Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

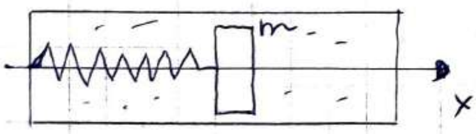
Экзаменационный лист

«26» июня 2020 г. | дисциплина Физика
начало 09 : 05 | билет № 1 группа ИУ7-23Б
окончание 09 : 55 | студент Маслова Марина Дмитриевна
оценка | экзаменатор Кауц Владимир Леонидович подпись

1. Свободные затухающие колебания. Дифференциальное уравнение (вывод на примере любой колебательной системы с вязким трением и квазиупругой силой.) Уравнение затухающих колебаний. Частота свободных затухающих колебаний.

~~Свободные колебания и [illegible]~~

Свободные затухающие колебания — это такие свободные колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.



Рассмотрим движение тела массой m в вязкой среде под действием квазиупругой силы вблизи положения равновесия.

Будем считать, что $\vec{F}_{сопр} = -r\vec{v}$, где r — коэффициент сопротивления

Тогда по II з. Ньютона:

$$ma_x = -kx - rv$$

Экзаменационный лист

«26» июня 2020 г.	дисциплина Физика
начало 09 : 05	билет № 1 группа ИУ7-23Б
окончание 09 : 55	студент Маслова Марина Дмитриевна
оценка	экзаменатор Кауц Владимир Леонидович подпись

Или

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = 0$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \quad |:m$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Обозначим $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Получаем:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

Найдем решение в виде $x = e^{\lambda t}$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Тогда решение ур-я имеет вид:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right),$$

где C_1 и C_2 - постоянные коэффициенты

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Экзаменационный лист

« 26 » июня 20 20 г. | дисциплина Физика

начало 09 : 05 | билет № 1 группа ИУ7-23Б

окончание 09 : 55 | студент Маслова Марина Дмитриевна

оценка ______ | экзаменатор Кауц Владимир Леонидович ______ подпись

Используя формулу Эйлера:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \text{, где } i = \sqrt{-1}$$

Получаем, что при $\beta^2 - \omega_0^2 > 0$ решение не описывает колебаний

$$\beta^2 - \omega_0^2 < 0$$

Положим $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Тогда $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-\omega^2} = i\omega$

Решение имеет вид:

$$e^{-\beta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) = e^{-\beta t}\left(C_1 (\cos \omega t + \sin \omega t) + \right.$$

$$\left. + C_2 (\cos(-\omega t) + i \sin \cancel{(-\omega t)})\right) = e^{-\beta t}\left((C_1 + C_2)\cos \omega t + \right.$$

$$\left. + (C_1 - C_2) i \sin(\omega t)\right) \ominus$$

Положив $C_1 + C_2 = A_0 \sin \varphi_0$ $i(C_1 - C_2) = A_0 \cos \varphi_0$,

получаем

$$\ominus \cancel{A_0}\, e^{-\beta t}\left(A_0 \sin \varphi_0 \cos \omega t + A_0 \cos \varphi_0 \sin \omega t\right) =$$

$$= A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$ – уравнение свободных затухающих колебаний.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Экзаменационный лист

« 26 » июня 2020 г. | дисциплина Физика

начало 09 : 05 | билет № 1 группа ИУ7-23Б

окончание 09 : 55 | студент Маслова Марина Дмитриевна

оценка | экзаменатор Кауц Владимир Леонидович ______ подпись

Эти ур-ия описывают свободные колебания циклической частоты ω, которые затухают с течением времени

Циклическая частота свободных затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Экзаменационный лист

«26» июня 2020 г.	дисциплина Физика
начало 09 : 05	билет № 1 группа ИУ7-23Б
окончание 09 : 55	студент Маслова Марина Дмитриевна
оценка	экзаменатор Кауц Владимир Леонидович подпись

2. Основное уравнение МКТ идеального газа (с выводом). Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул. (с выводом)

Основное уравнение МКТ описывает связь макроскопических параметров с микроскопическими характеристиками.

Выведем основное ур-е МКТ.
Возьмем кубический сосуд со стороной L, заключим в него N молекул идеального газа.

Рассмотрим одну молекулу массой m, пусть
$\vec{v}_0$ - скорость молекулы до удара со стенкой сосуда
$\vec{v}$ - скорость - после.

Т.к молекулы движутся хаотично, и скорости их одинаковы, будем рассматривать среднюю энергию молекул

Т.к удар упругий, $\vec{v}_{0x} = -\vec{v}_x$

По определению среднее давление $\overline{P} = \dfrac{F_n}{S}$, где

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Экзаменационный лист

«26» июня 20 20 г. | дисциплина Физика
начало 09 : 05 | билет № 1 группа ИУ7-23Б
окончание 09 : 55 | студент Маслова Марина Дмитриевна
оценка | экзаменатор Кауц Владимир Леонидович ______ подпись

$\overline{F}_n$ – средняя сила нормального давления всех молекул на стенку сосуда

$$\overline{F}_n = \overline{F}_x \quad (\text{т.к стенка} \perp \text{оси } X).$$

По II з. Ньютона:

$$\overline{F}_x = \frac{\Delta \overline{p}_x}{\Delta t} \cdot N,$$

где $\Delta \overline{p}_x$ – изменение импульса за время между двумя последовательными соударениями о стенку.

$$\Delta \overline{p}_x = m\overline{v}_{0x} - (-m \cdot \overline{v}_x) = 2m\overline{v}_x \qquad \Delta t = \frac{2L}{\overline{v}_x}$$

$$\overline{F}_x = \frac{2m\overline{v}_x^2}{2L} \cdot N = \frac{m\overline{v}_x^2}{L}$$

Тогда $\overline{p} = \frac{m\overline{v}_x^2}{SL} N = \frac{m\overline{v}_x^2}{V} N$, где V – объем сосуда
N – число молекул

Т.к молекулы движутся хаотично $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z}$ – все направления равновероятны

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \Rightarrow \overline{v^2} = 3\overline{v_x} \Rightarrow \overline{v_x}^2 = \frac{1}{3}\overline{v}^2$$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Экзаменационный лист

«26» июня 2020 г. | дисциплина Физика

начало 09 : 05 | билет № 1 группа ИУ7-23Б

окончание 09 : 55 | студент Маслова Марина Дмитриевна

оценка | экзаменатор Кауц Владимир Леонидович ______ подпись

$$\bar{p} = \frac{1}{3}\frac{m\bar{v}^2}{V}\cdot N$$

$$\bar{p} = \frac{1}{3} m n \bar{v}^2$$ – основное уравнение МКТ.

$$\bar{E}_к = \frac{m\bar{v}^2}{2}$$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул

Подставляя:

$$\bar{p} = \frac{2}{3} n \bar{E}_к$$

$$\left.\begin{aligned} p &= nkT \\ p &= \frac{2}{3} n \bar{E}_к \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{n}kT = \frac{2}{3}\cancel{n}\bar{E}_к \Rightarrow \bar{E}_к = \frac{3}{2}kT$$ –

средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы

Экзаменационный лист

«26» июня 2020 г. дисциплина Физика

начало 09 : 05 билет № 1 группа ИУ7-23Б

окончание 09 : 55 студент Маслова Марина Дмитриевна

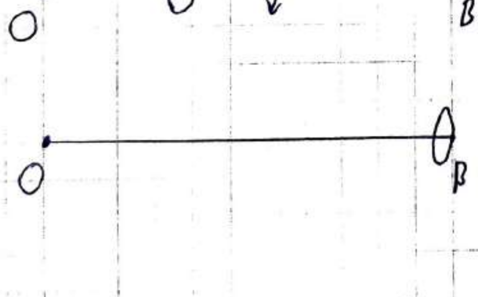
оценка ____ экзаменатор Кауц Владимир Леонидович ____ подпись

3. Малое колечко массой m было надето на тонкий стержень OB и находилось на расстоянии $l/4$ от точки O. Длина стержня l, масса M. Стержень вращался с частотой ν_0 вокруг оси, проходящей через точку O, перпендикулярной плоскости рисунка.
Какой стала частота вращения после того, как колечко сместилось к дальнему от оси краю стержня? На какую величину изменилась при этом полная механическая энергия системы?

Дано:
m
l $\frac{l}{4}$
M
ν_0

$\nu = ?$
$\Delta E = ?$

Решение



Момент инерции системы в первоначальном положении (по теореме Штейнера)

$$I_0 = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{Ml^2}{3} + \frac{ml^2}{16}$$

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Экзаменационный лист

«26» июня 2020 г.

начало 09 : 05

окончание 09 : 55

оценка

дисциплина Физика

билет № 1 группа ИУ7-23Б

студент Маслова Марина Дмитриевна

экзаменатор Кауц Владимир Леонидович подпись

$$I_1 = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + ml^2 = \frac{Ml^2}{3} + ml^2$$

По закону сохранения момента импульса:

$$I_0 w_0 = I_1 w_1 \qquad (w_0 = 2\pi\nu_0, \quad w_1 = 2\pi\nu_1)$$

$$\left(\frac{Ml^2}{3} + \frac{ml^2}{16}\right)\cancel{2\pi}\nu_0 = \left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)\cdot\cancel{2\pi}\nu_1$$

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{\frac{M}{3} + \frac{m}{16}}{\frac{M}{3} + m} = \nu_0 \frac{16M + 3m}{16M + 48m}$$

$$\Delta E = W_{кин0} - W_{кин1} = \frac{I_0 w_0^2}{2} - \frac{I_1 w_1^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{Ml^2}{3} + \frac{ml^2}{16}\right)4\pi^2\nu_0^2 - \left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)\left(2\pi\nu_0 \frac{16M+3m}{16M+48m}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{4\pi^2\nu_0^2 l^2}{2}\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{16} - \left(\frac{M}{3} + m\right)\left(\frac{16M+3m}{16M+48m}\right)^2\right) =$$

$$= 2\pi^2\nu_0^2 l^2\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{16} - \cancel{\left(\frac{M}{3} + m\right)}\frac{\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{16}\right)^2}{\left(\frac{M}{3} + m\right)^{\cancel{2}}}\right) =$$

$$= 2\pi^2 l^2\nu_0^2\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{16}\right)\frac{15m}{\frac{M}{3} + m}$$

Ответ: $\nu_1 = \nu_0 \frac{16M + 3m}{16M + 48m}$; $\Delta E = 2\pi^2 l^2\nu_0^2\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{16}\right)\frac{15m}{\frac{M}{3} + m}$