Занятие 21

3034

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Будем искать общее решение НЛДУ в виде:

$$y_{он} = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x,$$

где
$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0 \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x)(e^x + x e^x) = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0 \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x + C_2'(x) e^x = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow C_2'(x) e^x = \frac{e^x}{x}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{x}$$

Тогда $C_1'(x) e^x + e^x = 0$

$$C_1'(x) = -1$$

$C_1'(x) = -1 \qquad C_1(x) = \int -1\,dx = -x + \tilde{C}_1$

$C_2'(x) = \frac{1}{x} \qquad C_2(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \tilde{C}_2$

$$y_{он} = (-x + \tilde{C}_1) e^x + (\ln|x| + \tilde{C}_2) x e^x$$

$$y_{он} = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 x e^x - x e^x + x e^x \ln|x| =$$

$$= \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_3 x e^x + x e^x \ln|x|$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_3 x e^x + x e^x \ln|x|$

3036

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Характеристическое ур-е

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Будем искать решение НЛДУ в виде:

$$y_{oн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Решим методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\operatorname{tg} x, \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1$$

$$C_1(x) = \int(-\operatorname{tg} x)\,dx = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = \int 1\,dx = x + \tilde{C}_2$$

$$y_{oн} = (\ln|\cos x| + \tilde{C}_1)\cos x + (x + \tilde{C}_2)\sin x =$$

$$= \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + x\sin x - \ln|\cos x|\cos x$$

Ответ. $y_{oн} = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x + x\sin x + \cos x \ln|\cos x|$

3038

a) $y'' - y = \operatorname{th} x$

Характеристическое ур-е

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

Будем искать решение НЛОУ в виде:

$y_{он} = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$

где $\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) e^x - C_2'(x) e^{-x} = \operatorname{th} x \end{cases}$

Решим методом Крамера:

$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x \cdot e^{-x} - e^x \cdot e^{-x} = -2$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \operatorname{th} x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -\operatorname{th} x \cdot e^{-x}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \operatorname{th} x \end{vmatrix} = e^x \operatorname{th} x$

$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{th} x$

$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} e^x \operatorname{th} x$

$C_1(x) = -\frac{1}{2} \int e^{-x} \operatorname{th} x \, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}(e^x - e^{-x})}{e^{-x} + e^x} dx =$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{e^{-x}}{e^{2x}+1} dx = \begin{vmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{vmatrix} =$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2(u^2+1)} du = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} du -$

$- \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du =$

$$= -\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2u} + \tilde{C}_1 = -\operatorname{arctg} e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{2} e^{x} \operatorname{th} x \, dx = \frac{1}{2} \int e^{x} \operatorname{th} x \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{x}(e^{x} - e^{-x})}{e^{x} + e^{-x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}}{e^{x} + e^{-x}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{e^{x} + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1} dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = e^{x} \\ du = e^{x} dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{u^2}{u^2+1} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int 1 \, du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du =$$

$$= \frac{u}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u + \tilde{C}_2 = \frac{u}{2} - \operatorname{arctg} u + \tilde{C}_2 =$$

$$= \frac{e^{x}}{2} - \operatorname{arctg} e^{x} + \tilde{C}_2$$

$$y_{он} = \left(-\operatorname{arctg} e^{x} - \frac{e^{-x}}{2} + \tilde{C}_1\right) e^{x} + \left(\frac{e^{x}}{2} - \operatorname{arctg} e^{x} + \tilde{C}_2\right) e^{-x} =$$

$$= \tilde{C}_1 e^{x} + \tilde{C}_2 e^{-x} - e^{x} \operatorname{arctg} e^{x} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - e^{-x} \operatorname{arctg} e^{x} =$$

$$= \tilde{C}_1 e^{x} + \tilde{C}_2 e^{-x} - (e^{x} + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^{x}$$

Ответ. $y_{он} = \tilde{C}_1 e^{x} + \tilde{C}_2 e^{-x} - (e^{x} + e^{-x}) \operatorname{arctg} e^{x}$

б) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2$$

$$y_{оо} = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$$

Будем искать решение НЛДУ в виде:

$$y_{он} = C_1(x) e^{\sqrt{2}x} + C_2(x) e^{-\sqrt{2}x}$$

$$+\begin{cases} C_1'(x) e^{\sqrt{2}x} + C_2'(x) e^{-\sqrt{2}x} = 0 \\ \sqrt{2} C_1'(x) e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2} C_2'(x) e^{-\sqrt{2}x} = 4x^2 e^{x^2} \quad \Big| : \sqrt{2} \end{cases}$$

$$2C_1'(x)\, e^{\sqrt{2}x} = \frac{4}{\sqrt{2}} x^2 e^{x^2}$$

$$C_1'(x) = \frac{2}{\sqrt{2}} x^2 e^{x^2-\sqrt{2}x} = \sqrt{2}\, x^2 e^{x^2-\sqrt{2}x}$$

Тогда:

$$C_2'(x) = -C_1'(x) e^{2\sqrt{2}x} = -\sqrt{2}\, x^2 e^{x^2+\sqrt{2}x}$$

$$C_1(x) = \int \sqrt{2}\, x^2 e^{x^2-\sqrt{2}x} dx = \sqrt{2} \int \frac{(2x-\sqrt{2})(2x+\sqrt{2})e^{x^2-\sqrt{2}x} + 2e^{x^2-\sqrt{2}x}}{4} dx$$

$$= \sqrt{2} \int \frac{(2x-\sqrt{2})(2x+\sqrt{2})e^{x^2-\sqrt{2}x}}{4} dx + \frac{\sqrt{2}}{2} \int e^{x^2-2\sqrt{2}x} dx =$$

$$= \left| d e^{x^2-\sqrt{2}x} = e^{x^2-\sqrt{2}x}(2x-\sqrt{2})dx \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \int (2x+\sqrt{2})\, d e^{x^2-\sqrt{2}x} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \int e^{x^2-\sqrt{2}x} dx = \frac{\sqrt{2}}{4}(2x+\sqrt{2}) e^{x^2-\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \int e^{x^2-\sqrt{2}x} \cdot 2dx +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \int e^{x^2-\sqrt{2}x} dx = \frac{2}{4}(\sqrt{2}x+1) e^{x^2-\sqrt{2}x} + \tilde{C}_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}x+1)e^{x^2-\sqrt{2}x} + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = \int -\sqrt{2}\, x^2 e^{x^2+\sqrt{2}x} dx = |\text{аналогично}| = -\frac{1}{2}(\sqrt{2}x-1)e^{x^2+\sqrt{2}x} + \tilde{C}_2$$

$$y_{он} = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{2}x+1)e^{x^2-\sqrt{2}x} + \tilde{C}_1\right)e^{\sqrt{2}x} + \left(\tilde{C}_2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}x-1)e^{x^2+\sqrt{2}x}\right)e^{-\sqrt{2}x} =$$

$$= \tilde{C}_1 e^{\sqrt{2}x} + \tilde{C}_2 e^{-\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{2}x+1}{2} e^{x^2} - \frac{\sqrt{2}x-1}{2} e^{x^2} =$$

$$= \tilde{C}_1 e^{\sqrt{2}x} + \tilde{C}_2 e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}x}{2}} - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{2}x}{2}} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \tilde{C}_1 e^{\sqrt{2}x} + \tilde{C}_2 e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{C}_1 e^{\sqrt{2}x} + \tilde{C}_2 e^{-\sqrt{2}x} + e^{x^2}$

9.342

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Будем искать решение НЛДУ в виде

$$y_{no} = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-2x},$$

где

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-x} + C_2'(x) e^{-2x} = 0 \\ -C_1'(x) e^{-x} - 2C_2'(x) e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

Решим методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-2x}e^{-x} + e^{-x}e^{-2x} = \frac{-1}{e^{3x}}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{e^x+1} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = \frac{-e^{-2x}}{e^x+1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{e^x+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{-x}}{e^x+1}$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{e^x}{e^x+1}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-e^{2x}}{e^x+1}$$

$$C_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx = \begin{vmatrix} u = e^x \\ du = e^x dx \end{vmatrix} = -\int \frac{u}{u+1} du =$$

$$= -\int 1\, du + \int \frac{1}{u+1} du = -u + \ln|u+1| + \tilde{C}_2 = -e^x + \ln(e^x+1) + \tilde{C}_2$$

$$y_{он} = (\ln(e^x+1)+\tilde{C}_1)e^{-x} + (-e^x+\ln(e^x+1)+\tilde{C}_2)e^{-2x} =$$

$$= \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-2x} + e^{-x}\ln(e^x+1) - e^{-x} + e^{-2x}\ln(e^x+1) =$$

$$= \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-2x} + (e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-2x} + (e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)$

9.343

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Характеристическое ур-е

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$y_{оо} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Будем искать решение НЛОУ в виде

$$y_{он} = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \frac{1}{\sin^2 x} \quad |:2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{1}{2\sin^2 x} & \cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -\sin 2x & \frac{1}{2\sin^2 x} \end{vmatrix} = \frac{\cos 2x}{2\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{2}$$

$C_1'(x) = -\operatorname{ctg} x \qquad C_1(x) = -\ln|\sin x| + \tilde{C}_1$

$C_2'(x) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \frac{1}{2} \qquad C_2(x) = \frac{1}{2}\int(\operatorname{ctg}^2 x - 1)\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2\right)dx =$

$= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x - x + \tilde{C}_2$

Ответ: $y_{он} = (\tilde{C}_1 - \ln|\sin x|)\cos 2x + (\tilde{C}_2 - x - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x)\sin 2x$

9.345

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$$

Характеристическое ур-е.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2$$

$$y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

будем искать решение НЛДУ в виде:

$$y_{но} = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x},$$

где $\begin{cases} C_1'(x) e^{-2x} + C_2'(x) x e^{-2x} = 0 \\ -2C_1'(x) e^{-2x} + C_2'(x)(e^{-2x} - 2xe^{-2x}) = e^{-2x}\ln x \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ e^{-2x}\ln x & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = -xe^{-4x}\ln x$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}\ln x \end{vmatrix} = e^{-4x}\ln x$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -x\ln x; \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \ln x$$

$$C_1(x) = -\int x\ln x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{x^2}{4} + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = \int \ln x\,dx = x\ln x - x + \tilde{C}_2$$

$$y_{он} = \left(-\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{x^2}{4} + \tilde{C}_1\right)e^{-2x} + (x\ln x - x + \tilde{C}_2)xe^{-2x} =$$

$$= \left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$$

Ответ: $y_{он} = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2)e^{-2x}$