Маслова М.Д. ИУ7-33Б Вариант №11

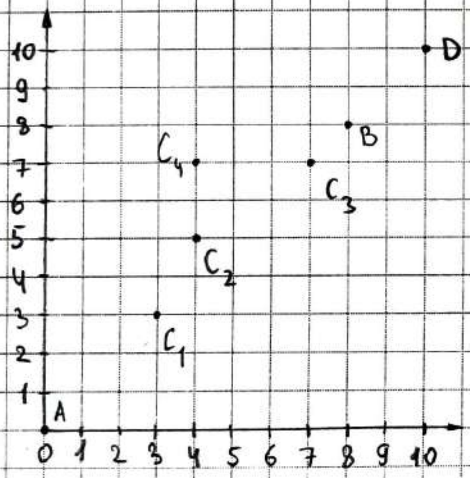
ДЗ по комбинаторике

Задача №1.

Найти число ломаных ведущих из точки $A(0,0)$ в точку $D(10,10)$, проходящих через точку B и хотя бы через одну из точек C_1, C_2, C_3, C_4. Вершины ломаной имеют целые неотрицательные координаты, каждое звено ломаной направлено либо вверх, либо вправо.

$$B(8,8);\ C_1(3,3);\ C_2(4,5);\ C_3(7,7);\ C_4(4,7).$$

Решение:



Пусть S - множество ломаных из условия.

S_i, $i=\overline{1,4}$ - множество ломаных, ведущих из точки A в точку D и проходящих через точку C_i и точку B.

Тогда:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

По формуле включений и исключений:

$$|S| = (|S_1| + |S_2| + |S_3| + |S_4|) - (|S_1 \cap S_2| + |S_1 \cap S_3| +$$
$$+ |S_1 \cap S_4| + |S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_4| + |S_3 \cap S_4|) +$$
$$+ (|S_1 \cap S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_2 \cap S_4| + |S_1 \cap S_3 \cap S_4| +$$
$$+ |S_2 \cap S_3 \cap S_4|) - |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|$$

~~Для нахождения величин входящих в формулу, воспользуемся формулой числа сочетаний без повторений~~

Число ломаных, ведущих из одной точки в другую, будем искать с помощью формулы числа сочетаний без повторений из n по m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

где n будет соответствовать числу всех звеньев ломаной, а m — числу горизонтальных звеньев (задавая положение горизонтальных звеньев мы задаем и положение вертикальных, при этом однозначно определяя ломаную).

Таким образом находим:

$$|S_1| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to B}| \cdot |S_{B\to D}| = C_{3+3}^{3} \cdot C_{8+8-3-3}^{8-3} \cdot C_{10+10-8-8}^{10-8} =$$

$$= C_6^3 \cdot C_{10}^5 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 252 \cdot 6 = 30240$$

$$|S_2| = |S_{A\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to B}| \cdot |S_{B\to D}| = C_{4+5}^{4} \cdot C_{8+8-4-5}^{8-4} \cdot C_4^2 =$$

$$= C_9^4 \cdot C_7^4 \cdot C_4^2 = 126 \cdot 35 \cdot 6 = 26460$$

$$|S_3| = |S_{A\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| = C_{7+7}^{7} \cdot C_{8+8-7-7}^{8-7} \cdot C_4^2 =$$

$$= C_{14}^7 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 3432 \cdot 2 \cdot 6 = 41184$$

$$|S_4| = |S_{A\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to B}| \cdot |S_{B\to D}| = C_{4+7}^{4} \cdot C_{8+8-4-7}^{8-4} \cdot C_4^2 =$$

$$= C_{11}^4 \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 = 330 \cdot 5 \cdot 6 = 9900$$

$$|S_1 \cap S_2| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$

$$= C_6^3 \cdot C_{4+5-3-3}^{4-3} \cdot C_7^4 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 3 \cdot 35 \cdot 6 = 12600$$

$$|S_1 \cap S_3| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$

$$= C_6^3 \cdot C_{7+7-3-3}^{7-3} \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 70 \cdot 2 \cdot 6 = 16800$$

$$|S_1 \cap S_4| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$$

$= C_6^3 \cdot C_{4+7-3-3}^{4-3} \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 = 3000$

$|S_2 \cap S_3| = |S_{A\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$

$= C_9^4 \cdot C_{7+7-4-5}^{7-4} \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 126 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 6 = 15120$

$|S_2 \cap S_4| = |S_{A\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$

$= C_9^4 \cdot C_{4+7-4-5}^{4-4} \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 = 126 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6 = 3780$

$|S_3 \cap S_4| = |S_{A\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$

$= C_{11}^4 \cdot C_{7+7-4-7}^{7-4} \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 330 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 3960$

$|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$

$= C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 6 = 7200$

$|S_1 \cap S_2 \cap S_4| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$

$= C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot C_2^0 \cdot C_5^4 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6 = 1800$

$|S_1 \cap S_3 \cap S_4| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$

$= C_6^3 \cdot C_5^1 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1200$

$|S_2 \cap S_3 \cap S_4| = |S_{A\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$

$= C_9^4 \cdot C_2^0 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 126 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1512$

$|S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4| = |S_{A\to C_1}| \cdot |S_{C_1\to C_2}| \cdot |S_{C_2\to C_4}| \cdot |S_{C_4\to C_3}| \cdot |S_{C_3\to B}| \cdot |S_{B\to D}| =$

$= C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot C_2^0 \cdot C_3^3 \cdot C_2^1 \cdot C_4^2 = 20 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 720$

Откуда:

$|S| = (30240 + 26460 + 41184 + 9900) - (12600 + 16800 +$

$+3000+15120+3780+3960)+(7200+1800+1200+1512)-$
$-720=63516$

Ответ: $|S|=63516$.

Задача №2

А) Решить однородное линейное рекуррентное соотношение:

$$x_{n+2}+a_1 x_{n+1}+a_2 x_n=0$$

при начальных условиях $x_1=b_1$, $x_2=b_2$

$a_1=1$, $a_2=-2$, $b_1=1$, $b_2=-3$

Б) Найти общее решение неоднородного линейного рекуррентного соотношения.

$$x_{n+2}+a_1 x_{n+1}+a_2 x_n=c_n$$

$a_1=1$; $a_2=-2$; $c_n=3n-1$

Решение:

А) $\begin{cases} x_{n+2}+x_{n+1}-2x_n=0 \\ x_1=1, \quad x_2=-3 \end{cases}$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$ – вещественные корни кратности $s=1$.

Тогда последовательности

$$\varphi_n^{(1)}=(-2)^n \quad и \quad \varphi_n^{(2)}=1^n$$

образуют базис в пространстве решений, а

Общее решение имеет вид:

$$X_n^{oo} = C_1(-2)^n + C_2$$

Подставляя $n=1$, $n=2$ и используя начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} 1 = -2C_1 + C_2 \\ -3 = 4C_1 + C_2 \end{cases}$$

Вычитая 2-ое ур-е из первого, получаем:

$$4 = -6C_1$$

$$C_1 = -\frac{2}{3}$$

Откуда $C_2 = 1 + 2C_1 = -\frac{1}{3}$

Частное решение однородного линейного ~~рекуррент~~ рекуррентного соотношения с заданными начальными условиями:

$$x_n = -\frac{2}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}$$

Б) $X_{n+2} + X_{n+1} - 2X_n = 3n - 1$

Для построения общего решения достаточно найти общее решение X_n^{oo} соответствующего однородного соотношения, что уже было сделано в пункте А, и подобрать наконец-нибудь частное решение $X_n^{чн}$, т.е.:

$$X_n^{он} = X_n^{oo} + X_n^{чн}$$

Найдем $X_n^{чн}$:

Правая часть

$C_n = 3n - 1 = 1^n P_1(n)$ – квазиполином первого типа

⇓

$\Rightarrow$ частное решение следует искать в виде:

$$x_n^{чн} = n^s \tilde{P}_1(n) \cdot 1^n,$$

где $\tilde{P}_1(n) = An + B$, $s = 1$ — кратность корня ~~...~~ $\lambda = 1$ характеристического ур-я.

То есть:
$$x_n^{чн} = n(An+B)$$

Подставляем в исходное соотношение

$$(n+2)(A(n+2)+B) + (n+1)(A(n+1)+B) - 2n(An+B) = 3n-1$$
$$A(n+2)^2 + B(n+2) + A(n+1)^2 + B(n+1) - 2An^2 - 2Bn = 3n-1$$
$$\cancel{An^2} + 4An + 4A + \cancel{Bn} + 2B + \cancel{An^2} + 2An + A + \cancel{Bn} + B - \cancel{2An^2} - \cancel{2Bn} = 3n-1$$
$$6An + 5A + 3B = 3n-1$$

$$\begin{cases} 6A = 3 \\ 5A + 3B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

Тогда $x_n^{чн} = n\left(\frac{1}{2}n - \frac{7}{6}\right)$ и общее решение неоднородного рекуррентного соотношения можно записать в виде:

$$x_n^{он} = x_n^{оо} + x_n^{чн} = C_1(-2)^n + C_2 + n\left(\frac{1}{2}n - \frac{7}{6}\right)$$

Ответ: А) $x_n = -\frac{2}{3}(-2)^n - \frac{1}{3}$

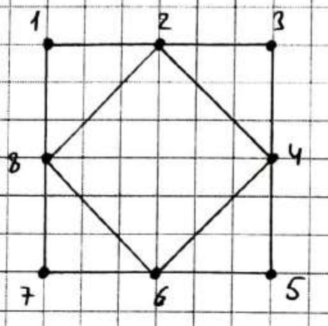
Б) $x_n^{он} = C_1(-2)^n + C_2 + n\left(\frac{1}{2}n - \frac{7}{6}\right)$

Задача №3.

Найти структурный перечень и общее число m-цветных раскрасок фигуры (неориентированного графа), изображенной на рисунке. $(m=2)$

Найти коэффициент при $r^k b^l$ $(k=4,\ l=4)$ и дать его содержательную интерпретацию.

Множество цветов есть $\{r, b\}$. $k+l=n$, где n – число вершин графа



Решение:

Стабилизатор:

$$St(1) = \{\varepsilon,\ (28)(37)(46)\}$$

Орбита:

$$Orb(1) = \{1, 3, 5, 7\}$$

Число автоморфизмов $= 8$.

$$H = \mathrm{Aut}\ G = \{\varepsilon,\ (1357)(2468),\ (1753)(2864),\ (15)(37)(26)(48),\ (28)(37)(46),\ (15)(24)(86),\ (13)(84)(75),\ (17)(26)(35)\}$$

Цикловой индекс:

$$P_H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = \frac{1}{8}\left(x_1^8 + 4x_1^2x_2^3 + x_2^4 + 2x_4^2\right)$$

Перечень неэквивалентных раскрасок (S - мн-во вершин графа, R - мн-во цветов)

$$I_{nvt}(R^S/\sim) = P_H(r+b,\ r^2+b^2,\ \ldots,\ r^8+b^8) =$$

$$= \frac{1}{8}\left[(r+b)^8 + 4(r+b)^2(r^2+b^2)^3 + (r^2+b^2)^4 + 2(r^4+b^4)^2\right] =$$

$$= b^8 + 2b^7r + 6b^6r^2 + 10b^5r^3 + 13b^4r^4 + 10b^3r^5 + 6b^2r^6 + 2br^7 + r^8$$

Общее число двухцветных раскрасок:

$$P_H(2, \ldots, 2) = \frac{1}{8}\left(2^8 + 4\cdot 2^2\cdot 2^3 + 2^4 + 2\cdot 2^2\right) = 51$$

Коэффициент при $r^4 b^4$ равен 13, то есть существует 13 неэквивалентных раскрасок, при которых каждым цветом выкрашено по 4 вершины.