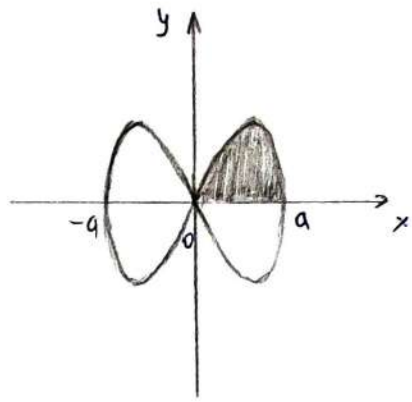
„Вычисление объемов тел по известным площадям поперечных сечений и объемов тел вращения. Приложения определённого интеграла в физике."

6.541 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin 2t \end{cases}$ $0 \leq x \leq a$



Найдем пересечения с осью Ox:

$y = 0$

$a\sin 2t = 0$

$\sin 2t = 0$

$2t = \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$t = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Две ближайшие точки пересечения с Ox:

при $t = 0$, $x = a$

при $t = \frac{\pi}{2}$; $x = 0$

$$V_x = \pi\int_0^a y^2(x)\,dx = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(a\sin 2t)^2\cdot(a\cos t)'\,dt = -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 2t\cdot a(-\sin t)\,dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\sin t\,dt = 4\pi a^3\left(\frac{\cos^5 t}{5} - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\pi a^3\left(\frac{\cos^5\frac{\pi}{2}}{5} - \frac{\cos^3\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\cos^5 0}{5} + \frac{\cos^3 0}{3}\right) = 4\pi a^3\left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi a^3}{15}$$

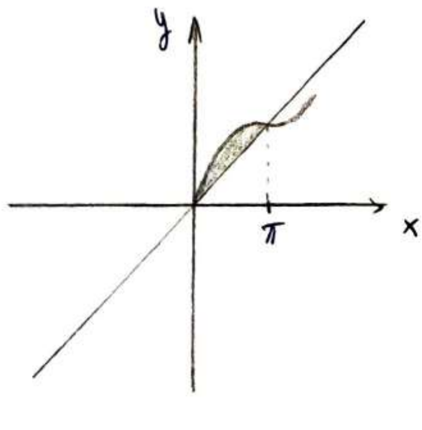
$$\int\sin^2 2t\cdot\sin t\,dt = -\int\sin^2 2t\,d\cos t = -\int(1-\cos^2 2t)\,d\cos t =$$

$$= -\int\left(1-(2\cos^2 t-1)^2\right)d\cos t = -\int(\cancel{1} - 4\cos^4 t + 4\cos^2 t - \cancel{1})\,d\cos t =$$

$$= 4\int(\cos^4 t - \cos^2 t)\,d\cos t = 4\left(\frac{\cos^5 t}{5} - \frac{\cos^3 t}{3}\right) + C$$

6.537 $y = x$ $(0 \leq x \leq \pi)$

$y = x + \sin x$



Точки пересечения:

$x = x + \sin x$

$\sin x = 0$

$x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = 0$

$x = \pi$

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x|x+\sin x|\,dx - 2\pi \int_0^{\pi} x|x|\,dx =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (x^2 + x\sin x)\,dx - 2\pi \int_0^{\pi} x^2\,dx =$$

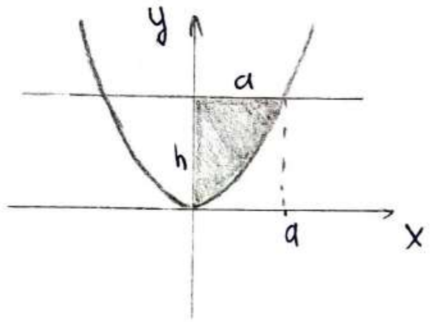
$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\sin\,dx \right) - 2\pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = 2\pi\left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2\pi\left(-\pi\cos\pi + \sin\pi\right) = 2\pi^2$$

$$\int x\sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

6.539



Уравнение параболы:

$x^2 = 2py$

$a^2 = 2ph$

$p = \frac{a^2}{2h}$

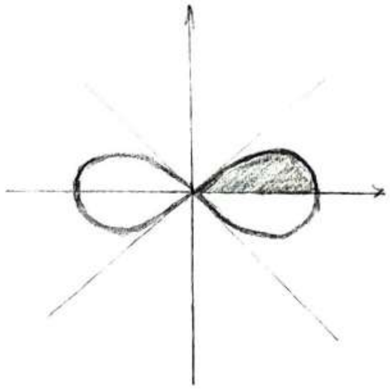
$y = \frac{x^2}{2p}$

$y = \frac{x^2}{\cancel{2} \cdot \frac{a^2}{\cancel{2}h}}$

$y = \frac{h}{a^2} x^2$

$$V = 2\pi \int_0^a \frac{h}{a^2} x^3\,dx = \frac{2\pi h}{a^2} \int_0^a x^3\,dx = \frac{2\pi h}{a^2} \frac{x^4}{4}\Big|_0^a = \frac{2\pi h}{a^2}\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^2 h}{2}$$

$\underline{6.544}$ $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$



$$V = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \cdot a\sqrt{\cos 2\varphi}\, \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{-4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\varphi - 1)\sqrt{2\cos^2\varphi - 1}\, d\cos\varphi = \left|\sqrt{2}\cos\varphi = t\right| =$$

$$\cancel{= -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{1} (t^2-1)\sqrt{t^2-1}\, dt = -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{1} \sqrt{(t^2-1)^3}\, dt =}$$

$$\cancel{= \left| t = \frac{1}{\cos p}\right| = -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\left(\frac{1}{\cos p}\right)^2 - 1\right)^3}\, \frac{\sin p}{\cos^2 p}\, dp =}$$

$$= -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{1} (t^2-1)\sqrt{t^2-1}\, dt = -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{1} \sqrt{(t^2-1)^3}\, dt = \left| t = \frac{1}{\cos p}\right| =$$

$$= -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \sqrt{\left(\left(\frac{1}{\cos p}\right)^2 - 1\right)^3}\, \frac{\sin p}{\cos^2 p}\, dp = -\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\frac{1}{\cos^2 p} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sin p}{\cos^2 p}\, dp =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin^2 p}{\cos^2 p}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sin p}{\cos^2 p}\, dp = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 p}{\cos^5 p}\, dp = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^4 p \cdot \frac{1}{\cos p}\, dp =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 p} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos p}\, dp = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^5 p} - 2\frac{1}{\cos^3 p} + \frac{1}{\cos p}\right) dp =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3}{8}\ln\left|tg\left(\frac{p}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{3\sin p}{8\cos^2 p} + \frac{\sin p}{4\cos^4 p} - \cancel{\ln\left|tg\left(\frac{p}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|} - \frac{\sin p}{\cos^2 p} +\right.$$

$$\left. + \cancel{\ln\left|tg\left(\frac{p}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3}{8}\ln\left|tg\left(\frac{p}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{5}{8}\frac{\sin p}{\cos^2 p} + \frac{\sin p}{4\cos^4 p}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3}{8}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{5}{8}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{4\cos^4\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2}) -\right.$$

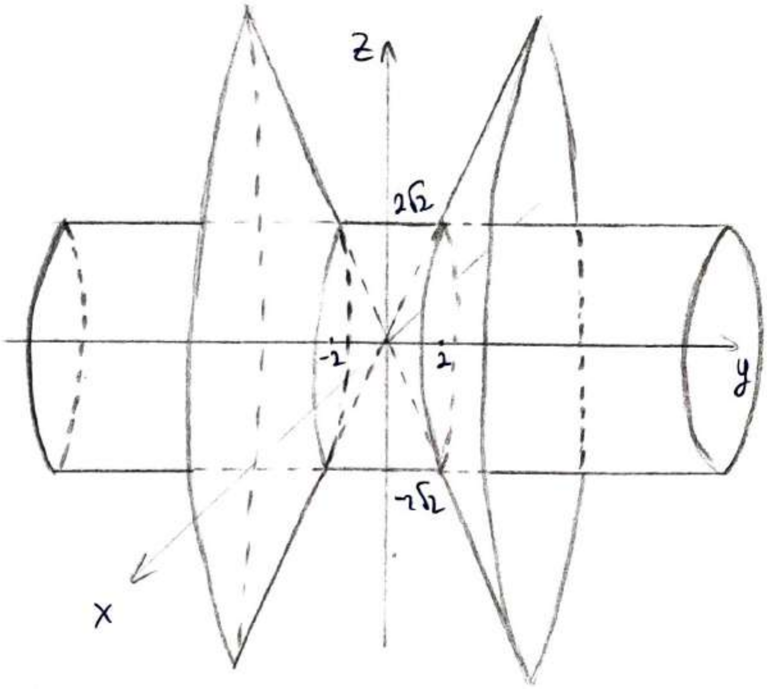
$$\left. - \frac{5}{8}\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\frac{2}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 4\frac{4}{16}}\right) = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{5}{8}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2}) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\sqrt{2}\right) = \frac{\pi a^3}{6\sqrt{2}}\left(3\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2}\right) = \frac{\pi a^3}{12}\left(3\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - 2\right)$$

Доп. задача 1

$x^2+z^2=2y^2$

$x^2+z^2=8$



Пересечение:

$2y^2=8$

$y=\pm 2$

Вычислим объем цилиндра на отрезке $[-2;2]$:

Цилиндр получается путем вращения прямой $z=2\sqrt{2}$ $(x=0)$ вокруг оси Oy:

$$V_y=\pi\int_{-2}^{2}(2\sqrt{2})^2\,dy=8\pi y\Big|_{-2}^{2}=16\pi+16\pi=32\pi$$

Вычислим объем двух конусов, образованных поверхностью $x^2+z^2=2y^2$ и плоскостями $y=-2$ и $y=2$:

~~[illegible]~~

Найдем ур-я прямых пересечения поверхности $x^2+z^2=2y^2$ с плоскостью yOz $(x=0)$:

$$z^2=2y^2$$

Наблюдается симметрия => объемы конусов одинаковы => ~~[illegible]~~ найдем объем одного из них и удвоим его.

Если $y\geqslant 0$ и $z\geqslant 0$: $z=y\sqrt{2}$

Тогда объем двух конусов:

$$V_k=2\pi\int_{0}^{2}(y\sqrt{2})^2\,dy=4\pi\int_{0}^{2}y^2\,dy=4\pi\frac{y^3}{3}\Big|_{0}^{2}=\frac{32\pi}{3}$$

Тогда искомый объем:

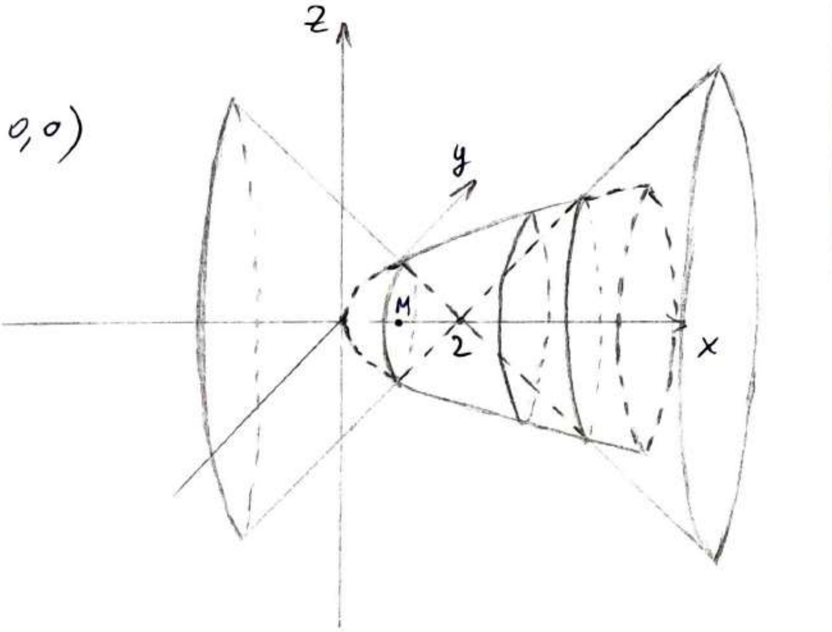
$$V=V_y-V_k=32\pi-\frac{32\pi}{3}=\frac{64\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{64\pi}{3}$

Доп. задача 2

$y^2+z^2=x$

$y^2+z^2=(x-2)^2$ $\quad M(1,0,0)$



Пересечение:

$x=(x-2)^2$

$x=x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Учитывая, что телу принадлежит т. $M(1,0,0)$ берем $x=1$

Искомый объем состоит из 2-х объемов:

1) Тела, образованного поверхностью $y^2+z^2=x$ и плоскостью $x=1$

С плоскостью XOZ поверхность $y^2+z^2=x$ пересекается по кривой: $(y=0)$

$$z^2=x$$
$$z=\sqrt{x}$$

$$V_1=\pi\int_0^1(\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^1 x\,dx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

2) Тела, образованного поверхностью $y^2+z^2=(x-2)^2$ и плоскостью $x=1$

На отрезке $[1;2]$ с плоскостью XOZ поверхность $(y=0)$ $y^2+z^2=(x-2)^2$ пересекается по кривой:

$$z^2=(x-2)^2$$

Если $z\geq 0$; $(x\leq 2)$: $z=2-x$

$$V_2=\pi\int_1^2(2-x)^2dx=-\pi\int_1^2(2-x)^2d(2-x)=-\pi\frac{(2-x)^3}{3}\Big|_1^2=$$
$$=-\pi\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Тогда искомый объем: $V=V_1+V_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$

Ответ: $\frac{5\pi}{6}$