Домашнее задание по курсу общей физики

2-й курс (3-й семестр)

Группа ИУ7-33Б Фамилия, инициалы Маслова М.Д.

Вариант № 11 Задача № 3.2.1

По двум гладким медным шинам скользит перемычка массы m, закон движения которой задан $y = f(t) = ae^{-nt}$ $\left(n = \frac{4R_0}{L}\right)$

Сопротивление перемычки равно R_0, поперечное сечение S, концентрация носителей заряда (электронов) в проводнике перемычки равна n_0. Сверху шины замкнуты электрической цепью, состоящей из индуктивности L. Расстояние между шинами l. Система находится в однородном переменном магнитном поле с индукцией:

$$B_z(t) = ce^{-mt} \quad \left(m = \frac{2R_0}{L}\right),$$

перпендикулярном плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивление шин, скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Ток через индуктивность в начальный момент времени равен 0.

Найти:
- закон изменения тока $I(t)$,
- максимальное значение тока I_{MAX},
- закон изменения проекций силы Лоренца на ось X (F_{Ax}) и на ось Y (F_{Ay}), действующей на электрон
- закон изменения напряженности электрического поля в перемычке $E(t)$.
- силу $F(t)$, действующую на перемычку, необходимую для обеспечения заданного закона движения.

Установить связь между силой Ампера, действующей на перемычку и силой Лоренца, действующей на все электроны в перемычке.

Построить зависимости тока через перемычку $\frac{I(t)}{I_{MAX}}$, силы Ампера $\frac{F_A(t)}{F_{AMAX}}$

Константы a и c считать известными

Дано:

m

$y = ae^{-nt}$

$n = \frac{4R_0}{L}$

R_0

S

n_0

L

l

$B_z = Ce^{-mt}$

$m = \frac{2R_0}{L}$

$I(0) = 0$

a, C

$I(t)$ - ?

I_{MAX} - ?

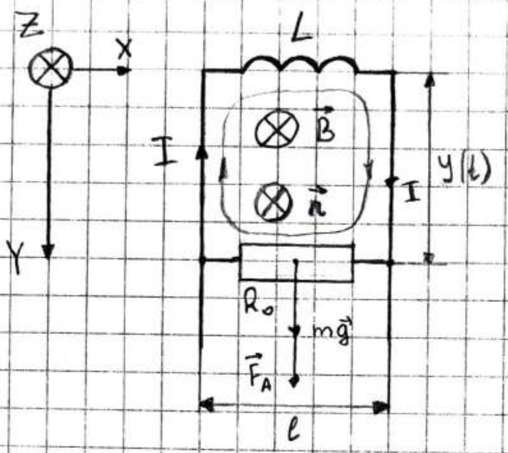
F_{Ax} - ?

F_{Ay} - ?

$E(t)$ - ?

$F(t)$ - ?

Решение:



① Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через контур:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} \qquad (1)$$

(направление $d\vec{S}$ совпадает с направлением вектора нормали $\vec{n}$, которое выбрано так, что $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$)

Площадь контура

$$S = y \cdot l \qquad (2)$$

Т.к. вектор $\vec{B}$ зависит только от времени, используя (1) и (2), получаем:

$$\Phi = B_z \cdot y \cdot l \qquad (3)$$

По закону Фарадея возникает ЭДС индукции, обусловленная изменением этого потока:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (4) и используя функции y и B_z из условия задачи, получаем:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\left(l \cdot Ce^{-mt} \cdot ae^{-nt}\right) = -aCl\frac{d}{dt}\left(e^{-(m+n)t}\right) =$$

$$= aCl(m+n)\cdot e^{-(m+n)t}$$

То есть:

$$\mathcal{E}_i = acl(m+n)e^{-(m+n)t} \qquad (5)$$

Индуктивность L создает ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_c = -L\frac{dI}{dt} \qquad (6)$$

Выбрав направление обхода (см. рис), воспользуемся уравнением Кирхгофа:

$$\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_c = IR_0 \qquad (7)$$

Подставив (6) в (7), получим:

$$\mathcal{E}_i - L\frac{dI}{dt} = IR_0$$

Откуда

$$\mathcal{E}_i = L\frac{dI}{dt} + IR_0 \qquad (8)$$

Объединяя (5) и (8), получим:

$$L\frac{dI}{dt} + IR_0 = acl(m+n)e^{-(m+n)t} \qquad (9)$$

Приведем (9) к следующему виду:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R_0}{L}I = \frac{acl(m+n)}{L}e^{-(m+n)t}$$

и решим неоднородное линейное дифференциальное (НЛДУ) уравнение с начальным условием $I(0)=0$.

Соответствующее однородное ур-е:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R_0}{L}I = 0$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda + \frac{R_0}{L} = 0$$

$$\lambda = -\frac{R_0}{L}$$

Поэтому общее решение НЛДУ будем искать в виде

$$I(t) = C(t) \cdot e^{-\frac{R_0}{L}t}$$

По методу Лагранжа:

$$\dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R_0}{L}t} = \frac{ac\ell(m+n)}{L} e^{-(m+n)t}$$

$$\dot{C}(t) = \frac{ac\ell(m+n)}{L} e^{\left(\frac{R_0}{L} - (m+n)\right)t}$$

Возьмем интеграл

$$C(t) = \int \frac{ac\ell(m+n)}{L} e^{\left(\frac{R_0}{L} - (m+n)\right)t} dt = \frac{ac\ell(m+n)}{L} \int e^{\left(\frac{R_0}{L} - (m+n)\right)t} dt =$$

$$= \frac{ac\ell(m+n)}{L} \frac{L}{R_0 - L(m+n)} e^{\left(\frac{R_0}{L} - (m+n)\right)t} + C_1 =$$

$$= \frac{ac\ell(m+n)}{R_0 - L(m+n)} e^{\left(\frac{R_0}{L} - (m+n)\right)t} + C_1$$

Тогда общее решение:

$$I(t) = \frac{ac\ell(m+n)}{R_0 - L(m+n)} e^{-(m+n)t} + C_1 e^{-\frac{R_0}{L}t}$$

Из начального условия $I(0) = 0$:

$$0 = \frac{ac\ell(m+n)}{R_0 - L(m+n)} + C_1$$

Отсюда

$$C_1 = -\frac{ac\ell(m+n)}{R_0 - L(m+n)}$$

Получаем:

$$I(t) = \frac{ac\ell(m+n)}{R_0 - L(m+n)} \left(e^{-(m+n)t} - e^{-\frac{R_0}{L}t}\right) \quad (10)$$

Подставляя в (10) значения $n = \frac{4R_0}{L}$ и $m = \frac{2R_0}{L}$, получаем:

$$I(t) = \frac{ac\ell(2R_0+4R_0)}{L(R_0-2R_0-4R_0)}\left(e^{-\left(\frac{2R_0}{L}+\frac{4R_0}{L}\right)t} - e^{-\frac{R_0}{L}t}\right) =$$

$$= \frac{6ac\ell R_0}{-5R_0L}\left(e^{-\frac{6R_0}{L}t} - e^{-\frac{R_0}{L}t}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\,\frac{ac\ell}{L}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)$$

Таким образом:

$$I(t) = \frac{6}{5}\,\frac{ac\ell}{L}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right) \qquad (11)$$

② Найдем I_{MAX}.

$$I'(t) = 0 \Rightarrow -\frac{R_0}{L}e^{-\frac{R_0}{L}t_M} + \frac{6R_0}{L}e^{-\frac{6R_0}{L}t_M} = 0$$

$$e^{-\frac{R_0}{L}t_M} = 6e^{-\frac{6R_0}{L}t_M}$$

$$-\frac{R_0}{L}t_M = \ln 6 + \left(-\frac{6R}{L}t_M\right)$$

$$\frac{5R_0}{L}t_M = \ln 6$$

$$t_M = \frac{L\cdot\ln 6}{5R_0} \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (11) находим I_{MAX}:

$$I_{MAX} = \frac{6}{5}\,\frac{ac\ell}{L}\left(e^{-\frac{R_0}{L}\cdot\frac{L\ln 6}{5R_0}} - e^{-\frac{6R_0}{L}\cdot\frac{L\ln 6}{5R_0}}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\,\frac{ac\ell}{L}\left(e^{-\frac{\ln 6}{5}} - e^{-\frac{6\ln 6}{5}}\right)$$

То есть

$$I_{MAX} = \frac{6}{5}\,\frac{ac\ell}{L}\left(e^{-\frac{\ln 6}{5}} - e^{-\frac{6\ln 6}{5}}\right) \qquad (13)$$

③ Проекция силы Лоренца на ось X:

$$F_{\Lambda x} = |e| \, |\vec{v}_п| \cdot |\vec{B}| \sin\alpha, \qquad (14)$$

где $|e|$ - модуль заряда электрона;

$\vec{v}_п$ - скорость перемычки;

α - угол между векторами $\vec{v}_п$ и $\vec{B}$

Т.к $\vec{v}_п \perp \vec{B} \Rightarrow \alpha = 90° \Rightarrow \sin\alpha = 1$, откуда:

$$F_{\Lambda x} = |e| \, |\vec{v}_п| \, |\vec{B}| \qquad (15)$$

Модуль скорости перемычки

$$|\vec{v}_п| = \left|\frac{dy}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(a e^{-nt}\right)\right| = \left|-a n e^{-nt}\right| = a n e^{-nt} \qquad (16)$$

Подставляя (16) и закон изменения $B(t)$ в (15), получаем:

$$F_{\Lambda x} = |e| \, a n e^{-nt} \cdot c e^{-mt} = a c n \, |e| \, e^{-(n+m)t} \qquad (17)$$

Подставляя $m = \frac{2R_0}{L}$ и $n = \frac{4R_0}{L}$ в (17):

$$F_{\Lambda x} = a c \frac{4R_0}{L} |e| \cdot e^{-\frac{6R_0}{L} t} \qquad (18)$$

④ Проекция силы Лоренца на ось Y:

$$F_{\Lambda y} = |e| \cdot |\langle\vec{u}\rangle| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\alpha, \qquad (19)$$

где $|e|$ - модуль заряда электрона,

$\langle\vec{u}\rangle$ - средняя скорость направленного движения электронов

α - угол между векторами $\langle\vec{u}\rangle$ и $\vec{B}$

Т.к $\langle\vec{u}\rangle \perp \vec{B} \Rightarrow \alpha = 90° \Rightarrow \sin\alpha = 1$, откуда:

$$F_{\Lambda y} = |e| \, |\langle\vec{u}\rangle| \cdot |\vec{B}| \qquad (20)$$

Средняя скорость направленного движения электронов:

$$|\langle \vec{u} \rangle| = \frac{I}{S\cdot|e|\,n_0} \qquad (21)$$

Подставляя (11) в (21), получаем:

$$|\langle \vec{u} \rangle| = \frac{6}{5}\,\frac{ac\ell}{LS|e|n_0}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right) \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (20):

$$F_{Ay} = \cancel{|e|}\cdot\frac{6}{5}\,\frac{ac\ell}{LS\cancel{|e|}n_0}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)\cdot c\,e^{-\frac{2R_0}{L}t}$$

$$F_{Ay} = \frac{6}{5}\,\frac{ac^2\ell}{LSn_0}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right) \qquad (23)$$

⑤ Напряженность электрического поля в перемычке:

$$E = \frac{j}{\sigma}, \qquad (24)$$

где j – плотность тока;

σ – удельная проводимость перемычки.

Плотность тока в перемычке:

$$j = \frac{I}{S} \qquad (25)$$

Удельная проводимость перемычки:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{\ell}{R_0 S} \qquad (26)$$

Подставляя (11), (25) и (26) в (24), получаем:

$$E(t) = \frac{I(t)\,R_0 S}{S\cdot\ell} = \frac{6}{5}\,\frac{ac\ell R_0}{L\ell}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\,\frac{acR_0}{L}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)$$

Таким образом:

$$E(t) = \frac{6}{5}\,\frac{acR_0}{L}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right) \qquad (27)$$

(6) Динамическое уравнение движения перемычки в проекции на ось y.

$$ma_y = mg + F_{Ay} + F_y \qquad (28)$$

Проекция ускорения на ось y

$$a_y = \frac{d v_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(ae^{-nt}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(-ane^{-nt}\right) =$$

$$= an^2e^{-nt}$$

То есть

$$a_y = an^2e^{-nt} \qquad (29)$$

Сила Ампера, действующая на перемычку

$$F_{Ay} = F_A = I\,l\,B_z \qquad (30)$$

Подставляя (11) и $B_z(t) = ce^{-mt}$ в (30), получаем:

$$F_{Ay} = \frac{6}{5}\,\frac{acl}{L}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)\cdot l\cdot c\,e^{-\frac{2R_0}{L}t} =$$

$$= \frac{6}{5}\,\frac{ac^2l^2}{L}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right) \qquad (31)$$

Выражая F_y из (28) и подставляя (29) и (31):

$$F_y(t) = ma\left(\frac{4R_0}{L}\right)^2\cdot e^{-\frac{4R_0}{L}t} - mg - \frac{6}{5}\,\frac{ac^2l^2}{L}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right)$$

$$F_y(t) = m\left(\frac{16R_0^2a}{L^2}e^{-\frac{4R_0}{L}t} - g\right) - \frac{6}{5}\,\frac{ac^2l^2}{L}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right)$$

$$F(t) = F_y(t) = m\left(\frac{16R_0^2 a}{L^2} e^{-\frac{4R_0}{L}t} - g\right) - \frac{6}{5}\frac{a c^2 \ell^2}{L}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right) \quad (32)$$

⑦ Модуль силы Лоренца, действующей на электрон:

$$F_Л = \sqrt{F_{Лx}^2 + F_{Лy}^2} \quad (33)$$

Подставляя (15) и (20) в (33), получаем:

$$F_Л = \sqrt{|e|^2 \cdot |\vec{v}_п|^2 \cdot |\vec{B}|^2 + |e|^2 \cdot |\langle \vec{u} \rangle|^2 \cdot |\vec{B}|^2} = |e| \cdot B_z \sqrt{v_п^2 + \langle u \rangle^2} \quad (34)$$

Сила Лоренца, действующая на все электроны в перемычке:

$$F_Л^* = F_Л n_0 V = F_Л \cdot n_0 \cdot S\ell = |e| B_z n_0 S \ell \sqrt{v_п^2 + \langle u \rangle^2} \quad (35)$$

Сила Ампера, действующая на перемычку:

$$F_A = I \ell \cdot B_z \quad (36)$$

Выразим силу тока через плотность тока:

$$I = j S, \quad (37)$$

где $j = n_0 |e| \cdot |\langle \vec{u} \rangle|$ - плотность тока.

Получаем:

$$I = n_0 |e| \langle u \rangle S \quad (38)$$

Подставляем (38) в (36):

$$F_A = n_0 |e| \langle u \rangle S \ell B_z \quad (39)$$

Найдем отношение (39) к (35):

$$\frac{F_A}{F_\Lambda^*} = \frac{\cancel{n_0} |e| \langle u \rangle \cancel{S \ell B_z}}{\cancel{n_0 |e| S \ell B_z} \sqrt{\upsilon_n^2 + \langle u \rangle^2}} = \frac{\langle u \rangle}{\sqrt{\upsilon_n^2 + \langle u \rangle^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\upsilon_n^2}{\langle u \rangle^2}}}$$

То есть:

$$\frac{F_A}{F_\Lambda^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\upsilon_n^2}{\langle u \rangle^2}}} \qquad (40)$$

Из (16) (подставляя $n = \frac{4R_0}{L}$) получаем:

$$|\vec{\upsilon}_n| = a \frac{4R_0}{L} e^{-\frac{4R_0}{L}t} \qquad (41)$$

Подставляя (41) и (22) в (40), получаем:

$$\frac{F_A}{F_\Lambda^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\frac{16 R_0^2 \cancel{a^2}}{\cancel{L^2}} e^{-\frac{8R_0}{L}t}}{\frac{36}{25} \frac{\cancel{a^2} c^2 e^2}{\cancel{L^2} S^2 |e|^2 n_0^2} \left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{100 R_0^2 S^2 |e|^2 n_0^2 e^{-\frac{8R_0}{L}t}}{9 c^2 \ell^2 \left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)^2}}}$$

Или:

$$\frac{F_A}{F_\Lambda^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{10 R_0 S |e| n_0}{3 c \ell \left(e^{\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{2R_0}{L}t}\right)}\right)^2}} \leq 1 \qquad (42)$$

⑧ Зависимость тока через перемычку (из (11) и (13)):

$$\frac{I(t)}{I_{max}} = \frac{\cancel{\frac{6}{5}} \cancel{\frac{a c \ell}{L}} \left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)}{\cancel{\frac{6}{5}} \cancel{\frac{a c \ell}{L}} \left(e^{-\frac{\ln 6}{5}} - e^{-\frac{6 \ln 6}{5}}\right)} =$$

Таким образом

$$\frac{I(t)}{I_{MAX}} = \frac{e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}}{e^{-\frac{\ln 6}{5}} - e^{-\frac{6\ln 6}{5}}} \qquad (43)$$

$$\left(t_{MAX\,I} = \frac{\ln 6}{5}\,\frac{L}{R_0}\right)$$

Сила Ампера (из (11) и $B = ce^{-mt}$):

$$F_A(t) = IlB = \frac{6}{5}\,\frac{ac^2l^2}{L}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right) \qquad (44)$$

Найдем $F_{A\,MAX}$:

$$F_A'(t) = 0 \Rightarrow -\frac{3R_0}{L}e^{-\frac{3R_0}{L}t_{MAXFA}} + \frac{8R_0}{L}e^{-\frac{8R_0}{L}t_{MAXFA}} = 0$$

$$3e^{-\frac{3R_0}{L}t_{MAXFA}} = 8e^{-\frac{8R_0}{L}t_{MAXFA}}$$

$$\ln 3 - \frac{3R_0}{L}t_{MAXF_A} = \ln 8 - \frac{8R_0}{L}t_{MAXF_A}$$

$$\frac{5R_0}{L}t_{MAXF_A} = \ln\frac{8}{3}$$

$$t_{MAXF_A} = \frac{L}{5R_0}\ln\frac{8}{3} \qquad (45)$$

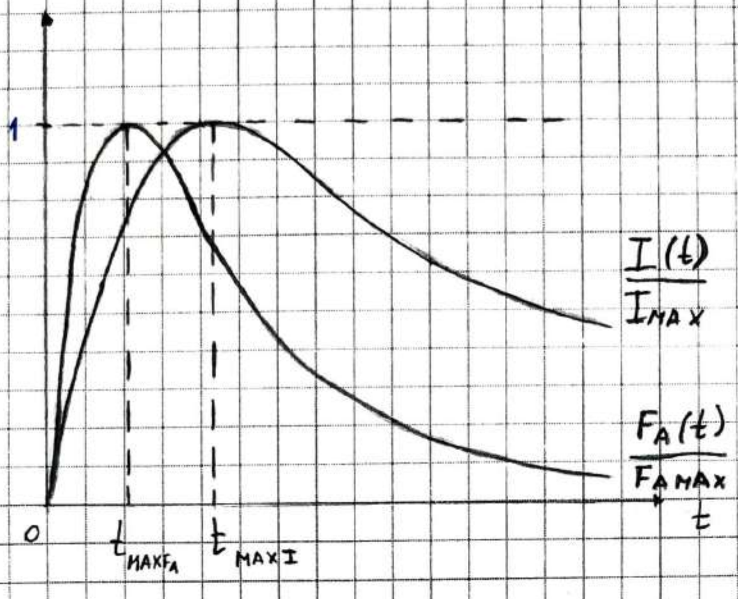
Подставляем (45) в (44):

$$F_{A\,MAX} = \frac{6}{5}\,\frac{ac^2l^2}{L}\left(e^{-\frac{3}{5}\ln\frac{8}{3}} - e^{-\frac{8}{5}\ln\frac{8}{3}}\right) \qquad (46)$$

Из (44) и (46):

$$\frac{F_A(t)}{F_{A\,MAX}} = \frac{\cancel{\frac{6}{5}}\,\cancel{\frac{ac^2l^2}{L}}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right)}{\cancel{\frac{6}{5}}\,\cancel{\frac{ac^2l^2}{L}}\left(e^{-\frac{3}{5}\ln\frac{8}{3}} - e^{-\frac{8}{5}\ln\frac{8}{3}}\right)} = \frac{e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}}{e^{-\frac{3}{5}\ln\frac{8}{3}} - e^{-\frac{8}{5}\ln\frac{8}{3}}} \qquad (47)$$

По (43) и (47) построим зависимости тока через перемычку и силы Ампера:



$$t_{MAXF_A} = \frac{L}{5R_0}\ln\frac{8}{3} \qquad t_{MAXI} = \frac{L}{5R_0}\ln 6$$

Ответ: $$I(t) = \frac{6}{5}\frac{ac\ell}{L}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)$$

$$I_{MAX} = \frac{6}{5}\frac{ac\ell}{L}\left(e^{-\frac{\ln 6}{5}} - e^{-\frac{6\ln 6}{5}}\right)$$

$$F_{Ax} = ac\frac{4R_0}{L}|e|\cdot e^{-\frac{6R_0}{L}t}$$

$$F_{Ay} = \frac{6}{5}\frac{ac^2\ell}{LSn_0}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right)$$

$$E(t) = \frac{6}{5}\frac{acR_0}{L}\left(e^{-\frac{R_0}{L}t} - e^{-\frac{6R_0}{L}t}\right)$$

$$F(t) = m\left(\frac{16R_0^2 a}{L^2}e^{-\frac{4R_0}{L}t} - g\right) - \frac{6}{5}\frac{ac^2\ell^2}{L}\left(e^{-\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{8R_0}{L}t}\right)$$

$$\frac{F_A}{F_A^*} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{Sn^2}{\langle u\rangle^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{10R_0S|e|n_0}{3c\ell\left(e^{\frac{3R_0}{L}t} - e^{-\frac{2R_0}{L}t}\right)}\right)^2}}$$