Билет №22

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №2

Теория

① Определение.

Общим решением ОДУ n-ого порядка наз. функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, заданная на некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ((n+1)-мерного пространства переменных $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$), зависящая от независимой переменной x и произвольных постоянных C_i, $i = \overline{1,n}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) при любых фиксированных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ есть решение заданного ОДУ n-ого порядка

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_{1,0}$, $y'(x_0) = y_{2,0}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n,0}$, где $(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}) \in D$ можно найти единственный набор значений $C_i = C_{i,0}$ таких, что ф-я

$$y = \varphi(x, C_{1,0}, C_{2,0}, \ldots, C_{n,0})$$

удовлетворяет данному начальному условию

② Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка.

Пусть общее решение ОЛДУ 2-ого порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

имеет вид

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

Тогда общее решение НЛДУ 2-ого порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

будет иметь вид:

$$y_{он} = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x),$$

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №2

Билет №22

② (продолжение)

где величины $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = b(x) \end{cases}$$

Выведем систему соотношений варьирования переменных (для НЛДУ 2-ого порядка):

$$y_{он} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad \left(\begin{matrix} C_1 = C_1(x); & C_2 = C_2(x) \\ y_1 = y_1(x); & y_2 = y_2(x) \end{matrix} \right)$$

$$y_{он}' = C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

Потребуем

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$$

Тогда

$$y_{он}' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

$$y_{он}'' = C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2''$$

Подставим производные в НЛДУ:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + a_1(x)\left(C_1 y_1' + C_2 y_2' \right) +$$

$$+ a_2(x)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2 \right) = b(x)$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 \left(y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1 \right) +$$

$$+ C_2 \left(y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2 \right) = b(x)$$

Т.к. y_1 и y_2 – решения ОЛДУ ⇒

$$\Rightarrow \; y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1 = 0$$

$$y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2 = 0$$

Билет №22

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №2

(2) (продолжение)

Тогда ЛНДУ принимает вид:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = b(x)$$

Объединяем в систему:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = b(x) \end{cases}$$

ч.т.д.

Билет №22

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №2

Задачи

(1) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1+2i$, $\lambda_4 = 1-2i$.

Составим характеристическое ур-е, зная его корни:

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda-(1+2i))(\lambda-(1-2i)) = 0$$

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda-1-2i)(\lambda-1+2i) = 0$$

$$\lambda(\lambda-2)((\lambda-1)^2-4i^2) = 0$$

$$\lambda(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+5) = 0$$

$$(\lambda^2-2\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5) = 0$$

$$\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda^3+4\lambda^2-10\lambda = 0$$

$$\lambda^4-4\lambda^3+9\lambda^2-10\lambda = 0$$

Тогда ОЛДУ:

$$y^{IV}-4y'''+9y''-10y' = 0$$

Общее решение:

$$y_{oo} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^x \cos 2x + C_4 e^x \sin 2x$$

(2) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$; $y(1) = 0$, $y'(1) = \sqrt{2}$

Замена $p = y'$, $p' = y''$

Тогда

$$2xpp' = p^2 - 1$$

$$2xp\frac{dp}{dx} = p^2 - 1$$

$$2\frac{p\,dp}{p^2-1} = \frac{dx}{x}$$

$$2\int\frac{p\,dp}{p^2-1} = \int\frac{dx}{x} + C$$

Билет № 22

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №2

② (продолжение)

$$\frac{2}{2}\int\frac{d(p^2-1)}{p^2-1}=\int\frac{dx}{x}+C$$

$$\ln|p^2-1|=\ln|x|+C$$

$$p^2-1=C_1x$$

$$p^2=C_1x+1$$

$$p=\pm\sqrt{C_1x+1}$$

$$y'=\pm\sqrt{C_1x+1}$$

$$y=\pm\int(C_1x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C_2=\pm\frac{1}{C_1}\int(C_1x+1)^{\frac{1}{2}}d(C_1x+1)+C_2=$$

$$=\pm\frac{1}{C_1}\cdot\frac{2}{3}(C_1x+1)^{\frac{3}{2}}+C_2$$

Из начальных условий $y(1)=0$; $y'(1)=\sqrt{2}$ получаем:

$$\begin{cases}\pm\frac{2}{3C_1}(C_1+1)^{\frac{3}{2}}+C_2=0\\ \pm\sqrt{C_1+1}=\sqrt{2}\end{cases};\quad\begin{cases}\frac{2}{3C_1}(C_1+1)^{\frac{3}{2}}+C_2=0\\ C_1+1=2\end{cases};$$

$$\begin{cases}C_1=1\\ \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}}+C_2=0\end{cases};\quad\begin{cases}C_1=1\\ C_2=\frac{-4\sqrt{2}}{3}\end{cases}$$

Получим:

$$y=\frac{2(x+1)^{\frac{2}{3}}}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right)$$

Ответ: $y=\frac{2}{3}\left((x+1)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right)$

БИЛЕТ № 22

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №2

(3) $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda = \pm i$

$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Будем искать общее решение в виде

~~$y_{on} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin(x)$~~

$y_{on} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$,

где $\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{2}{\sin^3 x} \end{cases}$

Решим методом Крамера

$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{2}{\sin^3 x} & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{2}{\sin^2 x}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{2}{\sin^3 x} \end{vmatrix} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{2}{\sin^2 x}$; $C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

$C_1(x) = \int C_1'(x) dx = -2 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 2 \operatorname{ctg} x + \tilde{C}_1$

$C_2(x) = \int C_2'(x) dx = 2 \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = 2 \int \operatorname{ctg} x \frac{1}{\sin^2 x} dx =$

$= -2 \int \operatorname{ctg} x \, d(\operatorname{ctg} x) = -\operatorname{ctg}^2 x + \tilde{C}_2$

Подставляем:

Билет № 22

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №2

③ (продолжение)

$y_{on} = (2\,ctg\,x + \tilde{C}_1)\cos x + (-ctg^2 x + \tilde{C}_2)\sin x =$

$= \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + 2\,ctg\,x \cos x - ctg^2 x \sin x =$

$= \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + 2\,ctg\,x \cos x - ctg\,x \cos x =$

$= \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + ctg\,x \cos x$

Ответ: $y_{on} = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + ctg\,x \cos x$

④ $y^{V} + y^{IV} = (x-8)e^{-x} - x + 2 + x\sin x - \cos x$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^5 + \lambda^4 = 0$

$\lambda^4(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_{1,2,3,4} = 0$

$\lambda_5 = -1$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-x}$

Правая часть представляет сумму ф-ий вида:

$$f(x) = e^{\alpha x}\,[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x]$$

1) $f(x) = (x-8)e^{-x}$

$\alpha = -1$, $\beta = 0$; $P_1(x) = x - 8$; $Q_0(x) = 0$, $m = 1$, $\lambda = -1$ — корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

$y_{чн1} = x e^{-x}(Ax + B)$

2) $f(x) = -x + 2$

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_1(x) = -x + 2$, $Q_0(x) = 0$, $m = 1$, $\lambda = 0$ — корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 4$

$y_{чн2} = x^4(Cx + D)$

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №2

БИЛЕТ №22

3) $f(x) = -\cos x + x\sin x$

$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad P_0(x) = -1, \quad Q_1(x) = x, \quad m = 1$

$\lambda = \pm i$ – не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow$ $k = 0$

$$y_{чнз} = (Ex+F)\cos x + (Gx+H)\sin x$$

Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-x} + x e^{-x}(Ax+B) + x^4(Cx+D) + (Ex+F)\cos x + (Gx+H)\sin x$