Задача 2.7 Вариант 11

Дано:

R_0

R

I

$\mu = \dfrac{R^n + r^n}{2R^n}$

$\dfrac{R_0}{R} = \dfrac{2}{1}$

$n = 2$

$B(r)$ — ?

$H(r)$ — ?

$J(r)$ — ?

$i'_{внутр}$ — ?

$i'_{внеш}$ — ?

$j'_{об}(r)$ — ?

L_h — ?

1) С учетом $\cancel{\frac{R_0}{R} = \frac{2}{1}}$ и $n = 2$

$$\mu(r) = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2R^2} \qquad (1)$$

2) Найдем напряженность поле $\vec{H}$ внутри коаксиального кабеля, воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}) = I \qquad (2)$$

В качестве контура интегрирования L выбираем одну из окружностей радиусом $r \in (R; R_0)$, в которой модуль вектор $\vec{H}$ ~~...~~ направлен по нас и пост.

Тогда получаем:

$$H\, 2\pi r = I$$

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}} \qquad (3)$$

$$\frac{I\, 2\pi R}{2\pi r\, I} = \frac{R}{r}$$

$r \in (R; R_0)$

$$\frac{\cancel{\mu_0 I}(R^2+r^2)\cancel{4\pi} R^3}{\cancel{4\pi} R^2 r \cdot \cancel{\mu_0 I} R R^2} = \frac{(R^2+r)R^3}{2R^4 r} = \frac{(R^2+r^2)}{2Rr} = \frac{2R^2}{2R^2} = 1$$

$$\frac{5R^2}{3R^2}$$

3) Для линейных и изотропных магнетиков вектор напр.м.п. $\vec{H}$ и вектор магн.ин. B связи соотношением:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \qquad (4)$$

С учетом (1) и (3):

$$B = \mu_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{r^2}{2R^2}\right) \cdot \frac{I}{2\pi r} = \qquad (5)$$

$$= \boxed{B = \frac{\mu_0 I (R^2 + r^2)}{4\pi R^2 r}} \qquad (6)$$

$$r \in (R, R_0)$$

4) Вектор намагниченности имеет вид:

$$\vec{J} = (\mu - 1)\vec{H} \qquad (7)$$

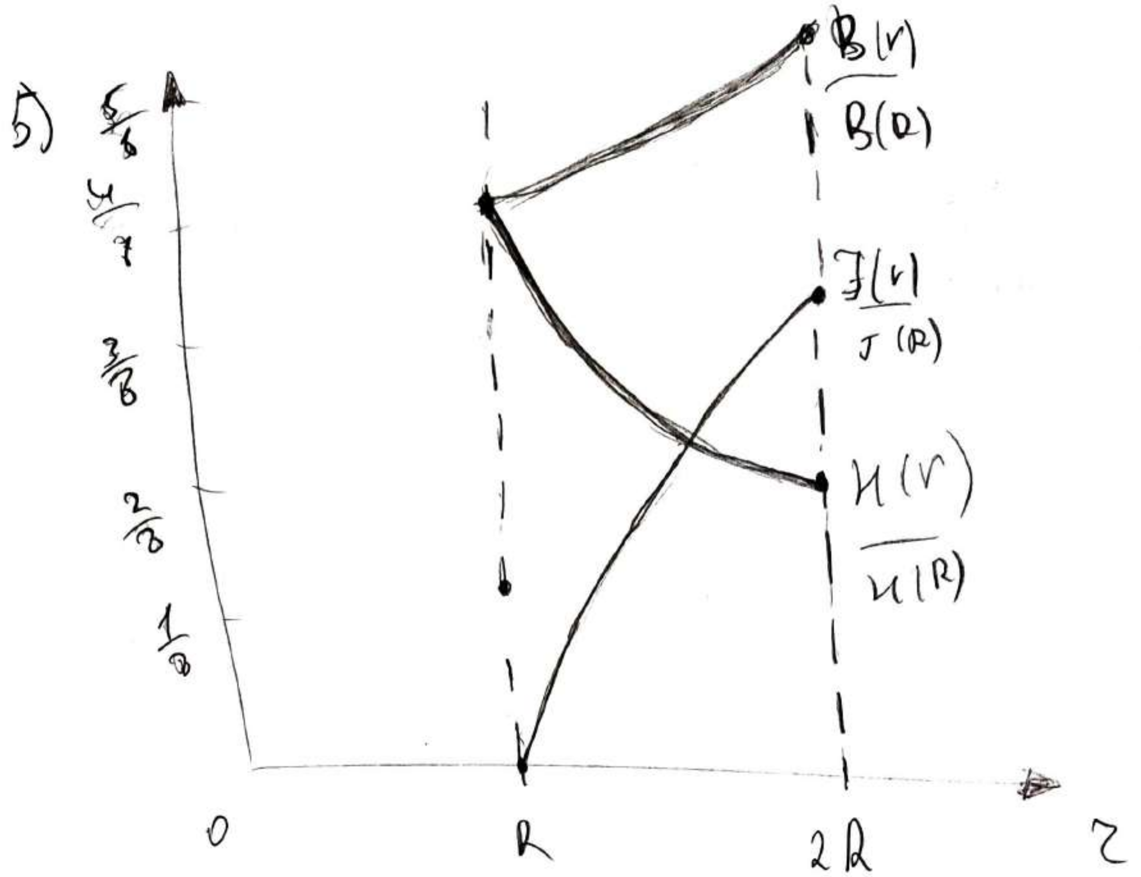
Используя соотношения (3) и (1), имеем:

$$\vec{J} = \left(\frac{R^2 + r^2}{2R^2} - 1\right) \cdot \frac{I}{2\pi r} = \frac{(r^2 - R^2) I}{4\pi R^2 r}$$

$$\boxed{J = \frac{I (r^2 - R^2)}{4\pi R^2 r}} \qquad (8)$$

$$\frac{I (r^2 - R^2)}{4\pi R^2 r \ \cancel{8} I (R^2 - R^3)}$$

$$J = \frac{r^2 - R^2}{4Rr} = J = \frac{1}{\cancel{4\pi}}\left(\cancel{\ } \frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right)$$



$$H(R) = \frac{I}{2\pi R}$$

$$B(R) = \frac{\mu_0 I (R^2 + R^2)}{4\pi R^3} = \frac{2\mu_0 I R^2}{4\pi R^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$J(R) = 0$$

$$H(2R) = \frac{I}{4\pi R}$$

$$B(2R) = \frac{\mu_0 I (R^2 + 4R^2)}{4\pi R^3} = \frac{5\mu_0 I R^2}{4\pi R^3} = \frac{5\mu_0 I}{8\pi R}$$

$$J(2R) = \frac{I(4R^2 - R^2)}{4\pi R^2} = \frac{3I}{8\pi R}$$

$$B = \mu_0 (H + J) \qquad (9)$$

Для R: $\frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \mu_0 \left(\frac{I}{2\pi R} + 0\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0$ верно!

Для (2R): $\frac{5\mu_0 I}{8\pi R} = \mu_0 \left(\frac{I}{4\pi R} + \frac{3}{8}\frac{I}{\pi R}\right)$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

$\frac{5}{8} = \frac{5}{8}$ верно!

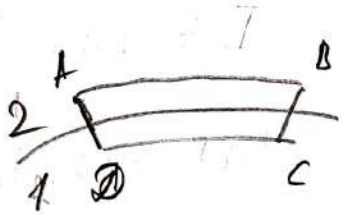
$i'_{внутр}$ - ? $i'_{внеш}$ - ? $j'_{об}(r)$ - ? L_n - ?

б) Для определения пов. плотности токов намагничивания на внутренней и внешней поверхностях магнетика воспользуемся теоремой о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$:

$$\oint_L (J, d\vec{l}) = I', \qquad (10)$$

где I' - ток ~~намагниченности~~ намагничивания

Рассмотрим бесконечно малый контур ABCD



→ рис. из методы

Т.к BC и $AD << AB$ и CD, будем считать, что

$$\int_{BC} (\vec{J}, d\vec{l}) = \int_{DA} (\vec{J}, d\vec{l}) = 0$$

(еще и потому, что $\vec{J} \perp d\vec{l}$ вдоль почти отрезков BC и DA)

Таким образом, получаем:

$$\oint_{ABCD} (\vec{J}, d\vec{l}) = (J_2 - J_1) l, \qquad (11)$$

где J_1 и J_2 - касательные компоненты вектора J в первой и второй среде соответственно

Поверхностный ток намагничивания:

$$I' = \int_0^l (\vec{i}_{пов}, \vec{\nu}) dl = \int_0^l (i_{пов})_\nu \, dl = (i_{пов})_\nu \cdot l \qquad (12)$$

Т.к направления i и ν совпали, с учетом (11) и (10)

получим $\boxed{i_{пов} = J_2 - J_1}$ (13)

?!

Тогда ~~…~~
Для внутр пов:

$$i'_{n_{внутр}} = J_2 - J_1 = 0 \qquad \boxed{i'_{n\,внутр} = 0} \qquad (14)$$

$J_2 = 0$ в вакууме $\mu = 1$ $\mu - 1 = 0$

$J_1 = 0$ по формуле

Для внеш. пов:

$$i'_{n_{внутр}} = J_2 - J_1 = -\frac{3I}{8\pi R} \qquad \boxed{i'_{n\,внеш} = -\frac{3I}{8\pi R}} \qquad (15)$$

$J_2 = 0$ в вакууме

$J_1 = \frac{3I}{8\pi R}$ по формуле

$$\cancel{i' = \frac{1}{r}\frac{d(rJ)}{dr}}$$

$$\cancel{i' = \frac{1}{r}\left(\frac{r\,dJ}{dr} + J\right)}$$

$$\cancel{i' = \frac{1}{r}\frac{d\left(r\frac{I(r^2-R^2)}{4\pi R^2 r}\right)}{dr}} \qquad \cancel{i' = \frac{I}{r\,4\pi R^2}2r = \frac{I}{2\pi R}}$$

$$\oint_L \vec{J}\,d\vec{l} = I'$$

$$I$$

$$JL = I'$$

$$L\,dJ = dI'$$

$$L\frac{dJ}{dr} = \frac{dI'}{dr}$$

$$\cancel{2\pi r \cdot \frac{d}{dr}\left(\frac{I(r^2-R^2)}{4\pi R^2 r}\right) = \frac{j\,2\pi r\,dr}{dr}}$$

$$2\pi r\frac{d}{dr}\left(\frac{I(r^2-R^2)}{4\pi R^2 r}\right) = \frac{d(j\,2\pi r)}{dr\,j} = \frac{I}{4\pi R^2}\frac{d}{dr}\left(r - \frac{R^2}{r}\right)$$

$$j = \frac{Ir}{4\pi R^2}$$

$$\left(r + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{2\pi r\,I}{4\pi R^2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) = j\,2\pi \qquad j = \frac{I}{4\pi R^2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \qquad j = \frac{I\left(\frac{r^2+R^2}{r}\right)}{4\pi R^2}$$

(8) $i_{пов} = -\frac{3I}{8\pi R}$ $\qquad j = \frac{I}{2\pi R^2}$ $\qquad (20)?$

$$-\frac{3I}{8\pi R}\cdot 2\pi\cdot 2R + \int_R^{R_0} \frac{I}{2\pi R^2}\, 2\pi r\,dr =$$

$$-\frac{3I}{2} + \frac{I}{R^2}\,\frac{r^2}{2}\Bigg|_R^{2R} = -\frac{3I}{2} + \frac{I}{R^2}\left(\frac{4R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{3I}{2} + \frac{3I}{2} = 0!$$

Done

---

7) Найдём объёмную плотность тока, воспользовавшись дифференциальной формой теоремы о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$:

$$\operatorname{rot}\vec{J} = \vec{i}_{об} \qquad (16)$$

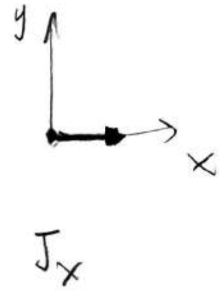
Для цилиндрических координат

$$\operatorname{rot}\vec{J} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial J_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rJ_\varphi)}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rJ_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial J_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z \qquad (17)$$

Для данной задачи $J_r = J_z = 0$ и $\frac{\partial J_\varphi}{\partial z} = 0$, поэтому (17) примет вид.

$$\operatorname{rot}\vec{J} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial (r J_\varphi)}{\partial r}\,\vec{e}_z \qquad (18)$$



Аналогично (18) и (8), получим

$$(\operatorname{rot}\vec{J})_z = (\vec{i}\,'_{об})_z = \frac{1}{r}\,\frac{\partial (r J_\varphi)}{\partial r} =$$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r}\cdot\frac{I(r^2-R^2)}{4\pi R^2 \cancel{r}}\right) =$$

$$= \frac{I}{4\pi R^2 r}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2-R^2) =$$

$$= \frac{2\cancel{r} I}{4\pi R^2 \cancel{r}} = \frac{I}{2\pi R^2}$$

$$\boxed{i'_{об} = \frac{I}{2\pi R^2}} \qquad (19)$$

9) Найдём индуктивность единицы длины кабеля:

$$L_h = \frac{\Phi}{I h}$$

Магнитный поток:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\,d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_R^{R_0} B\cdot 2\pi r\,dr = \int_R^{2R} \frac{\mu_0 I (R^2+r^2)}{4\cancel{\pi} R^2 \cancel{r}}\cdot 2\cancel{\pi}\cancel{r}\,dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2R^2}\int_R^{2R}(R^2+r^2)\,dr = \frac{\mu_0 I}{2R^2}\,\frac{r^3}{3}\Big|_R^{2R} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{8R^3}{3} - \frac{R^3}{3}\right) =$$

9) Найдем индуктивность единицы длины кабеля:

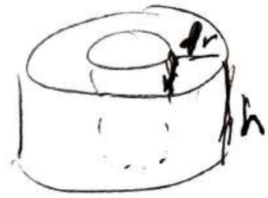
$$L_n = \frac{\Phi}{I h} \qquad (21)$$

Магнитный поток

$$\Phi = \int_S \vec{B}\, d\vec{S} \qquad (22) \qquad S = 2\pi r h$$

Учитывая, что $dS = h \cdot dr$, и используя (6), получаем

$$\Phi = \int_R^{R_0} B \cdot h \cdot dr = \int_R^{R_0} \frac{\mu_0 I (R^2 + r^2)}{4\pi R^2 r} \cdot h \cdot dr =$$



$$= \frac{\mu_0 I h}{4\pi R^2} \int_R^{R_0} \left(\frac{R^2}{r} + r\right) dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I h}{4\pi R^2} \left(R^2 \ln r + \frac{r^2}{2}\right)\Big|_R^{2R} =$$

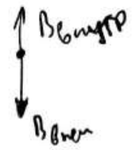
$$= \frac{\mu_0 I h}{4\pi R^2} \left(R^2 \ln 2R + \frac{4R^2}{2} - R^2 \ln R - \frac{R^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I h}{4\pi} \left(\ln 2 + \frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 I h}{4\pi} \left(\ln 2 + \frac{3}{2}\right)} \qquad (23)$$

Подставим (23) в (21):

$$\boxed{L_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\ln 2 + \frac{3}{2}\right)}$$

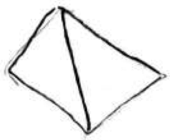


$$J L = I'$$

$$I' = \frac{I(r^2 - R^2)}{4\pi R^2 r} \cdot L$$

$$I' = \frac{I(r^2 - R^2}{4\cancel{\pi} R^2 \cancel{r}} 2\cancel{\pi}\cancel{r}$$

$$I' = \frac{I(r^2 - R^2)}{2R^2}$$



$$L\, dJ = dI'$$

$$L \frac{dJ}{dr} = \frac{dI'}{dr}$$

$$\int_0^{2\pi R_0} i'_{nob}\, dl = 2\pi \int_0^{R_0} i'_{nob}\, dr =$$

$$i'_n L = \frac{2 I r}{2R^2}$$

$$= -2\pi \int_R^{R_0} \frac{I(r^2 - R^2)}{4\pi R^2 r} dr =$$

$$i'_n L = \frac{I r}{R^2}$$

$$= -\frac{2\pi I}{4\pi R^2} \int_R^{R_0} \left(r - \frac{R^2}{r}\right) dr =$$

$$i'_n = \frac{I \cancel{r}}{R^2 2\pi \cancel{r}}$$

$$= -\frac{I}{2\pi R^2} \left(\frac{r^2}{2} - R^2 \ln|r|\right)\Big|_R^{2R} =$$

$$i'_n = \frac{I}{2\pi R^2}$$

$$= -\frac{I}{2\pi R^2}\left(\frac{4R^2}{2} - R^2 \ln(2R) - \frac{R^2}{2} + R^2 \ln R\right) =$$

$$= -\frac{I}{2\pi R^2}\left(\frac{3R^2}{2} + R^2 \ln\frac{1}{2}\right)$$

$$J = \frac{j(r-R^2)^2}{4R^2 r}$$

$$j' = \left(\frac{r^2}{R} - 1\right) j$$

$$R_0 = \frac{3}{2} R$$

$$-\frac{j(r^2-R^2)^2}{4R^2 r} = i'_{\text{пов}}$$

$$-\frac{j\left(\frac{9}{4}R^2 - R^2\right)^2}{4R^2 \frac{3}{2}R} = i'_{\text{пов}}$$

$$\frac{\frac{81}{16}R^4}{4R^2} - \frac{\frac{9}{4}R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} + \frac{R^2}{2} =$$

$$-\frac{j \cdot \frac{25}{16}R^2}{4 \cdot \frac{3}{2} R^3} - \frac{25 \quad R j}{16 \cdot 6} = -\frac{25}{96} R j$$

$$= \frac{65}{64}R^2 - \frac{5}{8}R^2 = \frac{25}{64}R^2$$

$$i'_{\text{пов}} = -\frac{j(r^2-R^2)^2}{4R^2 r}$$

$$\frac{25}{3R} R^2 j \pi$$

$$\int_0^{2\pi R_0} -\frac{j(r^2-R^2)^2}{4R^2 r} 2\pi\, dr = -2\pi \int_0^{R_0} \frac{j(r^2-R^2)^2}{4R^2 r}$$

$dl = 2\pi dr$

при $dl = 0$ $\quad dr = 0$

при $dl = 2\pi R_0$ $\quad dr = R_0$

$$i_{\text{пов}} \int_0^{2\pi R_0} 2\pi\, dr =$$

$$i'_{\text{пов}} = -\frac{I(r^2-R^2)}{4\pi R^2 r}$$

$$= i_{\text{пов}} \cdot 2\pi \cdot 2R$$

$$-\frac{25}{96} \cancel{2}\pi \frac{3}{\cancel{2}} R$$