Часть А

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №1
БИЛЕТ №4

Теория

① Определение

Пусть $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ и $\mathcal{B}'=(e_1',\dots,e_n')$ — два различных базиса в L_n. Каждый из векторов базиса $\mathcal{B}'$ раскладывается по базису $\mathcal{B}$:

$$e_k' = a_{1k}e_1 + \dots + a_{nk}, \text{ т. е}$$

$$E_k' = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \text{ где } k=\overline{1,n}$$

Тогда матрицей перехода $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$ наз матрица

$$T_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

такая, что k-й её столбец есть столбец E_k' координат вектора e_k' в базисе $\mathcal{B}$

② Теорема

Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Задачи

③ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Пусть $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК№1
БИЛЕТ №4

③ (продолжение)

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\lambda_1 - 7\lambda_2 = -9 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 11 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & -9 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & -9 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -7 & -9 \\ 2 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & -16 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -10 & -30 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 7 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$\vec{c} = 4\vec{a} + 3\vec{b} \Rightarrow \vec{c}$ принадлежит линейной оболочке векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Ответ: да, $\vec{c} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$

④ В базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ пространства $\mathbb{R}^2$

$$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$$

$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - 3e_2$

$Q(y_1, y_2)$ - ?

(4) (продолжение)

Матрица перехода от $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ к $\{\vec{e_1}', \vec{e_2}'\}$

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Матрица квадратичной формы $Q(x_1, x_2)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №1
БИЛЕТ №4

Транспонированная матрица перехода:

$$T^T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица квадратичной формы $Q(y_1, y_2)$:

$$A' = T^T_{B\to B'} \cdot A \cdot T_{B\to B'}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ -11 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 31 & -29 \\ -29 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Q(y_1, y_2) = 31y_1^2 - 58y_1y_2 + 5y_2^2$$

Ответ: $Q(y_1, y_2) = 31y_1^2 - 58y_1y_2 + 5y_2^2$

(5) $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №1
БИЛЕТ №4

(5) (продолжение)

~~Матрица~~ Пусть матрица линейного оператора C

Тогда:

$$B = CA$$

$$BA^{-1} = CA\,A^{-1}$$

$$C = BA^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

(6) $Q(x,y) = 4xy - 4x^2 - y^2$

Матрица квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения:

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-4-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -5$$

(6) (продолжение)

$Q(x_1, y_1) = -5y_1^2$

Найдем преобразование:

I $\lambda_1 = 0$

$(A - \lambda_1 E)\vec{h}_1 = \vec{0}$ $\quad \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$2a_1 = a_2$

Пусть $a_2 = 2, \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

II ~~Х~~ $\lambda_2 = -5$

$(A - \lambda_2 E)\vec{h}_2 = \vec{0}$ $\quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$b_1 = -2b_2$

Пусть $b_2 = 1 \Rightarrow b_1 = -2 \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Собственные векторы ортогональны $(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = 0$

$\vec{e}_1 = \frac{\vec{h}_1}{\|\vec{h}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \frac{\vec{h}_2}{\|\vec{h}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

Матрица преобразования

$T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1 - 2y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_1 + y_1) \end{cases}$

Т.к. $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ форма неопределенная

Ответ: $Q(x_1, y_1) = -5y_1^2$, неопределенная

Часть B

ИУ7-23Б

Маслова

Марина

Дмитриевна

РК №1

Билет №4

(7) Теорема

Собственные векторы сопряженного оператора, отвечающие ~~на~~ разным собственным значениям, ортогональны.

Док-во:

Пусть A - самосопряженный оператор

$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ - два его собственных вектора

λ_1, λ_2 - соответствующие различные собственные значения

Тогда $A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$, $A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\lambda_1 \vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_1 (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

Т.к. A - самосопряженный $\Rightarrow (A\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, A\vec{x}_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (A\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, A\vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \lambda_2 \vec{x}_2) = \lambda_2 (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

Получаем:

$$\lambda_1 (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \lambda_2 (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

или

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$

Т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0 \Rightarrow \vec{x}_1, \vec{x}_2$ - ортогональны

ч.т.д.

(8) $B = \{1, t+1, (t+1)^2, (t+1)^3\}$

$B' = \{1, t-2, (t-2)^2, (t-2)^3\}$

$\vec{e}_1' = 1 = \vec{e}_1$

$\vec{e}_2' = t-2 = t+1-3 = \vec{e}_2 - 3\vec{e}_1$

$\vec{e}_3' = (t-2)^2 = t^2 - 4t + 4 = t^2 + 2t + 1 - 6t + 3 =$

$= (t+1)^2 - (6t-3) = (t+1)^2 - (6t+6-6-3) =$

Часть А.

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №1
Билет №

~~Теория~~

~~① Определение~~

~~Матрицей перехода $T_{B\to B'}$ от базиса B к базису B' наз. матрица~~

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

~~такая~~

$e_1' = 1 = e_1$

$e_2' = t-2 = t+1-3 = e_2 +$

② (продолжение)

$= (t+1)^2 - (6(t+1)-9) = (t+1)^2 - 6(t+1) + 9 = \vec{e}_3 - 6\vec{e}_2 + 9\vec{e}_1$

$\vec{e}_4' = (t-2)^3 = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = t^3 + 3t^2 + 3t + 1 -$

$- 6t^2 + 12t - 8 - 3t^2 - 3t - 1 = (t+1)^3 - 9t^2 + 9t - 9 =$

$= (t+1)^3 - 9(t^2 - t + 1) = (t+1)^3 - 9(t^2 + 2t + 1 - t - 2t) =$

$= (t+1)^3 - 9((t+1)^2 - 3t) = (t+1)^3 - 9(t+1)^2 + 27t =$

$= (t+1)^3 - 9(t+1)^2 + 27t + 27 - 27 =$

$= (t+1)^3 - 9(t+1)^2 + 27(t+1) - 27 = \vec{e}_4 - 9\vec{e}_3 + 27\vec{e}_2 - 27\vec{e}_1$

Матрица перехода:

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 0 & 1 & -6 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$