РК2

1. Опр

События A и B наз. несовместными, если в результате случайного эксперимента они не могут наступить одновременно, т.е

$$A \cdot B = \varnothing$$

$\not\Rightarrow$

? Между понятиями "несовместные" и "независимые" событий имеется след. связь:

1) если A и B — несовм (и $P(A) \neq 0$, и $P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые.
2) если A и B — совм соб., то они м.б и зависимыми, и независимыми
3) если A и B — зав. соб, то они м.б и совм, и несовм.

2. Опр

Пусть 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ — мера в $\mathbb{R}^n$,
$n = 1$, то μ — длина,
$n = 2$, то μ — площадь,
...

3) возможность принадлежности исхода эксперимента событию пропорционально мере этого события и не зависит ни от формы события, ни от его расположения внутри Ω.
(все события одинаковой меры равновозможны)

Тогда.

Опр Вероятность осуществления события A наз число

$$P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Данное опр-е принято наз-ть геометрическим определением вер-ти.

5 шар. 100 ...

Пусть 1) Ω — пр-во элементарных исходов некоторого эксперимента

2) $\mathcal{B} \neq \varnothing$ — некоторая система (набор) подмножеств множества Ω

Опр.

$\mathcal{B}$ наз сигма-алгеброй (σ) событий если

1) ~~∀~~ если $A \in \mathcal{B}$, то $\overline{A} \in \mathcal{B}$

2) для любого счетного набора

$$A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$$

выполняется

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}$$

счетный м. б и бесконечный (примечание)

(X) Основные св-ва (следствие из опр-я):

1°. $\Omega \in \mathcal{B}$

2°. $\varnothing \in \mathcal{B}$

3°. если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$$

4°. если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$ $\quad (A \setminus B = A\overline{B})$

(4) Пусть 1) Ω — пр-во исходов некоторого случайного эксперимента

2) $\mathcal{B}$ — σ-алгебра событий на Ω

Опр. <u>Вероятностью</u> (вероятностной мерой) наз ф-я:

$$P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

удовлетворяющая следующим аксиомам:

1° (аксиома неотрицательности)

$\forall A \in \mathfrak{B} \quad P\{A\} \geq 0$

2° (аксиома нормированности)

$P\{\Omega\} = 1$

3° (расширенная аксиома сложения)

если $A_1, \dots, A_n, \dots$ – попарно несовместные событий, то

$$P\{A_1 + \cancel{A} + A_n + \dots\} = P\{A_1\} + \dots + P(A_n) + \dots$$

Св-ва вер-ти на основе акс. опр-я:

1° $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2° $P(\varnothing) = 0$

3° Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$

4° $0 \leq P\{A\} \leq 1$

5° Для любых событий $A, B \in \mathfrak{B}$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P\{AB\}$$

6° Для любого конечного набора событий $A_1, \dots, A_n$ справедливо

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 < n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$$

(5.)

1) Аксиома сложения вер-тей.

Для $\forall$ конечного набора попарно несовместных событий $A_1, \dots, A_n$ справедливо

$$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

2) Расширенная аксиома сложения вер-тей

Если $A_1, A_2, \dots$ — попарно несовместн события, то:

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

3) Аксиома непрерывности.

Для $\forall$ неубывающей последовательности событий:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$$

и события

$$A = A_1 + A_2 + \dots$$

справедливо

$$\lim_{i \to \infty} P(A_i) = P(A)$$

Связь: $2) \Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \\ 3) \end{cases}$ $\boxed{?}$

(6.) Опр

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что наступило событие B, наз число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

причем $P(B) \neq 0$.

№

Св-ва:

Th При фиксированном событии B условная вер-ть $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вер-ти:

1° Акс неотр $P(A|B) \geqslant 0$

2° Акс норм. $P(\Omega|B) = 1$

3° Расш. акс. слож $P(A_1 + A_2 + \ldots |B) =$
$= P(A_1|B) + P(A_2|B) + \ldots$

Также 6 св-в, вытекающих из аксиом (см. стр. 3)

7.

Th <u>Формула умножения вероятностей для 2х событий</u>

Пусть $P(A) > 0$

Тогда
$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

<u>Th</u> ф-ла умножения для произвольного числа событий

Пусть 1) $A_1, \ldots, A_n$ — события, связанные с некоторым случайным экспериментом

2) $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$

Тогда
$$\boxed{P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})}$$

ф-ла умн-я вер-тей

(8)

Пусть A, B – соб-я, связанные с некоторым случайным экспериментом.

<u>Опр</u> Соб-я A и B наз. независимыми, если

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>Th</u> 1) Если $P(B) \neq 0$, то

$$A, B \text{ – независ} \iff P(A|B) = P(A)$$

2) если $P(A) \neq 0$, то

$$A, B \text{ – независ} \iff P(B|A) = P(B)$$

(9) <u>Опр</u> События $A_1, \ldots, A_n$ наз. <u>попарно независимыми</u>, если $\forall\, i < j$ соб-я A_i и A_j независимые.

<u>Опр</u> События $A_1, \ldots, A_n$ наз. независимыми в совокупности, если

$$\forall\, k \in \{2, \ldots, n\}$$

для любого набора $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ выполняется

$$P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

<u>Замеч</u>

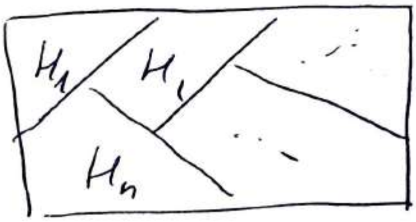
$A_1, \ldots, A_n$ независ попарно	$\longleftarrow$	$A_1, \ldots, A_n$ независ в совокупности

(10)

Пусть (Ω, B, P) - вероятностное пространство

<u>Опр.</u> Будем говорить, что события $H_1, \dots, H_n \in B$ образуют полную группу, если

1) $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$
2) $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$
3) $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$



Т.к. H_i, H_j $\forall i \neq j$ являются несовместными (из пункта 2) опр-я) и их вероятность не равна 0 (из пункта 1) опр-я), то они обязательно зависимые. $\Rightarrow$ предположение из условия неверно.

(11) <u>Th</u>

Пусть 1) $H_1, \dots, H_n$ - полная группа событий.
2) A - некоторое событие

Тогда

$$\boxed{P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

— формула полной вероятности —

#

(12) <u>Th</u>

Пусть 1) выполнены условия th о формуле полной вероятности
2) $P(A) > 0$

формула Байеса

Тогда

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, \quad i = \overline{1,n}}$$

(13)

Рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из 2^x элементарных исходов (т.е $|\Omega|=2$).

Один из этих исходов будет условно наз. успехом, другой — неудачей.

Пусть $P\{\text{"успех"}\} = p \in (0,1)$

~~Пусть P{"~~ $P\{\text{"неудача"}\} = \underbrace{1-p}_{q\text{ - обозн}}$

<u>Опр</u>

Схемой последовательных испытаний Бернулли (схемой Бернулли) наз. серия однотипных экспериментов описанного вида, в которой отдельные эксперименты независимы в совокупности.

Обозн. $P_n(k)$ - вероятность того, что в серии из n экспериментов по сх. Бернулли произойдет ровно k успехов.

<u>Th</u>

Пусть 1) проводится серия из n экспериментов по сх. Бернулли, с вер-тью p успеха в одном испытании.

Тогда

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}, \text{ где } q = 1-p \text{ - вер-ть неудачи}}$$

(14) а) см Th

б) $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$ ← обозн 1

в) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum\limits_{i=k_1}^{k_2} C_n^i\, p^i\, q^{n-i}$ ← обозн 2.

<u>Обозн 1</u> $P_n\{k \geq 1\}$ - вероятность того, что в серии из n испытаний имел место ~~только~~ хотя бы один успех

Обозн. 2.

$P_n\{k_1 \le k \le k_2\}$ – вероятность того, что в серии из n испытаний по сх. Бернулли число k успехов будет лежать между k_1 и k_2.

(15)

Опр

Случайным наз. эксперимент, результат которого невозможно предсказать заранее.

Опр

Элементарным исходом случайного эксперимента наз. любой исход случайного эксперимента, кот.:

1) является "наименьшим" исходом экс-та, т.е в рамках данного экс-та не м.б. разбит на более мелкие исходы
2) в рез-те случайного эксперимента (проведенного однократно) обязательно реализуется ровно один исход из мн-ва элементарных исходов этого эксперимента.

Опр Мн-во всех исходов случайного эксперимента наз. пространством его элементарных исходов.

Опр (Случайным) событием в рамках данного случ. экс-та наз. подм-во мн-ва элементарных исходов этого экс-та.

Пусть 1) Ω - пр-во элементарных исходов и
$|\Omega| = N < \infty$

2) по условию эксперимента нет основания предпочесть тот или иной исход остальным (все исходы равновозможны)

3) A - соб-е, $|A| = N_A$

Опр (классическое опр-е вер-ти)
Вероятностью осуществления события A наз. число

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N}$$

Пр Бросают правильную игральную кость.
$A = \{$ выпало четное число очков $\}$
$P\{A\} = ?$

Реш-е:

Исход (x), где $x = \{1, .., 6\}$ - число выпавших очков

$N = |\Omega| = 6$

$A = \{(2), (4), (6)\}$, $N_A = |A| = 3$

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ψ

Пусть 1) $|\Omega| = N < \infty$

2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной исход остальным (все исходы равновозможны).

3) A - событие, $|A| = N_A$.

Опр (классическое опр-е вер-ти).

Вероятностью осуществления события A наз. число

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N}$$

Основные св-ва вероятности:

1° $P\{A\} \geqslant 0$

2° $P\{\Omega\} = 1$

3° Если A, B - несовместные события, то

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\}.$$

Док-во

1° $P\{A\} = \frac{\overset{\geqslant 0}{N_A}}{\underset{>0}{N}} \Rightarrow P\{A\} \geqslant 0$

2° $P\{\Omega\} = \frac{N_\Omega}{N} = \{N = |\Omega| = N_\Omega\} = \frac{N}{N} = 1$

3° $P\{A+B\} = \frac{N_{A+B}}{N} = \left\{ \begin{array}{l} \text{В соответствии с} \\ \text{формулой включ. и искл.} \\ N_{A+B} = N_A + N_B - \underbrace{N_{AB}}_{0,\ \text{т.к. } AB = \varnothing} \end{array} \right\} =$

$$= \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P\{A\} + P\{B\}$$

■

Пусть 1) случайный эксперимент проведен n раз;

2) при этом событие A произошло n_A раз.

<u>Опр</u> Вероятностью осуществления события A наз. эмпирический (т.е из опыта) предел

$$P\{A\} = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

<u>Недостатки ст. опр:</u>

- Никакой эксперимент не м. б проведен бесконечное число раз;
- с точки зрения современной математики статистическое определение является архаизмом, т.к не дает достаточной базы для дальнейшего развития теории.

(18) Пусть 1) Ω – пространство элемент арных исходов некоторого эксперимента;

2) $\mathcal{B} \neq \varnothing$ – некоторая система (набор) подмножеств мн-ва Ω.

<u>Опр</u> $\mathcal{B}$ наз. сигма-алгеброй событий, если

1) если $A \in \mathcal{B}$, то $\overline{A} \in \mathcal{B}$

2) Для любого счетного набора

$$A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$$

выполняется

$$A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \mathcal{B}$$

10

Основные свойства: (СВ)

1° $\Omega \in \mathcal{B}$

2° $\varnothing \in \mathcal{B}$

3° если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$,

то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$.

4° если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$

Док-во:

1° а) $\mathcal{B} \neq \varnothing \Rightarrow \exists A \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{п. 1} \\ \text{опр-я} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$

б) $A, \overline{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{п. 2} \\ \text{опр-я} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underbrace{A + \overline{A}}_{\Omega} \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{B}$

2° $\Omega \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{п. 1} \\ \text{опр. я} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underset{\varnothing}{\underset{\parallel}{\overline{\Omega}}} \in \mathcal{B} \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{B}$

3° $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{п. 1} \\ \text{опр. я} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{п. 2} \\ \text{опр. я} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \overline{A}_1 + \ldots + \overline{A}_n + \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{п. 1} \\ \text{опр. я} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\overline{A}_1 + \ldots + \overline{A}_n + \ldots} \in \mathcal{B} \left(\Rightarrow \overline{\overline{A}}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{A}}_n \cdot \ldots \in \mathcal{B} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$

4°. $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{п. 1} \\ \text{опр. я} \end{matrix} \right\} \Rightarrow A, \overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{3°\} \Rightarrow \underbrace{A\overline{B}}_{A \setminus B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B}$

$\blacksquare$

(19)

Пусть 1) Ω — прост-во исходов некоторого случайного эксперимента

2) $\mathcal{B}$ — σ-алгебра событий на Ω

Опр.

Вероятностью (вероятностной мерой) наз ф-я:

$$P : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

обладающая св-ми мн-ва:

1° $\forall A \in \mathcal{B}$ $P\{A\} \geq 0$ (аксиома неотриц.)

2° $P\{\Omega\} = 1$ (аксиома нормированности)

3° если $A_1, A_2, \dots$ — попарно несовместные события,

то

$P\{A_1 + A_2 + \dots\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots$

(расширенная аксиома сложения)

Св-ва:

1° (для дополнения события) $P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$

2° (для невозможного события) $P\{\varnothing\} = 0$

3° (для следствия события) если $A \subseteq B$, то $P\{A\} \leq P\{B\}$

Док-во:

1° $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$

$A + \bar{A} = \Omega$

$\underbrace{P\{A + \bar{A}\}}_{P\{A\} + P\{\bar{A}\} \text{ (акс } 3^\circ)} = \underbrace{P\{\Omega\}}_{1 \text{ (акс } 2^\circ)}$

$P\{A\} + P\{\bar{A}\} = 1$
$\Downarrow$
$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}$

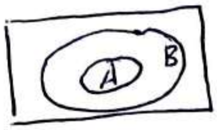
19

2° $\varnothing = \overline{\Omega}$

$\Downarrow$

$$P\{\varnothing\} = P\{\overline{\Omega}\} = \{\text{св-во } 1^\circ\} = 1 - \overset{1 \text{ (акс } 2^\circ)}{\cancel{P\{\Omega\}}} = 1 - 1 = 0$$

3° $A \subseteq B$



$$B = A + B \setminus A$$

$$P\{B\} = P\{\underbrace{A + B\setminus A}_{\text{несовм}}\} = \left\{ \begin{matrix}\text{акс}\\ 3^\circ\end{matrix} \right\} = P\{A\} + P\{B\setminus A\} =$$

$$= \{P\{B\setminus A\} \geq 0 \text{ (по акс } 1^\circ)\} = P\{A\} + P\{B\setminus A\} \geq P\{A\}$$

■

20 Опр (см вопрос 19)

Св-ва:

1° (для суммы $2^\text{х}$ событий)

Для любых событий $A, B \in \mathcal{B}$

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$$

2° (для суммы произвольного числа событий)

Для любого конечного набора событий $A_1, \ldots, A_n$ справедливо:

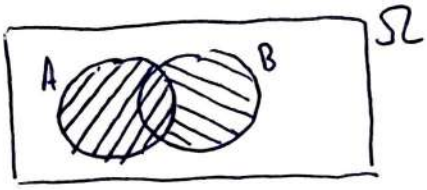
$$P\{A_1 + \ldots + A_n\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A_i\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P\{A_{i_1} A_{i_2}\} +$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\} - \ldots + (-1)^{n-1} P\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_n\}$$

20

Док-во:

1°. а)

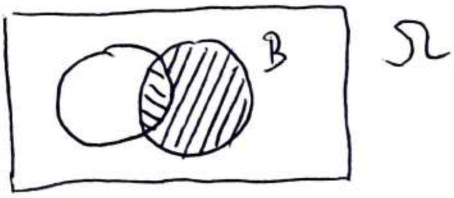


$$A + B = \underbrace{A + (B \setminus A)}_{\text{несовм}}$$

(акс 3°)

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B \setminus A\} \quad (*)$$

б)



$$B = \underbrace{(B \setminus A) + AB}_{\text{несовм}}$$

акс 3°

$$P\{B\} = P\{B \setminus A\} + P\{AB\}$$

Отсюда:

$$P\{B \setminus A\} = P\{B\} - P\{AB\} \quad (**)$$

в) Подставим (**) в (*):

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\} \quad \blacksquare$$

21

<u>Опр</u> Условной вероятностью осуществления события A при условии, что наступило событие B, наз число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$(P(B) \neq 0)$$

(27)

Th

При фиксированном событии B условная вероятность ~~услов~~ $P(A|B)$ удовлетворяет 3м основным св-вам безусловной вер-ти.

Док-во

1° Аксиома неотрицательности

$$P(A|B) = \frac{\overset{\geq 0}{P(AB)}}{\underset{>0}{P(B)}} \geq 0$$

2° Аксиома нормирования

$$P(\Omega|B) \left\{\text{опр-е усл. вер-ти}\right\} = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} =$$

$$= \left\{\Omega B = B\right\} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3° Расширенная аксиома сложения

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последовательность попарно несовместных событий.

Расм.

$$P(A_1 + A_2 + \dots | B) = \frac{P((A_1 + A_2 + \dots)B)}{P(B)} \to \left\{\begin{array}{c}\text{счетная} \\ \text{дистрибутивность} \\ \text{пересечения относ.} \\ \text{объединения}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{P(A_1 B + A_2 B + \dots)}{P(B)} = \left\{ \quad \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} A_i B \subset A_i \\ A_j B \subset A_j \end{array} \right\} \Rightarrow (A_i B) \text{ и } (A_j B) \text{ — несов.м} \left. \right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c}\text{расшир. акс.} \\ \text{сложения для} \\ \text{безусл. вер-ти}\end{array}\right\} = \frac{P(A_1 B) + P(A_2 B) + \dots}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 B)}{P(B)} + \dots = P(A_1|B) + P(A_2|B) + \dots$$

Th ф-ла умножения вер-тей для $2^х$ событий.

Пусть 1) $P(A) > 0$

Тогда

$$P(AB) = P(A)\,P(B|A)$$

Док-во:

$P(A) \neq 0 \Rightarrow$ определена условная вероятность

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow \boxed{P(AB) = P(A)\,P(B|A)}$$

ф-ла —//—

■

Th ф-ла умножения вер-тей для произвольного числа событий.

Пусть 1) $A_1, \dots, A_n$ — события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

2) $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$

Тогда

$$\boxed{P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})}$$

ф-ла —//—

Док-во:

1) Покажем, что все входящие в правую часть ф-лы условные вер-ти определены.

Выберем некоторое $k \in \{1, \dots, n\}$ и покажем, что

$$P(A_1 \cdots A_k) > 0.$$

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \supseteq (A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \cdot A_{k+1} \cdot \ldots \cdot A_{n-1}$$

по св-ву вер-ти:

$$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geq P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$$

2) ~~$P(A_1 A_2 \ldots A_n) =$~~

$$P(\underbrace{\boxed{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}}_{A}\underbrace{\boxed{A_n}}_{B}) = P(\underbrace{\boxed{A_1 \ldots A_{n-2}}}_{A}\underbrace{\boxed{A_{n-1}}}_{B}) P(A_n | A_1 \cdot\ldots\cdot A_{n-1}) =$$

$$= P(\underbrace{\boxed{A_1 \ldots}}_{A}\underbrace{\boxed{A_{n-2}}}_{B}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdot\ldots\cdot A_{n-2}) P(A_n | A_1 \cdot\ldots\cdot A_{n-1}) =$$

$$= \ldots = P(\underbrace{\boxed{A_1}}_{A}\underbrace{\boxed{A_2}}_{B}) P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdot\ldots\cdot A_{n-2}) P(A_n | A_1 \cdot\ldots\cdot A_{n-1}) =$$

$$= P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdot\ldots\cdot A_{n-2}) P(A_n | A_1 \cdot\ldots\cdot A_{n-1})$$

■

(23) Пусть A, B – соб-я, связанные с некот. случ. экспериментом

Опр События A и B наз. независимыми, если

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Th 1) Если $P(B) \neq 0$, то

A, B – независ $\Longleftrightarrow P(A|B) = P(A)$

2) Если $P(A) \neq 0$, то

A, B – независ $\Longleftrightarrow P(B|A) = P(B)$

Док-во:

докажем 1). 2) доказывается аналогично

($\Longrightarrow$) (необходимость)

Пусть A, B независ.

Тогда

$$P(A|B) = \{\text{опр-е}\} = \frac{P(AB)}{P(B)} = \left\{\begin{array}{l} A, B \text{ – независ} \\ \Longrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B) \end{array}\right\} = \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A)$$

(23)

(c 20)

($\Leftarrow$) (достаточность)

Пусть $P(A|B) = P(A)$

Тогда:

$$P(AB) = \left\{ \begin{matrix} \text{ф-ла} \\ \text{умн-я} \end{matrix} \right\} = P(B)\underbrace{P(A|B)}_{P(A)} = P(A)\cdot P(B) \Rightarrow A, B \text{ - независ}$$

(24)

Опр События $A_1, \dots, A_n$ наз. попарно независимыми, если $\forall\ i<j$ события A_i и A_j независ.

#

Опр События $A_1, \dots, A_n$ наз. независимыми в совокупности, если $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ для любого набора $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n \le n$ выполняется:

$$P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

#

Пр Пример Бернштейна показывает, что из попарной независимости событий не следует независимость в совокупности

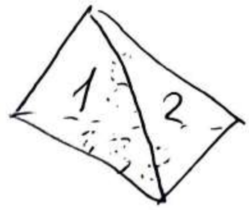
Расм: правильный тетраэдр, у кот на
1й грани написано "1",
2й — " — "2",
3й — " — "3",
4й — " — "1, 2, 3".

Тетраэдр подбрасывают и смотрят, что написано на нижней грани.

$A_1 = \{$на нижней грани есть "1"$\}$

$A_2 = \{$ — " — "2"$\}$

(24) $A_3 = \{$ —— , —— "3" $\}$ (С.21)



а) Покажем, что A_1, A_2, A_3 попарно независ.

$$P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A_2) = P(A_3)$$

$$P(A_1A_2) = \{A_1A_2 = \{\text{на грани есть и "1", и "2"}\}\} = \frac{1}{4} = P(A_1A_3) = P(A_2A_3).$$

Т. о.

$$\left.\begin{aligned} P(A_1A_2) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A_1)\,P(A_2) \\ P(A_1A_3) &= \;\dots\dots\; = P(A_1)\,P(A_3) \\ P(A_2A_3) &= \;\dots\dots\; = P(A_2)\,P(A_3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ A_1, A_2, A_3 попарно независ.

б) Покажем, что A_1, A_2, A_3 не явл независ в сов-ти

$$P(A_1A_2A_3) = \{A_1A_2A_3 = \{\text{на выпавшей вниз грани есть и "1", и "2", и "3"}\}\} =$$
$$= \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$$

$\Downarrow$

A_1, A_2, A_3 не явл независ в сов-ти

$\Downarrow$

из попарной независимости не следует независ в сов-ти.

$\blacksquare$

(25) Th

Пусть 1) $H_1, \dots, H_n$ – полная группа событий.

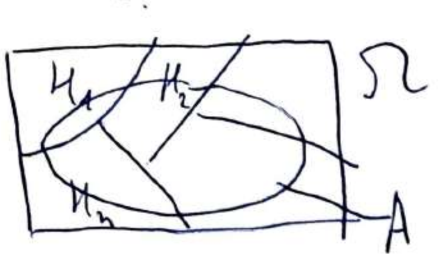
2) A – некоторое событие

Тогда

$$\boxed{P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

ф-ла полной вер-ти

25) Док-во:



$$P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1+\ldots+H_n)) = P(AH_1+AH_2+\ldots+AH_n) =$$

$$= \left\{\begin{aligned} &\text{а) } H_iH_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \\ &\text{б) } AH_i \subseteq H_i \\ &\quad AH_j \subseteq H_j \\ &\text{а), б)} \Rightarrow (AH_i)(AH_j) = \varnothing \\ &\qquad\qquad \text{при } i \neq j \end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned} &\text{акс } 3^\circ \\ &\text{вер-ти} \end{aligned}\right\} = P(AH_1) + \ldots + P(H_n) =$$

$$= \left\{\begin{aligned} &P(H_i) > 0 \Rightarrow \\ &\text{по th умнож} \\ &P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i) \end{aligned}\right\} = P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)$$

∎

26) Th

Пусть 1) выполнены условия th о ф-ле полной вероятности

2) $P(A) > 0$

Тогда

$$\boxed{P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)\,P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}} \qquad i = \overline{1,n}$$

ф-ла Байеса

Док-во:

1) $P(H_i|A)$ определена, т.к. $P(A) > 0$ (знаменатель $= P(A)$)

2) $$P(H_i|A) = \left\{\begin{aligned} &\text{опр. } \\ &\text{условной} \\ &\text{вер-ти} \end{aligned}\right\} = \frac{P(AH_i)}{P(A)} = \left\{\begin{aligned} &\text{числитель расписан} \\ &\text{по ф-ле умножения;} \\ &\text{знаменатель — по} \\ &\text{ф-ле полной вер-ти} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{P(A|H_i)\,P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}$$

∎

Обозн. $P_n(k)$ – вер-ть того, что в серии из n экспериментов по сх. Бернулли произойдет ровно k успехов.

Th Пусть 1) проводится серия из n экс-ов по сх. Б., с вер-тью p успеха в одном испытании

Тогда
$$P_n(k) = C_n^k \, p^k q^{n-k}, \text{ где}$$
$$q = 1-p \text{ – вер-ть неудачи}$$

Док-во.

1) Исход: $(x_1; x_2, \dots, x_n)$, $(*)$

где $x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом исп. имел место успех} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Обозн: $A = \{$в серии из n экс-ов произошло ровно k успехов$\}$

Событие A будет состоять из эл-ов исходов вида $(*)$, в к-рых содержатся ровно k единиц (остальные позиции заняты – нулями)

$|A| = ?$

Кол-во исходов (т.е кортежей вида $(*)$) в A равно числу ~~исходов~~ способов выбрать из n позиций k позиций, в к-рых будут расставлены 1-цы (остальные – нули)

Т.о. $|A| = C_n^k$

Расм. произвольный кортеж

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\substack{k \text{ единиц} \\ n-k \text{ нулей}}} \in A$$

$P\{(x_1, \dots, x_n)\} = P\{\{$в 1м испытании $x_1\} \cdot \{$в 2м – " – $x_2\} \cdot \ldots \{$в n исп $x_n\}\} =$

$= \left(\begin{matrix}\text{отдельные испытания} \\ \text{явл независ (в сов-ти)}\end{matrix}\right) = \underbrace{P\{\text{в 1м } x_1\} \cdot P\{\text{в 2м } x_2\} \cdots P\{\text{в } n\text{-м исп } x_n\}}_{\substack{k \text{ раз } \; p \\ n-k \text{ раз } \; q}} \ominus$

$$= \prod P\{\text{б}i\text{-м } x_i\} = \begin{cases} p, & x_i = 1 \\ q, & x_i = 0 \end{cases} = p^k q^{n-k}$$

3) В п 2) фактически показано, что все исходы внутри A равновероятны (вер-ть каждого из них $= p^k q^{n-k}$).
Т.к в A их всего C_n^k штук и отдельные исходы не пересекаются, то

$$P(A) = C_n^k \, p^k q^{n-k}$$

■

Билет №0

№ 1

(1)

1. Исход $(x_1, \dots, x_{32})$, ~~где $x_i \in \{7, \dots, 10, В, Д, К, Т\}$ - i-ая карта в колоде $i = \overline{1,32}$~~

(перестановки / размещ. без повт. из 32 по 32) где $x_i \in \{1, \dots, 32\}$ - номер карты

Замеч: $\{ 7_{П}, 8_{П}, 9_{П}, 10_{П}, В_{П}, Д_{П}, К_{П}, Т_{П},$

$7_{П}, 8_{П}$ ... $К_{П}, Т_{П}$

$7_{Б}, 8_{Б}$ ... $К_{Б}, Т_{Б}$

$7_{Ч}, 8_{Ч}$ ... $К_{Ч}, Т_{Ч} \}$

Неверно

2. $N = A_{32}^{32} = P_{32} = 32!$

~~3. Пусть первые 16 карт раздают 1 игроку~~

~~4. Пусть карты $x_1, x_3, \dots, x_{31}$ - разд 1 ому игроку а $x_2, x_4, \dots, x_{32}$ - второму~~

~~Тогда~~

3. $A = \{$у игроков одинаковое число карт гр. масти$\} =$

$= \{$у первого игрока 4 ~~треф~~ карты гр. масти$\}$

4. Пусть 1 ому игр. раздают первые 16 карт

а) Выбрать 4 из 8 карт $A_8^4 = \frac{8!}{4!}$

б) ~~Рассчитать~~ Выбрать 4 места из 16 $A_{16}^4 = \frac{16!}{12!}$

в) Заполнить оставшиеся 12 мест в первой половине не бубновыми картами $A_{24}^{12} = \frac{24!}{12!}$

г) Размест. оставшиеся 16 карт $A_{16}^{16} = P_{16} = 16!$

$$N_A = \frac{8!}{4!} \cdot \frac{\cancel{16!}}{12!} \cdot \frac{24!}{12!} \cdot \cancel{16!} = \frac{\cancel{4!} \, 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{12} \, \cancel{4!}} \quad \frac{\cancel{12!} \cdot 13 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 24}{\cancel{12!} \; 12!} =$$

$\cancel{5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot 8 \cdot 13 \cdot \cancel{14} \cdot \cancel{15} \cdot 16 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \cancel{24}$

$1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot \cancel{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 9 \cdot \cancel{10} \cdot 11 \cdot \cancel{12}$

Билет 0

№1

1. A = {у игроков одинаковое число карт треф. масти} = {у первого игрока 4 карты треф. масти}

2. Исход $\{x_1, x_2, \ldots, x_{16}\}$ где $x_i \in \{1, \ldots, 32\}$ – ~~i-ая карта~~ номера розданных 1-ому игроку карт

сочетания без повт из 32 по 16

Замечание: нумеруем
$\{ ①7♣, ②8♣, ③9♣, ④10♣, ⑤В♣, ⑥Д♣, ⑦К♣, ⑧Т♣, \ldots \}$

3. $N = C_{32}^{16} = \dfrac{32!}{16!(32-16)!} = \dfrac{32!}{16! \cdot 16!}$

4. Т.к. исходы это неупор. набор, то без огр. общности будем считать, что сначала первому игроку раздают 4 треф. карты, затем карты других мастей, т.е. от трех

$$\{ \overset{Т}{\boxed{x_1, x_2, x_3, x_4}}, \overset{Ч, П, Б}{\boxed{x_5, \ldots, x_{16}}} \}$$

сочетаний без повт из 8 по 4

сочетания без повт из 24 по 12

$$N_A = C_8^4 \cdot C_{24}^{12} = \frac{8!}{4!\,4!} \cdot \frac{24!}{12!\,12!}$$

5. $P(A) = \dfrac{N_A}{N} = \dfrac{8! \cdot 24! \cdot 16! \cdot 16!}{4!\,4!\,12!\,12! \cdot 32!} \approx 0{,}31 \left(\dfrac{2548}{8091}\right)$

Ответ: $P(A) \approx 0{,}31$

№3

1) Обозн:

$A = \{$ ал выбр. игрок уп. вин 3-х отметн $\}$

$H_1 = \{$ ал выбр игрок выс. лиг $\}$

$H_2 = \{$ — " — ср $\}$

$H_3 = \{$ — " — адукал $\}$

2) Формула полной вер-ти для 3х гипотез

$$P(A) = \underbrace{P(A|H_1)}_{0.95}\underbrace{P(H_1)}_{\frac{7}{30}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{0.35}\underbrace{P(H_2)}_{\frac{13}{30}} + \underbrace{P(A|H_3)}_{0.2}\underbrace{P(H_3)}_{\frac{10}{30}} =$$

$$= \frac{1}{30}(0.95\cdot 7 + 0.35\cdot 13 + 0.2\cdot 10) = \frac{247}{300};$$

3) Формула Байеса.

а) Вер-ть того, что таким игрок выс. лиг

$$P(H_1|A) = \{\text{ф-ла Байеса}\} = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.95\cdot\frac{7}{30}}{\cancel{\frac{247}{30}}P(A)} = \frac{6.65}{30P(A)}$$

б) — " — ям. ср

$$P(H_2|A) = \{\sim\} = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{0.35\cdot\frac{13}{30}}{P(A)} = \frac{11.05}{30P(A)}$$

max

в) — " — ям ад.

— " —

$$\frac{0.2\cdot\frac{10}{30}}{P(A)} = \frac{2}{30P(A)}$$

Ответ: 1) $\cancel{P(A)} = \frac{247}{300}$

2) вероятнее всего что игрок из ср. лиги

№

(1)

1) "успех": эксп. угадал исход

"неудача": эксп. не угадал исход

$p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ (на обеих машинах)

A = 2 эксп. сделал ризалет

2) На первой машине:

по ф-ле Бернулли:

$$P_1(A) = P_4(k \geq 3) \to P_4(3) + P_4(4) =$$

$$\to 1 - P(\bar{A}) = 1 - [P_4(0) + P_4(1) + P_4(2)]$$

$$= C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^1 + C_4^4 p^4 \cdot q^0 = \frac{4!}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} + \frac{\cancel{4!}}{\cancel{4!}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 1 =$$

$$= \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

3) На второй машине

по ф-ле Бернулли:

$$P_2(A) = P_5(k \geq 4) = P_5(4) + P_5(5) =$$

$$= C_5^4 \, p^4 \cdot q^1 + C_5^5 \, p^5 q^0 = \frac{5!}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{2} + \frac{5!}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$$

$$= \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

4) $P_1(A) > P_2(A)$

$$\frac{5}{16} > \frac{3}{16}$$

Ответ: на первой машине

Билет №12

№1

1) Исход $\{x_1, x_2, x_3\}$ - где $x_i \in \{0, \dots, 9\}$ - нажатые кнопки

сочетания
без пов.
из 10 поз

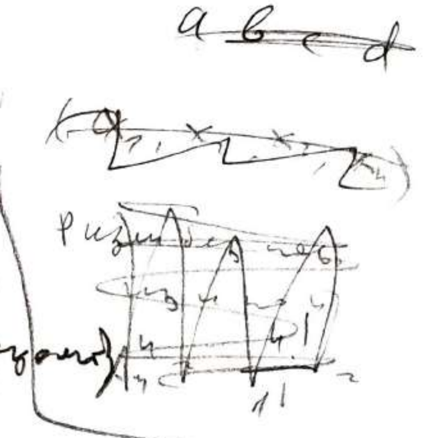
2) $N = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!}$

3) ~~N_A~~ A = { ~~...~~ набрали 3 верные кнопки}

$N_A = 1$

4) $P(A) = \cancel{N_A}\ \frac{3!\,7!}{10!} = \frac{1}{120}$

Ответ: $\frac{1}{120}$



№3

~~A = {приобретенное изд. игр. третьей фирмы}~~
~~По формуле Байеса~~

~~P(A)~~ I P(A

1) Обозн: A = {случайно приобр. изделие - станд}

H_1 = {из выбр. изд. из 1 фирмы}

H_2 = { — " — 2 —"— }

H_3 = { — // — 3 —"— }

~~Вер~~ 2) вер. того, что ~~...~~ проор. стандартное изд. игр. 3-ей фирмы

№3 Формула Байеса:

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)\,P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.75 \cdot \frac{7}{20}}{\frac{16.55}{20}} =$$

$$P(A) = \{\text{Ф-ла полной вер-ти}\} = \underbrace{P(A|H_1)}_{0.9}\,\underbrace{P(H_1)}_{\frac{5}{20}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{0.85}\,\underbrace{P(H_2)}_{\frac{8}{20}} + \underbrace{P(A|H_3)}_{0.75}\,\underbrace{P(H_3)}_{\frac{7}{20}} =$$

$$= \frac{1}{20}\left(\;\right) = \frac{16.55}{20}$$

$$= \frac{0.75 \cdot 7 \cdot \cancel{20}}{\cancel{20} \cdot 16.55} = \frac{105}{331} \approx 0,32$$

№4

1) "успех": попадание

"неудача": промах

$p = 0.6$; $q = 0.4$

$A = \{$объект ликвидирован$\}$

2)

$$P(A) = P_6(k \geq 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$$

$$= C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q^1 + C_6^6 p^6 q^0 =$$

$$= \frac{6!}{4!\,2!}\,0.6^4\,0.4^2 + \frac{6!}{5!}\,0.6^5\,0.4 + \frac{6!}{6!}\,0.6^6 =$$

$=$

Билет № 16

№1

1) Исход: (x_1, x_2), где $x_i \in \{Б, Т, П, Ч\}$ – масть ~~пуля~~ i-ого дуэли

размещения без повторения из 4 по 2

A = {среди выбр. пары есть буби пов.}

2) $N = A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$

3) Благоприятные исход:

$(\overset{1}{Б}, \overset{3}{x_2})$

$2 \cdot 3 = 6$

$(\overset{3}{x_1}, \overset{1}{Б})$

4) $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Ответ: 0.5

№3 Байес

A = {в мишени одна пробоина}

H_1 = {ни один не попал}

H_2 = {попал только 1-ый}

H_2 = {попал только 2-ой}

H_3 = {попали оба}

~~№~~

$$P(A) = \{\text{ф-ла полной вер-ти}\} =$$

$$= P(A|H_1)P(H_1) + \underbrace{P(A|H_2)}\underbrace{P(H_2)}_{0.6} + P(A|H_3)P(H_3) + P(A|H_4)P(H_4) =$$

$$=$$

№3

A_1, A_2 - независ

$A_1 = \{\text{попал первый стрелок}\}$

$A_2 = \{\text{попал второй стрелок}\}$

$A = \{$в точности ~~раз~~ один попал$\} =$

$= \{$попал первый и не попал 2-ой или попал второй и не попал 1-ый$\} =$

$= A_1\bar{A}_2 + A_2\bar{A}_1$

$$P(A_1\bar{A}_2 + A_2\bar{A}_1) = \{\text{th-сложения}\} = P(A_1\bar{A}_2) + P(A_2\bar{A}_1) -$$

$$- \underbrace{P(\cancel{A_1\bar{A}_2A_2\bar{A}_1})}_{\text{несовм}}^{0} =$$

$$= P(A_1\bar{A}_2) + P(A_2\bar{A}_1) = \{\text{th-умножения}\} =$$

$$= P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1) + P(A_2)P(\bar{A}_1|A_2) =$$

$= \{A_1, A_2$ - независ $\Downarrow$ $\bar{A}_1, A_1$ - независ $\Downarrow$ $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ - незав $\Downarrow$ $P(\bar{A}_2|A_1) = P(\bar{A}_2)$, $P(\bar{A}_1|A_2) = P(\bar{A}_1)\}$ $= P(A_1)P(\bar{A}_2) + P(A_2)P(A_1) =$

$= 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.3 =$

$= 0.54$

№4 (9)

1) "успех" — попадание

"неудача" — промах

$p = 0.4$, $q = 1 - 0.4 = 0.6$ k — кол-во успехов

$A = \{$мишень будет поражена хотя бы 1 раз$\}$

2) ~~По форм~~ ~~...~~ Схема Бернулли

$$P(A) = P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$$

3) По условию:

$$1 - q^n \geq 0.8704$$

$$q^n \leq 0{,}1296$$

т.к. $q \in (0, 1)$:

$$\log_q q^n \geq \log_q 0{,}1296$$

$$n \geq \log_q 0.1296$$

$$n \geq \log_{0.6} 0.1296 = 4$$

$$n \geq 4$$

Ответ: ~~...~~ не менее 4х раз

Билет N17 (10)

№1

1) Исход (x_1, x_2) где $x_i \in \{Б, Ч\}$ — цвета вытянутых шаров

2) Пусть в урне k белых шаров, тогда 1 него $10-k$ — черных.

3) (Б, Б) $A = \{$вытащили два белых шара$\}$

Тогда:

$$P(A) = \frac{k}{10} \cdot \frac{k-1}{9} = \frac{k(k-1)}{90}$$

Но тогда $P(A) = \frac{2}{15}$

$$\frac{k(k-1)}{90} = \frac{2}{15}$$

$$k^2 - k = \frac{180}{15}$$

$$k^2 - k = 12$$

$$\cancel{k^2 - k = \frac{40}{3} = 0}$$

$$\cancel{3k^2 - 3k - 40 = 0}$$

$$k^2 - k - 12 = 0$$

$$k = -3$$

$$\boxed{k = 4}$$

Можно применить дерево умножения

Ответ: 4 белых шара

№3

$A = \{$вытащили белый шар$\}$

~~$A = \{$в урне остался белый шар$\}$~~

$H_1 = \{$в урне белый шар$\}$ $P(H_1) = \frac{1}{2}$

$H_2 = \{$в урне черный шар$\}$ $P(H_2) = \frac{1}{2}$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \underbrace{P(A|H_1)}_{1}\underbrace{P(H_1)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(A|H_2)}_{\frac{1}{2}}\underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

№3 (прод)

Вероятность того, что в урне остался белый шар:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1\cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$

№4

n - кол-во испытаний

1) "успех" - орел, $n = 9$

"неудача" - решка, $p = q = \frac{1}{2}$

а) A = {орел выпадет ровно 4 раза}

б) B = {орел выпадет менее трех}

2) ~~Решение~~

а) $P(A) = P_9(4) = C_9^4 p^4 q^5 = \frac{9!}{4!\,5!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^5 =$

$= \frac{\cancel{5!}\cdot 6\cdot7\cdot8\cdot9}{4!\,\cancel{5!}}\cdot\frac{1}{2^9} = \frac{\cancel{6}\cdot7\cdot\cancel{8}^{2}\cdot9}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{4}}\cdot\frac{1}{2^9} = \frac{126}{2^9} = \frac{63}{256}$

б) $P(B) = P_9(k<3) = P_9(0) + P_9(1) + P_9(2) =$

$= \cancel{\frac{9!}{9!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9} + C_9^0 p^0 q^9 + C_9^1 p^1 q^8 + C_9^2 p^2 q^7 =$

$= \frac{9!}{9!}\cdot\frac{1}{2^9} + \frac{9!}{8!}\cdot\frac{1}{2^9} + \frac{9!}{7!\,2!}\cdot\frac{1}{2^9} =$

$= \frac{1}{2^9}(1 + 9 + 36) = \frac{46}{2^9} = \frac{23}{256}$

34

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\quad}{0.5}$

$P(AB) = \underbrace{P(B|A)}\underbrace{P(A)}_{0.3}$

x - все продукты

0.5x - экспорт

0.7x - цв.

0.3x - г.в.

$0.5\cancel{x} = 0.4 \cdot 0.7\cancel{x} + y \cdot 0.3\cancel{x}$

$y = \frac{11}{15}$

$H_1 = \{$цв э$\}$ 0.4 (цв)

$H_2 = \{$цв. и$\}$ 0.6 (цв)

$H_3 = \{$гв э$\}$

$H_4 = \{$цв н$\}$

Ф-ла полной вер-ти

$B = \{$сл. выбр. изделие отпр. в экспорт$\}$

$H_1 = \{$цветной$\}$

$H_2 = \{$г.в$\} = A$

$$P(A|B) = P(H_2|B) = \frac{P(B|H_2)\overbrace{P(H_2)}^{0.3}}{\underbrace{P(B)}_{0.5}} = \frac{\frac{0.22}{\cancel{0.3}} \cdot \cancel{0.3}}{0.5} = 0.44$$

$P(B|H_2) = \frac{11}{15} = \frac{0.22}{0.3}$

$P(B) = \underbrace{P(B|H_1)}_{0.4}\underbrace{P(H_1)}_{0.7} + P(B|H_2)\underbrace{P(H_2)}_{0.3} = 0.5$

P

~~[illegible]~~

$$P(A_1A_2) = \cancel{P(A_1|A_2)}\; P(A_2|A_1)\,\boxed{P(A_1)}^{4/9} =$$

$$p = \frac{4}{9} \qquad q = \frac{5}{9}$$

$$P_2(2) = C_2^2\, p^2 q^0 = \frac{2!}{2!}\left(\frac{4}{9}\right)^2 1 = \frac{16}{81}$$

$$\Omega = \{ MM,\ MD,\ DM,\ DD \}$$

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9} \qquad \frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9} \qquad \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9} \qquad \frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}$$

$$\underline{AB(A+B) = AB + AB} = AB$$

$A = \{$ M $-$ M $\}$

$B = \{$ M $-$ M $\}$

$$P(AB \mid A\cup B) = \frac{P(AB\overset{(A\cup B)}{})}{P(A\cup B)} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{56}{81}} = \frac{2}{7}$$

$$P(A|B) \geq 1 - \frac{P(\bar{A})}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \frac{P(AB)}{\cancel{P(B)}} \geq \frac{P(B) - P(\bar{A})}{\cancel{P(B)}}$$

$$1 - \frac{P(\bar{A})}{P(B)} = \frac{P(B) - P(\bar{A})}{P(B)} = \qquad P(AB) \geq P(B) - P(\bar{A})$$

$$P(AB) \geq P(B) - 1 + P(A)$$

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B) =$$

$$P(A|B) = \cancel{1} - \frac{P(\bar{A}B)}{\cancel{P(B)}} \geq \cancel{1} - \frac{P(\bar{A})}{\cancel{P(B)}}$$

$$-P(\bar{A}B) \geq -P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}B) \leq P(\bar{A})$$

✓