Экзамен по дискретной математике.

ИУ7-33Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
БИЛЕТ №10
ЛИСТ 1 из 7

№1.

Степень элемента группы

$a^0 \rightleftharpoons e, \quad a^1 \rightleftharpoons a, \quad a^n \rightleftharpoons (a^{n-1}) * a, \quad n \geq 2$

$a^{-n} \rightleftharpoons (a^n)^{-1}, \quad n \geq 0$

Группа $\mathcal{G} = (G, \cdot, 1)$ наз. циклической, если

$(\exists a \in G)(\exists n \in \mathbb{Z})(\forall x \in G)(x = a^n)$

Тогда a — образующий элемент данной циклической группы.

Под порядком конечной группы понимают число её элементов.

Под порядком образующего элемента a конечной циклической группы понимают наименьшее $n > 0$: $a^n = 1$.

Теорема (о порядке образующего элемента конечной циклической группы).

Порядок конечной циклической группы совпадает с порядком образующего элемента этой группы.

Док-во.

Пусть $G = (G, \cdot, 1)$ — конечная циклическая группа с ~~порядком~~ образующим элементом a,

ИУ7-33Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
БИЛЕТ № 10
Лист 2 из ~~10~~ 7

$n > 0$ - порядок этого элемента.

1) Докажем, что все степени $a^0 = 1$, $a^1 = a$, ..., a^{n-1} попарно различны.

Предположим противоположное:

$a^p = a^q$, где $p \neq q$ и $p > q$, $0 \le p, q \le n-1$.

Тогда:

$$a^p \cdot a^{-q} = a^q \cdot a^{-q}$$

$$a^p \cdot a^{-q} = 1$$

(a) $$a^{p-q} = 1, \text{ где } p - q < n$$

Это равенство не может быть выполнено, т.к это противоречит определению числа n, как порядка a

2) Осталось доказать, что любая степень элемента a принадлежит мн-ву $\{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$:

$\forall m \in \mathbb{Z} \; \exists n, k \in \mathbb{Z}: m = kn + q$, где $q = mod(m, n)$

Тогда:

$$a^m = a^{kn+q} \overset{(a),(б)}{=} (\underbrace{a^n}_{1})^k \cdot a^q = a^q, \text{ но } 0 \le q \le n-1, \text{ то}$$

есть $a^m = a^q \in \{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$

Поскольку каждый элемент группы G есть некоторая степень элемента a, то $G = \{1, a, \ldots, a^{n-1}\}$ и порядок группы равен n

ч.т.д.

ИУ7-33Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
БИЛЕТ N 10
ЛИСТ 3 из 7

Свойства степеней

1) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ (а)

2) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (в)

Оба используют в док-ве (отмечены в нем)

Найдем образующий элемент:

Возводим 2, 3, 4, ... 16 в степени от 0 до 16 и находим остатки по модулю 17. Если будут встречены все остатки от 0 до 16, то элемент образующий.

3 - подходит, => группа явл. циклической.

Еще один элемент находим в или 3 в степень взаимно простого с 16 числа % 17:

$3^3 \% 17 = 9$; 9 - тоже образующий элемент.

N2

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 18 & +\infty \\ 12 & +\infty & 4 & 8 \\ +\infty & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & +\infty \end{pmatrix}$$

$R^+ = (R^+, \min, +, +\infty, 0)$

Первый столбец:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 + 0 \\ x_2 = 12 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 \\ x_3 = 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 \\ x_4 = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 \\ x_4 = 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 5 \end{cases} ,$$

ИУ7-33Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
Билет №10
Лист 4 из ~~10~~ 7

Второй столбец.

$$\begin{cases} x_1 = 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 17 x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 4\cdot x_2 + 7\cdot x_3 + 3\cdot x_4 \\ x_4 = 5\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 6 x_3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 3\cdot x_1 + 18 x_3 + 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \cancel{4}\, 7\cdot x_3 + 3\cdot x_4 + 4 \\ x_4 = 5\cdot x_1 + 6\cdot x_3 + 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 18 x_3 + 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 x_4 + 4 \\ x_4 = 5\cdot(18\cdot(3\cdot x_4 + 4) + 4) + 6\cdot(3\cdot x_4 + 4) + 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 18\cdot x_3 + 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\cdot x_4 + 4 \\ x_4 = 26\cdot x_4 + 27 + 9 + 9 x_4 + 10 + 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 18\cdot x_3 + 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\cdot x_4 + 4 \\ x_4 = 9\cdot x_4 + 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 6 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Третий столбец.

$$\begin{cases} x_1 = 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 12\cdot x_3 \\ x_2 = 12\cdot x_1 + 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 \\ x_3 = 0;\ x_4 = 5 x_1 + 6 x_2 + 6\cdot x_3 \end{cases};$$

ИУ7-33Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
Билет №10
Лист 5 из ~~10~~ 7

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 4\cdot(4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12) + 7\cdot x_3 + 3\cdot x_4 \\ x_4 = 6\cdot(4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12) + 6\cdot x_3 + 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 8\cdot x_3 + 12\cdot x_4 + 16 + 7\cdot x_3 + 3\cdot x_4 \\ x_4 = 10\cdot x_3 + 14\cdot x_4 + 18 + 6\cdot x_3 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 7\cdot x_3 + 3\cdot x_4 + 16 \\ x_4 = 6\cdot x_3 + 14\cdot x_4 + 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 7^*(3\cdot x_4 + 16) \\ x_4 = 6\cdot x_3 + 14\cdot x_4 + 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 3\cdot x_4 + 16 \\ x_4 = 6\cdot(3 x_4 + 16) + 14\cdot x_4 + 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 3\cdot x_4 + 16 \\ x_4 = 9\cdot x_4 + 22 + 14\cdot x_4 + 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 3\cdot x_4 + 16 \\ x_4 = 9\cdot x_4 + 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4\cdot x_3 + 8\cdot x_4 + 12 \\ x_3 = 3\cdot x_4 + 16 \\ x_4 = 9^*\cdot 5 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 8 \\ x_2 = 12 \\ x_4 = 5 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ИУ7-33Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
Билет № 10
Лист 6 из ~~10~~ 7

$$\begin{cases} x_1 = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 18 \\ x_2 = 12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_4 + 4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \cdot x_2 + 18 \\ x_2 = 16 x_2 + 30 + 8 x_4 + 4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 9 x_2 + 6 \cdot x_2 + 6 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \cdot x_2 + 18 \\ x_2 = 8 \cdot x_4 + 4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 14 \cdot x_4 + 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 6 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

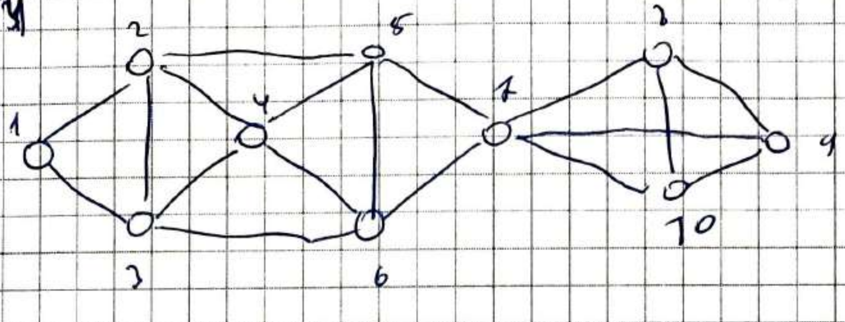
Четвертый столбец.

$$\begin{cases} x_1 = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 \\ x_2 = 12 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 \\ x_3 = 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 \\ x_2 = 12 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3 + 8 \\ x_3 = 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 + 3 \\ x_2 = 16 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 8 \\ x_3 = 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 3 \\ x_4 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 3 \\ 12 & 0 & 4 & 7 \\ 8 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

№9



ИУ7-33Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА

БИЛЕТ №10

Группа автоморфизмов — произведение двух групп:

1) на вершинах 8, 9, 10

2) группа, порожденная произведением двух транспозиций: (23)(56)

Циклический индекс.

$$P(x_1, \dots, x_{10}) = \frac{1}{2}\left(x_1^7 + x_1^3 x_2^2\right) \cdot \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right) =$$

Число трехцветных раскрасок графа:

$$P(3, \dots, 3) = \frac{1}{2}\left(3^7 + 3^3 \cdot 3^2\right) \cdot \frac{1}{6}\left(3^3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3\right) = 11340$$

Если убрать вершину 4: добавляются транспозиции (26) и (35), тогда циклический индекс:

$$P(x_1, \dots, x_9) = \frac{1}{4} \cdot \left(x_1^6 + 2x_1^4 \cdot x_2 + x_1^2 x_2^2\right) \cdot \frac{1}{6}\left(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3\right)$$

$$P(3, \dots, 3) = \frac{1}{4}\left(3^6 + 2 \cdot 3^4 \cdot 3 + 3^2 \cdot 3^2\right) \cdot \frac{1}{6}\left(3^3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3\right) =$$

$$= 3240$$

Если убрать вертикальное ребро справа, то вершины 8 и 10 будут взаимозаменяемы между собой, но не с вершиной 9, будет только 2 автоморфизма в этой группе.