МОДУЛЬ 1.

МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, АЛГЕБРЫ.

В1. Понятие множества строго неопределено.
Может задаваться ~~перечислением~~ с помощью перечисления ($A = \{1, 2, 3\}$) или характеристического свойства ($B = \{x : P(x)\}$), ($P(x)$ — характеристическое свойство или предикат)

Предикат — высказывание, содержащее переменную или переменные
— логическая ф-я нелогических переменных

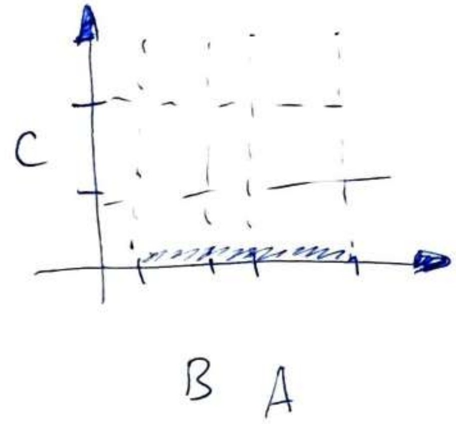
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$\chi_{A \setminus (B \cup C)} = \chi_A(1 - \chi_{B \cup C}) =$$
$$= \chi_A(1 - (\chi_B + \chi_C - \chi_B \cdot \chi_C)) =$$
$$= \underline{\chi_A - \chi_A \chi_B - \chi_A \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C}$$

$$\chi_{(A \setminus B) \cap (A \setminus C)} = \chi_{A \setminus B} \cdot \chi_{A \setminus C} =$$
$$= \chi_A(1 - \chi_B) \cdot \chi_A(1 - \chi_C) =$$
$$= \chi_A(1 - \chi_B)(1 - \chi_C) =$$
$$= (\chi_A - \chi_A \chi_B)(1 - \chi_C) =$$
$$= \underline{\chi_A - \chi_A \chi_B - \chi_A \chi_C + \chi_A \chi_B \chi_C}$$

Хар. ф-ии равны => тождество верно
ч.т.д.

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$



$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \,\&\, y \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \,\&\, y \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \,\&\, y \in C \vee x \in B \,\&\, y \in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \vee (x, y) \in (B \times C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

Ч.т.д.

3. $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$

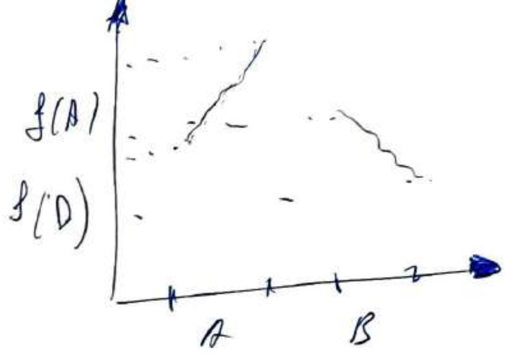
$(x, y) \in (\rho \circ \sigma)^{-1} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow (y, x) \in (\rho \circ \sigma) \Leftrightarrow (\exists z)((y, z) \in \rho \,\&\, (z, x) \in \sigma) \overset{?}{\Leftrightarrow}$

$\overset{?}{\Leftrightarrow} (\exists z)((z, y) \in \rho^{-1} \,\&\, (x, z) \in \sigma^{-1}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists z)((x, z) \in \sigma^{-1} \,\&\, (z, y) \in \rho^{-1}) \Leftrightarrow (x, y) \in (\sigma^{-1} \circ \rho^{-1})$

$\forall f \quad \forall A, B$



a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Пусть $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$

$y \in f(A \cup B) \Rightarrow (\exists x \in (A \cup B))(y = f(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A,\ y = f(x) \lor x \in B,\ y = f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = y \in f(A) \lor f(x) = y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

$y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A) \lor y \in f(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{(\exists x \in A)(y = f(A))} \lor (\exists x' \in B)(y = f(B)) \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in f(A), x \in A \lor y \in f(B), x' \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists z \in (A \cup B))(y \in f(z)) \Rightarrow y = f(A \cup B)$

ч.т.д.

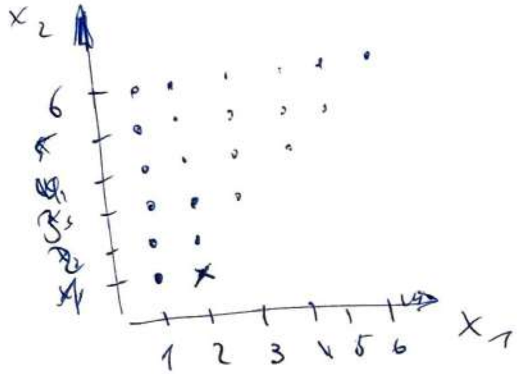
б) ...

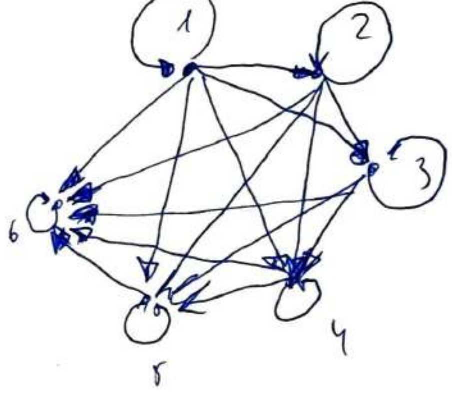
стр (5)

(3)

(5) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$x_1 \varphi x_2 \iff x_1 < x_2 + 1$



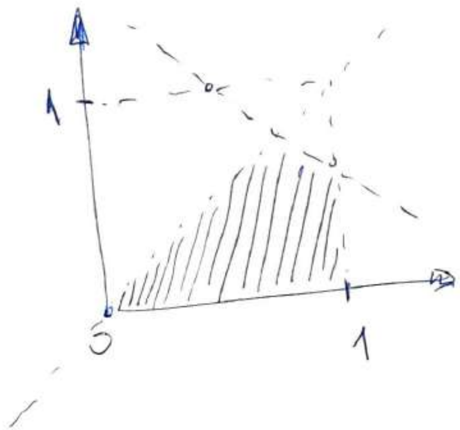


$-x - z > 1{,}5$

(6) $\rho = \{(x,y): \ x < y, \ y + x < 1{,}5\}$

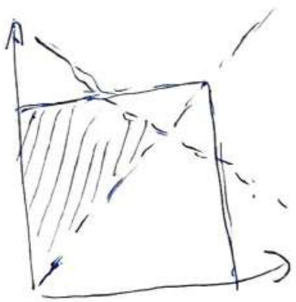
$\rho^{-1} = \{(x, y): \ y < x, \ x + y < 1{,}5\}$

$\rho^2 = \{(x,y) : (\exists z)((x,z) \in \rho \ \& \ (z,y) \in \rho)\} =$



$\Rightarrow \{(x,y): \ x < z, \ x + z < 1{,}5 \ \&$

$z < y, \ z + y < 1{,}5\}$



Док-ть, что $\rho^2 = \rho$

№ 4

б) $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

$f: X\to Y$, $A, B\subseteq X$ $\quad f^{-1}: Y\to X$

$y\in f^{-1}(A\cap B) \Leftrightarrow x\in f(A\cap B) \Leftrightarrow x\in f(A)\ \&\ x\in f(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y\in f^{-1}(A)\ \&\ y\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow y\in\left(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\right)$

ч.т.д.

6) $\rho^2 = \{(x,y): (\exists z)((x,z)\in\rho\ \&\ (z,y)\in\rho)\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{(x,y):\ x<z,\ x+z<1{,}5\ \&$

$z<y,\ z+y<1{,}5\}$

Т.к. $x<z \Rightarrow x+y<1{,}5$ $\quad (x,y)\in\rho \Rightarrow \rho^2\subseteq\rho$

Т.к. $x<z<y \Rightarrow x<y$

Наоборот, если $x<y$ и $y+x<1{,}5$, то можно выбрать δ, такое, что $y+x+\delta<1{,}5$, положить

$x<z<y$. Можно выбрать

$z=x+\delta$, тогда $y+z<1{,}5$, но $z+x<1{,}5$, т.к. $x<y \Rightarrow$

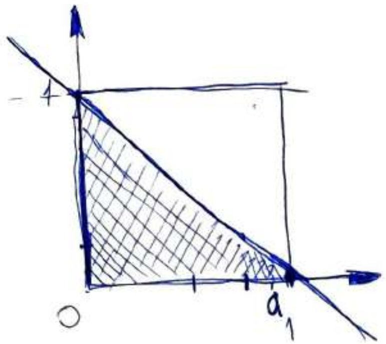
$\Rightarrow \exists z$ и $(x,y)\in\rho^2$, доказано, что $\rho^2=\rho$

5

7) $\rho\{(x,y): x+y \le 1\}$ $X = [0,1]$

$x+y \le 1$

$y \le -x+1$



$D(\rho) = [0,1]$

$R(\rho) = [0,1]$

$\rho^{-1} = \{(x,y): y+x \le 1\}$

$a+y \le 1$

$y \le 1-a$

$0+y \le 1$

$y \le 1$

$\cancel{1}-a+y \le \cancel{1}$

$y \le a$

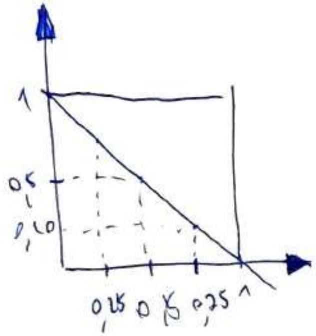
$\rho^2 = \{(x,y): (\exists z)(x+z \le 1 \ \& \ z+y \le 1)\}$

$z \le 1-x \quad z \le 1-y$

$x+z \le 1$

$z+y \le 1$

$z \le 1-x \quad y \le 1-z$

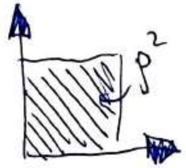


Пусть $a \in [0,1]$

$\rho \circ \rho(a) = \rho(\rho(a)) = \rho([0,1-a]) = [0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^2 = [0,1]^2$

$\Downarrow$



6

7) Квадрат?

Пусть ~~[illegible]~~ $a \in [0, 1]$

$\rho \circ \rho(a) = \rho(\rho(a)) = \rho((0, 1-a])$

$\rho \circ \rho(0) = \rho(\rho(0)) = \rho([0, 1]) = [0, 1]$

$\rho \circ \rho(1) = \rho(\rho(1)) = \rho(\{0\}) = [0, 1]$

$\rho \circ \rho(0,5) = \rho(\rho(0,5)) = \rho([0; 0,5]) = [0, 0,5]$

$\rho \circ \rho(0,75) = \rho(\rho(0,75)) = \rho([0, 0,25]) = [0, 0,75]$

$y = \rho(x)$

$x + y \le 1$

$a + y \le 1$

$y \le 1 - a$

$x + y \le 1$

$x = 0 \quad y \le 1$

$x = 1 - a$

$\cancel{1} - a + y \le \cancel{1}$

$y \le a$

$\rho^{-1} \circ \rho \quad \rho \circ \rho^{-1}$ - сводится и квадрату.

8) σ ~~[illegible]~~

$(a/b)\, \sigma\, (c/d)$, если $ad \le bc$

PAT - отношение порядка

$(x, x) \in \sigma$

$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in \sigma$, если $ad \le bc$

~~[illegible]~~

Р) $\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b}\right) \in \sigma$, т.к. $ab \le ab$

А) Пусть $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in \sigma$ и $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \in \sigma$, но тогда $\begin{cases} ad \le bc \\ cb \le ad \end{cases} \Rightarrow ad = cb$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

7

7) Пусть $\left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right) \in \upsilon$ и $\left(\frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) \in \upsilon$, Нужно показать, что $af \le be$

тогда $\begin{cases} ad \le cb \\ cf \le ed \end{cases}$ $d \le \frac{cb}{a}$

$\cancel{c}f \le e\frac{\cancel{c}b}{a}$

$f \le \frac{eb}{a}$

$af \le eb$

ч.т.д.

$ad \le cb$

$adf \le cbf \le ebd \Rightarrow a\cancel{d}f \le eb\cancel{d}$

$af \le eb.$

ч.т.д.

~~9) Ассоциативность~~

$$x \rho y \text{ и } y \rho x \Rightarrow x = y$$

$$M = \mathbb{N} \qquad x \odot y = 2xy$$

Пусть $x \rho y \Rightarrow x \odot y = 2xy$

$y \rho x \Rightarrow y \odot x = 2yx$

9) Ассоциативность операции!!!

$$x \odot y = 2xy$$

* ~~Докажем~~ Проверим, верно ли, что

$$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$

$$(x \odot y) \odot z = (2xy) \odot z = 2(2xy)z = 4xyz$$ верно!

$$x \odot (y \odot z) = x \odot (2yz) = 2x(2yz) = 4xyz$$

10) $a x b = c$

$x = a^{-1} c b^{-1}$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{1997}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-2002}$$

$c = (125)^{1999}$

По модулю длины цикла

$\boxed{N = k \cdot len + mod}$

$$\begin{array}{r|l} 1997 & 3 \\ -18 & \overline{665} \\ \hline 19 & \\ -18 & \\ \hline 17 & \\ -15 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 666 \\ \times \quad 3 \\ \hline 1998 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1999 & 3 \\ -18 & \overline{666} \\ \hline 19 & \\ -18 & \\ \hline 19 & \\ -18 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2002 & 4 \\ -20 & \overline{500} \\ \hline 2 & \\ -0 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$a^{-1} = ((15)(263)(47))^{-1997} = (15)^{-1997} \cdot (263)^{-1997} \cdot (47)^{-1997} = (15)(263)(47)$$

$$b^{-1} = ((1742)(36)(5))^{-2002} = (1742)^{-2002} (36)^{-2002} = (1742)^2 = (14)(72)$$

$$c = (125)^{1999} = (125)$$

$$x = (15)(263)(47)(125)(14)(72) = (1426357)$$

10

10) $axb = c$ $\quad S_7$

$x = a^{-1} c \cdot b^{-1}$

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{1997}$

$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-2002}$

$c = (1\,2\,5)^{1999}$

$\boxed{\text{По модулю длины цикла}}$

$\boxed{N = k \cdot len + mod}$

$6 \bmod 7 = 6$

$-6 \bmod 7 = 1$

$-6 = -1 \cdot 7 + 1$

$= -7 + 1 - 6$

$1997 : 7 = 285$

$\begin{array}{r} 1997 \\ -14 \\ \hline 59 \\ -56 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 2 \end{array}$

$\begin{array}{r} 286 \\ \times\ 7 \\ \hline 2002 \end{array}$

$a^{-1} = \left((1\,5)(2\,6\,3)(4\,7)\right)^{-1997} =$

$= \left((1\,5)(2\,6\,3)(4\,7)\right)^{5} =$

$= (1\,5)^5 (2\,6\,3)^5 (4\,7)^5 =$

$=$

9,5

11) $a \times b = c$ $\quad Z^*_{23}$

$a = 7^{-1998}$

$b = 5^{115}$

$c = 21^{21}$

~~По модулю порядка группы~~

$\boxed{\text{По модулю порядка группы}}$

или
элемента.

$a^n = a^{n-|G|}$

Мультипликативная группа вычетов по модулю включает ^элементы кольца^ взаимно простые с модулем

т.е 0 – не включен, т.е порядок группы $p-1$ (Z^*_p)

$(a^{-1}) = 7^{1998} = 7^{1998 \bmod 22} =$

$= 7^{18} = 7^{-4} = (7^4)^{-1} =$

степени по $(p-1)$
элемент по p

$= (3 \cdot 3)^{-1} = 9^{-1} =$

$= 9^{21} = 9^{16} \cdot 9^4 \cdot 9 = 8 \cdot 6 \cdot 9 = 2 \cdot 9 = 18$

$9 = 9$

$9^2 = 12$

$9^4 = 6$

$9^8 = 13 = -10$

$9^{16} = 8$

42

$27 : 23 = 1$, ост. 4

$81 : 23 = 3$, ост. 12

$144 : 23 = 6$, ост. 6

степени по $p-1$

элементы по p

36

13×13

$169 : 23 = 7$, ост. 8

$72 : 23 = 3$, ост. 6

11

$\cdot\ b^{-1} = 5^{-115} = 5^{-115 \bmod 22}$ $5^{17} = 5^{-5} =$

$= (5^5)^{-1} = (2\cdot 2\cdot 5)^{-1} = 20^{-1} =$

$= 20^{-1} = 20^{21} = 20^{16}\cdot 20^4 \cdot 20 =$

$20 = -3$

$20^2 = 9$

$20^4 = 12 = -11$

$20^8 = 6$

$20^{16} = 13 = -10$

$= (-10)\cdot(-11)\cdot -3 =$

$=$

$= 18\cdot(-3) = (-5)\cdot(-3) = 15$

$X = 18 \cdot 11 \cdot 15 = (-5)\cdot(-8)\cdot 11 =$

$= 6\cdot 11 = 17\cdot 11 = (-6)\cdot 11 = 3$

$115 : 22 = 5$
-110
5

$25 \to 2$

$23 \times 4 = 92$

100

$22 \times 6 = 132$
$132 - 115 = 17$

$81 : 23 = 3$
-69
12

$121 : 23 = 5$
-115
6

$36 : 23 = 1$
-23
13

110 99

49

$C = 21^{21}$

$21^{21} = 21^{16}\cdot 21^4 \cdot 21 = 9(-7)\cdot(-2) = 9\cdot(14) = -9\cdot 9 = -12 = 11$

$21^{16} = 9$

$21 = -2$

$21^2 = 4$

$21^4 = 16 = -7$

$21^8 = 3$

$\cancel{X = 18\cdot 11\cdot 15 = (-5)\cdot 11\cdot(-8) = 9\cdot 11 = 7}$

$\cancel{X = 18\cdot 9\cdot 15 = (-5)\cdot 9\cdot(-8) = 9\cdot 9 = 12}$

12

12. $\mathbb{Z}_{23}$

$5+9=14$

$$\begin{array}{r} 23 \\ -14 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$x - 5y + z = 1$$
$$21x - 19y + 22z = -21$$
$$5x + \quad 17z = 5$$

$-33+1=-32$

46

$$\begin{array}{r} 121 : 23 = 5 \\ -115 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[+5(1)+(3)\to 3]{2(1)+(2)\to 2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right)}$$

$3\cdot(3)+(2)\to 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[(-5)\cdot(1)+(3)\to(3)]{2(1)+(2)\to(2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -11 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 4 \end{array}\right)$$

1) $-9z=4$

$14z=4$

$7z=2$

$z=7^{-1}\cdot 2$

$z=10\cdot 2=20=-3$

$7^{-1}=7^{21}=7^{16}\cdot 7^{4}\cdot 7=6\cdot 9\cdot 7=$

$=8\cdot 7=10$

$7=7$

$7^2=3$

$7^4=9$

$7^8=12=(-11)$

$7^{16}=6$

13

2) $-6y + (-3) = 4$

$-6y - 3 = 4$

$-6y = 7$

$y = (-6)^{-1} \cdot 7 = \cancel{\ldots}\ (-4) \cdot 7 = \cancel{\ldots} \cdot 18 = (-5)$

-28

$2 \cdot 23 = 46$

$\cdot 10$

46

-28

18

3) $x - 5 \cdot (-5) + 3 = 1$

$x + 2 - 3 = 1$

$x - 1 = 1$

$x = 2$

-24

$\boxed{x = 2, \quad y = -5, \quad z = -3}$ Проверка: !!!

$2 - 5 \cdot (-5) - 3 = 1$

$2 + 2 - 3 = 1$

$1 = 1$

верно.

$-2 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) - 1(-3) = -4 - 20 + 3 = 22 + 3 = 1$ верно

$5 \cdot 2 - 6(-3) = 10 + 18 = 5$

верно

Ответ: $x = 2, \quad y = -5, \quad z = -3$

14

(13) ab ba — обратимы.

Т.к ab — обратимо $\Rightarrow (\exists z)((ab)z = z(ab) = 1)$

В силу ассоциативности

$$a(bz) = 1$$

$$(za)b = 1$$

Т.к ba — обратимо

$$(\exists k)((ba)k = k(ba) = 1)$$

В силу ассоциативности

$$b(ak) = 1$$

$$(kb)a = 1$$

$$a(bz) = 1$$

$$a(bz)a = a$$

$$a((bz)a - 1) = 0$$

$$(bz)a = 1$$

$$\cancel{(za)b = 1}$$

$$\cancel{b(za)b = b}$$

$$\cancel{b((za)b - 1) = 0}$$

$$\cancel{za}$$

$$(za)b = 1$$

$$b(za)b = b$$

$$(b(za) - 1)b = 0$$

$$b(za) = 1$$

(13)

Т.к. ab — обратимо $\Rightarrow$ $(\exists z)\,((ab)z = z(ab) = 1)$

Т.к. ba — обратимо $\Rightarrow$ $(\exists k)\,((ba)k = k(ba) = 1)$

Ассоц.

$a(bz) = (za)b = b(ak) = (kb)a = 1$

$a(bz) = (kb)a = 1$

$a(bz)a = a \quad a(kb)a = a$

$a((bz)a - 1) = 0 \quad a((kb)a - 1) = 0$

$(bz)a - 1 = (kb)a - 1$

$(bz)a = (kb)a = 1$

$\boxed{a(bz) = (bz)a = 1}$

Вот это!!!

$a(bz)$ — (bz) правый обр. к a

b

13. $ab \quad ba$

~~Т.к. ab – обратимо $\Rightarrow (\exists (ab)^{-1})$ $ab(ab)^{-1} = 1$~~

~~ba – обратимо $\Rightarrow (\exists (ba)^{-1})$ $ba(ba)^{-1} = 1$~~

~~$ab(ab)^{-1} = ba(ba)^{-1}$~~

~~$ab = ba(ba)^{-1}ab$~~

$\exists a^{-1} \Rightarrow aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

$\exists b^{-1} \Rightarrow bb^{-1} = b^{-1}b = 1$

Т.к. ab – обратимо $\Rightarrow (\exists (ab)^{-1})$ $ab(ab)^{-1} = (ab)^{-1}ab = 1$

ba – обратимо $\Rightarrow (\exists (ba)^{-1})$ $ba(ba)^{-1} = (ba)^{-1}ba = 1$

~~$ab(ab)^{-1} = (ba)^{-1}ba$~~

~~$ba \cdot ab(ab)^{-1} = ba$~~

~~$ba\,ab = ba\,ab$~~

$a(ab)^{-1} = 1$

$a(ab)^{-1}a = a$

$a((ab)^{-1}a - 1) = 0$

$(ab^{-1})a -$