7.8

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \ extr \tag{1}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9 \end{cases} \tag{2}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,4} \tag{3}$$

Преобразуем систему (2)

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 5 - 2x_1 - 2x_2, \\ x_3 - x_4 = \frac{9-3x_1-x_2}{2} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 4x_3 = 19 - 7x_1 - 5x_2, \\ 4x_4 = 1 - x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{5}$$

Подставив равенства системы (5) в (1), получим

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 19 - 7x_1 - 5x_2 - \frac{1 - x_1 - 3x_2}{4}$$

$$f(x) = \frac{75}{4} - \frac{19x_1 + 5x_2}{4} \tag{6}$$

Из условия (3) заключаем, что

$$19x_1 + 5x_2 \geq 0. \tag{7}$$

Тогда

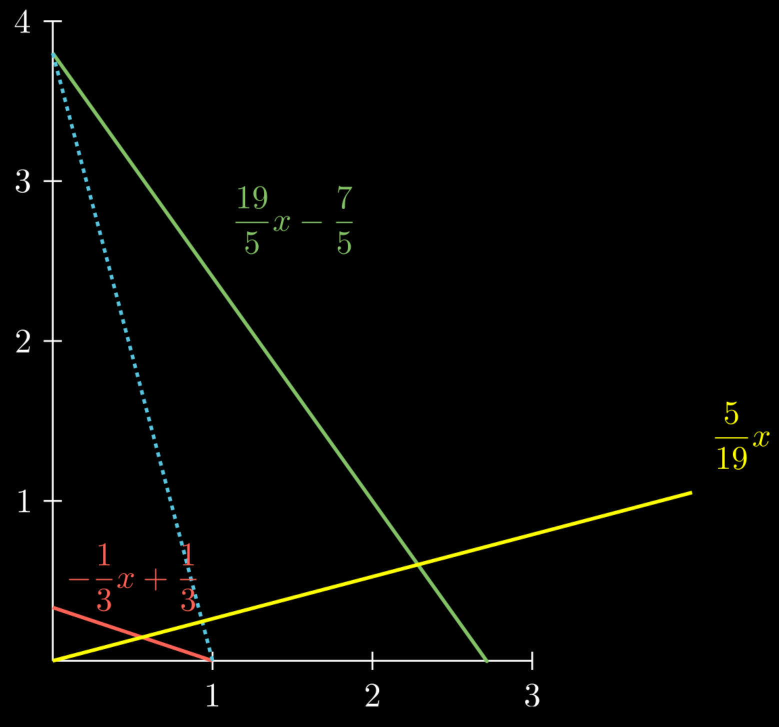
$$f(x) \leq \frac{75}{4}$$

$$\max f(x) = \frac{75}{4} \text{ при } x_1 = x_2 = 0, \text{ откуда } x_3 = \frac{19}{4}, \ x_4 = \frac{1}{4}.$$

Поскольку $\min f(x) = \frac{75}{4} - \frac{\max(19x_1+5x_2)}{4}$, достаточно найти $\max(19x_1 + 5x_2)$.

Из условий (3) и системы (5) имеем

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 19, \\ x_1 + 3x_2 \leq 1 \end{cases}$$



Максимум функции $19x_1 + 5x_2$ будет в точке, в которой линия уровня вектора $\vec{c} = (19, 5)$ касается множества в последний раз. Из графика ясно, что такой точкой является $(x_1, x_2) = (1, 0)$. Из (5) получаем $x_3 = 3,\ x_4 = 0$.

Итого,

$$\min f(x) = 14 \text{ в точке } (1, 0, 3, 0)$$

$$\max f(x) = \frac{75}{4} \text{ в точке } (0, 0, \frac{19}{4}, \frac{1}{4}).$$