ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
КР№2
Билет №21

„Дифференциальные уравнения 1-ого порядка"

(1) $3e^x \, tg y \, dx + (1-e^x)\frac{1}{\cos^2 y} dy = 0$ – ОДУ с разделяющимися переменными

$3e^x \, tg y \, dx = -\frac{(1-e^x)}{\cos^2 y} dy \; | : (tg y \cdot (1-e^x)) \neq 0$

Если $tg y = 0$ или $1-e^x=0$,

то $y = \pi k ; k \in \mathbb{Z}$; $x=0$ – исключительные решения.

$$\frac{3e^x dx}{1-e^x} = -\frac{dy}{tg y \cos^2 y}$$

$$\int \frac{3e^x dx}{1-e^x} = -\int \frac{dy}{tg y \cos^2 y} + C$$

$$-3\int \frac{d(1-e^x)}{1-e^x} = -\int \frac{d(tg y)}{tg y} + C$$

$$-3\ln|1-e^x| = -\ln|tg y| + C$$

Ответ: $-3\ln|1-e^x| = -\ln|tg y| + C$

$y = \pi k; \; k \in \mathbb{Z}$

$x = 0$

(2) $(y^4 - 3x^2) dy + xy \, dx = 0$ – ур-е Бернулли.

Рассмотрим ур-е относительно обратной ф-ии $x(y)$

Поделим исходное ур-е на dy

Если $dy=0$; $y = C$, но решением является $y=0$.

$y^4 - 3x^2 + xy x' = 0 \; | : xy \neq 0$

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
КР №2
Билет №21

② (продолжение)

$$x' + \frac{y^4}{xy} - \frac{3x^2}{xy} = 0$$

$$x' + \frac{y^3}{x} - \frac{3x}{y} = 0$$

$$x = uv \; ; \quad x' = u'v + v'u$$

$$u'v + v'u + \frac{y^3}{uv} - \frac{3uv}{y} = 0$$

$$v\left(u' - \frac{3u}{y}\right) + v'u + \frac{y^3}{uv} = 0$$

$$\begin{cases} u' - \dfrac{3u}{y} = 0 & (1) \\ v'u + \dfrac{y^3}{uv} = 0 & (2) \end{cases}$$

Найдем $u \neq 0$ из (1):

$$u' - \frac{3u}{y} = 0$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{3u}{y}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{3\,dy}{y}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{3\,dy}{y}$$

$$\ln|u| = 3\ln|y|$$

$$u = |y|^3 \neq 0 \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), найдем v:

$$v' y^3 + \frac{y^3}{y^3 v} = 0$$

$$v' y^3 + \frac{1}{v} = 0$$

$$\frac{dv}{dy} y^3 = -\frac{1}{v}$$

$$v\,dv = -\frac{dy}{y^3}$$

$$\int v\,dv = -\int \frac{dy}{y^3} + C$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{y^{-2}}{-2} + C$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + C$$

$$v^2 = \frac{1}{y^2} + 2C$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C}$$

② (продолжение)

$x = uv$

$x = |y|^3 \sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C}$

$x = y^2 \sqrt{1 + 2Cy^2}$

Ответ: $x = y^2\sqrt{1+2Cy^2}$; $y = 0$

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
КР№2
БИЛЕТ№21

③ $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y \qquad y(1) = 0$

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ – однородное ОДУ 1-го порядка

$z = \frac{y}{x}$; $y = zx$

$y' = z'x + z$

$z'x + z = e^z + z$

$z'x = e^z$

$\frac{dz}{dx} x = e^z$

$\frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x}$

$\int e^{-z} dz = \int \frac{dx}{x} + C$

$-e^{-z} = \ln|x| + c \Rightarrow -e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + c$

Если $x = 1$ и $y = 0$:

$-1 = \ln|1| + c$

$C = -1$

Тогда получим: $\cancel{\ln|x| = -e^{\frac{y}{x}}} + 1 \quad \ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + 1$

Ответ: $\ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + 1$

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
КР№2
Билет№21

(4) $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1) \qquad y(2)=0$

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x^2(2x-1)}{x(x-1)}$$

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{(x-1)}$$ – линейное ОДУ 1-ого порядка

$y = uv; \quad y' = u'v + v'u$

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{(x-1)}$$

$$v\left(u' + \frac{u}{x(x-1)}\right) + v'u = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

$$\begin{cases} u' + \frac{u}{x(x-1)} = 0 \\ v'u = \frac{x(2x-1)}{x-1} \end{cases}$$

Найдем u:

$$u' + \frac{u}{x(x-1)} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-u}{x(x-1)}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{-dx}{x(x-1)}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-dx}{x(x-1)}; \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ x = \frac{1}{t} \\ dx = -t^{-2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-t\,dt}{t^2(\frac{1}{t}-1)} = -\int \frac{dt}{1-t} = \int \frac{d(1-t)}{1-t} =$$

$$= \ln|1-t| = \ln\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \ln\left|\frac{1-x}{x}\right|$$

(4) (продолжение)

~~$= \ln|1-t| = \ln t$~~

$= \ln|1-t| + C = \ln\left|1-\frac{1}{x}\right| + C$

Т.к ищем одно из решений u:

$\ln|u| = -\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|$

$$u = \frac{x}{x-1}$$

Найдём v:

$$v' u = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

$$v' \frac{x}{x-1} = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

$$v' = 2x-1$$

$$v = \int (2x-1)\,dx + C$$

$$v = x^2 - x + C$$

$y = uv$

$$y = \frac{x}{x-1}(x^2 - x + C) = \frac{x^2(x-1)}{x-1} + \frac{Cx}{(x-1)} = x^2 + \frac{Cx}{x-1}$$

Если $y=0$ и $x=2$:

$$0 = 4 + \frac{2C}{1}$$

$$2C = -4$$

$$C = -2$$

Тогда:

$$y = x^2 - \frac{2x}{x-1}$$

Ответ: $y = x^2 - \frac{2x}{x-1}$

ИУ7-23Б

МАСЛОВА

МАРИНА

ДМИТРИЕВНА

КР№2

БИЛЕТ№21