Занятие 20

2 994

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$

Характеристическое ур-е.

$\lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda = 2$

$\lambda = -2$

Правая часть НЛДУ $f(x) = x^2 e^{2x}$ имеет вид:

$f(x) = e^{\alpha x} [P_{m_1}(x) \cos \beta x + Q_{m_2}(x) \sin \beta x]$,

где $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $P_2(x) = x^2$, $Q_0(x) = 0$, $m_1 = 2$, $m_2 = 0$, $m = 2$,

$\lambda = \alpha \pm \beta i = 2$ - корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

Тогда

$y_{чн} = x e^{2x} [T_2(x) \cos(0 x) + S_2(x) \sin(0 \cdot x)] =$

$= x e^{2x} T_2(x) = x e^{2x} (Ax^2 + Bx + C)$

Ответ: $y_{чн} = x e^{2x} (Ax^2 + Bx + C)$

в) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda = 2$

Рассмотрим НЛДУ:

$y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$

Правая часть НЛДУ $f(x) = \sin 2x$ имеет вид:

$f(x) = e^{\alpha x} [P_{m_1}(x) \cos \beta x + Q_{m_2}(x) \sin \beta x]$,

где $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$, $m = 0$, $\lambda = 2i$ - не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow k = 0$

$y_{чн1} = A \cos 2x + B \sin 2x$

Рассмотрим НЛДУ.

$$y''-4y'+4y=e^{2x}$$

Правая часть НЛДУ $b(x)=e^{2x}$ имеет вид:

$$b(x)=e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x+Q_{m_2}(x)\sin\beta x],$$

где $\alpha=2$, $\beta=0$, $P_0(x)=1$, $Q_0(x)=0$, $m=0$, $\lambda=2$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k=2$

$$y_{чн2}=Cx^2e^{2x}$$

Тогда вид частных решений для исходного НЛДУ:

$$y_{чн}=A\cos 2x+B\sin 2x+Cx^2e^{2x}$$

Ответ: $y_{чн}=A\cos 2x+B\sin 2x+Cx^2e^{2x}$

8) $y''-5y'+6y=(x^2+1)e^x+xe^{2x}$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$\lambda=2$
$\lambda=3$

Рассмотрим НЛДУ:

$$y''-5y'+6y=(x^2+1)e^x$$

Правая часть НЛДУ $b(x)=(x^2+1)e^x$ имеет вид:

$$b(x)=e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x+Q_{m_2}(x)\sin\beta x],$$

где $\alpha=1$, $\beta=0$, $P_2(x)=x^2+1$, $Q_0(x)=0$, $m=2$, $\lambda=1$ – не является корнем характеристического ур-е $\Rightarrow k=0$

$$y_{чн1}=e^x(Ax^2+Bx+C)$$

Рассмотрим НЛДУ.

$$y''-5y'+6y=xe^{2x}$$

Правая часть НЛДУ $b(x)=xe^{2x}$ имеет вид:

$$b(x)=e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x+Q_{m_2}(x)\sin\beta x],$$

где $\alpha=2$, $\beta=0$, $P_1(x)=x$, $Q_0(x)=0$, $m=1$, $\lambda=2$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow$ $k=1$

Тогда

$$y_{чн2}=xe^{2x}(Dx+E)$$

Тогда вид частных решений для исходного НЛДУ:

$$y_{чн}=e^x(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)$$

Ответ: $y_{чн}=e^x(Ax^2+Bx+C)+xe^{2x}(Dx+E)$

9.354

$$y''-y=e^{-x}$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2-1=0$$

$\lambda_1=1$ $\Rightarrow$ Общее решение ОЛДУ: $y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$\lambda_2=-1$

Правая часть НЛДУ $b(x)=e^{-x}$ имеет вид:

$$b(x)=e^{\alpha x}[P_{m1}(x)\cos\beta x+Q_{m2}(x)\sin\beta x],$$

где $\alpha=-1$, $\beta=0$, $P_0(x)=0$, $Q_0(x)=0$, $m=0$, $\lambda=-1$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow$ $k=1$

Общий вид частного решения НЛДУ:

$$y_{чн}=Axe^{-x}$$

Найдем A:

$$y'_{чн}=Ae^{-x}(1-x)$$

$$y''_{чн}=A(-e^{-x}(1-x)+(-1)e^{-x})=A(-2e^{-x}+xe^{-x})=$$

$$=Ae^{-x}(-2+x)$$

Подставляем

$$Ae^{-x}(-2+x)-Axe^{-x}=e^{-x}$$

$$Ae^{-x}(-2+x-x)=e^{-x}$$

$$-2A=1 \Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

$y_{чн} = -\frac{1}{2} x e^{-x}$

Тогда

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$

Ответ: $y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$

<u>9.355</u>

$y'' - y = ch x$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

$y_{оо} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

Правая часть НЛДУ $b(x) = ch(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$

Рассмотрим НЛДУ:

$y'' - y = \frac{e^x}{2}$

Правая часть НЛДУ $b(x) = \frac{e^x}{2}$ имеет вид:

$b(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x]$,

где $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_0(x) = \frac{1}{2}$, $Q_0(x) = 0$, $m = 0$, $\lambda = 1$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

$y_{чн1} = A x e^{x}$

Найдем A:

$y'_{чн1} = A e^{x}(1+x)$

$y''_{чн1} = A e^{x}(2+x)$

$A e^{x}(2+x) - A x e^{x} = \frac{e^x}{2}$

$2 A e^{x} = \frac{e^x}{2}$

$2A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{4} \Rightarrow y_{чн1} = \frac{1}{4} x e^{x}$

Рассмотрим НЛДУ:

$$y'' - y = \frac{e^{-x}}{2}$$

Правая часть НЛДУ $b(x) = \frac{e^{-x}}{2}$ имеет вид:

$$b(x) = e^{\alpha x}\left[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x\right],$$

где $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $P_0(x) = \frac{1}{2}$, $Q_0(x) = 0$, $m = 0$, $\lambda = -1$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

$$y_{чн2} = Bxe^{-x}$$

Найдем B:

$$y'_{чн2} = Be^{-x}(1-x)$$

$$y''_{чн2} = Be^{-x}(-2+x)$$

$$Be^{-x}(-2+x) - Bxe^{-x} = \frac{e^{-x}}{2}$$

$$-2Be^{-x} = \frac{e^{-x}}{2}$$

$$-2B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_{чн2} = -\frac{1}{4}xe^{-x}$$

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн1} + y_{чн2} = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x} =$$

$$= \frac{C_3 + C_4}{2}e^x + \frac{C_3 - C_4}{2}e^{-x} + \frac{x\,sh x}{2} = C_3\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C_4\frac{e^x - e^{-x}}{2} +$$

$$+ \frac{x\,sh x}{2} = C_3 ch x + C_4 sh x + \frac{x\,sh x}{2}$$

Ответ: $y_{он} = C_3 ch x + C_4 sh x + \frac{x\,sh x}{2}$

9.356

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -4$$

$$y_{оо} = C_1e^x + C_2e^{-4x}$$

Рассмотрим НЛДУ:

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$$

$$b(x) = e^{\alpha x}\left[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x\right]$$

$$b(x) = e^{-4x}$$

$\alpha = -4$, $\beta = 0$, $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) = 0$, $m = 0$, $\lambda = -4$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

$$y_{чн1} = Axe^{-4x}$$

Найдем A:

$$y'_{чн1} = Ae^{-4x} - 4Axe^{-4x}$$

$$y''_{чн1} = 16Axe^{-4x} - 8Ae^{-4x}$$

Подставляем

$$16\cancel{Ax}e^{-4x} - 8Ae^{-4x} + 3Ae^{-4x} - 12\cancel{Ax}e^{-4x} - 4\cancel{Ax}e^{-4x} = e^{-4x}$$

$$-5Ae^{-4x} = e^{-4x}$$

$$-5A = 1$$

$$A = -\frac{1}{5} \Rightarrow y_{чн1} = -\frac{1}{5}xe^{-4x}$$

Рассмотрим НЛДУ:

$$y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$$

$$b(x) = xe^{-x}$$

$\alpha = -1$, $\beta = 0$, $P_1(x) = x$, $Q_0(x) = 0$, $m = 1$, $\lambda = -1$ – не явл корнем характеристического ур-я $\Rightarrow k = 0$

$$y_{чн2} = e^{-x}(Bx + C)$$

$$y'_{чн2} = -e^{-x}(Bx + C) + Be^{-x}$$

$$y''_{чн2} = e^{-x}(Bx + C) - Be^{-x} - Be^{-x} = e^{-x}(Bx + C) - 2Be^{-x}$$

Подставляем

$$e^{-x}(Bx + C) - 2Be^{-x} + 3Be^{-x} - 3e^{-x}(Bx + C) - 4e^{-x}(Bx + C) = xe^{-x}$$

$B e^{-x} - 6 e^{-x} (Bx + C) = x e^{-x}$

$B - 6Bx + 6C = x$

$\begin{cases} B - 6C = 0 \\ -6B = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} C = \frac{1}{36} \\ B = \frac{1}{6} \end{cases}$

$y_{чн2} = e^{-x}\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)$

$y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} + e^{-x}\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)$

Ответ: $y_{он} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} + e^{-x}\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)$

7

9.357

$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$

Характеристическое ур-е

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 3$

$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

Правая часть НЛДУ $b(x) = 13\sin 3x$ имеет вид:

$b(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x]$,

где $\alpha = 0$, $\beta = 3$, $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 13$, $m = 0$, $\lambda = 3i$ – не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow k = 0$

$y_{чн} = A\cos 3x + B\sin 3x$

Найдем A и B:

$y'_{чн} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$

$y''_{чн} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$

Подставляем:

$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 15A\sin 3x - 15B\cos 3x + 6A\cos 3x + 6B\sin 3x = 13\sin 3x$

$(-9A - 15B + 6A)\cos 3x + (-9B + 15A + 6B)\sin 3x = 13\sin 3x$

$\begin{cases} -3A - 15B = 0 \\ -3B + 15A = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{5}{6} \\ B = -\frac{1}{6} \end{cases}$

$y_{чн} = \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x$

Ответ: $y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x$

8

9.361

$y'' + 4y = \cos^2 x$

Характеристическое ур-е:

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = -2i$

$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

Рассмотрим НЛДУ:

$y'' + 4y = \frac{1}{2}$

$b(x) = e^{\alpha x} [P_{m_1}(x) \cos \beta x + Q_{m_2} \sin \beta x]$

$b = \frac{1}{2}$

$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ P_0(x) = \frac{1}{2},\ Q_0(x) = 0,\ m = 0,\ \lambda = 0$ – не является корнем характеристического ур-я, $k = 0$

$y_{чн1} = A$

$y'_{чн1} = 0$

$y''_{чн1} = 0$

$0 + 4A = \frac{1}{2}$

$A = \frac{1}{8} \Rightarrow y_{чн1} = \frac{1}{8}$

Рассмотрим НЛДУ:

$y'' + 4y = \frac{\cos 2x}{2}$

$b(x) = e^{\alpha x} [P_{m_1}(x) \cos \beta x + Q_{m_1} \sin \beta x]$

$b(x) = \frac{\cos 2x}{2}$

$\alpha = 0,\ \beta = 2,\ P_0(x) = \frac{1}{2},\ Q_0(x) = 0,\ m = 0,\ \lambda = 2i$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

$y_{чн2} = x(B \cos 2x + C \sin 2x)$

$$y_{чн2}' = B\cos 2x + C\sin 2x + x(-2B\sin x + 2C\cos 2x)$$

$$y_{чн2}'' = -2B\sin 2x + 2C\cos 2x - 2B\sin 2x + 2C\cos 2x + x(-4B\cos 2x -$$
$$-4C\sin 2x) = -4B\sin 2x + 4C\cos 2x + x(-4B\cos 2x - 4C\sin 2x)$$

$$-4B\sin 2x + 4C\cos 2x + x(-4B\cos 2x - 4C\sin 2x) + 4x(B\cos 2x + C\sin 2x) = \frac{\cos 2x}{2}$$

$$-4B\sin 2x + 4C\cos 2x - \cancel{4Bx\cos 2x} - \cancel{4Cx\sin 2x} + \cancel{4Bx\cos 2x} + \cancel{4Cx\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{2}$$

$$\begin{cases} -4B = 0 \\ 4C = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$y_{чн2} = \frac{x}{8}\sin 2x$$

Ответ: $y_{он} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8}(1 + x\sin 2x)$

9.367

$y^{IV} + y'' = 6x + e^{-x}$

Характеристическое ур-е

$\lambda^4 + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2 (\lambda^2 + 1) = 0$

$\lambda_{1,2} = 0$

$\lambda_{3,4} = \pm i$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

Рассмотрим НЛДУ:

$y^{IV} + y'' = 6x$

Правая часть НЛДУ $b(x) = 6x$ имеет вид:

$b(x) = e^{\alpha x} [P_{m_1}(x) \cos \beta x + Q_{m_2}(x) \sin \beta x]$,

где $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_1(x) = 6x$, $Q_0(x) = 0$, $m = 1$, $\lambda = 0$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 2$

$y_{чн1} = x^2 (Ax + B)$

Найдем A и B:

$y'_{чн1} = 3Ax^2 + 2Bx$

$y''_{чн1} = 6Ax + 2B$

$y'''_{чн1} = 6A$

$y^{IV}_{чн1} = 0$

$6Ax + 2B = 6x$

$\begin{cases} 6A = 6 \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{чн1} = x^3$

Рассмотрим НЛДУ:

$y^{IV} + y'' = e^{-x}$

Правая часть НЛДУ $b(x) = e^{-x}$ имеет вид:

$$b(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x],$$

где $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$, $m = 0$, $\lambda = -1$ – не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow k = 0$.

$$y_{чн} = Ce^{-x}$$

Найдем C:

$$y_{чн}' = -Ce^{-x}$$

$$y_{чн}'' = Ce^{-x}$$

$$y_{чн}''' = -Ce^{-x}$$

$$y_{чн}^{IV} = Ce^{-x}$$

$$Ce^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x}$$

$$2C = 1$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$y_{чн} = \frac{1}{2}e^{-x}$$

Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + x^3 + \frac{1}{2}e^{-x}$

9.369

$$y^{V} - y^{IV} = xe^{x} - 1$$

Характеристическое ур-е

$$\lambda^5 - \lambda^4 = 0$$

$$\lambda^4(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = 0, \quad \lambda_5 = 1$$

$$y_{оо} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^{x}$$

Рассмотрим НЛДУ:

$$y^{V} - y^{IV} = xe^{x}$$

$$b(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x]$$

$$b(x) = xe^{x}$$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(x) = x$, $Q_0(x) = 0$, $m = 1$, $\lambda = 1$ – корень $\Rightarrow k = 1$

$y_{чн1} = xe^x(Ax+B) = (Ax^2+Bx)e^x$

$y_{чн1}' = (2Ax+B)e^x + (Ax^2+Bx)e^x$

$y_{чн1}'' = 2Ae^x + 2(2Ax+B)e^x + (Ax^2+Bx)e^x$

$y_{чн1}''' = 2Ae^x + 4Ae^x + 3(2Ax+B)e^x + (Ax^2+Bx)e^x$

$y_{чн}^{IV} = 2Ae^x + 10Ae^x + 4(2Ax+B)e^x + (Ax^2+Bx)e^x$

$y_{чн}^{V} = 12Ae^x + 8Ae^x + 5(2Ax+B)e^x + (Ax^2+Bx)e^x =$

$= 20Ae^x + 10xAe^x + 5Be^x + Ax^2e^x + Bxe^x$

Подставляем:

$20Ae^x + 10Axe^x + 5Be^x + \cancel{Ax^2e^x} + \cancel{Bxe^x} - 12Ae^x - 8Axe^x -$

$- 4Be^x - \cancel{Ax^2e^x} - \cancel{Bxe^x} = xe^x$

$8Ae^x + 2Axe^x + Be^x = xe^x$

$8A + 2Ax + B = x$

$\begin{cases} 2A = 1 \\ 8A + B = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -4 \end{cases}$

$y_{чн1} = xe^x\left(\frac{x}{2} - 4\right)$

Рассмотрим НЛДУ:

$y^V - y^{IV} = -1$

$b(x) = e^{\alpha x}[P_{m1}(x)\cos\beta x + Q_{m2}(x)\sin\beta x]$

$b(x) = -1$

$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ P_0(x) = -1,\ Q_0(x) = 0\ m = 0,\ \lambda = 0$ – корень =>

$=> k = 4$

$y_{чн2} = Cx^4$

$y_{чн2}' = 4Cx^3$

$y_{чн2}'' = 12Cx^2$

$y_{чн2}''' = 24Cx$

$y_{чн2}^{IV} = 24C$

$y_{чн2}^{V} = 0$

$0 = 24C - 1$

$C = \frac{1}{24}$

$y_{чн} = \frac{x^4}{24}$

Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^x + x e^x \left(\frac{x}{2} - 4\right) + \frac{x^4}{24}$