Часть А.

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №2
БИЛЕТ №11

Теория.

① Определение

Говорят, что ф-я $f(x)$, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$, достигает в этой точке условного локального максимума (минимума) при условиях $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)=0$, ... $\varphi_m(x)=0$, где $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ - некоторые ФНП, определенные в окрестности точки a, если существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a,\delta)$ точки a, что для всех точек $x \in \mathring{U}(a,\delta)$, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(x)=0$, $i=\overline{1,m}$, верно неравенство:

$$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a))$$

Понятие условного локального максимума и минимума объединяют под общим названием условный экстремум ф-ии.

② Формулы для вычисления частных производных сложной ф-ии вида $z = f(u(x,y), v(x,y))$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

---

3. Теорема (о неявной функции)

Пусть уравнение $f(x,y)=0$, $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям:

1) $f(a,b)=0$, где a, b - координаты точки.

2) ф-я $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности U точки (a,b) и непрерывно дифференцируема в U,

③ Теорема (о неявной функции)

Пусть уравнение $f(x,y)=0$, $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям:

1) $f(a,b)=0$, где a, b — координаты точки

2) ф-я $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности U точки (a,b) и непрерывно дифференцируема в U.

3) частная производная ф-ии $f(x,y)$ в точке (a,b) по переменной y отлична от нуля: $f'_y(a,b) \neq 0$.

Тогда на плоскости $\exists$ прямоугольник P, определяемый неравенствами $|x-a| < \delta_x$, $|y-b| < \delta_y$, имеющий центр симметрии в точке (a,b), такой, что в P ур-е $f(x,y)=0$ разрешимо относительно переменной y и тем самым задает ф-ю $y=\varphi(x)$, $x \in (a-\delta_x, a+\delta_x)$. При этом ф-я $y=\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $(a-\delta_x, a+\delta_x)$, а её производная может быть вычислена по формуле:

$$\varphi'(x) = -\left.\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}\right|_{y=\varphi(x)}$$

Задачи

④ $\sqrt{x+y-z} = e^{x-2y+z}$ $\quad M_0(2,3,4)$ $\quad (M_0(x_0, y_0, z_0))$

$$F(x,y,z) = \sqrt{x+y-z} - e^{x-2y+z}$$

$$F'_x = \frac{1}{2\sqrt{x+y-z}} - e^{x-2y+z} \qquad F'_x\Big|_{M_0} = \frac{1}{2\sqrt{2+3-4}} - e^{2-2\cdot3+4} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

$$F'_y = \frac{1}{2\sqrt{x+y-z}} + 2e^{x-2y+z} \qquad F'_y\Big|_{M_0} = \frac{1}{2\sqrt{2+3-4}} + 2e^{2-2\cdot3+4} = \frac{1}{2} + 2 = 2{,}5$$

$$F'_z = \frac{-1}{2\sqrt{x+y-z}} - e^{x-2y+z} \qquad F'_z\Big|_{M_0} = \frac{-1}{2\sqrt{2+3-4}} - e^{2-2\cdot3+4} = -\frac{1}{2} - 1 = -1{,}5$$

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №2
Билет №11

ИУ7-23Б
МАСЛОВА
МАРИНА
ДМИТРИЕВНА
РК №2
БИЛЕТ № 11

Ур-е касательной плоскости

$$F'_x\big|_{M_0}(x-x_0)+F'_y\big|_{M_0}(y-y_0)+F'_z\big|_{M_0}(z-z_0)=0$$

$$-0{,}5(x-2)+2{,}5(y-3)-1{,}5(z-4)=0 \quad |\times 2$$

$$-x+2+5y-15-3z+12=0$$

$$-x+5y-3z-1=0$$

$$x-5y+3z+1=0$$

Ур-е нормали

$$\frac{x-x_0}{F'_x|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z|_{M_0}}$$

$$\frac{x-2}{-0{,}5}=\frac{y-3}{2{,}5}=\frac{z-4}{-1{,}5} \quad |:2$$

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{-3}$$

Ответ: $x-5y+3z+1=0$; $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{-3}$

5. $z=x^3+y^3-15xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^3+y^3-15xy)'_x=3x^2-15y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(x^3+y^3-15xy)'_y=3y^2-15x$$

По необходимому условию существования экстремума:

$$\begin{cases}3x^2-15y=0\\3y^2-15x=0\end{cases};\quad \begin{cases}x^2-5y=0 & (1)\\y^2-5x=0 & (2)\end{cases}$$

Из (1): $y=\frac{x^2}{5}$

Подставляем во (2): $\left(\frac{x^2}{5}\right)^2-5x=0$

ИУ7-23Б
Маслова
Мария
Дмитриевна
РК №2
Билет № 11

$$\frac{x^4}{25} - 5x = 0$$

$$x\left(\frac{x^3}{25} - 5\right) = 0$$

$x = 0$ или $\frac{x^3}{25} - 5 = 0$

$$\frac{x^3}{25} = 5$$

$$x^3 = 125$$

$$x = 5$$

Для $x = 0$, $y = 0$ $\quad M_1(0;0)$

Для $x = 5$, $y = 5$ $\quad M_2(5,5)$

Частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 15y)'_x = 6x$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (3x^2 - 15y)'_y = -15$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (3y^2 - 15x)'_y = 6y$$

Проверяем точку $M_1(0;0)$

$A = 0$; $B = -15$; $C = 0$

$AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-15)^2 = -225 < 0$ – экстремума нет

Проверяем точку $M_2(5;5)$:

$A = 6 \cdot 5 = 30$; $B = -15$; $C = 30$

$AC - B^2 = 30 \cdot 30 - (-15)^2 = 900 - 225 = 675 > 0$

Т.к $AC - B^2 > 0$ и $A > 0 \Rightarrow M_2(5;5)$ – точка минимума

Ответ: $M_2(5;5)$ – точка минимума

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК№2
Билет№11

⑥ $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ при условии $xy = 2$

Ур-е связи: $xy - 2 = 0$

$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$

$\varphi(x,y) = xy - 2$

Ф-я Лагранжа:

$L = f(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x;y)$, где λ – множитель Лагранжа.

Тогда:

$$L = \frac{x^2}{4} + y^2 + \lambda(xy - 2)$$

Найдем частные производные ф-ии Лагранжа:

$$L'_x = \left(\frac{x^2}{4} + y^2 + \lambda(xy-2)\right)'_x = \frac{2x}{4} + \lambda y = \frac{x}{2} + \lambda y$$

$$L'_y = \left(\frac{x^2}{4} + y^2 + \lambda(xy-2)\right)'_y = 2y + \lambda x$$

Составим систему:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + \lambda y = 0 & (1) \\ 2y + \lambda x = 0 & (2) \\ xy - 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Из (3): $x = \frac{2}{y}$

Тогда $2y + \frac{2\lambda}{y} = 0 \quad | \cdot y$

$$2y^2 + 2\lambda = 0$$

$$y^2 + \lambda = 0$$

$$y^2 = -\lambda$$

$$y = \pm\sqrt{-\lambda}$$

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №2
Билет №11

Из (1): $\frac{x}{2} + \lambda y = 0$

$$2\lambda y = -x$$

$$\lambda = \frac{-x}{2y} \quad (*)$$

Подставляем (*) в (2):

$$2y + \frac{-x^2}{2y} = 0$$

$$2y - \frac{x^2}{2y} = 0$$

Из (3): $x = \frac{2}{y}$

$$2y - \frac{4}{2y^3} = 0 \quad | \times y^3$$

$$2y^4 - 2 = 0 \quad | : 2$$

$$y^4 = 1$$

$$y = \pm 1$$

Для $y = 1$; $x = 2$ $\quad M_1(2; 1) \quad \lambda = -1$

Для $y = -1$; $x = -2$ $\quad M_2(-2; -1) \quad \lambda = -1$

$\varphi'_x = (xy - 2)'_x = y \qquad L''_{xx} = \frac{1}{2} \qquad L''_{yy} = 2$

$\varphi'_y = (xy - 2)'_y = x \qquad L''_{xy} = L''_{yx} = \lambda$

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y & x \\ y & \frac{1}{2} & \lambda \\ x & \lambda & 2 \end{pmatrix}$$

Для точки $M_1(2, 1)$; $\lambda = -1$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \quad M_1 \text{ - точка минимума.}$$

ИУ7-23Б
Маслова
Марина
Дмитриевна
РК №2
Билет№11

Для точки $M_2(-2;-1)$ $\lambda = -1$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0 \quad M_2 - \text{точка минимума.}$$

Ответ: при условии $xy = 2$

$M_1(2,1)$ – точка минимума

$M_2(-2,-1)$ – точка минимума

Часть В

Задача

(8) $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 15$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad F(x,y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 15 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{6x+4y}{4\cancel{x}+6y} = 0$$

$6x + 4y = 0$

$4y = -6x$

$y = -\frac{3x}{2}$

$3x^2 + 4x\frac{-3x}{2} + 3\left(-\frac{3x}{2}\right)^2 = 15$

$3x^2 - 6x^2 + 3\frac{9x^2}{4} = 15 \quad |:3$

$x^2 - 2x^2 + \frac{9x^2}{4} = 5$

$4x^2 - 8x^2 + 9x^2 = 20$

$5x^2 = 20$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Для $x = 2;\ y = -3$ $\quad M_1(2,-3)$

Для $x = -2;\ y = 3$ $\quad M_2(-2,3)$

Ответ: $M_1(2;-3)$ и $M_2(-2;3)$ – наиболее удалённые от оси Ox.

Теория

(7). Пусть
1) Поверхность S задана ур-ем $F(x,y,z)=0$
2) a, b, c - коорд. т. $M \in S$
3) Ф-я $F(x,y,z)$ дифференцируема в т. M
4) ~~Пр~~ $\operatorname{grad} F(a,b,c) \neq 0$

Зададим кривую, лежащую на S и проходящую через т. M ур-ем:

$$x=\varphi(t);\quad y=\psi(t);\quad z=\chi(t)$$

$t=0$ соответствует точке M.

Т.е

$$\varphi(0)=a;\quad \psi(0)=b;\quad \chi(0)=c$$

Пусть в точке $t=0$ ф-ии $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ имеют производные $\neq 0$ одновременно

Тогда

$$F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \equiv 0$$

Тогда

$$\frac{\partial F(a,b,c)}{\partial x}\varphi'(0)+\frac{\partial(F(a,b,c)}{\partial y}\psi'(0)+\frac{\partial F(a}{}$$