№1

X, Y - непрерывные случайные величины

$X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $X \sim N(9, 1)$

$Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, $Y \sim N(4, 4)$

X, Y - независимые

1) $P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\}$

Пусть $Z = X - Y$, тогда:

$$P\{X > Y\} = P\{Z > 0\}$$

последующий, чем линейная

2) По свойствам нормального распределения · нам случайная величина $Z = X - Y$ также будет распределена по нормальному закону:

$$Z \sim N(m_3, \sigma_3^2);$$

m_1, m_2, m_3 имеют смысл мат. ожидания случайных величин X, Y и Z соотв.

$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ имеют смысл дисперсий сл. вел X, Y и Z соотв.

3) Найдем m_3 и σ_3^2:

а) По св-ву линейности мат ожид:

$$m_3 = MZ = M[X-Y] = MX - MY = m_1 - m_2 =$$
$$= 9 - 4 = 5$$

б) По св-вам дисперсии (т.к X, Y - независ, $cov(X,Y) = cov(Y,X) = 0$):

$$\sigma_3^2 = DZ = D[X-Y] = DX + (-1)^2 DY = DX + DY = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 =$$
$$= 1 + 4 = 5$$

Таким образом,

$$Z \sim N(5,5)$$

4) $P\{Z>0\} = P\{0<Z<+\infty\} = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{0-5}{\sqrt{5}}\right) =$

$= \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(2{,}24) \approx \frac{1}{2} + 0{,}48745 \approx 0{,}987$

Ответ: $P\{X>Y\} = 0{,}987$

$$\frac{\sigma_z^2 \sigma_x^2 \underline{(z-\mu_Y)}^2 - \sigma_z^2 \sigma_Y^2 \mu_x^2 - \sigma_x^4 \underline{(z-\mu_Y)}^2 - 2\sigma_x^2 (z-\mu_Y) \sigma_Y^2 \mu_x - \sigma_Y^4 \mu_x^2}{2\sigma_z^2 (\sigma_x^2 \sigma_Y^2}$$

~~$\sigma_z^2 \sigma_x^2 z^2 2 + 2\sigma_z^2 \sigma_x^2 z \mu_Y$~~

~~$(\sigma_z^2 \sigma_x^2 - \sigma_x^4)(z-\mu_Y)^2 - 2\sigma_x^2 (z-\mu_Y) - (\sigma_z^2 \sigma_Y^2 - \sigma_Y^4)\mu_x^2 =$~~

$=$ ~~$\sigma_z^2 \sigma_x^2 z^2 - 2\sigma_z^2 \sigma_x^2 \mu_Y z + \sigma_z^2 \sigma_x^2 \mu_Y^2 - \sigma_z^2 \sigma_Y^2 \mu_x^2 -$~~

~~$- \sigma_x^4$~~

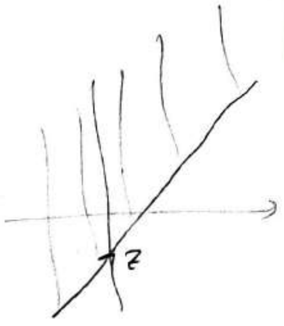
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\Big($$

X, Y - непрерывные случайные величины

$X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ $X \sim N(9, 1)$

$Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ $Y \sim N(4, 4)$

По условию задачи X, Y - независимы



~~$P\{X > Y\} = P\{X - Y\}$~~ -

Т.к. $X \sim N(9, 1) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x-m_1}{2\sigma_1^2}}$

$x_1 - y < z$

$y > x - z$

По условию:

X, Y - непрерывные случайные величины

$X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$; $X \sim N(9, 1)$

$Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$; $Y \sim N(4, 4)$

X, Y - независимые

$P\{X > Y\} = P\{X - Y > 0\} = \{\text{пусть } Z = X - Y\} = P\{Z > 0\}$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x-m_1}{2\sigma_1^2}}$ $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{y-m_2}{2\sigma_2^2}}$

$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x - z)\, dx =$

$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!$

$\Downarrow$

$\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$f \int\limits_0^{+\infty} \upsilon^2 e^{-\beta\upsilon^2} d\upsilon = \left\{ \begin{array}{l} \beta\upsilon^2 = t, \ \upsilon = \sqrt{\frac{t}{\beta}} \\ d\upsilon = \frac{dt}{2\sqrt{\beta}\sqrt{t}} \end{array} \right\} =$

$= \frac{1}{\beta} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t e^{-t}}{2\sqrt{\beta}\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt =$

$= \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2\beta\sqrt{\beta}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta\sqrt{\beta}}$

$\boxed{№2}$

$(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, де

$$\vec{m} = (6, 10) \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0.5 > 0 \qquad \det\Sigma = \frac{1}{4} > 0$$

$P\{X_2 > 2X_1\} = P\{X_2 - 2X_1 > 0\}$

$Z = X_2 - 2X_1$

$M(X_1) = 6$ $MX_2 = 10$ $DX_1 = 0.5$ $DX_2 = 1$	$cov(X_1, X_2) =$ $= cov(X_2, X_1) =$ $= 0.5$

Лінійна комбінація норм. вел. величин також є норм. вел. величиною:

$$Z \sim N(m_z, \sigma_z^2)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ MZ & DZ \end{matrix}$$

$m_z = MZ = M[X_2 - 2X_1] = MX_2 - 2MX_1 = 10 - 2\cdot 6 = -2$

$\sigma_z^2 = DZ = D(X_2 - 2X_1] = DX_2 + (-2)^2 DX_1 + 2\cdot 1\cdot(-2)\,cov(X_1, X_2)$

$= 1 + \cancel{4\cdot 0.5}\,4 - 4\cdot\cancel{0,5} = 1$

$P\{Z > 0\} = P\{0 < Z < +\infty\} = \cancel{\Phi_0(+\infty) + \Phi\left(\frac{2}{1}\right)} =$

$= \cancel{\frac{1}{2} + \Phi(2) \approx \frac{1}{2} + 0,47725 \approx 0,977}$

$= \Phi_0(+\infty) - \Phi_0\left(\frac{0+2}{1}\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0(2) \approx 0,0226$