Домашнее задание по курсу общей физики

2-й курс (3-й семестр)

Группа ИУ7-33Б Фамилия, инициалы Маслова М.Д.

Вариант № 11 Задача № 4.2

Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме в положительном направлении оси Oy. Вектор плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S}$ имеет вид: $\vec{S}(y,t) = \vec{S}_m \cos^2(\omega t - ky)$. Считая волновое число $k = 0{,}42\ м^{-1}$ и амплитудное значение $S_m = 33{,}9 \frac{Дж}{с \cdot м^2}$ вектора $\vec{S}$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

1) вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;

2) вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ этой волны как функцию времени t и координат точки наблюдения;

3) объемную плотность энергии w;

4) средний вектор Пойнтинга $\langle\vec{S}\rangle$;

5) среднее значение $\langle S\rangle$ плотности потока энергии, переносимой этой волной;

6) вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$;

7) среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения $\langle|\vec{j}_{см}|\rangle$.

8) величину импульса $K_{ед}$ (в единице объема)

9) записать волновые уравнения для магнитной и электрической компонент рассматриваемой электромагнитной волны и изобразить схематично мгновенную фотографию этой волны.

Дано:

$\vec{S}(y,t) = \vec{S}_m \cos^2(\omega t - ky)$

$k = 0{,}42\ м^{-1}$

$S_m = 33{,}9\ \frac{Дж}{с \cdot м^2}$

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$\vec{E}(\vec{r},t)$ - ?

$\vec{H}(\vec{r},t)$ - ?

w - ?

$\langle \vec{S} \rangle$ - ?

$\langle S \rangle$ - ?

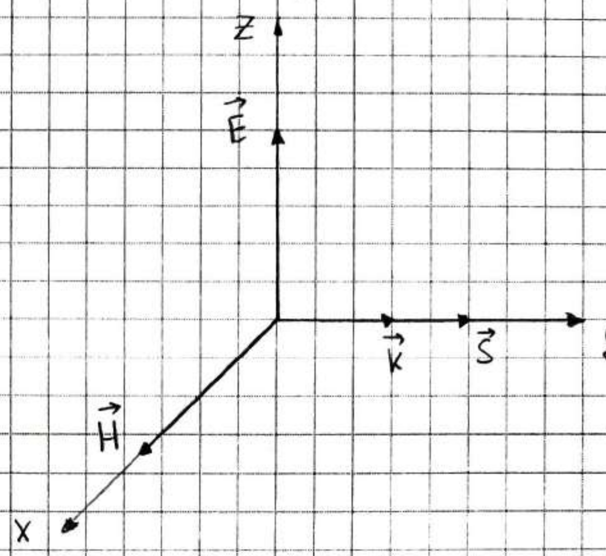
$\vec{j}_{см}$ - ?

$\langle |\vec{j}_{см}| \rangle$ - ?

$K_{ед}$ - ?

Решение:

Направления векторов $\vec{S}$, $\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ показаны на рисунке.



① Вектор плотности потока электромагнитной энергии:

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] \qquad (1)$$

Выразим $\vec{H}$ через $\vec{E}$.

Представим векторы напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ и магнитного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ плоской гармонической волны в комплексной форме:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad (2)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \qquad (3)$$

($\vec{k}$ - волновой вектор, $\vec{r}$ - радиус вектор точки наблюдения)

Уравнение Максвелла в дифференциальной форме связывающее между собой изменение в пространстве и времени электрического и магнитного полей:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad (4)$$

где $\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ - единичные орты декартовой системы координат

Связь между векторами магнитной индукции $\vec{B}$ и напряжённости $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \qquad (5)$$

Т.к. $\mu = 1$, подставляя (5) в (4), получаем:

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (6)$$

Для определения $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ вычислим сначала производные вектора $\vec{E}$ по координатам x, y, z.

Предварительно представим скалярное произведение волнового вектора $\vec{k}$ и радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения в координатной форме:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z \qquad (7)$$

Находим производные:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \vec{E}_m \cdot (-ik_x) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -ik_x \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \vec{E}_m \cdot (-ik_y) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = -ik_y \vec{E} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \vec{E}_m \cdot (-ik_z) \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = -ik_z \vec{E}$$

С учетом (8) запишем $\mathrm{rot}\,\vec{E}$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ k_x & k_y & k_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -i[\vec{k} \times \vec{E}] \qquad (9)$$

Производная $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = i\omega \vec{H} \qquad (10)$$

Подставляем (9) и (10) в (6):

$$-i[\vec{k}\times\vec{E}] = -\mu_0 i\omega\vec{H} \qquad (11)$$

Из (11):

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0\omega}[\vec{k}\times\vec{E}] \qquad (12)$$

Выразим ω:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

Откуда

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \qquad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получаем:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[\vec{k}\times\vec{E}] \qquad (14)$$

Подставляем (14) в (1):

$$\vec{S} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[\vec{E}\times[\vec{k}\times\vec{E}]] = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[\vec{k}(\vec{E}\cdot\vec{E}) - \vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{k})]$$

Т.к. $\vec{E}\perp\vec{k} \Rightarrow (\vec{E}\cdot\vec{k}) = 0$, таким образом:

$$\vec{S} = \frac{\vec{k}}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\vec{E}^2 \qquad (15)$$

Здесь:

$$\frac{\vec{k}}{k} = \vec{e}_y \qquad \vec{E} = \vec{E}_m\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \qquad (16)$$

Подставляем (16) в (15):

$$\vec{S} = \vec{E}_m^2\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\vec{e}_y \qquad (17)$$

По условию $\vec{S} = \vec{S}_m \cos^2(\omega t - ky)$, поэтому:

$\cancel{\vec{S}_m =}$

$$\vec{S}_m \cos^2(\omega t - ky) = \vec{E}_m^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\vec{e}_y \qquad (18)$$

Из (7), т.к. $\vec{k} \uparrow\uparrow$ оси y:

$$\vec{k}\vec{r} = k_y \cdot y = ky \qquad (19)$$

Подставляем (19) в (18):

$$\vec{S}_m \cos^2(\omega t - ky) = \vec{E}_m^2 \cos^2(\omega t - ky)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\vec{e}_y$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{S}_m = \vec{E}_m^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\vec{e}_y \qquad (20)$$

Для модулей:

$$S_m = E_m^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \qquad (21)$$

Откуда

$$E_m = \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} \qquad (22)$$

Т.к. $\vec{E}$ ~~направлен~~ параллелен ~~по~~ оси OZ, то $\vec{E}_m$ также параллелен ей, то есть:

$$\vec{E}_m = \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\,\vec{e}_z \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (16), получаем:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\,\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\,\vec{e}_z \qquad (24)$$

Учитывая (19):

$$\vec{E}(y, t) = \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\,\cos(\omega t - ky)\,\vec{e}_z \qquad (25)$$

С учетом (13), получаем:

$$\vec{E}(y,t) = \sqrt{S_m\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)\vec{e}_z \quad (26)$$

Подставляя значения из условия:

$$\vec{E}(y,t) = 113\cos(1{,}26\cdot 10^8 t - 0{,}42y)\vec{e}_z$$

② Также:

$$\vec{H} = \vec{H}_m\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (27)$$

Для нахождения $\vec{H}_m$ подставим в (14) комплексную форму записи (2) вектора $\vec{E}$ и возьмем действительную часть от обеих частей полученного равенства:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[\vec{k}\times\vec{E}_m]\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \quad (28)$$

Из (28) получаем соотношение между амплитудами колебаний электрической и магнитной компонент:

$$H_m = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|\vec{k}\times\vec{E}_m| = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}kE_m\sin(90^\circ) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m \quad (29)$$

Т.к H_m параллельно оси Ox:

$$\vec{H}_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m\vec{e}_x \quad (30)$$

Подставляя (30) и (22) в (22), получаем:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \sqrt{S_m\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{e}_x$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \sqrt{S_m\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\vec{e}_x \quad (31)$$

Учитывая (19) и (13):

$$\vec{H}(y,t) = \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}\,\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)\vec{e}_x \qquad (32)$$

Подставляя значение из условия:

$$\vec{H}(y,t) = 0{,}30\cdot\cos\left(1{,}26\cdot 10^8 t - 0{,}42y\right)\vec{e}_x$$

③ Объемная плотность энергии электромагнитного поля w для вакуума:

$$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \qquad (33)$$

В скалярном виде:

$$E(y,t) = \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\,\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)$$

$$H(y,t) = \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}\,\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right) \qquad (34)$$

Подставляем (34) в (33):

$$w = \left(\frac{\varepsilon_0 S_m\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{2} + \frac{\mu_0 S_m\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}{2}\right)\cos^2\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)$$

$$w = S_m\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\cos^2\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right) \qquad (35)$$

Подставляя значение из условия:

$$w = 1{,}13\cdot 10^{-7}\cos^2\left(1{,}26\cdot 10^8 t - 0{,}42y\right)$$

④ Средний вектор Пойнтинга:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\,dt \qquad (36)$$

Подставляем значение из условия:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}_m \cos^2(\omega t - ky)\,dt = \frac{\vec{S}_m}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - ky)\,dt =$$

$$= \frac{\vec{S}_m}{2T}\int_0^T \left(1 + \cos(2\omega t - 2ky)\right)dt = \frac{\vec{S}_m}{2T}\left(\int_0^T 1\,dt + \int_0^T \cos(2\omega t - 2ky)\,dt\right) =$$

$$= \frac{\vec{S}_m}{2T}\left(t\Big|_0^T + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t - 2ky)\Big|_0^T\right) = \frac{\vec{S}_m}{2T}\left(T + \frac{1}{2\omega}\left(\sin(2\omega T - 2ky) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin(2\omega \cdot 0 - 2ky)\right)\right) = \frac{\vec{S}_m}{2T}\left(T + \frac{1}{2\omega}\left(\sin(\overset{0}{\overset{\parallel}{2\omega T}})\cos(2ky) - \cos(\overset{1}{\overset{\parallel}{2\omega T}})\sin(2ky) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin(2ky)\right)\right) = \frac{\vec{S}_m}{2T}\left(T + \frac{1}{2\omega}\left(-\sin(2ky) + \sin(2ky)\right)\right) = \frac{\vec{S}_m}{2}$$

Таким образом

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\vec{S}_m}{2} \qquad (37)$$

или

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{S_m}{2}\vec{e}_y \qquad (38)$$

По условию:

$$\langle \vec{S} \rangle = 1{,}70 \cdot 10^1 \vec{e}_y$$

⑤ Плотность потока энергии, переносимой волной:

$$S = |\vec{S}| = S_m \cos^2(\omega t - ky) \qquad (39)$$

Вычисление среднего значения плотности потока энергии полностью аналогично вычислениям среднего вектора Пойнтинга, поэтому:

$$\langle S \rangle = \frac{S_m}{2} \qquad (40)$$

Или:

$$\langle S \rangle = 1{,}70 \cdot 10^1 \ \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}$$

⑥ Вектор плотности тока смещения:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (41)$$

Связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad (42)$$

$$(\varepsilon = 1)$$

Подставляем (16) в (42):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \qquad (43)$$

Подставляем (43) в (41):

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right) = -\varepsilon_0 \omega \vec{E}_m \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \qquad (44)$$

Подставляем (13), (19), (23) в (44):

$$\vec{j}_{см} = -\varepsilon_0 \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t - ky\right) \vec{e}_z$$

$$\vec{j}_{см} = -k \sqrt{S_m \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}} \sin\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t - ky\right) \vec{e}_z \qquad (45)$$

По числовым подставляем значения:

$$\vec{j}_{см} = -0{,}13 \sin(1{,}26 \cdot 10^8 t - 0{,}42 y)\, \vec{e}_z$$

⑦ Среднее за период колебаний значение модуля плотности тока смещения:

$$\langle |\vec{j}_{см}| \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \left|-\varepsilon_0 \vec{E}_m \omega \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right| dt = \varepsilon_0 E_m \omega \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T |\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})| dt}_{\langle|\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})|\rangle} \qquad (46)$$

$$\langle|\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r})|\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r})|\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t-\vec{k}\vec{r})\,dt =$$

$$= \frac{2}{\omega T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t-\vec{k}\vec{r})\,d(\omega t) = \frac{2}{\omega T}\left(-\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r})\right)\Big|_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\omega T}\left(-\cos\left(\omega\frac{T}{2}-\vec{k}\vec{r}\right)+\cos(-\vec{k}\vec{r})\right) = \left|\omega=\frac{2\pi}{T}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\cos(\pi-\vec{k}\vec{r})+\cos(-\vec{k}\vec{r})\right) = \frac{1}{\pi}\left(\cos(-\vec{k}\vec{r})+\cos(-\vec{k}\vec{r})\right) = \frac{2}{\pi}$$

(47)

Подставляем (47) в (46):

$$\langle|\vec{j}_{см}|\rangle = \varepsilon_0\omega E_m\frac{2}{\pi}$$

~~или~~

$$\cancel{\langle|\vec{j}_{см}|\rangle = \frac{2}{\pi}\varepsilon_0\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}E_m}$$

Подставляем (13) и (22):

$$\langle|\vec{j}_{см}|\rangle = \frac{2}{\pi}k\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{S_m\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}$$

$$\langle|\vec{j}_{см}|\rangle = \frac{2}{\pi}k\sqrt{S_m\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}} \qquad (48)$$

или

$$\langle|\vec{j}_{см}|\rangle = 0{,}08\ \frac{А}{м^2}$$

8) Модуль импульса $K_{ед}$ в единице объема, переносимого электромагнитной волной:

$$K_{ед} = \frac{W}{c}. \qquad (49)$$

Подставляем (35):

$$w_{ед} = \frac{S_m}{c}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\cos^2\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,t - ky\right) \qquad (50)$$

Или: $w_{ед} = 3{,}8\cdot 10^{-16}\cdot\cos^2(1{,}26\cdot 10^8 t - 0{,}42y)$

9 Волновое уравнение в общем виде

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}\right)$$

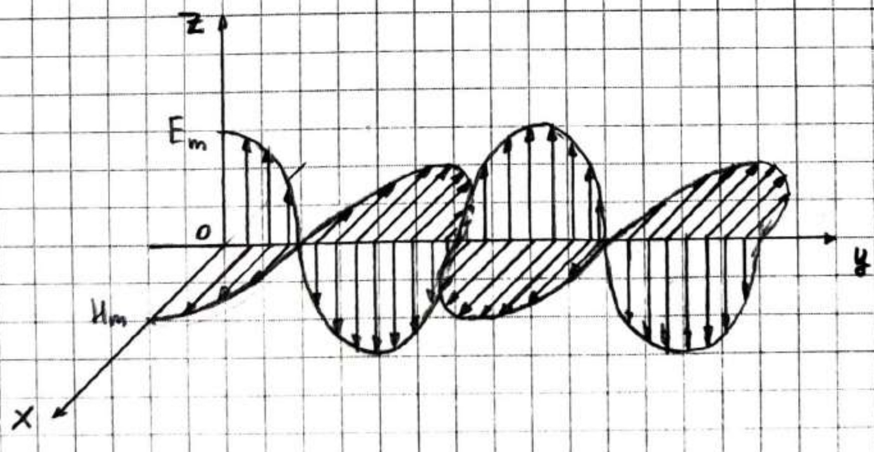
$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial z^2}\right)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$

В нашем случае волна распространяется в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $v = c$) вдоль оси Y, поэтому:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial y^2}$$



Ombem:

$$\vec{E}(y,t) = \sqrt{S_m\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{H}(y,t) = \sqrt{S_m\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}\cos\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)\vec{e}_x$$

$$w = S_m\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cos^2\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)$$

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{S_m}{2}\vec{e}_y \qquad \left(\langle\vec{S}\rangle = \frac{\vec{S}_m}{2}\right)$$

$$\langle S\rangle = \frac{S_m}{2}$$

$$\vec{j}_{cm} = -k\sqrt{S_m\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}\sin\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)\vec{e}_z$$

$$\langle|\vec{j}_{cm}|\rangle = \frac{2}{\pi}k\sqrt{S_m\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}$$

$$K_{eg} = \frac{S_m}{c}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cos^2\left(\frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}t - ky\right)$$