Лист 0

Домашнее задание №2

„Дифференциальные уравнения высших порядков"

ИУ7-23Б

Маслова Марина

Вариант №11

Задача 1

$$y'y'' + y\sqrt{2-y^2} = 0 \quad ; \quad y(0)=1, \; y'(0)=1$$

Замена $z(y) = y'$, $y'' = z'_y \cdot z$

Тогда

$$z^2 z' + y\sqrt{2-y^2} = 0$$

$$z^2 \frac{dz}{dy} = -y\sqrt{2-y^2} \qquad \text{(с разделяющимися переменными)}$$

$$z^2 \, dz = -y\sqrt{2-y^2}\, dy$$

$$\int z^2 \, dz = -\int y\sqrt{2-y^2}\, dy + C_1$$

$$\frac{z^3}{3} = \frac{1}{2}\int (2-y^2)^{\frac{1}{2}} \, d(2-y^2) + C_1$$

$$\frac{z^3}{3} = \frac{(2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C_1$$

$$z^3 = (2-y^2)^{\frac{3}{2}} + 3C_1$$

$$(y')^3 = (2-y^2)^{\frac{3}{2}} + 3C_1$$

При $y(0)=1$ и $y'(0)=1$, получаем:

$$1 = (2-1)^{\frac{3}{2}} + 3C_1$$

$$3C_1 = 0$$

$$C_1 = 0$$

Тогда при данных начальных условиях:

$$y' = \sqrt{2-y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2-y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{2-y^2}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2-y^2}} = \int 1\,dx + C_2$$

$$\arcsin\frac{y}{\sqrt{2}} = x + C_2$$

При $y(0)=1$:

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 0 + C_2$$

$$C_2 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$C_2 = \frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\arcsin\frac{y}{\sqrt{2}} = x + \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\arcsin\frac{y}{\sqrt{2}} = x + \frac{\pi}{4}$

<u>Задача 2</u>

$$y'' + y'\,ctg\,x + 1 = 0$$

Замена: $z(y) = y'$, $y'' = z'_y \cdot z$

Тогда:

$$z'z + z\,ctg\,x + 1 = 0$$

Задача 2

$$y'' + y' \operatorname{ctg} x + 1 = 0$$

Замена $p(x) = y'(x)$, $p'(x) = y''(x)$

Тогда:

$$p' + p \operatorname{ctg} x + 1 = 0$$ — линейное ОДУ 1-ого порядка

Замена $p = uv$, $p' = u'v + v'u$

Тогда:

$$u'v + v'u + uv \operatorname{ctg} x + 1 = 0$$

$$v(u' + u \operatorname{ctg} x) + v'u + 1 = 0$$

$$\begin{cases} u' + u \operatorname{ctg} x = 0 \\ v'u = -1 \end{cases}$$

Найдем u:

$$u' + u \operatorname{ctg} x = 0$$

$$\frac{du}{dx} = -u \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{du}{u} = -\operatorname{ctg} x \, dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \operatorname{ctg} x \, dx$$

$$\ln|u| = -\ln|\sin x|$$

$$u = \frac{1}{\sin x}$$

Найдем v:

$$v' \frac{1}{\sin x} = -1$$

$$v' = -\sin x$$

$$v = -\int \sin x\,dx + C_1$$

$$v = \cos x + C_1$$

$$p = uv = \frac{1}{\sin x}(\cos x + C_1) = ctg\,x + \frac{C_1}{\sin x}$$

$$y' = ctg\,x + \frac{C_1}{\sin x}$$

$$y = \int\left(ctg\,x + \frac{C_1}{\sin x}\right)dx = \int ctg\,x\,dx + C_1\int\frac{1}{\sin x}dx =$$

$$= \ln|\sin x| + C_1 \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C_2$$

Ответ: $y = \ln|\sin x| + C_1 \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C_2$

~~Задача 3~~

$\cancel{y'''} + 6y$

Маслова Марина ИУ7-23Б Вариант 11 Лист №5

Задача 3

$$y''' - 6y'' + 10y' = \cos x\, e^{3x} - x^3 + x e^x - 3x \sin x\, e^{3x} + x^2 \cos 3x\, e^{-4x} + 4$$

Характеристическое ур-е:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = 3 \pm i$$

$$y_{oo} = C_1 + C_2 e^{3x} \cos x + C_3 e^{3x} \sin x$$

$$b(x) = e^{\alpha x} [P_{m_1}(x) \cos \beta x + Q_{m_2}(x) \sin \beta x]$$

1) $b(x) = e^{3x} (\cos x - 3x \sin x)$

$\alpha = 3$, $\beta = 1$, $P_0(x) = 1$, $Q_1(x) = -3x$, $m = 1$, $\lambda = 3 \pm i$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

$$y_{чн1} = x e^{3x}((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$$

2) $b(x) = -x^3 + 4$

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_3(x) = -x^3 + 4$, $Q_0(x) = 0$, $m = 3$, $\lambda = 0$ – корень характеристического ур-я $\Rightarrow k = 1$

$$y_{чн2} = x(Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)$$

3) $b(x) = x e^x$

$\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(x) = x$, $Q_0(x) = 0$, $m = 1$, $\lambda = 1$ – не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow k = 0$

$$y_{чн3} = e^x (Kx + L)$$

4) $b(x) = x^2 \cos 3x\, e^{-4x}$

$\alpha = -4$, $\beta = 3$, $P_2(x) = x^2$, $Q_0(x) = 0$, $m = 2$, $\lambda = -4 \pm 3i$ – не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow k = 0$

$$y_{чн4} = e^{-4x}\left(\left(Mx^2+Nx+P\right)\cos 3x + \left(Qx^2+Sx+T\right)\sin 3x\right)$$

Ответ: $y_{он} = C_1 + C_2 e^{3x}\cos x + C_3 e^{3x}\sin x +$

$+ xe^{3x}\left(\left(Ax+B\right)\cos x + \left(Cx+D\right)\sin x\right) +$

$+ x\left(Ex^3+Fx^2+Gx+H\right) + e^{x}\left(Kx+L\right) +$

$+ e^{-4x}\left(\left(Mx^2+Nx+P\right)\cos 3x + \left(Qx^2+Sx+T\right)\sin 3x\right)$

Задача 4

$$2y'' - 7y' - 4y = -36e^{-\frac{x}{2}} - 4x - 3 \;;\; y(0)=0;\; y'(0)=0$$

Характеристическое ур-е:

$2\lambda^2 - 7\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$

$\lambda_2 = 4$

$y_{оо} = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{4x}$

$b(x) = e^{\alpha x}\left[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x\right]$

1) $b(x) = -36e^{-\frac{x}{2}}$

$\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $P_0(x) = -36$, $Q_0(x) = 0$, $m=0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ - корень характеристического ур-я $\Rightarrow k=1$

$y_{чн1} = Axe^{-\frac{x}{2}}$

Найдем A:

$y'_{чн1} = Ae^{-\frac{x}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right)$

$y''_{чн1} = Ae^{-\frac{x}{2}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right) = -A\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(2-\frac{x}{2}\right)$

Подставляем:

$2\left(-A\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(2-\frac{x}{2}\right)\right) - 7Ae^{-\frac{x}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right) - 4Axe^{-\frac{x}{2}} = -36e^{-\frac{x}{2}}$

Маслова Марина ИУ7-23Б Вариант 11 Лист №7

$$Ae^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}-2-7\left(1-\frac{x}{2}\right)-4x\right)=-36e^{-\frac{x}{2}}$$

$$-9Ae^{-\frac{x}{2}}=-36e^{-\frac{x}{2}}$$

$$-9A=-36$$

$$A=4 \Rightarrow y_{чн1}=4xe^{-\frac{x}{2}}$$

2) $b(x)=-4x-3$

$\alpha=0,\ \beta=0,\ P_1(x)=-4x-3,\ Q_0(x)=0,\ m=1,\ \lambda=0$ – не является корнем характеристического ур-я $\Rightarrow k=0$

$$y_{чн2}=Bx+C$$

Найдем B и C:

$$y'_{чн2}=B$$

$$y''_{чн2}=0$$

Подставляем:

$$-7B-4(Bx+C)=-4x-3$$

$$\begin{cases}-4B=-4\\-7B-4C=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}B=1\\C=-1\end{cases} \Rightarrow y_{чн2}=x-1$$

$$y_{он}=C_1e^{-\frac{x}{2}}+C_2e^{4x}+4xe^{-\frac{x}{2}}+x-1$$

При $y(0)=0$:

$$0=C_1+C_2-1$$

Получим второе ур-е:

$$y'_{он}=-\frac{1}{2}C_1e^{-\frac{x}{2}}+4C_2e^{4x}+4e^{-\frac{x}{2}}-2xe^{-\frac{x}{2}}+1$$

При $y'(0)=0$:

$$0=-\frac{C_1}{2}+4C_2+5$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 - 1 \\ 0 = -\frac{C_1}{2} + 4C_2 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

Ответ: $y = 2e^{-\frac{x}{2}} - e^{4x} + 4xe^{-\frac{x}{2}} + x - 1$

Задача 5

$$y'' \sin^2 2x - 6y' \sin 2x + 4y(3 - 2\sin^2 x) = tg^3 x \cdot \sin^2 2x; \quad y_1 = tg\, x$$

$$y'' - \frac{6}{\sin 2x} y' + \frac{4(3-2\sin^2 x)}{\sin^2 2x} y = tg^3 x$$

По следствию из формулы Остроградского-Лиувилля:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2} dx, \text{ где } y_1 = tg\, x, \; a(x) = \frac{-6}{\sin 2x}$$

$$y_2 = tg\, x \int \frac{e^{\int \frac{6}{\sin 2x} dx}}{tg^2 x} dx = tg\, x \int \frac{e^{\int \frac{3}{\sin 2x} d(2x)}}{tg^2 x} dx =$$

$$= tg\, x \int \frac{e^{3\ln|tg\, x|}}{tg^2 x} dx = tg\, x \int \frac{tg^3 x}{tg^2 x} dx = tg\, x \int tg\, x\, dx =$$

$$= tg\, x \cdot (-\ln|\cos x| + C)$$

Т.к необходимо одно из решений, положим $C = 0$,

тогда $y_2 = -tg\, x \ln|\cos x|$.

Получаем:

$$y_{oo} = C_1 tg\, x - C_2 tg\, x \ln|\cos x|$$

Будем искать общее решение НЛДУ в виде:

$$y_{он} = C_1(x) tg\, x - C_2(x) tg\, x \ln|\cos x|$$

$$\cancel{C_1' tg\, x - C_2' tg\, x \ln|\cos x| = 0}$$

$$\cancel{\frac{C_1'}{\cos^2 x} - \frac{C_2' \ln|\cos x|}{\cos^2 x} +}$$

Машова Марина ИУ7-23Б   Вариант 11   Лист №9

$$\begin{cases} C_1' \operatorname{tg} x - C_2' \operatorname{tg} x \ln|\cos x| = 0 \\ \dfrac{C_1'}{\cos^2 x} - C_2' \dfrac{\ln|\cos x| - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^3 x \end{cases}$$

Решим методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & -\operatorname{tg} x \ln|\cos x| \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\dfrac{\ln|\cos x| - \sin^2 x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{tg} x(\sin^2 x - \ln|\cos x|)}{\cos^2 x} +$$

$$+ \frac{\operatorname{tg} x \ln|\cos x|}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^3 x$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\operatorname{tg} x \ln|\cos x| \\ \operatorname{tg}^3 x & -\dfrac{\ln|\cos x| - \sin^2 x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = \operatorname{tg}^4 x \ln|\cos x|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} & \operatorname{tg}^3 x \end{vmatrix} = \operatorname{tg}^4 x$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \operatorname{tg} x \ln|\cos x| \quad ; \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \operatorname{tg} x$$

$$C_1 = \int \operatorname{tg} x \ln|\cos x| dx = \begin{vmatrix} t = \ln|\cos x| \\ dt = -\operatorname{tg} x \end{vmatrix} = -\int t\, dt = -\frac{t^2}{2} + \tilde{C}_1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln^2|\cos x| + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + \tilde{C}_2$$

$$y_{он} = \left(-\frac{1}{2} \ln^2|\cos x| + \tilde{C}_1\right) \operatorname{tg} x - \left(-\ln|\cos x| + \tilde{C}_2\right) \operatorname{tg} x \ln|\cos x| =$$

$$= \tilde{C}_1 \operatorname{tg} x - \tilde{C}_2 \operatorname{tg} x \ln|\cos x| - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \ln^2|\cos x| + \operatorname{tg} x \ln^2|\cos x| =$$

Мошова Марина ИУ7-23Б Вариант 11 Лист №10

$y = \tilde{C}_1 \operatorname{tg} x - \tilde{C}_2 \operatorname{tg} x \ln|\cos x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \ln^2|\cos x|$

Ответ: $y_{оп} = \tilde{C}_1 \operatorname{tg} x - C_2 \operatorname{tg} x \ln|\cos x| + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \ln^2|\cos x|$