Дано:

U

R_0

R

$$\varepsilon = \frac{R_0^n}{R_0^n + R^n - r^n}$$

$n = 2$

$$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{1}$$

$E(r)$ – ? ✓

$P(r)$ – ? ✓

$D(r)$ – ? ✓

σ_1' – ? ✓

σ_2' – ? ✓

$\rho'(r)$ – ? ✓

E_{MAX} – ? ✓

C

Задача 1.2 Вариант 11 $R_0 = 3R$

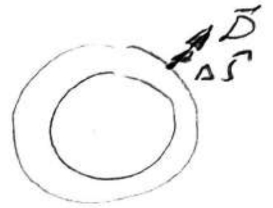
1) С учетом $\frac{R_0}{R} = \frac{3}{1}$ и $n = 2$,

$$\varepsilon(r) = \frac{(3R)^2}{(3R)^2 + R^2 - r^2} = \frac{9R^2}{10R^2 - r^2} \qquad (1)$$

2) Найдем вектор электрического смещения $\vec{D}(r)$, воспользовавшись теоремой Гаусса:

$$\oint_S D_n\, dS$$

$$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = q_s \qquad (2)$$



Поток вектора электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри этой поверхности.

S – площадь поверхности цилиндра радиуса r, где

$$R \le r \le R_0$$

Т.е.

$$S = 2\pi r \cdot h, \quad h \text{ – высота цилиндра} \qquad (3)$$

Сторонний заряд:

$$q_s = \lambda \cdot h, \text{ где } \lambda \text{ – линейная плотность заряда} \qquad (4)$$

(В силу симметричности задачи и направления векторов, получим)

$$D \cdot 2\pi r \cdot h = \lambda h$$

$$\boxed{D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}} \qquad (5)$$

Для линейных и изотропных диэлектриков напряжённость и электрическое смещение связаны в соотношении:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \qquad (6)$$

ε – диэлектрическая проницаемость

ε_0 – электрическая постоянная

Откуда

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon(r) \cdot \varepsilon_0} \qquad (7)$$

Подставим (1) и (5):

$$E(r) = \frac{\lambda\,(10R^2 - r^2)}{2\pi r \cdot 9R^2\,\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda\,(10R^2 - r^2)}{18\pi R^2 \varepsilon_0\, r}} \qquad (8)$$

Выразим λ через разность потенциалов U:

$$U = \varphi(R) - \varphi(R_0) = \int_R^{R_0} \vec{E}\, d\vec{r} \qquad (9)$$

$$U = \int_R^{3R} E\, dr = \int_R^{3R} \frac{\lambda\,(10R^2 - r^2)}{18\pi R^2 \varepsilon_0 r}\, dr = \frac{\lambda}{18\pi R^2 \varepsilon_0} \int_R^{3R} \left(\frac{10R^2}{r} - r\right) dr =$$

$$= \frac{\lambda}{18\pi R^2 \varepsilon_0} \left(\int_R^{3R} \frac{10R^2}{r}\, dr - \int_R^{3R} r\, dr \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{18\pi R^2 \varepsilon_0} \left(10R^2 \ln|r| \Big|_R^{3R} - \frac{r^2}{2} \Big|_R^{3R} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{18\pi R^2 \varepsilon_0} \left(10R^2 \ln \frac{3R}{R} - \frac{(3R)^2}{2} + \frac{R^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{18\pi R^2 \varepsilon_0} \left(10R^2 \ln 3 - \frac{9R^2}{2} + \frac{R^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{18\pi R^2 \varepsilon_0} \left(10R^2 \ln 3 - 4R^2 \right) =$$

$$= \frac{\lambda \cancel{R^2} (10 \ln 3 - 4)}{18\pi \cancel{R^2} \varepsilon_0} = \frac{\lambda (10 \ln 3 - 4)}{18\pi \varepsilon_0} = \frac{\lambda (5 \ln 3 - 2)}{9\pi \varepsilon_0}$$

$$\boxed{U = \frac{\lambda (5 \ln 3 - 2)}{9\pi \varepsilon_0}} \qquad (10)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{9\pi \varepsilon_0 U}{5 \ln 3 - 2}} \qquad (11)$$

Подставим (11) в (5) и (8):

$$D(r) = \frac{\overset{9}{\cancel{18\pi}} \varepsilon_0 U}{(10 \ln 3 - 4) \cdot \cancel{2\pi} r} = \frac{9 \varepsilon_0 U}{(10 \ln 3 - 4) r} = \frac{9 \varepsilon_0 U}{2(5 \ln 3 - 2) r}$$

$$E(r) = \frac{\cancel{18\pi \varepsilon_0} U (10R^2 - r^2)}{(10 \ln 3 - 4) \cdot \cancel{18\pi} R^2 \cancel{\varepsilon_0} r} = \frac{U (10R^2 - r^2)}{(10 \ln 3 - 4) R^2 r} =$$

$$= \frac{U (10R^2 - r^2)}{2(5 \ln 3 - 2) R^2 r}$$

Для линейных и изотропных диэлектриков связь между векторами поляризованности $\vec{P}$ и напряженности $\vec{E}$ имеет вид:

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E} \qquad (12)$$

Отсюда, получаем:

$$P(r) = \varepsilon_0\left(\frac{9R^2}{10R^2 - r^2} - 1\right)\cdot\frac{U(10R^2 - r^2)}{2R^2 r(5\ln 3 - 2)} =$$

$$= \varepsilon_0 \frac{9R^2 - 10R^2 + r^2}{\cancel{10R^2 - r^2}}\cdot\frac{U\cancel{(10R^2 - r^2)}}{2R^2 r(5\ln 3 - 2)} =$$

$$= \varepsilon_0 \frac{U(r^2 - R^2)}{2R^2 r(5\ln 3 - 2)}$$

$$\boxed{P(r) = \frac{\varepsilon_0 U(r^2 - R^2)}{2R^2 r(5\ln 3 - 2)}} \qquad (13) \qquad (R < r < R_0)$$

Найдем поверхностные плотности зарядов

$$\sigma' = P_n = P\cos\alpha$$

α = угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{P}$

нормаль к пов   поляризации

Для внутренней обкладки $\quad \vec{P} \uparrow\downarrow \vec{n} \quad \cos\alpha = -1$

$$\sigma_1' = -\frac{\varepsilon_0 U (R^2 - R^2)}{2R^2 r (5\ln 3 - 2)} = 0 \qquad \boxed{\sigma_1' = 0}$$

Для внешней обкладки $\quad \vec{P} \uparrow\uparrow \vec{n} \quad \cos\alpha = 1$

$$\sigma_2' = \frac{\varepsilon_0 U (9R^2 - R^2)}{2R^2 \cdot 3R (5\ln 3 - 2)} = \frac{4\varepsilon_0 U}{r(5\ln 3 - 2)}$$

$$\boxed{\sigma_2' = \frac{4\varepsilon_0 U}{3R(5\ln 3 - 2)}}$$

Дип момент
$q \cdot l \quad Кл \cdot м$
Поляр
$\frac{Кл \cdot м}{м^3} = \frac{Кл}{м^2}$

По теореме Гаусса для вектора $\vec{P}$ найдем распределение объемной плотности связанных зарядов внутри цилиндра:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho'$$

В цилиндрических координатах:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r P_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_z}{\partial z}$$

Т.к. $\vec{P}$ зависит только от r:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r P(r)\right)$$

Подставив (13), получаем:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{\varepsilon_0 U (r^2 - R^2)}{2R^2 \cancel{r} (5\ln 3 - 2)}\right) = \frac{\varepsilon_0 U}{\cancel{2}R^2 \cancel{r}(5\ln 3 - 2)} \cdot \cancel{2r} = \frac{\varepsilon_0 U}{R^2 (5\ln 3 - 2)}$$

$$\boxed{\rho' = -\frac{\varepsilon_0 U}{R^2(5\ln 3-2)}}$$

Определим E_{MAX}:

$$E'(r) = \frac{U}{2(5\ln 3-2)R^2}\cdot\frac{d}{dr}\frac{(10R^2-r^2)}{r} =$$

$$= \frac{U}{2(5\ln 3-2)R^2}\cdot\left(\frac{d}{dr}\frac{10R^2}{r} - \frac{d}{dr}r\right) =$$

$$= \frac{U}{2(5\ln 3-2)R^2}\left(-\frac{10R^2}{r^2} - 1\right) =$$

$$= \frac{-U(10R^2+r^2)}{2(5\ln 3-2)R^2r^2}$$

$\cancel{E'(r) = 0}$

$\cancel{10R^2 + r^2} = 0$

При $R \le r \le R_0$ $E'(r) < 0 \Rightarrow E_{MAX} = E(R) = \frac{9UR^2}{2(5\ln 3-2)R^3} = \frac{9U}{2(5\ln 3-2)R}$

Найдем емкость конденсатора на 1-цу длины:

$$C_h = \frac{q}{Uh} = \frac{\lambda}{U} = \frac{9\pi\varepsilon_0 \cancel{U}}{(5\ln 3-2)\cancel{U}} = \frac{9\pi\varepsilon_0}{5\ln 3-2}$$

+ проверки

Выполним проверку:

$$q' = \int_V \rho'(r)\,dr + \int_S \sigma'(M)\,dS$$

$$q' = \int_R^{3R} -\frac{\varepsilon_0 U}{R^2(5\ln 3-2)}\,2\pi r\cdot h\,dr + \int_S \frac{4\varepsilon_0 U}{3R(5\ln 3-2)}\,dS =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0 U\cdot 2\pi h}{R^2(5\ln 3-2)}\cdot\int_R^{3R} r\,dr + \frac{4\varepsilon_0 U}{\cancel{3R}(5\ln 3-2)}\cdot 2\pi\,\cancel{3R}\,h =$$

$$= -\frac{2\pi h\varepsilon_0 U}{R^2(5\ln 3-2)}\cdot\left(\frac{9R^2}{2}-\frac{R^2}{2}\right) + \frac{2\pi h\cdot 4\varepsilon_0 U}{(5\ln 3-2)} =$$

$$= -\frac{2\pi h\varepsilon_0 U\cdot 4\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}(5\ln 3-2)} + \frac{2\pi h\cdot 4\varepsilon_0 U}{5\ln 3-2} =$$

$$= -\frac{8\pi h\varepsilon_0 U}{5\ln(3)-2} + \frac{8\pi h\varepsilon_0 U}{5\ln 3-2} = 0\ !$$

Значит $E(r)$ ... найдено верно.

$$\frac{CU^2}{2} = \int_V w\,dV,$$ где w – объемная плотность энергии эл/ст поля

$$w = \frac{ED}{2}$$

$$\int_V w\,dV = \int_R^{3R}\frac{1}{2}\,\frac{U(10R^2-r^2)}{2(5\ln 3-2)R^2 r}\cdot\frac{9\varepsilon_0 U}{2(5\ln 3-2)r}\,dr =$$

$$= \frac{9\varepsilon_0 U^2}{8(5\ln 3-2)^2R^2}\int_R^{3R}\left(\frac{10R^2}{r^2}-1\right)dr = \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\varepsilon_0 U^2}{\underset{4}{\cancel{8}}(5\ln-2)^2R^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{\cancel{3}}\cancel{R} =$$

$$= \frac{21\varepsilon_0 U^2}{4(5\ln-2)^2R}$$

$$\frac{Cu^2}{2} = \frac{9\pi\varepsilon_0 h u^2}{2(5\ln 3-2)}$$

$$\int_V w\,dV = \int_R^{3R} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{u(10R^2-r^2)}{2(5\ln 3-2)R^2\cancel{r}} \cdot \frac{9\varepsilon_0 u}{2(5\ln 3-2)r} \cdot \cancel{2}\pi \cancel{r} h\,dr =$$

$$= \frac{9\pi\varepsilon_0 h u^2}{4(5\ln 3-2)^2 R^2} \int_R^{3R} \left(\frac{10R^2}{r} - r\right) dr =$$

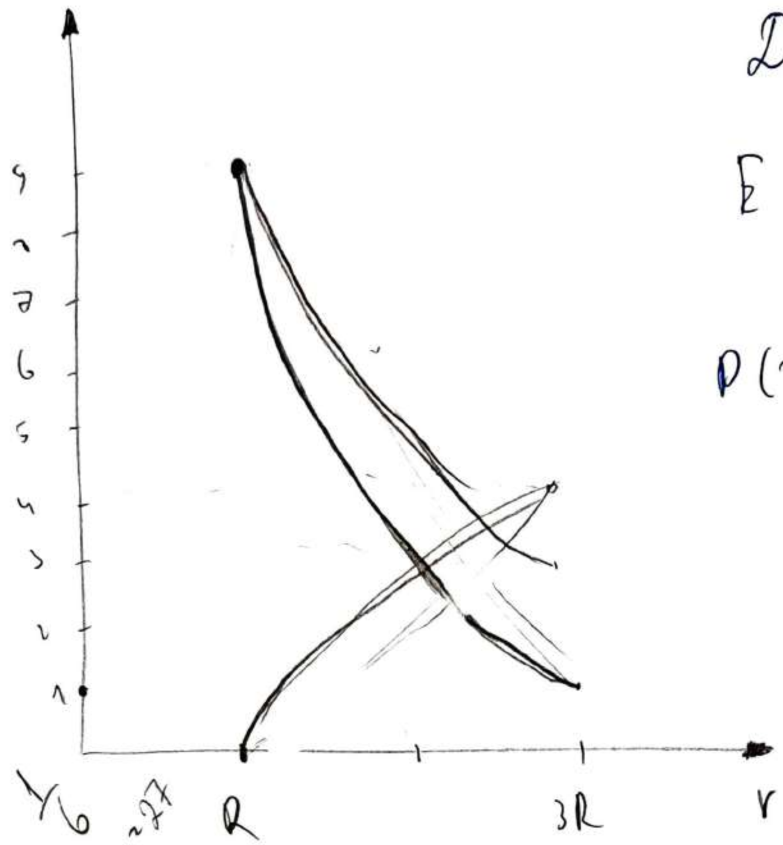
$$= \frac{9\pi\varepsilon_0 h u^2}{4(5\ln 3-2)^2 R^2} \left(10R^2 \ln|r| - \frac{r^2}{2}\right)\Big|_R^{3R} =$$

$$= \frac{9\pi\varepsilon_0 h u^2}{4(5\ln 3-2)^2 R^2} \left(10R^2 \ln 3R - \frac{9R^2}{2} - 10R^2 \ln R + \frac{R^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{9\pi\varepsilon_0 h u^2 \cdot (10R^2\ln 3 - 4R^2)}{4(5\ln 3-2)^2 R^2} = \frac{9\pi\varepsilon_0 h u^2 \cdot \cancel{2}\cancel{R^2}\cancel{(5\ln 3-2)}}{\cancel{4}_{2}\,(5\ln 3-2)^{\cancel{2}}\cancel{R^2}} =$$

$$= \frac{9\pi\varepsilon_0 h u^2}{2(5\ln 3-2)}$$

$\frac{Cu^2}{2} = \int_V w\,dV$! $\Rightarrow$ C_h – найдена верно



$$D(3R) = \frac{3\,\varepsilon_0 U}{2(5\ln 3-2)R}$$

$$E(3R) = \frac{U}{2(5\ln 3-2)R}$$

$$P(3R) = \frac{\varepsilon_0 U \cdot 8R^2}{2R^2 \cdot 3R(5\ln 3-2)^2} = \frac{4\,\varepsilon_0 U}{3R(5\ln 3-2)}$$

$$\frac{4}{3}+\frac{1}{2} = \frac{8+3}{6} = \frac{11}{6}$$

$\frac{1}{6}$ $9/2$ $9{,}06 \approx 7$ $9/2$

$$\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{U(10R^2-r^2)\;2(5\ln 3-2)R^2}{2(5\ln 3-2)R^2 r \cdot U \cdot 9R^2} = \frac{(10R^2-r^2)}{Rr}$$

$$\frac{D(r)}{D(R)} = \frac{R}{r}$$

$$\frac{3}{2}X = X +$$

$$\frac{P(r)}{P(R)} = \frac{(r^2-R^2)}{r}$$

$$E(R) = \frac{9U}{2(5\ln 3-2)R} \qquad D(R) = \frac{9\,\varepsilon_0 U}{2(5\ln 3-2)R}$$

$$E(3R) = \frac{U}{2(5\ln 3-2)R} \qquad D(3R) = \frac{3\,\varepsilon_0 U}{2(5\ln 3-2)R}$$

$$P(R) = 0 \qquad D = \varepsilon_0 E + P$$

$$P(3R) = \frac{9\,\varepsilon_0 U}{R(5\ln 3-2)}$$

$$D(3R) = \frac{9\,\varepsilon_0 U}{2(5\ln 3-2)\cdot 3R} = \frac{3\,\varepsilon_0 U}{2(5\ln 3-2)}$$

$$E(3R) = \frac{U(10R^2-9R^2)}{2(5\ln 3-2)R^2\cdot 3R} = \frac{U}{6(5\ln 3-2)R}$$

$$P(3R) = \frac{4\,\varepsilon_0 U R^2}{R\cdot 3R^2(5\ln 3-2)} = \frac{4}{3}\,\frac{\varepsilon U}{R(5\ln 3-2)}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{1}{6} + \frac{8}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$