Билет 0

2. $m = 50 \quad (\sigma = 7)$

а) ~~1-ое нер-во Чебышева:~~ $\cancel{\forall \varepsilon \quad P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{m}{\varepsilon}}$

$\cancel{P}$

Формализуем задачу:

Пусть X – сл. вел, прин. значения, равные числу баллов, набранных сл. студентом

$X \geq 0$

Тогда $MX = m = 50$

$DX = \sigma^2 = 49$

1) Исп. 1-ое нер-во Чеб:

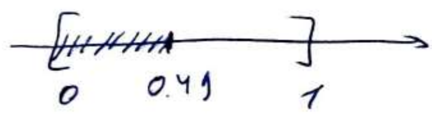
$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{m}{\varepsilon}$$

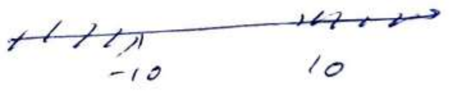
$$P\{X \geq 60\} \leq \frac{50}{60} = \frac{5}{6} \approx 0,83$$

2) Исп. 2-ое нер-во Чеб:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X - m| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$P\{X \geq 60\} = P\{X - 50 \geq 10\} \leq P\{|X - MX| \geq 10\} \leq \frac{49}{100} = 0.49$$





3. $\gamma = 0.95$

$n = 21$

$\bar{x} = -2.34$

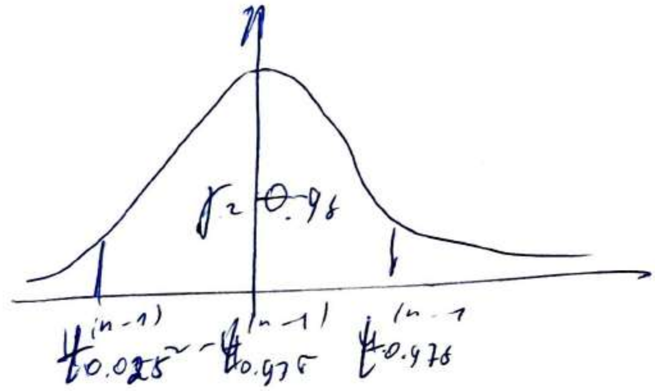
$S^2(\vec{x}) = 1.21$

1) Форм.:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(m, \sigma^2) \\ m \text{ - неизв.} \\ \sigma^2 \text{ - неизв.} \end{array}\right\} \Rightarrow g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

Задача: Построим доверительный интервал ур. $\gamma = 0.95$

$(n = 21,\ \bar{x} = -2.34,\ S^2(\vec{x}) = 1.21$



$t_{0.975}^{(n-1)}$ - квантиль ур. 0.975 распред. $St(n-1)$

$$P\left\{-t_{0.975}^{(n-1)} < \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} < t_{0.975}^{(n-1)}\right\} = 0.95$$

$$P\left\{\underbrace{\bar{X} - \frac{S(\vec{X}) \cdot t_{0.975}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}} < m < \underbrace{\bar{X} + \frac{S(\vec{X}) \cdot t_{0.975}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}}_{\bar{m}}\right\} = 0.95$$

Найдем дов. инт.:

1) $n - 1 = 20$

2) $t_{0.975}^{(20)} = 2.086$

3) $\frac{S(\vec{x})\, t_{0.975}^{(20)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1.21} \cdot 2.086}{\sqrt{21}} \approx 0.5$

4) $\underline{m} = -2.34 - 0.5 = -2.84$

$\bar{m} = -2.34 + 0.5 = -1.84$

Ответ: $(-2.84, -1.84)$

offline билет 3.

1) $n = 10$

$\bar{x}_n = 0{,}66$

$\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_n)^2 = 22.5 \cdot 10^{-3}$

$\gamma = 0.9$

Решение:

Пусть X – сл. в. принимающая зн-е, равное погрешности постоянного з-р. комплекса.

Тогда $X \sim N(m, \sigma^2)$

m – среднее значение пор. ст-ти.

σ^2 – СКО.

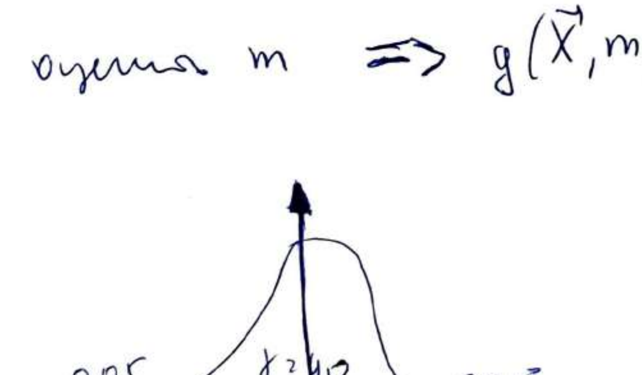
Т.о.

$X \sim N(m, \sigma^2)$

m – неизв

σ^2 – неизв

1) оценка m $\Rightarrow$ $g(\vec{X}, m) = \dfrac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$



$t^{(n-1)}_{0.95}$ – квантиль уровня 0.95 распр-я $St(n-1)$

$$P\left\{-t^{(n-1)}_{0.95} \le \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} < t^{(n-1)}_{0.95}\right\} = 0.9$$

$$P\Big\{\underbrace{\bar X - \frac{S(\vec X)\, t_{0.95}^{(n-1)}}{\sqrt n}}_{\underline{m}} \le m < \underbrace{\bar X + \frac{S(\vec X)\, t_{0.95}^{(n-1)}}{\sqrt n}}_{\bar m}\Big\} = 0.9$$

Вычисл.:

а) $n-1 = 9$

б) $t_{0.95}^{9} = 1.833$

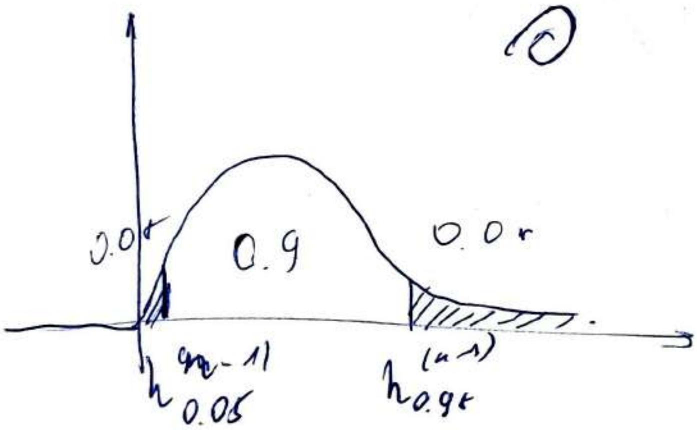
в) $\frac{S(\vec X)\, t_{0.95}^{(n-1)}}{\sqrt n} = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 22.5\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{1.833}{\sqrt 9} = 0.03$

г) ~~$\underline{m} = 10 - 5\cdot 10^{-4}$, $\bar m = 10 + 5\cdot 10^{-4}$~~

2) оценка σ^2 $\Rightarrow$ $g(\vec X, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2(\vec X)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

д) 0.85 ± 0.03 [illegible]

$h_\alpha^{(n-1)}$ – квантиль уровня α распр. $\chi^2(n-1)$



$$P\Big\{h_{0.05} < \frac{(n-1)S^2(\vec X)}{\sigma^2} < h_{0.95}\Big\} = 0.9$$

$$P\Big\{\frac{1}{h_{0.05}} > \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2(\vec X)} > \frac{1}{h_{0.95}}\Big\} = 0.9$$

$$P\Big\{\sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec X)}{h_{0.95}^{(n-1)}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec X)}{h_{0.05}^{(n-1)}}}\Big\} = 0.9$$

Ответ:
~~$m \in (9.995, 10.005)$~~
для σ^2 ~~[illegible]~~
$(1.3\cdot 10^{-3}, 1.3\cdot 10^{-2})$

Вычисл.

а) $n-1 = 9$

б) $h_{0.95}^{(n-1)9} = 16.92$

в) $h_{0.05}^{9} = 1.73$

г) $S^2 = \frac{1}{9}\cdot 22.5\cdot 10^{-3} = 2.5\cdot 10^{-3}$

д) $\underline{\sigma} = \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec X)}{h_{0.95}^{(n-1)}}} = \sqrt{\frac{9\cdot 2.5\cdot 10^{-3}}{16.92}} =$ ~~[illegible]~~ ≈ 0.03

е) $\bar\sigma = \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec X)}{h_{0.05}^{(n-1)}}} = \sqrt{\frac{9\cdot 2.5\cdot 10^{-3}}{1.73}}$ $\approx$ ~~$1.3\cdot 10^{-2}$~~ ≈ 0.11

Билет 11 (offline)

Пусть X - сл. вел., принимающая зн.-е, равное числу студентов сдавших сессию без троек, т.е. числу успехов

По условию: проверяется $n=100$ шт. по схеме Б. с вер-тью успеха $p=0.1$ $(q=1-p=0.9)$

"успех" = {студент сдал}

k - число успехов

$$P\left\{0.05 < \frac{k}{n} < 0.2\right\} = P\{\underset{k_1}{5} < k < \underset{k_2}{20}\} = \{Th\ M-Л\} =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) -$$

Форм. задачи:

Пусть "успех" = {студент сдал сессию без троек}

По усл. проверяется $n=100$ штук по сх. Б с вер-тью успеха $p=0.1$ $(q=1-p=0.9)$

Пусть k - число успехов

Тогда надо найти $P\left\{0.05 < \frac{k}{n} < 0.2\right\} = ?$

б) $$P\left\{0.05 < \frac{k}{100} < 0.2\right\} = P\{\overset{k_1}{5} < k < \overset{k_2}{20}\} = \{Th\ M-Л\} =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi_0\left(\frac{20 - 100\cdot 0.1}{\sqrt{100\cdot 0.1\cdot 0.9}}\right) -$$

$$- \Phi_0\left(\frac{20 - 10}{\sqrt{100\cdot 0.1\cdot 0.9}}\right) = \Phi_0\left(\frac{20-10}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{5-10}{3}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{10}{3}\right) - \Phi_0\left(\frac{-5}{3}\right) = \Phi_0\left(\frac{10}{3}\right) + \Phi_0\left(\frac{5}{3}\right) \approx$$

$\approx \varphi_0(3.33) + \varphi_0(1.67) \approx 0.499 + 0.453 = 0.952$

Ответ: 0.952

«успех» = {сдача без 3}

Пусть X — сл. вел, прин. зн-е, равное числу успехов

Тогда $X \sim B(n, p)$ — бином. сл. вел $(n = 100, p = 0.1)$

$MX = np = 100 \cdot 0.1 = 10$

$DX = npq = 100 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 9$

$P\{5 < k < 20\} \approx P\{5 \le k \le 20\} = P\{-5 \le k - MX \le 10\} \geq$

$\geq P\{|X - MX| \le 10\} \geq \{\text{г нер-во Чеб}\} \geq 1 - \frac{9}{100} = 1 - 0.09 = 0.91$

0 0.91 ↑↑

0.95 ← all is OK.

Билет 7 offline.

Пусть $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ — сл. вел., явл-ся ср. арифметическим одинаково распр. вел-н X_i, $i = \overline{1,n}$

При этом $DX_i = \sigma_i^2 = \sigma^2 = б$ $MX_i = m_i = m$

~~Тогда $\exists MX$ и $\exists DX \Rightarrow \forall \varepsilon$ $P\{|X-MX| \le \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$~~

Из-но, что $P\{|X-MX| \le 0.01\} \ge 0.9973$

Найти: n — ?

$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$MX = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = m$

$DX = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{\sigma^2}{n}$

X_i — незав.

$P\{|X-MX| \le 0.01\} = P\left\{\frac{|X-MX|}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{0.01}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} =$

$= \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ X_i \text{ — независ. один. р-ны} \\ \exists MX_i = m,\ \exists DX_i = \sigma^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$ ~~$\left\{ \text{для послед. } X_1, X_2, \ldots \text{ вып-ся ЦПТ}, Y = \frac{X-m}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0,1) \text{ прибл.} \right\}$~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{$ для посл-ти $X_1, X_2, \ldots$ — вып-ся ЦПТ $\}$ $Y =$

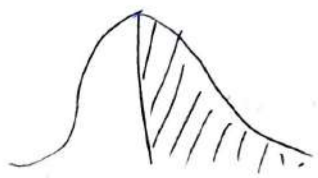
$Y = \frac{X-m}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$P\{|X-MX| \le 0.01\} = P\left\{\frac{|X-MX|}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{0.01}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} =$$

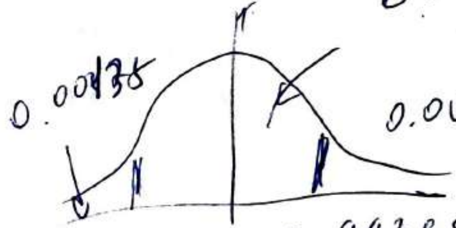
$$= \left\{\begin{array}{l} X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ X_1, X_2, \ldots \text{ - посл-ть независ. сл. вел.} \\ \exists MX_i = m,\ \exists DX_i = \sigma^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{при посл-ти } X_1, X_2, \ldots \\ \text{вып-ся ЦПТ} \\ Y = \frac{X-m}{\sigma/\sqrt{n}} \end{array}\right\} =$$

$$= P\left\{|Y| \le \frac{0.01}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \text{Т.к. вып-ся ЦПТ} \\ Y \Rightarrow Z \sim N(0,1) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \text{Предпол.,} \\ n \ge 200 \\ n \gg 1 \Rightarrow Y \sim N(0,1) \end{array}\right\}$$

$$= 2\Phi_0\left(\frac{0.01}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \ge 0.9973$$



$$\Phi_0\left(\frac{0.01}{\sqrt{5}/\sqrt{n}}\right) \ge 0.49865$$



$$\frac{0.01}{\sqrt{5}/\sqrt{n}} \ge 3$$

$$\frac{0.01}{\sqrt{5}}\sqrt{n} \ge 3$$

$$0.01\sqrt{n} \ge 3\sqrt{5}$$

$$n \ge 9 \cdot 5 \cdot 10000$$

$$n \ge 450000$$

Билет 15

Пусть X - сл. вел., пр. зн., равная ~~...~~ расстоянию от места п. до центр.

$$X \sim Exp(\lambda)$$

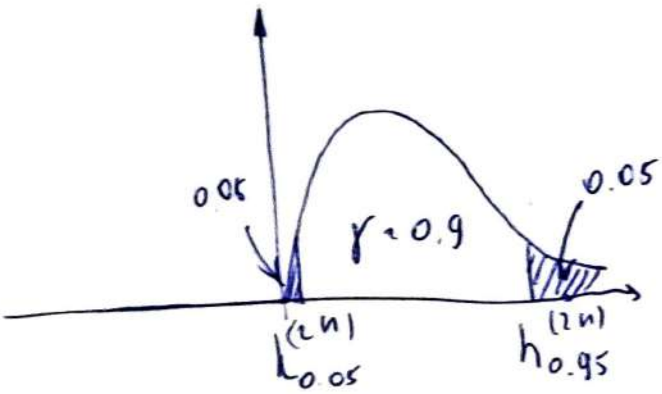
$\bar x = 4$ см

$n = 50$

По Тогда $DX = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\lambda}$ - СКО $\qquad \gamma = 0.9$

Т.о.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Exp(\lambda) \\ \lambda - \text{неизв} \\ \text{оценка } \frac{1}{\lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{стат. ед. у ст.} \\ g(\bar x, \lambda) = 2\lambda n \bar X \sim \chi^2(2n)\end{array}$$



$h_\alpha^{(2n)}$ - квантиль ур. α распр. $\chi^2(2n)$

$$P\left\{h_{0.05}^{(2n)} < 2\lambda n \bar X < h_{0.95}^{(2n)}\right\} = 0.9$$

$$P\left\{\frac{h_{0.05}^{(2n)}}{2n\bar X} < \lambda < \frac{h_{0.95}^{(2n)}}{2n\bar X}\right\} = 0.9$$

$$P\left\{\underbrace{\frac{2n\bar X}{h_{0.95}^{(2n)}}}_{\underline{\sigma}} < \frac{1}{\lambda} < \underbrace{\frac{2n\bar X}{h_{0.05}^{(2n)}}}_{\bar\sigma}\right\} = 0.9$$

а) $n = 50$

б) $2n = 100$

в) $\bar x = 4$ см

г) $\underline{\sigma} = \frac{2 \cdot \cancel{100}^{50} \cdot 4}{h_{0.95}^{(100)}} = \frac{800}{124.34} \approx \cancel{6.43}\ 3.22$

д) $\bar\sigma = \frac{2 \cdot \cancel{100}^{50} \cdot 4}{h_{0.05}^{(100)}} \approx \frac{800}{77.93} \approx \cancel{10.27}\ 5.13$

Ответ: ~~(6.43, 10.27)~~ 3.22, 5.13

Билет 17

1) Пусть a — величина вакуума, детерм. вел.

ε — сл. вел, хр. з-, равна ошибке вакуумметра

Пусть $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, где $\sigma = 0.5 \cdot 10^{-3}$ Па

Пусть $X = a + \varepsilon$ — сл. вел, прин. зн-е, равное рез-ту измерений.

$$X = \underbrace{a}_{\text{дет.}} + \underbrace{\varepsilon}_{\sim N(0,\sigma^2)} \Rightarrow X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$$

$$m_x = MX = M[a+\varepsilon] = a + \underset{0}{M\varepsilon} = a$$

$$\sigma_x^2 = DX = D[a+\varepsilon] = D\varepsilon = \sigma^2$$

$$X \sim N(a, \sigma^2)$$

По усл $n = 500$ $\quad p = 0.95$

$$u_{0.975} = 1{,}960$$
$$\sigma = 0.5 \cdot 10^{-3}$$
$$\sqrt{n} = \sqrt{500} \approx 22{,}36$$
$$\ldots = \frac{1.960 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}{22.36} \approx 4{,}4 \cdot 10^{-5}$$

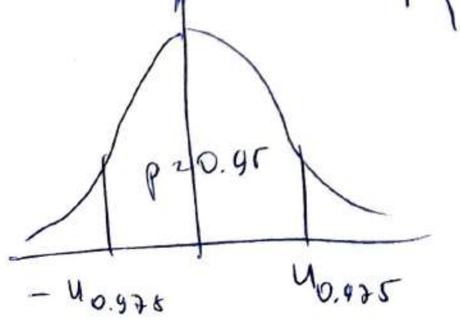
2)

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(a, \sigma^2) \\ a - \text{неизв} \\ \sigma^2 - \text{изв} \end{array}\right\} \Rightarrow g(\vec{X}, a) = \frac{a - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

Построим дов. интервал ур-ня $p = 0.95$ при $\alpha = 0.95$

для $a - \bar{X}$

$$P\left\{u_{0.025} < \frac{a - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{0.975}\right\} = 0.95$$



$$P\left\{-\frac{u_{0.975} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a - \bar{X} < \frac{u_{0.975}\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 0.95$$

$$P\left\{|a - \bar{X}| < \frac{u_{0.975}\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 0.95$$

Билет 25 off.

Пусть X – сл. вел., прин. зн-е равное ошибке погрешн. случайно выбр. фонаря

$X \sim N(m, \sigma^2)$

$MX = m$ – теор. значение ошибки погрешн.

$DX = \sigma^2$

Пусть X_i – сл. вел-на, пр. з., = ре ошибке погрешн. i-ого фон. из $n = 100$ фонарей, $i = \overline{1,n}$

$$X_i \sim X, \quad i = \overline{1,n}$$

$$MX_i = m, \; DX_i = \sigma^2$$

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ – средняя ошибка погрешн. фон.}$$

Треб. оценить

$$P\{\overline{X}_n - m > 0.5\sigma\} = P\left\{\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{0.5\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} =$$

$= \Big|$ $X_1, X_2, \dots$ – посл-ть независ. сл. величин одинак. распр. сл. вел., $\exists MX_i = m$, $\exists DX_i = \sigma^2$) $\Rightarrow$ для посл-ти $X_1, X_2, \dots$ $Y_n = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ вып-ся ЦПТ $\Big|$

$$= P\left\{Y_n > \frac{0.5}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - P\left\{Y_n \le \frac{0.5}{\sqrt{n}}\right\} =$$

$= \Big|$ Т.к. для X_1, X_2 – вып-ся ЦПТ, $Y_n \Rightarrow Z \sim N(0,1)$; Т.к. $n = 100 \gg 1$, $Y_n \sim N(0,1)$ приближ. $\Big| =$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.5}{10}\right) = 1 - \Phi(5) \approx$$

$$\approx 1 - 1 \approx 0$$

Билет 24

А "успех" = {попадание баскетбол ... 10}

$p = 0.7$ ($q = 1 - p = 0.3$

$n = 30$

$\varepsilon = 0.15$

Найти: ~~Оценка~~ P{

~~Пусть X – сл. вел., прин. ра...~~

Пусть k – число успехов

Оценка $P\{|\frac{k}{n} - p| \le \varepsilon\}$ – ?

$$\cancel{P\{|\frac{k}{n} - p| \le 0.15\} = P\{0.15 \le \frac{k}{n} - 0.7 \le 0.15\} =}$$

$$\cancel{= P\{-0.08 \le \frac{k}{30} \le 0.22\} = \{2.4 \le k \le 6.6\} = \{\text{ИЛ М-Л}\}}$$

$$\cancel{= \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi_0\left(\frac{6-21}{2.5}\right) - \Phi_0\left(\frac{3-21}{2.5}\right) =}$$

$$\cancel{= \Phi_0(4.5) - \Phi_0(6) = 0}$$

$$P\{|\frac{k}{n} - p| \le \varepsilon\} = P\{|k - np| \le n\varepsilon\} = P\{-n\varepsilon \le k - np \le n\varepsilon\} =$$

$$= P\{-n\varepsilon + np \le k \le n\varepsilon + np\} = \{\text{ИЛ М-Л}\} =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{n\varepsilon + \cancel{np} - \cancel{np}}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{-n\varepsilon + \cancel{np} - \cancel{np}}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= 2\Phi_0\left(\frac{30 \cdot 0.15}{\sqrt{30 \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) = 2\Phi_0(1.79) = 2 \cdot 0.46327 =$$

$$= 0.92654$$

Билет 4В

$f_Y(y) = \frac{2\lambda^2}{y^3}, \quad y \geq \lambda, \quad \lambda > 0$

$$\hat{\lambda}(\vec{Y}) = \frac{2n-1}{2n} \min_{k=\overline{1,n}} \{Y_k\}$$

$\vec{Y}$ – сл. выб. из ген. сов. Y

а) Оценка несмещ., если

$$M[\hat{\lambda}(\vec{Y})] = \lambda$$

$$M[\hat{\lambda}(\vec{Y})] = M\left[\frac{2n-1}{2n} \min_{k=\overline{1,n}} \{Y_k\}\right] = \left| \text{обозн. } \underset{\text{сл. вел}}{X} = \min_{k=\overline{1,n}} \{Y_k\} \right| =$$

$$= \frac{2n-1}{2n} MX \ominus$$

Найдём MX

$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \qquad f_X = \frac{d}{dx} F_X$

1) $F_X(x) = P\{X < x\} = P\{\min_{k=\overline{1,n}}\{Y_k\} < x\} = 1 - P\{\min_{k=\overline{1,n}}\{Y_k\} \geq x\} =$

$= 1 - P\{Y_1 \geq x, Y_2 \geq x, \ldots, Y_n \geq x\} \overset{\text{незав}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{Y_k \geq x\} =$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P\{Y_k < x\}) \overset{\text{опр. ф-ии распр}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{Y_k}(x)) \overset{\text{одинак. распр}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_Y(x)) =$

$= 1 - (1 - F_Y(x))^n \ominus 1 - \frac{\lambda^2}{x^2}$

2) $F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{\lambda}^{x} \frac{2\lambda^2}{t^3}\,dt = 2\lambda^2 \int_{\lambda}^{x} t^{-3}\,dt =$

$= 2\lambda^2 \frac{t^{-2}}{-2}\Big|_{\lambda}^{x} = -\lambda^2 \frac{1}{t^2}\Big|_{\lambda}^{x} = -\lambda^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) \ominus$

$\ln L = n\ln 2 + 2n\ln\lambda - \ln\prod_{i=1}^{n} Y_i^3 = 0$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{2n}{\lambda}$$

$$\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{4n^2}{\lambda^2}$$

$-2n+1+1 = -2n+2$

$$I(\lambda) = M\left[\frac{4n^2}{\lambda^2}\right] = \frac{4n^2}{\lambda^2}$$

2)

$$D[\hat{\lambda}] = D\left[\frac{2n-1}{2n}\min_{u=1..n}\{Y_u\}\right] = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 D[\min Y_u] =$$

$$= \ldots D[X] = \ldots (M[X^2] - (MX)^2) = \left(\frac{n}{n-1}\lambda^2 - \frac{4n^2\lambda^2}{(2n-1)^2}\right) \ldots \ominus$$

$$M[X^2] = \int_\lambda^{+\infty} x^2 \cdot \frac{2n\lambda^{2n}}{x^{2n+1}}\,dx = 2n\lambda^2\int_\lambda^{+\infty}\frac{1}{x^{2n-1}}\,dx =$$

$$= \frac{2n\lambda^2}{-2n+2}x^{-2n+2}\Big|_\lambda^{+\infty} = \frac{2n\lambda^2}{-2n+2}\frac{1}{x^{2n-2}}\Big|_\lambda^{+\infty} =$$

$$= \frac{n\lambda^2}{-n+1}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda^{2n-2}}\right) = \frac{n\lambda^{2n}}{n-1}\frac{1}{\lambda^{2n-2}} = \frac{n}{(n-1)}\lambda^2$$

$$\ominus\ \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\cdot\frac{n}{n-1}\lambda^2 - \cancel{\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}\cdot\frac{(2n\lambda)^2}{(2n-1)^2}} =$$

$$= \frac{(2n-1)^2}{4n(n-1)}\lambda^2 - \lambda^2$$

$$\frac{1}{I(\lambda)} = \frac{\lambda^2}{4n^2}\ \frac{1}{\frac{4n^2}{\lambda^2}\left(\frac{(2n-1)^2}{4n(n-1)}\lambda^2 - \lambda^2\right)} = \cancel{\frac{\lambda^2(n-1)}{(2n-1)^2 n}} \neq 1$$

$$F_X(x) = \cancel{1-(1-\frac{\lambda^2}{x^2})^n} = 1-(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{\lambda^2}{x^2})^n =$$

$$= 1-\frac{\lambda^{2n}}{x^{2n}}$$

$$f_X = \frac{d}{dx}\left(1-\frac{\lambda^{2n}}{x^{2n}}\right) = -\lambda^{2n}\cdot(-2n)\cdot x^{-2n-1} = \frac{2n\lambda^{2n}}{x^{2n+1}}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{\lambda}^{+\infty} \cancel{x}\cdot\frac{2n\lambda^{2n}}{x^{2n+\cancel{1}}}dx = 2n\lambda^{2n}\int_{\lambda}^{+\infty}\frac{1}{x^{2n}}dx =$$

$$= 2n\lambda^{2n}\left.\frac{x^{-2n+1}}{-2n+1}\right|_{\lambda}^{+\infty} = \frac{2n\lambda^{2n}}{-2n+1}\left.\frac{1}{x^{2n-1}}\right|_{\lambda}^{+\infty \to 0} =$$

$$= -\frac{2n\lambda^{2n}}{(-2n+1)\lambda^{2n-1}} = -\frac{2n}{-2n+1}\lambda^{2n-2n+1} = -\frac{2n\lambda}{-2n+1} = \frac{2n\lambda}{2n-1}$$

$$M\hat{X} = \frac{\cancel{2n-1}}{\cancel{2n}}\cdot\frac{\cancel{2n}\lambda}{\cancel{2n-1}} = \lambda \Rightarrow \text{несмещ.}$$

б) Оценка эффективна по Рао-Кр.

$$e(\hat{\lambda}) = \frac{1}{I(\lambda)\cdot D[\hat{\lambda}]} = 1. \quad \text{или} \quad D[\hat{\theta}] = \frac{1}{I(\lambda)}$$

1) найдем $I(\hat{\lambda}) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\lambda}\right)^2\right]$

Ф-я правдоп.:

$$L(\vec{Y},\lambda) = p(Y_1,\lambda)\cdot\ldots\cdot p(Y_n,\lambda) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} Y_1,\ldots,Y_n - \text{непр. одн. распр. } w_2 \text{ би} \\ p(Y_i,\lambda) = f(Y_i,\lambda) = \frac{2\lambda^2}{Y_i^3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2^n\lambda^{2n}}{\prod_{i=1}^{n} Y_i^3} x$$

Билет 30

Перун 1

$$f_X(x) = \frac{5x^4}{\theta(1+x^5)^{\frac{1}{\theta}+1}}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

$$\hat{\theta}(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(1+X_i^5)$$

a) $M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$?

$$M[\hat{\theta}(\vec{X})] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_i^5)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[\ln(1+X_i^5)] = \frac{1}{n}\cdot n \cdot (-\theta) = -\theta$$

$1 \to 1$

$2 \to 8 \quad 2^3$

$3 \to 27 \quad 3^3$

$4 \to 64 \quad 4^3$

$$M[\ln(1+X_i^5)] = \int_{\cancel{-\infty}\ 0}^{+\infty} \ln(1+x^5)\cdot\frac{5x^4}{\theta(1+x^5)^{\frac{1}{\theta}+1}}\,dx =$$

$X_i \sim X$

т.к. нз.-тно расп. вел.

$$= \int_0^{+\infty} \ln(1+x^5)\cdot\frac{5x^4}{\theta(1+x^5)^{\frac{1}{\theta}+1}}\,dx = \left|\begin{array}{l} \text{замена} \\ 1+x^5 = t \quad x = \sqrt[5]{t-1} \\ dx = \frac{1}{5\sqrt[5]{(t-1)^4}}\,dt \\ x^4 = \sqrt[5]{(t-1)^4} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty \end{array}\right| =$$

$$= \int_1^{+\infty} \ln t \cdot \frac{\cancel{5}\cancel{\sqrt[5]{(t-1)^4}}}{\theta\, t^{\frac{1}{\theta}+1}}\cdot\frac{1}{\cancel{5}\cancel{\sqrt[5]{(t-1)^4}}}\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{\theta\, t^{\frac{1}{\theta}+1}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\theta}\left|\begin{array}{l} f = \ln t \\ dg = t^{-\frac{1}{\theta}-1}\,dt \\ g = \int t^{-(\frac{1}{\theta}+1)}\,dt = \frac{t^{-(\frac{1}{\theta}+1)+1}}{-(\frac{1}{\theta}+1)+1} \end{array}\right| = \frac{t^{-\frac{1}{\theta}}}{-\frac{1}{\theta}} = -\frac{\theta}{t^{\frac{1}{\theta}}}$$

$g = -\frac{\theta}{t^{\frac{1}{\theta}}}$ $f = \ln t$

$$= \frac{1}{\theta}\left(\ln t \cdot -\frac{\theta}{t^{\frac{1}{\theta}}}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{\theta}{t^{\frac{1}{\theta}}}\, d\ln t\right) =$$

$$= -\frac{1}{\theta}\left(0 + \theta \int^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{\theta}+1}}\, dt\right) =$$

$$= \int_1^{+\infty} t^{-\left(\frac{1}{\theta}+1\right)}\, dt = \frac{t^{-\left(\frac{1}{\theta}+1\right)+1}}{-\left(\frac{1}{\theta}+1\right)+1}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{-\frac{1}{\theta} t^{\frac{1}{\theta}}}\Bigg|_1^{+\infty} =$$

$$= \frac{-\theta}{t^{\frac{1}{\theta}}}\Bigg|_1^{+\infty \to 0} = -\theta$$ - чисто!

δ) Порядок

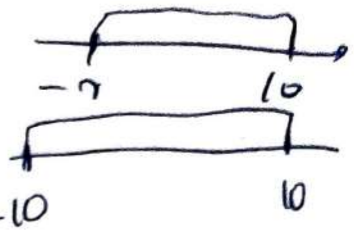
$$e = \frac{1}{I(\theta)\, D(\theta)}$$

$$D(\theta) = M[\theta^2] - (M\theta)^2$$
$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

Перепи
2

$MY = 4 \qquad DY = 16$

$P\{-4 < Y < 14\}$



$P\{-4 < Y < 14\} = P\{-8 < Y - MY < 10\} \rightarrow$

1сп $\leq P\{-10 < Y - MY < 10\} = P\{|Y - MY| < 10\} \geq 1 - \ldots$

2сп $\geq P\{|Y - MY| \leq 8\} \geq 1 - \frac{DY}{8^2} = 1 - \frac{16}{64} = 0.75$

$P\{\ldots\} \geq 0.75$