Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б

Лист 1 по курсу ИиДУ дата 11.06.2020

Билет № 11 задание 1

Определение.

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ называется линейно зависимой на интервале (a, b), если существуют $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ такие, что

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 \neq 0$$

и

$$\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_k\varphi_k(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

Определение

Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ наз. линейно независимой на интервале (a, b), если из $\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_k\varphi_k(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$

Теорема (о Вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка).

Пусть $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ – линейно независимая на (a, b) система решений уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(x)$.

Тогда $W[y_1, \ldots, y_n](x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$

Док-во:

Предположим, что $\exists\, x_0 \in (a, b)$ такой, что $W[y_1, \ldots, y_n](x_0) = 0$.

Тогда система

Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б
Лист 2 по курсу ИиДУ дата 11.06.2020
Билет № 11 задание 1

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n(x_0) = 0 \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевое решение $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$

Решение

$$y(x) = \lambda_1^* y_1(x) + \lambda_2^* y_2(x) + \ldots + \lambda_n^* y_n(x)$$

удовлетворяет начальному условию

$$y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Такому же начальному условию удовлетворяет нулевое решение и оно единственно $\Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) \equiv 0$, т.е. $\lambda_1^* y_1(x) + \lambda_2^* y_2(x) + \ldots + \lambda_n^* y_n(x) = 0, \forall x \in (a, b)$

Но тогда $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ - линейно зависимые на (a, b), что противоречит условию теоремы.

ч.т.д.

Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б

Лист 3 по курсу ИиДУ дата 11.06.2020

Билет № 11 задание 2

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x} = \left| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} & \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 4\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{2\,dt}{6t + 4(1-t^2)} = \int \frac{2\,dt}{6t + 4 - 4t^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{3t + 2 - 2t^2} = \int \frac{dt}{-(2t^2 - 3t - 2)} = \int \frac{dt}{-\left(2t^2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt2}\sqrt2\cdot\frac{3}{2}t - 2\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{-\left(2t^2 - 2\cdot\sqrt2\cdot\frac{3}{2\sqrt2}t + \left(\frac{3}{2\sqrt2}\right)^2 - \frac{25}{8}\right)} = \int \frac{dt}{\frac{25}{8} - \left(\sqrt2 t - \frac{3}{2\sqrt2}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt2}\, d\left(\sqrt2 t - \frac{3}{2\sqrt2}\right)}{\frac{25}{8} - \left(\sqrt2 t - \frac{3}{2\sqrt2}\right)^2} = \left| u = \sqrt2 t - \frac{3}{2\sqrt2} \right| = \frac{1}{\sqrt2}\int \frac{du}{\frac{25}{8} - u^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt2}\int \frac{du}{u^2 - \frac{25}{8}} = -\frac{1}{\sqrt2}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{25}{8}}}\ln\left|\frac{u - \sqrt{\frac{25}{8}}}{u + \sqrt{\frac{25}{8}}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{\sqrt2}}\,\frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt2}}{\cancel{2}\cdot 5}\ln\left|\frac{u - \frac{5}{2\sqrt2}}{u + \frac{5}{2\sqrt2}}\right| + C = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt2 t - \frac{3}{2\sqrt2} - \frac{5}{2\sqrt2}}{\sqrt2 t - \frac{3}{2\sqrt2} + \frac{5}{2\sqrt2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt2 t - \frac{8}{2\sqrt2}}{\sqrt2 t + \frac{2}{2\sqrt2}}\right| + C = -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt2 t - \frac{4}{\sqrt2}}{\sqrt2 t + \frac{1}{\sqrt2}}\right| + C =$$

Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б

Лит 4 по курсу ИиАУ дата 11.06.2020

Билет № 11 задание 2

$$= -\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2t-4}{2t+1}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2t+1}{2t-4}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-4}\right| + C$$

Студент <u>Маслова Марина</u> группа <u>ИУ7-23Б</u>
Лист <u>5</u> по курсу <u>ИиДУ</u> дата <u>11.06.2020</u>
Билет № <u>11</u> задание <u>4</u>

$$y'' - 7y' + 6y = 3e^x + 14xe^{-x}; \quad y\big|_{x=0} = 0, \; y'\big|_{x=0} = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 6$$

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$$

Правая часть представляет сумму ф-ий вида:
$$b(x) = e^{\alpha x}\left[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x\right]$$

1) $b(x) = 3e^x$

$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_0(x) = 3,\ Q_0(x) = 0,\ m = 0,\ \lambda = 1$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

$$y_{чн1} = Axe^x$$

Найдем A:

$$y_{чн1}' = Ae^x(1+x)$$
$$y_{чн1}'' = Ae^x(2+x)$$

Подставляем:

$$Ae^x(2+x) - 7Ae^x(1+x) + 6Axe^x = 3e^x$$
$$A(2+x) - 7A(1+x) + 6Ax = 3$$
$$2A + Ax - 7A - 7Ax + 6Ax = 3$$
$$-5A = 3$$

Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б
Лист 6 по курсу ИиДУ дата 11.06.2020
Билет № 11 задание 4

$$A = -\frac{3}{5} \Rightarrow y_{чн1} = -\frac{3}{5} x e^{x}$$

2) $b(x) = 14 e^{-x} x$

$\alpha = -1, \ \beta = 0, \ P_1(x) = 14x, \ Q_0(x) = 0, \ m = 1 \Rightarrow$

$\lambda = -1$ – не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow$

$$y_{чн2} = e^{-x}(Ax + B)$$

Найдем A и B:

$$y'_{чн2} = -Axe^{-x} - Be^{-x} + Ae^{-x}$$

$$y''_{чн2} = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} + Be^{-x}$$

Подставляем:

$$-2Ae^{-x} + Axe^{-x} + Be^{-x} - 7(-Axe^{-x} - Be^{-x} + Ae^{-x}) + $$
$$+ 6e^{-x}(Ax + B) = 14xe^{-x}$$

$$-2Ae^{-x} + Axe^{-x} + Be^{-x} + 7Axe^{-x} + 7Be^{-x} - 7Ae^{-x} +$$
$$+ 6Axe^{-x} + 6Be^{-x} = 14xe^{-x}$$

$$\begin{cases} A + 7A + 6A = 14 \\ -2A + B + 7B - 7A + 6B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 14A = 14 \\ -5A + 14B = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{5}{14} \end{cases}, \quad y_{чн2} = e^{-x}\left(x + \frac{5}{14}\right)$$

$$y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} - \frac{3}{5} x e^{x} + e^{-x}\left(x + \frac{5}{14}\right)$$

$$y'_{он} = C_1 e^{x} + 6C_2 e^{6x} - \frac{3}{5} e^{x} - \frac{3}{5} x e^{x} - xe^{-x} + \frac{9}{14} e^{-x}$$

Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б
Лист 7 по курсу ИиДУ дата 11.06.2020
Билет N 11 задание 4

Подставляем

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + \frac{5}{14} \\ 0 = C_1 + 6C_2 - \frac{3}{5} + \frac{9}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{21}{50} \\ C_2 = \frac{11}{175} \end{cases}$$

Ответ. $y = -\frac{21}{50}e^{x} + \frac{11}{175}e^{6x} - \frac{3}{5}xe^{x} + e^{-x}\left(x + \frac{5}{14}\right)$

Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б
Лист 8 по курсу ИиДУ дата 11.06.2020
Билет № 11 задание 5

$y^{V} + 64y'' = x^5 - 12x\cos x - 2\sin x + xe^{-4x}$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^5 + 64\lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^3 + 64) = 0$

$\lambda_{1,2} = 0$

$\lambda_3 = -4$

$\lambda_{4,5} = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

$y_{oo} = C_1 + C_2x + C_3e^{-4x} + C_4e^{2x}\cos(2\sqrt{3}x) + C_5e^{2x}\sin(2\sqrt{3}x)$

Правая часть представляет сумму ф-ий вида:

$b(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x]$

1) $b(x) = x^5$

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_5(x) = x^5$, $Q_0(x) = 0$, $m = 5$, $\lambda = 0$ - корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 2$:

$y_{чн1} = x^2(A_1x^5 + B_1x^4 + D_1x^3 + E_1x^2 + F_1x + G_1)$

2) $b(x) = -12x\cos x - 2\sin x$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1(x) = -12x$, $Q_0(x) = -2$, $m = 1$,

$\lambda = \pm i$ - не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow$
$\Rightarrow k = 0$

$y_{чн2} = (A_2x + B_2)\cos x + (D_2x + E_2)\sin x$

3) $b(x) = xe^{-4x}$

$\alpha = -4$, $\beta = 0$, $P_1(x) = x$, $Q_0(x) = 0$, $m = 1$, $\lambda = -4$ - корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

Студент Маслова Мария группа ИУ7-23Б
Лист 9 по курсу ИиДУ дата 11.06.2020
Билет № 11 задание 5

$y_{чн3} = xe^{-4x}(A_3x + B_3)$

Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2x + C_3e^{-4x} + C_4e^{2x}\cos(2\sqrt{3}x) + C_5e^{2x}\sin(2\sqrt{3}x) +$
$+ x^2(A_1x^5 + B_1x^4 + D_1x^3 + E_1x^2 + F_1x + G_1) + (A_2x + B_2)\cos x +$
$+ (D_2x + E_2)\sin x + xe^{-4x}(A_3x + B_3)$

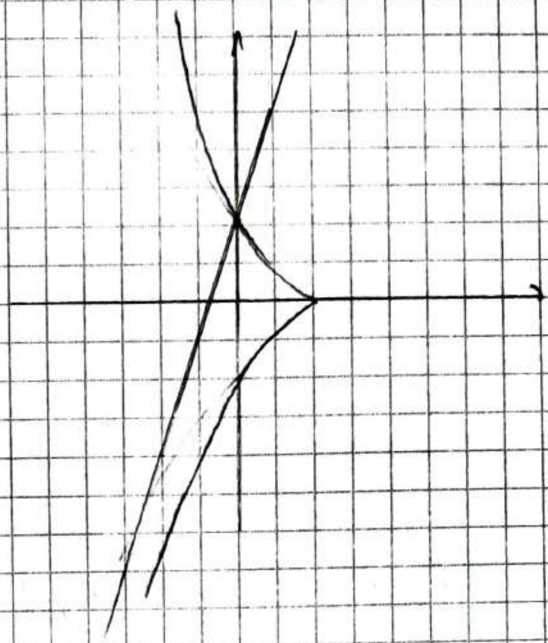
Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б

Лист ____ по курсу ИиАУ дата 11.06.2020

Билет № 11 задание 3

$y^2 = (1-x)^3$

$y = 1+3x$



Найдем точки пересечения

$y = \sqrt{(1-x)^3}$

$\sqrt{(1-x)^3} = 1+3x$

$x_1 = 0$

$y = -\sqrt{(1-x)^3}$

$-\sqrt{(1-x)^3} = 1+3x$

$x_2 = -3$

$\cancel{A = \int_{x_2}^{x_1}}$ $L = \int_{-3}^{1} \sqrt{1 + \left(-\sqrt{(1-x)^3}\right)'}\, dx + \int_{0}^{1} \sqrt{1 + \left(\sqrt{(1-x)^3}\right)'}\, dx =$

$= \int_{-3}^{1} \sqrt{1 + \frac{3\sqrt{-(x-1)^3}}{2-2x}}$

Студент <u>Маслова Марина</u> группа <u>ИУ7-23Б</u>
Лист ________ по курсу <u>ИиДУ</u> дата <u>11.06.2020</u>
Билет № <u>11</u> задание <u>4</u>

$y'' - 7y' + 6y = 3e^{x} + 14xe^{-x}$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 6$

$y_{оо} = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$

Будем искать решение в виде:

$y_{он} = C_1(x)e^{x} + C_2(x)e^{6x}$

где $C_1'(x)e^{x} + C_2'(x)e^{6x} = 0$

$C_1'(x)e^{x} + 6C_2'(x)e^{6x} = 3e^{x} + 14xe^{-x}$

Решим методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{6x} \\ e^{x} & 6e^{6x} \end{vmatrix} = 6e^{6x}e^{x} - e^{x}e^{6x} = 5e^{7x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{6x} \\ 3e^{x} + 14xe^{-x} & 6e^{6x} \end{vmatrix} = -(3e^{7x} + 14xe^{5x})$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & 3e^{x} + 14xe^{-x} \end{vmatrix} = 3e^{2x} + 14x$$

$$\cancel{C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3e^{7x} + 14xe^{5x}}{5e^{7x}} = -\frac{3}{5} - \frac{14}{5}e\,x^{-2x}}$$

Студент Маслова Марина группа ИУ7-23Б

Лист ______ по курсу ИнАУ дата 11.06.2020

Билет № 11 задание 4

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3e^{7x} + 14xe^{5x}}{5e^{7x}} = -\frac{3}{5} - \frac{14}{5} \cdot xe^{-2x}$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3e^{2x} + 14x}{5e^{7x}} = \frac{3}{5}e^{-5x} + \frac{14}{5}xe^{-7x}$$

$$C_1(x) = \int\left(-\frac{3}{5} - \frac{14}{5}xe^{-2x}\right)dx = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}xe^{-2x} +$$

$$+ \frac{7}{10}e^{-2x} + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = \int\left(\frac{3}{5}e^{-5x} + \frac{14}{5}xe^{-7x}\right)dx = -\frac{3}{25}e^{-5x} - \frac{2x}{5}e^{-7x} -$$

$$- \frac{2}{35}e^{7x} + \tilde{C}_2$$

Подставляем:

$$y_{он} = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}xe^{-2x} + \frac{7}{10}e^{-2x} + \tilde{C}_1\right)e^x + \left(-\frac{3}{25}e^{-5x} - \frac{2}{5}xe^{-7x}\right.$$