Вариант 7.5

(проставьте результат ЕГЭ по математике и форму обучения)

1. Решить уравнение $3 + 5\sin 2x = \cos 4x$.

2. Вычислить

$$\log_5(10^{\lg^2 5}) + 2^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 2}}.$$

3. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$$

4. Решить неравенство $|3x+1| \geqslant 3-x$.

5. Решить уравнение $5+\sqrt{x+3}=3x$.

6. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt[8]{2-\log_4 x}+\sqrt{x^2-6x+5}$.

7. Изобразить на плоскости множество точек $M(x;y)$, удовлетворяющих условию $5x-13 \geqslant 3y$.

8. Решить неравенство $\dfrac{3}{x+2} \leqslant x$.

9. Боковое ребро BD треугольной пирамиды $DABC$ перпендикулярно основанию ABC, которое является равнобедренным треугольником, при этом $AB = BC$, $AB : AC = 5 : 8$. Боковая грань ACD наклонена к плоскости основания под углом $60°$. Площадь боковой поверхности пирамиды равна $216+135\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

Маслова Марина ИУ7-13Б Вар. 7.5

ЕГЭ: 92 Бюджет. | Лист 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9

+ + ∓ + + + + ⊕ ∓

№1 $3 + 5\sin 2x = \cos 4x$

$3 + 5\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$3 + 5\sin 2x - 1 + 2\sin^2 2x = 0$

$2 + 5\sin 2x + 2\sin^2 2x = 0$

$2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 2 = 0$

Замена $\sin 2x = t \quad -1 \le t \le 1$

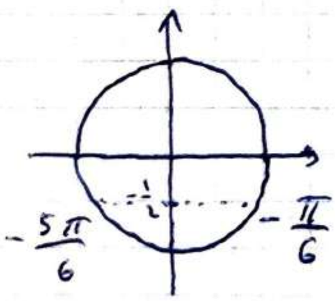
$2t^2 + 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$t_1 = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ не удовлетворяет условию $-1 \le t \le 1$

$\sin 2x = -\frac{1}{2}$



$$\left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \pi k;\ -\frac{5\pi}{12} + \pi n;\ k, n \in \mathbb{Z}$

⊕

N 2 $\log_5\left(10^{\lg^2 5}\right) + 2^{\frac{\lg \lg 2}{\lg 2}} =$

$= \log_5\left(\left(10^{\lg 5}\right)^{\lg 5}\right) + 2^{\log_2 \lg 2} =$

$= \log_5\left(5^{\lg 5}\right) + \lg 2 =$

$= \lg 5 \cdot \log_5 5 + \lg 2 = \lg 5 + \lg 2 =$

$= \lg(5 \cdot 2) = \lg 10 = 1$

Ответ: 1

+

№4 $|3x+1| \geqslant 3-x$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+1 \geqslant 0 \\ 3x+1 \geqslant 3-x \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} 3x+1 < 0 \\ -(3x+1) \geqslant 3-x \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \begin{cases} 3x+1 \geqslant 0 \\ 3x+1 \geqslant 3-x \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{3} \\ 3x+1-3+x \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{3} \\ 4x-2 \geqslant 0 \quad |:2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{3} \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \geqslant -\frac{1}{3} \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}; \quad x \geqslant \frac{1}{2}$$

$$(2) \begin{cases} 3x+1 < 0 \\ -3x-1 \geqslant 3-x \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x+1 < 0 \\ -3x-1-3+x \geqslant 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ -2x-4 \geqslant 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ -2x \geqslant 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x \leq -2 \end{cases};$$

$x \leq -2$

$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x \leq -2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$ +

N 5 $5 + \sqrt{x+3} = 3x$

$\sqrt{x+3} = 3x - 5$

$$\begin{cases} 3x - 5 \geqslant 0 \\ x + 3 = (3x-5)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geqslant 5 \\ x + 3 = 9x^2 - 30x + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{5}{3} \\ 9x^2 - 30x + 25 - x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{5}{3} \\ 9x^2 - 31x + 22 = 0 \quad * \end{cases}$$

$* \; 9x^2 - 31x + 22 = 0$

$D = 31^2 - 4 \cdot 9 \cdot 22 = 169 = 13^2$

$x_1 = \frac{31 + 13}{18} = \frac{44}{18} = \frac{22}{9}$

$x_2 = \frac{31 - 13}{18} = \frac{18}{18} = 1$

Маслова ИУ7-13Б Вар 7.5

Лист 2

N5 (продолжение)

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{22}{9} \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = \frac{22}{9}$$

Сравним: $\frac{5}{3} < \frac{22}{9}$

$\frac{15}{9} < \frac{22}{9}$

Ответ: $\frac{22}{9}$

N6 $f(x) = \sqrt[8]{2 - \log_4 x} + \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

ООФ: $\begin{cases} x > 0 \\ 2 - \log_4 x \geq 0 \quad (1) \\ x^2 - 6x + 5 \geq 0 \quad (2) \end{cases}$

(1) $\log_4 x \leq 2$

$\log_4 x \leq \log_4 4^2$

$x \leq 2$

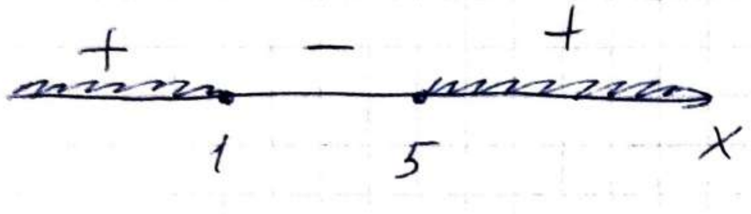
(2) $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$D = 36 - 4 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

$$x_1 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$(x-1)(x-5) \geq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 5 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1]$$

Ответ: $(0;1] \cup [5,6]$ +

№7

$$5x - 13 \geq 3y$$

$$3y \leq 5x - 13 \quad |:3$$

$$y \leq \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$$ — все точки на прямой $y = \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$ или ниже её

см рис №3

МАСЛОВА МАРИНА ИУ7 – 13Б

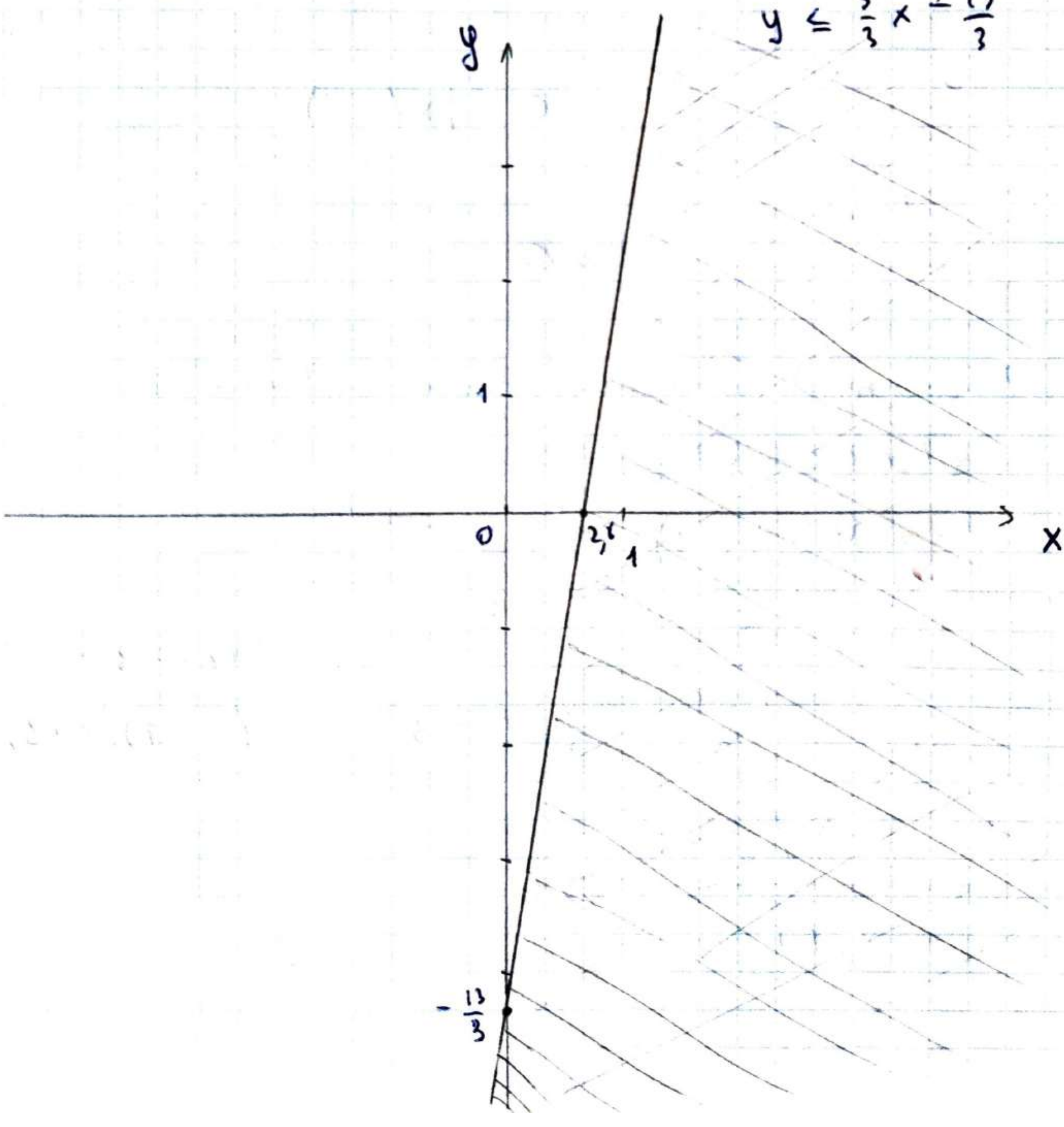
Вар. 7.5.

Лист 3.

№7 (продолжение)

Построим прямую $y = \frac{5}{3}x - \frac{13}{3}$

x	0	$2,6$
y	$-\frac{13}{3}$	0



№8 $\frac{3}{x+2} \le x$

$\frac{3}{x+2} - x \le 0$

$\frac{3 - x(x+2)}{x+2} \le 0$

$\frac{3 - x^2 - 2x}{x+2} \le 0 \quad | \times (-1)$

$\frac{x^2 + 2x - 3}{x+2} \geq 0$

Разложим на множители $x^2 + 2x - 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$

$x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

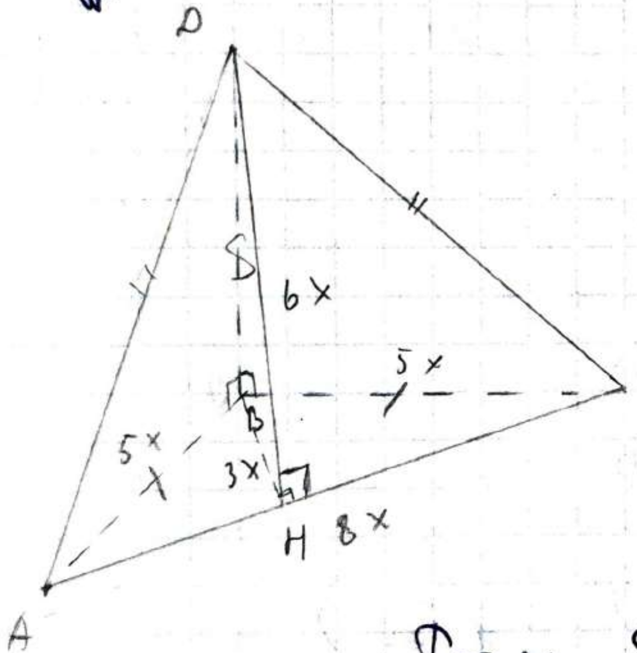
$\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

$\frac{(x-1)(x+3)}{x+2} \geq 0$

$x \in [-3; -2) \cup [1; +\infty)$

Ответ: $[-3; -2) \cup [1; +\infty)$ +

№ 8



~~1) $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot BD$~~

~~2) Пусть~~

~~$AB = BC = 5x$~~

~~$AC = 8x$~~

~~Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{}$~~

1) Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$:

а) $AB = BC$

б) DB – общая

в) $\angle DBA = \angle DBC = 90°$

=> эти $\triangle$-ки равны по двум катетам. =>

=> $AD = DC$ => $\triangle ADC$ – равнобедренный

2) Проведем BH - высоту $\triangle ABC$.
Т.к $\triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ BH - медиана $\Rightarrow$ $AH = HC$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ DH - медиана $\triangle ADC$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ DH - высота $\triangle ADC$

3) Т.к $\left.\begin{matrix} BH \perp AC \\ DH \perp AC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle DHB$ - двугранный

$\angle DHB = 60^\circ$

4) $S_{бок} = S_{ABD} + S_{BDC} + S_{ADC}$ (Пусть $BD = h$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot h$

$S_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot h$

$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot DH$

5) $BH = \sqrt{(5x)^2 - (4x)^2} = \sqrt{25x^2 - 16x^2} = 3x \Rightarrow$

$\cancel{\Rightarrow DH = \sqrt{(3x)^2 + h^2} = \sqrt{9x^2 + h^2}}$

$\cancel{S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 8x \sqrt{9x^2 + h^2}}$

$\cancel{S_{бок} = 5xh + 4x\sqrt{9x^2 + h^2}}$

5) Т.к $\angle DHB = 60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{3x}{DH}$

МАСЛОВА МАРИНА ИУ7-13Б Вар 7.5

Лист 4

№9 (продолжение)

5) $\frac{1}{2} = \frac{3x}{ДН}$

$ДН = 6x$

$S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 6x$

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 5xh + \frac{1}{2} 5xh + \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 6x =$

$= 5xh + 4x \cdot 6x =$

$= 5xh + 24x$

6) $V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 8x = 4x \cdot 3x = 12x^2$

$V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 12x^2 \cdot h$

7) $h = \sqrt{(6x)^2 - (3x)^2} = \sqrt{36x^2 - 9x^2} =$

$= \sqrt{27x^2} = 3x\sqrt{3}$

Получаем

$S_{бок} = 5x \cdot 3x\sqrt{3} + 24x = 216 + 135\sqrt{3}$

$15x\sqrt{3} + 24x = 216 + 135\sqrt{3}$

Откуда $x = 9$

8) $V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 12x^2 \cdot 3x\sqrt{3}$

$V_{пир} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 12 \cdot 9^2 \cdot \cancel{3} \cdot 9\sqrt{3}$

$V_{пир} = 12 \cdot 9^2 \cdot 9\sqrt{3}$

$V_{пир} = 12 \cdot 729\sqrt{3}$

$V_{пир} = 8748\sqrt{3}$

Ответ: $8748\sqrt{3}$ $\pm$

№3

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}} =$$

$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$

$$= \frac{\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1})} + \frac{\sqrt{a-1}}{(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a}\sqrt{a-1} - a + 1) + \sqrt{a}\sqrt{a-1} + \sqrt{a^2-1}}{(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})} =$$

$$= \frac{2\sqrt{a}\sqrt{a-1} - a + 1 + \sqrt{a^2-1}}{(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{a-1}+\sqrt{a+1}}$$