Розв'язання Практичних Робіт з ІСМІТ (Варіант 6)

Студент групи КН-24-1
Дон А.А.

Частина 1: Методичні вказівки

Практична робота № 1. Елементи комбінаторики

(Задачі 6, 7, 8, 9, 10)

Задача 6. *Групу з 20 студентів потрібно розділити на 3 бригади, за умови, що в першу бригаду повинні входити 3 людини, в другу 5 і в третю 12. Скількома способами це можливо виконати?*

Розв'язання: Загальна кількість способів:

$$N = C_{20}^{3} \cdot C_{17}^{5} \cdot C_{12}^{12} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} \cdot \frac{17!}{5! \cdot 12!} \cdot 1 = \frac{20!}{3! \cdot 5! \cdot 12!}$$

Обчислимо:

$$C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$$
$$C_{17}^{5} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6188$$
$$C_{12}^{12} = 1$$
$$N = 1140 \cdot 6188 \cdot 1 = 7,054,320$$

Відповідь: 7,054,320 способів.

Задача 7. *Скільки шестизначних чисел можливо створити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо кожне число повинно складатися з 3 парних и 3 непарних цифр, причому жодна цифра не входить у число більше одного разу?*

Розв'язання: 1. Парні цифри: {2, 4, 6, 8} (всього 4). Непарні цифри: {1, 3, 5, 7, 9} (всього 5). 2. Обрати 3 парні з 4-х: $C_4^3 = 4$. Обрати 3 непарні з 5-ти: $C_5^3 = 10$. 3. Кількість способів вибрати 6 цифр: $N_{\text{вибір}} = C_4^3 \cdot C_5^3 = 4 \cdot 10 = 40$. 4. Кількість перестановок з 6 цифр: $P_6 = 6! = 720$. 5. Загальна кількість чисел: $N = N_{\text{вибір}} \cdot P_6 = 40 \cdot 720 = 28,800$. **Відповідь:** 28,800 чисел.

Задача 8. *Скільки різних чисел можливо отримати, переставляючи числа 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5?*

Розв'язання: Це перестановки з повтореннями. Всього $n = 10$. $n_1(2) = 2, n_2(3) = 3, n_3(4) = 3, n_4(5) = 2$.

$$N = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3,628,800}{2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{3,628,800}{144} = 25,200$$

Відповідь: 25,200 різних чисел.

Задача 10. *У пасажирському потязі 9 вагонів. Скількома способами можливо розсадити в потязі 4 людей за умови, що всі вони повинні їхати в різних вагонах?*

Розв'язання: Це задача на розміщення без повернення (кількість розміщень з 9 по 4):

$$A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3,024$$

Відповідь: 3,024 способів.

Практична робота № 2. Класичне визначення ймовірності

(Задачі 6, 7, 8, 9, 10)

Задача 6. *Навмання вибрано натуральне число, що не перевищує 20. Яка ймовірність того, що це число кратне 5.*

Розв'язання: Загальна кількість чисел $n = |\Omega| = 20$. Сприятливі події $A = \{5, 10, 15, 20\}$, $k = |A| = 4$.

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{4}{20} = 0.2$$

Відповідь: 0.2.

Задача 7. *Дано три відрізки довжиною 2, 5, 6, 10. Яка ймовірність того, що з трьох навмання взятих відрізків можна побудувати трикутник.*

Розв'язання: Загальна кількість способів $n = C_4^3 = 4$. Комбінації: $\{2,\ 5,\ 6\} \implies 2 + 5 > 6$ (Так). $\{2,\ 5,\ 10\} \implies 2 + 5 \not> 10$ (Ні). $\{2,\ 6,\ 10\} \implies 2 + 6 \not> 10$ (Ні). $\{5,\ 6,\ 10\} \implies 5 + 6 > 10$ (Так). Кількість сприятливих подій $k = 2$.

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{2}{4} = 0.5$$

Відповідь: 0.5.

Задача 8. *В урні 4 білих та 2 чорних кульки. З цієї урни навмання взято 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.*

Розв'язання: Загальна кількість способів $n = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Кількість сприятливих способів (1 біла з 4 ТА 1 чорна з 2): $k = C_4^1 \cdot C_2^1 = 4 \cdot 2 = 8$.

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{8}{15}$$

Відповідь: 8/15.

Задача 9. *У групі 30 студентів, з яких 10 відмінників. Група наугад розділений на 2 частини (по 15). Знайти ймовірність того, що в кожній частині по 5 відмінників.*

Розв'язання: Загальна кількість способів $n = C_{30}^{15}$. Сприятливі способи (5 відмінників з 10 ТА 10 не-відмінників з 20): $k = C_{10}^5 \cdot C_{20}^{10}$.

$$p(A) = \frac{C_{10}^5 \cdot C_{20}^{10}}{C_{30}^{15}} = \frac{252 \cdot 184,756}{155,117,520} \approx 0.299$$

Відповідь: $\frac{C_{10}^5 \cdot C_{20}^{10}}{C_{30}^{15}} \approx 0.299$.

Задача 10. *У каталозі є 7 командних файлів і 4 текстові файли. Випадково було знищено 6 файлів. Яка ймовірність того, що було знищено 3 командні і 3 текстові файли?*

Розв'язання: Всього 11 файлів. Загальна кількість способів $n = C_{11}^6 = 462$. Сприятливі способи (3 командні з 7 ТА 3 текстові з 4): $k = C_7^3 \cdot C_4^3 = 35 \cdot 4 = 140$.

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{140}{462} = \frac{10}{33}$$

Відповідь: 10/33.

Практична робота № 3. Геометрична ймовірність, теореми...

(Задачі 6, 7, 8, 9, 10)

Задача 6. *На стелажі... 15 підручників, 5 з них переплетені. Беруть 3. Знайти ймовірність того, що хоча б один... буде переплетений (подія А).*

Розв'язання: Знаходимо протилежну подію $\overline{A}$ (жоден не переплетений). $n = C_{15}^3 = 455$. $k(\overline{A}) = C_{10}^3 = 120$.

$$p(\overline{A}) = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

Відповідь: 67/91.

Задача 7. *Два сигналізатори.* $P(A) = 0.95$*,* $P(B) = 0.9$*. Знайти: а) лише один спрацює; б) хоча б один спрацює.*

Розв'язання: $P(\overline{A}) = 0.05$, $P(\overline{B}) = 0.1$. а) $P(\text{лише один}) = P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) = (0.95 \cdot 0.1) + (0.05 \cdot 0.9) = 0.095 + 0.045 = 0.14$. б) $P(\text{жоден}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0.05 \cdot 0.1 = 0.005$. $P(\text{хоча б один}) = 1 - P(\text{жоден}) = 1 - 0.005 = 0.995$. **Відповідь:** а) 0.14; б) 0.995.

Задача 8. *Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 наугад витягнутих білети будуть виграшними.*

Розв'язання: $n = C_{100}^2 = 4950$. $k = C_5^2 \cdot C_{95}^0 = 10 \cdot 1 = 10$.

$$p(A) = \frac{k}{n} = \frac{10}{4950} = \frac{1}{495}$$

Відповідь: 1/495.

Задача 9. *...* $p = 1/7$*. Купивши 5 білетів, знайти: а) виграти по всім 5; б) не виграти по жодному; в) виграти хоча б по одному.*

Розв'язання: $p = 1/7$, $q = 6/7$, $n = 5$. а) $P(A) = p^5 = (1/7)^5 = \frac{1}{16807}$. б) $P(B) = q^5 = (6/7)^5 = \frac{7776}{16807}$. в) $P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7776}{16807} = \frac{9031}{16807}$. **Відповідь:** а) 1/16807; б) 7776/16807; в) 9031/16807.

Задача 10. *3 питання.* $P(Q1) = 0.9$*,* $P(Q2) = 0.9$*,* $P(Q3) = 0.8$*. Знайти: а) складе (всі 3); б) складе (хоча б 2).*

Розв'язання: а) $P(A) = P(Q1) \cdot P(Q2) \cdot P(Q3) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.8 = 0.648$. б) $P(\text{Рівно 2}) = (0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.2) + (0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.8) + (0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.8) = 0.162 + 0.072 + 0.072 = 0.306$. $P(B) = P(\text{Рівно 2}) + P(\text{Рівно 3}) = 0.306 + 0.648 = 0.954$. **Відповідь:** а) 0.648; б) 0.954.

Практична робота № 4. Схема Бернуллі

(Задачі 6, 7, 8, 9, 10)

Задача 6. $n = 900$*,* $p = 0.8$*. Знайти: а)* $k = 750$*; б)* $k = 710$*; в)* $k \in [710, 740]$*.*

Розв'язання: $np = 720$, $npq = 144$, $\sqrt{npq} = 12$. Використовуємо формули Лапласа. а) $x = \frac{750-720}{12} = 2.5$. $P_{900}(750) \approx \frac{1}{12}\phi(2.5) \approx \frac{1}{12} \cdot 0.0175 \approx 0.00146$. б) $x = \frac{710-720}{12} \approx -0.83$. $P_{900}(710) \approx \frac{1}{12}\phi(-0.83) \approx \frac{1}{12} \cdot 0.2827 \approx 0.0236$. в) $x_1 = -0.83$, $x_2 = \frac{740-720}{12} \approx 1.67$. $P \approx \Phi(1.67) - \Phi(-0.83) = \Phi(1.67) + \Phi(0.83) \approx 0.4525 + 0.2967 = 0.7492$. **Відповідь:** а) 0.00146; б) 0.0236; в) 0.7492.

Задача 7. $p = 0.02$*,* $n = 1000$*. Оцінити* $P(|\frac{k}{n} - p| < 0.01)$*.*

Розв'язання: $P \approx 2\Phi(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) = 2\Phi(0.01\sqrt{\frac{1000}{0.02 \cdot 0.98}})$ $P \approx 2\Phi(0.01\sqrt{51020.4}) \approx 2\Phi(2.26) \approx 2 \cdot 0.4881 = 0.9762$. **Відповідь:** 0.9762.

Задача 8. $p = 0.0016$, $n = 10000$. *Знайти* $P(k \geq 1)$.

Розв'язання: Використовуємо формулу Пуассона. $\lambda = np = 10000 \cdot 0.0016 = 16$.

$$P(k \geq 1) = 1 - P(k = 0)$$

$$P(k = 0) = \frac{16^0 e^{-16}}{0!} = e^{-16} \approx 0.0000001125$$

$$P(k \geq 1) = 1 - e^{-16} \approx 0.9999998875$$

Відповідь: ≈ 1.

Задача 9. $n = 400$, $p = 0.01$. *Знайти: а)* $P(k = 5)$*; б)* $P(k \leq 4)$*; в)* $P(k \geq 3)$.

Розв'язання: $\lambda = np = 4$. $e^{-4} \approx 0.018316$. а) $P(5) = \frac{4^5 e^{-4}}{5!} = \frac{1024 \cdot 0.018316}{120} \approx 0.1563$. б) $P(k \leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) \approx 0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954 + 0.1954 \approx 0.6288$. в) $P(k \geq 3) = 1 - P(k \leq 2) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) \approx 1 - (0.0183 + 0.0733 + 0.1465) \approx 0.7619$. **Відповідь:** а) 0.1563; б) 0.6288; в) 0.7619.

Задача 10. $p = 0.1$, $n = 400$. *Знайти* $P(|\frac{k}{n} - p| \leq 0.03)$.

Розв'язання: $P \approx 2\Phi(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) = 2\Phi(0.03\sqrt{\frac{400}{0.1 \cdot 0.9}})$ $P \approx 2\Phi(0.03\sqrt{\frac{400}{0.09}}) = 2\Phi(0.03 \cdot \frac{20}{0.3}) = 2\Phi(2)$.

$$P \approx 2 \cdot 0.4772 = 0.9544$$

Відповідь: 0.9544.

Практична робота № 1. Закони розподілу...

(Задачі 6, 7, 8, 9, 10)

Задача 6. *Два стрілки... $p_1 = 0.5$, $p_2 = 0.4$. X – кількість влучень. Виконати повний аналіз.*

Розв'язання: 1. Закон розподілу: $P(X = 0) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$. $P(X = 1) = (0.5 \cdot 0.6) + (0.5 \cdot 0.4) = 0.5$. $P(X = 2) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$.

$X = x_i$	0	1	2
p_i	0.3	0.5	0.2

6. $M(x), D(x), \sigma(x)$**:** $M(x) = (0 \cdot 0.3) + (1 \cdot 0.5) + (2 \cdot 0.2) = 0.9$. $M(x^2) = (0^2 \cdot 0.3) + (1^2 \cdot 0.5) + (2^2 \cdot 0.2) = 1.3$. $D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = 1.3 - 0.81 = 0.49$. $\sigma(x) = \sqrt{0.49} = 0.7$. **7. Асиметрія та Ексцес:** $\mu_3 = \sum (x_i - 0.9)^3 p_i = (-0.729) \cdot 0.3 + (0.001) \cdot 0.5 + (1.331) \cdot 0.2 = 0.048$. $\mu_4 = \sum (x_i - 0.9)^4 p_i = (0.6561) \cdot 0.3 + (0.0001) \cdot 0.5 + (1.7716) \cdot 0.2 \approx 0.5512$. $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0.048}{0.7^3} \approx 0.1399$. $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0.5512}{0.7^4} - 3 \approx 2.2957 - 3 = -0.7043$. **4. Ймовірності:** $P(1 \le x \le 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.5 + 0.2 = 0.7$. $P(x > 3) = 0$. **2.** $F(x)$ **та** $f(x)$**:**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.3, & 0 < x \le 1 \\ 0.8, & 1 < x \le 2 \\ 1.0, & x > 2 \end{cases}$$

$$F(x) = 0.3H(x) + 0.5H(x-1) + 0.2H(x-2)$$

$$f(x) = 0.3\delta(x) + 0.5\delta(x-1) + 0.2\delta(x-2)$$

3, 5. Графіки: (Опускаємо в LaTeX, описуються як сходинки та імпульси).

Задача 7. *НВВ $X \sim U(a, b)$. Вивести $F(x)$, $M(x)$, $D(x)$, A_s, E_x, $P(\alpha \le X \le b)$.*

Розв'язання: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ для $x \in [a, b]$. 1. $F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$ (для $x \in [a, b]$). 2. $M(x) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} [\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$. 3. $M(x^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{}{a2+a3b+b2}$. $D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$. 4. $A_s = 0$ (розподіл симетричний). 5. $E_x = -1.2$ (стандартний результат). 6. $P(\alpha \le X \le b) = \int_\alpha^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{}{\boldsymbol{b-a}}$ (для $a \le \alpha \le b$).

Задача 8. *НВВ $X \sim E(\lambda)$. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Вивести $F(x)$, $M(x)$, $D(x)$, $P(\alpha \le X \le b)$.*

Розв'язання: 1. $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$ (для $x \ge 0$). 2. $M(x) = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$. 3. $M(x^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$. $D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. 4. $P(\alpha \le X \le b) = \int_\alpha^b \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_\alpha^b = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda b}$.

Задача 9. *Розподіл Коші. $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$. Знайти c, $F(x)$, $P(-1 \le X \le 1)$.*

Розв'язання: 1. $\int_{-\infty}^\infty \frac{c}{1+x^2} dx = c[\arctan(x)]_{-\infty}^\infty = c(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = c\pi = 1 \implies c = 1/\pi$. 2. $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1/\pi}{1+t^2} dt = \frac{1}{\pi}[\arctan(t)]_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi}(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$. 3. $P(-1 \le X \le 1) = \int_{-1}^1 \frac{1/\pi}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi}[\arctan(x)]_{-1}^1 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$.

Задача 10. *$f(x) = c \cdot \cos(x)$ для $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Знайти c, $F(x)$, $P(|X| \le \pi/4)$.*

Розв'язання: 1. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} c\cos(x) dx = c[\sin(x)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = c(1 - (-1)) = 2c = 1 \implies c = 1/2$. 2. $F(x) = \int_{-\pi/2}^x \frac{1}{2}\cos(t) dt = \frac{1}{2}[\sin(t)]_{-\pi/2}^x = \frac{1}{2}(\sin(x) + 1)$. 3. $P(|X| \le \pi/4) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2}\cos(x) dx = \frac{1}{2}[\sin(x)]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Практична робота № 6. Закони розподілу функцій

(Задачі 6, 7, 8, 9, 10)

Задача 6. *$X \sim E(\lambda = 5)$. Встановити закон розподілу $Z = min(X)$.*

Розв'язання: $F(x) = 1 - e^{-5x}$. $f(x) = 5e^{-5x}$. Формула для $f(X_{min})$ з n вибірок:

$$f(Z) = n \cdot (1 - F(x))^{n-1} \cdot f(x) = n \cdot (1 - (1 - e^{-5x}))^{n-1} \cdot (5e^{-5x})$$

$$f(Z) = n \cdot (e^{-5x})^{n-1} \cdot (5e^{-5x}) = 5n \cdot e^{-5x(n-1)} \cdot e^{-5x} = (5n)e^{-(5n)x}$$

Відповідь: $Z \sim E(\lambda_Z = 5n)$.

Задача 7. *Знайти $Z = X + Y$, $X \sim N(a; \sigma^2)$, $Y \sim E(\lambda)$.*

Розв'язання: Формула згортки: $f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y(t-u)du$. $f_X(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2})$. $f_Y(t-u) = \lambda e^{-\lambda(t-u)}$ (де $u \leq t$).

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2} - \lambda(t-u)\right) du$$

Відповідь: Інтеграл згортки не спрощується до елементарної функції.

Задача 8. *Знайти $Z = X + Y$, $X \sim N(a_1; \sigma_1^2)$, $Y \sim N(a_2; \sigma_2^2)$.*

Розв'язання: Сума двох незалежних нормальних величин є нормальною величиною. $M(Z) = M(X) + M(Y) = a_1 + a_2$. $D(Z) = D(X) + D(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. **Відповідь:** $Z \sim N(a_1 + a_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Задача 9. *Знайти $Z = X + Y$, $X \sim N(a; \sigma^2)$, $Y \sim U(a; b)$.*

Розв'язання: Згортка: $f_Y(t-u) = \frac{1}{b-a}$ (де $t - b \leq u \leq t - a$).

$$f_Z(t) = \int_{t-b}^{t-a} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right) du$$

$$f_Z(t) = \frac{1}{(b-a)\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{t-b}^{t-a} e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

Відповідь: $f_Z(t) = \frac{1}{b-a}\left[\Phi\left(\frac{t-a-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t-b-a}{\sigma}\right)\right]$.

Задача 10. *Знайти $Z = X + Y$, $X \sim U(a; b)$, $Y \sim U(a; b)$.*

Розв'язання: Результатом є трикутний розподіл (Сімпсона) на $[2a, 2b]$.

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{t-2a}{(b-a)^2}, & 2a \leq t \leq a+b \\ \frac{2b-t}{(b-a)^2}, & a+b < t \leq 2b \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Відповідь: Розподіл Z є трикутним з піком в $t = a + b$.

Практична робота № 7. Закони розподілу функцій

(Задачі 6, 7, 8, 9, 10)

Задача 6. *$X \sim E(\lambda = 5)$. Встановити закон розподілу $Z = min(X)$.*

Розв'язання: $F(x) = 1 - e^{-5x}$. $f(x) = 5e^{-5x}$. Формула для $f(X_{min})$ з n вибірок:

$$f(Z) = n \cdot (1 - F(x))^{n-1} \cdot f(x) = n \cdot (1 - (1 - e^{-5x}))^{n-1} \cdot (5e^{-5x})$$

$$f(Z) = n \cdot (e^{-5x})^{n-1} \cdot (5e^{-5x}) = 5n \cdot e^{-5x(n-1)} \cdot e^{-5x} = (5n)e^{-(5n)x}$$

Відповідь: $Z \sim E(\lambda_Z = 5n)$.

Задача 7. *Знайти $Z = X + Y$, $X \sim N(a; \sigma^2)$, $Y \sim E(\lambda)$.*

Розв'язання: Формула згортки: $f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \cdot f_Y(t - u)du$. $f_X(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2})$. $f_Y(t - u) = \lambda e^{-\lambda(t-u)}$ (де $u \leq t$).

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2} - \lambda(t-u)\right) du$$

Відповідь: Інтеграл згортки не спрощується до елементарної функції.

Задача 8. *Знайти $Z = X + Y$, $X \sim N(a_1; \sigma_1^2)$, $Y \sim N(a_2; \sigma_2^2)$.*

Розв'язання: Сума двох незалежних нормальних величин є нормальною величиною. $M(Z) = M(X) + M(Y) = a_1 + a_2$. $D(Z) = D(X) + D(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. **Відповідь:** $Z \sim N(a_1 + a_2; \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Задача 9. *Знайти $Z = X + Y$, $X \sim N(a; \sigma^2)$, $Y \sim U(a; b)$.*

Розв'язання: Згортка: $f_Y(t - u) = \frac{1}{b-a}$ (де $t - b \leq u \leq t - a$).

$$f_Z(t) = \int_{t-b}^{t-a} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right) du$$

$$f_Z(t) = \frac{1}{(b-a)\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{t-b}^{t-a} e^{\frac{-(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

Відповідь: $f_Z(t) = \frac{1}{b-a}\left[\Phi\left(\frac{t-a-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{t-b-a}{\sigma}\right)\right]$.

Задача 10. *Знайти $Z = X + Y$, $X \sim U(a; b)$, $Y \sim U(a; b)$.*

Розв'язання: Результатом є трикутний розподіл (Сімпсона) на $[2a, 2b]$.

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{t-2a}{(b-a)^2}, & 2a \leq t \leq a + b \\ \frac{2b-t}{(b-a)^2}, & a + b < t \leq 2b \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$$

Відповідь: Розподіл Z є трикутним з піком в $t = a + b$.