МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Навчально-науковий інститут електричної інженерії та інформаційних технологій
Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни

«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»

(Збірник прикладів розв'язування задач)

Виконавець:
Студент гр. КН-24-1
Дон А.А.

Викладач:
Сидоренко В.М.

Кременчук 2024

Зміст

Частина 1 — 3

1 Практична робота № 1: Елементи комбінаторики . . . 3
- 1.1 Приклади розв'язування задач . . . 3
  - 1.1.1 Приклад 1.1 . . . 3
  - 1.1.2 Приклад 1.2 . . . 3
  - 1.1.3 Приклад 1.3 . . . 3
  - 1.1.4 Приклад 1.4 . . . 3
  - 1.1.5 Приклад 1.5 . . . 4

2 Практична робота № 2: Класичне визначення ймовірності . . . 4
- 2.1 Приклади розв'язування задач . . . 4
  - 2.1.1 Приклад 2.1 . . . 4
  - 2.1.2 Приклад 2.2 . . . 4
  - 2.1.3 Приклад 2.3 . . . 4

3 Практична робота № 3: Геометрична ймовірність, Теореми . . . 4
- 3.1 Приклади розв'язування задач . . . 4
  - 3.1.1 Приклад 3.1 . . . 4
  - 3.1.2 Приклад 3.2 . . . 5
  - 3.1.3 Приклад 3.3 . . . 5
  - 3.1.4 Приклад 3.4 . . . 5
  - 3.1.5 Приклад 3.5 . . . 5
  - 3.1.6 Приклад 3.6 . . . 5
  - 3.1.7 Приклад 3.7 . . . 5

4 Практична робота № 4: Схема Бернуллі . . . 6
- 4.1 Приклади розв'язування задач . . . 6
  - 4.1.1 Приклад 4.1 . . . 6
  - 4.1.2 Приклад 4.2 . . . 6
  - 4.1.3 Приклад 4.3 . . . 6
  - 4.1.4 Приклад 4.4 . . . 6
  - 4.1.5 Приклад 4.5 . . . 6
  - 4.1.6 Приклад 4.6 . . . 6
  - 4.1.7 Приклад 4.7 . . . 6

Частина 2 — 7

5 Практична робота № 5: Закони розподілу та числові характеристики . . . 7
- 5.1 Приклади розв'язування задач . . . 7
  - 5.1.1 Приклад 1.1 . . . 7
  - 5.1.2 Приклад 1.2 . . . 7
  - 5.1.3 Приклад 1.3 . . . 7
  - 5.1.4 Приклад 1.4 . . . 7
  - 5.1.5 Приклад 1.5 . . . 7
  - 5.1.6 Приклад 1.6 . . . 7

6 Практична робота № 6: Закони розподілу функцій . . . 7

6.1 Приклади розв'язування задач . . . 7
6.1.1 Приклад 2.1 . . . 7
6.1.2 Приклад 2.2 . . . 7

7 Практична робота № 7: Найпростіший потік подій. Ланцюги Маркова . 8
7.1 Приклади розв'язування задач . . . 8
7.1.1 Приклад 3.1 (Ланцюги Маркова) . . . 8

8 Практична робота № 8: Основи вибіркового методу . . . 8
8.1 Приклади розв'язування задач . . . 8
8.1.1 Приклад 4.1 (Вибірка) . . . 8
8.1.2 Приклад 4.2 . . . 8
8.1.3 Приклад 4.3 (Варіаційний ряд) . . . 8
8.1.4 Приклад 4.4 (Статистичний розподіл) . . . 9
8.1.5 Приклад 4.5 (Інтервальний ряд) . . . 9
8.1.6 Приклад 4.6 (Емпірична функція) . . . 9
8.1.7 Приклад 4.7 (Медіана) . . . 9
8.1.8 Приклад 4.8 (Середнє арифметичне) . . . 9
8.1.9 Приклад 4.9 (Мода) . . . 9
8.1.10 Приклад 4.10 (Розмах) . . . 10
8.1.11 Приклад 4.11 (Дисперсія) . . . 10
8.1.12 Приклад 4.12 (СКВ) . . . 10
8.1.13 Приклад 4.13 (MAE) . . . 10
8.1.14 Приклад 4.14 (Асиметрія) . . . 10
8.1.15 Приклад 4.15 (Стандартизована асиметрія) . . . 10
8.1.16 Приклад 4.16 (Ексцес) . . . 10
8.1.17 Приклад 4.17 (Стандартизований ексцес) . . . 10
8.1.18 Приклад 4.19 (Довірчий інтервал для середнього) . . . 11
8.1.19 Приклад 4.20 (Довірчий інтервал для дисперсії) . . . 11

Частина 1

1 Практична робота № 1: Елементи комбінаторики

1.1 Приклади розв'язування задач

1.1.1 Приклад 1.1

В одного студента 5 книг, у іншого 9. Усі книги різні. Скількома способами студенти можуть провести обмін 1 книгу на 1 книгу?

Розв'язання: Спочатку розглянемо, яким чином перший студент може обрати одну книгу з 5. Це можна зробити п'ятьма способами. Водночас другий студент може це зробити за допомогою дев'ятьма способів. Тоді скориставшись формулою перемноження шансів можна записати:

$$N = 5 \times 9 = 45$$

[cite$_{s}tart], i1145i[cite : 96]$.

1.1.2 Приклад 1.2

10 спортсменів розіграють одну золоту, одну срібну та одну бронзову медалі. Скількома способами ці медалі можуть бути розподілені?

Розв'язання: Враховуючи, що медалі при розподілі не можуть повторюватися і порядок має значення, скористаємося формулою розміщень:

$$A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

[cite$_{s}tart], iiii720i[cite : 117]$.

1.1.3 Приклад 1.3

В одного студента 5 книг, у іншого 9. Скількома способами студенти можуть провести обмін 3 книги на 3 книги?

Розв'язання: Порядок не має значення. Перший студент може відібрати 3 книги з 5 способами C_5^3. Другий — C_9^3. Загальна кількість:

$$N = C_5^3 \cdot C_9^3 = 10 \cdot 84 = 840$$

[cite$_{s}tart][cite : 126]$.

1.1.4 Приклад 1.4

Скільки тризначних чисел можливо створити з цифр 1..7, якщо цифри можуть повторюватися?

Розв'язання: Вибірка з поверненням з урахуванням порядку:

$$N = n^k = 7^3 = 343$$

[cite$_{s}tart][cite : 133]$.

1.1.5 Приклад 1.5

Знайти число можливих результатів підкидання двох гральних кісток, якщо кістки нерозрізнені.

Розв'язання: Комбінації з повтореннями:

$$C_{n+k-1}^{k} = C_{6+2-1}^{2} = C_{7}^{2} = 21$$

[cite$_{s}tart$][$cite : 139$].

2 Практична робота № 2: Класичне визначення ймовірності

2.1 Приклади розв'язування задач

2.1.1 Приклад 2.1

В урні 10 куль (3 білі, 7 чорних). Яка ймовірність витягнути білу?

Розв'язання:

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{3}{10} = 0.3$$

[cite$_{s}tart$][$cite : 215$].

2.1.2 Приклад 2.2

З літер слова «книга» розсипали букви. Яка ймовірність зібрати слово «книга» знову?

Розв'язання: Загальна кількість перестановок $n = 5! = 120$. Сприятлива подія одна.

$$p(A) = \frac{1}{120}$$

[cite$_{s}tart$][$cite : 219$].

2.1.3 Приклад 2.3

В урні 45 куль (6 білих). Витягують 3 кулі. Ймовірність, що всі 3 білі.

Розв'язання:

$$p(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{39}^0}{C_{45}^3} \approx 0.03484$$

[cite$_{s}tart$][$cite : 226$].

3 Практична робота № 3: Геометрична ймовірність, Теореми

3.1 Приклади розв'язування задач

3.1.1 Приклад 3.1

Ймовірність влучення точки в квадрат, вписаний у коло.

Розв'язання:

$$P = \frac{S_{kv}}{S_{kr}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$$

[cite$_{s}tart$][$cite : 316$].

3.1.2 Приклад 3.2

Урна (7 білих, 3 чорних). Витягують 2 без повернення. Ймовірність, що обидві білі.
Розв'язання:

$$p(AB) = p(A)p(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{42}{90} \approx 0.47$$

[cite$_{s}tart$][$cite$: 330].

3.1.3 Приклад 3.3

Коробка з 9 м'ячами. 3 гри по 3 м'ячі (з поверненням). Ймовірність, що всі м'ячі побували у грі.
Розв'язання: Розраховується за теоремою добутку для великої кількості подій:

$$P = 1 \cdot \frac{C_6^3}{C_9^3} \dots$$

[cite$_{s}tart$](ii[$cite$: 337]).

3.1.4 Приклад 3.4

Як приклад 3.2, але з поверненням.
Розв'язання:

$$p(AB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0.49$$

[cite$_{s}tart$][$cite$: 342].

3.1.5 Приклад 3.5

Два стрілка (0.6 та 0.7). **Розв'язання:** а) Тільки один: $0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46$. б) Хоча б один: $1 - 0.4 \cdot 0.3 = 0.88$. в) Обидва: 0.42. [cite$_{s}tart$][$cite$: 349].

3.1.6 Приклад 3.6

Формула повної ймовірності (3 заводи). **Розв'язання:**

$$P(A) = 0.05 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.35 + 0.04 \cdot 0.4 = 0.039$$

[cite$_{s}tart$][$cite$: 370].

3.1.7 Приклад 3.7

Формула Байєса для прикладу 3.6. **Розв'язання:**

$$P(H_1|A) = \frac{0.05 \cdot 0.25}{0.039} \approx 0.32$$

[cite$_{s}tart$][$cite$: 388].

4 Практична робота № 4: Схема Бернуллі

4.1 Приклади розв'язування задач

4.1.1 Приклад 4.1

Монету кинуто 3 рази. Орел випаде 1 раз. **Розв'язання:**

$$P_3(1) = C_3^1(0.5)^1(0.5)^2 = \frac{3}{8}$$

[cite$_s tart$][$cite$: 504].

4.1.2 Приклад 4.2

$n = 1000, k = 500$. Локальна теорема Лапласа. **Розв'язання:**

$$P_{1000}(500) \approx \frac{1}{\sqrt{25}}\phi(0) \approx 0.03$$

[cite$_s tart$][$cite$: 531].

4.1.3 Приклад 4.3

$n = 900, p = 0.8$. Інтегральна теорема. **Розв'язання:** [cite$_s tart$]$iii710740ii\Phi(x)$[cite: 548].

4.1.4 Приклад 4.4

Відхилення частоти (лампочки). **Розв'язання:**

$$P \approx 2\Phi(2.03) \approx 0.9576$$

[cite$_s tart$][$cite$: 574].

4.1.5 Приклад 4.5

Відхилення частоти (деталі). **Розв'язання:**

$$P \approx 2\Phi(2) \approx 0.9544$$

[cite$_s tart$][$cite$: 578].

4.1.6 Приклад 4.6

Формула Пуассона (завод). **Розв'язання:**

$$P_{5000}(3) \approx \frac{1^3 e^{-1}}{3!} \approx 0.06$$

[cite$_s tart$][$cite$: 591].

4.1.7 Приклад 4.7

Телефонна станція (Пуассон). **Розв'язання:** [cite$_s tart$]$\lambda = 4$[cite: 596].

Частина 2

5 Практична робота № 5: Закони розподілу та числові характеристики

5.1 Приклади розв’язування задач

5.1.1 Приклад 1.1

Закон розподілу ДВВ (монета). **Розв’язання:** [cite$_{s}tart] : 0(1/2), 1(1/2)[cite : 1121$].

5.1.2 Приклад 1.2

Математичне сподівання. **Розв’язання:** [cite$_{s}tart$]M(X) = 0 ·0.5+1·0.5 = 0.5[cite: 1135].

5.1.3 Приклад 1.3

Дисперсія. **Розв’язання:** [cite$_{s}tart$]D(X) = 0.25[$cite$: 1146].

5.1.4 Приклад 1.4

Функція розподілу. **Розв’язання:** [cite$_{s}tart]iii0.5[cite : 1165$].

5.1.5 Приклад 1.5

Рівномірний розподіл. **Розв’язання:** [cite$_{s}tart]i$F(x) = (x-a)/(b-a)$ii[cite$: 1187].

5.1.6 Приклад 1.6

Нормальний розподіл. **Розв’язання:** [cite$_{s}tart]ii\Phi(x)$ для $\mu = 3, \sigma = 1$[cite: 1231].

6 Практична робота № 6: Закони розподілу функцій

6.1 Приклади розв’язування задач

6.1.1 Приклад 2.1

Закон розподілу $Y = X^3$ для нормального X. **Розв’язання:** [cite$_{s}tart]ii$g(y)$ii[cite$: 1345].

6.1.2 Приклад 2.2

Сума двох нормальних величин. **Розв’язання:** [cite$_{s}tart], , [cite : 1357$].

7 Практична робота № 7: Найпростіший потік подій. Ланцюги Маркова

7.1 Приклади розв'язування задач

7.1.1 Приклад 3.1 (Ланцюги Маркова)

Задано матрицю переходу $P_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу P_2.

Розв'язання: Скористаємося формулою $P_n = P_1^n$. Для $n = 2$:

$$P_2 = P_1 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Обчислимо елементи матриці:

$$c_{11} = 0.4 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.16 + 0.18 = 0.34$$

$$c_{12} = 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.7 = 0.24 + 0.42 = 0.66$$

$$c_{21} = 0.3 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.3 = 0.12 + 0.21 = 0.33$$

$$c_{22} = 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.7 = 0.18 + 0.49 = 0.67$$

Отже:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.66 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$$

[cite$_start][cite : 1590]$.

8 Практична робота № 8: Основи вибіркового методу

8.1 Приклади розв'язування задач

8.1.1 Приклад 4.1 (Вибірка)

Маса тіла (кг) п'яти навмання вибраних студенток:

$$X = (50, 65, 55, 55, 60)$$

[cite$_start][cite : 1677]$.

8.1.2 Приклад 4.2

Пульс спортсмена протягом п'яти тижнів:

$$X = (72, 72, 64, 68, 72)$$

[cite$_start][cite : 1678]$.

8.1.3 Приклад 4.3 (Варіаційний ряд)

Для вибірки з прикладу 4.1 відсортуємо значення за зростанням:

$$\alpha = (50, 55, 55, 60, 65)$$

[cite$_start][cite : 1686]$.

8.1.4 Приклад 4.4 (Статистичний розподіл)

Для вибірки з прикладу 4.1 складемо таблицю частот:

X	50	55	60	65
ω	$1/5$	$2/5$	$1/5$	$1/5$

[cite$_s tart$][$cite$: 1693].

8.1.5 Приклад 4.5 (Інтервальний ряд)

Для тієї ж вибірки будуємо інтервали.

X	$[50, 55)$	$[55, 60)$	$[60, 65]$
ω	$1/5$	$2/5$	$2/5$

[cite$_s tart$][$cite$: 1713].

8.1.6 Приклад 4.6 (Емпірична функція)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 50 \\ 1/5, & 50 < x \leq 55 \\ 3/5, & 55 < x \leq 60 \\ 4/5, & 60 < x \leq 65 \\ 1, & x > 65 \end{cases}$$

[cite$_s tart$][$cite$: 1724].

8.1.7 Приклад 4.7 (Медіана)

Для ряду $\alpha = (50, 55, 55, 60, 65)$ середина — це третій елемент:

$$\tilde{M}e = 55$$

Або за формулою середнього двох сусідніх (для прикладу з методички): [cite$_s tart$]e = 55+60$_{\overline{2=57.5}}$[cite: 1735].

8.1.8 Приклад 4.8 (Середнє арифметичне)

$$\overline{x} = \frac{1}{5}(50 \cdot 1 + 55 \cdot 2 + 60 \cdot 1 + 65 \cdot 1) = 57$$

[cite$_s tart$][$cite$: 1739].

8.1.9 Приклад 4.9 (Мода)

Значення, що зустрічається найчастіше (частота 2/5):

$$Mo = 55$$

[cite$_s tart$][$cite$: 1749].

8.1.10 Приклад 4.10 (Розмах)

$$R = X_{max} - X_{min} = 65 - 50 = 15$$

[cite$_s tart$][$cite : 1753$].

8.1.11 Приклад 4.11 (Дисперсія)

$$s^2 = \frac{1}{5-1} \sum (x_i - 57)^2 = \frac{1}{4}[(-7)^2 + 2(-2)^2 + 3^2 + 8^2] = 32.5$$

[cite$_s tart$][$cite : 1756$].

8.1.12 Приклад 4.12 (СКВ)

$$s = \sqrt{32.5} \approx 5.701$$

[cite$_s tart$][$cite : 1760$].

8.1.13 Приклад 4.13 (MAE)

Середня абсолютна похибка:

$$MAE = \frac{1}{5}(|50 - 57| + |65 - 57| + \dots) = 4.4$$

[cite$_s tart$][$cite : 1764$].

8.1.14 Приклад 4.14 (Асиметрія)

$$\tilde{A}_s = \frac{n \sum (x_i - \overline{x})^3}{(n-1)(n-2)s^3} \approx 0.405$$

[cite$_s tart$][$cite : 1770$].

8.1.15 Приклад 4.15 (Стандартизована асиметрія)

$$z_1 = \frac{0.405}{\sqrt{6/5}} \approx 0.37$$

[cite$_s tart$][$cite : 1779$].

8.1.16 Приклад 4.16 (Ексцес)

$$\tilde{E}_k \approx -0.178$$

[cite$_s tart$][$cite : 1783$].

8.1.17 Приклад 4.17 (Стандартизований ексцес)

$$z_2 \approx -0.081$$

[cite$_s tart$][$cite : 1792$].

8.1.18 Приклад 4.19 (Довірчий інтервал для середнього)

Для $\gamma = 0.95, n = 5$:

$$57 - \frac{2.571 \cdot 5.701}{\sqrt{5}} < a < 57 + \frac{2.571 \cdot 5.701}{\sqrt{5}}$$

$$50.445 < a < 63.555$$

[cite$_{s}tart$][$cite$: 1805].

8.1.19 Приклад 4.20 (Довірчий інтервал для дисперсії)

Використовуючи розподіл χ^2:

$$11.712 < \sigma^2 < 268.595$$

Або для СКВ:

$$3.422 < \sigma < 16.389$$

[cite$_{s}tart$][$cite$: 1811].