Модуль 1. Линейная алгебра.

Занятие 1.

4.2 $x = (x_1, \dots, x_n)$

$y = (y_1, \dots, y_n) \quad \in R^n$

$a = (a_1, \dots, a_n)$

1) $z = x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

1а) $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x$

1б) $(x+y) + a = ((x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)) + (a_1, \dots, a_n) =$

$= ((x_1 + y_1) + a_1, \dots, (x_n + y_n) + a_n) = (x_1 + (y_1 + a_1), \dots, x_n + (y_n + a_n)) =$

$= x + (y + a)$

1в) $\exists \bar{0} = (0, 0, \dots, 0) \in R^n : \forall x \in R^n \quad x + \bar{0} = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) =$

$= (x_1, \dots, x_n) = x$

~~1г) $\forall x \in R^n \; \exists (-x) =$~~

1г) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n \; \exists (-x) = (-x_1, \dots, -x_n) : x + (-x) =$

$= (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = \bar{0}$

2) $b = \lambda x = (\lambda x_1 ; \lambda x_2 ; \dots, \lambda x_n) \qquad \mu, \lambda \in R$

2а) $\exists 1 = (1, 1, \dots ; 1) : \forall x \in R^n \quad 1 \cdot x = (1 \cdot x_1, \dots, 1 x_n) =$

$= (x_1, \dots, x_n) = x$

2б) $\lambda(\mu x) = \lambda(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = (\lambda \mu x_1, \dots, \lambda \mu x_n) =$

$= ((\lambda\mu) x_1, \dots, (\lambda\mu), x_n) = (\lambda\mu)(x_1, \dots, x_n) = (\lambda\mu) x$

3а) $\lambda(x+y) = \lambda(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) =$

$= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) =$

$= \lambda(x_1, \dots, x_n) + \lambda(y_1, \dots, y_n) = \lambda x + \lambda y$

3б) $(\lambda + \mu) x = ((\lambda + \mu) x_1, \dots, (\lambda + \mu) x_n) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) =$

$= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \lambda x + \mu x$

ч.т.д.

4.4 $f(t)\in C_{[a,b]}$ $\quad h(t)\in C_{[a,b]}$

$g(t)\in C_{[a,b)}$

1) $f(t)+g(t)=(f+g)(t)$ (сумма значений ф-ий = значению суммы ф-ий)

1а) $f(t)+g(t)=(f+g)(t)=(g+f)(t)=g(t)+f(t)$

1б) $(f(t)+g(t))+h(t)=((f+g)+h)(t)=(f+(g+h))(t)=$

$=f(t)+(g(t)+h(t))$

1в) $\exists f_0(t)=0:\ \forall f(t)\quad f(t)+f_0(t)=f(t)+0=f(t)$

~~1г) $\exists(-f(t)):\ \forall$~~

1г) $\forall f(t)\ \exists(-f(t)):\quad f(t)+(-f(t))=0$ (сумма значений в каждой точке $[a,b]$ $=0$)

4.4 $f(t)\in C_{[a,b]}$

Т.к. непрерывная на отрезке ф-я ставит в соответствие одному числу другое, то (считая, что для R выполнение всех аксиом ($\in R$) очевидно) приходим к тому, что

$C_{[a,b]}$ — линейное пр-во.

4.6 V_1 $\quad \bar a\in V_1$

Из свойств геометрических векторов V_1 следует, что

V_1 — линейное пространство

Ответ: да, данное мн-во явл. линейным пространством

~~4.8 $|x|>a$, где $a>0$ — фиксированное число~~

~~$x\in$ мн-ву геом векторов~~

4.8 $x\in$ мн-ву геом. векторов; $\forall x\ |x|>a$, где $a>0$ — фиксированное число

$\exists\ |x|>a$ и $|y|>a$, $\vec y=-\vec x$. Тогда $\bar x+\bar y=\bar y+\bar x=\bar 0$, но

$|\bar 0|=0\notin$ заданному мн-ву

4.8 Ответ: нет, такое мн-во не явл линейным пространством

4.10 $A: \{a_n\}_{n\to+\infty} : \forall n \quad |a_{n+1}| > |a_n| \qquad n \in N$

$\exists \ a_n = n^2$ и $b_n = -n^2+1$, тогда

$a_n + b_n = n^2 - n^2 + 1 = 1 = const \notin A$

Ответ: нет, такое мн-во не явл линейным пространством

4.16 $\beta = (i, j, k)$; $\beta' = (i', j', k')$ — прямоуг. базисы в V_3

$T_{\beta\to\beta'} = ?$ $\qquad X = i - 2j + k$

$\beta = (i, j, k) \quad \beta' = (-i, -j, -k)$

$E'_{i'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E'_{j'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E'_{k'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Матрица перехода:

$$T_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X' = (T_{\beta\to\beta'})^{-1} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.18 $T_{\beta-\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\qquad \det(T) = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$$(T_{\beta\to\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$X' = (T_{\beta\to\beta})^{-1} X$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\cos\varphi + \sin\varphi \\ 2\sin\varphi + \cos\varphi \end{pmatrix}$$

4.19 $x_1 = -i + 2j$

$x_2 = 2i - j + k$

$x_3 = -4i + 5j - k$

$x_4 = 3i - 3j + k$

$x_3 = 2x_1 - x_2 = -2i + 4j - 2i + j - k = -4i + 5j - k$

$x_4 = x_2 - x_1 = 2i - j + k + i - 2j = 3i - 3j + k$

x_1 и x_2 ЛНЗ $\Rightarrow$ rang $= 2$ Базис $\{x_1, x_2\}$

4.25 $t^2 + 1$

$-t^2 + 2t$

$t^2 - t$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow$$ система многочленов образует базис

$$-2t^2 + t - 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

В заданном базисе:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.31 $E_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $E_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow e_1', e_2', e_3'$ образуют базис

$$X = T^{-1}X = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Занятие 2

4.46 $L': x=(0, x_2, 0, x_4, x_5, \dots, x_n)$

а) $x=(0, x_2, 0, x_4, x_5, \dots, x_n) \in L'$

$y=(0, y_2, 0, y_4, y_5, \dots, y_n) \in L'$

1) $x+y = (0, x_2+y_2, 0, x_4+y_4, x_5+y_5, \dots, x_n+y_n) \in L'$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lambda x = (0, \lambda x_2, 0, \lambda x_4, \lambda x_5, \dots, \lambda x_n) \in L'$

3) $L' \in \mathbb{R}^n$

L' - подпространство $\mathbb{R}^n$

Размерност L' : $n-2$

б) $L': x=(1, x_2, 1, x_4, x_5, \dots, x_n)$

$x=(1, x_2, 1, x_4, x_5, \dots, x_n)$

$y=(1, y_2, 1, y_4, y_5, \dots, y_n)$

1) $x+y=(2, x_2+y_2, 2, x_4+y_4, x_5+y_5, \dots, x_n+y_n) \notin L'$

L' - не является подпространством $\mathbb{R}^n$

4.48

а) Пусть $\mathbb{A}^n$ - мн-во всех матриц порядка n

$L: A^T = A$

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ x_{13} & & \dots & x_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ y_{13} & & \dots & y_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_{1n} & & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

$$1)\ x+y = \begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & y_{12}+x_{12} & \dots & x_{1n}+y_{1n} \\ x_{12}+y_{12} & x_{22}+y_{22} & \dots & x_{2n}+y_{2n} \\ x_{13}+y_{13} & \dots & \dots & x_{3n}+y_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{1n}+y_{1n} & \dots & \dots & x_{nn}+y_{nn} \end{pmatrix} \in L$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} & \dots & \lambda x_{1n} \\ \lambda x_{12} & \lambda x_{22} & \dots & \lambda x_{2n} \\ \lambda x_{13} & \dots & \dots & \lambda x_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda x_{1n} & \dots & \dots & \lambda x_{nn} \end{pmatrix} \in L$

3) $L \in A^n$

L - подпространство A^n

б) A^n - мн-во всех матриц порядка n

L: $\det A = 0$

Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det X = 0$ $\det Y = 0$

$X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \notin L$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$

L - не является подпространством A^n

<u>4.52</u> $x_1 = (1, 0, 0, -1)$

$x_2 = (2, 1, 1, 0)$

$x_3 = (1, 1, 1, 1)$

$x_4 = (1, 2, 3, 4)$

$x_5 = (0, 1, 2, 3)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$(2) + (-2)(1) \to (2)$
$(3) - (1) \to (3)$
$(4) - (1) \to (4)$

$(3) - (2) \to (3)$
$(4) - 2(2) \to (4)$
$(5) - (2) \to (5)$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Rg = 3$

$\dim L = 3$ $\beta = (x_1, x_2, x_4)$

$\underline{4.54}$ $Q: (-3t^2-1\ ,\ 2t^2+t\ ,\ -t)$ P_3

Показать, что $P_3 = \{ p \mid p = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3,\ q_1, q_2, q_3 \in Q \}$, т.е

где $q_1 = -3t^2-1$, $q_2 = 2t^2+t$, $q_3 = -t$

$q_1 = (-3, 0, -1)^T$ $q_2 = (2, 1, 0)^T$ $q_3 = (0, -1, 0)^T$ – ЛНЗ

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ Rg = 3 \Rightarrow \text{линейно независимы}$$

Занятие 3

$\underline{4.63}$

$X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

a) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$

1) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 = 2y_1x_1 + 5y_2x_2 = (y, x)$

2) $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$

$(x+z, y) = 2(x_1+z_1)y_1 + 5(x_2+z_2)y_2 = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2z_1y_1 + 5z_2y_2 =$

$= (x, y) + (z, y)$

3) $(\lambda x, y) = 2\lambda x_1 y_1 + 5\lambda x_2 y_2 = \lambda(2x_1y_1 + 5x_2y_2) = \lambda(x, y)$

4) $(x, x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 \geqslant 0 \iff x_1 = 0$ и $x_2 = 0$
$(x = 0)$

ч.т.д.

б) $(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$

1) $\left.\begin{matrix}(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 \\ (y, x) = y_1 x_1 + y_1 x_2 + y_2 x_1 + y_2 x_2\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x, y) = (y, x)$

2) $(x+z, y) = (x_1+z_1)y_1 + (x_1+z_1)y_2 + (x_2+z_2)y_1 + (x_2+z_2)y_2 =$
$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + z_1y_1 + z_1y_2 + z_2y_1 + z_2y_2 =$

$= (x, y) + (z, y)$

3) $(\lambda x, y) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_1 y_2 + \lambda x_2 y_1 + \lambda x_2 y_2 = \lambda (x, y)$

4) $(x, x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 \geqslant 0$,

но $(x_1+x_2)^2 = 0$

$x_1 = -x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не явл скалярным произведением в $\mathbb{R}^2$

4.64

б) $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}$ $\quad (f(t) = c_0 + c_0 t + \ldots + c_{n-1} t^{n-1})$

$q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_{n-1} t^{n-1}$

$(p, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(t_k) q(t_k)$, $t_1, \ldots, t_n$ – произвольные попарно различные действительные числа

1) $(p, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(t_k) q(t_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} q(t_k) p(t_k) = (q, p)$

2) $(p+f, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} (p(t_k) + f(t_k)) q(t_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(t_k) q(t_k) + \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k) q(t_k) =$

$= (p, q) + (f, q)$

3) $(\lambda p, q) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda p(t_k) q(t_k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} p(t_k) q(t_k) = \lambda (p, q)$

4) $(p, p) = \sum\limits_{k=1}^{n} p^2(t_k) \geqslant 0$, причем $(p, p) = 0 \Leftrightarrow p(t) = 0$

ч.т.д.

4.64 (продолжение)

$p(t) = 1 + t + t^2$

$q(t) = t - 2t^2 + 3t^3$

$t_1 = -2,\ t_2 = -1,\ t_3 = 1,\ t_4 = 2$

$(p, q) = 3 \cdot (-34) + 1 \cdot (-6) + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 18 = 24$

4.65

в) В $C_{[a,b]}$

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t)\, dt$$

Неравенство Коши – Буняковского

$$\left(\int_a^b f(t) g(t)\, dt \right)^2 \le \int_a^b f^2(t)\, dt \int_a^b g^2(t)\, dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt}$$

$$\|g\| = \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}$$

$$\|f+g\| = \sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))^2\, dt},$$

Неравенство треугольника:

$$\sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))^2\, dt} \le \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt} + \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, dt}$$

4.67 $f_1 = (1, 1, 1, 1)$

$f_2 = (3, 3, -1, -1)$

$f_3 = (-2, 0, 6, 8)$

Применим процесс ортогонализации

Решение.

$e_1 = f_1 = (1, 1, 1, 1)$

$e_2 = f_2 - c_1^{(1)} e_1$

$$c_1^{(1)} = \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{4}{4} = 1$$

$(f_2, e_1) = 4$

$e_2 = (2, 2, -2, -2)$

$(e_1, e_1) = 4$

$e_3 = f_3 - c_1^{(2)} e_1 - c_2^{(2)} e_2$

$c_1^{(2)} = \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{12}{4} = 3$

$c_2^{(2)} = \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{-32}{16} = -2$

$e_3 = (-1, 1, -1, 1)$

Ombem: $e_1 = (1, 1, 1, 1)$

$e_2 = (2, 2, -2, -2)$

$e_3 = (-1, 1, -1, 1)$

4.69

~~$f_1 = (1, 2, 1, 3)$~~ $f_1 = (1, 2, 2, -1)$

~~$f_2 = ($~~ $f_2 = (1, 1, -5, 3)$

$f_3 = (3, 2, 8, -7)$

4.68

$$f_1 = (1, 2, 1, 3)$$
$$f_2 = (4, 1, 1, 1)$$
$$f_3 = (3, 1, 1, 0)$$

$$e_1 = f_1 = (1, 2, 1, 3)$$
$$e_2 = f_2 - c_1^{(1)} e_1$$
$$c_1^{(1)} = \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$
$$e_2 = \left(\frac{10}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$$

$$e_3 = f_3 - c_1^{(2)} e_1 - c_2^{(2)} e_2$$
$$c_1^{(2)} = \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$
$$c_2^{(2)} = \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{10.3}{37} = \frac{30}{37}$$
$$e_3 = \left(-\frac{19}{185}, \frac{87}{185}; \frac{61}{185}, \frac{-72}{185}\right)$$

4.70

$$f_1 = (2, 1, 3, -1)$$
$$f_2 = (7, 4, 3, -3)$$
$$f_3 = (1, 1, -6, 0)$$
$$f_4 = (5, 7, 7, 8)$$

$$e_1 = f_1 = (2, 1, 3, -1)$$
$$e_2 = f_2 - c_1^{(1)} e_1$$
$$c_1^{(1)} = \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{30}{15} = 2$$
$$e_2 = (3, 2, -3, 1)$$

$$e_3 = f_3 - c_1^{(2)} e_1 - c_2^{(2)} e_2$$
$$c_1^{(2)} = \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{-15}{15} = -1$$
$$c_2^{(2)} = \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = \frac{23}{23} = 1$$
$$e_3 = (0, 0, 0, 0)$$

$$e_4 = f_4 - c_1^{(3)} e_1 - c_2^{(3)} e_2$$
$$c_1^{(3)} = \frac{(f_4, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{30}{15} = 2$$
$$c_2^{(3)} = \frac{(f_4, e_2)}{(e_2, e_2)} = 0$$
$$e_4 = (1, 5, 1, 10)$$

4.70

Т.к $e_3 = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow e_3' = e_4 = (1, 5, 1, 10)$

$\Rightarrow$ Ответ: $(2, 1, 3, -1)$

$(3, 2, -3, 1)$

$(1, 5, 1, 10)$

4.72

$f_1 = (2, 1, 3, -1)$

$f_2 = (7, 4, 3, -3)$

$f_3 = (1, 1, -6, 0)$

$f_4 = (5, 7, \overset{7}{\cancel{+16}}, 8)$

$h_1 = f_1 = (2, 1, 3, -1)$

$h_2 = f_2 - c_1^{(1)} h_1$

$c_1^{(1)} = \frac{(f_2, h_1)}{(h_1, h_1)} = \frac{30}{15} = 2$

$h_2 = (3, 2, -3, -1)$

$h_3 = f_3 - c_1^{(2)} h_1 - c_2^{(2)} h_2$

$c_1^{(2)} = \frac{(f_3\ h_1)}{(h_1, h_1)} = \frac{-15}{15} = -1$

$c_2^{(2)} = \frac{(f_3, h_2)}{(h_2, h_2)} = \frac{23}{23} = 1$

$h_3 = (0, 0, 0, 0)$

$h_4 = f_4 - c_1^{(3)} h_1 - c_2^{(3)} h_2$

$c_1^{(3)} = \frac{(f_4, h_1)}{(h_1, h_1)} = \frac{30}{15} = 2$

$c_2^{(3)} = \frac{(f_4, h_2)}{(h_2, h_2)} = 0$

$h_4 = (1, 5, 1, 10)$

Т.к $h_3 = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$e_1 = (2, 1, 3, -1)$

$e_2 = (3, 2, -3, -1)$

$e_3 = (1, 5, 1, 10)$

Ответ:

$e_1 = (2, 1, 3, -1)$

$e_2 = (3, 2, -3, -1)$

$e_3 = (1, 5, 1, 10)$

4.74

$$
\left.\begin{aligned}
e_1 &= (1, 1, 1, 1, 1)\\
e_2 &= (1, 0, 0, 1, -2)\\
e_3 &= (2, 1, -1, 0, 2)
\end{aligned}\right|
\quad
\begin{aligned}
(e_1, e_2) &= 1+1-2=0\\
(e_2, e_3) &= 2-4=-2\\
(e_3, e_1) &= 2+1-1+2=4
\end{aligned}
$$

Система векторов не ортогональна.

4.76

$$
\left.\begin{aligned}
e_1 &= (1, 1, 1, 2)\\
e_2 &= (1, 2, 3, -3)
\end{aligned}\right|
\quad (e_1, e_2) = 1+2+3-6=0 \Rightarrow
$$

$\Rightarrow$ система ортогональна

Найдем e_3 и e_4.

$$
e_3: \begin{cases} (e_1, e_3)=0\\ (e_2, e_3)=0 \end{cases}
\quad
\begin{cases} x+y+z+2q=0\\ x+2y+3z-3q=0 \end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{cases} x+y+z+2q=0\\ y+2z-5q=0 \end{cases}
\quad
\begin{cases} x=-y-z-2q\\ y=-2z+5q \end{cases};
\quad
\begin{cases} x=z-7q\\ y=-2z+5q \end{cases}
$$

Пусть $z=1$; $q=1 \Rightarrow x=-6$; $y=3$

$$e_3 = (-6, 3, 1, 1)$$

$$
e_4: \begin{cases} (e_1, e_4)=0\\ (e_2, e_4)=0\\ (e_3, e_4)=0 \end{cases}
\quad
\begin{cases} x+y+z+2q=0\\ x+2y+3z-3q=0\\ -5x+3y+z+q=0 \end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & -3\\ -6 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -5\\ 0 & 9 & 7 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -5\\ 0 & 0 & -11 & 58 \end{pmatrix}
$$

4.76 (продолжение)

$$\begin{cases} x+y+z+2q=0 \\ y+2z-5q=0 \\ -11z+58q=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-y-z-2q \\ y=5q-z \\ -11z=-58q \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-\frac{19}{11}q \\ y=-\frac{61}{11}q \\ z=+\frac{58}{11}q \end{cases}$$

Пусть $q=11 \Rightarrow z=+58;\ y=-61,\ x=-19$

Ответ: $e_3=(-6,\ 3,\ 1,1)$

$e_4=(-19,-61,+58,11)$

Занятие 4

4.84

$Ax=\lambda x+a$, λ и a – фиксированы

1) $A(\mu x)=\mu\lambda x+\mu a=\mu(\lambda x+a)=\mu Ax$

2) $A(x+y)=\lambda(x+y)+a=\lambda x+a+\lambda y\neq Ax+Ay \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не явл. линейным оператором

4.86 $Ax=[a,x]$, a – фиксированный вектор

1) $A(\mu x)=[a,\mu x]=\mu[a,x]$

2) $A(x+y)=[a,x+y]=[a,x]+[a,y]=Ax+Ay$

$$Ai=[a,i]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=a_3j-a_2k$$

$$Aj=[a,j]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-a_3i+a_1k$$

$$Ak=[a,k]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a_2i-a_1j$$

$$A=\begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix}$$

4.90

$Ax = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$

1) $A(\lambda x) = (\lambda x_2 + \lambda x_3,\ 2\lambda x_1 + \lambda x_3,\ 3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) = \lambda A x$

2) $A(x+y) = (x_2 + y_2 + x_3 + y_3,\ 2x_1 + 2y_1 + x_3 + y_3,\ 3x_1 + 3y_1 -$

$- x_2 - y_2 + x_3 + y_3) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3) +$

$+ (y_2 + y_3,\ 2y_1 + y_3,\ 3y_1 - y_2 + y_3) = Ax + Ay$

Является линейным оператором

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.92

$Ax = (0,\ x_2 - x_3,\ 0)$

1) $A(\lambda x) = (0,\ \lambda x_2 - \lambda x_3,\ 0) = \lambda Ax$

2) $A(x+y) = (0,\ x_2 - x_3 + y_2 - y_3,\ 0) = Ax + Ay$

Является линейным оператором

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.94

$Ax = (3x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2 - x_3,\ 3x_2 + 2x_3)$

1) $A(\lambda x) = (3\lambda_1 x_1 + \lambda x_2,\ \lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3,\ 3\lambda x_2 + 2\lambda x_3) = \lambda Ax$

2) $A(x+y) = (3x_1 + x_2 + 3y_1 + y_2,\ x_1 - 2x_2 - x_3 + y_1 - 2y_2 - y_3,\ 3x_2 + 2x_3 + 3y_2 + 2y_3) =$

$= \cancel{Ax} \ Ax + Ay$

Является линейным оператором $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4.98

$$Ax = (2x_1 - x_2 + 5x_3,\ x_1 + 4x_2 - x_3,\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3)$$

$$Bx = (x_1 + 4x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_2 - x_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 23 & 0 \\ 9 & 1 & 8 \\ -7 & 17 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = AB - BA = \begin{pmatrix} -15 & 23 & -7 \\ 2 & 8 & -4 \\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 7 & -7 & 12 \\ 0 & 17 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{Cx = (-15x_1 + 2x_2 - 7x_3,\ 23x_1 + 8x_2 + x_3,\ -7x_1 - 4x_2 + 7x_3)}$$

$$Cx = (-15x_1 + 23x_2 - 7x_3,\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3,\ -7x_1 + x_2 + 7x_3)$$

4.100

$$Ax = (3x_1 + x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

$$Bx = (x_1 + x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad BA \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Cx = (2x_1 + 3x_2 - 2x_3,\ x_1 - 4x_3,\ 3x_1 - 2x_3)$$

4.102

$Ax = \lambda x$ $\quad \lambda$ – фиксированное число

$$A_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$A_{B'} = T^{-1}_{B\to B'} \cdot A_B \cdot T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & +\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\cos\varphi & \lambda\sin\varphi \\ 0 & -\lambda\sin\varphi & \lambda\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

4.104 ~~$Ax = (x, e)e$, где e — заданный единичный вектор.~~

$Ax = (a, x)x$, a — фиксированный вектор

$$A_B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$A_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2\cos\varphi & a_3\sin\varphi \\ 0 & -a_2\sin\varphi & a_3\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2\cos^2\varphi + a_3\sin^2\varphi & \frac{1}{2}(a_2 - a_3)\sin 2\varphi \\ 0 & \frac{1}{2}(a_2-a_3)\sin 2\varphi & a_2\sin^2\varphi + a_3\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

4.108

$$B': \begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2 \\ e_2' = 2e_1 + 3e_2 \end{cases} \qquad B'': \begin{cases} e_1'' = 3e_1 + e_2 \\ e_2'' = 4e_1 + 2e_2 \end{cases}$$

$$A_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B_{B''} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Пусть $T_{B' \to B''} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Тогда:

$$\begin{cases} e_1 + 2e_2 = a(3e_1 + e_2) + c(4e_1 + 2e_2) \\ 2e_1 + 3e_2 = b(3e_1 + e_2) + d(4e_1 + 2e_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 4c = 1 \\ a + 2c = 2 \\ 3b + 4d = 1 \\ b + 2d = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} a = -3 \\ c = 2,5 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -4 \\ d = 3,5 \end{cases} \end{cases} \quad T_{B' \to B''} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2,5 & 3,5 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}_{B' \to B''} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{B''} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2,5 & 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -53 & -59 \\ 39 & 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2,5 & 3,5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11,5 & 5,5 \\ -9,5 & -5,5 \end{pmatrix}$$

$$A_{B''} + B_{B''} = \begin{pmatrix} 15,5 & 11,5 \\ -3,5 & 3,5 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 15,5 & 11,5 \\ -3,5 & 3,5 \end{pmatrix}$

4.110

б) $D = \dfrac{d}{dt}$

$$B: \underset{P_1}{1}, \ \underset{P_2}{(t-t_0)}, \ \underset{P_3}{\frac{(t-t_0)^2}{2!}}, \ \dots, \ \underset{P_n}{\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}}, \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

$DP_1 = 0$

$DP_2 = 1$

$DP_3 = \frac{1}{2!} \cdot 2(t - t_0) = t - t_0$

...

$DP_n = \frac{1}{(n-2)!}(t-t_0)^{n-2}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

4.110 б) (продолжение)

Док-во:

$\mathcal{D}^n = 0$ - нулевой оператор

$$\mathcal{D}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{n} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{n-2} = \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$ - нулевой оператор

ч.т.д.

4.118

$A\vec{x} = 2z\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (2x+3z)\vec{k}$ $\quad (\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0 \Rightarrow$ Оператор A ~~явл~~ вырожденный

Занятие 5

4.130 $Ax = (x,i)i$ - оператор проектирования на ось O_x

а) $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ $\quad \bar{x}\{x_1, y_1, z_1\}$

1) $\bar{x} \in O_x \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $A\bar{x} = \bar{x}$ $\quad \lambda_1 = 1$

2) $\bar{x} \perp O_x \Rightarrow A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \lambda_2 = 0$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$

Ответ:
$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 0$

4.134

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1) $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

$$\lambda = -1$$

2) Пусть $h_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ – собственный вектор

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ 5a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ -a_1 - a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_2 = -a_3 \end{cases}$$

Пусть $a_3 = 1 \Rightarrow a_2 = -1$

$a_1 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Другие собственные векторы $h = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$

Ответ: $\lambda = -1$; $h = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$

4.136

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

1) $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-\lambda^3+\lambda^2=0$

$-\lambda^2(\lambda-1)=0$

$\left[\begin{array}{l}\lambda=0\\ \lambda=1\end{array}\right.$

2) Собственные векторы

I. $\lambda_1=0$

$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$ $\quad h_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}4&-5&2&0\\5&-7&3&0\\6&-9&4&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-\frac{5}{4}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{4}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{1}{3}&0\\0&1&-\frac{2}{3}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\sim$

$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&-1&0\\0&3&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\quad\begin{cases}3a_1-a_3=0\\3a_2-2a_3=0\end{cases}$

Пусть $a_3=3 \Rightarrow a_2=2,\ a_1=1 \quad h_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad h_{I}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \alpha\neq0$

II $\lambda_2=1$ $\quad h_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3&-5&2\\5&-8&3\\6&-9&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-5&2&0\\5&-8&3&0\\6&-9&3&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\begin{cases}b_1-b_3=0\\b_2-b_3=0\end{cases}$ $\quad$ Пусть $b_3=1 \Rightarrow b_1=b_2=1$

$h_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow h_{II}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Ответ: $\lambda_1=0;\ h_I=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\ \lambda_2=1;\ h_{II}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\alpha\neq0$

4.138

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$$

1) $|A-\lambda E|=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & -4\\ 4 & -7-\lambda & 8\\ 6 & -7 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$-\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3=0$

$(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$

$$\left[\begin{aligned}\lambda&=-1\\ \lambda&=3\end{aligned}\right.$$

2) Собственные векторы

I $\lambda_1=-1$ $\qquad h_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 4 & -6 & 8\\ 6 & -7 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 4 & 0\\ 4 & -6 & 8 & 0\\ 6 & -7 & 8 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -4 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}a_1-a_3=0\\ a_2-2a_3=0\end{cases}$$ Пусть $a_3=1 \Rightarrow a_2=2$, $a_1=1$

$$h_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow h_I=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\quad \alpha\neq0$$

II $\lambda_2=3$ $\qquad h_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-2 & -3 & 4\\ 4 & -10 & 8\\ 6 & -7 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -3 & 4 & 0\\ 4 & -10 & 8 & 0\\ 6 & -7 & 4 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -3 & -4 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}2b_1-b_3=0\\ b_2-b_3=0\end{cases}$$ Пусть $b_3=2 \Rightarrow b_2=2,\ b_1=1 \Rightarrow h_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow h_{II}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Ответ: $\lambda_1=-1$; $h_I=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=3$; $h_{II}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $\alpha\neq0$

4.140

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

2) Собственные векторы

I. $\lambda_{\cancel{1}} = 1$ $\qquad h_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$ Пусть ~~a~~ $a_3 = 1 \Rightarrow a_2 = -1$

$h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_I = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$

II $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases}$ Пусть $b_2 = 1 \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_{II} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha \neq 0$

Ответ: $\lambda_1 = 1$; $h_I = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$; $h_{II} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha \neq 0$

4.142

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & -3-\lambda & -1 \\ 3 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -2 \end{array}\right.$$

2) Собственные векторы

I. $\lambda_1 = -1$ $\qquad h_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 0 \\ a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Пусть } a_3 = 1; \; a_2 = a_1 = 1$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; h_I = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

II $\lambda_2 = 2$ $\qquad h_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 7b_1 - 4b_3 = 0 \\ 7b_2 - b_3 = 0 \end{cases} \text{Пусть } b_3 = 7; \; b_2 = 1; \; b_1 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow h_{II} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

III $\lambda_3 = -2$ $\qquad h_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3c_1 - 2c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $c_3 = 3 \Rightarrow c_2 = 3;\ c_1 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix};\ h_{III} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$

Ответ: $\lambda_1 = -1;\ h_I = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2;\ h_{II} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \alpha \neq 0$

$\lambda_3 = -2;\ h_{III} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

4.176

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1) $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$$

2) Собственные векторы:

$h_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

1. $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$ Пусть $a_3 = 1$; $a_1 = -1$

$$h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Пусть $x_2 = 1$, $x_3 = 0$; $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Пусть $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h_1, h_2, h_3 – составляют базис $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_{диаг} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.184

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

1) $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & -4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 45\lambda^2 - 567\lambda + 2187 = 0$$

$$(\lambda-9)^2(\lambda-22) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 9 \\ \lambda = 22 \end{array}\right.$$

2) Собствении вектори:

I $\lambda_1 = 9$ $\qquad h_1 = (a_1, a_2, a_3)^T$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & 8 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$2a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$$

Пусть $a_2 = 1,\ a_3 = 0$; $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Пусть $a_3 = 2$; $a_2 = 0$; $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

II $\lambda_2 = 27$ $\qquad h_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -8 & 4 & 0 \\ -8 & -10 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & -16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} b_1 - 2b_3 = 0 \\ b_2 + 2b_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $b_3 = 1 \Rightarrow b_2 = -2$; $b_1 = 2$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы: $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ортонормируем базис:

$$f_1 = h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{f_2 = h_2 - c_1^{(1)} f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = h_2 - \frac{(h_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = h_3 - \frac{(h_3, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 - \frac{(h_3, f_2)}{(f_2, f_2)} f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матрица в новом базисе:

$$A_e = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

Занятие 6

4.219

$$-x_1^2 + 2x_1x_1 - 4x_2^2$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = -1 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} > 0.$$

Ответ: отрицательно определена

4.221

$12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -11 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -11 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} > 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -81 < 0$

Ответ: отрицательно неопределенная

4.223

$2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = -\frac{1}{4}$

$\Delta_3 = -\frac{1}{2}$

Ответ: не является положительно или отрицательно определенной.

4.225

$|x|^2$

$x = (x_1, \dots, x_n)^T$

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \Rightarrow |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \\ \vdots \\ \Delta_n > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ положительно определенная

ч.т.д.

4.227

$\underbrace{x^2 - 2xy + y^2}_{\text{кв.ф}} \underbrace{- 10x - 6y}_{\text{лин.ф}} + 25 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица квадратичной формы

1) $|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right.$$

Тогда квадратичная форма примет вид: $2y_1^2$

2) Найдем собственные векторы.

I $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = y \qquad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

II $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = -y \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Линейная форма:

$$\begin{pmatrix} -10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} -16 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Она примет вид: $-\frac{16}{\sqrt2}x_1 - \frac{4}{\sqrt2}y_1$

$$-8\sqrt2 x_1 - 2\sqrt2 y_1$$

3) $2y_1^2 - 8\sqrt2 x_1 - 2\sqrt2 y_1 + 25 = 0$

$$2\left(y_1^2 - \sqrt2 y_1 + \frac12\right) - 8\sqrt2 x_1 + 24 = 0$$

$$2\left(y_1 - \frac{\sqrt2}{2}\right)^2 - 8\sqrt2 x_1 + 24 = 0 \quad \Big|:2$$

$$\left(y_1 - \frac{\sqrt2}{2}\right)^2 - 4\sqrt2 x_1 = -12 \quad \Big|:-12$$

$$\cancel{\frac{4\sqrt{2}}{12}x_1 - \frac{\left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{12}} = 1$$

3) $2y_1^2 - 8\sqrt{2}x_1 - 2\sqrt{2}y_1 + 25 = 0$

$$2\left(y_1^2 - \sqrt{2}y_1 + \frac{1}{2}\right) - 8\sqrt{2}x_1 + 24 = 0$$

$$\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4\sqrt{2}x_1 + 12$$

$$\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Пусть $y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = y_2 \qquad x_1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} = x_2$

$y_2^2 = 4\sqrt{2}x_2$ – парабола

4.229

$$\underbrace{4x^2 - 4xy + y^2}_{\text{кв. ф}} \underbrace{-6x + 3y}_{\text{л. ф.}} - 4 = 0$$

Матрица квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 5\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 5$

Тогда квадратичная форма примет вид: $5y_1^2$

$\lambda_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x = +\frac{1}{2}y \quad h_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} +1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 5 \quad \begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad x = -2y \quad h_2 = \begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

$E_2 = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

$T = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}+1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Линейная форма:

$(-6 \quad 3)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = (-6 \quad 3)\cdot\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}+1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = \cancel{\ }$

$= \frac{1}{\sqrt5}(12 \quad 15)\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$

$\frac{12}{\sqrt5}x_1 + \frac{15}{\sqrt5}y_1 = \frac{12\sqrt5}{5}x_1 + \frac{15\sqrt5}{5}y_1 = \frac{12\sqrt5}{5}x_1 + 3\sqrt5 y_1$

Тогда:

$5y_1^2 + \frac{12\sqrt5}{5}x_1 + 3\sqrt5 y_1 - 4 = 0 \quad |\times 5$

$25y_1^2 + 12\sqrt5 x_1 + 15\sqrt5 y_1 - 20 = 0$

$\cancel{5\left(5y_1^2 + 3\sqrt5 y_1 + \left(\frac{3\sqrt5}{10}\right)^2\right) + 12\sqrt5 x_1 - 20 - 2,25 = 0}$

$5\left(5y_1^2 + 2\cdot\frac12\cdot 3\cdot\sqrt5 y_1 + \frac94\right) + 12\sqrt5 x_1 - 20 - 11,25 = 0$

$5\left(\sqrt5 y_1 + \frac32\right)^2 = -12\sqrt5 x_1 + 31,25$

$\left(\sqrt5 y_1 + \frac32\right)^2 = -\frac{12\sqrt5}{5}x_1 + \frac{31,25}{5}$

Пусть $\sqrt5 y_1 + \frac32 = y_2 \qquad -\frac{12\sqrt5}{10}x_1 + \frac{31,25}{10} = x_2$

$y_2^2 = 2x_2$ — парабола.

Тогда

$5y_1^2 + \frac{15\sqrt5}{5}y_1 - 4 = 0$

$5y_1^2 + 3\sqrt5 y_1 - 4 = 0$

$5\left(y_1^2 + \frac{3\sqrt5}{5}y_1 + \frac{9}{20}\right) - 4 - \frac94 = 0$

$5\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{25}{4}$

$\left(y_1 + \frac{3}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac54$

Пусть $y_2 = y_1 + \frac{3}{\sqrt{20}}$

$y_2^2 = \frac54$ — параллельные прямые.

4.231

$$\underbrace{x^2-4xy+4y^2}_{\text{кв. ф}}\underbrace{-4x-3y}_{\text{л. ф}}-7=0$$

Матрица квадратичной формы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=0$$

$$\lambda^2-5\lambda=0$$

$$\lambda(\lambda-5)=0$$

$$\lambda_1=0$$

$$\lambda_2=5$$

Квадратичная форма: $5y_1^2$

Аналогично предыдущей задаче:

$$h_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad h_2=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$E_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad E_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$T=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Линейная форма:

$$\begin{pmatrix}-4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{5}{\sqrt5}x_1-\frac{2}{\sqrt5}y_1=-\sqrt5x_1-\frac{2\sqrt5}{5}y_1$$

Тогда

$$5y_1^2-\sqrt5x_1-\frac{2\sqrt5}{5}y_1-7=0$$

$$5y_1^2-\frac{2\sqrt5}{5}y_1-\sqrt5x_1-7=0$$

$$5\left(y_1^2-\frac{2\sqrt5}{25}y_1+\frac{1}{125}\right)^2-\sqrt5x_1-7-\frac{1}{25}=0$$

$$5\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{125}}\right)^2 = \sqrt{5}\, x_1 + 7{,}04$$

$$\left(y_1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{5} x_1 + \frac{7{,}04}{5}$$

Пусть $y_1 - \frac{1}{5\sqrt{5}} = y_2$ $\quad \frac{\sqrt{5}}{10} x_1 + \frac{7{,}04}{10} = x_2$

$y_2^2 = 2x_2$ — парабола

$$5\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{125}}\right)^2 = \sqrt{5}\, x_1 + 7{,}04$$

$$\left(y_1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(x_1 + \frac{176}{125}\sqrt{5}\right)$$

Пусть $y_1 - \frac{1}{5\sqrt{5}} = y_2$ $\quad x_1 + \frac{176}{125}\sqrt{5} = x_2$

$y_2^2 = \frac{\sqrt{5}}{5} x_2$ — парабола

4.233

$$\underbrace{7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz}_{\text{кв. ф.}} - \underbrace{6x - 24y + 18z}_{\text{л. ф.}} + 30 = 0$$

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0$

$(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = 6 \\ \lambda = 9 \end{array}\right.$$

I $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$$ Пусть $z = 2 \Rightarrow y = 2$, $x = 1$

$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $E_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

II $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$ Пусть $z = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x = -2$

$h_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $E_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

III $\lambda_3 = 9$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $z = 1 \Rightarrow y = -2$; $x = 2$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$ $h_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Квадратичная форма $3x_1^2 + 6y_1^2 + 9z_1^2$

$$\boxed{T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Линейная форма:

$$(-6 \ \ -24 \ \ 18)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-6 \ \ -24 \ \ 18) \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2(-1 \ \ -4 \ \ 3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 2(-3 \ \ 12 \ \ 9)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-6 \ \ 24 \ \ 18)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = -6x_1 + 24y_1 + 18z_1$$

Получаем:

$$3x_1^2+6y_1^2+9z_1^2-6x_1+24y_1+18z_1+30=0$$

$$3x_1^2-6x_1+3+6y_1^2+24y_1+24+9z_1^2+18z_1+9-6=0$$

$$3(x_1-1)^2+6(y_1+2)^2+9(z_1+1)^2=6 \quad |:3$$

$$(x_1-1)^2+2(y_1+2)^2+3(z_1+1)^2=2 \quad |:2$$

$$\frac{(x_1-1)^2}{2}+\frac{(y_1+2)^2}{1}+\frac{(z_1+1)^2}{\frac{2}{3}}=1$$

Пусть $x_1-1=x_2 \quad y_1+2=y_2 \quad z_1+1=z_2$

$$\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{1}+\frac{z_2^2}{\frac{2}{3}}=1 \quad \text{— эллипсоид.}$$

Занятие 7-8

4.212

$$4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3=$$

$$=\left((2x_1)^2-2\cdot 2x_1x_2+2\cdot 2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2\right)-x_2x_3=$$

$$=(2x_1-x_2+x_3)^2-x_2x_3= x_1'^2-(x_2'+x_3')(x_2'-x_3')=$$

Пусть $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=x_1' \\ x_2=x_2'+x_3' \\ x_3=x_2'-x_3' \end{cases}$ $=x_1'^2-x_2'^2+x_3'^2$

Линейное преобразование:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{x_1'+x_2-x_3}{2} \\ x_2=x_2'+x_3' \\ x_3=x_2'-x_3' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}x_1'+x_3' \\ x_2=x_2'+x_3' \\ x_3=x_2'-x_3' \end{cases}$$

4.214

$x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda E| = 0$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = 6$

I $\lambda_1 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

II $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$; $x_1 = -1$

$h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

III $\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 0 & -\frac{16}{5} & \frac{-8}{5} \\ 0 & -\frac{8}{5} & \frac{-4}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -1; \; x_1 = 1$

$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' - \frac{1}{\sqrt{3}} x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}} x_3' \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1' + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2' - \frac{1}{\sqrt{6}} x_3' \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} x_2' + \frac{2}{\sqrt{6}} x_3' \end{cases}$$

Канонический вид: $-2x_1'^2 + 3x_2'^2 + 6x_3'^2$

4.216

$17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 14-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^3 - 45\lambda^2 + 648\lambda + 2916 = 0$

$(\lambda - 9)(\lambda - 18)(\lambda - 18) = 0$

$\lambda_1 = 9$

$\lambda_{2,3} = 18$

I $\lambda_1 = 9$

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2; \; x_1 = 1$

$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

II $\lambda_{2,3} = 18$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$1x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$

Пусть $x_2 = 1,\ x_3 = 0$ $\quad h_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} \\ 0 \end{pmatrix}$

Пусть $x_2 = 0;\ x_3 = 1$ $\quad h_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt5} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$

$$T = \begin{pmatrix} \frac13 & -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ \frac23 & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ \frac23 & 0 & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac13 x_1' - \frac{2}{\sqrt5} x_2' - \frac{2}{\sqrt5} x_3' \\ x_2 = \frac23 x_1' + \frac{1}{\sqrt5} x_2' \\ x_3 = \frac23 x_1' + \frac{1}{\sqrt5} x_3' \end{cases}$$

Канонический вид: $9x_1'^2 + 18x_2'^2 + 18x_3'^2$

4.230

$$\underbrace{2x^2 + 4xy + 5y^2}_{\text{кв ф}} \underbrace{-6x - 8y}_{\text{л. ф.}} - 1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda E| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 6$

I. $\lambda_1 = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x + 2y = 0$

Пусть $y = 1$; $x = -2$ $\quad h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_1 = \frac{1}{\sqrt5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

II $\lambda_2 = 6$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y = 0$$

Пусть $y = 2 \Rightarrow x = 1$ $\quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ~~E_2~~

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Квадратичная форма: $x_1^2 + 6y_1^2$

Линейная форма

$$\begin{pmatrix} -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -8 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 & -22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{22}{\sqrt{5}} y_1$$

Получаем

$$x_1^2 + 6y_1^2 + \frac{4}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{22}{\sqrt{5}} y_1 - 1 = 0$$

$$\left(x_1^2 + \frac{4}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{4}{5}\right) + 6\left(y_1^2 - \frac{22}{6\sqrt{5}} y_1 + \frac{121}{180}\right) - \frac{35}{6} = 0$$

$$\left(x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y_1 - \sqrt{\frac{121}{180}}\right)^2 = \frac{35}{6} \quad \Big| : \frac{35}{6}$$

$$\frac{\left(x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{35}{6}} + \frac{\left(y_1 - \sqrt{\frac{121}{180}}\right)^2}{\frac{35}{36}} = 1$$

Пусть $x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} = x_2 \qquad y_1 - \sqrt{\frac{121}{180}} = y_2$

$$\frac{x_2^2}{\frac{35}{6}} + \frac{y_2^2}{\frac{35}{36}} = 1 \quad \text{— эллипс}$$