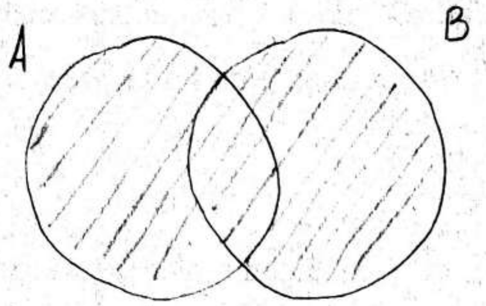
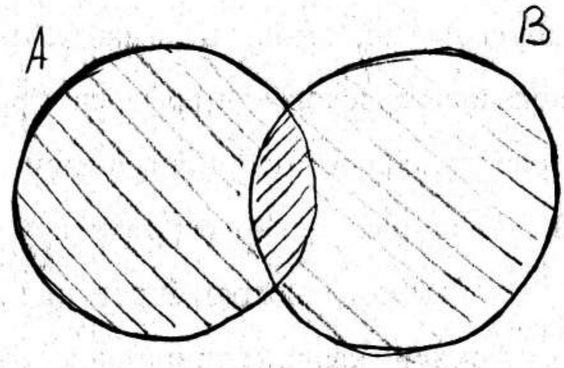
# Дискретная математика

## ДЗ 1

### Задача 1

$A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$




/// – $A \cap B$

\\\ – $A \Delta B$

/ – $A \Delta B \Delta (A \cap B)$

---

Докажем тождество методом эквивалентных преобразований

Приведем правую часть к левой.

$$A \Delta B \Delta (A \cap B) = A \Delta \big( (B \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus B) \big) =$$

$$= A \Delta (B \cap \bar{A}) = (A \setminus (B \cap \bar{A})) \cup ((B \cap \bar{A}) \setminus A) =$$

$$= A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = A \cup B \qquad *$$

Метод характеристических функций

$$\chi_{A \cup B} = \underline{\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B}$$

$$\chi_{A \Delta B \Delta (A \cap B)} = \chi_A + \chi_{B \Delta (A \cap B)} - 2\chi_A \chi_{B \Delta (A \cap B)} =$$

$$= \chi_A + (\chi_B + \chi_{A \cap B} - 2\chi_A \cdot \chi_{A \cap B}) - 2\chi_A (\chi_B + \chi_{A \cap B} - \chi_A \cdot \chi_{A \cap B}) =$$

$$= \chi_A + \chi_B + \chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_A\chi_B - 2\chi_A(\chi_B + \chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_A\chi_B) =$$

$$= \chi_A + \chi_B + \chi_A\chi_B - 2\chi_A\chi_B - \cancel{2\chi_A\chi_B} - \cancel{2\chi_A\chi_B} + \cancel{4\chi_A\chi_B} =$$

$$= \underline{\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B}$$

*

$$\left( A \triangle B \triangle (A \cap B) = \big((A \triangle B) \setminus (A \cap B)\big) \cup \big((A \cap B) \setminus (A \triangle B)\big) = \right.$$

$$\left. = (A \triangle B) \cap \overline{A \cap B} \cup A \cap B \cap \overline{A \triangle B} = \right)$$

$$A \triangle B \triangle (A \cap B) \overset{\text{асоц.}}{=} A \triangle \big((B \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus B)\big) =$$

$$= A \triangle (B \cap \overline{A \cap B} \cup \underbrace{A \cap B \cap \overline{B}}_{= \emptyset}) = A \triangle (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) =$$

$$= A \triangle (B \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cap B) = A \triangle (B \cap \overline{A}) =$$

$$= (A \setminus (B \cap \overline{A})) \cup ((B \cap \overline{A}) \setminus A)) =$$

$$= A \cap (\overline{B} \cup A) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{A}) = A \cap \overline{B} \cup A \cap A \cup B \cap \overline{A} =$$

$$= A \cap \overline{B} \cup A \cup B \cap \overline{A} = A \cup B \cap \overline{A} = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = A \cup B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A\cup B} = \underline{\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B}$$

$$\chi_{A\Delta B\Delta(A\cap B)} = \chi_{A\Delta B} + \chi_{A\cap B} - 2\chi_{A\Delta B}\cdot\chi_{A\cap B} =$$

$$= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B - 2(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\cdot\chi_A\cdot\chi_B =$$

$$= \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B - 2\chi_A^2\chi_B - 2\chi_A\chi_B^2 + 4\chi_A^2\chi_B^2 =$$

$$= \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B - 2\cancel{\chi_A\chi_B} - 2\cancel{\chi_A}\chi_B + \cancel{4\chi_A}\chi_B =$$

$$= \underline{\chi_A + \chi_B - \chi_A\cdot\chi_B}$$

Характеристические ф-ии левой и правой частей тождества совпадают. Следовательно, тождество верно.

---

## Задача 2

| | y=1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| x=1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| x=2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| x=3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| x=4 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| x=5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

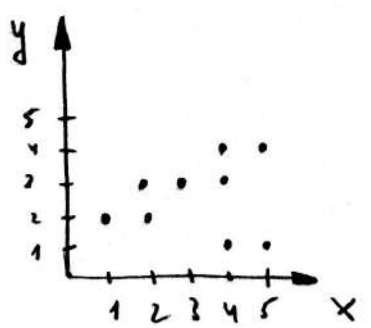
$$\rho = \{(x, y) : 2 \le |x - 2y| \le 4\}$$

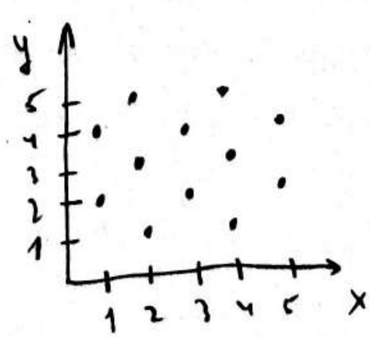
$$\sigma = \{(x, y) : (x + y + 1) = 0 \pmod 2\}$$

| | y=1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| x=1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| x=2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| x=3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| x=4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| x=5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

a)

$$\|\rho\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \|\sigma\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



б)

$$\|\rho\circ\tau\| = \|\rho\|\cdot\|\tau\|$$

$$\|\rho\circ\tau\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в)

| | Р | И | С | А | Г |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | – | – | – | + | – |
| $\tau$ | – | + | + | – | – |
| $\rho\circ\tau$ | – | – | – | – | – |

Первые 4 свойства каждого отношения распознаем по соответствующим матрицам.

Для исследования транзитивности найдем матрицы квадратов данных отношений:

$$\|\rho^2\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\sigma^2\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|(\rho\circ\tau)^2\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Общее число 2-х цветных раскрасок:

$$|R^S/\sim| = P_H(2,\dots,2) = \frac{1}{8}\left(2^8 + 4\cdot 2^2\cdot 2^3 + 2^4 + 2\cdot 2^2\right) = 51$$

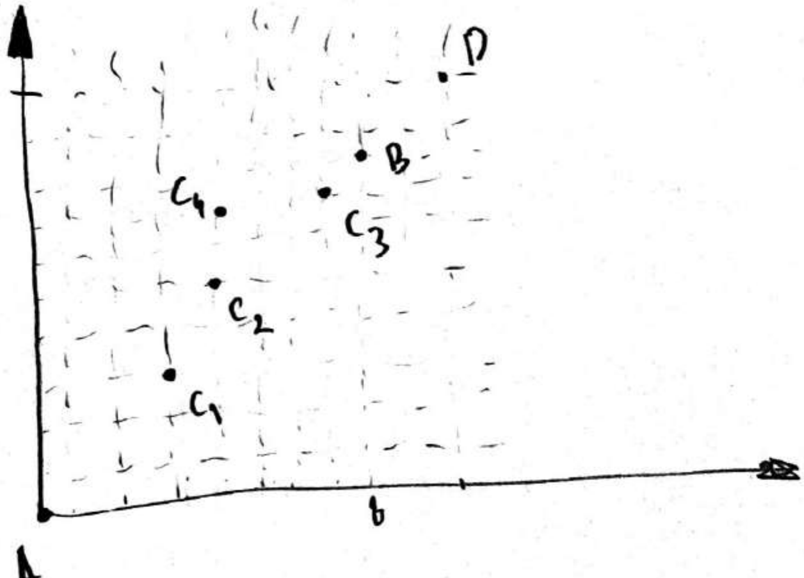
Коэф при $r^4 b^4 = 13$, то есть существует 13 неэквивалентных раскрасок, при которых каждым цветом выкрашено по 4 вершины

---

## Задача №1

$A(0,0)$, $D(10,10)$

$B(8,8)$, $C_1(3,3)$, $C_2(4,5)$, $C_3(7,7)$, $C_4(4,7)$.




Пусть $S$ - искомое мн-во ломаных,

$S_i$, $i=\overline{1,4}$ - мн-во ломаных из $A$ в $D$, прох. через $B$ и $C_i$

Тогда

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

По формуле включения и исключения.

$$|S| = (|S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4|) -$$
$$-(|S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| + |S_1 \cap S_4| +$$
$$+ |S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_4| + |S_3 \cap S_4|) +$$
$$+ (|S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| +$$
$$+ |S_1 \cap S_3 \cap S_4| + |S_2 A S_3 A S_4|) -$$
$$- |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|.$$

$O(0,0)$
$S(k,l)$
$Q(m,n)$

$O \to S \to Q$

$$C_{m+n}^{m} = \frac{(n+m)!}{m!\,n!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_{k+l}^{k}\ C_{m+n-k-l}^{m-k}$$

$$|S_1| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1 \to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$
$$= C_{3+3}^{3} \cdot C_{8+8-3-3}^{8-3} \cdot C_{10+10-8-8}^{10-8} =$$
$$= C_6^3 \cdot C_{10}^5 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{10!}{5!\,5!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$$
$$= \boxed{30240}$$

$$|S_2| = |S_{A\to C_2}| \cdot |S_{C_2 \to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$
$$= C_{4+5}^{4} \cdot C_{8+8-4-5}^{8-4} \cdot C_4^2 =$$
$$= C_9^4 \cdot C_7^4 \cdot C_4^2 = \boxed{26460}$$

$$|S_3| = |S_{A\to C_3}| \cdot |S_{C_3 \to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$
$$= C_{7+7}^{7} \cdot C_{8+8-7-7}^{8-7} \cdot C_4^2 =$$
$$= C_{14}^7 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = \boxed{41184}$$

$$|S_4| = |S_{A\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$

$$= C_{4+7}^{4} \cdot C_{8+8-4-7}^{8-4} \cdot C_4^2 = C_{11}^{4} \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 =$$

$$= \boxed{9900}$$

$$|S_1 \cap S_2| = |S_{A\to C_1}|\,|S_{C_1\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$

$$= C_6^3 \cdot C_{4+5-3-3}^{4-3} \cdot C_7^4 \cdot C_4^2 =$$

$$= C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot C_7^4 \cdot C_4^2 = \boxed{12600}$$

$$|S_1 \cap S_3| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$

$$= C_6^3 \cdot C_{7+7-3-3}^{7-3} \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 =$$

$$= C_6^3 \cdot C_8^4 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = \boxed{16800}$$

$$|S_1 \cap S_4| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$

$$= C_6^3 \cdot C_{4+7-3-3}^{4-3} \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 =$$

$$= C_6^3 \cdot C_5^1 \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 = \boxed{3000}$$

$$|S_2 \cap S_3| = |S_{A\to C_2}|\,|S_{C_2\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}|\,|S_{B\to D}| =$$

$$= C_8^4 \cdot C_{7+7-4-5}^{7-4} \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = C_8^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 =$$

$$= \boxed{15120}$$

$$|S_2 \cap S_4| = |S_{A \to C_2}| \cdot |S_{C_2 \to C_4}| \cdot |S_{C_4 \to B}| \cdot |S_{B \to D}| =$$

$$= C_9^4 \cdot C_{4+7-4-5}^{4-4} \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 =$$

$$= C_9^4 \cdot C_2^0 \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 = \boxed{3780}$$

$$|S_3 \cap S_4| = |S_{A \to C_4}| \cdot |S_{C_4 \to C_3}| \cdot |S_{C_3 \to B}| \cdot |S_{B \to D}| =$$

$$= C_{11}^4 \cdot C_{\cancel{7+7-4-7}}^{7-4} \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 =$$

$$= C_{11}^4 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = \boxed{3\,960}$$

$$|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = |S_{A \to C_1}| \cdot |S_{C_1 \to C_2}| \cdot |S_{C_2 \to C_3}| \cdot |S_{C_3 \to B}| \, |S_{B \to D}| =$$

$$= C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = \boxed{7200}$$

$$|S_1 \cap S_2 \cap S_4| = |S_{A \to C_1}| \cdot |S_{C_1 \to C_2}| \cdot |S_{C_2 \to C_4}| \cdot |S_{C_4 \to B}| \, |S_{B \to D}|$$

$$= C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot C_2^0 \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 = \boxed{1800}$$

$$|S_1 \cap S_3 \cap S_4| = |S_{A \to C_1}| \cdot |S_{C_1 \to C_4}| \cdot |S_{C_4 \to C_3}| \cdot |S_{C_3 \to B}| \cdot |S_{B \to D}| =$$

$$= C_6^3 \cdot C_5^1 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = \boxed{1200}$$

$$|S_2 \cap S_3 \cap S_4| = |S_{A \to C_2}| \cdot |S_{C_2 \to C_4}| \cdot |S_{C_4 \to C_3}| \cdot |S_{C_3 \to B}| \, |S_{B \to D}|$$

$$= C_9^4 \cdot C_2^0 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = \boxed{1512}$$

$$|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to C_3}| \cdot$$

$$\cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$

$$= C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot C_2^0 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = \boxed{720}$$

$$|S| = (30240 + 26460 + 41184 + 9900) -$$

$$-(12600 + 16800 + 3000 + 15120 + 3780 + 3960) +$$

$$+(7200 + 1800 + 1200 + 1512) - 720 =$$

$$= \boxed{63516}$$

---

Задача №2

1. Найти частное решение однородного лин. рек. соотношения с начальными условиями

$$\begin{cases} x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = 0 \; ; \\ x_1 = b_1 \; , \; x_2 = b_2 \end{cases}$$

$a_1 = 1$, $a_2 = -2$; $b_1 = 1$; $b_2 = -3$

То есть:

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$$

$$x_1 = 1 \; , \; x_2 = -3$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = 1$$

кратности 1 каждый

Тогда последовательности

$$\varphi_n^{(1)} = (-2)^n \text{ и } \varphi_n^{(2)} = 1^n$$

образуют базис в пространстве решений, а общее решение имеет вид:

$$x_n = C_1(-2)^n + C_2$$

Подставляя $n=1$, $n=2$ и используя начальные условия, получаем:

$$-\begin{cases} 1 = -2C_1 + C_2 \\ -3 = 4C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$4 = -6C_1$$

$$C_1 = -\frac{2}{3}$$

Откуда

$$C_2 = 1 + 2C_1 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

Частное решение: однородного лин. рек. соотн. с заданными начальными условиями.

$$x_n = -\frac{2}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}$$

б) Найти общее решение неоднородного лин. рек соотношения:

$$x_{n+2}+a_1 x_{n+1}+a_2 x_n = c_n$$

$a_1 = 1 \qquad a_2 = -2 \qquad c_n = 3n-1$

То есть

$$x_{n+2}+x_{n+1}-2x_n = 3n-1$$

Для нахожд. общего решения достаточно найти общ. решен. соот. и однор. соотнош., которое найдено в пункте А.

Правая часть:

$b_n = 3n-1 = 1^n P_1(n)$ – квазиполином первого типа => частное решение следует искать в виде

$$x_n^{чн} = n^s \tilde{P}_1(n) 1^n,$$

где $\tilde{P}_1(n) = An+B$, $S = 1$ – кратность корня $\lambda = 1$, хар. ур-я.

$$x_{n+2} = (n+2)(A(n+2)+B)$$

Т.е.

$$x_n^{чн} = n(An+B)$$

Подставляем в исходное соотношение

$$(n+2)(A(n+2)+B)+(n+1)(A(n+1)+B)-2n(An+B) = 3n-1$$

$$A(n+2)^2+B(n+2)+A(n+1)^2+B(n+1)-2An^2-2Bn = 3n-1$$

$$\cancel{An^2}+4An+4A+\cancel{Bn}+2B+\cancel{An^2}+2An+A+\cancel{Bn}+B-\cancel{2An^2}-\cancel{2Bn} = 3n-1$$

$$6An+5A+3B = 3n-1$$

$$\begin{cases} 6A = 3 \\ 5A+3B = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2}+3B = -1 \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$3B = -1-\frac{5}{2}$$

$$3B = -\frac{7}{2} \qquad B = -\frac{7}{6}$$

Тогда общее решение неоднородного ур-я можно записать в виде:

$$X_n^{он} = X_n^{оо} + X_n^{чн} = C_1(-2)^n + C_2 + n\left(\frac{1}{2}n - \frac{7}{6}\right)$$

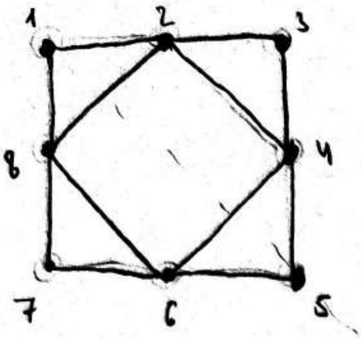
Частное решение соотношен.

$$X_n^{чн} = n\left(\frac{1}{2}n + \frac{7}{6}\right)$$

$$\frac{n^2}{2} - \frac{7}{6}n$$

$$\frac{3n^2}{6} - \frac{2(-1)^{2n}}{6}n - \frac{5}{6}n + \frac{2}{9}(-1)^{2n} =$$

$$= \frac{n^2}{2} - \frac{2n}{6} - \frac{5}{6}n + \frac{2}{9} = \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{6}$$




Стабилизатор

$St(2) = \{\varepsilon, (13)(84)(75)\}$

Орбита 2: 2, 4, 6, 8

Число автоморфизмов = 8:

$H = \{\varepsilon, (2468)(1357), (2864)(1753),$
$(13)(84)(75), ($

Стабилизатор

$St(1) = \{\varepsilon, (28)(37)(46)\}$

Орбита: 1, 3, 5, 7.

Число автоморфизмов = 8.

$H = \{\varepsilon, (1357)(2468), (1753)(2864),$
$(28)(37)(46), (15)(24)(86), (13)(84)(75),$
$(17)(26)(35), (15)(37)(26)(48)\}$

Цикловой индекс:

$$P_H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \frac{1}{8}\left(x_1^8 + 4x_1^2x_2^3 + x_2^4 + 2x_4^2\right)$$

Перечень неэквивалентных раскрасок:

$$Inv(R^S/\sim) = P_H(r+b, r^2+b^2, \ldots, r^8+b^8) =$$
$$= \frac{1}{8}\left[(r+b)^8 + 4(r+b)^2(r^2+b^2)^3 + (r^2+b^2)^4 + 2(r^4+b^4)^2\right] =$$
$$= b^8 + 2b^7r + 6b^6r^2 + 10b^5r^3 + 13b^4r^4 + 10b^3r^5 + 6b^2r^6 + 2br^7 + r^8$$