Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по курсу «Моделирование»

Студент Маслова Марина Дмитриевна

Группа ИУ7-63Б

Оценка (баллы) ____________________

Преподаватель Градов Владимир Михайлович

2022 г.

Тема: Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

Цель работы. Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

1 Исходные данные

1. ОДУ, не имеющее аналитического решения (формула (1.1)).

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^2 + u^2, \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

2 Описание алгоритмов

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) — дифференциальные уравнения (ДУ) с одной независимой переменной.

ДУ n-ого порядка описывается формулой (2.1). Заменой переменной ОДУ n-ого порядка сводится к системе ДУ первого порядка.

$$F(x, u, u', u'', ..., u^{(n)}) = 0. \tag{2.1}$$

Задача данной лабораторной работы является задачей Коши, состоящей в поиске решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условия (формула (2.2)).

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x, u), \\ u(\xi) &= \eta. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В данной лабораторной работе рассматриваются следующие методы решения:

– метод Пикара;
– явный метод первого порядка точности (Эйлера);
– явный метод второго порядка точность (Рунге-Кутта).

2.1 Метод Пикара

Пусть поставлена задача Коши, выражающаяся формулой (2.3):

$$\begin{aligned} u'(x) &= \varphi(x, u(x)), \\ x_0 &\le x \le x_l \\ u(x_0) &= u_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Проитегрировав выписанное уравнение получим формулу (2.4).

$$u(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t, u(t))dt. \tag{2.4}$$

Последовательные приближения метода пикара реализуются по схеме, описывающейся формулой (2.5).

$$u_i(x) = u_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t, u_{i-1}(t))dt, \tag{2.5}$$

где $i = 1, 2, ...$ — номер итерации,

причем $u_0(t) = u_0$.

Для задачи данной лабораторной работы с помощью схемы, описывающейся формулой (2.5), получим следующие приближения (формулы (2.6-2.9)):

$$u_1(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + u_0^2(t))dt = \int\limits_0^x t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^x = \frac{x^3}{3}, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} u_2(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + u_1^2(t))dt = \int\limits_0^x \left(t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2\right)dt = \\ = \int\limits_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right)dt = \left.\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)\right|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$u_3(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + u_2^2(t))dt =$$

$$= \int\limits_0^x \left(t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)^2\right)dt = \int\limits_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{63 \cdot 3} + \frac{t^{14}}{63^2}\right)dt = \tag{2.8}$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535}\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

$$u_4(x) = 0 + \int\limits_0^x (t^2 + u_3^2(t))dt =$$

$$= \int\limits_0^x \left(t^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}\right)^2\right)dt =$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{13t^{15}}{218295} + \frac{82t^{19}}{37328445} + \frac{662t^{23}}{10438212015} + \right. \tag{2.9}$$

$$\left. + \frac{4t^{27}}{3341878155} + \frac{t^{31}}{109876901975}\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} +$$

$$+ \frac{82x^{19}}{37328445} + \frac{662x^{23}}{10438212015} + \frac{4x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876902975}$$

3 Код программы

На листинге 3.1 представлена реализация метода Пикара.

Листинг 3.1 – Реализация метода Пикара

```
def picard1st(x):
    return x ** 3 / 3


def picard2nd(x):
    return x ** 3 / 3 + x ** 7 / 63


def picard3d(x):
    return (x ** 3 / 3 + x ** 7 / 63
```

Листинг 3.1 (продолжение)

```
            + 2 * x ** 11 / 2079  + x ** 15 / 59535)


def picard4th(x):
    return (x ** 3 / 3 + x ** 7 / 63
            + 2 * x ** 11 / 2079  + 13 * x ** 15 / 218295
            + 82 * x ** 19 / 37328445 + 662 * x ** 23 / 10438212015
            + 4 * x ** 27 / 3341878155 + x ** 31 / 109876902975)

def picard(xMax, step, picardFunc):
    res = np.array([])

    for x in np.arange(0, xMax, step):
        res = np.append(res, picardFunc(x))

    return res
```

4 Результат работы

5 Контрольные вопросы

1) Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара, т.е. для КАЖДОГО приближения указать свои границы применимости. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Объяснить свой ответ.

ОТвет

2) Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.

ovтет

3) Каково значение решения уравнения в точке $x = 2$, т. е. привести значение $u(2)$.

ответ

4) Дайте оценку точки разрыва решения уравнения.

ответ

5) Покажите, что метод Пикара сходится к точному аналитическому решению уравнения:

уравнение

ответ