geq 0$ (свободные переменные x_3, x_4, x_5 уже были введены, см. задачу (1.17)). Подстановка оптимального плана исходной задачи $x^0 = (75;\ 8)$ дает $x_6 = 82 - 75 - 8 = -1 < 0$. Для заполнения двойственной симлекс-таблицы добавим в табл. 1.21 еще одну строку. Подсчитаем ее элементы. Для этого сначала найдем

$$a'_Б A_Б^{-1} = (1;\ 1;\ 0)\begin{pmatrix} 1/20 & -1/20 & 0 \\ -1/32 & 5/32 & 0 \\ -7/32 & 3/32 & 1 \end{pmatrix} = (3/160;\ 17/160;\ 0).$$

Таким образом, получаем

$$\overline{A}_Б^{-1} = \begin{pmatrix} 1/20 & -1/20 & 0 & 0 \\ -1/32 & 5/32 & 0 & 0 \\ -7/32 & 3/32 & 1 & 0 \\ -3/160 & -17/160 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заполняем двойственную симплекс-таблицу (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Базис	$æ_Б$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
a_2	8	0	1	1/20	−1/20	0	0	
a_1	75	1	0	−1/32	5/32	0	0	
a_5	30	0	0	−7/32	3/32	1	0	
a_6	−1	0	0	−3/160	−17/160	0	1	⇒
Δ		0	0	−1	−9	0	0	
σ				160/3	160/17			
					⇑			

Применяя одну итерацию двойственного симплекс-метода, получим оптимальный план (табл. 2.9): $x^0 = (73{,}5;\ 8{,}5)$.

Таблица 2.9

Базис	æБ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	8,5	0	1	1/17	0	0	–8/17
a_1	73,5	1	0	–1/17	0	0	25/17
a_5	29,1	0	0	–4/17	0	1	15/17
a_4	9,4	0	0	3/17	1	0	–160/17

Задания

2.7. Взяв для задач 1.1—1.15 дополнительные прямые ограничения на переменные, найти оптимальный план, пользуясь решением исходной задачи.

2.8. Контрольно-расчетное задание.

Из целевых функций *а* и ограничений *б* сформировать задачи ЛП на максимум и выполнить следующие задания.

1) Используя методы, изложенные в § 1, 2, решить сформированные задачи.

2) Построить для них двойственные задачи.

3) Найти оптимальный двойственный план (если он существует) и провести анализ чувствительности по вектору ресурсов.

4) Для задач, у которых существует оптимальный двойственный план, указать пределы изменения координат вектора ресурсов, в которых оптимальный двойственный план является устойчивым.

5) Взяв по одному из измененных значений вектора ресурсов как из пределов устойчивости оптимального двойственного плана, так и вне их, найти новые прямой и двойственный оптимальные планы.

6) Провести анализ чувствительности по вектору стоимости. Найти пределы изменения вектора стоимости, в которых прямой оптимальный план не меняется.

7) Добавив дополнительное ограничение к основным ограничениям *б*, найти оптимальный план новой задачи, используя двойственный симплекс-метод.

а) Целевые функции:

1. $\varphi = x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$.

2. $\varphi = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4$.

3. $\varphi = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$.

4. $\varphi = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4$.

5. $\varphi = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$.

6. $\varphi = 2x_1 + 3x_3 - x_4$.

7. $\varphi = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$.

8. $\varphi = 3x_1 + 2x_3 + 2x_4$.

9. $\varphi = -2x_1 - x_2$.

10. $\varphi = x_1 + x_2$.

11. $\varphi = 6x_1 - x_2 - 2x_3$.

12. $\varphi = x_1 + x_2 + x_3$.

13. $\varphi = -2x_1 - x_2 - x_3$.

14. $\varphi = 3x_1 + 2x_3$.

15. $\varphi = x_2 + 2x_3$.

16. $\varphi = x_1 + 3x_2 + 2x_3$.

17. $\varphi = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

18. $\varphi = -x_1 - 3x_2 - x_3$.

19. $\varphi = -x_1 - 5x_2 - x_3$.

20. $\varphi = -\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - 2x_3$.

21. $\varphi = x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4$.

22. $\varphi = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$.

23. $\varphi = x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4$.

24. $\varphi = -16x_1 - 9x_2 - 4x_3 - 6x_4$.

б) Ограничения:

1.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 8, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

2.
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 9, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

3. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=7, \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=10, \\ x_1-x_2+2x_3-2x_4\le 2, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

4. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-x_4=4, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4=8, \\ 3x_1+5x_2+5x_3\le 10, \end{cases}$

$x_j\ge 0, j=\overline{1,4}.$

5. $\begin{cases} 4x_1+x_2+4x_3-3x_4=10, \\ -x_1+2x_2+x_3+4x_4=12, \\ 2x_1+5x_2+6x_3+5x_4=20, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

6. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1-4x_2-x_3-2x_4=4, \\ 3x_1-6x_2-x_4\le 6, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

7. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3+3x_4=4, \\ 2x_2-x_3+4x_4\le 2, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4\ge 6, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

8. $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_3-4x_4=0, \\ 2x_1+x_3-3x_4\le 1, \\ 3x_1-x_2-2x_3+5x_4\ge 6, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

9. $\begin{cases} x_2+3x_3+4x_4=12, \\ x_1+x_3-x_4\le 5, \\ x_1-x_2-2x_3\le 4, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

10. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3+3x_4\le 15, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=8, \\ 3x_1-x_3+2x_4=7, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

11. $\begin{cases} -x_1-x_2-2x_3+x_4\ge 6, \\ -x_1+x_3\ge 2, \\ -2x_2+3x_3-2x_4\ge -8, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,4}.$

12. $\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3\ge -14, \\ -x_1+2x_2\ge 4, \\ 2x_1-x_2\ge 4, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,3}.$

13. $\begin{cases} x_1+x_2\le 5, \\ -x_1\le -1, \\ -2x_1+x_2\ge 1, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=1,2.$

14. $\begin{cases} 2x_1-x_2\ge 1, \\ -x_1+x_2\ge 2, \\ 2x_1-x_2\ge -1, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=1,2.$

15. $\begin{cases} -4x_1+x_2-x_3\le 1, \\ 2x_1-4x_2+4x_3\le -2, \\ -2x_1-4x_2+2x_3\le -5, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,3}.$

16. $\begin{cases} -x_1+x_2-x_3\ge -1, \\ x_1+3x_2\ge 2, \\ 4x_1+7x_2+4x_3\ge 6, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,3}.$

17. $\begin{cases} 3x_1-2x_2-6x_3\ge 6, \\ x_2-2x_3\ge 5, \\ -3x_1+x_2+x_3\ge -1, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,3}.$

18. $\begin{cases} -2x_1+x_2\le 2, \\ x_1-2x_2+x_3=-2, \\ -x_1-x_2\le -5, \end{cases}$

$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,3}.$

19. $\begin{cases}-12x_1+3x_2 \le -8,\\ -3x_1-9x_2+x_3=-8,\\ x_1-3x_2 \le -3,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,3}.$

20. $\begin{cases}-x_1-x_2 \le -3,\\ 2x_1-4x_2 \le 1,\\ -x_1-x_2+x_3 \le -5,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,3}.$

21. $\begin{cases}3x_1-x_3=2,\\ -3x_1+2x_2 \ge 2,\\ -3x_1+x_2 \le 5,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,3}.$

22. $\begin{cases}-4x_1+x_2-x_3 \le 1,\\ 2x_1-4x_2+4x_3 \le -2,\\ 2x_1+4x_2-2x_3 \ge 5,\end{cases}$
$x_2 \le 0,\quad x_3 \ge 0.$

23. $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4 \le 8,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4 \le 6,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

24. $\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=-2,\\ -8x_1+3x_2+4x_3 \le 3,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

25. $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+x_4 \le 10,\\ x_1-2x_2+x_3-x_4 \le 8,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,4}.$

26. $\begin{cases}2x_1-x_2+x_4=-4,\\ -6x_1+2x_2+4x_3 \le 5,\end{cases}$
$x_j \ge 0, j=\overline{1,4}.$

27. $\begin{cases}-2x_1-4x_2+2x_3-6x_4=-12,\\ x_2+x_3-x_4=4,\\ 2x_1+x_3-x_4=8,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=1,\ 3,\ 4.$

28. $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3+2x_4=10,\\ 2x_1+2x_2-2x_3-x_4 \le 7,\\ x_1-2x_2+x_3+x_4 \le 9,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=2,\ 3,\ 4.$

29. $\begin{cases}x_2+3x_3+4x_4=12,\\ -x_1-x_3+x_4 \ge -5,\\ x_1-x_2-2x_3 \le 4,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=1,\ 3,\ 4.$

30. $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+x_4 \ge 6,\\ -x_1+x_3 \ge 3,\\ 2x_2-3x_3+2x_4 \le 8,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=1,\ 3,\ 4.$

31. $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3 \le 14,\\ -x_1+2x_2 \ge 4,\\ 2x_1-x_2 \ge 4,\end{cases}$
$x_2 \le 0,\quad x_3 \ge 0.$

32. $\begin{cases}x_1-x_2+x_3 \le 1,\\ x_1+3x_2 \ge 2,\\ 4x_1+7x_2+4x_3 \ge 6,\end{cases}$
$x_1 \le 0,\quad x_3 \ge 0.$

33. $\begin{cases}-2x_1+x_2 \le 2,\\ x_1-2x_2+x_3=-2,\\ x_1+x_2 \ge 5,\end{cases}$
$x_1 \ge 0,\quad x_3 \le 0.$

34. $\begin{cases}3x_1-2x_2-6x_3 \ge 6,\\ x_2-2x_3 \ge 5,\\ 3x_1-x_2-x_3 \le 1,\end{cases}$
$x_j \ge 0,\quad j=1,\ 2,\ 3.$

35. $\begin{cases} \quad\quad x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ -x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 \ge -5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \quad\quad \le 4, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 3, 4.$

36. $\begin{cases} \quad\quad x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ -x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 \ge -5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \quad\quad \le 4, \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1, 3, 4.$

37. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 \quad \le -1, \\ 2x_1 - x_2 \le -1, \end{cases}$

$x_2 \le 0.$

38. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 3, \end{cases}$

$x_1 \le 0.$

2.9*. Задачи с двухсторонними прямыми ограничениями

Как и в прямом симплекс-методе, обратимся к более сложному случаю. Построим двойственные задачи к задачам ЛП с двухсторонними прямыми ограничениями (см. п. 1.11).

Рассмотрим задачу в канонической форме (1.42):

$$\varphi(x) = c'x \to \max, \quad Ax = b, \quad d_* \le x \le d^*. \tag{2.20}$$

Ограничения этой задачи представим в следующем виде:

$$\begin{array}{rl|c} Ax = & b, & y \\ x \le & d^*, & w \\ -x \le & -d_*. & v \end{array} \tag{2.21}$$

А теперь запишем двойственную задачу в соответствии с правилами, описанными в п. 2.1. Для этого первым ограничениям (2.21) поставим в соответствие m-вектор двойственных переменных y, вторым — n-вектор w, третьим — n-вектор v. Из (2.21) следует, что матрица основных ограничений задачи (2.20) имеет вид $\begin{pmatrix} A \\ E \\ -E \end{pmatrix}$, а вектор ресурсов можем записать следующим образом: $\begin{pmatrix} b \\ d^* \\ -d_* \end{pmatrix}$. В таком случае прямые ограничения для плана x как бы отсутствуют, в силу чего основные ограничения двойственной задачи будут со знаком равенства (=). Поскольку первые ограничения (2.21) имеют знак равенства (=), то на вектор y не накладываются прямые ограничения, в то же время вторые и третьи ограничения (2.21) имеют знак неравенства (≤), поэтому двойственные переменные

w_j, v_j, $j=\overline{1,n}$, неотрицательны. Итак, двойственная задача к канонической задаче (2.20) имеет вид

$$\psi(\lambda)=b'y+d^{*\prime}w-d'_*v\to\min,$$
$$A'y+w-v=c,$$
$$w\geq 0,\ \ v\geq 0,$$

где $\lambda=(y,\ w,\ v)$.

Если будем строить по тем же правилам двойственную задачу к задаче в нормальной форме (1.43)

$$c'x\to\max,\ \ Ax\leq b,\ \ d_*\leq x\leq d^*, \qquad (2.22)$$

то при условии, что на свободные переменные не накладываются верхние прямые ограничения, получим

$$\psi(\lambda)=b'y+d^{*\prime}w-d'_*v\to\min,$$
$$A'y+w-v=c,$$
$$y\geq 0,\ w\geq 0,\ \ v\geq 0,$$

иначе двойственная задача имеет вид

$$\psi(\lambda)=b'y+d^{*\prime}w+d^{*\prime}_{\text{СВ}}w_{\text{СВ}}-d'_*v\to\min,$$
$$A'y+w-v=c,$$
$$y+w_{\text{СВ}}\geq 0,\ \ w\geq 0,\ \ w_{\text{СВ}}\geq 0,\ \ v\geq 0.$$

Отметим еще два частных случая. Пусть задача имеет вид

$$c'x\to\max,\ Ax=b,\ \ 0\leq x\leq d^*, \qquad (2.23)$$

или

$$c'x\to\max,\ Ax=b,\ \ x\geq d_*. \qquad (2.24)$$

Двойственные к ним запишутся следующим образом:
к задаче (2.23)

$$b'y+d^{*\prime}w\to\min,$$
$$A'y+w\geq c,\qquad w\geq 0,$$

к задаче (2.24)

$$b'y-d'_*v\to\min,$$
$$A'y-v=c,\qquad v\geq 0.$$

Пример 2.12. Рассмотрим задачу примера 1.18. Запишем к ней двойственную задачу при отсутствии верхних прямых ограничений на свободные переменные. Она имеет вид

$$800y_1+640y_2+145y_3+78w_1+28w_2-3v_1\to\min,$$

$$\begin{cases}8y_1+8y_2+\ y_3+w_1\quad -v_1=80,\\ 25y_1+5y_2+5y_3\quad +w_2\quad \ge 70,\end{cases}$$

$$y_1\ge 0,y_2\ge 0,y_3\ge 0,w_1\ge 0,w_2\ge 0,\ v_1\ge 0.$$

Если же учесть верхние ограничения на $x_{\text{СВ}}$, тогда получим

$$800y_1+640y_2+145y_3+78w_1+28w_2+776w_3+616w_4+142w_5-3v_1\to$$

$$\to\min,$$

$$\begin{cases}8y_1+8y_2+\ y_3+w_1 & -v_1=80,\\ 25y_1+5y_2+5y_3\quad +w_2 & \ge 70,\\ y_1\qquad\qquad +w_3 & \ge\ 0,\\ \quad y_2\qquad\qquad +w_4 & \ge\ 0,\\ \qquad y_3\qquad\qquad +w_5 & \ge\ 0,\end{cases}\tag{2.25}$$

$$w_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5},\quad v_1\ge 0.$$

Пример 2.13. Запишем двойственную задачу к задаче примера 1.19:

$$5y_1+7y_2+3w_1+4w_2+2w_3-v_1-v_2\to\min,$$

$$\begin{cases}5y_1+\ y_2+w_1\qquad -v_1\qquad =2,\\ y_1+2y_2\quad +w_2\qquad\qquad \ge 1,\\ 3y_1+4y_2\qquad +w_3\quad -v_2=3,\end{cases}$$

$$w_j\ge 0,\ j=\overline{1,3},\ v_1\ge 0,\ v_2\ge 0.$$

Задания

2.9. Для задач 1.26—1.30 записать двойственные задачи.

Вектор x, удовлетворяющий всем ограничениям задачи (2.20) (а также (2.22) или (2.23), (2.24)), называется ***прямым планом***, тройка векторов $\lambda=(y,\ w,\ v)$, удовлетворяющих всем ограничениям соответствующей двойственной задачи, — ***двойственным планом***. Множества прямых планов будем обозначать, как и выше, через X, а множество двойственных планов — через Λ.

Как и для классических задач с односторонними прямыми ограничениями, рассмотренных в предыдущих пунктах, между множествами прямых и двойственных планов существует такая же зависимость, выраженная в теории двойственности (см. п. 2.2). Только теперь ***основное не-***

равенство теории двойственности имеет вид $\varphi(x) \le \psi(\lambda)$ $\forall x \in X$, $\lambda \in \Lambda$. Теоремы 2.1, 2.2 и следствия 2.1—2.3 полностью справедливы для задач с двухсторонними прямыми ограничениями, но в следствии 2.2 заменяем y^* на λ^*, а в следствии 2.3 к условиям (2.7), (2.8) добавляем еще условия

$$w_j^0(d_j^* - x_j^0) = 0,\ v_j^0(x_j^0 - d_{*j}) = 0,\ j = \overline{1,n}, \qquad (2.26)$$

которые справедливы и для задач в канонической форме (здесь $\lambda = (y^0, w^0, v^0)$ — оптимальный двойственный план). Соотношения (2.7), (2.8), (2.26) называются ***условиями дополняющей нежесткости***.

Лемма 2.1 также верна, однако теперь будем рассматривать оптимальный план x^0, зависящий не только от вектора ресурсов, но и от нижних d_* и верхних d^* границ плана: $x^0 = x^0_{b,d_*,d^*}$. В лемме 2.1 к равенствам (2.10) необходимо еще добавить соотношения

$$w_j^0 = \frac{\partial c'x^0}{\partial d_j^*},\ -v_j^0 = \frac{\partial c'x^0}{\partial d_{*j}},\ j = \overline{1,n}. \qquad (2.27)$$

Таким образом, w_j^0 — ***мера (степень) чувствительности*** максимального значения целевой функции к изменению значения j-й верхней границы, а $-v_j^0$ — к изменению значения j-й нижней границы. Поскольку $w_j^0 \ge 0$, $v_j^0 \ge 0$, то на языке производственных задач равенства (2.27) означают, что увеличение спроса на j-й вид продукции ведет к увеличению (если $w_j^0 > 0$) максимальной прибыли. К такому же результату придем, если уменьшится обязательный выпуск данного вида продукции (при $v_j^0 > 0$).

Заметим, что при изменении b, d_*, d^* в некоторой окрестности заданных значений на величины Δb, Δd_*, Δd^* оптимальный двойственный план λ^0 остается постоянным (***устойчив к изменениям параметров задачи***), а максимальное значение целевой функции изменится на величину

$$\Delta\varphi_{\max} = y^{0\prime}\Delta b + w^{0\prime}\Delta d^* - v^{0\prime}\Delta d_*.$$

Границы изменения координат векторов ресурсов, нижних и верхних прямых ограничений, в которых оптимальный двойственный план остается неизменным, определяются неравенствами

$$d_{*Б}+\Delta d_{*Б}\le A_Б^{-1}(b+\Delta b-A_{*Н}(d_{*Н}+\Delta d_{*Н})-A_Н^*(d_Н^*+\Delta d_Н^*))\le d_Б^*+\Delta d_Б^*. \quad (2.28)$$

Здесь

$$d_{*Б}=(d_{*j},\ j\in J_Б),\ d_Б^*=(d_j^*,\ j\in J_Б), A_{*Н}=(a_j,\ j\in J_{*Н}),$$
$$A_Н^*=(a_j,\ j\in J_Н^*), J_{*Н}=\{j\in J_Н\colon\ x_j^0=d_{*j}\},\ J_Н^*=\{j\in J_Н\colon\ x_j^0=d_j^*\},$$
$$d_{*Н}=(d_{*j},\ j\in J_{*Н}),\ d_Н^*=(d_j^*,\ j\in J_Н^*).$$

Неравенства (2.28), очевидно, означают $\bar{d}_{*Б}\le\bar{x}_Б\le\bar{d}_Б^*$ при том же базисе, что и для оптимального плана x^0, при этом новый план

$$\bar{x}_j=d_{*j}+\Delta d_{*j},\ j\in J_{*Н},\ \bar{x}_j=d_j^*+\Delta d_j^*,\ j\in J_Н^*,$$
$$\bar{x}_Б=A_Б^{-1}(b+\Delta b-A_{*Н}(d_{*Н}+\Delta d_{*Н})-A_Н^*(d_Н^*+\Delta d_Н^*))$$

будет оптимальным при измененных параметрах.

Обычно границы устанавливаются для каждого параметра отдельно при фиксированных остальных параметрах. Однако можно одновременно поменять все параметры на соответствующие величины. И если при этом выполняются условия (2.28), то оптимальный двойственный план остается прежним.

Если известен оптимальный прямой базисный план x^0 с базисным множеством $J_Б$, то оптимальный двойственный план строится легко. В самом деле совокупность векторов $\lambda^0=(y^0,\ w^0,\ v^0)$, построенная по правилам

$$y^0=u,\ w_j^0=\Delta_j,\ v_j^0=0,\ \text{если}\ \Delta_j\ge 0,$$
$$w_j^0=0,\ v_j^0=-\Delta_j,\ \text{если}\ \Delta_j<0,\ j=\overline{1,n},$$

где u — вектор потенциалов, соответствующий оптимальному плану x^0, Δ_j — оценки ($u'=c'_Б A_Б^{-1}$, $\Delta_j=c_j-u'a_j$, $j=\overline{1,n}$), очевидно, является двойственным планом. Можно показать, что $\varphi(x^0)=\psi(\lambda^0)$, а тогда, согласно следствию 2.2, λ^0 — оптимальный двойственный план.

Пример 2.14. Найдем оптимальный двойственный план для задачи примера 1.18. При решении этой задачи симплекс-методом на последнем шаге (итерация 4) получен вектор потенциалов $u=(1;\ 9;\ 0)$ и небазисные оценки $\Delta_3=-1$, $\Delta_4=-9$ (базисные оценки нулевые).

Чтобы найти оптимальный двойственный план, необходимо записать двойственную задачу в канонической форме (1.54). Поэтому вместо двойственной задачи (2.25) будем иметь

$$800y_1+640y_2+145y_3+78w_1+28w_2+776w_3+616w_4+142w_5-3v_1\to$$
$$\to\min,$$
$$\begin{cases} 8y_1+8y_2+\ \ y_3+w_1 & -v_1 = 80, \\ 25y_1+5y_2+5y_3 \quad +w_2 & -v_2 = 70, \\ y_1 \quad +w_3 & -v_3 = 0, \\ y_2 \quad +w_4 & -v_4 = 0, \\ y_3 \quad +w_5 & -v_5 = 0, \end{cases}$$
$$w_j\ge 0,\quad v_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$$

Таким образом, оптимальный двойственный план $\lambda^0=(y^0,\ w^0,\ v^0)$ имеет вид $y^0=(1;\ 9;\ 0)$, $w_j^0=0$, $j=\overline{1,5}$, $v_j^0=0, j=1, 2, 5$, $v_3^0=1$, $v_4^0=9$.

Для определения оптимального двойственного плана можно также использовать условия дополняющей нежесткости (2.7), (2.8), (2.26). Поскольку $x_5^0\neq 0$, то третий ресурс (управленческий труд) используется не полностью, значит, $y_3^0=0$. Далее, x_1^0, x_2^0, x_5^0 не лежат на границе, поэтому $w_j^0=v_j^0=0, j=1,\ 2,\ 5$; x_3^0, x_4^0 лежат на нижней границе, следовательно, $w_j^0=0$, $j=3,\ 4$. Остальные значения оптимального двойственного плана находим из системы уравнений

$$\begin{cases} 8y_1^0+8y_2^0 & = 80, \\ 25y_1^0+5y_2^0 & = 70, \\ y_1^0 \quad -v_3^0 & = 0, \\ y_2^0 \quad -v_4^0 & = 0. \end{cases}$$

Анализ решения задачи при изменении вектора ресурсов b приведен в примере 2.4 (см. п. 2.3). Рассмотрим теперь верхние и нижние ограничения. Нас интересуют только ограничения исходной задачи (пример 1.18), т. е. для переменных x_1, x_2. Поскольку $w_j^0=v_j^0=0, j=1,\ 2$, то изменения нижних и верхних границ в некоторой окрестности заданных значений не влияют на максимальную прибыль.

Установим границы изменения координат векторов b, d_*, d^* для исходной задачи, в которых найденный оптимальный двойственный план не изменяется. Согласно решению канонической задачи примера 1.18, оптимальному плану $x^0=(75;\ 8;\ 0;\ 0;\ 30)$ соответствуют множества $J_Б=$

$=\{1, 2, 5\}$, $J_{*н}=\{3, 4\}$, $J_{н}^{*}=\varnothing$. Нас интересует исходная задача, поэтому меняем границы нижних и верхних прямых ограничений только для x_1 и x_2. Основные ограничения задачи в канонической форме примут вид (небазисные свободные переменные не меняются: $x_3=x_3^0=0$, $x_4=x_4^0=0$)

$$\begin{cases} 8x_1+25x_2 \qquad\quad =800+\Delta b_1, \\ 8x_1+\ \ 5x_2 \qquad\quad =640+\Delta b_2, \\ \ \ x_1+\ \ 5x_2+x_5=145+\Delta b_3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{aligned} x_1 &= 75-\frac{1}{32}\Delta b_1+\frac{5}{32}\Delta b_2 &&= x_1^0+\Delta x_1, \\ x_2 &= \ \ 8+\frac{1}{20}\Delta b_1-\frac{1}{20}\Delta b_2 &&= x_2^0+\Delta x_2, \\ x_5 &= 30-\frac{7}{32}\Delta b_1+\frac{3}{32}\Delta b_2+\Delta b_3 &&= x_5^0+\Delta x_5. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Используя прямые ограничения для базисных переменных, получим систему неравенств (2.28) для установления границ устойчивости оптимального двойственного плана

$$\begin{cases} 3+\Delta d_{*1}\le 75-\dfrac{1}{32}\Delta b_1+\dfrac{5}{32}\Delta b_2 \le 78+\Delta d_1^*, \\ \Delta d_{*2}\le\ \ 8+\dfrac{1}{20}\Delta b_1-\dfrac{1}{20}\Delta b_2 \le 28+\Delta d_2^*, \\ 0\le 30-\dfrac{7}{32}\Delta b_1+\dfrac{3}{32}\Delta b_2+\Delta b_3. \end{cases} \tag{2.30}$$

Заметим, что в последнем неравенстве из (2.30) не используется верхняя граница для x_5, поскольку, как указывалось в п. 1.11*, она не существенна для свободных переменных.

Пусть $\Delta d_{*j}=\Delta d_j^*=\Delta b_2=\Delta b_3=0$, $j=1, 2$. Тогда из системы неравенств (2.30) получим: $-96\le\Delta b_1\le 137\frac{1}{7}$. Таким образом, при изменении ресурса b_1 (сырья) в пределах от $800-96=704$ до $800+137\frac{1}{7}=937\frac{1}{7}$ кг при неизменных остальных параметрах задачи оптимальный двойственный план остается одним и тем же (найден выше).

Аналогично находим пределы изменения объема ресурсов физического и управленческого труда (предоставляется читателю в качестве упражнения).

Пусть $\Delta d_j^* = \Delta b_i = 0$, $j = 1, 2$, $i = \overline{1,3}$. Тогда $\Delta d_{*1} \le 72$, $\Delta d_{*2} \le 8$, т. е. при $d_{*1} \le 3 + 72 = 75$ и $d_{*2} \le 8$ и неизменных остальных параметрах оптимальный двойственный план остается неизменным. Более того, прямой оптимальный план тоже не изменится. Аналогично находим, что при $d_1^* \ge 75$, $d_2^* \ge 8$ и неизменных остальных параметрах оптимальные прямой и двойственный планы не изменятся.

Изменим в задаче примера 1.18 параметры на следующие: $\bar{b} = (864;\ 608;\ 140)$, $\bar{d}_* = (5;\ 3)$, $\overrightarrow{d^*} = (75;\ 20)$. Таким образом, имеем: $\Delta b = (64;\ -32;\ -5)$, $\Delta d_* = (2;\ 2)$, $\Delta d^* = (-3;\ -8)$. Подставим эти значения в неравенства (2.30). Получим: $3 + 2 \le 75 - \frac{1}{32} \cdot 64 + \frac{5}{32} \cdot (-32) \le 78 - 3$; $2 \le 8 + \frac{1}{20} \cdot 64 - \frac{1}{20} \cdot (-32) \le 28 - 8$; $30 - \frac{7}{32} \cdot 64 + \frac{3}{32} \cdot (-32) + (-5) \ge 0$ или $5 \le 68 \le 75$; $2 \le 12{,}8 \le 20$; $8 \ge 0$, т. е. условия (2.30) выполняются. Следовательно, с новыми параметрами оптимальный двойственный план $y^0 = (1;\ 9;\ 0)$, $w^0 = 0$, $v^0 = (0;\ 0;\ 1;\ 9;\ 0)$ остается тем же. А прямой оптимальный план вычисляется по формулам (2.29) (небазисные координаты в данном примере не поменялись): $\bar{x}^0 = (68;\ 12{,}8;\ 0;\ 0;\ 8)$. При этом максимальная прибыль изменилась на величину $\Delta\varphi_{\max} = 1 \cdot 64 + 9 \cdot (-32) = -224$, т. е. уменьшилась на 224 д. е. (ср.: $\Delta\varphi_{\max} = \varphi(\bar{x}^0) - \varphi(x^0) = 6336 - 6560 = -224$).

Задания

2.10. Для задач 1.26—1.30 по оптимальному прямому плану найти оптимальный двойственный план, если он существует. Провести анализ чувствительности по векторам ресурсов, нижних и верхних прямых ограничений. Установить границы изменения координат указанных векторов, в которых оптимальный двойственный план устойчив. Для измененных значений параметров, входящих в пределы устойчивости оптимального двойственного плана, найти оптимальный прямой план, не решая задачу заново.

Как указывалось в п. 2.1, основное назначение двойственной задачи — анализ решения исходной (прямой) задачи, а также быстрая корректировка нового оптимального плана x^0, если изменились параметры задачи. Для корректировки нового оптимального плана, а также для решения исходной (прямой) задачи используется двойственный симплекс-метод.

Введем основные определения. Пусть $A_Б$ — некоторая невырожденная подматрица матрицы A: $A_Б = (a_j,\ j \in J_Б)$. Подсчитаем вектор потенциалов $u' = c'_Б A_Б^{-1}$ и оценки $\Delta_j = c_j - u'a_j, \quad j \in J_Н$.

Совокупность векторов $\lambda = (y, w, v)$, построенная по правилам

$$y = u,\ w_j = \Delta_j,\ v_j = 0, \text{если } \Delta_j \geq 0,$$
$$w_j = 0,\ v_j = -\Delta_j, \text{если } \Delta_j < 0,\ j = \overline{1,n},$$

очевидно, будет двойственным планом. Такой план называется ***двойственным базисным планом***. Двойственный базисный план ***не вырожден***, если $\Delta_j \neq 0,\ j \in J_Н$. В этом случае прямой базисный план x с той же базисной матрицей $A_Б$ называется ***двойственно невырожденным***. Для оптимального базисного плана x^0, исходя из критерия неединственности (см. теорему 1.3), следует, что если x^0 прямо и двойственно не вырожден, то он единственный.

Построим также n-вектор æ следующим образом. Небазисную часть æ определяем по формулам

$$æ_j = d_{*j}, \text{если } \Delta_j < 0;\ æ_j = d_j^*, \text{если } \Delta_j \geq 0,\ j \in J_Н, \qquad (2.31)$$

а базисная часть $æ_Б$ определяется из векторного уравнения

$$A_Б æ_Б = b - A_Н æ_Н. \qquad (2.32)$$

Вектор æ, построенный по правилам (2.31), (2.32), называется ***базисным псевдопланом*** задачи (2.20).

Замечание 2.8. В формулах (2.31), если $\Delta_j = 0$, можно взять $æ_j = d_{*j} \vee d_j^*$.

Теорема 2.5 (критерий оптимальности двойственного базисного плана). *Для оптимальности двойственного базисного плана* λ^0 *в задаче* (2.20) *достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы соответствующий базисный псевдоплан* æ *удовлетворял неравенствам*

$$d_{*Б} \leq æ_Б \leq d_Б^*. \qquad (2.33)$$

При этом æ $= x^0$.

Не вдаваясь в подробности вывода основных соотношений двойственного симплекс-метода, приведем алгоритм решения задачи (2.20) двойственным симплекс-методом. Заметим, что в отличие от задач с односторонними прямыми ограничениями (см. п. 2.5) для задач с двухсторонними ограничениями не обязательно знание начального базисного плана (ни прямого, ни двойственного) — достаточно знать лишь какую-либо невырожденную $m{\times}m$-матрицу $A_Б$ (или, что то же самое, $J_Б$).

Алгоритм двойственного симплекс-метода.

Дано: матрица $A_Б$ (или множество $J_Б$).

1. Решая систему уравнений $u'a_j = c_j$, $j \in J_Б$, находим потенциалы u_j, $j = \overline{1,m}$.
2. Подсчитываем оценки $\Delta_j = c_j - u'a_j$, $j \in J_Н$, и формируем множества $J_Н^+ = \{j \in J_Н : \Delta_j \geq 0\}$, $J_Н^- = \{j \in J_Н : \Delta_j < 0\}$.
3. Находим небазисные координаты псевдоплана æ по формулам (2.31). Базисную часть псевдоплана определяем из уравнения (2.32).
4. Проверяем условия оптимальности (2.33). Если они выполняются, решение задачи заканчиваем — план x^0=æ оптимален. Если же условия (2.33) не выполняются, то переходим к следующему шагу.
5. Пусть $i_0 \in J_Б$ — номер, для которого $æ_{i_0} \notin [d_{*i_0}, d^*_{i_0}]$.

Замечание 2.9. В качестве i_0 можно взять любой индекс из $J_Б^1$, где $J_Б^1$ — множество индексов, для которых не выполняются условия оптимальности. Иногда i_0 определяют из условия $\rho_{i_0} = \max\limits_{i \in J_Б^1} \rho_i$, где ρ_i — расстояние от $æ_i$ до множества $[d_{*i}, d^*_i]$.

6. Решаем систему уравнений относительно l_y:

$$\begin{cases} a'_{i_0} l_y = \begin{cases} 1, \text{ если } æ_{i_0} < d_{*i_0}, \\ -1, \text{ если } æ_{i_0} > d^*_{i_0}, \end{cases} \\ a'_i l_y = 0, \quad i \in J_Б \setminus i_0. \end{cases}$$

7. Подсчитываем

$$\left(\begin{array}{l} l_j = \ \ a'_j l_y, \ j \in J_Н^-; \\ l_j = -a'_j l_y, \ j \in J_Н^+. \end{array} \right.$$

8. Определяем шаги σ_j, $j \in J_Н$:

$$\sigma_j = \begin{cases} \left|\dfrac{\Delta_j}{l_j}\right|, \text{ если } l_j < 0; \\ \\ +\infty, \quad \text{если } l_j \geq 0, \ j \in J_Н. \end{cases}$$

Если окажется, что $\sigma_j = \infty$, $j \in J_{\text{Н}}$, тогда двойственная целевая функция не ограничена снизу на множестве двойственных планов, а это в силу теории двойственности означает, что $X = \varnothing$, и решение заканчиваем. Иначе переходим к шагу 9.

9. Определяем $\sigma^0 = \min\limits_{j \in J_{\text{Н}}} \sigma_j = \sigma_{j_0}$. Если план не вырожден, то $\sigma^0 > 0$.

10. Заменяем множество $J_{\text{Б}}$ на новое $\overline{J}_{\text{Б}} = (J_{\text{Б}} \setminus i_0) \cup j_0$ и переходим к шагу 1.

Пример 2.15. Решим задачу примера 1.18 двойственным симплекс-методом. Из канонического вида (1.54) этой задачи видно, что можно взять $J_{\text{Б}} = \{3,\ 4,\ 5\}$. Тогда $J_{\text{Н}} = \{1, 2\}$.

Итерация 1.

1. Уравнения для потенциалов те же, что и в примере 1.18, откуда $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.
2. Оценки те же: $\Delta_1 = 80$, $\Delta_2 = 70$. Имеем $J_{\text{Н}}^{+} = \{1, 2\}$, $J_{\text{Н}}^{-} = \varnothing$.
3. Определяем $æ_{\text{Н}}$ (см. (2.31)): $æ_1 = 78$, $æ_2 = 28$.
4. Базисную часть $æ_{\text{Б}}$ находим из уравнений (2.32): $æ_3 = 800 - 8 \cdot 78 - 25 \cdot 28 = -524 < d_{*3}(-)$, $æ_4 = 640 - 8 \cdot 78 - 5 \cdot 28 = -124 < d_{*4}(-)$, $æ_5 = 145 - 78 - 5 \cdot 28 = -73 < d_{*5}(-)$.

   Минусы (–) означают, что условия оптимальности (2.33) не выполняются. Берем $i_0 = 3$.
5. Определяем l_y из системы уравнений: $l_{y_1} = 1$, $l_{y_2} = 0$, $l_{y_3} = 0$.
6. Находим l_1, l_2: $l_1 = -8$, $l_2 = -25$.
7. Определяем шаг: $\sigma_1 = -80 : (-8) = 10$, $\sigma_2 = -70 : (-25) = \frac{14}{5}$, откуда $\sigma^0 = \frac{14}{5} = \sigma_2$, т. е. $j_0 = 2$.
8. Заменяем базисное множество индексов на новое $J_{\text{Б}} = \{2,\ 4,\ 5\}$. Тогда $J_{\text{Н}} = \{1,\ 3\}$.

Итерация 2.

1. Уравнения для потенциалов $25u_1 + 5u_2 + 5u_3 = 70$, $u_2 = u_3 = 0$, откуда получаем $u_1 = \frac{14}{5}$.
2. Оценки: $\Delta_1 = 80 - 8 \cdot \frac{14}{5} = \frac{288}{5}$, $\Delta_3 = -\frac{14}{5}$. Таким образом, $J_{\text{Н}}^{+} = \{1\}$, $J_{\text{Н}}^{-} = \{3\}$.

3. Псевдоплан: небазисные координаты $æ_1 = 78$, $æ_3 = 0$; для базисной части $æ_Б$ уравнения имеют вид $25æ_2 = 800 - 8 \cdot 78 = 176$, $5æ_2 + æ_4 = 640 - - 8 \cdot 78 = 16$, $5æ_2 + æ_5 = 145 - 78 = 67$. Решая эту систему, получим: $æ_2 = 7\frac{1}{25}(+)$, $æ_4 = -19\frac{1}{5}(-)$, $æ_5 = 31\frac{4}{5}(+)$. Таким образом, $i_0 = 4$.

4. Находим l_y из уравнений $25l_{y_1} + 5l_{y_2} + 5l_{y_3} = 0$, $l_{y_2} = 1$, $l_{y_3} = 0$. Отсюда получаем $l_{y_1} = -\frac{1}{5}$, $l_{y_2} = 1$, $l_{y_3} = 0$.

5. Находим $l_1 = -(8 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot 1) = -\frac{32}{5}$, $l_3 = -\frac{1}{5}$.

6. $\sigma_1 = \left(-\frac{288}{5}\right) : \left(-\frac{32}{5}\right) = 9$, $\sigma_3 = \left(-\frac{14}{5}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right) = 14$; $\sigma^0 = 9 = \sigma_1$. Тогда $j_0 = 1$, $J_Б = \{1, 2, 5\}$, $J_Н = \{3, 4\}$.

Итерация 3.

Потенциалы и оценки найдены на итерации 4 примера 1.18: $u_1 = 1$, $u_2 = 9$, $u_3 = 0$; $\Delta_3 = -1$, $\Delta_4 = -9$. Тогда $æ_3 = æ_4 = 0$, а для остальных компонент псевдоплана получаем систему уравнений $8æ_1 + 25æ_2 = 800$, $8æ_1 + + 5æ_2 = 640$, $æ_1 + 5æ_2 + æ_5 = 145$. Решая эту систему, получим $æ_1 = 75$, $æ_2 = 8$, $æ_5 = 30$. Поскольку все базисные компоненты псевдоплана удовлетворяют прямым ограничениям, то построенный базисный псевдоплан является оптимальным планом $x^0 = æ = (75; 8; 0; 0; 30)$.

Изменим параметры задачи. Пусть $\bar{b} = (800; 608; 145)$, $\bar{d}_* = (3; 9)$, $\bar{d}^* = (68; 20)$. Тогда $\Delta b = (0; -32; 0)$, $\Delta d_* = (0; 9)$, $\Delta d^* = (-10; -8)$. Поскольку для оптимального базисного плана x^0 исходной задачи $J_Б = \{1, 2, 5\}$, то можно воспользоваться соотношениями (2.29), (2.30). Имеем $x = (70; 9{,}6; 0; 0; 27)$. Подставляя в (2.30), получим $3 \le 70 \le 68$, $0 \le 9{,}6 \le 20$, $27 \ge 0$. Таким образом, первое неравенство не выполняется: $x_1 > \bar{d}^*_1$. Значит, построенный вектор является базисным псевдопланом $x = æ$ с указанным базисным множеством $J_Б$. Применим двойственный симплекс-метод для решения задачи с измененными параметрами.

Итерация 1.

Итерацию можем начинать с шага 6, поскольку на последней итерации при решении исходной задачи найдены $u = (1; 9; 0)$, $\Delta = (0; 0; -1; -9; 0)$, а псевдоплан для новой задачи по первой координате не удовлетворяет условию оптимальности. Итак, $i_0 = 1$, $J_Н^+ = \varnothing$, $J_Н^- = \{3, 4\}$. Поскольку

$æ_1 = \overline{d}_1^*$, то система для определения l_y имеет вид $8l_{y_1} + 8l_{y_2} + l_{y_3} = -1$, $25l_{y_1} + 5l_{y_2} + 5l_{y_3} = 0$, $-l_{y_3} = 0$, решив которую, получим $l_{y_1} = \frac{1}{32}$, $l_{y_2} = -\frac{5}{32}$, $l_{y_3} = 0$. Тогда $l_3 = \frac{1}{32}$, $l_4 = -\frac{5}{32}$. Определяем шаг σ^0: $\sigma_3 = \infty$, $\sigma_4 = = -9 : \left(-\frac{5}{32}\right) = \frac{288}{5} = \sigma^0$. Тогда $j_0 = 4$. Заменяем базисное множество индексов на новое $J_Б = \{2, 4, 5\}$, при этом $J_Н = \{1, 3\}$.

Итерация 2.

1. Уравнения для потенциалов: $25u_1 + 5u_2 + 5u_3 = 70$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$. Отсюда находим $u_1 = \frac{14}{5}$.
2. $\Delta_1 = 80 - \frac{14}{5} \cdot 8 = \frac{288}{5}$, $\Delta_3 = 0 - \frac{14}{5} = -\frac{14}{5}$.
3. $æ_1 = 68$, $æ_3 = 0$.
4. $25æ_2 = 800 - 8 \cdot 68 = 256$, $5æ_2 + æ_4 = 608 - 8 \cdot 68 = 64$, $5æ_2 + æ_5 = 145 - 68 = = 77$. Отсюда находим $æ_2 = 10{,}24$, $æ_4 = 12{,}8$, $æ_5 = 25{,}8$.
5. Поскольку $æ_2 \in [3; 68]$, $æ_4 \geq 0$, $æ_5 \geq 0$, то условия оптимальности выполняются. Следовательно, $\overline{x}^0 = æ = (68;\ 10{,}24)$ — оптимальный план задачи с измененными параметрами. Приращение максимальной прибыли равно $\Delta\varphi_{max} = \varphi(\overline{x}^0) - \varphi(x^0) = 6156{,}8 - 6560 = -403{,}2$. Заметим, что теперь, в отличие от измененных в примере 2.13 параметров, не выполняется условие $\Delta\varphi_{max} = y^{0\prime}\Delta b + w^{0\prime}\Delta d^* - v^{0\prime}\Delta d_*$. В самом деле $\Delta\varphi_{max} = -403{,}2 \neq 9 \cdot (-32) = -288$. Новый оптимальный двойственный план теперь имеет вид $y^0 = \left(\frac{14}{5};\ 0;\ 0\right)$, $w_1^0 = \frac{288}{5}$, $w_j^0 = 0$, $j = \overline{2,5}$, $v_3^0 = \frac{14}{5}$, $v_j^0 = 0, j = 1, 2, 4, 5$.

Пример 2.16. Рассмотрим задачу примера 1.19. В качестве базисного множества индексов возьмем $J_Б = \{2, 3\}$, поскольку $\det(a_2,\ a_3) = = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Тогда $J_Н = \{1\}$.

Итерация 1.

1. Уравнения для потенциалов $u_1 + 2u_2 = 1$; $3u_1 + 4u_2 = 3$. Решая эту систему, получаем $u_1 = 1$, $u_2 = 0$.

2. Небазисная оценка $\Delta_1 = 2 - 5 = -3 < 0$. Таким образом, $J_H^+ = J_H = \{1\}$.

3. $æ_1 = 1$.

4. Базисные компоненты псевдоплана находим из системы уравнений $æ_2 + 3æ_3 = 0$, $2æ_2 + 4æ_3 = 7 - 1 = 6$. Получаем $æ_2 = 9 > 4(-)$, $æ_3 = -3 < 1\ (-)$.

5. Полагаем $i_0 = 2$ и вектор l_y находим из системы уравнений $l_{y_1} + 2l_{y_2} = -1$, $3l_{y_1} + 4l_{y_2} = 0$. Получаем $l_{y_1} = 2$, $l_{y_2} = -3/2$. Тогда $l_1 = 5 \cdot 2 + (-3/2) = 17/2$.

6. Поскольку $l_1 > 0$, то $\sigma^0 = \sigma_1 = \infty$. Следовательно, $\psi(\lambda) \to -\infty$ на множестве двойственных планов и, согласно теории двойственности (следствие 2.1), $X = \varnothing$, т. е. ограничения исходной задачи несовместны.

Задания

2.11. Решить задачи 1.26—1.30 двойственным симплекс-методом. Взяв параметры задач из-за пределов устойчивости оптимального двойственного плана, найти оптимальный прямой план, не решая задачи заново.

§ 3. СЕТЕВЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ (СТЗ)

Транспортными задачами ЛП называются математические модели различных прикладных задач по оптимизации перевозок разнообразной продукции. К ним сводятся многочисленные задачи, имеющие и другую физическую природу. Математически транспортные задачи по своей форме подразделяются на ***сетевые транспортные задачи*** (***СТЗ***) и ***матричные транспортные задачи*** (***МТЗ***).

3.1. Транспортная задача. Математическая модель

Пример 3.1. Имеются два пункта A_1 и A_2 производства некоторого товара, причем в пункте A_1 этого товара сосредоточено 10 ед., в пункте A_2 — 5 ед. В пунктах A_3 и A_4 этот товар потребляется. Потребности пунктов A_3 и A_4 составляют соответственно 8 и 7 ед. Доставить этот товар от производителей к потребителям можно различными путями. Имеются еще два промежуточных пункта A_5 и A_6, в которых возможна смена транспорта. Стоимости перевозок единицы товара из одного пункта в другой указаны в табл. 3.1.

В задаче требуется доставить товар от производителей к потребителям с минимальными суммарными транспортными расходами.

Таблица 3.1

Направление пути	Стоимость перевозки (д. е.)
$A_1 \to A_2$	5
$A_1 \to A_5$	4
$A_2 \to A_3$	2
$A_2 \to A_6$	1
$A_3 \to A_4$	2
$A_5 \to A_2$	2
$A_5 \to A_3$	3
$A_6 \to A_3$	3
$A_6 \to A_4$	3

Составим математическую модель сформулированной задачи. Обозначим через x_{ij} количество товара, перевозимого по пути $A_i \to A_j$. Тогда, исходя из данных табл. 3.1, стоимость перевозки товара из пункта A_1 в пункт A_2 равна $5x_{12}$, из A_1 в A_5 — $4x_{15}$ и т. д. Суммарная стоимость транспортных расходов будет равна

$$\varphi(x) = 5x_{12} + 4x_{15} + 2x_{23} + x_{26} + 2x_{34} + \\ + 2x_{52} + 3x_{53} + 3x_{63} + 3x_{64}. \qquad (3.1)$$

Здесь $x = (x_{12}, x_{15}, x_{23}, x_{26}, x_{34}, x_{52}, x_{53}, x_{63}, x_{64})$. Отразим в модели ограничения на переменные x_{ij}. Поскольку от производителя A_1 весь товар должен быть вывезен, то имеем

$$x_{12} + x_{15} = 10. \qquad (3.2)$$

Теперь в пунктах A_2 и A_5 будет сосредоточено товара соответственно $5 + x_{12}$ и x_{15}. Но пункт A_5 является промежуточным, в котором товар не требуется, поэтому он должен быть вывезен, т. е. согласно данным табл. 3.1 получим

$$x_{52} + x_{53} = x_{15}. \qquad (3.3)$$

С учетом (3.2), (3.3) в пункте A_2 объем товара увеличится и станет равным $5 + x_{12} + x_{52}$. Весь этот товар должен быть вывезен. Таким образом, с учетом путей, указанных в табл. 3.1, будем иметь

$$x_{23} + x_{26} = 5 + x_{12} + x_{52}. \qquad (3.4)$$

Пункт A_6 тоже промежуточный, поэтому весь товар, который в него поступит, должен быть вывезен:

$$x_{63} + x_{64} = x_{26}. \qquad (3.5)$$

Пункт A_3 является потребителем товара, причем потребности составляют 8 ед. Поэтому из прибывающего в этот пункт товара из пунктов A_2, A_5, A_6 соответственно x_{23}, x_{53}, x_{63} ед. в пункте A_3 остается 8 ед., а остальной товар x_{34} отправляется в пункт A_4. Таким образом, получим

$$8 + x_{34} = x_{23} + x_{53} + x_{63}. \qquad (3.6)$$

Наконец, пункт A_4 является потребителем товара. Товар в него поступает из пунктов A_3 и A_6, поэтому будем иметь

$$7 = x_{34} + x_{64}. \qquad (3.7)$$

Как следует из равенств (3.2)—(3.7), для каждого из пунктов A_i суммарное количество привезенного в этот пункт товара и произведенного в нем равно суммарному количеству вывезенного из этого пункта товара и потребленного в нем. Эти условия называют ***условиями баланса*** для каждого из пунктов. Ниже эти условия будут переписаны в удобной для дальнейших рассуждений форме.

Отметим также, что выполняются очевидные неравенства

$$x_{ij} \geq 0 \tag{3.8}$$

($x_{ij} > 0$, если товар перевозится по пути $A_i \to A_j$, и $x_{ij} = 0$ — в противном случае). Поскольку суммарные транспортные издержки должны быть минимальными, то функция (3.1) минимизируется по всем x_{ij}, удовлетворяющим ограничениям (3.2)—(3.8), т. е. математическая модель задачи принимает вид (условия баланса записаны последовательно для каждого пункта A_i, $i = \overline{1,6}$)

$$\varphi(x) = 5x_{12} + 4x_{15} + 2x_{23} + x_{26} + 2x_{34} + \\ + 2x_{52} + 3x_{53} + 3x_{63} + 3x_{64} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{12} + x_{15} = 10, \\ -x_{12} + x_{23} + x_{26} - x_{52} = 5, \\ -x_{23} + x_{34} - x_{53} - x_{63} = -8, \\ -x_{34} - x_{64} = -7, \\ -x_{15} + x_{52} + x_{53} = 0, \\ -x_{26} + x_{63} + x_{64} = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U.$$

Здесь через (i, j) обозначен путь из A_i в A_j; U — множество всех путей, по которым можно перевезти товар.

Как видим, задача (3.9) является задачей ЛП: $\varphi(x) = c'x \to \min$, $Ax = b$, $x \geq 0$. Однако эта задача имеет специальный вид. Каждый столбец матрицы A основных ограничений соответствует пути из некоторого пункта A_i в пункт A_j. Обозначим этот столбец через a_{ij}. Из (3.9) видим, что у столбца a_{ij} на i-м месте стоит 1, на j-м -1, а остальные элементы столбцов нулевые. Эта специфика позволяет модифицировать приведенный в § 1 симплекс-метод.

3.2. Постановка задачи. Основные определения

Рассмотрим задачу, сформулированную в предыдущем пункте, в общем виде.

Пусть $I=\{1, 2, ..., m\}$ — множество элементов, которые назовем ***узлами*** (в приведенной выше задаче это пункты A_i, $i=\overline{1,m}$). Пусть некоторые пары узлов $i, j \in I$, упорядочены. Каждую такую пару будем обозначать через (i, j) и называть ***дугой с началом i и концом j*** (в приведенной выше задаче это путь из A_i в A_j; предполагается, что существуют только пути с односторонним движением). Множество всех дуг обозначим через U.

Совокупность $S=\{I, U\}$ называется ***ориентированной сетью***. Графически будем обозначать узлы кружками с номером узла внутри, а дуги — линиями со стрелками в конце дуги. Каждому i-му узлу припишем число a_i — ***интенсивность узла***. Если $a_i>0$, то узел называется ***источником*** (в примере 3.1 — пункт производства), если $a_i<0$ — ***стоком*** (пункт потребления), если $a_i=0$ — ***нейтральным узлом*** (***транзитным, промежуточным***). На рисунках источники и стоки будем отмечать стрелками, входящими в источник и выходящими из стока, а около них записывать величину $|a_i|$ — объем предложения или спроса соответственно.

Каждой дуге (i, j) припишем два числа: $x_{ij}\geq 0$ — ***дуговой поток***[1] и c_{ij} — ***стоимость единичного дугового потока***. Величины c_{ij} будем на рисунке записывать над дугами или слева от них.

Графическая интерпретация данных примера 3.1 приведена на рис. 3.1.

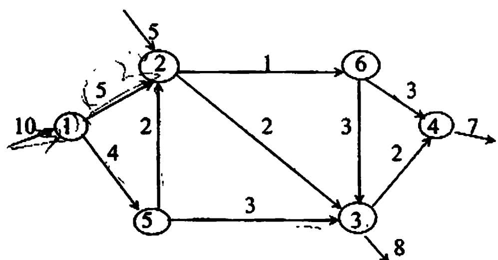


Рис. 3.1

Для каждого узла i обозначим через $I_i^+=I_i^+(U)=\{j:(i,j)\in U\}$ множество узлов, в которые идут дуги из узла i, а через $I_i^-=I_i^-(U)=\{j:(j,i)\in U\}$ — множество узлов, из которых идут дуги в узел i. Тогда ***условия баланса***, о которых шла речь в п. 3.1, для каждого узла имеют вид

$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i\in I. \tag{3.10}$$

[1] Случай $d_{\bullet ij}\leq x_{ij}\leq d_{ij}^{\bullet}$ рассмотрен в п. 3.10*.

Совокупность $x = (x_{ij}, (i, j) \in U) \geq 0$ дуговых потоков называется ***потоком на сети S*** (или ***сетевым потоком***), если она удовлетворяет ограничениям (3.10). Тогда ***стоимость сетевого потока***, очевидно, равна $\varphi(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij}$ (в примере 3.1 — это суммарные транспортные издержки).

Сетевая транспортная задача (СТЗ) (другие названия: ***транспортная задача в сетевой форме, задача о потоке минимальной стоимости***) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x) = \sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} \to \min, \\ &\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I, \quad x_{ij} \geq 0, \quad (i, j) \in U. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Сетевой поток x^0 — решение задачи (3.11) — называется ***оптимальным***.

Обозначим через X множество всех сетевых потоков. Из условий баланса (3.10) следует, что если $X \neq \varnothing$, то

$$\sum_{i\in I} a_i = 0. \tag{3.12}$$

Для этого достаточно просуммировать по i все условия (3.10).

Условие (3.12) называется ***условием общего баланса***. В интерпретации примера 3.1 оно означает, что совокупный спрос равен совокупному предложению.

Рассмотрим сначала задачи, для которых выполняется условие общего баланса.

3.3. Основные сетевые понятия и утверждения

Дугу (i, j) без ориентации назовем ***ребром*** с граничными узлами i, j и обозначим через $\{i, j\}$.

Узел назовем ***висячим***, если он граничен для единственного (***висячего***) ***ребра***. (На рис. 3.2 висячий узел 3, а висячее ребро $\{1, 3\}$.) Последовательность ребер $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \ldots, \{i_{k-1}, i_k\}$ называется (***простой***) ***цепью***, соединяющей узлы i_1 и i_k. (На рис. 3.2, например, такой цепью, соединяющей узлы 1 и 5, является последовательность ребер $\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}$. Понятно, что для данного примера узлы 1 и 5 соединяет не единственная цепь — имеются еще две цепи: $\{1, 4\}, \{4, 5\}$ и $\{1, 5\}$.) Цепь можно обозначать и следующим образом: $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Если в цепи $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ нет одинаковых узлов, то ***цепь*** называется ***элементарной***. (Рассмотренные выше цепи являются элементарными.) Выберем направление движения вдоль цепи. Если при этом направление дуги (i, j), соответствующей ребру $\{i, j\}$ цепи, совпадает с выбранным направлением движения вдоль цепи, то ***дуга*** называется ***прямой***, в противном случае — ***обратной***. (В цепи $\{1, 5, 4, 2\}$ с направлением движения $1 \to 5$ дуга (1, 5) прямая, а дуги (4, 5), (2, 4) обратные.) ***Сеть*** называется ***связной***, если любые ее два узла можно соединить цепью. (На рис. 3.2 сеть является связной. На рис. 3.3 сеть не связная, поскольку узлы 2 и 3 нельзя соединить с остальными цепью.) Цепь $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$, в которой $i_1 = i_k$, т. е. последний узел совпадает с первым, называется ***циклом***. (На рис. 3.2 цепь $\{1, 2, 4, 5, 1\}$ — цикл.)

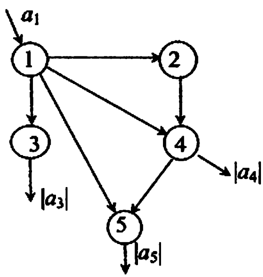


Рис. 3.2

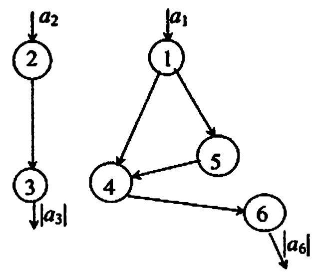


Рис. 3.3

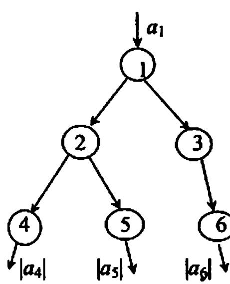


Рис. 3.4

В дальнейшем рассматриваются простые, элементарные цепи и связные сети.

Сеть $S = \{I, U\}$, в которой $|I| = |U| + 1$, называется ***деревом***[1] (рис. 3.4).

Лемма 3.1. *Сеть без циклов содержит висячее ребро.*

Лемма 3.2. *Удаление висячего ребра вместе с висячим узлом или ребра из цикла не нарушает связности сети.*

Лемма 3.3. *Сеть является деревом тогда и только тогда, когда она не содержит циклов.*

Лемма 3.4. *Каждая пара узлов дерева связана единственной цепью.*

---

[1] Знак $|M|$ для множества M означает мощность этого множества. Для множества, состоящего из конечного числа элементов, этот знак означает количество элементов в множестве M.

Для сети $S = \{I, U\}$ сеть $\tilde{S} = \{I, \tilde{U}\}$, где $U \subset \tilde{U}$, называется ***частичной сетью***. Если частичная сеть — дерево, то она называется ***деревом сети***. (На рис. 3.2 частичная сеть $\tilde{S} = \{I, \tilde{U}\}$, где $\tilde{U} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$, будет деревом сети. Другое дерево сети: $S_1 = \{I, U_1\}$, где $U_1 = \{(1, 3), (1, 2), (2, 4), (4, 5)\}$.)

Лемма 3.5. *Если к дереву сети $\tilde{S} = \{I, \tilde{U}\}$ добавить дугу $(i, j) \notin \tilde{U}$, то новая частичная сеть $S_1 = \{I, U_1\}$, где $U_1 = \tilde{U} \bigcup (i, j)$, содержит ровно один цикл.*

3.4. Базисный сетевой поток

Поскольку задача (3.11) является задачей ЛП, то введем некоторые аналогичные понятия, как это было сделано в § 1. В частности, по аналогии с понятием базисного плана введем понятие базисного сетевого потока. Прежде всего заметим, что если в матрице A в основных ограничениях задачи (3.11) сложить строки, то получим строку из нулевых элементов, т. е. $\operatorname{rank} A < m$. Можно доказать, что $\operatorname{rank} A = m - 1$. Таким образом, в отличие от канонической задачи (1.9), для которой вводилось понятие базисного плана и в которой $\operatorname{rank} A = m$, а следовательно, можно было выделить m линейно независимых столбцов матрицы A, в задаче (3.11) можно выделить только $m-1$ линейно независимых столбцов. Поскольку, как было указано выше, каждый столбец матрицы A в задаче (3.11) соответствует некоторой дуге, то совокупности линейно независимых столбцов соответствует некоторое множество дуг $U_Б \subset U$, причем $|U_Б| = m - 1$. Можно показать, что частичная сеть $S_Б = \{I, U_Б\}$ является деревом сети. Обозначим $U_Н = U \setminus U_Б$.

Сетевой поток $x = (x_{ij},\ (i, j) \in U)$ назовем ***базисным***, если $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_Н$, а множество дуг $U_Б$ такое, что частичная сеть $S_Б = \{I, U_Б\}$ — дерево сети.

Дуги $(i, j) \in U_Б$ и соответствующие им дуговые потоки x_{ij} назовем ***базисными***, x_{ij}, $(i, j) \in U_Н$, — ***небазисными***. ***Базисный сетевой поток*** называется ***невырожденным***, если $x_{ij} > 0$, $(i, j) \in U_Б$.

Заметим, что не любое множество дуг $U_Б$, для которого $S_Б = \{I, U_Б\}$ — дерево сети, можно положить в основу определения базисного сетевого потока. Как и в симплекс-методе, где $A_Б$ только тогда является базисной матрицей, когда $A_Б^{-1} b \geq 0$, в задаче (3.11) $U_Б$ будет базисным множеством дуг, если построенная по нему совокупность x_{ij}, $(i, j) \in U$, будет удовлетворять не только условиям баланса, но и прямым ограничениям.

Совокупность $x=(x_{ij},\ (i,j)\in U)$, для которой выполняются условия баланса (3.10), называется ***псевдопотоком***. Если в псевдопотоке $x_{ij}\geq 0$, $(i,j)\in U$, то x — сетевой поток.

3.5. Критерий оптимальности базисного сетевого потока

Как и в симплекс-методе, вводятся потенциалы, которые в § 1 вычислялись по базисной матрице $A_Б$ из векторного уравнения $A'_Б u=c_Б$. В задаче (3.11) $A_Б=(a_{ij},\ (i,j)\in U_Б)$, $c'_Б=(c_{ij},\ (i,j)\in U_Б)$. Поскольку у вектора a_{ij} на i-м месте стоит 1, на j-м -1, то получим систему уравнений для определения потенциалов

$$u_i-u_j=c_{ij},\ (i,j)\in U_Б. \tag{3.13}$$

Каждый потенциал u_i соответствует i-й строке основных ограничений, которая для задачи (3.11) представляет условие баланса для i-го узла. Следовательно, можно сказать, что каждому узлу приписывается потенциал. (На рисунках потенциалы узлов будем записывать рядом с узлами.) В системе (3.13) m неизвестных (по количеству узлов в сети) и $m-1$ уравнений (по количеству дуг $|U_Б|=m-1$). Следовательно, значение одного потенциала можно взять произвольно (чаще всего полагают равным нулю). Остальные потенциалы определяются однозначно, поскольку $\operatorname{rank} A_Б=m-1$, где $A_Б=(a_{ij},\ (i,j)\in U_Б)$.

Далее, как и в симплекс-методе, подсчитываем оценки (см. формулы (1.18)), которые для задачи (3.11) будут иметь вид

$$\Delta_{ij}=c_{ij}-(u_i-u_j),\ (i,j)\in U_Н. \tag{3.14}$$

Критерий оптимальности формулируется аналогично (с точностью до знака по сравнению с симплекс-методом, поскольку задача на минимум).

Теорема 3.1 (критерий оптимальности). *Для оптимальности базисного сетевого потока достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$\Delta_{ij}\geq 0,\ (i,j)\in U_Н. \tag{3.15}$$

Заметим, что формула приращения стоимости сетевого потока имеет вид

$$\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\sum_{(i,j)\in U_Н}\Delta_{ij}\Delta x_{ij}. \tag{3.16}$$

Отсюда ясен ***физический смысл оценок***: *оценка Δ_{ij} — скорость изменения в точке x стоимости сетевого потока при увеличении небазисного дугового потока x_{ij}.*

3.6. Метод потенциалов для решения сетевой транспортной задачи. Итерация

Как видно из предыдущих пунктов, этот метод является модификацией симплекс-метода. Поэтому в дальнейшем не будем приводить аналогию с соответствующими операциями симплекс-метода.

Пусть x — некоторый базисный сетевой поток, $U_Б$ — базисное множество дуг. С учетом приведенных выше лемм ***итерация метода потенциалов*** состоит из следующих шагов.

1. Решаем систему уравнений (3.13) и находим потенциалы узлов u_i, $i=\overline{1,m}$.

Замечание 3.1. При решении задачи вручную и определении потенциалов полагают равным нулю потенциал того узла, которому инцидентно наибольшее количество базисных дуг (т. е. базисных дуг, которые входят в этот узел или выходят из него).

2. По потенциалам узлов подсчитываем оценки небазисных дуг (формулы (3.14)).
3. Проверяем условия оптимальности (3.15). Если они выполняются, решение заканчиваем: базисный поток x оптимальный. Если же существует дуга (i_0, j_0), для которой

$$\Delta_{i_0 j_0} < 0, \;\; (i_0, \;\; j_0) \in U_Н, \tag{3.17}$$

переходим к следующему шагу.

Замечание 3.2. При переходе к следующему шагу, если имеется несколько дуг, для которых выполняется неравенство (3.17), при ручном счете в качестве дуги (i_0, j_0) рекомендуется выбирать ту, для которой оценка минимальна. В этом случае на данной итерации целевая функция будет максимально убывать. При машинной реализации метода потенциалов в качестве дуги (i_0, j_0) выбирается первая же дуга, для которой выполняется неравенство (3.17).

4. Добавим дугу (i_0, j_0), для которой $\Delta_{i_0 j_0} < 0$, к базисному множеству дуг $U_Б$. Согласно лемме 3.5, новая частичная сеть содержит ровно один цикл, причем дуга (i_0, j_0) входит в этот цикл. Выберем направление движения вдоль цикла по направлению дуги (i_0, j_0), т. е. $i_0 \to j_0$.

5. Полагаем $\theta_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & (i,j) \in U_{\text{Ц}}^-, \\ +\infty, & (i,j) \in U_{\text{Ц}}^+, \end{cases}$ где $U_{\text{Ц}}^+$, $U_{\text{Ц}}^-$ — множества соответственно прямых и обратных дуг цикла. Определяем $\theta^0 = \min\limits_{(i,j) \in U_{\text{Ц}}} \theta_{ij}$, где $U_{\text{Ц}}$ — множество всех дуг цикла. Из определения θ^0 следует, что если все дуги цикла прямые, тогда $\theta^0 = \infty$, т. е. стоимость сетевого потока не ограничена снизу. В этом случае решение задачи завершаем. В противном случае переходим к следующему шагу.
6. Поток x заменим потоком $\overline{x}$ следующим образом: дуговые потоки обратных дуг цикла уменьшаем на величину θ^0, дуговые потоки прямых дуг цикла, в том числе дуги (i_0, j_0), увеличиваем на θ^0. Все остальные дуговые потоки (как базисные, так и небазисные) не меняем. Заметим, что поскольку для небазисных дуговых потоков изменится лишь $x_{i_0 j_0}$ на величину θ^0, то стоимость сетевого потока, согласно (3.16), уменьшится на величину $\theta^0 \left|\Delta_{i_0 j_0}\right|$, если сетевой базисный поток невырожденный, т. е. $\theta^0 > 0$.
7. Формируем новое базисное множество $\overline{U}_{\text{Б}} = \left(U_{\text{Б}} \setminus (i_*, j_*)\right) \cup (i_0, j_0)$, где (i_*, j_*) определяется из условия $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, и переходим к шагу 1.

Метод решения задачи по описанным выше правилам называется ***методом потенциалов***.

3.7. Построение начального базисного сетевого потока. Первая фаза метода потенциалов

Как и для любого численного метода, для решения транспортной задачи необходим начальный базисный сетевой поток. При ручном счете для этого, как правило, используется следующий так называемый "*метод проб и ошибок*".

Берем произвольный источник i_1. Выбираем узел i_2 из $I_{i_1}^+$ такой, что $c_{i_1 i_2} = \min\limits_{i \in I_{i_1}^+} c_{i_1 i}$. Полагаем $x_{i_1 i_2} = a_{i_1}$. Далее, как и в первом случае, выбираем узел $i_3 \in I_{i_2}^+$ из условия $c_{i_2 i_3} = \min\limits_{i \in I_{i_2}^+} c_{i_2 i}$ и полагаем $x_{i_2 i_3} = x_{i_1 i_2}$, если i_2 — нейтральный узел. Если i_2 — сток, причем $x_{i_1 i_2} > \left|a_{i_2}\right|$, полагаем $x_{i_2 i_3} =$

$= x_{i_1 i_2} - \left| a_{i_2} \right|$; если i_2 — сток и $x_{i_1 i_2} \le \left| a_{i_2} \right|$, переходим к следующему узлу-источнику; если i_2 — источник, полагаем $x_{i_2 i_3} = x_{i_1 i_2} + a_{i_2}$.

Если в процессе построения базисного потока придем в узел-сток и окажется, что из этого узла не выходят дуги, а поток дуги, входящей в этот узел, больше модуля интенсивности этого узла, тогда в предыдущем узле перераспределяем дуговые потоки, полагая величину потока дуги с минимальной стоимостью, равной модулю интенсивности узла, в который входит эта дуга, а оставшуюся часть полагаем равной величине потока дуги, следующей по возрастанию стоимости дугового потока. Если же таковой второй дуги нет, возвращаемся к перераспределению величин потоков дуг, выходящих из предыдущего узла, и т. д.

Выбираемые в процессе построения базисного сетевого потока дуги на рисунке выделяем жирными стрелками, а величины дуговых потоков записываем под дугами или справа от них. Выбранные дуги включаются в множество $U_Б$.

Для второго и последующих источников поступаем таким образом. Если в этот источник не входят базисные дуги, то, взяв дугу по аналогии с указанным выше выбором, полагаем дуговой поток равным интенсивности этого узла, в противном случае к интенсивности этого узла прибавляем величины дуговых потоков, поступивших в этот узел. На следующих шагах, выбрав дугу с минимальной стоимостью, величину дугового потока полагаем равной: *а*) сумме потоков дуг, входящих в узел, если этот узел нейтральный; *б*) сумме потоков дуг, входящих в этот узел, и интенсивности этого узла, если узел — источник; *в*) если узел — сток и сумма потоков дуг, входящих в узел, больше модуля интенсивности узла, то этой сумме за вычетом модуля интенсивности.

Если имеем узел-сток и сумма потоков дуг, входящих в узел, не превышает модуля интенсивности этого узла, то переходим к следующему узлу-источнику, если еще имеется такой.

Замечание 3.3. При определении дуговых потоков, выбирая дугу с минимальной стоимостью, обращаем внимание на то, чтобы ее добавление к уже отмеченным дугам не образовывало цикла. Иначе выбираем следующую дугу по возрастанию стоимости дугового потока.

Через конечное число шагов при выполнении условия общего баланса (3.12) процесс будет завершен. Если количество выделенных дуг равно $m - 1$, то, полагая для остальных дуг потоки равными нулю (на рисунке они обычно не указываются), получим базисный сетевой поток. Если количество выделенных дуг меньше $m - 1$, тогда произвольным образом добавляем недостающие дуги, но чтобы при этом не образовывался ни один цикл, а дуговые потоки полагаем равными нулю (как правило, добавляются дуги с минимальными стоимостями дуговых потоков).

Другой метод построения начального базисного потока состоит в решении вспомогательной задачи, которая называется ***первой фазой метода потенциалов***. Ее суть состоит в следующем.

Добавляем дополнительный (***искусственный***) ***узел*** $m+1$ с нулевой интенсивностью ($a_{m+1}=\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$) и множество m (***искусственных***) ***дуг*** $U_И$ вида $(i, m+1)$, если i — узел-источник или нейтральный узел, и $(m+1, i)$, если i — узел-сток. Множество искусственных дуг образует базисное множество дуг. Положим потоки этих дуг равными $x_{i,m+1}=a_i$, если i — источник или нейтральный узел, $x_{m+1,i}=|a_i|$, если i — сток, а для остальных дуг сети $x_{ij}=0$, $(i, j)\in U$. Построенный сетевой поток будет базисным.

На расширенной сети ***задача первой фазы*** состоит в минимизации суммы искусственных дуговых потоков $\sum_{(i,j)\in U_И} x_{ij}$, т. е. $c_{ij}=0$, $(i, j)\in U$, $c_{ij}=1$, $(i,j)\in U_И$. Задача первой фазы решается методом потенциалов, как описано в п. 3.6. В результате решения задачи первой фазы получим оптимальный базисный сетевой поток x^* с базисным множеством дуг $U_Б^*$, который обладает одним из следующих свойств:

1) существует дуга $(i_*, j_*)\in U_И$, что $x^*_{i_*j_*}\neq 0$;

2) $x^*_{ij}=0$, $(i,j)\in U_И$; среди базисных дуг имеется лишь одна искусственная;

3) $x^*_{ij}=0$, $(i,j)\in U_И$; среди базисных дуг имеется больше одной искусственной дуги.

В случае 1 исходная задача не имеет решения.

В случае 2 отбрасываем все искусственные дуги и дополнительный узел. Получим начальный базисный поток исходной задачи.

В случае 3 возьмем среди небазисных дуг исходной сети дугу (i_*, j_*), которая с базисными дугами образует цикл (см. лемму 3.5), причем в цикле будут две искусственные базисные дуги. Выведем одну из них из базиса, заменив ее дугой (i_*, j_*). Через конечное число шагов получим базисное множество, содержащее только одну искусственную дугу, т. е. придем к случаю 2.

Пример 3.2. Рассмотрим задачу (3.9). На рис. 3.1 дано графическое представление этой задачи. Построим начальный базисный сетевой поток по методу проб и ошибок. Начинаем с узла 1. Полагаем: $x_{15}=a_1=10$,

$x_{52} = 10$, $x_{26} = x_{52}+a_2 = 15$, $x_{64} = 7$, $x_{63} = 8$. Поскольку узлов $m = 6$, а количество отмеченных дуг $m-1 = 5$, причем из них нельзя построить ни одного цикла, полагая $x_{ij} = 0$ для остальных дуг, получаем базисный сетевой поток (рис. 3.5).

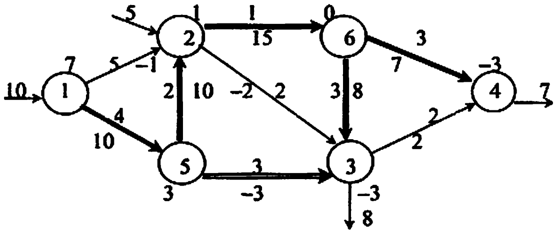


Рис. 3.5

Из уравнений (3.13) найдем потенциалы узлов. Для этого полагаем $u_6 = 0$ (узлу 6 инцидентны три базисные дуги). Остальные потенциалы определяются однозначно (все потенциалы записаны рядом с узлами). По формулам (3.14) подсчитываем оценки небазисных дуг. Их значения на рисунке помещены под дугами или справа от них.

Поскольку имеются отрицательные оценки, построенный базисный сетевой поток не оптимален. Выбираем небазисную дугу с минимальной оценкой. Таковой является дуга $(i_0, j_0) = (5, 3)$. На рис. 3.5 она отмечена двойной стрелкой. Добавление этой дуги к базисному множеству дуг образует цикл $\{5, 3, 6, 2, 5\}$. В направлении $5 \to 3$ движения вдоль цикла дуги (6, 3), (2, 6), (5, 2) обратные. Определяем $\theta^0 = x_{63} = 8 = \min\limits_{(i,j)\in U_{\overline{Ц}}} x_{ij}$. Таким образом, $(i_*, j_*) = (6, 3)$. Из базисного множества удаляем дугу (6, 3), заменив ее дугой (5, 3). Новый базисный поток будет иметь вид: $\bar{x}_{63} = x_{63} - \theta^0 = 0$, $\bar{x}_{26} = x_{26} - \theta^0 = 7$, $\bar{x}_{52} = x_{52} - \theta^0 = 2$, $\bar{x}_{53} = x_{53} - \theta^0 = 8$. Остальные дуговые потоки не меняются.

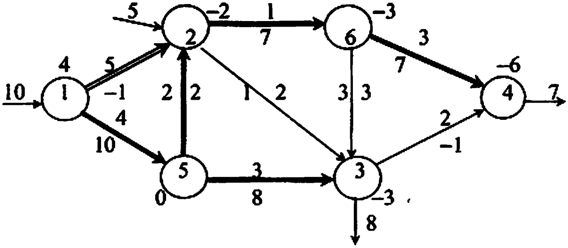


Рис. 3.6

Дальнейшее решение задачи представлено на рис. 3.6—3.7.

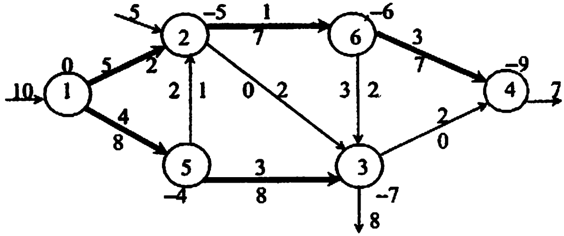


Рис. 3.7

Поскольку на рис. 3.7 все оценки неотрицательны, то полученный сетевой поток оптимальный. Таким образом, товар от первого производителя будет отправлен третьему потребителю в объеме 8 ед. по пути 1→5→3, а четвертому в объеме 2 ед. по пути 1→2→6→4. Весь товар от второго производителя отправляется четвертому потребителю по пути 2→6→4. При этом минимальные суммарные издержки на доставку товара от производителей к потребителям равны $\varphi_{\min}=5\cdot 2+1\cdot 7+3\cdot 7+$ $+4\cdot 8+3\cdot 8=94$ (д. е.).

Применение первой фазы увеличивает число итераций, поэтому здесь ее не используем. Использование первой фазы приведено в примерах 3.5, 3.6 с пропускными способностями дуг.

Замечание 3.4. При ручном счете для задачи с односторонними прямыми ограничениями, как правило, первую фазу не используют.

3.8. Открытая и закрытая модели СТЗ

Модель сетевой транспортной задачи называется ***закрытой***, если выполняется условие общего баланса (3.12), в противном случае — ***модель открытая***. Последнюю можно интерпретировать как задачу, в которой совокупный спрос не равен совокупному предложению. Если $a=\sum_{i=1}^{m}a_i<0$, спрос превышает предложение, если $a>0$ — предложение превышает спрос. Открытая модель легко сводится к закрытой. Пусть $a>0$. Добавим ***вспомогательный узел*** $m+1$ с интенсивностью $a_{m+1}=$ $=-a<0$, т. е. этот узел будет стоком. Соединим его с источниками дугами $(i,\ m+1)$ и положим $c_{i,m+1}=0$. Если $a<0$, то интенсивность $(m+1)$-го узла равна $a_{m+1}=|a|$, т. е. этот узел является источником. Соединяем его дугами $(m+1,\ i)$ со стоками и полагаем $c_{m+1,i}=0$.

Далее применяем к расширенной задаче метод потенциалов, описанный в п. 3.6, 3.7.

Пусть x^0 — решение расширенной задачи. Тогда в первом случае значение $x^0_{i,m+1}$ означает оставшийся у i-го поставщика товар, во втором случае $x^0_{m+1,j}$ — недопоставка товара i-му потребителю.

Замечание 3.5. Для открытой модели можно избежать первой фазы. Для этого в обоих описанных выше случаях следует соединить вспомогательный узел со всеми остальными узлами сети дугами $(i, m+1)$ с источниками и нейтральными узлами и $(m+1, i)$ — со стоками, положив для всех этих дуг $c_{ij}=0$. Все вспомогательные дуги образуют базисное множество дуг. Начальный базисный поток строится следующим образом: $x_{ij}=0$ для всех дуг исходной сети, $x_{i,m+1}=a_i$, $x_{m+1,i}=|a_i|$ — для вспомогательных дуг.

Пример 3.3. Рассмотрим задачу примера 3.1, в которой будем считать, что в пункте A_4 требуется только 4 ед. товара. Тогда модель становится открытой, поскольку совокупный спрос равен 12 ед., а совокупное предложение 15 ед.

Введем дополнительный узел-сток 7 (поскольку спрос превышает предложение) с объемом спроса, равным $|a_7|=15-12=3$ ед., и соединим дугами (1, 7), (2, 7) этот узел с первым и вторым узлами (источниками) и стоимостью единичных потоков $c_{17}=c_{27}=0$. На рис. 3.8 изображена эта сеть. На этом же рисунке изображен и начальный базисный поток, который тоже построен методом проб и ошибок. Начинаем с узла 1. По дуге (1, 7) отправляем только 3 ед., поскольку в узле 7 требуется 3 ед. и из него не выходят дуги, т. е. $x_{17}=3$. Оставшийся товар в объеме 7 ед. направляем по дуге (1, 5), т. е. $x_{15}=7$, далее по дуге (5, 2), т. е. $x_{52}=7$. В узле 2 становится $5+7=12$ ед., но этот товар не отправляем в узел 7, поскольку в нем уже имеется 3 ед., необходимые в этом узле. Далее поступаем, как в примере 3.2. Решение предлагается в качестве упражнения.

На рис. 3.9 представлен оптимальный план.

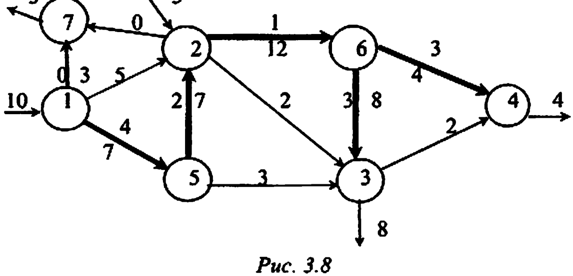


Рис. 3.8

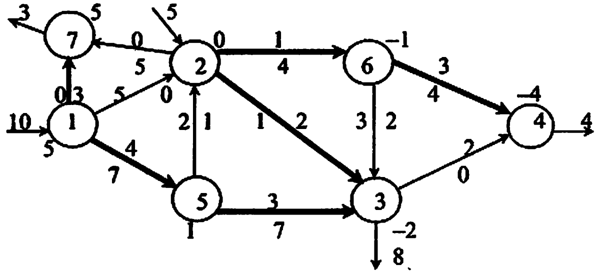


Рис. 3.9

Величина $x_{17}=3$ означает, что в пункте A_1 остается не реализованным товар в объеме 3 ед. Из пункта A_1 товар в объеме 7 ед. отправляется в пункт A_3 по пути 1→5→3. Из пункта A_2 товар распределяется по двум направлениям: в пункт A_3 1 ед. по пути 2→3 и в пункт A_4 4 ед. по пути 2→6→4. Минимальные издержки на перевозку товара равны $\varphi_{\min}=$ $=4\cdot 7+3\cdot 7+2\cdot 1+1\cdot 4+3\cdot 4=67$ (д. е.).

Задания

3.1. На трех железнодорожных станциях A_1, A_4, A_5 имеются пустые вагоны, которые необходимо перегнать под погрузку к станциям A_2, A_7. Имеется сеть железных дорог, изображенная на рис. 3.10. Предполагается, что движение по всем дорогам одностороннее. Железнодорожные станции A_3, A_6 являются промежуточными, в которых меняется стоимость перегона одного вагона.

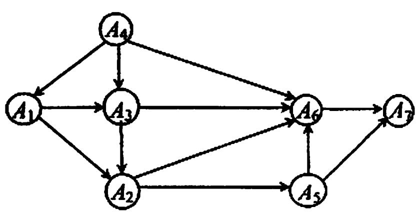


Рис. 3.10

В табл. 3.2*а* задано количество вагонов, имеющихся на станциях A_1, A_4, A_5 и необходимых на станциях A_2, A_7 (в дес. шт.). В табл. 3.2*б* указана стоимость перегона одного вагона между соответствующими железнодорожными станциями. Составить математическую модель задачи и определить количество и пути перегона вагонов с минимальными издержками.

Таблица 3.2а

Варианты	Спрос (?) и предложение (+)				
	$A_1(+)$	$A_2(?)$	$A_4(+)$	$A_5(+)$	$A_7(?)$
1	10	5	4	6	15
2	3	7	10	2	8
3	4	6	12	4	14
4	15	4	6	4	21
5	8	7	10	12	23
6	10	4	1	3	10
7	20	2	2	5	25
8	3	4	3	1	3
9	4	5	7	4	10
10	6	7	4	12	15
11	7	3	3	2	9
12	3	7	1	7	4
13	11	4	4	9	20
14	16	8	8	2	18
15	22	32	11	11	12
16	9	16	12	3	8
17	19	20	15	12	26
18	8	18	20	4	14
19	13	4	4	2	15
20	12	12	1	9	10

Таблица 3.2б

Варианты	Стоимость перегона 1 вагона — для задания 3.1 (или перевозки единицы продукции — для задания 3.2)											
	c_{12}	c_{13}	c_{25}	c_{26}	c_{32}	c_{36}	c_{41}	c_{43}	c_{56}	c_{57}	c_{64}	c_{67}
1	4	2	4	3	4	2	4	5	2	4	7	3
2	10	9	1	10	2	5	7	2	6	5	4	3
3	5	6	3	8	7	5	7	6	2	1	5	4
4	7	2	4	1	1	5	6	4	8	7	5	3
5	8	7	5	4	3	2	1	6	4	9	1	4
6	5	5	4	3	2	4	3	5	7	10	1	8
7	6	4	3	2	10	8	7	6	4	3	5	3
8	3	2	10	7	6	5	4	4	8	10	1	8
9	3	2	1	1	4	5	6	5	8	10	10	10
10	5	6	7	8	9	3	2	1	1	8	7	6
11	4	2	3	9	7	8	5	6	3	3	5	10
12	3	9	4	10	2	7	5	4	2	2	6	6
13	10	3	2	2	4	5	4	3	10	1	7	4
14	8	4	4	5	1	4	3	2	7	1	8	4
15	1	2	5	7	1	3	2	10	6	4	9	2
16	4	3	2	2	5	2	4	8	5	5	3	8
17	2	1	4	6	6	1	3	7	4	6	2	4
18	5	2	7	2	4	6	5	6	4	5	1	5
19	6	3	3	5	2	4	7	4	8	8	1	1
20	1	3	1	4	4	9	10	3	10	10	8	2

3.2. В пунктах A_1, A_4, A_5 хранится уголь (данные приведены в табл. 3.2*а*, в тыс. т, причем для пункта A_1 запас уменьшаем на 2 тыс. т). В пунктах A_2, A_7 уголь требуется для работы ТЭЦ. Необходимое количество угля для этих ТЭЦ также приведено в табл. 3.2*а*. Сеть дорог изображена на рис. 3.10. Движение по всем дорогам одностороннее. Стоимость перевозки 1 т угля по каждому пути указана в табл. 3.2*б*. Составить математическую модель задачи и определить пути доставки и количество угля, перевозимого по этим путям с минимальными суммарными затратами на перевозку.

3.3. Решить задачу 3.1 с условием того, что потребности станции A_7 в вагонах на 2 дес. шт. меньше, чем указано в табл. 3.2*а*.

3.9. Неединственность оптимального сетевого потока

Как и в задачах ЛП, признаком неединственности оптимального сетевого потока является наличие нулевых небазисных оценок. Другими словами, *если x — оптимальный базисный сетевой поток и существуют другие оптимальные потоки, то среди небазисных оценок есть нулевые и, наоборот, если оптимальный базисный сетевой поток невырожденный и существуют нулевые небазисные оценки, то оптимальный сетевой поток неединственный.*

Пример 3.4. Рассмотрим задачу примера 3.3. В оптимальном базисном сетевом потоке (см. рис. 3.9) имеются две нулевые небазисные оценки: $\Delta_{12}=0$, $\Delta_{34}=0$. Поток невырожденный. Поэтому можем утверждать, что оптимальный сетевой поток неединственный. Легко видеть, что, например, потоки, изображенные на рис. 3.11, 3.12, тоже оптимальные.

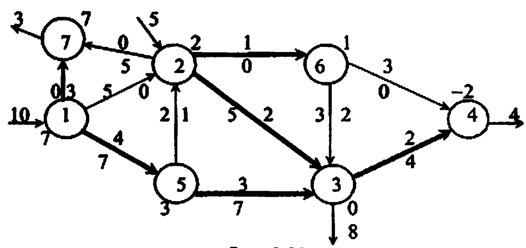


Рис. 3.11

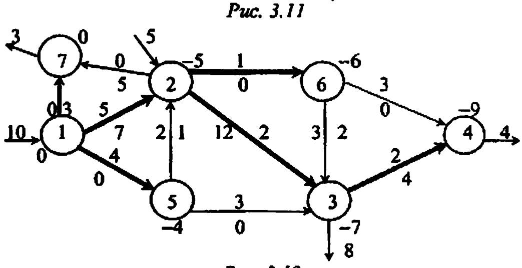


Рис. 3.12

Заметим, что для этой же задачи существуют и другие оптимальные сетевые потоки.

Задания

3.4. В задачах 3.1—3.3 определить, единственный ли оптимальный сетевой поток. Если неединственный, то построить еще хотя бы один оптимальный базисный сетевой поток.

3.10*. Сетевая транспортная задача с пропускными способностями дуг

Заменим в задаче (3.11) прямые ограничения (3.8) на ограничения вида $d_{*ij} \le x_{ij} \le d^*_{ij}$, $(i,j) \in U$. Получим задачу

$$\sum_{(i,j)\in U} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$
$$\sum_{j\in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in I_i^-} x_{ji} = a_i, \quad i \in I, \tag{3.18}$$
$$d_{*ij} \le x_{ij} \le d^*_{ij}, \quad (i,j)\in U,$$

которую называют ***сетевой транспортной задачей с пропускными способностями дуг***.

Определение базисного сетевого потока аналогично определению базисного плана в задаче ЛП с двухсторонними прямыми ограничениями (см. п. 1.11*).

Сетевой поток $x = \{x_{ij},\ (i,j)\in U\}$ называют ***базисным***, если $x_{ij} = d_{*ij} \vee d^*_{ij}$, $(i,j)\in U_{\text{Н}}$, а множество дуг $U_{\text{Б}} = U \setminus U_{\text{Н}}$ такое, что $S_{\text{Б}} = \{I, U_{\text{Б}}\}$ — дерево сети. ***Базисный сетевой поток не вырожден***, если $d_{*ij} < x_{ij} < d^*_{ij}$, $(i,j)\in U_{\text{Б}}$. Как и выше, потенциалы узлов и оценки небазисных дуг определяются по формулам (3.13), (3.14).

Критерий оптимальности базисного сетевого потока. *Для оптимальности базисного сетевого потока x достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_{ij} \ge 0,\ \text{если}\ x_{ij} = d_{*ij};\quad \Delta_{ij} \le 0,\ \text{если}\ x_{ij} = d^*_{ij},\ (i,j)\in U_{\text{Н}}. \tag{3.19}$$

Алгоритм решения задачи (3.18) состоит в следующем.

Пусть заданы базисный сетевой поток x и базисное множество дуг $U_Б$.

1. Решаем систему уравнений (3.13) и находим потенциалы узлов.
2. Подсчитываем оценки небазисных дуг по формулам (3.14).
3. Проверяем условия оптимальности (3.19). Если они выполняются, сетевой поток оптимален. Подсчитываем значение стоимости сетевого потока и решение задачи заканчиваем. В противном случае переходим к следующему шагу.
4. Выбираем дугу (i_0, j_0), для которой условия оптимальности (3.19) не выполняются. Она может быть произвольной. Обычно ее выбирают из условия $\left|\Delta_{i_0 j_0}\right| = \max\left|\Delta_{ij}\right|$, где максимум берется по всем небазисным дугам, для которых не выполняются условия (3.19).
5. Добавляем дугу (i_0, j_0) к базисному множеству дуг $U_Б$. Образуется ровно один цикл. Если $x_{i_0 j_0} = d_{*i_0 j_0}$, то обходим цикл в направлении $i_0 \to j_0$, если же $x_{i_0 j_0} = d^*_{i_0 j_0}$, то обход вдоль цикла совершаем в направлении $j_0 \to i_0$. Подсчитываем
$$\theta_{ij} = \begin{cases} d^*_{ij} - x_{ij}, & (i,j) \in U^+_Ц, \\ x_{ij} - d_{*ij}, & (i,j) \in U^-_Ц, \end{cases}$$
где $U^+_Ц$, $U^-_Ц$ — множества прямых и обратных дуг цикла соответственно.
6. Определяем $\theta^0 = \min\limits_{(i,j) \in U_Ц} \theta_{ij}$, где $U_Ц$ — множество всех дуг цикла.
7. Возможны две ситуации: *а*) $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, *б*) $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, $(i_*, j_*) \in U_Б$. Рассмотрим каждую из них.

   а) Если $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, то базисное множество $U_Б$ оставляем прежним, меняем только базисный сетевой поток:
$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & (i,j) \in U^+_Ц; \\ x_{ij} - \theta^0, & (i,j) \in U^-_Ц; \\ x_{ij}, & (i,j) \in U \setminus U_Ц. \end{cases} \qquad (3.20)$$
   Поскольку в этом случае для дуги (i_0, j_0) условия оптимальности выполняются (небазисный дуговой поток $x_{i_0 j_0}$ перешел с одной границы на другую), то в случае отсутствия других дуг, для которых не

выполняются условия оптимальности, решение заканчиваем: базисный поток (3.20) оптимален. В противном случае переходим к шагу 4.

б) Если $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, тогда заменяем базисное множество дуг на новое $\overline{U}_Б = (U_Б \setminus (i_*, j_*)) \cup (i_0, j_0)$, подсчитываем новый базисный поток по формулам (3.20) и переходим к шагу 1.

Построение начального базисного сетевого потока осуществляется с помощью задачи первой фазы, для чего возьмем любые дуговые потоки исходной задачи, лежащие на одной из границ $\tilde{x}_{ij} = d_{*ij} \vee d^*_{ij}$, $(i, j) \in U$. Подсчитываем невязки $\omega_i = a_i - \left(\sum_{j \in I_i^+} \tilde{x}_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} \tilde{x}_{ji} \right)$. Вводим искусственный узел $m+1$ и соединяем его с узлом i искусственной дугой $(i, m+1)$, если $\omega_i \geq 0$, и искусственной дугой $(m+1, i)$, если $\omega_i < 0$.

Замечание 3.6. Если $\omega_i = 0$, искусственную дугу можно не вводить, дополнив искусственные дуги до базисного множества любой дугой (i, j) или (j, i) исходной задачи, чтобы только не образовался цикл.

Обозначим через $U_И$ множество искусственных дуг. ***Задача первой фазы***

$$\sum_{(i,j) \in U_И} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j \in I_i^+} x_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} x_{ji} = a_i, \ i = \overline{1, m+1}, \ d_{*ij} \leq x_{ij} \leq d^*_{ij}, \ (i, j) \in U, \qquad (3.21)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq |\omega_i|, \ (i, j) \in U_И,$$

где $a_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i = 0$.

Как и выше для задачи (3.11), *ограничения задачи* (3.18) *совместны тогда и только тогда, когда в решении* $\{x^*, \ x^*_И\}$ *задачи* (3.21) *искусственные дуговые потоки нулевые*: $x^*_{ij} = 0, \quad (i, j) \in U_И$.

Начальный базисный сетевой поток для задачи (3.21) имеет вид $\{\tilde{x}, \quad x_{ij} = |\omega_i|, \quad (i, j) \in U_И\}$ с базисным множеством дуг $U_Б = U_И$.

Решение задачи (3.21) проводится по алгоритму, приведенному выше. Применение алгоритма приводит к решению $\{x^*, x^*_И\}$. Если $x^*_И \neq 0$, то ограничения задачи (3.18) несовместимы и решение заканчиваем. Если $x^*_И = 0$ и в базисное множество дуг входит одна искусственная дуга, то отбрасываем искусственные дуги вместе с узлом $m+1$ и приступаем к решению исходной задачи (3.18) с построенным базисным сетевым потоком x^*. Если $x^*_{\text{И}} = 0$ и в базисное множество дуг входит более одной искусственной дуги, тогда поступаем, как и в п. 3.7, случай 3.

Понятия открытой и закрытой моделей такие же, как и в п. 3.8. Сведение открытой модели к закрытой производится аналогично. Только теперь добавляются ограничения на пропускные способности вспомогательных дуг. Обычно нижние ограничения полагают равными нулю, а верхние — числу a (см. п. 3.8).

Пример 3.5. Рассмотрим сеть, изображенную на рис. 3.13. Над дугами или слева от них стоят значения c_{ij}; $d_{*ij} \div d^*_{ij}$. Условия общего баланса выполняются: модель закрытая.

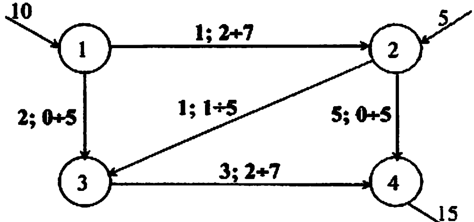


Рис. 3.13

В качестве дуговых потоков возьмем следующие значения: $\tilde{x}_{12} = 2$, $\tilde{x}_{13} = 5$, $\tilde{x}_{23} = 1$, $\tilde{x}_{24} = 5$, $\tilde{x}_{34} = 7$. Подсчитаем невязки ω_i: $\omega_1 = 10 - (2 + 5) = 3$, $\omega_2 = 5 - (1 + 5 - 2) = 1$, $\omega_3 = 0 - (7 - 1 - 5) = -1$, $\omega_4 = -15 - (-7 - 5) = 3$. Введем искусственный узел 5 и соединим его дугами (1, 5), (2, 5), (5, 3), (5, 4), взяв их в качестве базисных.

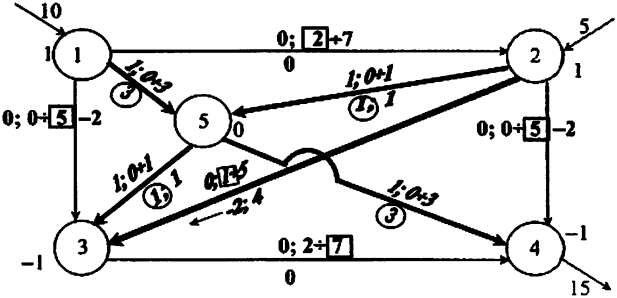


Рис. 3.14

Начальный базисный сетевой поток для задачи первой фазы изображен на рис. 3.14 (снизу под базисными дугами или справа от них стоят значения дуговых потоков в овале и θ_{ij}, если дуга в цикле, для небазисных дуг — оценки; кроме того, для небазисных дуг в прямоугольнике стоят значения дуговых потоков). Сетевой поток не оптимален. Выбрав дугу $(i_0, j_0) = (2, 3)$, помечаем ее двойной стрелкой, а рядом стрелкой указываем направление обхода вдоль цикла (2→3) и подсчитанное значение $\theta_{i_0 j_0}$. Звездочкой помечено значение $\theta^0 = 1$.

Дальнейшее решение представлено на рис. 3.15.

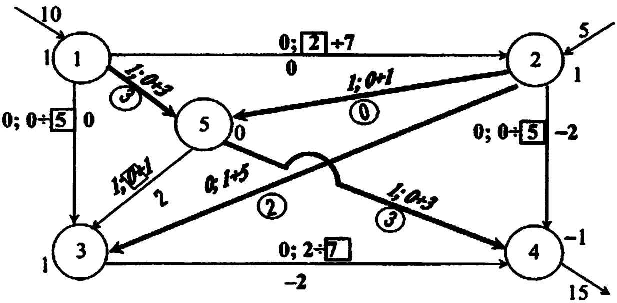


Рис. 3.15

Как видно из рис. 3.15, условия оптимальности выполняются. Но не все искусственные переменные нулевые: $x^*_{15} = 3 \neq 0$, $x^*_{54} = 3 \neq 0$. Следовательно, ограничения исходной задачи несовместны.

Заметим, что *для существования сетевого потока необходимо выполнение условия общего баланса* (3.12) *и неравенств*

$$\sum_{j \in I_i^+} d_{*ij} - \sum_{j \in I_i^-} d^*_{ji} \le a_i \le \sum_{j \in I_i^+} d^*_{ij} - \sum_{j \in I_i^-} d_{*ji}, \; i \in I. \tag{3.22}$$

Невыполнение условий (3.22) хотя бы для одного i является ***достаточным условием отсутствия сетевых потоков***. Таким образом, в примере 3.5 можно было не использовать первую фазу, предварительно проверив условия (3.22). В самом деле для узла 4 эти условия не выполняются: $-12 \le -15 \le -2$.

Пример 3.6. Рассмотрим задачу примера 3.5, в которой положим $d^*_{13} = d^*_{23} = d^*_{24} = 6$, $d^*_{34} = 11$, а остальные параметры оставим прежними. Теперь условия (3.22) выполняются и модель закрытая. В качестве дуговых потоков возьмем $\tilde{x}_{12} = 2$, $\tilde{x}_{13} = 6$, $\tilde{x}_{23} = 1$, $\tilde{x}_{24} = 6$, $\tilde{x}_{34} = 11$. Подсчитаем невязки ω_i: $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = -4$, $\omega_4 = 2$. Получим сеть для задачи первой фазы, изображенную на рис. 3.16. Заметим, что поскольку $\omega_2 = 0$, то узел 2 не соединяем с искусственным узлом 5, а вместо этого в базисное множество дуг вводим дугу (2, 3) исходной задачи.

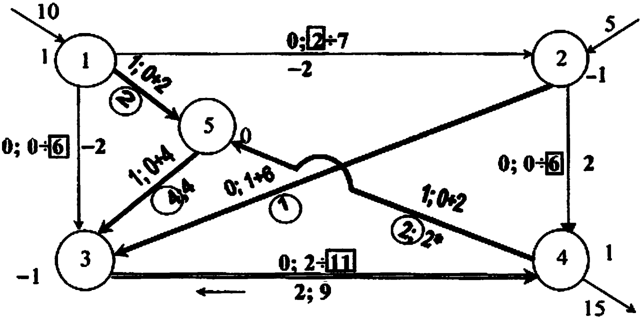


Рис. 3.16

Дальнейшее решение представлено на рис. 3.17—3.18.

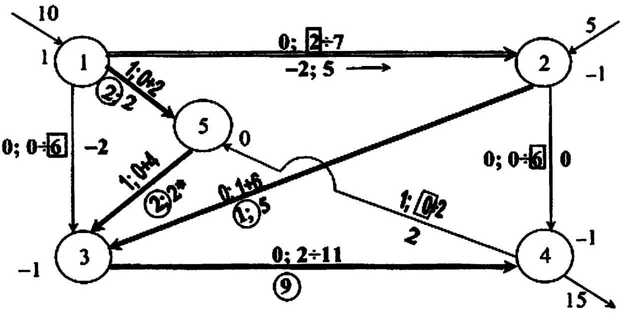


Рис. 3.17

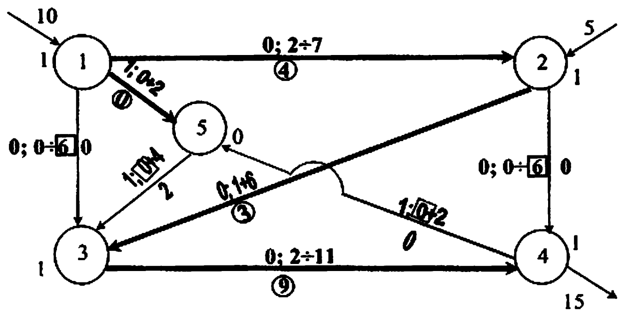


Рис. 3.18

На рис. 3.18 представлен оптимальный базисный сетевой поток задачи первой фазы. Поскольку все дуговые потоки нулевые, а в базисном множестве только одна искусственная дуга, то можем переходить к решению исходной задачи.

На рис. 3.19, 3.20 представлено это решение. Согласно рис. 3.20, условия оптимальности выполняются. Следовательно, $\varphi_{\min} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 11 = 72$.

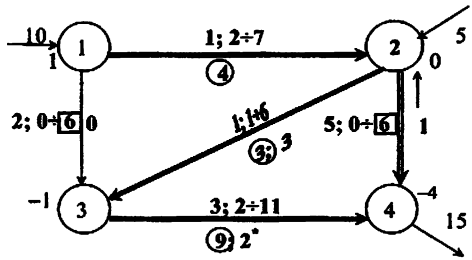


Рис. 3.19

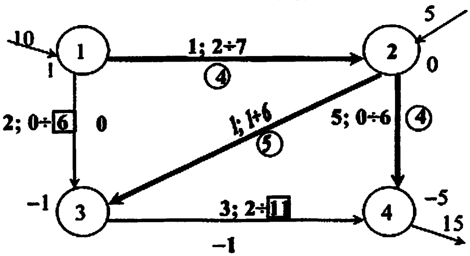


Рис. 3.20

Пример 3.7. Рассмотрим задачу примера 3.6, в которой заменим $a_1 = 10$ на $a_1 = 8$. Тогда условие общего баланса (3.12) не выполняется. Поскольку спрос превышает предложение на $a = 2$ ед., то вводим вспомогательный источник с номером 5 и интенсивностью $a_5 = 2$. Соединяем его

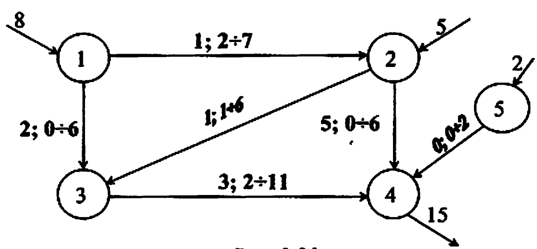


Рис. 3.21

с узлом-стоком 4 дугой (5, 4). Полагаем $c_{54}=0$, $d_{*54}=0$, $d^*_{54}=2$. Получаем сеть, изображенную на рис 3.21. Далее решаем задачу с использованием первой фазы, как и в примере 3.6, вводя дополнительный искусственный узел 6 (предлагается в качестве упражнения). Значение x^0_{54} в оптимальном сетевом потоке означает недопоставку узлу 4 груза в объеме x^0_{54} ед.

Пример 3.8. Опять обратимся к примеру 3.6. Заменим в нем $a_4=-15$ на $a_4=-13$. В этом случае предложение превышает спрос на a=2 ед. Вводим дополнительный узел-сток с номером 5 и интенсивностью $a_5=-a=-2$. Соединяем этот узел с узлами-источниками 1 и 2 дугами (1, 5), (2, 5). Полагаем $c_{15}=c_{25}=0$, $d_{*15}=d_{*25}=0$, $d^*_{15}=d^*_{25}=2$. В результате получим сеть, изображенную на рис. 3.22.

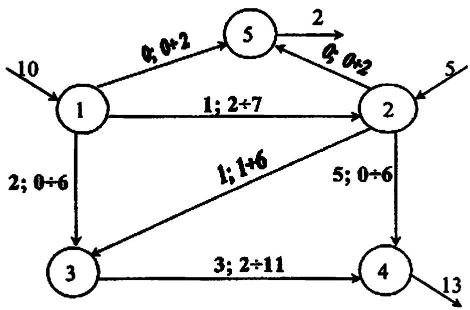


Рис. 3.22

Далее решение проводится с использованием первой фазы (предоставляется в качестве упражнения). Значения x^0_{15}, x^0_{25} в оптимальном сетевом потоке представляют собой оставшиеся запасы продукции на складах узлов 1 и 2 соответственно.

Критерий неединственности оптимального сетевого потока формулируется аналогично, как и для задачи (3.11) (см. п. 3.9).

Задания

3.5. Используя данные табл. 3.3*а* и 3.3*б* для сети, изображенной на рис. 3.23, сформировать сетевые транспортные задачи и решить их. Выяснить, является ли оптимальный сетевой поток единственным или нет.

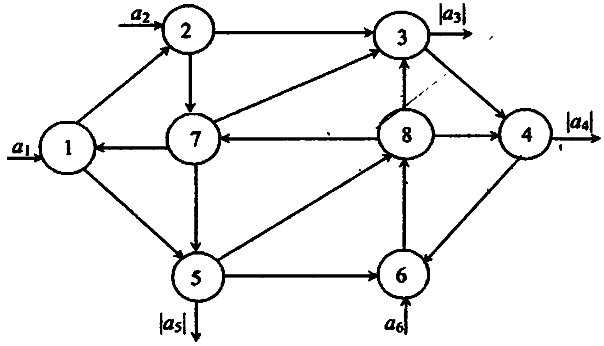


Рис. 3.23

Таблица 3.3а

	Варианты														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_1	95	90	90	80	60	70	40	50	44	60	70	40	70	80	40
a_2	40	50	40	60	40	60	67	43	50	42	46	45	51	60	68
$\lvert a_3\rvert$	50	50	62	40	50	55	50	30	20	40	95	50	40	40	30
$\lvert a_4\rvert$	60	70	46	62	50	60	60	50	70	30	35	40	70	60	50
$\lvert a_5\rvert$	45	40	40	60	30	40	20	40	30	60	10	30	40	70	60
a_6	20	20	18	22	30	25	23	27	26	28	24	35	29	30	32
d_{*12}	5	6	10	8	10	12	15	20	13	14	15	13	15	10	14
d_{*15}	10	9	8	8	10	12	15	20	17	16	20	18	14	11	13
d_{*23}	15	14	16	15	15	13	13	10	14	17	18	10	13	12	10
d_{*27}	20	20	18	14	20	22	20	16	15	19	20	15	10	13	11
d_{*34}	5	8	4	10	10	12	15	13	14	9	10	14	9	14	12
d_{*46}	7	6	6	10	2	6	5	9	6	7	4	6	10	6	7
d_{*56}	9	8	8	6	4	9	9	5	4	7	5	5	7	6	5
d_{*58}	8	7	9	10	12	11	15	13	14	10	9	10	16	15	9
d_{*68}	4	5	10	12	15	14	15	12	13	11	12	10	18	16	14
d_{*71}	0	2	3	6	8	9	6	10	12	10	5	10	16	17	13
d_{*73}	3	5	5	6	4	7	8	9	10	11	8	10	15	18	12
d_{*75}	10	11	10	12	10	9	10	8	9	7	9	9	10	19	11
d_{*83}	6	7	8	10	8	9	10	12	11	5	6	8	10	18	10
d_{*84}	5	6	5	8	5	6	9	10	12	7	8	9	12	17	9
d_{*87}	2	3	4	5	4	5	6	10	11	9	10	11	12	16	8

Окончание табл. 3.3а

	Варианты														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_{12}^*	70	60	65	50	40	40	35	36	30	35	50	38	41	40	42
d_{15}^*	80	70	75	60	50	55	50	52	45	40	45	23	45	57	56
d_{23}^*	60	65	60	55	50	50	45	47	45	40	50	48	40	35	39
d_{27}^*	70	68	65	50	40	45	40	42	45	50	55	59	40	38	43
d_{34}^*	37	45	40	45	40	55	45	40	56	50	47	46	40	42	38
d_{46}^*	20	20	25	18	20	25	20	19	20	20	23	24	20	25	29
d_{56}^*	30	25	30	25	25	27	20	19	21	25	24	22	20	22	25
d_{58}^*	15	15	20	15	20	22	20	18	19	20	21	23	20	26	30
d_{68}^*	40	38	36	42	40	44	41	45	40	46	37	50	50	46	48
d_{71}^*	10	10	12	10	15	13	10	12	14	15	11	16	20	28	24
d_{73}^*	50	45	47	40	45	44	40	35	37	40	46	44	40	35	31
d_{75}^*	20	20	18	16	15	17	15	19	20	37	21	22	25	40	39
d_{83}^*	15	15	20	15	20	19	15	14	15	17	18	20	25	20	21
d_{84}^*	30	31	25	27	30	28	20	19	20	18	17	26	50	30	32
d_{87}^*	10	10	15	15	20	18	10	17	19	16	12	13	15	20	25

Таблица 3.3б

	Варианты														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_{12}	2	5	10	3	4	10	4	5	9	7	3	20	7	17	10
c_{15}	3	4	8	6	20	8	6	9	10	9	10	15	8	18	9
c_{23}	5	3	4	5	10	6	9	8	15	10	18	10	9	19	13
c_{27}	7	2	5	4	18	5	8	6	21	12	4	5	5	15	14
c_{34}	4	7	3	8	25	20	7	13	4	14	16	7	10	5	10
c_{46}	1	4	8	3	34	10	5	15	18	12	4	9	15	10	5
c_{56}	10	9	2	1	7	13	6	4	6	10	5	11	17	7	6
c_{58}	8	3	5	9	8	10	11	1	5	6	11	13	10	5	10
c_{68}	7	2	10	4	15	10	12	4	14	8	15	11	8	16	8
c_{71}	6	6	9	15	21	20	15	9	17	3	13	15	6	12	6
c_{73}	5	4	13	9	25	20	3	21	3	15	6	17	4	8	4
c_{75}	4	8	6	10	17	4	7	25	8	7	9	18	15	20	10
c_{83}	3	11	15	18	15	10	8	13	10	14	10	6	10	6	3
c_{84}	8	15	10	9	10	9	16	14	5	9	11	4	8	4	5
c_{87}	2	20	15	7	10	8	19	15	3	20	13	2	12	6	12

3.6. Решить задачи 3.5, уменьшив предложение первого источника на 4 ед.

3.7. Решить задачи 3.5, уменьшив спрос третьего стока на 5 ед.

3.8. Решить задачи 3.5, уменьшив d_{68}^{*} на 4 ед.

§ 4. МАТРИЧНЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ (МТЗ)

Матричные транспортные задачи являются частным случаем сетевых транспортных задач. Однако в силу специфики этих задач их решение осуществляется в другой форме по сравнению с СТЗ.

4.1. Математическая модель МТЗ

Пример 4.1. На четырех заводах A_1—A_4 изготавливают детали для станков, которые затем отправляют в три мастерские B_1, B_2, B_3. Стоимость перевозок (в д. е. / шт.), мощности заводов и потребности мастерских (в тыс. шт.) приведены в табл. 4.1. Требуется так спланировать распределение деталей между мастерскими, чтобы расходы на перевозку были минимальными.

Таблица 4.1

Наименование мастерских / Наименование заводов	Стоимость перевозок			Мощности заводов
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1	3	2	25
A_2	3	5	8	10
A_3	2	7	4	30
A_4	5	3	6	20
Потребности мастерских	30	40	15	

Построим математическую модель задачи. Обозначим через x_{ij}, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,3}$, количество деталей (в тыс. шт.), отправляемых заводом A_i мастерской B_j. Как и в § 3, стоимость перевозок обозначается через c_{ij} (данные приведены в табл. 4.1). Из постановки задачи следует, что требуется минимизировать общие расходы на перевозку

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}x_{ij}\to\min \qquad (4.1)$$

при следующих ограничениях: вся совокупность деталей из всех заводов должна быть вывезена

$$
\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13} &= 25,\\
x_{21}+x_{22}+x_{23} &= 10,\\
x_{31}+x_{32}+x_{33} &= 30,\\
x_{41}+x_{42}+x_{43} &= 20,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

и спрос на детали каждой мастерской должен быть удовлетворен

$$
\begin{aligned}
x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} &= 30,\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} &= 40,\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} &= 15.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Кроме того, из физического смысла величин x_{ij} следует

$$
x_{ij} \geq 0,\ i=\overline{1,4},\ j=\overline{1,3}. \tag{4.4}
$$

В формуле (4.1) через x обозначен вектор $x = (x_{ij},\ i=\overline{1,4},\ j=\overline{1,3})$.

Соотношения (4.1)—(4.4) представляют математическую модель рассматриваемой задачи.

4.2. Общая постановка задачи. Основные понятия

Как видим из соотношений (4.1)—(4.4), рассматриваемая задача является частным случаем транспортных задач, описанных в предыдущем параграфе, когда отсутствуют промежуточные (нейтральные) пункты, а каждый поставщик продукции непосредственно связан с каждым потребителем единственным путем. Другими словами, все узлы в математической модели § 3 разбиты на две непересекающиеся группы: $I_1 = \{1, 2, \ldots, m\}$ — источники и $I_2 = \{1, 2, \ldots, n\}$ — стоки (рис. 4.1). В остальном задача имеет тот же вид (3.11), что и в § 3. Однако математическая постановка рассматриваемой задачи принимает несколько иную форму. Так, условия баланса (3.10) здесь превращаются в следующие:

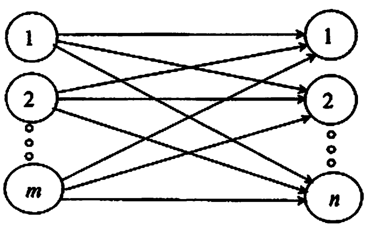


Рис 4.1

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in I_2} x_{ij} &= a_i,\ i\in I_1,\\
-\sum_{j\in I_1} x_{ij} &= a_i,\ i\in I_2.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Если ввести обозначения $-a_i = b_i$, $i \in I_2$ (теперь $b_i \geq 0$), то ***условия баланса*** (4.5) принимают вид (см. равенства (4.2), (4.3))

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i,\ j = \overline{1,n}. \tag{4.6}$$

Таким образом, общий вид задачи[1]

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m},$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i,\ \ j = \overline{1,n}, \tag{4.7}$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Как видно из рис. 4.1, при больших m, n количество дуг сети становится очень большим (mn), что затрудняет сетевые операции метода потенциалов. В этих условиях удобна другая, ***матричная*** (или ***табличная***) ***модель*** транспортных задач. Введем в рассмотрение транспортную $(m \times n)$-таблицу (табл. 4.2). Строку i этой таблицы припишем поставщику A_i (или производителю) продукции ($i = \overline{1,m}$), столбец j — потребителю B_j ($j = \overline{1,n}$). Клетка (i, j) таблицы соответствует пути от A_i к B_j (аналог дуги (i, j) в сетевой транспортной задаче). В верхнем правом углу клетки (i, j) поместим ее характеристику $c_{ij} \geq 0$ — ***стоимость*** перевозки единицы продукции от A_i к B_j (***тариф***). Объем a_i производства в A_i поместим справа от i-й строки, спрос b_j продукции в B_j — снизу j-го столбца. В нижнем левом углу клетки (i, j) поместим объем перевозки $x_{ij} \geq 0$ продукции от A_i к B_j.

Таблица 4.2

	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	…	b_n	

[1] Случай наличия прямых двухсторонних ограничений рассмотрен в п. 4.9*.

Неотрицательный вектор $x = (x_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$, удовлетворяющий условиям баланса (4.6), назовем ***планом перевозок***.

Условия общего баланса (3.12) в данном случае принимают вид

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i. \tag{4.8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1 (существования плана перевозок). *Для существования плана перевозок необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие общего баланса* (4.8) (*совокупный спрос равен совокупному предложению*).

Следствие 4.1. Условие (4.8) является необходимым и достаточным для существования ***оптимального плана перевозок*** x^0 — решения матричной транспортной задачи (4.7).

Цепью (***простой***, ***элементарной***), соединяющей клетку (i_1, j_1) с клеткой (i_k, j_k), назовем последовательность различных клеток вида $\{(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k)\}$ или $\{(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k)\}$, в которой каждые соседние две клетки лежат в одной строке (или в одном столбце), и ни в одной строке (и ни в одном столбце) нет больше двух клеток последовательности. ***Цикл*** — это цепь, крайние клетки которой лежат в одном столбце (или одной строке).

4.3. Базисный план перевозок

По аналогии с базисным сетевым потоком введем понятие базисного плана перевозок.

Как уже указывалось выше, клетки являются аналогом дуг в сетевой транспортной задаче. Рассмотрим множество клеток $U_Б \subset U$, $|U_Б| = m + n - 1$, из которого невозможно составить ни одного цикла. Назовем это ***множество клеток базисным***.

План перевозок x называется ***базисным***, если $x_{ij} = 0$, $(i, j) \in U_Н = U \setminus U_Б$, а $U_Б$ — базисное множество клеток. Другими словами, план перевозок x базисный, если все перевозки, кроме $m + n - 1$, нулевые, а остальные $m + n - 1$ помещены в клетки, составляющие базисное множество.

Перевозки x_{ij}, $(i, j) \in U_Б$, назовем ***базисными***, x_{ij}, $(i, j) \in U_Н$, — ***небазисными***. Базисный план перевозок называется ***невырожденным***, если $x_{ij} > 0$, $(i, j) \in U_Б$.

4.4. Свойства базисного множества клеток

Эти свойства являются аналогом соответствующих лемм из § 3.

1. В каждой строке и в каждом столбце найдется базисная клетка.

2. Существует строка или столбец, в которых лежит единственная базисная клетка.

3. Удаление базисной клетки, единственной в строке (столбце), вместе со строкой (столбцом) приводит к уменьшенной транспортной таблице, для которой уменьшенное базисное множество клеток будет базисным.

4. Любую пару из строк и столбцов можно соединить единственной цепью из элементов базисного множества клеток.

5. Добавление небазисной клетки к базисному множеству создает единственный цикл.

4.5. Правила построения начального базисного плана перевозок

Существует несколько правил построения начального базисного плана перевозок: северо-западного угла, минимального элемента, Фогеля, двойного предпочтения и др. Мы рассмотрим только указанные четыре. Отметим, что, как показывает практика, более близкий к оптимальному первоначальный план получается по правилу Фогеля, затем двойного предпочтения, минимального элемента и, наконец, по правилу северо-западного угла, хотя это и не обязательно, о чем свидетельствуют приведенные ниже примеры.

Правило северо-западного угла. Заполняем клетку (1, 1), в которую помещаем перевозку $x_{11} = \min\{a_1,\ b_1\}$. Если $x_{11} = a_1$, тогда вычеркиваем первую строку и рассматриваем уменьшенную транспортную таблицу, в которой вместо b_1 полагаем $\bar{b}_1 = b_1 - a_1$. Если $x_{11} = b_1$, тогда вычеркиваем первый столбец, а в уменьшенной транспортной таблице полагаем $\bar{a}_1 = a_1 - b_1$. В обоих случаях в уменьшенной матричной таблице опять по тому же правилу заполняем клетку в левом верхнем углу (северо-западный угол) и т. д. Поскольку на каждом шаге вычеркивается либо одна строка, либо один столбец, то через $m+n-1$ шагов останется не вычеркнутой либо строка, либо столбец, но заполненными будут $m+n-1$ клеток. Они и образуют базисное множество клеток $U_Б$. В незаполненных клетках полагаем $x_{ij} = 0$. Построенный вектор $x = (x_{ij},\ (i, j) \in U)$ и будет базисным планом перевозок.

Если на каком-то шаге окажется, что минимум достигается одновременно на обоих элементах ($x_{ij} = a_i = b_j$), тогда вычеркивается либо только i-я строка, либо только j-й столбец. Если вычеркивается i-я строка, то полагаем $\bar{b}_j = 0$, если j-й столбец, то $\bar{a}_i = 0$. В результате на следующем шаге базисная перевозка будет нулевой, т. е. построенный базисный план перевозок будет вырожденным.

В таблице при решении задачи вручную будем помещать перевозки только в базисные клетки.

Пример 4.2. Рассмотрим задачу примера 4.1. Составим транспортную таблицу (табл. 4.3) исходя из данных табл. 4.1.

Таблица 4.3

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 25	3	2	~~25~~
A_2	3 5	5 5	8	~~10~~ ~~5~~
A_3	2	7 30	4	~~30~~
A_4	5	3 5	6 15	~~20~~ ~~15~~
	~~30~~ ~~5~~	~~40~~ ~~35~~ ~~5~~	~~15~~ 0	

Заполняем клетку (1, 1), поместив в нее перевозку $x_{11} = \min\{25; 30\} = 25$ и вычеркиваем первую строку. В уменьшенной таблице заменяем $b_1 = 30$ на $\bar{b}_1 = 30 - 25 = 5$. Далее заполняем клетку (2, 1): $x_{21} = \min\{10; 5\} = 5$ и вычеркиваем первый столбец, заменив $a_2 = 10$ на $\bar{a}_2 = 10 - 5 = 5$. В уменьшенной таблице заполняем клетку (2, 2): $x_{22} = \min\{5; 40\} = 5$ и вычеркиваем вторую строку, заменив $b_2 = 40$ на $\bar{b}_2 = 40 - 5 = 35$, и т. д. В итоге получим базисный план перевозок с базисным множеством клеток $U_Б = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$. При этом стоимость перевозок равна $\varphi = 1 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 7 \cdot 30 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 15 = 380$ (тыс. д. е.).

Правило минимального элемента (***минимальной стоимости***). Оно отличается от предыдущего правила только выбором клетки заполнения. Если в предыдущем случае на каждом шаге выбиралась клетка в левом верхнем углу таблицы, то теперь каждый раз выбираем из всех клеток уменьшенной по тем же правилам транспортной таблицы клетку с минимальной стоимостью перевозок.

Пример 4.3. Для задачи примера 4.1 построим начальный базисный план перевозок по правилу минимального элемента (табл. 4.4). Выбираем клетку с минимальной стоимостью $c_{i_1 j_1} = \min\limits_{(i,j) \in U} c_{ij}$. Такой является клетка (1, 1). Помещаем в нее перевозку $x_{11} = \min\{25; 30\} = 25$ и вычеркиваем первую строку, уменьшив $b_1 = 30$ на $\bar{b}_1 = 30 - 25 = 5$. В уменьшенной таблице опять выбираем клетку с минимальной стоимостью. Такой будет клетка (3, 1). Заполняем ее: $x_{31} = \min\{30;\ 5\} = 5$. Затем заполняется клетка (4, 2): $x_{42} = \min\{20;\ 40\} = 20$ и т. д. Базисное множество клеток $U_Б = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2)\}$ отличается от построенного в примере 4.2. Стоимость перевозок равна $\varphi = 1 \cdot 25 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 10 + 4 \cdot 15 + 3 \cdot 20 = 275$ (тыс. д. е.), т. е. построенный базисный план перевозок лучше, чем в предыдущем случае, когда построение проводилось по правилу северо-западного угла.

Таблица 4.4

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1; (25)	3	2	~~25~~
A_2	3	5; (10)	8	~~10~~
A_3	2; (5)	7; (10)	4; (15)	~~30~~ ~~25~~ ~~10~~ 0
A_4	5	3; (20)	6	~~20~~
	~~30~~ ~~5~~	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~	~~15~~	

Правило двойного предпочтения. Если транспортная таблица велика, то правило минимального элемента вызывает определенные затруднения с выбором клетки с минимальным тарифом. В этом случае более предпочтительно следующее правило построения начального базисного плана перевозок. В каждой строке и в каждом столбце помечаем клетки с минимальной стоимостью. В результате получим некоторые клетки, которые помечены дважды. Это означает, что в них минимальная стоимость как по строке, так и по столбцу. На практике будем помечать эти клетки знаком ×. По тому же правилу, что и в предыдущих случаях, заполняем сначала клетки, помеченные дважды, вычеркивая каждый раз строку или столбец. Затем заполняем клетки, помеченные один раз. Наконец, в уменьшенной таблице по правилу минимального элемента заполняем недостающие клетки.

Пример 4.4. Построим начальный базисный план перевозок для примера 4.1 по правилу двойного предпочтения (табл. 4.5). В первой строке минимальный элемент (минимальная стоимость) расположена в клетке (1, 1), во второй — в клетке (2, 1), в третьей — в (3, 1), в четвертой — в (4, 2).

Аналогично получаем, что в первом столбце минимальный элемент находится в клетке (1, 1), во втором столбце — в клетках (1, 2), (4, 2), в третьем — в (1, 3). Клетки (1, 1), (4, 2) оказались помеченными дважды. В них в первую очередь и помещаем перевозки: $x_{11} = \min\{25;\ 30\} = 25$, уменьшаем таблицу вычеркиванием первой строки и заменой $b_1 = 30$ на $\bar{b}_1 = 30 - 25 = 5$; $x_{42} = \min\{20;\ 40\} = 20$, уменьшаем таблицу вычеркиванием четвертой строки и заменой $b_2 = 40$ на $\bar{b}_2 = 40 - 5 = 35$. В уменьшенной таблице остались помеченными один раз клетки (2, 1), (3, 1). По очереди заполняем их, каждый раз выбирая клетку с минимальным элементом. В нашем случае сначала заполняем клетку (3, 1), где стоимость $c_{31} = 2 < c_{21} = 3$: $x_{31} = \min\{30;\ 5\} = 5$. Поскольку при этом вычеркивается первый столбец, то помеченная клетка (3, 1) остается незаполненной, как оказались незаполненными и помеченные клетки (1, 2), (1, 3). Оставшуюся часть таблицы заполняем по правилу минимального элемента. В итоге получаем $U_Б = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2)\}$.

Таблица 4.5

	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 25 ××	3 ×	2 ×	~~25~~
A_2	3 ×	5 10	8	~~10~~
A_3	2 5 ×	7 10	4 15	~~30~~ ~~25~~ ~~10~~
A_4	5	3 20 ××	6	~~20~~
	~~30~~ ~~5~~	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~15~~	

В данном примере правило двойного предпочтения и правило минимального элемента сводятся к одному и тому же начальному базисному плану перевозок. Однако, как показывает следующий пример, это не обязательно.

Пример 4.5. Пусть имеются следующие данные:

a_i: 80, 200, 180, 280;
b_j: 180, 180, 100, 80, 200;

$$C = \begin{pmatrix} c_{ij}, & j = \overline{1,5} \\ & i = \overline{1,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 10 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 10 & 7 & 11 & 14 & 12 \end{pmatrix}.$$

Построим начальный базисный план перевозок по правилу минимального элемента (табл. 4.6) и правилу двойного предпочтения (табл. 4.7).

Как видим, в первом случае $U_Б = \{(1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$, во втором — $U_Б = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$. Они отличаются друг от друга. При этом стоимость перевозок в первом случае равна $\varphi = 3380$, во втором — $\varphi = 3360$, т. е. план перевозок, построенный по правилу двойного предпочтения, лучше, чем по правилу минимального элемента. Однако этот пример не гарантирует, что так будет всегда.

Таблица 4.6

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	6	3	1; 80	3	~~80~~
A_2	2; 180	6; 20	9	5	10	~~200~~ ~~20~~
A_3	7	4	3	2; 0	2; 180	~~180~~
A_4	10	7; 160	11; 100	14	12; 20	~~280~~ ~~120~~ ~~20~~
	~~180~~	~~180~~ ~~160~~	~~100~~	~~80~~ ~~0~~	~~200~~ ~~20~~ 0	

Таблица 4.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	9	6	3; ×	1; 80; ××	3	~~80~~
A_2	2; 180; ××	6	9; 20	5; 0	10	~~200~~ ~~20~~
A_3	7	4; ×	3; ×	2; ×	2; 180; ××	~~180~~
A_4	10	7; 180; ×	11; 80	14	12; 20	~~280~~ ~~100~~ ~~20~~
	~~180~~	~~180~~	~~100~~ ~~80~~	~~80~~ ~~0~~	~~200~~ ~~20~~ 0	

Отметим здесь одну особенность. При построении начального базисного плана перевозок в обоих случаях оказалось, что $x_{14} = a_1 = b_4 = 80$. При уменьшении таблицы вычеркиваем при этом лишь строку или столбец, но не одновременно (в таблицах удалена первая строка, а $b_4 = 80$ заменено на $\bar{b}_4 = 0$), чтобы потом заполнить нулем еще одну клетку (в нашем случае в табл. 4.6 — это $x_{34} = 0$, в табл. 4.7 — $x_{24} = 0$). В итоге получились вырожденные базисные планы перевозок.

Правило Фогеля. Для каждой строки и каждого столбца вычисляем штраф, для чего вычитаем минимальную стоимость (тариф) в данной строке или столбце из следующей по величине стоимости в этих же строке или столбце. Выделяем строку или столбец с максимальным штрафом. В выделенных строке или столбце заполняем клетку с минимальной стоимостью точно так же, как и в предыдущих правилах с последующим вычеркиванием соответствующих строки или столбца. Если в выбранной строке (столбце) имеются клетки с одинаковой минимальной стоимостью, то выбирают клетку из того столбца (строки), который (которая) имеет больший штраф. На последующих шагах в оставшейся части таблицы опять подсчитываются штрафы строк и столбцов, и заполнение таблицы проводится аналогично, как описано выше.

Пример 4.6. Используя правило Фогеля, построим начальный базисный план перевозок для задачи примера 4.5. Результаты представлены в табл. 4.8.

Таблица 4.8

	$10-2=\boxed{8}$	$7-6=1$	$11-9=2$		$12-10=2$	
	$10-2=8$	$7-6=1$	$11-9=2$	$14-5=\boxed{9}$	$12-10=2$	
	$7-2=5$	$6-4=2$	$9-3=6$	$5-2=3$	$10-2=\boxed{8}$	
	$7-2=5$	$6-4=2$	$9-3=\boxed{6}$	$2-1=1$	$3-2=1$	
$3-1=2$	9	6	3 80	1	3	~~80~~
$5-2=3$ $6-2=4$	2 120	6	9	5 80	10	~~200~~ ~~120~~
$3-2=1$	7	4	3	2	2 180	~~180~~
$10-7=3$ $10-7=3$	10 60	7 180	11 20	14	12 20	~~280~~ ~~100~~ ~~40~~ ~~20~~
	~~180~~ ~~60~~	~~180~~	~~100~~ ~~20~~	~~80~~	~~200~~ ~~20~~ 0	

Подсчитываем штрафы строк и столбцов. Для первой строки минимальный элемент $c_{14}=1$. Следующие за ним по возрастанию элементы $c_{13}=c_{15}=3$. Следовательно, штраф первой строки равен $3-1=2$. Штрафы записываем слева от строк и над столбцами. Аналогично для второй строки $c_{24}-c_{21}=5-2=3$ и т. д. Для столбцов имеем: для первого $c_{31}-c_{21}=7-2=5$, для второго $c_{12}-c_{32}=6-4=2$ и т. д. Максимальный штраф равен 6 (он помещен в прямоугольник) и соответствует третьему столбцу. В этом столбце выбираем минимальный элемент. Их два: $c_{13}=c_{33}=3$. Выбираем клетку (1, 3), стоящую в строке с большим штрафом. Полагаем, как и в предыдущих правилах, $x_{13}=\min\{a_1, b_3\}=80$. Вычеркиваем первую строку, уменьшая b_3 до величины $100-80=20$. Штрафы строк в оставшейся таблице остаются прежними. Штрафы четвертого и пятого столбцов изменятся. Пересчитываем их (на втором шаге новые штрафы записаны строкой выше). Максимальный штраф, равный 8, соответствует пятому столбцу. Выбираем в нем клетку с минимальным элементом $c_{35}=2$ и полагаем $x_{35}=180$. Вычеркиваем третью строку и т. д. В результате получим начальный базисный план перевозок, представленный в табл. 4.8. Новые штрафы строк записываем ниже прежних со сдвигом влево от прежних.

Стоимость перевозок равна $\varphi=3560$. Как видим, план перевозок хуже, чем построенные по правилам минимального элемента и двойного предпочтения (см. пример 4.5). Однако, как показывает приведенный ниже пример 4.7, правило Фогеля приводит к лучшему результату.

Пример 4.7. Построим начальный базисный план перевозок для задачи примера 4.1 (табл. 4.9).

Полученный план перевозок лучше, чем построенный по правилам минимального элемента и двойного предпочтения, поскольку сейчас

Таблица 4.9

	$3-1=\boxed{2}$ $2-1=1$	$5-3=2$ $5-3=2$	$4-2=\boxed{2}$	
$2-1=1$ $3-1=2$	1 0	3 10	2 15	~~25~~ ~~10~~
$5-3=2$ $5-3=2$	3	5 10	8	~~10~~
$4-2=2$ $7-2=\boxed{5}$	2 30	7	4	~~30~~
$5-3=2$ $5-3=2$	5	3 20	6	~~20~~
	~~30~~ ~~0~~	~~40~~ ~~30~~ ~~20~~ 0	~~15~~	

$\varphi=230$, в то время как для тех планов имели $\varphi=275$ (см. примеры 4.3, 4.4). Более того, как показывает решение данной задачи (см. пример 4.8), полученный план перевозок оптимальный.

Замечание 4.1. Если штрафы всех строк и столбцов на каком-то шаге одинаковы, применяем правило минимального элемента.

4.6. Метод потенциалов для МТЗ

Этот метод получается непосредственно из метода потенциалов для сетевой транспортной задачи. Отметим только возникшие изменения. Как следует из условий баланса (4.6), в каждом столбце матрицы A основных ограничений имеются две единицы (в сетевой задаче были одна 1, а другая -1), остальные элементы столбца нулевые. Заметим, что первые m строк матрицы A соответствуют поставщикам A_i, $i=\overline{1,m}$, следующие n строк — потребителям B_j, $j=\overline{1,n}$.

Припишем каждой i-й строке транспортной таблицы потенциал u_i, $i=\overline{1,m}$, а каждому j-му столбцу — потенциал v_j, $j=\overline{1,n}$. Тогда уравнения (3.13) для потенциалов примут вид

$$u_i+v_j=c_{ij},\ (i,\ j)\in U_{\text{Б}}, \tag{4.9}$$

а оценки (3.14) небазисных клеток подсчитываются по формулам

$$\Delta_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j),\quad (i,\ j)\in U_{\text{Н}}. \tag{4.10}$$

Теорема 4.2 (критерий оптимальности). *Для оптимальности базисного плана перевозок достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$\Delta_{ij}\geq 0,\quad (i,\ j)\in U_{\text{Н}}. \tag{4.11}$$

Пусть x — базисный план перевозок, $U_{\text{Б}}$ — базисное множество клеток. ***Алгоритм метода потенциалов*** для решения матричной транспортной задачи состоит из следующих шагов (ср. с аналогичным методом для решения сетевой транспортной задачи, п. 3.6).

1. Решив систему (4.9), найдем потенциалы. Заметим, что количество неизвестных u_i, $i=\overline{1,m}$, v_j, $j=\overline{1,n}$, в (4.9) равно $m+n$, а количество уравнений $|U_{\text{Б}}|=m+n-1$. Поэтому один потенциал можно взять равным любому числу (как правило, полагают равным нулю потенциал того столбца или той строки, в которых больше всего базисных клеток). Остальные потенциалы определяются однозначно.

2. По потенциалам подсчитываем оценки (4.10) небазисных клеток.

3. Проверяем условия оптимальности (4.11). Если они выполняются, решение задачи заканчиваем: базисный план перевозок x оптимален. В противном случае переходим к следующему шагу.

4. Выбираем небазисную клетку (i_0, j_0), для которой $\Delta_{i_0j_0} < 0$. В качестве такой клетки можно взять любую. Обычно берут такую, для которой $\Delta_{i_0j_0} = \min\limits_{\substack{(i,j)\in U_\text{Н} \\ \Delta_{ij}<0}} \Delta_{ij}$. Присоединим клетку (i_0, j_0) к базисному множеству $U_\text{Б}$. В результате получим ровно один цикл (см. свойство 5 базисного множества клеток). Отметим клетку (i_0, j_0) знаком "+". Двигаясь от клетки (i_0, j_0) по клеткам цикла, припишем им поочередно знаки "–", "+". Клетки со знаком "–" — аналог обратных дуг в сетевой транспортной задаче. Заметим, что в цикле прямые и обратные дуги чередуются (см. рис. 4.1). Среди перевозок x_{ij}, помещенных в клетки со знаком "–", выберем минимальную $\theta^0 = x_{i_*j_*}$.

5. План перевозок x заменяем на новый $\bar{x}$ следующим образом: перевозки, помещенные в клетки цикла со знаком "+", увеличиваем на величину θ^0, помещенные в клетки со знаком "–" — уменьшаем на θ^0. Остальные перевозки оставляем без изменения.

6. Заменяем базисное множество клеток $U_\text{Б}$ на $\overline{U}_\text{Б} = \left(U_\text{Б} \setminus (i_*, j_*)\right) \cup \cup (i_0, j_0)$. Переходим к шагу 1.

Замечание 4.2. Если базисный план перевозок невырожденный, то $\theta^0 > 0$ и стоимость перевозок уменьшится на величину $\theta^0 \left|\Delta_{i_0j_0}\right|$.

Пример 4.8. Рассмотрим задачу примера 4.1. Используем для решения начальный базисный план перевозок, построенный по правилу минимального элемента (табл. 4.4) или по правилу двойного предпочтения (табл. 4.5) — в данном случае они одинаковы.

Найдем потенциалы строк и столбцов из системы уравнений (4.9). Поскольку наибольшее количество заполненных клеток в третьей строке, полагаем $u_3 = 0$. Тогда остальные потенциалы определяются однозначно (табл. 4.10). Так, из уравнений $u_3 + v_1 = c_{31}$, $u_3 + v_2 = c_{32}$, $u_3 + v_3 = c_{33}$ находим $v_1 = 2$, $v_2 = 7$, $v_3 = 4$. После этого из уравнений $u_1 + v_1 = c_{11}$, $u_2 + v_2 = c_{22}$, $u_4 + v_3 = c_{43}$ находим $u_1 = -1$, $u_2 = -2$, $u_4 = -4$.

По формулам (4.10) подсчитываем оценки небазисных клеток. Значения Δ_{ij}, $(i, j) \in U_\text{Н}$, записываем в правом нижнем углу клеток (i, j) (см. табл. 4.10). Поскольку условия оптимальности (4.11) не выполняются ($\Delta_{12} = -3 < 0$, $\Delta_{13} = -1 < 0$), то план перевозок не оптимален и переходим к построению нового базисного плана перевозок. Для этого добавим к базисным клеткам клетку $(i_0, j_0) = (1, 2)$ с минимальной оценкой $\Delta_{12} = -3$. Образуется цикл $\{(1, 2), (1, 1), (3, 1), (3, 2), (1, 2)\}$. Клетке (1, 2) приписываем знак “+”, а дальше чередуем со знаком “–”. Из клеток со знаком “–” выбираем ту, в которой находится минимальная перевозка: $\theta^0 = x_{i_* j_*} = x_{32} = \min\{25;\ 10\} = 10$. На следующей итерации в базисе будет клетка $(i_0, j_0) = (1, 2)$ вместо клетки $(i_*, j_*) = (3, 2)$. Новый базисный план перевозок получаем из старого добавлением $\theta^0 = 10$ к перевозкам в клетках цикла со знаком “+” и вычитанием $\theta^0 = 10$ из перевозок в клетках цикла со знаком “–”. Остальные перевозки оставляем прежними (табл. 4.11).

Таблица 4.10

$u_i \setminus v_j$	2	7	4
–1	1 – 25	3 + –3	2 –1
–2	3 3	5 10	8 6
0	2 + 5	7 – 10	4 15
–4	5 7	3 20	6 6

Таблица 4.11

$u_i \setminus v_j$	–2	0	0
3	1 – 15	3 10	2 + –1
5	3 0	5 10	8 3
4	2 + 15	7 3	4 – 15
3	5 4	3 20	6 3

Таблица 4.12

$u_i \setminus v_j$	1	3	2
0	1 0	3 10	2 15
2	3 0	5 10	8 4
1	2 30	7 3	4 1
0	5 4	3 20	6 4

Стоимость перевозок стала равной $\varphi_1 = 245$, т. е. уменьшилась на величину $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1 = 275 - 245 = 30$, которая также равна $\theta^0 \left|\Delta_{i_0 j_0}\right| = 10 \cdot 3 = 30$.

Как показывают вычисления потенциалов и оценок для нового плана перевозок, он опять не оптимален (табл. 4.11): $\Delta_{13} = -1 < 0$. Поэтому строим новый план (табл. 4.12), который является оптимальным: $\Delta_{ij} \geq 0$, $(i, j) \in U_{\text{Н}}$. Стоимость перевозок равна $\varphi_{\min} = 230$.

Задания

4.1. Составить план перевозки зерна из районов A_1—A_4 на пять элеваторов B_1—B_5 (запасы районов и мощности элеваторов приведены в табл. 4.13*а*) с минимальными издержками на перевозку. Затраты на перевозку 1 ц зерна заданы в табл. 4.13*б*.

Начальный план перевозок составить по правилам северо-западного угла, минимального элемента, двойного предпочтения и Фогеля. Определить, какой из планов ближе к оптимальному.

Таблица 4.13а

Варианты	Ресурсы районов (тыс. ц)				Мощности элеваторов (тыс. ц)				
	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	17	8	10	9	6	15	7	8	8
2	11	23	5	15	5	10	11	8	20
3	24	10	21	9	9	10	10	15	20
4	11	11	12	14	17	5	7	11	8
5	20	20	9	16	13	20	7	5	20
6	11	9	11	9	5	8	12	6	9
7	7	31	5	10	5	20	8	11	9
8	17	11	7	13	5	15	16	5	7
9	20	11	9	10	6	15	11	7	11
10	9	27	5	9	10	16	7	7	10
11	21	9	6	10	6	6	10	12	12
12	14	9	6	15	5	8	7	14	10
13	20	10	14	10	6	8	20	5	15
14	8	24	7	10	10	10	8	11	10
15	20	12	6	10	19	10	7	5	7
16	8	10	9	10	6	6	8	9	8
17	8	9	10	11	8	6	9	8	7
18	16	9	8	10	16	6	8	6	7
19	9	8	8	12	6	7	9	8	7
20	10	11	8	9	6	6	8	7	11
21	9	9	6	12	5	6	8	7	10
22	10	10	8	11	12	5	8	6	8
23	11	13	12	18	6	8	17	11	12
24	9	15	25	21	13	12	15	16	14
25	10	25	20	22	20	15	20	12	10
26	7	10	9	12	6	5	8	10	9
27	14	10	10	10	10	6	10	7	11
28	8	13	21	16	8	10	10	10	20
29	10	25	12	24	10	11	15	15	20
30	20	20	15	10	10	17	20	8	10

Таблица 4.13б

Матрицы тарифов		
1. 10 8 5 9 16 4 3 4 11 12 5 10 29 7 6 9 2 4 1 3	**2.** 10 7 2 4 5 8 4 3 7 3 2 4 10 11 8 8 12 9 7 6	**3.** 3 9 11 8 11 6 2 3 6 5 10 4 13 8 10 3 8 7 5 7
4. 10 10 5 1 5 4 10 2 10 2 10 8 10 5 2 4 2 10 10 8	**5.** 6 2 10 4 10 2 1 1 9 10 5 2 10 10 7 10 5 10 4 8	**6.** 8 10 8 10 4 3 10 1 6 1 10 9 10 8 3 1 12 10 1 10

7. 3 4 10 10 3 9 10 7 7 10 9 8 10 8 10 2 10 8 10 9	**8.** 0 1 3 10 2 10 8 3 10 2 10 2 16 10 8 7 10 10 5 3	**9.** 10 6 10 7 3 2 10 1 9 10 2 3 15 10 10 10 5 10 6 5
10. 3 9 10 10 2 7 10 1 3 3 9 10 10 1 3 10 6 1 10 6	**11.** 3 4 10 2 10 3 6 4 10 10 10 7 8 10 4 10 4 1 2 10	**12.** 10 5 10 9 6 1 10 2 2 10 10 5 12 10 1 10 9 3 3 10
13. 10 10 1 2 9 10 6 1 5 3 10 8 14 5 10 9 10 2 6 10	**14.** 10 4 8 6 10 10 2 3 10 3 7 10 10 2 3 10 3 2 10 1	**15.** 4 6 8 10 2 3 4 3 9 5 4 6 13 2 1 2 3 4 10 9
16. 8 5 8 2 7 9 2 3 10 9 16 12 12 8 14 10 6 3 6 12	**17.** 9 10 16 4 12 13 1 2 1 9 2 20 12 8 4 30 10 10 14 18	**18.** 3 10 6 10 10 10 2 1 8 12 16 10 15 10 10 9 14 10 10 10
19. 10 8 3 8 5 10 5 2 1 14 10 12 20 13 20 6 2 16 3 18	**20.** 10 6 14 16 7 8 3 3 8 5 12 20 14 20 10 10 5 18 16 4	**21.** 1 3 4 7 5 10 8 1 2 3 8 10 14 6 8 7 5 9 12 11
22. 3 5 11 8 10 8 7 1 4 3 10 11 12 9 7 6 4 7 8 10	**23.** 4 5 8 7 5 5 10 1 11 8 3 4 8 7 1 2 10 11 10 4	**24.** 3 5 7 5 4 10 12 1 4 8 10 11 10 8 7 10 8 9 7 8
25. 10 3 8 11 2 8 7 6 10 5 11 10 12 9 10 12 14 10 14 8	**26.** 10 1 7 2 4 8 3 2 2 10 5 2 6 2 2 10 3 2 4 2	**27.** 11 12 13 14 15 6 7 6 9 10 1 2 5 4 5 17 15 19 12 11
28. 1 2 3 6 5 6 7 3 9 10 1 2 5 4 5 6 7 8 9 2	**29.** 1 5 9 3 6 2 6 5 4 7 3 7 16 5 8 4 8 12 6 2	**30.** 6 8 4 10 10 10 12 1 8 9 12 13 13 5 4 2 4 8 6 9

4.2. Для обогрева помещений используют 4 агрегата, каждый из которых может работать на любом из пяти сортов топлива. Наличие топлива каждого сорта и потребности в топливе каждого из агрегатов заданы в табл. 4.14*а*. Теплотворная способность каждого сорта топлива (количество тепловой энергии, выделяемой при сжигании 1 т топлива) при использовании его на различных агрегатах определяется матрицей, заданной в табл. 4.14*б*. Найти такое распределение топлива между агрегатами, при котором получается максимальное количество теплоты от использования всего топлива.

а) Составить математическую модель задачи.

б) Построить начальный план по правилам минимального элемента, двойного предпочтения и Фогеля. Сравнить, какой из них ближе к оптимальному.

в) Решить задачу.

Таблица 4.14а

Варианты	Потребности агрегатов в топливе (дес. т)				Наличие сортов топлива (дес. т)				
	1	2	3	4	1	2	3	4	5
1	8	9	7	16	14	6	10	2	8
2	10	17	6	17	10	8	9	13	10
3	6	7	12	15	6	8	14	4	8
4	3	10	11	11	3	7	6	5	14
5	8	15	14	11	8	10	5	6	19
6	6	8	10	14	6	5	5	12	10
7	15	18	22	14	15	17	17	4	16
8	6	4	2	6	5	4	2	3	4
9	30	5	25	120	20	40	5	60	55
10	4	8	14	15	7	8	9	7	10
11	10	6	4	5	9	4	3	2	7
12	15	7	5	8	5	11	9	6	4
13	17	8	4	5	10	8	5	6	5
14	22	6	44	20	26	9	8	44	5
15	5	10	6	8	2	4	10	4	9
16	11	11	11	8	8	12	10	5	6
17	8	8	7	8	6	6	7	6	6
18	13	15	5	6	9	9	8	7	6
19	15	35	60	40	10	20	30	40	50
20	16	21	8	11	8	12	10	12	14
21	10	18	14	8	6	9	10	18	7
22	10	15	11	8	4	8	12	6	14
23	8	10	11	12	1	5	15	14	6
24	12	12	8	8	10	5	1	10	5
25	6	8	6	10	5	5	10	5	5
26	10	15	15	10	20	4	16	5	5
27	10	20	15	25	14	26	10	5	15
28	8	8	8	6	5	5	10	5	5
29	1	9	8	8	3	3	5	5	10
30	1	9	9	5	2	5	5	4	8

Таблица 4.14б

Матрицы теплотворной способности топлива		
1. 4 5 10 11 1	**2.** 1 4 5 7 8	**3.** 1 6 5 7 5
3 5 3 10 11	10 11 12 8 7	10 8 3 4 5
12 14 15 10 11	11 8 10 4 5	8 7 8 5 10
2 5 6 7 10	7 6 10 2 2	7 8 7 6 5

Окончание табл. 4.14б

4.	2	5	8	7	6	**5.**	1	3	5	8	7	**6.**	1	6	8	6	15
	5	3	4	8	9		6	9	10	11	8		9	3	4	5	8
	10	11	10	12	10		7	10	11	9	6		8	9	10	10	9
	6	9	10	9	10		5	4	6	8	10		8	7	6	5	10
7.	1	6	5	6	7	**8.**	10	10	3	10	10	**9.**	10	2	10	6	3
	8	9	10	11	10		8	4	2	3	10		8	10	2	10	10
	10	9	6	7	8		5	1	10	6	10		2	8	10	4	2
	8	10	2	4	5		10	7	10	10	8		8	2	6	2	6
10.	8	12	6	8	14	**11.**	3	14	14	4	16	**12.**	20	14	14	4	16
	12	1	16	10	6		9	10	12	20	12		12	10	12	20	12
	2	9	16	6	20		10	1	8	9	2		1	10	8	9	2
	16	18	1	2	4		6	10	1	12	14		6	10	1	12	14
13.	14	20	13	5	12	**14.**	45	55	60	40	20	**15.**	1	3	10	2	10
	3	2	16	11	20		50	30	20	20	15		5	10	1	10	6
	15	7	17	4	12		35	20	85	10	10		10	4	10	7	10
	9	8	18	19	1		75	10	15	95	50		10	10	9	8	10
16.	10	9	7	6	18	**17.**	6	10	10	8	9	**18.**	12	10	12	11	10
	11	8	5	19	17		5	4	5	2	10		10	12	10	11	12
	12	13	3	4	16		4	6	1	11	12		6	7	8	10	9
	1	20	2	14	15		4	2	4	13	4		5	4	1	3	2
19.	2	4	8	9	4	**20.**	2	14	14	8	2	**21.**	1	2	5	6	7
	5	3	3	7	8		16	4	6	12	10		10	10	8	4	3
	9	6	4	2	6		2	4	6	12	10		5	4	3	3	5
	10	10	6	3	5		2	4	18	8	6		7	9	8	7	2
22.	4	1	2	3	7	**23.**	1	5	2	6	4	**24.**	1	4	5	6	7
	8	6	7	6	8		6	7	8	7	9		5	6	5	4	3
	5	9	10	10	3		6	5	5	5	4		10	6	5	7	2
	10	11	6	5	8		10	10	11	10	9		7	8	8	10	1
25.	1	5	4	3	2	**26.**	2	4	5	5	6	**27.**	4	3	1	7	1
	8	6	5	5	7		7	8	6	5	2		6	8	2	10	3
	6	5	4	4	3		5	10	10	6	1		11	10	8	5	2
	8	6	10	10	9		6	7	8	9	3		5	5	8	4	3
28.	3	2	5	4	3	**29.**	1	5	4	3	7	**30.**	1	3	2	8	2
	10	8	7	6	8		8	6	5	7	2		6	5	5	3	1
	7	8	5	4	4		6	7	2	4	3		5	2	2	1	4
	5	4	8	10	6		5	10	10	7	6		4	5	7	8	6

4.7. Открытая и закрытая модели. Неединственность оптимального плана перевозок

Матричная транспортная задача называется ***закрытой***, если выполняются условия общего баланса (4.8), т. е. когда совокупный спрос равен совокупному предложению. В противном случае МТЗ называется ***открытой***.

Открытую модель МТЗ сводят к закрытой. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то это означает, что спрос превышает предложение. Введем дополнительного (***фиктивного***) ***поставщика*** A_{m+1} с объемом поставок $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и стоимостью перевозок $c_{m+1,j} = 0$, $j = \overline{1,n}$. Величина $x^0_{m+1,j}$ в оптимальном плане перевозок означает объем недопоставки потребителю B_j. В случае $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (предложение превышает спрос) вводим дополнительного (***фиктивного***) ***потребителя*** B_{n+1} с объемом потребления $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и стоимостью перевозок $c_{i,n+1} = 0$, $i = \overline{1,m}$. Величина $x^0_{i,n+1}$ в оптимальном плане перевозок означает объем продукции, оставшейся нереализованной (на складе) у поставщика A_i.

Критерий неединственности оптимального плана перевозок формулируется совершенно аналогично, как и для неединственности оптимального сетевого потока (см. п. 3.9).

Рассмотрим пример 4.8. В оптимальном плане (табл. 4.12) есть нулевая небазисная оценка $\Delta_{21} = 0$. Однако поскольку базисный план вырожденный ($x_{11} = 0$), то нельзя утверждать, что оптимальный план единственный.

4.8. МТЗ при усложненных постановках

Иногда при решении МТЗ бывает необходимо учесть дополнительные ограничения. Остановимся подробнее на некоторых возможных усложнениях.

1. В реальных условиях перевозки грузов от некоторых поставщиков к некоторым потребителям иногда не могут быть осуществлены. В этом случае стоимость перевозки по этому пути назначают достаточно

большой, так что в оптимальном плане соответствующая перевозка станет равной нулю. Иногда эту клетку при решении задачи зачеркивают: ×. Такой подход к решению МТЗ называют ***запрещением перевозок*** или ***блокированием*** соответствующей клетки. Однако при блокировании не всегда удается построить начальный базисный план перевозок и приходится назначать достаточно большую стоимость.

2. В некоторых МТЗ дополнительным условием является обеспечение перевозки по указанному маршруту определенного количества груза. Пусть из A_i в B_j необходимо завезти груз в объеме d_{ij}. Тогда эту клетку заполняют этим количеством груза, уменьшают a_i и b_j на эту величину и далее решение проводится, как в предыдущем случае.

3. Иногда необходимо из A_i в B_j завезти груз объемом не менее d_{ij} $\left(x_{ij} \geq d_{ij}\right)$. Тогда считают, что запасы a_i и потребности b_j меньше фактических на величину d_{ij}. Решив "исправленную" задачу, к оптимальной перевозке x_{ij}^0 добавляем d_{ij}.

4. В некоторых МТЗ требуется найти оптимальный план перевозок при условии, что из пункта A_i в пункт B_j перевозится не более d_{ij} единиц груза, т. е.

$$x_{ij} \leq d_{ij}. \tag{4.12}$$

Сформулированную задачу можно решать так. В таблицу для каждого j, для которого дано (4.12), вводим дополнительный столбец B'_j (т. е. дополнительного потребителя). В B'_j стоимости перевозок c'_{sj}, $s=\overline{1,m}$, $s \neq i$, те же, что и в B_j, за исключением стоимости c'_{ij}, находящейся в i-й строке. В B'_j эту клетку блокируем или же назначаем стоимость c'_{ij} сколь угодно большой. Потребности при этом равны $b_j = d_{ij}$, $b'_j = b_j - d_{ij}$. В оптимальном плане перевозки столбцов B_j и B'_j суммируются.

Решением полученной задачи и будет оптимальный план исходной задачи или же установлена неразрешимость задачи. Заметим, что исходная задача разрешима лишь в том случае, если в ней существует хотя бы один базисный план перевозок.

Замечание 4.3. Если в столбце B_j имеется больше одной клетки с ограничением (4.12), тогда вводится несколько дополнительных столбцов с соответствующей корректировкой a_i, b_j или же задачу решают по методу, описанному в п. 4.9.

Пример 4.9. Рассмотрим задачу примера 4.1. Предположим, что с завода A_2 к мастерской B_3 необходимо завезти 5 тыс. деталей, а в мастерскую B_2 не более 3 тыс. деталей, с завода A_4 в мастерскую B_1 завоз невозможен, а с завода A_3 к мастерской B_1 необходимо завезти не менее 15 тыс. деталей. Определить оптимальный план распределения деталей между мастерскими.

Согласно указанным выше методам, полагаем $x_{23}=5$ и блокируем клетку (2, 3), при этом уменьшаем a_2 и b_3 на 5 тыс. шт., т. е. будем иметь $\overline{a}_2=5$, $\overline{b}_3=10$. Назначаем стоимость перевозки c_{41} достаточно большой по сравнению с остальными, например, равной $\overline{c}_{41}=20$. Далее, уменьшаем a_3 и b_1 на величину $d_{31}=15$ тыс. шт., т. е. полагаем $\overline{a}_3=15$, $\overline{b}_1=15$. Наконец, полагаем $\overline{b}_2=d_{22}=3$ и вводим дополнительный столбец B_2', в котором $b_2'=b_2-\overline{b}_2=37$, $c_{s2}'=c_{s2}$, $s=1,\ 3,\ 4$, а c_{22}' считаем достаточно большой величиной, например $c_{22}'=30$. Результаты представлены в табл. 4.15. В табл. 4.16 представлен начальный базисный план перевозок, построенный по правилу двойного предпочтения.

Таблица 4.15

	B_1	B_2	B_3	B_2'	
A_1	1	3	2	3	25
A_2	3	5	$\cancel{8}$	30	5
A_3	2	7	4	7	15
A_4	20	3	6	3	20
	15	3	10	37	

Таблица 4.16

$u_i \setminus v_j$	−4	−25	−3	0	
5	1 ×× 15	3 × 23	2 − × 10	3 +× −2	~~25~~ ~~10~~
30	3 × −23	5 3	$\cancel{8}$	30 2	~~5~~ ~~2~~ 0
7	2 × −1	7 25	4 + 0	7 15	~~15~~
3	20 21	3 ×× 25	6 6	3 ×× 20	~~20~~
	~~15~~	~~3~~	~~10'~~ ~~0~~	~~37~~ ~~17~~ ~~2~~	

Далее решаем задачу, как было показано в предыдущих примерах. Решение представлено в табл. 4.16—4.20.

В табл. 4.20 $\Delta_{ij}\geq 0\ \forall\ (i,j)\in U_{\text{Н}}$. Следовательно, получен оптимальный план перевозок. План единственный, поскольку нет нулевых небазисных оценок. Запишем оптимальный план для исходной задачи. Заметим, что $x_{23}^0=d_{23}=5$, $x_{31}^0=13+d_{31}=13+15=28$, а перевозки к мастерской B_2 складываются с дополнительными перевозками из B_2', т. е.

$x_{12}^0 = 17$, $x_{22}^0 = 3$, $x_{32}^0 = 0$, $x_{42}^0 = 20$. Другие перевозки представлены в табл. 4.20: $x_{13}^0 = 8$, $x_{21}^0 = 2$, $x_{33}^0 = 2$, $x_{ij}^0 = 0$ для остальных перевозок.

Таблица 4.17

$u_i \setminus v_j$	−2	−25	−3	0
3	1 / − 15	3 / 25	2 / 2	3 / + 10
30	3 / + −25	5 / 3	X	30 / − 2
7	2 / −3	7 / 25	4 / 10	7 / 5
3	20 / 19	3 / 25	6 / 6	3 / 20

Таблица 4.18

$u_i \setminus v_j$	−2	0	−3	0
3	1 / − 13	3 / 0	2 / 2	3 / + 12
5	3 / 2	5 / 3	X	30 / 25
7	2 / + −3	7 / 0	4 / 10	7 / − 5
3	20 / 19	3 / 0	6 / 6	3 / 20

Таблица 4.19

$u_i \setminus v_j$	2	4	4	4
−1	1 / − 8	3 / 0	2 / + −1	3 / 17
1	3 / 2	5 / 3	X	30 / 25
0	2 / + 5	7 / 3	4 / − 10	7 / 3
−1	20 / 19	3 / 0	6 / 3	3 / 20

Таблица 4.20

$u_i \setminus v_j$	0	2	2	3
0	1 / 1	3 / 1	2 / 8	3 / 17
3	3 / 2	5 / 3	X	30 / 24
2	2 / 13	7 / 3	4 / 2	7 / 2
0	20 / 20	3 / 1	6 / 4	3 / 20

Задания

4.3. Решить задачу 4.1 при следующих усложненных постановках (каждый случай рассмотреть как самостоятельную задачу):

а) запасы четвертого района на 2 тыс. ц зерна меньше указанных в табл. 4.13*а*;

б) мощность пятого элеватора на 3 тыс. ц меньше указанной в табл. 4.13*а*;

в) невозможность доставки зерна из второго района к третьему элеватору;

г) с обязательной поставкой зерна из 3-го района на 3-й элеватор в количестве 1 тыс. ц зерна и обязательной поставкой первым районом второму элеватору не менее 2 тыс. ц зерна;

д) невозможность поставки зерна из четвертого района к пятому элеватору более 2 тыс. ц зерна.

В каждой из указанных задач проверить, является ли оптимальный план единственным. Если нет, построить другой.

4.4. Три нефтеперегонных завода с заданной ежедневной производительностью бензина (табл. 4.21*а*) снабжают четыре бензохранилища, ежедневные потребности которых приведены в табл. 4.21*а*. Бензин транспортируется в бензохранилища по бензопроводу. Стоимость транспортировки составляет 0,1 д. е. за 100 галлонов на 1 км длины трубопровода. В табл. 4.21*б* приведены расстояния в километрах между заводами и хранилищами. Отметим, что первый завод не связан трубопроводом с третьим хранилищем. Распределить поставки бензина от заводов к хранилищам с минимальными суммарными транспортными расходами.

Таблица 4.21а

Варианты	Мощности нефтеперегонных заводов (млн галлонов)			Потребности хранилищ (млн галлонов)			
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4
1	5	8	7	3	5	7	5
2	3	5	6	4	6	3	3
3	4	8	9	6	4	5	6
4	5	6	3	6	3	2	3
5	8	10	7	5	6	8	6
6	4	8	11	8	7	5	3
7	5	8	9	7	6	4	5
8	6	4	5	3	4	5	3
9	8	7	10	8	7	6	4
10	3	5	7	3	6	4	2

Таблица 4.21б

Расстояние от заводов до хранилищ (дес. км)														
1.	10	20	–	25	2.	8	7	–	15	3.	15	8	–	10
	15	10	8	14		10	12	8	6		13	20	25	10
	20	15	10	11		15	10	9	13		18	10	15	8
4.	10	8	–	15	5.	10	18	–	20	6.	10	15	–	10
	20	15	8	7		8	6	10	13		15	20	16	21
	13	16	18	20		10	15	20	12		10	18	15	14
7.	14	20	–	15	8.	10	15	–	8	9.	11	17	–	10
	10	8	11	9		16	13	12	6		16	25	10	20
	13	16	15	10		10	11	8	14		8	18	15	12

4.5. Четыре плодовых хозяйства поставляют яблоки в ящиках пяти оптовым покупателям. Ежедневные потребности этих покупателей составляют b_j ящиков яблок (табл. 4.22*а*). При использовании только постоянной рабочей силы плодовые хозяйства могут ежедневно поставлять a_i ящиков яблок ежедневно (табл. 4.22*а*). Первые три хозяйства могут увеличить поставки яблок путем привлечения дополнительных рабочих, четвертое такой возможности не имеет. Транспортные расходы на один ящик яблок приведены в табл. 4.22*б*. Сколько дополнительных ящиков яблок могут поставлять первые три хозяйства при минимальных суммарных издержках на транспортировку?

Таблица 4.22а

Варианты	Ресурсы поставщиков (ящиков)				Потребности покупателей (ящиков)				
	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	150	200	100	80	200	150	100	50	100
2	200	150	120	100	150	100	80	90	200
3	150	200	170	90	200	250	100	150	80
4	90	80	100	120	80	90	100	100	50
5	100	150	200	140	100	150	110	90	200
6	80	70	100	120	50	100	150	50	70
7	120	150	100	70	100	150	90	80	90
8	100	150	170	200	150	170	180	100	80
9	80	180	200	250	200	110	200	100	100
10	100	120	150	200	100	150	200	50	70

Таблица 4.22б

Транспортные расходы на один ящик яблок (д. е.)																	
1.	15	17	30	20	14	**2.**	14	17	28	20	15	**3.**	32	15	18	25	20
	18	20	25	27	13		10	20	15	17	22		18	27	16	10	13
	32	18	14	17	16		15	18	20	25	15		14	18	25	20	17
	40	28	15	22	20		20	30	12	17	30		10	15	20	14	10
4.	10	15	14	20	25	**5.**	10	15	18	16	13	**6.**	15	10	20	25	10
	14	17	20	15	10		20	25	10	13	17		14	17	25	20	13
	18	16	15	20	25		25	17	16	10	18		10	18	21	13	18
	10	13	18	21	30		18	20	20	15	10		15	10	22	27	25
7.	13	17	20	25	10	**8.**	15	15	20	12	14	**9.**	25	18	30	25	15
	18	25	25	23	13		17	25	27	25	15		15	20	25	20	11
	30	18	10	17	15		30	15	17	15	19		30	28	10	15	16
	35	22	15	22	21		10	28	10	24	21		20	25	15	20	22

4.6. В экономическом районе имеются четыре предприятия, выпускающие однородную продукцию и удовлетворяющие потребности пяти потребителей. Объемы производства и потребностей, а также стоимости перевозок единицы продукции приведены в табл. 4.23*а*, *б*.

а) Решить транспортную задачу, построив начальный базисный план перевозок по правилу Фогеля.

б) В связи с переходом к выпуску другой продукции уменьшаются объемы поставок второму и третьему потребителям на 20 и 10 ед. соответственно. Определить, на каких предприятиях необходимо провести сокращение выпуска, чтобы суммарные расходы на производство и транспортировку продукции после сокращения были минимальными. Себестоимость производства единицы продукции на предприятиях приведена в табл. 4.23*в*.

Таблица 4.23а

Варианты	Объемы производства поставщиков (ед.)					Потребности потребителей (ед.)			
	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	20	40	30	70	60	30	40	10	20
2	50	90	40	30	30	50	70	40	20
3	70	80	60	20	40	60	40	60	30
4	100	50	40	70	10	50	60	100	40
5	80	90	60	30	40	70	80	40	30
6	70	60	40	20	30	60	50	20	30
7	50	40	30	80	20	40	60	30	50
8	70	60	100	90	30	90	80	50	70
9	80	40	50	30	20	80	50	10	40
10	50	100	90	60	30	60	40	70	100

Таблица 4.23б

Стоимости перевозок (д. е.)		
1. 50 40 30 60 10 80 30 20 10 60 70 10 15 10 25 65 50 20 35 40	**2.** 80 90 30 50 45 30 60 10 15 35 80 10 25 35 40 40 50 35 60 25	**3.** 40 10 25 30 45 15 25 40 10 60 35 70 20 45 50 10 20 30 50 40
4. 20 80 60 10 30 40 10 20 35 50 45 50 65 20 10 30 25 15 40 10	**5.** 10 25 15 30 35 20 15 10 40 50 60 30 15 35 20 65 35 30 25 40	**6.** 20 40 30 10 15 25 10 35 40 50 15 45 60 70 25 10 30 55 60 15
7. 10 15 25 60 80 25 10 35 50 40 60 25 80 40 35 10 15 40 60 35	**8.** 45 90 60 15 20 60 55 40 10 25 30 50 60 15 45 25 35 70 40 35	**9.** 20 30 20 50 25 35 10 35 45 60 10 35 50 50 20 15 20 45 70 15

Таблица 4.23в

Себестоимость продукции (д. е.)										
Поставщики	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_1	10	30	12	30	20	10	15	10	25	15
A_2	15	15	10	25	15	30	20	25	30	10
A_3	25	10	15	10	10	25	10	30	25	20
A_4	20	10	25	15	25	20	25	15	20	25

4.7. Имеется 5 человек, которые могут выполнять 5 различных работ. Известна производительность i-го исполнителя при выполнении j-й работы (табл. 4.24). Определить, кого и на какую работу следует назначить, чтобы добиться максимальной суммарной производительности при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу.

Таблица 4.24

Матрицы производительностей		
1. $\begin{matrix}10&8&5&9&16\\4&3&4&11&12\\5&10&29&7&6\\9&2&4&1&3\\7&10&5&2&8\end{matrix}$	**2.** $\begin{matrix}10&7&2&4&5\\8&4&3&7&3\\2&4&10&11&8\\8&12&9&7&6\\9&10&7&5&4\end{matrix}$	**3.** $\begin{matrix}3&9&11&8&11\\6&2&3&6&5\\10&4&13&8&10\\3&8&7&5&7\\2&9&6&3&12\end{matrix}$
4. $\begin{matrix}10&10&5&1&5\\4&10&2&10&2\\10&8&10&5&2\\4&2&10&10&8\\5&7&9&8&5\end{matrix}$	**5.** $\begin{matrix}6&2&10&4&10\\2&1&1&9&10\\5&2&10&10&7\\10&5&10&4&8\\6&9&4&7&11\end{matrix}$	**6.** $\begin{matrix}8&10&8&10&4\\3&10&1&6&1\\10&9&10&8&3\\1&12&10&1&10\\5&10&15&5&9\end{matrix}$
7. $\begin{matrix}3&4&10&10&3\\9&10&7&7&10\\9&8&10&8&10\\2&10&8&10&9\\3&9&7&5&12\end{matrix}$	**8.** $\begin{matrix}10&1&3&10&2\\10&8&3&10&2\\10&2&16&10&8\\7&10&10&5&3\\5&9&8&7&5\end{matrix}$	**9.** $\begin{matrix}10&6&10&7&3\\2&10&1&9&10\\2&3&15&10&10\\10&5&10&6&5\\5&7&3&5&8\end{matrix}$
10. $\begin{matrix}3&9&10&10&2\\7&10&1&3&3\\9&10&10&1&3\\10&6&1&10&6\\12&5&4&6&8\end{matrix}$	**11.** $\begin{matrix}3&4&10&2&10\\3&6&4&10&10\\10&7&8&10&4\\10&4&1&2&10\\5&8&5&4&7\end{matrix}$	**12.** $\begin{matrix}10&5&10&9&6\\1&10&2&2&10\\10&5&12&10&1\\10&9&3&3&10\\5&7&5&4&5\end{matrix}$
13. $\begin{matrix}10&10&1&2&9\\10&6&1&5&3\\10&8&14&5&10\\9&10&2&6&10\\5&5&7&10&12\end{matrix}$	**14.** $\begin{matrix}10&4&8&6&10\\10&2&3&10&3\\7&10&10&2&3\\10&3&2&10&1\\5&4&6&5&7\end{matrix}$	**15.** $\begin{matrix}4&6&8&10&2\\3&4&3&9&5\\4&6&13&2&1\\2&3&4&10&9\\5&7&9&5&8\end{matrix}$
16. $\begin{matrix}8&5&8&2&7\\9&2&3&10&9\\16&12&12&8&14\\10&6&3&6&12\\5&4&5&7&4\end{matrix}$	**17.** $\begin{matrix}9&10&16&4&12\\13&1&2&1&9\\2&20&12&8&4\\13&10&10&14&18\\8&7&5&3&5\end{matrix}$	**18.** $\begin{matrix}3&10&6&10&10\\10&2&1&8&12\\16&10&15&10&10\\9&14&10&10&10\\5&12&5&6&7\end{matrix}$
19. $\begin{matrix}10&8&3&8&5\\10&5&2&1&14\\10&12&20&13&20\\6&2&16&3&18\\4&3&5&5&7\end{matrix}$	**20.** $\begin{matrix}10&6&14&16&7\\8&3&3&8&5\\12&20&14&20&10\\10&5&18&16&4\\6&4&5&8&9\end{matrix}$	**21.** $\begin{matrix}1&3&4&7&5\\10&8&1&2&3\\8&10&14&6&8\\7&5&9&12&11\\6&8&5&4&7\end{matrix}$

Окончание табл. 4.24

22. 3 5 11 8 10 8 7 1 4 3 10 11 12 9 7 6 4 7 8 10 5 6 5 10 9	**23.** 4 5 8 7 5 5 10 1 11 8 3 4 8 7 1 2 10 11 10 4 6 4 9 5 6	**24.** 3 5 7 5 4 10 12 1 4 8 10 11 10 8 7 10 8 9 7 8 7 5 6 3 10
25. 10 3 8 11 2 8 7 6 10 5 11 10 12 9 10 12 14 10 14 8 7 5 5 4 6	**26.** 10 1 7 2 4 8 3 2 2 10 5 2 6 2 2 10 3 2 4 2 7 5 4 8 5	**27.** 11 12 13 14 15 6 7 6 9 10 1 2 5 4 5 17 15 19 12 11 10 5 7 6 9
28. 1 2 3 6 5 6 7 3 9 10 1 2 5 4 5 6 7 8 9 2 4 3 9 5 7	**29.** 1 5 9 3 6 2 6 5 4 7 3 7 16 5 8 4 8 12 6 2 3 9 6 8 9	**30.** 6 8 4 10 10 10 12 1 8 9 12 13 13 5 4 2 4 8 6 9 5 3 9 7 5

4.9*. МТЗ с двухсторонними ограничениями

Изменим постановку задачи. В задаче (4.7) условия неотрицательности перевозок $x_{ij} \geq 0$ заменим на двухсторонние: $d_{*ij} \leq x_{ij} \leq d^*_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Получим задачу

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min,$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{4.13}$$

$$d_{*ij}\leq x_{ij}\leq d^*_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

Очевидно, необходимыми условиями существования плана перевозок являются условие общего баланса (4.8) и неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}d_{*ij}\leq a_i\leq\sum_{j=1}^{n}d^*_{ij},\ i=\overline{1,m},\quad \sum_{i=1}^{m}d_{*ij}\leq b_j\leq\sum_{i=1}^{m}d^*_{ij},\ j=\overline{1,n}.$$

Определение базисного плана перевозок аналогично определению базисного сетевого потока (см. п. 3.10*): ***план перевозок x базисный***, если $x_{ij} = d_{*ij} \vee d^*_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{Н}}$, а $U_{\text{Б}} = U \setminus U_{\text{Н}}$ — базисное множество клеток ($|U_{\text{Б}}| = m + n - 1$ и из множества клеток $U_{\text{Б}}$ нельзя образовать цикл). Базисный план перевозок ***невырожденный***, если $d_{*ij} < x_{ij} < d^*_{ij}$, $(i, j) \in U_{\text{Б}}$.

Потенциалы и оценки определяются, как и в п. 4.6, т. е. по формулам (4.9), (4.10).

Критерий оптимальности. *Для оптимальности базисного плана перевозок в задаче* (4.13) *достаточно, а в случае его невырожденности и необходимо, чтобы выполнялись условия*

$$\begin{aligned} &\Delta_{ij} \geq 0 \quad \textit{при} \quad x_{ij} = d_{*ij}, \\ &\Delta_{ij} \leq 0 \quad \textit{при} \quad x_{ij} = d^*_{ij}, \quad (i, \ j) \in U_{\text{Н}}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Алгоритм решения задачи (4.13) состоит в следующем. Пусть x — базисный план перевозок, $U_{\text{Б}}$ — базисное множество клеток.

1. Подсчитываем потенциалы, решая систему уравнений (4.9).
2. Подсчитываем небазисные оценки Δ_{ij} по формулам (4.10).
3. Проверяем условия оптимальности (4.14). Если они выполняются, решение заканчиваем: план перевозок x оптимален. В противном случае переходим к следующему шагу.
4. Выбираем клетку $(i_0, j_0) \in U^1_{\text{Н}}$, где $U^1_{\text{Н}}$ — множество клеток, для которых не выполняются условия (4.13). В качестве этой клетки можно брать любую. Чтобы стоимость перевозок на данной итерации максимально убывала, рекомендуется брать эту клетку из условия $|\Delta_{i_0 j_0}| = \max\limits_{(i,j) \in U^1_{\text{Н}}} |\Delta_{ij}|$.
5. Помечаем клетку (i_0, j_0) знаком "+", если $x_{i_0 j_0} = d_{*i_0 j_0}$, или знаком "–", если $x_{i_0 j_0} = d^*_{i_0 j_0}$. Добавляем клетку к базисному множеству $U_{\text{Б}}$. Образуется ровно один цикл. Двигаясь от клетки (i_0, j_0) по циклу, помечаем клетки, чередуя знаки "+" и "–". Обозначим множество клеток, помеченных знаком "+", через $U^+_{\text{Ц}}$, знаком "–" — через $U^-_{\text{Ц}}$.
6. Подсчитываем числа $\theta_{ij} = \begin{cases} d^*_{ij} - x_{ij}, & (i, j) \in U^+_{\text{Ц}}, \\ x_{ij} - d_{*ij}, & (i, j) \in U^-_{\text{Ц}}. \end{cases}$ Определяем $\theta^0 = \min\limits_{(i,j) \in U_{\text{Ц}}} \theta_{ij}$, где $U_{\text{Ц}}$ — множество клеток цикла.

7. *а*) Если $\theta^0 = \theta_{i_0 j_0}$, тогда пересчитываем новый план перевозок по формулам

$$\bar{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta^0, & (i,j) \in U_Ц^+, \\ x_{ij} - \theta^0, & (i,j) \in U_Ц^-, \\ x_{ij}, & (i,j) \in U \setminus U_Ц. \end{cases} \tag{4.15}$$

При этом базисное множество клеток $U_Б$ не поменяется, а небазисная перевозка $x_{i_0 j_0}$ перейдет с одной границы на другую, и для нее будут выполняться условия оптимальности (4.14). Если при этом $\bar{U}_Н^1 = U_Н^1 \setminus (i_0, \ j_0) = \varnothing$, то решение заканчиваем: построенный план перевозок (4.15) оптимален. Если же $\bar{U}_Н^1 \neq \varnothing$, то переходим к шагу 4, где $U_Н^1$ заменяем на $\bar{U}_Н^1$.

б) Если $\theta^0 = \theta_{i_* j_*}$, где $(i_*, j_*) \in U_Ц \cap U_Б$, тогда подсчитываем новый план перевозок по формулам (4.15), заменяем $U_Б$ на $\bar{U}_Б = \left(U_Б \setminus (i_*, j_*)\right) \cup \cup (i_0, j_0)$ и переходим к шагу 1.

Для ***построения начального базисного плана перевозок*** используются два метода. Рассмотрим первый из них, который назовем ***методом проб и ошибок***. Сводим исходную задачу к эквивалентной:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \left(\tilde{x}_{ij} + d_{*ij}\right) \to \min,$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} = a_i - \sum_{j=1}^{n} d_{*ij} = \tilde{a}_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ &\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij} = b_j - \sum_{i=1}^{m} d_{*ij} = \tilde{b}_j, \quad j = \overline{1,n}, \\ &0 \le \tilde{x}_{ij} \le d_{ij}^* - d_{*ij} = \tilde{d}_{ij}^*, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Начальный базисный план строится по одному из указанных выше правил, однако при заполнении клетки (i, j) теперь минимум берется не из величин $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_j$, а из трех величин $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_j$, $\tilde{d}_{ij}^*$: $\tilde{x}_{ij} = \min\left\{\tilde{a}_i, \ \tilde{b}_j, \ \tilde{d}_{ij}^*\right\}$. Если $\tilde{x}_{ij} = \tilde{d}_{ij}^*$, то вычеркивается только эта клетка, причем она будет небазисной, а на следующем шаге значения $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_j$ уменьшаются на величину

$\tilde{d}^*_{ij}$. Если же $\tilde{x}_{ij} = \tilde{a}_i \vee \tilde{b}_j$, то вычеркивается либо i-я строка, либо j-й столбец, как и для задач с односторонними прямыми ограничениями. В последних случаях заполненная клетка будет базисной. Во всех остальных незаполненных клетках стоят небазисные нулевые перевозки.

При построении начального базисного плана перевозок на последнем шаге возможна ситуация: $\alpha = \tilde{a}_{i_1} = \tilde{b}_{j_1} \neq 0$, но клетка (i_1, j_1) либо уже заполнена (небазисная), либо $\tilde{d}^*_{i_1 j_1} < \alpha$ (в последнем случае полагаем $\tilde{x}_{i_1 j_1} = \tilde{d}^*_{i_1 j_1}$ и обозначаем $\alpha_1 = \alpha - \tilde{d}^*_{i_1 j_1}$). Тогда в столбце B_{j_1} или строке A_{i_1} находим либо незаполненную клетку, например (i_2, j_1), такую, чтобы $\tilde{d}^*_{i_2 j_1} \geq \tilde{b}_{j_1}$, либо базисную, в которой $\tilde{x}_{i_2 j_1} < \tilde{d}^*_{i_2 j_1}$. Рассмотрим оба случая.

Если клетка (i_2, j_1) не заполнена, то помещаем в нее перевозку $\tilde{x}_{i_2 j_1} = \alpha$ (или α_1) и вычеркиваем столбец B_{j_1}. Клетку считаем базисной. Если при этом образовался цикл, то в нем отыскиваем базисную клетку с граничной перевозкой (она всегда существует) и выводим ее из базиса. На одном из последующих шагов обязательно добавляем базисную клетку. Поскольку для строки A_{i_2} нарушилось условие баланса, то необходимо из какой-либо из заполненных в этой строке клеток вычесть значение α (или α_1). Лучше всего взять клетку (i_2, j_2) такую, что клетка (i_1, j_2) является незаполненной. В этом случае будем иметь $\bar{x}_{i_2 j_2} = \tilde{x}_{i_2 j_2} - \alpha$, $\tilde{x}_{i_1 j_2} = \alpha$ (или $\bar{x}_{i_2 j_2} = \tilde{x}_{i_2 j_2} - \alpha_1$, $\tilde{x}_{i_1 j_2} = \alpha_1$). Если клетка (i_2, j_2) была небазисной и $\bar{x}_{i_2 j_2} > 0$, то она становится базисной. Если при этом образовался цикл, поступаем, как и выше.

Если клетка (i_2, j_1) была базисной, то увеличиваем перевозку $\tilde{x}_{i_2 j_1}$ и поступаем дальше, как и в первом случае.

Иногда приходится сделать больше шагов для окончательного построения начального базисного плана перевозок.

После построения начального базисного плана перевозок для решения задачи (4.15) применяем алгоритм, описанный выше. Оптимальный план перевозок исходной задачи равен $x^0 = (\tilde{x}^0_{ij} + d_{*ij},\ \ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n})$, где $\tilde{x}^0$ — оптимальный план перевозок задачи (4.15).

При решении задачи величины $\tilde{d}^*_{ij}$ помещаем в левом верхнем углу клетки, базисные перевозки — в левом нижнем углу в овале, небазисные ненулевые перевозки — в прямоугольнике. Чтобы не загромождать таблицу, нулевые небазисные перевозки не отмечаются. В небазисных клетках в правом нижнем углу помещаем оценки.

В качестве необходимых и достаточных условий существования плана перевозок для задачи (4.15) можно использовать условие общего баланса (4.8) и неравенства

$$\sum_{j=1}^{n}\min\{\tilde{b}_j,\ \tilde{d}^*_{ij}\}\ge a_i,\quad i=\overline{1,m};\quad \sum_{i=1}^{m}\min\{\tilde{a}_i,\ \tilde{d}^*_{ij}\}\ge \tilde{b}_j,\quad j=\overline{1,n}.$$

Пример 4.10. Рассмотрим задачу, данные которой приведены в табл. 4.25 (в левом нижнем углу помещены значения d_{*ij}, в левом верхнем — d^*_{ij}).

Таблица 4.25

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5 2 1	6 5 2	10 1 1	8 4 3	20
A_2	9 8 1	15 3 10	4 2 1	6 7 2	25
A_3	8 9 3	9 4 4	10 5 6	8 3 3	30
b_j	15	30	20	10	

Таблица 4.26

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\tilde{a}_i$
A_1	4 2 4	4 5	$\boxed{9}$ 1	5 4	~~13~~ 4
A_2	8 8 3	$\boxed{5}$ 3	3 2 3	4 7	~~11~~ 8 ~~3~~
A_3	5 9 3	$\boxed{5}$ 4	4 5	5 3 2	~~14~~ ~~12~~ ~~7~~ 4
$\tilde{b}_j$	~~10~~ 6 ~~3~~	~~14~~ ~~9~~ 4	~~12~~ ~~3~~	~~2~~	

Условия существования плана перевозок выполнены.

Преобразуем задачу к виду (4.16). В табл. 4.26 приведены новые данные. В ней же приведен процесс построения начального базисного плана перевозок по правилу минимального элемента.

Исходя из правила минимального элемента, заполняем клетку (1, 3): $\tilde{x}_{13}=\min\{13;\ 12;\ 9\}=9=\tilde{d}^*_{13}$. Клетка небазисная. Вычеркиваем ее, уменьшив $\tilde{a}_1=13$ и $\tilde{b}_3=12$ на 9. Далее заполняем клетку (1, 1): $\tilde{x}_{11}=4=$ $=\tilde{a}_1=\tilde{d}^*_{11}$. Поскольку минимум достигается на элементах $\tilde{a}_1$ и $\tilde{d}^*_{11}$, то можно поступить так: либо клетку (1, 1) считать базисной и вычеркнуть первую строку (так и сделано в таблице), либо считать ее небазисной, положив $\bar{a}_1$ равным нулю и занеся его потом в базисную клетку. Следующей заполняемой клеткой будет (2, 3): $\tilde{x}_{23}=\min\{11;\ 3;\ 3\}=$ $=3=\tilde{d}^*_{23}=\tilde{b}_3$. Клетку будем считать базисной и вычеркиваем столбец B_3. Затем заполняется базисная клетка (3, 4): $\tilde{x}_{34}=2$ и вычеркивается столбец B_4. Далее заполняются клетки (2, 1) и (3, 1): $\tilde{x}_{21}=3$, $\tilde{x}_{31}=3$ (базисные перевозки). В результате остались значения $\bar{a}_3 = \bar{b}_2 = 4 = \alpha$, а клетка (3, 2) уже заполнена. Поскольку условия существования выполнены, то базисный план перевозок должен существовать.

В столбце B_2 незаполненной является клетка (1, 2), причем $\tilde{d}^*_{12} = 4 = \tilde{b}_4$. Положим $\tilde{x}_{12} = 4$ и будем считать ее базисной, вычеркнув при этом столбец B_2. Таким образом, количество невычеркнутых строк и столбцов равно 1, т. е. количество базисных клеток равно $m+n-1$. Однако после заполнения клетки (1, 2) для первой строки нарушилось условие баланса. Поэтому ищем в этой строке заполненную клетку, чтобы уменьшить перевозку на величину $\alpha = 4$. Желательно, чтобы эта клетка находилась в столбце j, для которого клетка $(3, j)$ $(\bar{a}_3 = 4 \neq 0)$ еще не заполнена. В нашем случае такой клеткой является (1, 3). Полагаем $\tilde{x}_{13} = 9 - 4 = 5$, а поскольку для столбца B_3 нарушилось условие баланса, полагаем $\tilde{x}_{33} = 4$. В этом случае клетка (1, 3) становится базисной, а это означает, что количество базисных клеток больше $m+n-1$, значит, образовался цикл: $\{(1, 3), (2, 3), (2, 1), (1, 1), (1, 3)\}$. В этом цикле находим клетку с граничными перевозками и одну из них делаем небазисной. Такими оказались клетки (1, 1) и (2, 3). Клетку (1, 1) делаем небазисной. Для клетки (3, 3) имеем $\tilde{x}_{33} = 4 = \tilde{d}^*_{33}$, следовательно, эта клетка небазисная. Таким образом, базисный план перевозок построен. Он изображен в табл. 4.27.

В табл. 4.27 приведена первая итерация метода потенциалов. По формулам (4.9) подсчитываем потенциалы, которые помещаем сверху и слева таблицы, а по формулам (4.10) — небазисные оценки, которые помещены в нижнем правом углу каждой небазисной клетки. Для клетки (3, 3) условие оптимальности не выполняется: $\Delta_{33} = 2 > 0$ при $\tilde{x}_{33} = 4 =$

Таблица 4.27

$u_i \setminus v_j$	8	6	2	2
−1	$\boxed{4}$ 2 −5	4 5 4	9 1 5	5 4 3
0	8 8 − 3	$\boxed{5}$ 3 −3	3 2 3 +	4 7 5
1	5 9 + 3	$\boxed{5}$ 4 −3	$\boxed{4}$ 5 − 2	5 3 2

$= \tilde{d}^*_{33}$. Заметим, что поскольку план вырожденный, то это еще не означает, что он не оптимален. Клетку $(i_0, j_0) = (3,\ 3)$ добавляем к базисному множеству клеток, образуется цикл: $\{(3,\ 3), (3,\ 1), (2,\ 1), (2,\ 3), (3,\ 3)\}$. Поскольку $\tilde{x}_{33} = \tilde{d}^*_{33}$, то клетку (3, 3) помечаем знаком "–". Далее чередуем знаки "+", "–". Подсчитываем шаги: $\theta_{i_0 j_0} = \theta_{33} = 4 - 0 = 4$, $\theta_{31} = 5 - 3 = 2$, $\theta_{21} = 3 - 0 = 3$, $\theta_{23} = 3 - 3 = 0$. Итак, $\theta^0 = 0 = \theta_{23} = \theta_{i_* j_*}$. Базис меняем, удалив из $U_Б$ клетку $(i_*, j_*) = (2, 3)$ и заменив ее клеткой $(i_*, j_*) = (3, 3)$. Поскольку $\theta^0 = 0$, то план перевозок остается прежним. В табл. 4.28 условия оптимальности выполняются, следовательно, план вспомогательной задачи оптимален.

Для исходной задачи имеем

$$x^0 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 3 \\ 4 & 15 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Минимальные издержки равны: $\varphi_{\min} = 2 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 4 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 6 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 312$.

Таблица 4.28

$u_i \setminus v_j$	9	9	5	3
–4	$\boxed{4}$ 2 / –3	4 5 / 4	9 1 / 5	5 4 / 5
–1	8 8 / 3	$\boxed{5}$ 3 / –5	$\boxed{3}$ 2 / –2	4 7 / 5
0	5 9 / 3	$\boxed{5}$ 4 / –5	4 5 / 4	5 3 / 2

Таблица 4.29

4 ¦ 2 / 4	4 ¦ 5	$\boxed{9}$ ¦ 1	5 ¦ 4	~~13~~ 4
8 ¦ 8 / 3	$\boxed{5}$ ¦ 3	3 ¦ 2 / 3	4 ¦ 7	~~11~~ ~~8~~ ~~3~~
5 ¦ 9 / 3	10 ¦ 4 / 9	4 ¦ 5	5 ¦ 3 / 2	~~14~~ ~~12~~ ~~3~~
~~10~~ ~~6~~ ~~3~~	~~14~~ ~~9~~	~~12~~ ~~3~~	~~2~~	

Пример 4.11. Заменим в табл. 4.25 $d^*_{32} = 9$ на $d^*_{32} = 14$. Тогда в табл. 4.26 $\tilde{d}^*_{32} = 10$. Начальный базисный план перевозок строится сразу: в табл. 4.29 представлен этот план, построенный по правилу минимального элемента.

Пример 4.12. Построим начальный базисный план перевозок для задачи примера 4.10 по правилу северо-западного угла (см. табл. 4.30). Возникла та же ситуация, что и в примере 4.10 при построении начального базисного плана перевозок: остался нераспределенным запас $\tilde{a}_3 = 3$ и не удовлетворен спрос $\tilde{b}_3 = 3$. Но клетка (3, 3) уже заполнена.

Поступаем следующим образом. Заполняем клетку (3, 1) $(\tilde{x}_{31}=3)$, делая ее базисной (можно было заполнить клетку (2, 3): $(\tilde{x}_{23}=3)$). Образовался цикл $\{(3, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$. В нем клетка (2, 2) базисная, но перевозка граничная, поэтому эту клетку делаем небазисной. Поскольку нарушилось условие баланса для первого столбца, то полагаем $\tilde{x}_{21}=3$ и, кроме того, берем $(\tilde{x}_{23}=3)$. Клетку (2, 3) делаем базисной, поскольку не хватает одной базисной клетки. Построенный базисный план представлен в табл. 4.31.

Таблица 4.30

$\boxed{4}$ 2	$\boxed{4}$ 5	9 1 (5)	5 4	~~13~~ ~~9~~ ~~5~~
8 8 (6)	5 3 (5)	3 2	4 7	~~11~~ ~~5~~
5 9	10 4 (5)	$\boxed{4}$ 5	5 3 (2)	~~14~~ ~~9~~ ~~5~~ 3
~~10~~ ~~6~~	~~14~~ ~~10~~ ~~5~~	~~12~~ ~~7~~ 3	~~2~~	

Таблица 4.31

$u_i \setminus v_j$	9	4	3	3
−2	$\boxed{4}$ 2; −5	$\boxed{4}$ 5; − 3	9 1; + (5)	5 4; 3
−1	8 8; + (3)	$\boxed{5}$ 3; 0	3 2; − (3)	4 7; 5
0	5 9; − (3)	10 4; + (5)	$\boxed{4}$ 5; 2	5 3; (2)

При реализации первой итерации получаем, что условия оптимальности для клеток (1, 2) и (3, 3) не выполняются (см. табл. 4.31). В качестве (i_0, j_0) берем клетку (1, 2). В образованном цикле получаем $\theta_{i_0 j_0}=\theta_{12}=4$, $\theta_{13}=9-5=4$, $\theta_{23}=3-0=3$, $\theta_{21}=8-3=5$, $\theta_{31}=3-0=3$, $\theta_{32}=10-5=5$. Итак, $\theta^0=\theta_{23}=\theta_{31}=3$. Выберем клетку с бóльшим значением стоимости, т. е. $(i_*, j_*)=(3, 1)$. Ее выводим из базисного множества, заменив клеткой $(i_0, j_0)=(1, 2)$. Новый план перевозок получаем, добавив к старым значениям перевозок число θ^0 для клеток, помеченных знаком "+", и отняв от старых значений перевозок число θ^0 для клеток, помеченных знаком "–". Остальные перевозки остаются прежними. Результат представлен в табл. 4.32.

Таблица 4.32

$\boxed{4}$ 2	4 5 (1)	9 1 (8)	5 4
8 8 (6)	$\boxed{5}$ 3	3 2 (0)	4 7
5 9	10 4 (8)	$\boxed{4}$ 5	5 3 (2)

Найти оптимальный план перевозок предлагается в качестве упражнения.

Второй метод построения начального базисного плана перевозок, как и для СТЗ, состоит в использовании первой фазы. Для этого положим $\tilde{x}_{ij} = d_{*ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, и найдем значения ***невязок*** $\omega_i = a_i - \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij}$, $i=\overline{1,m}$; $\mu_j = b_j - \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij}$, $j=\overline{1,n}$. Очевидно, $\omega_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$; $\mu_j \geq 0$, $j=\overline{1,n}$, иначе задача не имеет планов перевозок. Введем дополнительный искусственный пункт производства A_{m+1} с объемом производства $a_{m+1} = \sum_{j+1}^{n} \mu_j$ и стоимостями перевозок $c_{m+1,j} = 1$, $j=\overline{1,n}$, а также искусственный пункт потребления B_{n+1} с объемом потребления $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$ и стоимостями перевозок $c_{i,n+1} = 1$, $i=\overline{1,m}$. Очевидно, $\alpha = \sum_{i=1}^{m} \omega_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$.

Задача первой фазы имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,n+1} + \sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \quad i=\overline{1,m+1},$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j=\overline{1,n+1},$$

$$d_{*ij} \leq x_{ij} \leq d_{ij}^{*}, \ i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,n}, \tag{4.17}$$

$$0 \leq x_{i,n+1} \leq \omega_i, \ i=\overline{1,m},$$

$$0 \leq x_{m+1,j} \leq \mu_j, \ j=\overline{1,n},$$

$$0 \leq x_{m+1,n+1} \leq \alpha.$$

Очевидно, задача (4.17) имеет решение. Введем обозначения: $x = (x_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$, $U_И = \{(m+1,j),\ j=\overline{1,n};\ (i,n+1),\ i=\overline{1,m}\}$, $x_И = (x_{ij},\ (i,j) \in U_И)$. Начальный базисный план перевозок для задачи (4.17) имеет вид $x = \tilde{x}$, $x_{i,n+1} = \omega_i$, $i=\overline{1,m}$; $x_{m+1,j} = \mu_j$, $j=\overline{1,n}$; $x_{m+1,n+1} = 0$ с базисным множеством клеток $U_Б = U_И \cup (m+1, n+1)$.

Пусть $(x^{*}, x_И^{*}, x_{m+1,n+1}^{*})$ — оптимальный план задачи (4.17). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Необходимым и достаточным условием существования плана перевозок в задаче* (4.13) *является условие* $x^*_{И} = 0$.

После решения задачи (4.17) будем иметь одну из возможных ситуаций: 1) $x^*_{И} \neq 0$; 2) $x^*_{И} = 0$, $U_{Б} \cap U_{И}$ содержит одну клетку; 3) $x^*_{И} = 0$, $U_{Б} \cap U_{И}$ содержит более одной клетки. Заметим, что клетка $(m+1,\ n+1)$ будет всегда базисной.

В первой ситуации исходная задача (4.13) не имеет планов перевозок. Во второй ситуации отбрасываем строку A_{m+1} и столбец B_{n+1} и переходим к решению задачи (4.13) с полученным после первой фазы базисным планом перевозок x^*. В третьей ситуации из основной таблицы добавим к базисному множеству клеток какую-либо небазисную клетку $(i_0,\ j_0)$, чтобы образовался цикл, содержащий искусственную базисную клетку $(i_*,\ j_*)$. Заменим в базисном множестве клеток $(i_*,\ j_*)$ на $(i_0,\ j_0)$. Действуем таким образом до тех пор, пока в $U_{Б} \cap U_{И}$ не останется только одна клетка, после чего поступаем, как во второй ситуации.

Пример 4.13. Рассмотрим транспортную задачу с данными, приведенными в табл. 4.33.

Чтобы не загромождать в дальнейшем матричные таблицы лишними записями, перейдем, как и в примерах 4.10—4.12, к нулевым нижним границам. Измененные данные приведены в табл. 4.34.

Таблица 4.33

	B_1	B_2	
A_1	4 1 1	17 3 2	15
A_2	15 4 6	10 5 3	20
A_3	19 2 8	21 1 4	35
	25	45	

Таблица 4.34

	B_1	B_2	
A_1	3 1	15 3	12
A_2	9 4	7 5	11
A_3	11 2	17 1	23
	10	36	

Возьмем $\tilde{x}_{ij} = 0$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,2}$. Тогда $\omega_1 = 12$, $\omega_2 = 11$, $\omega_3 = 23$; $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 36$; $\alpha = 46$. В табл. 4.35 представлен первоначальный базисный план перевозок задачи первой фазы. Решение задачи первой фазы представлено в табл. 4.35—4.40.

Таблица 4.35

$u_i \setminus v_j$	B_1 1	B_2 1	B_3 0	
A_1 1	3 0 −2	15 0 + −2	12 1 12 −	12
A_2 1	9 0 −2	7 0 −2	11 1 11	11
A_3 1	11 0 −2	17 0 −2	23 1 23	23
A_4 0	10 1 10	36 1 36 −	46 0 0 +	46
	10	36	46	

Таблица 4.36

$u_i \setminus v_j$	1	1	0
−1	3 0 0	15 0 12	12 1 2
1	9 0 −2	7 0 −2	11 1 11
1	11 0 + −2	17 0 −2	23 1 23 −
0	10 1 10 −	36 1 24	46 0 12 +

Таблица 4.37

$u_i \setminus v_j$	−1	1	0
−1	3 0 2	15 0 12	12 1 2
1	9 0 0	7 0 −2	11 1 11
1	11 0 10	17 0 + −2	23 1 13 −
0	10 1 2	36 1 24 −	46 0 22 +

Таблица 4.38

$u_i \setminus v_j$	1	1	0
−1	3 0 0	15 0 12	12 1 2
1	9 0 −2	7 0 + −2	11 1 11 −
−1	11 0 10	17 0 13	23 1 2
0	10 1 0	36 1 11 −	46 0 35 +

Таблица 4.39

$u_i \setminus v_j$	1	1	0
−1	3 0 0	15 0 12	12 1 2
1	9 0 + −2	$\boxed{7}$ 0 −2	11 1 4 −
−1	11 0 10 −	17 0 13 +	23 1 2
0	10 1 0	36 1 4 −	46 0 42 +

Таблица 4.40

$u_i \setminus v_j$	1	1	0
−1	3 0 0	15 0 12	12 1 2
−1	9 0 4	$\boxed{7}$ 0 0	11 1 2
−1	11 0 6	17 0 17	23 1 2
0	10 1 0	36 1 0	46 0 46

В табл. 4.40 получен оптимальный план перевозок задачи первой фазы, причем выполняется условие $x_{И}^{*} = 0$.

Переходим к решению исходной задачи (вернее, преобразованной), удалив в табл. 4.40 третий столбец и четвертую строку и заменив нулевые тарифы на тарифы, заданные в исходной табл. 4.33. Дальнейшее решение задачи предоставляется в качестве упражнения.

Пример 4.14. Рассмотрим задачу примера 4.13, заменив в ней $d^*_{23} = 15$ на $d^*_{23} = 9$. Перейдя к эквивалентной задаче с нулевыми нижними границами, получим задачу, представленную в табл. 4.41.

Применяя первую фазу, получим результаты, аналогичные представленным в табл. 4.35—4.40 с заменой d^*_{23}. Однако табл. 4.40 будет иметь вид, представленный в табл. 4.42. Как видим, условия оптимальности выполняются, но в оптимальном плане перевозок задачи первой фазы искусственные перевозки ненулевые: $x^*_{23} = x^*_{42} = 1$. Следовательно, для исходной задачи не существует ни одного плана перевозок.

Таблица 4.41

	B_1	B_2	
A_1	3 1	15 3	12
A_2	3 4	7 5	11
A_3	11 2	17 1	23
	10	36	

Таблица 4.42

$u_i \setminus v_j$	1	1	0
−1	3 0 0	15 0 12	12 1 2
1	$\boxed{3}$ 0 −2	$\boxed{7}$ 0 −2	11 1 1
−1	11 0 7	17 0 16	23 1 2
0	10 1 0	36 1 1	46 0 45

Замечание 4.4. При ручном счете построение начального базисного плана перевозок удобнее осуществлять по первому методу, описанному выше и представленному в примерах 4.10—4.12.

Задания

4.8. Решить задачу 4.1 при наличии прямых ограничений на перевозки, определенных матрицами ограничений:

$$D_* = \begin{pmatrix} d_{*ij}, & j = \overline{1,5} \\ & i = \overline{1,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D^* = \begin{pmatrix} d^*_{ij}, & j = \overline{1,5} \\ & i = \overline{1,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 & 10 & 5 \\ 7 & 15 & 4 & 6 & 9 \\ 5 & 6 & 6 & 5 & 10 \\ 8 & 5 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

4.9. *а*) Используя первую фазу, построить начальный базисный план перевозок для задания 4.8.

б) Уменьшив в матрице D^* задания 4.8 d^*_{35} на 5 единиц, построить начальный базисный план перевозок, используя первую фазу.

Глава 2. ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 5. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

Выпуклый анализ играет важную роль в изучении задач оптимизации выпуклых функций на выпуклых множествах. Свойства выпуклых множеств и функций, возможность разделения непересекающихся выпуклых множеств используются для получения условий оптимальности в задачах выпуклого программирования, для построения вычислительных процедур.

5.1. Выпуклые множества

Множество[1] $X \subset \mathbf{R}^n$ называется ***выпуклым***, если $x(\lambda) = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X$ при всех x^1, $x^2 \in X$, $\lambda \in [0;\ 1]$, т. е. если вместе с любыми своими двумя точками множество X содержит и соединяющий их отрезок (рис. 5.1). ***Гиперплоскость*** $X = \{x:\ \ c'x = \alpha\}$, $c \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, ***полупространство*** $X = \{x:\ \ c'x \le \alpha\}$ являются выпуклыми множествами (рис. 5.2).

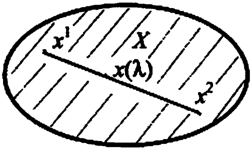
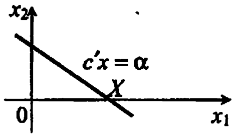
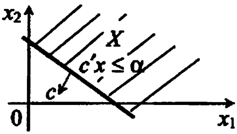


Рис. 5.1

Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называется ***выпуклым конусом*** с вершиной в начале координат, если из того, что $x, y \in X$, следует, что $x + y \in X$, $\lambda x \in X$ для всех $\lambda \ge 0$ (рис. 5.3).



гиперплоскость



полупространство

Рис. 5.2

Основные свойства выпуклых множеств:

1. Пересечение любого числа выпуклых множеств — выпуклое множество.

---

[1] В дальнейшем считаем, если не оговорено противное, что рассматриваемые множества непустые.

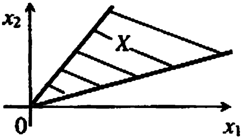


Рис. 5.3

2. Если $X_1,\dots,X_k$ — выпуклые множества в $\mathbf{R}^n$, то множество $X=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i X_i=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\ x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i,\ \ x^i\in X_i,\ i=\overline{1,k}\right\}$ выпукло (α_i, $i=\overline{1,k}$, — любые числа).

3. Выпуклы сумма и разность выпуклых множеств X_1 и X_2, т. е. множества $X_1\pm X_2=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\ x=x^1\pm x^2,\ x^1\in X_1,\ x^2\in X_2\right\}$.

4. Замыкание $\overline{X}$ выпуклого множества X также выпукло.

Выпуклой оболочкой множества $X\subset\mathbf{R}^n$ называется множество $\operatorname{conv}X=\left\{x:\ x=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x^i,\ \ x^i\in X,\ \ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1,\ \ \lambda_i\ge 0,\ \ i=\overline{1,n+1}\right\}$ (рис. 5.4).

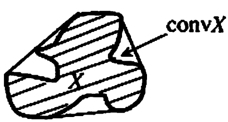


Рис. 5.4

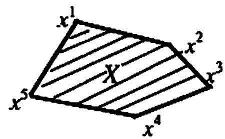


Рис. 5.5

Множество conv$X$ совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих множество X. Выпуклая оболочка множества — множество выпуклое.

Пусть $x^1,\dots,\ x^k\in\mathbf{R}^n$. Множество $X=\operatorname{conv}\left\{x^1,\dots,\ x^k\right\}$ называется ***выпуклым многогранником*** (рис. 5.5).

Пример 5.1. Доказать выпуклость множества $X=\left\{x=(x_1,x_2):\ x_1^2\le x_2\right\}$.

Пусть $x,\ y\in X$, т. е. $x_1^2\le x_2$, $y_1^2\le y_2$. Тогда для любого $\lambda\in[0;\ 1]$ имеем

$$(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)^2=\lambda^2x_1^2+(1-\lambda)^2y_1^2+2\lambda(1-\lambda)x_1y_1\le\lambda^2x_2+(1-\lambda)^2y_2+$$
$$+2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x_2y_2}\le\lambda^2x_2+(1-\lambda)^2y_2+\lambda(1-\lambda)(x_2+y_2)=\lambda x_2+(1-\lambda)y_2.$$

Следовательно, $\lambda x+(1-\lambda)y\in X\ \ \forall\,\lambda\in[0;\ 1]$, т. е. множество X выпукло.

Пример 5.2. Найти максимальное число a, при котором множество $X=\left\{x:(x_1-1)^3-x_2^2<0,\ x_2-x_1\le a\right\}$ выпукло.

Как видно из рис. 5.6, при $a=-31/27$ множество X будет выпуклым. Проводим касательную к графику функции $(x_1-1)^3-x_2^2=0$, заданной неявно. Эта функция называется полукубической параболой. Уравнение касательной имеет вид $x_2=kx_1+b$, где $k=\left.\dfrac{dx_2}{dx_1}\right|_{x=x_0}$, $x_0=$ $=(13/9;\ 8/27)$, причем $k=1$, поскольку касательная должна совпадать с прямой $x_2=x_1+a$.

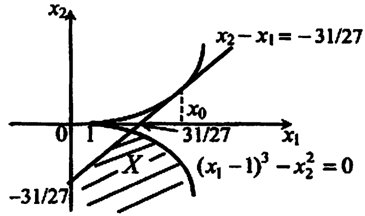


Рис. 5.6

Пример 5.3. Доказать, что множество $X=\{x\in\mathbf{R}^3: x_1^2-2x_1x_3+$ $+x_2^2\le 0,\ x_1\ge 0\}$ является выпуклым конусом. Изобразить этот конус.

Очевидно, что множество X — конус. Докажем, что X — выпуклый конус. Действительно, используя неравенство Коши — Буняковского и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, для любых $x, y\in X$ будем иметь

$$(x_1+y_1)^2-2(x_1+y_1)(x_3+y_3)+(x_2+y_2)^2=$$
$$=(x_1^2-2x_1x_3+x_2^2)+(y_1^2-2y_1y_3+y_2^2)+2(x_1y_1+x_2y_2-y_1x_3-x_1y_3)\le$$
$$\le 2(\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)}-y_1x_3-x_1y_3)\le 2(2\sqrt{x_1x_3y_1y_3}-y_1x_3-x_1y_3)\le 0,$$

т. е. $x+y\in X$. Таким образом, X — выпуклый конус (рис. 5.7). Сечением конуса плоскостью $x_3=\text{const}>0$ является круг $(x_1-x_3)^2+x_2^2\le x_3^2$. Если $x_2=0$, то получаем конус $0\le x_1\le 2x_3$.

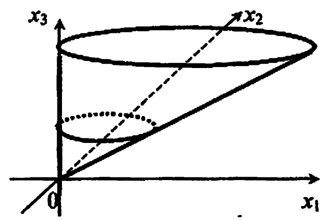


Рис. 5.7

При исследовании задач минимизации важную роль играют следующие утверждения.

Теорема 5.1 (об отделимости выпуклых множеств). *Если множества $X, Y\subset\mathbf{R}^n$ выпуклы, одно из них ограничено и их замыкания не имеют общих точек ($\overline{X}\cap\overline{Y}=\varnothing$), то они строго отделимы, т. е. существуют n-вектор c, $c\ne 0$, и число α такие, что для всех $x\in X, y\in Y$ выполняются неравенства $c'x>\alpha$, $c'y<\alpha$ (рис. 5.8). При этом гиперплоскость $c'x=\alpha$ называется **разделяющей гиперплоскостью**.*

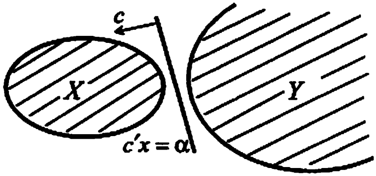


Рис. 5.8

Если X, Y — выпуклые множества, не имеющие общих внутренних точек, то они отделимы, т. е. существуют c, $c \neq 0$, и α такие, что $c'x \geq \alpha$, $c'y \leq \alpha$ $\forall\, x \in X,\, y \in Y$.

Теорема 5.2 (о существовании опорной гиперплоскости). *Если x^* — граничная точка выпуклого множества X, то в этой точке существует опорная гиперплоскость к X, т. е. при некотором $c \neq 0$ выполняется неравенство $c'x \leq c'x^*$ $\forall\, x \in X$ ($c'x = c'x^*$ — **опорная гиперплоскость**).*

Пример 5.4. Записать уравнение гиперплоскости, отделяющей точку $x^* = (-4;\ 2;\ 1;\ -2)$ от множества $X \subset \mathbf{R}^4$, которое задается системой неравенств $x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 \leq 1$; $-x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 2$; $3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 0$; $x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 9$.

Очевидно, что среди неравенств, задающих множество X, третье неравенство в точке x^* не выполняется. Поэтому в качестве разделяющей (не строго) гиперплоскости можно взять гиперплоскость $3x_2 + x_3 + {}$ ${} + 2x_4 = 0$.

Пример 5.5. Записать уравнение гиперплоскости, опорной к множеству $X = \left\{x \in \mathbf{R}^3 : f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_2x_3 + x_3^2 \leq 16\right\}$ в точке $x^* =$ $= (4;\ 1;\ 0)$.

Функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^3$, строго выпуклая, поскольку матрица вторых производных положительно определенная $\left(\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} > 0\right)$ (см. п. 5.2, пример 5.7), а значит, множество X выпукло. Тогда опорной гиперплоскостью к множеству X в точке x^* является, очевидно, касательная плоскость к границе $\partial X = \{x : f(x) = 16\}$ множества X в точке x^*, т. е. $\dfrac{\partial f'(x^*)}{\partial x}(x - x^*) = 0$. Имеем $\dfrac{\partial f'(x^*)}{\partial x} = (7;\ 4;\ 3)$ и

$$(7;\ \ 4;\ \ 3)\begin{pmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 32 = 0.$$

Пример 5.6. Записать уравнение гиперплоскости, разделяющей выпуклые множества $X_1 = \{x \in \mathbf{R}^2 : x_2(x_1 - 1) \ge 3,\ x_1 < 1\}$, $X_2 = \{x \in \mathbf{R}^2 : (x_2 + 4)(x_1 + 2) \ge 3,\ x_1 > -2\}$.

Ясно, что множества X_1 и X_2 пересекаются (касаются) в единственной точке $x^* = (-1/2; -2)$. Поэтому разделяющей гиперплоскостью будет касательная прямая к графику функции $x_2 = \dfrac{3}{x_1 - 1}$ в точке x^*, т. е. прямая $4x_1 + 3x_2 = -8$.

Упражнения и задания

5.1. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$, $X \ne \varnothing$. Показать, что для выпуклости X необходимо и достаточно, чтобы для любого $k \ge 2$ из того, что точки $x^1, \dots, x^k$ принадлежат X, следовало $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \in X$, если $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \ge 0$, $i = \overline{1,k}$.

5.2. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклое множество, A — матрица размером $m \times n$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Показать, что следующие множества выпуклы:

а) $AX = \{z : z = Ax,\ x \in X\}$;

б) $\alpha X = \{\alpha x : x \in X\}$.

5.3. Пусть $X_1 = \{x : x_1 = 0,\ 0 \le x_2 \le 1\}$, $X_2 = \{x : 0 \le x_1 \le 1,\ x_2 = 2\}$. Описать множества $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$.

5.4. Доказать выпуклость следующих множеств в $\mathbf{R}^2$: $X = \{x : x_1^2 \le x_2\}$; $X = \{x : x_1 x_2 \ge 1,\ x_1 > 0\}$; $X = \{x : \sin x_1 \ge x_2,\ 0 \le x_1 \le \pi\}$; $X = \{x : e^{x_1} \le x_2\}$.

5.5. Пусть $X_1 = \{\lambda x^1 : \lambda \ge 0\}$, $X_2 = \{\lambda x^2 : \lambda \ge 0\}$, $x^1, x^2 \in \mathbf{R}^n$. Показать, что $X_1 + X_2$ замкнутое выпуклое множество.

5.6. Доказать, что множество conv$X$ выпукло для любого множества $X \in \mathbf{R}^n$.

5.7. Доказать, что только одна из приведенных ниже систем разрешима:

а) $Ax \ge 0$, $x \ge 0$, $c'x > 0$;

б) $A'y \ge c$, $y \le 0$.

(*Указание.* Использовать ***теорему Фаркаша***: *для того чтобы на каждом n-векторе x, удовлетворяющем системе* $a_i'x \le 0$ $(a_i'x < 0)$, $i = \overline{1,m}$; $b_j'x = 0$, $j = \overline{1,k}$, *выполнялось неравенство* $a_0'x \le 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа*: $\lambda_i \ge 0$, $i = \overline{1,m}$; μ_j, $j = \overline{1,k}$, *что* $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j b_j$.)

5.8. Доказать, используя теорему Фаркаша, что только одна из приведенных ниже систем разрешима:

а) $Ax \ge 0$;

б) $A'y = 0$, $y \ge 0$, $y \ne 0$ (A — $m \times n$-матрица).

5.9. Показать, что приведенные ниже системы имеют решения $\bar{x}$ и $\bar{y}$, для которых $A\bar{x}+\bar{y}>0$:

а) $Ax \geq 0$;

б) $A'y=0$, $y \geq 0$ (A — $m \times n$-матрица).

5.10. Показать, что разрешима только одна из следующих систем:

а) $Ax \geq 0$;

б) $A'y=0$, $c'y=1$ (A — $m \times n$-матрица).

5.11. Показать, что если система *а*) не имеет решения, то система *б*) разрешима:

а) $Ax<0$, $Bx=0$, $x \in \mathbf{R}^n$;

б) $A'u+B'v=0$, $(u, v) \neq 0$, $u \geq 0$ (A — $p \times n$-матрица, B — $q \times n$-матрица).

5.12. Пусть X_1 и X_2 — выпуклые множества в $\mathbf{R}^n$. Показать, что гиперплоскость, строго разделяющая X_1 и X_2, существует тогда и только тогда, когда

$$\inf\left\{\left\|x^1-x^2\right\|:\ x^1 \in X_1,\ \ x^2 \in X_2\right\}>0.$$

5.13. Рассмотрим множество $X=\left\{x:\ x_1^2+x_2^2 \leq 1\right\}$. Представить X в виде пересечения полупространств. Выписать эти полупространства в явном виде.

5.14. Пусть X — непустое множество в $\mathbf{R}^n$. Показать, что X тогда и только тогда является выпуклым конусом, когда из того, что $x^1,\ x^2 \in X$, следует, что $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \in X\ \ \forall\ \lambda_1,\ \lambda_2 \geq 0$.

5.15. Пусть X — непустое множество в $\mathbf{R}^n$ и $x^* \in X$. Рассмотрим множество $C=\{z:\ z=\lambda(x-x^*),\ \ \lambda \geq 0,\ x \in X\}$.

а) Показать, что C — конус, и проинтерпретировать это геометрически.

б) Показать, что если X — выпуклое множество, то C также выпукло.

в) Пусть X — замкнутое множество. Обязательно ли замкнуто C?

5.16. Пусть задан конус $C_\varepsilon=\left\{z:\ z=\lambda(x-x^*),\ \lambda \geq 0,\ x \in X \bigcap N_\varepsilon(x^*)\right\}$, где $N_\varepsilon(x^*)$ — ε-окрестность точки x^*. Обозначим через K пересечение всех таких конусов, т. е. $K=\bigcap\{C_\varepsilon : \varepsilon>0\}$. Множество K называется ***конусом касательных*** к множеству X в точке x^*. Изобразить конус K.

5.17. Найти минимальное значение параметра c, при котором множество $X=\left\{x:\ (ax_1^2+1)x_2 \leq b,\ x_2 \geq c\right\}$ выпукло (числа a, b заданы в табл. 5.1).

Таблица 5.1

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	1	4	5	3	1	5	3	4	2
b	1/2	5	1/4	2/3	1/5	6	4	8	3	1

Варианты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	2	1	3	5	4	4	5	1	2	3
b	5/2	9	10	11	4	3	5	7	10	6

5.18. Доказать, что множество $X = \{x : ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \le 0, \quad x_2 \ge 0\}$ является выпуклым конусом и изобразить его на плоскости (числа *a*, *b*, *c* заданы в табл. 5.2).

Таблица 5.2

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	2	3	2	2	4	4	5	5	3	3
b	–7	4	–5	–5	–15	–11	–13	–17	–1	–8
c	6	–4	2	–3	9	–6	6	6	–4	4
Варианты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	2	3	3	5	5	6	2	2	6	4
b	–1/2	–3/2	–1/4	–2/3	–2	–1	7	–3	1	–5
c	–3	–4	–2	–4	–3	–5	3	–5	–5	–6

5.19. Найти минимальное значение параметра *a*, при котором множество $X = \left\{x:\ x_1^3 + x_2^3 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge a\right\}$ выпукло.

5.20. Записать уравнение гиперплоскости, строго отделяющей точку $x^* = (3;\ 2;\ 1;\ 1)$ от множества *X*, которое задается системой неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 + ax_3 - 9x_4 \le 7, \\ -x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 - bx_4 \le 1, \\ cx_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 9. \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 \le 5, \end{cases}$$

где числа *a*, *b*, *c* заданы в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	6	3	–1	1	6	3	3	–1	7	8
b	–1	6	–1	4	0	0	2	4	1	0
c	–1	1	2	–1	–1	4	4	0	–1	1
Варианты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	2	2	–3	–2	7	4	9	4	–2	8
b	5	1	6	–2	–2	0	1	7	5	2
c	0	3	–1	3	1	5	0	–1	1	1
Варианты	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	10	1	7	6	6	3	–6	9	8	10
b	–1	3	–2	0	4	6	3	4	7	4
c	–1	2	–1	5	8	0	–1	6	11	8

5.21. Записать уравнение гиперплоскости, опорной к множеству $X = \left\{x: \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} + \frac{x_3^2}{25} \le 1\right\}$ в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, координаты которой заданы в табл. 5.4. Если точка $x^* \notin X$, то выписать уравнение отделяющей гиперплоскости.

Таблица 5.4

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1^*	–6/5	–8/5	0	6/5	0	8/5	0	6/5	8/5	0
x_2^*	12/5	0	9/5	0	12/5	9/5	–9/5	–12/5	0	–9/5
x_3^*	0	3	4	4	3	0	4	0	–3	–4
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
x_1^*	0	6/5	8/5	0	8/5	6/5	0	–6/5	–8/5	0
x_2^*	9/5	0	–9/5	12/5	0	12/5	–12/5	0	–9/5	–12/5
x_3^*	–4	–4	0	–3	3	0	3	4	0	–3
Варианты	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x_1^*	$\frac{4}{\sqrt{5}}$	$-\frac{4}{\sqrt{5}}$	0	1	–8/5	–6/5	0	–6/5	3/2	–3/2
x_2^*	0	0	2	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	0	–12/5	–12/5	0	0
x_3^*	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	$\frac{5\sqrt{5}}{3}$	0	–3	–4	–3	0	$\frac{5\sqrt{7}}{4}$	$-\frac{5\sqrt{7}}{4}$

5.22. Выписать уравнение гиперплоскости, опорной к множеству $X = \{x: x_3 \ge x_1^2 + x_2^2\}$ и отделяющей его от точки $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, координаты которой заданы в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1^*	5/4	4/3	5/3	5/4	5/3	3/2	3/2	5/4	10/9	13/9
x_2^*	5/16	2/3	5/9	15/16	10/9	3/2	3/8	5/8	10/27	26/27
x_3^*	15/16	13/12	7/9	23/16	10/9	7/4	13/16	9/8	19/18	11/9

Варианты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_1^*	1/2	1/3	2	2	4	5/4	3	4	0	4/5
x_2^*	1/2	2/3	1	1	3	1	1	0	3	1/5
x_3^*	1/2	3/9	1	2	5	1	3	2	5	12/25
Варианты	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
x_1^*	9/8	5/4	9/8	4/3	5/3	11/9	7/5	3/2	4/3	11/9
x_2^*	27/32	5/4	9/32	4/9	5/6	22/27	14/25	3/4	8/9	11/27
x_3^*	3/2	15/8	1	17/18	11/12	4/3	24/25	1	23/18	1

5.23. Записать уравнение гиперплоскости, разделяющей множества $X_1 = \{x: x_1x_2 \ge 1,\ x_1 \ge 0\}$, $X_2 = \{x: x_2 \le a/(x_1 - b) + c,\ x_1 < b\}$ (числа a, b, c заданы в табл. 5.6).

Таблица 5.6

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1/9	4	1/4	25	1/9	25	25	1/4	1/9	9
b	2/3	1	1	12	16/3	18	9	9/2	8/3	2
c	8/3	9	9/4	3	1/3	2	4	1/2	2/3	8
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	1/4	25	9/4	9	25	1/4	1/9	25	9/4	1
b	1/2	2	5	8	3	9/4	1/3	4	5/4	4
c	9/2	18	5/4	2	12	1	16/3	9	5	1
Варианты	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	5	9	16	3/4	10	7	21/20	1	3/2	7/4
b	4	1	1	1/4	5	2	3/2	3	1	3
c	1	3	5	3	2	3	2/3	1/4	1/2	1/4

5.2. Выпуклые функции

Функция $f(x)$, определенная и конечная на выпуклом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, называется ***выпуклой***, если для любых x^1, $x^2 \in X$ выполняется неравенство (рис. 5.9)

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2) \quad \forall \quad \lambda \in [0;\ 1]. \qquad (5.1)$$

Выпуклая функция $f(x)$, $x \in X$, называется ***строго выпуклой***, если для любых x^1, $x^2 \in X$, $x^1 \ne x^2$, и $\lambda \in (0;\ 1)$ выполняется строгое неравенство (5.1): $f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)<\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2)$. У строго выпуклой функции точки A и B не совпадают (рис. 5.9). Функция $f(x)=x^2$, $x\in\mathbf{R}$, строго выпуклая (рис. 5.10).

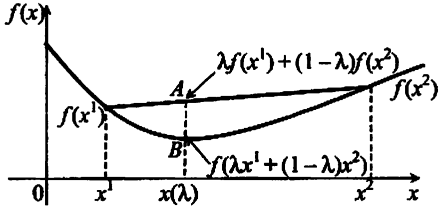


Рис. 5.9

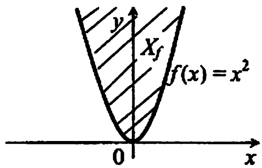


Рис. 5.10

Приведем несколько ***критериев выпуклости функций***.

а) Для выпуклости функции $f(x)$, определенной на выпуклом множестве X, необходимо и достаточно, чтобы было выпуклым множество $X_f=\{\{x,y\}:\ x\in X,\ y\geq f(x)\}$.

Множество X_f называется ***надграфиком*** функции $f(x)$. К примеру, функция $f(x)=x^2$, $x\in\mathbf{R}$, выпуклая, поскольку ее надграфик — выпуклое множество (рис. 5.10).

б) Функция $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, выпукла тогда и только тогда, когда выпукла функция $\varphi(t)=f(x+tl)$ скалярного аргумента $t\in\mathbf{R}$ при любых x, $l\in\mathbf{R}^n$.

в) Функция $f\in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$ выпукла в том и только в том случае, если выполняется неравенство

$$f(x)-f(x^*)\geq(x-x^*)'\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \tag{5.2}$$

для всех x, $x^*\in\mathbf{R}^n$. В случае строгой выпуклости неравенство (5.2) выполняется как строгое для любых x, $x^*\in\mathbf{R}^n$, $x\neq x^*$.

г) Если $f\in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$, то для ее выпуклости необходимо и достаточно, чтобы $\partial^2 f(x)/\partial x^2\geq 0$, $x\in\mathbf{R}^n$ (если $\partial^2 f(x)/\partial x^2>0$, $x\in\mathbf{R}^n$, то функция f строго выпукла).

Напомним, что симметричная ***n×n-матрица*** $A=(a_{ij},\, i,\, j=\overline{1,n})$ называется ***неотрицательной*** (***положительной***) и обозначается $A\geq 0$ ($A>0$), если ***знакоположительна*** (***определенно положительна***) ***квад-***

ратичная форма: $x'Ax \ge 0$ $(x'Ax > 0,\ x \ne 0)$ при любых $x \in \mathbf{R}^n$. Справедливы следующие утверждения (***критерии Сильвестра***):

а) Для неотрицательности матрицы A необходимо и достаточно, чтобы все ее ***главные миноры*** *были неотрицательны*:

$$\det A\begin{pmatrix} i_1, & \dots, & i_s \\ i_1, & \dots, & i_s \end{pmatrix} \ge 0,\ 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le n;\ s = \overline{1,n}.$$

Минор называется ***главным***, если он составлен из строк и столбцов с одинаковыми номерами.

б) Для положительности матрицы A необходимо и достаточно, чтобы все ее ***последовательные главные миноры*** *D_s были положительны, т. е.* $D_s = \det(a_{ij},\ i = \overline{1,s};\ j = \overline{1,s}) > 0$, $s = \overline{1,n}$.

Аналогично можно записать и следующие критерии:

а) ***отрицательности матрицы***: $(-1)^s D_s > 0$, $s = \overline{1,n}$;

б) ***неположительности матрицы***: $(-1)^s \det A\begin{pmatrix} i_1, \dots, i_s \\ i_1, \dots, i_s \end{pmatrix} \ge 0$, $s = \overline{1,n}$.

Пример 5.7. Возвратимся к примеру 5.5. Матрица вторых производных имеет вид $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Выпишем последовательные главные миноры:

$$D_1 = 2 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 15 > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,.$$

т. е. функция $f(x)$ строго выпукла.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, называется ***вогнутой*** (***строго вогнутой***), если функция $-f(x)$, $x \in X$, выпукла (строго выпукла).

Основные свойства выпуклых функций:

1. Выпуклая функция $f(x)$, $x \in X$, непрерывна в точках относительной внутренности множества X.

2. Если функции $f_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, $x \in X$, выпуклы, то при любых $\alpha_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, выпуклы и функции $f(x)=\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$, $f(x)=\max\{f_i(x),\ i=\overline{1,m}\}$.

3. У выпуклой функции локальный минимум является и глобальным. У строго выпуклой функции минимум может достигаться в единственной точке.

4. Множество уровня $\{x : f(x) \leq c\}$ выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, или пусто, или выпукло.

5. В каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$ выпуклая функция $f(x)$ имеет производную по любому направлению $l \in \mathbf{R}^n$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x+tl)-f(x)}{t}.$$

Пример 5.8. Пусть $f(x)=2|x|-x$, $x \in \mathbf{R}^1$. Тогда $\partial f(x)/\partial l|_{x>0}=l$, $\partial f(x)/\partial l|_{x=0}=2|l|-l$, $\partial f(x)/\partial l|_{x<0}=-3l$.

6. Вектор $c \in \mathbf{R}^n$ называется ***субградиентом*** выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, в точке x^*, если для любых $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство $f(x)-f(x^*) \geq c'(x-x^*)$. Множество субградиентов в точке x^* называется ***субдифференциалом*** и обозначается $\partial f(x^*)$. В каждой точке субдифференциал — непустой выпуклый компакт (состоит из единственного элемента $\partial f(x)/\partial x$, если $f(x)$ дифференцируема в x). Справедлива формула

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = \max c'l, \quad c \in \partial f(x).$$

Пример 5.9. Для выпуклой функции $f(x)=\max\{x,0\}$ имеем

$$\partial f(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ [0;\ 1], & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

7. Пусть X — выпуклое множество. Вектор $l \in \mathbf{R}^n$, $l \neq 0$, назовем ***допустимым направлением*** в точке $x \in X$ относительно множества X, если найдется число ε_0, $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $x+\varepsilon l \in X$ при любом $\varepsilon \in [0;\ \varepsilon_0]$.

Теорема 5.3 (критерий оптимальности). *Для того чтобы точка $x^0 \in X$ была точкой минимума выпуклой функции $f(x)$, $x \in X$, необходи-*

мо и достаточно, чтобы для любого допустимого направления l в точке x^0 выполнялось неравенство

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial l} \geq 0.$$

Из этого критерия следует, что каждая стационарная точка x^* $\left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0\right)$ выпуклой гладкой функции $f(x)$ является ее точкой минимума.

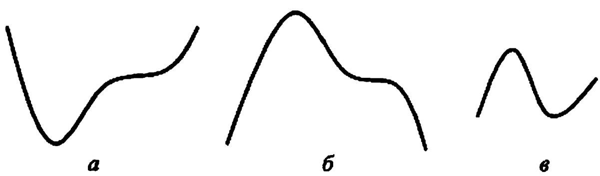
8. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на выпуклых компактных множествах $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}^m$. Если $f(x,y)$ выпукла по $x \in X\ \forall\ y \in Y$ и вогнута по $y \in Y\ \forall\ x \in X$, то она имеет ***седловую точку*** $\{x^0, y^0\}$: $f(x^0,\ y) \leq f(x^0,\ y^0) \leq f(x,\ y^0)$, $x \in X$, $y \in Y$.

Нужно отметить, что наряду с выпуклыми функциями рассматриваются некоторые виды функций, сходных с выпуклыми и вогнутыми, но обладающих лишь некоторыми их свойствами. Многие результаты выпуклого программирования верны при существенно более слабых предположениях относительно исследуемых функций, таких как квазивыпуклость и псевдовыпуклость функций.

Функция $f(x)$, $x \in X$, ***квазивыпукла***, если для любых x^1, $x^2 \in X$ и $\lambda \in [0;\ 1]$ выполняется неравенство

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \max\{f(x^1), f(x^2)\}.$$

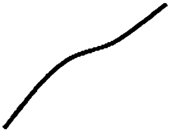
Функция $f(x)$, $x \in X$, называется ***квазивогнутой***, если функция $-f(x)$ квазивыпукла (рис. 5.11).



а квазивыпуклая　　*б* квазивогнутая　　*в* ни квазивыпуклая, ни квазивогнутая

Рис. 5.11

Функция $f(x)$, $x \in X$ ($X \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество, $f(x)$ — дифференцируемая функция), ***псевдовыпукла***, если для любых x^1, $x^2 \in X$, таких, что $\dfrac{\partial f'(x^1)}{\partial x}(x^2 - x^1) \ge 0$, справедливо неравенство $f(x^2) \ge f(x^1)$ или, что эквивалентно, если $f(x^2) < f(x^1)$, то $\dfrac{\partial f'(x^1)}{\partial x}(x^2 - x^1) < 0$ (рис. 5.12).



а
псевдовыпуклая

б
не псевдовыпуклая

Рис. 5.12

Упражнения и задания

5.24. Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$, $X \ne \varnothing$ и выпукло. Показать, что функция $f(x)$, $x \in X$, вогнута тогда и только тогда, когда ее ***подграфик*** $\{\{x, y\}: x \in X, y \le f(x)\}$ является выпуклым множеством.

5.25. Пусть X — непустое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$. Показать, что функция $f(x)$, $x \in X$, выпукла тогда и только тогда, когда $\forall\ k \ge 0$ и $\forall\ x^1, \ldots, x^k \in X$ справедливо неравенство

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j\right) \le \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(x^j), \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \ge 0, \quad j = \overline{1,k}.$$

5.26. Проверить, является ли функция f выпуклой (вогнутой) на заданном множестве X, или указать такие точки из X, в окрестности которых f не является ни выпуклой, ни вогнутой:

1. $f(x) = x_1^6 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 10x_1 + 5x_2 + 3x_4 + 20$; $X = \mathbf{R}^4$;
2. $f(x) = e^{2x_1 + x_2}$; $X = \mathbf{R}^2$;
3. $f(x) = -x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + 10x_1 - x_2 + 15x_3 + 6$; $X = \{x \in \mathbf{R}^3 : x \ge 0\}$;
4. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dfrac{1}{2}x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 - x_3 + 10$; $X = \mathbf{R}^3$;
5. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_2 + 25$; $X = \mathbf{R}^3$;
6. $f(x) = -x_2^5 + \dfrac{1}{2}x_3^2 + 7x_1 - x_3 + 6$; $X = \{x \in \mathbf{R}^3 : x \le 0\}$;
7. $f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_2 - 6$; $X = \mathbf{R}^3$;
8. $f(x) = 5x_1^2 + \dfrac{1}{2}x_2^2 + 4x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3 + 1$; $X = \mathbf{R}^3$;

9. $f(x)=-2x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2-5x_3^2+\frac{1}{2}x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3+3x_1-2x_2+6;\ X=\mathbf{R}^3;$

10. $f(x)=x_1^3+2x_3^3+10x_1+x_2-5x_3+6;\quad X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\le 0\right\};$

11. $f(x)=5x_1^4+x_2^6+x_3^2-13x_1+7x_3-8;\ X=\mathbf{R}^3;$

12. $f(x)=-3x_1^2+x_2^2+2x_3^2+3x_1x_2+x_1x_3+2x_2x_3+17;\ X=\mathbf{R}^3;$

13. $f(x)=4x_1^3-x_2^4-\frac{1}{2}x_3^4+3x_1+8x_2+11;\quad X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\le 0\right\};$

14. $f(x)=10-(x_2-x_1)^2;\ X=\left\{x\in\mathbf{R}^2:\ -1\le x_i\le 1,\ i=1,2\right\};$

15. $f(x)=8x_1^3-12x_3^2-3x_1x_2+6x_2+17;\quad X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\ge 0\right\};$

16. $f(x)=-2x_1^2-2x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+10;\ X=\mathbf{R}^3;$

17. $f(x)=-\frac{1}{2}x_1^7+\frac{1}{2}x_3^4+2x_2x_3+11x_1+6;\quad X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\le 0\right\};$

18. $f(x)=\frac{5}{2}x_1^2+x_2^2+4x_3^2+\frac{3}{2}x_1x_2+2x_1x_3+\frac{1}{2}x_2x_3+8x_3+13;\ X=\mathbf{R}^3;$

19. $f(x)=-3x_1^2+\frac{1}{2}x_2^3+2x_1x_2+5x_1x_3+7x_1+16;\ X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\le 0\right\};$

20. $f(x)=-2x_1^2-x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+x_1x_2+\frac{1}{2}x_1x_3+2x_2x_3+10;\ X=\mathbf{R}^3;$

21. $f(x)=2x_1^2+\frac{3}{2}x_3^2+\frac{5}{2}x_1x_3+12x_2+18;\ X=\mathbf{R}^3;$

22. $f(x)=6x_1^2+x_2^3+6x_3^2+12x_1-8x_3+7;\ X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\ge 0\right\};$

23. $f(x)=-x_1^2-\frac{3}{2}x_2^2-2x_3^2+x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3+8x_2;\ X=\mathbf{R}^3;$

24. $f(x)=\frac{7}{2}x_1^2-\frac{4}{3}x_2^3-\frac{1}{2}x_3^3+13x_1-9;\ X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\le 0\right\};$

25. $f(x)=\frac{7}{2}x_1^2-\frac{4}{3}x_2^3-\frac{1}{2}x_3^3+13x_1-9;\ X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\le 0\right\};$

26. $f(x)=-\frac{5}{6}x_1^3-\frac{1}{4}x_2^5-\frac{3}{2}x_3^3+22x_2+17;\ X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\le 0\right\};$

27. $f(x)=-\frac{5}{6}x_1^3-2x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+2x_1x_2+3x_1x_3+x_2x_3;\ X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\le 0\right\};$

28. $f(x)=2x_1^2+4x_2^2+x_3^2-x_1x_2+9x_1x_3+x_2x_3-9;\ X=\mathbf{R}^3;$

29. $f(x)=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{5}{2}x_2^2-\frac{9}{2}x_3^2-3x_1x_3+7x_2x_3;\ X=\mathbf{R}^3;$

30. $f(x)=-\frac{7}{6}x_1^3+\frac{5}{2}x_2^2+\frac{5}{12}x_3^4+\frac{1}{2}x_4-3x_2;\ X=\left\{x\in\mathbf{R}^4:\ x\ge 0\right\};$

31. $f(x)=4x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+6x_1-x_2-2;\ X=\mathbf{R}^2;$

32. $f(x)=\sqrt{1+x_1^2+x_2^2};\ X=\mathbf{R}^2;$

33. $f(x)=x_1^2+x_2^2-\cos\frac{x_1-x_2}{2}$; $X=\mathbf{R}^2$;

34. $f(x)=\frac{x_1^2}{x_2}$: $X=\left\{x\in\mathbf{R}^2:\ -1\le x_2\le 1,\ \ x_2\le x_1^2+1\right\}$;

35. $f(x)=\sin(x_1+x_2)$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^2:\ -2\pi\le x_i\le 2\pi,\ \ i=1,2\right\}$;

36. $f(x)=x_1^2+2x_2^2-\sin(x_1-x_2)$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^2:\ x\ge 0\right\}$;

37. $f(x)=x_1^2+2x_2^2+\frac{1}{x_1-x_2}$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^2:\ -\infty<x_1\le 0,\ \ 1\le x_2<+\infty\right\}$;

38. $f(x)=-2x_1^4-2x_2^2-5x_3^2+3x_2x_3+10x_2+22$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x\ge 0\right\}$;

39. $f(x)=-3x_1^2-4x_2^4-5x_3^2+2x_1x_3+2x_2-7$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_1\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

40. $f(x)=-2x_1^3-3x_2^2-x_3^3+4x_1x_2+7x_3+18$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

41. $f(x)=-2x_1^2-\frac{1}{2}x_2^3-3x_3^2+2x_1x_2-3$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\right\}$;

42. $f(x)=\frac{1}{3}x_1^3+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{5}{2}x_3^2-10x_3$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

43. $f(x)=-\frac{1}{2}x_1^3-x_2^2-\frac{3}{2}x_3^2+2x_2x_3-15$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

44. $f(x)=\frac{1}{3}x_1^4+3x_2^2+2x_3^3+2x_2x_3+7x_1$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_2\ge 0\right\}$;

45. $f(x)=-x_1^3-2x_2^2-3x_3^2+2x_2x_3+5$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

46. $f(x)=-\frac{5}{6}x_1^3-4x_2^2+\frac{1}{3}x_3^3+10$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_2\ge 0\right\}$;

47. $f(x)=-\frac{1}{2}x_1^3-x_2^2-\frac{5}{2}x_3^5+2x_2x_3-4$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

48. $f(x)=-\frac{7}{2}x_1^2-\frac{5}{6}x_2^3+\frac{1}{5}x_3^5-5$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_1\ge 0\right\}$;

49. $f(x)=-x_1^7-\frac{1}{2}x_2^4-2x_3^2-5$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_1\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

50. $f(x)=x_1^6+4x_2^2+2x_3^5+3x_4^2$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

51. $f(x)=\frac{5}{3}x_1^3+\frac{5}{2}x_2^2+2x_3^5+2x_2x_3$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_1\ge 0\right\}$;

52. $f(x)=\frac{1}{3}x_1^3+2x_2^2+\frac{3}{20}x_3^5-x_4^2+x_1x_4-4$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\right\}$;

53. $f(x)=\frac{9}{4}x_1^4+\frac{1}{3}x_2^5+x_3^2-x_1x_2$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_1\ge 0,\ x_3\ge 0\right\}$;

54. $f(x)=2x_1^5+4x_2^2+\frac{3}{2}x_3^3-x_1x_2$; $X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\right\}$.

5.27. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}^n$ и для каждой точки $x \in \mathbf{R}^n$ существует окрестность, в которой $f(x)$ выпукла. Является ли $f(x)$ выпуклой на $\mathbf{R}^n$?

5.28. Пусть функция $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, вогнута. Показать, что функция $f(x) = 1/g(x)$ выпукла на множестве $X = \{x : g(x) > 0\}$.

5.29. Пусть $f_1(x), \ldots, f_k(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, — выпуклые функции. Показать, что функция $f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_k(x)\}$ выпукла. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для вогнутых функций.

5.30. Пусть $f_1(x), \ldots, f_k(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, — выпуклые функции. Показать, что функция $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,k}$, выпукла.

5.31. Пусть X — непустое выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$ и $f(y) = \inf\{\| y - x \|: x \in X\}$. (Функция $f(y)$ задает расстояние от точки y до множества X и называется ***функцией расстояния***). Доказать, что $f(y)$ — выпуклая функция.

5.32. Пусть $X = \{x: x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Выписать в явном виде функцию расстояния от y до множества X.

5.33. Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, — выпуклая функция. Показать, что функция $h(x) = g(f(x))$, $x \in \mathbf{R}^n$, выпукла, если g — неубывающая выпуклая функция.

5.34. Пусть X — непустое ограниченное выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$, $f(y)$, $y \in \mathbf{R}^n$, — ***опорная функция*** множества X, определяемая следующим образом: $f(y) = \sup\{y'x : x \in X\}$. Доказать, что функция $f(y)$ выпукла. Показать, что если $f(y) = y'x^*$, где $x^* \in X$, то x^* — субградиент функции $f(y)$ в точке y.

5.35. Пусть $X = A \cup B$, где $A = \{x: x_1 < 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $B = \{x: x_1 \geq 0,\ -1 \leq x_2 \leq 1\}$. Выписать в явном виде опорную функцию, определенную в задаче 5.34.

5.36. ***Функция*** $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, называется ***калибровочной***, если для всех $x \in \mathbf{R}^n$ и $\lambda \geq 0$ выполняется равенство $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Калибровочная функция ***субаддитивна***, если $f(x) + f(y) \geq f(x + y)$ $\forall\ x, y \in \mathbf{R}^n$. Доказать, что для калибровочной функции субаддитивность эквивалентна выпуклости.

5.37. Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, — выпуклая функция. Показать, что ξ является субградиентом функции $f(x)$ в точке x^* тогда и только тогда, когда гиперплоскость $\{(x, y): y = f(x^*) + \xi'(x - x^*)\}$ является опорной к надграфику функции $f(x)$ в точке $(x^*, f(x^*))$.

5.38. Пусть $f(x)$ — выпуклая на $\mathbf{R}^n$ функция. Показать, что совокупность всех субградиентов функции $f(x)$ в данной точке образует выпуклое замкнутое множество.

5.39. Рассмотрим функцию f, определенную следующим образом:

$$f(u_1, u_2) = \min\{x_1(1 - u_1) + x_2(1 - u_2)\}, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

а) Показать, что функция f вогнута.

б) Вычислить значение f в точке $(1; 1)$.

в) Найти совокупность субградиентов функции f в точке $(1; 1)$.

5.40. Рассмотрим функцию $f(x)=\|x\|$, $x\in\mathbf{R}^n$. Показать, что если $x=0$, то ξ — субградиент функции $f(x)$ в этой точке в том и только том случае, если $\|\xi\|\le 1$. Если же $x\ne 0$, то ξ является субградиентом функции $f(x)$ в точке x тогда и только тогда, когда $\|\xi\|=1$ и $\xi'x=\|x\|$.

5.41. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, — дифференцируемые выпуклые функции, $f(x)=\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ и x^* — такая точка, что $f(x^*)=f_1(x^*)=f_2(x^*)$. Показать, что вектор ξ является субградиентом функции $f(x)$ в точке x^* тогда и только тогда, когда $\xi=\lambda\dfrac{\partial f_1(x^*)}{\partial x}+(1-\lambda)\dfrac{\partial f_2(x^*)}{\partial x}$, где $\lambda\in[0;\,1]$. Обобщить это утверждение на конечное число функций.

5.42. Вычислить производную функции $f(x)$ в точке x_0 по направлению l:

1. $f(x)=\max\{1,\ 1-x\}$, $x_0=1/2$, $l=1$.
2. $f(x)=\max\{x^2,\ x+1,\ 1-x\}$, $x_0\in\mathbf{R}^1$, $l=1$ и $l=-1$.
3. $f(x)=\max\{x^3,\ \varphi(x)\}$, $x_0=0$, $l=1$, где $\varphi(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$
4. $f(x)=\min\limits_{-1\le a\le 1}\min\{x-a|x|;\ -ax\}$, $x_0=0$, $l=-1$.
5. $f(x)=\min\limits_{-1\le a\le 1}\min\{|x|-ax;\ -2ax\}$, $x_0=0$, $l=1$.

5.43. Найти субдифференциалы функций:

1. $f(x)=2x_1^2+x_2^2+(1/2)x_3^2+2x_1x_2+8x_1+12$ в точке $(1;-1;1)$.
2. $f(x)=\max\{1-x,\ e^x\}$.
3. $f(x)=\max\{0,\ a'x\}$, $a,\ x\in\mathbf{R}^n$.
4. $f(x)=|x|+e^x$.
5. $f(x)=\sqrt{25x_1^2+x_2^2}+x_1$.
6. $f(x)=\sqrt{9x_1^2+4x_2^2}+x_2^2$.
7. $f(x)=|x_1|+|x_2|$.
8. $f(x)=\max\{x_1,\ x_2\}$.
9. $f(x)=\max\{|x_1|,|x_2|\}$.
10. $f(x)=\max\{-x,\ 0\}$.

§ 6. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данном параграфе свойства выпуклых множеств и функций, приведенные выше, используются при решении задач выпуклого программирования.

6.1. Условия Куна — Таккера

Основная задача выпуклого программирования имеет вид

$$f(x)\to\min,\quad g(x)\le 0,\quad x\in Q, \tag{6.1}$$

где $f(x)$, $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ $(g(x)=(g_1(x), \ldots, g_m(x)))$ — выпуклые функции, $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ — выпуклое множество.

Заметим, что основной задачей выпуклого программирования называют и задачу $f(x) \to \max$, $g(x) \geq 0, x \in Q$, где $f(x)$, $g(x)$ — вогнутые функции, Q — выпуклое множество.

Вектор x, удовлетворяющий всем ограничениям задачи (6.1), называется ***планом***, множество $X=\{x : g(x) \leq 0, x \in Q\}$ — ***множеством планов*** задачи (6.1). В силу свойств выпуклых множеств и выпуклых функций $X \subset \mathbf{R}^n$ — выпуклое множество. Аналогично множество $X=\{ x : g(x) \geq 0,\ x \in Q\}$ — выпуклое множество для задачи на максимум.

План x^0, для которого $f(x^0)=\min f(x),\ x \in X$, называется ***оптимальным планом*** задачи (6.1). Если целевая функция $f(x)$, $x \in X$, — строго выпуклая функция, то оптимальный план единственный.

Говорят, что множество планов X задачи (6.1) ***регулярно*** (удовлетворяет ***условию Слейтера***), если на некотором плане x^* выполняется неравенство $g(x^*)<0$.

Решение задачи выпуклого программирования сводится к нахождению седловых точек функции Лагранжа $F(x,\lambda)=f(x)+\lambda' g(x)$, $x \in Q$, $\lambda \geq 0$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$ ($\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа).

Пара $\{x^*, \lambda^*\}, x^* \in Q, \lambda^* \geq 0,$ — ***седловая точка функции Лагранжа***, если для любых $x \in Q$, $\lambda \geq 0$ выполняются неравенства $F(x^*, \lambda) \leq F(x^*, \lambda^*) \leq F(x, \lambda^*)$.

Теоремы о существовании седловых точек функции Лагранжа называют теоремами Куна — Таккера, по имени ученых, получивших первые результаты для гладких задач.

Для гладкой задачи выпуклого программирования с регулярным множеством планов (задача (6.1) с гладкими выпуклыми функциями $f(x)$, $g(x)$ и множеством $Q=\{x \in \mathbf{R}^n : x \geq 0\}$) справедлива следующая

Теорема 6.1 (Куна — Таккера). *Для оптимальности плана x^0 в гладкой задаче* (6.1) *с регулярным множеством планов необходимо и достаточно существования такого m-вектора $\lambda^0 \geq 0$, что выполняются условия Куна — Таккера:*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F(x^0,\ \lambda^0)}{\partial x} \geq 0, && \frac{\partial F(x^0,\ \lambda^0)}{\partial \lambda} \leq 0, \\ &\frac{\partial F'(x^0,\ \lambda^0)}{\partial x} x^0 = 0,\ x^0 \geq 0, && \frac{\partial F'(x^0,\ \lambda^0)}{\partial \lambda} \lambda^0 = 0,\ \lambda^0 \geq 0, \end{aligned} \qquad (6.2)$$

или, что то же самое, пара $\{x^0, \lambda^0\}$ *является седловой точкой функции Лагранжа* $F(x,\lambda)$ *и выполняется условие дополняющей нежесткости* $g'(x^0)\lambda^0 = 0$.

В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.2. *Для существования оптимального плана* x^0 *задачи выпуклого программирования* (6.1) *с регулярным множеством планов необходимо и достаточно существования m-вектора* $\lambda^0 \ge 0$ *такого, что пара* $\{x^0, \lambda^0\}$ *является седловой точкой функции Лагранжа. При этом выполняется условие дополняющей нежесткости* $g'(x^0)\lambda^0 = 0$.

Введем функции $\varphi(x) = \sup\limits_{\lambda \ge 0} F(x,\lambda)$, $\psi(\lambda) = \inf\limits_{x \in Q} F(x,\lambda)$, которые называют соответственно ***прямой и двойственной функциями***. Тот факт, что пара $\{x^0, \lambda^0\}$ — седловая точка функции Лагранжа $F(x,\lambda)$, естественным образом приводит к двойственным задачам:

$$\varphi(x) \to \min, \quad x \in Q, \tag{6.3}$$

$$\psi(\lambda) \to \max, \quad \lambda \ge 0. \tag{6.4}$$

Задача (6.3) называется ***прямой задачей выпуклого программирования***, задача (6.4) — ***двойственной*** к ней задачей. Поскольку $\varphi(x) = f(x)$, $x \in X$, и $\varphi(x) = +\infty$, $x \notin X$, то задачи (6.1) и (6.3) эквивалентны, т. е. задача (6.1) — прямая задача выпуклого программирования.

Связь между прямой и двойственной задачами устанавливают ***соотношения двойственности***:

1. Для любых прямого и двойственного планов x, λ выполняется неравенство $\varphi(x) \ge \psi(\lambda)$.

2. Для существования оптимального прямого плана x^0 необходимо существование оптимального двойственного плана λ^0.

3. На оптимальных планах x^0, λ^0 выполняются условие дополняющей нежесткости $g'(x^0)\lambda^0 = 0$ и равенство $\varphi(x^0) = \psi(\lambda^0)$.

4. Если на некоторых прямом и двойственном планах x^*, λ^* выполняется равенство $\varphi(x^*) = \psi(\lambda^*)$, то x^*, λ^* — оптимальные планы соответствующих задач.

5. Если вдоль некоторой последовательности λ^k, $k \ge 1$ (x^k, $k \ge 1$) двойственных (прямых) планов целевая функция двойственной (прямой) задачи не ограничена снизу (сверху), то множество прямых (двойственных) планов пусто.

6. Для того чтобы векторы x^0, λ^0 были оптимальными планами соответственно прямой и двойственной задач, необходимо и достаточно, чтобы пара $\{x^0, \lambda^0\}$ составляла седловую точку функции Лагранжа.

Пример 6.1. Рассмотрим задачу

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0,$$
$$g_2(x) = x_1 + 2x_2 - 4 \le 0,$$
$$x \in Q = \{x : x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\}.$$

Множество планов задачи и ее геометрическое решение представлено на рис. 6.1. Точка $x^0 = (2;\ 1)$ — оптимальный план задачи, $F(x,\lambda) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 4)$— функция Лагранжа. Проверим выполнение условий Куна — Таккера (6.2):

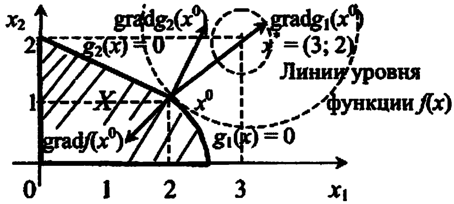


Рис. 6.1

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x_1} = 2(x_1^0 - 3) + 2\lambda_1^0 x_1^0 + \lambda_2^0 \ge 0,$$

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x_2} = 2(x_2^0 - 2) + 2\lambda_1^0 x_2^0 + 2\lambda_2^0 \ge 0,$$

$$\frac{\partial F'(x^0, \lambda^0)}{\partial x} x^0 = 2(x_1^0 - 3)x_1^0 + 2\lambda_1^0 (x_1^0)^2 + \lambda_2^0 x_1^0 +$$
$$+2(x_2^0 - 2)x_2^0 + 2\lambda_1^0 (x_2^0)^2 + 2\lambda_2^0 x_2^0 = 0,$$

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda_1} = g_1(x^0) = (x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 - 5 \le 0,$$

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda_2} = g_1(x^0) = x_1^0 + 2x_2^0 - 4 \le 0,$$

$$\frac{\partial F'(x^0,\lambda^0)}{\partial\lambda}\lambda^0=(x_1^0)^2\lambda_1^0+(x_2^0)^2\lambda_1^0-5\lambda_1^0+x_1^0\lambda_2^0+2x_2^0\lambda_2^0-4\lambda_2^0=0. \quad (6.5)$$

Легко видеть, что эти условия выполняются на плане $x^0=(2;\ 1)$ при $\lambda^0=(1/3;\ 2/3)\geq 0$. Таким образом, пара $\{x^0,\ \lambda^0\}$ — седловая точка функции Лагранжа ($F(x^0,\ \lambda)\leq F(x^0,\ \lambda^0)\leq F(x,\ \lambda^0)\ \ \forall\, x\geq 0, \lambda\geq 0$):

$$2+\lambda'\cdot 0\ \leq 2\leq\frac{4}{3}(x_1-2)^2+\frac{4}{3}(x_2-1)^2+2\quad\forall\, x\geq 0, \lambda\geq 0,$$

и выполняется условие дополняющей нежесткости (6.5).

Пример 6.2. Пусть имеем задачу

$$f(x)=\frac{1}{2}x'Dx+c'x\to\min,$$
$$g(x)=Ax-b=0, \quad (6.6)$$

где $x\in\mathbf{R}^n$, $D>0$, $D'=D$, A — $m\times n$-матрица ($\operatorname{rank}A=m<n$).

Задача (6.6) является задачей выпуклого программирования $\partial^2 f(x)/\partial x^2=D>0$ (задача квадратичного программирования). Запишем для нее функцию Лагранжа $F(x,\lambda)=\dfrac{1}{2}x'Dx+c'x+\lambda'(Ax-b)$. Тогда двойственная функция запишется в виде

$$\psi(\lambda)=\min_{x\in\mathbf{R}^n}\left(\frac{1}{2}x'Dx+c'x+\lambda'(Ax-b)\right). \quad (6.7)$$

Поскольку функция Лагранжа строго выпукла по x ($D>0$), то точка минимума $x(\lambda)$ задачи (6.7) совпадает со стационарной точкой функции Лагранжа $\left(\dfrac{\partial F(x(\lambda),\ \lambda)}{\partial x}=0\right)$: $c+Dx(\lambda)+A'\lambda=0$. Отсюда получим $x(\lambda)=$ $=-D^{-1}(A'\lambda+c)$. Найденное значение $x(\lambda)$ подставим в функцию Лагранжа. Тогда

$$\psi(\lambda)=-\frac{1}{2}(c+A'\lambda)'D^{-1}(A'\lambda+c)-\lambda'b.$$

Из теории матриц известно, что $AD^{-1}A'>0$, если $D>0$, и, значит, функция $\psi(\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{R}^m$, строго вогнутая. Следовательно, ее точка максимума совпадает со стационарной точкой $\left(\dfrac{\partial\psi(\lambda^0)}{\partial\lambda}=0\right)$, т. е. $AD^{-1}(c+$ $+A'\lambda^0)+b=0$, откуда получим

$$\lambda^0 = -\left[AD^{-1}A'\right]^{-1}(b + AD^{-1}c).$$

Итак, λ^0 — решение задачи $\psi(\lambda) \to \max$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$, двойственной к задаче (6.6). Подставив в выражение для $x(\lambda)$ вектор λ^0, получим решение $x^0 = x(\lambda^0)$ исходной задачи (6.6).

Замечание 6.1. Обращаем внимание читателя на то, что нахождение максимума выпуклой функции на выпуклом множестве — более трудная задача, чем отыскание ее минимума. Отчасти это связано с тем, что необходимые условия оптимальности в задаче $f(x) \to \max$, $x \in X$, уже не являются достаточными. То же самое можно сказать и о минимизации вогнутой функции на выпуклых множествах.

Замечание 6.2. Рассмотрим задачу $f(x) \to \max$, $x \in X = \left\{x \in \mathbf{R}^n :\right.$ $\left. g(x) \geq 0, x \in Q\right\}$, f, g_i, $i = \overline{1,m}$, — вогнутые функции, Q — выпуклое множество, $Q \subseteq \mathbf{R}^n$. Для указанной задачи с регулярным множеством планов (условие Слейтера: $g(x^*) > 0$, $x^* \in Q$) справедлива теорема Куна — Таккера, т. е. для существования оптимального плана x^0 необходимо и достаточно существования вектора Лагранжа $\lambda^0 \geq 0$ такого, что пара $\{x^0, \lambda^0\}$ составляет седловую точку функции Лагранжа: $\forall\ x \in Q, \lambda \geq 0$ выполняются неравенства $F(x, \lambda^0) \leq F(x^0, \lambda^0) \leq F(x^0, \lambda)$, при этом выполняется условие дополняющей нежесткости $\lambda^{0\prime} g(x^0) = 0$.

Упражнения и задания

6.1. Рассмотрим задачу: $\|Ax - b\|^2 \to \min$, $x \in \mathbf{R}^n$, где A — $m \times n$-матрица, b — m-вектор.

а) Привести геометрическую интерпретацию задачи.

б) Записать необходимые условия оптимальности. Являются ли они достаточными?

в) Является ли оптимальный план единственным? Почему?

г) Решить задачу при

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6.2. Рассмотрим задачу: $f(x) \to \min$, $x \in X$, $X = \left\{x : g_i(x) \leq 0, \ i = \overline{1,m}\right\}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Пусть x^0 — локально оптимальный план и $I_a(x^0) = \{i = \overline{1,m} : g_i(x^0) = 0\}$, причем

$f \in C^{(1)}(X)$, $g_i \in C^{(1)}(X)$, $i \in I_a(x^0)$, и вогнуты, а функции $g_i \in C(X)$, $i \notin I_a(x^0)$. Доказать, что $F \cap G = \varnothing$, где

$$F = \left\{ l : l' \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} < 0 \right\},\ G = \left\{ l :\ l' \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x} \le 0, \quad i \in I_a(x^0) \right\}.$$

6.3. Рассмотрим задачу одномерной минимизации: $f(x + \alpha l) \to \min$, $\alpha \ge 0$, где $x, l \in \mathbf{R}^n$ $(l \ne 0)$ — заданные векторы.

а) Записать необходимое условие минимума, если $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$. Является ли оно достаточным?

б) Какие предположения относительно функции f нужно сделать, чтобы необходимое условие стало и достаточным?

6.4. Рассмотрим задачу: $f(x) \to \min$, $g_i(x) \le 0$, $i = \overline{1,m}$. Пусть $\bar{x}$ — некоторый план задачи, функция $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$, функции $g_i \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$, $i \in I_a(\bar{x})$, и выпуклы, а при $i \notin I_a(\bar{x})$ непрерывны; пусть l^0 — оптимальный план задачи

$$l' \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} \to \min,$$

$$l' \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x} \le 0, \quad i \in I_a(\bar{x}),$$

$$-1 \le l_j \le 1, \quad j = \overline{1,n}.$$

а) Показать, что $\dfrac{\partial f'(\bar{x})}{\partial (x)} l^0 \le 0$.

б) Показать, что если $\dfrac{\partial f'(\bar{x})}{\partial (x)} l^0 = 0$, то план $\bar{x}$ удовлетворяет условиям Куна — Таккера.

6.5. Рассмотрим задачу: $f(x) \to \min$, $x \ge 0$, где $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n_+)$ и выпукла. Показать, что x^0 — оптимальный план задачи тогда и только тогда, когда $l = 0$, где

$$l_i = \begin{cases} -\dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}, & \text{если} \quad x_i^0 > 0 \quad \text{или} \quad \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} < 0, \\[2ex] 0, & \text{если} \quad x_i^0 = 0 \quad \text{или} \quad \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \ge 0,\ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

6.6. Рассмотрим задачу $\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \min$, $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1$, $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$. Пусть $x^0 = (x_j^0,\ j = \overline{1,n})$ — оптимальный план задачи. Показать, что существует такое число k, что $\dfrac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_j} \ge k$ и $\left(\dfrac{\partial f_j(x^0)}{\partial x_j} - k \right) x_j^0 = 0$, $j = \overline{1,n}$.

6.7. Рассмотрим задачу $c'x \to \max$, $\|x\| \le 1$, где $c \in \mathbf{R}^n$, $c \ne 0$.

а) Показать, что $x^0 = c/\|c\|$ удовлетворяет условиям Куна — Таккера и x^0 — единственный глобально оптимальный план.

б) Показать (используя *а*), что направлением наискорейшего подъема (возрастания) функции f в точке x, для которой $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} \ne 0$, является вектор $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} \Big/ \left\| \dfrac{\partial f(x)}{\partial x} \right\|$.

6.8. Используя условия Куна — Таккера, доказать неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ge \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \text{ при } x_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}.$$

6.9. Установить связь между условиями Куна — Таккера для следующих задач:

$$c'x + \frac{1}{2}x'Dx \to \min,\ Ax \le b \quad \text{и} \quad h'v + \frac{1}{2}v'Gv \to \min,\ v \ge 0,$$

где $c \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, A — матрица размером $m \times n$, D — матрица размером $n \times n$, $D' = D$, $D > 0$, $G = AD^{-1}A'$, $h = AD^{-1}c + b$.

6.10. Установить связь между оптимальными планами и условиями Куна — Таккера двух следующих задач:

$$f(x) \to \min,\ g(x) \le 0,\ x \in X \quad \text{и} \quad f(x) \to \min,\ \lambda' g(x) \le 0,\ \lambda \ge 0,$$

где λ — заданный вектор ($x \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$).

6.11. Рассмотрим задачу

$$c'x + \frac{1}{2}x'Dx \to \min,\ Ax \le b,$$

где $c \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$, A — матрица размером $m \times n$, D — матрица размером $n \times n$, $D' = D$.

а) Выписать необходимые условия оптимальности второго порядка.

б) Обязательно ли каждый локальный оптимальный план будет глобальным? Доказать или привести контрпример.

в) Привести необходимые условия оптимальности первого и второго порядков, когда $c = 0$ и $D = E$.

6.12. Записать задачу, двойственную к задаче

$$f(x) \to \min, \quad g(x) \le 0, \quad h(x) = 0, \quad x \in Q,$$

где $f(x)$, $g_i(x)$, $h_j(x)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,l}$, — выпуклые функции, Q — выпуклое множество, $x \in \mathbf{R}^n$.

6.13. *а*) Рассмотрим задачу

$$\left(x_1 - \frac{9}{4}\right)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min,$$
$$x_2 - x_1^2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Записать условия Куна — Таккера и убедиться, что они выполняются в точке $x^0 = (3/2;\ 9/4)$. Дать геометрическую интерпретацию, показать, что x^0 — глобально оптимальный план.

б) Решить задачу

$$x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 \to \min,$$
$$x_1 + 2x_2 - 6 \ge 0,\ x_1 - 2 \le 0,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

геометрически; записать условия Куна — Таккера и найти оптимальный план; из точки $(1;\ 5/2)$ построить направление спуска (убывания).

6.14. Пусть $X = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1,\ \ x_1^2 - x_2 \le 0\}$ и $x^* = (1;\ 0;\ 2)$. Найти минимальное расстояние от x^* до X и точку из X, ближайшую к x^*.

6.15. Рассмотрим задачу

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{x_j} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}$$

$$\left(a_j > 0, \quad c_j > 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad b > 0\right).$$

Найти вектор $x^* = \left(x_j^*,\quad i = \overline{1,n}\right)$, удовлетворяющий условиям Куна — Таккера.

6.16. Из целевых функций *а* и ограничений *б*, приведенных ниже, сформировать задачи выпуклого программирования и решить их.

а) *Целевые функции:*

1. $f = x_1^2 + x_2^2 + 6.$
2. $f = 5x_1^2 + x_2^2.$
3. $f = x_1^2 + x_1 - x_2.$
4. $f = 10x_1^2 - x_2.$
5. $f = x_2^2 + x_1 - 4x_2.$
6. $f = 2x_1^2 + 3x_2^2.$
7. $f = x_1^2 + x_2 - 5.$
8. $f = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$
9. $f = x_1^6 + 7x_2 + 1.$
10. $f = 4x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 4.$
11. $f = 2x_1^4 + 3x_2 - 1.$
12. $f = 3x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 + 1.$
13. $f = x_1^6 - x_1 + x_2.$
14. $f = 4x_1^2 + x_2^2 - x_1.$
15. $f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2.$
16. $f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_2.$
17. $f = 2x_1^2 - 4x_2 - x_1.$
18. $f = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2.$
19. $f = x_1^2 + x_2^2 - x_1 + x_2.$
20. $f = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1x_2.$
21. $f = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2.$
22. $f = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1.$
23. $f = 3x_1^2 + x_2^2 + x_2.$
24. $f = e^{x_1 + x_2} + 4.$
25. $f = 3x_2^2 + 4x_1.$
26. $f = 4x_1^2 - 8x_1 + x_2.$
27. $f = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 - x_1.$
28. $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2.$
29. $f = 2x_2^2 + 10.$
30. $f = x_2^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_2.$

31. $f=\frac{1}{2}x_1^2+3x_2^2-x_1.$ **32.** $f=x_2^2-x_1.$ **33.** $f=x_1^2-x_2+x_1.$

34. $f=2x_1^2+x_2+x_1.$ **35.** $f=x_1^2+x_2^2-2x_1.$ **36.** $f=3x_2^2-x_1x_2+x_1.$

37. $f=e^{x_1}+e^{x_2}-1.$ **38.** $f=2x_1^2+\frac{1}{2}x_1-2x_2.$ **39.** $f=x_1^2+2x_2^2-x_1x_2.$

40. $f=x_1^4+x_2^2+10.$

б) Ограничения:

1.
$$\begin{aligned} &2x_1-6x_2-12\le 0,\\ &3x_1+8x_2-24\le 0,\\ &x_1\ge 0,\quad x_1\ge 0. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} &-x_1+3x_2-7\le 0,\\ &x_1+\ x_2\le 0,\\ &x_1\ge 0,\quad x_1\ge 0. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} -3x_1+2x_2&\le 6,\\ x_1-\ x_2&\le 2,\\ x_1&\ge 0. \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} -4x_1+3x_2&\le 6,\\ x_1-\ x_2&\le 2,\\ x_2&\ge 0. \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} -2x_1+x_2&\le 2,\\ x_1+x_2&\le 3,\\ x_1&\ge 0. \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} &-5x_1+3x_2\le 15,\\ &x_1-2x_2\le 4,\\ &x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0. \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x_1-x_2&\le 4,\\ -3x_1+x_2&\le 3,\\ x_2&\ge 0. \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} &x_1-\ x_2\le\ 5,\\ &-7x_1+2x_2\le 14,\\ &x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0. \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} &x_1-2x_2\le 3,\\ &-4\le x_1\le 3. \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} &x_1-3x_2\le 6,\\ &-\frac{1}{2}\le x_1\le 3. \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} -2x_1+\ 3x_2&\le 7,\\ x_1-25x_2&\le 0,\\ x_2&\ge 0. \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} &x_1-\ x_2\le\ 5,\\ &-7x_1+2x_2\le 14,\\ &x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0. \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2&\le 6,\\ 2x_1+x_2&\ge 2,\\ x_1&\ge 0. \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2&\ge 12,\\ 5x_1+2x_2&\ge 10,\\ 4x_1+\ x_2&\le 20,\\ x_1&\ge 0. \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x_1+\ x_2&\ge 1,\\ -9x_1+3x_2&\le 9,\\ x_2&\ge 0. \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x_1-3x_2&\le\ 3,\\ 4x_1+2x_2&\ge\ 8,\\ -6x_1+7x_2&\le 42. \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 &\le 20, \\ -1 \le x_1 &\le 5. \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\ge 1, \\ x_1 - x_2 &\ge -1. \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 &\ge 2, \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 10, \\ 0 \le x_1 &\le \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 2, \\ x_1 + x_2 &\ge 1, \\ \frac{3}{4} \le x_1 &\le \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4, \\ 8x_1 + x_2 &\le 48, \\ 3 \le x_1 &\le 6. \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 &\ge -15, \\ 3x_1 + x_2 &\ge 3, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\ge 2, \\ -4x_1 - 3x_2 &\le 12, \\ 0 \le x_1 &\le 3. \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 12, \\ 2x_1 + x_2 &\le 10, \\ -1 \le x_1 &\le 5. \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ -3x_1 - x_2 &\le -3, \\ -\frac{1}{2} \le x_2 &\le 2. \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1, \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 6, \\ -\frac{1}{2} \le x_2 &\le \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 4, \\ x_1 &\le \frac{3}{2}, \\ 0 \le x_2 &\le \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\le 3, \\ x_1 - x_2 &\le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\le 2. \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\le 12, \\ -x_1 + x_2 &\le 2, \\ 0 \le x_2 &\le \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

30. $$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &\le 6, \\ -3x_1 - 4x_2 &\le 4, \\ x_1 - 4x_2 &\le 4, \\ x_2 &\le \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

31. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 &\le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

32. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 &\le 4, \\ x_1 + x_2 &\le 8, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

33. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_1 &\le 3, \\ 2x_1 + x_2 &\le 5, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

34. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 &\le -16, \\ x_1 - x_2 &\le 5. \end{aligned}$$

35. $$\begin{aligned} x_1^2 - 4x_1 - x_2 &\le -5, \\ -x_1^2 + 6x_1 - x_2 &\le 7. \end{aligned}$$

36. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 &\le 0, \\ x_1x_2 &\ge 0, \\ x_1 &\ge 1. \end{aligned}$$

37. $$\begin{aligned} 2x_1^2 + 9x_2^2 &\le 8, \\ -x_1 - x_2 &\le 1, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

38. $$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_2^2 &\le 16, \\ x_1x_2 - 1 &\ge 0, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

39. $$\begin{aligned} 3x_1^2 - 6x_1 - x_2 &\le 2, \\ x_1^2 + x_2^2 &\le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

40. $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\le -1, \\ x_2^2 &\le 2. \end{aligned}$$

41. $$\begin{aligned} 3x_1^2 &\le 15, \\ -x_1 - 5x_2 &\ge -10, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

42. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\le 3, \\ 3x_1^2 + x_2 &\le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

43. $$\begin{aligned} x_1^2 &\le 25, \\ x_1 + 2x_2 &\le 5, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

44. $$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 &\le 5, \\ x_1 + x_2 &\le 3, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

45. $$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 &\le 8, \\ x_1 + x_2 &\le 5, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

46. $$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 + x_3 &\le 5, \\ x_1 + 5x_2 &\ge 8, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

47. $$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 &\le 8, \\ x_1 + x_2 &\le 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

48. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 &\le 10, \\ x_1 + 2x_2 &= 4, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

49. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\le 10, \\ x_1^2 &\le 5, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

50. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\le 9, \\ x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

51. $$\begin{aligned} x_1^2 &\le 6, \\ x_2^2 &\le 9, \\ x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

52. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2^2 &\le 8, \\ x_1 - 2x_2 &\le 10, \\ x_1 + x_2 &\le 5. \end{aligned}$$

53. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_1^2 &\le 10, \\ x_2 - 2x_1 &= 5. \end{aligned}$$

54. $$\begin{aligned} x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1 &\le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

55. $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \le 4,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

56. $4x_1^2 - x_1x_2 \le 9,$
$x_1 + x_2 \le 4,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

57. $x_1^2 + x_2^2 \le 25,$
$x_1x_2 \ge 4,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

58. $x_1^2 + x_2^2 \le 4,$
$x_1 + x_2 = 1.$

59. $x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \le 0,$
$-x_1 - x_2 \le 1,$
$x_2 \ge 0.$

60. $4x_1^2 + x_1x_2 \le 10,$
$x_1 - x_2 \le 3,$
$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

6.17. В следующих задачах выяснить, является ли она задачей выпуклого программирования, регулярно ли ее множество планов. Среди указанных планов задачи определить, имеются ли оптимальные планы. Если среди них нет оптимальных, то найти их или установить, что задача не имеет решения. На указанных планах проверить условия оптимальности.

1. $-x_1^2 - x_2^2 + 6 \to \max,$
$x_1 + x_2 \le 5,$
$x_1 \ge 0;$
$x^1 = (1; -1), \ x^2 = (0; 0).$

2. $x_1 x_2 \to \max,$
$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + 1 \le 0;$
$x^1 = (1; 1), \ x^2 = (0; 0),$
$x^3 = (-2; -2).$

3. $-5x_1^7 - 2x_2^2 + 3x_1 - 4x_2 - 18 \to \max,$
$-3x_1^2 + 6x_1 + x_2 \ge -2,$
$x_1^2 + x_2^2 \le 9,$
$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$
$x^1 = (1; \ 8), \ x^2 = (1; -1),$
$x^3 = (2; \ 1).$

4. $x_1^6 + 2x_1x_2 - x_1 \to \max,$
$-3x_1^2 + 15 \ge 0,$
$-x_1 - 5x_2 \ge -10,$
$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$
$x^1 = (0; 0), \ x^2 = (1; 1).$

5. $x_1 \to \max,$
$(1 - x_1)^3 - x_2 \ge 0,$
$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$
$x^1 = (3; 0), \ x^2 = (0; \ 1).$

6. $(x_1 - 3)^2 + x_2^2 \to \max,$
$-x_1 + (x_2 - 1)^2 \ge 0,$
$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$
$x^1 = (-1; 1), \ x^2 = (2; \ 4).$

7. $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 \to \max,$
$-x_1 + 1/4x_2^2 \ge 0;$
$x^1 = (-2; 0), \ x^2 = (0; 0).$

8. $-x_1 x_2 \to \max,$
$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 \le 0;$
$x^1 = (1/2; 0), \ x^2 = (0; 1/3).$

9.
$$-x_1^5+7\to\max,$$
$$x_1^2+x_2^2-4x_2\le 0,$$
$$x_1x_2-1\ge 0,\ x_1\ge 0;$$
$$x^1=(1;\ 1),\ x^2=(0;\ -1),$$
$$x^3=(1;\ 3/2),\ x^4=(2;\ 2).$$

10.
$$2x_1^5+3x_2^3\to\min,$$
$$-x_1^2-x_2^2+6x_1-16x_2\ge 72,$$
$$x_2+8\le 0;$$
$$x^1=(4;\ -8),\ x^2=(0;\ 0),$$
$$x^3=(2;\ -8).$$

11.
$$x_2\to\min,$$
$$-x_1^9+x_2^3\ge 0,$$
$$x_1^9+x_2^3\ge 0,$$
$$x_1^2+(x_2+1)^2-1\ge 0;$$
$$x^1=(2;\ 0),\ x^2=(0;\ 0).$$

12.
$$-5x_1^2-x_2^2+4x_1x_2\to\max,$$
$$-x_1^2-x_2^2-2x_1-4x_2\ge -4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0;$$
$$x^1=(1;\ 8),\ x^2=(-1;\ 0),$$
$$x^3=(0;\ 1).$$

6.2. Простая задача квадратичного программирования

Рассмотрим задачу

$$f(x)=c'x+\frac{1}{2}x'Dx\to\min,\ d_*\le x\le d^*, \tag{6.8}$$

минимизации выпуклой $\left(\partial^2 f(x)/\partial x^2=D\ge 0\right)$ квадратичной функции $f(x)$ на параллелепипеде $X=\left\{x\in\mathbf{R}^n:\ d_*\le x\le d^*\right\}$ (***простая задача квадратичного программирования***), где $c,\ d_*,d^*\in\mathbf{R}^n$, D — $n\times n$-матрица, $D'=D$.

Пусть x — план задачи (6.8). Вектор $\Delta=\Delta(x)=\nabla f(x)=\operatorname{grad} f(x)= =c+Dx$ называется ***вектором оценок*** плана x. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.3 (критерий оптимальности). *Для оптимальности плана x в задаче* (6.8) *необходимо и достаточно, чтобы его оценки удовлетворяли соотношениям*

$$\Delta_j(x)\ge 0 \text{ при } x_j=d_{*j};\ \Delta_j(x)\le 0 \text{ при } x_j=d_j^*;$$
$$\Delta_j(x)=0 \text{ при } d_{*j}<x_j<d_j^*,\ j\in J, \tag{6.9}$$

где $J=\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, $\Delta(x)=\left(\Delta_1(x),\ \ldots,\ \Delta_n(x)\right)$.

Приведем два метода решения простой задачи (6.8) квадратичного программирования — релаксационный и геометрический ($n=2$).

1. Релаксационный метод. Этот метод базируется на критерии оптимальности и построении последовательности планов x^1, x^2, ..., на которых целевая функция убывает. Первый план выбирается произвольным. Пусть построены планы x^1, x^2, ..., x^k. Компоненты x_j^{k+1}, $j \in J$, следующего плана x^{k+1} построим последовательно. Первую компоненту x_1^{k+1} найдем из задачи

$$f(x_1^{k+1}, x_2^k, \dots, x_n^k) = \min_{d_{*1} \le x_1 \le d_1^*} f(x_1, x_2^k, \dots, x_n^k),$$

т. е. минимизируя (релаксируя) по x_1 на отрезке $[d_{*1}; d_1^*]$ целевую функцию $f(x)$ при фиксированных значениях остальных компонент.

Пусть построены компоненты $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_s^{k+1}$, $s < n$. Найдем x_{s+1}^{k+1} из условия полной релаксации целевой функции на отрезке $[d_{*s+1}; d_{s+1}^*]$ по переменной x_{s+1}:

$$f(x_1^{k+1}, \dots, x_s^{k+1}, x_{s+1}^{k+1}, x_{s+2}^k, \dots, x_n^k) =$$
$$= \min_{d_{*s+1} \le x_{s+1} \le d_{s+1}^*} f(x_1^{k+1}, \dots, x_s^{k+1}, x_{s+1}, x_{s+2}^k, \dots, x_n^k). \quad (6.10)$$

Точка минимума определяется следующим образом:

$$x_{s+1}^{k+1} = \begin{cases} d_{*s+1}, & \text{если} \quad x_{s+1}^* \le d_{*s+1}, \\ x_{s+1}^*, & \text{если} \quad d_{*s+1} \le x_{s+1}^* \le d_{s+1}^*, \\ d_{s+1}^*, & \text{если} \quad x_{s+1}^* \ge d_{s+1}^*, \end{cases}$$

где x_{s+1}^* — точка безусловного минимума функции $\varphi(x_{s+1}) = f(x_1^{k+1}, \dots, x_s^{k+1}, x_{s+1}, x_{s+2}^k, \dots, x_n^k)$, $x_{s+1} \in \mathbf{R}$.

Согласно (6.10), выполняются неравенства

$$f(x_1^{k+1}, \dots, x_n^{k+1}) \le f(x_1^{k+1}, \dots, x_{n-1}^{k+1}, x_n^k) \le \dots \le f(x_1^k, \dots, x_n^k),$$

т. е. вдоль построенной последовательности планов x^k, $k = 1, 2, \dots$, происходит релаксация целевой функции. Из последовательности x^k, $k = 1, 2, \dots$, можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, которая имеет пределом план, удовлетворяющий критерию оптимальности (6.9). Заметим, что описанный релаксационный метод, как показывают простейшие примеры, в общем случае не является конечным, т. е. он не строит оптимального плана x^0 при помощи конечного числа векторов x^k, $k = 1, 2, \dots$.

Пример 6.3. Рассмотрим задачу

$$f(x)=(-2;\ 0)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+1\to\min,$$

$$0\le x_1\le 2,\ -2\le x_2\le 1.$$

Очевидно, что целевая функция квадратичная и строго выпуклая $(D>0)$.

Найдем стационарную точку x^* $(\partial f(x^*)/\partial x=0)$. Поскольку $\partial f/\partial x_1 = 4x_1+2x_2-2$, $\partial f/\partial x_2 = 2(x_1+x_2)$, то $x_1^*=1$, $x_2^*=-1$. Вектор x^* оказался планом задачи и, значит, $x^*=x^0$.

Решим задачу релаксационным методом, иллюстрируя его операции геометрически. Возьмем в качестве начальной точку $x_1^1=2$, $x_2^1=1/2$. Построим на плоскости $\{x_1,x_2\}$ прямые ∇_1: $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}=0$, ∇_2: $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2}=0$ (рис. 6.2). Поскольку в релаксационном методе каждая компонента очередного приближения связана с одномерной минимизацией, то при вычислении x_s^k $(s=1,2)$ будем двигаться в множестве X параллельно оси $0x_s$ по направлению к прямой ∇_s до полной релаксации функции $f(x)$ по s-й компоненте. Поэтому геометрически построение релаксационным методом последовательности $x^1=(x_1^1,\ x_2^1)$, $x^2=(x_1^2,\ x_2^2)$ и т. д. выглядит так, как это изображено на рис. 6.2. Из него видно, что за конечное число итераций оптимальный план x^0 построить не удается.

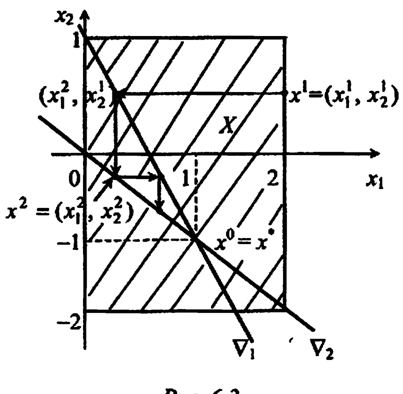


Рис. 6.2

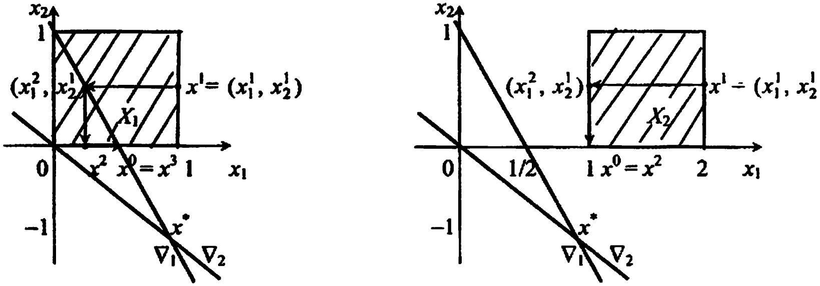


Рис. 6.3

Ту же целевую функцию $f(x)$ на множествах $X_1 = \{x : 0 \le x_1 \le 1;\ 0 \le x_2 \le 1\}$, $X_2 = \{x : 1 \le x_1 \le 2;\ 0 \le x_2 \le 1\}$ (рис. 6.3) релаксационный метод минимизирует за конечное число итераций.

2. Геометрический метод. На плоскости $\{x_1,\ x_2\}$ построим множество планов X и две прямые ∇_1: $\partial f(x)/\partial x_1 = 0$, ∇_1: $\partial f(x)/\partial x_2 = 0$. Ясно, что в точке x, лежащей на прямой ∇_1, целевая функция $f(x)$ достигает минимума по переменной x_1 при $x_2 = \text{const}$. Это означает, что если двигаться по горизонтальной прямой $x_2 = \text{const}$, то минимальное значение $f(x)$ реализуется на пересечении прямых ∇_1 и $x_2 = \text{const}$. Если движение вдоль прямой $x_2 = \text{const}$ ограничено концами отрезка $[d_{*1},\ d_1^*]$, не имеющего точек пересечения с прямой ∇_1, то минимальное значение $f(x)$ достигается на конце этого отрезка, ближайшем к точке пересечения прямых ∇_1 и $x_2 = \text{const}$.

Аналогичная ситуация (с точностью до симметрии индексов) складывается с прямой ∇_2 и движением вдоль вертикальной прямой $x_1 = \text{const}$.

Движение вдоль прямых ∇_1, ∇_2 сохраняет соответствующий оптимальный признак-равенство. Для нахождения направления движения, вдоль которого целевая функция убывает, представим движение как сумму двух составляющих: горизонтального и вертикального движений.

Если при движении вдоль ∇_1 вертикальная составляющая движения направлена к прямой ∇_2, то целевая функция убывает. Аналогично, если при движении вдоль ∇_2 горизонтальная составляющая движения направлена к прямой ∇_1, то целевая функция убывает.

Таким образом, будем использовать три вида движений, не выводящих из множества планов X: горизонтальное, вертикальное и вдоль одной из прямых ∇_1, ∇_2. При этом будем соблюдать свойство релаксации: целевая функция при движении убывает.

Процесс решения начинается с произвольного плана и заканчивается, если: *а*) в точке x невозможно построить ни одного из трех типов движений со свойством релаксации (т. е. x — оптимальный план); *б*) движение вдоль направления не ограничено (задача не имеет решения).

Пример 6.4. На рис. 6.4 приведены примеры построения оптимальных планов в задачах квадратичного программирования с различными множествами X и с целевой функцией $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3x_2^2}{2} + 4x_1 - 6x_2$. Для нее имеем: $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} > 0$, $\nabla_1: 2x_1 - 2x_2 + 4 = 0$; $\nabla_2: -2x_1 + 3x_2 - 6 = 0$. Прямые ∇_1, ∇_2 непараллельные, т. е. оптимальные планы всегда существуют и единственны.

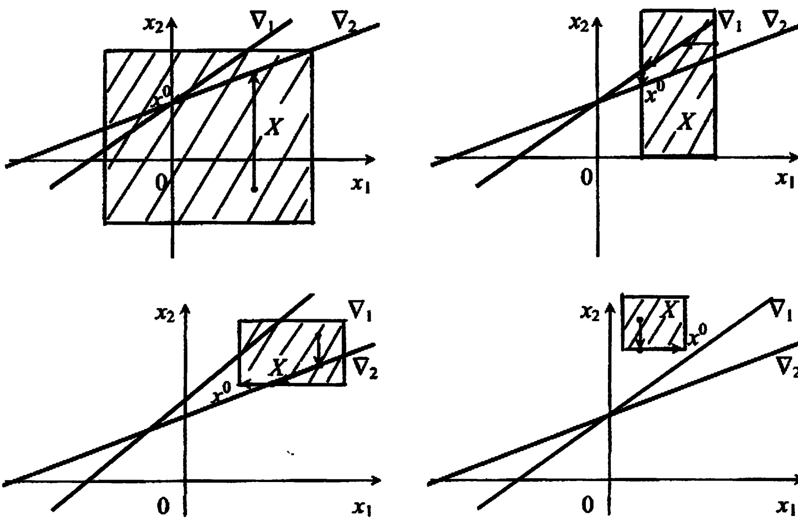


Рис. 6.4

На рис. 6.5 представлен случай параллельных прямых ∇_1, ∇_2 для целевой функции $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 4x_1 - 2x_2$, где

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \ \nabla_1: 4x_1 + 2x_2 + 4 = 0; \ \nabla_2: 2x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

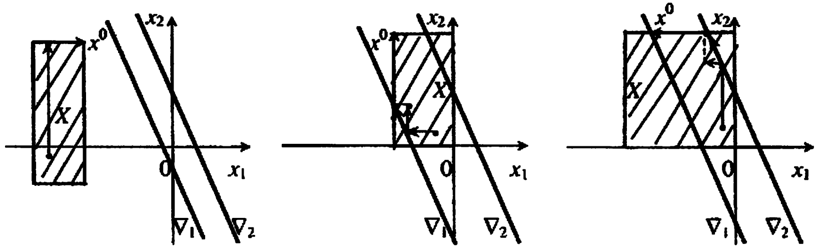
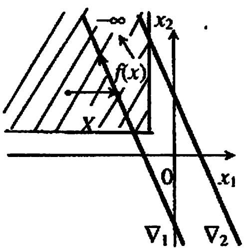
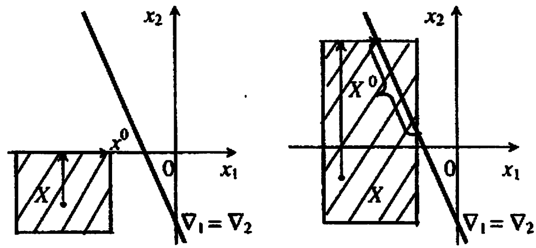


Рис. 6.5

Если множество X не ограничено, то возможна ситуация, когда задача не имеет решения из-за неограниченности снизу целевой функции (рис. 6.6).

Для функции $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 4x_1 + 2x_2$ прямые ∇_1, ∇_2 совпадают. На рис. 6.7 привсдены примеры решения в этом случае (возможны ситуации, когда задача имеет континуум решений).





а *б*

Рис. 6.6 *Рис. 6.7*

Упражнения и задания

6.18. Из приведенных ниже целевых функций *а* и ограничений *б* составить простую задачу квадратичного программирования и решить релаксационным методом. Сделать рисунок.

а) Целевые функции:

1. $f = x_1 + 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

2. $f = -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2$;

3. $f=-2x_1-2x_2+x_3+2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+4x_3^2-x_2x_3$;

4. $f=10x_2+2x_1^2+2x_2^2+5x_3^2-3x_2x_3$;

5. $f=-2x_2+3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2-2x_1x_3$;

6. $f=-7x_2-9x_3+\frac{5}{2}x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2-2x_3^2$;

7. $f=-7x_3+2x_1^2+3x_2^2+x_3^2-4x_1x_2$;

8. $f=x_1+x_2-2x_1^2-\frac{3}{2}x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3$;

9. $f=-x_1-3x_2+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+\frac{3}{2}x_3^2+2x_2x_3$;

10. $f=x_1+2x_1^2+\frac{5}{2}x_2^2+\frac{7}{2}x_3^2-3x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3$;

11. $f=-x_1+x_2+x_1^2+\frac{5}{2}x_2^2+4x_3^2-2x_1x_3-x_2x_3$;

12. $f=x_1+4x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-3x_1x_2-2x_1x_3$;

13. $f=-2x_1+\frac{9}{2}x_1^2+\frac{1}{3}x_2^2+x_3^2-3x_1x_3$;

14. $f=-x_1-x_2+x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-2x_2x_3$;

15. $f=x_3+\frac{1}{2}x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-x_1x_2$;

16. $f=4x_1+\frac{3}{2}x_1^2+\frac{5}{2}x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-x_2x_3$;

17. $f=-x_1+2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3$;

18. $f=-2x_1+x_2+\frac{5}{6}x_1^2+4x_2^2+\frac{1}{3}x_3^2-x_1x_3$;

19. $f=4x_1-x_2+x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_2x_3$;

20. $f=-3x_2-x_3+5x_1^2+\frac{3}{2}x_2^2+\frac{7}{2}x_3^2-2x_1x_3$;

21. $f=-\frac{1}{2}x_1+3x_2+2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+3x_3^2-\frac{1}{4}x_1x_2-\frac{1}{4}x_2x_3$;

22. $f=-x_1+4x_2+\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+4x_3^2-x_1x_3$;

23. $f=-2x_1+12x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2-\frac{1}{4}x_2x_3$;

24. $f=-10x_1+2x_2-x_3+x_1^2+x_2^2+2x_3^2-x_1x_2$;

25. $f=-4x_1+4x_3+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{4}x_2x_3$;

26. $f=-x_2+6x_3+2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_2x_3$;

27. $f=x_1-2x_2+16x_3+x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_1x_2-\frac{1}{2}x_1x_3$;

28. $f=-x_1-x_2-7x_3+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{4}x_1x_3$;

29. $f=-2x_1-8x_3+x_1^2+x_2^2+\frac{1}{2}x_2^3-\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{6}x_2x_3$;

30. $f=-4x_1-12x_3+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+4x_3^2-x_1x_2-\frac{1}{2}x_1x_3$.

б) Ограничения:

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	−1	0	0	−1	−1	−1/2	−2	−4	−1/2
d_*	−1	−1	0	0	0	−2	−1	0	−6	−1
	2	0	2	1	−1	0	−1	0	−2	−2

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	5	3	2	6	3	5	4	4	3	3
d^*	2	2	9/2	13/2	2	4	3	2	1	1
	3	4	4	3	0	2	3	1	4	3

Варианты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	−2	−3/2	0	1/4	0	1	−1	0	0	3/4
d_*	−1	−1	2	0	0	−1	−4	−3	0	−1
	−1	0	0	1/2	−4	−1	−1	−1	0	0
	1	2	2	4	5/2	4	5	4	3/2	3/2
d^*	7/2	2	5	5	1	4	1	1	2	1/2
	3/2	2	3	3	0	4	3	1	5/2	2

Варианты	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	3	0	0	−1	−1/2	1/2	−1/2	−1/2	−1/2	−∞
d_*	−1	−1	−4	−1	−1/2	−1/2	0	−∞	0	−∞
	−1	−2	−1	−1	0	1/2	0	−∞	−∞	−2
	6	4	3	5	3/2	3/2	3/2	2	2	1
d^*	2	2	1	3	2	3/2	5/2	2	5/2	1
	1	1	0	1	2	5/2	2	2	1	0

6.19. Из приведенных ниже целевых функций *а* и ограничений *б* составить простую задачу квадратичного программирования и решить геометрическим методом.

а) Целевые функции:

1. $f=-x_1-12x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2$;

2. $f=-4x_1-12x_2+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-x_1x_2$;

3. $f=-2x_1-8x_2+x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2$;

4. $f=-x_1-7x_2+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2$;

5. $f=-2x_1+16x_2+x_1^2+2x_2^2+x_1x_2$;

6. $f=-x_1+6x_2+2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2$;

7. $f=-4x_1+4x_2+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2$;

8. $f=-10x_1+2x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2$;

9. $f=-2x_1+12x_2+x_1^2+x_2^2$;

10. $f=-x_1+4x_2+\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$;

11. $f=-\frac{1}{2}x_1+3x_2+2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{4}x_1x_2$;

12. $f=-x_1+5x_2+3x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2$;

13. $f=3x_2+2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{4}x_1x_2$;

14. $f=5x_2+3x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2$;

15. $f=-x_1-4x_2+x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$;

16. $f=-14x_1+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{16}x_1x_2$;

17. $f=x_1-14x_2+x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{8}x_1x_2$;

18. $f=x_1-4x_2+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2$;

19. $f=-x_1-5x_2+x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{4}x_1x_2$;

20. $f=x_1-4x_2+\frac{1}{2}x_1^2+2x_2^2+\frac{1}{4}x_1x_2$;

21. $f=-3x_1-10x_2+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2+x_1x_2$;

22. $f=-x_1-12x_2+x_1^2+2x_2^2+x_1x_2$;

23. $f=-x_1-3x_2+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-\frac{1}{4}x_1x_2$;

24. $f=-x_1-7x_2+x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2$;

25. $f=x_1+12x_2+2x_1^2+x_2^2-\frac{1}{4}x_1x_2$;

26. $f=-4x_1-x_2+\frac{1}{3}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{6}x_1x_2$;

27. $f=-2x_1-24x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2$;

28. $f=-2x_1-8x_2+x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2$;

29. $f=-3x_1-10x_2+\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-x_1x_2$;

30. $f=-\frac{3}{2}x_1-10x_2+2x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_1x_2$.

б) Ограничения:

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_*	1 −1	−1 −1	0 0	0 0	−1 0	−1 −2	−1/2 −1	−2 0	−4 −6	−1/2 −1
d^*	5 2	3 2	2 9/2	6 13/2	3 2	5 4	4 3	4 2	3 1	3 1

Варианты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_*	−2 −1	−3/2 −1	0 2	1/4 0	0 0	1 −1	−1 −4	0 −3	0 0	3/4 −1
d^*	1 7/2	2 2	2 5	4 5	5/2 1	4 4	5 1	4 1	3/2 2	3/2 1/2

Варианты	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
d_*	3 −1	0 −1	0 −4	−1 −1	1/2 −1/2	−1/2 −1/2	−1/2 0	−1/2 −∞	−1/2 0	−∞ −∞
d^*	6 2	4 2	3 1	5 3	3/2 2	3/2 3/2	3/2 5/2	2 2	2 5/2	2 3/2

6.3. Задача геометрического программирования

Рассмотрим простую задачу геометрического программирования [12, 19]:

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\prod_{j=1}^{m}t_j^{a_{ij}}\to\min,\ \ t\geq 0, \tag{6.11}$$

где $c_i>0, i=\overline{1,n}$. Функция $f(t)\equiv f(t_1,...,t_m)$ называется ***позиномом***, матрица $A=(a_{ij}, i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ — ***матрицей экспонент***.

Введя обозначения $x_j=\ln t_j$, $j=\overline{1,m}$; $x_{m+i}=\ln u_i$, $u_i=c_i\prod\limits_{j=1}^{m}t_j^{a_{ij}}$, $b_i=$ $=-\ln c_i$, $i=\overline{1,n}$, от задачи (6.11) перейдем к эквивалентной задаче выпуклого программирования с линейными ограничениями

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}e^{x_{m+i}}\to\min,\\ \sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j-x_{m+i}=b_i,\ \ i=\overline{1,n}.\end{gathered} \tag{6.12}$$

Для этой задачи запишем функцию Лагранжа

$$F(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}e^{x_{m+i}}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j-x_{m+i}-b_i),$$

где $x=(x_j,\ j=\overline{1,m},\ x_{m+i},\ i=\overline{1,n})$, и рассмотрим задачу, двойственную к задаче (6.12):

$$\psi(\lambda)=\min_{x\in\mathbf{R}^{n+m}}F(x,\lambda)\to\max,\ \ \lambda\in\mathbf{R}^n.$$

Заметим, что минимум функции $F(x,\lambda)$ по x_{m+i} достигается в точке $x^*_{m+i}=\ln\lambda_i$. Следовательно, двойственные планы удовлетворяют неравенствам $\lambda_i\geq 0, i=\overline{1,n}$. Подсчитав $\min F(x,\lambda)$ по переменным x_j,

$j=\overline{1,m}$, найдем, что двойственные планы удовлетворяют уравнениям $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_{ij}=0, \quad j=\overline{1,m}$. Таким образом, двойственная задача запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i+\ln\prod_{i=1}^{n}(c_i/\lambda_i)^{\lambda_i}\to\max,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_{ij}=0,\ j=\overline{1,m},\ \lambda_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}.$$

В силу однородности ограничений последней задачи ее решение ищем в виде $\lambda_i=\alpha\delta_i$, $\delta_i\ge 0$, $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n}\delta_i=1$, $\alpha>0$. Тогда, записав двойственную задачу в новых переменных и вычислив в ней максимум по α, получим другую эквивалентную форму двойственной задачи:

$$\psi(\delta)=\prod_{i=1}^{n}(c_i/\delta_i)^{\delta_i}\to\max,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i a_{ij}=0,\quad j=\overline{1,m};\quad \sum_{i=1}^{n}\delta_i=1,\quad \delta_i\ge 0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{6.13}$$

Связь между переменными δ_i и λ_i устанавливается равенствами

$$\lambda_i=\delta_i\prod_{s=1}^{n}(c_s/\delta_s)^{\delta_s},\quad i=\overline{1,n}.$$

В силу соотношений двойственности и введенных обозначений на оптимальных планах t^0, δ^0 выполняются равенства

$$c_i\prod_{j=1}^{m}(t_j^0)^{a_{ij}}=\psi(\delta^0)\delta_i^0,\ i=\overline{1,n}. \tag{6.14}$$

Нужно отметить, что двойственная задача (6.13) часто оказывается проще исходной. Нередко ограничения задачи (6.13) дают единственный план, и тогда операция максимизации в (6.13) становится излишней.

Пример 6.5. Компания заключила контракт на перевозку руды в количестве P, включающий морские перевозки из порта A в порт B. Для морских перевозок компания арендует судно (рудовоз). Затраты на морские перевозки включают в себя расходы u_1 на аренду судна, оплату u_2 труда экипажа и закупку u_3 топлива. Стоимость месячной аренды судна определяется по эмпирической формуле $\rho = k_1 t_1^{6/5}$, где t_1 — тоннаж судна, k_1 — некоторый коэффициент пропорциональности ($k_1 \geq 0$).

Пусть S — длина рейса в обе стороны, t_2 — скорость судна (например, в узлах). Тогда время аренды судна равно $Pt_1^{-1}st_2^{-1}$ и, значит, расходы на аренду равны $u_1 = c_1 t_q^{1/5} t_2^{-1}$, где $c_1 = k_1 PS > 0$. Оплата труда экипажа пропорциональна времени, на которое арендуется судно, т. е. $u_2 = = k_2 Pt_1^{-1} st_2^{-1} = c_2 t_1^{-1} t_2^{-1}$ $(c_2 = k_2 PS > 0)$. Наконец, затраты на топливо пропорциональны общему пройденному пути $Pt_1^{-1} S$ и гидродинамическому сопротивлению судна, т. е. величине $t_1^{2/3} t_2^2$. Следовательно, $u_3 = c_3 t_1^{-1/3} t_2^2$ $(c_3 > 0)$. Таким образом, общие затраты на морские перевозки руды равны $f(t) = u_1 + u_2 + u_3 = c_1 t_1^{1/5} t_2^{-1} + c_2 t_1^{-1} t_2^{-1} + c_3 t_1^{-1/3} t_2^2$.

Задача состоит в том, чтобы выбрать такие тоннаж и скорость судна, которые обеспечивают минимум затрат, т. е. задача имеет вид

$$f(t) = c_1 t_1^{1/5} t_2^{-1} + c_2 t_1^{-1} t_2^{-1} + c_3 t_1^{-1/3} t_2^2 \to \min, \quad t_1 \geq 0, \; t_2 \geq 0.$$

Рассмотрим двойственную задачу. Ее ограничения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{5}\delta_1 - \delta_2 - \frac{1}{3}\delta_3 = 0, \\
&-\delta_1 - \delta_2 + 2\delta_3 = 0, \\
&\delta_1 + \delta_2 + 2\delta_3 = 1, \\
&\delta_1 \geq 0, \quad \delta_2 \geq 0, \quad \delta_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Последней системе удовлетворяет решение $\delta_1^0 = 35/34$, $\delta_2^0 = 1/54$, $\delta_3^0 = = 18/54$, которое и является оптимальным планом двойственной задачи (6.12), причем

$$\psi(\delta^0) = \left(\frac{c_1}{\delta_1^0}\right)^{\delta_1^0} \left(\frac{c_2}{\delta_2^0}\right)^{\delta_2^0} \left(\frac{c_3}{\delta_3^0}\right)^{\delta_3^0} = 54\left(\frac{c_1^{35} \cdot c_2 \cdot c_3^{18}}{35^{35} \cdot 18^{18}}\right)^{1/54}.$$

Тогда из равенств (6.13) имеем

$$c_1 t_q^{1/5} t_2^{-1} = \frac{35}{54}\psi(\delta^0), \; c_2 t_1^{-1} t_2^{-1} = \frac{1}{54}\psi(\delta^0), \; c_3 t_1^{-1/3} t_2^2 = \frac{18}{54}\psi(\delta^0).$$

Отсюда, разделив первое уравнение на второе, найдем $t_1^0 = (35c_2/c_1)^{5/6}$.

Далее из второго уравнения получим $t_2^0 = (18/c_3)^{1/3}(c_1/18)^{5/27}c_2^{4/27}$.

Итак, оптимальный тоннаж судна равен $(35c_2/c_1)^{5/6}$, оптимальная скорость равна $(18/c_3)^{1/3}(c_1/18)^{5/27}c_2^{4/27}$.

Замечание 6.3. Если рассмотреть более общую задачу геометрического программирования (с одним основным ограничением)

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{ij}} \to \min,$$
$$\sum_{k=1}^{l} c_{n+k} \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_{n+k,j}} \le 1,\ t_j \ge 0,\ j = \overline{1,m}, \tag{6.15}$$

где $c_i > 0$, $i = \overline{1, n+l}$, и существуют $t_j^* \ge 0$, $j = \overline{1,m}$, что

$$\sum_{k=1}^{l} c_{n+k} \prod_{j=1}^{m} t_j^{*a_{n+k,j}} < 1$$

(условие Слейтера), то по аналогии с предыдущим случаем двойственная задача к задаче (6.15) будет иметь вид

$$\psi(\delta) = \prod_{s=1}^{n+l}\left(\frac{c_s}{\delta_s}\right)^{\delta_s}\left(\sum_{k=1}^{l}\delta_{n+k}\right)^{\sum_{k=1}^{l}\delta_{n+k}} \to \max,$$
$$\sum_{s=1}^{n+l}\delta_s a_{sj} = 0,\quad j = \overline{1,m},\quad \sum_{i=1}^{n}\delta_i = 1,\quad \delta_s \ge 0,\quad s = \overline{1, n+l}.$$

Упражнения и задания

6.20. Свести следующие задачи к задачам геометрического программирования и решить их.

1. Емкость (корыто) имеет форму полуцилиндра. При каких размерах его вес будет минимальным, если толщина стенок равна a, объем равен v, а удельный вес материала равен γ?
2. Со склада необходимо вывезти A м^3 товара. Хранение на складе 1 м^3 товара в течение суток стоит a д. е. Раз в сутки к складу подается поезд, которым можно вывозить товар. Для перевозки товара необходимо изготовить контейнер (имеющий форму прямоугольного параллелепипеда). Один квадратный метр материала, из которого изготовляется контейнер, стоит b д. е. и весит c кг. Стоимость изготовления контейнера объема v равна $\alpha\sqrt{v}$ д. е., где α — некоторый коэффициент. Стоимость перевозки по железной дороге 1 кг груза — d д. е. Вес 1 м^3 товара — p кг. Какие размеры должен иметь контейнер, чтобы суммарная

стоимость товара (учитывая оплату за временное хранение на складе части товара) была минимальной? Учесть, что раньше, чем вывезти очередную партию товара, к складу надо привезти пустой контейнер.

3. К источнику тока с э.д.с., равной E, и внутренним сопротивлением ρ подключают электронагревательный прибор. Сопротивление подводящих проводов равно r. При каком сопротивлении R прибора он будет выделять наибольшую мощность? (*Указание:* Закон Ома для цепи и закон Джоуля — Ленца: $I=\dfrac{E}{\rho+r+R}$; $P=I^2R$.)
4. Требуется из трех одинаковых досок изготовить жслоб, имеющий в поперечном сечении форму трапеции, так, чтобы поперечное сечение этого желоба было наибольшим.
5. В прямоугольной системе координат Oxy дана точка $A(a, b)$, $a>0$, $b>0$. Провести через точку A прямую так, чтобы треугольник BDO имел наименьшую площадь (B и D — точки пересечения прямой с осями координат).
6. Вокруг полушара радиуса R описать прямой круговой конус наимсньшего объема (основание конуса лежит в одной плоскости с основанием полушара и концетрично с ним).
7. Даны две параллельные прямые AB и CD, расстояние между которыми равно a. На прямой AB даны две точки K и L, на прямой CD — точка F. Выбрать точку M на отрезке KF так, чтобы сумма площадей треугольников LMK и EMF была наибольшей (E — точка пересечения прямых CD и LM).
8. На сторонах BC и DC прямоугольника $ABCD$ взяты две точки K и L такие, что $BC/BK=a$; $DC/DL=b$, где $a, b>1$ — некоторые заданные числа. При каких размерах прямоугольника $\angle KAL=\alpha$ будет наибольшим?
9. Цилиндрическая деталь заданного радиуса r и длины a упаковывается в ящик, поперечное сечение которого — прямоугольный треугольник. При каких размерах ящика расходы на материал, идущий на изготовление ящика, будут минимальны?
10. Среди точек (t_1, t_2) плоскости с положительными координатами, удовлетворяющими неравенству $t_1^4t_2^{-4}+t_1^{-1}t_2^{1/2}\le 1$, найти точку, для которой выражение $t_1^2+t_2^2$ минимально.
11. Затраты на содержание и эксплуатацию судна составляют $a+bt^3$ денежных единиц в час, где t — скорость судна, a и b — некоторые константы. Какова наиболее экономичная скорость судна, т. е. скорость, соответствующая самым дешевым рейсам?
12. Найти кратчайшее расстояние от кривой, заданной уравнением $x^m y^n = a$ (m, n — натуральные числа), до начала координат при $x>0$, $y>0$.

6.21. При условии $t_i>0$, $i=\overline{1,3}$, доказать неравенства:

1. $t_1^3+t_2^3+t_3^3\ge 3t_1t_2t_3$;
2. $\dfrac{t_1^2}{t_2t_3}+\dfrac{t_2^2}{t_1t_3}+\dfrac{t_3^2}{t_1t_2}+\dfrac{t_1}{t_2}+\dfrac{t_1}{t_3}+\dfrac{t_2}{t_1}+\dfrac{t_2}{t_3}+\dfrac{t_3}{t_1}+\dfrac{t_3}{t_2}\ge 9$;
3. $3t_1^2+2t_2^3+t_3^6\ge 6t_1t_2t_3$.

6.22. При условии, что все $t_i > 0$, $i=\overline{1,n}$, доказать неравенства:

1. $t_1^n + t_2^n + \ldots + t_n^n \geq n t_1 \ldots\ t_n$;

2. $\dfrac{t_1}{t_2} + \dfrac{t_2}{t_3} + \ldots + \dfrac{t_{n-1}}{t_n} + \dfrac{t_n}{t_1} \geq n$;

3. $\dfrac{t_1^{p_1}}{p_1} + \dfrac{t_1^{p_1}}{p_2} + \ldots + \dfrac{t_n^{p_n}}{p_n} \geq t_1 t_2 \ldots t_n$, $p_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{p_i} = 1$.

6.23. Решить задачу геометрического программирования $f(t) \to \min$, $t \geq 0$, где:

1. $f(t) = t_1^{3/4} t_2^3 + t_1^{-1/2} t_2^{-1} + \dfrac{1}{2} t_1^{-1/3} t_2^{-2} + \dfrac{1}{3} t_1^{-1/4} t_2^{-3}$;

2. $f(t) = 2t_1^{-1} t_2 + 3t_1^2 t_2 t_3^3 + 6t_1^{-1} t_2^{-2} t_3^{-3}$;

3. $f(t) = 4t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1} + 4t_1 t_3 + t_1 t_2 + 2t_2 t_3$;

4. $f(t) = at_1^{-2} t_2^2 + bt_1^{5/4} t_2^{1/4} + ct_1^{-1} t_2^{-5}$, $a, b, c > 0$;

5. $f(t) = t_1^{-1} t_4^2 + 2t_1^2 t_2^{-1} t_3^{-1} + t_2^2 t_3^{-2} + t_1 t_3^2 t_4$;

6. $f(t) = 2t_1^{-4/r} t_2^{-1/s} + 2t_1^{5/r} t_2^{2/s} + t_1^{-2/r} t_2^{-2/s}$, $r, s \neq 0$;

7. $f(t) = t_1^{-1} t_3^{-1} + 2t_1^2 t_2^{-1} t_3 + 4t_1^{-1} t_2$;

8. $f(t) = 2t_1^{-1} t_2 t_3^{-1} + 4t_1^2 t_2^{-1} t_3^2 + t_1^{-1} t_2^{-1}$;

9. $f(t) = \dfrac{1}{2} t_1 t_2^{-1} t_3 + 2t_1^{-1} t_2 + \dfrac{1}{2} t_1 t_3^{-1} + 2t_3$;

10. $f(t) = at_1^{-2} t_2^2 + bt_1^2 t_2 + ct_1^{-2} t_2^{-4}$, $a, b, c > 0$;

11. $f(t) = t_1 + t_2 / t_1 + t_3 / t_2 + \ldots + t_n / t_{n-1} - 1 / t_n$;

12. $f(t) = ct_1 t_2 t_3 + c_2 t_2 / t_1 t_3 + c_3 t_3 / t_1 t_2 + c_4 t_1 / t_2 t_3$, $c_i > 0$, $i = \overline{1,4}$;

13. $f(t) = at_1^{-\alpha} t_2^{\alpha} + bt_1^2 t_2 + ct_1^{-\alpha} t_2^{-2\alpha}$, $a, b, c, d > 0$;

14. $f(t) = t_1^{-\alpha} t_2^{\alpha} + t_1^{1+\beta^2} t_2^{\beta^2} + t_1^{-\alpha\beta} t_2^{-\frac{\alpha(1+\beta^2)}{\beta}}$, $\alpha, \beta > 0$;

15. $f(t) = t_1 t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 / t_3 t_4 + t_2 / t_3 + t_1 / t_2 t_3$;

16. $f(t) = 2t_1^{-1} t_2 + 3t_1^2 t_2 + 2t_1^2 t_2^{-1} t_3 + 4t_1^{-1} t_3$;

17. $f(t) = t_1^{-1} t_2 + 2t_1^{-1} t_2^2 + 4t_1^2 t_2^{-1} t_3^2 + t_2^{-1} t_3^{-1}$;

18. $f(t) = 2t_1 t_2^{-1} + t_1^2 t_2^{-1} + \dfrac{1}{2} t_1 t_2^2 t_3^{-1} + t_1^{-1} t_2^{-1}$;

19. $f(t) = t_1^3 \sqrt[5]{t_2^2} + 1/2 t_1 \sqrt{t_2} + 1/2 t_1^2 \sqrt[3]{t_2} + 1/3 t_1^3 \sqrt[4]{t_2}$;

20. $f(t) = t_1^{-1} + t_1 t_2^{\sin^2\alpha} + t_1^{-\cos^2\alpha} t_2$;

21. $f(t) = 1215 t_1^{-1} t_2^{-1} t_3^{-1} t_4^{-1} + 5t_1 t_2 t_1^{-1} + 10 t_1 t_3 t_4^2 + 10 t_2 t_3 t_4^2$;

22. $f(t)=t_1 t_2 t_3^2 t_4^4+50t_1^{-1}t_3^{-1}t_4^{-2}+20t_2^{-1}t_3^{-1}t_4^{-2}$;

23. $f(t)=4t_1t_3^2+t_1t_2^2+t_1^{-1}t_2t_3^{-1}$;

24. $f(t)=\frac{1}{p}t_1^{p-1}t_2^{-1}+\frac{1}{q}t_1^{-1}t_2^{q-1}$, $p,q>0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

25. $f(t)=\left(\prod_{j=1}^{n}t_j\right)^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j}x_j^{p_j}$, $p_j>0$, $j=\overline{1,n}$; $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j}=1$;

26. $f(t)=1+t_1t_2^{-1}t_3+t_1^{-1}t_2^{-1}t_3+t_1^{-1}t_2t_3^{-1}+t_1t_2t_3^{-1}$;

27. $f(t)=t_1^{-\frac{n}{n+1}}t_2^{-n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}t_1^{\frac{1}{k+1}}t_2^{k}$;

28. $f(t)=a^2t_1^{-1}+t_1^{-2}t_2^{-1}+t_2^2t_3^{-1}+\frac{1}{b}t_3^2$, $a,b>0$;

29. $f(t)=3t_1t_2t_3+3t_1^{-2}t_2^{-2}t_3^{-2}+t_1^3t_2^3t_3^3$;

30. $f(t)=(t_1^4+t_2^4+t_3^4+t_4^4)/t_1t_2t_3t_4$.

6.24. Решить задачу геометрического программирования $f(t)\to\min$, $g(t)\le 1$, $t\ge 0$, где:

1. $f(t)=40t_1^{-1}t_2^{-1/2}t_3^{-1}t_4+20t_1t_2^{-2}t_3t_4^{-1}+20t_1t_2t_3$, $g(x)=\frac{1}{3}t_1^{-2}t_2^{-2}+\frac{4}{3}t_2^{1/2}$;
2. $f(t)=40t_1t_2+20t_2t_3$, $g(x)=\frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-1/2}+\frac{3}{5}t_2^{-1}t_3^{-2/3}$;
3. $f(t)=t_1^{-1/2}t_2^{1/8}+t_1^{1/4}t_2^{-1/2}t_3^{1/2}$ $g(x)=\frac{4}{5}t_1^{1/2}t_2^{2/3}t_3^{-1}+\frac{2}{5}t_1^{1/3}t_2t_3^{-1}$;
4. $f(t)=t_1t_2t_3+t_1^{-1}t_2t_3^{-1}$, $g(x)=t_1^{-1}t_2^{-1}t_3+t_1t_2^{-1}t_3^{-1}$;
5. $f(t)=40t_1t_2+2t_1t_3$, $g(x)=\frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-1/2}+\frac{3}{5}t_2^{-1}t_3^{-2/3}$;
6. $f(t)=t_2+t_1^4t_2^{-4}$, $g(x)=t_1^{-1}t_2^2$;
7. $f(t)=2t_1^{-2}+4t_1^5t_2^{-2}$, $g(x)=t_1^{-4}t_2^2$;
8. $f(t)=a/t_1t_2t_3+bt_1t_2$, $g(x)=2t_1t_2+t_2t_3$;
9. $f(t)=at_1^{-2}t_2^{-1}+bt_1^{-1/2}$, $g(x)=t_1^2t_3^{-1}+t_2^{-2}t_3^{-1}$;
10. $f(t)=t_1^{-1/2}t_2^{-1/8}+t_1^{1/4}t_2^{-1/8}t_3^{1/2}$, $g(x)=\frac{4}{5}t_1^{-1/2}t_2^{-2/3}t_3^{-1}+\frac{2}{5}t_1^{1/3}t_2t_3^{-1}$.

Глава 3. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 7. ОБЩАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этой главе рассматриваются методы решения задач нелинейного программирования (условной и безусловной оптимизации). Общая задача нелинейного программирования состоит в минимизации (максимизации) функций на множествах конечномерного пространства.

7.1. Постановка задачи

В дальнейшем задачу нелинейного программирования будем записывать следующим образом:

$$f(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{7.1}$$

где $f(x)$ — скалярная функция, определенная на множестве $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Элементы x множества X будем называть планами задачи (7.1), а функцию $f(x)$ — целевой функцией. Для определенности будем рассматривать задачу минимизации (7.1), а задача максимизации $f(x) \to \max$, $x \in X$, сводится к задаче минимизации заменой функции $f(x)$ на $-f(x)$.

Если план x^0 удовлетворяет условию $f(x^0) = \min f(x), x \in X$, то он называется ***глобально оптимальным планом***. Если на плане x^0 для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство $f(x^0) = \min f(x)$, $\| x - x^0 \| < \varepsilon$, $x \in X$, то план x^0 называется ***локально оптимальным планом*** задачи (7.1).

Пример 7.1. Рассмотрим функцию (рис. 7.1)

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x + 1, & x \in \left[0, \ \dfrac{3\pi}{2}\right], \\ 2, & x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, \ +\infty\right). \end{cases}$$

Данная функция на множестве планов $X = [0, +\infty)$ имеет глобально оптимальный план (точка глобального минимума) $x^0 = \pi/2$, $\min f(x) = f(x^0) = 0$. Точка $\bar{x} = 0$ является точкой локального максимума $f(0) = 1$. Все точки $x \in [3\pi/2, +\infty)$

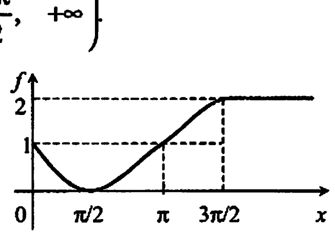


Рис. 7.1

являются точками глобального максимума и одновременно точками локального минимума.

Пример 7.2. Функция $f(x)=2^{-x}$, $x\in[0, +\infty)$, имеет одну точку ($x=0$) глобального максимума и не имеет точек минимума (проверить!).

Пример 7.3. Функция $f(x)=4x+1$ не достигает минимума (максимума) ни в одной точке множества $X=\{x\in\mathbf{R}: 0<x<5\}$ (проверить!).

7.2. Критерий существования решения

Из рассмотренных примеров ясно, что далеко не каждая задача (7.1) имеет решение. Прежде чем сформулировать теорему существования, введем некоторые определения.

Говорят, что функция $f(x)$, $x\in X$, ***полунепрерывна снизу*** на множестве X, если для любой точки $x^*\in X$ имеем $\varliminf\limits_{\substack{x\to x^*\\ x\in X}} f(x)=f(x^*)$.

Функция $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда каждое ее множество уровня $\{x\in \mathrm{R}^n:\ f(x)\le c\}$, где $c=\mathrm{const}$, или пусто, или замкнуто. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.1 (существования). *Для существования решения задачи* (7.1) *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* c, $c\in(-\infty, +\infty)$, *множество уровня целевой функции* $f(x)$ *было* ***множеством минимального уровня*** $\{\overline{x}\in\mathbf{R}^n:\ f(\overline{x})\le\min\limits_{x\in X} f(x)\}$ *или непустым компактом, на котором функция* $f(x)$ *полунепрерывна снизу.*

Обобщением понятия наименьшего (наибольшего) значения функции является определение нижней (верхней) грани.

Если функция $f(x)$ ограничена снизу на множестве X, то существует единственная конечная нижняя грань этой функции на X. Для неограниченной снизу на X функции $f(x)$ нижняя грань равна $-\infty$ и, значит, можно считать, что нижняя грань (в отличие от минимума) существует всегда. Это относится и к верхней грани функции.

Понятно, что не всегда можно указать точку, в которой нижняя грань целевой функции достигается. В этом случае рассматривают задачу построения минимизирующей последовательности. ***Последовательность*** $\{x^k\}_{k\ge1}$, $x^k\in X$, называется ***минимизирующей*** для функции $f(x)$, если $\lim\limits_{k\to\infty} f(x^k)=\inf\limits_{x\in X} f(x)$.

Построение минимизирующих последовательностей является актуальным в теории оптимизации, поскольку большинство вычислительных методов итерационные. Если последовательность, генерируемая алгоритмом, минимизирующая, то это один из показателей эффективности данного алгоритма. Заметим, что минимизирующая последовательность существует всегда.

Замечание 7.1. Последовательность точек, $\{x^k\}_{k\geq 1}$, $x^k \in X$, называется ***релаксационной***, если значения целевой функции $f(x)$, вычисленные на элементах этой последовательности, не возрастают (не убывают), т. е. $f(x^1) \geq f(x^2) \geq ....$ $(f(x^1) \leq f(x^2) \leq ...)$.

Достаточное условие достижения нижней (верхней) грани дает классическая теорема Вейерштрасса.

Теорема 7.2 (Вейерштрасса). *Пусть X – компактное множество и $f \in C(X)$. Тогда $f^0 = \inf f(x) > -\infty$, множество $X^0 = \{x \in X\colon f(x) = f^0\}$ не пусто и компактно, а любая минимизирующая последовательность сходится к множеству X^0 глобально оптимальных планов задачи* (7.1) *на множестве X, если* $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x^k, X^0) = 0$, *где* $\rho(x^k, X^0) = \inf\limits_{x\in X^0}\left\|x^k - x\right\|$.

7.3. Классификация задач

При общих предположениях относительно элементов задачи (7.1) получить эффективные условия оптимальности не удается. В связи с этим задача (7.1) рассматривается при различных предположениях относительно функции $f(x)$ и множества планов X. Эти предположения порождают такие классы задач, для которых появляется возможность описания свойств оптимальных планов. Таких классов задач, распространенных в приложениях, чрезвычайно много. К ним относятся линейное программирование (гл. 1), выпуклое и квадратичное программирование (гл. 2), векторная оптимизация и т. д.

В данной главе рассматриваются следующие классы задач:

- задачи на ***безусловный экстремум***, когда $X = \mathbf{R}^n$;
- задачи на ***условный экстремум***, когда множество планов представимо в одном из следующих видов: *а*) $X = \{x \in \mathbf{R}^n\colon\ h(x) = 0\}$; *б*) $X = \{x \in \mathbf{R}^n\colon g(x) \leq 0\}$; *в*) $X = \{x \in \mathbf{R}^n\colon g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$, где $g(x)$ — m-мерная вектор-функция, а $h(x)$ — k-мерная вектор-функция, $k < n$ (случай *а* соответствует ***классической задаче условной оптимизации***; в случае *б* имеем ***задачу условной оптимизации с ограничениями-нера-***

венствами; в случае *в* — ***задачу условной оптимизации со смешанными ограничениями***);

- задачи ***дискретного программирования***, когда X — дискретное (конечное) множество планов.

Упражнения и задания

7.1. Доказать, что сумма двух полунепрерывных снизу функций и произведение полунепрерывной функции на неотрицательное число полунепрерывны снизу.

7.2. Доопределить в нуле функцию $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x>0, \\ -1, & \text{если } x<0, \end{cases}$ так, чтобы она стала полунепрерывной снизу.

7.3. Пусть в задаче (7.1) X — компакт в $\mathbf{R}^n$, $f(x)$ полунепрерывна снизу на X. Доказать, что глобальный оптимальный план в задаче (7.1) существует.

7.4. Найти все значения a, при которых функция $f(x)=(a-2)(a-3)e^{x_1}+$ $+\dfrac{x_2+10}{x_2^2+1}$ имеет глобальный минимум на множестве $X=\{x\in\mathbf{R}^2 : (a-4)x_1^2+$ $+x_2^2\le 1\}$, а также все значения a, при которых величина $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ конечна, но не достигается.

7.5. В примерах 7.1—7.3 найти верхние и нижние грани функций.

7.6. Найти точки экстремума и вычислить верхние и нижние грани следующих функций:

1. $f(x)=\max\{x_1, x_2\}$, $x\in\mathbf{R}^2$;

2. $f(x)=\min\{x_1, x_2^2\}$, $x\in\mathbf{R}^2$;

3. $$f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x\le 1, \\ (x-3)^2-3, & 1\le x\le 4, \\ 0; & 4\le x\le 6; \end{cases} \quad X=\{x\in\mathbf{R}^1 : x\in[-1; 6]\};$$

4. $$f(x)=\begin{cases} x^2. & x\le -1, \\ 3, & -1\le x\le 0, \\ 3\cos x, & 0<x\le\pi, \\ 1, & \pi<x\le 6, \\ 2^{x-6}, & 6<x<8; \end{cases} \quad X=\{x\in\mathbf{R}^1 : x\in(-\infty; 8)\};$$

5. $$f(x)=\begin{cases} \cos^2\pi x, & x\le 0, \\ |\sin\pi x|, & x>0; \end{cases} \quad x\in\mathbf{R}^1;$$

6. $$f(x)=3^{\left(x_1^2-2\right)^2+|x_2|+x_1^2+|x_3|}, \quad x\in\mathbf{R}^3.$$

7.7. Доказать следующие соотношения:

1. $\min\limits_{x\in X}\{f(x)+c\}=\min\limits_{x\in X} f(x)+c,$

$\max\limits_{x\in X}\{f(x)+c\}=\max\limits_{x\in X} f(x)+c,$

где c — произвольная постоянная.

2. $\max\limits_{x\in X}\{f(x)+\varphi(x)\}\le\max\limits_{x\in X} f(x)+\max\limits_{x\in X}\varphi(x),$

$\min\limits_{x\in X}\{f(x)+\varphi(x)\}\ge\min\limits_{x\in X} f(x)+\min\limits_{x\in X}\varphi(x).$

3. $\max\limits_{x\in X}\{f(x)-\varphi(x)\}\ge\max\limits_{x\in X} f(x)-\max\limits_{x\in X}\varphi(x),$

$\min\limits_{x\in X}\{f(x)-\varphi(x)\}\le\min\limits_{x\in X} f(x)-\min\limits_{x\in X}\varphi(x).$

4. $|\sup\limits_{x\in X} f(x)|\le\sup\limits_{x\in X}|f(x)|,$

$|\inf\limits_{x\in X} f(x)|\le\inf\limits_{x\in X}|f(x)|.$

5. $\sup\limits_{x\in X} f(x)=\max\limits_{1\le i\le k}\sup\limits_{x\in X_i} f(x),$

$\inf\limits_{x\in X} f(x)=\min\limits_{1\le i\le k}\inf\limits_{x\in X_i} f(x),$ где $X=\bigcup\limits_{i=1}^{k}X_i.$

7.8. Пусть $\varphi(x)$ — возрастающая функция, определенная на области значений функции f. Доказать, что множества глобальных и локальных точек экстремума функции $\varphi(f(x))$ совпадают с соответствующими множествами для функции $f(x)$ и выполняются равенства

$$\min_{x\in X}\varphi(f(x))=\varphi(\min_{x\in X} f(x)),$$
$$\max_{x\in X}\varphi(f(x))=\varphi(\max_{x\in X} f(x)).$$

Доказать аналогичные утверждения, когда φ является убывающей, невозрастающей функцией; неубывающей функцией.

7.9. Является ли в задаче

$$f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & x>0,\\ \cos^2 x, & x\le 0,\end{cases}\to\min(\max)$$

последовательность точек $x^k=(-1)^k/k,\ k\ge 1$, минимизирующей, сходящейся к множеству точек глобального минимума (максимума)?

7.10. Показать, что последовательность, сходящаяся к множеству глобально оптимальных планов, не обязательно сходится к какому-либо глобально оптимальному плану.

7.11. Доказать, что существуют решения следующих задач:

1. $f(x)=\|x\|^6+2\|x\|^4\to\min,\quad x\in X,$ где $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ x_i\ge 1,\ i=\overline{1,n}\};$
2. $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^4\to\max,\quad x\in X=\{x\in\mathbf{R}^3:\ |x_1+x_2+2x_3|\le 10,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}\};$
3. $f(x)=x_1^4x_5^2+x_2^3+2^{x_3}-(x_4\cos x_5)^3\to\min,$

   $x\in X=\{x\in\mathbf{R}^5:\ \sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2\le 1,\ x_1^2+x_3^2\ge 1/2,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,5}\};$
4. $f(x)=x_1^4+x_2^4+(x_1+x_2)^2\to\min,\ x\in X=\mathbf{R}^2.$

§ 8. ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min(\max), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{8.1}$$

в предположении, что скалярная функция $f(x)$ определена и непрерывна в каждой точке $x \in \mathbf{R}^n$ вместе со всеми частными производными по x_1, ..., x_n, т. е. $f \in C^{(1)}(\mathbf{R}^n)$. Задача (8.1) называется ***задачей на безусловный минимум*** (***максимум***).

Классический метод поиска безусловного экстремума основан на следующих утверждениях.

Теорема 8.1 (необходимое условие первого порядка). *Если x^0 — локально оптимальный план задачи* (8.1), *то x^0 является решением уравнения*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0. \tag{8.2}$$

Решения векторного уравнения (8.2) называются ***стационарными планами*** (точками) задачи (8.1) (функции $f(x)$).

Теорема 8.2 (необходимое условие второго порядка). *Пусть* $f \in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$. Тогда:

а) если x^0 — локально оптимальный план задачи $f(x) \to \min$, $x \in \mathbf{R}^n$, то

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \geq 0;$$

б) если x^0 — локально оптимальный план задачи $f(x) \to \max$, $x \in \mathbf{R}^n$, то

$$\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x^2} \leq 0.$$

Теорема 8.3 (достаточное условие второго порядка). *Пусть* $f \in C^{(2)}(\mathbf{R}^n)$. *Если на стационарном плане x^* выполняется условие*

$$\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} > 0 \quad \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} < 0 \right),$$

то $x^* = x^0$ — локально оптимальный план задачи (8.1).

Замечание 8.1. Если $x^0 \in \operatorname{int} X$, $X \subset \mathbf{R}^n$, то все сформулированные утверждения справедливы для задачи $f(x) \to \min(\max)$, $x \in X$.

Замечание 8.2. При исследовании на знакоопределенность матриц вторых производных функции $f(x)$ используются критерии Сильвестра (см. п. 5.2).

Схема поиска оптимальных планов задачи (8.1):

1) решается система алгебраических уравнений (8.2) и находятся стационарные планы x^i, $i=\overline{1,l}$;

2) на стационарных планах исследуется знакоопределенность матриц вторых производных целевой функции (стационарные планы, на которых матрица $\partial^2 f/\partial x^2$ положительно (отрицательно) определена, — локально оптимальные планы задачи (8.1));

3) анализируются те стационарные планы, на которых матрица вторых производных не является строго знакоопределенной $\partial^2 f/\partial x^2 \geq 0$ (≤ 0);

4) среди найденных локально оптимальных планов (путем сравнения на них значений целевой функции) находят глобально оптимальные планы.

Пример 8.1. Решить задачу

$$f(x)=\frac{1}{2}x_1^2+2x_2^3-x_1x_2 \to \min\,(\max),\ \ x\in \mathbf{R}^2.$$

Составляем систему уравнений (8.2):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}=x_1-x_2=0,$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}=6x_2^2-x_1=0.$$

Стационарные планы: $x_1^{(1)}=0$, $x_2^{(1)}=0$; $x_1^{(2)}=1/6$, $x_2^{(2)}=1/6$. Подсчитаем матрицу вторых производных в точках $x^{(1)}$, $x^{(2)}$:

$$\frac{\partial^2 f(x^{(1)})}{\partial x^2}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\qquad \frac{\partial^2 f(x^{(2)})}{\partial x^2}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Применяя критерии Сильвестра, заключаем, что $\dfrac{\partial^2 f(x^{(1)})}{\partial x^2}$ не является знакоопределенной, т. е. стационарный план x^1 не локально оптимальный. Поскольку матрица $\dfrac{\partial^2 f(x^{(1)})}{\partial x^2}$ положительно определена, то $x^{(2)} = x^0$ — локально оптимальный план ($f(x^0)=\min f(x)$, $x\in\mathbf{R}^2$), $f(x^0)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}+2\frac{1}{6\cdot 36}-\frac{1}{36}=-\frac{1}{216}$. Глобальных оптимальных планов нет, поскольку, например, $f(x^0)=-\frac{1}{216}>f(0;\ -1)=-2$.

В случае одномерной оптимизации теоремы 8.2, 8.3 допускают эффективное (для практического применения) обобщение.

Теорема 8.4. *Пусть $f\in C^{(k)}(\mathbf{R})$. Если в точке x^* выполняются соотношения*

$$\frac{df(x^*)}{dx}=0,\quad \ldots,\quad \frac{d^{k-1}f(x^*)}{dx^{k-1}}=0,\quad \frac{d^k f(x^*)}{dx^k}\neq 0,$$

то:

а) x^* является точкой минимума, если k — четное число и

$$d^k f(x^*)/dx^k>0;$$

б) x^* — точка максимума, если k — четное число и

$$d^k f(x^*)/dx^k<0;$$

в) x^* — ни точка минимума, ни точка максимума, если k — нечетное число.

Упражнения и задания

8.1. Исследовать на экстремум функции, заданные неявно:

а) $x_1^2+x_2^2+f^2-2x_1+2x_2-4f+2=0$;

б) $x_1^2+x_2^2+f^2-2x_1f-x_2f+2x_1+2x_2+2f=2$.

8.2. Может ли функция двух переменных иметь бесконечно много точек локального минимума и ни одной точки локального максимума? Рассмотреть функцию $f(x)=x_1e^{x_1}-(1+e^{x_1})\cos x_2$.

8.3. В пространстве $\mathbf{R}^n$ найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до заданных точек x^i, $i=\overline{1,k}$, минимальна.

8.4. Найти оптимальный план в задачах:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x'Dx+c'x+d$, где $x\in\mathbf{R}^n$, $D>0$;

б) $f(x)=\|Ax+b\|^2$, где A – $m\times n$-матрица, $\operatorname{rank}A=n$. (*Указание:* матрица $A'A$ не вырождена.)

8.5. Найти экстремум функции $f(x)=\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{4}-\frac{1}{x_1x_2}$.

8.6. Найти точки локального безусловного минимума (максимума) следующих функций:

1. $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2+x_1-2x_3$;
2. $f(x)=-x_1^2-4x_2^2+2x_1x_2+x_1$;
3. $f(x)=-x_1^2+x_1\sqrt{x_2}+6x_1-x_2+10$;
4. $f(x)=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+x_1+\cos x_3$;
5. $f(x)=x_1^3+x_2^2+2x_3^2-x_2x_3+2x_1x_3-x_2$;
6. $f(x)=x_1^2-2x_2^2-2x_1x_2+x_1$;
7. $f(x)=2x_1^2+x_2^3+x_3^2-x_1x_2+2x_1x_3-x_2$;
8. $f(x)=x_1^4+x_2^4-2(x_1-x_2)^2$;
9. $f(x)=x_1x_2+\dfrac{20}{x_1}+\dfrac{50}{x_2}$; $x_1>0,\ x_2>0$;
10. $f(x)=\exp(-x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-x_2)$;
11. $f(x)=\exp(-2x_1^2-5x_2^2+x_1x_2)$;
12. $f(x)=(4-x_1)^2+(x_1-x_2^2)^2$;
13. $f(x)=x_1^2-x_2^2+2\exp(-x_1^2)$;
14. $f(x)=\exp(-x_1^2-x_2^2)$;
15. $f(x)=\exp(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+2)$;
16. $f(x)=(x_1^3-1)^4+(x_2-x_1)^2-2$;
17. $f(x)=x_1x_2^2(1-x_1-x_2)$;
18. $f(x)=(x_1+x_2-1)\ \exp(-x_1^2-2x_2+x_2^2)$;
19. $f(x)=x_1x_2^2x_3^2(1-x_1-2x_2-3x_3)$;
20. $f(x)=2x_1^{2/3}+x_2^{2/3}+4x_3^{2/3})$;
21. $f(x)=(x_1-1)^3+(x_2^3-x_1)^2$;
22. $f(x)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2-4x_2x_3-2x_3$;
23. $f(x)=ae^{-x_1}+be^{-x_2}+\ln(e^{x_1}+e^{x_2})$, $a>0,\ b>0$;
24. $f(x)=x_1^4+x_2^4-4x_1x_2$;
25. $f(x)=(x_1+x_2)(x_1-a)(x_2-b)$;
26. $f(x)=x_1^2-2x_1x_2^2+x_2^4-x_2^5$;
27. $f(x)=x_1+x_2+4\sin x_1\sin x_2$;
28. $f(x)=x_1\,\mathrm{e}^{x_1}-(1+\mathrm{e}^{x_1})\cos x_2$;
29. $f(x)=x_1^3+x_2^2+x_3^2+12x_1x_2+2x_3$;
30. $f(x)=x_1+\dfrac{x_2^2}{4x_1}+\dfrac{x_3^2}{x_2}+\dfrac{2}{x_3}$; $x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0$;
31. $f(x)=3x_1x_2-x_1^2x_2-x_1x_2^2$;
32. $f(x)=x_1^4+x_2^4-(x_1+x_2)^2$.

8.7. Найти оптимальные планы задачи

$$f(x)=x_1^2+x_1x_2+ax_2^2-b\ln x_1-c\ln x_2 \to \min,$$

где числа a, b, c заданы в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3/2	1/2	5/2	1/6	7	7/3	2/3	2	3/4	2/5
b	2	3	2	6	2	3	3	3	4	5
c	1	2	1	5	1	2	1	1	2	3
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	1/8	4	3/2	4/5	1/2	7/4	5/2	1	3/5	2/3
b	8	3	4	5	6	4	4	5	5	6
c	6	1	2	3	4	1	1	2	1	2

8.8. Найти оптимальные планы задачи

$$f(x)=e^{-(x_1^2+x_2^2)}(ax_1^2+bx_2^2) \to \min(\max),$$

где числа a, b заданы в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	7	1	8	1	8	2	2	7	2
b	2	3	4	5	6	3	4	5	6	7
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	9	3	3	7	3	4	6	4	1	5
b	1	5	1	2	6	1	7	3	5	6

8.9. Найти оптимальные планы задачи

$$f(x)=\frac{ax_1+bx_2+c}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}} \to \min(\max),$$

где числа a, b, c заданы в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	4	4	1	3	3	1	–1	2	1	2
b	–1	2	2	1	–1	3	3	5	3	1
c	2	–1	4	2	–2	–4	4	2	–3	3

Окончание табл. 8.3

Варианты	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	–2	4	6	6	4	2	3	1	1	1
b	4	–2	1	1	6	3	1	–1	5	–1
c	1	–1	6	–6	–1	3	4	–2	4	–4

8.10. Найти оптимальные планы задачи

$$f(x) = x_1^3 x_2^2 (ax_1 + bx_2 + c) \to \min(\max),$$

где числа a, b, c заданы в табл. 8.4.

Таблица 8.4

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	–4	–3	–1	–5	–1	–2	–4	–2	–4	–2
b	–1	–1	1	–1	–1	–1	1	–1	–1	1
c	1	9	3	4	7	3	2	8	4	6
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	–5	–1	–1	–3	–4	–3	–2	–9	–2	–2
b	–1	1	–1	1	1	–1	–1	1	–1	1
c	5	2	9	8	5	7	2	3	1	0

8.11. Найти все значения k, при которых точка (1; 0) является экстремальной точкой функции

$$f(x) = k^3 x_1 e^{x_2} - k^2 \ln\left(x_1 + \frac{a-3}{a} x_2\right) + \left((a+b-1)k - b\right)x_1 + kcx_2 + 2bx_1x_2,$$

и определить, функция достигает максимума или минимума, где числа a, b, c заданы в табл. 8.5.

Таблица 8.5

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	5/2	3/2	–1/2	–2	–5/2	–3	–4	–5	–6	5/2
b	1/2	–1/2	1/2	2	5/2	3	4	5	6	–1
c	–5/2	–3/2	7/2	8	19/2	11	14	17	20	–4
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	1	3/2	1	–7/2	–4	7/2	3	2	5/2	1
b	–2	–3	–4	5	6	–3/2	–3	–6	–9/2	–9
c	–4	–4	–4	14	16	–13/2	–7	–8	–15/2	–9

§ 9. ЗАДАЧИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В данном параграфе рассматриваются задачи на условный минимум, т. е. задачи минимизации функций на множествах конечномерного пространства, задаваемых с помощью нелинейных уравнений и неравенств. Отдельно рассмотрены две задачи условной максимизации, встречающиеся в экономике.

9.1. Обобщенное правило множителей Лагранжа

Пусть заданы скалярная функция $f(x)$ и вектор-функции $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$, $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_k(x))$, определенные на $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим задачу условной минимизации при смешанных ограничениях

$$f(x) \to \min, \ x \in X = \{x : g(x) \le 0, \ h(x) = 0\}. \qquad (9.1)$$

Классической задачей на условный минимум называется задача минимизации с ограничениями-равенствами

$$f(x) \to \min, x \in X = \{x : h(x) = 0\}. \qquad (9.2)$$

Будем предполагать, что в задачах (9.1), (9.2) $k < n$. В случае $k \ge n$ система уравнений $h_j(x) = 0$, $j = \overline{1,k}$, либо несовместна ($X = \varnothing$), либо имеет единственное решение, либо некоторые из уравнений — следствие остальных (линейно зависимые уравнения отбрасываются, т. е. k становится меньше n).

Из определения оптимальных планов (см. § 7) следует, что глобально оптимальный план задачи (9.1) является и локально оптимальным (но не наоборот!).

Определение 9.1. Ограничение $g_i(x) \le 0$ называется ***активным*** на плане x^*, если $g_i(x^*) = 0$, и ***пассивным***, если $g_i(x^*) < 0$.

Множество индексов ограничений, активных на плане x, обозначим через $I_а(x) = \{i = \overline{1,m} : \ g_i(x) = 0\}$. Тогда множеством индексов ограничений, пассивных на x, будет множество $I_п(x) = \{1, 2, \ldots, m\} \setminus I_а(x)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Пусть x^0 — локально оптимальный план задачи* (9.1), *f, g_i, $h_j \in C^{(1)}(X)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$, и векторы $\partial h_j(x^0) / \partial x$, $j = \overline{1,k}$, линейно независимы. Тогда система*

$$\begin{gathered} \frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l < 0; \quad \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l < 0, \quad i \in I_а(x^0); \\ \frac{\partial h_j'(x^0)}{\partial x} l = 0, \quad j = \overline{1,k}, \end{gathered} \qquad (9.3)$$

несовместна, т. е. нет векторов $l \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих системе (9.3).

Пример 9.1. Рассмотрим задачу

$$f(x) = x_1^2 - x_2 \to \min,$$
$$g(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 - 34 \le 0,$$
$$h(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

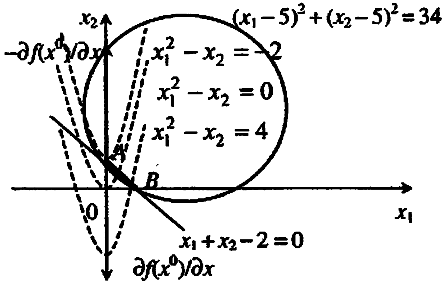


Рис. 9.1

Множество планов $X = \{x \in \mathbf{R}^2\colon\ (x_1-5)^2 + (x_2-5)^2 - 34 \le 0,\ x_1 + x_2 - 2 = 0\}$, представляет собой множество точек отрезка AB (рис. 9.1).

Поскольку множество планов таково, что $x_1 \ge 0$, то градиент $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}$ имеет первую координату $2x_1 \ge 0$, т. е. в направлении вектора $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$ целевая функция возрастает, а в направлении антиградиента $-\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$ убывает. Это означает, что минимум функции $f(x)$ достигается в точке A, т. е. на плане $x^0 = (0;\ 2)$, и $f(x^0) = -2$ ($f_{\max} = f(2;\ 0) = 4$). Ограничение $g(x) \le 0$ активно на плане x^0. На оптимальном плане x^0 подсчитаем градиенты целевой функции и функций ограничений:

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial h(x^0)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим совместность системы (9.3). Имеем

$$\frac{\partial f'(x^0)}{\partial x} l = -l_2 < 0; \ \frac{\partial g'(x^0)}{\partial x} l = -10 l_1 - 6 l_2 < 0, \ \frac{\partial h'(x^0)}{\partial x} l = l_1 + l_2 = 0.$$

Отсюда следует, что $l_1=-l_2$ и $l_1<0$, но, с другой стороны, $10l_1+$ $+6l_2=4l_1>0$, т. е. $l_1>0$. Противоречие. Система (9.3) на оптимальном плане несовместна.

Замечание 9.1. Иногда теорему 9.1 называют геометрическим условием оптимальности. Оказывается, что соотношения (9.3) имеют простую геометрическую интерпретацию. Действительно, система (9.3) определяет три множества: два полупространства (неравенства) и гиперплоскость (равенство). Для оптимального плана x^0 пересечение этих множеств пусто. Для примера 9.1 система (9.3) запишется в виде $-l_2<0$; $-10l_1-6l_2<0$; $l_1+l_2=0$, где $\partial f(x^0)/\partial x=(0;\ -1)$, $\partial g(x^0)/\partial x=(-10;\ -6)$, $\partial h(x^0)/\partial x=(1;\ 1)$. Векторы-градиенты $\partial f(x^0)/\partial x$, $\partial g(x^0)/\partial x$, $\partial h(x^0)/\partial x$ являются нормалями к прямым $-l_2=0$; $-10l_1-6l_2=0$; $l_1+l_2=0$ (рис. 9.2). Полуплоскости, удовлетворяющие неравенствам $-l_2<0$; $-10l_1-6l_2<0$, отмечены штриховкой. Пересечение этих полуплоскостей с прямой l_1+ $+l_2=0$ — пустое множество.

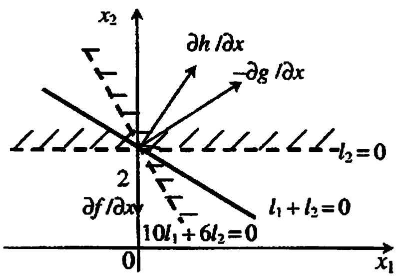


Рис. 9.2

Классический метод исследования задач на условный минимум — ***метод множителей Лагранжа.***

По элементам задачи (9.1) составим обобщенную функцию Лагранжа

$$F(x,\bar{\lambda},\mu)=\lambda_0 f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x)=\lambda_0 f(x)+\lambda' g(x)+\mu' h(x),$$

где $\bar{\lambda}=(\lambda_0,\ \lambda)$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_k)$. Числа λ_0, λ_i, $i=\overline{1,m}$, μ_j, $j=\overline{1,k}$, называют ***множителями Лагранжа***, а вектор $(\bar{\lambda},\mu)$ — ***обобщенным вектором Лагранжа***.

Теорема 9.2 (обобщенное правило множителей Лагранжа). *Для каждого локально оптимального плана* x^0 *задачи* (9.1), f, g_i, $h_j \in C^{(1)}(X)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$, *существует обобщенный вектор Лагранжа* $(\lambda_0^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbf{R}^{m+k+1}$, $\lambda_0^{0^2} + \|\lambda^0\|^2 + \|\mu^0\|^2 > 0$, *такой, что выполняются соотношения:*

1) *условие неотрицательности* $\lambda_0^0 \geq 0, \lambda^0 \geq 0$;

2) *условие стационарности* $\dfrac{\partial F(x^0, \bar{\lambda}^0, \mu^0)}{\partial x} = 0$;

3) *условие дополняющей нежесткости* $\lambda^{0\prime} g(x^0) = 0$.

Замечание 9.2. Достаточными условиями, гарантирующими существование множителей Лагранжа с $\lambda_0^0 = 1$, являются любое из следующих:

1) выпуклость функций $g_i(x)$, $i=\overline{1,m}$, отсутствие ограничений-равенств и существование точки $x^* \in X$ такой, что $g(x^*) < 0$ (условие Слейтсра);

2) линейность функций $g(x)$, $h(x)$;

3) векторы-градиенты $\partial g_i(x^0)/\partial x$, $i \in I_a(x^0)$, $\partial h_j(x^0)/\partial x$, $j=\overline{1,k}$, линейно независимы.

Перечисленные условия называются условиями регулярности множества планов.

***Общая схема решения задачи* (9.1).**

1) Составляем обобщенную функцию Лагранжа.

2) Записываем необходимые условия оптимальности (теорема 9.2), к этим условиям добавляются ограничения-равенства задачи (9.1). Полученная система алгебраических уравнений и неравенств даёт планы (условно стационарные планы) задачи (9.1), которые "подозрительны" на оптимальность. Целесообразно проанализировать случаи, когда $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_0 = 1$ (или λ_0 — любое положительное число). Если выполнено одно из трех условий регулярности, то случай $\lambda_0 = 0$ не рассматривается.

3) Среди найденных условно стационарных планов находим локально оптимальные планы и, если нужно, проводим анализ на глобально оптимальный план.

Пример 9.2. Рассмотрим задачу примера 9.1. Заметим, что обобщенное правило множителей Лагранжа на локально оптимальном плане

$x^0=(0;2)$ справедливо, поскольку для вектора $\bar{\lambda}^0=(\lambda_0^0=1,\ \lambda^0=1/4,$ $\mu^0=5/2)$ все условия теоремы 9.2 выполняются. Действительно,

$$\lambda_0^0>0,\ \lambda^0>0,\ \mu^0>0;\quad \lambda^0 g(x^0)=1/4((-5)^2+(2-5)^2-34)=0;$$

$$\frac{\partial F(x^0,\ \bar{\lambda}^0,\ \mu^0)}{\partial x}=1\cdot\frac{\partial f(x^0)}{\partial x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial g(x^0)}{\partial x}+\frac{5}{2}\cdot\frac{\partial h(x^0)}{\partial x}=$$

$$=1\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-10\\-6\end{pmatrix}+\frac{5}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0.$$

9.2. Классическое правило множителей Лагранжа

При исследовании задач на условный минимум используется классическая функция Лагранжа

$$F(x,\lambda,\mu)=f(x)+\lambda' g(x)+\mu' h(x), \tag{9.4}$$

которая получается из обобщенной функции Лагранжа при $\lambda_0=1$. Как было сказано выше, это возможно лишь при выполнении одного из трех условий регулярности.

Числа λ_i, $i=\overline{1,m}$, μ_j, $j=\overline{1,k}$, как и ранее, называют ***множителями Лагранжа***, а вектор (λ,μ), $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_k)$, — ***вектором Лагранжа***.

Определение 9.2. ***План*** $x^*\in X$ называется ***регулярным***, если векторы-градиенты $\partial g_i(x^*)/\partial x$, $i\in I_a(x^*)$, $\partial h_j(x^*)/\partial x$, $j=\overline{1,k}$, линейно независимы.

Теорема 9.3 (классическое правило множителей Лагранжа). *Пусть x^0 — регулярный локально оптимальный план задачи* (9.1). *Тогда существует единственный вектор Лагранжа* $(\lambda^0,\ \mu^0)$ *такой, что выполняются соотношения:*

1) *условие неотрицательности* $\lambda^0\ge 0$;

2) *условие дополняющей нежесткости* $\lambda^{0\prime} g(x^0)=0$;

3) *условие стационарности* $\dfrac{\partial F(x^0,\lambda^0,\mu^0)}{\partial x}=0.$

Определение 9.3. ***План*** $x^*\in X$, для которого справедливы условия теоремы 9.3, называется ***условно стационарным***.

Таким образом, как следует из теоремы 9.3, локально оптимальные планы задачи (9.1) находятся среди условно стационарных планов.

Рассмотренную выше схему решения задачи (9.1) можно использовать в классическом случае, положив $\lambda_0 = 1$.

Согласно этой схеме решения, находим множество условно стационарных планов, среди которых могут быть неоптимальные. Отсеять неоптимальные планы позволяют условия оптимальности второго порядка.

Определение 9.4. Пусть x^* — условно стационарный план. Тогда если $\lambda_i^* > 0$ $(\lambda_i^* = 0)$, $i \in I_a(x^*)$, то ограничение $g_i(x) \leq 0$, активное на плане x^*, называется ***жестким*** (***мягким***). Обозначим через $I_a^+(x^*) = \{i \in I_a(x^*):\ \lambda_i^* > 0\}$, $I_a^0(x^*) = \{i \in I_a(x^*):\ \lambda_i^* = 0\}$ множества индексов жестких и мягких ограничений на плане x^* соответственно.

В дальнейшем предполагаем, что функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы, т. е. $f, g, h \in C^{(2)}$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 9.4 (необходимые условия оптимальности 2-го порядка). *Пусть x^0 — регулярный локально оптимальный план задачи* (9.1), *для которого справедливы утверждения теоремы 9.3. Тогда для любого вектора $l \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющего системе*

$$\begin{gathered}\frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l \leq 0, \quad i \in I_a^0(x^0), \quad \frac{\partial g_i'(x^0)}{\partial x} l = 0, \quad i \in I_a^+(x^0), \\ \frac{\partial h_j'(x^0)}{\partial x} l = 0, \quad j = \overline{1,k},\end{gathered} \tag{9.5}$$

выполняется неравенство

$$l' \frac{\partial^2 F(x^0, \lambda^0, \mu^0)}{\partial x^2} l \geq 0.$$

Теорема 9.5 (достаточное условие оптимальности). *Пусть условно стационарный план x^* удовлетворяет условию*

$$l' \frac{\partial^2 F(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x^2} l > 0$$

для всех $l \in \mathbf{R}^n$, $l \neq 0$, удовлетворяющих системе (9.5), *в которой x^0 заменен на x^*. Тогда x^* — локально оптимальный план задачи* (9.1).

Пример 9.3. Решить задачу нелинейного программирования

$$\frac{3}{2}x_1^2 + x_2^3 \to \min,\ x_1 + x_2 = 2,\ x_1 \le 5,\ x_2 \le 1. \tag{9.6}$$

Имеем $f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^3$, $h(x) = x_1 + x_2 - 2$, $g_1(x) = x_1 - 5$, $g_2(x) = x_2 - 1$ и задача (9.6) принимает вид

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ g_1(x) \le 0, \quad g_2(x) \le 0, \\ h(x) = 0. \end{gathered} \tag{9.7}$$

Задача (9.7) имеет решение (множество планов X компактно (рис. 9.3), а функция $f(x)$ непрерывна). Заметим, что множество планов задачи регулярно, поскольку ограничения линейны.

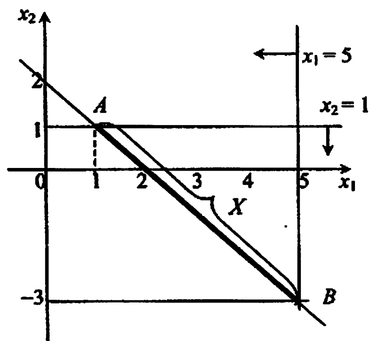


Рис. 9.3

В задаче (9.7) ограничения $g_1(x) \le 0$, $g_2(x) \le 0$ одновременно активными быть не могут, ибо в противном случае не будет удовлетворяться ограничение-равенство (при $x_1 = 5$, $x_2 = 1$ будем иметь $5 + 1 - 2 \ne 0$?!). Таким образом, активными могут быть ограничения: или $g_1(x) = 0$, $h(x) = 0$; или $g_2(x) = 0$, $h(x) = 0$; или $h(x) = 0$.

Составим функцию Лагранжа

$$F(x, \lambda, \mu) = \frac{3}{2}x_1^{\,2} + x_2^{\,3} + \lambda_1(x_1 - 5) + \lambda_2(x_1 - 1) + \mu(x_1 + x_2 - 2).$$

Классическое правило множителей приводит к соотношениям

$$\frac{\partial F(x, \lambda, \mu)}{\partial x_1} = 3x_1 + \lambda_1 + \mu = 0;\ \frac{\partial F(x, \lambda, \mu)}{\partial x_2} = 3x_2^2 + \lambda_2 + \mu = 0;$$

$$\lambda_1 g_1(x) = \lambda_1(x_1 - 5) = 0; \tag{9.8}$$

$$\lambda_2 g_2(x) = \lambda_2(x_2 - 1) = 0, \quad h(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0; \quad \lambda_1 \ge 0, \quad \lambda_2 \ge 0.$$

Возможны ситуации (ограничение-равенство всегда активно):

1) активно ограничение $g_1(x) \le 0$, тогда $\lambda_2 = 0$;

2) активно ограничение $g_2(x) \le 0$, тогда $\lambda_1 = 0$;

3) оба ограничения-неравенства пассивны, тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Решая систему (9.8) в этих ситуациях, найдем условно стационарные планы:

1) $x_1^* = 5, x_2^* = -3, \lambda_1^* = 12, \lambda_2^* = 0, \mu^* = -27$;

2) $x_1^* = 1, x_2^* = 1, \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 0, \mu^* = -3$;

3) $x_1^* = 4, x_2^* = -2, \lambda_1^* = 0, \lambda_2^* = 0, \mu^* = -12$.

Квадратичная форма, соответствующая задаче, имеет вид

$$l' \frac{\partial^2 F(x, \lambda, \mu)}{\partial x^2} l = 3l_1^2 + 6x_2 l_2^2. \tag{9.9}$$

Составим соотношения (9.5) для каждого условно стационарного плана. Для первого плана (второе ограничение пассивно) имеем

$$\frac{\partial g_1'(x^*)}{\partial x} l = (1;\ \ 0)\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = l_1 = 0; \quad \frac{\partial h'(x^*)}{\partial x} l = l_1 + l_2 = 0.$$

Отсюда следует $l_1 = l_2 = 0$. Для второго плана (пассивно первое ограничение) получаем $\dfrac{\partial g_2'(x^*)}{\partial x} l = l_2 \le 0$, $\dfrac{\partial h'(x^*)}{\partial x} l = l_1 + l_2 = 0$. Отсюда $l_1 \ge 0$, $l_2 \le 0$. Для третьего плана (пассивны первое и второе ограничения) будем иметь $\dfrac{\partial h'(x^*)}{\partial x} l = l_1 + l_2 = 0$, откуда получим $l_1 = -l_2$.

Квадратичная форма (9.9) на первом плане равна нулю, на втором плане — определенно положительна (l_1 (или l_2) не равно нулю), на третьем плане — определенно отрицательна. Согласно теореме 9.4, третий план не может быть решением задачи (9.6). Из первых двух планов второй удовлетворяет теореме 9.5, на нем выполняется достаточное условие оптимальности. Таким образом, план $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$ глобально оптимальный, $f(1;\, 1) = \min\limits_{x \in X} f(x) = 3/2 + 1 = 5/2$.

9.3. Некоторые задачи условной максимизации

Приведем условия оптимальности для некоторых задач на условный максимум, которые часто встречаются в математической экономике. Иногда важно оперировать именно с элементами исходной задачи, а не сводить ее к уже рассмотренным, поскольку они имеют определенный экономический смысл.

1. Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \max, \quad h(x) = b, \tag{9.10}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $h \in \mathbf{R}^k$, $b \in \mathbf{R}^k$, $k < n$. Определение регулярности плана такое же, как в п. 9.2.

По задаче (9.10) составим классическую функцию Лагранжа $F(x, \mu) = f(x) + \mu'(b - h(x))$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\mu \in \mathbf{R}^k$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 9.6 (необходимые условия оптимальности). *Пусть x^0 — регулярный оптимальный план задачи* (9.10). *Тогда существует единственный вектор множителей Лагранжа $\mu^0 \in \mathbf{R}^k$ такой, что выполняются условия*:

1) *стационарности* $\dfrac{\partial^2 F(x^0, \mu^0)}{\partial x} = 0$;

2) *неположительности* $l' \dfrac{\partial^2 F(x^0, \mu^0)}{\partial x^2} l \le 0$ *для любых* $l \in \mathbf{R}^n$, *удовлетворяющих равенствам* $\dfrac{\partial h_j'(x^0)}{\partial x} l = 0, \quad j = \overline{1,k}$.

Теорема 9.7 (достаточное условие оптимальности). *Если x^* — условно стационарный план задачи* (9.10) *и μ^* — соответствующий ему вектор множителей Лагранжа, на которых выполняется неравенство* $l' \dfrac{\partial^2 F(x^*, \mu^*)}{\partial x^2} l < 0$ *для любых* $l \in \mathbf{R}^n$, $\|l\| \ne 0$, *удовлетворяющих равенствам* $\dfrac{\partial h_j'(x^*)}{\partial x} l = 0$, $j = \overline{1,k}$, *то* $x^* = x^0$ *— оптимальный план задачи* (9.10).

Пусть $x^0 = x^0(b)$ — оптимальный план и μ^0 — соответствующий ему вектор Лагранжа. Тогда нетрудно показать, что $\mu^0 = \dfrac{\partial f(x^0(b))}{\partial b}$

$(\mu_j^0 = \dfrac{\partial f(x^0(b))}{\partial b_j},\ j = \overline{1,k})$, т. е. множитель Лагранжа μ_j^0 есть мера чувствительности оптимального значения целевой функции $f(x^0(b))$ к изменениям компоненты b_j вектора ограничений b.

2. Теперь рассмотрим задачу

$$f(x) \to \max, \quad g(x) \le b, \quad x \ge 0. \tag{9.11}$$

Составим функцию Лагранжа $F(x,\bar{\lambda}) = f(x) + \lambda'(b - g(x)) + \nu' x$, где $\bar{\lambda} = (\lambda, \nu)$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$, $\nu \in \mathbf{R}^n$. Пусть x^0 — оптимальный план задачи (9.11) и векторы $\dfrac{\partial g_i(x^0)}{\partial x}$, $i \in I_a(x^0)$, линейно независимы (регулярный план). Тогда существуют $\lambda^0 \ge 0$, $\nu^0 \ge 0$ такие, что

$$\frac{\partial F(x^0,\bar{\lambda}^0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x^0)}{\partial x} + \lambda^{0\prime}\frac{\partial g(x^0)}{\partial x} + \nu^0 = 0, \quad \lambda^{0\prime}(b - g(x^0)) = 0, \quad \nu^{0\prime} x^0 = 0.$$

Если ввести функцию Лагранжа в виде $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda'(b - g(x))$, то последнее утверждение можно сформулировать следующим образом.

Теорема 9.8. *Для того чтобы регулярный план x^0 задачи* (9.11) *был оптимальным, необходимо существование такого вектора Лагранжа λ^0, что*

$$\frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial x} \le 0, \quad \frac{\partial F'(x^0, \lambda^0)}{\partial x} x^0 = 0, \quad x^0 \ge 0,$$

$$\lambda^{0\prime}(b - g(x^0)) = 0, \quad \lambda^0 \ge 0. \tag{9.12}$$

Условия (9.12) называют ***условиями Куна — Таккера***. Если в дополнение к условиям теоремы предположить, что функция $f(x)$ вогнута, функции $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, выпуклы, тогда для задачи (9.11) справедлива теорема Куна — Таккера о седловой точке: $F(x, \lambda^0) \le F(x^0, \lambda^0) \le F(x^0, \lambda)$ $\forall\, x \ge 0,\ \lambda \ge 0$.

Как и для задачи (9.10), множители Лагранжа в задаче (9.11) можно истолковать как характеристики изменения значения целевой функции при изменении компонент вектора ограничений b. Действительно, на оптимальной паре x^0, λ^0 задачи (9.11) справедливы равенства

$$\lambda_i^0 = \frac{\partial f(x^0(b))}{\partial b_i}, \quad i \in I_a(x^0).$$

Такого вида результаты важны при исследовании задач чувствительности, которые часто встречаются в экономике.

Упражнения и задания

9.1. Решить следующие экстремальные задачи:

1. $f(x) = x_1 x_2 \to \text{extr},$
$g(x) = 3x_1 + x_2 - 6 = 0.$

2. $f(x) = e^{x_1 x_2} \to \text{extr},$
$g(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0.$

3. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 \to \text{extr},$
$g(x) = 2x_1 + x_2 - 1 = 0.$

4. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3^2 \to \text{extr},$
$g(x) = -x_1 + x_3 - 1 = 0.$

5. $f(x) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \to \text{extr},$
$g(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$

6. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \to \text{extr},$
$g_1(x) = x_1 + x_2 - x_4 - 6 = 0;$
$g_2(x) = x_1 + x_3 + x_4 - 9 = 0.$

7. $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \text{extr},$
$g(x) = x_1 + x_2 - a = 0.$

8. $f(x) = x_1^2 - x_2^2 \to \text{extr},$
$g(x) = x_1 - x_2 - 10 = 0.$

9. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3 \to \text{extr},$
$g(x) = x_1^3 + x_2^3 - 1 = 0.$

10. $f(x) = 2x_1 \to \text{extr},$
$g(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 = 0.$

11. $f(x) = 4x_1 x_2 \to \text{extr},$
$g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0.$

12. $f(x) = 2x_1^3 + 2x_2^3 + 3x_1 + 3x_2 \to \text{extr},$
$g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$

13. $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to \text{extr},$
$g(x) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} - 1 = 0.$

14. $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \text{extr},$
$g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - 1 = 0.$

15. $f(x) = x'Dx \to \text{extr}, \ D' = D,$
$g(x) = \|x\|^2 - 1 = 0.$

16. $f(x) = c'x + \frac{1}{2}x'Dx \to \text{extr}, \ D > 0.$
$g(x) = Ax - b = 0, \quad \text{rank}\, A = m.$

17. $f(x) = x_1 \to \min,$

$g(x) = 9x_1^3 - x_2^2 = 0.$

18. $f(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \to \text{extr},$

$g(x) = 2x_1^3x_2^2x_3 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 17 = 0.$

19. $f(x) = x_2 \to \min,$

$g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0,$

$g_2(x) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0.$

20. $f(x) = x_1 \to \text{extr},$

$x \in X = \{x:\ x_1^n + x_2^m = 0,\ n,\ m$ — натуральные числа$\}$. При каких n и m классическое правило множителей Лагранжа не действует?

21. $f(x) = \|Bx + d\|^2 \to \text{extr},\ B - k \times n,\ \ \operatorname{rank} B = n,\ \ d \in \mathbf{R}^k,$

$g(x) = Ax - b = 0,\ \ A - m \times n,\ \ \operatorname{rank} A = m < n.$

9.2. Решить следующие задачи:

1. Найти расстояние между началом координат и кривой $x_2 = 1/x_1^2$.
2. Среди всех прямоугольных параллелепипедов, сумма ребер которых имеет заданную длину l, найти параллелепипед наибольшего объема.
3. Данное положительное число a представить в виде суммы n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
4. Каковы должны быть размеры прямоугольного бассейна данного объема V, при которых на облицовку боковой поверхности и дна потребуется наименьшее количество материала?
5. Среди всех вписанных в данный круг радиусом R прямоугольников найти тот, площадь которого наибольшая.
6. Среди треугольных пирамид с заданным основанием и высотой найти ту, которая имеет наименьшую площадь боковой поверхности.
7. Среди цилиндров, вписанных в единичный шар, найти цилиндр с максимальным объемом (*задача Кеплера*)[1].
8. На данной прямой найти точку C, чтобы сумма расстояний от C до точек A и B, лежащих по одну сторону от прямой, была минимальной (*задача Герона*).
9. Даны угол и точка внутри него. Через эту точку провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.
10. Найти расстояние от точки до эллипса. Сколько нормалей можно провести из точки к эллипсу (*задача Аполлония*)?
11. Каковы должны быть размеры открытого сверху цилиндрического бака максимальной вместимости, если для его изготовления отпущено 27π м^2 материала?
12. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине b и квадрату высоты h. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $2\sqrt{3}$ м.
13. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью 16π м^3. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

---

[1] Эта задача была поставлена и решена геометрически Кеплером в 1615 г. в "Стереометрии винных бочек".

14. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

15. Найти стороны прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в эллипсоид $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$, с ребрами, параллельными осям координат.

16. Вырезанный из круга сектор с центральным углом α и площадью S свернут в коническую поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

17. В данный треугольник ABC вписать параллелограмм $ADEF$ ($DE \| AC$, $FE \| AB$) наибольшей площади (*задача Евклида*).

18. Найти высоту H цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

19. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

20. Полотняный шатер объемом V имеет форму кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна?

21. Проволокой, длина которой l м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

22. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиусом a, со стороной, лежащей на диаметре.

23. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный на берегу в 15 км от ближайшей к кораблю точке берега. Скорость посыльного при движении пешком 5 км/ч, а на лодке — 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь за кратчайшее время?

24. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если задана сумма длин его катетов (*задача Ферма*).

25. Найти в плоскости такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до трех заданных точек была минимальной (*задача Штейнера*).

26. Свет, исходящий из точки A и попадающий в точку B, распространяется по траектории, для прохождения которой требуется минимум времени (*принцип Ферма*). Точки A и B расположены в различных оптических средах, разделенных плоскостью. В первой среде скорость распространения света v_1, а во второй — v_2. Вывести закон преломления света, т. е. прохождение его из A в B (*задача Снеллиуса*).

27. Среди шаровых сегментов с заданной площадью сферической поверхности найти тот, объем которого наибольший (*задача Архимеда*).

28. Найти наименьшее значение суммы a^2+b^2, если a и b — числа, при которых уравнение $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ имеет хотя бы один действительный корень.

9.3. Решить задачу

$$f(x)=ax_1^2+2x_1x_2+bx_2^2 \to \min(\max),$$
$$g(x)=4x_1^2+cx_2^2-9=0,$$

где числа a, b, c заданы в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	3	1	1	1	3	5	3	7	5
b	1	4	1	2	1	2	4	5	9	2
c	3	5	2	6	1	2	3	6	5	1
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	5	5	9	9	3	7	13	7	9	7
b	8	3	3	7	6	4	4	11	5	13
c	6	2	1	3	7	2	1	6	2	7

9.4. Решить задачу

$$f(x) = ax_1^3 + bx_2^3 \to \min(\max),$$
$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 - c^2 = 0,$$

где числа a, b, c заданы в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	3	7	1	7	3	3	4	1	5	3
b	2	3	2	2	4	1	3	4	2	5
c	2	3	5	1	2	3	4	5	2	1
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	1	4	5	2	2	2	2	8	1	3
b	8	1	3	5	1	3	7	1	3	7
c	1	5	4	3	2	4	1	2	5	3

9.5. Найти все значения m, при которых точка (0; 1) является точкой минимума (максимума) для функции $f(x) = \ln\left(ax_1 + 2m^2x_2\right) - mbx_1x_2 + \frac{b}{m}x_1 + cx_2$ при условии $x_1^4e^{x_2} + x_2^2e^{x_1} - 1 = 0$, где числа a, b, c заданы в табл. 9.3.

Таблица 9.3

Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3
b	4	–4	–1	1	–2/3	3	–3	–3/4	3/4	–1/2
c	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
Варианты	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
b	2	–2	–1/2	1/2	–1/3	1	–1	–1/3	1/3	–1/6
c	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

9.6. Решить следующие задачи нелинейного программирования и, где возможно, проиллюстрировать решение графически.

1. $f(x)=2x_1-x_2\to\text{extr},$
$$x_1^2-x_2\le 0,$$
$$x_1+x_2^2\le 4.$$

2. $f(x)=x_1-2x_2\to\text{extr},$
$$ax_1+bx_2^3\le 0,$$
$$x_1\ge 0;\quad a,\ b\in\mathbf{R}.$$

3. $f(x)=x_1^2+(x_2-2)^2\to\text{extr},$
$$x_1-x_2^2=0,$$
$$x_2\le 0.$$

4. $f(x)=-x_1x_2\to\text{extr},$
$$x_1^2+x_2^2\le 1,$$
$$x_1\ge 0.$$

5. $f(x)=x_1+x_2-x_1^2\to\text{extr},$
$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\le 1.$$

6. $f(x)=x_1^2+x_2^2\to\text{extr},$
$$x_1^4-x_2\ge 0.$$

7. $f(x)=(x_1-1)^2+x_2^2\to\text{extr},$
$$(x_1-2)^2+4x_2^2\ge 1.$$

8. $f(x)=x_1x_2\to\text{extr},$
$$x_1^2+4x_2^2\ge 4.$$

9. $f(x)=(x_1-7)(x_2-1)\to\text{extr},$
$$x_1+2x_2\le 19,$$
$$x_1+x_2\ge 9,$$
$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$$

10. $f(x)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\to\text{extr},$
$$x_1+x_2\le 9,$$
$$x_1+2x_2\le 12,$$
$$x_1\ge 0,\quad x_2\le 0.$$

11. $f(x)=x_1^2-x_1-x_2\to\min,$
$$x_1^2+3x_2^2+2x_1\le 3,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\le 0.$$

12. $f(x)=2x_1^2+2x_1+4x_2-3x_3\to\min,$
$$8x_1-5x_2+4x_3\le 40,$$
$$-2x_1+x_2-x_3=0.$$

13. $f(x)=3x_1+4x_2\to\max,$
$$x_1^2+x_2^2\le 25,$$
$$x_1x_2\ge 4,$$
$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0.$$

14. $f(x)=x_1^2-6x_1-x_2\to\text{extr},$
$$x_1+2x_2\le 15,$$
$$2x_1+3x_2\le 24,$$
$$3x_1+2x_2\le 24,$$
$$0\le x_2\le 2.$$

15. $f(x)=2x_1^2+2x_2^2-x_1x_2-x_1-4x_2\to\min,$
$$x_1+2x_2\le 12,$$
$$x_1+x_2^2=4.$$

16. $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\to\max,$
$$x_1+x_2+x_3\le 15,$$
$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,3}.$$

17. $f(x)=-x_1^2-x_2^2-x_3^2\to\max,$
$$x_1+x_2+x_3=3,$$
$$x_1-x_2+2x_3\le 5.$$

18. $f(x)=x_1\to\min,$
$$x_1^2+x_2^2\le 1,$$
$$x_1^3+x_2^3=1.$$

19. $f(x) = x_1 x_2 x_3 \to \min,$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 0.$$

20. $f(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 \to \max,$
$$x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \le 1,$$
$$x_2 \le 0.$$

21. $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \to \max,$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le 1.$$

22. $f(x) = 3x_1 - x_2 + x_3^2 \Rightarrow \max,$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 0,$$
$$-x + 2x_2 + x_3^2 = 0.$$

23. $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to \min,$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_1 \ge 0.$$

24. $f(x) = x_1 x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \to \text{extr},$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 4,$$
$$x_3 \le 0.$$

25. $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \text{extr},$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 6,$$
$$3x_1 - 2x_2 \le 18,$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 8,$$
$$x_1 \ge 9/2,\ x_2 \ge 0.$$

26. $f(x) = x_1 x_2 \to \text{extr},$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 12,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 24,$$
$$-3x_1 + 4x_2 \le 12,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

27. $f(x) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to \text{extr},$
$$3x_1 + 2x_2 \ge 12,$$
$$x_1 - x_2 \le 6,$$
$$x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

28. $f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \text{extr},$
$$x_1 + x_2 = 180,$$
$$x_1 - x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

29. $f(x) = e^{x_1 - x_2} - x_1 - x_2 \to \min,$
$$x_1 + x_2 \le 1,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

30. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 \to \text{extr},$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$
$$2x_1 - 3x_2 \le 12.$$

31. $f(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \text{extr},$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 25,$$
$$x_1x_2 \ge 4,$$
$$0 \le x_2 \le 4.$$

32. $f(x) = 4x_1 + 3x_2 \to \max,$
$$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 \le 34,$$
$$x_1x_2 - 2x_1 \ge 1,$$
$$x_2 \le 6.$$

33. $f(x)=x_1x_2 \to \text{extr},$
$$x_1^2+2x_1+x_2^2-2x_2 \le 14,$$
$$2x_1+x_2 \le 10,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

34. $f(x)=x_1^2+x_2 \to \min,$
$$x_1^2+x_2^2=9,$$
$$-x_1-x_2^2 \ge -1,$$
$$-x_1-x_2 \ge -1.$$

35. $f(x)=x_1x_2x_3 \to \text{extr},$
$$2x_1x_2+x_2x_3 \le 12,$$
$$2x_1-x_2=8.$$

36. $f(x)=x_1x_2+x_2x_3 \to \text{extr},$
$$x_1+x_2=4,$$
$$x_2+x_3 \ge 4.$$

37. $f(x)=3x_1^2+2x_1+2x_2^2+4x_2x_3 \to \text{extr},$
$$x_1^2+2x_2^2 \le 19,$$
$$x_1+x_2x_3=11.$$

38. $f(x)=x_1x_2x_3 \to \text{extr},$
$$x_1+x_2+x_3 \le 5,$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=9.$$

39. $f(x)=x_1^2+x_2 \to \min,$
$$-x_1^2-x_2^2+9 \ge 0,$$
$$-x_1-x_2+1 \ge 0.$$

40. $f(x)=x_1^3-3x_1x_2+4 \to \min,$
$$5x_1+2x_2 \ge 18,$$
$$2x_1+x_2^2=5.$$

41. $f(x)=-5x_1^2+x_2^2 \to \min,$
$$\frac{x_1^2}{x_2^2}-\frac{1}{x_2} \le -1,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

42. $f(x)=100x_1+\dfrac{200}{x_1x_2} \to \min,$
$$2x_2+\frac{300}{x_1x_2}-\frac{1}{x_2} \le 1,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

43. $f(x)=(1/4)x_1^4-(1/2)x_1^2-x_2 \to \min,$
$$x_1^2+x_2^2=4,$$
$$x_1-x_2 \le 2.$$

44. $f(x)=x_2^2 \to \min,$
$$-x_1^3+x_2^3 \ge 0,$$
$$x_1^3+x_2^3 \ge 0,$$
$$x_1^2+x_2^2+2x_2 \ge 0.$$

45. $f(x)=100(x_2-x_1^2)+(1-x_1)^2 \to \min, \quad x_1^2+x_2^2 \le 2.$

46. $f(x)=x_1^2+4x_2^2-4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3 \to \text{extr},$
$$2x_3^2+3x_1^2+6x_2^2 \le 1.$$

47. $f(x)=x_1^2x_2+x_2^2x_1+x_1x_2x_3+x_3^2 \to \text{extr},$
$$x_1+x_2+x_3 \le 15,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0.$$

48. $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1-2x_2-2x_3+10\to\min,$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 4,$$
$$x_3\ge 0.$$

49. $f(x)=x_1^2+(x_2-1)^2+x_3^2+(x_4-1)^2\to\min,$

$$2x_1+x_2+x_3-x_4\ge 2,$$
$$x_4\ge 0.$$

50. $f(x)=\sqrt{(x_1-2)^2+(x_2-1)^2+x_3^2+(x_4-1)^2}\to\min,$

$$2x_1+x_2+x_3+x_4\le 1.$$

9.7. В следующих задачах требуется: *а*) найти решение графическим методом; *б*) записать условия Куна — Таккера.

1. $f(x)=6x_1-2x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2\to\max,$

$$3x_1+4x_2\le 6,$$
$$-x_1+4x_2^2\le 2,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

2. $f(x)=3x_1x_2-x_2^3\to\max,$

$$2x_1+5x_2\ge 20,$$
$$x_1-2x_2=5,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

3. $f(x)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2\to\max,$

$$x_1+2x_2\le 8,$$
$$2x_1-x_2\le 12,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4. $f(x)=ax_1^2+bx_1x_2\to\max,$

$$x_1^2+cx_2^2\le 1,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

5. $f(x)=x_1+2x_2\to\max,$

$$3x_1^2+x_2^2\le 1,$$
$$x_1-8x_2\le -1,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

6. $f(x)=-x_1^2-x_2^2-2x_3^2+2x_2+3x_3\to$
$\to\max,$

$$x_1+x_2+x_3\le 18,$$
$$x_2\le 12,$$
$$x_1+2x_3\le 14,$$
$$x_i\ge 0,\quad i=\overline{1,3}.$$

7. $f(x)=x_2-x_1^2+6x_1\to\max,$

$$2x_1+3x_2\le 24,$$
$$x_1+2x_2\le 15,$$
$$3x_1+2x_2\le 24,$$
$$x_2\le 4,$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

8. $f(x)=-(x_1-3)^2-(x_2-4)^2\to\max,$

$$3x_1+2x_2\ge 7,$$
$$-10x_1+x_2\ge -8,$$
$$18x_1-4x_2\ge -12,$$
$$x_1\ge 1/2,$$
$$x_2\ge 3/2.$$

Глава 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 10. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

В данном параграфе приводится один из наиболее известных и чаще всего применяемых методов решения задач дискретной оптимизации (на множествах, состоящих из конечного числа элементов) — метод ветвей и границ.

10.1. Постановка задачи. Основные определения

Рассматривается задача минимизации скалярной функции $f(x)$ на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, состоящем из конечного числа элементов:

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \subset \mathbf{R}^n, \quad X \text{ — конечное множество.} \tag{10.1}$$

Задачи такого типа называются ***задачами дискретного программирования***. С математической точки зрения эта задача кажется тривиальной: достаточно подсчитать значение целевой функции $f(x)$ в каждой точке множества X и выбрать минимальное. Однако при достаточно большом количестве элементов в множестве X этот путь не эффективен.

Рассмотрим другой подход к решению задачи, основанный на такой организации решения, при которой на каждом шаге отбрасываются подмножества множества X, состоящие из заведомо неоптимальных планов. Эта идея и положена в основу метода ветвей и границ. Опишем основные моменты метода.

Алгоритмом дробления множества X называют правило, согласно которому на первом шаге разбивается множество X на несколько подмножеств и формируется список S_1 получившихся при разбиении подмножеств (***список первого шага***). Далее, согласно этому же правилу, разбиваются одно или несколько подмножеств списка S_1 и формируется ***список второго шага*** S_2, полученный из вновь образованных подмножеств и элементов списка S_1, не подвергшихся разбиению. Это правило действует до тех пор, пока элементами разбиения не станут отдельные планы.

Выбор элементов для разбиения из ***списка k-го шага*** S_k производится по определенным правилам, которые описаны в п. 10.2, 10.3.

Числовую функцию ξ, определенную на списках любого шага, называют ***системой оценок дробления***. Значение этой функции на любом элементе X_i списка называют ***оценкой множества*** X_i.

Методом ветвей и границ для решения задачи (10.1) называют алгоритм дробления множества X и связанную с ним систему оценок дробления ξ, удовлетворяющую следующим условиям:

1) оценка любого подмножества не превосходит минимального значения целевой функции на этом подмножестве;

2) оценка подмножества, полученного при разбиении, не меньше оценки того множества, из которого оно получено при разбиении;

3) оценка одноэлементного множества равна значению целевой функции на этом элементе.

Оценку пустого множества полагают равной $+\infty$.

Реализация метода ветвей и границ осуществляется по двум основным схемам: полного и одностороннего ветвления.

10.2. Схема полного ветвления

На первом шаге вычисляется оценка исходного множества $\xi(X)$. В соответствии с алгоритмом дробления разбивается множество X на подмножества: $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i,\ X_i \cap X_j = \varnothing,\ i \neq j$, т. е. формируется список $S_1 = \{X_1, ..., X_m\}$. На втором шаге подсчитываем оценки элементов списка S_1: $\xi(X_i),\ i = \overline{1,m}$. Для разбиения выбирается множество X_{i_0} с минимальной оценкой. Если таких множеств несколько, то выбирается любое. К множеству X_{i_0} применяется алгоритм дробления и формируется список второго шага $S_2 = \left\{X_i,\ i = \overline{1,m},\ i \neq i_0,\ X_{i_0 j},\ j = \overline{1,m_{i_0}}\right\}$ и т. д. Таким образом, на k-м шаге из списка S_{k-1} выбирается множество с минимальной оценкой и подвергается разбиению, в результате чего получаем список S_k, элементами которого являются вновь полученные подмножества и элементы списка S_{k-1}, не подвергшиеся разбиению.

Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет получено одноэлементное подмножество, оценка которого не превосходит оценок всех множеств списка последнего шага. Согласно свойствам 1—3 метода ветвей и границ, этот элемент (план x'^0) и будет решением задачи (10.1).

10.3. Схема одностороннего ветвления

В отличие от предыдущего пункта, в данной схеме элемент для разбиения выбирается не из всего списка предыдущего шага, а только из вновь полученных на предыдущем шаге. Процесс осуществляется до получения хотя бы одного одноэлементного подмножества, минимальную оценку которого обозначим через r_1. Запоминаем это число и элемент, на котором оно получено.

При дальнейшей реализации схемы одностороннего ветвления из списка очередного шага исключаются все подмножества, имеющие оценку не меньше r_1, а из остальных подмножеств списка выбирается элемент с минимальной оценкой и подвергается разбиению в соответствии со схемой одностороннего ветвления. В отличие от получения числа r_1, на каждом шаге из списка исключаются подмножества, имеющие оценку не меньше r_1. Процедура заканчивается либо получением нового числа $r_2 < r_1$, либо обрывается. В первом случае поступаем, как и после получения числа r_1, только теперь на каждом шаге исключаются подмножества с оценкой не меньше r_2. Во втором случае из оставшихся элементов последнего списка выбирается подмножество с минимальной оценкой и продолжается разбиение в соответствии со схемой одностороннего ветвления.

Вычисления продолжаются до получения числа r_k, при этом будут исключены все подмножества списка с оценкой не меньше r_k. Число r_k и есть минимальное значение целевой функции, а элемент x^0, на котором оно получено, — оптимальный план задачи (10.1).

Как видно из определения метода ветвей и границ и приведенных схем реализации этого метода, он дает лишь общую схему действий. При решении конкретных задач учитывается их специфика. Успех решения зависит также от опыта того, кто решает задачу.

При решении некоторых задач часто расширяют дискретную задачу (10.1) до "непрерывной", т. е. заменяют дискретное множество X "непрерывным" $\overline{X}$ и в качестве оценки множества X берут минимальное значение целевой функции на множестве $\overline{X}$.

10.4. Задача целочисленного линейного программирования

Метод ветвей и границ впервые был применен к решению задач целочисленного линейного программирования.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x)=c'x \to \max,\ \ Ax \le b,\ \ x \ge 0,\, x_i \in Z,\ \ i=\overline{1,n}. \tag{10.2}$$

Расширим дискретное множество $X=\{x\in \mathbf{R}^n:\ Ax\le b,\ \ x\ge 0,\ \ x_i\in Z,\ i=\overline{1,n}\}$, до "непрерывного" $\overline{X}=\{x\in \mathbf{R}^n:\ Ax\le b,\ x\ge 0\}$.

Число

$$\xi(X)=\max_{x\in \overline{X}} c'x \tag{10.3}$$

будет оценкой множества X (заметим, что при определении метода ветвей и границ для задачи (10.2) в свойствах 1—3 минимум заменяется на максимум, а знаки неравенств заменяются на противоположные). Если решение $\overline{x}^0$ задачи (10.3) является целочисленным, то оно будет решением и задачи (10.2). Округление $\overline{x}^0$, т. е. замена одним из ближайших целочисленных векторов, не всегда приводит к хорошему результату, более того, иногда этот вектор не является планом задачи (10.2).

Пусть $\overline{x}_{i_1}^0$ — нецелочисленная координата вектора $\overline{x}^0$. Множество X разбиваем на два подмножества: $X_1=\{x\in X:\ x_{i_1}\le[\overline{x}_{i_1}^0]\}$, $X_2=\{x\in X:\ x_{i_1}\ge[\overline{x}_{i_1}^0]+1\}$ (здесь $[a]$ — целая часть числа a). Расширенные множества X_1, X_2 до "непрерывных" имеют вид $\overline{X}_1=\{x\in \overline{X}:\ x_{i_1}\le[\overline{x}_{i_1}^0]\}$, $\overline{X}_2=\{x\in \overline{X}:\ x_{i_1}\ge[\overline{x}_{i_1}^0]+1\}$. Оценки множеств X_1, X_2 равны

$$\xi(X_1)=\max_{x\in \overline{X}_1} c'x, \tag{10.4}$$

$$\xi(X_2)=\max_{x\in \overline{X}_2} c'x. \tag{10.5}$$

Задачи (10.4), (10.5) отличаются от задачи (10.3) дополнительным ограничением (для задачи (10.4): $x_{i_1}\le[\overline{x}_{i_1}^0]$; для задачи (10.5): $x_{i_1}\ge[\overline{x}_{i_1}^0]+$ $+1$). Поэтому их решают обычно двойственным симплекс-методом, взяв в качестве начального базисного псевдоплана базисный план, полученный при решении задачи (10.3). Дальнейшее решение осуществляется в соответствии со схемой полного или одностороннего ветвления.

Замечание 10.1. Если какое-либо множество пусто, то его оценка равна $-\infty$.

Замечание 10.2. Если на последнем шаге окажется, что все множества списка пустые, то вычисления прекращаются.

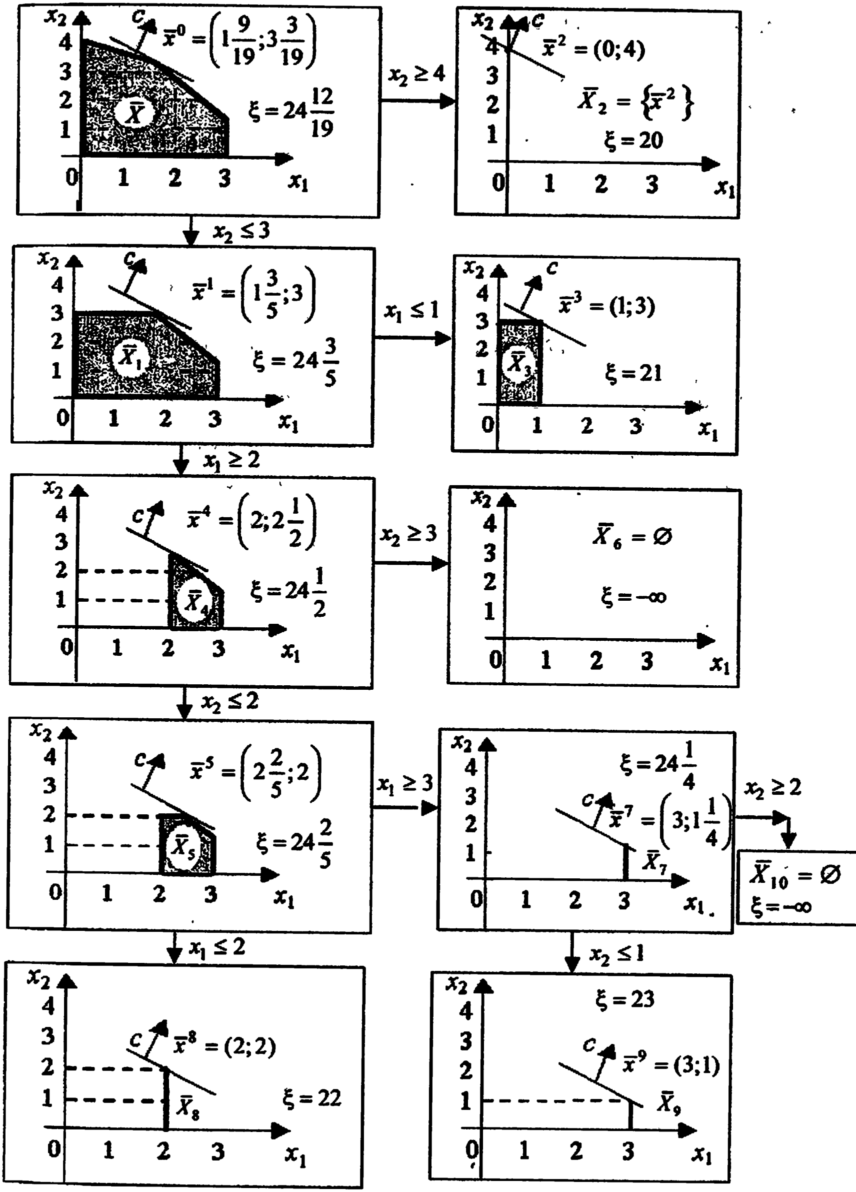
Замечание 10.3. Если для какого-то множества X_i оценка достигается на целочисленном плане x^*, тогда это множество разбивают на два подмножества: $X_i^1 = \{x^*\}$, $X_i^2 = X_i \setminus X_i^1$ и полагают $\xi(X_i^1) = \xi(X_i^2) = \xi(X_i)$. В дальнейшем оба эти множества не подлежат разбиению.

Пример 10.1. Покажем применение метода к решению следующей задачи:

$$\varphi = 6x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 28, \end{cases}$$
$$0 \le x_1 \le 3, \quad x_2 \ge 0, \;\; x_1, x_2 \in \mathbf{Z}.$$

При решении задачи используем схему полного ветвления. На рис. 10.1 приведены результаты решения задач на каждой итерации с помощью графического метода. Поясним решение. Список нулевого шага $S_0 = \{X\}$ (на рис. 10.1 указаны расширенные множества $\overline{X}_i$). Решение "непрерывной" задачи дает оптимальный план $\overline{x}^0 = \left(1\frac{9}{19};\ 3\frac{3}{19}\right)$. Оценка множества X равна $\xi(X) = 24\frac{12}{19}$. Оптимальный план не является целочисленным, поэтому множество X разбиваем на два подмножества: $X_1 = \left\{x \in X : x_2 \le \left[3\frac{3}{19}\right] = 3\right\}$ и $X_2 = \{x \in X : x_2 \ge 4\}$, т. е. $S_1 = \{X_1, X_2\}$. Множество X_2 состоит из одной точки $\overline{x}^2 = (0;\ 4)$; $\xi(X_2) = 20$. Оптимальный план для решения задачи на множестве $\overline{X}_1$ равен $\overline{x}^1 = \left(1\frac{3}{5};\ 3\right)$, оценка $\xi(X_1) = 24\frac{3}{5}$. Поскольку оценка множества X_1 больше оценки множества X_2 (задача на максимум!), то разбиваем множество X_1 на подмножества X_3 и X_4: $X_3 = \{x \in X_1 : x_1 \le 1\}$, $X_4 = \{x \in X_1 : x_1 \ge 2\}$. Список этого шага $S_2 = \{X_2, X_3, X_4\}$. Продолжение решения представлено на рис. 10.1.

Оптимальным планом исходной задачи является точка $\overline{x}^9 = (3;\ 1) = x^0$. Максимальное значение целевой функции исходной задачи равно $\varphi_{\max} = \xi(X_9) = 23$. Как видим, округление $\overline{x}^0$ до целых чисел дало бы точку $x^* = (1; 3)$, для которой $\varphi(x^*) = 21 < 23 = \varphi(x^0)$.



$\bar{x}^0 = \left(1\frac{9}{19}; 3\frac{3}{19}\right)$
$\bar{X}$
$\xi = 24\frac{12}{19}$
$x_2 \geq 4$
$\bar{x}^2 = (0;4)$
$\bar{X}_2 = \{\bar{x}^2\}$
$\xi = 20$
$x_2 \leq 3$
$\bar{x}^1 = \left(1\frac{3}{5}; 3\right)$
$\bar{X}_1$
$\xi = 24\frac{3}{5}$
$x_1 \leq 1$
$\bar{x}^3 = (1;3)$
$\bar{X}_3$
$\xi = 21$
$x_1 \geq 2$
$\bar{x}^4 = \left(2; 2\frac{1}{2}\right)$
$\bar{X}_4$
$\xi = 24\frac{1}{2}$
$x_2 \geq 3$
$\bar{X}_6 = \varnothing$
$\xi = -\infty$
$x_2 \leq 2$
$\bar{x}^5 = \left(2\frac{2}{5}; 2\right)$
$\bar{X}_5$
$\xi = 24\frac{2}{5}$
$x_1 \geq 3$
$\xi = 24\frac{1}{4}$
$\bar{x}^7 = \left(3; 1\frac{1}{4}\right)$
$\bar{X}_7$
$x_2 \geq 2$
$\bar{X}_{10} = \varnothing$
$\xi = -\infty$
$x_1 \leq 2$
$\bar{x}^8 = (2;2)$
$\bar{X}_8$
$\xi = 22$
$x_2 \leq 1$
$\xi = 23$
$\bar{x}^9 = (3;1)$
$\bar{X}_9$

Рис. 10.1

Замечание 10.4. Согласно замечанию 10.3, необходимо еще разбить множества X_3, X_8 и X_9 на два каждое: $X_3=X_3^1\cup X_3^2$, $X_8=X_8^1\cup X_8^2$, $X_9=X_9^1\cup X_9^2$, где $X_3^1=\{\overline{x}^3\}$, $X_3^2=X_3\setminus X_3^1$, $X_8^1=\{\overline{x}^8\}$, $X_8^2=X_8\setminus X_8^1$, $X_9^1=\{\overline{x}^9\}$, $X_9^2=X_9\setminus X_9^1$, причем $\xi(X_3^1)=\xi(X_3^2)=\xi(X_3)=21$, $\xi(X_8^1)=$ $=\xi(X_8^2)=\xi(X_8)=22$, $\xi(X_9^1)=\xi(X_9^2)=\xi(X_9)=23$. На рис. 10.1 эти подмножества не представлены.

Задания

10.1. Решить задачи 1.17, добавив к ограничениям условие целочисленности компонент плана.

10.2. Решить следующие задачи, считая x_i целыми числами, $i=1, 2$:

1.
$$3x_1+x_2\to\max,\quad \begin{cases}2x_1+x_2\le 4,\\ x_1+2x_2\le 6,\end{cases}\quad -1\le x_1\le 3/2,\quad -2\le x_2\le 13/4.$$

2.
$$5x_1+2x_2\to\max,\quad \begin{cases}-2x_1+x_2\le 3,\\ x_1+x_2\le 4,\end{cases}\quad -1\le x_1\le 3,\quad 1/2\le x_2\le 5/2.$$

3.
$$3x_1+2x_2\to\max,\quad \begin{cases}x_1+x_2\le 3,\\ -2x_1+2x_2\le 3,\end{cases}\quad -1\le x_1\le 5/2,\quad -1\le x_2\le 3/2.$$

4.
$$-x_1+3x_2\to\max,\quad \begin{cases}x_1+2x_2\le 6,\\ -x_1+3x_2\ge -3,\end{cases}\quad -1\le x_1\le 7/2,\quad -3/2\le x_2\le 5/2.$$

5.
$$2x_1+x_2\to\max,\quad \begin{cases}x_1+3x_2\ge 3,\\ x_1-x_2\ge -2,\end{cases}\quad -1/2\le x_1\le 2,\quad 1/2\le x_2\le 7/2.$$

6.
$$3x_1+x_2\to\max,\quad \begin{cases}-2x_1+3x_2\le 3,\\ x_1-x_2\le 1,\end{cases}\quad -3/2\le x_1\le 2,\quad -3/2\le x_2\le 3/2.$$

7.
$$x_1+2x_2\to\max,\quad \begin{cases}5x_1+4x_2\le 20,\\ 3x_1+4x_2\ge 12,\end{cases}\quad -2\le x_1\le 2,\quad 2\le x_2\le 6.$$

8.
$$x_1+x_2\to\max,\quad \begin{cases}3x_1+5x_2\le 15,\\ -x_1+2x_2\le -2,\end{cases}\quad -3\le x_1\le 3,\quad -1/5\le x_2\le 7/2.$$

9. $-2x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -3x_1 + 4x_2 \le 14, \end{cases}$$
$-5 \le x_1 \le 2,$
$-3 \le x_2 \le 5/2.$

10. $5x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \end{cases}$$
$-3 \le x_1 \le 3,$
$-5 \le x_2 \le 1/2.$

10.5. Задача о рюкзаке

Задача о рюкзаке имеет следующую интерпретацию. Пусть имеется n неделимых предметов с номерами i, $i = \overline{1,n}$. Вес i-го предмета равен p_i, его ценность c_i. Требуется выбрать совокупность предметов с минимальным общим весом при условии, что общая ценность груза не меньше заданной величины c.

Построим математическую модель задачи. Введем переменные x_i, $i = \overline{1,n}$, которые принимают лишь два значения: $x_i = 1$, если данный предмет укладывается в рюкзак, $x_i = 0$ — в противном случае. Тогда математическая модель ***задачи о рюкзаке*** имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge c, \quad x_i = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1,n}. \tag{10.6}$$

Применим к решению этой задачи метод ветвей и границ. Опишем алгоритм дробления и связанную с ним систему оценок дробления. Пусть X — множество планов задачи (10.6). Расширим его до "непрерывного" $\overline{X} = \{x:\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ge c,\ 0 \le x_i \le 1,\ i = \overline{1,n}\}$, т. е. будем считать, что все предметы допускают произвольную делимость без потери ***относительной ценности*** (т. е. ценности на единицу веса). В качестве оценки множества X рассмотрим следующую величину:

$$\xi(X) = \min f(x), \ x \in \overline{X}. \tag{10.7}$$

Очевидно, $\xi(X) \le \min f(x)$, $x \in X$, т. е. удовлетворяет первому свойству метода ветвей и границ.

Метод решения задачи (10.7) состоит в следующем. Подсчитаем ***относительные веса*** предметов, т. е. вес p_i / c_i i-го предмета на единицу ценности. Выберем предмет с номером i_1 с наименьшим относительным весом и будем загружать его (точнее, "засыпать" в раздробленном виде) в рюкзак до тех пор, пока не будет достигнута заданная ценность c

или же не будет "засыпан" весь предмет. Первый случай имеет место, если $c_{i_1} \ge c$, и тогда $x_{i_1}^* = c / c_{i_1}$, $x_i^* = 0$, $i = \overline{1, n}$, $i \ne i_1$, будет оптимальным планом задачи (10.7). Второй случай реализуется, если $c_{i_1} < c$. Полагаем $x_{i_1}^* = 1$ и среди оставшихся предметов выбираем предмет i_2 с наименьшим относительным весом. С ним поступаем так же, как и с первым, только сейчас вместо c берем $c - c_{i_1}$. Продолжая этот процесс, либо построим оптимальный план $x^* = (x_1^*, \ ..., \ x_n^*)$ задачи (10.7), либо не достигнем заданной ценности. Последнее реализуется, если $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i < c$, а это означает, что задача не имеет решения из-за несовместности ограничений.

Пусть x^* — оптимальный план задачи (10.7). Если все его координаты целочисленные, т. е. равны 0 или 1, то этот план будет оптимальным и для исходной задачи (10.6). В противном случае разбиваем множество X на два множества: $X_1 = \{x \in X: \ x_1 = 0\}$, $X_2 = \{x \in X: \ x_1 = 1\}$. В качестве оценок этих множеств берем следующие числа:

$$\xi(X_1) = \min \sum_{i=2}^{n} p_i x_i, \ \ \sum_{i=2}^{n} c_i x_i \ge c, \ \ 0 \le x_i \le 1, \ i = \overline{2, n}, \qquad (10.8)$$

$$\xi(X_2) = \min \left(p_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i x_i \right), \ \ \sum_{i=2}^{n} c_i x_i \ge c - c_1, \ \ 0 \le x_i \le 1, \ \ i = \overline{2, n}. \qquad (10.9)$$

Задачи (10.8), (10.9) решаются, как и задача (10.7). Если в задаче (10.8) $X_1 = \varnothing$, тогда полагают $\xi(X_1) = \infty$. Если в задаче (10.9) $c - c_1 \le 0$, тогда $x_1^* = 1$, $x_i^* = 0$, $i = \overline{2, n}$, — оптимальный план задачи (10.9).

Свойства 2, 3 метода ветвей и границ, очевидно, выполняются.

Замечание 10.5. Как и для задачи целочисленного ЛП (см. замечание 10.3), если оптимальный план x^* задачи (10.8) или (10.9) целочисленный, то соответствующее множество разбивается на два подмножества, одно из которых состоит из элемента x^*, а второе получается удалением x^* из исходного. В дальнейшем эти множества не подвергаются разбиению, а их оценки равны оценке множества, из которого они получены.

Дальнейшее решение задачи проводится в соответствии с выбранной схемой ветвления.

Пример 10.2. Решить задачу о рюкзаке с общей ценностью груза $c=50$ и данными, представленными в табл. 10.1.

Математическая модель задачи

$$f(x)=4x_1+6x_2+10x_3+5x_4+4x_5+x_6 \to \min,$$
$$12x_1+15x_2+10x_3+16x_4+8x_5+5x_6 \geq 50,$$
$$x_i=0 \vee 1, \quad i=\overline{1,5}.$$

Оценка множества X

$$\xi(X)=\min(4x_1+6x_2+10x_3+5x_4+4x_5+x_6),$$
$$12x_1+15x_2+10x_3+16x_4+8x_5+5x_6 \geq 50,$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i=\overline{1,5}.$$

Установим последовательность загрузки предметов, для чего подсчитаем относительные веса. В табл. 10.2 подсчитаны эти величины и в нижней строке указана последовательность загрузки.

Таблица 10.1

i	1	2	3	4	5	6
c_i	12	15	10	16	8	5
p_i	4	6	10	5	4	1

Таблица 10.2

i	1	2	3	4	5	6
p_i/c_i	1/3	2/5	1	5/16	1/2	1/5
Последовательность загрузки	III	IV	VI	II	V	I

Согласно полученным данным, первым загружается шестой предмет. Поскольку $c_6 < c$ $(5 < 50)$, то полагаем $x_6=1$. Вторым загружается четвертый предмет. Поскольку $c_4=10<c-c_6=45$, то $x_4=1$ и т. д. В итоге получим: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_5=1/4$. Заданная ценность достигнута. Следовательно, $x_3=0$. Оценка множества равна $\xi(X)=17$. Поскольку в оптимальном плане координата x_4 дробная, то разбиваем множество X на два: $X_1=\{x \in X: \; x_1=0\}$, $X_2=\{x \in X: \; x_1=1\}$ и решаем задачи

$$\xi(X_1)=\min(6x_2+10x_3+5x_4+4x_5+x_6),$$
$$15x_2+10x_3+16x_4+8x_5+5x_6 \geq 50, \tag{10.10}$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i=\overline{2,5};$$

$$\xi(X_2)=\min(4+6x_2+10x_3+5x_4+4x_5+x_6),$$
$$15x_2+10x_3+16x_4+8x_5+5x_6 \geq 38, \tag{10.11}$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i=\overline{2,5}.$$

Решение задачи (10.10): $\overline{x}^1 = (1;\ 3/5;\ 1;\ 1;\ 1)$, $\xi(X_1) = 22$; решение задачи (10.11): $\overline{x}^2 = (1;\ 0;\ 1;\ 1/4;\ 1)$, $\xi(X_2) = 17$. Для дальнейшего разбиения выбираем из списка $S_1 = \{X_1, X_2\}$ множество X_2 с меньшей оценкой: $X_2 = X_3 \cup X_4$, $X_3 = \{x \in X_2 : x_2 = 0\}$, $X_4 = \{x \in X_2 : x_2 = 1\}$. Решаем задачи

$$\begin{gathered} \xi(X_3) = \min(4 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6), \\ 10x_3 + 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 38, \\ 0 \le x_i \le 1,\quad i = \overline{3,6}; \end{gathered} \tag{10.12}$$

$$\begin{gathered} \xi(X_4) = \min(10 + 10x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6), \\ 10x_3 + 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 23, \\ 0 \le x_i \le 1,\quad i = \overline{3,6}. \end{gathered} \tag{10.13}$$

Решение задачи (10.12): $\overline{x}^3 = (9/10;\ 1;\ 1;\ 1)$, $\xi(X_3) = 23$; решение задачи (10.13): $\overline{x}^4 = (0;\ 1;\ 1/4;\ 1)$, $\xi(X_4) = 17$. Следуя схеме одностороннего ветвления, для дальнейшего разбиения выбираем множество не из всего списка $S_2 = \{X_1, X_3, X_4\}$, а только из вновь полученных $\{X_3, X_4\}$. Таким множеством является X_4. Разбиваем его на два подмножества: $X_5 = \{x \in X_4 : x_3 = 0\}$ и $X_6 = \{x \in X_4 : x_3 = 1\}$. В итоге получаем задачи

$$\begin{gathered} \xi(X_5) = \min(10 + 5x_4 + 4x_5 + x_6), \\ 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 23, \\ 0 \le x_i \le 1,\quad i = \overline{4,6}; \end{gathered} \tag{10.14}$$

$$\begin{gathered} \xi(X_6) = \min(20 + 5x_4 + 4x_5 + x_6), \\ 16x_4 + 8x_5 + 5x_6 \ge 13, \\ 0 \le x_i \le 1,\quad i = \overline{4,6}. \end{gathered} \tag{10.15}$$

Решение задачи (10.14): $\overline{x}^5 = (1;\ 1/4;\ 1)$, $\xi(X_5) = 17$; решение задачи (10.15): $\overline{x}^6 = (1/2;\ 0;\ 1)$, $\xi(X_6) = 23\frac{1}{2}$. Новый список $S_3 = \{X_1,\ X_3,\ X_5,\ X_6\}$. Разбиваем множество X_5 на два: $X_7 = \{x \in X_5 : x_4 = 0\}$ и $X_8 = \{x \in X_5 : x_4 = 1\}$. Получаем задачи

$$\begin{gathered} \xi(X_7) = \min(10 + 4x_5 + x_6), \\ 8x_5 + 5x_6 \ge 23, \\ 0 \le x_i \le 1,\quad i = 5,\ 6; \end{gathered} \tag{10.16}$$

$$\xi(X_8) = \min(15 + 4x_5 + x_6),$$
$$8x_5 + 5x_6 \geq 7, \tag{10.17}$$
$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 5, 6.$$

Поскольку в задаче (10.16) $c_5 + c_6 < 23$, то $X_7 = \varnothing$ и тогда $\xi(X_7) = \infty$. Решение задачи (10.17): $\overline{x}^7 = (1/4;\ 1)$, $\xi(X_8) = 17$. Разбиваем множество X_8: $X_9 = \{x \in X_8 : x_5 = 0\}$, $X_{10} = \{x \in X_8 : x_5 = 1\}$. Получаем задачи

$$\xi(X_9) = \min(15 + x_6), \quad 5x_6 \geq 7, \ 0 \leq x_6 \leq 1;$$

$$\xi(X_{10}) = \min(19 + x_6), \quad 5x_6 \geq -1, \ \ 0 \leq x_6 \leq 1. \tag{10.18}$$

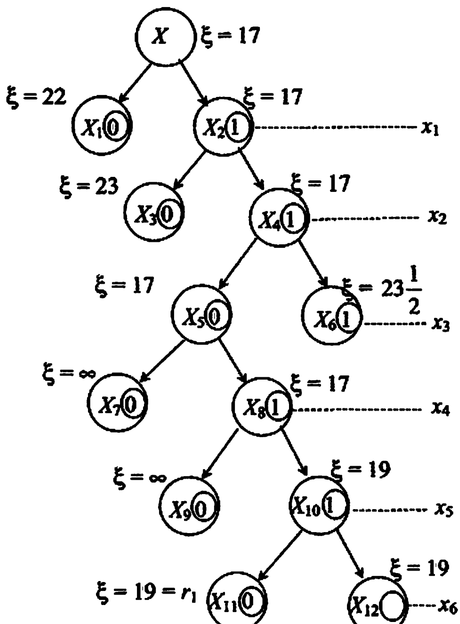


Рис. 10.2

Поскольку $X_9 = \varnothing$ (не достигается заданная ценность), то $\xi(X_9) = \infty$. В задаче (10.18) оптимальной будет точка $x_6 = 0$, при этом $\xi(X_{10}) = 19$. План целочисленный: $x^* = (1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0)$. Согласно замечанию 10.5, множество X_{10} разбиваем на два: $X_{11} = \{x^*\}$, $X_{12} = X_{10} \backslash X_{11}$, при этом $\xi(X_{11})=\xi(X_{12})=\xi(X_{10})=19$. Следовательно, $r_1=19$. В списке остались множества X_1, X_3, X_6, X_{12} (X_7 и X_9 исключаются как пустые). Оценки оставшихся множеств не ниже числа r_1. Следовательно, согласно схеме одностороннего ветвления, они исключаются из списка для дальнейшего разбиения. В списке не осталось множеств. Фактически схема одностороннего ветвления совпала со схемой полного ветвления. Получили оптимальный план: оптимальный вес рюкзака равен 19 и в него должны быть загружены предметы с номерами 1, 2, 4, 5 (восстанавливается попятным движением от множества X_{11} к множеству X).

Все вычисления удобно изобразить графически (см. рис. 10.2). На рисунке рядом с множеством указано значение соответствующего x_i.

Задания

10.3. Решить задачу о рюкзаке с данными, приведенными ниже.

1. $c=45$

i	1	2	3	4	5
c_i	20	24	5	20	9
p_i	4	14	2	7	3

2. $c=45$

i	1	2	3	4	5
c_i	11	19	12	21	9
p_i	3	9	4	10	6

3. $c=35$

i	1	2	3	4	5
c_i	10	10	5	15	9
p_i	5	4	3	7	3

4. $c=50$

i	1	2	3	4	5
c_i	10	20	12	15	11
p_i	2	6	6	10	2

5. $c=26$

i	1	2	3	4	5
c_i	10	6	11	15	12
p_i	6	3	8	10	5

6. $c=40$

i	1	2	3	4	5
c_i	9	13	12	8	13
p_i	5	8	5	4	7

7. $c=45$

i	1	2	3	4	5
c_i	15	9	10	8	22
p_i	11	3	4	3	12

8. $c=55$

i	1	2	3	4	5
c_i	18	35	11	27	12
p_i	6	14	4	4	3

9. $c=44$

i	1	2	3	4	5
c_i	10	6	15	24	18
p_i	4	2	3	13	8

10. $c=38$

i	1	2	3	4	5
c_i	8	12	10	16	20
p_i	5	4	3	8	9

11. $c=32$

i	1	2	3	4	5
c_i	16	10	12	8	6
p_i	7	6	5	4	2

12. $c=48$

i	1	2	3	4	5
c_i	15	10	12	18	20
p_i	3	5	8	4	6

13. $c=24$

i	1	2	3	4	5
c_i	10	4	5	10	12
p_i	7	2	3	4	8

14. $c=38$

i	1	2	3	4	5
c_i	12	10	8	16	4
p_i	7	4	5	9	2

15. $c=24$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	5	8	9	5	3	4
p_i	3	6	3	4	2	2

16. $c=42$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	15	8	9	12	8	11
p_i	2	6	3	8	4	8

17. $c=65$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	10	25	12	16	6	30
p_i	4	5	8	6	3	11

18. $c=34$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	9	10	9	12	4	8
p_i	3	4	6	3	2	6

19. $c=28$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	8	5	9	10	8	3
p_i	2	3	3	3	4	2

20. $c=50$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	20	8	24	9	5	7
p_i	8	3	12	3	3	3

21. $c=38$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	16	14	8	9	10	16
p_i	6	7	2	2	4	7

22. $c=36$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	6	8	14	12	7	4
p_i	2	3	10	5	3	2

23. $c=39$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	15	10	8	12	10	7
p_i	5	3	4	8	6	4

24. $c=49$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	7	15	20	14	8	12
p_i	2	10	8	7	6	10

25. $c=24$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	6	5	8	4	2	6
p_i	4	4	5	3	1	2

26. $c=42$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	10	8	15	10	4	6
p_i	3	5	6	7	2	4

27. $c=58$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	10	8	15	20	24	12
p_i	7	3	6	8	5	5

28. $c=32$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	10	8	4	6	12	2
p_i	7	2	3	2	5	1

29. $c=33$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	8	10	4	2	6	12
p_i	3	6	1	1	2	5

30. $c=33$

i	1	2	3	4	5	6
c_i	10	12	14	7	6	9
p_i	3	4	7	4	5	2

§ 11. МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Разработка эффективных методов минимизации функций одной переменной — весьма важная проблема, поскольку они входят составной частью в алгоритмы решения более сложных экстремальных задач (например, задач с ограничениями).

11.1. Метод ломаных

Наиболее эффективным методом, гарантирующим нахождение абсолютного минимума, является ***метод ломаных***. Он позволяет определить абсолютный минимум функции с наперед заданной точностью.

Пусть имеем задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in [a, b]. \tag{11.1}$$

Для решения этой задачи применим метод ломаных. Рассмотрим простейшую реализацию метода для случая, когда $f \in C^{(1)}[a, b]$ и $|df(x)/dx| \le L < +\infty$, $x \in [a, b]$. Зафиксируем произвольную точку x_1 отрезка $[a, b]$ и построим функцию

$$g_1(x) = f(x_1) - L\,|\,x - x_1\,|, \quad x \in [a, b].$$

На рис. 11.1 функция $g_1(x)$ изображена ломаной $\{1, 2, 3\}$. Очевидно, что при любом $x \in [a, b]$ имеем $f(x) \ge g_1(x)$, т. е. ломаная $g_1(x)$, $x \in [a, b]$, мажорирует снизу функцию $f(x)$. Пусть x_2 — точка минимума функции $g_1(x)$, $x \in [a, b]$: $g_1(x_2) = \min\limits_{x \in [a,b]} g_1(x)$. Если для некоторой точки $x^{\varepsilon} \in [a, b]$ справедливо неравенство

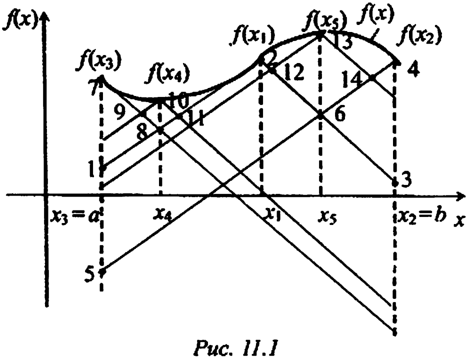


Рис. 11.1

$$f(x^{\varepsilon}) \leq g_1(x_2) + \varepsilon,$$

то x^{ε} — ε-оптимальный план задачи (11.1). При неудовлетворительной степени приближения к оптимальному плану процесс решения задачи продолжаем.

Строим функцию

$$g_2(x) = \max\{g_1(x), \bar{g}_2(x)\}, \ x \in [a, b],$$

где

$$\bar{g}_2(x) = f(x_2) - L|x - x_2|, \ x \in [a, b].$$

На рис. 11.1 функции $\bar{g}_2(x)$ и $g_2(x)$ изображены ломаными соответственно $\{4, 5\}$ и $\{1, 2, 6, 4\}$. Определим точку x_3: $g_2(x_3) = \min g_2(x)$, $x \in [a, b]$, и положим $g_3(x) = \max\{g_2(x), \bar{g}_3(x)\}$, $x \in [a, b]$. На рис. 11.1 функция $g_3(x)$ изображена ломаной $\{7, 8, 2, 6, 4\}$. Продолжая описанный процесс, построим функции $g_4(x)$, $g_5(x)$ и т. д. На рис. 11.1 ломаные $g_4(x)$, $g_5(x)$ имеют соответственно вид $\{7, 9, 10, 11, 2, 6, 4\}$, $\{7, 9, 10, 11, 2, 12, 13, 14, 4\}$. На каждой итерации строятся точки x_k, $k = 1, 2, \ldots$. С каждой итерацией точность аппроксимации снизу функции $f(x)$ увеличивается, и планы x_k все более приближаются по значениям $f(x)$ к глобальному оптимальному плану задачи (11.1). Если на k-й итерации для некоторого плана x^{ε} выполняется неравенство $f(x^{\varepsilon}) \leq g_{k-1}(x_k) + \varepsilon$ (ε — заданное число), то x^{ε} — ε-оптимальный план. Отметим, что на каждой итерации минимизируется кусочно-линейная функция $g_k(x)$, $x \in [a, b]$, а это, вообще говоря, задача линейного программирования.

11.2. Методы поиска точек минимума унимодальных функций

Методами одномерного поиска называются методы нулевого порядка, т. е. методы, в которых используются лишь значения минимизируемых функций.

Рассмотрим задачу (11.1). Точный локальный минимум функции $f(x)$ на $[a, b]$ неизвестен, поэтому отрезок $[a, b]$ называется ***интервалом неопределенности*** или ***интервалом локализации*** точки минимума. Цель методов поиска — сократить (уменьшить) интервал локализации. Сравнение различных процедур поиска производится в соответствии с коэффициентом сжатия. ***Коэффициент сжатия*** — это отношение длины интервала локализации после m вычислений значений функции к длине начального интервала локализации. Для так называемых унимодальных функций интервал локализации может быть сокращен с помощью вычисления значения функции $f(x)$ в двух точках, принадлежащих отрезку $[a,\ b]$.

Определение 11.1. Непрерывная функция $f(x),\ x \in [a,\ b]$, называется ***унимодальной***, если существует такая точка $x^* \in [a,\ b]$, что на $[a,\ x^*]$ функция $f(x)$ убывает, на $[x^*,\ b]$ — возрастает.

Как следует из определения, строго выпуклые, строго квазивыпуклые функции являются унимодальными.

Всюду дальше в этом пункте считаем, что в задаче (11.1) функция $f(x),\ x \in [a,\ b]$, унимодальная.

Пусть $x_1,\ x_2 \in (a,\ b),\ x_1 < x_2$. Вычислим значения $f(x_1),\ f(x_2)$. Тогда если $f(x_1) > f(x_2)$, то точка минимума принадлежит интервалу $[x_1,\ b]$; если $f(x_1) \le f(x_2)$, то новый интервал локализации $[a,\ x_2]$. Рассмотрим несколько методов уменьшения интервалов локализации.

1. Дихотомический поиск. Пусть имеем задачу (11.1) с унимодальной целевой функцией. Наименьшее число вычислений значений функции $f(x)$, которые необходимы для уменьшения интервала локализации, равно двум. В зависимости от значений функции $f(x)$ в точках $x_1,\ x_2 \in (a,\ b),\ x_1 < x_2$, длина нового интервала локализации равна $x_2 - a$ или $b - x_1$.

Заметим, что *a priori* не известно, будет ли $f(x_1) < f(x_2)$ или $f(x_1) \ge f(x_2)$. Следовательно, оптимальная стратегия (исключить наихудший вариант) выбора точек $x_1,\ x_2$ может быть достигнута выбором в качестве x_1 и x_2 середины отрезка $[a,\ b]$. Но тогда мы будем иметь только одну точку и не сможем уменьшить интервал локализации. В связи с этим точки $x_1,\ x_2$ выбираем симметрично на расстоянии $\varepsilon > 0$ от середины отрезка (число ε настолько мало, что длина нового интервала локализации $\varepsilon + (b-a)/2$ достаточно близка к значению $(b-a)/2$). Заметим, что, с другой стороны, число $\varepsilon > 0$ должно быть таким, чтобы значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ были различными.

Алгоритм дихотомического поиска. К началу решения задачи задаются: константа различимости $\varepsilon > 0$, длина конечного интервала локализации точки минимума $l > 0$, начальный интервал локализации $[a_1,\ b_1]$. Пусть на k-й итерации интервал локализации $[a_k,\ b_k]$.

1. Если $b_k - a_k < l$, то процесс решения задачи (11.1) заканчивается. Точка минимума локализована в интервале длины l. В противном случае полагаем

$$x_1^k = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon, \quad x_2^k = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon.$$

2. Вычисляем значения $f(x_1^k)$, $f(x_2^k)$.

3. Если выполняется неравенство $f(x_1^k) \le f(x_2^k)$, то полагаем $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_2^k$. В противном случае полагаем $a_{k+1} = x_1^k$, $b_{k+1} = b_k$. На этом k-я итерация завершается.

Пример 11.1. $f(x) = 2x^2 - 6x$, $[a_1,\ b_1] = [-4;\ 6]$, $l = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}001$.

Результаты вычислений представлены в табл. 11.1.

Таблица 11.1

k	a_k	b_k	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
1	–4,0	6,0	0,999	1,001	–3,998	–4,002
2	0,999	6,0	3,4985	3,5005	3,488005	3,504001
3	0,999	3,5005	2,24875	2,25075	–3,37875	–3,37275
4	0,999	2,25075	1,623875	1,625875	–4,46931	–4,46831
5	0,999	1,625875	1,311438	1,311438	–4,42889	–4,43039
6	1,311438	1,625875	1,467656	1,469656	–3,5606	–4,49816

Заметим, что длина интервала локализации к началу $(k+1)$-й итерации равна

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1) + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$$

и коэффициент сжатия приблизительно равен $(1/2)^{m/2}$ (после m вычислений).

2. Метод “золотого сечения”. Пусть на k-й итерации метода “золотого сечения” интервал локализации равен $[a_k,\ b_k]$. Новый интервал локализации $[a_{k+1},\ b_{k+1}]$ равен $[x_1^k,\ b_k]$, если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, и $[a_k,\ x_2^k]$, если $f(x_1^k) \le f(x_2^k)$. Точки x_1^k, x_2^k из интервала $[a_k,\ b_k]$ выбираем следующим образом.

а) Должно выполняться равенство $b_k - x_1^k = x_2^k - a_k$ и длина нового интервала локализации $b_{k+1} - a_{k+1}$ не зависит от результата на k-й итерации (т. е. от того, какое неравенство выполняется $f(x_1^k) > f(x_2^k)$ или $f(x_1^k) \le$ $\le f(x_2^k)$). Следовательно, если

$$x_1^k = a_k + (1-\alpha)(b_k - a_k),\ \alpha \in (0;\ 1), \tag{11.2}$$

то

$$x_2^k = a_k + \alpha(b_k - a_k). \tag{11.3}$$

В этом случае $b_{k+1} - a_{k+1} = \alpha(b_k - a_k)$.

б) На $(k+1)$-й итерации x_1^{k+1}, x_2^{k+1} выбираются так, чтобы либо x_1^{k+1} совпадала с x_2^k, либо x_2^{k+1} совпадала с x_1^k. В результате этого требования на $(k+1)$-й итерации потребуется только одно вычисление значения функции $f(x)$.

Если реализуется случай $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, то (рис. 11.2)

$$a_{k+1} = x_1^k,\ b_{k+1} = b_k, \tag{11.4}$$

причем $x_1^{k+1} = x_2^k$. Рассмотрим последнее равенство. С одной стороны, поскольку соотношения (11.2), (11.3) должны выполняться для всех $k = 1$, 2, ..., то для $k+1$ из равенства (11.2) получим

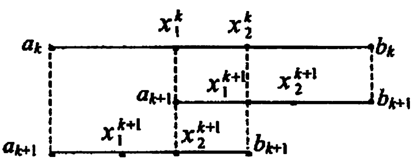


Рис. 11.2

$$x_1^{k+1} = a_{k+1} + (1-\alpha)(b_{k+1} - a_{k+1}). \tag{11.5}$$

С другой стороны, имеем равенство (11.3). Приравнивая правые части равенств (11.3), (11.5) и используя соотношения (11.2), (11.4), будем иметь $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$. Такое же уравнение относительно α получаем в случае $f(x_1^k) \le f(x_2^k)$. Корни этого уравнения $\alpha = (-1 + \sqrt{5})/2 \cong 0{,}618$ и $\alpha = (-1 - \sqrt{5})/2 \cong -1{,}618$, причем $\alpha \in (0;\ 1)$. Таким образом, выбор точек x_1^k, x_2^k, согласно (11.2), (11.3), с $\alpha \cong 0{,}618$ показывает, что длина интервала локализации сжимается с коэффициентом 0,618. На первой итерации вычисляются значения $f(x)$ в двух точках x_1^1, x_2^1, а на каждой последующей требуется только одно вычисление.

Алгоритм метода "золотого сечения". Алгоритм начинается с выбора длины конечного интервала локализации $l > 0$. Пусть $[a_1,\ b_1]$ — начальный интервал локализации. Полагаем $x_1^1 = a_1 + (1-\alpha)(b_1 - a_1)$ и $x_2^1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)$, где $\alpha \cong 0{,}618$, и вычисляем $f(x_1^1)$, $f(x_2^1)$. Опишем итерацию метода, считая, что интервал локализации $[a_k,\ b_k]$ определен.

1. Если $b_k - a_k < l$, то задача решена. В качестве точки минимума можно взять, например, середину интервала $[a_k,\ b_k]$. В противном случае, если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, переходим к шагу 2, а если $f(x_1^k) \le f(x_2^k)$, переходим к шагу 3.

2. Полагаем $a_{k+1}=x_1^k$, $b_{k+1}=b_k$, $x_1^{k+1}=x_2^k$, $x_2^{k+1}=a_{k+1}+\alpha(b_{k+1}-a_{k+1})$. Вычисляем $f(x_2^{k+1})$ и заменяем k на $k+1$. Переходим к шагу 1.

3. Полагаем $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=x_2^k$, $x_1^{k+1}=a_{k+1}+(1-\alpha)(b_{k+1}-a_{k+1})$, $x_2^{k+1}=x_1^k$. Вычисляем $f(x_1^{k+1})$, заменяем k на $k+1$ и переходим к шагу 1.

Пример 11.2. $f(x)=2x^2-6x$, $[a_1, b_1]=[-4; 6]$, $l=0{,}5$, $\alpha=0{,}618$.

Результаты вычислений представлены в табл. 11. 2.

Таблица 11.2

k	a_k	b_k	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
1	–4,0	6,0	–0,18	2,18	1,1448	–3,5752
2	–0,18	6,0	2,18	3,63924	–3,5752	4,652694
3	–0,18	3,63924	1,2789496	2,18	–4,4022736	–3,5752
4	–0,18	2,18	0,72152	1,2789496	–3,2879378	–4,4022736
5	0,72152	2,18	1,2789496	1,6228606	–4,4022736	–4,4698106
6	1,2789496	2,18	1,6228606	1,8357987	–4,4698106	–4,274479
7	1,2789496	1,8357987	1,4916659	1,6228606	–4,4998612	–4,4698106
8	1,2789496	1,6228606	1,4103236	1,4916659	–4,4839284	–4,4998612

3. Метод Фибоначчи. Процедура этого метода основана на последовательности чисел Фибоначчи[1], которая определяется следующим образом:

$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ F_0=F_1=1. \tag{11.6}$$

Из рекуррентного уравнения (11.6) получим, что последовательность чисел имеет вид: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, … .

Пусть на k-й итерации интервал локализации равен $[a_k, b_k]$. Положим

$$x_1^k=a_k+\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k-a_k), \tag{11.7}$$

$$x_2^k=a_k+\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k-a_k),\quad k=\overline{1,n-1}, \tag{11.8}$$

где n — заданное число вычислений значений функции $f(x)$.

Тогда новый интервал локализации

$$[a_{k+1}, b_{k+1}]=\begin{cases}[x_1^k, b_k], & \text{если } f(x_1^k)>f(x_2^k),\\ [a_k, x_2^k], & \text{если } f(x_1^k)\le f(x_2^k).\end{cases}$$

[1] Итальянский математик Леонардо из Пизы (прозвище — Фибоначчи) в своей книге "Liber abacci" ("Книга об абаке", 1202 г.) описал эту последовательность чисел.

В первом случае имеем (с учетом (11.6), (11.7))

$$b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - x_1^k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k).$$

Во втором случае, учитывая (11.8), (11.6), получаем

$$b_{k+1} - a_{k+1} = x_2^k - a_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k).$$

Отсюда следует, что длина интервала локализации сжимается с коэффициентом F_{n-k} / F_{n-k+1}.

Легко показать, что при выборе (11.7), (11.8) точек x_1^k, x_2^k на $(k+1)$-й итерации $x_1^{k+1} = x_2^k$ или $x_2^{k+1} = x_1^k$.

Таким образом, на первой итерации требуются два вычисления функции, а на последующих — только одно. Тогда в конце $(n-2)$-й итерации будет сделано $n-1$ вычислений функции и $x_1^{n-1} = x_2^{n-1}$ в силу (11.6)—(11.8). Поэтому, чтобы далее сократить интервал локализации, точка последнего вычисления функции $f(x)$ выбирается слева или справа от средней точки $x_1^{n-1} = x_2^{n-1}$. Это смещение должно быть достаточно мало, но быть таким, чтобы значения функции $f(x)$ в выбранной точке и точке $x_1^{n-1} = x_2^{n-1}$ были различимы. Таким образом, последний интервал локализации $[a_n, b_n]$ имеет длину $(b_{n-1} - a_{n-1})/2$.

Итак, в методе число вычислений функции $f(x)$ должно быть выбрано перед началом процедуры. Это следует из того, что выбор точек (11.7), (11.8) зависит от n, а поскольку $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/F_n$, то число $(b_1 - a_1)/F_n$ должно быть согласовано с требуемой точностью.

Алгоритм метода Фибоначчи. Выбираем конечную длину интервала локализации $l > 0$ и константу различимости $\varepsilon > 0$. Пусть начальный интервал локализации $[a_1, b_1]$. Число n вычислений функции $f(x)$ выбираем из условия $F_n > (b_1 - a_1)/l$. Полагаем $x_1^1 = a_1 + (F_{n-2}/F_n)(b_1 - a_1)$, $x_2^1 = a_1 + (F_{n-1}/F_n)(b_1 - a_1)$ и вычисляем $f(x_1^1)$, $f(x_2^1)$.

Опишем ***итерацию метода Фибоначчи***.

1. Если $f(x_1^k) > f(x_2^k)$, переходим к шагу 2, если $f(x_1^k) \le f(x_2^k)$ — к шагу 3.

2. Полагаем $a_{k+1} = x_1^k$, $b_{k+1} = b_k$ и $x_1^{k+1} = x_2^k$, $x_2^{k+1} = a_{k+1} + (F_{n-k-1}/F_{n-k}) \times$ $\times (b_{k+1} - a_{k+1})$. Если $k = n-2$, то переходим к шагу 4, в противном случае вычисляем $f(x_2^{k+1})$ и переходим к шагу 1.

3. Полагаем $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=x_2^k$, $x_1^{k+1}=a_{k+1}+(F_{n-k-2}/F_{n-k})(b_{k+1}-a_{k+1})$, $x_2^{k+1}=x_1^k$. Если $k=n-2$, переходим к шагу 4, в противном случае вычисляем $f(x_1^{k+1})$ и переходим к шагу 1.

4. Полагаем $x_1^n=x_1^{n-1}$, $x_2^n=x_1^n+\varepsilon$. Если $f(x_1^n)>f(x_2^n)$, то $[a_n, b_n]=$ $=[x_1^n, b_{n-1}]$, в противном случае — $[a_n, b_n]=[a_{n-1}, x_1^n]$. Задача решена: точка минимума находится в интервале $[a_n, b_n]$.

Пример 11.3. $f(x)=2x^2-6x$, $[a_1, b_1]=[-4; 6]$; $l=0,5$; $\varepsilon=0,001$, $n=7$. Результаты вычислений приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3

k	a_k	b_k	x_1^k	x_2^k	$f(x_1^k)$	$f(x_2^k)$
1	–4,0	6,0	–0,19048	2,19048	1,21542	–3,54649
2	–0,19048	6,0	2,19048	3,61905	–3,54649	4,48073
3	–0,19048	3,61905	1,23810	2,19048	–4,36281	–3,54649
4	–0,19048	2,19048	0,76190	1,23810	–3,41043	–4,36281
5	0,76190	2,19048	1,23810	1,71429	–4,36281	–4,40816
6	1,23810	2,19048	1,71429	1,71429	–4,40816	–4,40816
7	1,23810	1,71429	1,71429	1,71529	–4,40816	–4,40730

Замечание 11.1. При заданной длине $l>0$ конечного интервала локализации необходимое число вычислений n значений функции $f(x)$ будет равно наименьшему натуральному числу, которое удовлетворяет неравенствам:

$\dfrac{l}{b_1-a_1}\geq\dfrac{1}{F_n}$ — метод Фибоначчи;

$\dfrac{l}{b_1-a_1}\geq(0,618)^{n-1}$ — метод “золотого сечения”;

$\dfrac{l}{b_1-a_1}\geq(1/2)^{n/2}$ — дихотомический поиск.

Следовательно, наиболее эффективным является метод Фибоначчи, затем — метод “золотого сечения” и дихотомический поиск.

Заметим, что описанный метод Фибоначчи в пределе переходит в метод "золотого сечения". Действительно, из аналитического вида чисел Фибоначчи, представленного формулой Бинэ

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

следует, что при достаточно больших n получим $\dfrac{F_{n-1}}{F_n} \cong \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} \cong 0{,}618$, т. е. число, которое используется в методе "золотого сечения".

Упражнения и задания

11.1. Решить приведенные ниже задачи методом ломаных, самостоятельно взяв начальное приближение.

1. $f(x) = 2x^2 + 16/x \to \min,\ x \in [1/8;\ 4]$.
2. $f(x) = (127/4)x^2 - (61/4)x + 2 \to \min,\ x \in [-1;\ 3]$.
3. $f(x) = (x-\pi)^2 - \sin(x/4) \to \min,\ x \in [\pi/2;\ 4\pi]$.
4. $f(x) = (x-1)^3\sqrt{x}\cdot 2^x \to \min,\ x \in [0;\ 1]$.
5. $f(x) = -(1/5)x^5 + x + 4 \to \min,\ x \in [-3;\ 0]$.
6. $f(x) = 2^{x^2-2x-3} \to \min,\ x \in [-2;\ 3]$.
7. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x \to \min,\ x \in [0;\ 3]$.

11.2. Найти минимум функции $f(x) = e^{-x} + x^2$ с помощью каждой из указанных ниже процедур, самостоятельно выбрав отрезок минимизации и начальные параметры:

а) метод ломаных;
б) дихотомический метод;
в) метод "золотого сечения";
г) метод Фибоначчи.

11.3. Применить метод Фибоначчи к следующей задаче, выбрав самостоятельно начальное приближение: $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x \to \min,\ x \in [0;\ 10]$.

11.4. Методами дихотомии, "золотого сечения" и Фибоначчи решить следующие задачи, выбрав самостоятельно начальные параметры.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 14 \to \min,\ x \in [-2;\ 4]$.
2. $f(x) = x^2 + 6x + 12 \to \min,\ x \in [-4;\ 1]$.

11.5. Выяснить, как ведет себя метод ломаных при минимизации функции $f(x) \equiv 1$ на отрезке $[0;\ 1]$.

11.6. Найти наименьшее k, для которого точность метода "золотого сечения" хуже точности метода Фибоначчи в 2 раза.

§ 12. МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

В этом параграфе рассматриваются градиентные методы и метод Ньютона для задач на безусловный минимум. Это оправдано не только тем, что такие методы достаточно известны и распространены, но и тем, что многие общие экстремальные задачи сводятся к задачам безусловной оптимизации.

12.1. Градиентные методы

Рассмотрим следующую задачу:

$$f(x) \to \min, \ x \in \mathbf{R}^n, \tag{12.1}$$

где $f \in C^{(1)}$.

Градиентные методы основаны на свойстве вектора-градиента функции $f(x)$. ***Градиент*** $\operatorname{grad} f(x) = \partial f / \partial x$ функции $f(x)$ указывает направление наискорейшего возрастания функции $f(x)$ в точке x (вектор $-\operatorname{grad} f(x)$ называют ***антиградиентом***, он указывает направление наискорейшего убывания функции $f(x)$ в точке x).

Реализация алгоритмов, использующих направление градиента (антиградиента), начинается с выбора начального приближения $x^1 \in \mathbf{R}^n$, задания констант остановки $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ и предельного числа итераций N. Опишем одну итерацию метода наискорейшего спуска для задачи (12.1), считая, что приближение x^k найдено.

1. Вычисляем $\operatorname{grad} f(x^k)$. Если $\|\operatorname{grad} f(x^k)\| < \varepsilon_1$, то задача решена; в противном случае переходим к шагу 2.

2. Проверяем условие $k \geq N$. Если оно выполняется, то вычисления останавливаем: задача решена. В противном случае переходим к шагу 3.

3. Вычисляем шаг θ_k и полагаем $x^{k+1} = x^k - \theta_k \operatorname{grad} f(x^k)$. Переходим к шагу 4.

4. Проверяем условия $\| x^{\nu+1} - x^\nu \| < \varepsilon_2$, $| f(x^{\nu+1}) - f(x^\nu) | < \varepsilon_2$. Если оба условия выполнены при $\nu = k-1$ и $\nu = k$, то задача решена: x^k — требуемое приближение к оптимальному плану. Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то переходим к шагу 1.

Выбор величины шага θ_k вдоль направления $l^k = -\operatorname{grad} f(x^k)$ является вспомогательной задачей. Существуют следующие способы построения шага θ_k:

а) шаг постоянен: $\theta_k \equiv \theta$;

б) шаг θ_k выбирается как решение задачи

$$f(x^k+\theta_k l^k)=\min_{\theta\geq 0} f(x^k+\theta l^k); \tag{12.2}$$

в) шаг θ_k выбирается из условия гарантированного убывания

$$f(x^k+\theta_k l^k)-f(x^k)\leq -\delta\theta_k \,\|\operatorname{grad} f(x^k)\|, \tag{12.3}$$

где δ — заданное число, $\delta\in(0;\,1)$.

Замечание 12.1. Если функция $f(x)$, $x\in\mathbf{R}^n$, ограничена снизу, $f\in C^{(1)}$ и $\operatorname{grad} f(x)$, $x\in\mathrm{R}^n$, удовлетворяет условию Липшица, то последовательность x^1, x^2, ..., генерируемая методом с выбором шагов по правилам (12.2) или (12.3), является релаксационной. Метод с выбором шага по правилу *а* называется ***градиентным методом***; если шаг выбирается по правилу (12.2), метод называется ***методом наискорейшего спуска***.

Замечание 12.2. Если реализован какой-либо шаг θ_k, тогда на практике итерации продолжают до тех пор, пока не выполнится некоторый критерий окончания счета. Иногда задают предельное число итераций, как указано в приведенном выше алгоритме. Понятно, что эффективных критериев окончания счета, которые бы гарантировали получение решения задачи с требуемой точностью, пока нет. Отметим также, что симплекс-метод является, вообще говоря, градиентным методом.

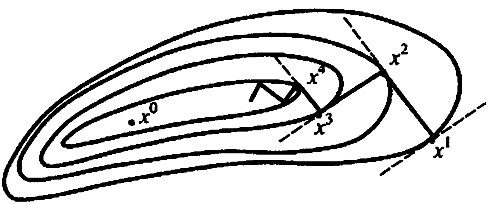


Рис. 12.1

Замечание 12.3. Градиентные методы медленно сходятся в тех случаях, когда поверхности уровня функции $f(x)$ сильно вытянуты, т. е. имеют так называемый ***"овражный характер"*** (рис. 12.1). Это означает, что по переменным, задающим направление "дна оврага", функция $f(x)$ меняется незначительно. Если начальная точка лежит на "склоне оврага", то направление спуска из этой точки будет почти перпендикулярным направлению "дна оврага", и в результате приближения x^k, получаемые градиентным методом, будут поочередно находиться то на одном, то на другом "склоне оврага". Такие скачки "со склона на склон"

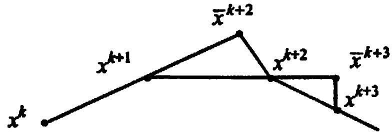


Рис.12.2

точек x^k сильно замедляют сходимость метода. Для минимизации функций с "овражной структурой" разработаны модификации градиентных методов, в которых делаются шаги по "дну оврага". Схема такой модификации градиентного метода заключается в следующем. Берутся две точки x^1, $\overline{x}^1$. Из каждой осуществляется градиентный спуск в точки x^k, $\overline{x}^k$ (x^k, $\overline{x}^k$ лежат на "дне оврага"). Затем из точки $\overline{x}^k$ делается так называемый "овражный шаг" в направлении убывания функции $f(x)$: $\pm(\overline{x}^k - x^k)$. Из полученной точки $\overline{x}^{k+1}$ производится спуск с помощью градиентного метода и определяется следующая точка x^{k+1} на "дне оврага". Далее в направлении убывания функции $f(x)$: $\pm(x^{k+1} - \overline{x}^k)$ находится точка $\overline{x}^{k+2}$ и т. д. (рис. 12.2). Величина "овражного" шага подбирается эмпирически с учетом информации, получаемой в ходе поиска минимума функции $f(x)$. После нескольких "овражных шагов" обычно переходят на градиентный спуск.

12.2. Метод Ньютона

В градиентных методах для определения направления убывания функции использовалась линейная часть разложения функции в ряд Тейлора. Если же использовать квадратичную часть разложения Тейлора, то она аппроксимирует функцию гораздо точнее, чем линейная, а следовательно, методы, основанные на квадратичных аппроксимациях, сходятся быстрее, чем методы первого порядка.

Итак, решаем задачу (12.1), где $f \in C^{(2)}$ и в окрестности оптимального плана $\partial^2 f(x)/\partial x^2 > 0$.

Пусть задано некоторое начальное приближение x^1. Если известно k-е приближение x^k, то приближение x^{k+1} определим следующим образом: $x^{k+1} = x^k + \theta_k l^k$. Здесь l^k — решение задачи

$$l'\frac{\partial f(x^k)}{\partial x} + \frac{1}{2} l' \frac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x^2} l \to \min_{l \in \mathbf{R}^n},$$

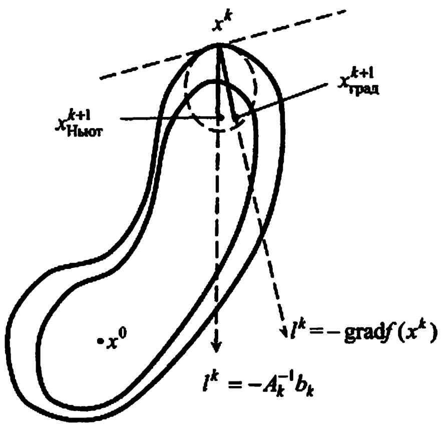


Рис. 12.3

т. е. $l^k = -A_k^{-1} b_k$ и является решением уравнения $b_k + A_k l = 0$, где $b_k = \partial f(x^k)/\partial x$, $A_k = \partial^2 f(x^k)/\partial x^2$; шаг θ_k удовлетворяет неравенствам $0 \le \theta_k \le 1$.

Вектор $l^k = -A_k^{-1} b_k$ называется ***направлением Ньютона***.

Если l^k — направление Ньютона, шаг $\theta_k \equiv 1$, то метод называется ***методом Ньютона***. Из описания видно, что метод Ньютона для квадратичной функции $f(x)$, $x \in \mathrm{R}^n$, строит оптимальный план за одну итерацию. Шаг θ_k можно также выбрать по способу (12.2) или (12.3).

Разница между градиентным методом и методом Ньютона с точки зрения аппроксимации целевой функции наглядно видна из рис. 12.3.

Алгоритм метода Ньютона. Задаем начальное приближение x^1, константу остановки $\varepsilon > 0$, предельное число итераций N. Пусть k-е приближение x^k найдено. Опишем итерацию метода.

1. Проверяем условие $k \ge N$. Если оно выполнено, то x^k может рассматриваться как приближение точки минимума. В противном случае переходим к шагу 2.

2. Вычисляем $\text{grad} f(x^k) = b_k$ и $\partial^2 f(x^k)/\partial x^2 = A_k$.

3. Вычисляем матрицу A_k^{-1}.

4. Определяем $l^k = -A_k^{-1} b_k$ и полагаем $x^{k+1} = x^k - \theta_k A_k^{-1} b_k$, где $\theta_k \equiv 1$ (метод Ньютона), θ_k находится из условия

$$f(x^k - \theta_k A_k^{-1} b_k) = \min_{\theta \ge 0} f(x^k - \theta A_k^{-1} b_k)$$

(метод Ньютона — Рафсона).

5. Проверяем условия $\| x^{\nu+1} - x^\nu \| < \varepsilon$, $| f(x^{\nu+1}) - f(x^\nu) | < \varepsilon$. Если оба условия выполнены при $\nu = k-1$ и $\nu = k$, то решение задачи завершено: x^{k+1} — требуемое приближение к оптимальному плану. Если хотя бы одно из условий не выполнено, переходим к шагу 1.

Замечание 12.4. Метод Ньютона носит локальный характер, т. е. он быстро сходится вблизи точки минимума функции. Поэтому он, как правило, применяется в комбинации с другими методами, позволяющими найти приближение, достаточно близкое к точке минимума.

Замечание 12.5. Основной недостаток метода Ньютона: на каждом шаге итерационного процесса нужно, помимо градиента, вычислять матрицу, обратную к матрице вторых производных функции $f(x)$. Существуют методы, в которых используется аппроксимация матрицы A_k и вектора b_k. Они называются ***методами ньютоновского типа*** или ***квазиньютоновскими***. Примером квазиньютоновских методов является ***метод сопряженных градиентов***, который дал начало многим современным методам сопряженных направлений. ***Метод сопряженных градиентов*** — это метод первого порядка и основан на специальном подходе к решению уравнения $A_k l + b_k = 0$, в котором матрица A_k явно не используется. В данном пособии на этих методах не останавливаемся.

Упражнения и задания

12.1. Методами градиентного и наискорейшего спуска с начальным приближением x^1 решить следующие задачи.

1. $f(x) = x_1^3 - x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 3x_2 - 4 \to \min$, $x^1 = (0;\ 0)$.
2. $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \to \min$, $x^1 = (0;\ 0)$.
3. $f(x) = (x_1^2 - x_2)^4 + x_1x_2 + e^{x_1^2} \to \min$, $x^1 = (0;\ 1)$.
4. $f(x) = ((x_2+1)^2 + x_1^2)(x_1^2 + (x_2-1)^2) \to \min$,
   а) $x^1 = (1/2;\ 0)$; *б*) $x^1 = (-1/10;\ -1/2)$.
5. $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2 + (x_1 + x_2 - 1)^2 \to \min$,
   а) $x^1 = (0;\ 3)$; *б*) $x^1 = (3;\ 0)$.
6. $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + e^{x_1+x_2} \to \min$, $x^1 = (0;\ 0)$.
7. $f(x) = e^{x_1} + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^4 \to \min$, $x^1 = (0;\ 1;\ -1;\ 0)$.
8. $f(x) = -x_1^2 e^{1 - x_1^2 - (81/4)(x_1 - x_2)^2} \to \min$, $x^1 = (1/10;\ 1/2)$.
9. $f(x) = -x_1x_2e^{-x_1-x_2} \to \min$, $x^1 = (0;\ 1)$.
10. $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \to \min$, $x^1 = (1;\ 1)$.
11. $f(x) = x_1^3 + x_1x_2 - x_2^2x_1^2 \to \min$, $x^1 = (1;\ 1)$.
12. $f(x) = 9(x_1 - 6)^2 + 4(x_2 - 6)^2 - 36 \to \min$, $x^1 = (7;\ 6 + 3\sqrt{3}/2)$.

12.2. Выполнить несколько итераций метода наискорейшего спуска с начальным приближением x^1. Решение проиллюстрировать графически, построив линии уровня целевой функции.

1. $f(x)=4(x_1-5)^2+(x_2-6)^2 \to \min,\ x^1=(8;\ 9)$.

2. $f(x)=(x_1-1)^2+2(x_2+5)^2+1 \to \min$,

а) $x^1=(1;\ 0)$; *б*) $x^1=(-5;\ -5)$; *в*) $x^1=(0;\ 0)$.

3. $f(x)=(x_1-2)^2+4(x_2+3)^2+1 \to \min$,

а) $x^1=(2;\ 0)$; *б*) $x^1=(0;\ 2)$.

4. $f(x)=4x_1^2+(x_2-1)^2 \to \min$,

а) $x^1=(-1;\ 4)$; *б*) $x^1=(-1;\ -1)$.

5. $f(x)=x_1^2+x_2^2-20x_1-2x_2 \to \min,\ x^1=(6;\ 4)$.

6. $f(x)=2x_1^2+x_2^2+x_1x_2+x_1+x_2 \to \min,\ x^1=(0;\ 0)$.

12.3. Для задачи $f(x)=\dfrac{1}{x_1^2+(x_2+1)^2} \to \max$ указать, из какой начальной точки ее решение по методу Ньютона потребует не более одной итерации.

12.4. Изложить схемы метода наискорейшего спуска и метода Ньютона для задачи максимизации функции.

12.5. В задаче $f(x)=100(x_2-x_1)^2+(1-x_1)^2 \to \min$ сделать 10 итераций из точки $x^1=(2;\ 4)$ методом Ньютона.

12.6. Решить задачу $f(x)=100(x_2-x_1)^2+(1-x_1)^2 \to \min$ методом Ньютона из начальной точки $x^1=(2;\ 4)$, $\varepsilon=0{,}1$.

12.7. Решить задачи 12.1, 12.2 методом Ньютона, взяв в качестве начальной точки x^1 одно из приближений, полученное с помощью градиентного метода.

12.8. Решить следующие задачи методом Ньютона с начальным приближением x^1 и числом остановки ε.

1. $f(x)=(x_1^2+x_2-11)^2+(x_1+x_2^2-7)^2 \to \min,\quad x^1=(0;\ 0)$, $\varepsilon=0{,}1$.

2. $f(x)=100(x_2-x_1)^2+(1-x)^2+\dfrac{101}{10}(x_2-1)^2 \to \min,\quad x^1=(0;\ 0)$, $\varepsilon=0{,}1$.

3. $f(x)=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2 \to \min,\quad x^1=(1/2;\ 1)$, $\varepsilon=0{,}1$.

12.9. Решить следующие задачи методами наискорейшего спуска и Ньютона с начальным приближением $x^1=(2;\ -2/5;\ 2;\ -2/5)$.

1. $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \to \min$.

2. $f(x)=(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2 \to \min$.

3. $f(x)=x_1^3+x_2+x_3^3+x_4+16x_1^2x_2+8x_2^2x_3+x_3^2x_4+2 \to \min$.

12.10. Сравнить траектории оптимизации при использовании метода наискорейшего спуска и метода Ньютона для задач максимизации следующих функций.

1. $f(x)=x_1^3e^{x_2-x_1^2-10(x_1-x_2)^2}$.

2. $f(x)=\left(\dfrac{7}{20}+\dfrac{2}{5}x_1+\dfrac{7}{20}x_2\right)^4\left(\dfrac{17}{20}-\dfrac{3}{5}x_1+\dfrac{17}{20}x_2\right)^4 e^{2-\left(\frac{7}{20}+\frac{2}{5}x_1+\frac{7}{20}x_2\right)^4-\left(\frac{17}{20}+\frac{3}{5}x_1+\frac{17}{20}x_2\right)^4}$.

§ 13. МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

Рассматриваются некоторые из алгоритмов минимизации функций при наличии ограничений: метод проекций градиента (как наиболее естественное обобщение градиентного метода), метод условного градиента, методы штрафных функций.

13.1. Метод проекции градиента

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min, \ x \in X, \ X \subset \mathbf{R}^n. \tag{13.1}$$

Пусть x^1 — начальное приближение к оптимальному плану задачи (13.1). Если x^1 — внутренняя точка множества X, то можно использовать итерацию градиентного спуска с достаточно малым шагом $\theta_1 > 0$ для нахождения следующего приближения: $x^2 = x^1 - \theta_1 \operatorname{grad} f(x^1)$. Трудности возникают в случае, когда x^1 — граничная точка множества X, а движение вдоль направления $l^1 = -\operatorname{grad} f(x^1)$ выводит из множества планов. Тогда целесообразно найти x^2, следуя итерации градиентного спуска, а результат спроектировать на множество X, т. е. найти точку $\bar{x}^2 \in X$, ближайшую к x^2: $\| x^2 - \bar{x}^2 \| = \min \| x^2 - x \|, \ x \in X$.

Проекцией точки $x \in \mathbf{R}^n$ ***на множество*** $X \subset \mathbf{R}^n$ называется такая точка $\bar{x} \in X$, для которой $\| x - \bar{x} \| = \min \| x - z \|, \ z \in X$.

В дальнейшем будем применять обозначение $\bar{x} = P_X(x)$.

Если X — замкнутое и выпуклое множество, то проекция на него произвольной точки $x \in \mathbf{R}^n$ существует и единственна.

В задаче (13.1) предполагаем, что X — замкнутое выпуклое множество, $f \in C^{(1)}(X)$.

Задача отыскания проекции точки $x \in \mathbf{R}^n$ на множество X является, в свою очередь, задачей минимизации квадратичной функции $\| x - z \|^2$ при фиксированном x и при $z \in X$. От умения решать эту задачу зависит эффективность метода проекции градиента. Отметим, что для некоторых множеств X (параллелепипед с гранями, параллельными осям координат, гиперплоскость, полупространство) задача проектирования точки решается достаточно просто в явном виде.

Опишем схему метода проекции градиента. Пусть x^1 — начальное приближение и построено приближение x^k. Тогда приближение x^{k+1} вычисляется по формуле

$$x^{k+1} = P_X(x^k - \theta_k \operatorname{grad} f(x^k)),\ \ k \geq 1. \qquad (13.2)$$

Шаг θ_k выбирается из условий *а*—*в*, п. 12.1.

Если функция $f(x)$ ограничена снизу на множестве X и ее градиент удовлетворяет условию Липшица, то существует $\theta_0 > 0$, что метод сходится с шагом $0 < \theta_k < \theta_0 < \infty$.

Заметим, что если, кроме того, функция $f(x)$, $x \in X$, выпукла, то последовательность $\{x^k\}_{k \geq 1}$, генерируемая методом, является минимизирующей, т. е. $f(x^0) = \inf\limits_{x \in X} f(x) = \lim\limits_{k \to \infty} f(x^k)$.

Пример 13.1. Пусть множество планов X задачи (13.1) имеет вид $X = \{x \in \mathbf{R}^n :\ a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = \overline{1,n}\}$.

В этом случае вспомогательная операция проектирования точки на множество проводится достаточно просто. Вместо равенства (13.2) получается соотношение (рис. 13.1, $n=2$)

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} a_i, & \text{если}\ \ x_i^k - \theta_k \partial f(x^k)/\partial x_i \leq a_i, \\ x_i^k - \theta_k \partial f(x^k)/\partial x_i, & \text{если}\ \ a_i < x_i^k - \theta_k \partial f(x^k)/\partial x_i < b_i, \\ b_i, & \text{если}\ \ x_i^k - \theta_k \partial f(x^k)/\partial x_i \geq b_i,\ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

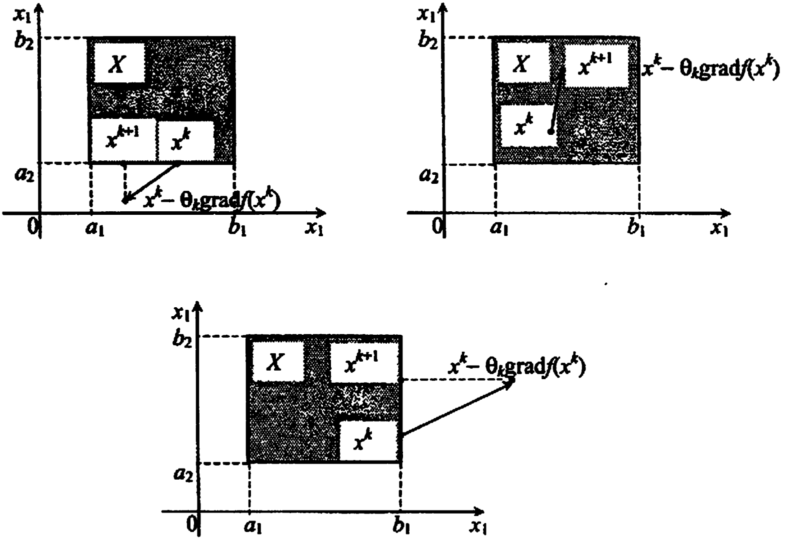


Рис. 13.1

13.2. Метод условного градиента

Пусть требуется решить задачу (13.1). Опишем один из вариантов метода. Предполагаем, что функция $f(x)$, $x \in X$, дифференцируема на X, где X — выпуклый компакт.

Выбираем произвольное начальное приближение $x^1 \in X$. Предположим, что с помощью метода получено приближение $x^k \in X$. Приближение x^{k+1} вычисляют по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \theta_k (\bar{x}^k - x^k),$$

где $\bar{x}^k$ — решение задачи

$$\frac{\partial f'(x^k)}{\partial x}(x - x^k) \to \min, \ x \in X, \tag{13.3}$$

а шаг θ_k удовлетворяет равенству

$$f(x^k + \theta_k(\bar{x}^k - x^k)) = \min_{\theta \in [0;\,1]} f(x^k + \theta(\bar{x}^k - x^k)).$$

Вектор $\bar{x}^k - x^k$, с помощью которого строится следующее приближение x^{k+1}, называется ***условным градиентом*** функции $f(x)$ в точке x^k.

Если, кроме того, предположить, что градиент целевой функции удовлетворяет условию Липшица на X, то метод генерирует релаксационную последовательность x^k, $k \geq 1$, вдоль которой функция $f(x)$ монотонно убывает и $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\partial f'(x^k)}{\partial x}(\bar{x}^k - x^k) = 0$.

Если же функция $f(x)$, $x \in X$, еще и выпукла, то последовательность точек, построенная по описанным правилам, является минимизирующей и сходящейся к множеству точек глобального минимума.

Метод целесообразно применять в тех случаях, когда задача (13.3) (задача минимизации линейной функции на множестве X) решается просто.

13.3. Метод штрафных функций

Метод штрафных функций позволяет заменить исходную задачу условной минимизации последовательностью задач безусловной минимизации. С помощью функций, которые входят в ограничения задачи, строится так называемая ***штрафная функция*** $\Psi(x, p)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}$, которая добавляется к целевой функции исходной задачи. При этом целевая функция вспомогательной задачи совпадает с целевой функцией исходной задачи на множестве X и быстро возрастает вне этого множества, т. е. $\Psi(x,p)=0$, если $x\in X$ и $\Psi(x,p)\to\infty$, $x\notin X$, $p\to\infty$ ($\Psi(x,p)$ — величина штрафа за удаление от множества X).

В задаче (13.1) с множеством планов $X=\{x\in\mathbf{R}^n\colon\ g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m},\ h_j(x)=0,\ j=\overline{1,l}\}$ в качестве простейшей штрафной функции множества X можно взять функцию

$$\Psi(x,p)=p\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}[\max\{0,\,g_i(x)\}]^2+\sum_{j=1}^{l}h_j^2(x)\right)$$

и вместо задачи (13.1) рассмотреть последовательность задач безусловной минимизации

$$f(x^0(p))+\Psi(x^0(p),p)=\min_{x\in\mathbf{R}^n}\{f(x)+\Psi(x,p)\},\quad p\to\infty.$$

Описанный метод решения задачи (13.1) называют ***методом* (*внешних*) *штрафных функций***, чтобы отличать его от ***метода* (*внутренних*) *барьерных штрафных функций***, в котором используется штраф за приближение к границе множества планов X. ***Барьерной штрафной функцией*** множества X называют функцию

$$\Phi(x,p)=\begin{cases}\infty, & \text{если } x\notin X,\\ \to 0, & \text{если } x\in X,\ x\notin\partial X,\ p\to 0,\\ \to\infty, & \text{если } x\in X,\ x\to\partial X.\end{cases}$$

Если, например, $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m}\}$, то примерами барьерных штрафных функций являются следующие функции: $\Phi(x,p)=$ $=-p\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}(1/g_i(x))$ или $\Phi(x,p)=-p\cdot\sum\limits_{i=1}^{m}\ln(-g_i(x))$.

В методе барьерных штрафных функций исходная задача (13.1) заменяется на последовательность задач безусловной минимизации

$$f(x^0(p))+\Phi(x^0(p),p)=\min_{x\in\mathbf{R}^n}\{f(x)+\Phi(x,p)\},\quad p\to 0.$$

Реализация алгоритма метода начинается с выбора начального приближения x^1, штрафного параметра $p_1>0$, числа $\alpha>1$ для увеличения параметра штрафа и числа $\varepsilon>0$ в качестве критерия остановки. Опишем одну итерацию метода, считая, что приближение x^k уже найдено. При начальной точке x^k решаем каким-либо из методов безусловной минимизации следующую задачу:

$$f(x)+\Psi(x,p_k)\to\min,\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

Пусть x^{k+1} — решение последней задачи. Если $\Psi(x^{k+1},p_k)<\varepsilon$, то задача решена (требуемая точность достигнута); в противном случае полагаем $p_{k+1}=\alpha p_k$ и указанную процедуру повторяем.

Если используются барьерные штрафные функции, то в начале процедуры выбираются: план x^1 исходной задачи, для которого $g_i(x^1)<0$, $i=\overline{1,m}$; числа p_1 и $\alpha\in(0;\,1)$; $\varepsilon>0$ — константа остановки.

Пусть приближение x^k найдено. Тогда решаем задачу

$$f(x)+\Phi(x,p_k)\to\min,\quad g(x)<0.$$

Пусть x^{k+1} — решение этой задачи. Если $\Phi(x^{k+1},p_k)<\varepsilon$, то останавливаемся; в противном случае полагаем $p_{k+1}=\alpha p_k$ и указанные операции повторяем.

Пример 13.2. Рассмотрим задачу

$$f(x)=x_1^2+x_2^2\to\min,\quad h(x)=x_1-x_2-1=0.$$

Оптимальный план этой задачи $x^0=(1/2;\,-1/2)$ и $f(x^0)=1/2$. Используя штрафную функцию $\Psi(x,p)=p(x_1-x_2-1)^2$, построим задачу со штрафом при достаточно большом p:

$$f(x)+\Psi(x,p)=x_1^2+x_2^2+p(x_1-x_2-1)^2\to\min,\ x\in\mathbf{R}^2. \qquad (13.4)$$

В силу выпуклости целевой функции этой задачи ее оптимальный план совпадает со стационарной точкой, т. е. с решением системы $x_1+p(x_1-x_2-1)=0$; $x_2-p(x_1-x_2-1)=0$. Решая эту систему, получим, что $x_1^*=-x_2^*$; $x_1^*=p/(1+2p)$, $x_2^*=-p/(1+2p)$. Отсюда следует, что при выборе достаточно большого p решение задачи (13.4) может быть сколь угодно близко к решению исходной задачи.

Пример 13.3. Пусть имеем задачу

$$f(x)=x^2-6x+5\to\min,\quad g(x)=-x+4\le 0.$$

Ее оптимальный план $x^0=4$ и $f(x^0)=-3$. Возьмем штрафную функцию вида $\Psi(x,p)=$ $=p(\max\{0,-x+4\})^2$ (рис. 13.2). Тогда вспомогательная целевая функция будет иметь вид

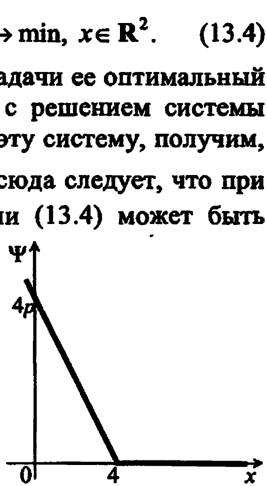


Рис. 13.2

$$f(x)+\Psi(x,p)=x^2-6x+p(\max\{0,-x+4\})^2=x^2-6x+5+$$

$$+\begin{cases}0, & -x+4\le 0,\\ p(-x+4)^2, & -x+4>0.\end{cases} \tag{13.5}$$

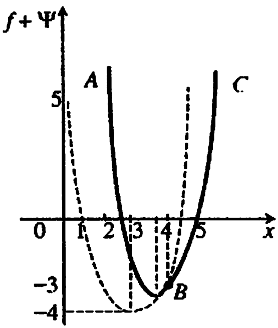


Рис. 13.3

Оптимальный план $x^0(p)$ вспомогательной задачи $f(x)+\Psi(x,p)\to\min$, $x\in\mathbf{R}$, с целевой функцией (13.5) легко вычисляется: $x^0(p) = (4p+3)/(p+1)$ и на нем $f(x^0(p))+\Psi(x^0(p),p) = -3-1/(1+p)$. При $p\to\infty$ последовательность точек $x^0(p) = 4-1/(p+1)$ стремится к $x^0=4$, т. е. к точке минимума исходной задачи. Вид целевой вспомогательной функции при $p=2$ изображен на рис. 13.3: ветвь AB $f(x)+\Psi(x,2)=3(x-11/3)^2-10/3$ при $x<4$, ветвь BC $f(x)=x^2-6x+5$ при $x\ge 4$.

Пример 13.4. Рассмотрим задачу

$$f(x)=x_1^2+x_2^2\to\min,$$
$$g_1(x)=-x_1+1\le 0,$$
$$g_2(x)=-x_2\le 0.$$

Решим ее аналитически с помощью логарифмической барьерной штрафной функции. Составим вспомогательную функцию $f(x)+\Phi(x,p) = x_1^2+x_2^2-p\ln(x_1-1)$ и найдем ее безусловный минимум по x:

$$2x_1-p/(x_1-1)=0,$$
$$2x_2-p/x_2=0.$$

Отсюда $x_1^0(p)=(1+\sqrt{1+2p})/2$, $x_2^0(p)=\sqrt{p/2}$. Очевидно, что при $p\to 0$ будем иметь: $x_1^0(p)\to 1=x_1^0$, $x_2^0(p)\to 0=x_2^0$, где $x^0=(x_1^0,x_2^0)=(1;\ 0)$ — оптимальный план исходной задачи.

Замечание 13.1. Для решения задачи $f(x)\to\min\limits_{x\in X}$, $X=\{x\in\mathbf{R}^n:$ $g_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m},\ h_j(x)=0,\ j=\overline{1,l}\}$, может использоваться комбинированный метод штрафных функций, который состоит в следующем. Для ограничений типа неравенств применяется метод барьерных штрафных функций, а для ограничений равенств — метод внешних штрафных функций. И далее исходная задача сводится к решению последовательности задач безусловной минимизации

$$R(x,p)=f(x)+\frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{l}h_j^2(x)-p\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}\to\min,\ p\to+0,$$

или

$$R(x,p)=f(x)+\frac{1}{2p}\sum_{j=1}^{l}h_j^2(x)-p\sum_{i=1}^{m}\ln(-g_i(x))\to\min,\ \ p\to+0,$$

где p — параметр штрафа. Начальное приближение x^1 задается так, чтобы $g_i(x^1)<0$, $i=\overline{1,m}$, а на каждой k-й итерации при заданном параметре p_k с помощью какого-либо метода безусловной минимизации находится минимум вспомогательной функции $R(x,p)$. Целесообразно полагать $p_1=1$, а потом на последующих итерациях уменьшать параметр штрафа в четыре раза.

Замечание 13.2. Метод модифицированных функций Лагранжа по стратегии аналогичен методу внешних штрафов, с той лишь разницей, что штрафная функция добавляется не к целевой функции задачи со смешанными ограничениями, а к классической функции Лагранжа. В этом методе исходная задача сводится к решению последовательности задач безусловной минимизации модифицированной функции Лагранжа

$$F(x,\ \lambda,\ \mu,\ p)=f(x)+\sum_{j=1}^{l}\mu_j h_j(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)+\frac{p}{2}\sum_{j=1}^{l}h_j^2(x)+$$

$$+\frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{m}\Big((\max\{0,\ \lambda_i+pg_i(x)\})^2-\lambda_i^2\Big)\to\min,\ p\to\infty,$$

где $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m)$, $\mu=(\mu_1,\ldots,\ \mu_l)$ — векторы множителей Лагранжа, p — параметр штрафа.

На начальном этапе задается начальное приближение x^1, начальное значение параметра штрафа p_1, число $\beta>1$ для увеличения параметра штрафа, начальные векторы λ^1, μ^1 множителей Лагранжа и число $\varepsilon>0$ для остановки алгоритма. Более подробное описание метода можно найти в литературе.

Упражнения и задания

13.1. Найти проекции градиентов, вычисленных в точке x^*, на плоскость P для функций $f(x)$:

1. $f(x)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2$, $x^*=(1;-1;1)$,

   P: *а*) $x_3=0$; *б*) $x_2=0$; *в*) $x_1=0$; *г*) $x_2-x_1=0$.

2. $f(x)=(x_1-1)^2+x_1x_2+(x-2)^2$, $x^*=(0;1;1)$,

   P: *а*) $x_2-x_1=0$; *б*) $x_3=0$; *в*) $x_2=0$.

3. $f(x)=x_1^3+x_1x_2-x_2^2x_1^2+x_3^2$, $x^*=(1;1;1)$,

   P: *а*) $x_3=0$; *б*) $x_2=0$; *в*) $x_1=0$.

13.2. Решить задачи проектирования произвольной точки из $\mathbf{R}^n$ на множества:

1) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ d_*\le x\le d^*,\ d_*,\ d^*\in\mathbf{R}^n\}$;

2) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ x\ge 0\}$;

3) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \|x-x^*\|\le 1,\ x^*\in\mathbf{R}^n\}$;

4) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \|x-x^*\|\ge 1,\ x^*\in\mathbf{R}^n\}$;

5) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ c'x=\text{const}\}$;

6) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ c'x\le\text{const}\}$;

7) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ AX=b\}$, $\operatorname{rank}A=m$, $m<n$.

13.3. Определить проекции градиента функции $f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ на множество X, задаваемое ограничениями $h_1(x)=2x_1+x_2-6=0$, $g(x)=-x_1+x_3+8\le 0$, из точки $x^*=(1;1;1)$.

13.4. Описать алгоритмы метода проекции градиента и метода условного градиента для задачи $f(x)\to\max$, $x\in X$.

13.5. Решить следующие задачи методом проекции градиента с начальным приближением x^1, изобразить графически:

1) $f(x)=(x_1-4)^2+(x_2-5)^2\to\min$, $x_1+x_2-1=0$, $x^1=(0;0)$;

2) $f(x)=x_1^2+x_2^2-4x_1-2x_2\to\min\limits_X$, $X=\{x\in\mathbf{R}^2:\ 0\le x_1\le 1;\ 0\le x_2\le 1\}$,

   $x^1=(0;0)$;

3) $f(x)=x_1^2+\dfrac{1}{4}x_2^2-4x_1+x_2\to\min\limits_X$, $X=\{x\in\mathbf{R}^2:\ 4\le x_1\le 8;\ -5\le x_2\le 1\}$,

   $x^1=(6;\ 0)$;

4) $f(x)=(x_1-1)^2+(x_2+1)^2\to\min\limits_X$, $X=\{x\in\mathbf{R}^2:\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\}$,

   а) $x^1=(0;0)$; *б*) $x^1=(0;1)$; *в*) $x^1=(1;0)$.

13.6. Методом проекции градиента решить следующие задачи:

1. $f(x)=(1-x_1)^2-10(x_2-x_1)^2+x_1^2-2x_1x_2+e^{-x_1-x_2}\to\min,$
$$\begin{cases}2x_1+5x_2\le 25,\\-x_1+2x_2\le 8,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

2. $f(x)=x_1^2+x_1x_2-2x_2^2-12x_1-18x_2\to\min,$
$$\begin{cases}-3x_1+6x_2\le 9,\\-2x_1+\ \ x_2\le 1,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

3. $f(x)=3x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2\to\min,$
$x_1+x_2\le 4.$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

4. $f(x)=(x_1-4)^2+(x_2-2)^2\to\min,$
$$\begin{cases}x_1+\ \ x_2\le 3,\\x_1+2x_2\le 4,\end{cases}$$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

5. $f(x)=-x_1-x_2\to\min,$
$x_1^2+x_2^2\le 25.$

6. $f(x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_1x_2-2x_1x_3+x_2x_3-4x_1-6x_2\to\min,$
$x_1+2x_2+x_3\le 4,$
$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0.$

13.7. Найти экстремум линейной функции $f(x)=c'x$ на множествах:

1) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ d_*\le x\le d^*,\ \ d_*,d^*\in\mathbf{R}^n\};$

2) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ |x_i|\le\alpha,\ i=\overline{1,n},\ \alpha>0\};$

3) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \|x-x^*\|\le\alpha,\ \alpha>0,\ x^*\in\mathbf{R}^n\};$

4) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^2\le\alpha,\ \alpha>0;\ \alpha_i,\ i=\overline{1,n},$ – заданные числа$\};$

5) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1,\ \ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}\};$

6) $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ c'x+\dfrac{1}{2}x'Dx\le\alpha^2,\ \ D>0\}.$

13.8. Решить задачи 13.6 (1, 2, 3, 4) методом условного градиента. Сравнить с результатами решений, полученных методом проекции градиента.

13.9. Решить задачи 13.5 методом условного градиента. Дать геометрическую интерпретацию: изобразить линии уровня целевых функций, множества ограничений, полученные приближения. Найти точное решение и сравнить с полученным результатом.

13.10. Методом условного градиента решить задачи с начальным приближением x^1:

1. $f(x)=2x_1^2+x_1^2+e^{x_1+x_2}\to\min\limits_{x\in X}$,

$X=\{x\in\mathbf{R}^2:\ -2\le x_i\le 2,\ i=1,2\}$, $x^1=(0;\,0)$.

2. $f(x)=e^{x_1}+(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\to\min\limits_{x\in X}$,

$X=\{x\in\mathbf{R}^4:\ \|x\|\le 2\}$, $x^1=(0;\,1;\,-1;\,0)$.

3. $f(x)=9e^{x_1}+x_1^2x_2+x_2^2+2x_3^2+5x_2-x_3\to\min\limits_{x\in X}$,

$$X=\left\{x\in\mathbf{R}^3:\ \begin{array}{c}\begin{cases}x_1+x_2-x_3\le -2,\\ -3x_1-x_2+x_3\le\ \ 1,\end{cases}\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0\end{array}\right\},\quad x^1=(0;\,1;\,1).$$

13.11. Для следующих задач получить формулы, позволяющие вычислять приближения x^k и шаг θ_k:

1. $f(x)=c'x+\dfrac{1}{2}x'Dx\to\min\limits_{x\in X}$,

$X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ |x_i|\le 1,\ i=\overline{1,m}\}$, $D>0$ – $n\times n$-матрица, $c\in\mathbf{R}^n$.

2. $f(x)=\dfrac{1}{2}\|Ax+b\|^2\to\min\limits_{x\in X}$, $X=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1,\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}\}$,

$A>0$ – $m\times n$-матрица, $b\in\mathbf{R}^n$.

13.12. Методом штрафов решить задачи:

1. $f(x)=e^{x_1}+x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2\to\min\limits_{x\in X}$, $\quad x_1+2x_2=6$.

2. $f(x)=(x_1-6)^2+(x_2-8)^2\to\min\limits_{x\in X}$, $\quad x_1^2-x_2\le 0$.

3. $f(x)=4x_1^2-5x_1x_2+x_2^2\to\min\limits_{x\in X}$,

$$\begin{cases}x_1^2-x_2\le -2,\\ x_1+x_2\le 6,\end{cases}$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

4. $f(x)=-4x_1^2-8x_1+x_2+3\to\max$, $\quad -x_1-x_2=2$.

5. $f(x)=x_1^2+x_2^2\to\min$, $\quad -x_1-x_2+1\le 0$.

6. $f(x)=4x_1^2+4x_1+x_2^2-8x_2+5\to\min$, $\quad 2x_1-x_2=6$.

7. $f(x)=-8x_1^2+4x_1-x_2^2+12x_2-7\to\max$, $\quad 2x_1+3x_2=-6$.

8. $f(x)=(x_1+4)^2+(x_2-4)^2\to\mathrm{extr}$, $\quad 2x_1-x_2\le 2,\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$.

9. $f(x)=\ln x_1-x_2\to\min$, $\quad\begin{cases}1-x_1\le 0,\\ x_1^2+x_2^2-4=0.\end{cases}$

10. $f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + \quad x_2 \le 3, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4. \end{cases}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{3}(x_1 + 1)^2 + x_2 \to \min,$ $-x_1 + 1 \le 0,$ $x_2 \ge 0.$

12. $f(x) = \dfrac{4}{x_1} + \dfrac{9}{x_2} x_1 + x_2 \to \min,$ $x_1 + x_2 \le 6,$ $x_1 \ge 0,$ $x_2 \ge 0.$

13. $f(x) = e^{x_1} - x_1 x_2 + x_2^2 \to \min.$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 2. \end{cases}$

14. $f(x) = -x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - e^{-x_1 - x_2} \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + x_2 \le 1. \end{cases}$

15. $f(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9, \\ x_1 - 2x_2^2 + x_3 = 2. \end{cases}$

16. $f(x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 \to \min,$ $x_1 + x_2 = 4.$

17. $f(x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 \to \min,$ $x_1 + x_2 \ge 4,$ $x \ge 0,$ $x_2 \ge 0.$

18. $f(x) = x_1^3 + x_2^3 \to \min,$ $x_1 + x_2 = 1.$

19. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \ \ 2, \\ \qquad -x_2 \le -1. \end{cases}$

20. $f(x) = x^2 - 4x \to \min,$ $x \le 1.$

21. $f(x) = x_1 + x_2 \to \min,$ $x_1^2 - x_2 \le 0,$ $x_1 \ge 0.$

22. $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,$ $x_1 + x_2 \le 5.$

23. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 \qquad \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2. \end{cases}$

24. $f(x) = \dfrac{1}{2} x_1^2 + \dfrac{1}{6} x_2^2 \to \min,$ $x_1 + x_2 = 1.$

25. $f(x) = x_1 + x_2 \to \min,$ $x_1^2 + x_2^2 = 2.$

13.13. Методом барьерных штрафных функций решить задачи 13.12 (2, 3, 5, 8, 10, 11, 17, 19—23).

13.14. Комбинированным методом штрафных функций решить задачи 13.12 (9, 13, 14).

§ 14. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ (ДП)

Некоторые оптимизационные задачи, особенно экономического характера, разбиваются на этапы, под которыми понимаются год, квартал, месяц и т. д. Иногда этапы не связаны со временем, а просто задача разбивается на отдельные шаги, называемые этапами.

Динамическое программирование (ДП) — это методы решения многошаговых (многоэтапных) и динамических задач оптимизации.

Основная идея ДП была развита Р. Беллманом в начале 50-х гг. XX в. [9]. Возникновение ДП связано с исследованием некоторых типов многошаговых процессов управления (см. гл. 6). Затем ДП было применено к другим типам задач, совершенно не связанным с теорией управления. В настоящем параграфе показано применение ДП к решению нескольких специальных задач нелинейного программирования.

14.1. Три этапа решения задач методами ДП

Основная идея методов ДП состоит в разбиении исходной (сложной) задачи оптимизации на ряд более простых, однотипных, меньшего размера задач. При этом на каждом шаге оптимизируется простейшая задача не изолированно от других, а в тесной связи с остальными.

Решение любой задачи методами ДП состоит из трех основных этапов. Поясним их суть на следующем формальном примере.

Пример 14.1. Пусть имеется некоторый процесс, состояние которого описывается n переменными $x_1, \ldots, x_n$, зависящими от других r переменных $u_1, \ldots, u_r$, которые могут принимать значения из некоторого заданного множества. Последние переменные называют ***управлениями***. Под воздействием этих переменных процесс за несколько шагов (за некоторый промежуток времени) переходит из одного состояния (начального) $x^{н} = (x_1^{н}, \ldots, x_n^{н})$ в другое (конечное) x^N, которое не фиксировано. Очевидно, $x^N = x^N(u)$, где $u = (u_1, \ldots, u_r)$ — ***вектор управления*** (или сокращенно ***управление***), т. е. x^N зависит от выбранного управления. Задача состоит в максимизации функции конечного состояния $\varphi(x^N(u)) \to$ $\to \max$, где максимум берется по всем возможным управлениям.

Математическую модель этой (абстрактной) задачи точно нельзя сформулировать, поскольку конкретно не указан закон пошагового перехода процесса из одного состояния в другое. Запишем его тоже в абстрактной форме: $x^{s+1} = f(x^s, u^s)$, $s = \overline{1, N-1}$, где $u^s \in U^s$, U^s — заданное множество из $\mathbf{R}^r$ (иногда состоящее из конечного числа элементов), $f(x, u)$ — заданная n-мерная функция. Пусть, например, $x \in \mathbf{R}$, $u \in \mathbf{R}$, причем $U^s = U = \{u_{(1)}, u_{(2)}\}$, т. е. состоит только из двух элементов. Тогда указанный закон перехода процесса из состояния x^1 в любое другое можно изобразить графически. На рис. 14.1 по горизонтальной оси указаны этапы, по вертикальной — значения x^s, $s=\overline{1,4}$. На этом рисунке, например, под $u_{(1)}^{(3)}$ понимается набор управлений из U, под воздействием которых процесс перешел из состояния x^1 в состояние $x^4(u_{(1)}^{(3)})$, т. е. $u_{(1)}^{(3)}=\{u_{(1)},\ u_{(1)},\ u_{(2)}\}$. Аналогично, например, получаем $u_{(4)}^{(3)}=\{u_{(1)},\ u_{(2)},\ u_{(2)}\}$, $u_{(2)}^{(2)}=\{u_{(1)},\ u_{(2)}\}$.

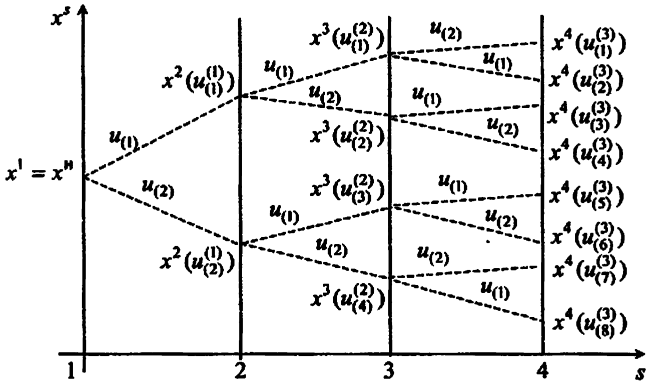


Рис. 14.1

Таким образом, формально математическая модель принимает вид

$$\varphi(x^N)\to\max,\ x^{s+1}=f(x^s,u^s),\ x^1=x^н,\ u^s\in U^s,\ s=\overline{1,N-1}. \quad (14.1)$$

Решение задачи (14.1) назовем ***оптимальным процессом***.

Укажем основные этапы решения задач типа (14.1).

I этап — ***инвариантное погружение***. Исходная задача погружается в семейство подобных ей задач. Этот этап представляет в некотором смысле искусство и в каждом конкретном случае зависит от опыта, изобретательности и интуиции исследователя.

В задаче (14.1) через X^k обозначим множество всевозможных состояний рассматриваемого процесса после $(k-1)$-го шага. На рис. 14.1 $X^1=\{x^1\}$, $X^2=\{x^2(u_{(1)}^{(1)}),\ x^2(u_{(2)}^{(1)})\}$ и т. д. Тогда указанным выше семейством будет совокупность задач

$$\varphi(x^N)\to\max,\quad x^{s+1}=f(x^s,\ u^s),\ x^k=x,\ u^s\in U^s,\ s=\overline{k,N-1}, \quad (14.2)$$

зависящих от k и $x\in X^k$.

Как видим, при $k=1, x=x^{н}$ получим задачу (14.1).

<u>II этап</u> — ***вывод уравнений для функции Р. Беллмана.*** При выводе этих уравнений используется принцип оптимальности. В общих чертах для задачи (14.1) суть ***принципа оптимальности*** состоит в следующем: *какое бы состояние оптимального процесса ни взять, относительно этого состояния оставшаяся часть оптимального процесса является оптимальным процессом.*

Исходя из этого принципа, на k-м шаге вводим ***функцию Беллмана***, представляющую собой максимальное значение целевой функции в зависимости от выбранного на этом шаге состояния. Очевидно, x^N зависит от управления $u^{(k)}$ и от состояния x: $x^N = x^N(u^{(k)}, x)$, где $u^{(k)} = \{u^k, u^{k+1}, ..., u^{N-1}\}$. Поэтому функцию Беллмана для семейства (14.2) можно записать следующим образом:

$$B_k(x) = \max_{u^{(k)} \in U^{(k)}} \varphi(x^N(u^{(k)}, x)),$$

где $U^{(k)} = U^k \times U^{k+1} \times \ldots \times U^{N-1}$.

Вывод уравнений Беллмана для функции $B_k(x)$ и составляет содержание второго этапа.

Для семейства (14.2) на k-м шаге выбираем произвольное управление $v \in U^k$. Тогда $x^{k+1} = f(x, v)$, а максимальное значение целевой функции задачи при выбранном управлении, согласно определению функции Беллмана, равно $B_{k+1}(x^{k+1}) = B_{k+1}(f(x, v))$. Найдя максимум по $v \in U^k$, получим уравнение Беллмана $B_k(x) = \max\limits_{v \in U^k} B_{k+1}(f(x, v))$. Начальное условие для уравнения Беллмана очевидно: $B_{N-1}(x) = \max\limits_{v \in U^{N-1}} \varphi(f(x, v))$.

Введенная ***функция Беллмана*** называется ***обратной.***

<u>III этап</u> — ***решение уравнений Беллмана и всей задачи в целом.*** Очевидно, для задачи (14.1) максимальное значение целевой функции равно $B_1(x^{н})$. Чтобы его найти, последовательно решаем уравнения Беллмана, полагая $k = N-2, \ldots, 1$. Тем самым находим числа $B_{N-1}(x)$, $B_{N-2}(x)$, …, $B_1(x)$, а заодно значения управлений $u^{(N-1)}(x)$, $u^{(N-2)}(x)$, …, $u^{(1)}(x)$. Оптимальным будет управление $u^{(1)}(x^{н})$, которое, согласно закону изменения состояния процесса, определит оптимальную последовательность векторов x^k, $k=\overline{1,N}$.

Такова общая схема решения задач методами ДП. В следующих пунктах представлено решение некоторых конкретных задач.

14.2. Задача распределения ресурсов

Задача. Имеется n технологических процессов (ТП), в которые вкладывается некоторая сумма денег в размере c д. е. Известно, что если i-му процессу выделить сумму в размере x, то прибыль будет равна $f_i(x)$ д. е. Требуется распределить имеющийся ресурс между технологическими процессами так, чтобы суммарная прибыль была максимальной.

Составим математическую модель этой задачи.

Обозначим через x_i, $i=\overline{1,n}$, количество денег, выделяемых на i-й ТП. Очевидно, $0 \le x_i \le c$, $i=\overline{1,n}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$. Чтобы не усложнять задачу, случай, когда на переменные x_i накладываются дополнительные ограничения, в данном пособии не рассматривается. Тогда математическая модель поставленной задачи будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = c,\ 0 \le x_i \le c,\ i=\overline{1,n}. \tag{14.3}$$

Согласно п. 14.1, осуществляя инвариантное погружение задачи (14.3), вложим ее в следующее семейство аналогичных задач:

$$\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \max,\ \sum_{i=1}^{k} x_i = y,\ 0 \le x_i \le y,\ i=\overline{1,k}, \tag{14.4}$$

с произвольным числом k технологических процессов $(1 \le k \le n)$ и произвольным запасом y сырья $(0 \le y \le c)$. Введем в рассмотрение функцию Беллмана $B_k(y)$ как максимальное значение целевой функции в задаче (14.4):

$$B_k(y) = \max \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i),\ \sum_{i=1}^{k} x_i = y,\ 0 \le x_i \le y,\ i=\overline{1,k}. \tag{14.5}$$

Заметим, что по сравнению с п. 14.1 ***функция Беллмана*** (14.5) является ***прямой***.

Перейдем ко второму этапу решения задачи методом ДП. Составим уравнение для функции Беллмана. По определению, $B_k(y)$ есть максимальное значение целевой функции в задаче (14.4). Рассмотрим задачу (14.4) при некоторых k, y. Выделим k-му ТП сумму в объеме z $(0 \le z \le y)$. Между остальными ТП распределим оставшуюся сумму $y - z$ оптимальным образом, т. е. будем иметь задачу

$$\sum_{i=1}^{k-1} f_i(x_i)+f_k(z)\to \max,\quad \sum_{i=1}^{k-1} x_i = y-z,\quad 0\le x_i\le y,\quad i=\overline{1,k-1}. \qquad (14.6)$$

В соответствии с (14.5) максимальное значение целевой функции в задаче (14.6) будет равно $B_{k-1}(y-z)+f_k(z)$. Если же теперь взять максимум последнего выражения по z, $0\le z\le y$, то получим

$$B_{k-1}(y-x_k^0(y))+f_k(x_k^0(y))=\max_{0\le z\le y}(B_{k-1}(y-z)+f_k(z)). \qquad (14.7)$$

Решением задачи (14.7) будет $z^0=x_k^0(y)$. С другой стороны, правая часть равенства (14.7) есть максимальное значение целевой функции в задаче (14.4), т. е. $B_k(y)$. Таким образом,

$$B_k(y)=\max_{0\le z\le y}(B_{k-1}(y-z)+f_k(z)),\ k=\overline{2,n},\quad 0\le y\le c. \qquad (14.8)$$

Мы получили для функции Беллмана рекуррентно-функциональное уравнение, которое называют ***уравнением Беллмана***. Начальное условие, необходимое для его решения, следует непосредственно из определения (14.5):

$$B_1(y)=f_1(y),\quad 0\le y\le c. \qquad (14.9)$$

Третий этап применения динамического программирования состоит в поиске решения уравнения Беллмана и построении по нему решения исходной задачи.

В уравнении (14.8) положим $k=2$. Будем иметь

$$B_2(y)=\max_{0\le z\le y}(B_1(y-z)+f_2(z)),\quad 0\le y\le c. \qquad (14.10)$$

Для каждого y, согласно равенству (14.7), найдем значение $z^0=$ $=x_2^0(y)$, на котором достигается максимум в правой части (14.10), и само значение максимума $B_2(y)$. Полагая в (14.8) k=3, 4, …, n и решая соответствующие задачи максимизации, получаем последовательность функций $B_3(y)$, ..., $B_n(y)$, $0\le y\le c$, и параллельно значения $x_3^0(y)$, ..., $x_n^0(y)$, $0\le y\le c$. Очевидно, $B_n(c)$ — максимальная прибыль.

Как легко теперь видеть, решение x_1^0, ..., x_n^0 исходной задачи (14.3) может быть найдено следующим образом:

$$x_n^0=x_n^0(c),\quad x_{n-1}^0=x_{n-1}^0(c-x_n^0),\ldots,\ x_2^0=x_2^0(c-\sum_{i=3}^{n} x_i^0),\quad x_1^0=c-\sum_{i=2}^{n} x_i^0.$$

Одним из основных достоинств ДП является то, что этот метод не использует аналитические свойства элементов задачи: исходные функции могут быть заданы таблично, графически, алгоритмически и т. п., что особенно ценно с практической точки зрения. Дело в том, что на практике, как правило, невозможно установить аналитическую зависимость прибыли $f_i(x)$ от количества вкладываемых денег x, выделяемых на i-й ТП. Чаще всего значения функций $f_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, могут быть экспериментально найдены лишь для отдельных значений аргумента x, т. е. эти функции задаются таблично. При этом при постановке задачи о распределении ресурсов, естественно, предполагается, что на каждый ТП может выделяться такой ресурс, для которого известна прибыль.

Рассмотрим числовой пример такой задачи.

Пример 14.2. Пусть имеются 4 ТП, а запасы сырьевых ресурсов в денежном выражении составляют 60 д. е. Значения функций прибыли $f_i(x)$, $i=\overline{1,4}$, известны лишь для дискретных значений x и приведены в табл. 14.1. Требуется найти план распределения ресурсов, максимизирующий суммарную прибыль, при условии, что на каждый ТП может выделяться количество сырья, кратное 10 д. е.

Таблица 14.1

x	0	10	20	30	40	50	60
f_1	0	15	20	25	30	35	40
f_2	0	10	15	19	25	28	33
f_3	0	10	18	20	25	29	35
f_4	0	15	20	25	30	35	40

Математическая модель такой задачи имеет вид (14.3), где $n=4$, $c=60$.

Согласно (14.9), получаем вторую строку табл. 14.2.

Для $k=2$ уравнение (14.10) в рассмотренном примере имеет вид

$$B_2(y)=\max_{z\in\{0,\,10,\,20,\,\dots,\,y\}}\left[B_1(y-z)+f_2(z)\right],\ \ y\in\{0,10,20,\dots,60\}=G. \quad (14.11)$$

Для каждого $y\in G$ с помощью перебора, используя данные для $B_1(y)$, находим значение максимума в правой части (14.11), т. е. $B_2(y)$, и значение $z^0=x_2^0(y)$, на котором этот максимум достигается. Результаты вычисления приведены в третьей строке табл. 14.2.

После этого, полагая в уравнении (14.8) $k=3$, переходим к вычислению $B_3(y)$, $x_3^0(y)$ и $B_4(y)$, $x_4^0(y)$, $y \in G$. В итоге табл. 14.2 будет заполнена полностью.

Таблица 14.2

y	0	10	20	30	40	50	60
$B_1(y)$	0	15	20	25	30	35	40
$B_2(y)$	0	15	25	30	35	40	45
$x_2^0(y)$	0	10	10	10; 20	10; 20	10; 20; 40	10; 20; 40
$B_3(y)$	0	15	25	35	43	48	53
$x_3^0(y)$	0	0	0; 10	10	20	20	20
$B_4(y)$	0	15	30	40	50	58	63
$x_4^0(y)$	0	0; 10	10	10	10	10	10; 20

С помощью этой таблицы легко находится решение рассмотренной задачи. Максимально возможная прибыль в ней составляет $B_4(60) = 63$ д. е. Для того чтобы получить такую прибыль, сырье можно распределить одним из следующих способов: 1) на 4-й ТП следует выделить $x_4^0 = x_4^0(60) = 10$ д. е., на 3-й ТП — $x_3^0 = x_3^0(50) = 20$ д. е., на 2-й — $x_2^0 = x_2^0(30) = 10$ д. е., на 1-й — $x_1^0 = 60 - (10 + 20 + 10) = 20$ д. е.; 2) $x_4^0 = x_4^0(60) = 10$, $x_3^0 = x_3^0(50) = 20$, $x_2^0 = x_2^0(30) = 20$, $x_1^0 = 60 - (10 + 20 + 20) = 10$ д. е.; 3) $x_4^0 = x_4^0(60) = 20$, $x_3^0 = x_3^0(40) = 20$, $x_2^0 = x_2^0(20) = 10$, $x_1^0 = 60 - (20 + 20 + 10) = 10$ д. е.

Достоинством динамического программирования является также то, что его вычислительная процедура изменяется незначительно при изменении параметров задачи. Предположим, что в примере 14.2 4-й ТП по некоторым причинам остановлен и требуется перераспределить сырье между первыми тремя процессами. Для нахождения оптимального распределения ресурсов в новых условиях опять используем табл. 14.2: $x_3^0 = x_3^0(60) = 20$, $x_2^0 = x_2^0(40) = 10$ (либо 20). Тогда $x_1^0 = 60 - 30 = 30$ (либо $60 - 40 = 20$). Суммарная прибыль при таком распределении составит $B_3(60) = 53$ д. е.

Вернемся к задаче распределения ресурсов между четырьмя технологическими процессами, но предположим теперь, что запасы сырья уменьшились с 60 до 40 д. е. С помощью табл. 14.2 легко находится решение задачи и в этой ситуации: $x_4^0 = x_4^0(40) = 10$, $x_3^0 = x_3^0(30) = 10$, $x_2^0 =$

$= x_2^0(20) = 10$, $x_1^0 = 40 - 30 = 10$. Максимальная прибыль в этом случае равна $B_4(40) = 50$ д. е.

Пример 14.3. Имеются 3 ТП. Первый процесс дает прибыль, равную $f_1(x) = x - 6$ д. е., при вложении в него средств в объеме x д. е. (сначала является убыточным), второй ТП — $f_2(x) = 2x - x^2 + 1$ (имеет первоначальный запас), третий ТП — $f_3(x) = 5 - x$ (имеет первоначальный запас, а затем становится убыточным). Требуется распределить капиталовложения в объеме $c = 19/4$ д. е., доставляющие максимальную суммарную прибыль.

Математическая модель имеет вид

$$(x_1 - 6) + (2x_2 - x_2^2 + 1) + (5 - x_3) \to \max,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 19/4, \quad 0 \le x_i \le 19/4, \quad i = \overline{1,3}.$$

Согласно (14.9), имеем $B_1(y) = f_1(y) = y - 6$, а уравнение (14.8) при $k = 2$ принимает вид

$$B_2(y) = \max_{0 \le z \le y} (f_2(z) + B_1(y - z)) =$$
$$= \max_{0 \le z \le y} (2z - z^2 + 1 + y - z - 6) = y - 5 + \max_{0 \le z \le y} (z - z^2).$$

Решение этого уравнения дает

$$B_2(y) = \begin{cases} 2y - y^2 - 5, & \text{если } 0 \le y \le 1/2 \quad (\text{при этом } z^0 = x_2^0(y) = y); \\ y - 5 + 1/4, & \text{если } 1/2 \le y \le 19/4 \quad (\text{при этом } z^0 = x_2^0(y) = 1/2). \end{cases}$$

Поскольку $0 \le y \le c = 19/4$, причем нас будет интересовать только $B_3(19/4)$, то можем рассматривать $y > 1/2$. Тогда

$$B_3(y) = \max_{0 \le z \le y} (f_3(z) + B_2(y - z)) = \max_{0 \le z \le y} (5 - z + y - z - 5 + 1/4) =$$
$$= y + 1/4 - \min_{0 \le z \le y} (2z) = y + 1/4 \quad (\text{при этом} \quad z^0 = x_3^0(y) = 0).$$

Найдем оптимальное распределение денежных средств. Отметим, что максимальная прибыль равна $B_3(19/4) = 5$ д. е., при этом $x_3^0 = x_3^0(19/4) = 0$, т. е. убыточному процессу не выделяется денежных средств. Далее средства распределяются следующим образом: $x_2^0 = 1/2$ д. е., $x_1^0 = 19/4 - 1/2 = 17/4$ д. е.

Задания

14.1. Найти оптимальное распределение ресурсов между ТП и максимальную прибыль в задачах с исходными данными, приведенными ниже. Найти также решения задачи при измененных данных: *а*) том же ресурсе, но меньшем числе ТП; *б*) уменьшенном ресурсе, но том же количестве ТП; *в*) уменьшенных ресурсе и количестве ТП.

1. $n=4$, $c=12$

x	0	2	4	6	8	10	12
f_1	0	8	13	20	23	26	30
f_2	0	18	25	27	30	33	37
f_3	0	10	15	27	33	37	42
f_4	0	10	21	28	34	38	43

2. $n=4$, $c=25$

x	0	5	10	15	20	25
f_1	0	10	15	23	36	40
f_2	0	15	25	32	38	45
f_3	0	12	20	25	30	38
f_4	0	15	21	25	30	35

3. $n=4$, $c=5$

x	0	1	2	3	4	5
f_1	0	4	9	12	15	18
f_2	0	8	10	15	18	21
f_3	0	6	10	15	20	25
f_4	0	5	9	13	17	20

4. $n=4$, $c=15$

x	0	3	6	9	12	15
f_1	0	4	8	12	16	20
f_2	0	6	11	16	21	25
f_3	0	7	12	16	21	23
f_4	0	6	10	14	18	21

5. $n=4$, $c=10$

x	0	2	4	6	8	10
f_1	0	8	15	20	25	30
f_2	0	12	18	23	28	35
f_3	0	12	22	30	36	40
f_4	0	8	17	25	30	34

6. $n=4$, $c=20$

x	0	4	8	12	16	20
f_1	0	10	18	25	31	38
f_2	0	12	18	24	29	35
f_3	0	13	20	25	32	38
f_4	0	12	19	25	33	37

7. $n=3$, $c=60$

x	0	10	20	30	40	50	60
f_1	0	15	20	25	30	35	40
f_2	0	10	17	25	32	39	43
f_3	0	12	18	23	34	40	45

8. $n=3$, $c=6$

x	0	1	2	3	4	5	6
f_1	0	3	7	10	15	20	25
f_2	0	6	8	10	13	17	24
f_3	0	4	8	10	14	17	23

9. $n=3$, $c=18$

x	0	3	6	9	12	15	18
f_1	0	10	15	23	28	35	40
f_2	0	12	18	25	30	38	45
f_3	0	15	21	28	34	39	46

10. $n=3$, $c=12$

x	0	2	4	6	8	10	12
f_1	0	10	15	20	25	30	35
f_2	0	8	13	18	24	30	34
f_3	0	6	12	18	24	30	36

11. $n=4$, $c=50$

x	0	10	20	30	40	50
f_1	0	8	16	24	32	40
f_2	0	12	20	28	36	42
f_3	0	10	18	26	34	42
f_4	0	9	17	25	33	41

12. $n=4$, $c=25$

x	0	5	10	15	20	25
f_1	0	18	36	54	72	90
f_2	0	20	40	60	80	89
f_3	0	22	45	66	80	92
f_4	0	15	30	45	60	75

13. $n=3$, $c=30$

x	0	5	10	15	20	25	30
f_1	0	10	20	29	37	45	50
f_2	0	15	24	30	39	45	49
f_3	0	14	23	32	41	50	53

14. $n=3$, $c=6$

x	0	1	2	3	4	5	6
f_1	0	22	36	50	65	77	85
f_2	0	22	40	58	70	80	85
f_3	0	20	35	50	60	72	79

15. $n=4$, $c=15$

x	0	3	6	9	12	15
f_1	0	6	15	19	25	33
f_2	0	9	17	24	27	30
f_3	0	9	15	20	25	30
f_4	0	7	13	23	27	31

16. $n=4$, $c=50$

x	0	10	20	30	40	50
f_1	0	15	30	45	60	75
f_2	0	18	36	54	70	84
f_3	0	20	42	60	75	85
f_4	0	15	30	45	60	75

17. $n=3$, $c=10$

x	0	2	4	6	8	10
f_1	0	6	9	12	15	18
f_2	0	4	8	12	16	19
f_3	0	4	7	10	13	15

18. $n=3$, $c=60$

x	0	10	20	30	40	50	60
f_1	0	13	20	27	34	41	47
f_2	0	15	25	32	38	43	46
f_3	0	12	22	30	37	43	47

19. $n=4$, $c=30$

x	0	5	10	15	20	25	30
f_1	0	10	18	25	31	35	40
f_2	0	11	18	24	29	33	39
f_3	0	10	19	27	33	37	40
f_4	0	13	20	26	32	37	40

20. $n=4$, $c=12$

x	0	2	4	6	8	10	12
f_1	0	10	18	24	28	31	35
f_2	0	9	17	24	30	35	40
f_3	0	8	16	23	29	34	38
f_4	0	12	22	30	36	40	45

21. $n=3$, $c=21$

x	0	3	6	9	12	15	18	21
f_1	0	18	28	36	42	46	49	52
f_2	0	12	22	31	38	43	47	50
f_3	0	15	25	33	39	44	47	51

22. $n=3$, $c=12$

x	0	2	4	6	8	10	12
f_1	0	8	15	21	26	31	35
f_2	0	7	14	21	27	33	38
f_3	0	10	16	21	25	29	32

23. $n=3$, $c=25$

x	0	5	10	15	20	25
f_1	0	15	25	33	39	43
f_2	0	16	25	32	37	40
f_3	0	10	19	27	34	40

24. $n=3$, $c=6$

x	0	1	2	3	4	5	6
f_1	0	24	44	60	72	81	87
f_2	0	21	39	54	64	72	78
f_3	0	20	38	53	65	75	83

25. $n=4$, $c=50$

x	0	10	20	30	40	50
f_1	0	12	22	30	35	37
f_2	0	9	17	25	32	38
f_3	0	8	16	24	28	32
f_4	0	10	19	26	32	36

26. $n=4$, $c=25$

x	0	5	10	15	20	25
f_1	0	25	45	63	77	87
f_2	0	18	35	51	65	77
f_3	0	20	36	50	60	68
f_4	0	24	46	66	78	88

27. $n=4$, $c=15$

x	0	3	6	9	12	15
f_1	0	9	17	24	27	29
f_2	0	8	15	21	26	30
f_3	0	6	12	18	23	28
f_4	0	10	18	24	28	30

28. $n=4$, $c=10$

x	0	2	4	6	8	10
f_1	0	9	15	25	27	30
f_2	0	8	16	20	25	31
f_3	0	5	10	15	20	25
f_4	0	10	15	20	25	30

29. $n=4$, $c=20$

x	0	4	8	12	16	20
f_1	0	9	17	24	27	29
f_2	0	8	15	21	26	30
f_3	0	6	12	18	23	28
f_4	0	10	18	24	28	30

30. $n=4$, $c=25$

x	0	5	10	15	20	25
f_1	0	5	10	17	24	29
f_2	0	8	13	18	24	30
f_3	0	6	10	16	22	28
f_4	0	10	17	26	29	34

14.3. Построение кратчайшего пути на сети

Пусть имеется ориентированная сеть $S=\{I,\ U\}$. Все сетевые понятия и обозначения такие же, как в § 3. Однако здесь каждой дуге $(i,\ j)\in U$ приписано неотрицательное число c_{ij}, имеющее значение расстояния от узла i до узла j. Путем из узла m в узел n назовем цепь, соединяющую эти узлы, все дуги которой при движении из m в n прямые. Требуется для двух заданных узлов $m, n\in I$ найти путь из m в n минимальной длины.

Решение задачи осуществляем методом динамического программирования, согласно которому на первом этапе вложим эту задачу в семейство подобных задач (инвариантное погружение). Будем считать, что требуется найти кратчайший путь из узла m в произвольный узел $i\in I$.

Таким образом, роль функции Беллмана играет длина кратчайшего пути из узла m в узел i. Обозначим ее через B_i.

Второй этап состоит в выводе уравнения Беллмана. Пусть известен кратчайший путь из узла m в любой узел $j \in I_i^-$, где $I_i^- = \{j \in I: (j,\ i) \in U\}$ — множество узлов, из которых идут дуги в узел i, т. е. известны значения B_j. Тогда уравнение Беллмана имеет вид

$$B_i = \min_{j \in I_i^-}\left(c_{ji} + B_j\right). \tag{14.12}$$

Начальное условие для него очевидным образом следует из определения функции Беллмана

$$B_m = 0. \tag{14.13}$$

Третий этап — решение уравнения (14.12) с начальным условием (14.13). Его обычно осуществляют с помощью метода пометок, k-я итерация которого состоит в следующем. Пусть I^* — множество узлов, для которых известно значение функции Беллмана на k-й итерации (перед началом вычислений — на первой итерации — это множество содержит только узел m). Предположим, что $n \notin I^*$. Обозначим через $\omega(I^*)$ множество узлов, соседних с множеством I^*, т. е. $\omega(I^*) = \{s \in I \setminus I^*: I^* \cap I_s^- \neq \neq \varnothing\}$. Если $\omega(I^*) = \varnothing$, то в сети S нет путей из m в n. Если же $\omega\left(I^*\right) \neq \varnothing$, то для каждого узла $s \in \omega(I^*)$ подсчитаем временную метку узла

$$B_s' = \min_{i \in I^* \cap I_s^-}\left(c_{is} + B_i\right). \tag{14.14}$$

Далее из $\omega(I^*)$ находим узел s_* с наименьшей временной меткой: $B_{s_*}' = \min_{s \in \omega(I^*)} B_s'$. Очевидно, $B_{s_*} = B_{s_*}'$, и число B_{s_*} становится постоянной меткой, значение которой — длина кратчайшего пути из m в s_*. Поэтому узел s_* добавляем к множеству I^*. Если несколько узлов будут иметь наименьшую временную метку, тогда все они присоединяются к множеству I^*.

На каждой итерации число постоянных меток увеличивается. Поэтому либо узел n через конечное число итераций получит постоянную метку B_n, либо вычисления оборвутся на некоторой итерации из-за того, что $\omega(I^*) = \varnothing$. Последнее означает, что не существует пути из узла m в узел n. Если же найдена постоянная метка B_n, то это — длина кратчайшего пути из m в n. Кратчайший путь строится по постоянным меткам попятным движением. По метке B_n находим метку B_{i_1} такую, что $B_n = c_{i_1 n} + B_{i_1}$. Помечаем дугу (i_1, n). Далее ищем метку B_{i_2}, для которой имеет место равенство $B_{i_1} = c_{i_2 i_1} + B_{i_2}$. Помечаем дугу (i_2, i_1). Через конечное число l шагов попадем в узел m. Кратчайший путь из m в n образует последовательность дуг $\{(m, i_{l-1}), (i_{l-1}, i_{l-2}), \ldots, (i_1, n)\}$.

Пример 14.4. Найдем кратчайший путь из узла 1 в узел 10 сети, изображенной на рис. 14.2, над дугами которой стоят значения их длин.

На первой итерации $I^* = \{1\}$, $B_1 = 0$, $\omega(I^*) = \{2, 3, 4\}$. Согласно формуле (14.14), находим временные метки узлов $s \in \omega(I^*)$. Имеем: $B_2' = B_1 + c_{12} = 3$; $B_3' = B_1 + c_{13} = 5$; $B_4' = B_1 + c_{14} = 2$. Временные метки запишем рядом с узлами, снабдив их штрихами, как показано на рис. 14.2.

Далее имеем $\min\{B_2', B_3', B_4'\} = B_4' = 2$, т. е. $s_* = 4$. Метку B_4' делаем постоянной, т. е. зачеркиваем штрих (рис. 14.2). На второй итерации $I^* = \{1, 4\}$, $B_1 = 0$, $B_4 = 2$, $\omega(I^*) = \{2, 3, 6, 7\}$. Вычисляем временные мет-

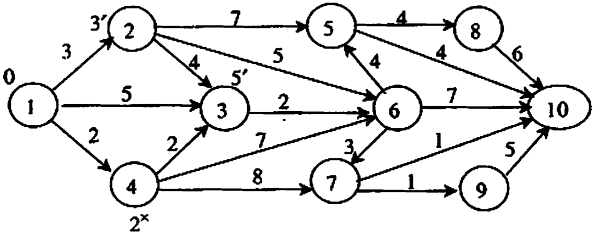


Рис. 14.2

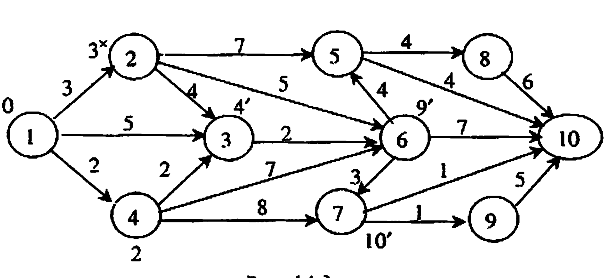


Рис. 14.3

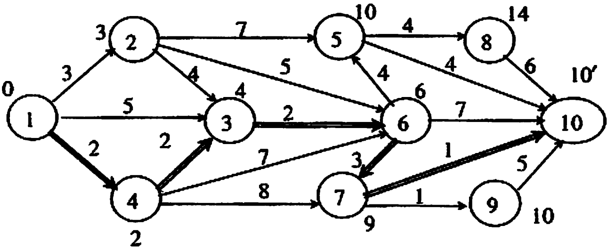


Рис. 14.4

ки узлов из $\omega(I^*)$: $B_2' = 3$, $B_3' = \min\{B_1 + c_{13}, B_4 + c_{43}\} = \min\{0+5,\ 2+ +2\} = 4$, $B_6' = B_4 + c_{46} = 9$, $B_7' = B_4 + c_{47} = 10$. Находим $\min\{B_2', B_3', B_6', B_7'\} = B_2' = 3$, т. е. $s_* = 2$. Метка B_2' становится постоянной (рис. 14.3).

Переходим к следующей итерации, на которой $I^* = \{1, 2, 4\}$, $B_1 = 0$, $B_2 = 3$, $B_4 = 2$, $\omega(I^*) = \{3, 5, 6, 7\}$. На восьмой итерации узел 10 получит постоянную метку $B_{10} = 10$ (рис. 14.4).

К этому моменту будут известны постоянные метки всех остальных узлов, которые помещены рядом с узлами. На рис. 14.4 двойными стрелками изображен кратчайший путь из узла 1 в узел 10, построенный по постоянным меткам.

Задания

14.2. Найти кратчайший путь между двумя городами 1 и 8. На рис. 14.5 указаны всевозможные маршруты между этими городами, проходящие через промежуточные населенные пункты. В табл. 14.3 даны расстояния c_{ij} между населенными пунктами i и j.

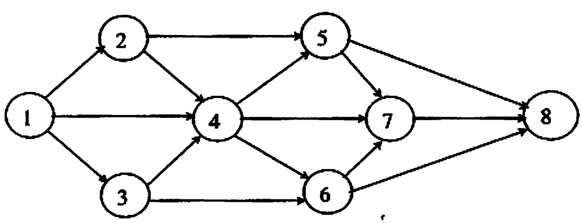


Рис. 14.5

Таблица 14.3

Вари-анты	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{24}	c_{25}	c_{34}	c_{36}	c_{45}	c_{46}	c_{47}	c_{57}	c_{58}	c_{67}	c_{68}	c_{78}
1	2	4	7	3	6	5	2	4	2	8	2	10	1	9	3
2	5	6	6	4	3	8	5	10	7	6	3	4	6	2	11
3	2	7	10	5	6	4	8	3	4	10	7	9	11	9	2
4	7	3	5	12	3	10	2	11	14	6	1	5	4	6	9
5	10	5	6	7	8	3	7	8	5	3	9	2	7	11	15
6	5	8	6	10	5	7	12	3	2	15	1	9	4	3	10
7	8	3	13	5	9	3	7	8	6	5	8	4	5	11	7
8	2	7	9	8	4	8	3	4	9	7	13	6	2	4	10
9	6	4	8	12	9	1	8	10	5	2	7	10	4	3	6
10	8	10	4	5	1	3	2	5	1	12	2	3	6	5	7
11	1	4	2	6	7	5	6	9	6	6	1	6	2	3	5
12	5	2	6	5	9	1	10	7	5	7	9	2	1	5	4
13	7	4	2	10	5	6	1	4	3	8	2	5	7	4	9
14	3	3	5	2	8	3	11	8	5	7	6	2	3	10	3
15	9	3	6	7	5	4	7	9	2	5	10	4	3	1	5
16	5	4	2	5	8	5	8	6	2	6	7	6	5	4	10
17	5	7	10	5	6	5	8	11	8	7	4	5	7	3	9
18	3	5	8	4	7	6	3	5	3	9	3	11	2	10	4
19	6	7	7	5	4	9	6	11	8	7	4	5	7	3	12
20	3	8	11	6	7	5	9	4	5	11	8	10	12	10	3
21	8	4	6	13	4	11	3	12	15	7	2	6	5	7	10
22	11	6	7	8	9	4	8	9	6	4	10	3	8	12	16
23	6	9	7	11	6	8	13	4	3	16	2	10	5	4	11
24	7	2	12	4	8	3	7	7	5	4	7	3	4	10	7
25	3	7	10	8	5	8	4	4	9	8	12	5	2	4	9
26	6	4	7	11	10	2	8	10	4	3	8	11	4	4	7
27	8	9	4	5	2	3	3	5	2	10	3	4	6	5	8
28	2	4	3	7	7	6	6	10	7	7	2	7	2	4	6
29	6	2	7	5	10	2	10	8	5	7	10	3	2	4	5
30	4	4	5	2	9	4	10	9	6	8	7	3	3	11	4

14.4. Задача сетевого планирования

В сетевом планировании исследуются вопросы реализации сложных проектов, состоящих из большого количества отдельных работ, которые должны выполняться в определенной технологической последовательности. Одна из основных задач сетевого планирования — расчет минимального времени выполнения проекта.

Составим сетевую модель такой задачи. Каждой работе A проекта поставим в соответствие дугу (i, j). Узел i будем интерпретировать как начало, а узел j как конец работы. Начало работы является концом другой, поэтому в узле i должны оканчиваться дуги, которые соответствуют работам, предшествующим A (понимаются не все работы, которые должны быть завершены до начала A, а только те из них, которые выполняются непосредственно перед данной работой). В узле j должны начинаться дуги, соответствующие работам, которым A предшествует. В сети выделяются два узла: m — начало выполнения проекта, n — завершение проекта. В узле m начинаются все дуги, которым отвечают работы, не имеющие предшествующих. В узле n оканчиваются дуги, которым соответствуют работы, не имеющие последующих. Каждой дуге (i, j) сети приписывается характеристика $c_{ij} > 0$ — время выполнения соответствующей работы. Не для всех проектов возможно построение модели с использованием изложенных принципов. Пусть, например, проект включает 4 работы: *А*, *Б*, *В*, *Г*. Работы *А*, *Б* могут выполняться параллельно и являются предшествующими для *В*. Если работа *Г* также может начинаться только после завершения работ *А*, *Б*, то сетевая модель проекта строится без труда (рис. 14.6). Узел 1 означает начало выполнения проекта, а узел 3 — его завершение. Если же для работы *Г* предшествующей является только работа *А*, то изложенные выше принципы построения сети приводят нас к противоречивой ситуации: с одной стороны, дуга *Б* должна оканчиваться в узле 2, а с другой — нет. Противоречие устраняется путем введения фиктивных работ нулевой продолжительности.

При введении любой фиктивной работы нужно соблюдать одно правило: предшествовать ей могут только те работы, которые являются предшествующими для работ, непосредственно следующих за фиктив-

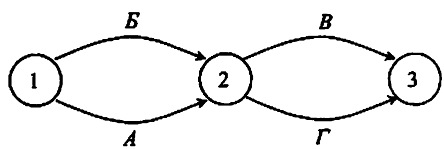


Рис. 14.6

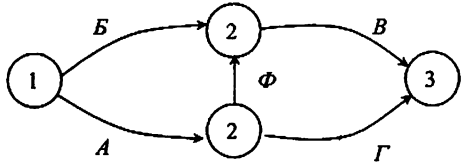


Рис. 14.7

ной. В рассмотренном примере достаточно ввести одну фиктивную работу Φ (рис. 14.7).

Числовые характеристики c_{ij} дуг построенной сети $S=\{I,U\}$ будем интерпретировать как их длины. Тогда задача расчета времени выполнения проекта сводится к нахождению пути максимальной длины из узла m в узел n. Такой путь называют ***критическим***. Как видим, математическая модель рассматриваемой задачи аналогична задаче п. 14.3.

Согласно методу динамического программирования, вложим задачу отыскания критического пути из узла m в узел n в семейство подобных задач. Тогда одна из задач семейства состоит в построении пути максимальной длины из узла m в произвольный узел $i \in I$. Введем в рассмотрение функцию Беллмана B_i — длину критического пути из m в i. На языке исходной задачи сетевого планирования B_i есть время, через которое можно приступить к работам, дуги которых начинаются в узле i. Функция Беллмана удовлетворяет уравнению

$$B_i = \max_{j \in I_i^-}\left(c_{ji} + B_j\right), \quad B_m = 0. \tag{14.15}$$

Структура построенной сети и вид уравнений позволяют решить эту задачу подобным методом, что и задачу построения кратчайшего пути (14.12), (14.13), только везде следует поменять операцию минимума на максимум и не использовать временные метки. Пусть на k-й итерации I^* — множество узлов, для которых известны значения B_i. Если $n \notin I^*$, то в отличие от п. 14.3 через $\overline{\omega}(I^*)$ обозначим множество только тех соседних с I^* узлов, которые обладают свойством $I_i^- \subset I^*$, $i \in \overline{\omega}(I^*)$. Очевидно, $\overline{\omega}(I^*) \neq \varnothing$. Далее для каждого $I \in \overline{\omega}(I^*)$ по формуле (14.15) находим значения B_i и включаем $\overline{\omega}(I^*)$ в I^*. Критический путь строится по найденным значениям функции Беллмана так же, как путь минимальной длины, попятным движением (см. п. 14.3).

Пример 14.5. Найдем время, необходимое для строительства жилого дома, данные о проекте которого приведены в табл. 14.4.

Таблица 14.4

Этап	Выполняемые работы	Продолжительность (усл. ед. врем.)	Предшествующие этапы
А	Подготовка стройплощадки	1	–
Б	Сооружение фундамента	3	*А*
В	Подводка магистральных линий электро- и водоснабжения	2	*А*
Г	Монтаж вертикальных стен и перекрытий	6	*Б*

Этап	Выполняемые работы	Продолжительность (усл. ед. врем.)	Предшествующие этапы
Д	Сооружение кровли	1	*Г*
Е	Укладка полов	2	*Г*
Ж	Установка дверей и окон	1	*Г*
З	Монтаж электропроводки	1	*В, Г*
И	Монтаж систем отопления, водо- и газоснабжения	2	*В, Г*
К	Установка сантехники и газовых плит	1	*И*
Л	Отделочные работы	4	*Е, Ж, З, К*

Сеть, соответствующая такому проекту, изображена на рис. 14.8. Узел 1 означает начало, а узел 8 — конец выполнения проекта. При составлении сетевой модели необходимо ввести одну фиктивную работу (соответствующая дуга обозначена символом *Ф*). Над дугами стоят их длины (продолжительность работ). При решении уравнения (14.14) на 1-м шаге находится значение функции Беллмана в узле 2: $B_2 = B_1 + c_{12} = 0+1=1$. На 2-м шаге имеем: $I^* = \{1,\ 2\}$, $\overline{\omega}(I^*) = \{3\}$, $B_3 = B_2 + c_{23} = 1+3=4$. На 3-м шаге: $I^* = \{1,\ 2,\ 3\}$, $\overline{\omega}(I^*) = \{4\}$, $B_4 = B_3 + c_{34} = 4+6=10$. На 4-м шаге: $I^* = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\overline{\omega}(I^*) = \{5\}$, $B_5 = \max\{B_2 + c_{25}, B_4 + c_{45}\} = \max\{1+3, 10+0\} = 10$. Значения B_i записаны рядом с узлами. Продолжая этот процесс, на 7-м шаге найдем $B_8 = 17$. Таким образом, время выполнения проекта равно $B_8 = 17$ усл. ед. врем. Дуги критического пути обозначены на рис. 14.8 двойными стрелками.

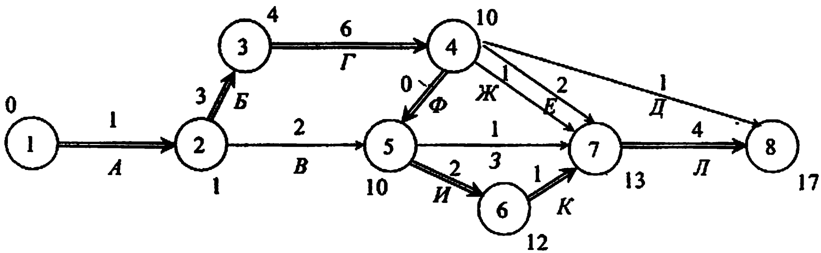


Рис. 14.8

Задания

14.3. В табл. 14.5 содержатся сведения о работах, которые необходимо выполнить при строительстве некоторого сооружения.

Таблица 14.5

Этап	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К	Л
Требуемое число дней	*а*	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	*к*	*л*
Предшествующие этапы	–	А	А	Б	Г	Г	Г	В, Д	В, Г	В, Г	Е, Ж, З, И, К

Построить сетевой график, найти время выполнения проекта и критический путь (исходные данные приведены в табл. 14.6).

Таблица 14.6

Варианты	*а*	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*	*ж*	*з*	*и*	*к*	*л*
1	1	2	2	4	2	2	1	1	1	1	3
2	2	3	1	5	3	1	1	2	2	1	4
3	1	3	2	5	2	1	2	1	3	2	5
4	2	4	1	6	3	4	2	2	2	3	5
5	1	4	1	7	3	2	1	3	1	1	5
6	2	5	4	8	4	6	3	4	3	4	6
7	1	7	2	10	2	5	2	3	4	2	6
8	3	6	5	9	5	4	3	3	5	3	6
9	1	3	1	8	4	3	2	3	2	1	5
10	1	5	1	10	2	5	1	4	1	2	7
11	2	8	2	14	6	7	2	3	2	1	12
12	3	10	3	18	5	6	2	2	3	2	10
13	1	9	2	20	10	7	2	5	5	3	7
14	4	12	4	21	8	4	4	2	2	2	10
15	2	14	3	24	14	8	3	4	7	4	12
16	1	2	2	3	3	5	2	3	5	3	10
17	1	3	3	5	3	3	2	2	2	2	4
18	3	4	2	6	4	2	2	3	3	2	5
19	2	4	3	6	3	2	3	2	4	3	6
20	3	5	2	7	4	5	3	3	3	4	6
21	2	5	2	8	4	3	2	4	2	2	6
22	3	6	5	9	5	7	4	5	4	5	7
23	2	8	3	11	3	6	3	4	5	3	7
24	4	7	6	10	6	4	4	4	6	4	7
25	2	10	3	18	9	8	3	5	6	4	8
26	5	10	5	20	10	5	5	3	3	3	10
27	3	15	4	25	15	9	4	5	8	5	11
28	2	10	3	15	7	8	3	4	3	2	10
29	2	3	3	4	4	5	3	4	6	4	11
30	2	5	2	10	3	4	2	5	2	2	8

14.4. Информация о строительстве электростанции задана перечнем работ *А—У*, последовательностью выполнения работ и их продолжительностью (табл. 14.7, 14.8). Построить сетевой график, найти минимальное время выполнения проекта и критический путь.

Таблица 14.7

Работы	Последовательность выполнения	Продолжительность	Работы	Последовательность выполнения	Продолжительность	Работы	Последовательность выполнения	Продолжительность
А	–	*а*	*З*	*В, Г, Д*	*з*	*П*	*Ж, З*	*п*
Б	–	*б*	*И*	*Г*	*и*	*Р*	*И, К*	*р*
В	–	*в*	*К*	*Ж, З*	*к*	*С*	*Р*	*с*
Г	–	*г*	*Л*	*Ж, З*	*л*	*Т*	*Н, П, Р*	*т*
Д	*А, Б*	*д*	*М*	*Е, Л*	*м*	*У*	*М, О*	*у*
Е	*А, Б*	*е*	*Н*	*Е, Л*	*н*			
Ж	*А, Б*	*ж*	*О*	*Е, Л*	*о*			

Таблица 14.8

Продолжительность работ \ Варианты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
а	2	1	1	3	7	6	3	4	7	2	5	3
б	3	5	3	5	2	4	8	5	9	3	8	2
в	5	4	2	6	4	2	1	3	3	2	3	7
г	4	2	5	1	3	5	2	1	1	6	6	4
д	3	5	2	4	3	1	4	2	7	3	5	6
е	1	2	3	4	3	5	4	2	3	1	6	3
ж	2	5	7	3	4	1	6	5	9	3	6	7
з	1	5	7	2	4	8	3	5	10	8	3	1
и	3	6	2	1	5	3	2	7	4	6	2	3
к	1	2	3	4	6	5	7	6	4	3	2	1
л	3	2	1	4	3	2	1	5	4	3	1	2
м	6	2	7	10	3	8	5	4	9	2	1	7
н	3	5	4	2	1	3	4	7	2	5	4	3
о	9	7	8	1	6	2	9	3	5	4	3	2
п	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	5	4
р	1	2	3	5	7	9	7	5	3	1	2	4
с	9	1	8	7	6	4	5	3	2	7	4	5
т	6	4	3	2	5	3	7	2	1	6	3	2
у	4	9	10	7	5	2	1	3	5	4	2	1

Окончание табл. 14.8

Варианты / Продолжительность работ	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
а	3	1	2	4	8	7	4	5	8	3	6	4
б	2	4	2	4	1	5	7	6	10	4	7	3
в	4	3	1	5	4	2	2	3	4	3	4	8
г	5	1	4	2	4	5	2	3	1	5	6	4
д	3	4	3	5	2	3	4	3	8	4	5	7
е	2	2	3	5	4	6	5	3	3	2	4	5
ж	3	6	4	4	2	5	6	10	9	4	2	1
з	2	6	6	3	5	7	4	6	10	7	4	2
и	4	5	3	2	6	4	3	8	5	7	3	4
к	2	3	4	5	7	6	8	7	5	5	4	2
л	4	3	2	5	4	3	2	6	5	4	2	3
м	7	3	8	11	4	9	6	5	10	3	2	8
н	4	6	5	3	2	4	5	8	3	6	5	4
о	10	8	9	2	7	3	10	4	6	5	4	3
п	6	5	4	3	2	6	5	4	3	2	3	5
р	2	3	4	6	8	10	8	6	4	2	4	6
с	10	2	9	8	7	5	6	4	3	8	5	6
т	7	5	4	3	6	4	8	3	2	7	4	3
у	5	10	11	8	6	4	3	5	7	4	3	2

Варианты / Продолжительность работ	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
а	4	3	3	5	9	8	4	6	9	4	6	3
б	3	5	3	5	2	6	8	5	11	5	6	4
в	5	4	2	6	6	3	2	4	5	4	6	8
г	6	2	5	3	5	6	3	4	2	6	7	5
д	4	6	5	6	3	5	4	4	9	5	6	8
е	3	2	4	6	5	7	5	4	3	4	6	8
ж	4	7	5	4	3	6	7	11	10	5	3	2
з	3	7	6	4	6	8	5	6	11	7	5	2
и	5	6	4	3	7	5	3	8	6	9	4	6
к	2	4	5	7	9	7	9	7	5	6	5	4
л	6	4	3	7	6	5	4	6	7	5	3	4
м	7	4	9	12	5	10	7	6	11	4	3	9
н	6	8	7	5	4	6	7	9	4	6	5	5
о	9	8	7	2	6	4	10	5	6	5	4	3
п	6	4	3	3	4	7	6	5	4	3	4	6
р	3	4	5	7	9	11	9	7	5	3	4	7
с	10	3	9	7	6	7	5	4	9	6	7	8
т	8	6	4	3	7	5	9	4	3	8	5	3
у	7	12	15	9	8	6	5	7	9	6	5	4

Глава 5. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 15. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В многочисленных приложениях приходится иметь дело с функциями, определенными на некоторых множествах, элементы которых — также функции.

Функции, определенные на множествах, элементами которых являются функции, называются ***функционалами***.

Многие прикладные экстремальные задачи сводятся к задачам оптимизации функционалов, т. е. к задачам поиска функций, на которых заданные функционалы достигают минимальных (максимальных) значений. Такие задачи, хотя и имеют аналоги в конечномерном случае, представляют собой более сложные объекты для исследования. Первые задачи такого типа были поставлены и решены в XVII—XVIII вв. (например, задача о брахистохроне поставлена И. Бернулли в 1696 г.). С тех пор теория, в которой исследуются задачи оптимизации в бесконечномерных пространствах, стала называться ***вариационным исчислением*** (название происходит от основного метода исследования — исчисления (анализа) вариаций).

В этой главе рассматриваются некоторые приемы и методы решения задач вариационного исчисления. В данном параграфе рассматривается простейшая задача вариационного исчисления.

15.1. Постановка задачи

Основным объектом вариационного исчисления является функционал. ***Функционал*** — это отображение $I(y)$: $\Omega \to \mathbf{R}$, определенное на некотором множестве Ω функций $y(x)$, $x \in M$, и принимающее значение в множестве $\mathbf{R}$ (M — заданное множество в $\mathbf{R}^n$). Простейшие функционалы в вариационном исчислении задаются формулами вида

$$I(y) = \int_M F(x, y(x), y_x(x))dx, \tag{15.1}$$

где $y_x \equiv dy/dx$. Здесь $n = 1$, $M = [a; b]$ — фиксированный отрезок из $\mathbf{R}$. Введенный интегральный функционал (15.1) — частный случай интегрального функционала, определенного на некотором множестве Ω вектор-функций $y\colon M \to \mathbf{R}^n$.

Функция $F(x, y, y_x) \in C^{(2)}(M \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ считается в этой конструкции заданной, ее выбор и определяет функционал (15.1).

Множество Ω функций может выбираться из различных функциональных пространств, например нормированных линейных пространств. Такими пространствами могут быть:

1) $C(M)$ — пространство функций, непрерывных на отрезке M, с нормой

$$\|y(\cdot)\|_{C(M)} = \max_{x\in M}|y(x)|,$$

где $y(\cdot)=\{y(x):\ x\in M\}$;

2) $C^{(1)}(M)$ — пространство функций, непрерывных на M вместе со своей производной и с нормой

$$\|y(\cdot)\|_{C^{(1)}(M)} = \max\{\max_{x\in M}|y(x)|,\quad \max_{x\in M}|y_x(x)|\}.$$

Заметим, что если $y\in \mathbf{R}^n$, то нормы в указанных пространствах таковы:

$$\|y(\cdot)\|_{C(M)} = \max_{x\in M}\|y(x)\|_{\mathbf{R}^n};\ \|y(\cdot)\|_{C^{(1)}(M)} = \max\{\max_{x\in M}\|y(x)\|_{\mathbf{R}^n},\quad \max_{x\in M}\|y_x(x)\|_{\mathbf{R}^n}\}.$$

Рассмотрим задачу поиска минимума функционала

$$I(y)=\int_a^b F(x,y(x),y_x(x)dx \to \min,\quad y(\cdot)\in\Omega, \tag{15.2}$$

где $\Omega=\left\{y(x),\, x\in M:\ y(x)\in C^{(1)}(M),\quad y(a)=d_1,\quad y(b)=d_2\right\}$, $F(x,y,y_x)$ по совокупности аргументов принадлежит классу $C^{(2)}(M\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$, $M=$ $=[a, b]$.

Функции (кривые) $y(\cdot)\in\Omega$ будем в дальнейшем называть ***допустимыми.***

Задача (15.2) называется ***основной (простейшей) задачей вариационного исчисления.***

Определение 15.1. Допустимая функция $y^0=y^0(x)$, $x\in M$, называется ***сильной минималью*** функционала (15.1), если существует такое число $\varepsilon>0$, что для любой допустимой функции $y=y(x)$, $x\in M$, удовлетворяющей условию

$$\left\|y(\cdot)-y^0(\cdot)\right\|_{C(M)} = \max_{x\in M}\left|y(x)-y(x^0)\right|\le\varepsilon, \tag{15.3}$$

выполняется неравенство

$$I(y^0)\le I(y). \tag{15.4}$$

Определение 15.2. Допустимая функция $y^0 = y^0(x)$, $x \in M$, называется ***слабой минималью*** функционала (15.1), если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой функции $y = y(x)$, $x \in M$, удовлетворяющей условию

$$\|y(\cdot) - y^0(\cdot)\|_{C^{(1)}(M)} = \max\{\max_{x\in M} |y(x) - y^0(x)|,$$
$$\max_{x\in M} |y_x(x) - y_x^0(x)|\} \le \varepsilon, \tag{15.5}$$

выполняется неравенство (15.4).

Таким образом, очевидно, что сильная минималь является и слабой минималью (но не наоборот!). Это вызвано тем, что окрестность допустимой функции $y^0 = y^0(x)$, $x \in M$, определяемая неравенством (15.3), содержит в себе (при том же ε) ε-окрестность, удовлетворяющую условию (15.5). Отсюда следует, что все необходимые условия слабого минимума будут и необходимыми условиями сильного минимума.

Приведем некоторые наиболее типичные обобщения основной задачи вариационного исчисления.

1) ***Изопериметрическая задача***:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x))dx \to \min,$$

$$\int_a^b f_i(x, y(x), y_x(x))dx = l_i, \quad i = \overline{1,m}; \quad y(\cdot) \in \Omega.$$

2) ***Задача Лагранжа***:

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x))dx \to \min,$$

$$g_k(x, y(x), y_x(x)) = 0, \quad k = \overline{1,s}; \ y(\cdot) \in \Omega.$$

3) ***Задача Майера***:

$$I(y) = \varphi(y(a), \quad y(b)) \to \min,$$

$$g_k(x, y(x), y_x(x)) = 0, \ k = \overline{1,s};$$

$y(\cdot) \in \Omega = \{y(\cdot) \in C^{(1)}(M)$: левый конец $y(a)$ лежит на заданной кривой $a(x)$, правый конец $y(b)$ лежит на заданной кривой $b(x)\}$. Такие задачи называют еще ***задачами с подвижными границами*** (рис. 15.1).

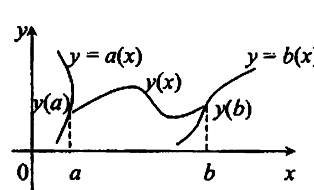


Рис. 15.1

4) ***Задача Больца.*** Отличается от задачи Майера только видом функционала. В ней рассматривается функционал

$$I(y)=\varphi(y(a),y(b))+\int_a^b F(x,y(x),y_x(x))dx.$$

5) ***Вариационные задачи с высшими производными.*** Здесь минимизируется функционал

$$I(y)=\int_a^b F(x,y(x),dy(x)/dx,...,d^p y(x)/dx^p)dx$$

на допустимых кривых $y(\cdot)\in C^{(p)}(M)$, удовлетворяющих условиям $y^{(i-1)}(a)=d_{1,i}$, $y^{(i-1)}(b)=d_{2,i}$, $i=\overline{1,p}$.

6) ***Многомерные вариационные задачи.*** Допустимые функции $y(x)$, $x\in M$, являются непрерывно дифференцируемыми n-вектор-функциями, где $y(a)=d_1$, $y(b)=d_2$, $d_1,d_2\in\mathbf{R}^n$.

15.2. Необходимые условия слабого минимума в терминах вариаций функционала

Универсальный метод исследования задач минимизации функционалов — метод вариаций, который был предложен в 1760 г. Лагранжем.

Пусть $y=y(x)$, $x\in M$, — допустимая функция задачи (15.2).

Определение 15.3. Непрерывно дифференцируемая функция $\delta y(x)$, $x\in M$, называется ***вариацией допустимой кривой*** $y=y(x)$, если кривая $\bar{y}(x)=y(x)+\delta y(x)$ является допустимой. Множество всех вариаций допустимой кривой $y(x)$, $x\in M$, обозначим $\Omega_0=\{\delta y(x),\ x\in M:\ \delta y(\cdot)\in$ $\in C^{(1)}(M),\ \delta y(a)=\delta y(b)=0\}$.

Для исследования слабых минималей удобно вариацию допустимой кривой рассматривать в виде

$$\delta y(x)=\varepsilon h(x),\quad x\in M,$$

где ε — число, $h(\cdot)\in\Omega_0$. Не ограничивая общности, в дальнейшем функцию $h(x)$, $x\in M$, будем называть ***вариацией допустимой кривой.***

Рассмотрим функционал $I(y)$ основной задачи (15.2), определенный на фиксированных допустимых функциях $y(x)$, $\bar{y}(x)=y(x)+$

$+\varepsilon h(x)$, $x \in M$. Если на них приращение функционала допускает разложение

$$\Delta I(y) = I(y+\varepsilon h) - I(y) = \varepsilon \delta I(y, h) + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 I(y, h) + o(\varepsilon^2), \quad (15.6)$$

то коэффициент $\delta J(y, h)$ при ε называется ***первой вариацией функционала*** $I(y)$ на допустимой функции $y(\cdot) \in \Omega$ и вариации $h(\cdot) \in \Omega_0$. Коэффициент $\delta^2 I(y, h)$ в разложении (15.6) называют ***второй вариацией функционала*** $I(y)$.

Как следует из разложения (15.6), вариации функционала равны

$$\delta I(y, h) = \frac{d}{d\varepsilon} I(y+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}, \quad \delta^2 I(y, h) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} I(y+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Отсюда получаем, что

$$\delta I(y, h) = \int_a^b \left(\frac{\partial F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x} h_x(x) \right) dx, \quad (15.7)$$

$$\delta^2 I(y, h) = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y^2} h^2(x) + 2\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y \partial y_x} h(x) h_x(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2} h_x^2(x) \right) dx. \quad (15.8)$$

Замечание 15.1. Если на фиксированных функции $y(\cdot) \in \Omega$ и вариации $\delta y(\cdot) \in \Omega_0$ приращение функционала $I(y)$ представимо в виде

$$\Delta I(y) = I(y+\delta y) - I(y) = \int_a^b p(x)\delta y(x) dx + o(\|\delta y\|),$$

то функция $p(x)$, $x \in M$, называется ***вариационной производной первого рода*** и обозначается $\delta I(y)/\delta y(x)$, т. е. $p(x) = \delta I(y)/\delta y(x) = \operatorname{grad} I(y)$.

Справедливы необходимые условия оптимальности слабых минималей в терминах вариаций функционала (15.7), (15.8).

Теорема 15.1. *Если допустимая функция* $y^0(x)$, $x \in M$, *— слабая минималь задачи* (15.2), *то выполняются условия:*

1) $\delta I(y^0, h) = 0 \;\forall\; h(\cdot) \in \Omega_0$ (***условие стационарности***);

2) $\delta^2 I(y^0, h) \geq 0 \;\forall\; h(\cdot) \in \Omega_0$ (***условие неотрицательности***).

15.3. Условия Эйлера

Усилением условия стационарности является следующее утверждение.

Теорема 15.2 (необходимое условие слабого минимума — условие Эйлера). *Если допустимая функция* $y^0 = y^0(x)$, $x \in M$, *— слабая (сильная) минималь основной задачи* (15.2), *то она является решением уравнения Эйлера*

$$\frac{\partial F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x} = 0, \quad x \in M. \qquad (15.9)$$

В подробной записи уравнение Эйлера (15.9) имеет вид (при $y(\cdot) \in C^2(M)$)

$$\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2} y_{xx} + \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y \partial y_x} y_x + \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial x \partial y_x} - $$
$$- \frac{\partial F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y} = 0$$

и представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение такого уравнения зависит от двух произвольных постоянных, которые находятся из условий $y(a) = d_1$, $y(b) = d_2$, т. е. для уравнения Эйлера решается краевая задача.

Определение 15.4. Допустимые функции $y(x)$, $x \in M$, являющиеся решением уравнения Эйлера (15.9), называются ***экстремалями*** (Эйлера) функционала (15.1).

Таким образом, утверждение теоремы 15.2 гласит: *каждая слабая минималь находится среди экстремалей основной задачи.*

Замечание 15.2. Отметим, что вариационная производная функционала (15.1) представляется (в силу (15.6) и (15.7)) в виде

$$\frac{\delta I(y)}{\delta y(x)} = \frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F(x, y, y_x)}{\partial y_x}$$

и в силу теоремы 15.2 на слабой минимали равна нулю: $\delta I(y^0)/\delta y(x) = 0$. Таким образом, утверждение теоремы 15.2 представляет собой аналог необходимого условия оптимальности $\partial f(x^0)/\partial x = 0$ в конечномерных задачах безусловной минимизации.

Замечание 15.3. Можно показать, что каждая слабая минималь $y^0 = y^0(x)$, $x \in M$, задачи (15.2) удовлетворяет ***интегральному уравнению Эйлера***

$$\frac{\partial F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x} = \int_a^x \frac{\partial F(s, y(s), y_x(s))}{\partial y} ds + \text{const}, \quad x \in M.$$

После подстановки слабой минимали $y^0(x)$, $x \in M$, в это уравнение получаем тождество, правая часть которого непрерывно дифференцируема по x, а поэтому и левая часть тождества будет иметь непрерывную производную по x. Произведя дифференцирование по x обеих частей тождества, получим дифференциальное уравнение Эйлера (15.9).

Определение 15.5. ***Экстремаль*** $y = y(x)$, $x \in M$, функционала (15.1) называют ***неособой***, если вдоль нее выполняется условие

$$\partial^2 F(x, y(x), y_x(x)) / \partial y_x^2 \neq 0, \ x \in M.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 15.3 (Гильберта). *Каждая неособая экстремаль принадлежит классу* $C^{(2)}(M)$.

15.4. Основная задача вариационного исчисления в классе кусочно-гладких функций

Основная задача (15.2) может иметь решения не в классе гладких допустимых функций, а в классе кусочно-гладких функций.

Рассмотрим задачу

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x)) dx \to \min, \quad y(\cdot) \in \Omega_*, \tag{15.10}$$

где множество допустимых функций Ω_* представляет собой множество непрерывных функций $y = y(x)$, $x \in M$, $y(a) = d_1$, $y(b) = d_2$, имеющих непрерывные производные на M всюду, за исключением конечного числа точек $x_i \in M$, $i = \overline{1,k}$, в которых производные терпят разрывы первого рода (кусочно-гладкие функции).

В задаче (15.10) по сравнению с задачей (15.2) изменился класс допустимых функций, которые сейчас могут иметь точки излома (угловые точки). Остальные понятия и определения остаются такими же, как и для задачи (15.2).

Справедливы следующие необходимые условия оптимальности.

Теорема 15.4. *Если допустимая функция* $y^0 = y^0(x)$, $x \in M$, *задачи* (15.10) *является слабой минималью, то выполняются следующие условия*:

1) *между точками разрыва производной* $y_x^0 = y_x^0(x)$ *слабая минималь* $y^0(x)$ *удовлетворяет уравнению Эйлера* (15.9);

2) *в угловых точках* $x_1, \ldots, x_k$ *слабой минимали* $y^0(x)$ *выполняются условия Вейерштрасса — Эрдмана*

$$\left.\frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x}\right|_{x=x_i-0} = \left.\frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x}\right|_{x=x_i+0}, \quad i=\overline{1,k};$$

$$\left.\left(F(x, y^0(x), y_x^0(x)) - y_x^0(x)\frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x}\right)\right|_{x=x_i-0} =$$

$$= \left.\left(F(x, y^0(x), y_x^0(x)) - y_x^0(x)\frac{\partial F(x, y^0(x), y_x^0(x))}{\partial y_x}\right)\right|_{x=x_i+0}, \quad i=\overline{1,k}.$$

Пример 15.1. Найти экстремали с одной угловой точкой в задаче

$$I(y) = \int_0^3 \left(y_x^2 - 1\right)^2 dx \to \min, \quad y(0) = y(3) = 0.$$

Подынтегральная функция $F = (y_x^2 - 1)^2$ зависит только от y_x. Экстремалями функционала являются прямые $y = c_1 x + c_2$. Пусть $x_1 \in (0; 3)$ — точка излома экстремали. Исходя из граничных условий $y(0) = y(3) = 0$, экстремали ищем в виде

$$y(x) = \begin{cases} k_1 x, & x \in [0; x_1), \\ k_2(x-3), & x \in [x_1; 3]. \end{cases}$$

Поскольку экстремали непрерывны, то

$$k_1 x_1 = k_2(x_1 - 3). \tag{15.11}$$

Выпишем условия Вейерштрасса — Эрдмана. Имеем

$$\partial F/\partial y_x = 4y_x^3 - 4y_x, \quad F - y_x \partial F/\partial y_x = -3y_x^4 + 2y_x^2 + 1$$

и $y_x(x_1 - 0) = k_1$ (производная слева в точке x_1), $y_x(x_1 + 0) = k_2$ (производная справа), поэтому условия Вейерштрасса — Эрдмана дают

$$\begin{cases}(k_1-k_2)(k_1^2+k_1k_2+k_2^2-1)=0,\\ (k_1-k_2)(k_1+k_2)(3(k_1^2+k_2^2)-2)=0.\end{cases}$$

Решение последней системы $k_1=k_2$ должно быть отброшено: при нем экстремаль имеет непрерывную производную. Таким образом, $k_1+k_2=$ $=0$ и, значит: *а*) $k_1=1$, $k_2=-1$; *б*) $k_1=-1$, $k_2=1$. Отсюда и из (15.11) получаем $x_1=3/2$. Следовательно, искомые экстремали таковы (рис. 15.2):

$$а)\ y(x)=\begin{cases}x, & x\in[0;\,3/2),\\ -x+3, & x\in[3/2;\,3];\end{cases}\qquad б)\ y(x)=\begin{cases}-x, & x\in[0;\,3/2),\\ x-3, & x\in[3/2;\,3].\end{cases}$$

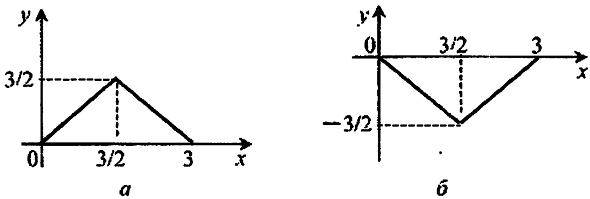


Рис. 15.2

Таким образом, на найденных экстремалях *а*, *б* с угловой точкой $x_1=3/2$ может достигаться слабый минимум.

15.5. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера

1) F не зависит от y_x, т. е. $F=F(x,y)$. Тогда уравнение Эйлера принимает вид

$$\partial F(x,y)/\partial y=0.$$

Оно конечное, а не дифференциальное. Решение этого уравнения не содержит произвольных постоянных и, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям.

Пример 15.2. Найти экстремали функционала

$$I(y)=\int_0^1(2ye^x-y^2)dx,\ \ y(0)=y(1)=1.$$

Уравнение Эйлера имеет вид $2e^x-2y=0$, т. е. $y=e^x$. Граничные условия не удовлетворяются ($y(0)=1$, но $y(1)=e$), поэтому функция $y=e^x$ не может быть экстремалью.

2) F зависит от y_x линейно, т. е. $F(x,y,y_x)=A(x,y)+B(x,y)y_x$. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}=0.$$

Таким образом, уравнение Эйлера превращается в алгебраическое и поэтому справедливы сделанные в предыдущем случае выводы. Если $\partial A/\partial y-\partial B/\partial x\equiv 0$ в некоторой области и, значит, $F(x,y,y_x)dx=$ $=B(x,y)dy$ — полный дифференциал, то функционал

$$I(y)=\int_a^b F(x,y,y_x)dx=\int_{(a,d_1)}^{(b,d_2)} A(x,y)dx+B(x,y)dy$$

будет постоянен вдоль всех допустимых кривых (интеграл не зависит от пути интегрирования).

Пример 15.3. Найти минимум функционала

$$I(y)=\int_1^2\left(\frac{y^2}{x}+2yy_x\ln x\right)dx,\quad y(1)=y(2)=1.$$

Здесь $A(x,y)=y^2/x$, $B(x,y)=2y\ln x$.

Имеем $\dfrac{\partial A}{\partial y}=\dfrac{2y}{x}$, $\dfrac{\partial B}{\partial x}=\dfrac{2y}{x}$ и $\dfrac{\partial A}{\partial y}-\dfrac{\partial B}{\partial x}\equiv 0$. Таким образом, подынтегральное выражение $\left(\dfrac{y^2}{x}+2yy_x\ln x\right)dx$ есть полный дифференциал. Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования:

$$I(y)=\int_1^2\frac{y^2}{x}dx+2y\ln x dy=\int_{(1,1)}^{(2,1)} d(y^2\ln x)=y^2\ln x\Big|_1^2=\ln 2.$$

Вариационная задача не имеет смысла.

3) F зависит только от y_x: $F=F(y_x)$. Уравнение Эйлера имеет вид $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}y_{xx}=0$, т. е. $y_{xx}=0$. Отсюда следует, что экстремалями простейшей задачи являются прямые $y(x)=c_1x+c_2$, где c_1, c_2 находятся из граничных условий.

Пример 15.4. Найти экстремали функционала

$$I(y)=\int_0^1\sqrt{1+y_x^2(x)}dx,\quad y(0)=a,\ y(1)=b.$$

Данный функционал определяет длину кривой, соединяющей точки $(0; a)$ и $(1; b)$.

Решения уравнения Эйлера — семейство прямых $y(x)=c_1x+c_2$. Экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, есть прямая $y(x) = (b-a)x+a$.

4) F не зависит от y, т. е. $F = F(x, y_x)$. Здесь уравнение Эйлера имеет вид $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F(x,y_x)}{\partial y_x}=0$, откуда получаем, что $\dfrac{\partial F(x,y_x)}{\partial y_x}=c_1$, где c_1 — произвольная постоянная. Это уравнение первого порядка. Проинтегрировав его, находим решения уравнения Эйлера.

Пример 15.5. Среди кривых, соединяющих точки $(0; 1)$ и $(1; 0)$, найти ту, на которой может достигаться минимум функционала

$$I(y)=\int_0^1 y_x(y_x+x^2)dx.$$

Имеем $\dfrac{\partial F}{\partial y_x}=2y_x+x^2$. Тогда уравнение первого интеграла запишется в виде $2y_x+x^2=c_1$, откуда $y(x)=\dfrac{c_1}{2}x-\dfrac{x^3}{6}+c_2$. Находим произвольные постоянные c_1 и c_2 из граничных условий: $c_1=-5/3$ и $c_2=1$. Искомая экстремаль $y(x)=-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{5}{6}x+1$.

5) F не зависит явно от x: $F = F(y, y_x)$. В этом случае уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}y_x-\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2}y_{xx}=0 \tag{15.12}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(F(y,\ \ y_x)-y_x\frac{\partial F(y,\ \ y_x)}{\partial y_x}\right)=0. \tag{15.13}$$

Следовательно, первый интеграл уравнения Эйлера

$$F(y,\ \ y_x)-y_x\frac{\partial F(y,\ \ y_x)}{\partial y_x}=c_1, \tag{15.14}$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Пример 15.6. Найти экстремали функционала

$$I(y)=\int_0^2 \frac{\sqrt{1+y_x^2(x)}}{y}\,dx,\quad y(0)=y(2)=0.$$

Поскольку подынтегральная функция не содержит явно x, то уравнение Эйлера (15.12), согласно (15.13), дает

$$\frac{\sqrt{1+y_x^2(x)}}{y}-y_x\frac{y_x}{\sqrt{1+y_x^2(x)}}=c_1.$$

После упрощений получим $y\sqrt{1+y_x^2}=c_1$. Интегрируя последнее уравнение, находим $(x+c_2)^2+y^2=c_1^2$. Это — семейство окружностей. Используя граничные условия, имеем $c_1=c_2=1$, откуда искомая экстремаль будет иметь вид $(x-1)^2+y^2=1$.

Замечание 15.4. Отметим, что иногда решение уравнения (15.14) более трудоемко, чем решение уравнения Эйлера (15.12). Кроме того, для получения (15.13) обе части уравнения (15.12) умножаются на y_x, поэтому уравнения (15.12) и (15.13), вообще говоря, не эквивалентны, поскольку у уравнения (15.13) могут появиться "лишние" решения вида $y(x)\equiv\text{const}$.

Пример 15.7. Найти экстремали функционала

$$I(y)=\int_0^2\left(\frac{1}{4}y_x^2-\frac{y_x}{y}-y\right)dx,\quad y(0)=y(2)=2.$$

Имеем $\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{y_x}{y}-1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y_x}=\dfrac{1}{2}y_x-\dfrac{1}{y}$. Тогда уравнение Эйлера запишется в виде $y_{xx}-2=0$. Общее решение $y(x)=-x^2+c_1x+c_2$. Краевые условия определяют экстремаль: $y(x)=-x^2+2x+2$, $x\in[0;\,2]$.

С другой стороны, первый интеграл (15.14) уравнения Эйлера $\dfrac{1}{4}y_x^2+y=c_1$. Одним из решений этого уравнения является функция $y(x)\equiv 2$, $x\in[0;\,2]$ ($c_1=2$), хотя и не удовлетворяет уравнению Эйлера.

15.6. Условия Лежандра — Клебша и Якоби

Пусть $y(\cdot)\in\Omega$. Обозначим

$$\omega(x,h,h_x)=\frac{\partial^2F(x,y(x),y_x(x))}{\partial y^2}h^2+2\frac{\partial^2F(x,y(x),y_x(x))}{\partial y\partial y_x}hh_x+$$

$$+\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2} h_x^2,\ h(\cdot) \in \Omega_0.$$

Тогда выражение (15.8) для второй вариации $\delta^2 I(y, h)$ функционала (15.1) вдоль допустимой кривой $y(x)$, $x \in M$, запишется в виде

$$\delta^2 I(y, h) = \int_a^b \omega(x, h(x), h_x(x))dx.$$

Рассмотрим следующую задачу вариационного исчисления:

$$I(h) = \int_a^b \omega(x,\ h(x), h_x(x))dx \to \min, \quad h(\cdot) \in \Omega_1, \tag{15.15}$$

где $\Omega_1 = \{h(x), x \in M\colon h(\cdot) \in C^{(1)}(M), h(a)=0\}$.

Задача (15.15) называется ***присоединенной задачей о минимуме*** (соответствующей допустимой кривой $y(x)$, $x \in M$).

Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial\omega}{\partial h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\omega}{\partial h_x} = 0$$

для присоединенной задачи (15.15) называется ***уравнением Якоби***. В подробной записи уравнение Якоби — обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a(x)h_{xx} + b(x)h_x + c(x)h = 0, \tag{15.16}$$

где

$$a(x) = \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2},\ \ b(x) = \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2},$$

$$c(x) = \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y \partial y_x} - \frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y^2},\ \ x \in M.$$

Уравнение Якоби (15.16) решается при начальном условии $h(a)=0$ и, значит, решения уравнения зависят от произвольной постоянной и представляют собой пучок кривых.

Пример 15.8. Продолжим решение примера 15.7. Минимум функционала может достигаться на экстремали $y(x) = -x^2 + 2x + 2$, $x \in [0;\ 2]$. Вдоль найденной экстремали имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} = \frac{1}{2},\ \ \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y_x^2} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y_x}-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2y_x}{y^3}=-\frac{2y_x}{y^3}+\frac{2y_x}{y^3}=0$$

и, значит, $a(x)=1/2$, $b(x)=0$, $c(x)=0$, $x \in M$. Тогда уравнение Якоби запишется в виде $\frac{1}{2}h_{xx}=0$. Отсюда $h(x)=c_1x+c_2$, $h(0)=0$, т. е. экстремали $h(x)=c_1x$, $x \in [0;\ 2]$, присоединенной задачи суть семейство прямых (пучок прямых).

Имеет место следующее необходимое условие оптимальности в задаче (15.2).

Теорема 15.5 (условие Лежандра — Клебша). *Вдоль каждой слабой минимали $y^0(x)$, $x \in M$, простейшей задачи* (15.2) *выполняется условие Лежандра — Клебша*

$$\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2} \geq 0,\ x \in (a;\ b).$$

Заметим, что в примере 15.7 вдоль любой экстремали условие Лежандра — Клебша выполняется: $\frac{\partial^2 F(x,y,y_x)}{\partial y_x^2} \equiv \frac{1}{2} > 0,\ x \in [0;\ 2]$.

Определение 15.6. Вдоль допустимой кривой $y(x)$, $x \in M$, точка $x^* \in (a, b]$ называется ***сопряженной с точкой $x=a$***, если существует нетривиальное решение $h(x)$, $x \in M$, уравнения Якоби (15.16) такое, что $h(a)=0$, $h(x^*)=0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 15.6 (Якоби). *Вдоль неособой слабой минимали $y^0(x)$, $x \in M$, не существует точек $x^* \in (a, b)$, сопряженных с точкой $x=a$.*

В примере 15.8 решение уравнения Якоби вдоль допустимой кривой $y(x)=-x^2+2x+2$, $x \in [0;\ 2]$, имеет вид $h(x)=c_1x$, $x \in [0;\ 2]$, и, значит, при $c_1 \neq 0$ точек, сопряженных с точкой $x=0$, на отрезке $[0;\ 2]$ не существует.

Приведенные выше необходимые условия оптимальности (условия Эйлера, Лежандра — Клебша, Якоби) не являются в отдельности достаточными условиями слабого минимума. Достаточные условия оптимальности дает следующее утверждение.

Теорема 15.7. *Если допустимая кривая $y(x)$, $x \in M$:*

1) *является экстремалью;*

2) *удовлетворяет усиленному условию Лежандра — Клебша, т. е. вдоль нее выполняется неравенство*

$$\frac{\partial^2 F(x, y(x), y_x(x))}{\partial y_x^2} > 0, \ x \in M;$$

3) *удовлетворяет усиленному условию Якоби, т. е. вдоль этой кривой не существует точек из* $(a; b]$, *сопряженных с точкой* $x=a$, *то она является слабой минималью простейшей задачи вариационного исчисления* (15.2).

Пример 15.9. Рассмотрим задачу

$$I(y) = \int_0^1 (x + 2y + \frac{1}{2} y_x^2) dx \to \min, \ \ y(0) = y(1) = 0.$$

Уравнение Эйлера для этого функционала имеет вид $y_{xx}=2$. Отсюда решения этого уравнения — семейство парабол $y(x)=x^2+c_1x+c_2$, $x \in \in [0; 1]$. Экстремаль, удовлетворяющая граничным условиям, есть кривая $y(x)=x^2-x$, $x \in [0; 1]$. Вдоль этой экстремали выполняется усиленное условие Лежандра — Клебша: $\partial^2 F(x, y, y_x)/\partial y_x^2 = 1/2 > 0$. Проверим условие Якоби. Для этого запишем уравнение Якоби: $h_{xx}=0$. Его общее решение $h(x)=c_1x+c_2$. Условие $h(0)=0$ дает $c_2=0$, т. е. $h(x)=c_1x$ при $c_1 \neq 0$ нигде на отрезке [0; 1] в нуль не обращается, кроме точки $x=0$. Таким образом, выполнено усиленное условие Якоби. Следовательно, в силу теоремы 15.7 на экстремали $y(x)=x^2-x$ данный функционал достигает слабого минимума и $y(x)=y^0(x)=x^2-x$, $x \in [0; 1]$, — слабая минималь и на ней $I(y^0) = \int_0^1 (x + 2x_2 - 2x + \frac{1}{2}(2x-1)^2) dx = \frac{1}{3}$ достигает минимального значения.

Упражнения и задания

15.1. Материальная точка перемещается вдоль плоской кривой $y=y(x)$, соединяющей точки $A(a, d_1)$ и $B(b, d_2)$ со скоростью $v=ky_x$. Найти гладкую кривую, время движения вдоль которой из точки A в точку B будет минимальным.

15.2. Решить задачу 15.1, если $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $v=x$.

15.3. Среди гладких кривых, соединяющих точки $A(0, 1)$ и $B(1, 1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

15.4 (*задача о брахистохроне*). Найти гладкую кривую, соединяющую точки A и B, лежащие на разных уровнях в вертикальной плоскости, при скатывании вдоль которой под действием силы тяжести материальная точка переместится из точки A в точку B за минимальное время (трением и сопротивлением воздуха пренебречь).

15.5. Показать, что если $F(x, y, y_x) = p_1(x)y_x + p_2(x)y + p_3(x)$, $x \in M$, $p_1(x) \in C^{(1)}(M)$, $p_2(x)$, $p_3(x) \in C(M)$, то простейшая задача вариационного исчисления не имеет решения.

15.6. Дана задача: $I(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y_x)dx \to \min$, $y \in \Omega$. Показать, что если к подынтегральному выражению $F(x, y, y_x)dx$ добавить полный дифференциал любой функции $p = p(x, y)$, то уравнение Эйлера останется прежним.

15.7. Найти экстремали в задачах поиска минимума функционала $I(y)$ и для них проверить необходимые условия слабого минимума:

1. $I(y) = \int\limits_0^1 y_x^2 dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

2. $I(y) = \int\limits_1^2 (2x - y)y dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 3$.

3. $I(y) = \int\limits_1^2 xy_x^2 dx$, $y(1) = 1$, $y(2) = 2$.

4. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_x + 3x^2)^2 dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

5. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + xy)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

6. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + 4y^2)dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = e^2$.

7. $I(y) = \int\limits_0^1 \sin y_x dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = \pi$.

8. $I(y) = \int\limits_0^\pi (y_x - \cos x)^8 dx$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

9. $I(y) = \int\limits_0^\pi (4y\cos x + y_x^2 - y^2)dx$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

10. $I(y) = \int\limits_1^e (2y - x^2 y_x^2)dx$, $y(1) = e$, $y(e) = 0$.

11. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + yy_x + 12xy)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

12. $I(y) = \int\limits_0^1 (e^y + xy_x)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

13. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + y^2 + xy)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

14. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + y^2 + 6y\,\mathrm{sh}\,2x)dx$, $y(0) = y(1) = 0$.

15. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + y^2 + 2ye^x)dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1/2e$.

16. $I(y) = \int\limits_0^{\ln 2} (y_x^2 + 3y^2)e^{2x} dx$, $y(0) = 0$, $y(\ln 2) = 15/8$.

17. $I(y)=\int\limits_0^b (y_x^2+y^2-4y\sin x)dx,\quad y(0)=0,\ y(b)=d_2.$

18. $I(y)=\int\limits_0^1 (2e^y-y^2)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=e.$

19. $I(y)=\int\limits_0^1 (e^{x+y}-y-\sin x)dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=-1.$

20. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+y_x^2}}{y_x}dx,\ y(-1)=0,\ y(1)=1.$

21. $I(y)=\int\limits_0^{3/2} (y_x^3+2x)dx,\ y(0)=0,\ y(3/2)=1.$

22. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 (xy_x+y_x^2)dx,\quad y(-1)=1,\quad y(1)=0.$

23. $I(y)=\int\limits_1^2 x^n y_x^2 dx,\quad n\in N\setminus\{1\},\ y(1)=\frac{1}{1-n},\quad y(2)=\frac{2^{1-n}}{1-n}.$

24. $I(y)=\int\limits_0^1 (y-y_x^2)dx,\quad y(0)=y(1)=0.$

25. $I(y)=\int\limits_0^1 yy_x dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\sqrt[3]{4}.$

26. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (2y+y^2-y_x^2)dx,\quad y(0)=y(\pi/2)=0.$

27. $I(y)=\int\limits_0^1 \sqrt{y(1+y_x^2)}dx,\quad y(0)=y(1)=\sqrt{2}/2.$

28. $I(y)=\int\limits_0^{2\pi} (y_x^2-y^2)dx,\quad y(0)=1,\quad y(2\pi)=1.$

29. $I(y)=\int\limits_0^3 (y_x e^x+16y^4)dx,\quad y(0)=1/4,\quad y(3)=0.$

30. $I(y)=\int\limits_0^b \sqrt{(y+k)(1+y_x^2)}dx,\quad y(0)=0,\ y(b)=k.$

31. $I(y)=\int\limits_0^b (y_x^2+9y^2-3x)dx,\quad y(0)=y(b)=0.$

32. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_x^2-yy_x^3)dx,\quad y(0)=y(1)=0.$

33. $I(y)=\int\limits_0^1 e^x(y^2+\frac{1}{2}y_x^2)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=e.$

34. $I(y)=\int\limits_1^2 \frac{x^3}{y_x^2}dx,\quad y(1)=1,\quad y(2)=4.$

35. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 (y_x^3+y_x^2)dx,\quad y(-1)=-1,\quad y(1)=3.$

36. $I(y)=\int\limits_1^2 (xy_x^4-2yy_x^3)dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=1.$

37. $I(y)=\int\limits_0^1 (4y-y_x^2+12y_x)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=4.$

38. $I(y)=\int\limits_0^{\ln 2} (y_x^2+2y^2+2y)e^{-x}dx,\quad y(0)=y(\ln 2)=0.$

39. $I(y)=\int\limits_1^2 (3xy_x^5-5yy_x^4)dx,\quad y(1)=1,\quad y(2)=4.$

40. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/18} (y_x^2-37yy_x-81y^2)dx,\quad y(0)=1,\quad y(\pi/18)=-1.$

41. $I(y)=\int\limits_0^2 (y_x^4+y_x^3)dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=4.$

42. $I(y)=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} (y^2\cos x+2yy_x\sin x)dx,\quad y(\pi/6)=1,\quad y(\pi/2)=2.$

43. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/6} (9y^2+2yy_x-y_x^2)dx,\quad y(0)=1,\quad y(\pi/6)=0.$

44. $I(y)=\int\limits_0^a (6y_x^2-y_x^4+yy_x)dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b.$

45. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/6} (y_x^2-9y^2+12y\cos 3x)dx,\quad y(0)=-1,\quad y(\pi/6)=1+\pi/6.$

46. $I(y)=\int\limits_1^5 \frac{2y_x^3+y_x^2}{y_x^4+2}dx,\quad y(1)=2,\quad y(5)=14.$

47. $I(y)=\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+y_x^2}}{y_x^3}dx,\quad y(1)=-3,\quad y(2)=-8.$

48. $I(y)=\int\limits_1^2 \frac{x^2y_x^2}{2x^3+1}dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=7/2.$

49. $I(y)=\int\limits_2^7 (\cos x+3x^2y+(x^3-y^2)y_x)dx,\quad y(2)=3,\quad y(7)=0.$

50. $I(y)=\int\limits_0^2 (xy_x^3-3yy_x^2)dx,\quad y(0)=4,\quad y(2)=6.$

15.8. Найти экстремали с одной угловой точкой для функционалов, приведенных ниже:

1. $I(y)=\int\limits_0^2 y_x^2(y_x-1)^2dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=1.$

2. $I(y)=\int\limits_0^4 (y_x-1)^2(y_x+1)^2dx,\quad y(0)=0,\quad y(4)=2.$

3. $I(y)=\int\limits_0^2 y_x^2(1-y_x)dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=1.$

4. $I(y)=\int\limits_0^2 y_x^2(1-y_x^2)dx,\quad y(0)=0,\quad y(2)=1.$

5. $I(y)=\int\limits_0^1 \sin y_x dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

6. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 y^2(1-y_x^2)dx,\quad y(-1)=0,\quad y(1)=1.$

15.9. Найти экстремали с угловыми точками для следующих функционалов:

1. $I(y)=\int\limits_0^4 (y_x-1)^2(y+1)^2dx,\quad y(0)=0,\quad y(4)=2.$

2. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_x^2+2yy_x+y^2)dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

3. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_x^2+2xy-2y^2)dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

4. $I(y)=\int\limits_0^2 (y_x^4-6y_x^2)dx,\quad y(0)=y(2)=0.$

5. $I(y)=\int\limits_0^a (y_x^2-y^2)dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=1.$

6. $I(y)=\int\limits_0^2 (y_x^2+2xy-y^2)dx,\quad y(0)=1,\quad y(2)=4.$

§ 16*. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Приведем некоторые обобщения простейшей задачи вариационного исчисления: многомерные задачи (допустимые кривые являются вектор-функциями); задачи, в которых функционал зависит от производных высшего порядка; задачи на условный экстремум (изопериметрические задачи).

16.1. Многомерная задача вариационного исчисления

Под многомерной задачей будем понимать задачу вариационного исчисления, в которой допустимые функции $y(x)$, $x \in M$, суть непрерывно дифференцируемые n-мерные вектор-функции, т. е. $y=(y_1, \ldots, y_n)$, $y(a)=d_1$, $y(b)=d_2$, $d_1, d_2 \in \mathbf{R}^n$. Понятия сильной и слабой минималей аналогичны изложенным в § 15 с той разницей, что под расстоянием между двумя функциями понимается норма в соответствующем пространстве вектор-функций.

Обобщением теоремы 15.2 является следующее утверждение.

Теорема 16.1. *Если допустимая функция* $y^0=y^0(x)=(y_1^0(x), \ldots, y_n^0(x))$, $x \in M$, *— слабая (сильная) минималь многомерной задачи вариационного исчисления, то она является решением системы дифференциальных уравнений Эйлера*

$$\frac{\partial F(x,y(x),y_x(x))}{\partial y_j}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y(x),y_x(x))}{\partial y_{jx}}=0, \quad x \in M, \quad j=\overline{1,n}. \tag{16.1}$$

Система дифференциальных уравнений (16.1) решается при условиях $y(a)=d_1$, $y(b)=d_2$, $d_1, d_2 \in \mathbf{R}^n$ ($2n$ краевых условий).

Допустимые функции $y(x)$, $x \in M$, удовлетворяющие системе (16.1) и краевым условиям, называются, как и прежде, ***экстремалями***. Экстремаль $y(x)$, $x \in M$, ***неособая***, если не вырождена матрица

$$\frac{\partial^2 F(x,y(x),y_x(x))}{\partial y_x^2}, \quad x \in M.$$

Пример 16.1. Найти экстремали в следующей задаче:

$$I(y)=\int_0^1 (y_{1x}^2+y_2+y_{2x}^2)dx \to \min,$$

$$y_1(0)=1,\ \ y_1(1)=2,\ \ y_2(0)=0,\ \ y_2(1)=1.$$

Запишем систему (16.1) для данного функционала. У нас $\dfrac{\partial F}{\partial y_1}=0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y_{1x}}=2y_{1x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y_2}=1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y_{2x}}=2y_{2xx}$. Поэтому система (16.1) в этом случае имеет вид $y_{1xx}=0$, $y_2-y_{2xx}=0$. Решая эту систему, находим

$$y_1(x)=c_1x+c_2,\ y_2(x)=c_3e^x+c_4e^{-x},\ \ x\in[0;\ 1].$$

В силу граничных условий имеем $1=c_2$, $0=c_3+c_4$, $2=c_1+c_2$, $1=c_3e+$ $+c_4e^{-1}$. Отсюда получаем $c_1=1$, $c_2=1$, $c_3=1/(e-e^{-1})$, $c_4=-1/(e-e^{-1})$. Следовательно, искомая экстремаль

$$\begin{cases} y_1(x)=x+1, \\ y_2(x)=\operatorname{sh}x/\operatorname{sh}1,\ \ x\in[0;\ 1], \end{cases}$$

является пространственной кривой (как пересечение двух цилиндрических поверхностей).

Пример 16.2. Найти экстремали в задаче вариационного исчисления

$$I(y)=\int_{\pi/2}^{\pi} (y_{2x}^2+y_{3x}^2+2y_1y_2+2y_1)dx \to \min,$$

$$y_1(\pi/2)=0,\quad y_1(\pi)=1,$$
$$y_2(\pi/2)=-1,\ \ y_2(\pi)=-1,$$
$$y_3(\pi/2)=0,\quad y_3(\pi)=\pi/2.$$

Записываем систему дифференциальных уравнений Эйлера (16.1). Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}=2y_2+2,\ \ \frac{\partial F}{\partial y_{1x}}=0,\ \ \frac{\partial F}{\partial y_2}=2y_1,\ \ \frac{\partial F}{\partial y_{2x}}=2y_{2x},\ \ \frac{\partial F}{\partial y_3}=0,\ \ \frac{\partial F}{\partial y_{3x}}=2y_{3x},$$

то система Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} 2y_2+2=0, \\ 2y_1-2y_{2xx}=0, \\ 2y_{3xx}=0. \end{cases}$$

Первое уравнение является не дифференциальным, а конечным. Поэтому его решением (согласно краевому условию $y_2(\pi/2)=-1$, $y_2(\pi)=-1$) может быть только функция $y_2(x)\equiv-1$, $x\in[\pi/2,\ \pi]$. Тогда из второго уравнения находим, что $y_1(x)=y_{2xx}(x)\equiv 0$, $x\in[\pi/2;\ \pi]$. Но при $x=\pi$ не выполняется краевое условие $y_1(\pi)=1$, а это означает, что краевая задача для системы Эйлера не имеет решения. Следовательно, не существует экстремалей в рассматриваемой задаче. Она не имеет решения.

Пример 16.3. Найти экстремали в задаче вариационного исчисления

$$I(y)=\int_0^\pi (2y_1y_2-2y_1^2+y_{1x}^2-y_{2x}^2)dx\to\min,$$

$$y_1(0)=0,\ \ y_1(\pi)=\pi,$$

$$y_2(0)=0,\ \ y_2(\pi)=-1.$$

Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} y_{1xx}+2y_1-y_2=0,\\ y_{2xx}+y_1=0.\end{cases}$$

Исключая функцию y_2 из системы, получим $y_{1xxxx}+2y_{1xx}+y_1=0$. Общее решение последнего уравнения запишется следующим образом:

$$y_1(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x(C_3\cos x+C_4\sin x).$$

Используя граничные условия $y_1(0)=0$, $y_1(\pi)=\pi$, получаем $c_1=0$, $c_3=$ $=-1$, и, значит,

$$y_1(x)=C_2\sin x+C_4x\sin x-x\cos x,\ \ x\in[0;\ \pi].$$

Далее функцию y_2 найдем из уравнения $y_2=y_{1xx}+2y_1$ с учетом предыдущей формулы для y_1:

$$y_2(x)=C_2\sin x+C_4(2\cos x+x\sin x)+2\sin x-x\cos x,\ \ x\in[0;\ \pi].$$

Постоянные C_2, C_4 находим из граничных условий $y_2(0)=0$, $y_2(\pi)=-1$, что дает $C_4=0$, C_2 произвольна. Тогда

$$y_2(x)=C_2\sin x+2\sin x-x\cos x,\ \ x\in[0;\ \pi].$$

Таким образом, исходная задача имеет семейство экстремалей

$$\begin{cases} y_1(x)=C_2\sin x-x\cos x,\\ y_2(x)=C_2\sin x+2\sin x-x\cos x,\ \ x\in[0;\ \pi],\end{cases}$$

где C_2 — произвольная постоянная.

16.2. Задачи вариационного исчисления с функционалами, зависящими от производных высшего порядка

Пусть имеем задачу вариационного исчисления

$$I(y)=\int_a^b F(x, y(x), y^{(1)}(x), ..., y^{(p)}(x))dx \to \min, \ y(\cdot)\in \Omega_p, \qquad (16.2)$$

где

$$\begin{gathered}\Omega_p=\{y(x), x\in M : y(\cdot)\in C^{(p)}(M), \\ y^{(i-1)}(a)=d_{1,i}, \ y^{(i-1)}(b)=d_{2,i}, \ i=\overline{1,p}\},\end{gathered} \qquad (16.3)$$

$d_{1,i}$, $d_{2,i}\in \mathbf{R}$, $i=\overline{1,p}$, функция $F(x,y,y^{(1)},...,y^{(p)})$ принадлежит классу $C^{(p+2)}(M\times\mathbf{R}\times...\times\mathbf{R})$ по совокупности аргументов.

Применительно к рассматриваемой задаче приведем обобщение теоремы 15.2.

Теорема 16.2. *Для того чтобы допустимая кривая* $y^0(x)$, $x\in M$, *была слабой минималью задачи* (16.2), *необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера — Пуассона*

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y^{(1)}}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y^{(2)}}-...+(-1)^p\frac{d^p}{dx^p}\frac{\partial F}{\partial y^{(p)}}=0. \qquad (16.4)$$

Как и в случае простейшей задачи вариационного исчисления, допустимые кривые из множества Ω_p (16.3), являющиеся решениями уравнения Эйлера — Пуассона (16.4), называются ***экстремалями***, т. е. экстремали — такие допустимые кривые, на которых может достигаться слабый (сильный) минимум данного функционала.

Пример 16.4. Найти экстремали в задаче

$$I(y)=\int_0^1 (720x^2y-(y^{(2)})^2)dx \to \min,$$

$$y(0)=0, \ \ y^{(1)}(0)=1,$$

$$y(1)=0, \ \ y^{(1)}(1)=1.$$

Уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид

$$720x^2+\frac{d^2}{dx^2}(-2y^{(2)})=0 \text{ или } y^{(4)}=360x^2,$$

общее решение которого

$$y(x)=x^6+\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x^2+C_3x+C_4, \ \ x\in[0; \ 1].$$

Используя граничные условия, получим $C_1=-12$, $C_2=0$, $C_3=1$, $C_4=0$. Следовательно, искомой экстремалью является функция

$$y(x)=x^6-2x^3+x,\quad x\in[0;\ 1].$$

Замечание 16.1. Если в задаче (16.2) на границе заданы не все условия, а меньшее их число, то в общем решении уравнения Эйлера — Пуассона (16.4) остаются свободные постоянные. Тогда при решении этой задачи нужно найти первую вариацию функционала $I(y)$, преобразовать ее с учетом заданных граничных условий и, приравняв вариацию к нулю, получить дополнительные условия на границе.

Пример 16.5. Найти экстремали в следующей задаче вариационного исчисления:

$$I(y)=\int_0^1 (y^{(2)})^2\,dx\to\min,\quad y(0)=y(1)=1. \tag{16.5}$$

Уравнение Эйлера — Пуассона имеет вид

$$y^{(4)}(x)=0. \tag{16.6}$$

Его общее решение

$$y(x)=\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}C_2x_2+C_3x+C_4,\quad x\in[0;\ 1],$$

содержит четыре произвольных постоянных, и для их определения заданных краевых условия недостаточно. С учетом условий $y(0)=y(1)=1$ имеем $\frac{1}{6}C_1+\frac{1}{2}C_2+C_3=0$ и $C_4=1$. Поэтому, согласно замечанию 16.1, находим первую вариацию $\delta I(y,h)$ функционала,

$$\delta I(y,h)=2\int_0^1 y^{(2)}(x)h^{(2)}(x)dx, \tag{16.7}$$

которая обращается в нуль на экстремали задачи (16.5).

Дважды проинтегрировав (16.7) по частям, получим

$$\frac{1}{2}\delta I(y,h)=y^{(2)}(x)h^{(1)}(x)\Big|_0^1-y^{(3)}(x)h(x)\Big|_0^1+\int_0^1 y^{(4)}(x)h(x)dx.$$

Последнее выражение, как было сказано, на экстремали задачи обращается в нуль для любых допустимых вариаций $h(x)$, $x\in[0;\ 1]$. В силу произвольности вариаций $h(x)$ имеем $y^{(4)}(x)=0$ (это есть уравнение Эйлера — Пуассона (16.6)). Следовательно, должно выполняться тождество

$$\left[y^{(2)}(x)h^{(1)}(x)-y^{(3)}(x)h(x)\right]_0^1\equiv 0.$$

Отсюда $(h(0)=h(1)=0)$ имеем $y^{(2)}(1)h^{(1)}(1)-y^{(2)}(0)h^{(1)}(0)=0$. Поскольку $h^{(1)}(1)$, $h^{(1)}(0)$ произвольны, то необходимо выполняются условия

$$y^{(2)}(0)=0,\ \ y^{(2)}(1)=0. \tag{16.8}$$

Условия (16.8) вместе с условиями $y(0)=y(1)=1$ однозначно определяют экстремаль $y(x)\equiv 1$, $x\in[0;1]$ $(C_1=C_2=C_3=0,\ C_4=1)$.

16.3. Изопериметрическая задача вариационного исчисления

В качестве вариационной задачи на условный минимум для интегральных функционалов рассмотрим изопериметрическую задачу, которая имеет вид

$$I(y)=\int_a^b(F(x,\,y(x),\,y_x(x))dx\to\min,\ \ y(\cdot)\in\Omega_{и}, \tag{16.9}$$

где

$$\Omega_{и}=\{y(x),\ x\in M:\ y(\cdot)\in C^{(1)}(M),\ y(a)=d_1,\ y(b)=d_2,$$

$$\int_a^b f_i(x,y(x),\,y_x(x))dx=l_i,\ \ i=\overline{1,m}\},$$

$y\in\mathbf{R}^n$, d_1, $d_2\in\mathbf{R}^n$, функции $F(x,y,y_x)$, $f_i(x,y,y_x)$, $i=\overline{1,m}$, принадлежат классу $C^{(2)}(M\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$ по всем аргументам; l_i, $i=\overline{1,m}$, — заданные числа.

Ограничения

$$\int_a^b f_i(x,\,y(x),\,y_x(x))dx=l_i,\ \ i=\overline{1,m}, \tag{16.10}$$

в задаче (16.9) называются ***изопериметрическими***. Название возникло из частной задачи (***задача Дидоны***) о поиске замкнутой гладкой кривой заданной длины, ограничивающей наибольшую площадь.

Понятие слабого минимума остается справедливым и для задачи (16.9), если считать, что допустимыми являются непрерывно дифференцируемые на M вектор-функции, удовлетворяющие не только краевым условиям, но и изопериметрическим условиям (16.10).

При решении задачи (16.9) используется следующее необходимое условие оптимальности.

Теорема 16.3. *Если допустимая вектор-функция* $y^0 = y^0(x)$, $x \in M$, *является слабой минималью задачи* (16.9), *для которой выполнено условие регулярности, т. е. вдоль кривой* $y^0(x)$, $x \in M$, *функции*

$$\frac{\partial f_i(x,\, y^0(x),\, y_x^0(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_i(x,\, y^0(x),\, y_x^0(x))}{\partial y_x},\quad i = \overline{1,m},$$

линейно независимы, то существуют множители Лагранжа $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ *такие, при которых допустимая функция* $y^0(x)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера*

$$\frac{\partial L(x,\, y,\, y_x,\, \lambda)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L(x,\, y,\, y_x,\, \lambda)}{\partial y_x} = 0, \tag{16.11}$$

где

$$L(x,\, y,\, y_x,\, \lambda) = F(x,\, y,\, y_x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x,\, y,\, y_x) \tag{16.12}$$

— функция Лагранжа; $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа.

Таким образом, для поиска экстремалей задачи (16.9) следует:

1) составить функцию Лагранжа (16.12);

2) записать систему дифференциальных уравнений Эйлера (16.11);

3) найти экстремали как решения системы (16.11) с $2n$ краевыми условиями и требованием выполнения интегральных ограничсний (16.10).

Замечание 16.2. Теорему 16.3 можно сформулировать следующим образом: *если допустимая вектор-функция* $y^0 = y^0(x)$, $x \in M$, *является слабой минималью регулярной задачи* (16.9), *то существуют множители Лагранжа* $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ *такие, что* $y^0(x)$, $x \in M$, *является экстремалью вспомогательного функционала* $I_1(y)$, *где*

$$I_1(y) = \int_a^b \left(F(x, y, y_x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 f_i(x, y, y_x)\right)dx.$$

Замечание 16.3. Вообще говоря, при решении задачи (16.9) используют обобщенную функцию Лагранжа

$$L(x, y, y_x, \overline{\lambda}) = \lambda_0 F(x, y, y_x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x, y, y_x),$$

где $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_m)$.

В теореме 16.3 множитель $\lambda_0^0 = 1$. Случай $\lambda_0 = 0$ в большинстве задач приводит к тривиальности всех множителей Лагранжа.

Замечание 16.4. Принцип взаимности изопериметрических задач: *экстремали функционала*

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y_x)dx, \ y(\cdot) \in C^{(1)}(M), \ y(a) = d_1, \ y(b) = d_2,$$

при условии

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y_x)dx = \text{const}$$

совпадают с экстремалями функционала $J(y)$ *при условии* $I(y) = \text{const}$.

Используя этот принцип, из задачи Дидоны получаем вывод: среди всех замкнутых линий, ограничивающих заданную площадь, линией минимальной длины является окружность.

Пример 16.6. Найти экстремали в следующей изопериметрической задаче:

$$I(y) = \int_0^\pi y_x^2(x)dx \to \min,$$

$$y(0) = 1, \ y(\pi) = -1, \ \int_0^\pi y(x)\cos x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Функция Лагранжа для данной задачи имеет вид $L = y_x^2 + \lambda y \cos x$. Уравнение Эйлера $\lambda \cos x - 2y_{xx} = 0$ дает решение $y(x) = -\frac{1}{2}\lambda \cos x +$ $+ C_1 x + C_2$, $x \in [0; \pi]$. Для определения множителя λ используем изопериметрическое условие. Тогда $\int_0^\pi (-\frac{1}{2}\lambda \cos x + C_1 x + C_2)\cos x dx = -\frac{\pi}{4}\lambda -$

$-2C_1=\frac{\pi}{2}$. Отсюда находим, что $\lambda=-\frac{8}{\pi}C_1-2$. Следовательно, общее решение уравнения Эйлера имеет вид $y(x)=\frac{4}{\pi}C_1\cos x+C_1x+C_2+\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$. Произвольные постоянные определяем из краевых условий $y(0)=\frac{4}{\pi}C_1+C_2+1=1$, $y(\pi)=(\pi-\frac{4}{\pi})C_1+C_2-1=-1$, откуда $C_1=C_2=0$. Таким образом, экстремаль задачи имеет вид $y(x)=\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$.

Замечание 16.5. Изопериметрическая задача (16.9) легко обобщается в случае, когда допустимые функции являются n-мерными вектор-функциями (см. п. 16.1).

Пример 16.7. Найти экстремали в изопериметрической задаче

$$I(y)=\int_0^1(y_{1x}^2+y_{2x}^2-4xy_{2x}-4y_2)dx\to\min,$$

$$\int_0^1(y_{1x}^2-xy_{1x}-y_{2x}^2)dx=2,\ \ y_1(0)=0,\ \ y_1(1)=-1,\ \ y_2(0)=0,\ \ y_2(1)=0.$$

По правилу (16.12) составляем функцию Лагранжа $L=y_{1x}^2+y_{2x}^2-$ $-4xy_{2x}-4y_2+\lambda(y_{1x}^2-xy_{1x}-y_{2x}^2)$ и выписываем систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases}-\dfrac{d}{dx}(2y_{1x}+2\lambda y_{1x}-\lambda x)=0,\\ -4-\dfrac{d}{dx}(2y_{2x}-4x-2\lambda y_{2x})=0.\end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$y_1(x)=\frac{\lambda x^2+2C_1x}{4(1+\lambda)}+C_2,$$
$$y_2(x)=C_3x+C_4,\ \ x\in[0;\ 1].$$

Граничные условия дают $C_1=-\frac{5\lambda+4}{2}$, $C_2=0$, $C_3=0$, $C_4=0$. Тогда

$$y_1(x)=\frac{1}{4(1+\lambda)}(\lambda x^2-(5\lambda+4)x),\ \ y_2(x)=0,\ \ x\in[0;\ 1].$$

Найдем множитель λ. Для этого воспользуемся изопериметрическим ограничением. Поскольку $y_{1x}(x)=\dfrac{2\lambda x-(5\lambda+4)}{4(1+\lambda)}$, $y_{2x}(x)=0$, то имеем

$$\int_0^1\left(\frac{(2\lambda x-(5\lambda+4))^2}{16(1+\lambda)^2}-\frac{2\lambda x-(5\lambda+4)x}{4(1+\lambda)}\right)dx=2,$$

откуда, интегрируя, получим уравнение для нахождения λ

$$25\lambda^2+50\lambda+24=0.$$

Отсюда $\lambda_1=-4/5$ и $\lambda_2=-6/5$. Нетрудно убедиться, что $\lambda_2=-6/5$ не удовлетворяет изопериметрическому условию. Таким образом, искомая экстремаль имеет вид

$$y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \end{pmatrix},\ x\in[0;\ 1].$$

Упражнения и задания

16.1. Показать, что уравнения Эйлера для функционала

$$I(y)=\int_a^b F(x,y_1,y_2,y_{1x},y_{2x})dx$$

допускают следующие первые интегралы:

1) $\dfrac{\partial F}{\partial y_{1x}}=\text{const}$, если F не зависит явно от y_1;

2) $F-y_{1x}\dfrac{\partial F}{\partial y_{1x}}-y_{2x}\dfrac{\partial F}{\partial y_{2x}}=\text{const}$, если F не зависит явно от x.

16.2. Найти профиль крыла летательного аппарата заданной площади S, для которого волновое сопротивление минимально (аэродинамическое качество).

Указание. Плоское симметричное крыло обтекается сверхзвуковым потоком газа. Профиль крыла определяется функцией $y(x)$, $x\in[0,l]$, $y(0)=y(l)=0$, ось Ox совпадает с направлением потока газа. Волновое сопротивление определяется формулой $K\int_0^l y_x^2(x)dx$, где K — известная константа, характеризующая свойства потока газа.

16.3. Найти экстремаль в задаче 16.2, если вместо условия, задающего площадь профиля крыла, задан момент инерции контура относительно оси Ox $2\int_0^l y^2(x)dx=p$, которое определяет жесткость на изгиб или кручение конструкции тонкой оболочки.

16.4 (*задача Дидоны*). Найти кривую $y = y(x)$, $y(-a) = y(a) = 0$, которая при заданной длине $l > 2a$ ограничивает вместе с отрезком $-a \le x \le a$ оси Ox наибольшую площадь.

16.5. Найти экстремали в следующих многомерных задачах вариационного исчисления:

1. $I(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y_{1x}^2 + y_{2x}^2 - 2y_1 y_2)dx \to \min$, $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\pi/2) = 1$.

2. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_1^2 + y_{2x}^2 - 2y_1 y_2)dx \to \min$, $y_1(0) = 0$, $y_1(1) = \operatorname{sh}1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(1) = -\operatorname{sh}1$.

3. $I(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y_{1x} y_{2x} - y_1 y_2)dx \to \min$, $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\pi/2) = -1$.

4. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_{1x} y_{2x} + y_1 y_2)dx \to \min$, $y_1(0) = 0, y_1(1) = e$, $y_2(0) = 0$, $y_2(1) = 1/e$.

5. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_{1x} y_{2x} + 6xy_1 + 12x^2 y_2)dx \to \min$, $y_1(0) = 0$, $y_1(1) = 2$, $y_2(0) = 0$, $y_2(1) = 3$.

6. $I(y) = \int\limits_1^3 (xy_{1x}^2 + y_{2x}^2 + xy_1 y_2)dx \to \min$, $y_1(1) = 1$, $y_1(3) = \ln 3 + 1$, $y_2(1) = 0$, $y_2(3) = 0$.

7. $I(y) = \int\limits_0^\pi (y_{1x}^2 - y_{2x}^2 + 2y_{1x} y_{2x} + 2y_1 \cos x + 2y_2^2)dx \to \min$, $y_1(0) = -1$, $y_1(\pi) = \pi + 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\pi) = 0$.

8. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_{1x}^2 + y_{2x}^2 + 2y_1)dx \to \min$, $y_1(0) = 1$, $y_1(1) = 3/2$, $y_2(0) = 1$, $y_2(1) = 1$.

9. $I(y) = \int\limits_0^\pi (y_{1x}^2 + y_{2x}^2 - 2y_1 y_2 + x^2)dx \to \min$, $y_1(0) = 1$, $y_1(\pi) = -1$, $y_2(0) = 1$, $y_2(\pi) = -1$.

10. $I(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y_{1x}^2 + y_{3x}^2 + 2y_1 y_2 + 2y_2 y_3)dx \to \min$, $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = \pi/2$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\pi/2) = 0$, $y_3(0) = 0$, $y_3(\pi/2) = -\pi/2$.

11. $I(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y_{1x}^2 + y_{2x}^2 + 2y_1 y_3 + y_3^2)dx \to \min$, $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi/2) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(\pi/2) = \pi/2$, $y_3(0) = 0$, $y_3(\pi/2) = -1$.

12. $I(y) = \int\limits_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} y_{2x}^3 - y_{1x}^2 + 2x \right)dx \to \min$, $y_1(-1) = 2$, $y_1(1) = 0$, $y_2(-1) = -1$, $y_2(1) = 1$.

13. $I(y) = \int\limits_0^1 (y_{1x}^2 + y_{2x}^2 + 4y_1^2)dx \to \min$, $y_1(0) = 0$, $y_1(1) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_2(1) = 0$.

14. $I(y)=\int\limits_0^3 \sqrt[3]{1+y_{1x}^2+y_{2x}^2}\,dx \to \min,\quad y_1(0)=1,\ y_1(3)=7,\ y_2(0)=-2,\ y_2(3)=1.$

15. $I(y)=\int\limits_2^4 \sqrt{1+y_{1x}^2+y_{2x}^2+y_{3x}^2}\,dx \to \min,\quad y_1(2)=1,\ y_1(4)=3,\ y_2(2)=2,\ y_2(4)=4,$

$y_3(2)=5,\ y_3(4)=9.$

16. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_{1x}y_{2x}+6xy_1+12x^2y_2)dx \to \min,\ y_1(0)=0,\ y_1(1)=1,\ y_2(0)=0,\ y_2(1)=1.$

17. $I(y)=\int\limits_0^\pi (y_{1x}^2-y_{2x}^2-2y_1^2+2y_1y_2-2y_2e^x)dx \to \min,$

$y_1(0)=y_1(\pi)=0,\ y_2(0)=0,\ y_2(\pi)=\frac{3}{4}(e^\pi+1).$

18. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (y_{1x}^2+y_{2x}^2+2y_1y_2-2xy_2)dx \to \min,\ y_1(0)=y_1(\pi/2)=0,\ y_2(0)=y_2(\pi/2)=0.$

19. $I(y)=\int\limits_{\pi/2}^{\pi} (y_{1x}y_{2x}-y_1y_2)dx \to \min,\ y_1(\pi/2)=1,\ y_1(\pi)=2,\ y_2(\pi/2)=0,\ y_2(\pi)=-1.$

20. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/4} (y_{1x}^2-y_{2x}^2+2y_2-4y_1^2)dx \to \min,$

$y_1(0)=0,\ y_1(\pi/4)=1,\ y_2(0)=0,\ y_2(\pi/4)=1.$

16.6. Найти экстремали функционалов, зависящих от производных высших порядков.

1. $I(y)=\int\limits_0^1 y_{xx}dx \to \min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=1,\ y(1)=0,\ y_x(1)=0.$

2. $I(y)=\int\limits_0^1 (48y-y_{xx}^2)dx \to \min,\ y(0)=0,\ y_x(0)=0,\ y(1)=1,\ y_x(1)=4.$

3. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_{xx}^2-24xy)dx \to \min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=0,\ y(1)=1/5,\ y_x(1)=1.$

4. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (y_{xx}^2-y_x^2)dx \to \min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=0,\ y(\pi/2)=\pi/2,\ y_x(\pi/2)=0.$

5. $I(y)=\int\limits_a^b (y_{xx}^2+y_x^2)dx \to \min,\ y(0)=0,\ y_x(0)=0,\ y(b)=0,\ y_x(b)=0.$

6. $I(y)=\int\limits_0^1 e^{-x}y_{xx}^2dx \to \min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=1,\ y(1)=e,\ y_x(1)=2e.$

7. $I(y)=\int\limits_0^1 (x+1)^3y_{xx}^2dx \to \min,\quad y(0)=1,\quad y_x(0)=-1,\ y(1)=1/2,\ y_x(1)=-1/4.$

8. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2}(y_{xx}^2-y^2+x^2)dx\to\min,\quad y(0)=1,\ y_x(0)=0,\ y(\pi/2)=0,\ y_x(\pi/2)=-1.$

9. $I(y)=\int\limits_0^1 y_{xxx}^2dx\to\min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=0,\ y_{xx}(0)=0,\ y(1)=1,\ y_x(1)=4,$

$y_{xx}(1)=12.$

10. $I(y)=\int\limits_0^1(y_{xxx}^2-y_{xx}^2)dx\to\min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=1,\ y_{xx}(0)=0,\ y(1)=\text{sh}1,$

$y_x(1)=\text{ch}1,\ y_{xx}(1)=\text{sh}1.$

11. $I(y)=\int\limits_0^{\pi}(y_{xxx}^2-y_{xx}^2)dx\to\min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=0,\ y_{xx}(0)=0,\ y(\pi)=\pi,\ y_x(\pi)=2,$

$y_{xx}(\pi)=0.$

12. $I(y)=\int\limits_0^{\pi}(y_{xxx}^2-y_{xx}^2)dx\to\min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=0,\ y_{xx}(0)=0,\ y(\pi)=\text{sh}\pi,$

$y_x(\pi)=\text{ch}\pi+1,\ y_{xx}(\pi)=\text{sh}\pi.$

13. $I(y)=\int\limits_0^1(y^2+2y_x^2+y_{xx}^2)dx\to\min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=1,\ y(1)=0,\ y_x(1)=-\text{sh}1.$

14. $I(y)=\int\limits_{-1}^0(240y-y_{xxx}^2)dx\to\min,\quad y(-1)=1,\ y_x(-1)=-9/2,\ y_{xx}(-1)=16,\ y(0)=0,$

$y_x(0)=0,\ y_{xx}(0)=0.$

15. $I(y)=\int\limits_a^b(y+y_{xx})dx\to\min,\quad y(a)=\alpha_1,\ y_x(a)=\alpha_2,\ y(b)=\beta_1,\ y_x(b)=\beta_2.$

16. $I(y)=\int\limits_a^b(y_x^2+yy_{xx})dx\to\min,\quad y(a)=\alpha_1,\ y_x(a)=\alpha_2,\ y(b)=\beta_1,\ y_x(b)=\beta_2.$

17. $I(y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 y_{xx}^2dx\to\min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=0,\ y_{xx}(1)=1.$

18. $I(y)=\int\limits_0^1(3yy_x+y_{xx}^2)dx\to\min,\quad y(0)=y_x(0)=0,\ y(1)=2,\ y_x(1)=5.$

19. $I(y)=\int\limits_0^1(1+x^2+2y_{xxx}^2)dx\to\min,\quad y(0)=1,\ y_x(0)=0,\ y_{xx}(0)=-2,\ y(1)=2,$

$y_x(1)=6,\ y_{xx}(1)=22.$

20. $I(y)=\int\limits_0^1(y_{xxx}^2+240xy)dx\to\min,\quad y(0)=0,\ y_x(0)=1,\ y_{xx}(0)=2,\ y(1)=85/42,$

$y_x(1)=13/6,\ y_{xx}(1)=5.$

16.7. Найти экстремали, на которых может достигаться экстремум функционала в следующих изопериметрических задачах:

1. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_x^2+x^2)dx \to \text{extr}, \quad y(0)=y(1)=0, \quad \int\limits_0^1 y^2 dx=2.$

2. $I(y)=\int\limits_0^1 y_x^2 dx \to \text{extr}, \quad y(0)=1, \ y(1)=6, \ \int\limits_0^1 y dx=3.$

3. $I(y)=\int\limits_0^\pi y_x^2 dx \to \text{extr}, \quad y(0)=y(\pi)=0, \ \int\limits_0^\pi y^2 dx=1.$

4. $I(y)=\int\limits_0^1 y_x^2 dx \to \text{extr}, \quad y(0)=0, \ y(1)=1/4, \ \int\limits_0^1 (y+y_x^2)dx=1/12.$

5. $I(y)=\int\limits_0^1 (xy_x+y_x^2)dx \to \text{extr}, \quad y(0)=0, \ y(1)=1, \ \int\limits_0^1 (y+y_x^2)dx=5/2.$

6. $I(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (y^2-y_x^2-6y\sin 2x)dx \to \text{extr}, \ y(0)=0, \ \ y(\pi/2)=1,$

$\int\limits_0^{\pi/2} (x+2y)dx=\pi^2/8-3.$

7. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_x^2+x^4)dx \to \text{extr}, \quad y(0)=y(1)=0, \ \int\limits_0^1 y^2 dx=2.$

8. $I(y)=\int\limits_0^\pi y_{xx}^2 dx \to \text{extr}, \quad y(0)=y_x(0)=0, \ y_1(\pi)=0, \ \ y_x(\pi)=-1,$

$\int\limits_0^\pi y_x^2 dx=1.$

9. $I(y)=\int\limits_0^\pi y_x^2 dx \to \text{extr}, \quad y(0)=0, \ y(\pi)=1, \ \int\limits_0^\pi y\sin x dx=0.$

10. $I(y)=\int\limits_0^\pi y\sin x dx \to \text{extr}, \quad y(0)=0, \ y(\pi)=\pi, \ \int\limits_0^\pi y_x^2 dx=3\pi/2.$

11. $I(y)=\int\limits_0^1 y_x^2 dx \to \text{extr}, \quad y(0)=0, \ y(1)=1/6, \ \int\limits_0^1 yx dx=0, \ \int\limits_0^1 y dx=0.$

12. $I(y)=\int\limits_0^1 y_x^2 dx \to \text{extr}, \quad y(0)=0, \ y(1)=e, \ \int\limits_0^1 ye^x dx=e^2/2-e.$

13. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_x^2+y^2)dx \to \text{extr}, \quad y(0)=0, \ y(1)=1/e, \ \int\limits_0^1 e^{-x} y dx=(e^2-3)/4e^2.$

14. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_{1x}^2+y_{2x}^2-4xy_1-4y_2^2)dx \to \text{extr}, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \quad y_1(1)=y_2(1)=1,$

$\int\limits_0^1 (y_{2x}^2-y_{1x}^2-xy_2)dx=2.$

15. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_{1x}^2+y_{2x}^2-4xy_{1x}-4y_1)dx \to \text{extr}, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \quad y_1(1)=y_2(1)=1,$

$\int\limits_0^1 (y_{1x}^2-y_{2x}^2-xy_{2x})dx=2.$

16. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 (2xy_1-y_{1x}^2+(1/3)y_{2x}^2)dx \to \text{extr}, \quad y_1(-1)=2, \; y_2(-1)=1, \; y_1(1)=0,$

$y_2(1)=-1, \quad \int\limits_{-1}^1 (y+x)dx=1/3.$

17. $I(y)=\int\limits_{-1}^1 y_{1x}y_{2x}dx \to \text{extr}, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \quad y_1(1)=0, \; y_2(1)=1,$

$\int\limits_0^1 y_1dx=0, \quad \int\limits_0^1 y_2dx=0.$

18. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_1+y_2)dx \to \text{extr}, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \; y_1(1)=1, \; y_2(1)=-3,$

$\int\limits_0^1 y_{1x}y_{2x}dx=0.$

19. $I(y)=\int\limits_0^1 y_{1x}y_{2x}dx \to \text{extr}, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \; y_1(1)=0, \; y_2(1)=1,$

$\int\limits_0^1 xy_1dx=0, \quad \int\limits_0^1 xy_2dx=0.$

20. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_{1x}^2+y_{2x}^2)dx \to \text{extr}, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \; y_1(1)=0, \; y_2(1)=0,$

$\int\limits_0^1 y_{1x}y_{2x}dx=-2.$

21. $I(y)=\int\limits_0^1 x(y_1-y_2)dx \to \text{extr}, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \; y_1(1)=2, \; y_2(1)=0,$

$\int\limits_0^1 y_{1x}y_{2x}dx=-4/5.$

22. $I(y)=\int\limits_0^1 y_x^2dx \to \text{extr}, \quad y(0)=2e+1, \; y(1)=2, \quad \int\limits_0^1 ye^{-x}dx=e.$

23. $I(y)=\int\limits_0^1 (y_x^2+y^2)dx \to \text{extr}, \quad y(0)=0, \; y(1)=e, \quad \int\limits_0^1 ye^xdx=(e^2+1)/4.$

24. $I(y)=\int\limits_1^2 x^2y_x^2dx \to \text{extr}, \quad y(1)=1, \quad y(2)=2, \quad \int\limits_1^2 xydx=7/3.$

25. $I(y)=\int\limits_{-1}^{1} y\sqrt{1+y_x^2}\,dx \to \text{extr}, \quad y(-1)=y(1)=0, \quad \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+y_x^2}\,dx = l.$

26. $I(y)=\int\limits_{0}^{\pi}(y_x^2-y^2)\,dx \to \text{extr}, \quad y(0)=y(\pi)=0, \quad \int\limits_{0}^{\pi} y\cos x\,dx = 1.$

27. $I(y)=\int\limits_{0}^{\pi/2}(y_x^2-y^2)\,dx \to \text{extr}, \quad y(0)=y(\pi/2)=0, \quad \int\limits_{0}^{\pi/2} y\sin x\,dx = 1.$

28. $I(y)=\int\limits_{1}^{2} x^3 y_x^2\,dx \to \text{extr}, \quad y(1)=4, \quad y(2)=1, \quad \int\limits_{1}^{2} y\,dx = 2.$

29. $I(y)=\int\limits_{0}^{\pi} y_x^2\,dx \to \text{extr}, \quad y(0)=2, \quad y(\pi)=0, \quad \int\limits_{0}^{\pi} y\cos x\,dx = \pi/2, \quad \int\limits_{0}^{\pi} y\sin x\,dx = \pi+2.$

30. $I(y)=\int\limits_{0}^{1} y_x^2\,dx \to \text{extr}, \quad y(0)=2, \quad y(1)=-14, \quad \int\limits_{0}^{1} y\,dx = -3/2, \quad \int\limits_{0}^{1} xy\,dx = -2.$

Глава 6. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 17. ПРИНЦИП МАКСИМУМА Л. С. ПОНТРЯГИНА

Теория оптимального управления отражает современный этап развития вариационного исчисления. Она возникла в 50-е годы прошлого столетия в связи с необходимостью решения многочисленных прикладных задач (управления производством, экономикой, космической навигации, автоматического регулирования, управления летательными аппаратами и т. д.). Эти задачи потребовали разработки новых методов решения, поскольку не укладывались в рамки классического вариационного начисления.

В теории оптимального управления основной результат — ***принцип максимума Л. С. Понтрягина*** (необходимое условие оптимальности) — один из фундаментальных результатов современной теории экстремальных задач. Также важную роль в исследовании задач управления играет метод динамического программирования Р. Беллмана, который используется для получения достаточных условий оптимальности.

17.1. Постановка задач оптимального управления

В этом пункте приведем краткое описание типичных задач оптимального управления. При постановке задачи оптимального управления должны четко оговариваться следующие четыре условия.

1) *Уравнения движения* (*процесса*). Под уравнениями движения понимается математическая модель (описание) изменения изучаемого объекта. Уравнения движения делятся на два класса: уравнения с сосредоточенными параметрами и уравнения с распределенными параметрами. Это разбиение основано на понятии состояния. ***Состоянием процесса*** называют минимальный набор числовых данных, который позволяет судить о поведении процесса в будущем. Если этот набор конечен, то такие уравнения относятся к первому классу (например, обыкновенные дифференциальные уравнения), если он бесконечен, то это уравнения с распределенными параметрами (например, дифференциально-разностные уравнения, уравнения в частных производных).

В дальнейшем будем рассматривать процессы, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Основной объект изучения — система уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^r$, t — как правило, время, f — n-вектор-функция. Решение этого уравнения $x(t)$, $t \geq t_0$, с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, при заданной вектор-функции $u(t)$, $t \geq t_0$ (задача Коши), называют ***фазовой траекторией***, $u(t)$, $t \geq t_0$, — ***управлением*** (***управляющим воздействием***), которое можем выбирать.

2) *Критерий качества переходного процесса* (*целевой функционал*), т. е. количественный показатель эффективности выбранного управления. Выделяют наиболее употребительные критерии качества (они уже использовались в задачах вариационного исчисления): терминальный критерий типа Майера, интегральный критерий, или критерий Лагранжа, общий критерий, или критерий Больца, и критерий быстродействия.

3) *Класс допустимых управлений*, т. е. класс управляющих воздействий на переходный процесс. Управляющие воздействия или управления могут быть различными функциями (непрерывными, кусочно-непрерывными, гладкими и т. д.). При выборе допустимых управлений важно выбрать такой класс функций, чтобы в нем большинство прикладных задач имели решения и чтобы функцию из него можно было достаточно просто реализовать практически. Наиболее употребительным классом допустимых управлений являются кусочно-непрерывные функции.

Функция называется ***кусочно-непрерывной***, если она непрерывна всюду на конечном отрезке определения, за исключением лишь конечного числа точек, где функция может терпеть разрывы первого рода. Для определенности предполагаем, что в каждой точке разрыва управление, например, непрерывно справа.

4) *Ограничения на фазовую траекторию.* К ним относятся различные граничные условия, ограничения на всю траекторию в целом и т. д., которые следуют из физического смысла задачи.

Пусть поведение объекта управления описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in T = [t_0, t_1], \tag{17.1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$ — ***вектор состояния*** (***вектор фазовых*** или ***выходных переменных***); $u \in \mathbf{R}^r$ — ***вектор управления*** (***вектор входных переменных***); t — время; t_0, t_1 — начальный и конечный моменты времени ($t_0 < t_1$); $x_0 \in \mathbf{R}^n$ — начальное состояние; f — n-вектор-функция.

Допустимые управления $u(t)$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные r-вектор-функции в каждый момент времени t, принимающие значения из заданного множества U:

$$u(t) \in U \subset \mathbf{R}^r, \quad t \in T. \tag{17.2}$$

Целью задачи является минимизация функционала

$$J(u, t_0, t_1) = \varphi(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt \to \min. \qquad (17.3)$$

Допустимое управление $u^0(t), t \in T$, решающее задачу (17.1)—(17.3), называется ***оптимальным управлением***, а соответствующая ему траектория $x^0(t)$, $t \in T$, системы (17.1) — ***оптимальной траекторией***.

Если t_0, t_1 фиксированы, то рассматриваемая задача (17.1)—(17.3) называется ***задачей с фиксированным временем***. Если $x(t_0) = x_0$, то ***левый конец траектории закреплен*** (при отсутствии ограничения на $x(t_0)$ левый конец траектории ***свободен***). В случае $x(t_0) \in X_0 \subseteq \mathbf{R}^n$ $(X_0 \neq \varnothing)$ имеем ***задачу с подвижным левым концом***. Аналогично вводятся понятия закрепленного, свободного и подвижного правого конца траектории.

Функционал (17.3) представляет собой сумму терминального функционала и интегрального. Задача оптимального управления с функционалом (17.3) называется ***задачей Больца***, минимизация интегрального функционала — ***задача Лагранжа***. Если критерием качества служит терминальный функционал $\varphi(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1)$, это ***задача Майера*** и, наконец, если в (17.3) $\varphi = 0$, $f_0 \equiv 1$, то такая задача называется ***задачей быстродействия***, критерий качества в ней $J(u, t_0, t_1) = t_1 - t_0$.

Иерархия критериев качества:

- терминальный критерий (Майера)

$$J(u, t_0, t_1) = \varphi(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1); \qquad (17.4)$$

- интегральный критерий (Лагранжа)

$$J(u, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt; \qquad (17.5)$$

- общий критерий (Больца)

$$J(u, t_0, t_1) = \varphi(x(t_0), x(t_1), t_0, t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt; \qquad (17.6)$$

- критерий быстродействия

$$J(u, t_0, t_1) = t_1 - t_0. \qquad (17.7)$$

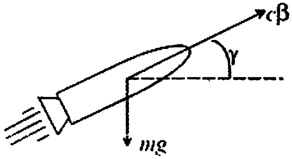


Рис 17.1

Можно показать, что первые три критерия (17.4), (17.5), (17.6) топологически эквивалентны, т. е., например, задача (17.1)—(17.3) сводится к задаче (17.1), (17.2), (17.5) и наоборот. Поэтому достаточно исследовать одну из них. Задача оптимального быстродействия с критерием качества (17.7) требует специального рассмотрения.

Пример 17.1 (*задача полета ракеты с ограниченным ускорением на максимальную дальность*). Рассмотрим задачу максимизации дальности полета ракеты, величина тяги которой не может превысить заданного значения. Будем предполагать, что полет происходит в вертикальной плоскости переменных x_1, x_2; ракету рассматриваем как материальную точку с массой m; Земля является плоской и вращением ее можно пренебречь; атмосфера отсутствует, а ускорение силы тяжести постоянно и равно g; на ракету действует реактивная тяга $c\beta$, где β — расход топлива, а c — постоянная (эффективная скорость истечения), причем двигатели являются безынерционными.

Обозначим через x_3, x_4 компоненты скорости ракеты, а через γ угол вектора тяги с горизонтом (рис. 17.1). Тогда уравнения движения ракеты будут иметь следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_3,\;\; \dot{x}_2 = x_4,\;\; \dot{x}_3 = \frac{c}{x_5}u_1u_3,\;\; \dot{x}_4 = \frac{c}{x_5}u_2u_3 - g,\;\; \dot{x}_5 = -u_3,$$

где $u_1 = \cos\gamma$, $u_2 = \sin\gamma$, $u_3 = \beta$, $x_5 = m$, т. е. u_1, u_2 — направляющие косинусы вектора тяги; $u_3 = -\dot{x}_5$ — скорость расхода массы.

Примем, что ракета стартует с нулевой отметки. Это означает, что $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=0$, $x_4(0)=0$, $x_5(0)=x_{50}$ (левый конец траектории закреплен). На правом конце можно фиксировать лишь две переменные: $x_2(t_1)=x_{21}>0$ и $x_5(t_1)=x_{51}>0$, где x_{21} — высота подъема ракеты при этом полете, время t_1 не фиксировано.

Величина тяги ограничена: $0 \le u_3 \le u_{30}$. Кроме того, как следует из обозначений, $u_1^2+u_2^2=1$. Поэтому множество U значений управления представляет собой цилиндр радиусом 1 и высотой u_{30}:

$$U = \{u = (u_1, u_2, u_3) : u_1^2+u_2^2=1;\;\; 0 \le u_3 \le u_{30}\}.$$

Требуется перевести ракету с заданными начальными значениями ее координат в некоторое конечное состояние (на заданной высоте x_{21}), израсходовав при этом заданное количество топлива, и таким образом, чтобы горизонтальная дальность полета $x_1(t_1)$ была максимальной. Следовательно, задача оптимального управления движением ракеты запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & x_1(0)=0, \\ \dot{x}_2 = x_4, & x_2(0)=0, \quad x_2(t_1)=x_{21}, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{c}{x_5}u_1u_3, & x_3(0)=0, \\ \dot{x}_4 = \dfrac{c}{x_5}u_2u_3 - g, & x_4(0)=0, \\ \dot{x}_5 = -u_3, & x_5(0)=x_{50}, \quad x_5(t_1)=x_{51}, \end{cases}$$

$$U=\{u=(u_1, u_2, u_3):\ u_1^2+u_2^2=1;\ 0\le u_3\le u_{30}\},\ t\in[0;\ t_1],$$

$$J(u, t_1) = -x_1(t_1) \to \min.$$

Эта задача является ***задачей терминального управления с нефиксированной продолжительностью процесса.***

Пример 17.2 (*задача об оптимальной поставке продукции*). Производитель поставляет продукцию в течение периода времени $T=[0,\ t_1]$. Спрос на продукцию $s(t)$, $t\in T$, известен. Обозначим через $x(t)$, $t\in T$, объем поставок. Если $x(t)-s(t)<0$ (спрос превышает предложение, т. е. имеет место дефицит), то это приводит к убыткам производителя (упущенная выгода); случай $x(t)-s(t)>0$ тоже ведет к убыткам (порча продукции, затраты на складирование, поиск дополнительных потребителей и т. д.). Известен вид функции $p_1(\cdot)$ убытков: $p_1(0)=0$, $p_1(x(t)-s(t))>0$, если $x(t)-s(t)\ne 0$. Еще одна группа убытков связана с затратами на модернизацию или перестройку производства при изменении спроса. Эта функция $p_2(\cdot)$ также известна: $p_2(\dot{x})=0$, если $\dot{x}=0$ (интенсивность производства постоянна), и $p_2(\dot{x})>0$, если $\dot{x}\ne 0$, где $\dot{x}(t)$, $t\in T$, — скорость изменения поставок, которая находится в заданных пределах:

$$a\le \dot{x}(t)\le b,\ t\in T.$$

Требуется найти такую функцию поставок, для которой суммарные убытки на заданном периоде времени минимальны. Поставка в начале периода задана $x(0)=x_0$.

Функционал суммарных потерь имеет вид

$$\int_0^{t_1}\left(p_1\left(x(t)-s(t)\right)+p_2\left(\dot{x}(t)\right)\right)dt.$$

Введем обозначения $\dot{x}(t)=u$, $a\le u(t)\le b$, $t\in T$; $u=u(t)$, $t\in T$, — функция, определяющая динамику изменения объема поставки продукции; $f_0(x,u,t)=p_1\left(x(t)-s(t)\right)-p_2\left(u(t)\right)$, $t\in T$.

Таким образом, приходим к задаче оптимального управления

$$\dot{x}=u,\ \ t\in T,\ \ x(0)=x_0,$$
$$a\le u(t)\le b,\ \ t\in T,$$
$$J(u)=\int_0^{t_1} f_0\left(x(t),\ u(t),t\right)dt\to\min,$$

которая является задачей Лагранжа с фиксированным временем, закрепленным левым и свободным правым концами траектории.

Пример 17.3 (*классическая навигационная задача быстродействия*). Рассмотрим корабль, движущийся с постоянной единичной скоростью относительно течения, скорость которого постоянна и равна s. Определить оптимальное управление рулями корабля, при котором корабль достигнет заданной конечной точки из заданного начального пункта за минимальное время.

Пусть γ — регулируемый угол между векторами скорости корабля и скорости течения (рис. 17.2). Тогда уравнения движения корабля имеют вид

$$\begin{cases}\dot{x}_1=s+\cos\gamma, & x_1(0)=x_{10},\ x_1(t_1)=x_{11},\\ \dot{x}_2=\qquad\sin\gamma, & x_2(0)=x_{20},\ x_2(t_1)=x_{21}.\end{cases}$$

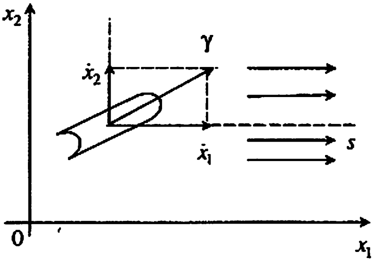


Рис. 17.2

Введем обозначения $u_1=\cos\gamma$, $u_2=\sin\gamma$. Тогда задача оптимального быстродействия запишется в виде

$$\begin{cases}\dot{x}_1=s+u_1, & x_1(0)=x_{10},\ x_1(t_1)=x_{11},\\ \dot{x}_2=\qquad u_2, & x_2(0)=x_{20},\ x_2(t_1)=x_{21},\end{cases}$$
$$u_1^2(t)+u_2^2(t)=1,\ \ t\in[0;t_1],$$
$$J(u)=t_1\to\min.$$

17.2. Принцип максимума для задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in T = [t_0; t_1], \quad x(t_0) = x_0, \tag{17.8}$$

$$u(t) \in U \subset \mathbf{R}^r, \ t \in T, \tag{17.9}$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)dt \to \min, \tag{17.10}$$

в которой момент t_1 фиксирован.

В задаче (17.8)—(17.10) предполагается, что допустимые управления являются кусочно-непрерывными функциями со значениями из множества U; функции $f(x, u, t)$, $f_0(x, u, t)$, $\partial f(x, u, t)/\partial x$, $\partial f_0(x, u, t)/\partial x$, $\varphi(x)$, $\partial\varphi(x)/\partial x$ непрерывны. Если $f_0(x, u, t) \equiv 0$, $t \in T$, то задача (17.8)—(17.10) — ***задача терминального управления*** (***простейшая задача оптимального управления***).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 17.1 (принцип максимума Л. С. Понтрягина). *Пусть* $u^0(t)$, $t \in T$, *— оптимальное управление в задаче* (17.8)—(17.10); $x^0(t), t \in T$, *— соответствующая ему оптимальная траектория системы* (17.8); $\psi^0(t)$, $t \in T$, *— решение соответствующей **сопряженной системы***

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x^0(t), \psi, u^0(t), t)}{\partial x}, \ t \in T, \tag{17.11}$$

с начальным условием

$$\psi(t_1) = -\partial\varphi(x^0(t_1))/\partial x, \tag{17.12}$$

где $H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) - f_0(x, u, t)$, $t \in T$, *— **гамильтониан** (**функция Л. С. Понтрягина**). Тогда вдоль решений* $x^0(t)$ *и* $\psi^0(t)$, $t \in T$, *систем* (17.8) и (17.11), (17.12) *на управлении* $u^0(t)$, $t \in T$, *выполняется условие максимума*

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), \quad t \in [t_0; t_1). \tag{17.13}$$

Замечание 17.1. Если рассматривается линейно-выпуклая задача

$$\dot{x} = A(t)x + b(u,t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0,$$
$$u(t) \subset U, \quad t \in T, \tag{17.14}$$
$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u,t)dt \to \min,$$

где $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $b(u,t)$ — n-вектор-функция, $f_0(x,u,t) = a_0(x,t) + b_0(u,t)$, функции $\varphi(x)$, $a_0(x,t)$ выпуклы по x, то принцип максимума для этой задачи является необходимым и достаточным условием оптимальности, т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 17.2. *Для оптимальности допустимого управления* $u^0(t)$, $t \in T$, *в задаче* (17.14) *необходимо и достаточно, чтобы вдоль управления* $u^0(t)$, $t \in T$, *и соответствующих ему решений* $x^0(t)$, $t \in T$, *прямой и* $\psi^0(t)$, $t \in T$, *сопряженной системы* (17.11), (17.12), *где* $H(x,\psi,u,t) = \psi'(A(t)x + b(u,t)) - f_0(x,u,t)$, *выполнялось условие максимума*

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t), \quad t \in [t_0, t_1).$$

Замечание 17.2. В задаче (17.4) основная система линейна по состоянию. Если, кроме того, $b(u,t) = B(t)u$, $b_0(u,t) = b'(t)u$, $a_0(x,t) = a'(t)x$, $\varphi(x) = c'x$ (функции линейны по состоянию и управлению), то во многих случаях удается (при достаточно простой структуре множества U) найти оптимальное управление в явном виде (см. примеры).

Пример 17.4. Пусть задача терминального управления имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \ x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, \ x_2(0) = 0, \end{cases}$$
$$|u(t)| \le 1, \ t \in T = [0; 2],$$
$$J(u) = x_1(2) - x_2(2) \to \min.$$

Здесь задача является линейной и по состоянию, и по управлению. Тогда (см. замечание 17.2)

$$A(t) \equiv A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B(t) \equiv b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t_1 = 2,$$

$$U=\{u: |u|\le 1\},\ \ \varphi(x)=c'x,\ \ c=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \ f_0\equiv 0.$$

В силу замечания 17.1 принцип максимума — необходимое и достаточное условие оптимальности. Поэтому оптимальное управление $u^0(t)$, $t\in T$, определим из условия максимума. Имеем $H(x,\psi,u,t)=\psi'(Ax+bu)$ (гамильтониан не зависит явно от времени, поскольку исходная система стационарная). Определим решение $\psi^0(t)$, $t\in T$, сопряженной системы. В нашем случае имеем

$$\dot\psi=\begin{pmatrix}\dot\psi_1\\ \dot\psi_2\end{pmatrix}=-\frac{\partial H(x,\psi,u,t)}{\partial x}=-A'\psi=-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\psi_1\end{pmatrix},$$

т. е.

$$\dot\psi_1=0,\qquad \psi_1(2)=-\frac{\partial\varphi(x(2))}{\partial x_1}=-1,$$

$$\dot\psi_2=-\psi_1,\ \ \psi_2(2)=-\frac{\partial\varphi(x(2))}{\partial x_2}=1.$$

Решая эту систему, находим $\psi_1^0(t)\equiv -1$, $\psi_2^0(t)=t-1$, $t\in T$ (решение не зависит от управления). Тогда условие максимума имеет вид

$$\psi^{0\prime}(t)(Ax^0(t)+bu^0(t))=\max_{|u|\le 1}\psi^{0\prime}(t)(Ax^0(t)+bu),\ \ t\in T,$$

или

$$\psi^{0\prime}(t)bu^0(t)=\max_{|u|\le 1}\psi^{0\prime}(t)bu,\ \ t\in T.$$

Из последнего равенства получаем

$$u^0(t)=\operatorname{sgn}(\psi^{0\prime}(t)b)=\operatorname{sgn}\left((-1;\,t-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\operatorname{sgn}(t-1),\ \ t\in T.$$

Таким образом, допустимое управление $u^0(t)$, $t\in T$, решающее исходную задачу, является кусочно-постоянным: $u^0(t)\equiv -1$, если $t\in[0;1)$; $u^0(t)\equiv 1$, если $t\in[1;\,2]$. Момент времени $t=1$, в котором оптимальное управление $u^0(t)$, $t\in T$, меняет свое граничное значение с -1 на 1, называется ***точкой переключения*** оптимального управления.

Для подсчета $J(u^0)$ найдем оптимальную траекторию $x^0(t)$, $t \in T$, системы. Сначала в исходную систему подставим управление $u^0(t) \equiv -1$, $t \in [0; 1)$. Получим $x_1^0(t) = -t^2/2$, $x_2^0(t) = -t$, $t \in [0; 1)$, и $x_1^0(1) = -1/2$, $x_2^0(1) = -1$. Эти значения оптимальной траектории в момент $t = 1$ используются как начальные условия для нахождения оптимальной траектории на отрезке $[1; 2]$. Следовательно, при $u^0(t) \equiv 1$, $t \in [1; 2]$, найдем, что $x_1^0(t) = t^2/2 - 2t + 1$, $x_2^0(t) = t - 2$, $t \in [1; 2]$. Тогда $J(u^0) = x_1^0(2) - x_2^0(2) =$ $= 2 - 4 + 1 = -1$.

Пример 17.5. Решить следующую линейно-выпуклую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u_2 + \dfrac{2}{3}u_3^3, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = t^2 u_1 - u_2, & x_2(0) = 0; \end{cases}$$
$$-1 \le u_1(t) \le 2, \quad u_2(t) \in \{-1;\ -1/2;\ -1/4;\ 0\},$$
$$-\sqrt[3]{3} \le u_3(t) \le 1, \quad t \in [0; 3),$$
$$J(u) = x_1(3) \to \min.$$

Составляем гамильтониан

$$H(x, \psi, u, t) = \psi_1 x_2 + 2\psi_1 u_2 + (2/3)\psi_1 u_3^3 + \psi_2 t^2 u_1 - \psi_2 u_2.$$

Сопряженная система

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, & \psi_1(3) = -1, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, & \psi_2(3) = 0, \end{cases}$$

имеет решение $\psi_1(t) = -1$, $\psi_2(t) = t - 3$, $t \in [0; 3)$. Из условия максимума найдем оптимальное управление $u^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$. Для каждого фиксированного $t \in [0; 3)$ решаем задачу

$$-2u_2 - \frac{2}{3}u_3^3 + t^2(t-3)u_1 - (t-3)u_2 \to \max,$$
$$-1 \le u_1 \le 2, \ u_2 \in \{-1;\ -1/2;\ -1/4;\ 0\}, \ -\sqrt[3]{3} \le u_3 \le 1.$$

Очевидно, что последняя задача эквивалентна следующим задачам:

1) $t^2(t-3)u_1 \to \max,\ -1 \le u_1 \le 2;$

2) $(1-t)u_2 \to \max,\ u_2 \in \{-1;\ -1/2;\ -1/4;\ 0\};$

3) $(-2/3)u_3^3 \to \max,\ -\sqrt[3]{3} \le u_3 \le 1,$

откуда получаем:

1) поскольку $t^2(t-3) < 0$ при $t \in (0;\ 3)$, то $u_1^0(t) \equiv -1,\ t \in [0;\ 3);$

2) поскольку $1-t>0$ при $t \in [0;\ 1)$ и $1-t<0$ при $t \in [1;\ 3)$, то
$$u_2^0(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;\ 1), \\ -1, & t \in [1;\ 3); \end{cases}$$

3) $u_3^0(t) = -\sqrt[3]{3},\ t \in [0;\ 3).$

Теперь найдем оптимальную траекторию $x^0(t) = (x_1^0(t),\ x_2^0(t)),\ t \in$ $\in [0;\ 3]$, соответствующую оптимальному управлению $u^0(t)$.

а) $t \in [0;\ 1]$. Тогда система принимает вид $\dot{x}_1 = x_2 - 2,\ x_1(0) = 0;\ \dot{x}_2 =$ $= -2t^2,\ x_2(0) = 0$. Интегрируя ее, получим $x_1^0(t) = -t^4/12 - 2t,\ x_2^0(t) = -t^3/3,$ $t \in [0;\ 1]$. Следовательно, $x_1^0(1) = -25/12,\ x_2^0(1) = -1/3$.

б) $t \in [1;\ 3]$. Имеем систему $\dot{x}_1 = x_2 - 3,\ x_1(1) = -25/12;\ \dot{x}_2 = -t^2 + 1/2,$ $x_2(1) = -1/3$, интегрируя которую, получим $x_1^0(t) = -t^4/12 + t^2/4 + 7t/2 +$ $+5/4,\ x_2^0(t) = -t^3/3 + t/2 - 1/2,\ t \in [1;\ 3]$.

Таким образом, компоненты оптимальной траектории $x^0(t)$ имеют следующий вид:

$$x_1^0(t) = \begin{cases} -t^4/12 - 2t, & t \in [0;\ 1], \\ -t^4/12 + t^2/4 - 7t/2 + 4/5, & t \in [1;\ 3]; \end{cases}$$

$$x_2^0(t) = \begin{cases} -t^3/3, & t \in [0;\ 1], \\ -t^3/3 + t/2 - 1/2, & t \in [1;\ 3]. \end{cases}$$

Оптимальное значение функционала равно $J(u^0) = x_1^3(3) = -55/4$.

Замечание 17.3. Если в терминальной задаче оптимального управления момент t_1 окончания процесса не фиксирован, то для нее тоже справедливо условие максимума и, кроме того, оптимальный момент времени t_1^0 удовлетворяет некоторому условию.

Теорема 17.3. *Пусть допустимое управление* $u^0(t)$, $t\in[t_0,\ t_1^0]$, *является оптимальным управлением, а* t_1^0 — *оптимальный момент времени в задаче*

$$\dot{x}=f(x,u,t),\ \ x(t_0)=x_0,\ u(t)\in U,\ \ t\ge t_0,$$

$$J(u,t_1)=\varphi(x(t_1),t_1)\to\min$$

(*дополнительно предполагается, что* $\varphi(x,\ t_1)$ *дифференцируема по* t_1). *Тогда управление* $u^0(t)$, $t\in[t_0;\ t_1^0]$, *удовлетворяет условию максимума* (17.13) *и условию*

$$H(x_0(t_1^0),\psi^0(t_1^0),u(t_1^0-0),t_1^0)=\frac{\partial\varphi(x^0(t_1^0),t_1^0)}{\partial t_1},$$

где $x^0(t), t\in[t_0;t_1^0]$, — *оптимальная траектория,* $\psi^0(t)$, $t\in[t_0;\ t_1^0]$, — *решение сопряженной системы* (17.11) *с начальным условием*

$$\psi(t_1^0)=-\frac{\partial\varphi(x^0(t_1^0),\ t_1^0)}{\partial x}.$$

Процедура проверки допустимого управления на оптимальность. Как необходимое условие оптимальности принцип максимума Понтрягина позволяет исключить из рассмотрения некоторые неоптимальные управления. Действительно, пусть имеем допустимое управление $u^*(t)$, $t\in T$, в задаче (17.8)—(17.10). Тогда, интегрируя систему (17.8), находим фазовую траекторию $x^*(t)$, $t\in T$. Далее, интегрируя сопряженную систему, определяем $\psi^*(t)$, $t\in T$, и составляем гамильтониан $H(x^*(t),\psi^*(t),$ $u^*(t),t)$. Если при некоторых $\tau\in[t_0;\ t_1)$ и $u\in U$ окажется, что

$$H(x^*(\tau),\psi^*(\tau),u^*(\tau),\tau)<H(x^*(\tau),\ \psi^*(\tau),u,\tau),$$

то управление $u^*(t)$, $t\in T$, не оптимально.

Возьмем в примере 17.4 $u^*(t)\equiv 0$, $t\in[0;\ 2]$. Тогда, очевидно, для допустимого управления $u(t)\equiv 1$, $t\in[0;2]$ и $\tau=3/2$ будем иметь

$$\psi^{*\prime}(\tau)bu^*(\tau)=0<\frac{1}{2}=\psi^{*\prime}(\tau)bu(\tau),$$

т. е. допустимое управление $u^*(t)\equiv 0$, $t\in[0;\ 2]$, не оптимально.

Заметим, что в процедурах проверки допустимого управления на оптимальность также играют большую роль свойства гамильтониана.

Допустимое управление $u^*(t)$, $t \in T$, называется ***экстремалью Понтрягина*** или ***экстремальным управлением***, если вдоль него и соответствующих ему траекторий $x^*(t)$, $\psi^*(t)$, $t \in T$, основной и сопряженной систем выполняется условие максимума (17.13).

Отметим, что здесь не требуется, чтобы граничные условия для систем имели определенный вид, — они зависят от конкретной задачи.

Понятно, что среди экстремальных управлений находятся и оптимальные, поэтому важной задачей является задача выделения из множества всех допустимых управлений экстремальных управлений.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 17.4 (свойства гамильтониана). 1) *Вдоль экстремальных управлений гамильтониан* $H(x(t), \psi(t), u(t), t)$ *непрерывен в каждой точке* $t \in [t_0; t_1]$.

2) *В каждой точке непрерывности экстремального управления выполняется равенство*

$$\frac{dH(x(t), \psi(t), u(t), t)}{dt} = \frac{\partial H(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial t}.$$

3) *Вдоль экстремального управления в случае стационарной системы* (17.8) (*т. е.* $\dot{x} = f(x, u)$) *гамильтониан постоянен*:

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) \equiv \text{const}, \ t \in [t_0; t_1).$$

При вычислении $\dfrac{dH}{dt}$ в условии 2) сначала в гамильтониан подставляются функции $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$, а затем производится дифференцирование по t; при вычислении же $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ сначала функция $H(x, \psi, u, t)$ дифференцируется по t, а потом в результат подставляются $x(t)$, $\psi(t)$, $u(t)$.

Указанные свойства гамильтониана из теоремы 17.4 используются при проверке конкретных допустимых управлений на оптимальность. Невыполнение любого из условий 1)—3) является достаточным признаком неоптимальности исследуемого управления.

Пример 17.6. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1/2; \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0, \end{cases} \tag{17.15}$$

$$|u(t)| \le 1, \ t \in [0;\ 4],$$

$$J(u) = x_1(4) + x_2^2(4) \to \min.$$

Требуется проверить на оптимальность допустимое управление

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0;\ 1); \\ 0, & t \in [1;\ 3); \\ 1, & t \in [3;\ 4). \end{cases}$$

При этом управлении найдем решения основной и сопряженной систем. Пусть $t \in [0;\ 1)$. Тогда основная система такова: $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -1,\ x_1(0) = 1/2,\ x_2(0) = 0$. Отсюда $x_1(t) = -t^2/2 + 1/2,\ x_2(t) = -t$. Поэтому начальные условия для системы (17.15) на полуинтервале $[1;\ 3)$ равны $x_1(1) = 0$, $x_2(1) = -1$, и решение системы $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 0$ будет иметь вид: $x_1(t) = -t + 1,\ x_2(t) = -1$. И наконец, для $t \in [3;\ 4)$: $\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 1,\ x_1(3) = -2$, $x_2(3) = -1$.

Тогда $x_1(t) = -t^2/2 - 4t + 11/2,\ x_2(t) = t - 4$.

Итак,

$$x_1(t) = \begin{cases} -t^2/2 + 1/2, & t \in [0;\ 1); \\ -t + 1, & t \in [1;\ 3); \\ -t^2/2 - 4t + 11/2, & t \in [3;\ 4); \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} -t, & t \in [0;\ 1); \\ -t + 1, & t \in [1;\ 3); \\ t - 4, & t \in [3;\ 4). \end{cases}$$

Запишем гамильтониан $H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Тогда сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, & \psi_1(4) = -1; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, & \psi_2(4) = -2x_2(4) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $\psi_1(t) = -1,\ \psi_2(t) = t - 4,\ \ t \in [0;\ 4]$. Далее подсчитываем гамильтониан на допустимом управлении $u = u(t)$ и соответствующих траекториях $x = x(t),\ \ \psi = \psi(t)$:

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \begin{cases} 4, & t \in [0;\ 1); \\ 1, & t \in [1;\ 3); \\ 0, & t \in [3;\ 4). \end{cases}$$

Отсюда следует, что утверждения 1), 3) теоремы 17.4 не выполняются. Таким образом, исследуемое управление $u(t)$, $t \in [0;\ 4]$, не оптимально.

К сделанному выше выводу о неоптимальности управления $u = u(t)$ можно было прийти, используя теорему 17.1. Действительно,

$$H(x,\psi,u) - H(x,\psi,v) = \psi_2(u(t) - v) = \begin{cases} (4-t)(v+1), & t \in [1; 0); \\ (4-t)v, & t \in [1; 3); \\ (4-t)(v-1), & t \in [3;\ 4), -1 \le v \le 1. \end{cases}$$

Очевидно, что при $v = -1$ эта разность отрицательна на полуинтервале $[1; 4)$. Поэтому проверяемое управление не удовлетворяет принципу максимума и, значит, заведомо не может быть оптимальным.

Рассмотрим задачу (17.8)—(17.10). Составим гамильтониан $H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t)$ и найдем управление $u = u(x, \psi, t)$ из условия максимума

$$H(x,\ \psi,\ u(x,\ \psi,\ t),\ t) = \max_{v \in U} H(x,\ \psi,\ v,\ t).$$

Подставим найденное управление $u = u(x, \psi, t)$ в основную (17.8) и сопряженную (17.11), (17.12) системы. Тогда получим краевую задачу для системы $2n$ дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\ u(x,\ \psi,\ t),\ t), & x(t_0) = x_0; \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\partial H(x,\psi,\ u(x,\ \psi,\ t),\ t)}{\partial x}, & \psi(t_1) = -\dfrac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}, \quad t \in T. \end{cases} \tag{17.16}$$

Эта задача обычно называется ***краевой задачей принципа максимума***. Если ее решение — $x^* = x^*(t)$, $\psi^* = \psi^*(t)$, $t \in T$, то управление $u^* = u(x^*, \psi^*, t^*)$ удовлетворяет условию максимума и является "подозрительным" на оптимальность.

Отметим, что краевая задача (17.16), вообще говоря, нелинейная, даже если система (17.8) линейная. Все трудности заключены в функции $u = u(x, \psi, t)$, которая находится из условия максимума. Именно из-за этого система (17.16) по свойствам "хуже" системы (17.8). Указанные особенности краевой задачи видны из следующих примеров.

Пример 17.7. Сведением к краевой задаче принципа максимума решить задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \ x_1(0) = 0; \\ \dot{x}_2 = u, \ \ x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$|u(t)| \le 1, \ t \in [0;\ 1],$$

$$J(u) = \frac{1}{2} x_2^2(1) + \int_0^1 u^2(t)dt \to \min.$$

Составим гамильтониан. Поскольку система стационарна, то он не зависит явно от времени

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - u^2 = -(u - \psi_2/2)^2 + \psi_2^2/4 + \psi_1 x_2.$$

Запишем сопряженную систему

$$\dot{\psi}_1(t) = 0, \ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1; \ \ \psi_1(1) = 0, \ \psi_2(1) = -x_2(1).$$

Из вида гамильтониана следует, что его максимум достигается на функциях

$$u(x, \psi, t) = \begin{cases} \psi_2/2, & |\psi_2(t)| \le 2; \\ 1, & \psi_2(t) > 2; \\ -1, & \psi_2(t) < -2, \ t \in [0;\ 1). \end{cases}$$

Найдем решение сопряженной системы: $\psi_1(t) \equiv 0, \psi_2(t) \equiv -x_2(1), \ t \in \in [0;\ 1]$. Тогда из второго уравнения основной системы получим, что $x_2(1) = \int_0^1 u(t)dt$. Учитывая ограничение на управление, будем иметь $|x_2(1)| \le 1$, т. е. $|\psi_2(t)| \le 1, \ t \in [0;\ 1]$. Следовательно, приходим к краевой задаче

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0; \\ \dot{x}_2 = \psi_2/2, & x_2(0) = 0; \\ \dot{\psi}_1 = 0, & \psi_1(1) = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, & \psi_2(1) = -x_2(1). \end{cases}$$

Отсюда $x_1(t) = -t^2 x_2(1)/2$, $x_2(t) = -tx_2(1)/2$, $t \in [0;\ 1]$. При $t=1$ должно выполняться равенство $x_2(1) = -x_2(1)/2$, откуда следует $x_2(1) = 0$. Следовательно, управление $u^0(t) \equiv 0$, $t \in [0;\ 1]$, оптимально (исходная задача линейно-выпуклая), $x^0(t) \equiv 0$, $\psi^0(t) \equiv 0$, $t \in [0;\ 1]$, $J(u^0) = 0$.

Пример 17.8. Решить задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \ x_1(0) = 0; \\ \dot{x}_2 = u, \ \ x_2(0) = 2, \end{cases}$$

$$|u(t)| \le 1, \ \ t \in [0;\ 4],$$

$$J(u) = \frac{1}{2} x_2^2(4) - \int_0^4 u^2(t)dt \to \min.$$

Имеем:

- гамильтониан

$$H(x, \psi, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + u^2 = \psi_1 x_2 + (u + \psi_2/2)^2 - \psi_2^2/4;$$

- сопряженную систему

$$\dot{\psi}_1(t) = 0, \ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1; \ \psi_1(4) = 0, \ \ \psi_2(4) = -x_2(4).$$

Тогда из условия максимума получим

$$u(x, \psi, t) = \begin{cases} 1, & \psi_2(t) > 0; \\ -1, & \psi_2(t) < 0; \\ \pm 1, & \psi_2(t) = 0, \ \ t \in [0;\ 4). \end{cases}$$

У нас $\psi_2(t) \equiv -x_2(4)$, $t \in [0;\ 4]$. Поэтому возможны следующие три случая.

1) $x_2(4) > 0$. Тогда $\psi_2(t) < 0$; $u(t) \equiv -1$, $t \in [0;\ 4]$, и, значит, $x_2(t) = -t + 2$, откуда $x_2(4) < 0$, что невозможно.

2) $x_2(4) < 0$. Аналогично предыдущему случаю получим $\psi_2(t) > 0$; $u(t) \equiv 1$, $t \in [0;\ 4]$; $x_2(t) = t + 2$, $x_2(4) > 0$, что невозможно.

3) $x_2(4) = 0$. В этом случае принципу максимума удовлетворяет любое кусочно-постоянное управление на $[0;\ 4)$ с граничными значениями ± 1. Поскольку исходная задача линейно-выпуклая, то указанное управление будет оптимальным. Ясно, что оптимальных управлений в этой задаче бесконечное множество. Например, оптимальными управлениями будут функции вида

$$u(t)=\begin{cases}-1, & t\in[0;\ 1);\\ 1, & t\in[1;\ 4);\end{cases}\quad u(t)=\begin{cases}1, & t\in[0;\ 11/3);\\ -1, & t\in[11/3;\ 4);\end{cases}\qquad u(t)=\begin{cases}1, & t\in[0;1/2);\\ -1, & t\in[1/2;\ 1);\\ 1, & t\in[1;\ 3/2);\\ -1, & t\in[3/2;\ 3);\\ 1, & t\in[3;\ 4);\end{cases}$$

и т. д. При этом минимум функционала $J(u)$ равен -4.

Как необходимое условие оптимальности принцип максимума может быть использован для ***улучшения допустимых управлений***. Опишем такую процедуру.

Пусть дано допустимое управление $u=u(t)$, $t\in[t_0;\ t_1)$, в задаче (17.8)—(17.10), которое не является экстремальным, $x(t)$, $\psi(t)$, $t\in T$, — соответствующие траектории основной и сопряженной систем. Тогда найдутся момент θ, $\theta\in[t_0;\ t_1)$, и вектор $v\in U$ такие, что

$$H(x(\theta),\ \psi(\theta),\ v)>H(x(\theta),\ \psi(\theta),\ u(\theta)).$$

Построим управление

$$u_\varepsilon^1(t)=\begin{cases}u(t), & t\notin[\theta;\ \theta+\varepsilon);\\ v, & t\in[\theta;\ \theta+\varepsilon);\end{cases}$$

где $\theta+\varepsilon\in[t_0;\ t_1)$, $\varepsilon>0$ — достаточно малое число.

Утверждается, что существует $\varepsilon_0>0$, что $J(u_\varepsilon^1)<J(u)$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, т. е. управление $u_\varepsilon^1(t)$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, лучше управления $u(t)$.

Заметим, что когда оптимальное управление найти трудно, то процедура улучшения допустимых управлений может оказаться решающей при исследовании задачи.

Можно показать, что последовательность управлений, генерируемая указанной процедурой, релаксационна и для линейно-выпуклой задачи (17.14) является минимизирующей (при условии существования оптимального управления).

Замечание 17.4. Если в задаче (17.8)—(17.10) дополнительно потребовать, чтобы функции $f(x,u,t)$, $f_0(x,u,t)$ были дифференцируемы по u, а множество U выпукло, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 17.5 (дифференциальный (линеаризованный) принцип максимума). *Если* $u^0(t)$, $t\in T$, *— оптимальное управление в задаче* (17.8)—(17.10), *то вдоль соответствующих решений* $x^0(t)$ *и* $\psi^0(t)$, $t\in T$, *сис-*

тем (17.8) *и* (17.11), (17.12) *на оптимальном управлении выполняется условие*

$$\frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u^0(t) =$$

$$= \max_{u \in U} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u, \quad t \in [t_0;\ t_1). \qquad (17.17)$$

Заметим, что условие (17.17) для проверки проще, чем условие (17.13), поскольку в (17.17) максимизируется линейная функция по u, а в (17.13), вообще говоря, нелинейная.

Метод улучшения допустимых управлений на основе дифференциального принципа максимума состоит в следующем. Пусть допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, не удовлетворяет дифференциальному условию максимума (17.17). Тогда существует улучшающее управление $u^1_\varepsilon(t) = u(t) + \varepsilon(\tilde{u}(t) - u(t))$, $t \in [t_0;\ t_1)$, при достаточно малом $\varepsilon \geq 0$. Здесь $\tilde{u}(t)$ находится из условия

$$\frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} \tilde{u}(t) = \max_{v \in U} \frac{\partial H'(x(t), \psi(t), u(t), t)}{\partial u} v, \quad t \in [t_0;\ t_1).$$

Таким образом, в описанном методе управление меняется на всем промежутке $[t_0;\ t_1)$, в отличие от метода улучшения, основанном на принципе максимума.

Упражнения и задания

17.1. Пусть управление $u = u^*(t)$, $t \in [t_0;\ t_1)$, удовлетворяет условию максимума в задаче (17.8)—(17.10), $x^* = x^*(t)$, $\psi^* = \psi^*(t)$, $t \in T$, — соответствующие этому управлению траектории основной (17.8) и сопряженной (17.11), (17.12) систем. Показать, что гамильтониан $H(t) = H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t), t)$ непрерывен $\forall t \in [t_0;\ t_1)$.

17.2. Привести пример (при выполнении условий теоремы 17.5), показывающий, что из линеаризованного принципа максимума не следует принцип максимума.

17.3. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$u(t) \in U \subset \mathbf{R}^r, \quad t \in [t_0;\ t_1],$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} (a_0(x, t) + b_0(x, t)u)dt \to \min.$$

где $B(x,t)$ — матричная функция размером $n\times r$. Для этой задачи найти структуру оптимального управления, если:

1) $U=\{u\in R^r:\ \|u\|\le\alpha,\ \ \alpha>0\}$ — r-мерный шар;

2) $U=\{u\in R^r:\ \sum\limits_{i=1}^{r}u_i=1,\ \ u_i\ge 0,\ \ i=\overline{1,r}\}$ — симплекс;

3) $U=\{u\in R^r:\ a_i\le u_i\le b_i,\ \ i=\overline{1,r}\}$ — многомерный параллелепипед.

17.4. Показать, что для задачи оптимального управления (упражнение 17.3) принцип максимума совпадает с линеаризованным принципом максимума, если множество U выпукло.

17.5. В следующих задачах проверить на оптимальность заданные управления:

1. $\begin{cases}\dot x_1=u, & x_1(0)=0,\\ \dot x_2=-x_1^2, & x_2(0)=0,\end{cases}$ $\quad |u(t)|\le 1,\ \ t\in[0;\ 1],\ \ J(u)=x_2(1)\to\min;$

   а) $u(t)\equiv 1/2$; *б)* $u(t)=\operatorname{sgn}\cos(3\pi/2)$; *в)* $u(t)=\begin{cases}1, & t\in[0;1/3),\\ -1, & t\in[1/3;\ 1].\end{cases}$

2. $\dot x=u,\ \ x(0)=1,\qquad |u(t)|\le 2,\ \ t\in[0;\ 1],\ \ J(u)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^2(t)dt\to\min;$

   а) $u(t)\equiv 1$; *б)* $u(t)\equiv -1$; *в)* $u(t)\equiv -2$; *г)* $u(t)=\begin{cases}-2, & t\in[0;\ 1/2),\\ 0, & t\in[1/2;\ 1].\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dot x_1=x_2, & x_1(0)=1,\\ \dot x_2=u, & x_2(0)=2,\end{cases}$ $\quad |u(t)|\le 1,\ \ t\in[0;\ 5],\ \ J(u)=x_1^2(5)+x_2^2(5)\to\min;$

   $u(t)=\begin{cases}1, & t\in[0;\ 1),\\ 0, & t\in[1;\ 2),\\ -1, & t\in[2;\ 5].\end{cases}$

4. $\dot x=u,\ \ x(0)=0,$

   $|u(t)|\le 2,\ \ t\in[0,\ \ \pi/4],\ \ J(u)=\displaystyle\int_0^{\pi/4}(u^2(t)-x^2(t)-6x(t)\sin 2t)dt\to\min;$

   а) $u(t)\equiv 2$; *б)* $u(t)=\cos 2t$; *в)* $u(t)\equiv -1$.

5. $\dot x=xu,\ \ x(0)=1,\qquad |u(t)|\le 12,\quad t\in[0,2],\quad J(u)=\ln x(2)\to\min;$

   а) $u(t)\equiv 12$; *б)* $u(t)\equiv -1$; *в)* $u(t)\equiv 1$; *г)* $u(t)=\begin{cases}0, & t\in[0;\ 1),\\ -1, & t\in[1;\ 2].\end{cases}$

6. $\dot x=xu,\ \ x(0)=1,\qquad 0\le|u(t)|\le 12,\ \ t\in[0;\ 2],\ \ J(u)=\dfrac{1}{4}x^4(2)\to\min;$

   а) $u(t)\equiv 0$; *б)* $u(t)\equiv 1$.

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = tu, & x_1(0)=0, \\ \dot{x}_2 = x_1 u, & x_2(0)=0, \end{cases}$ $|u(t)| \le 1,\ \ t \in [0;\ 1],\quad J(u) = -x_2(1) \to \min;$

а) $u(t)=t$; *б)* $u(t)\equiv 1$; *в)* $u(t)\equiv -1$.

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u, & x_1(0)=0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0)=1, \end{cases}$ $|u(t)| \le 1,\quad t \in [0;\ 1],\quad J(u) = -2x_1(1) + 3x_2(1) \to \min;$

а) $u(t)\equiv 1$; *б)* $u(t)\equiv 0$; *в)* $u(t) \equiv \begin{cases} -1, & t \in [0;\ 1/2); \\ 0, & t \in [1/2;\ 1]. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u^2, & x_1(0)=1, \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(0)=1, \end{cases}$ $|u(t)| \le 1,\ \ t \in [0;\ 1],\quad J(u) = x_1(1) + x_2(1) \to \min;$

а) $u(t)\equiv -1$; *б)* $u(t)\equiv 0$; *в)* $u(t) \equiv \begin{cases} 1, & t \in [0;1/2); \\ -1, & t \in [1/2;1]; \end{cases}$ *г)* $u(t) \equiv \begin{cases} -1, & t \in [0;1/4); \\ 0, & t \in [1/4;1]. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & x_1(0)=0, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, & x_2(0)=0, \end{cases}$ $-1 \le |u(t)| \le 2,\quad t \in [0;1],\quad J(u) = x_2(1) \to \min;$

а) $u(t)\equiv 1$; *б)* $u(t)\equiv -1$; *в)* $u(t)=t^2$.

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 u_1, & x_1(0)=0, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2, & x_2(0)=0, \\ \dot{x}_3 = u_2, & x_3(0)=0, \end{cases}$

$u_1^2(t) + u_2^2(t) = 1,\ \ t \in [0;\ \pi],\quad J(u) = x_2(\pi) + x_3(\pi) \to \min;$

а) $u_1(t)\equiv 0,\ \ u_2(t)\equiv -1$; *б)* $u_1(t)\equiv 1/\sqrt{2},\ \ u_2(t)\equiv 1/\sqrt{2}$;

в) $u_1(t)\equiv -1/\sqrt{3},\ \ u_2(t)\equiv \sqrt{2}/\sqrt{3}$.

17.6. Решить следующие задачи оптимального управления:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0)=1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0)=0; \end{cases}$ $-1 \le u(t) \le 2,\ \ t \in [0;\ 2],\quad J(u) = x_1^2(2) \to \min.$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, & x_1(0)=0, \\ \dot{x}_2 = x_2, & x_2(0)=0; \end{cases}$ $u(t) \le 2,\ \ t \in [0;\ 3],\quad J(u) = -x_1(3) + x_2(3) \to \min.$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0)=0, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, & x_2(0)=0; \end{cases}$ $-2 \le u(t) \le 3,\quad t \in [0;\ \pi],\ \ J(u) = x_1(\pi) + \int\limits_0^\pi u(t)dt \to \min.$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + u_1, & x_1(1)=0, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u_2, & x_2(1)=0; \end{cases}$

$u_1(t) \in \{-2;\ -1;\ 0;\ 2;\ 3\},\ |u_2(t)| \le 1,\ \ t \in [1;\ \pi],\ J(u) = x_1(\pi) - x_2(\pi) \to \min.$

5. $\dot{x}=u,\ x(1)=5;\quad -3\le u(t)\le 1,\ t\in[1;2],\ J(u)=\int\limits_1^2 (x(t)+u(t))dt\to\min.$

6. $\dot{x}=u,\ x(0)=1;\ |u(t)|\le 2,\ t\in[0;\ 2],\quad J(u)=x(2)+\int\limits_0^2 (x(t)+u^2(t))dt\to\min.$

7. $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2, & x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2=x_1+u, & x_2(0)=0;\end{cases}\quad u(t)\le 1,\ t\in[0;\ 1],\ J(u)=x_1(1)+x_2(1)\to\min.$

8. $\dot{x}=u,\ x(0)=x_0;\ |u(t)|\le 1,\ t\in[0;\ 1],\ J(u)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (x^2(t)+u^2(t))dt\to\min.$

9. $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2, & x_1(0)=x_{10},\\ \dot{x}_2=x_1+u^2, & x_2(0)=x_{20};\end{cases}\quad u\in\mathbf{R},\ J(u)=\dfrac{1}{2}x_2^2(t)+\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2(t)dt\to\min.$

10. $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2, & x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2=x_1+u^2, & x_2(0)=1;\end{cases}\quad u(t)\le 1,\ t\in[0;\ 1],\ J(u)=x_1(1)+x_2(1)\to\min.$

11. $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_2+u_1^2, & x_1(0)=0,\\ \dot{x}_2=x_1+2u_2, & x_2(0)=1;\end{cases}$

$u_1(t)\in\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\},\ -1\le u_2(t)\le 2,\ t\in[0;\ \pi];\ J(u)=x_2(\pi)+\int\limits_0^\pi u_2(t)dt\to\min.$

12. $\begin{cases}\dot{x}_1=u_1, & x_1(0)=0,\\ \dot{x}_2=u_2, & x_2(0)=0;\end{cases}\quad u_1^2(t)+u_2^2(t)\le 1,\ t\in[0;\ 1],$

а) $J(u)=x_1(1)+x_2(1)\to\min;$ б) $J(u)=x_1^2(1)+x_2^2(1)\to\min.$

13. $\begin{cases}\dot{x}_1=u_1, & x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2=u_2, & x_2(0)=0;\end{cases}\ u\in\mathbf{R}^2,\ J(u)=x_1^2(1)+x_2^2(1)+\int\limits_0^1 (x_2^2(t)+u_1^2(t)+u_2^2(t))dt\to\min.$

14. $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_2, & x_1(0)=0,\\ \dot{x}_2=x_1+2tu, & x_2(0)=0,\\ \dot{x}_2=u, & x_3(0)=0;\end{cases}\quad -1\le u(t)\le 4,\ t\in[0;\ \pi],\quad J(u)=x_2(\pi)+x_3(\pi)\to\min.$

15. $\begin{cases}\dot{x}_1=u_1-u_2, & x_1(0)=0,\\ \dot{x}_2=x_1+2u_2+u_3, & x_2(0)=0;\end{cases}$

$u_1^2(t)+u_3^2(t)\le 1,\ |u_2(t)|=1,\ t\in[0;\ \pi],\quad J(u)=x_2(1)\to\min.$

16. $\dot{x}_1=u,\ x(0)=1;\quad |u(t)|\le 1,\ t\in[0;\ 1],\ J(u)=\sin x(1)\to\min.$

17. $\dot{x}_1=u,\ x(0)=0;\quad 0\le u(t)\le\pi,\ t\in[0;\ 1],\ J(u)=\cos x(1)\to\min.$

18. $\dot{x}_1 = u^4,\ x(0)=0;\ \ u(t)\in\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\},\ \ t\in[0;\ 1],\ \ J(u)=\frac{1}{2}x^2(1)\to\min.$

19. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2+u_2,\\ \dot{x}_2 = u_1,\end{cases}\quad |u_i(t)|\le 1,\ \ i=1,2,\ \ t\in[0;\ 1],\quad J(u)=x_1^2(1)\to\min,$

а) $x_1(0)=x_2(0)=0$; *б*) $x_1(0)=x_2(0)=1$; *в*) $x_1(0)=2,\ \ x_2(0)=-1.$

20. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2, & x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2 = -x_1+u, & x_2(0)=0;\end{cases}\quad u\in\mathbf{R},\ \ J(u)=x_1^2(\pi)+x_2^2(\pi)+\int_0^{\pi}u^2(t)dt\to\min.$

21. $\dot{x}=x+u,\ \ x(0)=5;$

$0\le u(t)\le 2,\ \ t\in[0;\ 2],\ \ J(u)=\int_0^2(2x(t)-3u(t)-u^2(t))dt\to\min.$

22. $\begin{cases}\dot{x}_1 = u, & x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2 = x_1+x_2, & x_2(0)=0;\end{cases}\quad |u(t)|\le 1,\ \ t\in[0;\ 2],\ \ J(u)=x_1^2(2)+x_2(2)\to\min.$

23. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1+x_2, & x_1(0)=1,\\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0)=1;\end{cases}\ -1\le u(t)\le 2,\ \ t\in[0;\ 3],\ \ J(u)=x_1(3)+\frac{1}{2}\int_0^3 u^2(t)dt\to\min.$

24. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2+u_1, & x_1(0)=0,\\ \dot{x}_2 = x_2+u_2, & x_2(0)=0;\end{cases}$

$|u_1(t)|\le 1,\quad u_2(t)\in\{-2;\ 0;\ 2\},\ \ t\in[0;4],\ \ J(u)=x_1(4)-x_2(4)\to\min.$

25. $\dot{x}=u,\ \ x(0)=0;$

$u\in\mathbf{R},\quad J(u)=\int_0^{\pi/4}(u^2(t)-x^2(t)-6x(t)\sin 2t)dt\to\min.$

26. $\dot{x}=x(2u-1),\ \ x(0)=1;\quad 0\le u(t)\le 1,\ \ t\in[0;\ 1],\quad J(u)=\int_0^1 x(t)(u(t)-1))dt\to\min.$

17.7. В следующих задачах записать принцип максимума, определить структур оптимального управления и свести к краевой задаче принципа максимума:

1. $\dot{x}=t^2u,\ \ x(0)=0;\quad |u(t)|\le 2,\ \ t\in[0;\ 2],\quad J(u)=x^2(2)\int_0^2 u^2(t)dt\to\min.$

2. $\begin{cases}\dot{x}_1 = \sin x_1+x_2+x_3u_1, & x_1(0)=x_{10},\\ \dot{x}_2 = \cos x_1+\ln x_2+u_2, & x_2(0)=x_{20},\\ \dot{x}_3 = x_1+u_1\ln x_2, & x_3(0)=x_{30};\end{cases}\quad |u_i(t)|\le 1,\ \ i=1,2,\quad t\in[0;\ 1],$

$J(u)=\int_0^1[(x_1(t)-t)^2+(x_2(t)-2t)^2+(x_3(t)-3t)^2]dt\to\min.$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u^2, & x_2(0) = x_{20}; \end{cases}$

$0 \le u(t) \le 1,\ t \in [0;\ 1],\ \ J(u) = x_1(1)e^{x_2(1)} + \int\limits_0^1 u(t)dt \to \min.$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 + x_3 u, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, & x_2(0) = x_{20}, \\ \dot{x}_3 = u, & x_3(0) = x_{30}; \end{cases}$

$-2 \le u(t) \le 4,\ t \in [0;\ 1],\ \ J(u) = \int\limits_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t))dt \to \min.$

§ 18. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Необходимые условия оптимальности допустимых управлений содержатся в принципе максимума. Если же в задаче оптимального управления есть ограничения типа равенства и неравенства на правый конец траекторий, то появляются условия оптимальности для краевых значений допустимых траекторий, которые называются ***условиями трансверсальности***.

18.1. Задача оптимального управления с подвижным правым концом траектории

Рассмотрим более общий по сравнению с (17.8)—(17.10) класс задач оптимального управления:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(x, u, t),\ \ x(t_0) = x_0, \\ u(t) \in U,\ \ t \in T = [t_0;\ t_1], \\ g_i(x(t_1)) \le 0,\ \ i = \overline{1,m};\ \ h_j(x(t_1)) = 0,\ \ j = \overline{1,l}. \end{gathered} \tag{18.1}$$

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt \to \min.$$

Здесь моменты t_0, t_1 фиксированы, левый конец траектории закреплен. Функции $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, $h_j(x)$, $j = \overline{1,l}$, непрерывно дифференцируемы по x. Допустимые управления $u(t) = (u_1(t), \ldots,\ u_r(t))$ — кусочно-непрерывные на отрезке вектор-функции, удовлетворяющие ограничениям $u(t) \in U$, $t \in T$, и обладающие тем свойством, что для соответствующих им траекторий $x(t)$, $t \in T$, в конечный момент времени t_1 выполняются условия $g_i(x(t_1)) \leq 0$, $i = \overline{1,m}$, $h_j(x(t_1)) = 0$, $j = \overline{1,l}$.

Теорема 18.1 (принцип максимума Понтрягина). *Пусть* $u^0(t)$, $t \in T$, *— оптимальное управление в задаче* (18.1). *Тогда найдутся числа (множители Лагранжа)* $\lambda_0^0 \geq 0$, $\lambda_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1,m}$; μ_j^0, $j = \overline{1,l}$, *не равные одновременно нулю, такие, что выполняются:*

1) *условия дополняющей нежесткости:*

$$\lambda_i^0 g_i(x^0(t_1)) = 0, \ i = \overline{1,m};$$

2) *условие максимума:*

$$H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t), \ t \in [t_0; t_1),$$

где $H(x, \psi, u, t) = \psi' f(x, u, t) - \lambda_0 f_0(x, u, t)$;

3) *условия трансверсальности:*

$$\psi^0(t_1) = -\lambda_0^0 \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial g_i(x^0(t_1))}{\partial x} - \sum_{j=1}^{l} \mu_j^0 \frac{\partial h_j(x^0(t_1))}{\partial x}, \quad (18.2)$$

где $x^0(t)$, $t \in T$, *— оптимальная траектория,* $\psi^0(t)$, $t \in T$, *— решение сопряженной системы* (17.11) *с граничным условием* (18.2).

Замечание 18.1. Если задача (18.1) линейно-выпуклая, т. е.

$$f(x, u, t) = A(t)x + b(u, t); \ f_0(x, u, t) = a_0(x, t) + b_0(u, t); \ h_j(x) = c^{j\prime} x,$$

$c^j \in \mathbf{R}^n$, $j = \overline{1,l}$, и $\varphi(x)$, $a_0(x, t)$ — выпуклые по x функции, то из существования набора множителей Лагранжа $\lambda_0^0 \geq 0$, $\lambda_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1,m}$; μ_j^0, $j = \overline{1,l}$, и допустимого управления $u^0(t)$, $t \in T$, удовлетворяющих условиям 1)—3) теоремы 18.1, следует, что управление $u^0(t)$, $t \in T$, оптимально.

Замечание 18.2. Если в дополнение к условиям теоремы 18.1 функции $f(x, u, t)$, $f_0(x, u, t)$ дифференцируемы по u, а множество U выпукло, то верно следующее утверждение.

Теорема 18.2 (дифференциальный (линеаризованный) принцип максимума). *Пусть* $u^0(t)$, $t \in T$, *— оптимальное управление в задаче*

(18.1), *тогда существует набор множителей* $\lambda_0^0 \geq 0$, $\lambda_i^0 \geq 0$, $i=\overline{1,m}$; μ_j^0, $j=\overline{1,l}$, *не равных одновременно нулю, такой, что справедливы утверждения* 1), 3) *теоремы* 18.1 *и условие максимума*

$$\frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u^0(t) = \max_{u \in U} \frac{\partial H'(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t)}{\partial u} u, \ t \in [t_0;\ t_1).$$

Используя утверждение теорем 18.1, 18.2, можно, как и раньше, проверить допустимое управление на оптимальность, выяснить структуру оптимального управления и в некоторых случаях решить задачу. Появление в условиях оптимальности множителей Лагранжа значительно ухудшает исследование задач.

Пример 18.1. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x} = u, \ x(0) = 0, \ x(2) = 1,$$

$$|u(t)| \leq 1, \ t \in [0;\ 2],$$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)dt \to \min.$$

Здесь $h(x(t_1)) \equiv x(2) - 1 = 0$.

Проверим на оптимальность допустимое управление $u^*(t) \equiv 1/2$, $t \in [0;\ 2]$. Этому управлению соответствует фазовая траектория $x^*(t) = t/2$, $t \in [0;\ 2]$, которая удовлетворяет ограничению на правом конце: $x^*(2) = 1$. Гамильтониан для этой задачи имеет вид $H = \psi u - \lambda_0 x^2/2$. Тогда сопряженное уравнение запишется следующим образом: $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_0 x$, $\psi(2) = -\mu$. Отсюда находим решение $\psi^*(t) = \lambda_0(t^2 - 4) - \mu$, $t \in [0;\ 2]$.

Проанализируем два возможных случая: 1) $\lambda_0 = 0$; 2) $\lambda_0 > 0$.

В первом случае $\psi^*(t) \equiv -\mu$, $t \in [0;\ 2]$. Тогда $H(x^*, \psi^*, u^*, t) = \psi^* u^* - \lambda_0 x^{*2}/2 = -\mu/2$, где $\mu \neq 0$.

Во втором случае для простоты считаем, что $\lambda_0 = 1$. Тогда $\psi^*(t) = t^2 - 4 - \mu$, $t \in [0;\ 2]$, и $H(x^*, \psi^*, u^*, t) = (t^2 - 4 - \mu)/2 - t^2/8$, $t \in [0;\ 2]$. И значит, например, при $-4 \leq \mu < 0$ для всех $t \in [0; 2)$ (за исключением, может быть, точки $t = \sqrt{4+\mu}$) условие максимума не выполняется.

Следовательно, проверяемое допустимое управление не удовлетворяет условию максимума ни для какого нетривиального набора множителей Лагранжа (λ_0, μ), т. е. рассматриваемое управление $u^*(t) \equiv 1/2$, $t \in [0;\ 2]$, заведомо не является оптимальным.

Поскольку исходная задача линейно-выпуклая, то принцип максимума для нее — необходимое и достаточное условие оптимальности. Поэтому оптимальное управление находится среди функций $u(t)$, $t \in [0;\ 2]$, имеющих следующую структуру:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \psi(t) > 0, \\ u, \ \ u \in [-1;\ 1], & \psi(t) = 0, \\ -1, & \psi(t) < 0, \ \ t \in [0;\ 2]. \end{cases}$$

Эта структура оптимального управления вытекает из условия максимума

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \max_{|u| \le 1} H(x(t), \psi(t), u, t), \ \ t \in [0;\ 2],$$

которое для нашей задачи принимает вид

$$\psi(t)u(t) - \lambda_0 x^2/2 = \max_{|u| \le 1} (\psi(t)u - \lambda_0 x^2/2)$$

или

$$\psi(t)u(t) = \max_{|u| \le 1} \psi(t)u.$$

Пример 18.2. Найти управление, доставляющее минимум функционалу

$$J(u) = \int_0^1 x_1(t)dt$$

при условиях

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$-2 \le u(t) \le 1, \ \ t \in [0;\ 1], \quad h(x(1)) = x_2(1) + 1 = 0.$$

Составляем гамильтониан $H(x, \psi, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - \lambda_0 x_1$. Из условия максимума следует, что оптимальное управление может иметь только следующий вид:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \psi_2^0(t) > 0, \\ -2, & \psi_2^0(t) < 0, \ \ t \in [0;\ 1]. \end{cases}$$

Решая сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_0, \quad \psi_1(1) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \ \psi_2(1) = -\mu, \end{cases}$$

получим $\psi_1(t) = \lambda_0(t-1)$, $\psi_2(t) = -\lambda_0(t^2/2 - t + 1/2) - \mu$, $t \in [0;\ 1]$.

Проанализируем два случая: *а*) $\lambda_0 = 0$; *б*) $\lambda_0 = 1$.

В случае *а*) получим $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv -\mu$, $t \in [0;\ 1]$, причем $\mu \neq 0$, т. е. условию максимума могут удовлетворять лишь управление $u \equiv 1$, либо $u \equiv -2$, $t \in [0;\ 1]$. Подсчитаем траектории основной системы, соответствующие этим управлениям. Если $u \equiv 1$, то $x_1(t) = t^2/2 + 1$, $x_2(t) = t$, $t \in [0;\ 1]$; если $u \equiv -2$, то $x_1(t) = -t^2 + 1$, $x_2(t) = -2t$, $t \in [0;\ 1]$. Отсюда следует, что ни одно из этих управлений не является допустимым, поскольку при этих управлениях не выполняется ограничение $x_2(1) = -1$ на правый конец траектории.

В случае *б*) имеем $\psi_1(t) = t - 1$, $\psi_2(t) = -t^2/2 + t - 1/2 - \mu = (-1/2) \times \times (t-1)^2 - \mu$. Если $\mu < -1/2$ или $\mu \geq 0$, то функция $\psi_2(t)$ на $[0;\ 1]$ имеет постоянный знак и, значит, допустимых управлений, удовлетворяющих условию максимума, нет. При других значениях μ возможно существование одной точки τ переключения знака $\psi_2(t)$. Если $-1/2 < \mu < 0$, то $\psi_2(t) < 0$ и управление равно -2 при $t \in [0;\ \tau)$, а при $t \in [\tau;\ 1]$ $\psi_2(t) > 0$ и управление равно 1.

Таким образом, оптимальное управление имеет вид

$$u^0(t) = \begin{cases} -2, & t \in [0;\ \tau), \\ 1, & t \in [\tau;\ 1]. \end{cases}$$

Точку τ находим из условия: $x_2(1) = -1$. Действительно, пусть $t \in [0;\ \tau]$, тогда $x_1(t) = -t^2 + 1$, $x_2(t) = -2t$ и, значит, $x_1(\tau) = -\tau^2 + 1$, $x_2(\tau) = -2\tau$. Далее $u^0 = 1$ при $t \in [\tau;\ 1]$. Отсюда $x_1(t) = t^2/2 - 3\tau t + 3\tau^2/2 + 1$, $x_2(t) = t - 3\tau$. Поэтому $x_2(1) = 1 - 3\tau = -1$, тогда $\tau = 2/3$.

Итак,

$$u^0(t) = \begin{cases} -2, & t \in [0;\ 2/3), \\ 1, & t \in [2/3;\ 1], \end{cases} \tag{18.3}$$

$$x_1^0(t)=\begin{cases}-t^2+1, & t\in[0;\ 2/3),\\ (1/2)t^2-2t+5/3, & t\in[2/3;\ 1],\end{cases}$$

$$x_2^0(t)=\begin{cases}-2t, & t\in[0;\ 2/3),\\ t-2, & t\in[2/3;\ 1].\end{cases}$$

Минимальное значение функционала равно

$$J(u^0)=\int_0^1 x_1^0(t)dt=\int_0^{2/3} x_1^0(t)dt+\int_{2/3}^1 x_1^0(t)dt=$$

$$=\int_0^{2/3}(-t^2+1)dt+\int_{2/3}^1(t^2/2-2t+5/3)dt=37/54.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что управление (18.3) удовлетворяет условию максимума при $\mu^0=-1/18$.

18.2. Задача оптимального быстродействия

Первой задачей математической теории оптимального управления, которая была поставлена специалистами по автоматическому регулированию в начале 50-х годов XX в., является задача быстродействия.

Если в задаче (18.1) положить $\varphi(x)\equiv 0$, $f_0(x,u,t)\equiv 1$, то при нефиксированном t_1 задача (18.1) превратится в задачу быстродействия:

$$\dot{x}=f(x,u,t),\quad x(t_0)=x_0,$$
$$u(t)\in U,\quad t\geq t_0,$$
$$g_i(x(t_1))\leq 0,\quad i=\overline{1,m};\ h_j(x(t_1))=0,\quad j=\overline{1,l},$$
$$J(u)=t_1-t_0\to\min.$$

Рассмотрим один из вариантов этой задачи — задачу оптимального быстродействия с закрепленными концами:

$$\begin{gathered}\dot{x}=f(x,u,t),\ x(t_0)=x_0,\\ u(t)\in U,\ t\geq t_0,\ x(t_1)=x^1,\\ J(u)=t_1-t_0\to\min,\end{gathered}\tag{18.4}$$

где $x_0, x^1\in\mathbf{R}^n$, множество $U\subset\mathbf{R}^r$ — замкнуто и ограничено. Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t\geq t_0$, со значениями во множестве U будем называть допустимым управлением в задаче (18.4), если соответствующая ему траектория $x(t)$, $t \geq t_0$, обладает свойством $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x^1$.

Таким образом, задача быстродействия (18.4) состоит в следующем: среди допустимых управлений найти такое управление $u^0(t)$, $t \geq t_0$, которое переводит траекторию $x^0(t)$, $t \geq t_0$, из точки x_0 в точку x^1 фазового пространства за минимально возможное время $t_1^0 - t_0$.

Управление $u^0(t)$, $t \in [t_0;\ t_1^0]$, и соответствующая ему траектория $x^0(t)$, $t \in [t_0;\ t_1^0]$, называются оптимальными, t_1^0 — оптимальный момент времени ($t_1^0 - t_0$ — время быстродействия).

Теорема 18.3 (принцип максимума Понтрягина в задаче быстродействия). *Пусть* $u^0(t)$, $t \in [t_0;\ t_1^0]$, — *оптимальное управление*, $x^0(t)$, $t \in [t_0;\ t_1^0]$, — *оптимальная траектория*, t_1^0 — *оптимальный момент времени в задаче* (18.4). *Тогда вдоль* $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t \in [t_0;\ t_1^0]$, *существует нетривиальное решение* $\psi^0(t)$, $t \in [t_0;\ t_1^0]$, *сопряженной системы такое, что выполняются условия*:

1) $H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), t) = \max\limits_{u \in U} H(x^0(t), \psi^0(t), u, t)$, $t \in [t_0;\ t_1^0)$;

2) $H(x^0(t_1^0), \psi^0(t_1^0), u^0(t_1^0), t_1^0) \geq 0$.

Рассмотрим линейный вариант задачи быстродействия:

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad x(t_1) = x^1, \\ u(t) \in U, \quad t \geq 0, \quad 0 \in \operatorname{int} U, \\ I(u) = t_1 \to \min, \end{gathered} \tag{18.5}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, — постоянная матрица, b, x_0, $x^1 \in \mathbf{R}^n$.

Гамильтониан задачи (18.5) имеет вид $H(x, \psi, u) = \psi' Ax + \psi' bu$, где первое слагаемое не зависит явно от u.

Теорема 18.4 (достаточное условие оптимальности в линейной задаче быстродействия). *Пусть* $u^0(t)$, $t \in [0;\ t_1^0]$, — *допустимое управление в задаче* (18.5), *удовлетворяющее принципу максимума*:

$$\psi^{0\prime}(t) b u^0(t) = \max_{u \in U} \psi^{0\prime}(t) b u, \quad t \in [0;\ t_1^0),$$

$x^0(t)$, $t \in [0;\ t_1^0]$, — *соответствующая ему траектория, для которой* $x^0(0) = x_0$, $x^0(t_1^0) = x^1$, *причем* $\operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n$ (*выполняется* *критерий управляемости*), $\psi^0(t)$, $t\in[0;\ t_1^0]$, *— некоторое нетривиальное решение сопряженного уравнения* $\dot\psi=-\partial H(x^0(t),\ \psi,\ u^0(t))/\partial x=-A'\psi$. *Тогда* $u^0(t)$, $t\in[0;\ t_1^0)$, *— оптимальное управление,* t_1^0 *— оптимальный момент времени.*

Замечание 18.3. Условие управляемости

$$\operatorname{rank}(b,\ Ab,\ \dots,\ A^{n-1}b)=n \tag{18.6}$$

обеспечивает существование траекторий $x(t)$ задачи (18.5), которые соединяют две любые точки x_0 и x^1 фазового пространства. Без этого условия задача (18.5) теряет смысл.

Пусть в задаче (18.5) ограничения на управления имеют вид $|u(t)|\le L<+\infty$, $t\ge 0$. Тогда, как следует из теорем 18.3, 18.4, оптимальное управление $u^0(t)$, $t\ge 0$, находится из условия максимума

$$\psi^{0'}(t)bu^0(t)=\max_{|u|\le L}\psi^{0'}(t)bu,$$

откуда получим $u^0(t)=\operatorname{sgn}\psi^{0'}(t)b$, $t\ge 0$.

Теорема 18.5 (о конечности точек переключений). *В линейной задаче быстродействия*

$$\dot x=Ax+bu,\quad x(0)=x_0,\quad x(t_1)=x^1,\quad |u(t)|\le L,\quad t\ge 0,\quad J(u)=t_1\to\min$$

число ***точек переключения*** (*перемен знака*) *оптимального управления* $u^0(t)=\operatorname{sgn}\psi^{0'}(t)b$, $t\ge 0$, *либо конечно, либо равно нулю при выполнении условия* (18.6). *Если, кроме того, собственные числа матрицы A действительны, то каждое оптимальное управление* $u^0(t)=\operatorname{sgn}\psi^{0'}(t)b$, $t\ge 0$, *имеет не более чем n интервалов постоянства* (*не более n* – 1 *точек переключения*).

Пример 18.3. Рассмотрим линейную задачу быстродействия:

$$\begin{cases}\dot x_1=u, & x_1(0)=x_{10},\ x_1(t_1)=0,\\ \dot x_2=-x_1+1, & x_2(0)=x_{20},\ x_2(t_1)=0,\end{cases}$$
$$|u(t)|\le 1,\quad t\ge 0,$$
$$J(u)=t_1\to\min.$$

Таким образом, на фазовой плоскости нужно построить такую траекторию $x^0(t)=(x_1^0(t),\ x_2^0(t))$, $t\ge 0$, которая бы за кратчайшее время t_1^0

переходила из любой точки $x_0=(x_{10},\ x_{20})$ фазовой плоскости в начало координат.

В нашем случае

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\ x_0=\begin{pmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{pmatrix},\ \ d=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\ L=1,\ n=2.$$

Поскольку векторы $b=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $Ab=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$ линейно независимы, то рассматриваемая система управления управляема.

Замечание 18.4. В примере 18.3 в правую часть системы управления добавлен постоянный вектор $d=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Заметим, что характер системы не изменился, поскольку ее можно представить в виде

$$\frac{d(x_1-1)}{dt}=u,\ \ \frac{dx_2}{dt}=-(x_1-1),$$

т. е. система остается линейной.

Составим функцию Понтрягина $H(x,\ \psi,\ u)=\psi_1 u-\psi_2 x_1+\psi_2$. Тогда сопряженная система запишется в виде

$$\dot\psi_1=-\partial H/\partial x=\psi_2;\ \dot\psi_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=0.$$

Из условия максимума $\psi_1^0 u^0(t)=\max\limits_{|u|\le 1}\psi_1^0 u$ получим, что оптимальное управление имеет вид $u^0(t)=\operatorname{sgn}\psi_1^0(t),\ \ t\ge 0$.

Собственные значения матрицы A действительны: $\lambda_1=\lambda_2=0$. Следовательно, функция $\psi_1^0(t)$ на множестве $t\in[0;\ t_1]$ может иметь не более одного нуля, т. е. оптимальное управление $u^0(t)$, $t\ge 0$, содержит не более двух интервалов постоянства (не более одной точки переключения).

Итак, оптимальная траектория $x^0(t)$, $t\ge 0$, состоит не более чем из двух кусков, составленных из траекторий систем:

$$\text{(I)}\ \begin{cases}\dot x_1=1,\\ \dot x_2=-(x_1-1),\end{cases}\qquad \text{(II)}\ \begin{cases}\dot x_1=-1,\\ \dot x_2=-(x_1-1).\end{cases}$$

Фазовые траектории этих систем состоят из семейств кривых:

(I) $x_2 = -\frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + C;$ $u^0 = 1,$ (II) $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + C;$ $u^0 = -1,$

где C — произвольная постоянная (рис. 18.1).

Направления движения фазовой точки вдоль кривых определяем из условий: $\dot{x}_1 = 1 > 0$ для семейства (I) и $\dot{x}_1 = -1 < 0$ для семейства (II).

Траектории MO и NO (рис. 18.1) ведут в начало координат и, согласно теореме 18.4, являются оптимальными.

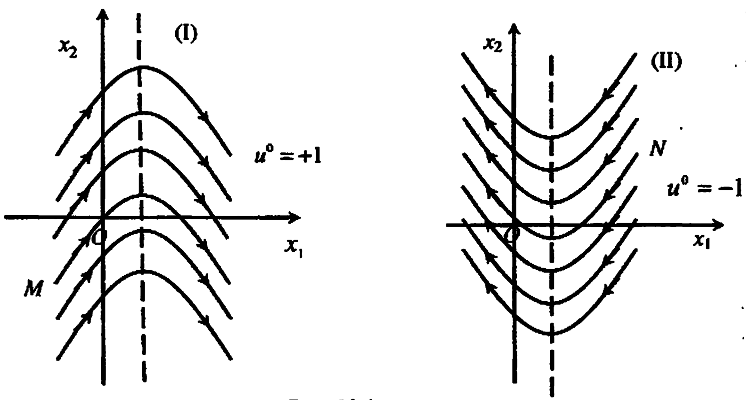


Рис. 18.1

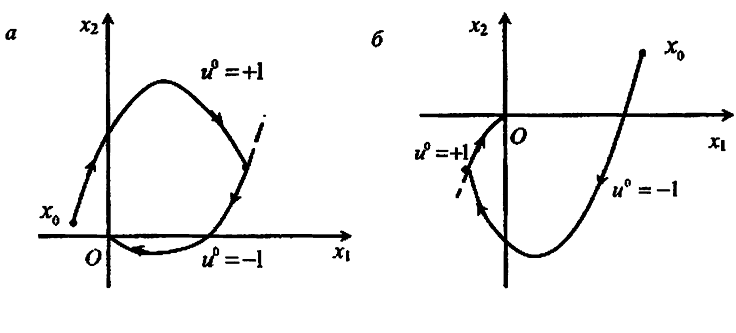


Рис. 18.2

Если управление u^0 сначала в течение некоторого времени равно $+1$, а затем равно -1, то фазовая траектория состоит из двух кусков парабол (рис. 18.2, *а*), примыкающих друг к другу, причем второй из этих кусков лежит на той из парабол, которая проходит через начало координат (поскольку оптимальная траектория ведет в начало координат). Если же сначала $u^0=-1$, а затем $u^0=+1$, то фазовая картинка изображена на рис. 18.2, *б*.

Таким образом, если начальная точка x^0 лежит выше линии MON (рис. 18.3), то по траектории семейства (I) можно попасть на траекторию NO и по ней в начало координат. Поскольку для первого куска траектории использовалось управление $u^0=+1$, а для второго $u^0=-1$, то построенные траектории оптимальны. Аналогично получаем оптимальное управление для начальных точек, лежащих ниже линии MON.

Значит,

$$u^0(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } x_0\in MO \text{ или лежит ниже кривой } MON, \\ -1, & \text{если } x_0\in NO \text{ или лежит ниже кривой } MON. \end{cases}$$

Кривая MON называется ***линией переключения***.

Чтобы подсчитать время быстродействия t_1^0 для конкретной точки x_0 фазового пространства, требуется вдоль оптимальной траектории $x^0(t,x_0)$ подсчитать время перехода из x_0 в начало координат.

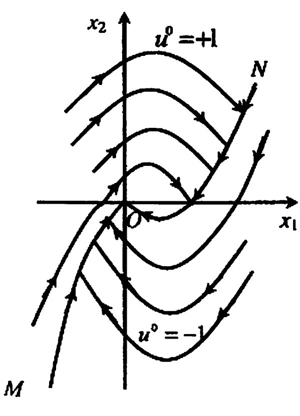


Рис. 18.3

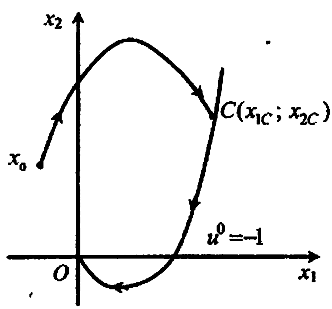


Рис. 18.4

Действительно, пусть точка x_0 лежит выше линии MON и $x_0 = (-4;\ 12)$ (рис. 18.4). Тогда через точку x_0 проходит фазовая траектория семейства (I) с управлением $u^0(t) \equiv +1$, т. е. парабола $x_2 = (-1/2) \times (x_1 - 1)^2 + 49/2$. Если управление $u^0(t) = -1$, то уравнение параболы, проходящей через начало координат, имеет вид $x_2 = (1/2)(x_1 - 1)^2 - 1/2$.

Для нахождения точки пересечения C решим систему

$$\begin{cases} x_2 = (-1/2)(x_1 - 1)^2 + 49/2, \\ x_2 = (1/2)(x_1 - 1)^2 - 1/2. \end{cases}$$

Найдем абсциссу точки C (ордината нам не требуется). Итак, $x_{1C} = 6$. Точка C является точкой переключения, момент переключения обозначим τ.

Подсчитаем время движения фазовой точки вдоль кусков оптимальных траекторий x_0C и CO. Для этого рассмотрим первое уравнение системы $\dot{x}_1 = u$. Имеем для $u^0 \equiv 1$:

$$x_{1C} + 4 = \int_0^{\tau} \dot{x}_1^0(t)dt = \int_0^{\tau} dt = \tau.$$

Аналогично при движении от точки C до начала координат мы имеем $u^0(t) \equiv -1$ и поэтому

$$-x_{1C} = \int_{\tau}^{t_1^0} \dot{x}_1^0(t)dt = \int_{\tau}^{t_1^0} (-1)dt = -t_1^0 + \tau.$$

Вычитая из второго первое соотношение, находим $t_1^0 = 2x_{1C} + 4 = 16$.

Если же начальная точка x_0 лежит ниже линии MON, то время t_1^0 оптимального быстродействия может быть вычислено аналогично.

Замечание 18.5. Как следует из рассмотренного примера, оптимальное управление зависит, вообще говоря, только от положения фазовой точки, т. е. $u^0(t) = u^0(x(t))$. Тогда оптимальная траектория есть решение системы $\dot{x}_1 = u^0(x_1, x_2)$, $\dot{x}_2 = -x_1 + 1$. Управление $u^0(x)$ называют ***управлением типа обратной связи***. Функцию $u^0(x)$, дающую оптимальные траектории, называют ***синтезирующей функцией***, а задачу нахождения такой функции — ***задачей синтеза оптимальных управлений***.

Упражнения и задания

18.1. **Проверить на оптимальность заданные управления в следующих задачах:**

1. $\dot{x}=u,\ x(0)=1,\ x(2)=1,\quad |u(t)|\le 1,\ t\in[0;\ 2],\ J(u)=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2(t)dt\to\min.$

   а) $u(t)\equiv 1,\ t\in[0;\ 2]$; *б)* $u(t)\equiv -1,\ t\in[0;\ 2]$; *в)* $u(t)=\begin{cases}0, & t\in[0;\ 1),\\ 1, & t\in(1;\ 2].\end{cases}$

2. $\dot{x}=u,\ x(0)=1,\ x(4)=1,\ |u(t)|\le 1,\ t\in[0;\ 4],\ J(u)=\frac{1}{2}\int_0^4 (x^2(t)+u^2(t))dt\to\min.$

   а) $u(t)\equiv 1,\ t\in[0;\ 4]$; *б)* $u(t)\equiv -1,\ t\in[0;\ 4]$; *в)* $u(t)=\begin{cases}0, & t\in[0;\ 1],\\ -1, & t\in[1;\ 3),\\ 1, & t\in(3;\ 4].\end{cases}$

3. $\dot{x}=u,\ x(0)=0,\ x(1)=\pi,\ 0\le u(t)\le\pi,\ t\in[0;\ 1],\ J(u)=\int_0^1 \cos x(t)dt\to\min.$

   а) $u(t)\equiv\pi,\ t\in[0;\ 1]$; *б)* $u(t)\equiv 0,\ t\in[0;\ 1]$; *в)* $u(t)=\begin{cases}\pi, & t\in[0;1/2),\\ 0, & t\in(1/2;\ 1].\end{cases}$

4. $\dot{x}=u,\ x(0)=1,\ x(1)=1/e,\ u(t)\in\mathbf{R},\ t\in[0;\ 1],\ J(u)=\int_0^1 (x^2(t)+u^2(t))dt\to\min.$

   а) $u(t)=1/e^t,\ t\in[0;1]$; *б)* $u(t)\equiv 0,\ t\in[0;\ 1]$; *в)* $u(t)=\begin{cases}0, & t\in[0;1/2),\\ 1/e^t, & t\in(1/2;\ 4].\end{cases}$

5. $\dot{x}=u,\ x(0)=1,\ x(\pi)=1,\ |u(t)|\le 1,\ t\in[0;\ \pi],\ \int_0^\pi x\cos x(t)dt=\pi/2,$

   $J(u)=\int_0^\pi u^2(t)dt\to\min.$

   а) $u(t)=-\sin t,\ t\in[0;\ \pi]$; *б)* $u(t)\equiv -1,\ t\in[0;\ \pi]$; *в)* $u(t)\equiv 1/2,\ t\in[0;\ \pi]$.

6. $\dot{x}=u^4,\ x(0)=0,\ x(1)=1,\ u(t)\in\{-1,0,2,3,4\},\ t\in[0;\ 1],\ \int_0^1 |u(t)|\,dt\le 1,$

   $J(u)=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(t)dt\to\min.$

   а) $u(t)\equiv 0,\ t\in[0;\ 1]$; *б)* $u(t)\equiv 4,\ t\in[0;\ 1]$; *в)* $u(t)\equiv\begin{cases}-1, & t\in[0;\ 1/2),\\ 0, & t\in[1/2;\ 1].\end{cases}$

18.2. Уточнить структуру оптимального управления в следующих задачах:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 + x_3 u, & x_1(0) = x_{10}, \ x_1(1) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, & x_2(0) = x_{20}, \ x_2(1) = 0, \quad a \le u(t) \le b, \quad t \in [0;\ 1], \\ \dot{x}_3 = u, & x_3(0) = x_{30}, \ x_3(1) = 0, \end{cases}$

$$J(u) = \int_0^1 (x_1^2(t) + u^2(t))dt \to \min.$$

2. $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0)x_0$, $x(t_1) = x^1$, $|u_i(t)| \le 1$, $t \in [0;\ t_1]$, $i = \overline{1, r}$,

а) $J(u) = \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^{r} |u_i(t)| dt \to \min$; *б*) $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} \|u(t)\|^2 dt \to \min$;

A, B — постоянные матрицы размеров соответственно $n \times n$, $n \times r$; $x_0, x^1 \in \mathbf{R}^n$, момент t_1 фиксирован.

18.3. Решить следующие задачи оптимального управления:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0, \ x_2(2) = 0, \end{cases}$ $|u(t)| \le 2$, $t \in [0;\ 2]$, $J(u) = \int_0^2 x_1(t)dt \to \min$.

2. $\dot{x} = \cos u$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $|u(t)| \le \pi/2$, $t \in [0;\ 1]$, $J(u) = \int_0^1 \sin u(t)dt \to \min$.

3. $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $u(t) \in \mathbf{R}$, $t \in [0;\ 1]$,

$$J(u) = \int_0^1 (u^2(t) + 2tu^4(t) - 4x(t)u^3(t))dt \to \min.$$

4. $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(2) = 1/2$, $u(t) \in \mathbf{R}$, $t \in [0;\ 2]$,

$$J(u) = \int_0^2 (x^2(t) + u^2(t))dt \to \min.$$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, \ x_1(2) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 1, \ x_2(2) = 0, \end{cases}$ $u(t) \in \mathbf{R}$, $t \in [0;\ 2]$, $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt \to \min$.

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 2, & x_1(1) = e/2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, & x_2(0) = -3/2, & x_2(1) = -1/e, \end{cases}$ $J(u) = \int_0^1 u^2(t)dt \to \min$.

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, & x_1(2\pi) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, & x_2(0) = 0, & x_2(2\pi) = -4, \end{cases}$ $u(t) \le 1$, $t \in [0;\ 2\pi]$,

$$J(u) = \int_0^{2\pi} u^2(t)dt \to \min.$$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(2) = 0, \\ \dot{x}_2 = -u, & x_2(0) = 1,\ x_2(2) = 0, \end{cases}$ $|u(t)| \le 1,\ t \in [0;\ 2],$

$$J(u) = \int_0^2 (x_1(t) + x_2(t))dt \to \min.$$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\ x_1(1) + x_2(1) = 19/6, \end{cases}$ $u(t) \in \mathbf{R},\ t \in [0;\ 1],$

$$J(u) = \frac{1}{2} x_2^2(1) + \int_0^1 u^2(t)dt \to \min.$$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(3) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_3, & x_2(0) = 1,\ x_2(3) = 0, \\ \dot{x}_3 = u, & x_3(0) = 2,\ x_3(3) = 0, \end{cases}$ $u(t) \in \mathbf{R},\ t \in [0;\ 3],\quad J(u) = \frac{1}{2}\int_0^3 u^2(t)dt \to \min.$

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + u, & x_1(0) = 1,\ x_1(2) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 1,\ x_2(2) = 1, \\ \dot{x}_3 = x_2, & x_3(0) = 1,\ x_3(2) = 0, \end{cases}$ $u(t) \in \mathbf{R},\ t \in [0;\ 2],$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^2 (\alpha x_2^2(t) + u^2(t))dt \to \min, \quad \alpha \ge 0.$$

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1,\ x_1(1) = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, & x_2(0) = 1,\ x_2(1) = 1, \end{cases}$ $u(t) \in \mathbf{R};\ t \in [0;\ 1],$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\alpha x_1^2(t) + u^2(t))dt \to \min,\ \alpha \ge 0.$$

18.4. Найти оптимальное управление и время перехода из заданного состояния в начало координат и изобразить, где возможно, оптимальные траектории на фазовой плоскости для задач быстродействия, в которых система управления и ограничения на управления имеют вид:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 4, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, & x_2(0) = 1, \end{cases}$ $|u(t)| \le 1,\ \ t \ge 0.$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, & x_2(0) = 3, \end{cases}$ $|u(t)| \le 2,\ t \ge 0.$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, & x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - u, & x_2(0) = 1, \end{cases}$ $|u(t)| \le 3,\ t \ge 0.$

4. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + u_1, & x_1(0) = 4,\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u_2, & x_2(0) = 8,\end{cases}$ $|u_1(t)| \le 2,\ |u_2(t)| \le 1,\ t \ge 0.$

5. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + u_1, & x_1(0) = 1,\\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, & x_2(0) = 4,\end{cases}$ $|u_i(t)| \le 1,\ i = 1, 2,\ t \ge 0.$

6. $\begin{cases}\dot{x}_1 = u_1, & x_1(0) = -1/2,\\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2, & x_2(0) = 5,\end{cases}$ $|u_i(t)| \le 2,\ i = 1, 2,\ t \ge 0.$

7. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + u, & x_1(0) = 4,\\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 4u, & x_2(0) = -5,\end{cases}$ $|u(t)| \le 3,\ t \ge 0.$

8. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2, & x_1(0) = -1,\\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = 0,\\ \dot{x}_3 = -x_3 + u, & x_3(0) = 4,\end{cases}$ $-4 \le u(t) \le 2,\ t \ge 0.$

9. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - u, & x_1(0) = -3/2,\\ \dot{x}_2 = 2u, & x_2(0) = 6,\end{cases}$ $-2 \le u(t) \le 3,\ t \ge 0.$

10. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + u_1, & x_1(0) = 1,\\ \dot{x}_2 = 3u_2, & x_2(0) = -3,\end{cases}$ $|u_1(t)| \le 3,\ |u_1(t)| \le 3,\ t \ge 0.$

11. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + u, & x_1(0) = 4,\\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 4u, & x_2(0) = -5,\end{cases}$ $|u(t)| \le 3,\ t \ge 0.$

12. $\begin{cases}\dot{x}_1 = u, & x_1(0) = -1,\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, & x_2(0) = 4,\end{cases}$ $|u(t)| \le 2,\ t \ge 0.$

13. $\begin{cases}\dot{x}_1 = u_1, & x_1(0) = 8,\\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u_2, & x_2(0) = -4,\end{cases}$ $-2 \le u_1(t) \le 1,\ -4 \le u_2(t) \le 3,\ t \ge 0.$

14. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + u_1, & x_1(0) = 8,\\ \dot{x}_2 = -x_1 - u_2, & x_2(0) = -10,\end{cases}$ $u_1(t) \in \{-3, -2, 0, 1/2, 2\},\ |u_2(t)| \le 4,\ t \ge 0.$

15. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - u_1, & x_1(0) = 4,\\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, & x_2(0) = -6,\end{cases}$ $-3 \le u_1(t) \le 4,\ -1 \le u_2(t) \le 2,\ t \ge 0.$

16. $\begin{cases}\dot{x}_1 = u_1, & x_1(0) = 8,\\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + u_2, & x_2(0) = -4,\end{cases}$ $|u_1(t)| \le 6,\ |u_2(t)| \le 1,\ t \ge 0.$

§ 19*. ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В данном параграфе показано применение метода динамического программирования (см. § 14) к решению задач оптимального управления и связь оптимального управления с вариационным исчислением.

19.1. Метод динамического программирования

Применим метод динамического программирования, описанный в § 14, к следующей задаче:

$$\dot{x} = f(x, u, t),\ x(t_0) = x_0,$$
$$u(t) \in U \subseteq \mathbf{R}^r,\ \ t \in T = [t_0;\ t_1], \tag{19.1}$$
$$J(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)dt \to \min,$$

где x — вектор фазовых переменных, $x \in \mathbf{R}^n$; u — управление, $u \in \mathbf{R}^r$; $x_0 \in \mathbf{R}^n$, момент t_1 фиксирован.

Все определения и предположения о параметрах задачи (19.1) сохраняются, как и в предыдущих параграфах данной главы.

Осуществим ***инвариантное погружение*** заданного процесса в семейство аналогичных процессов:

$$\begin{gathered} \dot{x} = f(x, u, t),\ x(\tau) = y \in \mathbf{R}^n,\ t \in T_\tau \in [\tau;\ t_1],\ \tau \in [t_0;\ t_1], \\ u(t) \in U,\ t \in T_\tau. \end{gathered} \tag{19.2}$$

На семействе процессов (19.2) (зависят от параметров y и τ) определим ***функцию Беллмана***

$$B(\tau, y) = \min_{u \in U}(\varphi(x(t_1)) + \int_{\tau}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\,dt). \tag{19.3}$$

Если предположить, что функция Беллмана $B(\tau, y)$ имеет непрерывные частные производные по аргументам, то, используя ***принцип оптимальности***, для нее можно записать ***уравнение Беллмана***

$$-\frac{\partial B(\tau, y)}{\partial \tau} = \min_{u \in U}\left\{\frac{\partial B'(\tau, y)}{\partial y} f(y, u, \tau) + f_0(y, u, \tau)\right\},\ \tau \in T. \tag{19.4}$$

Интегрируя уравнение (19.4), с учетом граничного условия $B(t_1,y)=$ $=\varphi(y)$ получим функцию $B(\tau,y)$, $\tau\in T$, $y\in\mathbf{R}^n$. Затем, вычисляя минимум в (19.4) в каждый момент τ по $u\in U$, найдем функцию $u(\tau,y)$, удовлетворяющую равенству

$$\frac{\partial B'(\tau, y)}{\partial y} f(y, u(\tau, y), \tau) + f_0(y, u(\tau, y), \tau) =$$
$$= \min_{u\in U}\left\{\frac{\partial B'(\tau, y)}{\partial y} f(y, u, \tau) + f_0(y, u, \tau)\right\},\ \tau\in T. \tag{19.5}$$

Далее, полагая $y=x_0$, $u^0(t)=u(t,x(t))$, $t\in T$, из основной системы получим $x^0(t)$, $t\in T$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 19.1. *Если* $B(\tau,y)$, $\tau\in T$, — *гладкое решение уравнения Беллмана* (19.4), *а вектор-функция* $u(t, x(t))$ *порождает единственное решение* $x^0(t)$, $t\in T$, $x^0(t_0)=x_0$, *основной системы такое, что вектор-функция* $u(t, x(t))$, $t\in T$, *кусочно-непрерывна на* T, *то* $u^0(t)=$ $=u(t,x^0(t))$, $t\in T$, — *оптимальное решение в задаче* (19.1), *при этом* $\min\limits_{u\in U} J(u)=B(t_0, x_0)$.

Итак, в этом утверждении метод динамического программирования выступает как ***достаточное условие оптимальности***.

Решение задачи (19.1) методом динамического программирования имеет преимущество перед решением, полученным для этой задачи с помощью принципа максимума.

Если раньше (см. § 17, 18) оптимальное управление получалось как функция времени $u^0(t)$, то теперь из (19.5) оптимальное управление получается в виде функции $u^0(t)=u(t, x^0(t))$ от состояния системы (управление типа обратной связи), что позволяет строить замкнутую систему управления, работающую автоматически в оптимальном режиме.

Заметим, что метод можно применять для получения необходимых условий оптимальности. Однако эти условия нельзя считать вполне обоснованными, поскольку предполагают непрерывную дифференцируемость функции Беллмана, что не всегда имеет место в задачах оптимального управления.

Пример 19.1. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2, \ x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u, \ x_2(0) = x_{20}, \end{cases}$$

$$|u(t)| \le 1, \ t \in [0; 1],$$

$$J(u) = \frac{1}{2}x_2^2(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt \to \min.$$

Сначала решим эту задачу, когда $u(t) \in \mathbf{R}$, $t \in [0;1]$. Составим уравнение Беллмана

$$-\frac{\partial B(\tau, y)}{\partial \tau} = \min_{u \in \mathbf{R}}\left\{\frac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_1}y_2 + \frac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_2}u + \frac{1}{2}u^2\right\}, \ B(1, y) = \frac{1}{2}y_2^2. \quad (19.6)$$

Поскольку ограничений на управление нет, то, записывая равенство (19.5), получаем $\dfrac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_2} + u(\tau, y) = 0$. Отсюда точка минимума $u(\tau, y) = -\dfrac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_2}$. Тогда из (19.6) имеем

$$\frac{\partial B(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_1}y_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_2}\right)^2 = 0. \quad (19.7)$$

Таким образом, для решения задачи нужно найти начальную функцию, удовлетворяющую уравнению (19.7) и начальному условию $B(1, y) = \dfrac{y_2^2}{2}$. Функцию Беллмана будем искать в виде $B(\tau, y) = C_1(\tau)y_1^2 + 2C_2(\tau)y_1y_2 + C_3(\tau)y_2^2$. Для вычисления функций C_i, $i = \overline{1,3}$, подставим $B(\tau, y)$ в (19.7) и, приравнивая коэффициенты при y_1^2, y_1y_2, y_2^2 нулю, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{C}_1 - 2C_2 = 0, & C_1(1) = 0, \\ \dot{C}_2 + C_1 - 2C_2C_3 = 0, & C_2(1) = 0, \\ \dot{C}_3 + 2C_2 - 2C_3^2 = 0, & C_3(1) = 1/2. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$C_1(\tau) \equiv 0, \ C_2(\tau) \equiv 0, \ C_3(\tau) = 1/2(2 - \tau), \ \tau \in [0; 1].$$

Тогда $B(\tau, y) = y_2^2/2(2 - \tau)$ и $u(\tau, y) = y_2/2(\tau - 2)$. Следовательно, взяв управление $u(t, x) = x_2/2(t - 2)$, найдем траекторию $x(t)$, соответствующую этому управлению, из системы $\dot{x}_1 = x_2$, $x_1(0) = x_2/(t-2)$, при условиях $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$. Выполнив необходимые вычисления, получим

$$\begin{aligned} x_1^0(t) &= -x_{20}(t-2)^2/4 + x_{20} + x_{10}, \\ x_2^0(t) &= x_{20}(t-2), \end{aligned} \tag{19.8}$$

и, значит, $u(t, x^0) = -x_{20}/2$.

Этот же результат получается из принципа максимума. Действительно, составим функцию $H(x, \psi, u, t) = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - (1/2)u^2$. Из условия максимума следует (на u нет ограничений), что оптимальное управление находится из условия (задача линейно-выпуклая)

$$\frac{\partial H(x, \psi, u, t)}{\partial u} = \psi_2 - u = 0,$$

т. е. $u^0(t) = \psi_2(t)$. Тогда основная и сопряженная системы имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \psi_2,\ \dot{\psi}_1 = 0,\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1,$$
$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ \psi_1(1) = 0,\ \psi_2(1) = -x_2(1).$$

Отсюда следует, что оптимальная траектория совпадает с (19.8), а $u^0(t) = -\dfrac{1}{2}x_{20}$, $t \in [0;\ 1]$.

Теперь предположим, что $|u(t)| \le 1$, $t \in [0;\ 1]$. Тогда из (19.6) имеем

$$u(\tau, y) = \begin{cases} -\dfrac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_2} & \text{при } \left|\dfrac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_2}\right| \le 1, \\ 1 & \text{при } \dfrac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_2} \le -1, \\ -1 & \text{при } \dfrac{\partial B(\tau, y)}{\partial y_2} \ge 1, \end{cases}$$

или

$$u(\tau, y) = \begin{cases} -\dfrac{y_2}{t-2} & \text{при } |y_2| \le 2-\tau, \\ 1 & \text{при } y_2 \le \tau - 2, \\ -1 & \text{при } y_2 \ge 2-\tau. \end{cases}$$

Таким образом, управление $u(\tau, y)$ будет оптимальным, если в соответствии с теоремой 19.1 следующая функция непрерывно дифференцируема:

$$B(\tau, y) = \begin{cases} B_1(\tau, y) & \text{при } |y_2| \le 2-\tau, \\ B_2(\tau, y) & \text{при } y_2 \le \tau - 2, \\ B_3(\tau, y) & \text{при } y_2 \ge 2-\tau, \end{cases}$$

где $B_i(\tau, y)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{\partial B_1}{\partial y_1} y_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial y_2}\right)^2 = 0, \quad B_1(1, y) = \frac{1}{2} y_2^2,$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial \tau} + \frac{\partial B_2}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial B_2}{\partial y_2} + \frac{1}{2} = 0, \quad B_2(1, y) = \frac{1}{2} y_2^2,$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial \tau} + \frac{\partial B_3}{\partial y_1} y_2 - \frac{\partial B_3}{\partial y_2} + \frac{1}{2} = 0, \quad B_3(1, y) = \frac{1}{2} y_2^2.$$

Произведя необходимые вычисления, получим

$$B(\tau, y) = \begin{cases} \dfrac{y_2^2}{2(2-\tau)} & \text{при } |y_2| \le 2-\tau, \\ \dfrac{y_2^2}{2} + (1-\tau) y_2 + C(\tau) & \text{при } y_2 \le \tau - 2, \\ \dfrac{y_2^2}{2} - (1-\tau) y_2 + C(\tau) & \text{при } y_2 \ge 2-\tau, \end{cases}$$

где $C(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{3}{2}\tau + 1$.

Легко видеть, что функция $B(\tau, y)$ непрерывно дифференцируема. Следовательно, найденное управление $u(t, x)$ является оптимальным.

Замечание 19.1. Метод динамического программирования применяется при решении задач ***синтеза оптимальных линейных регуляторов***.

Рассмотрим в качестве примера применения динамического программирования следующую задачу:

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad t \in T = [0;\ t_1],$$

$$J(u) = \int_0^{t_1} (x'(t) L x(t) + u^2(t))\,dt + \frac{1}{2} x'(t_1) D x(t_1) \to \min. \tag{19.9}$$

Здесь $x \in \mathrm{R}^n$, $u \in \mathrm{R}$; A, L, D — постоянные матрицы соответствующих размеров; $b \in \mathbf{R}^n$ — постоянный вектор, причем $L > 0$, $D \geq 0$, $L' = L$, $D' = D$. Предполагается, что основная система управляема, т. е. выполняется условие (18.6).

Согласно методу динамического программирования, уравнение Беллмана для задачи (19.9) имеет вид

$$-\frac{\partial B(\tau, y)}{\partial \tau} = \min_u \left\{ \frac{\partial B'(\tau, y)}{\partial y}(Ay + bu) + y'Ly + u^2 \right\},$$
$$B(t_1, y) = \frac{1}{2} y'Dy. \tag{19.10}$$

Минимум по u в правой части уравнения (19.10) (функция выпукла по u) достигается на $u(\tau, y) = -\frac{1}{2} b' \frac{\partial B(\tau, y)}{\partial y}$. Подставив найденное управление в (19.10), получим уравнение

$$-\frac{\partial B(\tau, y)}{\partial \tau} = \frac{\partial' B(\tau, y)}{\partial y} Ay - \frac{1}{4}\left(b' \frac{\partial B(\tau, y)}{\partial y} \right)^2 + y'Ly = 0. \tag{19.11}$$

Решение этого уравнения с граничным условием $B(t_1, y) = \frac{1}{2} y'Dy$ будем искать в виде

$$B(\tau, y) = y'M(\tau)y, \quad M' = M. \tag{19.12}$$

Подставив функцию (19.12) в уравнение (19.11) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях y, получим

$$\dot{M} = -2MA + Mbb'M - L, \ M(t_1) = D. \tag{19.13}$$

Уравнение (19.13) называется ***матричным уравнением Риккати***. При сделанных предположениях оно имеет гладкое решение на T. Поэтому управление $u(\tau, y) = -b'M(\tau)x$ оптимально в рассматриваемой задаче.

Если $t_1 = \infty$, управление $u(t, x) = -b'M(t)x$ является оптимальным в задаче

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$J(u) = \int_0^{+\infty} (x'(t)Lx(t) + u^2(t))dt \to \min.$$

Кроме того, управление $u(t, x) = -b'M(t)x$ стабилизирует систему $\dot{x} = Ax + bu$, т. е. система $\dot{x} = (A - bb'M)x$ асимптотически устойчива. Эта задача получила название ***задачи Летова — Калмана аналитического конструирования регулятора***.

Пример 19.2. Решим следующую задачу:

$$\dot{x} = -x + u,\ x(0) = x_0,\ t \in [0;\ 1],$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt + \frac{1}{2}x^2(1) \to \min.$$

Сравнивая эту задачу с задачей (19.9), имеем $A = -1$, $b = 1$, $t_1 = 1$, $D = 1$. Тогда уравнение (19.13) примет вид $\dot{M} = 2M + M^2$, $M(1) = 1$. Тогда $M(t) = \dfrac{2}{3e^{2-2t} - 1}$ и оптимальное управление $u(t, x) = -\dfrac{2x}{3e^{2-2t} - 1}$.

19.2. Принцип максимума и задачи вариационного исчисления

Рассмотрим простейшую задачу (15.10) вариационного исчисления в классе кусочно-гладких функций:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y_x(x))dx \to \min,\ y(\cdot) \in \Omega_*. \tag{19.14}$$

Обозначив $x \to t$, $y(x) \to x(t)$, $y_x(t) \to \dot{x}(t) = u$, $a \to t_0$, $b \to t_1$, задачу (19.14) запишем в виде

$$\dot{x} = u,\ x(t_0) = d_1,\ x(t_1) = d_2,$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt \to \min.$$

Если ввести дополнительную переменную $x_1(t) = \int_{t_0}^{t} F(\tau, x, u)d\tau$, то получим задачу терминального управления

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x(t_0) = d_1,\ x(t_1) = d_2, \\ \dot{x}_1 = F(t, x, u), & x_1(t_0) = 0, \end{cases}$$

$$u(t) \in \mathbf{R},\ t \in [t_0;\ t_1], \tag{19.15}$$

$$J(u) = x_1(t_1) \to \min.$$

Запишем гамильтониан и сопряженную систему для задачи (19.15):

$$H(x, \psi, u, t) = \psi u + \psi_1 F(t, x, u),$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\psi_1 \dfrac{\partial F(t, x, u)}{\partial x}, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} \psi(t) = -\psi_{10} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \dfrac{\partial F(\tau, x, u)}{\partial x} d\tau + C, \\ \psi_1(t) \equiv \psi_{10} = \text{const}. \end{cases} \tag{19.16}$$

Тогда из условия максимума

$$\psi(t) u^0(t) + \psi_{10} F(t, x^0(t), u^0(t)) = \max_{u \in \mathbf{R}} \left(\psi(t) u + \psi_{10} F(t, x^0(t), u) \right),$$

получим, что

$$\frac{\partial H(x^0(t), \psi(t), u^0(t), t)}{\partial u} = \psi(t) + \psi_{10} \frac{F(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial u} = 0.$$

Поэтому с учетом (19.16) имеем

$$\psi_{10}(t) \left(-\frac{\partial F(t, x^0(t), u^0(t))}{\partial u} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F(\tau, x^0(t), u^0(t))}{\partial x} d\tau \right) = \text{const}, \ \ \psi_{10}(t) \neq 0,$$

откуда следует интегральное уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F(t, x^0, u^0)}{\partial u} - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial F(\tau, x^0, u^0)}{\partial x} d\tau = \text{const}.$$

Отсюда дифференцированием обеих частей по t приходим к дифференциальному уравнению Эйлера.

Как следствие принципа максимума могут быть получены необходимые условия оптимальности для многомерных и изопериметрических задач, а также условия Лежандра — Клебша и Якоби.

Упражнения и задания

19.1. Методом динамического программирования найти оптимальное управление в следующих задачах:

1. $\dot{x} = u, \ x(0) = x_0,$

а) $J(u)=\int_0^1 (x^2+u^2)dt + x(1) \to \min$; *б*) $J(u)=\int_0^1 (x^2+u^2)dt + x^2(1) \to \min$;

в) $J(u)=\int_0^1 (x^2+u^2)dt \to \min$; *г*) $J(u)=\int_0^1 u^2 dt + x(1) \to \min$;

д) $J(u)=\int_0^1 (u^2+2tx)dt \to \min$.

2. $\dot{x}=x+u,\ x(0)=x_0,$

а) $J(u)=\int_0^1 u^2 dt + x^2(1) \to \min$; *б*) $J(u)=\int_0^1 (x^2+u^2)dt + x(1) \to \min$.

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0)=x_{10}, \\ \dot{x}_2 = -x_1+u, & x_2(0)=x_{20}, \end{cases}$ $J(u)=\int_0^{\pi} u^2 dt + x_1(\pi) \to \min$.

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0)=x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0)=x_{20}, \end{cases}$ $J(u)=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt + \frac{1}{2}x_2^2(1) \to \min$.

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, & x_1(0)=x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u_2, & x_2(0)=x_{20}, \end{cases}$ $J(u)=\int_0^1 (u_1^2+u_2^2-4tu_2-4x_2)dt + x_1^2(1) \to \min$.

6. $\dot{x}=u,\ x(0)=x_0,$ $J(u)=\int_0^1 (x^2-2tx)dt + x^2(1) \to \min$.

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0)=x_{10}, \\ \dot{x}_2 = -x_1+u, & x_2(0)=x_{20}, \end{cases}$

а) $J(u)=\int_0^{2\pi} u^2 dt \to \min$; *б*) $J(u)=\int_0^{2\pi} x^2 dt + x(2\pi) \to \min$.

8. $\dot{x}=u,\ x_1(0)=x_{10},$ $J(u)=\int_0^{+\infty} (x^4/4+u^2/2)dt \to \min$.

9. $\dot{x}=3x+u,\ x(0)=x,$ $J(u)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (u^2+7x^2)dt + \frac{1}{2}x^2(1) \to \min$.

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2+u, & x_1(0)=x_{10}, \\ \dot{x}_2 = -x_1, & x_2(0)=x_{20}, \end{cases}$ $J(u)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (x_1^2+x_2^2+u^2)dt \to \min$.

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u_2, & x_2(0) = 0, \end{cases}$ $\qquad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (u_1^2 + u_2^2)dt + x_1(1) \to \min.$

12. $\dot{x} = -3x + u,\ x_1(0) = x_0,$ $\qquad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (u^2 + 10x^2)dt + \frac{1}{2}x^2(1) \to \min.$

13. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = x_{20}, \end{cases}$ $\qquad J(u) = \int\limits_0^{+\infty} (x_1^2 + u^2)dt \to \min.$

14. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10}, \\ \dot{x}_2 = -u, & x_2(0) = x_{20}, \end{cases}$ $\qquad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2)dt \to \min.$

19.2. Используя линеаризованный принцип максимума, получить необходимые условия оптимальности (форма Эйлера) для задач:

1) многомерной задачи вариационного исчисления;

2) изопериметрической задачи вариационного исчисления;

3) задачи вариационного исчисления с функционалом, зависящим от производных высших порядков.

19.3. Применить принцип максимума для решения следующих задач вариационного исчисления:

1. $J(y) = \int\limits_0^2 (y_x^2 - y + x^2)dx \to \min,\ y(0) = 0.$

2. $J(y) = \int\limits_0^{\pi} (y_x^2 - y^2)dx \to \min,\ y(0) = 1.$

3. $J(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + y^2)dx \to \min,\ y(0) = 1 + e^2.$

4. $J(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + y + \cos x)dx \to \min,\ y(1) = 0.$

5. $J(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 - 2xy)dx \to \min,\ y(0) = 0.$

6. $J(y) = \int\limits_0^1 (y_x^2 + 2xy)dx + y^2(1) \to \min,\ y(0) = 1.$

7. $J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} (y^2 - y_x^2 + 6y\sin 2x)dx \to \min,\ y(0) = 0.$

8. $J(y)=\int\limits_0^1 (y_x^2+y^2+2ye^x)dx \Rightarrow \min,\ y(0)=0.$

9. $J(y)=\int\limits_1^2 (y_x^2+y_{2x}^2+y_2^2)dx+y_2^2(2) \Rightarrow \min,\ y_1(1)=1,\ y_2(0)=0.$

10. $J(y)=\int\limits_{\pi}^{5\pi/4} (y_x^2-y^2+e^x)dx \Rightarrow \min,\ y(\pi)=1.$

11. $J(y)=\int\limits_0^1 (y_{1x}^2+y_{2x}^2-4xy_{2x}-4y_2)dx \rightarrow \min,\ y_1(0)=1,\ y_2(0)=0.$

12. $J(y)=\int\limits_0^{\pi/2} (y_{1x}^2+y_{2x}^2+2y_1y_2)dx \Rightarrow \min,\ y_1(0)=1,\ y_2(0)=0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
2. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
3. *Альсевич В. В., Габасов Р., Глушенков В. С.* Оптимизация линейных экономических моделей: Статические задачи. Мн.: БГУ, 2000.
4. *Аргучинцев А. В.* Методы оптимизации. Т. 1. Математическое программирование: Сб. задач и упражнений. Иркутск: ИГУ, 1993.
5. *Аргучинцев А. В.* Методы оптимизации. Т. 2. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Сб. задач и упражнений. Иркутск: ИГУ, 1993.
6. *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968.
7. *Ашманов С. А., Тимохов А. В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.
8. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
9. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Иностр. лит., 1960.
10. *Буслаев С. В.* Вариационное исчисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
11. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
12. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации. Мн.: БГУ, 1981.
13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Основы динамического программирования. Мн.: БГУ, 1975.
14. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн.: Наука и техника, 1974.
15. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
16. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщения и применения. М.: Прогресс, 1966.
17. *Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К.* Геометрическое программирование. М.: Мир, 1972.
18. *Зенер К.* Геометрическое программирование и техническое программирование. М.: Мир, 1973.
19. *Канторович Л. В.* Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
20. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1975.
21. *Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И.* Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. М.: Наука, 1973.
22. *Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И.* Высшая математика: Математическое программирование. Мн.: Выш. шк., 1994.

23. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. М.: Высш. шк., 1980.
24. *Лейтман Дж.* Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1968.
25. *Летов А. М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.
26. *Морозов В. В., Сухарев А. Г., Федоров В. В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк., 1986.
27. *Пантелеев А. В., Бортаковский А. С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
28. *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2002.
29. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
30. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967.
31. *Эльсгольц Э. Л.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Глава 5. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Глава 6. ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное издание

Альсевич Виталий Викентьевич
Крахотко Валерий Васильевич

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ: УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАНИЯ

Учебное пособие

Редактор *Н. Ф. Акулич*
Художник обложки *Е. П. Протасеня*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Корректор *Г. М. Добыш*
Компьютерная верстка *С. Н. Егоровой*

Подписано в печать 31.01.2005. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,71. Уч.-изд. л. 24,35. Тираж 500 экз. Зак. 815

Белорусский государственный университет.
Лицензия на осуществление издательской деятельности
№ 02330/0056804 от 02.03.2004.
220050, Минск, проспект Франциска Скорины, 4.

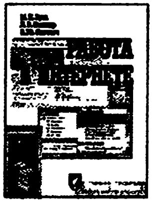
Отпечатано с оригинала-макета заказчика
в Республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности
№ 02330/0056850 от 30.04.2004.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.

НОВИНКИ УЧЕБНОЙ И НАУЧНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Харин Ю. С. **Теория вероятностей**: Учеб. пособие / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев. – Мн.: БГУ, 2004. – 199 с.: ил.

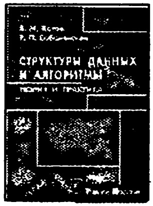
Шалатонин И. А. **Микропроцессоры и ПЭВМ**: Курс лекций / И. А. Шалатонин. – Мн.: БГУ, 2004. – 141 с.

Харин Ю. С. **Эконометрическое моделирование**: Учеб. пособие / Ю. С. Харин, В. И. Малюгин, А. Ю. Харин. – Мн.: БГУ, 2004. – 313 с.: ил.

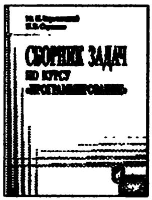


Буза М. К. **Работа в Интернете**: Учеб. пособие для студентов гуманит. фак. БГУ / М. К. Буза, Л. В. Певзнер, В. Ю. Сакович. – Мн.: БГУ, 2004. – 121 с.

Котов В. М. **Структуры данных и алгоритмы: теория и практика**: Учеб. пособие / В. М. Котов, Е. П. Соболевская. – Мн.: БГУ, 2004. – 255 с.



Системы телекоммуникаций и компьютерные сети: Учеб. пособие по спец. курсам «Системы телекоммуникаций» и «Информационные сети» для студентов фак. радиофизики и электроники спец. G 1-31 04 02 «Радиофизика», G 1-31 04 03 «Физическая электроника» / Авт.-сост. Г. Ф. Астапенко. – Мн.: БГУ, 2004. – 113 с.



Воротницкий Ю. И. **Сборник задач по курсу «Программирование»**: Для студентов спец. 1-31 04 02 «Радиофизика» и 1-31 04 03 «Физическая электроника» / Ю. И. Воротницкий, Н. В. Серикова. – Мн.: БГУ, 2004. – 87 с.

Кулешов А. А. **Уравнения математической физики в системе Mathematica**: Учеб. пособие / А. А. Кулешов. – Мн.: БГУ, 2004. – 294 с.: ил.

Калитин Б. С. **Математические модели экономики**: Учеб. пособие / Б. С. Калитин. – Мн.: БГУ, 2004. – 182 с.