„Определенный интеграл"

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №1
БИЛЕТ № 18

Теория.

① ОПР. Пусть ф-я $f(x)$ определена на $[a, b)$, не ограничена ни на каком интервале вида $(b-\varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b-a$, и интегрируемая на отрезке $[a, \eta)$ при $\forall \eta < b$.

Несобственным интегралом второго рода от неограниченной ф-ии $f(x)$ по промежутку $[a, b)$ наз предел (если он существует)

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^{\eta} f(x)\,dx$$

Обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$. (Аналогично рассматривается нижний предел)

При этом несобственный интеграл 2-го рода наз условно сходящимся, если $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится.

② Формула для вычисления длины дуги графика $y = f(x)$, отсеченной прямыми $x = a$ и $x = b$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

Вывод:

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$

Разобьем отрезок на элементарные отрезки Δx_i, где $i = 1, 2, \dots, n$

„Определенный интеграл"

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №1
БИЛЕТ № 18

② (продолжение)

Длина хорды на ~~на~~ таком отрезке:

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}} \cdot \Delta x_i$$

По теореме Лагранжа:

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

Тогда длина ломаной:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i$$

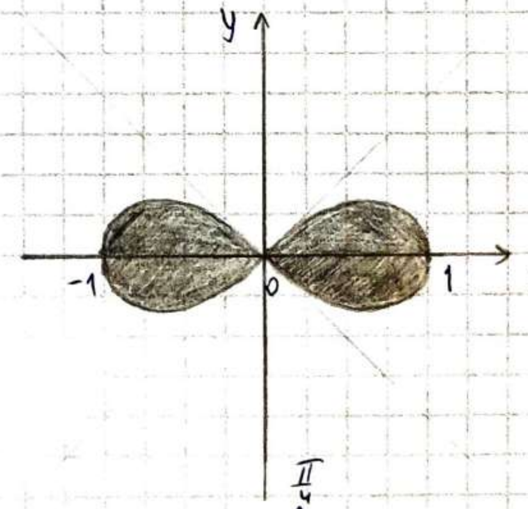
Т.к. ф-я непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует конечный предел, и длина дуги равна:

$$l = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \cdot \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx =$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Задачи.

① $\rho^2 = \cos 2\varphi$



При $\varphi = 0$; $\rho = 1$

При $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\rho = 0$

При $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$: $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{\cos 2\varphi})^2\, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d(2\varphi) =$$

$$= \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

Ответ: 1

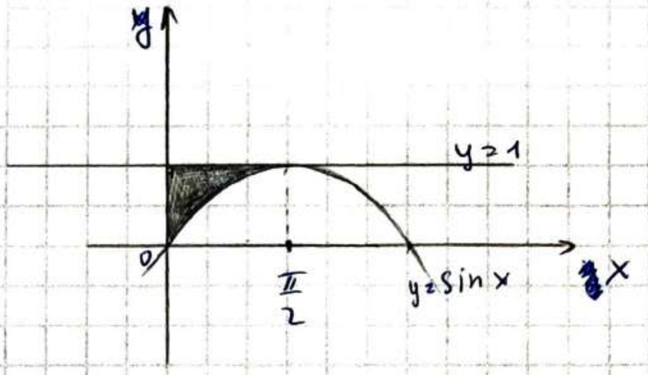
„Определенный интеграл"

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №1
Билет № 18

② $y = \sin x$

$x = 0$

$y = 1$



$$V_y = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x|1|\,dx - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x|\sin x|\,dx =$$

$$= 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \right) = 2\pi \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \ominus$$

$$\int x \sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -\left(x\cos x - \int \cos x\,dx\right) =$$

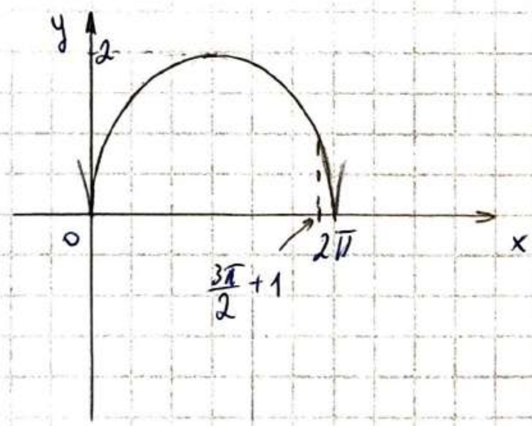
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

$$\ominus\ 2\pi \left(\frac{\pi^2}{8} - \left(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi\left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right) =$$

$$= \frac{2\pi^3}{8} - 2\pi = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi$$

Ответ: $\frac{\pi^3}{4} - 2\pi$

③ $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$



Найдем значение t в точках:

$(0, 0)$: $\begin{cases} 0 = t - \sin t \\ 0 = 1 - \cos t \end{cases}$

$\begin{cases} \sin t = t \\ \cos t = 1 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 0$

~~$\left(\frac{3\pi}{2} + 1, 1\right)$: $\begin{cases} \frac{3\pi}{2} + 1 = t - \sin t \\ \frac{3\pi}{2} + 1 = 1 - \cos t \end{cases}$~~

„Определенный интеграл"

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №1
БИЛЕТ №13

(3) (продолжение)

$$\left(\frac{3\pi}{2}+1,\ 1\right):\ \begin{cases}\frac{3\pi}{2}+1=t-\sin t\\ 1=1-\cos t\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos t=0\\ t-1=\sin t+\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos t=0\\ t-\frac{3\pi}{2}=\sin t+1\end{cases} \Rightarrow t_2=\frac{3\pi}{2}$$

Получаем производные:

$$x'=1-\cos t$$
$$y'=\sin t$$

Тогда:

$$l=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$\cancel{=2\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2 t}=2\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}\,dt=4\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2}=$$

$$=-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}}=-4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\cos 0=2\sqrt{2}+4$$

Ответ: $2\sqrt{2}+4$

(4) $$\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+5}}\,dx$$

При $x\to+\infty$ $$\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+5}}=\frac{\pi}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{5}{x^3}}}\sim\frac{\pi}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

„Определенный интеграл"

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №1
БИЛЕТ №18

(4.) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+5}}\,dx$

При $x \to +\infty$:

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+5}} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{5}{x^3}}} \sim \frac{\pi}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\pi\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ сходится как интеграл Дирихле $\left(\frac{3}{2} > 1\right)$.

Значит, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+5}}\,dx$ тоже сходится

Ответ: сходится

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\sin x}}$

Точка разрыва 0.

При $x \to 0$:

$$\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{\sin x}} \sim \frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$$

Т.к $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\,dx = -3x^{-\frac{1}{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{\sqrt[3]{x}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ расходится, то

и $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\sin x}}$ расходится Ответ: расходится