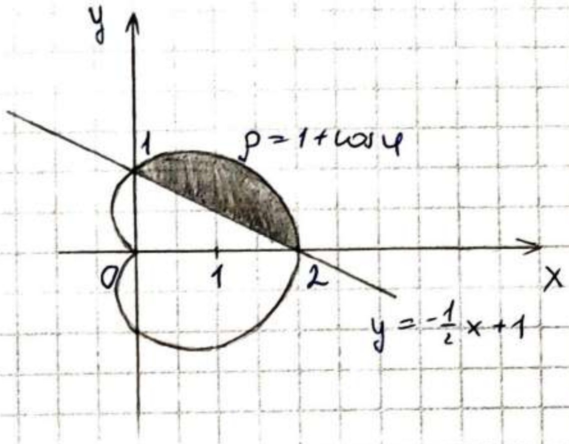
Домашнее задание
„Приложения определенного
интеграла".
ИУ7-23Б
Маслова Марина
Вариант №11

Задача 1

$\rho = 1 + \cos\varphi$

$x + 2y = 2$

$y = -\frac{1}{2}x + 1$



$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x+1\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi - \left(-\frac{x^2}{2\cdot 2} + x\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\varphi + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\varphi) d(2\varphi)\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{2}\right) - 1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \cancel{1} + \frac{\pi}{8} - \cancel{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{8}$

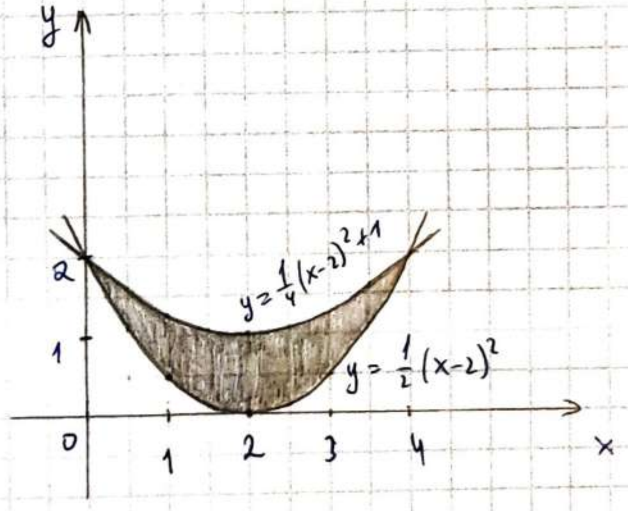
Задача 2

$y = \frac{1}{2}(x-2)^2$

$y = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$

Точки пересечения:

$\frac{1}{2}(x-2)^2 = \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$



МАСЛОВА М.Д. ИУ7-23Б ВАРИАНТ №11 ЛИСТ 2

Задача 2 (продолжение)

$$\frac{1}{4}(x-2)^2 = 1$$

$$(x-2)^2 = 4$$

$$x-2 = \pm 2$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

$$V_y = 2\pi\int_0^4 x\left(\frac{1}{4}(x-2)^2+1\right)dx - 2\pi\int_0^4 x\left(\frac{1}{2}(x-2)^2\right)dx =$$

$$= 2\pi\int_0^4 x\left(\frac{1}{4}(x^2-4x+4)+1\right)dx - \pi\int_0^4 x(x^2-4x+4)\,dx =$$

$$= 2\pi\int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x + x\right)dx - \pi\int_0^4 (x^3-4x^2+4x)\,dx =$$

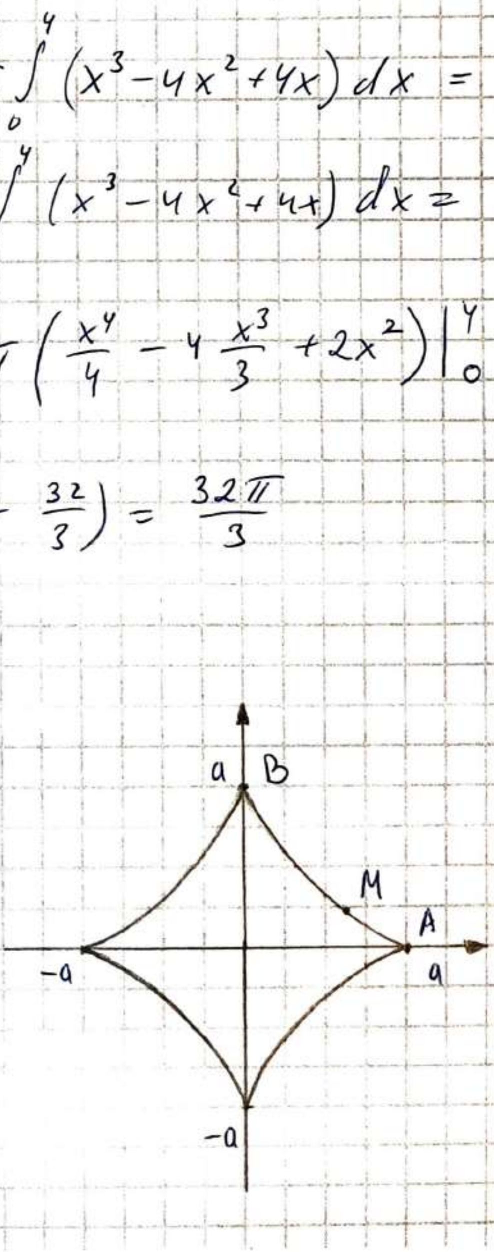
$$= 2\pi\int_0^4 \left(\frac{x^3}{4} - x^2 + 2x\right)dx - \pi\int_0^4 (x^3-4x^2+4x)\,dx =$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^4 - \pi\left(\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{32}{3}\right) - \pi\left(\frac{32}{3}\right) = \pi\left(\frac{64}{3} - \frac{32}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{32\pi}{3}$

Задача 3



$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

$A(a, 0)$

$B(0, a)$

$\smile AM = \frac{1}{4} \smile AB$

Задача 3 (продолжение)

Найдем значения t для точек A и B:

Для A:

$$\begin{cases} a = a\cos^3 t \\ 0 = a\sin^3 t \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos^3 t = 1 \\ \sin^3 t = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases} \quad \text{Возьмем } t = 0$$

Для B:

$$\begin{cases} 0 = a\cos^3 t \\ a = a\sin^3 t \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos^3 t = 0 \\ \sin^3 t = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = 1 \end{cases} \quad \text{Возьмем } t = \frac{\pi}{2}$$

(ближайшее к $t = 0$)

Производные

$$x'(t) = a(\cos^3 t)' = a \cdot 3\cos^2 t \cdot (-\sin t) = -3a\cos^2 t \sin t$$

$$y'(t) = a(\sin^3 t)' = a \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t = 3a\sin^2 t\cos t$$

Длина дуги AB:

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\cos t\sin t\, dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) = 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3a\frac{1}{2} = \frac{3a}{2}$$

Длина дуги AM: $\frac{1}{4} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a}{8}$

Длина дуги AM вычисляется аналогично, только меняется верхний предел интегрирования, откуда получаем:

$$l_{AM} = 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{t_M}$$

(t_M – значение t, соответствующее точке M)

Задача 3 (продолжение)

$$\frac{3a}{8} = 3a\,\frac{\sin^2 t_M}{2}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{\sin^2 t_M}{2} \quad \Big| \times 8$$

$$4\sin^2 t_M = 1$$

$$\sin^2 t_M = \frac{1}{4}$$

$$\sin t_M = \pm\frac{1}{2}$$

Т.к. $t_M \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin t_M = \frac{1}{2}$$

$$t_M = \frac{\pi}{6}$$

Находим координат точки M, подставляя t_M в параметрическое ур-е:

$$\begin{cases} x_M = a\cos^3\frac{\pi}{6} \\ y_M = a\sin^3\frac{\pi}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_M = \frac{3a\sqrt{3}}{8} \\ y_M = \frac{a}{8} \end{cases}$$

Ответ: $M\left(\frac{3a\sqrt{3}}{8};\ \frac{a}{8}\right)$

Задача 4

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3(x + \operatorname{arctg} x)}\,dx$$

При $x \to +\infty$: $\frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3(x + \operatorname{arctg} x)} \sim \frac{1}{x^3}$

Маслова М.Д. ИУ7-23Б Вариант №11 Лист 5

Задача 4 (продолжение)

Т.к $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится $(3>1)$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3(x+\operatorname{arctg} x)}\,dx \quad \text{тоже сходится.}$$

Ответ: сходится.

Задача 5

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\sqrt[5]{1+x^4} - 1}\,dx$$

Точка разрыва 0.

При $x \to 0$: $\operatorname{ch} x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(\operatorname{ch} x - 1)}{x^2} \overset{\text{Л}}{=} 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{2x} \overset{\text{Л}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x}{1} = \lim_{x\to 0} \operatorname{ch} x = 1$$

При $x \to 0$: $\sqrt[5]{1+x^4} - 1 \sim \frac{x^4}{5}$

При $x \to 0$ получаем:

$$\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\sqrt[5]{1+x^4} - 1} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^4}{5}} = \frac{5x^2}{2x^4} = \frac{5}{2x^2}$$

Т.к $\int\limits_0^1 \frac{5}{2x^2}\,dx = -\frac{5}{2x}\Big|_0^1$ расходится, то

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\sqrt[5]{1+x^4} - 1}\,dx \quad \text{тоже расходится}$$

Ответ: расходится