Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по курсу «Моделирование»

Студент Маслова Марина Дмитриевна

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы) ____

Преподаватель Градов Владимир Михайлович

2022 г.

Тема: Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

Цель работы. Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

1 Исходные данные

1. ОДУ, не имеющее аналитического решения (формула (1.1)).

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^2 + u^2, \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

2 Описание алгоритмов

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) — дифференциальные уравнения (ДУ) с одной независимой переменной.

ДУ n-ого порядка описывается формулой (2.1). Заменой переменной ОДУ n-ого порядка сводится к системе ДУ первого порядка.

$$F(x, u, u', u'', ..., u^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

Задача данной лабораторной работы является задачей Коши, состоящей в поиске решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условия (формула (2.2)).

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x, u), \\ u(\xi) &= \eta. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В данной лабораторной работе рассматриваются следующие методы решения:

– метод Пикара;
– явный метод первого порядка точности (Эйлера);
– явный метод второго порядка точность (Рунге-Кутта).

2.1 Метод Пикара

Пусть поставлена задача Коши, выражющаяся формулой (2.3):

$$\begin{aligned} u'(x) &= \varphi(x, u(x)), \\ x_0 &\le x \le x_l \\ u(x_0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Проитегрировав выписанное уравнение получим формулу (2.4).

$$u(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t, u(t))dt. \tag{2.4}$$

Последовательные приближения метода пикара реализуются по схеме, описывающейся формулой (2.5).

$$y_i(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t, y_{i-1}(t))dt, \tag{2.5}$$

где $i = 1, 2, ...$ — номер итерации,

причем $u_0(t) = y_0$.

Для задачи данной лабораторной работы с помощью схемы, описывающейся формулой (2.5), получим следующие приближения (формулы (2.6-2.9)):

$$y_1(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y_0^2(t))dt = \int\limits_0^x t^2 dt = \frac{t^3}{3}\bigg|_0^x = \frac{x^3}{3}, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y_1^2(t))dt = \int\limits_0^x \left(t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2\right)dt = \\ &= \int\limits_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right)dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)\bigg|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$
\begin{aligned}
y_3(x) &= 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y_2^2(t))dt = \\
&= \int\limits_0^x \left(t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)^2\right)dt = \int\limits_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{63\cdot 3} + \frac{t^{14}}{63^2}\right)dt = \\
&= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535}\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
y_4(x) &= 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y_3^2(t))dt = \\
&= \int\limits_0^x \left(t^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}\right)^2\right)dt = \\
&= \Bigg(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{13t^{15}}{218295} + \frac{82t^{19}}{37328445} + \frac{662t^{23}}{10438212015} + \\
&+ \frac{4t^{27}}{3341878155} + \frac{t^{31}}{109876901975}\Bigg)\Bigg|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} + \\
&+ \frac{82x^{19}}{37328445} + \frac{662x^{23}}{10438212015} + \frac{4x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876902975}
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

2.2 Метод Эйлера

По методу Эйлера первого порядка точности значение функции в точке вычисляется по формуле (2.10).

$$
y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n). \tag{2.10}
$$

2.3 Метод Рунге-Кутта

По методу Рунге-Кутта второго порядка точности значение функции в точке вычисляется по формуле (2.11).

$$
y_{n+1} = y_n + h((1-\alpha)F_1 + \alpha F_2), \tag{2.11}
$$

где $F_1 = f(x_n, y_n)$,

$F_2 = f(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha} F_1)$,

$\alpha = \frac{1}{2}$ или $\alpha = 1$

3 Код программы

На листинге 3.1 представлена реализация метода Пикара. На листиге 3.2 представлено вычисление правой части уравнения. На листинге 3.3 представлена реализация метода Эйлера. На листинге 3.4 представлена реализация метода Рунге-Кутта.

Листинг 3.1 – Реализация метода Пикара

```
def picard1st(x):
    return x ** 3 / 3


def picard2nd(x):
    return x ** 3 / 3 + x ** 7 / 63


def picard3d(x):
    return (x ** 3 / 3 + x ** 7 / 63
            + 2 * x ** 11 / 2079  + x ** 15 / 59535)


def picard4th(x):
    return (x ** 3 / 3 + x ** 7 / 63
            + 2 * x ** 11 / 2079  + 13 * x ** 15 / 218295
            + 82 * x ** 19 / 37328445 + 662 * x ** 23 / 10438212015
            + 4 * x ** 27 / 3341878155 + x ** 31 / 109876902975)


def picard(xMax, step, picardFunc):
    xRange = np.arange(0, xMax + step / 2, step)
    res = np.zeros(len(xRange))

    for i, x in enumerate(xRange):
        res[i] = picardFunc(x)

    return res
```

Листинг 3.2 – Вычисление правой части уравнения

```
def function(x, y):
    return x ** 2 + y ** 2
```

Листинг 3.3 – Реализация метода Эйлера

```
def euler(xMax, step):
    xRange = np.arange(0, xMax + step / 2, step)
    res = np.zeros(len(xRange))
    y = 0

    for i, x in enumerate(xRange):
        res[i] = y
        y += step * function(x, y)

    return res
```

Листинг 3.4 – Реализация метода Рунге-Кутта

```

def rungeKutta2(xMax, step, alpha):
    xRange = np.arange(0, xMax + step / 2, step)
    res = np.zeros(len(xRange))
    y = 0
    k1 = 1 - alpha
    k2 = step / 2 / alpha

    for i, x in enumerate(xRange):
        res[i] = y
        curFunc = function(x, y)
        y += step * (k1 * curFunc + alpha *
                function(x + k2, y + k2 * curFunc))

    return res
```

4 Результат работы

На рисунке 4.1 представлена таблица результов вычисления значений функции, являющейся решением ОДУ. На рисунках 4.2-4.4 представлены графики функции-решения, вычисленной различными методами.

x	Picard 1st	Picard 2nd	Picard 3d	Picard 4th	Euler	Runge
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.05000	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004
0.10000	0.00033	0.00033	0.00033	0.00033	0.00033	0.00033
0.15000	0.00112	0.00113	0.00113	0.00113	0.00112	0.00113
0.20000	0.00267	0.00267	0.00267	0.00267	0.00266	0.00267
0.25000	0.00521	0.00521	0.00521	0.00521	0.00521	0.00521
0.30000	0.00900	0.00900	0.00900	0.00900	0.00900	0.00900
0.35000	0.01429	0.01430	0.01430	0.01430	0.01430	0.01430
0.40000	0.02133	0.02136	0.02136	0.02136	0.02135	0.02136
0.45000	0.03038	0.03043	0.03043	0.03043	0.03042	0.03043
0.50000	0.04167	0.04179	0.04179	0.04179	0.04178	0.04179
0.55000	0.05546	0.05570	0.05570	0.05570	0.05569	0.05570
0.60000	0.07200	0.07244	0.07245	0.07245	0.07243	0.07245
0.65000	0.09154	0.09232	0.09233	0.09233	0.09231	0.09233
0.70000	0.11433	0.11564	0.11566	0.11566	0.11563	0.11566
0.75000	0.14062	0.14274	0.14278	0.14279	0.14276	0.14279
0.80000	0.17067	0.17400	0.17408	0.17408	0.17405	0.17408
0.85000	0.20471	0.20980	0.20996	0.20996	0.20992	0.20996
0.90000	0.24300	0.25059	0.25090	0.25091	0.25086	0.25091
0.95000	0.28579	0.29688	0.29743	0.29745	0.29740	0.29745
1.00000	0.33333	0.34921	0.35019	0.35023	0.35017	0.35023
1.05000	0.38588	0.40821	0.40989	0.40998	0.40992	0.40999
1.10000	0.44367	0.47460	0.47741	0.47761	0.47753	0.47762
1.15000	0.50696	0.54918	0.55379	0.55417	0.55410	0.55420
1.20000	0.57600	0.63288	0.64028	0.64102	0.64096	0.64108
1.25000	0.65104	0.72673	0.73841	0.73979	0.73979	0.73992
1.30000	0.73233	0.83193	0.85003	0.85257	0.85271	0.85288
1.35000	0.82013	0.94984	0.97747	0.98205	0.98252	0.98272
1.40000	0.91467	1.08199	1.12356	1.13168	1.13287	1.13311
1.45000	1.01621	1.23012	1.29185	1.30602	1.30874	1.30904
1.50000	1.12500	1.39621	1.48677	1.51115	1.51705	1.51745
1.55000	1.24129	1.58247	1.71385	1.75523	1.76777	1.76829
1.60000	1.36533	1.79142	1.98002	2.04946	2.07572	2.07642
1.65000	1.49738	2.02588	2.29401	2.40932	2.46411	2.46510
1.70000	1.63767	2.28900	2.66677	2.85646	2.97133	2.97280
1.75000	1.78646	2.58432	3.11210	3.42159	3.66602	3.66834
1.80000	1.94400	2.91578	3.64736	4.14864	4.68410	4.68813
1.85000	2.11054	3.28777	4.29442	5.10121	6.33839	6.34652
1.90000	2.28633	3.70518	5.08081	6.37221	9.54567	9.56699
1.95000	2.47163	4.17340	6.04115	8.09860	18.64485	18.74724
2.00000	2.66667	4.69841	7.21899	10.48392	270.06841	317.56648

Рисунок 4.1 – Полученная таблица значений

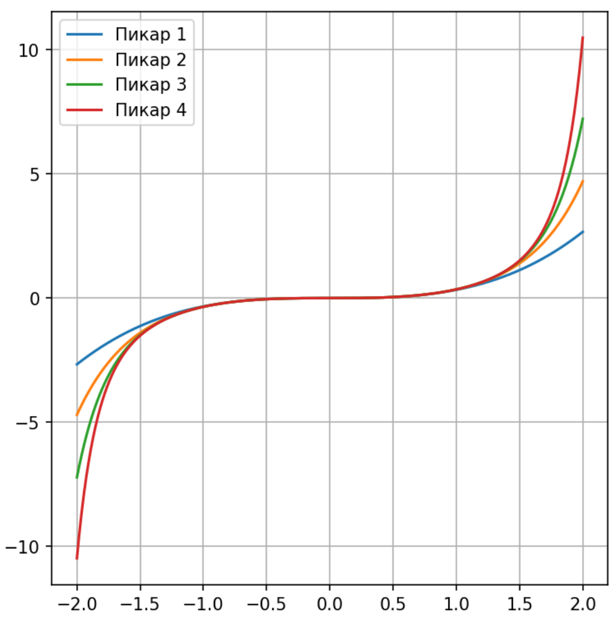

Рисунок 4.2 – График функции, вычисленной методом Пикара

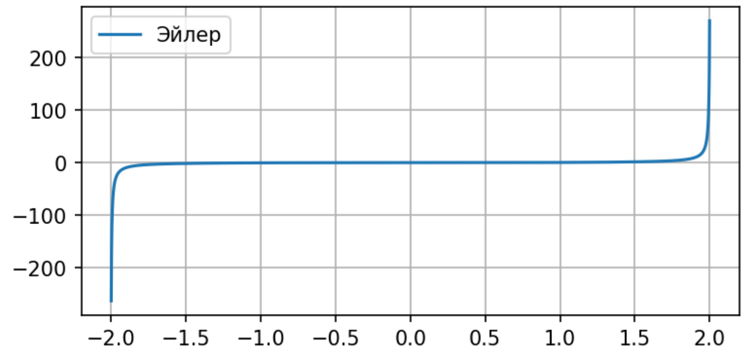

Рисунок 4.3 – График функции, вычисленной методом Эйлера

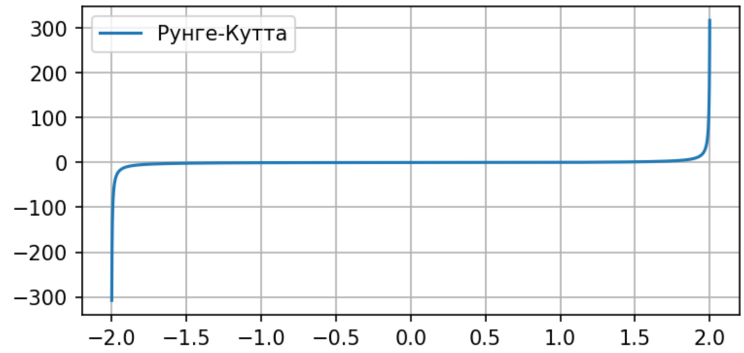

Рисунок 4.4 – График функции, вычисленной методом Рунге-Кутта

5 Контрольные вопросы

1) Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара, т. е. для КАЖДОГО приближения указать свои границы применимости. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Объяснить свой ответ.

Интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждого из приближений Пикара, можно найти из полученной таблицы решений (рисунок 4.1), а именно, i-ое приближение Пикара ($i = \overline{1,4}$) можно считать решением до тех пор, пока его значение совпадает с $(i+1)$-ым приближением Пикара с некоторой точностью (по условию до второй цифры после запятой). Таким образом:

– 1-ое приближение Пикара можно считать решением на промежутке $[0, 0.85]$;

– 2-ое приближение — на промежутке $[0, 1]$;

– 3-е приближение — на промежутке $[0, 1.30]$;

– для определения промежутка для 4-ого приближения Пикара необходимо найти 5-ое приближение, чего в данной работе не проводилось.

2) Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.

В численных методах для того, чтобы доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента, необходимо итерационно уменьшать шаг до нуля, вычисляя для каждого шага значение фукнции, до тех пор пока, уменьшение шага не перестанет приводить к изменению решения с некоторой точностью.

3) Каково значение решения уравнения в точке $x = 2$, т. е. привести значение $u(2)$.

≈ 318

4) Дайте оценку точки разрыва решения уравнения.

—

5) Покажите, что метод Пикара сходится к точному аналитическому решению уравнения:

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^2 + u, \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

Найдем аналитическое решение методом Бернулли. Пусть:

$$\begin{aligned} u &= ab, \\ a &= a(x), \\ b &= b(x). \end{aligned}$$

Тогда:

$$u' = a'b + b'a.$$

Откуда:

$$\begin{aligned} a'b + b'a &= x^2 + ab, \\ b(a' - a) + b'a &= x^2. \end{aligned}$$

Т. к. a можно выбрать произвольно:

$$\begin{cases} a' - a &= 0, \\ b'a &= x^2. \end{cases}$$

Найдем a:

$$\begin{aligned} a' - a &= 0, \\ \frac{da}{dx} &= a, \\ \frac{da}{a} &= dx, \\ \int \frac{da}{a} &= \int dx, \\ \log a &= x, \\ e^{\log a} &= e^x, \\ a &= e^x. \end{aligned}$$

Подставим a во второе уравнение системы и найдем b:

$$\begin{aligned} b'e^x &= x^2, \\ \frac{db}{dx}e^x &= x^2, \\ db &= x^2 e^{-x} dx, \\ \int db &= \int x^2 e^{-x} dx, \\ b &= \int x^2 e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Дважды интегрируем по частям:

$$b = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x} dx = \\ = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

Тогда:

$$u = ab = e^x(-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C) = -(x^2 + 2x + 2) + Ce^x.$$

По начальному условию:

$$0 = -2 + Ce^0,$$
$$C = 2.$$

Таким образом, аналитическое решение:

$$u = 2e^x - x^2 - 2x - 2. \tag{5.1}$$

Приближения Пикара:

$$y_1(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y_0(t))dt = \int\limits_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y_1(t))dt = \int\limits_0^x \left(t^2 + \frac{t^3}{3}\right)dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12},$$

$$y_3(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y_2(t))dt = \int\limits_0^x \left(t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60},$$

...

Для n-ого приближения:

$$y_n(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + y_{n-1}(t))dt = 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Устремим n к бесконечности:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^n}{n!}\right) =$$
$$= 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right).$$

При этом по формуле Маклорена:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

С учетом этого:

$$y(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2. \tag{5.2}$$

Таким образом, метод Пикара (формула (5.2)) сходится к аналитическому решинию (формула (5.1)).