МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Навчально-науковий інститут електричної інженерії та інформаційних технологій

Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни
«ІМОВІРНІСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ІНФОРМАЦИЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ»

(Збірник прикладів розв'язування задач)

Виконавець:
Студент гр. КН-24-1
ПІБ Дон А.А.

Викладач:
ПІБ Сидоренко В.М.

Кременчук 2024

Зміст

Частина 1

1 Практична робота № 1: Елементи комбінаторики

[cite: 83]

1.1 Приклади розв'язування задач

1.1.1 Приклад 1.1

[cite: 94] В одного студента 5 книг, у іншого 9. Усі книги різні. Скількома способами студенти можуть провести обмін 1 книгу на 1 книгу?

Розв'язання. [cite: 96-98] Спочатку розглянемо, яким чином перший студент може обрати одну книгу з 5. Це можна зробити п'ятьма способами. Водночас другий студент може це зробити за допомогою дев'ятьма способів. Тоді скориставшись формулою (1.1) можна записати: $5 \times 9 = 45$. Тобто, студенти можуть провести обмін 1 книгу на 1 книгу 45 різними способами.

1.1.2 Приклад 1.2

[cite: 115] 10 спортсменів розіграють одну золоту, одну срібну та одну бронзову медалі. Скількома способами ці медалі можуть бути розподілені між спортсменами.

Розв'язання. [cite: 117-118] Враховуючи, що медалі при розподілі не можуть повторюватися і порядок має значення, скористаємося формулою (1.2) і запишемо наступне: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Отже, медалі можуть бути розподілені між спортсменами 720 різними способами.

1.1.3 Приклад 1.3

[cite: 124] В одного студента 5 книг, у іншого 9. Усі книги різні. Скількома способами студенти можуть провести обмін 3 книги на 3 книги?

Розв'язання. [cite: 126-128] Враховуючи, що повторення неможливі, а порядок при відборі не має значення, скористаємося формулою (1.3) і запишемо кількість способів, якими перший студент може відібрати 3 книги з 5: C_5^3. Кількість способів, якими цю дію може зробити другий дорівнює відповідно C_9^3. Тоді за формулою (1.1) розв'язок задачі становитиме $C_5^3 \cdot C_9^3 = 10 \cdot 84 = 840$. Отже, студенти можуть провести обмін 3 книгами на 3 книги 840 різними способами.

1.1.4 Приклад 1.4

[cite: 132] Скільки тризначних чисел можливо створити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 якщо кожна цифра може входити у число більше одного разу?

Розв'язання. [cite: 133-134] У цьому випадку цифри відбираються з поверненням, але з урахуванням порядку. Таким чином для розв'язку задачі можна скористатися формулою (1.4): $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$.

1.1.5 Приклад 1.5

[cite: 138] Знайти число можливих результатів підкидання двох гральних кісток, якщо кістки вважаються нерозрізненими.

Розв'язання. [cite: 139-140] Враховуючи, що гральні кістки не розрізнюються і значення очок можуть дублюватися на обох кістках, розв'язок задачі можна звести до комбінаторної схеми вибору з повтореннями без урахування порядку і скористатися формулою (1.5). Таким чином отримаємо $C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ можливий результат, який може випасти на двох кістках.

2 Практична робота № 2: Класичне визначення ймовірності

[cite: 189]

2.1 Приклади розв'язування задач

2.1.1 Приклад 2.1

[cite: 213] В урні 10 куль, з яких 3 білих і 7 чорних. Яка ймовірність того, що навмання витягнута куля з цієї урни виявиться білою?

Розв'язання. [cite: 215-216] Нехай подія А полягає в тому, що витягнута куля виявляється білою. Цей іспит має 10 рівноймовірних результатів, з який для події А є сприятливими три. Отже, $p(A) = \frac{3}{10}$.

2.1.2 Приклад 2.2

[cite: 217] З 5 літер абетки складено слово «книга». Дитина, що не вміє читати, розсипала букви цього слова випадково. Знайти ймовірність того, що буде знову отримано слово «книга».

Розв'язання. [cite: 219-222] Один з можливих способів розв'язанні задачі полягає у наступному. Нехай подія А полягає в тому, що ми знову отримаємо слово «книга». Кількість всіх можливих «слів», які можуть утворитися при падінні дорівнює 5!, але тільки один шанс сприяє тому, що випаде слово «книга». Тоді згідно з класичним визначенням ймовірності: $p(A) = \frac{k}{n} = \frac{1}{5!}$.

2.1.3 Приклад 2.3

[cite: 223] В урні лежать 45 куль, серед яких 6 білих. Витягуються три кулі без повернення. Визначити ймовірність витягування 3 білих куль.

Розв'язання. [cite: 226-228] Позначимо шукану подію через А, а відповідну ймовірність через $p(A)$. Згідно з класичним визначенням ймовірності $p(A) = \frac{k}{n}$ де у контексті задачі k - кількість елементарних подій, що сприяють події А, а n - кількість усіх рівноможливих способів витягнути 6 куль з 45 без повернення і без урахування порядку. Значить, $n = C_{45}^3$. Водночас k буде дорівнювати кількості всіх способів, яким можна вилучити 3 білі кулі з 6 білих «і» в комбінації з всіма можливими способами, якими можна відібрати 3 чорні кулі з 39 чорних: $k = C_6^3 \cdot C_{42}^3$ (sic)[cite: 228]. Таким чином розв'язок задачі буде виглядати так: $p(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_{39}^3}{C_{45}^6} \approx 0,03484$.

3 Практична робота № 3: Геометрична ймовірність, Теореми...

[cite: 283]

3.1 Приклади розв'язування задач

3.1.1 Приклад 3.1

[cite: 312] Точку кинуто в коло радіуса R. Знайти ймовірність того, що вона влучить у площину вписаного квадрата.

Розв'язання. [cite: 316-318] Знайдемо площу круга та квадрата. Площа круга: $S_{\text{круга}} = \pi R^2$. Площа вписаного квадрата: $S_{\text{квадрата}} = 2R^2$. Тоді, згідно з (3.1), ймовірність того, що точка влучить у площину вписаного квадрата, дорівнює відношенню площі квадрата до площі круга: $P = \frac{S_{\text{квадрата}}}{S_{\text{круга}}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$.

3.1.2 Приклад 3.2

[cite: 328] В урні 7 білих і 3 чорних кульки. Навмання витягають дві кульки без повернення. Яка ймовірність того, що вони обидві виявилися білого кольору.

Розв'язання. [cite: 330] $p(AB) = p(A)p(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$.

3.1.3 Приклад 3.3

[cite: 333] Є коробка з 9 новими тенісними м'ячами. Для гри беруть 3 м'ячі і після гри кладуть їх назад у коробку. Різниці між м'ячами, що використовувалися у грі, і новими м'ячами немає. Знайти ймовірність того, що після 3 ігор в коробці не залишиться жодного м'яча, що не використовувався у грі.

Розв'язання. [cite: 337] $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{p(A_1)} \frac{\frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7}}{p(A_2/A_1)p(A_3/A_1A_2)}$.

3.1.4 Приклад 3.4

[cite: 341] Розв'язати задачу з прикладу 3.2 за умови, що кульки витягаються з поверненнями.

Розв'язання. [cite: 342] $p(AB) = p(A)p(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10}$.

3.1.5 Приклад 3.5

[cite: 344] Два стрілка зробили по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення в мішень для першого стрілка складає 0,6, для другого 0,7. Знайти ймовірність того, що:

а) тільки один стрілок влучить у мішень;

б) хоча б один стрілок влучить у мішень;

в) обидва стрілка влучать у мішень;

г) жоден стрілок не влучить у мішень;

д) хоча б один стрілок не влучить у мішень.

Розв'язання. [cite: 349-361] Позначимо ймовірність влучення для першого стрілка як $P(A) = 0.6$ і для другого стрілка як $P(B) = 0.7$.

а) $P(\text{тільки один}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)(1 - P(B)) + (1 - P(A))P(B) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.18 + 0.28 = 0.46$.

б) $P(\text{хоча б один}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - 0.4 \cdot 0.3 = 1 - 0.12 = 0.88$.

в) $P(\text{обидва}) = P(A \cap B) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42$.

г) $P(\text{жоден}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12$.

д) $P(\text{хоча б один не влучить}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.6 \cdot 0.7 = 1 - 0.42 = 0.58$.

3.1.6 Приклад 3.6

[cite: 364] Є 3 заводи... 1-й завод виробляє 25%, 2-й завод 35%, 3-й завод 40%... Брак складає 5% від продукції 1-го заводу, 3% від 2-го, 4% від 3-го... Знайти:

а) ймовірність покупки бракованого кристалу;

б) умовну ймовірність того, що куплений виріб виготовлено 1-им заводом, якщо цей кристал виявився бракованим.

Розв'язання. [cite: 370-372]

а) $P(A) = 0.05 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.35 + 0.04 \cdot 0.4 = 0.0125 + 0.0105 + 0.016 = 0.039$.

б) $P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0.05 \cdot 0.25}{0.05 \cdot 0.25 + 0.03 \cdot 0.35 + 0.04 \cdot 0.4} = \frac{0.0125}{0.039} \approx 0.32$.

3.1.7 Приклад 3.7

[cite: 388] Повернемося до попереднього прикладу. Розглянемо три гіпотези: H_1 - 1-й з.; $P(H_1) = 0.25$ [cite: 390] H_2 - 2-й з.; $P(H_2) = 0.35$ [cite: 391] H_3 - 3-й з.; $P(H_3) = 0.4$ [cite: 393] Нехай $A = \{\text{виріб виявився бракованим}\}$, тоді: $P(A|H_1) = 0.05$ [cite: 396] $P(A|H_2) = 0.03$ [cite: 397] $P(A|H_3) = 0.04$ [cite: 398]

4 Практична робота № 4: Схема Бернуллі

[cite: 489]

4.1 Приклади розв'язування задач

4.1.1 Приклад 4.1

[cite: 502] Монету кинуто $n = 3$ рази. Яка ймовірність того, що орел випаде рівно $k = 1$ раз?

Розв'язання. [cite: 504-509] **I спосіб.** $p(A) = p(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = p(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+p(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+p(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = p(A_1)p(\overline{A}_2)p(\overline{A}_3)+p(\overline{A}_1)p(A_2)p(\overline{A}_3)+p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)p(A_3) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. **II спосіб.** Скористаємося формулою Бернуллі: $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1!(3-1)!}(0.5)^1(1-0.5)^2 = 3 \cdot 0.5 \cdot (0.5)^2 = 3 \cdot (0.5)^3 = \frac{3}{8}$.

4.1.2 Приклад 4.2

[cite: 526] Яка ймовірність того, що при $n = 1000$ киданнях монети орел випаде рівно $k = 500$ разів?

Розв'язання. [cite: 528-533] (Тут $n = 100$ у розв'язку [cite: 529]) Так як $npq = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25 > 10$, то доцільно скористатися наближеною формулою Лапласа: $p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\phi(x)$. $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{500-1000\cdot0.5}{\sqrt{25}} = 0$. (Тут $n = 1000$ [cite: 531]) Таким чином маємо: $p_{1000}(500) = \frac{1}{5}\phi(0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.03 \approx 3\%$ (sic)[cite: 533].

4.1.3 Приклад 4.3

[cite: 546] Імовірність настання події А в кожному з 900 незалежних дослідів дорівнює $p = 0.8$. Визначте імовірність того, що подія А відбудеться: а) 750 разів; б) 710 разів; в) від 710 до 740 разів.

Розв'язання. [cite: 548] (Використовуємо $\sqrt{npq} = \sqrt{144} = 12$, попри описку "14,4"[cite: 548]) $n = 900, p = 0.8, q = 0.2, np = 720, \sqrt{npq} = 12$.

а) $x = \frac{750-720}{12} = 2.5$; $\phi(2.5) \approx 0.0175$ [cite: 549] $P_{900}(750) \approx \frac{1}{12}\phi(2.5) = \frac{1}{12} \cdot 0.0175 \approx 0.00146$ [cite: 550]

б) $x = \frac{710-720}{12} \approx -0.83$; $\phi(-0.83) = \phi(0.83) \approx 0.2827$ [cite: 551] $P_{900}(710) \approx \frac{1}{12} \cdot 0.2827 \approx 0.0236$ [cite: 552]

в) $x_1 = \frac{710-720}{12} \approx -0.83$; $x_2 = \frac{740-720}{12} \approx 1.67$ [cite: 553] $\Phi(-0.83) \approx -0.2967$; $\Phi(1.67) \approx 0.4525$ [cite: 554] $P_{900}(710 \leq k \leq 740) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1.67) - \Phi(-0.83) = \Phi(1.67) + \Phi(0.83)$ $P \approx 0.4525 + 0.2967 = 0.7492$ [cite: 555]

4.1.4 Приклад 4.4

[cite: 565] Імовірність того, що електролампочка... бракованою, дорівнює 0,02. ...відібрано 1000 лампочок. Оцініть ймовірність того, що частота... відрізняється від 0,02 менш ніж на 0,01.

Розв'язання. [cite: 568-574] $p = 0.02, n = 1000, \epsilon = 0.01$. $P(|\frac{k}{1000} - 0.02| < 0.01)$. $P(|\frac{k}{n} - p| \leq \epsilon) \approx 2\Phi(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$. $npq = 1000 \cdot 0.02 \cdot 0.98 = 19.6 > 10$. $\sqrt{npq} \approx 4.43$. $x_1 = \frac{11-1000\cdot0.02}{\sqrt{19.6}} \approx -2.03$; $x_2 = \frac{29-20}{4.43} \approx 2.03$ [cite: 572] $\Phi(-2.03) \approx -0.4788$; $\Phi(2.03) \approx 0.4788$ [cite: 573] $P_{1000}(11 \leq k \leq 29) \approx \Phi(2.03) - \Phi(-2.03) = 0.4788 + 0.4788 = 0.9576$.

4.1.5 Приклад 4.5

[cite: 576] ... $p = 0.1$. ... $n = 400$ деталей. ...відносна частота... відхилиться... не більше ніж на 0.03.

Розв'язання. [cite: 577-578] $n = 400, p = 0.1, q = 0.9, \epsilon = 0.03$. $P(|m/400 - 0.1| \leq 0.03) \approx 2\Phi(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$ $P \approx 2\Phi(0.03\sqrt{\frac{400}{0.1\cdot0.9}}) = 2\Phi(0.03\sqrt{\frac{400}{0.09}}) = 2\Phi(0.03 \cdot \frac{20}{0.3}) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0.4772 = 0.9544$.

4.1.6 Приклад 4.6

[cite: 588] ... 5000 доброякісних виробів, $p = 0.0002$ - ймовірність... пошкодження... Знайти ймовірність... рівно 3 пошкоджених вироби.

Розв'язання. [cite: 590-591] $\lambda = np = 5000 \cdot 0.0002 = 1$. $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $p_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!}e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0.06$.

4.1.7 Приклад 4.7

[cite: 593] Телефонна станція обслуговує 400 абонентів. $p = 0.01$... а) 5 абонентів; б) не більш 4; в) не менш 3.

Розв'язання. [cite: 596] $\lambda = np = 400 \cdot 0.01 = 4$. $e^{-4} \approx 0.018316$.

а) $P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!}e^{-4} = \frac{1024}{120}e^{-4} \approx 0.156293$ [cite: 597]

б) $P_{400}(0 \leq k \leq 4) \approx P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$ [cite: 599-600] $P \approx 0.018316 + 0.073263 + 0.146525 + 0.195367 + 0.195367 = 0.628838$

в) $P_{400}(k \geq 3) = 1 - P_{400}(0 \leq k \leq 2) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2))$ [cite: 601-602] $P \approx 1 - 0.018316 - 0.073263 - 0.146525 = 0.761896$

Частина 2

5 Практична робота № 5: Закони розподілу та числові характеристики

[cite: 903]

5.1 Приклади розв'язування задач

5.1.1 Приклад 1.1

[cite: 911] Зіставимо двом сторонам монети ДВВ відповідним чином: «Орел» - 1, «Решка» - 0. ДВВ X - випадіння нуля чи одиниці в одному киданні. Записати закон розподілу ДВВ у табличному вигляді.

Розв'язання. [cite: 913]

X	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\sum p_i = p_1 + p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$[cite: 915].

5.1.2 Приклад 1.2

[cite: 926] Знайти математичне сподівання ДВВ, заданою умовою задачі прикладу 1.1.

Розв'язання. [cite: 927-928] Відповідно до визначення МС запишемо: $M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5.1.3 Приклад 1.3

[cite: 936] Знайти дисперсію ДВВ, заданою умовою задачі прикладу 1.1.

Розв'язання. [cite: 938-939] Згідно з визначенням дисперсії ДВВ запишемо: $D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = (0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2}) - \left[\frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

5.1.4 Приклад 1.4

[cite: 955] Знайти функцію розподілу ДВВ, заданою умовою задачі прикладу 1.1 і побудувати її графік.

Розв'язання. [cite: 958]

$$F(X) = p(x < X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

5.1.5 Приклад 1.5

[cite: 973] Говорять, що X має рівномірний розподіл на відрізку [a, b] ... $f(x) = \frac{1}{b-a}$ для $a < x \leq b$. Знайти $F(x)$, $M(X)$ та $D(X)$.

Розв'язання. [cite: 980-985] Згідно з визначенням $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

(Виведення $M(X)$ та $D(X)$ у прикладі відсутнє [cite: 973-991], наводиться лише $F(x)$).

5.1.6 Приклад 1.6

[cite: 1022] НВВ X має нормальний розподіл з $\mu = 3$ та $\sigma = 1$. Обчислити $P(1 \leq X \leq 2)$ та $P(|X - \mu| \leq \delta)$ для $\delta = 0.01$.

Розв'язання. [cite: 1024-1030] $p(1 \leq X \leq 2) = \Phi\left(\frac{2-3}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-3}{1}\right) = \Phi(-1) - \Phi(-2)$ Оскільки $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, то: $p = -\Phi(1) - (-\Phi(2)) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$. Для $P(|X - 3| \leq 0.01)$, скористаємося $P(|X - \mu| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$: $P(|X - 3| < 0.01) = 2\Phi\left(\frac{0.01}{1}\right) = 2\Phi(0.01) \approx 2 \cdot 0.004 = 0.008$. (У методичці наведено $2 \cdot 0.000 = 0.000$[cite: 1030], що є грубим округленням).

6 Практична робота № 6: Закони розподілу функцій

[cite: 1116]

6.1 Приклади розв'язування задач

6.1.1 Приклад 2.1

[cite: 1136] Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з $\mu = 0$. Знайти закон розподілу $Y = X^3$.

Розв'язання. [cite: 1137-1138] $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Функція $y = x^3$ монотонно зростає. $y' = 3x^2$. $x = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$. $\psi(y) = y^{1/3}$. $\psi'(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$. $g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$ $g(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y^{1/3})^2}{2\sigma^2}} \cdot \left|\frac{1}{3}y^{-2/3}\right| = \frac{1}{3\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2/3}}{2\sigma^2}}y^{-2/3}$. (Примітка: у методичці [cite: 1138] є помилка в знаменнику $\sigma\sqrt{2\pi}y^{2/3}$ замість $\sigma\sqrt{2\pi} \cdot 3y^{2/3}$ та $e^{\overline{|(y^{1/3})'|}^{\cdots}}$, що невірно).

6.1.2 Приклад 2.2

[cite: 1148] Дві незалежні випадкові величини ξ і η мають стандартний нормальний розподіл: $\xi \sim N(0, 1)$, $\eta \sim N(0, 1)$. Покажемо, що $\xi + \eta \sim N(0, 2)$.

Розв'язання. [cite: 1150-1153] $f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) \cdot f_\eta(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-u)^2}du$ $f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2+(x-u)^2)}du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(2u^2-2xu+x^2)}du$ $f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u^2-xu+\frac{x^2}{2}\right.}$ Виділимо повний квадрат у показнику: $u^2 - xu + \frac{x^2}{2} = (u - \frac{x}{2})^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} = (u - \frac{x}{2})^2 + \frac{x^2}{4}$. $f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left((u-\frac{x}{2})^2+\frac{x^2}{4}\right)}du = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-\frac{x}{2})^2}du$ Заміна $v = u - \frac{x}{2}$, $dv = du$. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}dv = \sqrt{\pi}$ (інтеграл Пуассона). $f_{\xi+\eta}(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$ Це $N(0, 2)$, оскільки $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. $\mu = 0, \sigma^2 = 2$. $\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2}}e^{-\frac{x^2}{2\cdot 2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}$.