Universidade Federal do Rio de Janeiro

UMA FÓRMULA PARA O CORE DE UM IDEAL

Kevin Alves Vasconcellos

2020

UFRJ

UMA FÓRMULA PARA O CORE DE UM IDEAL

Kevin Alves Vasconcellos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: S. Hamid Hassanzadeh

Rio de Janeiro
Junho de 2020

UMA FÓRMULA PARA O CORE DE UM IDEAL

Kevin Alves Vasconcellos

Orientador: S. Hamid Hassanzadeh

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Seyed Hamid Hassanzadeh Hafshejani, IM - UFRJ

Cecília Salgado Guimarães da Silva, IM - UFRJ

José Naéliton Marques da Silva, DM - UFPB

Vinicius Bouça Marques da Costa, CEFET Nova Friburgo/RJ

Zaqueu Alves Ramos, DMA - UFS

Rio de Janeiro
Junho de 2020

Vasconcellos, Kevin Alves.

Uma fórmula para o core de um ideal/ Kevin Alves Vasconcellos. - Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2020.

ix, 149f.; 31 cm.

Orientador: Seyed Hamid Hassanzadeh Hafshejani

Dissertação (mestrado) — UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação em Matemática, 2020.

Referências Bibiliográficas: f. 146-149.

1. Redução de um ideal. 2. core. 3. corpo residual infinito. 4. Teoria da interseção residual. I. Hassanzadeh, Seyed Hamid Hafshejani. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Uma fórmula para o core de um ideal.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e à minha irmã por todo apoio que me deram ao longo desses anos de estudos. Agradeço a Deus por todo suporte que me deu durante à redação da dissertação e principalmente no período que antecedeu à defesa. Agradeço ao professor S. Hamid Hassanzadeh por estar me dando a oportunidade de aprender álgebra comutativa e ter me aceitado como seu orientado. Agradeço a todos os professores de matemática que me transferiram conhecimento ao longo de toda minha formação acadêmica, em especial aos professores Paulo Sérgio Dias da Silva e Geraldo de Oliveira Filho (in memoriam), que me provocaram o desejo de ser matemático. Agradeço à minha namorada Ana Paula de Oliveira Pompílio por estar comigo durante toda essa jornada. Agradeço aos grandes amigos que fiz nesse Instituto. Por fim, agradeço às agências fomento CNPq e Capes pelo suporte financeiro para garantir a minha estadia na capital.

Resumo

Este trabalho, baseado no artigo: *A formula for the core of an ideal*, de Claudia Polini e Bernd Ulrich e publicado na revista científica *Mathematische Annalen* (2005), tem como objetivo principal esmiuçar os resultados que estes matemáticos obtiveram e publicaram no devido artigo. Como objetivo secundário, planeja-se estudar tópicos importantes e contemporâneos da álgebra comutativa, muitos dos quais são inviáveis para serem vistos em disciplinas regulares de doutorado. No artigo em questão, os autores provaram uma fórmula para o core de um ideal que foi conjecturada pelos próprios autores e Alberto Corso em [18]. Eles provaram que em um anel local Gorenstein $(R, \mathfrak{m}, k)$ com corpo residual k infinito, dado um ideal I com $\operatorname{ht}(I) = g > 0$, $\ell(I) = \ell$, satisfazendo à condição G_ℓ e que $\operatorname{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para todo $1 \leq j \leq \ell - g$. Se J é uma redução minimal de I com $r = r_J(I)$ e $\operatorname{char}(k) = 0$ ou $\operatorname{char}(k) > r - \ell + g$, então $\operatorname{core}(I) = J^{n+1} :_R I^n$ para todo $n \geq \max\{r - \ell + g, 0\}$. Para provar este resultado, foram utilizadas várias ferramentas sofisticadas da álgebra comutativa, dentre elas, teoria da interseção residual, teoria de reduções de ideais em anéis locais Noetherianos com corpo residual infinito, cohomologia local, S_2-ficação, complexo de Koszul, etc.

Palavras-chave: Redução de um ideal; core; corpo residual infinito; teoria da interseção residual.

Abstract

This work is based on the article: *A formula for the core an ideal*, by Claudia Polini and Bernd Ulrich at *Mathematische Annalen* (2005). The main objective is to detail the results which these mathematicians have proved. As secondary objective, it plans to study important and current topics in commutative algebra, many of which are unfeasible to be seen in Ph.D. regular disciplines. In the article the authors prove a formula for the core of an ideal. The core of an ideal is the intersection of all its reductions that encodes information about the possible reductions of I. This formula has already been conjectured by the authors jointly with Alberto Corso in [18]. The setting is a local Gorenstein ring $(R, \mathfrak{m}, k)$ with infinite residue field k, given an ideal I with $\mathrm{ht}(I) = g > 0$, $\ell(I) = \ell$, satisfying the G_ℓ condition and $\mathrm{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ for all $1 \leq j \leq \ell - g$. They proved that, if J is a minimal reduction of I with $r_J(I) = r$ and $\mathrm{char}(k) = 0$ or $\mathrm{char}(k) > r - \ell + g$, then $\mathrm{core}(I) = J^{n+1} :_R I^n$ for all $n \geq \max\{r - \ell + g, 0\}$. To prove this result, several sophisticated tools of commutative algebra were employed. These tools include residual intersection, reduction of ideals in Noetherian local rings, local Cohomology, S_2-fication, Koszul complex, etc.

Keywords: Reduction of an ideal; core; infinite residue field; residual intersection theory.

Conteúdo

Introdução

Sejam R um anel e I um ideal de R, um ideal J é dito uma redução de I se existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $JI^n = I^{n+1}$. O core de I, denotado por $\operatorname{core}(I)$, é a interseção de todas as reduções de I.

O conceito de core foi introduzido por Judith Sally no final na década de 80 e foi primeiramente mencionado por D. Rees e J. Sally em [33]. Em geral, é extremamente difícil de se determinar, nem mesmo costuma ser claro quando o core de um ideal é nulo. O core aparece naturalmente em teoremas relacionados com Teorema de Briançon-Skoda.

Teorema (Corolário 13.3.4 de [8])**.** *Sejam R um anel regular local com $\dim(R) = d$ e I um ideal de R. Denotando $\overline{I}$ o fecho inteiro de I, tem-se que para qualquer $n \geq 0$*

$$\overline{I^{d+n}} \subseteq I^{n+1}.$$

Em particular, $\overline{I^d} \subseteq I$ e, portanto, $\overline{I^d} \subseteq \operatorname{core}(I)$.

Em 2003 Eero Hyry e Karen E. Smith provaram o seguinte resultado em [34] para ideais equimúltiplos, isto é, ideais I tais que $\operatorname{ht}(I) = \ell(I)$, onde $\ell(I)$ é o espalhamento analítico de I, cuja definição pode ser encontrada na Definição 1.111 desta dissertação.

Teorema (Corolário 5.1.1 de [34])**.** *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local contendo um corpo de característica 0 e I um ideal equimúltiplo de R com $\operatorname{ht}(I) = h$*

tal que $R[It]$ é um anel Cohen-Macaulay. Se J é uma redução de I, então

$$\operatorname{core}(I) = J^{r+1} :_R I^r$$

para algum r suficientemente grande.

Em 2004 Craig Huneke e Ngô Viêt Trung provaram o seguinte resultado em [32].

Teorema (Teorema 3.7 de [32])**.** *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local com corpo residual de característica 0 e I um ideal equimúltiplo de R com $h = \operatorname{ht}(I) > 0$. Se J é uma redução minimal de I e $r = r_J(I)$, então*

$$\operatorname{core}(I) = J^{r+1} :_R I^r.$$

Observando estes dois Teoremas anteriores, percebe-se então que para certas classes de anéis e ideais I, o core de I pode ser dado como um cólon $J^{n+1} :_R I^n$, onde J é uma redução minimal de I e n é um determinado número natural. Em 2005, Claudia Polini e Bernd Ulrich ampliaram a classe de ideais, cujo core pode ser dado por essa fórmula. Eles provaram uma conjectura que os próprios e Alberto Corso propuseram em [19].

Esta dissertação tem como objetivo principal apresentar minuciosamente o trabalho de C. Polini e B. Ulrich na determinação de fórmulas fechada para cores para mais uma classe de ideais, obtendo o seguinte resultado.

Teorema (Teorema 4.5 de [27])**.** *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Gorenstein local com corpo residual k infinito, I um ideal de R com $\operatorname{ht}(I) = g > 0$ e $\ell(I) = \ell$ e J uma redução minimal de I com $r_J(I) = r$. Assuma que I satisfaça à condição G_ℓ, $\operatorname{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para $1 \leq j \leq \ell - g$ e $\operatorname{char}(k) = 0$ ou $\operatorname{char}(k) > r - \ell + g$. Então*

$$\operatorname{core}(I) = J^{n+1} :_R I^n$$

para todo $n \geq \max\{r - \ell + g, 0\}$.

Onde um ideal I satisfaz à condição G_ℓ se, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ contendo I com $\mathrm{ht}(I) < \ell$, então o número minimal de geradores $I_\mathfrak{p}$ é limitado superiormente por $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.

As hipóteses destes teorema, principalmente a condição G_ℓ e a desigualdade $\mathrm{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para $1 \leq j \leq \ell - g$ podem parecer, a primeira vista, demasiadamente artificiais, entretanto estas hipótese estão ambas satisfeitas se I for um ideal $\mathfrak{m}$-primário ou I for um ideal equimúltiplo, isto é, quando $\mathrm{ht}(I) = \ell(I)$.

Ambas condições também são satisfeitas se I for um ideal Cohen-Macaulay de dimensão 1 genericamente uma interseção completa, isto é, se I for tal que R/I é Cohen-Macaulay de dimensão 1 e $I_\mathfrak{p}$ pode ser gerado por uma sequência $R_\mathfrak{p}$-regular para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(R/I)$ ou, mais geralmente, se I for um ideal Cohen-Macaulay genericamente uma interseção completa tal que $\ell(I) = \mathrm{ht}(I) + 1$.

Se a condição G_ℓ for satisfeita, a desigualdade $\mathrm{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para $1 \leq j \leq \ell - g$ é satisfeita se I é perfeito com $\mathrm{ht}(I) = 2$, isto é, $\mathrm{grade}(R/I) = \mathrm{projdim}(R/I)$ ou se I é um ideal Gorenstein perfeito com $\mathrm{ht}(I) = 3$.

Os Capítulos 1 e 2 desta dissertação constituem as preliminares básicas deste trabalho. No Capítulo 1, em particular, são apresentados resultados básicos não-canônicos de álgebra comutativa. Como este trabalho envolve tópicos avançados da álgebra comutativa, é admitido que o leitor já tenha um conhecimento mínimo da área. Portanto, conceitos e resultados clássicos que são vistos em cursos regulares de álgebra abstrata, comutativa e homológica podem não ser mencionados neste capítulo. Caso o leitor deseje referências para tais tópicos, são sugeridas as literaturas: [1] para álgebra abstrata; [3] para álgebra comutativa e [4] para álgebra homológica. Um fato importante que merece ser ressaltado é que todos anéis mencionados neste trabalho, a menos quando forem especificados, são comutativos e possuem unidade.

O Capítulo 3 foi todo construído para culminar nos resultados da teoria de

S_2-ficação para anéis Noetherianos locais equidimensionais e unmixed que serão utilizados no Lema 8.1.

O Capítulo 4 encerra o ciclo de preliminares gerais deste trabalho, cobrindo tópicos mais modernos da álgebra comutativa como condições G_s, depth deslizante, interseções residuais e condições Artin-Nagata.

O Capítulo 5 apresenta o conceito de redução e core de um ideal, bem como apresenta resultados clássicos da teoria de reduções de ideal em anéis Noetherianos e/ou locais. Estes resultados são exaustivamente utilizados nos capítulos posteriores.

O Capítulo 6 consiste em duas proposições técnicas que serão importantes na demonstração do Teorema principal, o Teorema 8.4.

O Capítulo 7 está todo voltado para provar o Teorema 7.5 que consiste na computação de core de ideais satisfazendo hipóteses distintas das do teorema principal. Neste resultado, algumas condições são enfraquecidas. Por exemplo, é pedido apenas que o anel seja Cohen-Macaulay local com corpo residual infinito. Em contrapartida, exige-se que o ideal seja equimúltiplo com espalhamento analítico igual 1. Este teorema será fundamental para o Teorema 8.3, onde se fará um quociente e o novo ideal atenderá às condições deste teorema.

Por fim, o Capítulo 8 inicia-se com um lema extremamente técnico que antecederá o Teorema 8.3 que, embora não seja o Teorema principal deste trabalho, este Teorema constitui a parte mais delicada da demonstração do Teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho, entende-se um anel R como anel comutativo e com unidade, salvo apenas quando explicitado no texto. Este capítulo contém resultados para consulta e, portanto, o leitor pode pulá-lo e consultar apenas quando sentir necessário.

1.1 Sistemas minimais de geradores

Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado. É bem conhecido que todo sistema de geradores de M pode ser reduzido a um sistema minimal de geradores. Todavia, não é bem verdade que, dados dois sistemas minimais de geradores de M, tais sistemas têm a mesma cardinalidade.

Exemplo 1.1. *Considere o grupo abeliano* $(\mathbb{Z}, +)$. *Os conjuntos* $\{1\}$ *e* $\{2, 3\}$ *constituem dois sistemas minimais de geradores de* $\mathbb{Z}$ *com cardinalidades distintas.*

O próximo resultado diz que, se o anel $(R, \mathfrak{m}, k)$ for local, todo sistema minimal de geradores de um R-módulo finitamente gerado M possui a mesma cardinalidade, a saber a dimensão do k-espaço vetorial $M/\mathfrak{m}M$ e esta cardinalidade será denotada por $\mu(M)$.

Proposição 1.2. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e M um R-módulo finitamente gerado. Denote $\overline{M} := M/\mathfrak{m}M$ e seja $n = \dim_k(\overline{M})$. Nestas condições*

1. *Se $\{\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}\}$ é uma base de $\overline{M}$, então $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é um sistema minimal de geradores de M;*

2. *Todo sistema minimal de geradores de M pode ser obtido desta maneira e, portanto, possui n geradores.*

Demonstração: Consultar o Teorema 2.3 de [3].

Observação 1.3. *O Exemplo 1.1 também mostra que a tese (2) da Proposição 1.1 falha se a hipótese do anel ser local for retirada.*

1.2 Resultados sobre ideais

Esta seção contém definições e resultados que serão úteis da teoria de ideais

Definição 1.4. *Sejam R um anel e M, N R-módulos. O cólon de N com M, denotado por $N :_R M$, é o ideal*

$$N :_R M = \{x \in R \ ; \ xM \subseteq N\}.$$

Quando $N = 0$, o cólon $0 :_R M$ é chamado de anulador de M e pode ser denotado por $\operatorname{Ann}(M)$.

Proposição 1.5. *Sejam R um anel, I, J ideais de R e $n \in \mathbb{N}$. Se $(J, J^n :_R I) = R$, então $J^n :_R I = R$. Em particular, $I \subseteq J^n$.*

Demonstração: Com efeito, tomando a n-ésima potência da identidade $(J, J^n :_R I) = R$, obtém-se

$$J^n + J^{n-1}(J^n :_R I) + \cdots + J(J^n :_R I)^{n-1} + (J^n :_R I)^n = R.$$

Uma vez que $J^k(J^n :_R I)^{n-k} \subseteq J^n :_R I$ para todo $0 \leq k \leq n$, segue que $J^n :_R I = R$. $\square$

Definição 1.6. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Denomina-se variedade determinada por I, denotando por $\mathrm{V}(I)$, o conjunto dos ideais primos $\mathfrak{p}$ de R tais que $I \subseteq \mathfrak{p}$. Denota-se por $\mathrm{MinV}(I)$ o conjunto dos ideais primos $\mathfrak{p} \in V(I)$ que são minimais em $(\mathrm{V}(I), \leq)$, onde a relação de ordem $\leq$ é definida de forma que*

$$\mathfrak{p} \leq \mathfrak{q} \iff \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}.$$

Observação 1.7. *Denotando por $\mathrm{Spec}(R)$ o conjunto dos ideais primos de R, é possível provar que o conjunto $\{\mathrm{V}(I) \; ; \; I \text{ ideal de } R\}$ é uma topologia em $\mathrm{Spec}(R)$ constituída por fechados.*

Definição 1.8. *Seja R um anel*

(i) Dado $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R, define-se a altura de $\mathfrak{p}$, denotando-a por $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, por

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \sup\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \; ; \; \exists\, \mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n \in \mathrm{Spec}(R) \textit{ tais que } \mathfrak{p}_n \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}\}.$$

(ii) Dado I um ideal de R, define-se a altura de I, denotando-a por $\mathrm{ht}(I)$, por

$$\mathrm{ht}(I) = \inf\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \; ; \; \mathfrak{p} \in V(I)\}.$$

Proposição 1.9. *Sejam R um anel e I, J ideais de R. Se $IJ \subseteq \mathfrak{p}$, com $\mathfrak{p}$ ideal primo de R, então $I \subseteq \mathfrak{p}$ ou $J \subseteq \mathfrak{p}$. Além disso, tem-se que $\mathrm{ht}(IJ) = \inf\{\mathrm{ht}(I), \mathrm{ht}(J)\}$.*

Demonstração: Com efeito, pela contrapositiva, se $I \nsubseteq \mathfrak{p}$ e $J \nsubseteq \mathfrak{p}$, sejam $x \in I \setminus \mathfrak{p}$ e $y \in J \setminus \mathfrak{p}$. Segue da primaridade de $\mathfrak{p}$ que $xy \in IJ \setminus \mathfrak{p}$, logo $IJ \nsubseteq \mathfrak{p}$. Com este fato, é possível observar que $\mathrm{V}(IJ) = \mathrm{V}(I) \cup \mathrm{V}(J)$, portanto

$$\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \; ; \; \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(IJ)\} = \{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \; ; \; \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\} \cup \{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \; ; \; \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(J)\}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\mathrm{ht}(IJ) = \inf\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ ; \ \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(IJ)\} &= \inf\{\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ ; \ \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\} \cup \{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ ; \ \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(J)\}\} \\ &= \inf\{\mathrm{ht}(I), \mathrm{ht}(J)\}.\end{aligned}$$

$\square$

Observação 1.10. *A Proposição 1.9 pode ser generalizada para qualquer família finita de ideais de R, e a prova dá-se por indução no número de ideais.*

Proposição 1.11. *Sejam R um anel e I, J ideais de R. Se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $JI^n = I^{n+1}$, então $\mathrm{V}(J :_R I) \subseteq \mathrm{V}(I)$.*

Demonstração: De fato, seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo contendo $J :_R I$. Como $I^{n+1} = JI^n \subseteq J \subseteq J :_R I$, então $I^{n+1} \subseteq \mathfrak{p}$. Da primalidade de $\mathfrak{p}$, segue que $\mathfrak{p} \in V(I)$. $\square$

Definição 1.12. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Um elemento $x \in R$ é dito ser M-regular se o mapa*

$$\begin{aligned}\cdot x : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto xm\end{aligned}$$

for injetivo.

Proposição 1.13. *Sejam R um anel, $x \in R$ um elemento R-regular e I, J ideais de R. Neste caso, tem-se $I :_R J = xI :_R xJ$.*

Demonstração: Com efeito, se $z \in I :_R J$, então $zJ \subseteq I$, logo $z(xJ) \subseteq xI$, daí $z \in xI :_R xJ$ e, portanto $I :_R J \subseteq xI :_R xJ$. Reciprocamente, se $z \in xI :_R xJ$, então $z(xJ) \subseteq xI$. Como x é um elemento R-regular, segue que $zJ \subseteq I$, daí $z \in I :_R J$ e, portanto, $xI :_R xJ \subseteq I :_R J$. $\square$

Proposição 1.14. *Sejam R um anel e I, J ideais de R. Neste caso, tem-se o isomorfismo de R-álgebras*

$$\frac{R}{I} \otimes_R \frac{R}{J} \cong \frac{R}{I+J}.$$

Em particular, se $I \subseteq J$, então $R/I \otimes_R R/J \cong R/J$.

Demonstração: Com efeito, defina

$$\phi : R/I \times R/J \longrightarrow R/(I+J)$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) \longmapsto \overline{xy}.$$

Note que ϕ é um mapa bem-definido e R-bilinear, portanto existe um homomorfismo de R-álgebras

$$\psi : R/I \otimes_R R/J \longrightarrow R/(I+J)$$

$$\overline{x} \otimes_R \overline{y} \longmapsto \overline{xy}.$$

Reciprocamente, defina

$$\sigma : R/(I+J) \longrightarrow R/I \otimes R/J$$

$$\overline{x} \otimes_R \longmapsto \overline{x} \otimes_R \overline{1}.$$

Observe que σ é um homomorfismo de R-álgebras bem-definido. Uma vez que $\sigma \circ \psi = 1_{R/I \otimes_R R/J}$ e $\psi \circ \sigma = 1_{R/(I+J)}$, segue que $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J)$. $\square$

Proposição 1.15. *Sejam R um anel e I, J, K ideais de R, então $I \cap (J+K) \supseteq I \cap J + I \cap K$. Se, em particular, $J \subseteq I$ ou $K \subseteq I$, então $I \cap (J+K) = I \cap J + I \cap K$.*

Demonstração: Trivial. $\square$

Proposição 1.16 (Teorema do ideal principal de Krull)**.** *Sejam R um anel Noetheriano e $\mathfrak{p}$ um ideal primo com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = r$. Se $a_1, \ldots, a_s \in \mathfrak{p}$, então $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a_1, \ldots, a_s)) \geq r - s$.*

Demonstração: Consultar o Teorema 13.6 de [3]. □

Proposição 1.17. *Sejam R um anel e I, K ideais de R. Dada uma família $\{J_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de ideais de R. Se $K \subseteq J_\lambda :_R I$ para todo $\lambda \in L$, então*

$$K \subseteq \left(\bigcap_{\lambda \in L} J_\lambda \right) :_R I.$$

Demonstração: Trivial. □

É um fato bem conhecido que todo anel admite pelo menos um ideal maximal. A prova deste fato consiste na aplicação do Lema de Zorn na família de todos os ideais próprios de R.

Definição 1.18. *Seja R um anel. O radical de Jacobson de R, denotado por* $\mathrm{Rad}(R)$*, é a interseção de todos os ideais maximais de R.*

Proposição 1.19 (Teorema da interseção de Krull)**.** *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. Se $I \subseteq \mathrm{Rad}(R)$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$. Em particular, se R for um anel Noetheriano local, então, para todo ideal próprio I, tem-se que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$.*

Demonstração: Consultar o Teorema 8.10 de [3]. □

Proposição 1.20. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local.*

(i) Se $\mathrm{char}(k) = 0$, então $n1_R := \underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{n \text{ vezes}}$ é unidade em R para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) Se $\mathrm{char}(k) = p$, então $n1_R$ é unidade em R para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que n é múltiplo de p.

Demonstração: (i) Considere $n \in \mathbb{N}$ e seja $\overline{n1_R}$ a imagem de $n1_R$ em k. Como $\mathrm{char}(k) = 0$, tem-se que $\overline{n1_R} \neq 0$, assim $n1_R \notin \mathfrak{m}$ e, portanto, $n1_R$ é unidade em R.

(ii) Similarmente, se p não divide n, pelo algoritmo da divisão, existem $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $r \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ tais que $n = pq + r$. Assim

$$n1_R = pq1_R + r1_R = (p1_R)(q1_R) + r1_R,$$

daí, em k, tem-se

$$\overline{n1_R} = \overline{(p1_R)}\,\overline{(q1_R)} + \overline{r1_R} = \overline{r1_R} \neq 0,$$

Portanto, $n1_R$ é unidade em R. $\square$

Proposição 1.21 (Teorema 5 de [31]). *Sejam R um anel, I um ideal de R e $n \in \mathbb{N}$. Se $n!1_R$ é invertível em R, então $I^n = \sum_{y \in I}(y^n)$.*

Demonstração: Com efeito, observe que trivialmente vale $\sum_{y \in I}(y^n) \subseteq I^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, assim é suficiente mostrar que

$$I^n \subseteq \sum_{y \in I}(y^n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $n!1_R$ é unidade em R. Defina o polinômio $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ tal que

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_k}^{n} (-1_R)^{n-k} (X_{i_1} + \cdots + X_{i_k})^n \right).$$

Se for mostrado que $f(X_1, \ldots, X_n) = (n!1_R)X_1 \cdots X_n$, então a prova está concluída, pois, se $z = a_1 \cdots a_n \in I^n$, então

$$z = (n!1_R)^{-1} f(a_1, \ldots, a_n) \in \sum_{y \in I}(y^n).$$

Para mostrar que f possui a forma mencionada acima, note primeiramente que f é um polinômio homogêneo de grau n. Observe também que $f(0, X_2, \ldots, X_n) =$

0. Tal fato é válido, pois, após a organização de $f(X_1, \ldots, X_n)$ na seguinte forma

$$\left((-1_R)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k)^n + (-1_R)^{n-2}\sum_{k=2}^{n}(X_1+X_k)^n\right)+$$
$$\left((-1_R)^{n-2}\sum_{2\le i_1<i_2}^{n}(X_{i_1}+X_{i_2})^n + (-1_R)^{n-3}\sum_{2\le i_1<i_2}^{n}(X_1+X_{i_1}+X_{i_2})^n\right)+\cdots+$$
$$\left((-1_R)\sum_{2\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}}^{n}(X_{i_1}+\cdots+X_{i_n})^n + (X_1+\cdots+X_n)^n\right),$$

a substituição X_1 por 0, resulta em $f(0, X_2, \ldots X_n) = 0$ e, portanto, X_1 divide f. Por simetria, também se conclui que $f(X_1, \ldots, X_{i-1}, 0, X_{i+1}, \ldots, X_n) = 0$ e, portanto X_i divide f para cada $1 \le i \le n$. Como f é um polinômio homogêneo de grau n, existe $a \in R$ tal que $f(X_1, \ldots, X_n) = aX_1 \ldots X_n$. Finalmente como

$$a = f(1_R, 1_R, \ldots, 1_R) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_k}^{n}(-1_R)^{n-k}(k1_R)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1_R)^{n-k}(k1_R)^n$$
$$= (n1_R)!,$$

conclui-se que f possui a forma mencionada anteriormente, o que conclui a demonstração. □

Corolário 1.22. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e I um ideal de R.*

(i) Se $\operatorname{char}(k) = 0$, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se $I^n = \sum_{y\in I}(y^n)$;

(ii) Se $\operatorname{char}(k) = p$, então para qualquer $n \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, tem-se $I^n = \sum_{y\in I}(y^n)$.

Demonstração: Segue diretamente das Proposições 1.20 e 1.21. □

Encerra-se essa seção com a definição de um objeto que será utilizado em diferentes partes dessa dissertação.

Definição 1.23. *Sejam R, S anéis e $\phi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Dado I um ideal de R e J um ideal de S, tem-se* *(i) A extensão de I com respeito a ϕ, denotado por I^e, é o ideal de S gerado por $\phi(I)$;*

(ii) A contração de J com respeito a ϕ, denotado por J^c, é a pré-imagem de J por ϕ, isto é, $J^c = \phi^{-1}(J)$.

Observação 1.24. *Ainda com a notação da definição anterior, denota-se o ideal $(I^e)^c$ simplesmente por I^{ec}. Similarmente, denota-se o ideal $(J^c)^e$ por J^{ce}.*

1.3 Um pouco de álgebra e dimensão homológica

Nesta seção, serão definidos alguns conceitos da álgebra homológica e as dimensões projetiva e injetiva de R-módulos.

1.3.1 Complexos e homologia

Um dos objetos mais importantes da álgebra homológica é complexo de R-módulos ou, mais geralmente, de objetos de uma categoria abeliana.

Definição 1.25. *Um complexo na categoria dos R-módulos é uma sequência de R-módulos $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e homomorfismos $(d_{n+1} : C_{n+1} \longrightarrow C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, chamados diferenciais*

$$(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) = \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

tal que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Note que a condição $d_n \circ d_{n+1} = 0$ significa que $\mathrm{Im}(d_{n+1}) \subseteq \ker(d_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 1.26. *Sejam $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ e $(\mathbf{C}'_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de R-módulos. Um morfismo de $f : (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet, d'_\bullet)$ é uma família de homomorfismo de R-módulos*

$(f_n : C_n \longrightarrow C'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observe que a comutatividade do diagrama significa que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se que $f_{n-1} \circ d_n = f'_n \circ f_n$. Definindo, de modo natural, a composição de morfismos de complexos, pode-se mostrar que os complexos de R-módulos juntamente com os morfismos formam uma categoria denotada por $\mathbf{Comp}(\mathbf{Mod}_R)$.

Dado um complexo de R-módulos

$$(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) = \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

como se tem que $\mathrm{Im}(d_{n-1}) \subseteq \ker(d_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, pode-se definir a n-ésima homologia de $\mathbf{C}_\bullet$ por

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet) = \frac{\ker(d_n)}{\mathrm{Im}(d_{n+1})}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Mais ainda, dado um morfismo $f : (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, d'_\bullet)$ de complexos com $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, a n-ésima homologia induz um homomorfismo de R-módulos

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(\mathbf{C}_\bullet) &\longrightarrow H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \\ \overline{x} &\longmapsto \overline{f_n(x)}. \end{aligned}$$

Com uma rápida checagem, conclui-se que a n-ésima homologia tem natureza funtorial, isto é, existe um funtor covariante $H_n : \mathbf{Comp}(\mathbf{Mod}_R) \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ tal que, para quaisquer complexos $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ e $(\mathbf{C'}_\bullet, d'_\bullet)$ e morfismo de complexo $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : (\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (\mathbf{C'}_\bullet, d'_\bullet)$, tem-se

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet) = \frac{\ker(d_n)}{\mathrm{Im}(d_{n+1})} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} H_n(f) : H_n(\mathbf{C}_\bullet) &\longrightarrow H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \\ \overline{x} &\longmapsto \overline{f_n(x)}. \end{aligned}$$

Definição 1.27. *Um complexo de R-módulos $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ é dito exato em $n \in \mathbb{Z}$ se $H_n(\mathbf{C}_\bullet) = 0$. Mais geralmente, $\mathbf{C}_\bullet$ é dito exato, ou uma sequência exata, se $H_n(\mathbf{C}_\bullet) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Portanto, intuitivamente, a n-homologia de um complexo mensura o quão distante da exatidão o mesmo se encontra na dada posição. Um tipo especial de complexo $(\mathbf{C}_\bullet, d_\bullet)$ é quando $C_n = 0$ para todo $n > 0$. Neste caso, o complexo apresenta-se da seguinte forma

$$0 \longrightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} C_{-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{-n} \xrightarrow{d_{-n}} C_{-n-1} \longrightarrow \cdots$$

Neste caso, usualmente se costuma trocar os sinais dos índices e os colocar sobrescritos, obtendo assim

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Quando feita é mudança, o complexo modificado passa a ser denominado cocomplexo e denotado por $(\mathbf{C}^\bullet, d^\bullet)$. A n-ésima homologia, agora definida como

$$H^n(\mathbf{C}^\bullet) := \frac{\ker(d^n)}{\mathrm{Im}(d^{n-1})}$$

passa a ser denominada n-ésima cohomologia de $\mathbf{C}^\bullet$.

1.3.2 Módulos projetivos

Nesta subseção serão definidos os conceitos de R-módulos projetivos, bem como resolução projetiva e dimensão projetiva.

Definição 1.28. *Sejam R um anel e P um R-módulo. P é dito projetivo se dados R-módulos M, N, um homomorfismo $\tau : M \longrightarrow N$ sobrejetivo e um homomorfismo $\alpha : P \longrightarrow N$, existe um homomorfismo $\beta : P \longrightarrow M$ tal que $\alpha = \tau \circ \beta$, isto é, o* *seguinte diagrama comuta.*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ M \arrow[r, two heads, "\tau"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.29. *Todo R-módulo livre é projetivo. De fato, seja $P = \bigoplus_{\lambda \in L} R$ um R-módulo livre e considere $\{e_\lambda \ ; \ \lambda \in L\}$ a base canônica de P. Dado M, N R-módulos, $\tau : M \longrightarrow N$ um homomorfismo sobrejetor e $\alpha : P \longrightarrow N$ um homomorfismo de R-módulo. Como $\tau^{-1}(\alpha(e_\lambda)) \neq \emptyset$ para todo $\lambda \in L$, seja $y_\lambda \in \tau^{-1}(\alpha(e_\lambda))$ e defina um homomorfismo de R-módulos*

$$\beta : \bigoplus_{\lambda \in L} R \longrightarrow M$$

$$e_\lambda \longmapsto y_\lambda$$

Note que $(\tau \circ \beta)(e_\lambda) = \tau(y_\lambda) = \alpha(e_\lambda)$ para todo $\lambda \in L$, logo $\tau \circ \beta = \alpha$, assim P é um R-módulo projetivo.

A próxima Proposição diz que, para qualquer R-módulo M, sempre existe um R-módulo projetivo P e um homomorfismo sobrejetor $\phi : P \longrightarrow M$. Este fato permite dizer que a categoria dos R-módulos é uma categoria com bastante objetos projetivos.

Proposição 1.30. *Seja R um anel. Dado um R-módulo M, existe um R-módulo projetivo P e um homomorfismo sobrejetivo de R-módulos $\phi : P \longrightarrow M$.*

Demonstração: De fato, considere $\{m_\lambda \ ; \ \lambda \in L\}$ um sistema de geradores de M. Usando a notação do Exemplo 1.29, o homomorfismo de R-módulos

$$\phi : \bigoplus_{\lambda \in L} R \longrightarrow M$$

$$e_\lambda \longmapsto m_\lambda$$

é um homomorfismo sobrejetor de R-módulos. $\square$

Tendo em vista a Proposição 1.30, dado um R-módulo M, é possível criar uma sequência longa exata de R-módulos, cujo primeiro módulo é M e os demais são R-módulos projetivos, o que motiva a seguinte definição.

Definição 1.31. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Uma resolução projetiva de M é uma sequência exata*

$$\mathbf{P}_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

onde o R-módulo P_i é um R-módulo projetivo para cada $i \geq 0$. Além disso, se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $P_m = 0$ para todo $m > n$, diz-se que esta resolução possui comprimento n. Se tal n não existir, diz-se que esta resolução possui comprimento infinito.

Uma vez que, para cada R-módulo M, existe uma resolução projetiva para M, é possível definir um tipo de dimensão para M em termos de R-módulos projetivos, como será visto na próxima definição.

Definição 1.32. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Define-se a dimensão projetiva de M, denotada por* $\operatorname{projdim}(M)$, *por*

$$\operatorname{projdim}(M) = \inf\{n \in \mathbb{N}; \textit{Existe uma resolução projetiva de } M \textit{ de comprimento } n\}.$$

Se todas resoluções projetivas de M possuírem comprimento infinito, diz-se que $\operatorname{projdim}(M) = \infty$.

1.3.3 Módulos injetivos

Nesta subseção serão definidos os conceitos de R-módulos injetivos, bem como de resolução injetiva e de dimensão injetiva.

Definição 1.33. *Sejam R um anel e E um R-módulo. E é dito injetivo se, dados R-módulos M, N, um homomorfismo $\tau : M \longrightarrow N$ injetor e um homomorfismo*

$\alpha : M \longrightarrow E$, existe um homomorfismo $\beta : N \longrightarrow E$ tal que $\alpha = \beta \circ \tau$, isto é, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\tau"] & N \arrow[ul, dotted, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

A próxima Proposição diz que, para qualquer R-módulo M, sempre é possível injetá-lo num R-módulo injetivo. Este fato permite dizer que a categoria dos R-módulos é uma categoria com bastante objetos injetivos.

Proposição 1.34. *Seja R um anel. Dado um R-módulo M, existe um R-módulo injetivo E e um homomorfismo injetivo de R-módulos $\phi : M \longrightarrow E$.*

Demonstração: Consultar o Teorema 3.38 de [4]. $\square$

Tendo em vista a Proposição 1.34, dado um R-módulo M, é possível criar uma sequência longa exata de R-módulos, cujo primeiro módulo é M e os demais são R-módulos injetivos, o que motiva a seguinte definição

Definição 1.35. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Uma resolução injetiva de M é uma sequência exata*

$$\mathbf{E}^{\bullet}: \quad 0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

onde o R-módulo E^i é um R-módulo injetivo para cada $i \geq 0$. Além disso, se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $E^m = 0$ para todo $m > n$, diz-se que esta resolução possui comprimento n. Se tal n não existir, diz-se que esta resolução possui comprimento infinito.

Uma vez que, para cada R-módulo M, existe uma resolução injetiva para M, é possível definir um tipo de dimensão para M em termos de R-módulos injetivos, como será visto na próxima definição.

Definição 1.36. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Define-se a dimensão injetiva de M, denotada por* $\operatorname{injdim}(M)$*, por*

$\operatorname{injdim}(M) = \inf\{n \in \mathbb{N};$ *Existe uma resolução injetiva de M de comprimento n*$\}$.

Se todas resoluções injetivas de M possuírem comprimento infinito, diz-se que $\operatorname{injdim}(M) = \infty$.

1.3.4 Funtores covariantes derivados à direita

O objetivo desta subseção é definir a família de funtores derivados à direita induzida por um dado funtor $T : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ covariante aditivo. Estes funtores derivados são extremamente importantes e úteis na álgebra homológica e na álgebra comutativa e serão extensivamente utilizados nos cálculos de cohomologia local, que será definido no Capítulo 3.

Considere M um R-módulo e $T : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$ um funtor covariante aditivo. Tome

$$\mathbf{E}^\bullet : \ 0 \longrightarrow M \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

uma resolução injetiva de M e, eliminando o R-módulo M desta resolução, obtemos o co-complexo

$$\mathbf{E}^\bullet_M : \ 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

Aplicando o funtor T ao co-complexo $\mathbf{E}^\bullet_M$, obtém-se o co-complexo

$$T(\mathbf{E}^\bullet_M) : \ 0 \longrightarrow T(E^0) \xrightarrow{T(d^0)} T(E^1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow T(E^n) \xrightarrow{T(d^n)} T(E^{n+1}) \longrightarrow \cdots$$

Assim se define o n-ésimo funtor derivado à direita de T aplicado em M, denotando-o por $\mathcal{R}^n T(M)$, o R-módulo

$$\mathcal{R}^n T(M) = H^n(T(\mathbf{E}^\bullet_M)).$$

Pode-se mostrar que $\mathcal{R}^nT(M)$ independe da resolução injetiva tomada para M e, mais ainda, devido à Proposição a seguir, pode-se mostrar que, de fato, objeto que está sendo definido tem natureza funtorial.

Proposição 1.37 (Teorema da comparação)**.** *Sejam M, M' R-módulos e $f : M' \longrightarrow M$ um homomorfismo de R-módulos. Considere o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\eta"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & E^2 \arrow[r] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[u, "f"] & X^0 \arrow[r, "d'^0"] & X^1 \arrow[r, "d'^1"] & X^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Se a linha inferior é uma sequência exata e, para cada $n \in \mathbb{Z}$, o R-módulo E^n é injetivo, então existem uma família $(\hat{f}_n : X^n \longrightarrow E^n)_{n\geq 0}$ de homomorfismos de R-módulos que faz o diagrama abaixo comutar para todo $n \geq 0$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\eta"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & E^2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r, "d^n"] & E^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[u, "f"] & X^0 \arrow[r, "d'^0"] \arrow[u, "\hat{f}_0"] & X^1 \arrow[r, "d'^1"] \arrow[u, "\hat{f}_1"] & X^2 \arrow[r] \arrow[u, "\hat{f}_2"] & \cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d'^n"] \arrow[u, "\hat{f}_n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[u, "\hat{f}_{n+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Demonstração: Consultar o Teorema 6.16 de [4]. □

Com esta Proposição em mente, sejam M, M' R-módulos e $f : M' \longrightarrow M$ um homomorfismo de R-módulos. Considere

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\eta"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & E^2 \arrow[r] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[u, "f"] & E'^0 \arrow[r, "d'^0"] & E'^1 \arrow[r, "d'^1"] & E'^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

um diagrama tal que a linha superior é uma resolução injetiva de M e a linha inferior é uma resolução injetiva de M'. Utilizando o Teorema da comparação, existem uma família $(f_n : E'^n \longrightarrow E^n)_{n\geq 0}$ de homomorfismo de R-módulos que faz o seguinte diagrama comutar.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\eta"] & E^0 \arrow[r, "d^0"] & E^1 \arrow[r, "d^1"] & E^2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E^n \arrow[r, "d^n"] & E^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\eta'"] \arrow[u, "f"] & E'^0 \arrow[r, "d'^0"] \arrow[u, "f_0"] & E'^1 \arrow[r, "d'^1"] \arrow[u, "f_1"] & E'^2 \arrow[r] \arrow[u, "f_2"] & \cdots \arrow[r] & E'^n \arrow[r, "d'^n"] \arrow[u, "f_n"] & E'^{n+1} \arrow[r] \arrow[u, "f_{n+1}"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Dado um funtor covariante aditivo $T : \mathbf{Mod}_R \longrightarrow \mathbf{Mod}_R$, aplicando-o no diagrama anterior e eliminando o mapa $T(f) : T(M') \longrightarrow T(M)$, obtém-se o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(E^0) \arrow[r, "T(d^0)"] & T(E^1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & T(E^n) \arrow[r, "T(d^n)"] & T(E^{n+1}) \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & T(E'^0) \arrow[r, "T(d'^0)"] \arrow[u, "T(f_0)"] & T(E'^1) \arrow[r] \arrow[u, "T(f_1)"] & \cdots \arrow[r] & T(E'^n) \arrow[r, "T(d'^n)"] \arrow[u, "T(f_n)"] & T(E'^{n+1}) \arrow[r] \arrow[u, "T(f_{n+1})"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Note que $(T(f_n))_{n\geq 0}$ é um morfismo de complexos, assim, aplicando o funtor n-ésima homologia H_n a este morfismo, obtém-se o morfismo de R-módulos

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^n(f) : \mathcal{R}^nT(M') &\longrightarrow \mathcal{R}^nT(M) \\
\overline{x} &\longmapsto \overline{T(f_n)(x)}.
\end{aligned}$$

Com uma rápida checagem, conclui-se que o n-ésimo funtor derivado à direita, de fato, tem natureza funtorial.

Exemplo 1.38. *Dado um R-módulo M, o n-ésimo funtor derivado do funtor covariante aditivo* $\mathrm{Hom}_R(M, \_) : \boldsymbol{Mod}_R \longrightarrow \boldsymbol{Mod}_R$ *é denotado por* $\mathrm{Ext}^n_R(M, \_) : \boldsymbol{Mod}_R \longrightarrow \boldsymbol{Mod}_R$*, e é extremamente recorrente na álgebra comutativa.*

1.4 Primos associados e Teorema da Decomposição Primária

Definição 1.39. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Um ideal primo $\mathfrak{p}$ é dito um primo associado de M se $\mathfrak{p}$ é o anulador de um elemento de M. Denota-se por* $\mathrm{Ass}(M)$ *o conjunto dos primos associados de M.*

Equivalentemente, um ideal primo $\mathfrak{p}$ é um primo associado de M se e somente se existir um homomorfismo de R-módulos injetivo $\phi : R/\mathfrak{p} \longrightarrow M$. Neste caso, $\mathfrak{p} = 0 :_R \phi(\overline{1})$.

Proposição 1.40. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo não-nulo. Desta forma, tem-se*

(i) $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$*;*

(ii) O conjunto dos divisores de zeros de M é a união dos primos associados de M.

Demonstração: Consultar o Teorema 6.1 de [3]. □

Proposição 1.41. *Sejam R um anel e $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de R-módulos. Então* $\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$*.*

Demonstração: Consultar o Teorema 6.4 de [3]. □

Proposição 1.42. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Desta forma, tem-se*

(i) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$*;*

(ii) O conjunto dos primos minimais associados de M, $\mathrm{MinAss}(M)$*, coincide com o conjunto dos primos minimais do suporte de M,* $\mathrm{MinSupp}(M)$*.*

Demonstração: Consultar o Teorema 6.5 de [3]. □

Proposição 1.43. *Sejam R um anel Noetheriano e I, J ideais de R. Se para todo* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$*, tem-se que $J_{\mathfrak{p}} \subseteq I_{\mathfrak{p}}$, então $J \subseteq I$.*

Demonstração: Suponha que J não está contido em I, então, $(J+I)/I$ é um R-módulo não-nulo. Uma vez que $(J+I)/I \subseteq R/I$, segue das Proposições 1.40 e 1.41 que $\emptyset \neq \mathrm{Ass}((J+I)/I) \subseteq \mathrm{Ass}(R/I)$. Assim, dado $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}((J+I)/I) \subseteq \mathrm{Supp}((J+I)/I)$, tem-se que $(J_{\mathfrak{p}} + I_{\mathfrak{p}})/I_{\mathfrak{p}} \neq 0$, isto é $J_{\mathfrak{p}} \not\subseteq I_{\mathfrak{p}}$, portanto, existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$ tal que $J_{\mathfrak{p}} \not\subseteq I_{\mathfrak{p}}$. □

Definição 1.44. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Um ideal primo $\mathfrak{p}$ é chamado primo associado do ideal I se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I)$. Denota-se por $\operatorname{ass}(I)$ o conjunto dos primos associados do ideal I.*

Proposição 1.45. *Sejam R um anel e I, J ideais de R com I finitamente gerado. Desta forma, tem-se que $\operatorname{ass}(J :_R I) \subseteq \operatorname{ass}(J)$.*

Demonstração: Se $I = (r_1, \ldots, r_n)$, considere o mapa

$$\phi : R \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R/J$$

$$\mathbf{x} \longmapsto (\overline{r_1 x}, \ldots, \overline{r_n x})$$

Observe que $\ker(\phi) = J :_R I$. Assim ϕ induz um homomorfismo injetivo $\overline{\phi} : R/(J :_R I) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R/J$. Logo, segue da Proposição 1.41 que

$$\operatorname{ass}(J :_R I) = \operatorname{Ass}(R/(J :_R I)) \subseteq \operatorname{Ass}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} R/J\right) = \operatorname{Ass}(R/J) = \operatorname{ass}(J).$$

□

Proposição 1.46. *Sejam R um anel Noetheriano e $x \in R$ um elemento R-regular não-invertível. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, os ideais (x) e (x^n) possuem os mesmos primos associados.*

Demonstração: Como x não é invertível, para cada $n \in \mathbb{N}$ o ideal (x^n) é um ideal próprio de R, logo $R/(x^n)$ é não-nulo e, uma vez que R um anel Noetheriano, o ideal (x^n) possui primos associados. Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{ass}(x)$, então $\mathfrak{p} = 0 :_R \overline{z}$ para algum $\overline{z} \in R/(x)$. Utilizando que x é um não divisor de zero, é fácil provar que $\mathfrak{p} = 0 :_R \overline{x^{n-1}z}$, com $\overline{x^{n-1}z} \in R/(x^n)$, logo $\operatorname{ass}(x) \subseteq \operatorname{ass}(x^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. A fim de provar a outra inclusão, será feito uma indução em n. Para $n = 1$, a inclusão vale trivialmente. Suponha que a inclusão valha para $n - 1$, isto é, $\operatorname{ass}(x^{n-1}) \subseteq \operatorname{ass}(x)$. Utilizando a regularidade de x, é possível construir a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow R/(x^{n-1}) \xrightarrow{x} R/(x^n) \longrightarrow R/(x) \longrightarrow 0.$$

Assim, $\operatorname{ass}(x^n) = \operatorname{Ass}(R/(x^n)) \subseteq \operatorname{Ass}(R/(x^{n-1})) \cup \operatorname{Ass}(R/(x)) \subseteq \operatorname{Ass}(R/(x)) = \operatorname{ass}(x)$. Pelo princípio da indução, conclui-se que $\operatorname{ass}(x^n) \subseteq \operatorname{ass}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $\operatorname{ass}(x^n) = \operatorname{ass}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definição 1.47. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Um submódulo $N \subseteq M$ é dito primário se toda homotetia em M/N é injetiva ou nilpotente, mas não ambos.*

Observação 1.48. *Equivalentemente, um submódulo $N \subseteq M$ será primário se, dados $x \in R$, $m \in M$, tem-se*

$$m \notin N \text{ e } xm \in N \Longrightarrow x^n M \subseteq N \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 1.49. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Um submódulo $N \subseteq M$ é primário se e somente se $\operatorname{Ass}(M/N)$ unitário. Neste caso, $\operatorname{Ass}(M/N) = \{\sqrt{N :_R M}\}$.*

Demonstração: Consultar o Teorema 6.7 de [3]. □

Definição 1.50. *Sejam R um anel, M um R-módulo e N um submódulo de M. Uma decomposição primária de N é uma decomposição $N = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_k$ tal que $N_1, \ldots, N_k$ são submódulos primários de M. Esta decomposição é irredundante se $N \neq N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_k$ para cada $i = 1, \ldots, k$.*

Teorema 1.51 (Teorema da Decomposição Primária)**.** *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se N é um submódulo de M, então N admite uma decomposição primária irredundante. Além disso, se*

$$N = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_k, \text{ com } \operatorname{Ass}(M/N_i) = \mathfrak{p}_i$$

é uma decomposição primária irredundante, então $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k\}$*. Além do mais, se* $\mathfrak{p}_i$ *for minimal em* $\mathrm{Ass}(M/N)$*, então a componente* $\mathfrak{p}_i$*-primária* N_i *sempre aparece na decomposição.*

Demonstração: Consultar o Teorema 6.8 de [3]. $\square$

Exemplo 1.52. *Sejam* k *um corpo e* $R = k[x, y, z]$*. Considere* $I = (x^3, y^2, xyz)$*. Uma possível decomposição primária para* I *é*

$$I = (x^3, y^2, xy) \cap (x^3, y^2, z).$$

Assim, de acordo com o teorema da decomposição primária, os primos associados de I *são* $\mathfrak{p}_1 = \sqrt{(x^3, y^2, xy) :_R R} = \sqrt{(x^3, y^2, xy)} = (x, y)$ *e* $\mathfrak{p}_2 = \sqrt{(x^3, y^2, z) :_R R} = \sqrt{(x^3, y^2, z)} = (x, y, z)$*.*

Definição 1.53. *Um anel Noetheriano* R *é dito unmixed se* $\mathrm{Ass}(R) = \mathrm{MinAss}(R)$*.*

Proposição 1.54. *Seja* R *um anel Noetheriano. Se* $\mathfrak{q}$ *é um ideal primário de* R*, então* $R/\mathfrak{q}$ *é um anel unmixed.*

Demonstração: Com efeito, é claro que $\overline{0}$ é um ideal primário de $R/\mathfrak{q}$, portanto, pela Proposição 1.49, tem-se que $\mathrm{Ass}_{R/\mathfrak{q}}((R/\mathfrak{q})/\overline{0}) = \mathrm{Ass}_{R/\mathfrak{q}}(R/\mathfrak{q}) = \{\sqrt{\overline{0}}\} = \mathrm{MinAss}_{R/\mathfrak{q}}(R/\mathfrak{q})$, de onde segue que $R/\mathfrak{q}$ é unmixed. $\square$

1.5 Anéis e módulos graduados

Definição 1.55. *Um anel* $\mathbb{Z}$*-graduado ou, simplesmente, anel graduado, é um anel* R *junto com uma decomposição*

$$R = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} R_n$$

tal que $(R_n, +)$ *constitui um grupo abeliano para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *e para quaisquer* $n, m \in \mathbb{Z}$ *tem-se que* $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$*.*

Definição 1.56. *Seja R um anel graduado, um R-módulo $\mathbb{Z}$-graduado ou, simplesmente, um R-módulo graduado é um R-módulo M junto com uma decomposição*

$$M = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} M_n$$

tal que $(M_n, +)$ constitui um grupo abeliano para cada $n \in \mathbb{Z}$ e para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$ tem-se que $R_n M_m \subseteq M_{n+m}$.

Observação 1.57. *Observe que, uma vez que M é soma direta, cada elemento de M possui uma representação única como soma $\sum_{i=\infty}^{\infty} f_i$ tal que $f_i \in M_i$ e apenas um número finito desses f_i's são não-nulos. Note também que, como $R_0 R_0 \subseteq R_0$, assim R_0 possui uma estrutura natural de anel.*

Definição 1.58. *Um anel $R = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} R_n$ é dito positivamente graduado se $R_n = 0$ para todo $n < 0$. Neste caso, costuma-se representar R por $\bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$. Similarmente, R é dito negativamente graduado se $R_n = 0$ para todo $n > 0$. Neste caso, costuma-se representar R por $\bigoplus_{n=-\infty}^{0} R_n$. Estas definições são facilmente generalizadas para módulos graduados.*

Definição 1.59. *Dados R um anel graduado e M um R-módulo graduado, um elemento $f \in M$ é dito homogêneo se $f \in M_i$ para algum $i \in \mathbb{Z}$.*

Proposição 1.60. *Dado $R = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} R_n$ um anel graduado, então R é Noetheriano se e somente se R_0 é um anel Noetheriano e $S_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ e $S_2 = \bigoplus_{n=-\infty}^{0} R_n$ forem R_0-álgebras finitamente geradas.*

Demonstração: Consultar o Teorema 1.5.5 de [6]. □

Definição 1.61. *Dados R um anel graduado e M um R-módulo graduado, um submódulo de N de M é dito homogêneo se N admite a graduação induzida da graduação de M, isto é, $N = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} (M_i \cap N)$.*

Note que se N for um submódulo homogêneo de M, o módulo quociente M/N possui uma graduação natural

$$\frac{M}{N} = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \frac{M_i}{M_i \cap N}.$$

Proposição 1.62. *Sejam R um anel graduado e M um R-módulo graduado. Se $\mathfrak{p}$ é um primo associado de M, então $\mathfrak{p}$ é um ideal homogêneo. Além disso, $\mathfrak{p}$ é anulador de um elemento homogêneo de M.*

Demonstração: Consultar o Lema 1.5.6 de [6]. □

Proposição 1.63 (*Homogeneous Prime Avoidance*)**.** *Sejam R um anel graduado e I um ideal homogêneo gerado por elementos de grau positivo. Se $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ são ideais primos de R tais que não contêm I, então existe um elemento homogêneo $x \in I$ tal que $x \notin \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n$.*

Demonstração: Consultar o Lema 1.5.10 de [6]. □

Corolário 1.64. *Sejam R um anel Noetheriano graduado e I um ideal homogêneo gerado por elementos de grau positivo. Se I contém um elemento R-regular, então I contém um elemento R-regular homogêneo.*

Demonstração: Com efeito, como R é um anel Noetheriano, $\mathrm{Ass}(R) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ é um conjunto finito, além disso $I \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Assim, pela Proposição 1.63, existe $x \in I$ homogêneo tal que $x \notin \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n = \mathcal{Z}(R)$. Portanto x é um elemento R-regular homogêneo. □

Definição 1.65. *Seja R um anel graduado. Um ideal homogêneo $\mathfrak{m}$ é dito *maximal se todo ideal homogêneo que contém $\mathfrak{m}$ propriamente é igual a R. O anel R é dito *local se R possuir um único ideal *maximal $\mathfrak{m}$. Neste caso, o anel será denotado por $(R, \mathfrak{m})$. A *dimensão de Krull de R, denotada por ${}^*\dim(R)$, é definida como a altura do ideal $\mathfrak{m}$.*

Exemplo 1.66. *Sejam* $(R, \mathfrak{n})$ *um anel local e* I *um ideal próprio de* R*. O anel* $R[It, t^{-1}] \subseteq R[t, t^{-1}]$ *é um anel *local com ideal *maximal* $\mathfrak{m}$ *dado por*

$$\mathfrak{m} = \cdots \oplus Rt^{-n} \oplus \cdots \oplus Rt^{-2} \oplus Rt^{-1} \oplus \mathfrak{n} \oplus It \oplus I^2t \oplus \cdots \oplus I^nt^n \oplus \cdots$$

Definição 1.67. *Sejam* R *um anel graduado e* $M = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} M_i$*,* $N = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} N_i$ R*-módulos graduados. Um homomorfismo de* R*-módulos* $\phi : M \longrightarrow N$ *é dito homogêneo de grau 0, ou simplesmente, homogêneo se* $\phi(M_i) \subseteq N_i$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$*.*

Dado R um anel graduado, considere $\mathcal{M}_0(R)$ a categoria dos R-módulos graduados, cujos objetos de $\mathcal{M}_0(R)$ são os R-módulos graduados e, para cada par de objetos M, N, o conjunto de morfismos de M em N é constituído exatamente por homomorfismos homogêneos $\phi : M \longrightarrow N$.

Dados M e N R-módulos graduados. Em geral, o conjunto de homomorfismos homogêneos $\phi : M \longrightarrow N$ não constitui um submódulo de $\operatorname{Hom}_R(M, N)$. Assim, para construção de um funtor Ext graduado razoável, é preciso considerar um conjunto maior de mapas.

Definição 1.68. *Sejam* R *um anel graduado e* $M = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} M_i$*,* $N = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} N_i$ R*-módulos graduados. Um homomorfismo de* R*-módulos* $\phi : M \longrightarrow N$ *é dito homogêneo de grau* n *se* $\phi(M_i) \subseteq N_{n+i}$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$*. O conjunto dos homomorfismos* $\phi : M \longrightarrow N$ *homogêneos de grau* n *possui uma estrutura natural de grupo aditivo e é denotado por* $\operatorname{Hom}_n(M, N)$*.*

Como $\bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Hom}_n(M, N)$ constitui um submódulo de $\operatorname{Hom}_R(M, N)$, define-se

$$^* \operatorname{Hom}_R(M, N) = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} \operatorname{Hom}_i(M, N).$$

Pode ser demonstrado que $^* \operatorname{Hom}_R(\_\_, N)$ é um funtor contravariante exato à esquerda em $\mathcal{M}_0(R)$. Assim define-se $^* \operatorname{Ext}_R^i(\_\_, N)$ como o i-ésimo funtor derivado a direita do funtor $^* \operatorname{Hom}_R(\_\_, N)$ em $\mathcal{M}_0(R)$.

Dados M e N R-módulos graduados, não é sempre verdade que ${}^*\operatorname{Hom}_R(M,N) = \operatorname{Hom}_R(M,N)$. Entretanto, se M é um R-módulo finitamente gerado, a igualdade vale.

Proposição 1.69. *Sejam R um anel graduado e M, N R-módulos graduados. Se M é um R-módulo finitamente gerado, então ${}^*\operatorname{Hom}_R(M,N) = \operatorname{Hom}_R(M,N)$.*

Demonstração: Consultar o Teorema 1.2.6 de [12]. □

Exemplo 1.70. *Todo anel R possui uma graduação trivial, na qual $[R]_k = 0$ para todo $k \neq 0$. Sendo assim, considere R equipado com graduação trivial e seja $M = R[x]$. Considere o homomorfismo de R-módulos $\phi : M \longrightarrow M$ tal que $\phi(x^i) = x^{2i}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Observe que $\phi \notin {}^*\operatorname{Hom}_R(M,M)$, o que permite concluir que a hipótese da Proposição anterior é indispensável.*

1.6 Anéis polinomiais

Seja R um anel e considere $\mathfrak{p}$ um primo minimal de R. Observe que $\mathfrak{p}[X_1, \ldots, X_n]$ é um ideal primo de $R[X_1, \ldots, X_n]$. Duas perguntas naturais seriam:

1. $\mathfrak{p}[X_1, \ldots, X_n]$ é um primo minimal de $R[X_1, \ldots, X_n]$?
2. Todo primo minimal de $R[X_1, \ldots, X_n]$ é extensão polinomial de primo minimal de R?

Proposição 1.71. *Dado um anel R, os primos minimais do anel polinomial $R[X_1, \ldots, X_n]$ são exatamente da forma $\mathfrak{p}[X_1, \ldots, X_n]$, onde $\mathfrak{p}$ é um primo minimal de R.*

Demonstração: Considere $\phi : R \longrightarrow R[X_1, \ldots, X_n]$ o mapa de extensão polinomial. Dado $\mathfrak{p}$ um primo minimal de R, tem-se que $\mathfrak{p}[X_1, \ldots, X_n]$ é um ideal primo, pois

$$\frac{R[X_1,\dots,X_n]}{\mathfrak{p}[X_1,\dots,X_n]} \cong \left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)[X_1,\dots,X_n].$$

que é um domínio integral. Seja P um primo minimal de $R[X_1,\dots,X_n]$ contido em $\mathfrak{p}[X_1,\dots,X_n]$. Observe que $P^c \subseteq \mathfrak{p}$ e, portanto, $P^c = \mathfrak{p}$. Assim, $\mathfrak{p}[X_1,\dots,X_n] = P^{ce} \subseteq P$, logo $P = \mathfrak{p}[X_1,\dots,X_n]$ é um primo minimal de $R[X_1,\dots,X_n]$. Assim, a extensão polinomial de um primo minimal de R é um primo minimal de $R[X_1,\dots,X_n]$.

Sejam agora P um primo minimal de $R[X_1,\dots,X_n]$ e $\mathfrak{p}$ um primo minimal de R contido em P^c. Assim $\mathfrak{p}[X_1,\dots,X_n] \subseteq P^{ce} \subseteq P$. Da minimalidade de P, segue que $\mathfrak{p}[X_1,\dots,X_n] = P$. Portanto, todo primo minimal de $R[X_1,\dots,X_n]$ é um extensão polinomial de um primo minimal de R. $\square$

Dado um anel R, sabe-se que a cada polinômio $\phi(X_1,\dots,X_n) \in R[X_1,\dots,X_n]$, pode-se associar uma função $f_\phi : R^n \longrightarrow R$ tal que $f_\phi(r_1,\dots,r_n) = \phi(r_1,\dots,r_n)$. Nota-se que se $\phi(X_1,\dots,X_n)$ for o polinômio nulo, a função associada f_ϕ é identicamente nula. Todavia, a recíproca nem sempre é verdade e tal comportamento está diretamente associado ao anel R em questão.

Proposição 1.72. *Sejam k um corpo e ϕ um polinômio em $k[X_1,\dots,X_n]$. Se k for infinito, então ϕ é nulo se, e somente se, f_ϕ for a função nula.*

Demonstração: Consultar o segundo parágrafo da seção 1.6 de [9].

Observação 1.73. *Se k for um corpo finito, este resultado é falso: considere $k = \mathbb{F}_2$ e $\phi(X) = X^2 + X$.*

Se k for infinito e $\phi(X_1,\dots,X_n) \in k[X_1,\dots,X_n]$ for um polinômio não-nulo, não somente se sabe que a função f_ϕ é não-nula, como também se consegue garantir que existe uma n-upla $(c_1,\dots,c_n) \in k^n$, com $c_i \neq 0$ para todo $i = 1,\dots,n$ tal que $\phi(c_1,\dots,c_n) \neq 0$. Tal resultado, aparentemente ingênuo, ainda será bastante útil neste trabalho.

Proposição 1.74. *Seja k um corpo infinito e $S \subseteq k$ um subconjunto infinito de k. Dado um polinômio não-nulo $\phi(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$, então existe $(c_1, \ldots, c_n) \in S^n$ tal que $\phi(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$.*

Demonstração: A prova será procedida por indução no número de indeterminadas n. Para $n = 1$, se $\phi \in k[X_1]$ é um polinômio não-nulo, então ϕ só possui um número finito de zeros, logo certamente existe $c_1 \in S$ tal que $\phi(c_1) \neq 0$. Suponha que este resultado vale para o caso com $n - 1$ indeterminadas e seja $\phi(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$ um polinômio não-nulo. Observe que pode-se representar ϕ da seguinte maneira

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{k=0}^{m} \phi_k(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^k.$$

Como ϕ é não-nulo, existe $(b_1, \ldots, b_n) \in k^n$ tal que $\phi(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$. Considere o polinômio $\psi(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \phi(X_1, \ldots, X_{n-1}, b_n)$. Note que ψ é um polinômio não-nulo, pois $\psi(b_1, \ldots, b_{n-1}) \neq 0$. Como ψ é um polinômio em $k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$, pela hipótese de indução, existem $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in S^{n-1}$ tal que $\psi(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, b_n) \neq 0$. Se $b_n \in S$, não há nada mais o que fazer. Caso contrário, considere o polinômio $\zeta(X_n) = \phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, X_n)$. Observe que ζ é um polinômio não-nulo em $k[X_n]$, daí, como já provado no caso de polinômios com apenas um indeterminada, existe $a_n \in S$ tal que $\zeta(a_n) = \phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \neq 0$. Assim, pelo princípio da indução, se $\phi(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$ é um polinômio não-nulo, existe $(c_1, \ldots, c_n) \in S^n$ tal que $\phi(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$. $\square$

Corolário 1.75. *Sejam k um corpo infinito e $\phi(X_1, \ldots, X_n)$ um polinômio não-nulo em $k[X_1, \ldots, X_n]$. Existe uma n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$, onde $a_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, tal que $\phi(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Ainda mais, existem infinitas n-uplas com esta propriedade.*

Demonstração: De fato, basta considerar, com a notação da Proposição anterior, $S = k \smallsetminus \{0\}$. Seja $(a_1, \ldots, a_n)$ uma n-upla satisfazendo essa propriedade e considere o polinômio $\zeta(X_n) = \phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, X_n)$. Note que ζ é um polinômio não-nulo, portanto $\{z \in S \ ; \ \phi(a_1, \ldots, a_{n-1}, z) \neq 0\}$ é infinito. $\square$

1.7 Álgebras tensorial, simétrica e alternada

1.7.1 Álgebra tensorial

Sejam R um anel e M um R-módulo. Dado $n \geq 0$, defina

$$T^n(M) := M^{\otimes n} = \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_{\text{n vezes}}, \quad T^1(M) = M \quad \text{e} \quad T^0(M) = M^{\otimes 0} = R.$$

Defina então a álgebra tensorial de M por

$$T(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{\otimes n}.$$

Defina, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, os produtos

$$\mu_{m,n} : M^{\otimes m} \times M^{\otimes n} \longrightarrow M^{\otimes (m+n)}$$

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$$

e

$$\mu_{0,n} : R \times M^{\otimes n} \longrightarrow M^{\otimes n}$$

$$(r, x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \longmapsto rx_1 \otimes \cdots \otimes x_n$$

Assim, pode-se equipar $T(M)$ com uma estrutura de R-álgebra não-comutativa graduada cuja multiplicação é dada por $\bigoplus_{m,n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mu_{m,n}$. Observe que existe mapa injetivo $\theta_M : M \longrightarrow T(M)$ tal que $\theta_M(m) = m$ e que, portanto, $T^1(M) \cong M$.

Proposição 1.76. *Considerando o mapa $\theta_M : M \longrightarrow T(M)$ tal que $\theta_M(m) = m$, o par $(T(M), \theta_M)$ possui a seguinte propriedade universal: Dado qualquer par (S, f) de uma R-álgebra S associativa, com unidade e não necessariamente comutativa, e um homomorfismo de R-módulos $\phi : M \longrightarrow S$, existe um único homomorfismo de R-álgebras $g : T(M) \longrightarrow S$ tal que $f = g \circ \theta_M$.*

Demonstração: Consultar a Proposição 5.2.2 de [10]. $\square$

1.7.2 Álgebra simétrica

Sejam R um anel, M um R-módulo e $\mathcal{I}$ o ideal bilateral de $T(M)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes y - y \otimes x$, com $x, y \in M$. Defina a álgebra simétrica de M, denotando-a por $\mathrm{Sym}(M)$, o quociente $T(M)/\mathcal{I}$. Uma vez que $\mathfrak{I}$ é um ideal homogêneo, a álgebra simétrica de M é uma R-álgebra graduada. Observe também que

$$T^0(M) \cap \mathcal{I} = T^1(M) \cap \mathcal{I} = 0,$$

assim $[\mathrm{Sym}(M)]_0 = R$ e $[\mathrm{Sym}(M)]_1 = M$. Considerando o mapa

$$\begin{aligned} \varphi_M : M &\longrightarrow \mathrm{Sym}(M) \\ m &\longmapsto m \end{aligned}$$

Tem-se $\mathrm{Sym}(M)$ é uma R-álgebra gerada por $\varphi_M(M)$. Assim como a álgebra tensorial $T(M)$, a álgebra simétrica $\mathrm{Sym}(M)$ também possui propriedade universal.

Proposição 1.77. *Dados R um anel e M um R-módulo, o par* $(\mathrm{Sym}(M), \varphi_M)$ *possui a seguinte propriedade universal: Dado um par (S, f) de um anel S e um homomorfismo de R-módulos $f : M \longrightarrow S$, existe um único homomorfismo de R-álgebras $h : \mathrm{Sym}(M) \longrightarrow S$ tal que $f = h \circ \varphi_M$.*

Demonstração: Consultar a Proposição 5.3.1 de [10]. □

Proposição 1.78. *Sejam R um anel e M, N R-módulos. Dado um homomorfismo de R-módulos $f : M \longrightarrow N$, existe um único homomorfismo de R-álgebras* $\mathrm{Sym}(f) : \mathrm{Sym}(M) \longrightarrow \mathrm{Sym}(N)$ *tal que $\varphi_N \circ f = \mathrm{Sym}(f) \circ \varphi_M$.*

Demonstração: Consultar a Proposição 5.3.2 de [10]. □

Proposição 1.79. *Seja R um anel e M um R-módulo livre de posto r, então* $\mathrm{Sym}(M)$ *é o anel polinomial $R[X_1, \ldots, X_r]$. Mais precisamente, se M é um* *módulo livre com base $\{e_1, \ldots, e_r\}$, então o homomorfismo de R-álgebras $f : R[X_1, \ldots, X_r] \longrightarrow \mathrm{Sym}(M)$ tal que $f(X_i) = e_i$, com $1 \leq i \leq r$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Consultar a Proposição 5.3.6 de [10]. $\square$

Proposição 1.80. *Se R é um anel e M é um R-módulo, então*

(i) Dado S um subconjunto multiplicativamente fechado de R, tem-se que $\mathrm{Sym}_R(M)_S \cong \mathrm{Sym}_{R_S}(M_S)$;

(ii) Dado um ideal I de R, tem-se que $\mathrm{Sym}_R(M) \otimes_R R/I \cong \mathrm{Sym}_{R/I}(M/IM)$.

Demonstração: Consultar a Proposição 5.4.6 de [10]. $\square$

1.7.3 Álgebra exterior

Sejam R um anel, M um R-módulo e $\mathfrak{J}$ o ideal bilateral de $T(M)$ gerado pelos elementos da forma $x \otimes x$, com $x \in M$. Defina a álgebra exterior de M, denotando-a por $\bigwedge(M)$, pelo quociente $T(M)/\mathfrak{J}$. Uma vez que $\mathfrak{J}$ é um ideal homogêneo, a álgebra exterior de M é uma R-álgebra graduada. Observe também que $T^0(M) \cap \mathfrak{J} = T^1(M) \cap \mathfrak{J} = 0$, daí

$$\Big[\bigwedge(M)\Big]_0 := \bigwedge^0(M) = R \quad \text{e} \quad \Big[\bigwedge(M)\Big]_1 := \bigwedge^1(M) = M.$$

Considerando o mapa

$$\psi_M : M \longrightarrow \bigwedge(M)$$

$$m \longmapsto m$$

tem-se que $\bigwedge(M)$ é uma R-álgebra anti-comutativa gerada por $\psi_M(M)$ tal $x^2 = 0$ para todo $x \in \bigwedge(M)$. Assim, como as álgebras tensorial e simétrica, a álgebra exterior também possui propriedade universal.

Proposição 1.81. *Dados R um anel e M um R-módulo, o par $(\bigwedge(M), \psi_M)$ possui a seguinte propriedade universal: Dado um par (S, f) de um anel S e um homomorfismo de R-módulos $f : M \longrightarrow S$ tal que $f(x)^2$ para todo $x \in M$, existe um único homomorfismo de R-álgebras $h : \bigwedge(M) \longrightarrow S$ tal que $f = h \circ \varphi_M$.*

Demonstração: Consultar a Proposição 5.4.1 de [10]. □

1.8 Extensões de anéis e blowup de um ideal

Definição 1.82. *Sejam S um anel e R um subanel de S. Um elemento $x \in S$ é dito inteiro sobre R se x é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em R, i.e. existem $a_1, \dots, a_n \in R$ tais que:*

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Proposição 1.83. *Sejam S um anel e R um subanel de S. Um elemento $x \in S$ é inteiro sobre R se e somente se $R[x]$ for um R-módulo finitamente gerado. Mais geralmente, se $x_1, \dots, x_n \in S$ são inteiros sobre R, então $R[x_1, \dots, x_n]$ é um R-módulo finitamente gerado.*

Demonstração: Consultar a Proposição 5.1 e o Corolário 5.2 de [2]. □

Proposição 1.84. *Sejam S um anel e R um subanel de S, o conjunto T dos elementos de S que são inteiros sobre R constitui um subanel de S contendo R.*

Demonstração: Consultar o Corolário 5.3 de [2]. □

Motivado pela Proposição 1.84, tem-se a seguinte definição

Definição 1.85. *Sejam S um anel e R um subanel de S, o conjunto dos elementos de S que são inteiros sobre R é chamado de fecho inteiro de R em S. Se todos os elementos de S forem inteiros sobre R, S é dito ser inteiro sobre R.*

A próxima Proposição contém dois famosos resultados da teoria de dependência inteira de anéis. O segundo item da Proposição a seguir é comumente conhecido como *Lying-over theorem*, que diz que, dados S um anel e R um subanel de S, se R é inteiro sobre S e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R, então $\mathfrak{p}$ é contração de um ideal primo de S. Este resultado é uma das ferramentas fundamentais para provar o terceiro item desta Proposição que é comumente conhecido como *Going-up theorem*.

Proposição 1.86. *Sejam S um anel e R um subanel de S. Se S é inteiro sobre R, então*

(i) Se $\mathfrak{q}$ e $\mathfrak{q}'$ são ideais primos de S tais que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ e $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}'^c$, então $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$;

(ii) Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R, então existe um ideal primo $\mathfrak{q}$ de S tal que $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$;

(iii) Sejam $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ uma cadeia de ideais primos de R e $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m$ uma cadeia de ideais primos de S tal que $m < n$ e $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$ para cada $1 \leq i \leq m$. Então a cadeia $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m$ pode ser estendida à cadeia $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$ tal que $\mathfrak{q}_i^c = \mathfrak{p}_i$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Demonstração: Consultar o Corolário 5.9 e os Teoremas 5.10 e 5.11 de [2]. □

Uma das consequências interessantes da combinação desses dois resultados é que se R é integral sobre S, então ambos anéis possuem a mesma dimensão de Krull.

Corolário 1.87. *Sejam S um anel e R um subanel de S. Se S é inteiro sobre R, então* $\dim(S) = \dim(R)$.

Demonstração: Com efeito, note que, para cada cadeia de ideais primos de S, o item (i) da Proposição 1.86 garante que é possível encontrar uma cadeia de ideais primos de R com tamanho maior ou igual, assim segue que $\dim(R) \geq \dim(S)$.

Por outro lado, se $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ é uma cadeia de ideais primos em R, então o item (ii) garante que existe um primo $\mathfrak{q}_1$ em S tal que $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{p}_1$ e os itens (i) e (iii) garantem que se pode obter uma cadeia $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ de primos em S com mesmo comprimento, daí $\dim(R) \leq \dim(S)$. Logo $\dim(R) = \dim(S)$. $\square$

Definição 1.88. *Sejam R um anel e S o conjunto dos elementos R-regulares, a localização de R em S, denotada por* $\mathrm{Quot}(R)$*, é chamada de anel total das frações de R.*

Observe que o mapa da localização $\phi : R \longrightarrow \mathrm{Quot}(R)$, com $\phi(x) = \frac{x}{1}$ é um homomorfismo injetivo de anéis, assim R pode ser naturalmente identificado como um subanel de $\mathrm{Quot}(R)$. Note também que todo elemento de S é invertível em $\mathrm{Quot}(R)$. Por fim, se R é um domínio integral, $\mathrm{Quot}(R)$ é um corpo e é conhecido na literatura como o corpo das frações de R.

Exemplo 1.89. *Sejam k um corpo e $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre k tal que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é algebricamente independente. Se $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, então o* $\mathrm{Quot}(R)$ *é o corpo das funções racionais com n indeterminadas $k(X_1, \ldots, X_n)$.*

Se $(R, \mathfrak{m}, k)$ for um anel local com corpo residual k infinito e $\mathfrak{p}$ for um ideal primo de R, então $R_{\mathfrak{p}}$ também possui corpo residual infinito. Para provar este fato, será provado primeiramente o seguinte lema.

Lema 1.90. *Seja D um domínio integral e suponha que D contenha um elemento não-nulo e não invertível. Então* $\mathrm{Quot}(D)$ *é um corpo infinito.*

Demonstração: Seja $x \in D$ um elemento não-nulo não-invertível. Observe que, dados $i, j \in \mathbb{N}$, vale que $x^i = x^j$ se e somente se $i = j$. Logo D é infinito e, portanto, $\mathrm{Quot}(D)$ é infinito. $\square$

Proposição 1.91. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local com corpo residual k infinito e I um ideal de R. Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo contendo I, então $k(\mathfrak{p})$ é infinito.*

Demonstração: Se $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, então $k(\mathfrak{m}) = k$ é infinito e a proposição vale trivialmente. Senão, observe que

$$k(\mathfrak{p}) = \frac{R_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}} \cong \left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)_\mathfrak{p} \cong \left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)_{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}} = \left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)_0 = \mathrm{Quot}(R/\mathfrak{p}).$$

Uma vez que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, $R/\mathfrak{p}$ é domínio integral que contém elementos não-nulos não-invertíveis, assim pelo Lema 1.90, segue que $k(\mathfrak{p})$ é infinito. $\square$

A próxima definição consiste numa generalização do conceito de elementos inteiros sobre um anel para elementos inteiros sobre um ideal.

Definição 1.92. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Um elemento $z \in R$ é dito inteiro sobre I se z é raiz de um polinômio mônico $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, com $a_i \in I^i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Proposição 1.93. *Sejam R um anel com anel total das frações K e $\overline{R}$ o fecho inteiro de R em K. Dados $x \in R$ um elemento R-regular e $z \in R$, tem-se que z é inteiro sobre (x) se e, somente se, $\frac{z}{x} \in \overline{R}$.*

Demonstração: Suponha que z é inteiro sobre (x), então existem $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \ldots, a_n \in R$ tais que

$$z^n + (a_1x)z^{n-1} + \cdots + (a_{n-1}x^{n-1})z + a_nx^n = 0. \tag{1.1}$$

Como x é um elemento R-regular, vendo (1.1) como uma equação em $\mathrm{Quot}(R)$, multiplicando por $1/x^n$ e reagrupando os termos de modo conveniente, obtém-se

$$\left(\frac{z}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{z}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{z}{x}\right) + a_n = 0.$$

Desse modo, $\frac{z}{x}$ é inteiro sobre R. Reciprocamente, se $\frac{z}{x}$ é inteiro sobre R, existem $a_1, \ldots, a_n \in R$ tais que

$$\left(\frac{z}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{z}{x}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{z}{x}\right) + a_n = 0. \tag{1.2}$$

Multiplicando a equação (1.2) por x^n, obtém-se

$$z^n + (a_1x)z^{n-1} + \cdots + (a_{n-1}x^{n-1})z + a_nx^n = 0.$$

Logo z é inteiro sobre (x). $\square$

Proposição 1.94. *Sejam R um anel e I, J ideais de R tal que I contém um elemento R-regular x. Dado $z \in R$, se $zI \subseteq JI$, então z é inteiro sobre J.*

Demonstração: Seja $\{x_1, \ldots, x_t\}$ um sistema de geradores de I. Da hipótese $zI \subseteq JI$, segue que, para cada i, existem $c_{i1}, \ldots, c_{it} \in J$ tais que

$$zx_i = \sum_{j=1}^{t} c_{ij}x_j.$$

Utilizando o delta de Kronecker δ_{ij}, pode-se expressar a igualdade anterior, para cada $i = 1, 2, \ldots, t$, como

$$\sum_{j=1}^{t}(c_{ij} - z\delta_{ij})x_j = 0.$$

Utilizando a notação matricial, podemos então sintetizar as t expressões anteriores na seguinte equação matricial

$$AX := \begin{bmatrix} c_{11} - z & c_{12} & \ldots & c_{1t} \\ c_{21} & c_{22} - z & \ldots & c_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{t1} & c_{t2} & \ldots & c_{tt} - z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando a identidade $\mathrm{adj}(A)A = \det(A)Id_t$, conclui-se que $\det(A)x_i = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, t$. Assim, para todo $y \in I$, tem-se $\det(A)y = 0$. Em particular, vale que $\det(A)x = 0$ e, como x é um elemento R-regular, segue que $\det([c_{ij} - z\delta_{ij}]_{ij}) = \det(A) = 0$. Desenvolvendo este determinante pelo algoritmo de Laplace, chega-se a conclusão que z é inteiro sobre J. $\square$

Definição 1.95. *Sejam R um anel com anel total das frações K, I um ideal de R e $\overline{R}$ o fecho inteiro de R em K, chama-se $R^I := \bigcup_{i=1}^{\infty}(I^i :_{\overline{R}} I^i)$ de anel blowup de I.*

Observe que o anel blowup de I possui uma estrutura de R-algebra com as operações induzidas de $\overline{R}$. Antes de provar o principal resultado dessa seção, a Proposição 1.97, será provada a seguinte Proposição.

Proposição 1.96. *Sejam R um anel e I um ideal de R contendo um elemento R-regular. Se existe $x \in R$ tal que $xI^n = I^{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então x é R-regular.*

Demonstração: Com efeito, sejam $r \in R$ tal que $xr = 0$ e $z \in I$ um elemento R-regular. Note que $rI^{n+1} = rxI^n = 0$. Em particular, vale que $rz^{n+1} = 0$. Da regularidade de z^{n+1}, segue que $r = 0$ e, portanto, x é um elemento R-regular. □

Proposição 1.97 (Proposição 1.1 de [17]). *Sejam R um anel Noetheriano com anel total das frações K e I um ideal de R contendo um elemento R-regular. Suponha que exista $x \in I$ tal que $xI^n = I^{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Denotando $\overline{R}$ o fecho inteiro de R sobre K, tem-se*

(i) $R^I = \bigcup_{i=1}^{\infty}(I^i :_{\overline{R}} I^i)$ é um R-módulo finitamente gerado e $R^I = I^k :_{\overline{R}} I^k$ para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande;

(ii) $IR^I = (x)R^I$.

Demonstração: (i): Note que, pela Proposição 1.96, x é um elemento R-regular. Seja $a \in R^I$, então $a \in I^m :_{\overline{R}} I^m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, daí $a = a\frac{x^m}{x^m} = \frac{ax^m}{x^m}$, com $ax^m \in I^m$, assim a é da forma $\frac{z}{x^m}$, com $z \in I^m$.

Por outro lado, todo elemento da forma z/x^r e $r > 0$, com $z \in I^r$, está em R^I. Com efeito, observe que

$$\frac{z}{x^r}I^{n+r} = \frac{z}{x^r}I^{n+1}I^{r-1} = \frac{z}{x^r}(xI^n)I^{r-1} = \cdots = \frac{z}{x^r}(x^rI^n) = zI^n \subseteq I^{n+r},$$

portanto $zI^{r+n} \subseteq (x^r)I^{r+n}$. Como I^{r+n} contém um elemento R-regular, pela Proposição 1.94, z é integral sobre (x^r). Assim, pela Proposição 1.93, $\frac{z}{x^r}$ é integral sobre R, daí $z/x^r \in I^{r+n} :_{\overline{R}} I^{r+n} \subseteq R^I$. Desse modo

$$R^I = \left\{ \frac{z}{x^r} \ ; \ r > 0, z \in I^r \right\}. \tag{1.3}$$

Se $\{z_1, \dots, z_l\}$ um sistema de geradores de I, então tem-se que

$$R^I = R\left[\frac{z_1}{x}, \dots, \frac{z_l}{x}\right].$$

Pela Proposição 1.83, R^I é R-módulo finitamente gerado. Como R é um anel Noetheriano, segue-se que R^I é um R-módulo Noetheriano e, portanto, satisfaz à condição de cadeia ascendente para ideais. Finalmente, como $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} I^k :_{\overline{R}} I^k$ e

$$I :_{\overline{R}} I \subseteq I^2 :_{\overline{R}} I^2 \subseteq \cdots \subseteq I^m :_{\overline{R}} I^m \subseteq \dots$$

é uma cadeia ascendente de ideais de R^I, segue que $R^I = I^k :_{\overline{R}} I^k$ para algum k suficientemente grande.

(ii): De fato, tendo em vista a igualdade na Equação (1.3), dado $z \in IR^I$, existem $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, $b_i \in I^{m_i}$ com $1 \leq i \leq k$ e $a_1, \dots, a_k \in I$ tais que

$$z = a_1 \frac{b_1}{x^{m_1}} + \cdots + a_k \frac{b_k}{x^{m_k}}.$$

Portanto

$$z = x\left(\frac{a_1 b_1}{x^{m_1+1}} + \cdots + \frac{b_k a_k}{x^{m_k+1}}\right),$$

onde $a_i b_i \in I^{m_i+1}$ para cada $1 \leq i \leq k$, daí $z \in (x)R^I$. Desse modo, tem-se que $IR^I \subseteq (x)R^I$. Por outro lado, como $x \in I$, é claro que $(x)R^I \subseteq IR^I$, por conseguinte vale que $IR^I = (x)R^I$. □

Corolário 1.98 (Lema 1.8 de [17]). *Sejam R um anel com anel total das frações K e I um ideal de R contendo um elemento R-regular. Suponha que exista $x \in R$ tal que $xI^n = I^{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $R^I = I^k :_{\overline{R}} I^k$ para todo $k \geq n$.*

Demonstração: Observe que, uma vez que $I^n :_{\overline{R}} I^n \subseteq I^k :_{\overline{R}} I^k \subseteq R^I$ para todo $k \geq n$, é suficiente provar que $R^I = I^n :_{\overline{R}} I^n$. Note que para todo $r \geq 0$ vale que $I^{n+r} = x^r I^n$, portanto

$$R^I = \bigcup_{r=0}^{\infty}(I^{n+r} :_{\overline{R}} I^{n+r}) = \bigcup_{r=0}^{\infty}(x^r I^n :_{\overline{R}} x^r I^n) = \bigcup_{r=0}^{\infty}(I^n :_{\overline{R}} I^n) = I^n :_{\overline{R}} I^n,$$

onde a penúltima igualdade vem do fato que, uma vez que x é R-regular, x é necessariamente K-regular e, portanto, $\overline{R}$-regular.

□

1.9 Álgebras de Rees e anel associado graduado

Definição 1.99. *Sejam R um anel, I um ideal de R e t uma indeterminada sobre R. A álgebra de Rees de I é um subanel homogêneo de $R[t]$ definida como*

$$\mathcal{R}(I) = R[It] = \bigoplus_{i=0}^{n} I^i t^i = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \ ; \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in I^i \right\} \subseteq R[t]$$

e a álgebra estendida de Rees de I é o subanel homogêneo de $R[t, t^{-1}]$ definida como

$$R[It, t^{-1}] = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} I^i t^i = \left\{ \sum_{i=-n}^{n} a_i t^i \ ; \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in I^i \right\} \subseteq R[t, t^{-1}],$$

com a convenção $I^k = R$ se $k \leq 0$.

Proposição 1.100. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Se R é Noetheriano, então $\mathcal{R}(I)$ e $R[It, t^{-1}]$ também são anéis Noetherianos.*

Demonstração: De fato, como R é Noetheriano, I é finitamente gerado. Assim, se $I = (a_1, \ldots, a_n)$, então $\mathcal{R}(I) = R[a_1 t, \ldots, a_n t]$ é uma R-álgebra finitamente gerada. Similarmente, observe que $[R[It, t^{-1}]]_0 = R$ é Noetheriano e que $\bigoplus_{i=0}^{\infty}[R[It, t^{-1}]]_i = R[a_1 t, \ldots, a_n t]$ e $\bigoplus_{i=-\infty}^{0}[R[It, t^{-1}]]_i = R[t^{-1}]$ são R-álgebras finitamente geradas, portanto, segue da Proposição 1.60, que $\mathcal{R}(I)$ e $R[It, t^{-1}]$ são anéis Noetherianos. $\square$

Proposição 1.101. *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. Se* $\dim(R)$ *é finita, então* $\dim(R[It, t^{-1}]) = \dim(R) + 1$. *Além disso, se $(R, \mathfrak{m})$ for local e $I \subseteq \mathfrak{m}$, então $\mathfrak{m}R[It, t^{-1}] + ItR[It, t^{-1}] + t^{-1}R[It, t^{-1}]$ é um ideal maximal de $R[It, t^{-1}]$ com altura igual a* $\dim(R) + 1$.

Demonstração: Consultar o Teorema 5.1.4 de [8]. $\square$

Corolário 1.102. *Sejam $(R, \mathfrak{n})$ um anel Noetheriano local e I um ideal próprio de R. Segue que* ${}^*\dim(R[It, t^{-1}]) = \dim(R[It, t^{-1}])$.

Demonstração: Com efeito, já foi visto no Exemplo 1.66 que $R[It, t^{-1}]$ é um anel *local com ideal *maximal $\mathfrak{m}$

$$\mathfrak{m} = \cdots \oplus Rt^{-n} \oplus \cdots \oplus Rt^{-2} \oplus Rt^{-1} \oplus \mathfrak{n} \oplus It \oplus I^2t \oplus \cdots \oplus I^nt^n \oplus \cdots$$

Observe que $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}R[It, t^{-1}] + ItR[It, t^{-1}] + t^{-1}R[It, t^{-1}]$, portanto ${}^*\dim(R[It, t^{-1}]) = \operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = \dim(R) + 1 = \dim(R[It, t^{-1}])$. $\square$

Sejam R um anel Noetheriano e I ideal gerado pelos elementos $f_1, \ldots, f_q$. Considere o homomorfismo sobrejetor de R-álgebras

$$\begin{aligned} \phi : R[X_1, \ldots, X_q] &\longrightarrow \mathcal{R}(I) \\ \sum a_{i_1 \ldots i_q} X_1^{i_1} \ldots X_q^{i_q} &\longmapsto \sum a_{i_1 \ldots i_q} f_1^{i_1} \ldots f_q^{i_q} t^{i_1 + \cdots + i_q} \end{aligned}$$

O núcleo de ϕ, denotado por J, é o ideal de presentação de $\mathcal{R}(I)$ com respeito aos geradores $f_1, \ldots, f_q$.

Considere agora o homomorfismo de R-módulos

$$\begin{aligned} \psi : R^q &\longrightarrow I \\ (z_1, \ldots, z_q) &\longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^q z_i f_i \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 1.78 ao homomorfismo ψ, obtém-se um homomorfismo sobrejetor de R-álgebras $\zeta : R[X_1, \ldots, X_q] = \mathrm{Sym}_R(R^q) \longrightarrow \mathrm{Sym}_R(I)$, cujo núcleo é dado por

$$\ker(\zeta) = \left\{ \sum_{i=1}^{q} b_i X_i \ ; \ \sum_{i=1}^{q} b_i f_i = 0, a_i \in R \right\}.$$

Assim $\mathrm{Sym}(I) \cong R[X_1, \ldots, X_q]/\ker(\zeta)$. Observe que $\ker(\zeta) \subseteq J$, daí ϕ induz um homomorfismo sobrejetor de R-álgebras

$$\overline{\phi} : \mathrm{Sym}(I) \longrightarrow \mathcal{R}(I)$$

tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} R[X_1, \ldots, X_q] \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathrm{Sym}(I) \arrow[d, "\overline{\phi}"] \\ & \mathcal{R}(I) \end{tikzcd}$$

Definição 1.103. *Seja R um anel Noetheriano. Um ideal I é dito de tipo linear se o homomorfismo $\overline{\phi}$, definido como acima, for um isomorfismo de R-álgebras.*

A condição de ser de tipo linear provoca no ideal uma certa rigidez no seguinte sentido.

Proposição 1.104. *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. Se I é um ideal de tipo linear, então, para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$, tem-se que $\mu(I_{\mathfrak{p}}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.*

Demonstração: Consultar a Proposição 2.4 de [26]. □

Observação 1.105. *A tese da Proposição 1.104 é uma propriedade muito importante e bastante requisitada na álgebra comutativa. Será visto no Capítulo 4 que os ideais que possuem essa propriedade são chamados de ideais que satisfazem à condição G_∞.*

Definição 1.106. *Sejam R um anel e I um ideal de R. O anel associado graduado de I é o anel*

$$\mathrm{gr}_I(R) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{I^i}{I^{i+1}}.$$

Proposição 1.107. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Se $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R contendo I, então $\mathrm{gr}_I(R)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{gr}_{I_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}})$.*

Demonstração: Com efeito,

$$\mathrm{gr}_I(R)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{gr}_I(R) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} = \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{I^i}{I^{i+1}} \right) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong \bigoplus_{i=0}^{\infty} \left(\frac{I^i}{I^{i+1}} \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \right).$$

Como $R_{\mathfrak{p}}$ é uma R-álgebra plana, o produto tensorial se distribui pelo quociente de R-módulos, portanto

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \left(\frac{I^i}{I^{i+1}} \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \right) \cong \bigoplus_{i=0}^{\infty} \left(\frac{I^i \otimes_R R_{\mathfrak{p}}}{I^{i+1} \otimes_R R_{\mathfrak{p}}} \right) \cong \bigoplus_{i=0}^{\infty} \left(\frac{I^i_{\mathfrak{p}}}{I^{i+1}_{\mathfrak{p}}} \right) = \mathrm{gr}_{I_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}).$$

□

O anel associado graduado de um ideal I pode ser obtido da especialização da álgebra de Rees estendida de I bem como do quociente da álgebra de Rees pelo ideal I, como se vê na seguinte Proposição.

Proposição 1.108. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Valem os seguintes isomorfismos de R-álgebras.*

$$\mathrm{gr}_I(R) \cong \frac{R[It, t^{-1}]}{t^{-1}R[It, t^{-1}]} \cong \frac{R[It]}{IR[It]}.$$

Demonstração: De fato, definindo o homomorfismo sobrejetor de R-álgebras $\phi : R[It, t^{-1}] \longrightarrow \mathrm{gr}_I(R)$ tal que

$$\phi(a_{-m}/t^m + \cdots + a_{-1}/t + a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = \overline{a_0} + \overline{a_1} t + \cdots + \overline{a_n} t^n,$$

deduz-se que o núcleo de ϕ é o ideal gerado por t^{-1}, portanto

$$\mathrm{gr}_I(R) \cong \frac{R[It, t^{-1}]}{t^{-1}R[It, t^{-1}]}.$$

Similarmente, definindo o homomorfismo sobrejetor de R-álgebras $\psi : R[It] \longrightarrow \mathrm{gr}_I(R)$ tal que

$$\psi(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t) = \overline{a_0} + \overline{a_1} t + \cdots + \overline{a_n} t^n,$$

deduz-se facilmente que o núcleo de ψ é o ideal $IR[It]$, portanto

$$\mathrm{gr}_I(R) \cong \frac{R[It]}{IR[It]}.$$

$\square$

Proposição 1.109. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e I um ideal de R. Se I for um ideal próprio de R, então $\dim(\mathrm{gr}_I(R)) = \dim(R)$. Além disso, se*

$$M = \frac{\mathfrak{m}}{I} \oplus \frac{I}{I^2} \oplus \cdots \oplus \frac{I^n}{I^{n+1}} \oplus \ldots$$

então M é um ideal maximal homogêneo de $\mathrm{gr}_I(R)$ e $\mathrm{ht}(M) = \dim(\mathrm{gr}_I(R))$.

Demonstração: Consultar a Proposição 5.1.6 de [8]. $\square$

Definição 1.110. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ é um anel Noetheriano local, a fibra especial de I é o anel*

$$\mathcal{F}_I(R) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{I^i}{\mathfrak{m}I^i} \cong \frac{\mathcal{R}(I)}{\mathfrak{m}\mathcal{R}(I)} \cong \frac{\mathrm{gr}_I(R)}{\mathfrak{m}\,\mathrm{gr}_I(R)}.$$

Definição 1.111. *Sejam R um anel Noetheriano local, o espalhamento analítico de I, denotado por $\ell(I)$, é a dimensão de Krull de $\mathcal{F}_I(R)$.*

Proposição 1.112. *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. Denote por*

$$\mathcal{R}(I)_+ = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in \mathcal{R}(I) \ ; \ a_0 = 0, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Se $x \in I$ é tal que $I^{n+1} \cap (x) = xI^n$ para todo $n \geq 1$, então $\mathcal{R}(I)_+/(xt)\mathcal{R}(I) \cong \mathcal{R}(I/(x))_+$. Em particular, tem-se a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow (xt)\mathcal{R}(I) \longrightarrow \mathcal{R}(I)_+ \longrightarrow \mathcal{R}(I/(x))_+ \longrightarrow 0.$$

Demonstração: De fato, defina

$$\phi : \mathcal{R}(I)_+ \longrightarrow \mathcal{R}(I/(x))_+$$
$$\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k t^k \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} t^k$$

Observe que ϕ é um homomorfismo sobrejetor de R-módulos. Se $\sum_{k=1}^{n} a_k t^k \in \ker(\phi)$, então, pela hipótese da Proposição, tem-se que $a_i \in xI^{i-1}$ para todo $i \geq 1$. Portanto

$$\sum_{k=1}^{n} a_k t^k = \sum_{k=1}^{n} (xb_k) t^k = xt(b_1 + b_2 t + \cdots + b_n t^{n-1}) \in (xt)\mathcal{R}(J).$$

onde $a_i = xb_i$, $b_i \in I^{i-1}$ para todo $1 \leq i \leq n$. Como é claro que $(xt)\mathcal{R}(I) \subseteq \ker(\phi)$, então, pelo Teorema do isomorfismo, conclui-se que

$$\frac{\mathcal{R}(I)_+}{(xt)\mathcal{R}(I)} \cong \mathcal{R}(I/(x))_+.$$

$\square$

1.10 Outros resultados importantes

Proposição 1.113. *Sejam R, R' anéis e $\phi : R \longrightarrow R'$ um homomorfismo de anéis. Considere $S \subseteq R$ um subconjunto multiplicativamente fechado de R tal que $\phi(s)$ é unidade para todo $s \in S$.*

(i) Se ϕ é injetiva, então $\phi_S : R_S \longrightarrow R'$ é injetiva;

(ii) Se ϕ é sobrejetiva, então $\phi_S : R_S \longrightarrow R'$ é sobrejetiva.

Demonstração: (i) Dado $x/s \in \ker(\phi_S)$, tem-se $\phi(x)\phi(s)^{-1} = 0$. Como $\phi(s)^{-1}$ é invertível, tem-se que $\phi(x) = 0$, logo $x = 0$ e, portanto $x/s = 0$, desse modo, ϕ_S é injetiva.

(ii) Dado $z \in R'$, seja $x \in R$ tal que $\phi(x) = z$. Então $\phi_S(x/1) = \phi(x) = z$, portanto, ϕ_S é sobrejetiva. $\square$

Proposição 1.114. *Sejam R um anel e M um R-módulo finitamente gerado. Considere $x \in M$ e $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R. Se $\overline{x} \neq 0$ em $M \otimes_R k(\mathfrak{p}) = M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$, então $\mu((M/(x))_\mathfrak{p}) = \mu(M_\mathfrak{p}) - 1$.*

Demonstração: Com efeito, note que $\mu(M_p) = \dim_{k(\mathfrak{p})}(M \otimes_R k(\mathfrak{p})) := n < \infty$, pois M é um R-módulo finitamente gerado. Como $\overline{x} \neq 0$, seja $\{\overline{x}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}\}$ uma base de $M \otimes_R k(\mathfrak{p})$ que contém $\overline{x}$. Observe que $\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}\}$ agora constitui uma base de

$$\left(\frac{M}{(x)}\right) \otimes_R k(\mathfrak{p}) = \frac{(M/((x)))_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}(M/(x))_\mathfrak{p}} \cong \frac{M_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} + (x)_\mathfrak{p}}.$$

Portanto

$$\mu((M/(x))_\mathfrak{p}) = \dim_{k(\mathfrak{p})}(M/(x) \otimes_R k(\mathfrak{p})) = n - 1 = \mu(M_\mathfrak{p}) - 1.$$

$\square$

Proposição 1.115. *Sejam k um corpo e V um k-espaço vetorial não-nulo. Se k é um corpo infinito, então, dados $W_1, \dots, W_m$ subespaços vetoriais próprios de V, tem-se que*

$$W_1 \cup \cdots \cup W_m \subsetneq V.$$

Demonstração: A prova procederá por indução em m. O caso $m = 1$ é trivial.

Suponha que esta Proposição valha para $m = n$ e sejam $W_1, \dots, W_{n+1}$ $n+1$ subespaços próprios de V. Escolham elementos $x, y \in V$ tais que $x \notin W_1$ e

$y \in V \setminus W_2 \cup \cdots \cup W_{n+1}$ e seja $F = \{x + ty \; ; \; t \in k\}$. Se tivéssemos que $V = W_1 \cup \cdots \cup W_{n+1}$, pelo princípio das gavetas de Dirichlet, existiriam $r, s \in k$ distintos e $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tais que $x + ry, x + sy \in W_i$.

- Caso $i = 1$: Observe que $y \in W_1$, portanto, necessariamente se teria que $x \in W_1$, gerando uma contradição.

- Caso $2 \leq i \leq n+1$: Neste caso $(r - s)y = (x + ry) - (x + sy) \in W_i$ e, portanto, $y \in W_i$, gerando um contradição.

Portanto $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_{n+1} \subsetneq V$. Pelo princípio da indução, conclui-se que, se k é um corpo infinito, um k-espaço vetorial não-nulo não pode ser expresso como união finita de subespaços vetoriais próprios. □

Proposição 1.116. *Sejam R um anel e M, N R-módulos. Se M é um R-módulo finitamente presentado, então, para qualquer R-álgebra plana S, tem-se*

$$\operatorname{Hom}_R(M, N) \otimes_R S \cong \operatorname{Hom}_S(M \otimes_R S, N \otimes_R S).$$

Demonstração: Consultar o Teorema 7.11 de [3]. □

Proposição 1.117. *Sejam R um anel, M um R-módulo e I um ideal de R que é finitamente presentado como R-módulo. Se S é um conjunto multiplicativamente fechado tal que $S \subseteq R \setminus \mathcal{Z}(M)$ e $S \cap I \neq \emptyset$, então $\operatorname{Hom}_R(I, M) \cong M :_{S^{-1}M} I$. Em particular, cada elemento de $\operatorname{Hom}_R(I, M)$ é uma homotetia.*

Demonstração: Com efeito, como I é um R-módulo finitamente presentado, pela Proposição 1.116 existe um isormofismo de $\phi : S^{-1} \operatorname{Hom}_R(I, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}I, S^{-1}M)$ tal que $\phi(f/s)(r/t) = f(r)/(st)$. Como $I \cap S \neq \emptyset$, segue que $S^{-1}I = S^{-1}R$, portanto, existe o isomorfismo $\psi : \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}I, S^{-1}M) \longrightarrow S^{-1}M$ tal que $\psi(f) = f(x/x)$ para algum $x \in I \cap S$, assim

$$\eta := \psi \circ \phi : S^{-1} \operatorname{Hom}_R(I, M) \longrightarrow S^{-1}M$$

tal que $\eta(f/s) = f(x)/(xs)$ é um isomorfismo de $S^{-1}R$-módulos e, em particular, é um isomorfismo de R-módulos. Defina

$$\theta : \mathrm{Hom}_R(I, M) \longrightarrow S^{-1}M$$

tal que $\theta(f) = \eta(f/1) = f(x)/x$. Observe que θ é um monomorfismo de R-módulos com $\mathrm{Im}(\theta) = M :_{S^{-1}} I$.

Com efeito, se $\theta(f) = 0$, então $f(x)/x = 0$, daí existe $s \in S$ tal que $sf(x) = 0$. Note que, para todo $m \in I$, tem-se que $0 = msf(x) = (sx)f(m)$. Uma vez que sx é um não divisor de zeros de M, segue que $f(m) = 0$, logo $f = 0$ e θ é injetiva.

Observe que, dado $z \in M :_{S^{-1}} I$, o mapa $f : I \longrightarrow M$ tal que $f(m) = mz$ é um homomorfismo bem-definido de R-módulos, assim

$$z = f(x)/x = \eta(f/1) = \theta(f) \in \mathrm{Im}(\theta).$$

Por outro lado, dado $f \in \mathrm{Hom}_R(I, M)$, segue que $\theta(f) = f(x)/x \in M :_{S^{-1}} I$, pois, para todo $m \in I$, tem-se

$$m.(f(x)/x) = (mf(x))/x = xf(m)/x = f(m)/1 = f(m) \in M.$$

Assim segue que $\theta : \mathrm{Hom}_R(I, M) \longrightarrow M_{S^{-1}M}I$ é um isomorfismo de R-módulos. Em particular, dado $f \in \mathrm{Hom}_R(I, M)$, considere $\alpha := f(x)/x \in M :_{S^{-1}M} I$. Portanto, dado $m \in I$,

$$m\alpha = m(f(x)/x) = (xf(m))/x = f(m)/1 = f(m),$$

i.e f é multiplicação por α. □

Observação 1.118. *Na Proposição anterior, M está sendo identificado como um R-submódulo de $S^{-1}M$. Tal fato é possível, pois $S \subseteq R \setminus \mathcal{Z}(M)$ e, portanto, o mapa $\phi : M \longrightarrow S^{-1}M$ tal que $\phi(m) = m/1$ é um monomorfismo de R-módulos.*

Capítulo 2

Anéis Cohen-Macaulay e módulo canônico

Neste capítulo, serão apresentados conceitos e resultados centrais da teoria Cohen-Macaulay. Na seção 2.1 será definida os conceitos, como sequências regulares, grade e depth, que serão imprescindíveis para a compreensão do restante deste trabalho. Na seção 2.2, será apresentado o complexo de Koszul e suas principais propriedades e utilidades. Na seção 2.3, será definida a importante classe de anéis e módulos Cohen-Macaulay e serão apresentadas as suas principais propriedades. Na seção 2.4, serão apresentados resultados que ilustram os efeitos que a Cohen-Macaulidade em $\mathrm{gr}_I(R)$ podem trazer para o anel R. Na seção 2.5 serão apresentados os anéis Gorenstein, que podem ser caracterizados em termos de álgebra homológica e constituem uma importante subclasse da classe dos Cohen-Macaulay. Finalmente, na seção 2.6, será introduzido o conceito de módulo canônico.

2.1 Sequências regulares e grade de um ideal

Nesta seção serão definidos os conceitos de sequências regulares e o de grade de ideal. Ferramentas que serão imprescidíveis para compreensão das demais teorias e resultados presentes neste trabalho.

Definição 2.1. *Sejam R um anel e M um R-módulo. Uma sequência $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n$ de elementos de R é dita uma sequência M-regular se satisfazer às seguintes propriedades*

- *x_1 é M-regular;*
- *x_{i+1} é $M/((x_1, \ldots, x_i)M)$-regular para todo $i = 1, 2, \ldots, n-1$;*
- *$M/((x_1, \ldots, x_n)M) \neq 0$.*

Exemplo 2.2. *No anel polinomial $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, com k sendo um corpo qualquer, a sequência $\mathbf{x} = X_1, \ldots, X_n$ é uma sequência R-regular.*

Dada uma sequência M-regular $\mathbf{x}$, se $\mathbf{x}'$ é uma sequência obtida através de uma permutação dos elementos de $\mathbf{x}$, não é necessariamente verdade que a sequência $\mathbf{x}'$ também é M-regular. Tal fato, todavia, é verdade se o anel for local Noetheriano, conforme se pode consultar na Proposição 1.1.6 de [6].

Exemplo 2.3. *Sejam k um corpo e $R = k[x, y, z]$. Enquanto que a sequência $\mathbf{x} = x, y(x-1), z(x-1)$ é R-regular, a sequência $\mathbf{x}' = z(x-1), y(x-1), x$ não é R-regular.*

Proposição 2.4. *Seja R um anel. Se $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência de elementos em R tal que x_i, x_j forma uma sequência R-regular para todo $1 \leq i < j \leq n$, então $(x_1) \cap (x_2) \cap \cdots \cap (x_n) = (x_1 \cdots x_n)$.*

Demonstração: A prova será feita utilizando o princípio da indução em n. Para $n = 1$, a asserção é válida trivialmente. Considere $n = 2$ e seja x_1, x_2 uma sequência R-regular. Seja $z \in (x_1) \cap (x_2)$, assim $z = x_2 r$ para algum $r \in R$. Como o mapa $\phi : R/(x_1) \xrightarrow{\cdot x_2} R/(x_1)$ é injetivo e $\overline{z} = \phi(\overline{r}) = \overline{0}$, pois $z \in (x_1)$, segue que $r \in (x_1)$, o que implica que $(x_1) \cap (x_2) \subseteq (x_1 x_2)$. Como a outra inclusão vale trivialmente, segue que $(x_1 x_2) = (x_1) \cap (x_2)$.

Suponha que este resultado valha para sequências de tamanho $n-1$ e seja $x_1, \ldots, x_n$ um sequência satisfazendo às condições do enunciado. Pela hipótese de indução, tem-se que $(x_1) \cap (x_2) \cap \cdots \cap (x_n) = (x_1) \cap (x_2 \cdots x_n)$. Como x_i é $R/(x_1)$-regular para cada $i = 2, \ldots, n$, segue que $x_2 x_3 \cdots x_n$ é $R/(x_1)$-regular, assim a sequência $x_1, x_2 \ldots x_n$ satisfaz às condições do enunciado. Aplicando o fato já provado para sequências de comprimento dois, segue que

$$(x_1) \cap (x_2) \cap \cdots \cap (x_n) = (x_1) \cap (x_2 \cdots x_n) = (x_1 x_2 \cdots x_n).$$

$\square$

Proposição 2.5. *Sejam R um anel e M, N R-módulos.*

(i) Se $\operatorname{Ann}(N)$ contiver um elemento M-regular, então $\operatorname{Hom}_R(N, M) = 0$;

(ii) Assumindo que R é Noetheriano e M, N são R-módulos finitamente gerados, se $\operatorname{Hom}(N, M) = 0$, então $\operatorname{Ann}(N)$ contém um elemento M-regular;

(iii) Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência M-regular em $\operatorname{Ann}(N)$, então $\operatorname{Ext}^n_R(N, M) \cong \operatorname{Hom}_R(N, M/\mathbf{x}M)$.

Demonstração: Consultar a Proposição 1.2.3 e o Lema 1.2.4 de [6]. $\square$

Como consequência imediata dos itens (i) e (iii), tem-se que, se $\operatorname{Ann}(N)$ contiver uma sequência M-regular de comprimento n, então $\operatorname{Ext}^i_R(N, M) = 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Seja R um anel Noetheriano e M um R-módulo. Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência M-regular, então vale que a seguinte cadeia de ideais é ascendente

$$(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (x_1, \ldots, x_n).$$

Como R é Noetheriano, deduz-que que não é possível que esta cadeia possa ser estendida indefinidamente, existindo, portanto, uma sequência M-regular maximal cujos n primeiros elementos são $x_1, \ldots, x_n$. O próximo Teorema, devido a Rees, mostra que se R é um anel Noetheriano, M é um R-módulo finitamente gerado e I é um ideal de R com $M \neq IM$, então todas as sequências M-regulares maximais contidas em I possuem o mesmo comprimento.

Teorema 2.6. *Sejam R um anel Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R. Se I for tal que $M \neq IM$, então todas as sequências M-regulares maximais em I possuem o mesmo comprimento dado por*

$$\min\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \, ; \, \mathrm{Ext}^n_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

Demonstração: Consultar o Teorema 1.2.5 de [6]. □

Definição 2.7. *Sejam R um anel Noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R tal que $M \neq IM$. O tamanho de todas as sequências M-regulares maximais em I é chamado o grade de M em I e é denotado por* $\mathrm{grade}(I, M)$. *Mais ainda, se $M = IM$, define-se grade$(I, M) = \infty$.*

Observação 2.8. *No caso de $M = IM$, a definição de* $\mathrm{grade}(I, M)$ *ainda é consistente com o Teorema 2.6. Uma justificativa pode ser encontrada no comentário que procede a Definição 1.2.6 de [6].*

Definição 2.9. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local, M um R-módulo finitamente gerado não-nulo. O grade de M em $\mathfrak{m}$ é chamado de depth de M e é denotado por* $\mathrm{depth}(M)$. *Neste caso*

$$\mathrm{depth}(M) = \min\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \, ; \, \mathrm{Ext}^n_R(k, M) \neq 0\}.$$

Definição 2.10. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado não-nulo. O grade de M é definido por*

$$\mathrm{grade}(M) = \mathrm{grade}(\mathrm{Ann}(M), R).$$

A próxima Proposição é consequência direta da sequência longa exata de Ext que pode ser obtida após a aplicação do funtor $\mathrm{Hom}(R/I, \_\_)$ à sequência curta exata em questão.

Proposição 2.11. *Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R. Dada uma sequência exata de R-módulos finitamente gerados*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Então

(i) $\mathrm{grade}(I, M) \geq \min\{\mathrm{grade}(I, U), \mathrm{grade}(I, N)\}$*;*

(ii) $\mathrm{grade}(I, U) \geq \min\{\mathrm{grade}(I, M), \mathrm{grade}(I, N) + 1\}$*;*

(iii) $\mathrm{grade}(I, N) \geq \min\{\mathrm{grade}(I, U) - 1, \mathrm{grade}(I, M)\}$*.*

Demonstração: Consultar a Proposição 1.2.9 de [6]. □

Corolário 2.12. *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. Se M e N são R-módulos finitamente gerados tais que $M \neq IM$ e $N \neq IN$, então*

$$\mathrm{grade}(I, M \oplus N) = \min\{\mathrm{grade}(I, M), \mathrm{grade}(I, N)\}.$$

Em particular, $\mathrm{grade}(I, R^n) = \mathrm{grade}(I, R)$ *para qualquer $n > 0$.*

Demonstração: Note primeiramente que $M \oplus N = I(M \oplus N)$ se e somente se $M = IM$ e $N = IN$, daí $\mathrm{grade}(I, M \oplus N) < \infty$. Observe que se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência $(M \oplus N)$-regular em I, então $\mathbf{x}$ é tanto uma sequência M-regular quanto uma sequência N-regular. Com efeito, a injetividade das aplicações

$$\cdot x_i : \frac{M}{(x_1, \ldots, x_{i-1})M} \longrightarrow \frac{M}{(x_1, \ldots, x_{i-1})M} \qquad \cdot x_i : \frac{N}{(x_1, \ldots, x_{i-1})N} \longrightarrow \frac{N}{(x_1, \ldots, x_{i-1})N}$$

é fácil de ser verificada para cada $1 \leq i \leq n$ e, como $M \neq IM$ e $N \neq IN$, necessariamente se tem que

$$\frac{M}{(x_1, \ldots, x_n)M} \neq 0, \qquad\qquad \frac{N}{(x_1, \ldots, x_n)N} \neq 0.$$

Assim sendo conclui-se que $\operatorname{grade}(I, M \oplus N) \leq \min\{\operatorname{grade}(I, M), \operatorname{grade}(I, N)\}$. Por outro lado, como se tem a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

obtém-se que $\operatorname{grade}(I, M \oplus N) \geq \min\{\operatorname{grade}(I, M), \operatorname{grade}(I, N)\}$, concluindo assim a igualdade desejada. □

A próxima Proposição diz que, quando um anel for local Noetheriano, dado um R-módulo M não-nulo e finitamente gerado, tem-se que $\operatorname{depth}(M)$ é sempre limitado superiormente pela dimensão de Krull de M. De fato, será visto na Seção 2.3 que, quando vale a igualdade, M é chamado Cohen-Macaulay e possui algumas propriedades muito bem comportadas.

Proposição 2.13. *Sejam R um anel local Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado não-nulo. Neste caso, vale que* $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(M)$.

Demonstração: Consultar a Proposição 1.2.12 de [6]. □

Observação 2.14. *A condição $M \neq 0$ na Proposição 2.13 é equivalente a pedir que* $\operatorname{depth}(M) < \infty$ *pelo Lema de Nakayama. Se $M = 0$, tem-se* $\operatorname{Supp}(M) = \emptyset$, *assim* $\dim(M) = \infty$ *e, portanto, ainda se tem que* $\operatorname{depth}(M) \leq \dim(M)$. *Desse modo, a Proposição 2.13 continua sento válida para o R-módulo nulo.*

2.2 Complexo de Koszul

Sejam R um anel e $I = (x_1, \ldots, x_n)$ um ideal de R. Dado o homomorfismo de R-módulos

$$f : R^n \longrightarrow R$$

$$(y_1, \ldots, y_n) \longmapsto \textstyle\sum_{i=1}^n y_i x_i$$

e $m \in \mathbb{N}$, defina $d_f^{(m)} : \bigwedge^m R^n \longrightarrow \bigwedge^{m-1} R^n$ tal que

$$d_f^{(m)}(z_1 \wedge z_2 \wedge \cdots \wedge z_m) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} f(z_i) z_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{z_i} \wedge \cdots \wedge z_m.$$

para quaisquer $z_1, \ldots, z_m \in R^n$. A coleção de todos os mapas $d^{(m)}$ define um homomorfismo de R-módulos homogêneo de grau -1

$$d_f : \bigwedge(R^n) \longrightarrow \bigwedge(R^n)$$

tal que $d_f \circ d_f = 0$ e $d_f(x \wedge y) = d_f(x) \wedge y + (-1)^{\deg x} x \wedge d_f(y)$ para qualquer $x \in \bigwedge(R^n)$ homogêneo.

Observe que, como R^n é um R-módulo livre com posto n, $\bigwedge^k(R^n) = 0$ para todo $k > n$ e $\bigwedge^k(R^n) \cong R^{\binom{n}{k}}$ para todo $0 \leq k \leq n$. Além disso, a condição $d_f \circ d_f = 0$, significa que o diagrama abaixo é um complexo.

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{d_f} R^{\binom{n}{n-1}} \xrightarrow{d_f} \ldots \xrightarrow{d_f} R^{\binom{n}{1}} \xrightarrow{d_f} R \longrightarrow 0,$$

assim tem-se a seguinte definição.

Definição 2.15. *Sejam R um anel e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência em R. O complexo de Koszul da sequência $\mathbf{x}$, denotado por $K_\bullet(\mathbf{x}, R)$, é o complexo acima construído para o ideal $I = (x_1, \ldots, x_n)$.*

Seja $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ um sequência em R e $K_\bullet(\mathbf{x})$ o complexo de Koszul de $\mathbf{x}$. Defina os complexos

$$Z_\bullet(\mathbf{x}) = \ker(d_f) \qquad\qquad B_\bullet(\mathbf{x}) = \operatorname{Im}(d_f)$$

Com isso, é possível definir a homologia do complexo de Koszul

Definição 2.16. *Sejam R um anel, $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência em R, a homologia de Koszul é o complexo*

$$H_\bullet(\mathbf{x}) = \frac{Z_\bullet(\mathbf{x})}{B_\bullet(\mathbf{x})}.$$

De todas as homologias de Koszul de $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R)$, as mais simples de serem calculadas na práticas são a $H_0(x_1, \ldots, x_n; R)$ e $H_n(x_1, \ldots, x_n; R)$, pois

$$H_0(x_1, \ldots, x_n; R) = \frac{R}{I} \qquad\qquad H_n(x_1, \ldots, x_n; R) = 0 :_R I.$$

Dada uma sequência $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$, pode-se demonstrar que $H_i(x_1, \ldots, x_n; R) = 0$ para todo $i > n$. Uma das consequências da Proposição a seguir é que se os t primeiros termos de $\mathbf{x}$ constituir uma sequência R-regular, então $H_i(x_1, \ldots, x_n; R) = 0$ para todo $i \in \{n - t + 1, \ldots n\}$.

Proposição 2.17. *Sejam R um anel e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ um sequência em R. Considere $\mathbf{x}' = x_1, \ldots, x_p$ e $\mathbf{x}'' = x_{p+1}, \ldots, x_n$ para algum $p \leq n$. Se a sequência $\mathbf{x}'$ é R-regular, então se tem o isomorfismo de complexos $H_\bullet(\mathbf{x}; R) \cong H_\bullet(\mathbf{x}''; R/(\mathbf{x}'))$.*

Demonstração: Consultar o Corolário 1.6.13 de [6]. □

Assumindo que R seja Noetheriano, a próxima Proposição consiste, num certo sentido, na recíproca da consequência da Proposição 2.17.

Proposição 2.18. *Sejam R um anel Noetheriano e $I = (x_1, \ldots, x_n)$ um ideal de R.*

(i) $R = I$ se e somente se $H_i(x_1, \ldots, x_n; R) = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$;

(ii) Suponha que $H_i(x_1, \ldots, x_n; R) \neq 0$ para algum i e seja

$$h = \max\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\; ; \;\; H_i(x_1, \ldots, x_n; R) \neq 0\}.$$

Neste caso, tem-se $\operatorname{grade}(I, R) = n - h$.

Demonstração: Consulta o Teorema 1.6.17 de [6]. □

Esta Proposição, utilizada juntamente com a Proposição a seguir, fornece uma boa ferramenta para calcular o grade de um ideal gerado por uma sequência. A Proposição 2.19 consiste num resultado bastante famoso da álgebra comutativa que é conhecido como a rigidez do complexo de Koszul.

Proposição 2.19 (Rigidez do complexo de Koszul)**.** *Sejam R um anel, q um inteiro não-negativo e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ uma sequência de elementos de R tal que $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{Rad}(R)$. Se $H_q(x_1, \ldots, x_n; R) = 0$, então $H_i(x_1, \ldots, x_n; R) = 0$ para todo $i \geq q$. Em particular, se R for local, este resultado vale para qualquer sequência $\mathbf{x}$, cujos elementos são não-invertíveis.*

Demonstração: Consultar o Teorema 5.10 de [15]. □

Proposição 2.20. *Sejam R um anel Noetheriano local e I um ideal próprio de R gerado pela sequência $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$. Tem-se que* $\mathrm{grade}(I, R) = n$ *se e somente se $\mathbf{x}$ é uma sequência R-regular.*

Demonstração: Consultar o Corolário 1.6.19 de [6].

2.3 Anéis e módulos Cohen-Macaulay

A Proposição 2.13 diz que, num um anel Noetheriano local, o depth de um R-módulo finitamente gerado é sempre limitado superiormente pela sua dimensão de Krull. Acontece que, quando vale a igualdade, este módulos possuem propriedades muito bem comportadas.

Definição 2.21. *Seja R um anel Noetheriano local. Um R-módulo finitamente gerado M é dito Cohen-Macaulay se* $\mathrm{depth}(M) = \dim(M)$. *Se R for um R-módulo Cohen-Macaulay, diz-se que R é um anel Cohen-Macaulay. Por fim, um*

R-módulo é dito Cohen-Macaulay maximal se M é um R-módulo Cohen-Macaulay e $\dim(M) = \dim(R)$.

Esta definição pode ser generalizada para o caso em que R não é um anel local. Tal generalização é feita de maneira que a propriedade de ser Cohen-Macaulay seja uma propriedade local no seguinte sentido:

Definição 2.22. *Seja R um anel Noetheriano. Um R-módulo finitamente gerado M é dito Cohen-Macaulay se $M_{\mathfrak{m}}$ é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo Cohen-Macaulay para qualquer ideal $\mathfrak{m}$ maximal. R é dito Cohen-Macaulay se $R_{\mathfrak{m}}$ for Cohen-Macaulay para qualquer ideal $\mathfrak{m}$-maximal.*

Proposição 2.23. *Sejam R um anel Noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado. Se M for Cohen-Macaulay, então* $\dim(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{depth}(M)$ *para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$.

Demonstração: Consultar o Teorema 2.1.2 de [6].

Corolário 2.24. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Se M é Cohen-Macaulay, então M não possui primos imersos, isto é,* $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{MinAss}(M)$.

Demonstração: Sejam $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$ primos associados de M, com $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$, e seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal de R tal que $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{m}$. Note que $\mathfrak{p}_1 R_{\mathfrak{m}}$ e $\mathfrak{p}_2 R_{\mathfrak{m}}$ são primos associados de $M_{\mathfrak{m}}$ e $\mathfrak{p}_1 R_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{p}_2 R_{\mathfrak{m}}$. Assim, como $M_{\mathfrak{m}}$ é Cohen-Macaulay, segue que $\dim(R_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{p}_2 R_{\mathfrak{m}})) = \dim(R_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{p}_1 R_{\mathfrak{m}}))$ daí $\mathfrak{p}_1 R_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{p}_2 R_{\mathfrak{m}}$ e, portanto $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. Em particular, todo primo associado de M é minimal no conjunto dos primos associados de M. □

O próximo resultado diz que a Cohen-Macaulidade é um propriedade estável para especialização e localização.

Proposição 2.25. *Seja R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado*

(i) Suponha que $\mathbf{x}$ é uma sequência M-regular. Se M é Cohen-Macaulay, então $M/\mathbf{x}M$ também é Cohen-Macaulay (sobre R ou $R/(\mathbf{x})$);

(ii) Se M é Cohen-Macaulay, então para qualquer conjunto multiplicativamente fechado $S \subseteq R$, M_S é um R_S-módulo Cohen-Macaulay. Em particular, $M_{\mathfrak{p}}$ é um $R_{\mathfrak{p}}$-módulo Cohen-Macaulay para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Demonstração: Consultar o Teorema 2.1.3 de [6]. □

Definição 2.26. *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. I é dito uma interseção completa se existir uma sequência R-regular $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ tal que $I = (x_1, \ldots, x_n)$.*

Em geral, dados R é um anel Noetheriano e I um ideal próprio de R, pode-se provar que $\operatorname{grade}(I, R) \leq \operatorname{ht}(I)$ e que $\operatorname{ht}(I) + \dim(R/I) \leq \dim(R)$. Se R for Cohen-Macaulay, entretanto, o grade de R em I é exatamente a altura de I. Ainda mais, assumindo que R seja local, tem-se que $\operatorname{ht}(I) + \dim(R/I) = \dim(R)$.

Proposição 2.27. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay e I um ideal próprio de R. Neste caso, tem-se $\operatorname{grade}(I, R) = \operatorname{ht}(I)$ e, se R for local, então $\operatorname{ht}(I) + \dim(R/I) = \dim(R)$.*

Demonstração: Consultar o Corolário 2.1.4 de [6]. □

Corolário 2.28. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local e I um ideal próprio de R. Se $\mu(I) = \operatorname{ht}(I) = n$, então I é uma interseção completa.*

Demonstração: De fato, seja $\{x_1, \ldots x_n\}$ um sistema minimal de geradores de I. Pela Proposição 2.27 tem-se que $\operatorname{grade}(I, R) = n$, assim, pela proposição 2.20, $x_1, \ldots, x_n$ é um sequência R-regular e, portanto, I é uma interseção completa. □

Corolário 2.29. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local e I um ideal próprio de R. Se R/I for um anel Cohen-Macaulay, então todos os ideais primos que contêm minimalmente I possuem a mesma altura, a saber* $\mathrm{ht}(I)$.

Demonstração: De fato, como R/I é Cohen-Macaulay, segue do Corolário 2.24 que $\mathrm{Ass}(R/I) = \mathrm{MinAss}(R/I) = \mathrm{MinV}(I)$. Seja $\mathfrak{p}$ um primo que contém I minimalmente. Pela Proposição anterior tem-se que

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R) - \dim(R/\mathfrak{p}).$$

Porém, como $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$, pela Proposição 2.23 tem-se que $\dim(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{depth}(R/I) = \dim(R/I)$. Portanto

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(R) - \dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R) - \dim(R/I) = \mathrm{ht}(I).$$

□

Definição 2.30. *Seja R um anel Noetheriano. R é dito catenário se satisfazer a seguinte propriedade: Se $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ são ideais primos quaisquer de R com $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, então toda cadeia saturada de ideais primos com extremos $\mathfrak{q}$ e $\mathfrak{p}$ possui o mesmo tamanho.*

Proposição 2.31. *Seja R um anel Noetheriano. Se R é um anel Cohen-Macaulay então R é catenário.*

Demonstração: Consultar o Teorema 2.1.12 de [6]. □

Assim como propriedade de ser Noetheriano, a Cohen-Macaulidade também é estável para extensões polinomiais.

Proposição 2.32. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R-módulo finitamente gerado. Defina $S := R[X_1, \ldots, X_n]$. Neste caso, $M \otimes_R S$ é um S-módulo Cohen-Macaulay se e somente se M é um R-módulo Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Consultar o Teorema 2.1.9 de [6].

Corolário 2.33. *Seja R um anel Noetheriano. Se R for Cohen-Macaulay, então $R[X_1, \ldots, X_n]$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Basta notar que $R \otimes_R R[X_1, \ldots, X_n] = R[X_n, \ldots, X_n]$ é um $R[X_1, \ldots, X_n]$-módulo Cohen-Macaulay pela Proposição 2.32 e, portanto, é um anel Cohen-Macaulay. $\square$

Proposição 2.34. *Sejam R um anel local Cohen-Macaulay e $I = (x_1, \ldots, x_n)$ um ideal de R. Denote $\overline{R} = R/(0 :_R I)$. Se $I \cap (0 :_R I) = 0$, então, para cada $i \geq 0$, existe a seguinte sequência exata*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow H_i(x_1, \ldots, x_n; R) \longrightarrow H_i(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}; \overline{R}). \longrightarrow 0$$

Onde L é um R-módulo isomorfo a uma soma direta finita de $0 :_R I$.

Demontração: Consultar o Lema 1.4 de [20]. $\square$

2.4 Anel associado graduado e Cohen-Macaulidade

Nesta seção, serão apresentados, dentre outros resultados, alguns efeitos que a Cohen-Macaulidade do anel associado graduado de um ideal I podem trazer para o anel R e seus ideais.

Proposição 2.35. *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. Se a álgebra estendida de Rees de I é Cohen-Macaulay, então o anel associado graduado de I é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: De fato, como R é Noetheriano, $R[It, t^{-1}]$ é um anel Noetheriano. Além disso, como $\mathrm{gr}_I(R) \cong R[It, t^{-1}]/t^{-1}R[It, t^{-1}]$, segue que $\mathrm{gr}_I(R)$ também é um anel Noetheriano. Por fim, uma vez que t^{-1} é $R[It, t^{-1}]$-regular e $R[It, t^{-1}]$ é Cohen-Macaulay, segue da Proposição 2.25 que $\mathrm{gr}_I(R)$ é um anel Cohen-Macaulay. $\square$

A Proposição a seguir diz que, dados um anel Noetheriano R e um ideal I, se $\mathrm{gr}_I(R)$ é um anel Cohen-Macaulay, então $R_\mathfrak{p}$ é Cohen-Macaulay para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ contendo I. Como consequência no caso local, deduz-se que, se I for um ideal próprio, o próprio anel R é Cohen-Macaulay.

Proposição 2.36. *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. Se $\mathrm{gr}_I(R)$ é um anel Cohen-Macaulay, então $R_\mathfrak{p}$ é Cohen-Macaulay para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ contendo I.*

Demonstração: Consultar o Teorema 4.5.7 de [6].

Corolário 2.37. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e I um ideal próprio de R. Se $\mathrm{gr}_I(R)$ é um anel Cohen-Macaulay, então R é Cohen-Macaulay*

Demonstração: Com efeito, como I é um ideal próprio, tem-se $I \subseteq \mathfrak{m}$. Portanto, pela Proposição 2.36, tem-se que $R = R_\mathfrak{m}$ é Cohen-Macaulay. $\square$

Proposição 2.38. *Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R e $G = \mathrm{gr}_I(R)$ o anel associado graduado de I. Se $X = x + I^2 \in [G]_1$ é um elemento G-regular, então $xI^n = I^{n+1} \cap (x)$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração: Da fato, é claro que se tem $xI^n \subseteq I^{n+1} \cap (x)$ para todo $n \geq 1$. Por outro lado, se $z \in I^{n+1} \cap (x)$, então $z = xa$ para algum $a \in R$. Se $a \notin I^n$, então $a \in I^k \setminus I^{k+1}$ para algum $0 \leq k < n$.

Considerando $Y = a + I^{k+1} \in [G]_k$, tem-se que $Y \neq 0$ e, portanto $XY = xa + I^{k+1} \neq 0$, assim, $xa \notin I^{k+1}$. Como $n + 1 > k + 1$, segue que $z = xa \notin I^{n+1} \subseteq I^{k+1}$, gerando uma contradição. Logo $z \in xI^n$ e $I^{n+1} \cap (x) \subseteq xI^n$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Sejam I um ideal de um anel local Cohen-Macaulay R e $n, m \in \mathbb{N}$. Em geral, sabe-se que I^m está contido no cólon $I^{n+m} :_R I^n$. A Proposição 2.41 prova o interessante resultado que diz que, se $\mathrm{ht}(I) > 0$ e $\mathrm{gr}_I(R)$ for Cohen-Macaulay, então

$$I^{n+m} :_R I^m = I^n.$$

A prova deste resultado requer um pouco de trabalho e, portanto, serão provados primeiramente dois lemas.

Lema 2.39. *Sejam R um anel, I um ideal de R e $G = \mathrm{gr}_I(R)$ o anel associado graduado de I. Se $Z = z + I^{l+1} \in [G]_l$ é um elemento G-regular, então $I^{n+l} :_R z = I^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Suponha que $x \notin I^n$, assim existe algum $0 \leq k < n$ tal que $x \in I^k \setminus I^{k+1}$. Considerando $X = x + I^{k+1}$, tem-se $X \neq 0$, assim, uma vez que Z é G-regular, segue que $XZ = xz + I^{k+l+1} \neq 0$, portanto $xz \notin I^{k+l+1}$. Como $k + l + 1 \leq n + l$, segue que $xz \notin I^{n+l}$, daí $x \notin I^{n+l} :_R z$, portanto $I^{n+l} :_R z \subseteq I^n$. Uma vez que a outra inclusão é clara, o resultado segue. $\square$

Lema 2.40. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel Cohen-Macaulay local e I um ideal de R com $\mathrm{ht}(I) > 0$. Definindo $G_+ = (I/I^2) \oplus \cdots \oplus (I^n/I^{n+1}) \oplus \ldots$, tem-se que, se $G = \mathrm{gr}_I(R)$ é Cohen-Macaulay, então $\mathrm{grade}(G_+, G) > 0$.*

Demonstração: Considere o ideal

$$M = \frac{\mathfrak{m}}{I} \oplus \frac{I}{I^2} \oplus \frac{I^2}{I^3} \oplus \cdots \oplus \frac{I^n}{I^{n+1}} \oplus \ldots$$

Note que G_+ é um ideal homogêneo contido em M. Uma vez que $\mathrm{ht}(M) = \dim(\mathrm{gr}_I(R))$, tem-se que $\dim(G) = \dim(G_M)$ e $\mathrm{ht}(G_+) = \mathrm{ht}((G_+)_M)$. Observe também que o homomorfismo sobrejetor de anéis $\phi : G \longrightarrow R/I$ tal que $\phi(\overline{a_0} + \cdots + \overline{a_n}t^n) = \overline{a_0}$ induz um isomorfismo $\psi : G/G_+ \longrightarrow R/I$. Tomando $S = G/G_+ \setminus M/G_+$, tem-se que $\psi(S)$ está contido no conjunto dos elementos invertíveis de R/I, assim, aplicando a Proposição 1.113 a ψ, conclui-se que $G_M/(G_+)_M \cong R/I$.

Como G_M e R são anéis Cohen-Macaulay locais, segue da Proposição 2.27 que

$$\begin{aligned}\dim(G) - \mathrm{ht}(G_+) &= \dim(G_M) - \mathrm{ht}((G_+)_M) = \dim(G_M/((G_+)_M)) \\ &= \dim(R/I) = \dim(R) - \mathrm{ht}(I).\end{aligned}$$

Por fim, já que $\dim(G) = \dim(R) < \infty$, obtém-se $\mathrm{ht}(G_+) = \mathrm{ht}(I) > 0$ e, portanto, $\mathrm{grade}(G_+, G) = \mathrm{ht}(G_+) > 0$. $\square$

Proposição 2.41. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local e I um ideal de R com $\mathrm{ht}(I) > 0$. Se $G = \mathrm{gr}_I(R)$ é Cohen-Macaulay, então $I^{n+m} :_R I^n = I^m$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Com efeito, observe que G_+ é um ideal de G gerado por elementos de grau positivos e G_+ contém um elemento G-regular pelo Lema 2.40, assim, pelo Corolário 1.64, G_+ contém um elemento G-regular homogêneo $Z = z + I^{l+1} \in [G]_l$ para algum $l > 0$.

Dado $y \in I^{n+m} :_R I^n$, escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n$ e l divide k. Observe que $I^{n+m} :_R I^n \subseteq I^{k+m} :_R I^k$, portanto $y \in I^{k+m} :_R I^k$. Como $z \in I^l$, tem-se $z^{k/l} \in I^k$, daí $yz^{k/l} \in yI^k \subseteq I^{k+m}$, assim $y \in I^{k+m} :_R z^{k/l}$.

Por outro lado, como Z é G-regular, $Z^{k/l} = z^{k/l} + I^{k+1}$ também é G-regular, portanto, pelo Lema 2.39, $I^{k+m} :_R z^{k/l} = I^m$, daí $y \in I^m$ e $I^{n+m} :_R I^n \subseteq I^m$. Uma vez que a outra inclusão é clara, o resultado segue. $\square$

Lema 2.42. *Sejam $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ um anel graduado Noetheriano e I um ideal homogêneo de R gerado por elementos de grau 1. Suponha que R_0 seja um anel local com corpo residual infinito. Se $\mathrm{grade}(I, R) = g$, então existe uma sequência R-regular $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_g$ composta por elementos homogêneos de grau 1.*

Demonstração: Consultar as Proposições 1.5.11 e 1.5.12 de [6]. $\square$

Proposição 2.43. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Cohen-Macaulay local com corpo residual infinito e I um ideal de R. Considerando G e G_+ como no Lema 2.40, se G é*

Cohen-Macaulay e $\mathrm{ht}(I) > 0$*, então* G_+ *contém um elemento* G*-regular homogêneo de grau 1.*

Demonstração: Basta combinar o Lema 2.40 e o Lema 2.42. $\square$

2.5 Anéis Gorenstein

Nesta seção, será introduzida uma importante classe de anéis locais que pode ser caracterizada em termos da álgebra homológica.

Definição 2.44. *Um anel* R *Noetheriano local é dito um anel Gorenstein se* R *possuir dimensão injetiva finita. Mais geralmente, um anel Noetheriano é dito Gorenstein se* $R_{\mathfrak{m}}$ *é Gorenstein para todo ideal maximal* $\mathfrak{m}$*.*

Assim como na Cohen-Macaulidade, os anéis Gorenstein também são estáveis por especialização por sequências regulares e localização.

Proposição 2.45. *Seja* R *um anel Noetheriano.*

(i) Se R *é Gorenstein, então para todo conjunto multiplicativamente fechado* $S \subseteq R$*, o anel* R_S *é Gorenstein. Em particular,* $R_{\mathfrak{p}}$ *é Gorenstein para todo* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$*;*

(ii) Dada uma sequência R*-regular* $\mathbf{x}$*. Se* R *é Gorenstein, então* $R/(\mathbf{x})$ *é Gorenstein.*

Demonstração: Consultar a Proposição 3.1.19 de [6]. $\square$

A próxima Proposição mostra que a classe dos anéis Gorenstein constitui uma subclasse da classe dos anéis Cohen-Macaulay.

Proposição 2.46. *Seja* R *um anel Noetheriano. Se* R *é Gorenstein, então* R *é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Para o caso local, consulte a Proposição 3.1.20 de [6]. Mais geralmente, dado um anel Gorenstein R, $R_{\mathfrak{m}}$ é um anel Gorenstein e, portanto, Cohen-Macaulay para qualquer ideal maximal $\mathfrak{m}$. Portanto, por definição, R é Cohen-Macaulay. $\square$

2.6 Módulo canônico

Definição 2.47. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local e M um R-módulo finitamente gerado não-nulo com* $\operatorname{depth}(M) = t$. *O tipo de M, denotado por $\tau(M)$, é a dimensão do k-espaço vetorial* $\operatorname{Ext}^t_R(k, M)$.

Definição 2.48. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Cohen-Macaulay local. Um módulo canônico de R é um R-módulo Cohen-Macaulay maximal C com $\tau(C) = 1$ e dimensão injetiva finita.*

Dado um anel R Cohen-Macaulay local, R pode não admitir um módulo canônico. Entretanto, se R possuir algum, o módulo canônico de R é único a menos de isomorfismo e é tradicionalmente denotado por ω_R.

Proposição 2.49. *Seja R um anel Cohen-Macaulay local. Se C e C' são módulos canônicos de R, então C' e C' são isomorfos. Além disso*

(i) $\operatorname{Hom}_R(C, C') \cong R$ *e qualquer gerador ϕ de* $\operatorname{Hom}_R(C, C')$ *é um isomorfismo;*

(ii) Considerando o homomorfismo de R-módulos

$$\varphi : R \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(R, R)$$
$$r \longmapsto f_x,$$

onde f_x é a multiplicação por x, tem-se que φ é um isomorfismo.

Demonstração: Consultar o Teorema 3.3.4 de [6]. □

Assim como em anéis Cohen-Macaulay, a propriedade de existência do módulo canônico é estável para especialização por sequências regulares e localização em ideais primos.

Proposição 2.50. *Seja R um anel Cohen-Macaulay local com módulo canônico ω_R.*

(i) Se $\mathbf{x}$ é uma sequência R-regular, então $R/(\mathbf{x})$ admite módulo canônico e $\omega_{R/(\mathbf{x})} \cong \omega_R/(\mathbf{x}\omega_R)$;

(ii) Para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $R_\mathfrak{p}$ admite módulo canônico e $\omega_{R_\mathfrak{p}} \cong (\omega_R)_\mathfrak{p}$.

Demonstração: Consultar o Teorema 3.3.5 de [6]. □

A próxima Proposição dá uma condição necessária e suficiente para que um anel Cohen-Macaulay local admita módulo canônico.

Proposição 2.51. *Seja R um anel Cohen-Macaulay local. Neste caso, R admite um módulo canônico se, e somente se, R é imagem homomórfica de um anel Gorenstein local.*

Demonstração: Consultar o Teorema 3.3.6 de [6]. □

Corolário 2.52. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local e I um ideal de R tal que R/I é Cohen-Macaulay. Se R admite módulo canônico, então R/I também admite módulo canônico.*

Demonstração: Com efeito, como R admite módulo canônico, existe um anel Gorenstein local S e um homomorfismo sobrejetor de anéis $\phi : S \longrightarrow R$. Considere $\pi : R \longrightarrow R/I$ o homomorfismo canônico, daí $\pi \circ \phi : S \longrightarrow R/I$ é um homomorfismo sobrejetor de anéis. Como R/I é Cohen-Macaulay local, segue da Proposição anterior que R/I admite módulo canônico. □

Proposição 2.53. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel Cohen-Macaulay local e* $\phi : R \longrightarrow S$ *um homomorfismo plano de anéis Cohen-Macaulay locais. Se* R *admite módulo canônico e* $S/\mathfrak{m}S$ *é Gorenstein, então* S *também admite módulo canônico.*

Demonstração: Consultar o Teorema 3.3.14 de [6]. □

É possível estender o conceito de módulo canônico para a classe de anéis Cohen-Macaulay graduados *local, como será visto na seguinte definição.

Definição 2.54. *Seja* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel Cohen-Macaulay graduado *local de *dimensão* d*. Um* R*-módulo graduado finitamente gerado* C *é um módulo canônico graduado de* R *se existirem os seguintes isomorfismos homogêneos*

$$^*\operatorname{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}, C) \cong \begin{cases} 0 & Se\ i \neq d. \\ R/\mathfrak{m} & Se\ i = d. \end{cases}$$

A próxima Proposição diz que se um anel Cohen-Macaulay graduado *local admitir módulo canônico graduado C, então C é um módulo canônico de R.

Proposição 2.55. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel Cohen-Macaulay graduado *local e* C *um módulo canônico graduado de* R*. Desta forma*

(i) C *é um módulo canônico de* R*;*

(ii) Se $\mathfrak{m}$ *é um ideal maximal, então* C *é unicamente determinado a menos de um isomorfismo homogêneo.*

Demonstração: Consultar a Proposição 3.6.9 de [6]. □

Capítulo 3

Cohomologia local e S_2-ficação

Os objetivos deste capítulo são apresentar os resultados da teoria de S_2-ficação que serão utilizados no Lema 8.1, bem como apresentar uma generalização do conceito de módulo canônico em que a exigência da Cohen-Macaulidade é descartada.

3.1 Definições básicas

Nesta seção são apresentados rapidamente conceitos e resultados clássicos da teoria de cohomologia local. Tal apresentação é somente o suficiente para que o leitor consiga compreender as seções seguintes.

Definição 3.1. *Seja $(L, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. $(L, \leq)$ é dito direto se, para quaisquer $x, y \in L$, existe $z \in L$ tais que $x \leq z$ e $y \leq z$.*

Definição 3.2. *Sejam $(L, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado direto e R um anel Noetheriano. Uma família inversa de ideais de R sobre L é uma família de ideais $(I_i)_{i \in L}$ de R tal que sempre que $(i, j) \in L \times L$ for tal que $i \geq j$, então $I_i \subseteq I_j$.*

Proposição 3.3. *Sejam R um anel Noetheriano e $\mathcal{B} = (I_i)_{i \in L}$ uma família inversa de ideais de R. Existe um funtor covariante, exato à esquerda $\Gamma_{\mathcal{B}} : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow$*

$\mathbf{Mod_R}$ *tal que, para cada R-módulo M*

$$\Gamma_{\mathcal{B}}(M) = \bigcup_{i \in L} (0 :_M I_i)$$

e, para cada homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, $\Gamma_{\mathcal{B}}(f) : \Gamma_{\mathcal{B}}(M) \longrightarrow \Gamma_{\mathcal{B}}(N)$ é a restrição de f a $\Gamma_{\mathcal{B}}(M)$.

Demonstração: Consultar o Teorema 1.2.11 de [7]. $\square$

Observação 3.4. *Dado um ideal I de R, a família $\mathcal{B} = (I^n)_{n \in \mathbb{N}}$ constitui uma família inversa de ideais de R. Neste caso particular o funtor $\Gamma_{\mathcal{B}}$ é comumente representado na literatura por Γ_I.*

Definição 3.5. *Sejam R um anel Noetheriano e $\mathcal{B} = (I_i)_{i \in L}$ uma família inversa de ideais de R. Um R-módulo M é dito $\mathcal{B}$-torção se $\Gamma_{\mathcal{B}}(M) = M$.*

Definição 3.6. *Sejam R um anel Noetheriano e $\mathcal{B} = (I_i)_{i \in L}$ uma família inversa de ideais de R. Define-se o funtor i-ésima cohomologia local com respeito a $\mathcal{B}$, denotando-o por $H^i_{\mathcal{B}}$, como o i-ésimo funtor derivado à direita $\mathcal{R}^i\Gamma_{\mathcal{B}}$.*

Observação 3.7. *Similarmente, se $\mathcal{B} = (I^n)_{n \in \mathbb{N}}$ para algum ideal I de R, costuma-se denotar na literatura o funtor $H^i_{\mathcal{B}}$ por H^i_I.*

Definição 3.8 (Dual de Matlis)**.** *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local e $E := E_R(k)$ o envelope injetivo de k. Denote por D o funtor exato, R-linear, contravariante*

$$\mathrm{Hom}_R(\_\_, E) : \mathbf{Mod_R} \longrightarrow \mathbf{Mod_R}$$

Para cada R-módulo M, $D(M)$ será chamado de dual de Matlis de M.

Proposição 3.9 (Teorema da Dualidade local)**.** *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local de dimensão n que é imagem homomórfica de um anel Gorenstein* *local R' de dimensão n'. Para cada R-módulo finitamente gerado M e para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe isomorfismo entre os R-módulos*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong D(\operatorname{Ext}^{n'-i}_{R'}(M, R')) = \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ext}^{n'-i}_{R'}(M, R'), E_R(k)).$$

Demonstração: Consultar o Teorema 11.2.6 de [7]. □

3.2 Módulo canônico: Um novo ponto de vista

Nesta seção será apresentada uma definição para módulos canônicos que generaliza a Definição 2.48, na qual a hipótese da Cohen-Macaulidade do anel era exigida.

Definição 3.10. *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local de dimensão n. Um módulo canônico de R é um R-módulo finitamente gerado C tal que*

$$\operatorname{Hom}_R(C, E_R(k)) \cong H^n_{\mathfrak{m}}(R).$$

Observação 3.11. *Note que o Teorema da Dualidade Local tem forte conexão com a definição de módulo canônico, uma vez que se R for um anel local de dimensão n e for imagem homomórfica de um anel Gorenstein local de dimensão n', então $\operatorname{Ext}^{n'-n}_{R'}(R, R')$ é um módulo canônico de R.*

Assim como no caso em que R é Cohen-Macaulay, o módulo canônico de anel Noetheriano local, se existir, é único a menos de isomorfismo.

Proposição 3.12. *Seja R um anel Noetheriano local. Se R admitir um módulo canônico, então quaisquer dois módulos canônicos C e C' de R são isomorfos.*

Demonstração: Consultar o Teorema 12.1.6 de [7]. □

A seguinte proposição confirma que a Definição 3.10 constitui uma generalização da Definição 2.48. Portanto, também será denotado o módulo canônico de R, se existir, por ω_R.

Proposição 3.13. *Seja R uma anel Cohen-Macaulay local de dimensão n. Se R admite módulo canônico ω_R, então ω_R é um módulo Cohen-Macaulay maximal de dimensão injetiva finita igual a n e com $\tau(\omega_R) = 1$.*

Demonstração: Consultar o Corolário 12.1.21 e o Exercício 12.1.23 de [7]. □

Assim como no caso em que R é um anel local Cohen-Macaulay, a definição de módulo canônico para anéis Noetherianos locais se estende para a classe dos anéis Noetherianos *locais. Para defini-lo cuidadosamente, é preciso um certo trabalho, o que não será feito nesta dissertação por limitação de espaço. Para o leitor interessado, sugiro os Capítulos 13 e 14 de [7].

Definição 3.14. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel graduado Noetheriano *local com $^*\dim(R) = n$. Um módulo canônico graduado para R é um R-módulo finitamente gerado graduado C para o qual existe um isomorfismo homogêneo.*

$$^*\operatorname{Hom}_R(C, {}^*E_R(R/\mathfrak{m})) \cong H^n_{\mathfrak{m}}(R),$$

*onde $^*E(R/\mathfrak{m})$ é o *envelope injetivo de $R/\mathfrak{m}$ que consiste num R-módulo graduado que é injetivo na categoria dos R-módulos graduados e é uma extensão *essencial de $R/\mathfrak{m}$.*

Proposição 3.15. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel graduado Cohen-Macaulay *local com módulo canônico graduado ω_R e $(S, \mathfrak{n})$ um anel graduado Noetheriano *local. Se $\phi : (R, \mathfrak{m}) \longrightarrow (S, \mathfrak{n})$ é um homomorfismo de anéis satisfazendo*

- *$\phi(R_i) \subseteq S_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$;*
- *$\phi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$;*
- *S é um R-módulo graduado finitamente gerado via ϕ.*

Então S admite módulo canônico graduado e $\omega_S \cong {}^*\operatorname{Ext}^t_R(S, \omega_R)$, onde $t = {}^*\dim(R) - {}^*\dim(S)$.

3.3 Equidimensionalidade e $\mathfrak{u}(0)$

Nesta seção será introduzido o parâmetro de anel $\mathfrak{u}(0)$ que possui forte ligação com a equidimensionalidade e a propriedade de ser unmixed.

Definição 3.16. *Um anel R é dito equidimensional se* $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R)$ *para todo* $\mathfrak{p} \in \mathrm{MinSpec}(R)$.

Segue direto do teorema da correspondência que se R for um anel tal que $\mathrm{MinSpec}(R)$ é unitário, então R é equidimensional. Desse modo, tem-se o seguinte resultado.

Proposição 3.17. *Sejam R anel e $\mathfrak{q}$ um ideal $\mathfrak{p}$-primário. Então $R/\mathfrak{q}$ é equidimensional.*

Demonstração: Com efeito, pelo teorema da correspondência, existe um isomorfismo de ordem entre o espectro de $R/\mathfrak{q}$ e o conjunto dos ideais primos de R que contém $\mathfrak{q}$. Assim, para mostrar que $\mathrm{MinSpec}(R/\mathfrak{q})$ é unitário, é suficiente provar que $\mathrm{MinV}(\mathfrak{q})$ é unitário. Se $\mathfrak{p}'$ um ideal primo de R contendo $\mathfrak{q}$, então $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{p}'$. Como $\mathfrak{p}$ é um primo contendo $\mathfrak{q}$, segue que $\mathrm{MinV}(\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{p}\}$. Com base no parágrafo anterior, o resultado segue. □

Definição 3.18. *Seja R um anel Noetheriano local, denota-se por* $\mathfrak{u}(0)$ *o máximo do conjunto* $\{I \subseteq R\ ;\ I \text{ ideal de } R \text{ com } \dim(I) < \dim(R)\}$, *onde* $\dim(I)$ *é a dimensão de Krull de I como R-módulo.*

Proposição 3.19. *Seja R um anel Noetheriano local*

(i) $\mathfrak{u}(0) \neq 0$ *se, e somente se, existir* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ *tal que* $\dim(R/\mathfrak{p}) < \dim(R)$*;*

(ii) $\mathfrak{u}(0) = 0$ *se e, somente se, R é equidimensional e unmixed.*

Demonstração: (i) Suponha que $\mathfrak{u}(0) \neq 0$, assim seja $x \in \mathfrak{u}(0)$ não-nulo tal que $\dim(x) < \dim(R)$. Como R é um anel Noetheriano, pode-se extrair $\mathfrak{p} \in \operatorname{ass}(R)$ tal que $(0 :_R x) \subseteq \mathfrak{p}$. Assim, como $\dim(x) = \dim(R/((0 :_R x)) < \dim(R)$, segue que $\dim(R/\mathfrak{p}) < \dim(R)$.

Reciprocamente, se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)$ tal que $\dim(R/\mathfrak{p}) < \dim(R)$, então $\mathfrak{p} = 0 :_R y$ para algum $y \in R$ e, daí, $\dim(y) = \dim(R/(0 :_R y)) = \dim(R/\mathfrak{p}) < \dim(R)$ e, portanto, $\mathfrak{u}(0) \neq 0$.
(ii) Suponha que $\mathfrak{u}(R) = 0$. Como $\operatorname{MinAss}(R) = \operatorname{MinSpec}(R)$, pelo item (i), R é necessariamente equidimensional. Além disso, conclui-se que todo primo associado de R é minimal, logo R é unmixed.

Reciprocamente, se R é equidimensional e unmixed, conclui-se que para todo primo minimal $\mathfrak{p}$ e, portanto, para todo primo associado de R, tenha-se $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R)$, por conseguinte, invocando a parte (i) novamente, vale que $\mathfrak{u}(0) = 0$. $\square$

Proposição 3.20. *Seja R um anel Noetheriano local. Se R admitir módulo canônico ω_R, então o homomorfismo $h_R : R \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(\omega_R, \omega_R)$ tal que $h_R(r) = r\operatorname{Id}_{\omega_R}$ é tal que $\ker(h_R) = \mathfrak{u}_R(0)$. Em particular, se R é equidimensional e unmixed, então h_R é injetivo.*

Demonstração: Consultar o Teorema 12.1.15 e o Exercício 12.1.11 de [7]. $\square$.

3.4 S_2-ficação

Definição 3.21. *Sejam $(L, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado direto e R um anel Noetheriano. Uma sistema de ideais de R sobre L é uma família inversa ideais $\mathcal{B} = (I_i)_{i \in L}$ de R indexada por L tal que para quaisquer $i, j \in L$, existe $k \in L$ tal que*

$$k \geq i \ , \ k \geq j \ e \ I_k \subseteq I_i I_j.$$

Definição 3.22. *Sejam R um anel Noetheriano e $\mathcal{B}$ um sistema de ideais de R. Um $\mathcal{B}$-fecho de R é uma R-álgebra $\theta : R \longrightarrow A$ tal que*

(i) O homomorfismo θ torna A um R-módulo finitamente gerado;

(ii) $\ker(\theta)$ e $\operatorname{Coker}(\theta)$ são ambos $\mathcal{B}$-torção;

(iii) Se $\theta' : R \longrightarrow R'$ é uma R-álgebra tal que $\ker(\theta')$ e $\operatorname{Coker}(\theta')$ são ambos $\mathcal{B}$-torção, então existe um único homomorfismo de R-álgebras $\phi' : R' \longrightarrow A$.

Proposição 3.23. *Sejam R um anel Noetheriano e $\mathcal{B}$ um sistema de ideais de R. Um $\mathcal{B}$-fecho de R, se existir, é único a menos de um isomorfismo de R-álgebras.*

Demonstração: Suponha que R admita $\mathcal{B}$-fecho e sejam $\theta : R \longrightarrow A$ e $\theta' : R \longrightarrow A'$ $\mathcal{B}$-fechos de R. Assim, por definição, $\ker(\theta), \operatorname{Coker}(\theta), \ker(\theta'), \operatorname{Coker}(\theta')$ são $\mathcal{B}$-torção . Pela parte (iii) da Definição 3.22, existem homomorfismos de R-álgebras $\phi : A \longrightarrow A'$ e $\phi' : A' \longrightarrow A$. Considere o homomorfismo de R-álgebras $\phi' \circ \phi : A \longrightarrow A$. Como $\mathrm{Id}_A : A \longrightarrow A$ é um homomorfismo de R-álgebras, segue da unicidade de (iii) que $\phi' \circ \phi = \mathrm{Id}_A$. Similarmente, mostra-se que $\phi \circ \phi' = \mathrm{Id}_{A'}$, logo ϕ e ϕ' são isomorfismos de R-álgebras. $\square$

Definição 3.24. *Sejam R um anel Noetheriano e $k \in \mathbb{N}$. Um R-módulo finitamente gerado M satisfaz a condição de Serre S_k se*

$$\operatorname{depth}(M_{\mathfrak{p}}) \geq \min\{k, \dim_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})\}$$

para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$.

Proposição 3.25. *Seja R um anel Noetheriano, a família de ideais*

$$\mathcal{G} = \{I \subseteq R \ ; \ \forall\, \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I), R_{\mathfrak{p}} \text{ não satisfaz à condição de Serre } S_2\}$$

é um sistema de ideais de R indexado por $(\mathcal{G}, \leq)$, onde $I \leq J$ se, e somente se, $J \subseteq I$.

Demonstração: Observe que $\mathcal{G}$ é não-vazio, pois, por vacuidade, $R \in \mathcal{G}$. Além disso, $\mathcal{G}$ é um conjunto direto, pois, dados $I, J \in \mathcal{G}$, $I \cap J \in \mathcal{G}$, $I \leq I \cap J$ e $J \leq I \cap J$. Note que, pela definição da relação de ordem, $\mathcal{G}$ é uma família inversa de ideais de R.

Por outro lado, dados $I, J \in \mathcal{G}$, tem-se que o ideal IJ é tal que $IJ \geq I$ e $IJ \geq J$ e, uma vez que $\mathrm{V}(IJ) = \mathrm{V}(I) \cup \mathrm{V}(J)$, tem-se que $IJ \in \mathcal{G}$, portanto $\mathcal{G}$ é um sistema de ideais de R. $\square$

Definição 3.26. *Sejam R um anel Noetheriano e $\mathcal{G}$ o sistema de ideais definido na Proposição 3.25. Define-se a S_2-ficação de R como o $\mathcal{G}$-fecho de R.*

Proposição 3.27. *Seja R um anel Noetheriano local. Se R admite módulo canônico ω_R e $\mathfrak{u}(0) = 0$, então R admite S_2-ficação $A \cong \mathrm{Hom}_R(\omega_R, \omega_R)$. Em particular, o $\mathrm{Hom}_R(\omega_R, \omega_R)$ é um anel comutativo.*

Demonstração: Consultar o Teorema 12.3.10 de [7]. $\square$

A descrição da S_2-ficação de R da Proposição 3.27 é aparentemente bastante abstrata, o que pode dificultar o trabalho com este anel. Na Proposição 3.29, será dada uma nova formulação para este anel, o que permitirá extrair alguns resultados importantes.

Proposição 3.28. *Seja R um anel Noetheriano. A família de ideais*

$$\mathcal{B} = \{I \subseteq R \ ; \ \mathrm{ht}(I) \geq 2\}$$

é um sistema de ideais de R indexada por $(\mathcal{B}, \leq)$, onde $I \leq J$ se, e somente se, $J \subseteq I$.

Demonstração: Com efeito, observe que $\mathcal{B}$ é não-vazio, pois $\mathrm{ht}(R) = \infty$ e, portanto, $R \in \mathcal{B}$. Note também que $\mathcal{B}$ é um conjunto direto, pois dados $I, J \in \mathcal{B}$, o ideal $IJ \in \mathcal{B}$ e $I \leq IJ$ e $J \leq IJ$.

Pela definição da relação de ordem, $\mathcal{B}$ é certamente uma família inversa de ideais de R. Além disso, dados $I, J \in \mathcal{B}$, tem-se $IJ \leq IJ$ e $I \leq IJ$ e $J \leq IJ$, portanto $\mathcal{B}$ é um sistema de ideais de R. $\square$

Proposição 3.29. *Sejam R um anel Noetheriano local, $K = \mathrm{Quot}(R)$ e $\mathcal{B}$ o sistema de ideais definido na Proposição anterior. Se que R admita módulo canônico ω_R e que $\mathfrak{u}(0) = 0$, então a S_2-ficação de R é dada pela R-álgebra $A := \bigcup_{I \in \mathcal{B}}(R :_K I)$. Além disso*

(i) A é um R-módulo finitamente gerado;

(ii) A satisfaz à condição de Serre S_2 como R-módulo;

(iii) Para todo $a \in A$, tem-se que $\mathrm{ht}(R :_R a) \geq 2$.

Demonstração: Consultar o Corolário 12.3.11 de [7]. $\square$

Proposição 3.30. *Seja R um anel Noetheriano local e $K = \mathrm{Quot}(R)$. Suponha que R admita módulo canônico ω_R e que $\mathfrak{u}(0) = 0$. Denotando por $A = \bigcup_{I \in \mathcal{B}}(R :_K I)$ a S_2-ficação de R, tem-se que*

(i) $\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(IA)$ *para todo ideal I de R;*

(ii) Se I é um ideal de R com $\mathrm{ht}(I) \geq 2$, *então* $\mathrm{grade}(IA) \geq 2$. *Mais especificamente, se $x_1, x_2 \in R$ são tais que* $\mathrm{ht}(x_1) = 1$ *e* $\mathrm{ht}(x_1, x_2) = 2$, *então* $\mathbf{x} = x_1, x_2$ *constitui uma sequência A-regular.*

Demonstração: (i): Consultar a Proposição 3.5 de [25].
(ii): Com efeito, note que, como $\mathrm{ht}(I) = 2$, então existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $\mathrm{ht}(x_1) = 1$ e $\mathrm{ht}(x_1, x_2) = 2$, assim, uma vez que R é um anel unmixed, tem-se que x_1 é um elemento R-regular. Observe que, como R é um subanel de A, para mostrar que $\mathrm{grade}(IA) \geq 2$, é suficiente mostrar que a sequência x_1, x_2 é uma sequência A-regular.

Como x_1 é um elemento R-regular, x_1 é necessariamente K-regular, portanto, x_1 é um elemento A-regular. Será mostrado agora que o seguinte mapa é injetivo.

$$\phi : \frac{A}{(x_1)A} \xrightarrow{\quad \cdot x_2 \quad} \frac{A}{(x_1)A}.$$

Se $\overline{s'} \in A/(x_1)A$ é tal que $x_2\overline{s'} = \overline{0}$, então $x_2 s' = x_1 s$ para algum $s \in A$. Em K, considere $f := s'/x_1 = s/x_2$. Como $s, s' \in A$, pela Proposição 3.29, existem ideais $I := (R :_R s)$ e $I' := (R :_R s')$ de R tais que $\operatorname{ht}(I) \geq 2, \operatorname{ht}(I') \geq 2$, $Is \subseteq R$ e $I's' \subseteq R$.

Considerando o ideal $J := II'(x_1, x_2) = II'x_1 + II'x_2$, note que $II'x_1 f = II'x_1 s'/x_1 = I(I's') \subseteq R$ e $II'x_2 f = II'x_2 s/x_2 = I'(Is) \subseteq R$, portanto $Jf \subseteq R$. Além disso, pela Proposição 1.9, $\operatorname{ht} J \geq \min\{\operatorname{ht}(I), \operatorname{ht}(I'), \operatorname{ht}(x_1, x_2)\} = 2$ e, portanto, $J \in \mathcal{B}$ e $f \in R :_K J$. Uma vez que

$$A = \bigcup_{I \in \mathcal{B}} (R :_K I),$$

segue que $f \in A$. Finalmente, como $f = s'/x_1$, tem-se que $s' = fx_1$, o que implica que $\overline{s'} = 0$ em $A/(x_1)A$ e, portanto, ϕ é injetiva. $\square$

A exigência de ser um anel Noetheriano faz-se presente em grande parte dos clássicos resultados da álgebra comutativa. No contexto desse trabalho, a S_2-ficação que o anel R admitirá também é um anel Noetheriano.

Proposição 3.31. *Seja R um anel Noetheriano local. Suponha que R admita módulo canônico ω_R e que $\mathfrak{u}(0) = 0$, então a S_2-ficação $\operatorname{Hom}_R(\omega_R, \omega_R)$ de R é um anel Noetheriano semilocal.*

Demonstração: Consultar a Observação 12.3.13 de [7]. $\square$

Capítulo 4

Tópicos modernos da álgebra comutativa

Os temas abordados neste capítulo são considerados modernos e avançados na álgebra comutativa. Dentre os conceitos abordados neste capítulo, destacam-se a condição G_s, o depth deslizante, a interseção residual e a condição Artin-Nagata.

4.1 Condições G_s

Definição 4.1. *Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R e s um inteiro positivo. Diz-se que I satisfaz à condição G_s se $\mu(I_\mathfrak{p}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$ com $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq s-1$. Diz-se que I satisfaz à condição G_∞ se $\mu(I_\mathfrak{p}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in V(I)$.*

Observação 4.2. *Se I é um ideal satisfazendo à condição G_s, então I satisfaz à condição G_t para todo $1 \leq t \leq s$. Similarmente, se I satisfaz à condição G_∞, então I satisfaz à condição G_s para todo $s \geq 1$.*

Proposição 4.3. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay, I um ideal de R e s um inteiro positivo. Se I satisfaz à condição G_s, então, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ contendo I minimalmente e com $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) < s$, $I_\mathfrak{p}$ é um ideal de interseção completa.*

Demonstração: Com efeito, seja $\mathfrak{p}$ um ideal satisfazendo essas condições. Como I satisfaz à condição G_s, segue que $\mu(I_\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(I_\mathfrak{p}) \leq \mu(I_\mathfrak{p})$, onde a igualdade se deve ao fato que $I_\mathfrak{p}$ está minimalmente contido em $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Como $R_\mathfrak{p}$ é Cohen-Macaulay, segue que $\mathrm{grade}(I_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(I_\mathfrak{p}) = \mu(I_\mathfrak{p})$. Assim, segue da Proposição 2.28 que $I_\mathfrak{p}$ é um ideal de interseção completa. □

Proposição 4.4. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay e I um ideal de R. Se I satisfaz à condição G_1, então o ideal $I + (0 :_R I)$ contém um elemento R-regular. Em particular, tem-se que* $\mathrm{ht}(I + 0 :_R I) \geq 1$.

Demonstração: De fato, suponha por absurdo que $I + (0 :_R I)$ não contenha elemento R-regular. Assim $I + (0 :_R I)$ é um ideal próprio de R e, como R é Cohen-Macaulay, tem-se que $\mathrm{grade}(I + (0 :_R I), R) = \mathrm{ht}(I + (0 :_R I)) = 0$. Portanto existe um ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ tal que $I + (0 :_R I) \subseteq \mathfrak{p}$. Em particular, tem-se que $I \subseteq \mathfrak{p}$ e $0 :_R I \subseteq \mathfrak{p}$. Da condição G_1 sobre I, tem-se que $I_\mathfrak{p} = 0$. Uma vez que o cólon entre ideais finitamente gerados comuta com localização, segue que:

$$(I + (0 :_R I))_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p} + (0 :_R I)_\mathfrak{p} = (0 :_{R_\mathfrak{p}} I_\mathfrak{p}) = (0 :_{R_\mathfrak{p}} 0) = R_\mathfrak{p}.$$

obtendo assim uma contradição, pois, como $I + (0 :_R I)$ é um ideal próprio de R e $I + (0 :_R I) \subseteq \mathfrak{p}$, necessariamente se deveria ter que $(I + (0 :_R I))_\mathfrak{p} \neq R_\mathfrak{p}$. □

Corolário 4.5. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay e I um ideal de R. Se I satisfaz à condição G_1, então $I \cap (0 :_R I) = 0$.*

Demonstração: Seja $x \in (0 :_R I) \cap I$. Observe que $x(0 :_R I) = xI = 0$. Portanto, tem-se que $x(0 :_R I + I) = 0$. Como $0 :_R I + I$ contém um elemento R-regular, segue que $x = 0$. □

Proposição 4.6. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay e I um ideal de R satisfazendo à condição G_1. Denote por $\overline{R} = R/(0 :_R I)$ e seja $\overline{I}$ a imagem de I pelo epimorfismo canônico $\pi : R \longrightarrow \overline{I}$. Neste caso, tem-se que* $\mathrm{ht}(\overline{I}) \geq 1$.

Demonstração: Com efeito, suponha por absurdo que $\mathrm{ht}(\overline{I}) = 0$ e seja $\mathfrak{q} = \overline{\mathfrak{p}}$ um primo minimal de $\overline{R}$ que contém $\overline{I}$, onde $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R contendo $0 :_R I + I$. Pelo teorema da correspondência, $\mathfrak{p}$ contém $0 :_R I$ minimalmente. Como $\mathfrak{p} \in \mathrm{MinV}((0 :_R I)) = \mathrm{MinSupp}(I) = \mathrm{MinAss}(I)$, segue que $\mathfrak{p} = 0 :_R x$ para algum $x \in I$ não-nulo, daí $\mathfrak{p}$ não contém elementos R-regulares. Como R é Cohen-Macaulay, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$. Da condição G_1 sobre I, segue que $I_{\mathfrak{p}} = 0$, o que é uma contradição, pois $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(I)$. $\square$

4.2 Depth deslizante

Definição 4.7. *Sejam R um anel Noetheriano local e $I = (x_1, \ldots, x_n) = (\mathbf{x})$ um ideal de R.*

(i) Diz-se que I satisfaz à condição de depth deslizante se

$$\mathrm{depth}(H_i(\mathbf{x})) \geq \dim(R) - n + i, \qquad i \geq 0.$$

Onde $H_i(\mathbf{x})$ é a i-ésima homologia do complexo de Koszul $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R)$.

(ii) Diz-se que I satisfaz à condição de depth deslizante nos ciclos, SDC_k, no nível t, se

$$\mathrm{depth}(Z_i(\mathbf{x}; R)) \geq \min\{d - n + i + k, d - g + 2, d\} \ \ \textit{para todo } n - g - t \leq i \leq n - g,$$

onde $Z_i(\mathbf{x}; R)$ é o i-ésimo ciclo do complexo de Koszul $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R)$ e $g = \mathrm{grade}(I, R)$.

É possível provar que a definição de depth deslizante depende apenas do número de geradores de I. O exemplo mais comum de ideais que satisfazem à condição de depth deslizante são os interseção completa em anéis Cohen-Macaulay. A seguir se tem um exemplo concreto de ideal que satisfaz a essa condição.

Exemplo 4.8. *Sejam k um corpo e $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, e considere o ideal maximal $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$. Note que $R_{\mathfrak{m}}$ é um anel Cohen-Macaulay local, além disso, para cada $1 \leq i \leq n$, o ideal $I_i = (X_1/1, \ldots, X_i/1)$ é um ideal interseção completa de $R_{\mathfrak{m}}$ e, portanto, satisfaz à condição de depth deslizante. Com efeito, pela Proposição 2.18, para cada $1 \leq j \leq i$,*

$$H_j(X_1/1, \ldots, X_i/1; R_{\mathfrak{m}}) = 0,$$

portanto $\operatorname{depth}(H_j(X_1/1, \ldots, X_i/1; R_{\mathfrak{m}})) = \infty$ *para cada $1 \leq j \leq i$. Além disso,*

$$H_0(X_1/1, \ldots, X_i/1; R_{\mathfrak{m}}) = \frac{k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}}}{I_i}$$

que é um $R_{\mathfrak{m}}$-módulo Cohen-Macaulay de dimensão n e, portanto, depth igual a $n - i$. Como $\dim(R_{\mathfrak{m}}) = n$, *segue que I_i satisfaz à condição de depth deslizante para cada $1 \leq i \leq n$. Imitando esse raciocínio, pode-se mostrar que, em um anel Cohen-Macaulay local, qualquer ideal interseção completa satisfaz à condição de depth deslizante.*

Na classe dos anéis Cohen-Macaulay, a condição de depth deslizante é estável por especialização por sequências regulares e localização em ideais primos

Proposição 4.9. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local, I um ideal de R e $x_1, \ldots, x_k$ é uma sequência R-regular em I. Denote $\overline{I}$ a imagem de I pelo epimorfismo canônico $\pi : R \longrightarrow \overline{R} = R/(x_1, \ldots, x_k)$. Neste caso, I satisfaz depth deslizante se, e somente se, $\overline{I}$ satisfaz (em $\overline{R}$).*

Demonstração: De fato, seja $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ um sistema de geradores de I. Note que $\overline{I} = (\overline{x_{k+1}}, \ldots, \overline{x_n})$. Como $x_1, \ldots, x_k$ é uma sequência R-regular, segue da Proposição 2.17 que $H_i(x_1, \ldots, x_k; R) \cong H_i(\overline{x_{k+1}}, \ldots, \overline{x_n}; \overline{R})$. Além disso, vale que $\dim(\overline{R}) = \dim(R) - k$, assim a propriedade

$$\operatorname{depth}(H_i(x_1, \ldots, x_k; R)) \geq \dim(R) - n + i \qquad \forall i \geq 0$$

vale se, e somente se, a seguinte propriedade valer

$$\operatorname{depth}(H_i(\overline{x_{k+1}}, \ldots, \overline{x_n}; \overline{R}) \geq \dim(\overline{R}) - (n-k) + i \qquad \forall i \geq 0.$$

Portanto, o resultado segue. □

Proposição 4.10. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local e I um ideal de R satisfazendo à propriedade de depth deslizante. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$, então o ideal $I_{\mathfrak{p}}$ satisfaz à condição de depth deslizante.*

Demonstração: Consultar a Observação (ii) na página 59 de [13]. □

Proposição 4.11. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local de dimensão d, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ um ideal satisfazendo à condição de depth deslizante. Denote por Z_i e B_i o i-ésimo ciclo e i-bordo do complexo de Koszul associado $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n; R)$, respectivamente. Neste caso, para cada $i \geq 0$, tem-se*

$$\operatorname{depth}(Z_i) \geq \min\{d, d - n + i + 1\}.$$

Demonstração: Observe primeiramente que, para cada $i \geq 0$, tem-se as seguintes sequências exatas

$$0 \longrightarrow B_i \longrightarrow Z_i \longrightarrow H_i \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Z_{i+1} \longrightarrow K_{i+1} \longrightarrow B_i \longrightarrow 0$$

Como K_i é um R-módulo livre e R é um anel Cohen-Macaulay de dimensão d, segue que K_i é Cohen-Macaulay de dimensão d, assim, utilizando a proposição 2.11, tem-se as seguintes desigualdades

$$\operatorname{depth}(Z_{i+1}) \geq \min\{d, \operatorname{depth}(B_i) + 1\},$$
$$\operatorname{depth}(B_i) \geq \min\{\operatorname{depth}(Z_i), \operatorname{depth}(H_i) + 1\}.$$

A prova da desigualdade almejada será feita por indução em i. Se $i = 0$, tem-se que $Z_0 = R$ e, portanto, $\operatorname{depth}(Z_0) = d \geq \min\{d, d - n + 0 + 1\}$. Suponha que esta desigualdade vale para i, isto é, $\operatorname{depth}(Z_i) \geq \min\{d, d - n + i + 1\}$. Nestas condições, tem-se que

$$\operatorname{depth}(B_i) \geq \min\{\operatorname{depth}(Z_i), \operatorname{depth}(H_i) + 1\}$$
$$\geq \min\{\min\{d, d - n + i + 1\}, d - n + i + 1\} = \min\{d, d - n + i + 1\},$$

portanto

$$\operatorname{depth}(Z_{i+1}) \geq \min\{d, \operatorname{depth}(B_i) + 1\} \geq \min\{d, d - n + (i + 1) + 1\}.$$

Pelo princípio da indução, conclui-se que $\operatorname{depth}(Z_i) \geq \min\{d, d - n + i + 1\}$ para todo $i \geq 0$. □

Corolário 4.12. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local de dimensão d, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ um ideal satisfazendo à condição de depth deslizante. Neste caso, Z_{n-1} e Z_n são R-módulos Cohen-Macaulay maximais.*

Demonstração: Pela proposição 4.11, tem-se $\operatorname{depth}(Z_i) \geq d$ para $i = n - 1, n$. Como $\operatorname{depth}(Z_i) \leq \dim(Z_i) \leq d$, segue que Z_{n-1} e Z_n são R-módulos Cohen-Macaulay maximais. □

Proposição 4.13 (Lema 3.6 de [21])**.** *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d com corpo residual infinito, $I = (x_1, \ldots, x_n)$ um ideal* *satisfazendo às condições G_1 e depth deslizante. Seja $\pi : R \longrightarrow R/(0 :_R I)$ o epimorfismo canônico, e denote $\overline{I}$ a imagem de I por π. Neste caso*

(i) $\overline{R} := R/(0 :_R I)$ é Cohen-Macaulay;

(ii) $\overline{I}$ satisfaz à condição de depth deslizante.

Demonstração: (i): Observe que $B_{n-1} \cong R/(0 :_R I)$. Assim é suficiente mostrar que B_{n-1} é um R- módulo Cohen-Macaulay. Como Z_{n-1} é Cohen-Macaulay maximal e existe a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1} \longrightarrow 0,$$

segue da Proposição 2.11 que $\operatorname{depth}(B_{n-1}) \geq \min\{d, \operatorname{depth}(H_{n-1}) + 1\} = d$. Por outro lado, como $\operatorname{depth}(B_{n-1}) \leq \dim(B_{n-1}) \leq d$, segue que $R/(0 :_R I)$ é um R-Cohen-Macaulay e, como $0 :_R I \subseteq 0 :_R (R/(0 :_R I))$, segue que $R/(0 :_R I)$ é um anel Cohen-Macaulay.
(ii): Utilize a notação "$\overline{}$" para denotar imagens em $\overline{R}$. Como I satisfaz à condição de depth deslizante, tem-se que

$$\operatorname{depth}((0 :_R I)) = \operatorname{depth}(H_n(x_1, \ldots, x_n, R)) = d.$$

Note que, com base na Proposição 2.34, é possível construir para cada $0 \leq i \leq n$ a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow L_i \longrightarrow H_i(x_1, \ldots, x_n; R) \longrightarrow H_i(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{R}) \longrightarrow 0,$$

onde L_i é um R-módulo isomorfo a uma soma direta finita de cópias de $(0 :_R I)$. Portanto, aplicando a Proposição 2.11 à sequência acima para cada $0 \leq i < n$, tem-se que

$$\operatorname{depth}(H_n(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{R})) \geq \dim(R) - n + i \geq \dim(\overline{R}) - n + i.$$

Por outro lado, como $\mathrm{ht}(\overline{I}) > 0$ e $\overline{R}$ é Cohen-Macaulay, tem-se $\overline{I}$ contém um elemento $\overline{R}$-regular, assim

$$0 :_{\overline{R}} \overline{I} = H_n(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{R}) = 0.$$

daí $\mathrm{depth}(H_n(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{R})) = \infty \geq d - n + n$, concluindo assim que $\overline{I}$ satisfaz à condição de depth deslizante. □

Finalmente, encerra-se esta seção com o interessante resultado, cuja uma das imediatas consequências é que, num anel Cohen-Macaulay local, qualquer ideal de altura positiva que satisfaça às condições G_∞ e depth deslizante será de tipo linear e admitirá anel associado graduado Cohen-Macaulay.

Proposição 4.14. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay e I um ideal de R com $\mathrm{ht}(I) > 0$. Suponha que I satisfaça à condição G_∞ e que para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)$, vale que $\mathrm{depth}(H_i(I_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p})) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) - \mu(I_\mathfrak{p}) + 1$ para cada $0 \leq i \leq \mu(I_\mathfrak{p}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Então*

(i) I é de tipo linear;

(ii) $\mathrm{gr}_I(R)$ é Cohen-Macaulay.

Demonstração: Consultar o Teorema 9.1 de [26]. □

Corolário 4.15. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay e I um ideal de R com $\mathrm{ht}(I) > 0$. Se I satisfaz à condição G_∞ e à condição de depth deslizante, então*

(i) I é de tipo linear;

(ii) $\mathrm{gr}_I(R)$ é Cohen-Macaulay.

Demonstração: Tais conclusões seguem da Proposição 4.14 e do fato que a condição de depth deslizante é estável para localização. □

4.3 Interseção residual

A formulação da noção de interseção residual foi feita por Artin e Nagata em [23].

Definição 4.16. *Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R com* $\mathrm{ht}(I) = g$ *e s um inteiro não-negativo tal que $s \geq g$.*

- *Uma s-interseção residual de I é um ideal J tal que* $\mathrm{ht}(J) \geq s$ *e $J = \mathfrak{a} :_R I$ para algum $\mathfrak{a} \subsetneq I$ tal que $\mathfrak{a}$ pode ser gerado por s elementos;*

- *Uma s-interseção residual geométrica de I é uma s-interseção residual J de I tal que* $\mathrm{ht}((J, I)) \geq s + 1$.

A próxima proposição fornece uma condição necessária para que um ideal J seja uma s-interseção residual I.

Proposição 4.17. *Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R, s um inteiro com* $\mathrm{ht}(I) \leq s$. *Dado $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s) \subsetneq I$.*

(i) Uma condição necessária para que $J = \mathfrak{a} :_R I$ seja uma s-interseção residual de I é que todo $\mathfrak{p}$ com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s - 1$, *tenha-se $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$.*

(ii) Uma condição necessária para que $J = \mathfrak{a} :_R I$ seja uma s-interseção residual geométrica de I é que todo $\mathfrak{p}$ com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$, *tenha-se $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$.*

Demonstração: (i): Com efeito, seja J uma s-interseção residual de I. Como $\mathrm{ht}(J) \geq s$, para todo primo $\mathfrak{p}$ com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s - 1$, vale que $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} :_{R_\mathfrak{p}} I_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}$, logo $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$.

(ii) Similarmente, como $\mathrm{ht}((J, I)) \geq s+1$, dado $\mathfrak{p} \in V(I)$ com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = s$, tem-se que $(J, I) \not\subseteq \mathfrak{p}$. Como I está contido em $\mathfrak{p}$, necessariamente se tem que $J \not\subseteq \mathfrak{p}$ e, portanto $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$. Como toda s-interseção residual geométrica é uma s-interseção residual, o resultado segue. □

Exemplo 4.18. *Seja k um corpo qualquer, considere $R = k[X_1, \ldots, X_6]$ o anel polinomial com 6 indeterminadas e considere*

$$M = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{bmatrix}$$

Defina $J = I_2(M) = (X_1X_5 - X_4X_2, X_1X_6 - X_4X_3, X_2X_6 - X_5X_3)$ e $I = (X_1, X_4)$. Utilizando o Macaulay2, constata-se que $J = \mathfrak{a} :_R I$, onde $\mathfrak{a} = (X_1X_5 - X_4X_2, X_1X_6 - X_4X_3)$. Além disso, vale que $\mathrm{ht}(J) = \mathrm{ht}(I) = 2$ e $\mathrm{ht}((I, J)) = 3$. Assim, J é uma 2-interseção residual geométrica de I.

Definição 4.19. *Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R e s um inteiro não-negativo.*

- *Diz-se que I é s-residualmente S_2 se R/K satisfaz à condição de Serre S_2 para toda i-interseção residual K de I, com $i \leq s$;*
- *Diz-se que I é Universal-s-residualmente S_2 se a extensão IS é s-residualmente S_2 para qualquer anel polinomial $S = R[X_1, \ldots, X_n]$, $n \in \mathbb{N}$;*
- *Diz-se que I é fraco-s-residualmente S_2 se R/K satisfaz à condição de Serre S_2 para toda i-interseção residual geométrica K de I, com $i \leq s$;*
- *Diz-se que I é Universal-fraco-s-residualmente S_2 se a extensão IS é fraco-s-residualmente S_2 para qualquer anel polinomial $S = R[X_1, \ldots, X_n]$, $n \in \mathbb{N}$.*

4.4 Condições Artin-Nagata

Definição 4.20. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local, I um ideal de altura g e s um inteiro não-negativo.*

- *Diz-se que I satisfaz à condição AN_s^- se para todo $g \leq i \leq s$ e toda i-interseção residual geométrica J de I, R/J é Cohen-Macaulay;*

- *Diz-se que I satisfaz à condição AN_s se para todo $g \leq i \leq s$ e toda i-interseção residual J de I, R/J é Cohen-Macaulay.*

Observação 4.21. *Se I é um ideal satisfazendo à condição AN_s, então I satisfaz à condição AN_t para todo $0 \leq t \leq s$. Note também que se I satisfaz à condição AN_s, então I satisfaz à condição AN_s^-.*

Definição 4.22. *Seja R um anel Noetheriano. Um ideal I é dito ser genericamente uma interseção completa se $I_{\mathfrak{p}}$ é interseção completa para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/I)$.*

Proposição 4.23. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local e I um ideal de R com $\operatorname{ht}(I) = g \geq 1$ gerado por r elementos. Se I satisfaz SDC_1 no nível $\min\{s-g, r-g\}$, então I satisfaz à condição AN_s^-.*

Demonstração: Consultar o Teorema 2.11 de [29]. □

Proposição 4.24. *Seja R um anel Cohen-Macaulay local e I um ideal de R com $\operatorname{ht}(I) = g \geq 1$ gerado por r elementos. Se $g \leq s \leq g+1$, então as seguintes asserções são equivalentes*

(i) I satisfaz AN_s;

(ii) Para cada $i \leq s$, existe uma i-interseção residual tal que R/I é Cohen-Macaulay;

(iii) I satisfaz SDC_1 no nível $\min\{s-g, r-g\}$.

Demonstração: Consultar o Teorema 5.13 de [30]. □

Proposição 4.25. *Sejam R um anel Gorenstein local, I um ideal de R com $\operatorname{ht}(I) = g$ e s um inteiro. Assuma que I satisfaça à condição G_s e seja genericamente uma interseção completa. Além disso, suponha que $\operatorname{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para todo $1 \leq j \leq s - g + 1$. Então I satisfaz à condição AN_s.*

Demonstração: Consultar o Teorema 2.9 de [24].

Proposição 4.26. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Cohen-Macaulay local com corpo residual k infinito, I um ideal de R e s um inteiro não-negativo. Se I satisfazer AN^{-}_{s-2}, $I_{\mathfrak{p}}$ for uma interseção completa para todo primo minimal $\mathfrak{p} \in V(I)$ com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$ e, para todo primo não-minimal $\mathfrak{p} \in V(I)$ com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$, tiver que $\mu(I_{\mathfrak{p}}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, então, para todo $\mathfrak{p} \in V(I)$ com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq s$, $I_{\mathfrak{p}}$ é de tipo linear.*

Demonstração: Consultar a Proposição 1.11 de [24].

Proposição 4.27. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local, s um inteiro e J, I ideais de R, com $J \subseteq I$ e $\mathrm{ht}(J :_R I) \geq s + 1$. Assuma que I satisfaça à condição G_s. Se I satisfaz AN_s, então J satisfaz AN_s.*

Demonstração: Consultar a Observação 1.12 de [24].

Proposição 4.28. *Sejam R um anel Noetheriano local, s um inteiro e $I, \mathfrak{a}$ ideais de R com $\mathfrak{a} \subseteq I$ e $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R I) \geq s \geq \mu(\mathfrak{a})$. Se que I satisfaz à condição G_s, então existe uma sequência geradora $a_1, \ldots, a_s$ de $\mathfrak{a}$ tal que, se definindo $\mathfrak{a}_i = (a_1, \ldots, a_i)$ e $J_i = \mathfrak{a}_i :_R I$, tem-se $\mathrm{ht}(J_i) \geq i$ para todo $0 \leq i \leq s$.*

Demonstração: Consultar o Corolário 1.6 de [24].

Proposição 4.29. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay local, I um ideal de R com $\mathrm{ht}(I) = g$ e $\mu(I) = n$. Assuma que I satisfaça à condição G_n e, usando a notação da Proposição anterior para $\mathfrak{a} = I$ e $s = n$, que para todo $g \leq i \leq n - 1$, R/J_i é Cohen-Macaulay. Neste caso, I satisfaz à condição de depth deslizante.*

Demonstração: Consultar o Corolário 1.8 de [24].

Proposição 4.30. *Sejam R um anel local Cohen-Macaulay de dimensão d e I um ideal de R com $\mathrm{ht}(I) = g$ e satisfazendo à condição G_s para algum $s \geq g$. Sejam $J = \mathfrak{a} :_R I$ uma s-interseção residual de I e J_i como na Proposição 4.28. Se I satisfaz à condição AN^{-}_{s-1}, então* *(i)* J *possui altura* s*;*

(ii) $\mathfrak{a} = I \cap J$ *se* J *é uma* s*-interseção residual geométrica de* I*.*

Demonstração: Consultar a Proposição 1.7 de [24].

Capítulo 5

Reduções e core de um ideal

Neste capítulo será definido o conceito de redução de um ideal I, bem como o core de I, um misterioso subideal de I que pode fornecer informações importantes a respeito das possíveis reduções de I. Na seção 5.1, serão apresentadas as definições básicas e resultados elementares relacionados. Na Seção 5.2, será apresentada a rica teoria de reduções em anéis Noetheriano locais e sua conexão com o espalhamento analítico de um ideal. Por fim, na Seção 5.3, serão apresentados resultados mais modernos relacionados à teoria de reduções que serão úteis neste trabalho.

5.1 Definições e resultados básicos

Nesta seção serão apresentados as definições básicas relacionadas à teoria de reduções e resultados elementares relacionados. Será definido também o principal objeto de estudo deste trabalho, o core de um ideal.

Definição 5.1. *Sejam R um anel e I, J ideais de R, com $J \subseteq I$. Diz-se que J é uma redução de I se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^{n+1} = JI^n$.*

Segundo D. Northcott e D. Rees, em [16], esta definição sugere que, se J é uma redução de I, então J é uma versão simplificada de I. Como J e I compartilham certas propriedades, conhecer reduções de dado ideal pode facilitar na obtenção de informações à respeito do ideal original. Dentre estas propriedades, talvez a mais interessante é que as multiplicidades algébricas associadas a cada um dos ideais são as mesmas. A próxima Proposição diz que a propriedade de ser redução é transitiva no seguinte sentido:

Proposição 5.2 (Propriedade transitiva das reduções)**.** *Sejam R um anel e J, I, K ideais de R. Se J é um redução de I e I é um redução de K, então J é redução de K.*

Demonstração: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $JI^m = I^{m+1}$ e $IK^n = K^{n+1}$. Uma simples aplicação do princípio da indução mostra que, para todo $r \geq 0$, tem-se que $I^rK^n = K^{n+r}$ e $J^rI^m = I^{m+r}$, assim

$$JK^{m+n} = J(I^mK^n) = (JI^m)K^n = I^{m+1}K^n = K^{n+m+1}.$$

Logo J é uma redução de K. □

A seguinte proposição diz, em outras palavras, que a propriedade de ser redução é estável para localização. De fato, na categoria dos anéis Noetherianos, pode-se mostrar que a "ser redução"é uma propriedade local.

Proposição 5.3. *Sejam R um anel, I um ideal de R e S um conjunto multiplicativamente fechado. Se J é uma redução de I, então J_S é um redução de I_S. Em particular, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ contendo I, $J_\mathfrak{p}$ é uma redução de $I_\mathfrak{p}$.*

Demonstração: Com efeito, se $JI^n = I^{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, é claro que $J_SI_S^n = I_S^{n+1}$, portanto J_S é redução de I_S. □

Uma das consequências imediatas da seguinte proposição é que se J é uma redução de I, então I e J possuem o mesmo radical.

Proposição 5.4. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Se J é um redução de I, então o conjunto dos ideais primos que contém I coincide com o conjunto dos ideais primos que contém J.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo contendo J. Como J é uma redução de I, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I^{n+1} = JI^n \subseteq J \subseteq \mathfrak{p}$. Da primalidade de $\mathfrak{p}$, segue que $I \subseteq \mathfrak{p}$. Por outro lado, é claro que se $\mathfrak{p}$ é um primo contendo I, então $\mathfrak{p}$ contém J, assim o resultado segue. $\square$

Corolário 5.5. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Se J é um redução de I, então* $\mathrm{ht}(J) = \mathrm{ht}(I)$. *Em particular, se R é Cohen-Macaulay, segue que* $\mathrm{grade}(I, R) = \mathrm{grade}(J, R)$.

Demonstração: Com efeito,

$$\mathrm{ht}(I) = \inf\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ ; \ I \subseteq \mathfrak{p}\} = \inf\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ ; \ J \subseteq \mathfrak{p}\} = \mathrm{ht}(J).$$

Se R for Cohen-Macaulay, então $\mathrm{grade}(I, R) = \mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(J) = \mathrm{grade}(J, R)$. $\square$

Será definido agora o principal objeto desta dissertação, o core de um ideal.

Definição 5.6. *Sejam R um anel e I um ideal de R. O core do ideal I, denotado por* $\mathrm{core}(I)$*, é interseção de todas as reduções de I.*

Observação 5.7. *A Definição 5.6 está faz sentido, pois qualquer ideal I sempre admite pelo menos uma redução J, a saber, $J = I$.*

Proposição 5.8. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Se J é uma redução de I, então* $\mathrm{core}(I) \subseteq \mathrm{core}(J)$

Demonstração: Com efeito, pela Proposição 5.2, toda redução de J é uma redução de I, *i.e.* $\mathfrak{J}(J) := \{K \subseteq J \ ; \ K \textit{ é redução de } J\} \subseteq \{K \subseteq I \ ; \ K \textit{ é redução de } I\} := \mathfrak{J}(I)$, portanto:

$$\mathrm{core}(I) = \bigcap_{K \in \mathfrak{J}(I)} K \subseteq \bigcap_{K \in \mathfrak{J}(J)} K = \mathrm{core}(J).$$

$\square$

Proposição 5.9. *Sejam R um anel Noetheriano e J, I ideais de R com $J \subseteq I$. Se J é uma redução de I, então $R[It]$ é um $R[Jt]$-módulo finitamente gerado.*

Demonstração: Consultar a Proposição 4.6.6 [6]. $\square$

Corolário 5.10. *Sejam R um anel Noetheriano e J, I ideais de R com $J \subseteq I$. Se J é uma redução de I, então $R[It, t^{-1}]$ é um $R[Jt, t^{-1}]$-módulo finitamente gerado. Além disso, $R[It, t^{-1}]$ é inteiro sobre $R[Jt, t^{-1}]$ e $\dim(R[It, t^{-1}]) = \dim(R[Jt, t^{-1}])$.*

Demonstração: Com efeito, invocando a Proposição 5.9, seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um sistema finito de geradores de $R[It]$ como $R[Jt]$-módulo. Observe

$$R[It] \subseteq \mathrm{Span}_{R[Jt,t^{-1}]}\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq R[It, t^{-1}].$$

Portanto, é claro que $\{u_1, \ldots, u_n, t^{-1}\}$ constitui um sistema finito de geradores de $R[It, t^{-1}]$ como $R[Jt, t^{-1}]$-módulo.

Como $R[Jt, t^{-1}]$ é um anel Noetheriano, segue que $R[It, t^{-1}]$ é um $R[Jt, t^{-1}]$-módulo Noetheriano. Assim, dado $z \in R[It, t^{-1}]$ qualquer, o submódulo $(R[Jt, t^{-1}])[z]$ é finitamente gerado. Portanto, pela Proposição 1.83, z é inteiro sobre $R[Jt, t^{-1}]$, daí segue que o anel $R[It, t^{-1}]$ é inteiro sobre $R[Jt, t^{-1}]$. Portanto, segue do Corolário 1.87 que $\dim(R[Jt, t^{-1}]) = \dim(R[It, t^{-1}])$. $\square$

5.2 Reduções de ideais em anéis Noetheriano locais

A teoria de reduções de anéis Noetheriano locais é bastante rica e contém resultados que, a primeira vista, são surpreendentes.

Definição 5.11. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Uma redução J de I é dita redução minimal se nenhum outro ideal de R estritamente contido em J é uma redução de I.*

Observe que se, para cada redução J de I, existir uma redução minimal $J' \subset J$, então core(I) é exatamente a interseção de todas reduções minimais de I. Portanto, para calcular o core(I), nestas condições, basta conhecer todas as reduções minimais de I. Esta propriedade de sempre existir uma redução minimal é válida quando o anel R é local e Noetheriano.

Teorema 5.12. *Sejam R um anel Noetheriano local e I um ideal de R. Se J é uma redução de I, então existe no mínimo um ideal K contido em J tal que K é uma redução minimal de I.*

Demonstração: Consultar o Teorema 8.3.5 de [8]. □

Definição 5.13. *Sejam R um anel Noetheriano local, I um ideal R e J uma redução de I. Chama-se o número de redução de I em relação a J o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $JI^n = I^{n+1}$ e é denotado por $r_J(I)$. Chama-se o número de redução de I o mínimo do conjunto $\{r_J(I)\ ;\ J$ é redução minimal de $I\}$ e é denotado por $r(I)$.*

A teoria de reduções em anéis Noetherianos está fortemente conectada com o espalhamento analítico, sobretudo quando o anel é local.

Proposição 5.14. *Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal de R. Dada uma redução J de I, o número minimal de geradores de J é no mínimo $\ell(I)$.*

Demonstração: Consultar a Corolário 8.2.5 de [8]. □

Proposição 5.15. *Sejam R um anel Noetheriano local, I um ideal de R com $\ell(I) = \ell$ e J uma redução de I. Se $\mu(J) = \ell$, então J é uma redução minimal de I.*

Demonstração: Consultar o Corolário 8.3.6 de [8]. □

Proposição 5.16. *Seja R um anel Noetheriano local. Neste caso, para qualquer ideal I de R, tem-se que* $\mathrm{ht}(I) \leq \ell(I) \leq \dim(R)$. *Além disso, tem-se $\ell(I) \leq \mu(I)$.*

Demonstração: Consultar o Corolário 8.4.3 de [8]. □

Se, além de pedir que o anel seja Noetheriano local, exigir que o corpo residual k seja infinito, então se tem a recíproca da Proposição 5.15.

Teorema 5.17. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local com corpo residual k infinito e I um ideal de R com espalhamento analítico $\ell(I) = \ell$. Toda redução minimal de I é gerada minimalmente por exatamente ℓ elementos.*

Demonstração: Consultar a Proposição 8.3.7 de [8]. □

Proposição 5.18. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local com corpo residual k infinito e I um ideal de R com espalhamento analítico $\ell(I) = \ell$. Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo contendo I, então $\ell(I_{\mathfrak{p}}) \leq \ell(I)$.*

Demonstração: Se $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, então $R = R_{\mathfrak{m}}$ e $I_{\mathfrak{m}} = I$, logo o corolário vale trivialmente. Suponha que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, considere $\ell = \ell(I)$ e seja $J = (x_1, \ldots, x_\ell)$ uma redução minimal de I. Como $J_{\mathfrak{p}} = (x_1/1, \ldots, x_\ell/1)$ é uma redução de I_p, segue da Proposição 5.16 que $\ell(I_{\mathfrak{p}}) \leq \mu(J_p) \leq \ell = \ell(I)$. □

Num anel Noetheriano local, se I for um ideal de tipo linear, então a única redução de I é o próprio I, em particular, $\ell(I) = \mu(I)$, como pode ser visto na seguinte proposição.

Proposição 5.19. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local e I um ideal de R. Se I é de tipo linear, então I não admite redução não-trivial.*

Demonstração: Como I é um ideal de tipo linear, existe um isomorfismo de R-álgebras entre a álgebra simétrica de I e a álgebra de Rees de I, assim

$$\mathrm{Sym}_k(I/(\mathfrak{m}I)) \cong \mathrm{Sym}_R(I) \otimes_R k \cong \mathcal{R}(I) \otimes_R k = \mathcal{F}(I).$$

Como $I/(\mathfrak{m}I)$ é um k-módulo livre com posto $\mu(I)$, segue que $\mathrm{Sym}_k(I/(\mathfrak{m}I)) \cong k[X_1, \ldots, X_{\mu(I)}]$. Assim,

$$\mu(I) = \dim(\mathrm{Sym}_k(I/(\mathfrak{m}I))) = \dim(\mathcal{F}(I)) = \ell(I).$$

Pela Proposição 5.15, deduz-se que I é uma redução minimal de I, portanto, I não admite redução não-trivial. $\square$

Encerra-se essa seção com uma nomenclatura bastante consolidada na literatura para uma classe de ideais que será bastante explorada no capítulo 6.

Definição 5.20. *Sejam R um anel Noetheriano local e I um ideal de R. I é dito um ideal equimúltiplo se* $\mathrm{ht}(I) = \ell(I)$.

5.3 Resultados adicionais na teoria de reduções de ideais

A próxima Proposição diz que, sob certas condições, o número de redução de uma redução minimal J do ideal I é independente do ideal J. Este resultado será utilizado no Capítulo 7 deste trabalho.

Proposição 5.21 (Teorema 2.1 de [22])**.** *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local com corpo residual infinito e I um ideal de R contendo um elemento R-regular. Se $\ell(I) = \mathrm{ht}(I) = 1$, então $r(I)$ é independente da redução minimal, i.e. se J_1, J_2 são reduções minimais de I, então $r_{J_1}(I) = r_{J_2}(I)$.*

Demonstração: Com efeito, sejam J_1, J_2 reduções minimais de I. Como $\ell(I) = 1$, pelo Teorema 5.17, existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $J_1 = (x_1)$ e $J_2 = (x_2)$. Sejam $m = r_{J_1}(I)$ e $n = r_{J_2}(I)$, assim $x_1 I^m = I^{m+1}$ e $x_2 I^n = I^{n+1}$. Como I contém um elemento R-regular, segue da Proposição 1.96 que x_1, x_2 são necessariamente elementos R-regulares. Suponha por absurdo $n > m$, assim tem-se que

$$\begin{aligned} x_1 I^n = x_1 I^m I^{n-m} = I^{m+1} I^{n-m} = I^{n+1} = x_2 I^n = x_2 I^{m+1} I^{n-(m+1)} \\ = x_2 (x_1 I^m) I^{n-(m+1)} = x_1 x_2 I^{n-1}. \end{aligned}$$

Da regularidade de x_1, segue que $x_2 I^{n-1} = I^{(n-1)+1}$, contrariando assim a minimalidade de $r_{J_2}(I)$, deduz-se então que $n \leq m$. Similarmente, supondo $n < m$ e invertendo os papéis de J_1 e J_2, chega-se à mesma contradição, o que implica que $m \leq n$. Portanto, deduz-se que $r_{J_1}(I) = r_{J_2}(I)$. $\square$

Proposição 5.22. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Noetheriano com corpo residual k infinito e I um ideal de R contendo um elemento R-regular. Se J é uma redução de I, então $\ell(J) = \ell(I)$. Além disso, as reduções de J são precisamente as reduções de I contidas em J.*

Demonstração: Consultar o Teorema 4 da Seção 7 de [16]. $\square$

Proposição 5.23. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local de dimensão d com corpo residual k infinito e $I = (u_1, \ldots, u_s)$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Neste caso, existem polinômios $\phi_1, \ldots, \phi_v \in k[X_1, \ldots, X_{sd}]$ satisfazendo à seguinte propriedade: Um ideal J gerado por d combinações lineares $y_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} u_j$ é uma redução de I se, e somente se, existe algum $1 \leq k \leq v$ tal que*

$$\phi_k(\overline{a_{11}}, \ldots, \overline{a_{1s}}, \overline{a_{21}}, \ldots, \overline{a_{2s}}, \ldots, \overline{a_{d1}}, \ldots, \overline{a_{ds}}) \neq 0.$$

Demonstração: Consultar a demonstração do Teorema 14.14 de [3]. $\square$

Definição 5.24. *Seja P uma propriedade em um espaço M. P é dita uma propriedade geral se o conjuntos dos elementos que satisfazem a essa propriedade constitui um aberto de Zariski em M.*

Como os abertos são densos em M, um elemento "suficientemente geral"tem probabilidade 1 de ser encontrado nestes abertos. Motivado com este fato, tem-se a seguinte definição:

Definição 5.25. *Seja M um espaço. Um elemento $x \in M$ é dito geral de M se, dada qualquer propriedade geral P em M, então x satisfaz à propriedade P.*

Proposição 5.26. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local com corpo residual k infinito e I um ideal de R com* $\operatorname{grade}(I, R) > 0$. *Se $x \in I$ é um elemento geral, então x é um elemento R-regular.*

Demonstração: Seja $\mathrm{Ass}(R) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ o conjunto dos primos associados de R. Note que, uma vez que $\mathrm{grade}(I, R) > 0$, a imagem de $I \cap \mathfrak{p}$ em $I/\mathfrak{m}I$ é um subspaço vetorial próprio de $I/\mathfrak{m}I$ para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$. Como k é um corpo infinito, segue da Proposição 1.115 que

$$Z = \left(\frac{I \cap \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right) \cup \left(\frac{I \cap \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right) \cup \cdots \cup \left(\frac{I \cap \mathfrak{p}_n + \mathfrak{m}I}{\mathfrak{m}I}\right) \subsetneq \left(\frac{I}{\mathfrak{m}I}\right),$$

Como x é um elemento geral de R, $\overline{x} \notin Z$, segue que $x \notin \mathcal{Z}(R) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}$ e, portanto, x é um elemento R-regular. □

Corolário 5.27. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local com corpo residual infinito e I um ideal de R com $\mathrm{grade}(I, R) \geq 2$. Se x_1, x_2 são elementos gerais de I, então a sequência $\mathbf{x} = x_1, x_2$ é R-regular.*

Demonstração: Com efeito, pela Proposição anterior, x_1 é um elemento R-regular. Assim, para mostrar que $\mathbf{x} = x_1, x_2$ é R-regular, é suficiente mostrar que a multiplicação

$$\frac{R}{(x_1)} \xrightarrow{\quad x_2 \quad} \frac{R}{(x_1)}$$

é injetiva. Com efeito, como $\mathrm{grade}(I, R) > 1$, então $I \not\subseteq \mathfrak{p}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{p}_n$, onde $\mathrm{Ass}_R(R/(x_1)) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$. Assim, a imagem de $\mathfrak{p}_i \cap I$ em $I/\mathfrak{m}I$ é um subespaço próprio de $I/\mathfrak{m}I$ para cada $1 \leq i \leq n$. Procedendo como na Proposição anterior, conclui-se que o mapa acima é injetivo e, portanto, $\mathbf{x} = x_1, x_2$ é uma sequência R-regular. □

Proposição 5.28. *Sejam $(R, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e I um ideal não-nulo de R com $\mu(I) = n$. Se $x \in I$ é um elemento geral, então, considerando $\overline{R} = R/(x)$, tem-se que $\mu(\overline{I}) = n - 1$.*

Demonstração: Da fato, note que $I\mathfrak{m} \neq I$ pelo lema de Nakayama, portanto $\{\overline{0}\}$ é um subspaço vetorial próprio de $I/\mathfrak{m}I$. Como x é um elemento geral de I, $\overline{x} \neq 0$

em $I/\mathfrak{m}I \cong I \otimes_R k(\mathfrak{m})$. Pela Proposição 1.114, conclui-se que $\mu(\overline{I}) = \mu(I) - 1 = n - 1$. $\square$

As duas próximas proposições são constituídas por teoremas estruturais de core obtidos por A. Corso, C. Polini e B. Ulrich em [19]. Tais resultados terão participação importante na prova dos resultados que antecedem o teorema principal.

Proposição 5.29. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Cohen-Macaulay local com corpo residual k infinito e I um ideal de R com $\ell(I) = \ell$. Assuma que I satisfaça à condição G_ℓ e seja fraco-$(\ell-1)$-residualmente S_2. Neste caso, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{core}(I) = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_t$, onde $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_t$ são reduções minimais de I geradas por ℓ elementos gerais.*

Demonstração: Consultar o Teorema 4.5 de [19]. $\square$

Proposição 5.30. *Seja $\phi : (R, \mathfrak{m}, k) \longrightarrow (S, \mathfrak{n}, k')$ um homomorfismo plano de anéis locais Cohen-Macaulay com corpos residuais k, k' infinitos. Seja I um ideal de R com espalhamento analítico $\ell(I) = \ell$ tal que I e IS são universal-fraco-$(\ell-1)$-residualmente S_2 e satisfazem à condição G_ℓ. Neste caso, vale que $(\mathrm{core}(I))S = \mathrm{core}(IS)$.*

Demonstração: Consultar o Teorema 4.8 de [19]. $\square$

A próxima e última proposição deste capítulo consiste num resultado não-elementar que explicita precisamente a família de ideais primos de R tais que $\ell(I_\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, para um dado ideal I num anel Cohen-Macaulay.

Proposição 5.31. *Sejam R um anel Cohen-Macaulay e I um ideal de R. Definindo $\mathcal{A}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\,;\, \ell(I_\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})\}$, tem-se que*

$$\mathcal{A}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)\,;\, \exists\, P \in \mathrm{MinSpec}(\mathrm{gr}_I(R)) \text{ tal que } P^c = \mathfrak{p}\}.$$

Demonstração: A prova desse resultado é não-trivial e não-elementar, e decorre de uma sequência de resultados do Capítulo IV da referência [11]. $\square$

Capítulo 6

Alguns resultados sobre módulos canônicos

Sejam R um anel Noetheriano, I um ideal de R e J uma redução de I. Considere $A = R[Jt, t^{-1}]$ a álgebra de Rees estendida de J. Lembre-se de que A é um anel graduado com graduação natural

$$A = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} J^n t^n.$$

Na próxima Proposição, será trabalhado com certos A-módulos graduados, cuja notação mais natural e reduzida para representá-los é $M_s := (1, It)^s A$. Com o objetivo deixar claro o que estes A-módulos representam, eles serão explicados a seguir.

O módulo M_1 é simplesmente $A + ItA$. Esta adição, todavia, é soma entre A-módulos graduados, o que significa que, em termos de componentes homogêneas, tem-se

$$M_1 = \bigoplus_{n=-\infty}^{0} (Rt^n) \oplus It \oplus \bigoplus_{n=2}^{\infty} (IJ^{n-1}t^n).$$

De maneira geral, M_s é definida de forma recursiva, sendo para cada $s \in \mathbb{N}$, $M_{s+1} := (1 + It)M_s = M_s + ItM_s$, onde, similarmente, a adição é soma entre A-módulos graduados. Através de uma simples processo de indução, mostra-se que

$$M_s = (1, It)^s = \bigoplus_{n=-\infty}^{0} Rt^n \oplus It \oplus I^2t^2 \oplus \cdots \oplus I^st^s \oplus \bigoplus_{n=s+1}^{\infty} I^sJ^{n-s}t^n.$$

Eventualmente haverá outros A-módulos com notações semelhantes na proposição a seguir, considere que a construção destes módulos sigam a mesma linha dos A-módulos descritos acima.

Proposição 6.1 (Proposição 2.1 de [27])**.** *Sejam R um anel Noetheriano local, I um ideal de R, com $\mathrm{ht}(I) > 0$ e J uma redução de I, com $r = r_J(I)$. Escreva $A = R[Jt, t^{-1}] \subseteq B = R[It, t^{-1}]$. Assuma que A é Cohen-Macaulay com módulo canônico graduado $\omega_A = (1, It)^sA(a)$ para alguns inteiros s e a. Neste caso, para todo inteiro $n \geq \max\{r - s, 0\}$, tem-se*

$$\omega_B \cong A :_{R[t,t^{-1}]} I^nt^{a+n} = (A :_{R[t,t^{-1}]} I^n)(a + n).$$

Demonstração: Note que R é um anel Cohen-Macaulay. De fato, como $A = R[Jt, t^{-1}]$ é Cohen-Macaulay, tal resultado segue das Proposições 2.35 e 2.36. Considere $\phi : A(a) \longrightarrow A$ o homomorfismo de R-módulos tal que $\phi(x) = xt^{-a}$. Observe que ϕ é um isomorfismo graduado. Assim, seja a identificação $\omega_A = (1, It)^sAt^{-a} \subseteq R[t, t^{-1}]$. Definindo $L := (1, (1, It)^sI^nt^n)A \subseteq R[t, t^{-1}]$, considere a seguinte sequência exata de A-módulos graduados

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

onde $C = B/L$.

Afirmação: C contém apenas um número finito de componentes homogêneas não-nulas.

Com efeito, se $s \leq 0$, então $L = (1, I^nt^n)A$ e $n \geq r$, daí $L = A + I^nt^nA$. Portanto, utilizando que $I^nJ^k = I^{n+k}$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $n \geq r$, segue-se que

$$[L]_{n+k} = I^{n+k}t^{n+k}.$$

Por outro lado, observe que $[L]_k = Rt^k = I^k t^k$ para todo $k \leq 0$, logo

$$[C]_k = \frac{[B]_k}{[B]_k \cap L} = 0 \quad \text{para todo } k \leq 0 \text{ e } k \geq n.$$

Similarmente, se $s > 0$, então L contém $A + I^{n+s}t^{n+s}A$. Como $n + s \geq r$, utilizando que $J^k I^{n+s} = I^{k+n+s}$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, segue-se que

$$[L]_{n+s+k} = I^{n+s+k}t^{n+s+k}.$$

Por outro lado, também pode ser observado que $[L]_k = I^k t^k$ para todo $k \leq 0$, logo

$$[C]_k = \frac{[B]_k}{[B]_k \cap L} = 0 \quad \text{para todo } k \leq 0 \text{ e } k \geq n + s.$$

Em ambas situações se concluem que C contém apenas um número finito de componentes homogêneas não-nulas.

Como C tem apenas número finito de componentes homogêneas não-nulas, C é anulado por t^{-m} e por $J^m t^m$ para m suficientemente grande. Além disso, como $\text{grade}(J, R) = \text{ht}(J) = \text{ht}(I) > 0$, J contém um elemento R-regular y. Uma vez que a sequência $\mathbf{x} = y^m t^m, t^{-m}$ é A-regular e está contida em $\text{Ann}_A(C)$, conclui-se

$$\text{grade}_A(C) = \text{grade}_A(\text{Ann}_A(C), A) \geq 2.$$

Note que B e A são anéis graduados *locais conforme já visto no Exemplo 1.66. Observe também que, como J é uma redução de I, B é um A-módulo finitamente gerado e $\dim(B) = \dim(A)$ pelo Corolário 5.10. Uma vez que A é uma anel Cohen-Macaulay, considerando o homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$ a inclusão e aplicando a Proposição 3.15, conclui-se que B admite módulo canônico graduado e $\omega_B \cong {}^*\text{Hom}_A(B, \omega_A)$. Utilizando novamente o fato que B é um A-módulo finitamente gerado, deduz-se da Proposição 1.69 que $\omega_B \cong \text{Hom}_A(B, \omega_A)$.

Aplicando o funtor $\text{Hom}_A(\_\_, \omega_A)$ à sequência exata anterior, obtém-se a sequência exata

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(C, \omega_A) \longrightarrow \text{Hom}_A(B, \omega_A) \longrightarrow \text{Hom}_A(L, \omega_A) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(C, \omega_A).$$

Como $t^{-m} \in \operatorname{Ann}_A(C)$ para algum $m \in \mathbb{N}$ e t^{-m} é ω_A-regular, segue da Proposição 2.5 que $\operatorname{Hom}_A(C, \omega_A) = 0$. Similarmente, uma vez que $y^m t^m \in \operatorname{Ann}_A(C)$ e $y^m t^m$ é ω_A-regular, segue que

$$\operatorname{Hom}_A\left(C, \frac{\omega_A}{(y^m t^m)\omega_A}\right) \cong \operatorname{Ext}^1_A(C, \omega_A).$$

Por fim, como t^{-m} é $\omega_A/((y^m t^m)\omega_A)$-regular, conclui-se que $\operatorname{Ext}^1_A(C, \omega_A) = 0$ e, portanto, $\operatorname{Hom}_A(B, \omega_A) \cong \operatorname{Hom}_A(L, \omega_A)$. Assim, definindo $K(t) := \operatorname{Quot}(K[t])$, tem-se a seguinte sequência de igualdades, cujas verificações se encontram no apêndice deste trabalho.

$$\begin{aligned} \omega_B \cong \operatorname{Hom}_A(B, \omega_A) \cong \operatorname{Hom}_A(L, \omega_A) &\cong \omega_A :_{K(t)} L = \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} (1, It)^s I^n t^n A) \\ &= \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} \omega_A I^n t^{a+n}) = \omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n}) \\ &= \omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n}) = A :_{\omega_A} I^n t^{a+n}. \end{aligned}$$

Finalmente, para cada inteiro i, tem-se

$$[A :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{a+n}]_i = (J^{i+a+n} :_R I^n) t^i \subseteq (J^{i+a+n} :_R J^n) t^i = J^{i+a} t^i,$$

onde a penútima inclusão é válida, pois $J \subseteq I$ e a última igualdade vale, pois, como $\operatorname{ht}(J) = \operatorname{ht}(I) > 0$ e $\operatorname{gr}_J(R)$ é Cohen-Macaulay, a Proposição 2.41 se aplica. Entretanto

$$J^{i+a} t^i = [At^{-a}]_i \subseteq [\omega_A]_i.$$

Portanto $A :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{a+n} \subseteq \omega_A \subseteq R[t, t^{-1}]$, ou, equivalentemente,

$$A :_{\omega_A} I^n t^{a+n} = A :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{a+n}.$$

Daí,

$$\omega_B \cong A :_{\omega_A} I^n t^{a+n} = A :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{a+n}.$$

Voltando à identificação original, obtém-se que

$$\omega_B \cong A :_{R[t,t^{-1}]} I^n(a+n).$$

$\square$

Na proposição anterior, dentre as hipóteses exigidas, pedia-se que, dados um ideal I de R e J uma redução de I, a álgebra de Rees de J fosse Cohen-Macaulay e que a álgebra de Rees de I admitisse módulo canônico graduado da forma $(1, It)^s A(a)$ para alguns inteiros s e a. A Proposição a seguir garante que, nas configurações do teorema principal dessa dissertação, essas duas hipóteses são satisfeitas quando J for uma redução minimal de I.

Proposição 6.2 (Observação 2.2 de [27]). *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Gorenstein local com corpo residual k infinito e I um ideal de R, com $\operatorname{ht}(I) = g > 0$ e $\ell(I) = \ell$. Assuma que I satisfaça à condição G_ℓ e que $\operatorname{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para $1 \leq j \leq \ell - g$. Se J é uma redução minimal de I, então $A = R[Jt, t^{-1}]$ é Cohen-Macaulay com módulo canônico graduado $\omega_A = (1, It)^{\ell-g} A(1-g)$.*

Demonstração: Consultar a demonstração de Proposição 2.1 de [28]. $\square$

O próximo corolário consiste no principal resultado deste capítulo, que diz, dentre outras afirmações, que dadas J e K reduções minimais de I e um inteiro fixo i, tem-se

$$J^{i+n} :_R I^n = K^{i+m} :_R I^m$$

para todo $n \geq \max\{r_J(R) - \ell + g, 0\}$ e $m \geq \max\{r_K(R) - \ell + g, 0\}$.

Corolário 6.3 (Observação 2.2 e Corolário 2.3 de [27]). *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Gorenstein local com corpo residual k infinito, I um ideal de R com $\operatorname{ht}(I) = g > 0$ e $\ell(I) = \ell$. Assuma que I satisfaça à condição G_ℓ e que $\operatorname{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para $1 \leq j \leq \ell - g$. Seja J uma redução minimal de I e defina por A e B as álgebras de Rees estendidas de J e I, respectivamente. Neste caso* *(i) Para todo* $n \geq \max\{r_J(I) - \ell + g, 0\}$*, tem-se*

$$\omega_B = (A :_{R[t,t^{-1}]} I^n)t^{g-n-1};$$

(ii) Para cada i *inteiro e* $n \geq \max\{r_J(I) - \ell + g, 0\}$*, tem-se*

$$[\omega_B]_{i+g-1}t^{-i-g+1} = J^{i+n} :_R I^n;$$

(iii) Para cada inteiro fixo i*, o ideal*

$$J^{i+n} :_R I^n$$

é independente de J *e* n*, contanto que* J *seja uma redução minimal de* I *e* $n \geq \max\{r_J(I) - \ell + g, 0\}$*.*

Demonstração: (i) Com efeito, pela Proposição 6.2, $A = R[Jt, t^{-1}]$ é Cohen-Macaulay e possui módulo canônico graduado $\omega_A = (1, It)^{\ell-g}A(1-g)$, daí pela Proposição 6.1, $B = R[It, t^{-1}]$ possui módulo canônico e para todo $n \geq \max\{r_J(I) - \ell + g, 0\}$, vale que

$$\omega_B \cong A :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{n+1-g} = (A :_{R[t,t^{-1}]} I^n)t^{g-n-1}.$$

(ii) Afirmo que a $(i+g-1)$-ésima componente homogênea de ω_B é $(J^{i+n} :_R I^n)(t^{i+g-1})$. Com efeito, dado $z \in (J^{i+n} :_R I^n)(t^{i+g-1})$, então $z = at^{i+g-1}$, com $a \in (J^{i+n} :_R I^n)$. Assim $zI^nt^{n+1-g} = (aI^n)t^{i+n} \subseteq J^{i+n}t^{i+n} \subseteq A$. Daí, $z \in [A :_{R[t,t^{-1}]} I^nt^{n+1-g}]_{i+g-1} = [\omega_B]_{i+g-1}$. Reciprocamente, se $z \in [\omega_B]_{i+g-1}$, então $z = at^{i+g-1}$, para algum $a \in R$. Além disso, tem-se que $zI^nt^{n+1-g} = aI^nt^{i+g} \subseteq A$, mas então $aI^n \subseteq J^{i+n}$, logo $z \in (J^{i+n} :_R I^n)t^{n+1-g}$. Portanto, tem-se que

$$[\omega_B]_{i+g-1} = (J^{i+n} :_R I^n)(t^{i+g-1}),$$

isto é,

$$[\omega_B]_{i+g-1}t^{-i-g+1} = (J^{i+n} :_R I^n).$$

(iii) Sejam K e J reduções minimais de I. Denotando por A_K a álgebra de Rees estendida de K e por A_J a álgebra de Rees estendida de J, a parte (i) diz que para todo $n \geq \max\{r_J(I) - \ell + g, 0\}$ e $m \geq \max\{r_K(I) - \ell + g, 0\}$, vale que

$$A_J :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{n+1-g} \cong \omega_B \cong A_K :_{R[t,t^{-1}]} I^m t^{m+1-g}.$$

Note que ambos módulos canônicos são submódulos de $R[t, t^{-1}]$. Se puder ser mostrado que o módulo canônico graduado de B é unicamente determinado por B, então se terá que

$$A_J :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{n+1-g} = A_K :_{R[t,t^{-1}]} I^m t^{m+1-g},$$

daí usando o item (ii), tem-se que para cada inteiro i fixo, $n \geq \max\{r_J(I) - \ell + g, 0\}$ e $n \geq \max\{r_K(I) - \ell + g, 0\}$, vale que

$$K^{i+n} :_R I^n = [\omega_B]_{i+g-1} t^{-i-g+1} = J^{i+n} :_R I^n.$$

Como ω_B é um módulo canônico graduado e é um submódulo graduado de $R[t, t^{-1}]$, pode ser demonstrado que este módulo é único a menos de uma multiplicação por um elemento $u \in \mathrm{Quot}(R)$.

Suponha que se tenha demonstrado tal fato. Sejam $C = A_J :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{n+1-g}$ e $C' = A_K :_{R[t,t^{-1}]} I^n t^{n+1-g}$ módulos canônicos graduados de B. Pelo fato assumido, existe $u \in \mathrm{Quot}(R)$ invertível tal que $C = uC'$. Note, entretanto, que $[C]_i = (R :_R I^n)t^i = Rt^i = [C']_i$ para todo $i < -n$, o que faz com que necessariamente u seja unidade R e, portanto, $C = C'$.

Será agora provado o fato afirmado no parágrafo anterior. Sejam ω_B e ω'_B módulos canônicos graduados de B, ambos contidos em $R[t, t^{-1}]$, e seja $\phi : \omega_B \longrightarrow \omega'_B$ um isomorfismo. Note que, como $(B, \mathfrak{m})$ é um anel *local e $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal, então ϕ é um isomorfismo homogêneo, assim, para cada $i \in \mathbb{Z}$, $\phi_i : [\omega_B]_i \longrightarrow [\omega'_B]_i$ é um homomorfismo de $[B]_0 = R$-módulos

Observe que, pelo Corolário 6.3, cada componente homogênea de ω_B e ω'_B são ideais de R que contêm elementos R-regulares, assim, considerando o conjunto multiplicativamente fechado $S = R \setminus \mathcal{Z}(R)$, tem-se

$$S \subseteq R \setminus \mathcal{Z}([\omega'_B]_i) \quad \text{e} \quad S \cap [\omega_B]_i \neq \emptyset.$$

Portanto pela Proposição 1.117 ϕ_i é dada por uma multiplicação por elemento de $S^{-1}[\omega'_B]_i$. Todavia, como $[\omega'_B]_i$ é um ideal de R que contém um elemento R-regular, $S \cap [\omega'_B]_i \neq \emptyset$, logo

$$S^{-1}[\omega'_B]_i = S^{-1}R = \mathrm{Quot}(R).$$

Sejam $\alpha_i, \beta_i \in R$ tais que $\phi_i(x) = (\alpha_i/\beta_i)x$. Será mostrado que o coeficiente (α_i/β_i) independe de i. Para tal fim, é suficiente mostrar que

$$\frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}}$$

para qualquer $i \in \mathbb{Z}$. Seja $b \in [B]_1$, como ϕ é um homomorfismo homogêneo, tem-se que para qualquer $x \in [\omega_B]_i$

$$b\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)x = b\phi_i(x) = b\phi(x) = \phi(bx) = \phi_{i+1}(bx) = \left(\frac{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}}\right)(bx).$$

Assim

$$\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}}\right)B[\omega'_B]_i = 0.$$

Uma vez que $B[\omega'_B]_i$ é um ideal de R que contém um elemento R-regular, segue que

$$\frac{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}}.$$

Portanto $\phi : \omega_B \longrightarrow \omega'_B$ é dado pela multiplicação por $\alpha/\beta \in \mathrm{Quot}(R)$. $\square$

Capítulo 7

Ideais equimúltiplos com altura 1

O objetivo principal de capítulo é provar o Teorema 7.5, que é o segundo resultado mais importante deste trabalho. Este teorema é fornece uma fórmula para o core de ideais equimúltiplos com altura 1 em anéis Cohen-Macaulay locais com corpo residual infinito. Este resultado será utilizado na demonstração do Teorema 8.3 a fim de fazer uma transformação do ideal em questão para um ideal equimúltiplo com altura 1. Este capítulo será consistido em duas seções: a Seção 7.1 conterá resultados, que são por si só importantes, mas que serão utilizados no Teorema 7.5, que se encontra isolado na Seção 7.2.

7.1 Alguns resultados para ideais equimúltiplos com altura 1

Proposição 7.1 (Lema 3.1 de [27]). *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local, K um ideal de R e x, y elementos de R tais que x é R-regular e $yK \subseteq xK$. Sejam $c > \dim_k((K :_R \mathfrak{m})/K)$ e $u_1, \ldots, u_c$ unidades em R que não são todas congruentes módulo $\mathfrak{m}$. Neste caso, para todo $j \geq 0$, tem-se*

$$x(K :_R \mathfrak{m}) \cap \bigcap_{i=1}^{c}((x + u_i y)(K :_R \mathfrak{m})) \subseteq x(x^j :_R y^j) \cap \bigcap_{i=1}^{c}((x + u_i y)(x^j :_R y^j)).$$

Demonstração: Primeiramente, observe que $(K :_R \mathfrak{m})/K$ possui, de fato, uma estrutura k-espaço vetorial. Com efeito, dados $x \in \mathfrak{m}$ e $\bar{z} \in (K :_R \mathfrak{m})/K$, como $z \in K : \mathfrak{m}$ tem-se que $x\bar{z} = \overline{xz} = \bar{0}$, logo $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Ann}((K :_R \mathfrak{m})/K)$. Portanto $(K :_R \mathfrak{m})/K$ é naturalmente um $R/\mathfrak{m}$-módulo.

Seja α um elemento da interseção do lado esquerdo, então pode-se escrever

$$\alpha = xs = (x + u_1 y)s_1 = \cdots = (x + u_c y)s_c,$$

onde $s, s_1, \ldots, s_c$ estão todos em $K :_R \mathfrak{m}$. Para mostrar a tese desta Proposição, é suficiente mostrar que $s, s_1, \ldots, s_c \in x^j :_R y^j$. Assim será utilizado o princípio da indução em j para provar que $s, s_1, \ldots, s_c$ estão em $x^j :_R y^j$ para cada $j \geq 0$.

Para $j = 0$, o resultado vale trivialmente, pois $x^0 :_R y^0 = R :_R R = R$.
Seja $j > 0$ e suponha que $s, s_1, \ldots, s_c \in x^{j-1} :_R y^{j-1}$. Será provado primeiramente que $s_i \in x^j :_R y^j$ para $1 \leq i \leq c$. Com efeito, pela hipótese de indução, tem-se que $\alpha = s_i(x + u_i y) = xs \in x(x^{j-1} :_R y^{j-1})$, assim

$$\begin{aligned} s_i &\in (x(x^{j-1} :_R y^{j-1})) :_R (x + u_i y) \subseteq (x^j :_R y^{j-1}) :_R (x + u_i y) \\ &= x^j :_R (x + u_i y)y^{j-1} = x^j :_R (xy^{j-1} + u_i y^j) = x^j :_R xy^{j-1} + x^j :_R u_i y^j. \end{aligned}$$

Uma vez que, também pela hipótese de indução, vale que $s_i \in x^{j-1} :_R y^{j-1} = x^j :_R xy^{j-1}$, segue-se que $s_i \in x^j :_R u_i y^j$. Como u_i é invertível em R, conclui-se que $s_i \in x^j :_R y^j$.

Resta provar que $s \in x^j :_R y^j$. Como $yK \subseteq xK$, uma simples indução mostra que $y^j K \subseteq x^j K$. Assim vale que $K \subseteq x^j :_R y^j$. Observe que, se $s_i \in K$ para algum i, então

$$xs = s_i(x + u_i y) \in xK + yK \subseteq xK \subseteq x(x^j :_R y^j).$$

Da R-regularidade de x, segue-se então $s \in x^j :_R y^j$ e a proposição está provada. Assim, assuma que $s_i \notin K$ para todo $1 \leq i \leq c$.

Considere o anel quociente $\overline{R} = R/K$. Agora $\bar{s_1}, \ldots, \bar{s_c}$ ou, equivalentemente, $\bar{u_1}\bar{s_1}, \ldots, \bar{u_c}\bar{s_c}$ são c elementos não-nulos do k-espaço vetorial $(K : \mathfrak{m})/K$. Estes elementos são linearmente dependentes sobre k, pois $c > \dim_k((K : \mathfrak{m})/K)$. Diminuindo c, se necessário, pode-se assumir que c é minimal com esta propriedade e que $\bar{u_1}, \ldots, \bar{u_c}$ não são ainda todos iguais em R/K. Tal escolha é possível, pois, como $u_1, \ldots, u_c$ não são todos congruentes módulo $\mathfrak{m}$, certamente não todos congruentes módulo K e, como são apenas um número finito de elementos, este processo de escolha tem fim.

Observe que, sob as hipóteses feitas, $(K :_R \mathfrak{m})/K$ é necessariamente não-nulo, pois $s_i \in K :_R \mathfrak{m}$, enquanto que $s_i \notin K$. Tal fato implica que $\dim_k((K :_R \mathfrak{m})/K) \geq 1$ e, portanto, vale que $c \geq 2$. Uma vez que $\{u_1 s_1, \ldots, u_c s_c\}$ constitui um subconjunto linearmente dependente em $(K :_R \mathfrak{m})/K$ com a hipótese de minimalidade, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_c$ unidades em R tais que

$$\sum_{i=1}^{c} \overline{\lambda_i}\overline{u_i s_i} = \overline{0}.$$

Observe que $\sum_{i=1}^{c} \overline{\lambda_i s_i} \neq \overline{0}$, pois $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_c}$ não são todos iguais em $\overline{R}$. Como $\sum_{i=1}^{c} \lambda_i u_i s_i \in K$. o elemento $\sum_{i=1}^{c} y\lambda_i u_i s_i \in yK \subseteq xK$, daí existe $\xi \in K$ tal que $\sum_{i=1}^{c} y\lambda_i u_i s_i = x\xi$. Defina $\lambda = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i$, assim se tem

$$\alpha\lambda = \sum_{i=1}^{c} \alpha\lambda_i = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i s_i(x + u_i y) = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i s_i x + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i s_i u_i y = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i s_i x + x\xi.$$

Assim tem-se que $xs\lambda = \alpha\lambda = x(\sum_{i=1}^{c} \lambda_i s_i + \xi)$. Utilizando a regularidade de x, segue-se que $s\lambda = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i s_i + \xi$ e, uma vez que já foi provado que $s_i \in x^j :_R y^j$ para todo $1 \leq i \leq c$, segue-se que

$$\lambda s = \sum_{i=1}^{c} \lambda_i s_i + \xi \in x^j :_R y^j + K = x^j :_R y^j,$$

onde a última igualdade se deve ao já provado fato que $K \subseteq x^j :_R y^j$.

Se $\lambda \in \mathfrak{m}$, então $\lambda s \in K$, pois $s \in K :_R \mathfrak{m}$ e concluímos que $\bar{0} = \sum_{i=1}^{c} \bar{\lambda}_i \bar{s}_i$, o que é uma contradição. Assim $\lambda \notin \mathfrak{m}$. Sendo R um anel local, λ é unidade em R e, portanto, $s \in x^j :_R y^j$. □

Proposição 7.2 (Lema 3.2 de [27])**.** *Sejam R um anel local Cohen-Macaulay com corpo residual infinito e I um ideal de R com $\ell(I) = \mathrm{ht}(I) = 1$ e $r = r(I)$. Sejam J, H reduções minimais de I, $n \geq r$ e i inteiros. Neste caso*

(i) $H^i(J^n :_R I^n) = I^i(J^n :_R I^n)$ e este ideal independe de J, H e n;

(ii) $I(J^n :_R I^n) \subseteq \mathrm{core}(I)$.

Demonstração: (i): Seja K o anel total das frações de R e seja $\overline{R}$ o fecho integral de R em K. Considere $S := \bigcup_{j=1}^{\infty}(I^j :_{\overline{R}} I^j)$ o anel blowup de I. Como $\ell(I) = 1$, seja $x \in R$ um gerador de J. Como R é Cohen-Macaulay, $\mathrm{grade}(I, R) = \mathrm{ht}(I) = 1$, daí I contém um elemento R-regular, assim, pela proposição 5.21, $r_J(I) = r(I) = r$. Pela proposição 1.98, para qualquer $n \geq r$, tem-se que $S = I^n :_{\overline{R}} I^n$, assim

$$S = I^n :_{\overline{R}} I^n \subseteq I^n :_{\overline{R}} J^n = I^n \frac{1}{x^n} \subseteq R\left[\frac{I}{x}\right] \subseteq S,$$

onde a última inclusão deve-se que, como $xI^n = I^{n+1}$, então $\frac{I}{x}I^n \subseteq I^n$. Em particular, tem-se que $S = I^n \frac{1}{x^n}$. Pela Observação 7.3, tem-se que $J^n :_R I^n = J^n :_{\overline{R}} I^n$, assim, obtêm-se as igualdades abaixo

$$J^n :_R I^n = J^n :_{\overline{R}} I^n = (x^n)R :_{\overline{R}} I^n = R :_{\overline{R}} I^n \frac{1}{x^n} = R :_{\overline{R}} S$$

independem de J e n. Se y é um gerador de H, temos que $yI^r = I^{r+1}$, assim pela Proposição 1.97, $IS = yS = HS$. Portanto $J^n :_R I^n = R :_{\overline{R}} S$ é um ideal de S, conclui-se que

$$\begin{aligned} H^i(J^n :_R I^n) &= H^i(S(J^n :_R I^n)) = (H^i S)(J^n :_R I^n) = (I^i S)(J^n :_R I^n) \\ &= I^i(S(J^n :_R I^n)) = I^i(J^n :_R I^n). \end{aligned}$$

(ii) Dada uma redução minimal K de I, aplicando o item (i) para $i = 1$, obtém-se que

$$I(J^n :_R I^n) = K(J^n :_R I^n) \subseteq K.$$

Como K é uma redução minimal de I arbitrária, conclui-se $I(J^n :_R I^n) \subseteq \operatorname{core}(I)$. $\square$

Observação 7.3. *Na proposição anterior, a igualdade $J^n :_R I^n = J^n :_{\overline{R}} I^n$ deve-se ao fato que se $z \in \overline{R}$ é tal que $zI^n \subseteq J^n$, então existe $r \in R$ tal que $zx^n = x^n r$. Como x é R-regular, segue-se que $z \in R$, que implica que $z \in J^n :_R I^n$.*

A próxima proposição diz que em anéis Cohen-Macaulay locais com corpos residuais infinitos, se I é um ideal equimúltiplo com altura 1, então a localização em primos e core comutam, isto é, $(\operatorname{core}(I))_{\mathfrak{p}} = \operatorname{core}(I_{\mathfrak{p}})$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ contendo I.

Proposição 7.4. *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Cohen-Macaulay com corpo residual k infinito, I um ideal com $\operatorname{ht}(I) = \ell(I) = 1$. Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo contendo I, então $(\operatorname{core}(I))_{\mathfrak{p}} = \operatorname{core}(I_{\mathfrak{p}})$.*

Demonstração: Observe que $R_{\mathfrak{p}}$ um anel local Cohen-Macaulay e $R_{\mathfrak{p}}$ é uma R-álgebra plana. Uma vez que $\operatorname{ht}(I) = 1$, I não está contido em nenhum primo minimal de R, assim por vacuidade segue que I satisfaz à condição G_1. Similarmente, como $\operatorname{ht}(I_{\mathfrak{p}}) \geq 1$, também segue que $I_{\mathfrak{p}}$ satisfaz à condição G_1.

Seja $S = R[T_1, \ldots, T_n]$ o anel polinomial com n indeterminadas. De acordo com a Proposição 1.71, os primos minimais de S são da forma $\mathfrak{p}[T_1, \ldots, T_n]$, onde $\mathfrak{p}$ é um primo minimal de R. Assim, o ideal IS não está contido em nenhum primo minimal de S, logo $\operatorname{ht}(IS) > 0$. Tal fato implica que IS não admite 0-interseção residual, logo, por vacuidade, o ideal I é universal-fraco-0-residualmente

S_2. Com argumento semelhante, também se conclui que $I_{\mathfrak{p}}$ é universal-fraco-0-residualmente S_2. Uma vez que $k(\mathfrak{p})$ é infinito, segue da Proposição 5.30 que $(\mathrm{core}(I))_{\mathfrak{p}} = \mathrm{core}(I_{\mathfrak{p}})$. □

7.2 O core em ideais equimúltiplos com altura 1

Teorema 7.5 (Teorema 3.4 de [27])**.** *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Cohen-Macaulay local com corpo residual k infinito. Sejam I um ideal de R com $\ell(I) = \mathrm{ht}(I) = 1$, $r = r(I)$ e J uma redução minimal de I. Se $(y_1), (y_2), \ldots, (y_t)$ são reduções minimais de I tais que core$(I) = (y_1) \cap (y_2) \cap \cdots \cap (y_t)$, definindo $s = \max\{r((J, y_i))\ ;\ 1 \leq i \leq t\}$, então*

(i) $\mathrm{core}(I) = J^{n+1} :_R \sum\limits_{y \in I} (J, y)^n = J^{n+1} :_R \sum\limits_{i=1}^{t} (J, y_i)^n$ *para todo $n \geq s$;*

(ii) Se $\mathrm{char}(k) = 0$ *ou* $\mathrm{char}(k) > r$*, então* $\mathrm{core}(I) = J^{n+1} :_R I^n$ *para todo $n \geq r$.*

Demonstração: (i):

Afirmação 1: Tem-se a seguinte identidade:

$$\mathrm{core}(I) = \bigcap_{y \in I} \mathrm{core}((J, y)) = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{core}((J, y_i))$$

Com efeito, observe que (J, y) é uma redução de I, pois, uma vez que $JI^r = I^{r+1}$, segue que $(J, y)I^r = JI^r + yI^r = I^{r+1} + yI^r = I^{r+1}$. Note também que (y_i) é uma redução de (J, y_i), pois, como I contém um elemento R-regular e (J, y_i) é uma redução de I, tal fato segue da Proposição 5.22.

Utilizando as Proposições 5.2 e 5.8, tem-se que

$$\mathrm{core}(I) \subseteq \bigcap_{y \in I} \mathrm{core}((J, y)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{core}((J, y_i)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} (y_i) = \mathrm{core}(I).$$

Assim, deduz-se que

$$\mathrm{core}(I) = \bigcap_{y \in I} \mathrm{core}((J, y)) = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{core}((J, y_i)),$$

o que prova a Afirmação 1.

Afirmação 2: Para demonstrar a parte (i) deste teorema, é suficiente provar que $\mathrm{core}((J,y)) \subseteq J^{n+1} :_R (J,y)^n$ para cada $y \in I$ e $n \geq s$.

Com efeito, pela Proposição 5.22, tem-se que J é uma redução minimal de (J,y_i) e que $\ell((J,y_i)) = 1$. Além disso, vale que $\mathrm{ht}((J,y_i)) = 1$, pois (J,y_i) contém um elemento R-regular e (J,y_i) está contido em I que possui altura igual a 1. Como $n \geq s \geq r((J,y_i))$, pode-se aplicar as partes (i) e (ii) da Proposição 7.2, obtendo para cada $1 \leq i \leq t$

$$(J,y_i)(J^n :_R (J,y_i)^n) = J(J^n :_R (J,y_i)^n) = J^{n+1} :_R (J,y_i)^n \subseteq \mathrm{core}((J,y_i)).$$

Portanto

$$J^{n+1} :_R \sum_{i=1}^{t}(J,y_i)^n = \bigcap_{i=1}^{t}(J^{n+1} :_R (J,y_i)^n) \subseteq \bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{core}((J,y_i)) = \mathrm{core}(I).$$

Tal inclusão pode ser generalizada para $y \in I$ qualquer, pois

$$J^{n+1} :_R \sum_{y\in I}(J,y)^n = \bigcap_{y\in I}(J^{n+1} : (J,y)^n) \subseteq \bigcap_{i=1}^{t}(J^{n+1} :_R (J,y_i)^n) \subseteq \mathrm{core}(I).$$

Assim para efetivar a prova deste Teorema, é suficiente que se demonstre que $\mathrm{core}((J,y)) \subseteq J^{n+1} :_R (J,y)^n$ para cada $y \in I$, pois, se assim for feito, obtém-se que

$$\mathrm{core}(I) = \bigcap_{i=1}^{t}\mathrm{core}((J,y_i)) \subseteq \bigcap_{i=1}^{t}(J^{n+1} :_R (J,y_i)^n) = J^{n+1} :_R \sum_{i=1}^{t}(J,y_i)^n \subseteq \mathrm{core}(I),$$

bem como

$$\mathrm{core}(I) = \bigcap_{y\in I}\mathrm{core}((J,y)) \subseteq \bigcap_{y\in I}(J^{n+1} :_R (J,y)^n) = J^{n+1} :_R \sum_{y\in I}(J,y)^n \subseteq \mathrm{core}(I).$$

o que prova Afirmação 2.

Afirmação 3: Para provar que $\mathrm{core}((J,y)) \subseteq J^{n+1} :_R (J,y)^n$ para todo $n \geq s$ é suficiente provar que tal inclusão vale para todo $n \geq r((J,y))$.

Com efeito, com uma simples verificação mostra-se que $(J^{(n+1)+1} :_R (J,y)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia descendente de ideais de R. Assim, se $\mathrm{core}((J,y)) \subseteq J^{n+1} :_R (J,y)^n$ para todo $n \geq l := \max\{s, r((J,y))\}$, deduz-se que

$$\mathrm{core}((J,y)) \subseteq J^{l+1} :_R (J,y)^l \subseteq J^{k+1} :_R (J,y)^k \text{ para todo } s \leq k \leq l,$$

logo

$$\mathrm{core}((J,y)) \subseteq J^{n+1} :_R (J,y)^n \text{ para todo } n \geq s.$$

o que prova a Afirmação 3.

Afirmação 4: Pode-se supor sem perda de generalidade que $\dim(R) = 1$.

Com efeito, como J é um ideal gerado por um elemento R-regular e R é Cohen-Macaulay, tem-se que R/J é um R-módulo Cohen-Macaulay. Assim, dado $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(J)$, tem-se $J \subseteq \mathfrak{p}$ minimalmente, portanto $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. Suponha que se tenha mostrado para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(J)$ que

$$\mathrm{core}((J,y)_{\mathfrak{p}}) \subseteq J_{\mathfrak{p}}^{n+1} :_{R_{\mathfrak{p}}} (J,y)_{\mathfrak{p}}^n,$$

então segue da Proposição 7.4 que

$$\mathrm{core}((J,y))_{\mathfrak{p}} = \mathrm{core}((J,y)_{\mathfrak{p}}) \subseteq J_{\mathfrak{p}}^{n+1} :_{R_{\mathfrak{p}}} (J,y)_{\mathfrak{p}}^n \subseteq (J^{n+1} :_R (J,y)^n)_{\mathfrak{p}}$$

para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{ass}(J^{n+1} :_R (J,y)^n) \subseteq \mathrm{ass}(J^{n+1}) = \mathrm{ass}(J)$. Portanto $\mathrm{core}((J,y) \subseteq J^{n+1} :_R (J,y)^n$.

Finalmente para provar que a inclusão $\mathrm{core}((J,y)_{\mathfrak{p}}) \subseteq J_{\mathfrak{p}}^{n+1} :_{R_{\mathfrak{p}}} (J,y)_{\mathfrak{p}}^n$ é válida após cada localização, será necessário o uso da Proposição 7.2 no ideal (J,y), assim é necessário garantir que as hipóteses exigidas no enunciado de tal Proposição são atendidas pelo ideal após a localização.

- Como a Cohen-Macaulidade é estável para localização, segue que R_p é Cohen-Macaulay local com corpo residual $k(\mathfrak{p})$ infinito;

- Como (J, y) contém um elemento R-regular, $(J, y)_{\mathfrak{p}}$ também conterá elementos $R_{\mathfrak{p}}$-regulares e, uma vez que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, segue que $\mathrm{ht}((J, y)_{\mathfrak{p}}) = 1$;

- Note que $\ell((J, y)_{\mathfrak{p}}) \leq \ell(J, y) = 1$. Por outro lado, como $(J, y)_{\mathfrak{p}}$ contém elementos R_p-regulares, $(J, y)_{\mathfrak{p}}$ não é nilpotente, logo (0) não pode ser uma redução minimal de $(J, y)_{\mathfrak{p}}$, daí $\ell((J, y)_{\mathfrak{p}}) = 1$;

- Como a propriedade 'ser redução"é estável para localização, segue que $J_{\mathfrak{p}}$ é uma redução de $(J, y)_{\mathfrak{p}}$. Além disso, esta redução é minimal pois $\mu(J_{\mathfrak{p}}) = \ell((J, y)_{\mathfrak{p}})$;

- Observe que $n \geq r = r((J, y)) \geq r((J, y)_{\mathfrak{p}})$.

Como todas as propriedades são preservadas após localização nos primos associados de J, pode-se supor que $\dim(R) = 1$, terminando a prova da Afirmação 4.

Suponha então que R possua dimensão 1 e denote $\mathfrak{m}$ para o ideal maximal de R, $J = (x)$ e $K = J^n :_R (J, y)^n$. Utilizando a parte (i) e (ii) da Proposição 7.2 aplicado ao ideal (J, y) com $i = 1$, tem-se que

$$yK = y(J^n :_R (J, y)^n) \subseteq (J, y)(J^n :_R (J, y)^n) = J(J^n :_R (J, y)^n) = xK.$$

para todo $n \geq r((y, J))$.

Afirmação 5: Utilizando a notação da Proposição 7.1, existem $z_i = x + u_i y \in I$ $1 \leq i \leq c$ com $c \geq \dim_k((K :_R \mathfrak{m})/K)$ tais que $(z_1), \ldots, (z_c)$ são reduções minimais de I. Além disso, u_i são invertíveis e podem ser tomados tais quais não são todos congruentes módulo $\mathfrak{m}$.

Com efeito, observe que, uma vez que $\mathrm{ht}(J, x) = 1 = \dim(R)$, o ideal (J, y) é $\mathfrak{m}$-primário. Assim, pela Proposição 5.23, existem polinômios não-nulos $\phi_1, \ldots, \phi_v \in k[X_1, X_2]$ tais que $(ax + by)$ é uma redução de (J, y) se e somente se $\phi_k(\overline{a}, \overline{b}) \neq 0$ para algum $1 \leq k \leq v$. Pela Proposição 1.75, a redução $(ax + by)$ pode ser tomada tal que a, b são unidades em R, assim $(ax + by) = (x + (ba^{-1})y)$ é uma redução de (J, y). Em particular, $(x + (ba^{-1})y))$ é uma redução minimal de (J, y) pela Proposição 5.16.

Além disso, segue também da Proposição 1.75 que $u_1, \ldots, u_c$ podem ser tomados tal que não são todos congruente módulo $\mathfrak{m}$ e que c pode ser tomado tal que $c > \dim_k((K :_R \mathfrak{m})/K)$. Terminando assim a prova Afirmação 5.

Utilizando a parte (i) da Proposição 7.2, deduz-se que $z_i K = xK$. Assim, cálculos rotineiros mostram que

$$(z_i) \cap (xK :_R \mathfrak{m}) = (z_i) \cap (z_i K :_R \mathfrak{m}) = z_i((z_i K :_R \mathfrak{m}) : z_i) = z_i(z_i K :_R z_i \mathfrak{m}) = z_i(K :_R \mathfrak{m}),$$

e, similarmente,

$$(x) \cap (xK :_R \mathfrak{m}) = x(K :_R \mathfrak{m}).$$

Usando estes fatos e a Proposição 7.1, deduz-se que para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, tem-se

$$\begin{aligned} (x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}) &= x(K :_R \mathfrak{m}) \cap z_1(K :_R \mathfrak{m}) \cap \cdots \cap z_c(K :_R \mathfrak{m}) \\ &\subseteq x(x^j :_R y^j). \end{aligned}$$

Desse modo

$$(x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}) \subseteq x\left(\bigcap_{j=1}^{n} (x^j :_R y^j)\right) = x(x^n :_R (x, y)^n) = xK.$$

Afirmação 6: Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $(x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}^n) \subseteq xK$, o que permite concluir que $(x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \subseteq xK$.

A prova será sucedida por indução em n. Para $n = 1$, essa igualdade já é válida por hipótese. Suponha que valha para n, isto é, $(x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}^n) \subseteq xK$. Assim seja

$$z = xa \in (x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}^{n+1}).$$

Dado $m \in \mathfrak{m}$, tem-se $xam \in (x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}^n) \subseteq xK$. Como x é regular, segue que $am \in K$ e, uma vez que m foi escolhido arbitrariamente, segue que $a \in K :_R \mathfrak{m}$, portanto $z = xa \in xK :_R \mathfrak{m}$. Assim segue que $z \in (x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}) \subseteq xK$, daí, pelo princípio da indução, conclui-se que

$$(x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}^n) \subseteq xK \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como xK contém um elemento R-regular e $\dim(R) = 1$, deduz-se que xK possui altura 1 e, portanto, é $\mathfrak{m}$-primário, isto é, $\sqrt{xK} = \mathfrak{m}$. Assim, uma vez que $\mathfrak{m}$ é finitamente gerado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}^n \subseteq xK$. Logo, tem-se que

$$(x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) = (x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \cap (xK :_R \mathfrak{m}^n) \subseteq xK.$$

O que termina a prova da Afirmação 6.

Finalmente, como $(x), (z_1), \ldots, (z_c)$ são reduções de (J, y), obtém-se que

$$\operatorname{core}((J,y)) \subseteq (x) \cap (z_1) \cap \cdots \cap (z_c) \subseteq xK = J(J^n :_R (J,y)^n) = J^{n+1} :_R (J,y)^n,$$

o que conclui a demonstração de (i).

(ii): Se $\operatorname{char}(k) = 0$, segue do Corolário 1.22 que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$I^n = \sum_{y \in I} (y^n) \subseteq \sum_{y \in I} (y, J)^n \subseteq I^n.$$

Assim $I^n = \sum_{y \in I} (y, J)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela parte (i) deste Teorema, segue que, para todo $m \geq \max\{r, s\}$, tem-se

$$\operatorname{core}(I) = J^{m+1} :_R I^m.$$

Note que, como J é um ideal principal gerado por um elemento R-regular, tem-se pela Proposição 1.13 que

$$J^{r+1} :_R I^r = J^{r+2} :_R I^{r+1} = \cdots = J^{m+1} :_R I^m = \operatorname{core}(I) = \cdots = J^{n+1} :_R I^n = \ldots$$

Portanto $\mathrm{core}(I) = J^{n+1} :_R I^n$ pata todo $n \geq r$.

Suponha agora que $\mathrm{char}(k) = p$. Como $r < p$, tem-se pelo Corolário 1.22 que

$$\sum_{y \in I} (y, J)^r = I^r.$$

Uma vez que $\mathrm{ht}(I) = \ell(I) = 1$ e J é uma redução minimal de I, segue da Proposição 5.21 que $r_J(I) = r$. Observe que para cada $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$I^{r+k} = I^r J^k = \sum_{y \in I} (y, J)^r J^k \subseteq \sum_{y \in I} (y, J)^{r+k} \subseteq I^{r+k},$$

onde a primeira inclusão se deve ao fato que $J^k \subseteq (y, J)^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $n \geq r$, tem-se

$$I^n = \sum_{y \in I} (y, J)^n.$$

Considere $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq \max\{r, s\}$, a parte (i) deste Teorema diz que

$$\mathrm{core}(I) = J^{m+1} :_R I^m.$$

Finalmente, uma vez que

$$J^{r+1} :_R I^r = J^{r+2} :_R I^{r+1} \cdots = J^{m+1} :_R I^m = \mathrm{core}(I) = \cdots = J^{n+1} :_R I^n = \ldots$$

conclui-se que $\mathrm{core}(I) = J^{n+1} :_R I^n$ para todo $n \geq r$. $\square$

Capítulo 8

O teorema principal

O Capítulo 8, o capítulo final e mais importante dessa dissertação, será constituído por duas seções. Na Seção 8.1, serão provados dois lemas e um teorema. O Lema 8.1 é um resultado demasiadamente técnico, cuja prova envolve várias ferramentas da álgebra comutativa, desde ferramentas simples até às avançadas, como a teoria da S_2-ficação e interseção residual. O Lema 8.2, cuja prova consiste em aplicações imediatas de resultados das referências [24] e [26], diz que, nas configurações do teorema principal, qualquer redução minimal do ideal I terá boas propriedades, como G_∞, depth deslizante, etc. Ambos os lemas serão utilizados na demonstração do Teorema 8.3 que faz considerável parte do trabalho que se terá na demonstração do teorema principal. Finalmente, o Teorema 8.4, que se encontra na Seção 8.2, é o teorema principal deste trabalho, razão por todo árduo trabalho já feito nesta dissertação.

8.1 Ultimos preparativos

No lema a seguir, para manter a notação do artigo, será utilizado o símbolo ℓ para denotar o número minimal de geradores do ideal J. Tal denotação foi utilizada, pois, quando este lema, de fato, for utilizado no Teorema 8.3, J será uma redução minimal de I e, portanto, gerado minimalmente por $\ell(I) = \ell$ geradores.

Lema 8.1 (Lema 4.2 de [27]). *Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local Cohen-Macaulay com corpo residual k infinito e assuma que R admita módulo canônico ω_R. Seja J um ideal de R com $\mu(J) = \ell > 0$, $\mathrm{ht}(J) < \ell$, satisfazendo às condições G_∞ e depth deslizante. Defina*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(J) = \{\mathfrak{a} \ ; \ \mathfrak{a} :_R J \text{ é uma } (\ell - 1)\text{-interseção residual geométrica de } J \text{ e } \mu(J/\mathfrak{a}) = 1\}.$$

Se t um inteiro positivo e H é um ideal de R satisfazendo $\mathrm{ht}(J, J^t :_R H) \geq \ell$. Então

$$H \cap \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} (\mathfrak{a}, J^t) \subseteq J^t.$$

Demonstração: A prova procederá por indução em ℓ.

Se $\ell = 1$, então $\mathcal{A}(J) = \{0\}$. Com efeito, se $\mathfrak{b}$ é uma 0-interseção residual geométrica de J, então $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} :_R J$, onde $\mathfrak{a}$ é gerado por 0 elementos, de onde segue que $\mathfrak{a} = 0$ e, portanto $\mathcal{A}(J) \subseteq \{0\}$. Por outro lado $0 : J$ é uma 0-interseção residual geométrica de J, pois 0 é um ideal gerado por 0 elementos, $\mathrm{ht}(0 :_R J) \geq 0 \geq \mathrm{ht}(J)$ e, pela Proposição 4.4, $\mathrm{ht}((0 :_R J, J)) \geq 1$. Além disso, como $\mu(J/0) = \mu(J) = 1$, tem-se que $0 \in \mathcal{A}(J)$, o que implica em $\mathcal{A}(J) = \{0\}$. Portanto o resultado vale trivialmente, pois

$$H \cap \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} (\mathfrak{a}, J^t) = H \cap J^t \subseteq J^t.$$

Assim, pode-se assumir $\ell \geq 2$. Seja $b \in H$ e suponha que $b \in J^{j-1} \setminus J^j$ para algum j com $1 \leq j \leq t$. É suficiente provar que existe algum $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ tal que $b \notin (\mathfrak{a}, J^t)$. Note que se $b \notin J$, então $b \notin (\mathfrak{a}, J^t)$ para qualquer $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$, pois, pela definição de interseção residual, $\mathfrak{a} \subseteq J$. Assim, pode-se supor, sem perda de generalidade, que $b \in J$.

Afirmação 1: Pode-se supor sem perda de generalidade que $\mathrm{ht}(J) > 0$.

De fato, utilize a notação "$\overline{}$"para denotar imagens em $\overline{R} := R/(0 : J)$. Como J satisfaz à condição G_1, segue da Proposição 4.5 que $J \cap (0 :_R J) = 0$. Seja π o epimorfismo canônico $\pi : R \longrightarrow \overline{R}$. Observe que $\pi|_{J^n}$ induz um isomorfismo entre J^n e $\pi(J^n) = \overline{J}^n$ para todo $n \geq 1$, pois

$$\ker(\pi|_{J^n}) = J^n \cap (0 : J) \subseteq J \cap (0 :_R J) = 0.$$

Assim, $\overline{b} \in \overline{J}^{j-1} \setminus \overline{J}^j$ e $\mu(J) = \mu(\overline{J})$.

Dado $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}(\overline{J})$, então $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{a}}$ para algum $\mathfrak{a}_0 \in \mathcal{A}(J)$. Com efeito, seja $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}(\overline{J})$ um ideal gerado por $\ell - 1$ elementos. Então $\mathfrak{b} = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{\ell-1}})$, com $y_1, \ldots, y_{\ell-1} \in J$. Se $\mathfrak{a} = (y_1, \ldots, y_{\ell-1})$, então $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{a}}$. Como $J \cap (0 :_R J) = 0$, tem-se que $\mathfrak{a} :_R J = (0 :_R J, \mathfrak{a}) :_R J$. Pode-se verificar que se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ é tal que $(\mathfrak{a}, 0 :_R J) :_R J \subseteq \mathfrak{p}$, então $\mathfrak{b} :_{\overline{R}} \overline{J} \subseteq \pi(\mathfrak{p})$, assim, uma vez que $\mathrm{ht}(\mathfrak{b} :_{\overline{R}} \overline{J}) \geq \ell - 1$, segue do teorema da correspondência que $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R J) = \mathrm{ht}((\mathfrak{a}, 0 :_R J) :_R J) \geq \ell - 1$. Similarmente, mostra-se que se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ é tal que $((\mathfrak{a}, 0 :_R J) :_R J, J) \subseteq \mathfrak{p}$, então $(\mathfrak{b} :_{\overline{R}} \overline{J}, \overline{J}) \subseteq \pi(\mathfrak{p})$, assim, uma vez que $\mathrm{ht}(\mathfrak{b} :_{\overline{R}} \overline{J}, \overline{J}) \geq \ell$, segue que $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R J, J) = \mathrm{ht}((\mathfrak{a}, 0 :_R J) :_R J, J) \geq \ell$.

Note que

$$\frac{\overline{J}}{\mathfrak{b}} = \frac{J/(0 :_R J)}{(\mathfrak{a} + 0 :_R J)/(0 :_R J)} \cong \frac{J}{\mathfrak{a} + 0 :_R J}.$$

Assim $\mu(\overline{J}/\mathfrak{b}) = \mu(J/(\mathfrak{a} + 0 :_R J)) = 1$. Portanto, $\mathfrak{a} + 0 :_R J$ é um subideal próprio de J e, tendo em vista que todo sistema minimal de geradores de $\mathfrak{a} + 0 :_R J$ pode ser estendido a um sistema minimal de geradores de J, segue que $\mu(\mathfrak{a} + 0 :_R J) = \ell - 1$, daí $\mathfrak{a} :_R J$ é uma $(\ell - 1)$ interseção residual geométrica de J. Portanto, $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{a}} = \overline{\mathfrak{a} + 0 :_R J}$ e $(\mathfrak{a} + 0 :_R J) \in \mathcal{A}(J)$.

Uma vez que $J \neq 0$ e $(0 :_R J)J = 0$, deduz-se que $0 :_R J$ não contém elementos R-regulares, segue então $\mathrm{ht}(0 :_R J) = 0$, pois R é Cohen-Macaulay. Como

$\mathrm{ht}(J, J^t :_R H) \geq \ell$, toda cadeia maximal de primos

$$\mathfrak{p}_0 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_t,$$

com $(J, J^t :_R H) \subseteq \mathfrak{p}_t$ é tal que $t \geq \ell$. Se, em particular, $\mathfrak{p}_0$ for um primo minimal que contenha $0 :_R J$, segue do teorema da correspondência que $\mathrm{ht}(\overline{J}, \overline{J}^t :_{\overline{R}} \overline{H}) \geq \ell$

Afirmo que $\overline{J}$ satisfaz à condição G_∞. Seja $P = \overline{\mathfrak{p}}$ um primo que contém $\overline{J}$, onde $\mathfrak{p}$ é um primo de R que contém $J + 0 :_R J$. Claramente se tem

$$\mu(\overline{J}_P) \leq \mu(J_\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}),$$

onde a última desigualdade deve-se ao fato que J satisfaz G_∞. Como R é um anel Cohen-Macaulay e $\mathrm{ass}(0 :_R J) \subseteq \mathrm{ass}(0)$, tem-se que

$$\mathrm{Ass}\left(\frac{R}{0 :_R J}\right) \subseteq \mathrm{Ass}(R) = \mathrm{MinAss}(R) = \mathrm{MinSpec}(R).$$

Assim, se $\mathrm{ht}(P) = n$, existe uma cadeia de primos $\overline{\mathfrak{p}_\mathfrak{o}} \subseteq \overline{\mathfrak{p}_1} \subseteq \cdots \subseteq \overline{\mathfrak{p}_n} = \overline{\mathfrak{p}} = P$, onde $\mathfrak{p}_\mathfrak{o}$ é um primo que contém minimalmente $0 :_R J$. Uma vez que

$$\mathrm{MinV}(0 :_R J) = \mathrm{MinSupp}\left(\frac{R}{0 :_R J}\right) = \mathrm{MinAss}\left(\frac{R}{0 :_R J}\right) = \mathrm{Ass}\left(\frac{R}{0 :_R J}\right),$$

$\mathfrak{p}_0$ é um primo minimal de R e, portanto, $\mathfrak{p}_\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{p}_\mathfrak{1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$ é uma cadeia maximal de primos terminando em $\mathfrak{p}$. Uma vez que R é um anel Catenário pela Proposição 2.31, segue que toda cadeia maximal de ideais primos terminando em $\mathfrak{p}$ possui comprimento n, isto é, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n = \mathrm{ht}(P)$, logo

$$\mu(\overline{J}_P) \leq \mu(J_\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(P)$$

e, portanto $\overline{J}$ satisfaz à condição G_∞. Finalmente, pela Proposição 4.13 $\overline{R}$ é um anel Cohen-Macaulay local, $\overline{J}$ satisfaz à condição de depth deslizante e pela Proposição 4.6 $\mathrm{ht}(\overline{J}) \geq 1$. Além disso, tendo em vista o Corolário 2.52 o anel $\overline{R}$ admite módulo canônico. Suponha que se tenha demonstrado que

$$\overline{H} \cap \bigcap_{\mathfrak{b} \in \mathcal{A}(\overline{J})} (\mathfrak{b}, \overline{J}^t) \subseteq \overline{J}^t.$$

Seja $x \in H \cap \bigcap_{\mathfrak{a}\in\mathcal{A}(J)}(\mathfrak{a}, J^t)$. Em particular, $x \in J$. Tendo em vista que todo elemento de $\mathcal{A}(\overline{J})$ é da forma $\overline{\mathfrak{a}}$ para algum $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}(J)$, segue que $\overline{x} \in \overline{H} \cap \bigcap_{\mathfrak{b}\in\mathcal{A}(\overline{J})}(\mathfrak{b}, \overline{J}^t) \subseteq \overline{J}^t$, assim $x \in J \cap (J^t + 0 :_R J)$. Como $J^t \subseteq J$, segue da Proposição 1.15 que

$$J \cap (J^t + 0 :_R J) = J \cap J^t + J \cap (0 :_R J) = J^t.$$

Portanto $x \in J^t$, isto é, $H \cap \bigcap_{\mathfrak{a}\in\mathcal{A}(J)}(\mathfrak{a}, J^t) \subseteq J^t$. Assim, após a substituição de R por $\overline{R}$ e J por $\overline{J}$, pode-se assumir sem perda de generalidade que $\mathrm{ht}(J) > 0$, o que prova a Afirmação 1.

Sejam $G = \mathrm{gr}_J(R)$ o anel graduado associado de R com respeito ao ideal J, $G_+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} J^i/J^{i+1}$ e denote $b^* = b + J^j \in [G]_{j-1}$. Pela Proposição 4.15, G é um anel Cohen-Macaulay e J é um ideal de tipo linear. Note $b^* \neq 0$, assim, se $0 = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$ é uma decomposição primária do ideal nulo de G, existe algum componente primária Q_i de 0, digamos Q, tal que $b^* \notin Q$. Sejam $P = \sqrt{Q}$ e $\mathfrak{p}$ a contração de P em R pelo homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} \phi : R &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto (x + J, 0 + J^2, \cdots, 0 + J^n, \cdots) \end{aligned}$$

Afirmação 2: Tem-se que $\mathrm{ht}((G_+, Q)/Q) \geq 2$.

De fato, como G é Cohen-Macaulay e P é um primo associado de G, segue-se que P é um primo minimal de G, assim, utilizando a Proposição 5.31, deduz-se que $\ell(J_\mathfrak{p}) = \dim R_\mathfrak{p}$. Observe que se valesse que $\dim(R_\mathfrak{p}) < \ell$, como $\mathrm{ht}(J, J^t :_R H) \geq \ell$, teríamos pela Proposição 1.5 que $H_\mathfrak{p} \subseteq J^t_\mathfrak{p}$, assim $b^*/1 = 0$ em $G_\mathfrak{p}$, o que significa que existe $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ tal que $sb^* = 0$. Note, todavia, que a imagem de s em G, digamos s', não está em $P = \sqrt{Q}$, portanto nenhuma potência de s' pertence a Q, o que leva a concluir que $b^* \in Q$, pois Q é um ideal primário de G e $s'b^* = 0 \in Q$, uma contradição. Logo $\ell(J_\mathfrak{p}) = \dim R_\mathfrak{p} \geq \ell \geq 2$.

Por outro lado, uma vez que P é um primo associado de G, tem-se que P é ideal homogêneo, assim G/P é um domínio integral graduado. Observe que $(G_+, P)/P$ é um ideal primo de G/P, pois

$$\frac{G/P}{(G_+, P)/P} \cong \frac{G}{G_+ + P} \cong \frac{R}{\mathfrak{p}},$$

onde o último isomorfismo é obtido através do homomorfismo sobrejetivo de anéis

$$\psi : G \longrightarrow R/\mathfrak{p}$$

$$(a_0 + J, a_1 + J^2, \dots) \longmapsto \overline{a_0},$$

cujo núcleo é (G_+, P). Observe que este homomorfismo está bem-definido, pois $J \subseteq \mathfrak{p}$. Assim, uma vez que $(G_+, P)/P$ é um ideal primo, tem-se que $\operatorname{ht}(G_+, P)/P = \operatorname{ht}(G_+, P)_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}}$.

Note que $G \otimes_R k(\mathfrak{p})$ é um domínio integral. Com efeito, como J é um ideal de tipo linear, tem-se que $\operatorname{Sym}_R(J) \cong R[Jt]$, assim, utilizando a Proposição 1.14, segue que

$$\begin{aligned} G \otimes_R k(\mathfrak{p}) &\cong \frac{R[Jt]}{JR[Jt]} \otimes_R \left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right)_{\mathfrak{p}} \cong R[Jt] \otimes_R \left(\frac{R}{J}\right) \otimes_R \left(\frac{R}{\mathfrak{p}}\right) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \\ &\cong \operatorname{Sym}_R(J) \otimes_R \left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}\right). \end{aligned}$$

Utilizando a Proposição 1.80, segue que

$$\begin{aligned} G \otimes_R k(\mathfrak{p}) &\cong \operatorname{Sym}_R(J) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}\right) \cong \operatorname{Sym}_{R_{\mathfrak{p}}}(J_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}\right) \\ &\cong \operatorname{Sym}_{k(\mathfrak{p})} \left(\frac{J_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}J_{\mathfrak{p}}}\right) \cong k(\mathfrak{p})[X_1, \dots, X_{\mu(J_{\mathfrak{p}})}], \end{aligned}$$

daí $G \otimes_R k(\mathfrak{p})$ é um domínio integral. Como $P_{\mathfrak{p}}$ é um primo minimal de $G_{\mathfrak{p}}$ e

$$G \otimes_R k(\mathfrak{p}) \cong G \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \cong G_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \cong \frac{G_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}G_{\mathfrak{p}}},$$

segue que $P_{\mathfrak{p}} = 0 = \mathfrak{p}G_{\mathfrak{p}}$. Assim, conclui-se que

$$\operatorname{ht}(G_+, Q)/Q = \operatorname{ht}(G_+, P)/P = \operatorname{ht}(G_+, P)_{\mathfrak{p}}/P_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht}(G_+, \mathfrak{p}G)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}G_{\mathfrak{p}} = \ell(J_{\mathfrak{p}}) \geq 2,$$

o que prova a afirmação 2.

Considere $M = \mathfrak{m}/I \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n/I^{n+1}$ o ideal maximal homogêneo de G. Observe que Q_M é um ideal primário de G_M, assim seguem da Proposição 1.54 e do Corolário 4.15 que o anel

$$A = \frac{G_M}{Q_M} \cong \left(\frac{G}{Q}\right)_M$$

é equidimensional e unmixed.

Afirmação 3: O anel A admite módulo canônico

Com efeito, como J é um ideal finitamente gerado, $\mathrm{gr}_J(R)$ é uma R-álgebra finitamente gerada, assim existe um isomorfismo de R-álgebras $\gamma : \mathrm{gr}_J(R) \longrightarrow R[X_1, \ldots, X_\ell]/I$, onde I é um ideal de $R[X_1, \ldots, X_\ell]$, daí

$$\overline{\gamma} : \frac{\mathrm{gr}_J(R)}{Q} \longrightarrow \frac{R[X_1, \ldots, X_\ell]}{\gamma(Q) + I}$$

é um isomorfismo e, portanto,

$$A \cong \left(\frac{R[X_1, \ldots, X_\ell]}{I'}\right)_{\overline{M'}} \cong \frac{R[X_1, \ldots, X_\ell]_{M'}}{I'_{M'}},$$

onde M' é um ideal primo de $R[X_1, \ldots, X_\ell]$. Note que o mapa natural $\phi : R \longrightarrow R[X_1, \ldots, X_\ell]_{M'}$ é um homomorfismo plano de anéis locais Cohen-Macaulay e que

$$S := \frac{R[X_1, \ldots, X_\ell]_{M'}}{\mathfrak{m}R[X_1, \ldots, X_\ell]_{M'}}$$

é um anel Gorenstein. Assim, pela Proposição 2.53, $R[X_1, \ldots, X_\ell]_{M'}$ admite módulo canônico e, portanto, é imagem homomórfica de um anel Gorenstein. Assim, $A \cong R[X_1, \ldots, X_\ell]_{M'}/I'_{M'}$ é imagem homomórfica de um anel Gorenstein, logo, pelo Teorema da dualidade de local, A admite módulo canônico, o que prova a Afirmação 3.

Sendo assim, pela Proposição 3.27, A admite S_2-ficação $B := \mathrm{Hom}_R(\omega_A, \omega_A)$. Note que A pode ser visto como um subanel de B, pois o núcleo do homomorfismo natural $h_A : A \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\omega_A, \omega_A)$ é igual a $\mathfrak{u}(0) = 0$, já que A é unmixed e equidimensional. Além disso, denotando $N = ((G_+, Q)/Q)_M$, uma vez que

$$\mathrm{ht}(N) = \mathrm{ht}\left(\left(\frac{G_+, Q}{Q}\right)_M\right) \geq \mathrm{ht}\left(\frac{G_+, Q}{Q}\right) \geq 2,$$

segue da Proposição 3.30 que $\mathrm{ht}(NB) = \mathrm{ht}(N) \geq 2$ e $\mathrm{grade}(NB) \geq 2$.

Observe $b^*A \neq 0$, pois, como $b^* \notin Q$, $\overline{b^*} \neq 0$ em G/Q e se $\overline{b^*}/1 = 0$ em A, existiria um $s \in G \smallsetminus M$ tal que $sb^* \in Q$. Assim, o fato de Q ser P-primário e $b^* \notin Q$, implicaria em $s \in P \subseteq M$, gerando um contradição. Portanto $0 \neq b^*A \subseteq A \subseteq B$. Como $N \subseteq \mathrm{Rad}(B)$, tem-se que $NB \subseteq \mathrm{Rad}(B)B = \mathrm{Rad}(B)$, assim, uma vez que B é um anel Noetheriano, segue da Proposição 1.19, que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(NB)^n = 0.$$

Portanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal $b^*A \nsubseteq (NB)^n$. Note que se pode supor, sem perda de generalidade, que $n \geq \ell(J)$, pois $((NB)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente de ideais de B. Sendo assim, sejam $x_1, \ldots, x_n$ n elementos gerais de J e escreva $x_i^* = x_i + J^2 \in [G]_1$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Considerando a imagem de x_i^* em NB para cada $1 \leq i \leq n$, uma vez que $\mathrm{grade}(NB) \geq 2$, tem-se pelo Corolário 5.27 que, para cada $1 \leq i < j \leq n$, a sequência x_i^*, x_j^* é B-regular, portanto segue da Proposição 2.4 que

$$x_1^*A \cap \cdots \cap x_n^*A \subseteq x_1^*B \cap \cdots \cap x_n^*B = (x_1^* \cdots x_n^*)B \subseteq (NB)^n.$$

Já que $b^*A \nsubseteq (NB)^n$, então $b^*A \nsubseteq x_i^*A$ para algum $1 \leq i \leq n$. Seja $x = x_i$ e use a notação "$\overline{}$" para denotar imagens em $R/(x)$. Note que $b^* \notin x^*G$. Pois, se $b^* \in x^*G$, então $x^*A = x^*(G/Q)_M = (x^*G/Q)_M$ contém a imagem b^* em $(G/Q)_M$, o que implica que $b^*A \subseteq x^*A$, gerando uma contradição. Note que, uma vez que x é um elemento geral de J e $\mathrm{grade}(J, R) = \mathrm{ht}(J) > 0$, x é um elemento R-regular em virtude da Proposição 5.26.

Afirmação 4: Tem-se que $G/(x^*G)$ que é isomorfo como anel a $\mathrm{gr}_{\overline{J}}(\overline{R})$.

De fato, Defina o homomorfismo $\zeta : G \longrightarrow \mathrm{gr}_{\overline{J}}(\overline{R})$ tal que

$$\zeta(a_0 + J, a_1 + J^2, \ldots, a_n + J^{n+1}, \ldots) = (\overline{a_0} + \overline{J}, \overline{a_1} + \overline{J}^2 \ldots, \overline{a_n} + \overline{J}^{n+1}, \ldots).$$

Nota-se claramente que ζ um homomorfismo sobrejetor de anéis e que $x^*G \subseteq \ker(\zeta)$. Por outro lado, dado $(a_0 + J, a_1 + J^2, \ldots, a_n + J^{n+1}, \cdots) \in \ker(\zeta)$, segue-se que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existem $b_n \in J^{n+1}$, $c_n \in R$ tais que $a_n = b_n + c_n x$. Como $a_n \in J^n$, segue-se então que $c_n \in J^n :_R x$.

Sendo G Cohen-Macaulay e $\mathrm{ht}(J) > 0$, segue da Proposição 2.40 que $\mathrm{grade}(G_+, G) > 0$, assim, como x é um elemento geral de J, então $\overline{x}$ é um elemento geral de J/J^2. Portanto, tem-se que x^* é um elemento G-regular. Desse modo, pelo Lema 2.39, segue que $J^n :_R x = J^{n-1}$ para cada $n \geq 1$, o que implica que $c_n \in J^{n-1}$ para cada $n \geq 1$. Assim

$$\begin{aligned}
(a_0 + J, a_1 + J^2, \ldots, a_n + J^{n+1}, \ldots) &= (b_0 + xc_0 + J, b_1 + xc_1 + J^2, \ldots, b_n + xc_n + J^{n+1}, \ldots) \\
= (xc_0 + J, xc_1 + J^2, \ldots, xc_n + J^{n+1}, \ldots) &= (0 + J, xc_1 + J^2, \ldots, xc_n + J^{n+1}, \ldots) \\
&= x^*(c_1 + J, c_2 + J^2, \ldots, c_{n+1} + J^{n+1}, \ldots) \in x^*G.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo primeiro teorema do isomorfismo, $\mathrm{gr}_{\overline{J}}(\overline{R}) \cong G/x^*G$, provando a Afirmação 4.

Note que, uma vez que, $\overline{b^*} \neq 0$ em G/x^*G, tem-se que $\zeta(\overline{b^*}) = \overline{b} + \overline{J}^j \neq 0$, portanto, $\overline{b} \in \overline{J}^{j-1} \setminus \overline{J}^j$. A partir de agora será mostrado que $\overline{J}$ satisfaz às condições do enunciado. Observe primeiramente que, como x é um elemento R-regular, $\overline{R}$ Cohen-Macaulay local com corpo residual isomorfo a k e, portanto, infinito. Além disso, pela Proposição 2.50, $\overline{R}$ também admite módulo canônico.

Afirmação 5: $\overline{J}$ satisfaz à condição de depth deslizante e $\mu(\overline{J}) = \ell - 1$. Além disso, $\overline{J}$ é um ideal de tipo linear e, em particular, $\overline{J}$ satisfaz à condição G_∞.

Com efeito, como x é um elemento R-regular, pela Proposição 4.9, $\overline{J}$ satisfaz à condição de depth deslizante. Pela generalidade de x, tem-se pela Proposição 5.28 que $\mu(\overline{J}) = \ell - 1$.

No que tange à condição de ser de tipo linear, tem-se o seguinte: Como $\operatorname{grade}(G_+, G) > 0$ e x é um elemento geral de J, $X = x + J^2$ é um elemento G-regular. Portanto, pela Proposição 2.38, tem-se que $J^{m+1} \cap (x) = xJ^m$. para todo $m \geq 1$. Assim, pela Proposição 1.112,, tem-se a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow xt\mathcal{R}(J) \longrightarrow \mathcal{R}(J)_+ \longrightarrow \mathcal{R}(J/(x))_+ \longrightarrow 0.$$

Considerando o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (x)\operatorname{Sym}(J) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \operatorname{Sym}(J)_+ \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & \operatorname{Sym}(J/(x))_+ \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & xt\mathcal{R}(J) \arrow[r, "f'"'] & \mathcal{R}(J)_+ \arrow[r, "g'"'] & \mathcal{R}(J/(x))_+ \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tem-se, pelo lema da serpente, a seguinte sequência exata de R-módulos

$$\ker(\beta) \longrightarrow \ker(\gamma) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\alpha) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\beta) \longrightarrow \operatorname{Coker}(\gamma) \longrightarrow 0$$

Como J é um ideal de tipo linear, então $\ker(\beta) = \operatorname{Coker}(\beta) = 0$, por outro lado, é fácil ver que α é um mapa sobrejetivo, logo $\operatorname{Coker}(\alpha) = 0$. Desse modo, tem-se que γ é um isomorfismo. Se $\Gamma : \operatorname{Sym}(\overline{J}) \longrightarrow \mathcal{R}(\overline{J})$ é o epimorfismo natural, então $\Gamma|_{\operatorname{Sym}(\overline{J})_+} = \gamma$. Como Γ leva elementos não-nulos de $\operatorname{Sym}(J/(x))_0$ em elementos não-nulos, segue que Γ é injetiva e, portanto, $J/(x)$ é um ideal de tipo linear e, por conseguinte, $\overline{J}$ satisfaz à condição G_∞ pela Proposição 1.104, o que termina a prova da Afirmação 5.

Afirmação 6: Tem-se que $\operatorname{ht}(\overline{J}, \overline{J}^t :_{\overline{R}} \overline{H}) \geq \ell - 1$.

Com efeito, pela R-regularidade de x e o teorema da altura de Krull, tem-se que $\operatorname{ht}((x)) = 1$. Assim, se $h = \operatorname{ht}(\overline{J}, \overline{J}^t :_{\overline{R}} \overline{H})$, tomando

$$\overline{\mathfrak{p}_1} \subseteq \overline{\mathfrak{p}_2} \subseteq \cdots \subseteq \overline{\mathfrak{p}_h}$$

uma cadeia maximal com $(x) \subseteq (J, J^t :_R H) \subseteq \mathfrak{p}_h$, então $\mathfrak{p}_1$ é um primo de R que contém minimalmente (x). como $\mathrm{ht}(J, J^t :_R H) \geq \ell$ e $ht((x)) = 1$, segue que $h \geq \ell - 1$, o que prova a Afirmação 6.

Afirmação 7: Todo ideal de $\mathcal{A}(\overline{J})$ é da forma $\overline{\mathfrak{a}}$ para algum $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}(J)$.

Seja $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}(\overline{J})$, então $\mathfrak{b} = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{\ell-2}}) = (y_1, \ldots, y_{\ell-2}, x)/(x)$, assim $\mathfrak{b} = \overline{a}$, com $\mathfrak{a} = (y_1, \ldots, y_{\ell-2}, x)$. Afirmo que $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}(J)$. De fato, como $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}(\overline{J})$, então $\mathfrak{b} :_{\overline{R}} \overline{J}$ é uma $(\ell-2)$-interseção residual geométrica de $\overline{J}$. Assim $(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{\ell-2}}) \subsetneq \overline{J}$ e, portanto, $\mathfrak{a} = (y_1, \ldots, y_{\ell-2}, x) \subsetneq J$. Pode-se mostrar que, se $P = \overline{\mathfrak{p}}$ um primo que contém $\mathfrak{b} :_{\overline{R}} \overline{J}$, então $\mathfrak{p}$ é um primo de R que contém $\mathfrak{a} :_R J$ e a recíproca também é válida. Assim se $\mathfrak{p}'$ é um primo que contém $\mathfrak{a} :_R J$ minimalmente, toda cadeia maximal de primos em $\overline{R}$

$$\overline{\mathfrak{p}_o} \subseteq \overline{\mathfrak{p}_1} \subseteq \cdots \subseteq \overline{\mathfrak{p}_s} = \overline{\mathfrak{p}'}$$

é tal que $s \geq \ell - 2$. Como $\mathfrak{p}_o$ não é um primo minimal em R, pois contém x, então $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \geq \ell - 1$, daí $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R J) \geq \ell - 1$. Como também se tem que $\mathrm{ht}((\overline{J}, \mathfrak{b} :_{\overline{R}} \overline{J})) \geq (\ell-2)+1$, com um raciocínio semelhante, prova-se que $\mathrm{ht}((J, \mathfrak{a} :_R J)) \geq (\ell-1)+1$. Como $\ell - 1 \geq \mathrm{ht}(J)$, tem-se que $\mathfrak{a} :_R J$ é uma $(\ell-1)$-interseção residual geométrica de J. Por fim, como

$$\frac{\overline{J}}{\mathfrak{b}} = \frac{J/(x)}{(y_1, \ldots, y_{\ell-2}, x)/(x)} = \frac{J/(x)}{\mathfrak{a}/(x)} \cong \frac{J}{\mathfrak{a}}$$

segue que $\mu(J/\mathfrak{a}) = 1$ e portanto $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}(J)$, o que prova a Afirmação 7.

Finalmente, como $\mu(\overline{J}) = \ell - 1$, pela hipótese de indução, tem-se que

$$\overline{H} \cap \bigcap_{\mathfrak{b} \in \mathcal{A}(\overline{J})} (\mathfrak{b}, \overline{J}^t) \subseteq \overline{J}^t.$$

Sendo assim, como $\overline{b} \notin \overline{J}^t$ e $\overline{b} \in \overline{H}$, existe $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}(\overline{J})$ tal que $\overline{b} \notin (\mathfrak{b}, \overline{J}^t)$. Assim, $\overline{b} \notin \mathfrak{b}$. Uma vez que $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{a}_0}$ para algum $\mathfrak{a}_0 \in \mathcal{A}(J)$, conclui-se $b \notin (\mathfrak{a}_0, J^t)$ e o Lema está provado. $\square$

O próximo lema, que é uma observação no artigo base deste trabalho, consiste em aplicações imediatas de resultados das referências [24] e [26].

Lema 8.2. *Sejam* $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel local Gorenstein com corpo residual infinito e* I *um ideal de* R *com* $\mathrm{ht}(I) = g > 0$ *e* $\ell(I) = \ell$*. Assuma que* I *satisfaz à condição* G_ℓ *e* $\mathrm{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ *para* $1 \leq j \leq \ell - g$*. Neste caso, qualquer redução minimal* J *de* I *satisfaz à condição* G_∞ *e depth deslizante. Além disso,* J *é do tipo linear,* $\mathrm{gr}_J(R)$ *é Cohen-Macaulay e* $\mathrm{ht}(J :_R I) \geq \ell$*.*

Demonstração: Seja J uma redução minimal de I.

Afirmação 1: $\mathrm{ht}(J :_R I) \geq \ell$.

De fato, observe primeiramente que I é genericamente uma interseção completa. Com efeito, da condição $\mathrm{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para $j = 1$, segue que R/I é um anel Cohen-Macaulay, assim pelo Corolário 2.29 tem-se que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = g < \ell$ para qualquer $\mathfrak{p} \in \mathrm{MinV}(I) = \mathrm{Ass}(R/I)$. Portanto, uma vez que I satisfaz à condição G_ℓ, segue da Proposição 4.3 que $I_\mathfrak{p}$ é um ideal interseção completa para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$.

Aplicando a Proposição 4.25 ao ideal I e tomando $s = \ell - 1$, conclui-se que I satisfaz à condição $AN_{\ell-1}$. Em particular, I satisfaz à condição $AN^-_{\ell-3}$. Como I satisfaz à condição G_ℓ, segue da Proposição 4.3 que $I_\mathfrak{p}$ é um ideal interseção completa para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ contendo minimalmente I tal que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \ell - 1$. Assim, aplicando a Proposição 4.26 ao ideal I e tomando $s = \ell - 1$, segue que $I_\mathfrak{p}$ é um ideal de tipo linear para todo $\mathfrak{p}$ contendo I com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq \ell - 1$.

Finalmente, suponha por absurdo que exista um ideal $\mathfrak{p}$ primo contendo $J :_R I$ com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \ell$. Note que $I \subseteq \mathfrak{p}$ pela Proposição 1.11. Como J é uma redução de I e $I_\mathfrak{p}$ é um ideal de tipo linear, segue da Proposição 5.19 que $J_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$, daí

$$(J :_R I)_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p} :_{R_\mathfrak{p}} I_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p},$$

por conseguinte, $J :_R I \not\subseteq \mathfrak{p}$, gerando uma contradição. Portanto $\mathrm{ht}(J :_R I) \geq \ell$, provando a afirmação 1.

Afirmação 2: J satisfaz à condição G_∞.

Com efeito, seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo contendo J. Se $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq \ell$, então

$$\mu(J_\mathfrak{p}) \leq \mu(J) = \ell \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}).$$

Por outro lado, se $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \ell$, então $J_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$, pois $\mathrm{ht}(J :_R I) \geq \ell$ e $J \subseteq I$. Assim, como I satisfaz à condição G_ℓ e $\mathrm{V}(I) = \mathrm{V}(J)$, segue que

$$\mu(J_\mathfrak{p}) = \mu(I_\mathfrak{p}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}).$$

Portanto J satisfaz à condição G_∞ e a afirmação 2 está provada.

Afirmação 3: J satisfaz à condição de depth deslizante.

Afirmo que J satisfaz à condição de depth deslizante. De fato, observe que I satisfaz à condição $G_{\ell-1}$. Tomando $s = \ell - 1$, segue da Proposição 4.27 que J também satisfaz à condição $AN_{\ell-1}$.

Por outro lado, utilizando a Proposição 4.28, ao tomar $\mathfrak{a} = J$ e $s = \ell$, é possível construir uma sequência geradora $a_1, \ldots, a_\ell$ de J tal que, se definindo $\mathfrak{a}_i = (a_1, \ldots, a_i)$ e $J_i = \mathfrak{a}_i :_R J$, então J_i são i-interseções residuais de J para cada $g \leq i \leq \ell - 1$. Da condição $AN_{\ell-1}$ sobre J, segue que R/J_i são anéis Cohen-Macaulay para todo $g \leq i \leq \ell - 1$. Por fim, aplicando a Proposição 4.29 ao ideal J e tomando $n = \ell$, conclui-se que J satisfaz à condição de depth deslizante, o que prova a afirmação 3.

Finalmente, como $\mathrm{ht}(J) = \mathrm{ht}(I) > 0$ e J satisfaz às condições G_∞ e depth deslizante, segue do Corolário 4.15 que J é um ideal de tipo linear e $\mathrm{gr}_J(R)$ é um anel Cohen-Macaulay. □

Teorema 8.3 (Teorema 4.4 de [27]). *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Gorenstein local com corpo residual k infinito, I um ideal de R, com $\mathrm{ht}(I) = g > 0$ e $\ell(I) = \ell$*

e J uma redução minimal de I. Assuma que I satisfaça à condição G_ℓ e que $\operatorname{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ *para* $1 \leq j \leq \ell - g$. *Neste caso, vale que*

$$\operatorname{core}(I) \subseteq J^{n+1} :_R \sum_{y \in I} (J, y)^n$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração: Se $\ell = 0$, então a única redução minimal de I é o ideal nulo, logo

$$\operatorname{core}(I) = 0 \subseteq J^{n+1} :_R \sum_{y \in I} (J, y)^n.$$

Por outro lado, se $n = 0$, então o ideal $J^{n+1} : \sum_{y \in I} (J, y)^n$ se resume a $J : R = J$, logo

$$\operatorname{core}(I) \subseteq J = J^{n+1} :_R \sum_{y \in I} (J, y)^n.$$

Logo se pode supor sem perda de generalidade que $\ell > 0$ e $n > 0$.

Seja $J^{n+1} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \cap \mathfrak{q}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+s}$ a decomposição primária de J^{n+1}, onde $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}_i) < \ell$ para todo $1 \leq i \leq r$ e $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}_{r+i}) \geq \ell$ para todo $1 \leq i \leq s$. Defina $H := \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$.

Afirmação 1: Tomando $t = n+1$, os ideais J e H satisfazem às condições do Lema 8.1.

Com efeito, pelo Lema 8.2, J satisfaz às condições G_∞ e depth deslizante. Além disso, como

$$H(\mathfrak{q}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+s}) \subseteq \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \cap \mathfrak{q}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+s} = J^{n+1},$$

tem-se que

$$\mathfrak{q}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+s} \subseteq J^{n+1} :_R H.$$

Assim, se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo contendo $J^{n+1} :_R H$, $\mathfrak{p}$ necessariamente contém $\mathfrak{q}_{r+i}$ para algum $1 \leq i \leq s$, logo $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \geq \ell$, o que implica que $\operatorname{ht}(J, J^{n+1} :_R H) \geq \ell$, provando assim a afirmação 1.

Afirmação 2: Definindo $L := \sum_{y \in I}(J, y)^n$, tem-se que $\operatorname{core}(I) \subseteq H :_R L$.

Com efeito, tendo em vista as Proposições 1.43 e 1.45, para provar esta inclusão, é suficiente provar que $(\operatorname{core}(I))_\mathfrak{p} \subseteq (H :_R L)_\mathfrak{p}$ para todo primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{ass}(H)$. Como todos os primos primos associados de H possuem altura inferior a ℓ, basta provar que essa inclusão é válida na localização em primos $\mathfrak{p}$ com $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) < \ell$. Assim sendo, seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo com $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) < \ell$. Uma vez que $\operatorname{ht}(J :_R I) \geq \ell$ pelo Lema 8.2, tem-se que $J_\mathfrak{p} :_{R_\mathfrak{p}} I_\mathfrak{p} = R_\mathfrak{p}$ e, portanto, $J_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$. Daí, tem-se que $L_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p}^n$. Assim,

$$(\operatorname{core}(I))_\mathfrak{p} \subseteq J_\mathfrak{p} \subseteq J_\mathfrak{p}^{n+1} :_{R_\mathfrak{p}} J_\mathfrak{p}^n = H_\mathfrak{p} :_{R_\mathfrak{p}} L_\mathfrak{p} = (H :_R L)_\mathfrak{p}.$$

Note que foi usado que $H_\mathfrak{p} = J_\mathfrak{p}^{n+1}$ na penúltima igualdade acima. Este fato vale, pois, uma vez que $J^{n+1} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r \cap \mathfrak{q}_{r+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{r+s}$, tem-se

$$J_\mathfrak{p}^{n+1} = (\mathfrak{q}_1)_\mathfrak{p} \cap (\mathfrak{q}_2)_\mathfrak{p} \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_r)_\mathfrak{p} = H_\mathfrak{p}.$$

Portanto $\operatorname{core}(I) \subseteq H :_R L$ e a afirmação 2 está provada.

Afirmação 3: Dado $\mathfrak{a} \in \mathscr{A}(J)$, o ideal $\mathfrak{a} :_R I$ é uma $\ell - 1$-interseção residual geométrica de I.

De fato, como $\mathfrak{a} \in \mathscr{A}(J)$, então $\mathfrak{a}$ pode ser gerado por $\ell - 1$ elementos e é um subideal próprio de J e, portanto, de I. Seja $\mathfrak{p}$ é um ideal primo com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \ell - 1$, então $\mathfrak{p}$ não contém os ideais $J :_R I$ e $\mathfrak{a} :_R J$, pois $\mathrm{ht}(J :_R I) \geq \ell$ e $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R J) \geq \ell - 1$, logo

$$(J :_R I)_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}} :_{R_{\mathfrak{p}}} I_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} :_{R_{\mathfrak{p}}} I_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{a} :_R I)_{\mathfrak{p}}.$$

Portanto $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$, daí

$$(\mathfrak{a} :_R I)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} :_{R_{\mathfrak{p}}} I_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}},$$

daí $\mathfrak{a} :_R I \subsetneq \mathfrak{p}$ e, como $\mathfrak{p}$ é arbitrário, segue que $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R I) \geq \ell - 1$.

Similarmente, dado $\mathfrak{p}$ um ideal primo com $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < \ell$, então $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$. Como $\mathrm{ht}((J, \mathfrak{a} :_R J)) \geq \ell$, também vale que $J_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} :_{R_{\mathfrak{p}}} J_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$, daí $(I, \mathfrak{a} :_R I)_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$ e, portanto, $\mathrm{ht}((I, \mathfrak{a} :_R I)) \geq \ell$. Finalmente, como $\ell - 1 \geq g$, segue que $\mathfrak{a} :_R I$ é uma $(l-1)$-interseção residual geométrica de I, terminando a prova da afirmação 3.

Seja $\mathfrak{a} \in \mathscr{A}(J)$ e utilize a notação "$\overline{\quad}$" para denotar imagens em $\overline{R} = R/(\mathfrak{a} :_R I)$. Como foi visto no Lema 8.2, o ideal I satisfaz à condição $AN_{\ell-1}$, portanto o anel $\overline{R}$ é Cohen-Macaulay. Aplicando a Proposição 4.30 ao ideal I, com $s = \ell - 1$, obtém-se que $(\mathfrak{a} :_R I) \cap I = \mathfrak{a}$ e $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R I) = \ell - 1$.

Afirmação 4: O ideal $\overline{I}$ é equimúltiplo com $\mathrm{ht}(\overline{I}) = 1$ e $\overline{J}$ é uma redução minimal de $\overline{I}$.

Com efeito, observe que $\mathrm{ht}(\overline{I}) > 0$, pois, se P é um primo contendo $\overline{I}$, então $P = \overline{\mathfrak{p}}$ para algum primo $\mathfrak{p}$ contendo $I + \mathfrak{a} :_R I$. Note que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq \ell$, pois, como $\mathfrak{a} :_R I$ é uma $(\ell-1)$-interseção residual geométrica de I, tem-se que $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R I, I) \geq \ell$. Como $\overline{R}$ é Cohen-Macaulay e $\mathrm{ht}(\mathfrak{a} :_R I) = \ell - 1$, pelo Corolário 2.29 qualquer ideal primo que contenha minimalmente $\mathfrak{a} :_R I$ possui altura igual a $\ell - 1$, assim é possível encontrar um primo $\mathfrak{p}'$ tal que $\mathfrak{a} :_R I \subsetneq \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$, daí P não é minimal em $\mathrm{Spec}(\overline{R})$ e, portanto $\mathrm{ht}(P) > 0$. Como P foi escolhido arbitrariamente, $\mathrm{ht}(\overline{I}) > 0$.

Note que $\overline{J}$ é uma redução de $\overline{I}$. Além disso, tem-se que $\mu(\overline{J}) = 1$, pois

$$\overline{J} = \frac{J + \mathfrak{a} :_R I}{\mathfrak{a} :_R I} \cong \frac{J}{(\mathfrak{a} :_R I) \cap J} = \frac{J}{\mathfrak{a}},$$

onde na última igualdade foi utilizado que $(\mathfrak{a} :_R I) \cap I = \mathfrak{a}$. Assim, pela Proposição 5.14, $\ell(\overline{I}) \leq 1$. Por outro lado, como $\mathrm{ht}(\overline{I}) > 0$, $\overline{I}$ contém elemento $\overline{R}$-regular e, portanto, não é nilpotente, assim o ideal nulo não pode ser redução minimal de $\overline{I}$, daí $\ell(\overline{I}) = 1$ e $\overline{J}$ é uma redução minimal de $\overline{I}$. Assim tem-se que $\mathrm{ht}(\overline{I}) = 1$, pois

$$0 < \mathrm{ht}(\overline{I}) \leq \ell(\overline{I}) = 1.$$

Portanto $\overline{I}$ é um ideal equimúltiplo com altura igual a 1, o que prova a afirmação 4.

Afirmação 5: $\mathrm{core}(I) \subseteq (J^{n+1}, \mathfrak{a}) :_R L$.

Note que, como $\mathrm{ht}(\overline{I}) = 1$, $\overline{I}$ trivialmente satisfaz à condição G_1. Além disso, $\overline{I}$ não admite 0-interseção residual geométrica, logo, por vacuidade, $\overline{I}$ é fraco-0-residualmente S_2. Assim, um vez que $\overline{R}$ é Cohen-Macaulay local com corpo residual isomorfo a k e, portanto, infinito, segue da Proposição 5.29 que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in I$ tais que $(\overline{\alpha_1}), \ldots, (\overline{\alpha_t})$ são reduções minimais de $\overline{I}$ e $\mathrm{core}(\overline{I}) = (\overline{\alpha_1}) \cap \cdots \cap (\overline{\alpha_t})$. Assim, pela parte (i) do Teorema 7.5 tem-se que $\mathrm{core}(\overline{I}) = \overline{J}^{m+1} :_{\overline{R}} \sum_{\overline{y} \in \overline{I}} (\overline{y}, \overline{J})^m$ para todo m suficientemente grande. Como $\overline{J}$ é um ideal gerado por um elemento regular, pode-se verificar que a seguinte cadeia de ideais descendente

$$\left(\overline{J}^{k+1} :_{\overline{R}} \sum_{\overline{y} \in \overline{I}} (\overline{J}, \overline{y})^k \right)_{k \in \mathbb{N}}.$$

Assim, tem-se que $\mathrm{core}(\overline{I}) \subseteq \overline{J}^{n+1} :_{\overline{R}} \overline{L}$.

Uma vez que $(\overline{\alpha_i})$ é redução de $\overline{I}$, então $(\alpha_i, \mathfrak{a})$ é redução de I. Portanto, tem-se que

$$\operatorname{core}(I) \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} (\mathfrak{a}, \alpha_i),$$

daí

$$\overline{\operatorname{core}(I)} \subseteq \overline{\bigcap_{i=1}^{t} (\mathfrak{a}, \alpha_i)} \subseteq \bigcap_{i=1}^{t} \overline{(\mathfrak{a}, \alpha_i)} = \bigcap_{i=1}^{t} (\overline{\alpha_i}) = \operatorname{core}(\overline{I}).$$

Como $\operatorname{core}(\overline{I}) \subseteq \overline{J}^{n+1} :_{\overline{R}} \overline{L}$, obtém-se

$$\operatorname{core}(I) \subseteq (J^{n+1}, \mathfrak{a} :_R I) :_R L = (J^{n+1}, (\mathfrak{a} :_R I) \cap I) :_R L = (J^{n+1}, \mathfrak{a}) :_R L,$$

o que prova a afirmação 5.

Finalmente, utilizando que $\operatorname{core}(I) \subseteq H :_R L$, $\operatorname{core}(I) \subseteq (J^{n+1}, \mathfrak{a}) :_R L$ para cada $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}(J)$, a Proposição 1.17 e o Lema 8.1, tem-se que

$$\operatorname{core}(I) \subseteq \left(H \cap \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} (J^{n+1}, \mathfrak{a}) \right) :_R L \subseteq J^{n+1} :_R L = J^{n+1} :_R \sum_{y \in I} (J, y)^n,$$

o que completa a demonstração. □

8.2 Enfim, o teorema principal

Com todas ferramentas necessárias já disponíveis, será provado a seguir o teorema principal desta dissertação.

Teorema 8.4 (Teorema 4.5 de [27]). *Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Gorenstein local com corpo residual k infinito, I um ideal de R com $\operatorname{ht}(I) = g > 0$ e $\ell(I) = \ell$ e J uma redução minimal de I com $r_J(I) = r$. Se I satisfaz à condição G_ℓ, $\operatorname{depth}(R/I^j) \geq \dim(R/I) - j + 1$ para $1 \leq j \leq \ell - g$ e $\operatorname{char}(k) = 0$ ou $\operatorname{char}(k) > r - \ell + g$, então*

$$\operatorname{core}(I) = J^{n+1} :_R I^n$$

para todo $n \geq \max\{r - \ell + g, 0\}$.

Demonstração: Com efeito, para provar a inclusão $J^{n+1} :_R I^n \subseteq \mathrm{core}(I)$, é suficiente provar que se K é um redução minimal qualquer de I, então $J^{n+1} :_R I^n \subseteq K$, pois, se assim feito, tem-se que

$$J^{n+1} :_R I^n \subseteq \bigcap_{K \text{ redução de I}} K = \mathrm{core}(I).$$

Pelo Corolário 6.3, $J^{n+1} :_R I^n = K^{j+1} :_R I^j$ para quaisquer $n \geq \max\{r - \ell + g, 0\}$, j suficientemente grande e J, K reduções minimais de I. Entretanto, como $K^{j+1} :_R I^j \subseteq K^{j+1} :_R K^j = K$, onde a última igualdade é válida, pois $\mathrm{ht}(K) = \mathrm{ht}(I) > 0$ e $\mathrm{gr}_K(R)$ é Cohen-Macaulay (Lema 8.2), tem-se $J^{n+1} :_R I^n \subseteq K$ para qualquer redução minimal K de I, daí

$$J^{n+1} :_R I^n \subseteq \mathrm{core}(I) \qquad \forall n \geq \max\{r - \ell + g, 0\}.$$

Para mostar a inclusão $\mathrm{core}(I) \subseteq J^{n+1} :_R I^n$ para todo $n \geq \max\{r - \ell + g, 0\}$, pode-se assumir sem perda de generalidade que $n = \max\{r - \ell + g, 0\}$, pois, de acordo com o Corolário 6.3, $J^{n+1} :_R I^n = J^{j+1} :_R I^j$ para todo $j \geq \max\{r - \ell + g, 0\}$.

Se $n = 0$, então $\mathrm{core}(I) \subseteq J :_R R = J$, que é trivialmente verdadeiro. Se $n = r - \ell + g$, segue da hipótese sobre a característica de k que $I^n = \sum_{y \in I} (J, y)^n$. Assim, aplicando o Teorema 8.3, obtém-se que

$$\mathrm{core}(I) \subseteq J^{n+1} :_R \sum_{y \in I} (J, y)^n = J^{n+1} :_R I^n.$$

Portanto fica provado que

$$\mathrm{core}(I) = J^{n+1} :_R I^n \qquad \forall n \geq \max\{r - \ell + g, 0\}.$$

□

Apêndice

Neste apêndice serão provadas as igualdades usadas ao longo da demonstração da Proposição 6.1.

Igualdade 1. $\omega_A :_{K(t)} L = \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} (1, It)^s I^n t^n A)$.

Demonstração: Seja $z \in \omega_A :_{K(t)} L$. Como $1 \in L = (1, (1, It)^s I^n t^n)A$, então $z \in \omega_A$. Note também que, como $(1, It)^s I^n t^n A \subseteq L$, vale $z \in \omega_A :_{K(t)} (1, It)^s I^n t^n A$, daí $z \in \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} (1, It)^s I^n t^n A)$. Portanto

$$\omega_A :_{K(t)} L \subseteq \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} (1, It)^s I^n t^n A).$$

Reciprocamente, seja $z \in \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} (1, It)^s I^n t^n A)$. Dado $y \in L$, então existem $y_1 \in A$ e $y_2 \in (1, It)^s I^n t^n A$ tais que $z = y_1 + y_2$. Como ω_A é um A-módulo, $y_1 z \in \omega_A$, assim $yz = y_1 z + y_2 z \in \omega_A$. Como y foi escolhido arbitrariamente em L, então $z \in \omega_A :_{K(t)} L$. Portanto

$$\omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} (1, It)^s I^n t^n A) \subseteq \omega_A :_{K(t)} L.$$

□

Igualdade 2. $\omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} (1, It)^s I^n t^n A) = \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} \omega_A I^n t^{a+n})$.

Demonstração: Basta notar que, uma vez que $\omega_A = (1, It)^s A t^{-a}$, então

$$(1, It)^s I^n t^n A = (1, It)^s t^{-a} A I^n t^{n+a} = \omega_A I^n t^{n+a}.$$

□

Igualdade 3. $\omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} \omega_A I^n t^{a+n}) = \omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n})$.

Demonstração: Seja $z \in \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} \omega_A I^n t^{a+n})$. Dado $y \in I^n t^{a+n}$ arbitrário, temos que provar que $zy \in \omega_A :_{K(t)} \omega_A$. Sendo assim, dado $x \in \omega_A$ arbitrário, tem-se que $xy \in \omega_A I^n t^{a+n}$ e, portanto, $(zy)x \in \omega_A$. Assim $zy \in \omega_A :_{K(t)} \omega_A$ e, portanto, $z \in (\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n}$. Como $z \in \omega_A$, então $z \in \omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n})$. Logo

$$\omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} \omega_A I^n t^{a+n}) \subseteq \omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n}).$$

Reciprocamente, seja $z \in \omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n})$. Dado $y \in \omega_A I^n t^{a+n}$ arbitrário, então existem $y_1, \dots, y_m \in \omega_A$ e $x_1, \dots, x_m \in I^n t^{a+n}$ tais que $y = y_1 x_1 + \cdots + x_m y_m$. Assim $zy = y_1(zx_1) + \cdots + y_m(zx_m)$, onde $zx_k \in \omega_A :_{K(t)} \omega_A$ para todo $1 \leq k \leq m$, logo $zy \in \omega_A$. Assim $z \in \omega_A :_{K(t)} \omega_A I^n t^{a+n}$. Como $z \in \omega_A$, segue que $z \in \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} \omega_A I^n t^{a+n})$. Portanto

$$\omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n}) \subseteq \omega_A \cap (\omega_A :_{K(t)} \omega_A I^n t^{a+n}).$$

$\square$

Igualdade 4. $\omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n}) = \omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n})$.

Demonstração: Seja $z \in \omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n})$. Dado $y \in I^n t^{a+n}$ arbitrário, temos que mostrar $zy \in \omega_A :_{K(t)} \omega_A$. Como $zy \in A \subseteq K(t)$ e ω_A é um A-módulo, é claro que $(zy)\omega_A \subseteq \omega_A$, portanto $z \in (\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n}$. Como $z \in \omega_A$, então $z \in \omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n})$. Portanto

$$\omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n}) \subseteq \omega_A \cap ((\omega_A :_{K(t)} \omega_A) :_{K(t)} I^n t^{a+n}).$$

$\square$

Igualdade 5. $\omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n}) = A :_{\omega_A} I^n t^{a+n}$.

Demonstração: Seja $z \in \omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n})$, então $z \in \omega_A$ e $zI^n t^{a+n} \subseteq A$, logo $z \in A :_{\omega_A} I^n t^{a+n}$. Portanto

$$\omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n}) \subseteq A :_{\omega_A} I^n t^{a+n}.$$

Reciprocamente, seja $z \in A :_{\omega_A} I^n t^{a+n}$, então $z \in \omega_A$ e $zI^n t^{a+n} \subseteq A$. Uma vez que I contém um elemento R-regular, $z = yt^{-a-n}/s^n$ para algum $y \in A$ e $s \in I$ elemento R-regular, logo $z \in K(t)$, daí $z \in \omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n})$. Portanto

$$A :_{\omega_A} I^n t^{a+n} \omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n}) \subseteq \omega_A \cap (A :_{K(t)} I^n t^{a+n}).$$

$\square$

Bibliografia

[1] DUMMIT, D.S; FOOTE, R. M. Abstract Algebra. 3. ed. Estados Unidos: John Wiley Sons, Inc., 2003.

[2] ATIYAH, M. F; MACDONALD, I. G. Introduction to Commutative Algebra. 1. ed. Estados Unidos: Addison-Wesley Publishing, 1969.

[3] MATSUMURA, H. Commutative Ring Theory, 1. ed. Inglaterra: Cambridge University Press, 1987.

[4] ROTMAN, J.J. An Introduction to Homological Algebra. 2. ed. Estados Unidos: Springer-Verlag New York, 2009.

[5] VASCONCELOS, W.V. Divisor Categories in Module Categories. 1. ed. Holanda: North-Holland Mathematics Studies, 1974.

[6] BRUNS, W; HERZOG, H.J. Cohen-Macaulay Rings. 1. ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 1998.

[7] BRODMANN, M. P; SHARP, R. Y. Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications. 2. ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 2013.

[8] SWANSON, I; HUNEKE, C. Integral Closure of Ideals, Rings and Modules. 1. ed. Inglaterra: Cambridge University Press, 2006.

[9] EISENBUD, D. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. 1. ed. Estados Unidos: Springer-Verlag New-York, 1994.

[10] SINGH, B. Basic Commutative Algebra. 1. ed. Estados Unidos: World Scientific Publishing Co., 2011.

[11] MCADAM, S. Asymptotic Prime Divisors. 1. ed. Alemanha: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1983.

[12] HAZRAT, R. Graded Rings and Graded Grothendieck Groups. 1. ed. Reino Unido: Cambridge University Press, 2016.

[13] VASCONCELOS, W. V. Arithmetic of Blowup Algebras. 1. ed. Inglaterra: Cambridge University Press, 1994.

[14] VILLARREAL R. H. Monomial Algebras. 2. ed. United States: CRC Press, 2015.

[15] VASCONCELOS, W. Integral closure: Rees Algebras, Multiplicities, Algorithms. 1. ed. United States: Springer Science e Business Media, 2006.

[16] NORTHCOTT, D. G; REES, D. Reductions on ideals in local rings. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. **50**, 145-158, 1954.

[17] LIPMAN, J. Stable ideals and Arf rings, American Journal of Mathematics, **93**, 649-685, 1971.

[18] CORSO, A; POLINI, C; ULRICH, B. Core and residual intersection of ideals, Transactions of the American Mathematical Society, **354**, 2579-2594, 2002.

[19] CORSO, A; POLINI, C; ULRICH, B. The structure of the core of ideals, Mathematische Annalen, **321**, 89-105, 2001.

[20] HUNEKE, C. Strongly Cohen-Macaulay schemes and residual intersections, Transactions of the American Mathematical Society, **277**, 739-763, 1983.

[21] HERZOG, J; VASCONCELOS, W. V; VILLARREAL. R. Ideals with sliding depth, Nagoya Mathematical Journal, **99**, 159-172, 1985.

[22] HUCKABA, S. Reductions numbers for ideals of higher analytic spread. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **102**, 49-57, 1987.

[23] ARTIN, M; NAGATA, M. Residual intersections in Cohen-Macaulay rings. Journal of Mathematics of Kyoto University, **12**, 307-323, 1972.

[24] ULRICH. B. Artin-Nagata properties and reductions of ideals. Contemporary Mathematics, **159**, 373-400, 1994.

[25] HOCHSTER, M; HUNEKE, C. Indecomposable canonical modules and connectedness, Contemporary Mathematics, **159**, 197-208, 1994.

[26] HERZOG, J; SIMIS, A; VASCONCELOS, W.V. Koszul homology and blowing-up rings. Commutative Algebra, Proceedings: Trento 1981 (Greco/Valla eds), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **84**, 79-169, 1983.

[27] POLINI, C; ULRICH, B. A formula for the core of an ideal. Mathematische Annalen, **331**, 487-503, 2005.

[28] ULRICH, B. Ideals having the expected reduction number. American Journal of Mathematics, **118**, 17-38, 1996.

[29] HASSANZADEH, S. H. Cohen-Macaulay residual intersection and their Castelnuovo-Mumford regularity. Transactions of the American Mathematical Society, **364**, 6371-6394, 2012.

[30] BOUÇA, V; HASSANZADEH, S. H. Residual intersections are Koszul-Fitting ideals. Compositio Mathematica, **155**, 2150-2179, 2019.

[31] ANDERSON, D. D; KNOPP, K. R; LEWIN, R. L. Ideals generated by powers of elements. Bulletin of the Australian Mathematical Society, **49**, 373-376, 1994.

[32] HUNEKE, C; TRUNG, N. V. On the core of ideals. Compositio Mathematica, **141**, 1-18, 2005.

[33] REES, D; SALLY, J. D. General elements and joint reductions. Michigan Mathematical Journal, **35**, 341-254, 1988.

[34] HYRY, E; SMITH, K. On a non-vanishing conjecture of Kawamata and the core of an ideal. American Journal of Mathematics, **125**, 1349 - 1410, 2003.

[35] GRAYSON, D.R; STILLMAN, M.E. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry.