Занятие 19.

9.287 $\varphi_1 = \sin 2x$; $\varphi_2 = \sin x \cos x$

Вронскиан:

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \cos x \\ 2\cos 2x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin 2x & \frac{\sin 2x}{2} \\ 2\cos 2x & \cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= \sin 2x \cos 2x - 2\cos 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2} = 0$$

Равенство вронскиана нулю не означает линейную ~~не~~зависимость функций.

Выберем $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -2$

Линейная комбинация $\lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) \equiv 0$

$$\sin 2x - 2\sin x \cos x \equiv 0$$

$$\sin 2x - \sin 2x \equiv 0$$

$$\Downarrow$$

ф-ии линейно зависимы

Ответ: линейно зависимы

9.288 $\varphi_1 = e^{-x}$, $\varphi_2 = xe^{-x}$

Вронскиан:

$$W[\varphi_1, \varphi_2](x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix} = e^{-2x}(1-x) + xe^{-2x} =$$

$$= e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x}$$

e^{-2x} не принимает значение 0 $\Rightarrow$ ф-ии линейно независимы

Ответ: линейно независимы

9.289 $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = 2x$, $\varphi_3 = x^2$

Вронскиан:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3](x) = \begin{vmatrix} x & 2x & x^2 \\ 1 & 2 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & 2x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2x - 2x) = 0$$

Равенство вронскиана нулю не означает линейную зависимость

Возьмем: $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 0$

Тогда $\lambda_1 x + \lambda_2 2x + \lambda_3 x^2 = 2x - 2x + 0 \cdot x^2 = 0$

$\Downarrow$

ф-ии линейно зависимы

Ответ: линейно зависимы.

9.290 $\varphi_1 = e^x$; $\varphi_2 = xe^x$; $\varphi_3 = x^2 e^x$

Вронскиан:

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3](x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & e^x + xe^x & 2xe^x + x^2e^x \\ e^x & e^x + e^x + xe^x & 2(e^x + xe^x) + 2xe^x + x^2e^x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & e^x(1+x) & xe^x(2+x) \\ e^x & e^x(2+x) & e^x(2+4x+x^2) \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & (1+x) & x(2+x) \\ 1 & (2+x) & (2+4x+x^2) \end{vmatrix} =$$

$$\cancel{= e^{3x}(3x^2 + 2x - x(2x+2) + x^2)} = e^{3x}(x^2 + 2x + 2 - x(2x+2) + x^2) =$$

$= 2e^{3x} \neq 0 \Rightarrow$ ф-ии линейно независимы

Ответ: линейно независимы

9.297 $y_1 = e^{2x}\cos x;\quad y_2 = e^{2x}\sin x$

Общее решение ур-я имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x$$

Значит ф-ии y, y_1, y_2 — линейно зависимые $\Rightarrow$ их вронскиан тождественно равен 0.

$$W[y, y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y & e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ y' & 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x & 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x \\ y'' & 3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\sin x & 3e^{2x}\sin x + 4e^{2x}\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{4x}\begin{vmatrix} y & \cos x & \sin x \\ y' & 2\cos x - \sin x & 2\sin x + \cos x \\ y'' & 3\cos x - 4\sin x & 3\sin x + 4\cos x \end{vmatrix} = e^{4x}\Big(y\big(6\cancel{\cos x}\sin x + 8\cos^2 x -$$

$$- 3\sin^2 x - 4\cancel{\cos x}\sin x - 6\cancel{\cos x}\sin x - 3\cos^2 x + 8\sin^2 x + 4\cancel{\cos x}\sin x\big) -$$

$$- y'\big(3\cancel{\sin x}\cos x + 4\cos^2 x - 3\cancel{\sin x}\cos x + 4\sin^2 x\big) + y''\big(2\cancel{\cos x}\sin x + \cos^2 x -$$

$$- 2\cancel{\cos x}\sin x + \sin^2 x\big) = e^{4x}\Big(y\big(5\cos^2 x + 5\sin^2 x\big) - y'\big(4\cos^2 x + 4\sin^2 x\big) +$$

$$+ y'' = e^{4x}\big(5y - 4y' + y''\big) = 0$$

$$e^{4x}(5y - 4y' + y'') = 0 \quad \Big|: e^{4x} \neq 0$$

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Ответ: $y'' - 4y' + 5y = 0$

9.299 $y_1 = 1;\quad y_2 = x;\quad y_3 = e^x$

Общее решение ур-я имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$

Ф-ии y, y_1, y_2, y_3 — линейно зависимые $\Rightarrow$ их вронскиан тождественно равен 0.

$$W[y,y_1,y_2,y_3](x)=\begin{vmatrix} y & 1 & x & e^x \\ y' & 0 & 1 & e^x \\ y'' & 0 & 0 & e^x \\ y''' & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y' & 1 & e^x \\ y'' & 0 & e^x \\ y''' & 0 & e^x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y'' & e^x \\ y''' & e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x(y''-y''')=0$$

$$e^x(y''-y''')=0 \quad \Big|: e^x\neq 0$$

$$y''-y'''=0$$

$$y'''-y''=0$$

Ответ: $y'''-y''=0$

9.301 $y_1=2x$; $y_2=x-2$; $y_3=e^x+1$

Общее решение ур-я имеет вид:

$$y=C_1\cdot 2x+C_2(x-2)+C_3(e^x+1)$$

Ф-ии y, y_1, y_2, y_3 – линейно зависимые $\Rightarrow$ их вронскиан тождественно равен 0.

$$W[y,y_1,y_2,y_3](x)=\begin{vmatrix} y & 2x & x-2 & e^x+1 \\ y' & 2 & 1 & e^x \\ y'' & 0 & 0 & e^x \\ y''' & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} y' & 2 & e^x \\ y'' & 0 & e^x \\ y''' & 0 & e^x \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} y & 2x & e^x+1 \\ y'' & 0 & e^x \\ y''' & 0 & e^x \end{vmatrix} = (x-2)\cdot(-2)\begin{vmatrix} y'' & e^x \\ y''' & e^x \end{vmatrix} + 2x\begin{vmatrix} y'' & e^x \\ y''' & e^x \end{vmatrix} =$$

$$= -2(x-2)e^x(y''-y''')+2xe^x(y''-y''') = (y''-y''')(-2x+4+2x)e^x =$$

$$= 4e^x(y''-y''')=0$$

$$4e^x(y''-y''')=0 \quad \Big|: 4e^x\neq 0$$

$$y''-y'''=0$$

$$y'''-y''=0$$

Ответ: $y'''-y''=0$

9.302 $y_1 = e^{3x}$; $y_2 = e^{5x}$

Общее решение ур-я имеет вид:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$$

Ф-ии y, y_1, y_2 — линейно зависимые => их вронскиан тождественно равен 0.

$$W[y, y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y & e^{3x} & e^{5x} \\ y' & 3e^{3x} & 5e^{5x} \\ y'' & 9e^{3x} & 25e^{5x} \end{vmatrix} = y(75e^{3x}e^{5x} - 45e^{3x}e^{5x}) -$$

$$- y'(25e^{3x}e^{5x} - 9e^{3x}e^{5x}) + y'''(5e^{3x}e^{5x} - 3e^{3x}e^{5x}) =$$

$$= (30y - 16y' + 2y'')e^{3x}e^{5x} = 0$$

$$(30y - 16y' + 2y'')e^{3x}e^{5x} = 0 \ \Big| : e^{3x}e^{5x} \neq 0$$

$$2y'' - 16y' + 30y = 0 \ | :2$$

$$y'' - 8y' + 15y = 0$$

Ответ: $y'' - 8y' + 15y = 0$

9.303 $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = \sin x$; $y_3 = \cos x$

Общее решение ур-я имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x$$

Ф-ии y, y_1, y_2 — линейно зависимые => их вронскиан тождественно равен 0.

$$W[y, y_1, y_2, y_3](x) = \begin{vmatrix} y & e^{2x} & \sin x & \cos x \\ y' & 2e^{2x} & \cos x & -\sin x \\ y'' & 4e^{2x} & -\sin x & -\cos x \\ y''' & 8e^{2x} & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = e^{2x} \begin{vmatrix} y & 1 & \sin x & \cos x \\ y' & 2 & \cos x & -\sin x \\ y'' & 4 & -\sin x & -\cos x \\ y''' & 8 & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y' & \cos x & -\sin x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \\ y''' & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \\ y^{IV} & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x \\ y' & \cos x & -\sin x \\ y''' & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} -$$

$$- 8 \begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x \\ y' & \cos x & -\sin x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -y' - y''(\cos x \sin x - \cos x \sin x) + y'''(-1) - 2(-1y -$$

$$- y'' + y'''(-\sin x \cos x + \sin x \cos x)) + 4(y(\cos x \sin x - \cos x \sin x) -$$

$$- y' + y'''(-1)) - 8(y(-1) - y'(-\sin x \cos x + \sin x \cos x) + y''(-1)) =$$

$$= -y' - y''' - 2(-y - y'' + 0) + 4(-y' - y''') - 8(-y - y'') =$$

$$= -y' - y''' + 2y + 2y'' - 4y' - 4y''' + 8y + 8y'' =$$

$$= -5y''' + 10y'' - 5y' + 10y = 0$$

$$-5y''' + 10y'' - 5y' + 10y = 0 \quad | : (-5)$$

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$$

Ответ: $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

9.321 $\quad y'' - 2y' - 2y = 0$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

$$D = 12$$

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$$

Общее решение ОЛДУ.

$$y_{oo} = C_1 e^{(1+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{3})x}$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 e^{(1+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{3})x}$

9.323 $y'' - 6y' + 9y = 0$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$D = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3$$

ФСР образовани ф-ями:

$$y_1 = e^{\lambda_{1,2} x} = e^{3x} \quad ; \quad y_2 = xe^{\lambda_{1,2} x} = xe^{3x}$$

Общее решении ОЛДУ:

$$y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

9.325 $4y'' - 8y' + 5y = 0$

Характеристическое уравнение:

$$4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -16$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2} i = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha = 1; \ \beta = \frac{1}{2}$$

ФСР образована ф-ями:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x = e^{x} \cos \frac{x}{2} \quad ; \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x = e^{x} \sin \frac{x}{2}$$

Общее решение ОЛДУ:

$$y_{oo} = C_1 e^{x} \cos \frac{x}{2} + C_2 e^{x} \sin \frac{x}{2}$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 e^{x} \cos \frac{x}{2} + C_2 e^{x} \sin \frac{x}{2}$

9.326 $4y'' + 4y' + y = 0$

Характеристическое ур-е:

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

$$4\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

ФСР образована ф-ями:

$$y_1 = e^{\lambda_{1,2} x} = e^{-\frac{x}{2}} \quad ; \quad y_2 = x e^{\lambda_{1,2} x} = x e^{-\frac{x}{2}}$$

Общее решение ОЛДУ имеет вид:

$$y_{oo} = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}}$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}}$

9.328 $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0$$

$$D = 4$$

$$\lambda^2 = -1 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\lambda^2 = -3 \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$$

Общее решение ОЛДУ:

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos(\sqrt{3}x) + C_4 \sin(\sqrt{3}x)$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos(\sqrt{3}x) + C_4 \sin(\sqrt{3}x)$

9.329 $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

$\lambda^2(\lambda^2+2\lambda+1)=0$

$\lambda^2(\lambda+1)^2=0$

$\lambda_{1,2}=0$

$\lambda_{3,4}=-1$

Общее решение ОЛДУ:

$y_{oo}=C_1e^{0x}+C_2xe^{0x}+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}$

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}$.

Ответ: $y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4xe^{-x}$

9.330 $y^{IV}-y''=0$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^4-\lambda^2=0$

$\lambda^2(\lambda^2-1)=0$

$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)=0$

$\lambda_{1,2}=0$

$\lambda_3=1$

$\lambda_4=-1$

Общее решение ОЛДУ:

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}$

Ответ: $y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}$

9.331 $y^{IV}+2y''+y=0$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

$(\lambda^2+1)^2=0$

$\lambda_{1,2} = i$

$\lambda_{3,4} = -i$

Общее решение ОЛДУ:

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$

9.332 $\quad y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = 0$$

$$(\lambda^2 - 4)^2 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 (\lambda + 2)^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = 2$

$\lambda_{3,4} = -2$

Общее решение ОЛДУ:

$$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 x e^{-2x}$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 x e^{-2x}$

9.334 $\quad y^{V} + 6y^{IV} + 9y''' = 0$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^5 + 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0$$

$$\lambda^3 (\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 0$$

$$\lambda^3 (\lambda + 3)^2 = 0$$

$\lambda_{1,2,3} = 0$

$\lambda_{4,5} = -3$

Общее решение ОЛДУ:

$$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-3x} + C_5 x e^{-3x}$$

Ответ: $y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-3x} + C_5 x e^{-3x}$

<u>9.338</u>

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y(2) = 1, \quad y'(2) = -2$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

Общее решение ОЛДУ:

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

$$y_{oo}' = C_1 e^x + C_2 e^x (1 + x)$$

$y(2) = 1$

$y_{oo}(2) = C_1 e^2 + C_2 2e^2 = 1$

$y_{oo}'(2) = C_1 e^2 + C_2 e^2 (1+2) = -2$

$$-\begin{cases} C_1 + 2C_2 = \frac{1}{e^2} \\ C_1 + 3C_2 = -\frac{2}{e^2} \end{cases}$$

$$-C_2 = \frac{3}{e^2}$$

$$C_2 = \frac{-3}{e^2}, \text{ откуда } C_1 = \frac{7}{e^2}$$

Тогда частное решение ур-я при $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$:

$$y_{oo} = \cancel{7e^{x-2} - 3xe^{x-2}}$$

Ответ: $y_{oo} =$

Тогда частное решение ур-я при $y(2)=1$, $y'(2)=-2$:

$$y=7e^{x-2}-3xe^{x-2}$$

Ответ: $y=(7-3x)e^{x-2}$ 12