homework 3

参数曲线拟合

之前学得函数拟合十分强大，但是函数有很强烈的限制条件：一个输入只能对应一个函数值。这意味着使用函数拟合是无法拟合复杂的曲线的，比如一个闭合曲线。

上节课学习的参数曲线拟合，成功解决了这个问题。对于二维的曲线，与三维的曲面，实际上都是很稀疏的表达，这是因为它们的本质维度分别是一维与二维的。所以我们可以想办法将他们用一维的参数映射出来。

线的本质维度为1，但是它可以映射到高维空间，比如二维曲线与三维曲线，但是你永远无法用一个参数来表达一个面，同理也适用于面，它的本质维度为2，用两个参数进行拟合，即使在高维空间也只能拟合出曲面。

参数拟合方法

课堂中，老师介绍了四种拟合方法，分别是

- Equidistant (uniform) parameterization
  - $t_{i+1}-t_i=\mathrm{const}$，例如：$t_i=i$。这种方法不会考虑点的几何特点。
- Chordal parameterization，弦长参数化
  - $t_{i+1}-t_i=\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|$，两个点的参数之间的距离是与它们之间的弦长成比例的。
- Centripetal parameterization
  - $t_{i+1}-t_i=\sqrt{\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|}$
- Foley parameterization
  - Involvement of angles in the control polygon
  - $t_{i+1}-t_i=\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|\cdot\left(1+\frac{3}{2}\frac{\widehat{\alpha}_i\|\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_{i-1}\|}{\|\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_{i-1}\|+\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|}+\frac{3}{2}\frac{\hat{\alpha}_{i+1}\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|}{\|\boldsymbol{k}_{i+1}-\boldsymbol{k}_i\|+\|\boldsymbol{k}_{i+2}-\boldsymbol{k}_{i+1}\|}\right)$ where $\alpha_i=\operatorname{angle}(\boldsymbol{k}_{i-1},\boldsymbol{k}_i,\boldsymbol{k}_{i+1})$, $\hat{\alpha}_i=\min\left(\pi-\alpha_i,\frac{\pi}{2}\right)$

实现

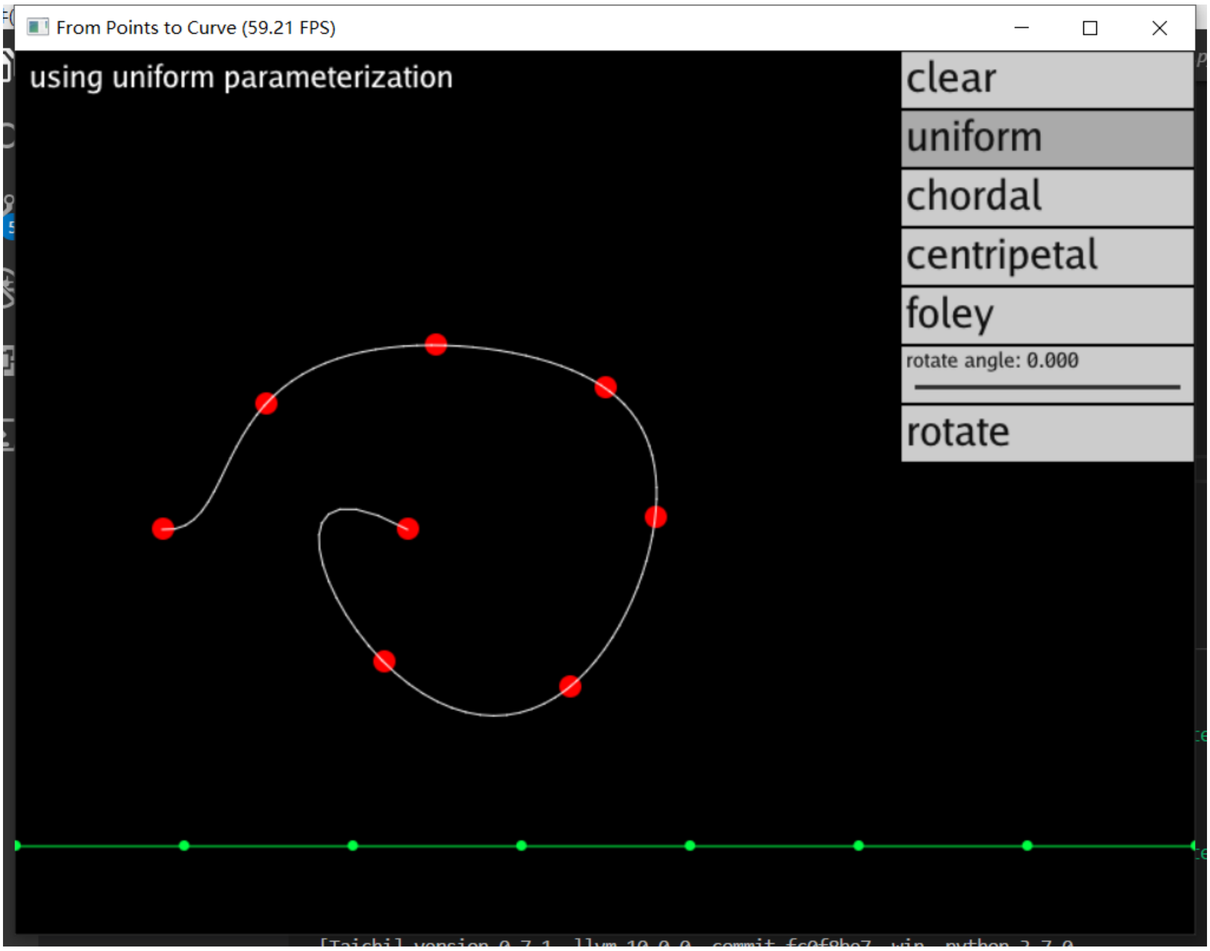
本次作业中实现了这四种参数化方法，结合第一章作业中的函数拟合函数，本次作业理论上比较简单。但是实际上本次作业是我花费较多经历的一节，因为为了更好展示与交互，我新学习了taichi中的GUI来可视化。

对于前三种方法，都是比较容易有直观的理解的。而Foley参数化的公式相对起来来说却复杂不少，因为它不光考虑到了相邻边的长度，还考虑到了相邻的角度。在查阅资料过程中，我知道了Foley参数化是具有仿射不变性的，也就是经过平移旋转以及放大错切等变换后，得到的曲线也是经过同样变换后的曲线。因此我额外添加了一个旋转的操作，可以对窗口中的点进行旋转，并得到新的曲线。

运行程序：

```
python run.py
```

会弹出窗口，可以用鼠标右击来放置点。之后点击左侧的不同按钮来选择使用的参数化方法。在经过参数化后，实际拟合中使用的基函数都是多项式基函数。通过slider可以调整旋转角度，点击`rotation`按钮可以得到旋转后的结果。除了画出曲线外，窗口下面还会显示一道绿色的直线，它上面的点显示了参数化的过程，也就是t之间的相对距离。

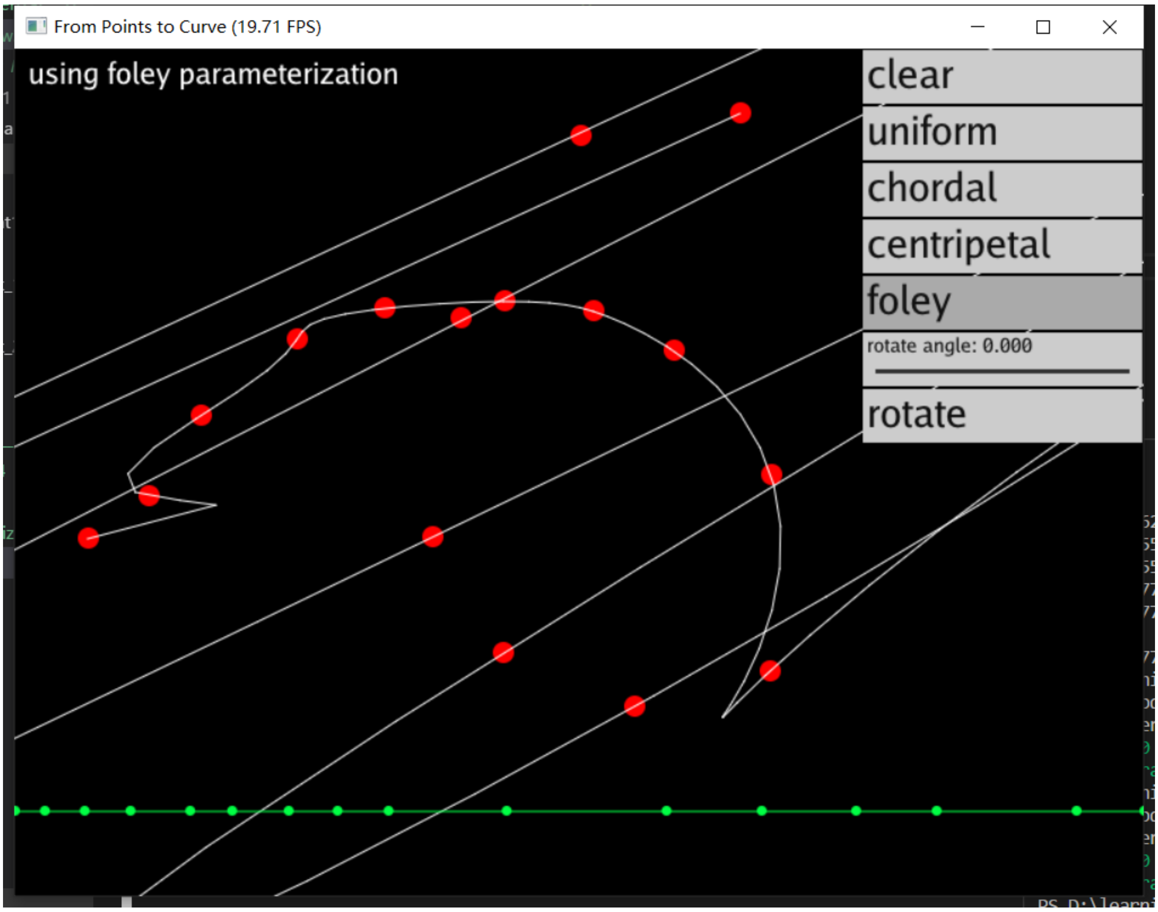


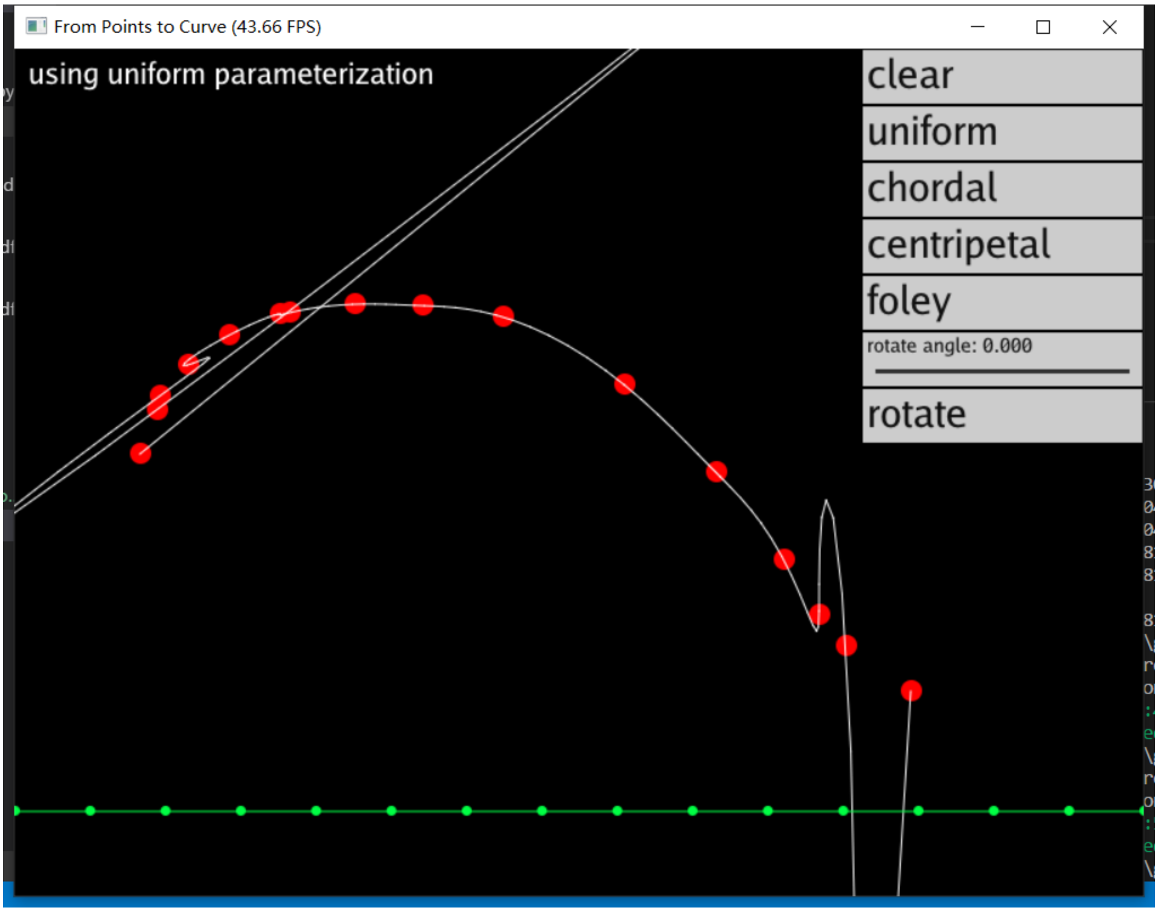
Foley参数化具有仿射不变性，但是就我肉眼来看，所有的四种方法，旋转都是不变的。也许数学形式上它们与之前的方程并不是简单的旋转后得到的，也可能是放大错切等别的仿射变换会导致其他方法的改变，而Foley依然是不变的。不过我没有足够的时间去试验别的变换形式了。

更多内容请看附带的视频。

可改进的地方

1. 尝试不同仿射变换
2. 尝试不同的拟合基函数，因为多项式插值效果不见得很好，点的个数比较多的时候很容易走向振荡的情况。可以用多项式回归以及岭回归来尝试参数曲线。





以上是我这次的报告，谢谢助教以及老师。