

5.)

Докажите тождество $(A \setminus B) \Delta (A \cap B) = A$
методом характеристических функций.

$$\begin{aligned} \chi_{(A \setminus B) \Delta (A \cap B)} &= \chi_{A \setminus B} + \chi_{A \cap B} - 2 \chi_{A \setminus B} \chi_{A \cap B} = \\ &= \chi_A (1 - \chi_B) + \chi_A \chi_B - 2 \chi_A (1 - \chi_B) \chi_A \chi_B = \\ &= \chi_A - \cancel{\chi_A \chi_B} + \cancel{\chi_A \chi_B} - 2 \cancel{\chi_A \chi_B} + 2 \cancel{\chi_A \chi_B} = \\ &= \chi_A \end{aligned}$$

$$\chi_A = \chi_A$$

Характеристические функции левой и правой частей совпадают \Rightarrow тождество верно.

ч.т.д.

6) Решить в полукольце $S = (\mathbb{Z}_{200}, +, \cdot)$ систему ур-ий:

$$\begin{cases} x_1 = 4x_1 + 25x_2 + 40x_3 + 100 \\ x_2 = 25x_1 + 5x_2 + 50x_3 + 10 \\ x_3 = 50x_1 + 25x_2 + 40x_3 + 25 \end{cases}$$

$$x_1 = 4^* \cdot (25x_2 + 40x_3 + 100)$$

$$x_1 = 25x_2 + 40x_3 + 100$$

Подставляем во 2-е и 3-е уравнения:

$$\begin{cases} x_2 = 25(25x_2 + 40x_3 + 100) + 5x_2 + 50x_3 + 10 \\ x_3 = 50(25x_2 + 40x_3 + 100) + 25x_2 + 40x_3 + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 25x_2 + 200x_3 + 100 + 5x_2 + 50x_3 + 10 \\ x_3 = 50x_2 + 200x_3 + 100 + 25x_2 + 40x_3 + 25 \end{cases}$$

ИУ7-33Б

МАСЛОВА

МАРИНА

АМИТРИЕВНА

РК №1

БИЛЕТ №8

⑥ (продолжение)

ИУ7-33Б

МАСЛОВА

МАРИНА

АМИТРИЕВНА

РК №1

БИЛЕТ №8

$$\begin{cases} X_2 = 5X_2 + 50X_3 + 10 \\ X_3 = 25X_2 + 40X_3 + 25 \end{cases}$$

$$X_2 = 5 \cdot (50X_3 + 10)$$

$$X_2 = 50X_3 + 10$$

$$X_3 = 25(50X_3 + 10) + 40X_3 + 25$$

$$X_3 = 50X_3 + 50 + 40X_3 + 25$$

$$X_3 = 10X_3 + 25$$

$$X_3 = 25$$

$$X_2 = 50 \cdot 25 + 10 = 50 + 10 = 10$$

$$X_1 = 25 \cdot 10 + 40 \cdot 25 + 100 = 50 + 200 + 100 = 50 + 100 = 50$$

$$X_1 = 50; \quad X_2 = 10; \quad X_3 = 25$$

Проверка:

$$1) 4 \cdot 50 + 25 \cdot 10 + 40 \cdot 25 + 100 = 100 + 50 + 200 + 100 = 50$$

верно!

$$2) 25 \cdot 50 + 5 \cdot 10 + 50 \cdot 25 + 10 = 50 + 10 + 50 + 10 = 10$$

верно!

$$3) 50 \cdot 50 + 25 \cdot 10 + 40 \cdot 25 + 25 = 50 + 50 + 200 + 25 = 25$$

верно!

Ответ: $X_1 = 50; \quad X_2 = 10; \quad X_3 = 25$

⑥ Второе уравнение:

$$\begin{cases} x_1 = 10x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 50 \\ x_2 = 4x_1 + 4x_2 + 20x_3 + 20 \\ x_3 = 5x_1 + 2x_2 + 25x_3 + 10 \end{cases}$$

$$x_1 = 10^* (25x_2 + 20x_3 + 50)$$

$$x_1 = 25x_2 + 20x_3 + 50$$

Подставляем в 2-е и 3-е уравнения:

$$\begin{cases} x_2 = 4(25x_2 + 20x_3 + 50) + 4x_2 + 20x_3 + 20 \\ x_3 = 5(25x_2 + 20x_3 + 50) + 2x_2 + 25x_3 + 10 \end{cases}$$

Приводим к нормальному виду:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_2 + 20x_3 + 20 \\ x_3 = 50x_2 + 5x_3 + 10 \end{cases}$$

$$x_2 = 2^* (20x_3 + 20)$$

$$x_2 = 20x_3 + 20$$

$$x_3 = 50(20x_3 + 20) + 5x_3 + 10$$

$$x_3 = 5x_3 + 10$$

$$x_3 = 10$$

$$x_2 = 20 \cdot 10 + 20 = 20 + 20 = 20$$

$$x_1 = 25 \cdot 20 + 20 \cdot 10 + 50 = 100 + 20 + 50 = 10$$

Проверка:

$$1) 10 \cdot 10 + 25 \cdot 20 + 20 \cdot 10 + 50 = 10 + 100 + 20 + 50 = 10 \quad \text{верно!}$$

$$2) 4 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 20 \cdot 10 + 20 = 20 + 20 + 20 + 20 = 20 \quad \text{верно!}$$

$$3) 5 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 25 \cdot 10 + 10 = 10 + 20 + 50 + 10 = 10 \quad \text{верно!}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 10, x_2 = 20, x_3 = 10$$

ИУ7-33Б

МАСЛОВА

МАРИНА

АМИТРИЕВНА

РКН1

БИЛЕТ № 8

⑦ Док-н, что для произвольной ф-ии f и любых множеств A и B имеет место включение:

$$f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$$

При каких условиях включение превращается в равенство?

ИУТ-33Б

МАСЛОВА

МАРИНА

АМИТРИЕВНА

РК №1

БИЛЕТ №8

Пусть $f: X \rightarrow Y$, $A, B \subseteq X$

~~Докажем, что $(\forall y) (y \in f(A) \setminus B)$~~

Докажем, что $(\forall y) (y \in f(A) \setminus f(B)) \Rightarrow y \in f(A \setminus B)$

$$y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cap \overline{f(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \text{ и } y = f(x) \in \overline{f(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A, y = f(x) \text{ и } x \in \overline{B}, y = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \in A \cap \overline{B}) / y = f(x) \Rightarrow (x \in A \setminus B) / y = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = f(x) \in f(A \setminus B) \Rightarrow y \in f(A \setminus B)$$

ч.т.д.

При $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ включение превращается в равенство.