No. 1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Date 08.02.21

Градов Владимир Михайлович ИУ7 502^1

gradov@bmstu.ru

Апроксимация функций

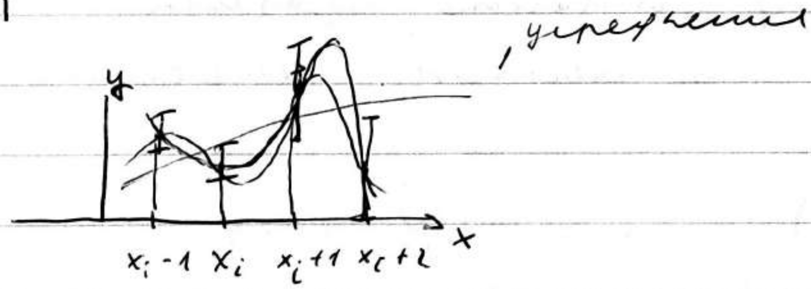
Приближенное представление.

$u'(x) = x^2 + u^2$ — нет ф-ий, кот выражают аналитически.

Решение в виде таблицы:

x	u

x	y



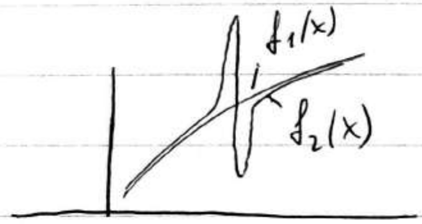
При апроксимации ф-ий $y(x) \approx \varphi(x, \bar{a})$, где

$$\bar{a} = \{a_0, a_1, a_2; \dots; a_n\}$$

Если пар-ры выбираются из апроксимирующей таблицы, то наз интерполяцией.

$y(x_i) = \varphi(x_i, \bar{a})$ $\quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=0}^{N} p_i\left(y_i - \varphi(x_i, \bar a)\right)^2 \to min$$ — наилучшее среднеквадратичное приближение.



1.1. Линейная интерполяция

Если φ линейно зависит от пар-ров, то ~~обоз~~ ~~мож~~ интерп. линейная

$$\varphi(x, \bar a) = \sum_{k=0}^{k} a_k \underbrace{\varphi_k(x)}_{\substack{\text{набор} \\ \text{независ. ф-ций} \\ \text{(известных)}}}$$

$$\varphi_k(x) = x^k \Rightarrow \varphi(x, \bar a) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k =$$

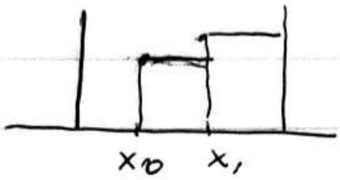
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n$$

Требуется $(n+1)$ узел

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots n$$

система всегда имеет решение

На совокупности [illegible] узлов всегда можно построить полином.



Рассмотрим алгоритм построения интерполяционного полинома Ньютона.

Разделенные разности

$$y(x_0, x_1) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \quad ; \quad y(x_0, x_1, x_2) = \frac{y(x_0, x_1) - y(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$

$$y(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{y(x_0, x_1, x_2) - y(x_1, x_2, x_3)}{x_0 - x_3}$$

$\vdots$

$$y(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{y(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - y(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_0 - x_n}$$

Отсчёт от дел $(x_n - x_0)$ равен значению полинома от x_0

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\, y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, y(x_0, x_1, x_2) +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, y(x_0, x_1, x_2, x_3) + \ldots +$$
$$+ (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})\, y(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{4} (x-x_0)\dots(x-x_{k-1})\, y(x_0, x_1, \dots, x_k)$$

<u>Пример.</u>

Дано: $n=4$

$x=0,6$

x	y
v	v
v	v
0	1
0,25	0,924
0,5	0,707
0,75	0,383
1	0,000
v	v

Выбираем участок таблицы так, чтобы x попадал в центр этого участка

Точное значение

$y(0,6) = 0,588$

0,6

x	y	$y(x_i, x_k)$	$y(x_i, x_k, x_l)$	$y(x_i, x_k, x_l, x_m)$	$y(x_i \dots x_p)$
v	v				
v	v				
0	1				
		−0,304			
0,25	0,924		−1,128		
		−0,868 v		0,363	
0,5	0,707		−0,856		0,149
		−1,296 v		0,512	
0,75	0,383		−0,472		
		−1,532			
1	0,000				
0	v				

Так $y = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ $\qquad P_n(0,6) \approx 0,589$

$$P_n(x) = 1 - 0,304(x-0) - 1,128x(x-0,25) + 0,363x(x-0,25)\cdot$$
$$\cdot(x-0,5) + 0,149x(x-0,25)(x-0,5)(x-0,75)$$

Алгоритм:

1. При заданных n и X строим конфигурацию узлов, на которых будем строить полином. Эти узлы должны примыкать к заданному X.
2. Строим таблицу разделенных разностей
3. Строим полином.

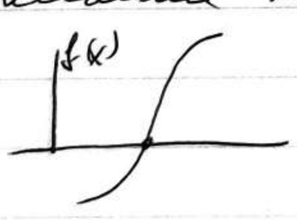
Замечание об обратной интерполяции

X	y
0	−5
1	−4
2	3
3	10

$\longrightarrow$

X	y
−5	0
−4	1
3	2
10	3

Обратная интерпол. предназначена для отыскания корней.



$f(x) = 0$

(Полином Эрмита) Степень полинома?

Обычно 5, 6, 7

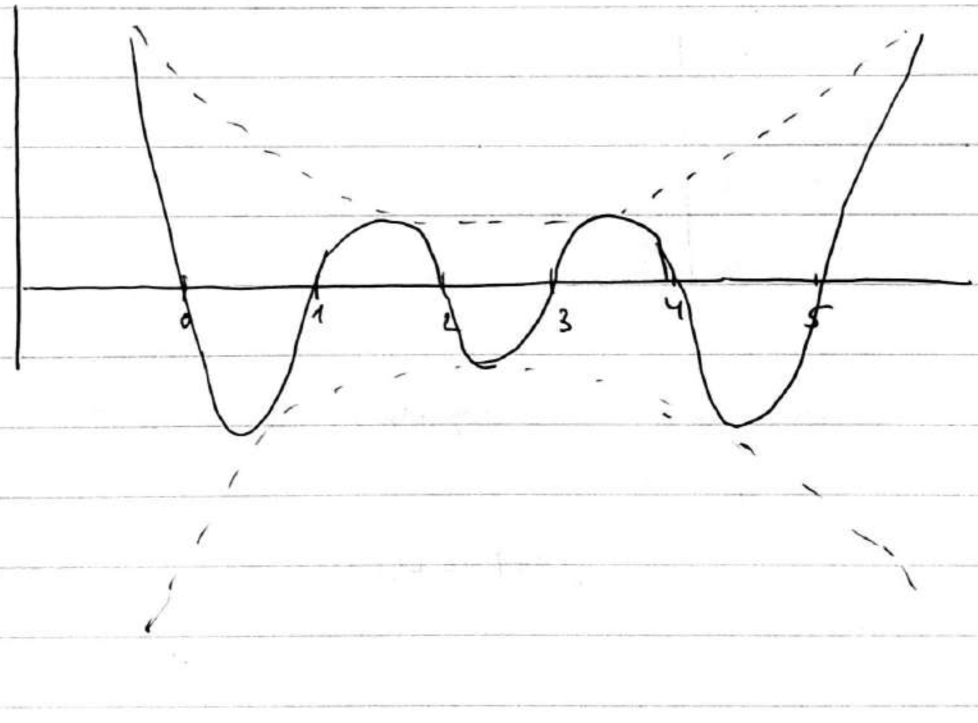
Лучше меньше

Теор. погр.

$$|y(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \le x \le x_n} |y^{(n+1)}(x)|$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

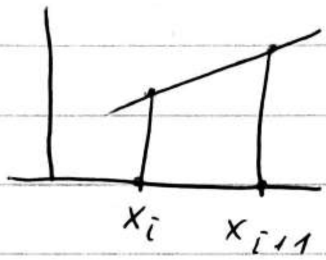


На практике: разумное сочетание полинома.

Погрешность по разделенным разностям

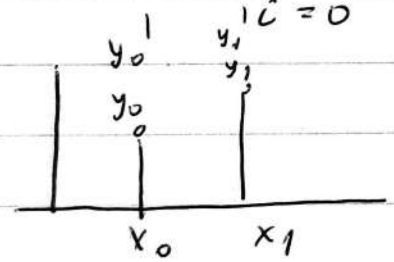
Полином Эрмита

x	y	y'



$$H_n(x) = P_n(x; \underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{n_0}, \underbrace{x_1, x_1, x_1}_{n_1} \dots \underbrace{x_k, x_k, x_k}_{n_k})$$

$$\sum_{i=0}^{k} n_i = n+1$$



4 коэф → полин 3 ст.

$$H_3(x) = P_3(x; x_0; x_0; x_1; x_1) = y_0 + (x - x_0)\, y(x_0, x_0) \oplus$$

На заданной сетке точек полином единственный

$\oplus\ (x-x_0)(x-x_0)\, y(x_0, x_0, x_1) + (x-x_0)(x-x_0)(x-x_1) \cdot$
$y(x_0, x_0, x_1, x_1)$

$$y(\underbrace{x_0, x_0, x_0, \dots x_0}_{m}) = \frac{1}{(m-1)!} y^{(m-1)}$$

x_0	y_0	
		y_0'
x_0	y_0	
		v
x_1	y_1	
		y_1'
x_1	y_1	