МОДУЛЬ 1

Множества, отношения, алгебры

В1. Множества, подмножества.
Способы определения мн-в.
Равенство мн-в.
Операции над мн-вами.
(объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение)
Методы док-ва теоретико-множественных тождеств.

Множество строго не определено, может быть объяснено на примерах.

Г. Кантор:
- Объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией и нашей мыслью
- Мн-во есть многое, мыслимое как единое.

Способы определения мн-в.

1) $A = \{x : P(x)\}$ $P(x)$ – характеристическое св-во или предикат

Предикат – высказывание, содержащее переменную или переменные
– логическая ф-я нелогических переменных

2) Перечислением

Например, $B = \{a, b, c\}$

Пустое мн-во: $\varnothing \rightleftharpoons \{x : F(x)\}$, где $(\forall x)\,(F(x) = \text{Л})$

Л – ложь

Универсальное мн-во: $U \rightleftharpoons \{x : T(x)\}$, где $(\forall x)\,(T(x) = \text{И})$

универсум. И – истина.

Если мн-во A состоит из элементов, принадлежащих некоторому другому мн-ву E, то A наз <u>подмножеством</u> мн-ва E.

$$A \subseteq B \rightleftharpoons (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

<u>Равенство мн-в.</u>

$$A = B \rightleftharpoons (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

$$\left(A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \,\&\, (B \subseteq A) \right)$$

2 мн-ва наз равными, если любой элемент x мн-ва A явл. эл. мн-ва B и наоборот.

<u>Операции над множествами</u>

<u>Объединение</u>

$$A \cup B \rightleftharpoons \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

<u>Пересечение</u>

$$A \cap B \rightleftharpoons \{x : x \in A \,\&\, x \in B\}$$

<u>Разность</u>

$$A \setminus B \rightleftharpoons \{x : x \in A \,\&\, x \notin B\}$$

<u>Симметрическая разность</u>

$$A \Delta B \rightleftharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x : x \in A \oplus x \in B\} =$$
$$= ((A \cup B) \setminus (A \cap B))$$

<u>Дополнение</u>

$$\overline{A} \rightleftharpoons \{x : x \notin A\} = U \setminus A$$

Методы док-в. теор-множественных тождеств.

~~1) Метод.~~

1) Метод 2^{х} включений

~~Основанная~~

Основан на $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \& (B \subseteq A)$

Доказывается, что из предположения, ~~что~~ ~~что~~ $x \in A$ (для любого x) следует, что $x \in B$, и наоборот, из предположения $x \in B$ следует, что $x \in A$.

2) Метод характеристических ф-ий

Характеристическая ф-я:

$$\chi_A(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad (x \in U)$$

$$A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B \Leftrightarrow (\forall x)(\chi_A(x) = \chi_B(x))$$

Т.е доказывая равенство хар-ких ф-ий доказываем равенство мн-в.

~~[illegible]~~

1) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

2) $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$

3) $\chi_{A \setminus B} = \chi_{A \cap \bar{B}} = \chi_A(1 - \chi_B)$

4) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$ (доказывается)

просмотри

5) $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B$ (доказывается)

СЕМ_1

3) Метод эквивалентных преобразований.

~~1) $A \cup B = B \cup A$.~~
~~2) $A \cap B = B \cap A$~~
~~3) $A \cup A = A \cap A = A$~~

Доказательство и использование св-в операций.

1) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

2) $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5) $A \cap \bar{A} = \varnothing$

$A \cup \bar{A} = U$

6) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

7) $A \Delta B = B \Delta A$

8) $A \Delta A = \varnothing$

9) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

10) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

11) $A \cup \varnothing = A$

12) $A \cap \varnothing = \varnothing$

~~[illegible]~~

13) $A \cap U = A$

14) $A \cup U = U$

15) $\bar{\bar{A}} = A$

16) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

17) $A \Delta B =$
$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

В2. НЕУПОРЯДОЧЕННАЯ ПАРА.
УПОРЯДОЧЕННАЯ ПАРА.
КОРТЕЖ.
ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МН-В.

$A \neq \varnothing$

$a, b \in A$

$\{a, b\}$ – неупорядоченная пара на мн-ве A.

$A, B \neq \varnothing$

$a \in A,\ b \in B$

$\{a, b\}$ – неупорядоченная пара на мн-вах A и B.

$A, B \neq \varnothing$

$a \in A,\ b \in B$

(a, b) – упорядоченная пара.
(определяется не только самими элементами, но и порядком, в котором они записаны)

$(a,b) = (c,d) \rightleftharpoons (a=c) \,\&\, (b=d)$

$(a,b) \neq (b,a)$

$(a,b) \rightleftharpoons \{\{a\}, \{a,b\}\}$

Док-во:

$\{\{a\}, \{a,b\}\}$ $\{\{c\}, \{c,d\}\}$

Равны, если:

1) $\{a\} = \{c\}$ и $\{a,b\} = \{c,d\}$ если $\{a\} = \{c\} \Rightarrow a = c \Rightarrow b = d$ ч.т.д.

2) $\{a\} = \{c,d\}$ и $\{a,b\} = \{c\}$ – невозможно
одноэл ≠ двухэл

Кортеж – обобщение понятия упорядоченной пары
(или упорядоченный n-набор)
(или — " — n-ка)

$A_1, A_2, \dots, A_n \neq \varnothing$, $n \geqslant 2$ (n - длина кортежа)

$(a_1, a_2, \dots, a_n) : (\forall i = \overline{1,n})\ (a_i \in A_i)$ - кортеж

характеризуется не только входящими в него элементами, но и порядком, в котором они перечисляются

Равенство кортежей

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \rightleftharpoons (\forall i = \overline{1,n})\ (a_i = b_i)$

(соответственно (по компонентно) совпадают)

Декартово (прямое) произведение.

$A \times B$ - декартово произведение

$A \times B \rightleftharpoons \{ (x, y) : x \in A,\ y \in B \}$

В общем случае:

Мн-во всех кортежей длины n на мн-вах $A_1, \dots, A_n$ наз. декартовым произведением мн-в. $A_1, \dots, A_n$.

$A_1 \times A_2 \times \dots A_n \rightleftharpoons \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : (\forall i = \overline{1,n})\ (x_i \in A_i) \}$

По опр: если хотя бы 1 сомножитель $= \varnothing$, то все произведение пустое.

Если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightleftharpoons A^n$ - n-ая декартова степень мн-ва A.

$A^1 \rightleftharpoons A$, $A^0 \rightleftharpoons \{\lambda\}$; λ - пустой кортеж, пустая последовательность

Если $|A| = m$, то $|A^n| = m^n$, при $n = 0$ $|A^0| = 1$

$A \times B \neq B \times A$.

В3. Отображения: область определения. Область значений.

Инъективное, сюръективное и биективное отображения

Частичное отображение.

Соответствие из A в B наз <u>отображением</u> из мн-ва A в мн-во B, если оно:

1) всюду определено;
2) функционально по 2ой компоненте

(начало в В4)

или

<u>Отображение</u> f из мн-ва A в мн-во B считается заданным, если каждому элементу $x \in A$ сопоставлен единственный элемент $y \in B$.

$f: A \to B$.

$(x, y) \in f$: $y = f(x)$ — образ элемента x при отображении f.

Мн-во A наз. <u>областью определения</u> отображения

$$A = D(f)$$

Мн-во всех $y \in B$, таких, что найдется $x \in A$, для которого $y = f(x)$, наз. <u>областью значений отображения f</u>.

Обозначение $R(f)$

$\left(f^{-1}(y) \rightleftharpoons \{x : f(x) = y\} \text{ — прообраз эл. } y \right)$

1) Если $f: A \to B$ функционально по 1-й координ., оно наз. <u>инъективным</u>

$(\forall y \in \mathbb{R}(f) \subseteq B)\,(\exists!\, x \in A)\,(y = f(x))$

каждый элемент обл. знач. имеет единствен. прообраз. $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

2) ~~Если $f: A \to B$ …~~

Если $R(f) = B$, что отображение f наз. <u>сюръективным</u>

$(\forall y \in B)\,(\exists\, x \in A)\,(y = f(x))$

3) Отображение, кот. одновременно инъективно и сюръективно наз. <u>биективным</u> / <u>биекцией</u>.

<u>Биекция</u> — взаимно однозначное соответствие

$(\forall y \in B)\,(\exists!\, x \in A)\,(y = f(x))$

Если образ определен не для каждого элемента мн-ва A, а для некоторых эл-ов этого мн-ва, то имеем дело с <u>частичным (условным)</u> <u>отображением</u>

$f: A \dot{\to} B$

В4 Соответствия.
График и граф соответствия,
область определения,
область значения.
Сечение соответствия.
Сечение соответствия по мн-ву.
Функциональность соответствия по компоненте.
Бинарные и n-арные отношения.
Связь между отношениями, соответствиями и отображениями.

$A, B \neq \emptyset$

Соответствие ρ из мн-ва A в мн-во B:

$$\rho \subseteq A \times B$$

График соответствия ρ из мн-ва A в мн-во B можно определить как мн-во C_ρ упорядоченных пар (x, y), таких, что $x \in A$, $y \in B$ и элементы x, y связаны соответствием ρ, т.е. $y \in \rho(x)$

Граф соответствия.

Одно из наглядных изображений соответствия между конечными мн-вами.

Для построения графа соответствия между мн-вами X и Y элементы каждого из мн-в изобр. точками на плоскости, после проводят стрелки от $x \in X$ к $y \in Y$, если пара (x, y) принадлежит данному соответствию.

Область определения соотв. $\rho \subseteq A \times B$:

$$D(\rho) \rightleftharpoons \{x : (\exists y \in B)((x, y) \in \rho)\}$$

мн-во всех первых компонент упорядоченных пар из ρ

Область значений соотв. $\rho \subseteq A \times B$:

$$R(\rho) \rightleftharpoons \{y : (\exists x \in A)((x, y) \in \rho)\}$$

мн-во всех вторых компонент упор. пар из ρ

Сечение соответствия ρ по эл-ту x_0:

$$\rho(x_0) \rightleftharpoons \{y : (x_0, y) \in \rho\}$$

Сечение соответствия ρ ~~по~~ $\subseteq A \times B$ по мн-ву $C \subseteq A$:

$$\rho(C) \rightleftharpoons \{y : (x, y) \in \rho,\ x \in C\}$$

Соотв. $\rho \subseteq A \times B$ наз. всюду определенным, если $D(\rho) = A$.

—— // —— функциональным по 2й компоненте, если для $\forall$ 2х пар $(x, y) \in \rho$ и $(x', y') \in \rho$, если $x = x' \Rightarrow y = y'$

—— // —— функциональным по 1й компоненте, —— // ——

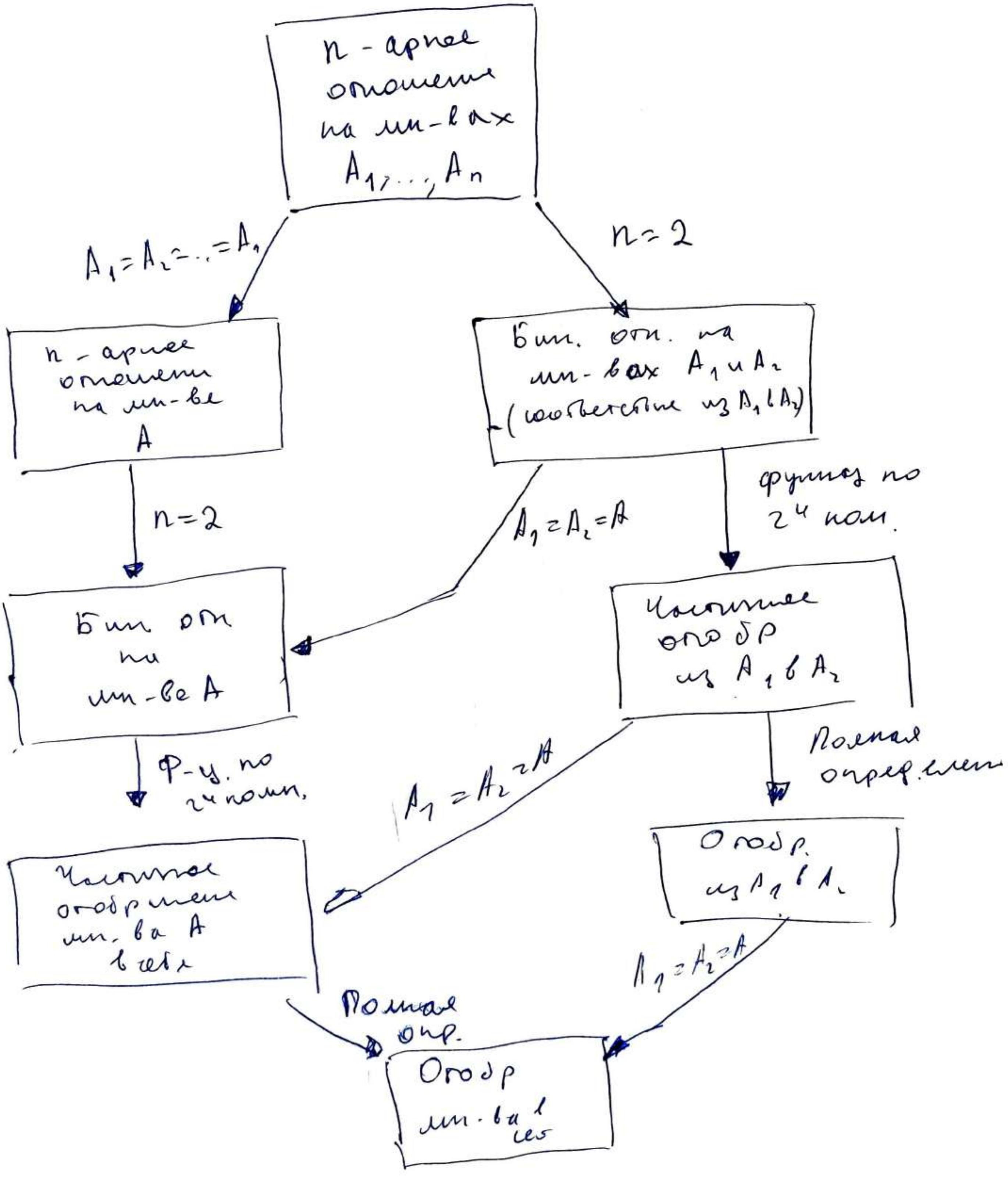
—— // ——, если $y = y' \Rightarrow x = x'$

n-арное (n-местное) отношение на мн-вах $A_1, A_2 \ldots A_n$ — это $\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$n \geqslant 1$

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то $\rho \subseteq A^n$, $n \geqslant 1$ — n-арное отношение на мн-ве A.

При $n=2$ — бинарное отношение на мн-вах $A_1 A_2$ (на мн-ве A).



В5 Композиция соответствий
Обратное соответствие
Их свойства. (с доказательством)

$\rho \subseteq A\times B, \quad \sigma \subseteq C\times D$

$\rho\circ\sigma \rightleftharpoons \{ (x,y) : (\exists z)((x,z)\in\rho \;\&\; (z,y)\in\sigma)\}$

$\rho \subseteq A\times B$

$\rho^{-1} \rightleftharpoons \{ (x,y) : (y,x)\in\rho\}$

Св-ва:

1° $\rho\circ(\sigma\circ\tau) = (\rho\circ\sigma)\circ\tau$

$(x,y)\in \rho\circ(\sigma\circ\tau) \Rightarrow (\exists z)((x,z)\in\rho \;\&\; (z,y)\in\sigma\circ\tau) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z)\in\rho \;\&\; (\exists k)((z,k)\in\sigma \;\&\; (k,y)\in\tau) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z)\in\rho \;\&\; (z,k)\in\sigma \;\&\; (k,y)\in\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,k)\in\rho\circ\sigma \;\&\; (k,y)\in\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\in(\rho\circ\sigma)\circ\tau$

Вторая часть аналогична

2° $\rho\circ(\sigma\cup\tau) = \rho\circ\sigma \cup \rho\circ\tau$

$(x,y)\in \rho\circ(\sigma\cup\tau) \Rightarrow (\exists z)((x,z)\in\rho \;\&\; (z,y)\in\sigma\cup\tau) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z)\in\rho \;\&\; ((z,y)\in\sigma \vee (z,y)\in\tau) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{(x,z)\in\rho \;\&\; (z,y)\in\sigma\} \vee \{(x,z)\in\rho \;\&\; (z,y)\in\tau\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\in\rho\circ\sigma \vee (x,y)\in\rho\circ\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\in(\rho\circ\sigma)\cup(\rho\circ\tau)$

Обратное док-во аналогично. ■

2.5° $(\sigma\cup\tau)\circ\rho = \sigma\circ\rho\cup\tau\circ\rho$.

3° $(\rho^{-1})^{-1}=\rho$

$(x,y)\in(\rho^{-1})^{-1} \Rightarrow (y,x)\in\rho^{-1} \Rightarrow (x,y)\in\rho$

$(x,y)\in\rho \Rightarrow (y,x)\in\rho^{-1} \Rightarrow (x,y)\in(\rho^{-1})^{-1}$

ч.т.д.

4° $(\rho\circ\sigma)^{-1}=\sigma^{-1}\circ\rho^{-1}$

~~$\rho\, (x,y)\in(\rho\circ\sigma)$~~ тр аналогия (2)

$\boxed{5° \text{ Если } \rho\subseteq A^2, \quad \rho\circ id_A = id_A\circ\rho = \rho}$

$(x,y)\in(\rho\circ id_A) \Rightarrow (\exists z)\,((x,z)\in\rho \;\&\; (z,y)\in id_A) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,z)\in\rho \;\&\; z=y \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y)\in\rho$

Композиция бин. отношения с самим собой наз. квадратом этого бин. отношения

$\rho^2 \rightleftharpoons \rho\circ\rho$

$\rho\subseteq A^2$

$id_A \rightleftharpoons \{(x,x) : x\in A\}$

5° Если $\rho \subseteq A^2$

$\rho \circ id_A = id_A \circ \rho = \rho$

$(x,y) \in \rho \circ id_A \Rightarrow (\exists z)\left((x,z) \in \rho \ \& \ (z,y) \in id_A\right) =$

$= (x,z) \in \rho \ \& \ \overset{\Rightarrow z = y}{(z,y) \in id_A} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \in \rho \ \& \ (y,y) \in id_A \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(x,y) \in \rho} \Rightarrow (x,x) \in id_A \ \& \ (x,y) \in \rho \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~~~ $\underline{(x,y) \in (id_A \circ \rho)}$

Обратное аналогично

мама

В6. Специальные св-ва бин. отношений на мн-ве

Р И С А Т

1) Рефлексивность
$(\forall x)(x\rho x)$, т.е $id_A \subseteq \rho$

2) Иррефлексивность
$id_A \cap \rho = \varnothing$

3) Симметричность
$(\forall x,y)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$, т.е $\rho = \rho^{-1}$

4) Антисимметричность
$(\forall x,y)\ (x\rho y \ \&\ y\rho x \Rightarrow x=y)$, т.е $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq id_A$

5) Транзитивность
$(\forall x,y,z)\ (x\rho y,\ y\rho z \Rightarrow x\rho z)$

В7 Классификация бин отн. на мн-ве:
эквивалентность,
толерантность,
порядок,
предпорядок,
строгий порядок.

Р_ С_ Т Эквивалентность

Р_ С_ _ толерантность

Р_ _ А Т порядок

Р_ _ _ Т предпорядок

строгий порядок

_ И _ А Т

В8 Отношение эквивалентности. Класс эквивалентности. Фактор-мн-во.

Бинарное отношение на некотором мн-ве A наз. <u>эквивалентностью</u>, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

<u>Класс экв-ти</u> эл x по отн ρ:

$$[x]_\rho \rightleftharpoons \{y : y \rho x\}$$

Теорема.

Классы эквивалентности попарно не пересекаются

Фактор-мн-во:

$$A/\rho \rightleftharpoons \{[x]_\rho : x \in A\}$$

Мн-во всех классов эквивалентности по отношению на фактом мн-во фактом

В9. Отношения предпорядка и порядка.
Наибольший,
максимальные,
наименьший,
минимальные элементы.
Точная нижняя и верхняя грани мн-ва

Предпорядок Р _ _ _ Т
Порядок Р _ _ А Т

Упорядоченным мн-вом наз мн-во A вместе с заданным на нем отношением порядка.

$\mathcal{A} = (A, \leq)$
носитель

Отношение несравнимости:
$x \asymp y \rightleftharpoons (x \nleq y) \& (y \nleq x)$

УМ наз линейно упор, если на нем нет несравнимых элементов.

Наибольшим элементом упорядоченного мн-ва $\mathcal{A} = (A, \leq)$ наз эл $a \in A$ такой, что $(\forall x \in A)(x \leq a)$

Наименьшим — // —
— // —
— // — $(\forall x \in A)(x \geq a)$

Максимальным ——— // ———

——— // ———

$$(\forall x \in A)\ (x \le a) \vee (x \asymp a)$$

Минимальным ——— // ———

——— // ———

$$(\forall x \in A)\ (x \ge a) \vee (x \asymp a)$$

~~Пусть $(A, \le)$ - упорядоченное мн-во и $B \subseteq A$.~~

~~Элемент $a \in A$ наз. верхней (нижней)~~

$\mathcal{A} = (A, \le)$ - уп. мн-во

$B \subseteq A$.

Верхний конус:

$$B^{\nabla} \rightleftharpoons \{ x : x \in A, (\forall b \in B)(b \le x) \}$$

Нижний конус:

$$B^{\Delta} \rightleftharpoons \{ x : x \in A, (\forall b \in B)(b \ge x) \}$$

Каждый эл-нт верхнего (нижнего) конуса мн-ва B наз верхней (нижней) гранью мн-ва B.

Если B^{∇} (B^{Δ}) имеет наименьший (наибольший) эл-нт его наз точной верхней (нижней) гранью мн-ва B.

B10

<u>Точная верхняя грань последовательности.</u>

<u>Индуктивное упорядоченное мн-во.</u>

<u>Теорема о неподвижной точке (с док-вом)</u>

<u>Пример вычисления неподвижной точки</u>

Элемент a упорядоченного мн-ва $(M, \leq)$ наз. <u>точной верхней гранью последовательности</u> $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, если он есть точная верхняя грань мн-ва всех членов последовательности

Или

$$\nu : \mathbb{N}_0 \to A$$

$$a_n = \nu(n)$$

$$\sup_{n \geq 0} a_n \rightleftharpoons \sup R(\nu)$$

Уп. мн-во $A = (A, \leq)$ наз индуктивно упорядоченным, если:

1) оно имеет наим эл.
2) любая неубывающая последовательность $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ имеет $\sup a_n$.

<u>Теорема 1</u>

Если отображение $f : A \to B$ непрерывно, то оно монотонно.

Теорема 2 (о неподвижной точке) | Определение стр 35 п. 86

Любое непрерывное отображение индуктивного упорядоченного мн-ва в себя имеет наименьшую неподвижную точку

Док-во:

$\mathcal{A} = (A, \leq)$ – ИУМ

$\mathbb{0}$ – наименьший элемент.

1) Построим последовательность: $\mathbb{0}, f(\mathbb{0}), f(f(\mathbb{0})), \ldots,$

(I) $f^n(\mathbb{0}), \ldots,$ где $f^n(x) \rightleftharpoons f(f^{n-1}(x))$, $n \geqslant 1$, $f^0(x) = x$.

2) Докажем, что 1 неубывает.

Т.к. $\mathbb{0}$ наим $\Rightarrow$ $\mathbb{0} \leq f(\mathbb{0})$

В силу Т1, ~~пос-ть~~ в силу монотонности f:

$f(\mathbb{0}) \leq f(f(\mathbb{0}))$ и т.д.

$(\forall n)\ (f^n(\mathbb{0}) \leq f^{n+1}(\mathbb{0}))$, т.е последовательность

не убывает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть точная верхняя грань.

3) Положим $a \rightleftharpoons \sup f^n(\mathbb{0})$.

Докажем, что это есть искомая ~~точка~~ неподвижная точка.

Вычислим $f(a) = f(\sup f^n(\mathbb{0})) = \sup f(f^n(\mathbb{0})) =$

$= \sup\limits_{n \geqslant 0} f^{n+1}(\mathbb{0}) = \sup\limits_{n \geqslant 1} f^n(\mathbb{0}) = a.$

если отбросить начальный член, то её точная верхняя грань не изменится.

a - неподвижная точка

(II)

4) Докажем, что полученная таким образом неподвижная точка будет наименьшей среди всех неподвижных точек.

Пусть $f(b) = b$ (для некоторого $b \in A$)

Имеем $\mathbb{0} \leq b$, $f(\mathbb{0}) \leq f(b) = b$

$(\forall n \geq 0)\ (f^n(\mathbb{0}) \leq b)$, т.е. b - верхняя грань $\{f^n(\mathbb{0})\}_{n \geq 0}$

И т.к. $a = \sup f^n(\mathbb{0})$, то $a \leq b$

Ч.т.д.

$\not\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ ~~.........~~

$x \in [0, 1)$ $([0,1), \leq)$

0 - наим эл-т.

$f^0(0) = 0$, $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(f(0)) = \frac{3}{8}$, $f(f(f(0))) = \frac{7}{16}, \ldots$

$f^n(0) = \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2}$